



13  
011622y.

---

---

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

**FACULTAD DE INGENIERIA  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**T E S I S**

**SIMULACION NUMERICA DE FLUJO DE AGUA BAJO  
CONDICIONES DE RIEGO POR GOTEO**

**MANUEL ZAVALA TREJO**

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE**

**MAESTRO EN INGENIERIA  
(HIDRAULICA)**

258353

**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. WALDO OJEDA BUSTAMANTE**

1998

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Waldo Ojeda Bustamante por su apoyo incondicional y dedicación en la dirección de este trabajo.

Al Dr. Carlos Fuentes Ruíz mi reconocimiento por el tiempo dedicado para transmitir sus conocimientos.

A mis sinodales:

M. I. Carlos Gutiérrez Ojeda.

Dr. Luis Rendón Pimentel.

Dr. José Roberto Mercado Escalante.

por sus sugerencias y comentarios.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico dado para la realización de mis estudios.

# ÍNDICE GENERAL

	Pág.
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1 Hipótesis	3
1.2 Objetivos	3
2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA	4
2.1 ECUACIONES FUNDAMENTALES	5
2.1.1 Principio general de conservación de masa	5
2.1.2 Ley de Darcy	7
2.1.3 Ecuación de Richards	8
2.1.3.1 Ecuación de Richards (forma de presión )	8
2.1.3.2 Ecuación de Richards (forma de contenido de agua)	8
2.1.4 Propiedades hidrodinámicas del suelo	9
2.1.5 Forma linealizada de la ecuación de Richards	11
2.2 EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS	12
2.2.1 Solución de elemento finito	13
2.2.2 Funciones base	13
2.2.3 Método de los residuos ponderados	14
2.2.4 Sistemas para la evaluación de la matriz de masa	16
2.2.5 Solución de sistemas de ecuaciones no lineales	17
2.2.5.1 Método de Newton-Raphson	17
2.2.5.2 Método de Picard	18
2.3 CONDICIONES DE FRONTERA	19
2.3.1 Condición de frontera tipo Dirichlet	19
2.3.2 Condición de frontera tipo Neumann	19
2.3.3 Condición de frontera tipo Robbins	20
2.4 SOLUCIONES CUASI-ANALÍTICAS	20
2.4.1 Solución para fuentes puntuales superficiales	20
2.4.2 Solución para fuentes lineales	23
3. ESQUEMA NUMÉRICO	26
3.1 DESARROLLO	26
3.1.1 Discretización espacial	26
3.1.1.1 Forma débil	27
3.1.1.2 Matrices locales	27

3.1.1.3 Matrices globales	30
3.1.2 Integración en el tiempo	31
3.1.3 Procedimiento iterativo	31
3.1.4 Flujos de frontera	32
3.1.5 Proceso de solución	33
3.2 INCORPORACIÓN DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA	33
3.2.1 Frontera superior	33
3.2.2 Fronteras laterales	34
3.2.3 Frontera inferior	35
3.3 MALLA DE ELEMENTOS FINITOS	36
3.3.1 Generación de la malla	37
4. VALIDACIÓN DEL ESQUEMA NUMÉRICO	42
4.1 Comparación para el caso de un fuente puntual superficial	42
4.2 Comparación para el caso de un sistema de riego por cintas subsuperficial	46
4.2.1 Estado estacionario	46
4.2.2 Estado transitorio	49
5. SIMULACIÓN DE CASOS PRÁCTICO DE INTERÉS AGRÍCOLA	54
5.1 Simulación de las condiciones generadas por un sistema de riego subsuperficial	54
5.2 Simulación de sistemas de riego por goteo por pulsos usando fuentes lineales	57
5.3 Simulación de fuentes lineales en suelos arenosos	59
5.4 Simulación de sistemas de riego subsuperficiales con evaporación en la superficie	64
6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	67
7. BIBLIOGRAFÍA	69
ANEXO A: Evaluación de los coeficientes de las matrices locales de rigidez, masa y gravedad	72
ANEXO B: Algoritmo para la solución numérica de la ecuación bidimensional de Richards	76

## LISTA DE FIGURAS

	Pág.
2.1 Volumen elemental representativo para el balance de masa.	5
2.2 Funciones de interpolación lineales para dos dimensiones.	14
2.3 Representación de una fuente puntual localizada en la superficie.	21
2.4 Representación de una fuente lineal subsuperficial.	23
3.1 Elemento triangular axisimétrico.	29
3.2 Puntos en el dominio de referencia para el cálculo de los coeficientes de la función de transporte.	38
3.3 Puntos en el dominio real para el cálculo de los coeficientes de la función de transporte.	39
3.4 Malla generada en el dominio de referencia.	40
3.5 Malla de elementos finitos generada.	41
4.1 Representación esquemática de una fuente puntual superficial.	43
4.2 Malla de elementos finitos utilizada para el suelo franco arenoso	44
4.3 Comparación de la distribución del potencial de presión (cm) para el suelo franco arenoso bajo una fuente puntual superficial ( $Q = 1 \text{ l.p.h.}$ ).	45
4.4 Comparación de la distribución del potencial de presión (cm) para el suelo "Pima" franco arcilloso bajo una fuente puntual superficial ( $Q = 1 \text{ l.p.h.}$ ).	46
4.5 Arreglo de fuentes lineales subsuperficiales para el suelo "Yolo" arcilloso.	47
4.6 Comparación de la distribución del potencial de presión para estado permanente para el suelo "Yolo" arcilloso, resultante de un sistema de riego por cintas subsuperficial localizado a 5 cm de la superficie.	48
4.7 Comparación de la distribución del potencial de presión para estado permanente para el suelo franco limoso, resultante de un sistema de riego por cintas subsuperficial localizado a 10 cm de la superficie.	49

4.8 Comparación de la distribución resultante de equipotenciales para un tiempo de 12 h con la solución cuasi-analítica y numérica para el suelo “Yolo” franco arcilloso.	50
4.9 Comparación de las curvas equipotenciales resultantes para un tiempo de 24 h para el suelo “Yolo” franco arcilloso.	51
4.10 Variación de error utilizando diferentes discretizaciones del dominio.	52
5.1 Distribución del contenido de humedad originado por un sistema de riego por cintas subsuperficial, para un gasto aplicado de $Q = 896 \text{ cm}^3/d \text{ cm}$ .	55
5.2 Variación del potencial de presión crítico para el sistema de riego por cintas localizado a 15 cm de la superficie.	56
5.3 Representación esquemática de la aplicación del flujo en los sistemas de riego por goteo continuo y por pulsos.	57
5.4 Distribución vertical del potencial de presión en el origen $x=0$ .	58
5.5 Distribución lateral del potencial de presión a 10 cm de la superficie.	59
5.6 Representación esquemática de dos fuentes lineales.	60
5.7 Distribución del potencial de presión (cm de agua) en el suelo arenoso “Pomona” para una aplicación del flujo a través de la línea principal (escenario 1).	61
5.8 Distribución del potencial de presión (cm de agua) en el suelo arenoso “Pomona” para el sistema de dos tuberías con relleno de arcilla (escenario 2).	62
5.9 Campo de velocidades originado por una fuente lineal localizada a 15 cm de la superficie en un medio arenoso homogéneo (escenario 1).	63
5.10 Campo de velocidades originado por el sistema de fuentes lineales con relleno de arcilla a 15 y 30 cm de la superficie (escenario 2).	63
5.11 Variación del volumen de agua infiltrado en la región considerada.	64
5.12 Comparación de la distribución de potencial de presión (cm) en la arena “Pomona” para los casos en que se considera flujo nulo en la superficie y para cuando se toma en cuenta la evaporación, para un sistema de riego por cintas localizado a 5 cm de la superficie	65

5.12 Comparación de la distribución de potencial de presión (cm) en la arena “Pomona” para los casos en que se considera flujo nulo en la superficie y para cuando se toma en cuenta la evaporación, para un sistema de riego por cintas localizado a 15 <i>cm</i> de la superficie	65
5.12 Comparación de la distribución de potencial de presión (cm) en la arena “Pomona” para los casos en que se considera flujo nulo en la superficie y para cuando se toma en cuenta la evaporación, para un sistema de riego por cintas localizado a 25 <i>cm</i> de la superficie	66
A.1 Elemento triangular.	72

## LISTA DE TABLAS

	<b>Pág.</b>
3.1 Coordenadas de los puntos utilizados para el cálculo de los coeficientes de la funciones de transporte.	39
3.2 Coeficientes de la función de transporte.	40
4.1 Parámetros hidráulicos utilizados en la validación de una fuente puntual superficial.	42
4.2 Características de las mallas de elementos finitos utilizadas en la simulación.	52
4.3 Valores del potencial de presión en los puntos de comparación.	53
5.1 Valores calculados del potencial de presión crítico a la mitad de separación entre cintas de riego para los gastos utilizados.	56
5.2 Variación del volumen de agua almacenado en la región considerada.	62

# CAPÍTULO I

## INTRODUCCIÓN

Los sistemas de riego por goteo permiten aplicaciones de volúmenes pequeños de agua en forma intermitente o continua directamente a la zona de raíces. Con este objetivo, el agua se conduce a través de una red de distribución, generalmente formada por tubos de PVC o polietileno, y su suministro es regulado por una serie de emisores que se encuentran distribuidos a lo largo de la tubería. Con esta práctica se pretende mantener condiciones de humedad óptimas para los cultivos, registrándose niveles bajos de tensión agua-suelo en la zona radicular, contribuyendo a un mejor desarrollo de las plantas y mejorando los rendimientos.

Las clases de emisores utilizados pueden ser goteros o fuentes lineales. Los primeros generalmente son utilizados en frutales y viñedos, mientras que los sistemas que cuentan con dispositivos lineales, conocidos como sistemas de riego por cintas o cintillas, se emplean en hortalizas y pueden ser superficiales o subsuperficiales.

La idea principal del riego localizado es suministrar los requerimientos hídricos del cultivo para satisfacer sus demandas evapotranspirativas, las cuales pueden ser estimadas a partir de las características propias de las plantas e involucrando los diferentes factores climatológicos o con la instalación de lisímetros en puntos determinados para conocer la distribución de humedad en la región considerada, con el objetivo de aplicar el riego en el momento oportuno.

Comparado con otros sistemas de irrigación, el riego por goteo es un método que además de permitir un uso eficiente de los recursos hídricos, presenta varias ventajas:

- I. Con la aplicación puntual del caudal en una pequeña zona del suelo, se logra mantener seca la mayor parte de la superficie, reduciendo las pérdidas por evaporación y eliminando el escurrimiento superficial. Además, se evita humedecer regiones alejadas de la zona de raíces con el consecuente ahorro de agua.
- II. Otra de las ventajas que se tiene con este método, es que tanto fertilizantes solubles como cualquier otro tipo de agroquímicos que se necesitan proporcionar a las plantas para lograr un adecuado desarrollo, pueden ser aplicados directamente a la zona radicular a través del sistema.

Cuando la aplicación del agua se realiza de manera frecuente, se desarrolla un bulbo de humedad, que bajo un diseño y operación adecuado del sistema debe coincidir aproximadamente con la región de desarrollo de las raíces, manteniéndose niveles de tensión

bajos y provocándose que las sales permanezcan disueltas en la zona radicular, teniéndose las mayores concentraciones en lugares alejados donde no afectan al cultivo.

Se debe considerar que una inadecuada aplicación de los agroquímicos puede ocasionar su movimiento fuera de la región de raíces, pudiéndose convertir en una fuente de contaminación para el medio ambiente, principalmente cuando el nivel freático es somero. Por lo tanto, es necesario realizar un estudio de los patrones de distribución de humedad en los suelos agrícolas (movimiento horizontal y vertical del agua).

La alta variabilidad espacial de las propiedades hidrodinámicas del suelo origina que el proceso para determinar las condiciones existentes en campo por medio de métodos experimentales sea difícil. Por ello, el desarrollo de un modelo numérico que permita simular diferentes escenarios de riego por goteo bajo características hidrodinámicas variables, se convierte en una herramienta necesaria para establecer de manera aproximada las condiciones que prevalecen en la zona bajo análisis.

El contar con un modelo con la capacidad de representar los procesos de infiltración y redistribución de agua en el suelo bajo diferentes condiciones de riego localizado, debe contribuir significativamente a una mayor comprensión de los diferentes procesos físicos que ocurren en los medios porosos.

El material que se presenta en este trabajo se distribuye de la siguiente manera:

En el capítulo II, se lleva a cabo una revisión bibliográfica y se deriva la ecuación general que rige el flujo de agua en el suelo, señalando las suposiciones consideradas con el propósito de tener presente los límites de aplicación. Además, se presentan diferentes soluciones analíticas simplificadas que se han obtenido para describir procesos de infiltración de agua en el suelo, así como generalidades del método del elemento finito.

En el capítulo III, se describe de manera detallada el procedimiento efectuado para desarrollar el modelo numérico, en el cual se utilizó el método de los elementos finitos para realizar la discretización espacial de la forma mixta de la ecuación de Richards y un esquema implícito de diferencias finitas para realizar la discretización temporal. Además, se desarrolla un algoritmo para generar automáticamente la malla de elementos finitos.

En el capítulo IV, con el propósito de constatar la confiabilidad del modelo numérico, se realiza una serie de comparaciones de la solución numérica con soluciones cuasi-analíticas para procesos de transferencia de agua originados por sistemas de riego por goteo superficiales y subsuperficiales.

En el capítulo V se aplica el modelo desarrollado para analizar diferentes casos de interés agrícola bajo diferentes condiciones de riego por goteo.

## 1.1 HIPÓTESIS

La hipótesis principal que se asume es la siguiente:

- I. Por medio de la solución numérica de la ecuación de Richards, es posible conocer de forma adecuada el proceso de transferencia de agua que se presenta en los medios porosos parcialmente saturados.

## 1.2 OBJETIVOS

Los objetivos que se plantean en la realización de este trabajo son:

- I. Desarrollar un modelo de simulación numérica para describir y analizar el proceso de transferencia de agua en escenarios de riego por goteo, utilizando el método de los elementos finitos para dar solución a la forma mixta de la ecuación de Richards.
- II. Validar el esquema numérico comparando los resultados obtenidos a partir de su aplicación, con aquellos derivados de soluciones cuasi-analíticas obtenidas para formas simplificadas de la ecuación de transferencia de agua.
- III. Aplicar el modelo a casos prácticos de interés agrícola para analizar algunos de los parámetros de un sistema de riego por goteo, tales como la disposición de las tuberías, el gasto y tiempo de aplicación del riego y finalmente, analizar alternativas potenciales que permitan mejorar este tipo de sistema de riego.

## CAPÍTULO II

### REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

El desarrollo de modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales parciales tienen como objetivo intentar describir los procesos que ocurren en la naturaleza, uno de los cuales es la transferencia de agua en el suelo. Este proceso es gobernado por la ecuación de Richards, debido a lo cual puede ser aplicada al estudio de problemas agrícolas.

La no linealidad de la ecuación de Richards dificulta su solución para la mayoría de los problemas reales. Aunque en la mayoría de las ocasiones su solución se obtiene usando técnicas numéricas basadas en esquemas de diferencias finitas y elementos finitos, existen algunos problemas bidimensionales y tridimensionales con simetría axial bajo diferentes escenarios de riego por goteo, para los que se han obtenido soluciones analíticas asumiendo una función exponencial de la conductividad hidráulica.

Aunque las soluciones analíticas permiten conocer el valor de las variables dependientes  $\theta$  y  $\psi$  en cualquier punto para todo tiempo, generalmente son obtenidas realizando una serie de hipótesis simplificadoras que limitan su aplicación para la mayor parte de los casos prácticos. Aún considerando las desventajas que presentan estas soluciones, se pueden usar para obtener una primera aproximación a diferentes problemas, considerando el grado de incertidumbre que se tienen en la determinación de los diferentes parámetros del suelo.

Por su parte, los modelos numéricos pueden llegar a manejar una mayor cantidad de condiciones de iniciales y de frontera de manera más flexible y cercana a las que se presentan en la naturaleza, permitiendo una descripción mas detallada del fenómeno en estudio.

En este capítulo se presentan los principios fundamentales mediante los cuales se deriva la ecuación que describe el flujo del agua en el suelo. Además, se hace una descripción de conceptos generales del método del elemento finito utilizado en el desarrollo del modelo numérico y finalmente, se incluyen algunas soluciones cuasi-analíticas desarrolladas por Raats (1971) y Warrick et al. (1979) para casos de procesos de infiltración tridimensionales con simetría axial y bidimensionales, bajo condiciones de riego por goteo superficial y subsuperficial.

## 2.1 ECUACIONES FUNDAMENTALES

### 2.1.1 Principio general de conservación de masa

La ecuación de conservación de masa es uno de los principios fundamentales mediante el cual se describe el fenómeno del flujo de agua en los medios porosos. Si se considera un volumen de control unitario de suelo como el mostrado en la fig.2.1, el principio de conservación de masa señala que:

La acumulación de masa en el volumen = masa que entra - masa que sale -  
masa extraída por las raíces de las plantas (2.1)

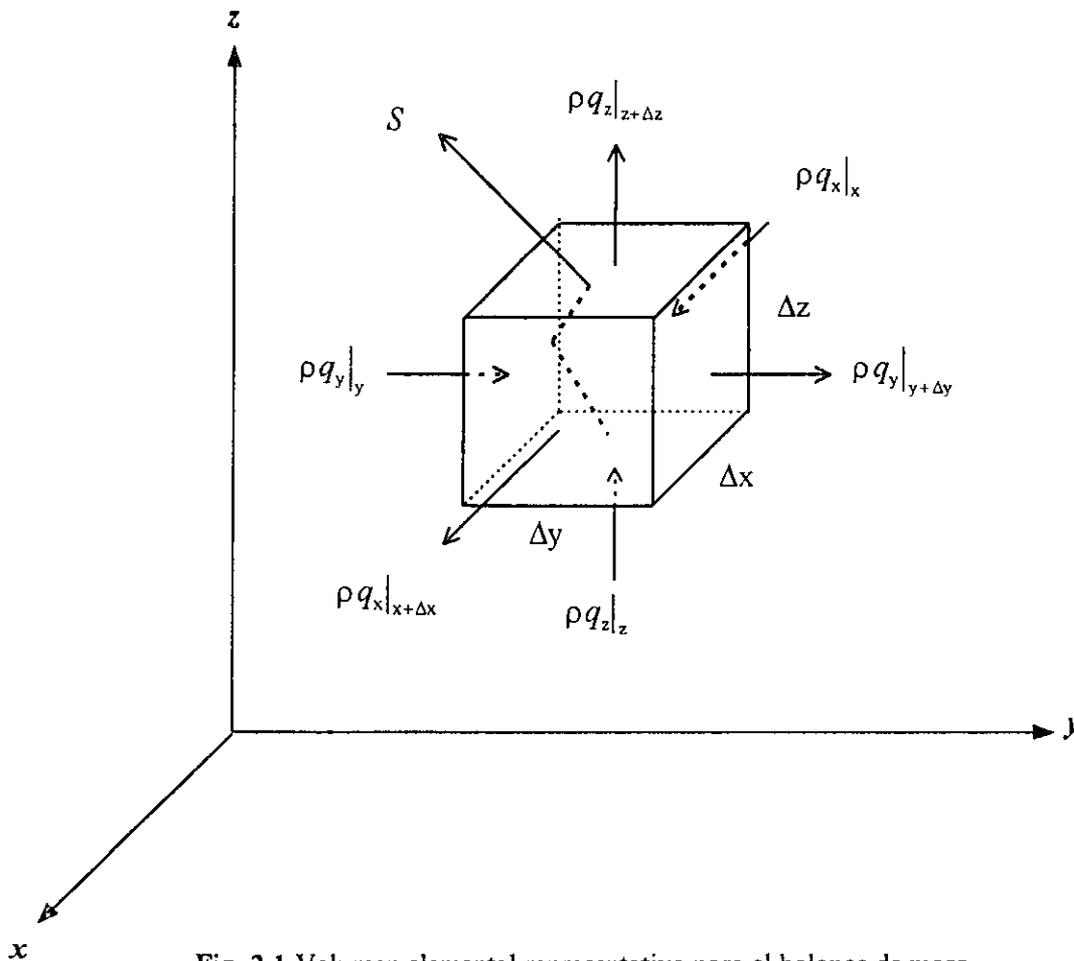


Fig. 2.1 Volumen elemental representativo para el balance de masa

El término de acumulación se obtiene considerando la masa de fluido en el volumen de control en los tiempos  $t$  y  $t+\Delta t$ .

$$\text{Masa acumulada} = \frac{\rho\theta\Delta x\Delta y\Delta z|_{t+\Delta t} - \rho\theta\Delta x\Delta y\Delta z|_t}{\Delta t} \quad (2.2)$$

donde  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta z$  son las dimensiones del volumen de control (L),  $\theta$  es el contenido volumétrico de agua ( $L^3 L^{-3}$ ) y  $\rho$  es la densidad del fluido ( $M L^{-3}$ ).

La masa que entra al volumen de control, considerando el promedio en el intervalo  $\Delta t$ , está dado por:

$$\text{Masa que entra} = (\rho q_x)\Delta y\Delta z|_x + (\rho q_y)\Delta x\Delta z|_y + (\rho q_z)\Delta x\Delta y|_z \quad (2.3)$$

donde  $\rho q_x$  es el flujo promedio sobre la primera cara del volumen de control en la dirección  $x$ , y de manera similar se tiene para las direcciones  $y$  y  $z$ .

Análogamente, el flujo de masa que sale del volumen de control es:

$$\text{Masa que sale} = (\rho q_x)\Delta y\Delta z|_{x+\Delta x} + (\rho q_y)\Delta x\Delta z|_{y+\Delta y} + (\rho q_z)\Delta x\Delta y|_{z+\Delta z} \quad (2.4)$$

La extracción de masa por las raíces de las plantas se denota como:

$$\text{Masa extraída por las raíces de las plantas} = S \quad (2.5)$$

Sustituyendo (2.2) - (2.5) en (2.1) y dividiendo la expresión por  $\Delta x\Delta y\Delta z$  se obtiene:

$$\frac{\rho\theta|_{t+\Delta t} - \rho\theta|_t}{\Delta t} = -\frac{(\rho q_x)|_{x+\Delta x} - (\rho q_x)|_x}{\Delta x} - \frac{(\rho q_y)|_{y+\Delta y} - (\rho q_y)|_y}{\Delta y} - \frac{(\rho q_z)|_{z+\Delta z} - (\rho q_z)|_z}{\Delta z} - S \quad (2.6)$$

Si se tiene un volumen infinitesimal donde  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  y  $\Delta t \rightarrow 0$  la ecuación (2.6) se transforma en:

$$\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{q} + S = 0 \quad (2.7)$$

donde  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  es el operador gradiente ( $L^{-1}$ ).

Si se asume que la compresibilidad del agua es despreciable, se obtiene la forma general de la ecuación de flujo de agua:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{q} + S = 0 \quad (2.8)$$

### 2.1.2 Ley de Darcy

Para complementar la ecuación que gobierna el flujo de agua, es necesario relacionar  $\bar{q}$  con la pérdida de energía en la dirección del movimiento. Para ello, Darcy (1856) realizó mediciones de flujo de agua  $\bar{q}$  a través de columnas de suelo de arena saturada de longitud  $L$ , sujetas a una diferencia de presión hidrostática y obtuvo una ley empírica que describe el proceso. Buckingham (1907) modificó la ley de Darcy para su aplicación a medios no saturados, la cual se puede expresar como:

$$\bar{q} = -K(\psi) \nabla(\psi + z) \quad (2.9)$$

donde  $\bar{q}$  es el vector de velocidad Darciana,  $K(\psi)$  es la conductividad hidráulica, la cual es una función del potencial de presión en suelos no saturados ( $L/T$ ),  $\psi$  es el potencial de presión ( $L$ ) y  $z$  es el potencial gravitacional ( $L$ ) que es igual a la elevación (eje  $z$  está orientado positivamente hacia arriba).

La ecuación (2.9) asume dos hipótesis principales:

- I. La conductividad hidráulica  $K$  de un suelo no saturado es función del contenido de agua o del potencial de presión.
- II. La fuerza que provoca el flujo de agua en un suelo rígido y no saturado donde el potencial de presión de aire es cero, es la suma de los potenciales de presión y de gravedad.

### 2.1.3 Ecuación de Richards

Sustituyendo la ley de Darcy (2.9) en la ecuación de conservación de masa (2.8) se obtiene la ecuación de Richards (1931):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\psi) \nabla(\psi + z)] - S \quad (2.10)$$

La ecuación (2.10) es conocida como la forma mixta de la ecuación de Richards y tiene dos variables dependientes  $\theta$  y  $\psi$ .

Se han obtenido otras dos formas de la ecuación de Richards para eliminar una de las dos variables dependientes.

#### 2.1.3.1 Ecuación de Richards (forma de presión)

Introduciendo la definición de capacidad específica  $C(\psi)$  como:

$$C(\psi) = \frac{d\theta}{d\psi} \quad (2.11)$$

y sustituyendo (2.11) en (2.10) se obtiene la ecuación de Richards basada en el potencial de presión:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\psi) \nabla(\psi + z)] - S \quad (2.12)$$

#### 2.1.3.2 Ecuación de Richards (forma del contenido de agua)

Considerando nulo el término de extracción de agua por las plantas ( $S$ ), la forma de la ecuación de Richards basada en el contenido de agua, que es una ecuación tipo Fokker-Planck, está dada por:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [D(\theta) \nabla \theta] + \frac{dK(\theta)}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (2.13)$$

donde  $D(\theta)$  es la difusividad del agua en el suelo ( $L^2 T^{-1}$ ) y se define como:

$$D(\theta) = K(\theta) \frac{d\psi}{d\theta} \quad (2.14)$$

Se debe tener presente que esta formulación no es aplicable en suelos con contenidos de humedad cercanos al de saturación, ya que para esta condición la difusividad no está definida.

#### 2.1.4 Propiedades hidrodinámicas del suelo

Para dar solución a la ecuación de flujo de agua de forma analítica o numérica es necesario contar con relaciones funcionales que representen las propiedades hidrodinámicas del suelo, las cuales deben relacionar el potencial de presión ( $\psi$ ) y la conductividad hidráulica ( $K$ ) con el contenido volumétrico de agua ( $\theta$ ).

Existen varios modelos que intentan representar las propiedades del suelo con parámetros empíricos. Tres de los más utilizados son:

I. El modelo exponencial para la conductividad propuesto por Gardner (1958):

$$K(\psi) = K_s e^{\alpha\psi} \quad (2.15)$$

donde  $K_s$  es la conductividad hidráulica a saturación ( $L T^{-1}$ ) y  $\alpha$  es un parámetro empírico ( $L^{-1}$ ).

Debido a su sencillez se ha utilizado este modelo para obtener la forma lineal de la ecuación de Richards y desarrollar soluciones analíticas para algunos problemas de riego por goteo superficial y subsuperficial.

II. Russo (1988) complementó el modelo obteniendo una relación para la característica de humedad del suelo  $\Theta(\psi)$ :

$$\Theta(\psi) = \left( \left( 1 - \frac{\alpha}{2} |\psi| \right) e^{\frac{\alpha}{2} |\psi|} \right)^{\frac{2}{m+2}} \quad (2.16)$$

con  $m = 1 - 1/n$  para  $n < 1$  (modelo de Mualem, 1976) y  $\Theta = (\theta - \theta_r) / (\theta_s - \theta_r)$  donde  $m$  y  $n$  son parámetros empíricos,  $\Theta$  es el grado de saturación,  $\theta_s$  es el contenido volumétrico de agua a saturación ( $L^3 L^{-3}$ ) y  $\theta_r$  es el contenido volumétrico residual ( $L^3 L^{-3}$ ).

III. Brooks y Corey (1964) propusieron las siguientes relaciones:

$$K(\theta) = K_s \theta^{2+2m} \quad (2.17)$$

$$\theta(\psi) = |\alpha \psi|^{-\frac{1}{m}} \quad (2.18)$$

IV. van Genuchten (1980) propuso las siguientes relaciones para  $\Theta(\psi)$  y  $K(\Theta)$  :

$$\Theta(\psi) = \left( 1 + |\alpha \psi|^{\frac{1}{1-n}} \right)^{-m} \quad (2.19)$$

$$K(\Theta) = K_s \Theta^{0.5} \left( 1 - \left( 1 - \Theta^{\frac{1}{m}} \right)^m \right)^2 \quad (2.20)$$

Es posible relacionar los diferentes modelos hidrodinámicos a través de la escala propuesta por Bouwer (1964):

$$\lambda_c = (K_w - K_s)^{-1} \int_{\theta_a}^{\theta_w} D(\theta) d\theta \quad (2.21)$$

donde  $\theta_a$  es el contenido volumétrico inicial del agua y  $\theta_w$  para el caso de un sistema de riego por goteo, es el contenido volumétrico de agua en el punto de aplicación de la fuente.

Para el modelo de conductividad hidráulica exponencial (2.15), se puede comprobar que la escala de Bower es  $\lambda_c = 1/\alpha$ . Para otras funciones de la conductividad, se obtienen resultados equivalentes a cálculos basados en el caso exponencial con:

$$\alpha = 1/\lambda_c \quad (2.22)$$

Warrick y Broadbridge (1992), presentan diferentes resultados relacionando los modelos de conductividad hidráulica de Gardner y van Genuchten.

### 2.1.5 Forma linealizada de la ecuación de Richards

Debido a su naturaleza no lineal, la ecuación (2.10) sólo puede ser resuelta utilizando modelos numéricos. Una alternativa para obtener una solución aproximada es aplicar una técnica de linealización. Para ello, se define el potencial de flujo haciendo uso de la transformación integral de Kirchoff (1894):

$$\phi = \int_{-\infty}^{\psi} K(\bar{\psi}) d\bar{\psi} \quad (2.23)$$

Si se toma la función de conductividad hidráulica del modelo propuesto por Gardner (1958) y se integra (2.23), se obtiene:

$$\phi = \frac{K(\psi)}{\alpha} \quad (2.24)$$

Sustituyendo (2.24) en (2.10) y considerando nulo el término de extracción de agua por las plantas ( $S$ ) se obtiene:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla^2 \phi + \alpha \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.25)$$

Para el régimen transitorio se supone que  $\theta$  es una función lineal de  $\phi$  que satisface:

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{\alpha}{k} \quad (2.26)$$

donde  $\frac{\alpha}{k}$  es una constante.

Sustituyendo (2.24) en (2.26) se obtiene:

$$k = \frac{dK}{d\theta} \quad (2.27)$$

Aplicando la regla de la cadena a (2.23) y sustituyendo en (2.25) se obtiene la forma linealizada de la ecuación de Richards.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left( \frac{k}{\alpha} \right) \nabla^2 \phi + k \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.28)$$

La suposición realizada de la variación lineal de la conductividad con respecto al contenido volumétrico de agua provoca que la forma linealizada de la ecuación de Richards para casos transitorios sea limitada, particularmente cuando se tienen grandes variaciones del contenido de agua en el suelo. Sin embargo, puede ser útil para validar esquemas numéricos.

## 2.2 EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Cuando no es posible encontrar la solución analítica de una ecuación diferencial parcial sujeta a determinadas condiciones iniciales y de frontera, es necesario utilizar métodos numéricos que permitan resolver el problema considerado.

A diferencia de lo que sucede con las soluciones analíticas, las diferentes técnicas numéricas únicamente permiten conocer el valor de la solución en determinados puntos del dominio de interés. Para ello, el dominio es dividido en pequeñas regiones (subregiones) que tienen una geometría relativamente simple. En los esquemas de diferencias finitas tales regiones son rectángulos. Por su parte, en los esquemas más tradicionales de elemento finito las regiones son triángulos. En las esquinas de estos triángulos, llamados nodos, es donde se obtiene el valor de las variables dependientes de la ecuación diferencial.

A diferencia de lo que ocurre en los esquemas de diferencias finitas donde la discretización es aplicada en un punto, en el método del elemento finito las ecuaciones discretizadas se aplican sobre una región y se obtienen soluciones globales.

Las mayores ventajas que presenta la aplicación del método de los elementos finitos son el tratamiento de dominios irregulares y el fácil manejo e incorporación de las condiciones de frontera, sobretodo cuando se tienen casos de fronteras móviles. Esto se debe a que las condiciones de frontera de segundo y tercer tipo son incorporadas al esquema a través de integrales de línea.

### 2.2.1 Solución de elemento finito

Cualquier ecuación diferencial parcial puede escribirse de la forma:

$$L(f(x, y, z)) = F(x, y, z) \quad (2.29)$$

donde  $L$  es el operador diferencial y  $F$  es una función conocida.

Al aplicar el método de los elementos finitos, la variable dependiente  $f$  de la ecuación (2.29) se aproxima por una serie finita de la forma:

$$f(x, y, z, t) = \hat{f}(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x, y, z) a_j(t) \quad (2.30)$$

donde  $\varphi_j(x, y, z)$  son las funciones base elegidas, los coeficientes  $a_j(t)$  dependientes del tiempo, representan la solución en los puntos especificados dentro del dominio y  $n$  es el número total de nodos.

### 2.2.2 Funciones base

Las funciones base son también llamadas funciones de interpolación, dado que son utilizadas para definir la solución aproximada en cualquier punto dentro del elemento. Existen varios tipos de funciones base entre los que se encuentran polinomios cúbicos, cuadráticos, lineales, Hermitianos y Lagrangianos, cada uno de los cuales son utilizados dependiendo del grado de precisión requerido en la interpolación. Para el cálculo de las matrices locales en casos unidimensionales y bidimensionales, se tienen funciones de interpolación simples que permiten desarrollar métodos analíticos de integración. Para elementos bidimensionales, es común el uso de triángulos lineales como funciones de interpolación (fig.2.2).

Este tipo de funciones puede expresarse de la siguiente forma:

$$\varphi_j = \frac{1}{2A^{(e)}} (a_j + b_j x + c_j y) \quad (2.31)$$

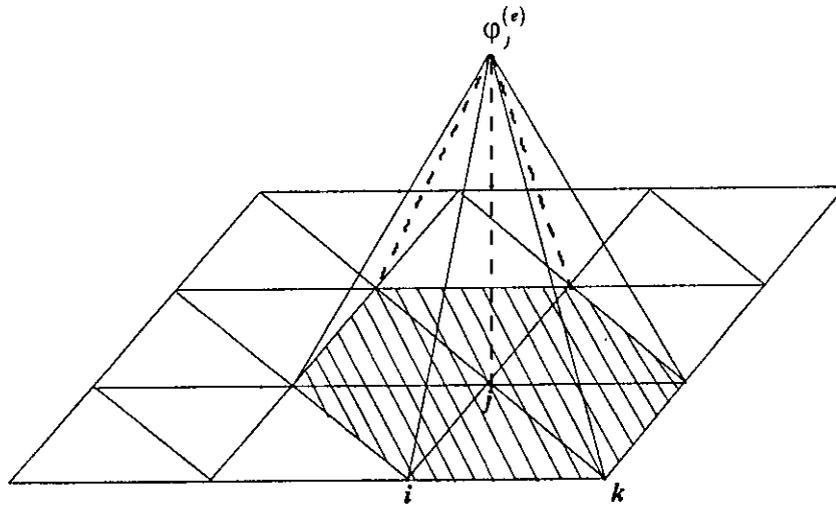


Fig. 2.2 Funciones de interpolación lineales para dos dimensiones

Las funciones base tienen las siguientes propiedades:

1.  $\varphi_j$  vale uno en el nodo  $j$  y cero en los otros dos nodos.
2.  $\varphi_j$  debe de ser continua en el dominio.

El valor de  $\hat{f}$  dentro de cualquier elemento  $e$ ,  $\hat{f}^{(e)}$  está dado por:

$$\hat{f}^{(e)}(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^{n_e} \varphi_j^{(e)}(x, y, z) a_j(t) \quad (2.32)$$

donde  $\varphi_j^{(e)}$  son las funciones de interpolación locales (una función de interpolación por nodo), los coeficientes  $a_j$  son los valores de la variable en cada nodo y  $n_e$  es el número de nodos de cada elemento.

### 2.2.3 Método de los residuos ponderados

Cuando se sustituye la solución de elemento finito en (2.29) la ecuación diferencial no se satisface exactamente, dado que se utiliza un número finito de funciones base en (2.31), con lo que se produce un residual que se puede expresar como:

$$R(x, y, z) = L(\hat{f}(x, y, z)) - F(x, y, z) \neq 0 \quad (2.33)$$

Debido a que el error varia de punto a punto dentro del dominio, éste puede ser minimizado con el requisito de que  $R$  sea ortogonal a un grupo de funciones de peso mutuamente independientes.

De la definición de funciones ortogonales se tiene:

$$\int_{\Omega} R(x, y, z) u_i(x, y, z) d\Omega = 0 \quad (2.34)$$

Con este procedimiento, se pretende lograr que el promedio pesado de todos los residuales en los nodos sea igual a cero.

Se tienen varios métodos para la elección de las funciones de peso a utilizar en (2.34) entre los que se encuentran:

*Método de los subdominios:* en este método, el dominio considerado es dividido en  $s$  subdominios  $\Omega_s$  y las funciones de peso  $u_i$  valen uno en el subdominio y cero en cualquier punto fuera de él.

*Método de colocación:* se considera un caso especial del método de los subdominios y se utiliza cuando el subdominio elegido es muy pequeño.

$$u_i(x, y, z) = \delta(x - x_s, y - y_s, z - z_s) \quad (2.35)$$

El método conduce a la evaluación del residual en los puntos de colocación, pero es muy sensible a la manera en que estos puntos son seleccionados.

Para problemas no lineales, un caso especial de este método es conocido como colocación ortogonal, donde las funciones de base elegidas son polinomios ortogonales y los puntos de colocación son las raíces de uno de los polinomios.

*Método de mínimos cuadrados:* Para este método las funciones de peso son:

$$u_i = \frac{\partial R}{\partial \alpha_i} \quad (2.36)$$

esto es equivalente a minimizar:

$$\int_{\Omega} R^2(x,y,z) d\Omega = 0 \quad (2.37)$$

con respecto a los parámetro de prueba  $\alpha_i$ . La aplicación de este método conduce a expresiones complicadas y generalmente es utilizado para análisis de error.

*Método de Galerkin:* es el método comúnmente más utilizado y consiste en tomar las funciones de peso  $u_i$  iguales a las funciones base  $\varphi_j(x,y,z)$  empleadas para definir la solución aproximada  $\hat{f}^{(e)}$ .

#### 2.2.4 Sistemas para la evaluación de la matriz de masa

Cuando el método de elemento finito es aplicado a casos en estado transitorio, es necesario evaluar la solución aproximada de la derivada temporal en el elemento. Para realizarlo existen dos clases de formulaciones, el sistema consistente y el sistema de masa concentrado.

*Sistema consistente:* En esta formulación, las funciones de interpolación utilizadas son las mismas que se usan para obtener la solución aproximada de la variable dependiente dentro del elemento. Debido a ello, la variación de la derivada temporal en un nodo depende de la variación de la variable en los nodos que lo rodean.

Se ha demostrado que la solución de elemento finito presenta oscilaciones cuando se utiliza este tipo de sistema (Neuman, 1973).

*Sistema de masa concentrado:* en este sistema, la variación de la derivada temporal depende solo de la variación de la variable en el nodo.

Las funciones de interpolación que se utilizan son:

$$\varphi_j^{(e)} \varphi_i^{(e)} = \begin{cases} \frac{1}{n_e} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.38)$$

Cuando el sistema de masa concentrado es aplicado a problemas de flujo de agua a través de medios porosos, se obtiene una mayor estabilidad y más rápida convergencia de la solución.

### 2.2.5 Solución de sistemas de ecuaciones no lineales

Cuando el método de Galerkin se aplica a ecuaciones diferenciales parciales no lineales, se genera un sistema de ecuaciones que se puede expresar como:

$$[A(f^{k-1})]\{f^k\} = [B] \quad (2.39)$$

donde  $A(f^{k-1})$  representa la matriz de coeficientes formada con la solución del paso de tiempo anterior.

Para obtener la solución en cada nuevo paso de tiempo, es necesario desarrollar un procedimiento de linealización. El proceso de solución comienza especificando un valor inicial de la variable dependiente de la ecuación diferencial parcial. Cuando éste se utiliza para evaluar las coeficientes del sistema global, se genera un residual si el valor estimado no es el correcto.

$$[R]^k = [B] - [A(f^{k-1})]\{f^k\} \quad (2.40)$$

Para calcular el valor correcto de la variable en el intervalo de tiempo, es necesario realizar un procedimiento iterativo hasta que el máximo valor del residual en un punto sea menor que una tolerancia fijada.

Dos de los métodos iterativos más utilizados para realizar este procedimiento, son los métodos de Newton-Raphson y el de Picard.

#### 2.2.5.1 Método de Newton-Raphson

En este método, se realiza una expansión del residual en serie de Taylor, despreciando los términos no lineales e igualándolo a cero.

$$R^{m+1} = R^m + \left. \frac{\partial R}{\partial f} \right|^m \Delta f^{m+1} = 0 \quad (2.41)$$

donde  $m$  indica el nivel de iteración en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  y  $\Delta f^{m+1} = f^{m+1} - f^m$ .

Una vez que se obtiene el valor de  $\Delta f^{m+1}$  el valor de la variable  $f^{m+1}$  es calculado haciendo uso de la expresión:

$$f^{m+1} = f^m + \Delta f^{m+1} \quad (2.42)$$

La mayor ventaja que se tiene en la utilización del método de Newton-Raphson es que su grado de convergencia es cuadrático. Sin embargo, presenta las siguientes desventajas :

- I. El proceso numérico para realizar la evaluación de los coeficientes del jacobiano  $\partial R/\partial f$  es complejo y laborioso, sobretodo cuando se tienen términos no lineales.
- II. La convergencia del método depende de la estimación del valor inicial, valores muy lejanos al correcto puede ocasionar la divergencia del método.

#### 2.2.5.2 Método de Picard

El método tradicional de Picard consiste simplemente en una estimación secuencial de la incógnita  $f$ .

Debido a que su grado de convergencia es lineal, requiere de un mayor número de iteraciones que el método de Newton-Raphson, pero de un tiempo de cómputo menor por iteración.

El proceso iterativo para el esquema (2.39) se puede describir en los siguientes pasos:

1. El procedimiento comienza realizando una estimación del valor inicial de la variable.

$$f_{t+\Delta t} = f_t$$

2. Se evalúan los coeficientes del sistema de ecuaciones (ec. 2.39).

3. Se resuelve el sistema de ecuaciones.
4. Se evalúa el valor del residual (ec. 2.40).
5. Se calcula el valor del nuevo estimador de la variable para la siguiente iteración.

$$\{f\}^m = (1 - \alpha)\{f\}^{m-1} + \alpha\{f\}_{(calc)}^m$$

donde  $\alpha$  es un factor de relajación.

6. Se repiten los pasos (2) a (5) hasta que la máximo valor del residuo es menor que el grado de convergencia fijado.

### 2.3 Condiciones de frontera

Para resolver cualquier ecuación diferencial es necesario conocer el valor de la incógnita en algunos puntos sobre la frontera del dominio de solución, a esto se le conoce con el nombre de condiciones de frontera. Los tipos de condiciones de frontera son la de Dirichlet (primer tipo), de Neumann (segundo tipo) y de Robbins (tercer tipo).

#### 2.3.1 Condición de frontera tipo Dirichlet

Este tipo de condición de frontera se tiene cuando se conoce el valor de la variable dependiente de la ecuación diferencial en todo tiempo. Este caso se presenta cuando el valor del potencial es un dato conocido. Para un caso bidimensional se puede expresar como:

$$\psi = g(x, z, t) \tag{2.43}$$

donde  $g$  representa el valor conocido del potencial en puntos determinados sobre la frontera en cualquier tiempo. Cuando  $g$  tiene un valor de cero, se le denomina condición de frontera tipo Dirichlet homogénea.

#### 2.3.2 Condición de frontera tipo Neumann

Se presenta cuando el valor del gradiente de la variable dependiente es conocido. En este caso,  $q$  es una función del tiempo y espacio a lo largo de un segmento de la frontera.

$$K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial n} = q(x, z, t) \quad (2.44)$$

donde  $\frac{\partial}{\partial n}$  es la derivada en la dirección normal al dominio de solución.

Condiciones impermeables o de no flujo en las fronteras, son un caso especial de este tipo de condición.

### 2.3.3 Condición de frontera tipo Robbins

Una condición de frontera tipo Robbins se presenta cuando la derivada normal de la variable dependiente en la frontera, es una función lineal de la misma variable. Es común en problemas de conducción de calor, donde el flujo de calor (radiación) a través de la frontera de un cuerpo sólido está relacionado con la temperatura del cuerpo en la frontera. Para problemas de flujo de agua se puede expresar como:

$$K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial n} + \beta \psi = g(x, z, t) \quad (2.45)$$

## 2.4 SOLUCIONES CUASI-ANALÍTICAS

### 2.4.1 Solución para fuentes puntuales superficiales

Raats (1971), obtuvo la solución que describe el movimiento de agua en suelos homogéneos originado por una fuente puntual superficial para estado permanente (fig. 2.3). Este proceso es considerado tridimensional con simetría axial.

La forma linealizada de la ecuación de Richards en coordenadas cilíndricas para el caso permanente está dada por:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (2.46)$$

donde  $r$  es la coordenada radial ( $L$ ) y  $z$  es la coordenada vertical orientada positivamente hacia abajo ( $L$ ).

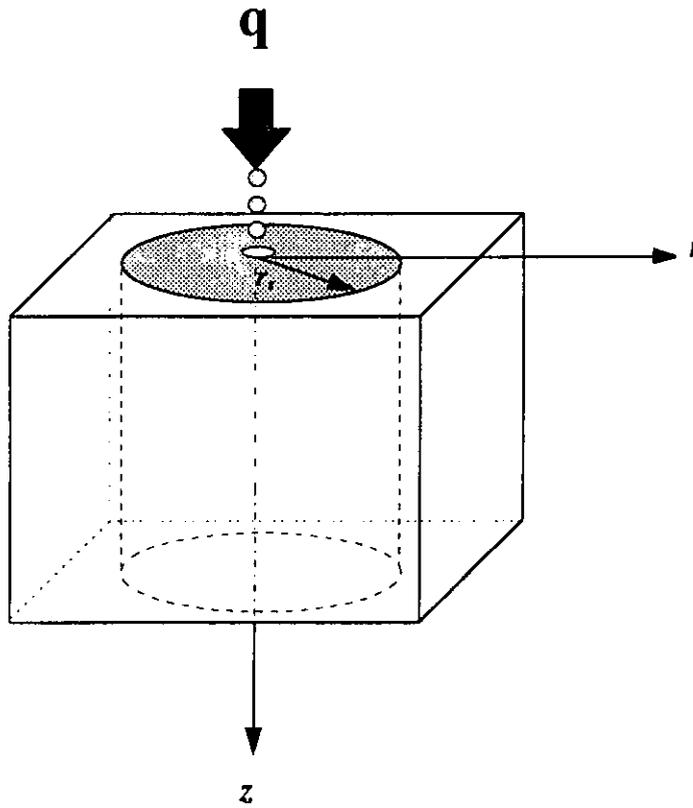


Fig. 2.3 Representación de una fuente puntual localizada en la superficie

Además se utilizan las siguientes escalas adimensionales (Philip, 1968):

$$R = \frac{\alpha r}{2} \quad (2.47)$$

$$Z = \frac{\alpha z}{2} \quad (2.48)$$

$$\Phi = \frac{8\pi\phi}{\alpha q} \quad (2.49)$$

$$\rho = (Z^2 + R^2)^{1/2} \quad (2.50)$$

donde  $q$  es el gasto aplicado a través del gotero superficial ( $L^3 T^{-1}$ ).

Si se sustituyen (2.47) - (2.50) en (2.46) se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \quad (2.51)$$

Las condiciones de frontera consideradas son:

$$\Phi = 0 \quad \text{para} \quad (R^2 + Z^2)^{1/2} \quad (2.52)$$

$$V = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial Z} + \Phi = 0 \quad \text{en} \quad Z=0 \quad (2.53)$$

donde  $V$  representa el flujo volumétrico en la dirección vertical.

Adicionalmente, el punto donde el gotero se encuentra localizado ( $R=0, Z=0$ ) es considerado como una singularidad del problema y se considera un punto saturado ( $\psi = 0$ ).

Resolviendo (2.51) sujeta a las condiciones (2.52) y (2.53), se obtiene la solución para una fuente puntual superficial en estado permanente:

$$\Phi(R, Z) = 2 \left[ \frac{e^{(Z-\rho)}}{\rho} - e^{2Z} E_i(Z + \rho) \right] \quad (2.54)$$

donde  $E_i$  es una integral exponencial dada por:

$$E_i(X) = \int_x^\infty \frac{e^{-\bar{x}}}{\bar{x}} d\bar{x} \quad (2.55)$$

La función  $E_i$  es muy utilizada en problemas de abatimiento de niveles de agua subterránea y es fácilmente evaluada utilizando las relaciones 5.1.53 y 5.1.54 dadas por Abramowitz y Stegun (1964).

Para obtener el valor del potencial de presión se utiliza la expresión:

$$\psi = \frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{\alpha^2 q \Phi}{8 \pi} \right) \quad (2.56)$$

## 2.4.2 Solución para fuentes lineales

Utilizando la ecuación linealizada de Richards (2.28), Warrick y Lomen (1978) encontraron una solución para el problema bidimensional de fuentes lineales paralelas superficiales y subsuperficiales (fig. 2.4).

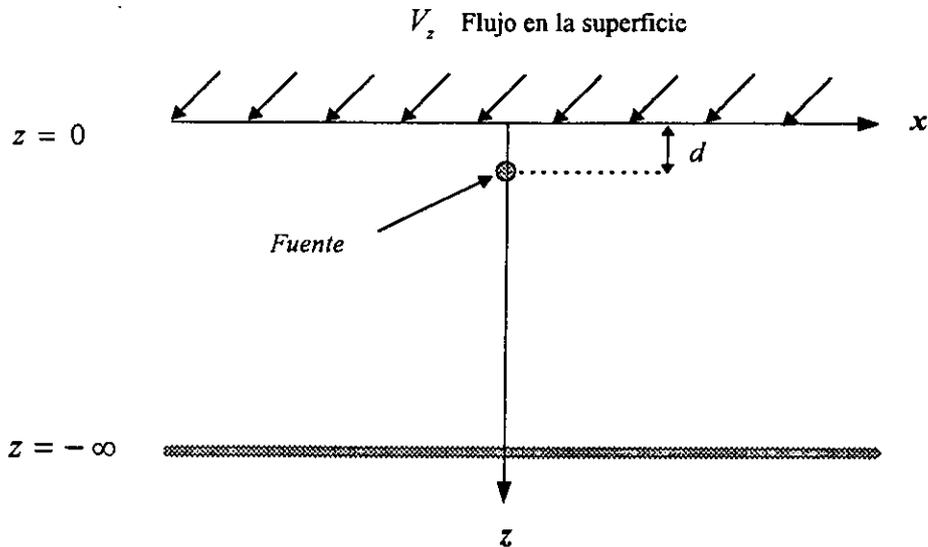


Fig. 2.4 Representación de una fuente lineal subsuperficial

El problema está sujeto a las siguientes condiciones de frontera:

$$V_z = -\left(\frac{\alpha m}{2}\right)\phi \quad \text{para } x \geq 0, z = 0 \quad (2.57)$$

$$\phi \rightarrow 0 \quad \text{para } x \rightarrow \infty, z \rightarrow -\infty \quad (2.58)$$

donde  $V_z$  es el flujo vertical en la superficie ( $LT^{-1}$ ) y  $m$  es una constante mayor o igual a cero. La condición (2.57) es una aproximación para considerar las pérdidas por evaporación. Además en  $z = d$  y  $x = 0$  donde se aplica el flujo  $q$  ( $L^2T^{-1}$ ), se considera un punto singular del problema en condición de saturación ( $\psi = 0$ ).

La solución general está dada por:

$$\phi = \phi_B(X, Z - D, T) + e^{(-2D)} \phi_B(X, Z + D, T) - \frac{q(m+1)}{2\sqrt{\pi}} e^{[mD+(2+m)Z]} \int_0^T \xi^{-\frac{1}{2}} e^{\left[ \frac{m(m+2)\xi - X^2}{4\xi} \right]} \operatorname{erfc} \left( \frac{2 + D + 2(m+1)\xi}{2\sqrt{\xi}} \right) d\xi \quad (2.59)$$

donde  $\phi_B$  es la solución para una fuente lineal subsuperficial (Lomen y Warrick, 1974) dada por:

$$\phi_B(X, Z, T) = \frac{q e^Z}{4\pi} \int_0^T \xi^{-1} e^{\left[ -\xi - \frac{X^2 + Z^2}{4\xi} \right]} d\xi \quad (2.60)$$

Para estado permanente la solución se reduce a:

$$\phi = \frac{q}{2\pi} \left\{ e^{(Z-D)} \left[ K_0 \left( \sqrt{X^2 + (Z-D)^2} \right) + K_0 \left( \sqrt{X^2 + (Z+D)^2} \right) \right] - 2(m+1) e^{[mD+(m+2)Z]} \int_{Z+D}^{\infty} e^{[-(m+1)\eta]} K_0 \sqrt{(X^2 + \eta^2)} d\eta \right\} \quad (2.61)$$

donde  $K_0$  es una función modificada de Bessel de primer tipo y orden cero y  $\alpha$  y  $k$  son constantes empíricas.

Las escalas adimensionales están definidas por:

$$X = \frac{\alpha x}{2} \quad (2.62)$$

$$Z = \frac{\alpha z}{2} \quad (2.63)$$

$$D = \frac{\alpha d}{2} \quad (2.64)$$

$$T = \frac{\alpha k t}{4} \quad (2.65)$$

El procedimiento de linealización permite obtener la solución para arreglos de fuentes lineales espaciadas una distancia  $l$  mediante la suma de la solución individual de cada fuente, es decir, se realiza una superposición de soluciones. Para el caso en que se tenga un arreglo infinito la solución se obtiene:

$$\phi_T(x, z, t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi_1(x - jl, z, t) \quad (2.66)$$

## CAPITULO III

### ESQUEMA NUMÉRICO

Los modelos numéricos tradicionales utilizados para describir el flujo de agua a través de suelos con saturación variable, usan la ecuación de Richards basada en el potencial de presión (2.12). Sin embargo, Celia et al. (1990) indican que la solución numérica de esta formulación produce errores considerables en el balance de masa. Esto se debe a que si bien  $d\theta/d\psi$  y  $C(\psi)$  son matemáticamente equivalentes en la ecuación diferencial, su discretización no lo es, debido a que los cambios de masa en el sistema son calculados usando valores discretos de  $\partial\theta/\partial t$ , mientras que la ecuación aproximada usa la expansión  $C(\psi)\partial\psi/\partial t$ .

Para aprovechar las ventajas en la conservación de la masa que se tiene al discretizar la ecuación tipo Fokker-Planck (2.13) y evitar la limitación que presenta su aplicación a regiones saturadas, Celia et al. (1990) propusieron realizar una serie de modificaciones a la forma mixta de la ecuación de Richards (2.10), que permitieron mejorar el balance de masa en problemas de infiltración unidimensional.

### 3.1 DESARROLLO

#### 3.1.1 Discretización espacial

Despreciando el término de extracción de agua por las plantas ( $S$ ), la ecuación de Richards en su forma bidimensional puede escribirse:

$$\frac{\partial\theta(\psi)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ K(\psi) \frac{\partial\psi}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\psi) \left( \frac{\partial\psi}{\partial z} + 1 \right) \right] = 0 \quad (3.1)$$

Para obtener el esquema numérico se utiliza el método de los elementos finitos para realizar la discretización espacial de la ecuación de transferencia de agua. Con este objetivo, se asume la solución de elemento finito para aproximar las dos variables dependientes de la ecuación (3.1):

$$\hat{\psi}(x, z, t) = \sum_{j=1}^{n_e} \varphi_j^{(e)}(x, z) \psi_j(t) \quad (3.2)$$

$$\hat{\theta}(x, z, t) = \sum_{j=1}^{n_s} \varphi_j^{(e)}(x, z) \theta_j(t) \quad (3.3)$$

donde  $\theta_j(t)$  y  $\psi_j(t)$  son los valores del contenido de humedad y potencial en el nodo  $j$  para el tiempo  $(t)$ ,  $x$  puede ser utilizada como coordenada horizontal en un sistema cartesiano o como coordenada radial y  $z$  es la coordenada vertical.

Sustituyendo (3.2) y (3.3) en (3.1) se obtiene:

$$R(\psi) = \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \hat{K} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \hat{K} \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} + 1 \right) \right] \neq 0 \quad (3.4)$$

Aplicando el método de los residuos ponderados de Galerkin a 3.4, se obtiene la siguiente expresión:

$$\int_{\Omega_e} \left[ \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \hat{K} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \hat{K} \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} + 1 \right) \right] \right] \varphi_i^{(e)} d\Omega \quad (3.5)$$

### 3.1.1.1 Forma débil

Aplicando la fórmula de Green de integración por partes a (3.5) se obtiene:

$$\int_{\Omega_e} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} \varphi_i^{(e)} d\Omega + \int_{\Omega_e} \hat{K} \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial z} \right) d\Omega + \int_{\Omega_e} \hat{K} \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial z} d\Omega = \int_{\Gamma_e} q_n \varphi_i^{(e)} d\Gamma \quad (3.6)$$

la ecuación (3.6) es conocida como la forma débil de la ecuación diferencial parcial.

### 3.1.1.2 Matrices locales

Si además se asume una variación lineal de la conductividad hidráulica dada por:

$$\hat{K} = K_i \varphi_i^{(e)} \quad (3.7)$$

Sustituyendo (3.7) y las expresiones para  $\hat{\psi}$  y  $\hat{\theta}$  dadas por (3.2) y (3.3) en (3.6) se obtiene un sistema de ecuaciones con coeficientes no lineales, que puede expresarse de la siguiente manera:

$$M \frac{d\theta}{dt} + B\{\psi\} = Q - G \quad (3.8)$$

donde  $M$  es la matriz de masa,  $B$  es la matriz de rigidez,  $G$  es la matriz de gravedad y  $Q$  es el vector que contiene los valores de los flujos en cada nodo. La matriz de masa tiene la características de ser simétrica y positiva definida. Tales propiedades permiten trabajar con los coeficientes localizados en la semibanda y realizar un almacenamiento vectorial, eliminando una gran cantidad de coeficientes nulos y con ello realizar un esquema numérico computacionalmente más eficiente. Por su parte, las matrices de masa y gravedad son diagonales.

$$M_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega_e} (\varphi_j^{(e)} \varphi_i^{(e)}) d\Omega \quad (3.9)$$

$$B_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega_e} K_i \varphi_i^{(e)} \left( \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial z} \right) d\Omega \quad (3.10)$$

$$G_i^{(e)} = \int_{\Omega_e} K_i \varphi_i^{(e)} \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial z} d\Omega \quad (3.11)$$

$$Q_i^{(e)} = \int_{\Gamma} q_n \varphi_i^{(e)} d\Gamma \quad (3.12)$$

Para determinar cada componente que forman las matrices locales es necesario evaluar las expresiones (3.9) - (3.12) y para el caso de la matriz de masa, se utilizan las funciones de interpolación del sistema de masa concentrado, lo que permite obtener:

$$M_{ij}^{(e)} = \delta_{ij} \sum_e \frac{A^{(e)}}{3} \quad (3.13)$$

$$B_{ij}^{(e)} = \sum_e \frac{\bar{K}}{4A^{(e)}} (b_i b_j + c_i c_j) \quad (3.14)$$

$$G_i^{(e)} = \sum_e \frac{\bar{K}}{2} c_i \quad (3.15)$$

$$Q_i^{(e)} = \frac{1}{2} q_n^1 \Gamma^1 + \frac{1}{2} q_n^2 \Gamma^2 \quad (3.16)$$

donde  $A^{(e)}$  es el área del elemento triangular;  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker la cual adquiere el valor de 1 si  $i=j$  y 0 para el caso contrario;  $c_i$  es la diferencia de coordenadas en la dirección  $x$  de los nodos anteriores y posteriores al nodo  $i$  y de manera análoga  $b_i$  es la diferencia de coordenadas en la dirección  $z$ ;  $\bar{K}$  es la conductividad hidráulica promedio en el elemento bajo análisis;  $q_n^1$  y  $q_n^2$  ( $LT^{-1}$ ) son los valores de los flujos a lo largo de los dos segmentos de frontera contiguos a nodo  $i$ . El procedimiento efectuado para calcular los coeficientes de la matrices locales se presenta en el ANEXO A.

Para problemas tridimensionales con simetría axial alrededor del eje vertical es común la utilización de elementos triangulares axisimétricos (fig. 3.1).

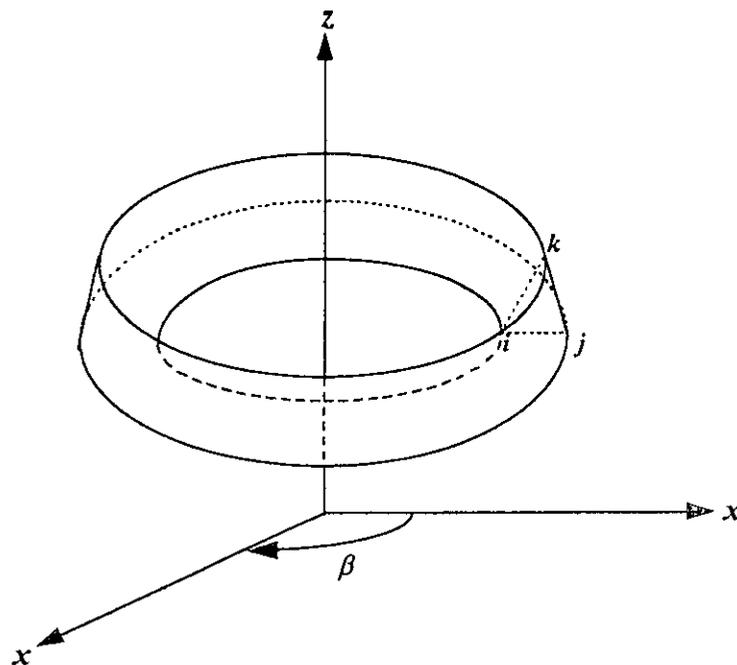


Fig. 3.1 Elemento triangular axisimétrico

El volumen del elemento está dado por:

$$V = \int_A \int_0^{2\pi} x d\beta dA = 2\pi \int_A x dA \quad (3.17)$$

considerando el valor promedio de  $x$  en el elemento se tiene:

$$\bar{x} = \int_A x dA = \int_A (x_i \varphi_i + x_j \varphi_j + x_k \varphi_k) dA = \frac{1}{3}(x_i + x_j + x_k) \quad (3.18)$$

donde  $x_i$ ,  $x_j$  y  $x_k$  son las coordenadas horizontales del elemento bajo análisis.

Sustituyendo (3.18) en (3.17) se obtiene:

$$V = 2\pi \bar{x} A \quad (3.19)$$

De lo anterior se puede concluir que el análisis de procesos tridimensionales con simetría axial se puede realizar usando una malla bidimensional y multiplicando las matrices (3.13 - 3.15) por  $2\pi\bar{x}$ .

### 3.1.1.3 Matrices globales

Una vez calculadas las componentes de las matrices locales se realiza el ensamble global. Para ello, se considera que la integral sobre el dominio de solución es igual a la suma de las integrales locales, por lo cual es necesario sumar la contribución de cada elemento al sistema global.

El ensamble de las matrices globales se puede realizar expandiendo las matrices locales a una dimensión de  $n \times n$ , donde  $n$  es el número total de nodos en la malla. Esta expansión se realiza añadiendo renglones y columnas de ceros, lo cual permite realizar una suma directa de las matrices. Sin embargo, con este procedimiento se genera un algoritmo poco eficiente.

Un procedimiento computacionalmente más eficiente y el cual fue empleado para desarrollar el programa, es el ensamble de las matrices por componente. En este

procedimiento, el número del nodo es utilizado para asignar los coeficientes de las matrices locales a su posición global.

### 3.1.2 Integración en el tiempo

Para realizar la integración en el tiempo de la ecuación (3.8) y debido a la complejidad de utilizar el método del elemento finito, se discretiza el tiempo en una secuencia de intervalos finitos  $\Delta t$ , y las derivadas temporales de  $\theta$  se sustituyen por diferencias finitas haciendo uso de las siguientes aproximaciones:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta_{t+\Delta t} - \theta_t}{\Delta t} \quad (3.20)$$

$$\{\psi\}_{t+\omega\Delta t} = \omega \{\psi\}_{t+\Delta t} + (1-\omega)\{\psi\}_t \quad (3.21)$$

donde  $\Delta t$  es el paso de tiempo y  $\omega$  es un factor de ponderación en el tiempo ( $0 \leq \omega \leq 1$ ).

Utilizando un esquema implícito ( $\omega = 1$ ) y sustituyendo (3.20) y (3.21) en (3.8) se obtiene la siguiente ecuación discretizada:

$$M_{t+\Delta t} \frac{\theta_{t+\Delta t} - \theta_t}{\Delta t} + B_{t+\Delta t} \{\psi\}_{t+\Delta t} = Q_{t+\Delta t} - G_{t+\Delta t} \quad (3.22)$$

### 3.1.3 Procedimiento iterativo

Cuando se aplica el esquema iterativo de Picard a (3.22) se obtiene:

$$M_{t+\Delta t}^m \frac{\theta_{t+\Delta t}^{m+1} - \theta_t}{\Delta t} + B_{t+\Delta t}^m \{\psi\}_{t+\Delta t}^{m+1} = Q_{t+\Delta t}^m - G_{t+\Delta t}^m \quad (3.23)$$

donde  $m$  representa el número de iteración en el nivel de tiempo. Se puede observar que el esquema (3.23) tiene dos incógnitas  $\theta_{t+\Delta t}^{m+1}$  y  $\psi_{t+\Delta t}^{m+1}$ . Para eliminar una de las dos variables

dependientes, se realiza una expansión en serie de Taylor de  $\theta_{t+\Delta t}^{m+1}$  con respecto a  $\psi$  (Celia et al., 1990)

$$\theta_{t+\Delta t}^{m+1} = \theta_{t+\Delta t}^m + \left. \frac{d\theta}{d\psi} \right|_{t+\Delta t}^m (\psi_{t+\Delta t}^{m+1} - \psi_{t+\Delta t}^m) + O(\delta^2) \quad (3.24)$$

Despreciando los términos no lineales de (3.24), introduciendo la definición de capacidad específica asumiendo su variación lineal dentro del elemento  $\hat{C} = C_i \varphi_i^{(e)}$  y sustituyendo en (3.23), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A_{t+\Delta t}^m \{\psi\}_{t+\Delta t}^{m+1} = E_{t+\Delta t}^m \quad (3.25)$$

donde los coeficientes de la matriz A y el vector de términos independientes E son:

$$A_{t+\Delta t}^m = \frac{M_{t+\Delta t}^m C_{t+\Delta t}^m}{\Delta t} + B_{t+\Delta t}^m \quad (3.26)$$

$$E_{t+\Delta t}^m = \frac{M_{t+\Delta t}^m C_{t+\Delta t}^m}{\Delta t} \{\psi\}_{t+\Delta t}^m - M_{t+\Delta t}^m \frac{\theta_{t+\Delta t}^m - \theta_t}{\Delta t} + Q_{t+\Delta t}^m - G_{t+\Delta t}^m \quad (3.27)$$

### 3.1.4 Flujos de frontera

El flujo a través de los nodos se calcula utilizando la ley de Darcy:

$$Q^{(e)} = \int_{\Omega_e} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left[ \hat{K} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \hat{K} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} \right] + \frac{\partial \hat{K}}{\partial z} \right) \varphi_i^{(e)} d\Omega \quad (3.28)$$

Para calcular el flujo que se infiltra a través de los nodos sujetos a condición de Dirichlet en la iteración  $m+1$ , se realiza un procedimiento de sustitución regresiva de las matrices de rigidez y gravedad calculadas en la iteración anterior ( $m$ ).

$$Q^{m+1} = G^m + B^m \{\psi\}^m \quad (3.29)$$

### 3.1.5 Proceso de solución

La alta no linealidad de la ecuación de Richards provoca que no se disponga de un criterio de estabilidad para casos bidimensionales. Por lo cual, la selección del paso de tiempo inicial a usar se convierte en un proceso de prueba y error. Durante el proceso de solución el incremento de tiempo utilizado se modifica multiplicándolo por un factor previamente fijado, dependiendo del número de iteraciones realizadas en el último nivel de tiempo; si el número de iteraciones es mayor de 10 el factor debe ser menor a 1 y mayor para el caso en el que el número de iteraciones es inferior a 3. Cuando en cualquier intervalo de tiempo se tiene un número de iteraciones superior a 20, se asume que la solución de elemento finito diverge y entonces, el valor del paso de tiempo se disminuye a la mitad y los valores del potencial de presión son reinicializados.

## 3.2 INCORPORACIÓN DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA

### 3.2.1 Frontera superior

La condición de frontera superior es variable dependiendo del caso de interés. Para el caso de un sistema de riego por goteo superficial se tiene una condición de frontera móvil en la superficie.

En este método de riego, generalmente el gasto aplicado a través del emisor excede la capacidad de infiltración del suelo, originando la formación de una zona encharcada en la superficie, a través de la cual, el agua se infiltra en el suelo. Bajo una aplicación continua de flujo la medida de esta área se incrementa con el tiempo ( $r_s(t)$ ) hasta alcanzar un valor estacionario, que depende del gasto y valor de la conductividad hidráulica saturada del medio. Debido a que el espesor de la zona encharcada es pequeño, se puede despreciar el efecto de almacenaje de agua en la superficie y asumir condiciones de saturación ( $\psi = 0$ ).

Realizando un balance de flujos se debe cumplir para todo tiempo que el gasto aplicado a través del gotero debe ser igual a la suma del flujo que entra a través de la zona de saturación y el que sale por efecto de la evaporación. Cuando la conductividad hidráulica del medio es mayor que la evaporación registrada, es posible despreciar este término.

Las condiciones anteriormente descritas se expresan matemáticamente por:

$$\psi = 0 \quad 0 \leq x \leq r_s(t) \quad z = 0 \quad \text{para} \quad t > 0 \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad x > r_s(t) \quad z = 0 \quad \text{para} \quad t > 0 \quad (3.31)$$

$$Q(t) = 2\pi \int_0^{r_s(t)} K(\psi) \left[ 1 + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] x dx \quad z = 0 \quad \text{para } t > 0 \quad (3.32)$$

Debido a que los diversos métodos numéricos solo permiten obtener valores discretos de la variable dependiente ( $\psi$ ), la condición (3.30) no puede ser representada exactamente. Para hacer una aproximación, se realiza una combinación de condiciones de frontera de Dirichlet y Neumann.

Para la simulación numérica se considera que la zona saturada tiene una forma aproximadamente circular, por lo cual el proceso de infiltración tridimensional tiene la característica de simetría axial. Al inicio de la simulación ( $t = \Delta t$ ) y como no se conoce la magnitud del radio saturado ( $r_s(t)$ ), todo el flujo es aplicado en el primer nodo no saturado en la superficie localizado en el origen ( $r = 0, z = 0$ ). Posteriormente, se ensambla y resuelve el sistema (3.25). Cuando el nodo sujeto a condición de Neumann durante el proceso iterativo alcanza la saturación ( en el modelo numérico se considera que esta condición se logra cuando el valor del potencial de presión es mayor que un valor previamente seleccionado, en este caso  $\psi > -0.25 \text{ cm}$ , con el objetivo de lograr la convergencia del método), se aumenta el radio saturado fijándolo como un nodo con carga constante  $\psi = 0$  (condición tipo Dirichlet) y el valor de todos los potenciales es reinicializado. A continuación, se calcula el flujo a través de los nodos dirichlet  $q_d$  y si se registra un déficit entre éste y el gasto del emisor  $Q$ , la diferencia  $\Delta Q$  es aplicada en el primer nodo no saturado en la superficie. El procedimiento iterativo se realiza hasta alcanzar un grado de convergencia establecido y cuando se cumple, se pasa al siguiente nivel de tiempo  $t = t + \Delta t$ .

En el método de los elementos finitos, la incorporación de una condición de segundo tipo (Neumann) es realizada a través de la integral de línea (3.17) y se le conoce con el nombre de condición de frontera natural.

Por su parte, una condición tipo Dirichlet es incorporada al esquema reduciendo el sistema global de ecuaciones a una medida de  $(n - n_d) \times (n - n_d)$ ; donde  $n$  es el número total de nodos en la malla y  $n_d$  es el número de nodos donde el valor del potencial está especificado.

### 3.2.2 Fronteras laterales

En la modelación de sistemas de riego por goteo superficiales y subsuperficiales se considera que no existe flujo en la dirección horizontal a través de las fronteras laterales. En el método del elemento finito la condición de frontera impermeable no requiere de realizar

modificación alguna en el sistema global, dado que esta condición está de forma implícita en el esquema y se expresa por:

$$K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad 0 \leq z \leq Z \quad \text{y} \quad x = 0 \quad x = X \quad (3.33)$$

donde  $X$  y  $Z$  son las dimensiones máximas en la dirección horizontal y vertical respectivamente del dominio considerado.

### 3.2.3 Frontera inferior

Cuando se desea modelar los procesos de transferencia de agua en zonas cercanas a la superficie y se considera que la posición del nivel freático no ejerce influencia, existen diversas condiciones de frontera que pueden ser utilizadas. Por ejemplo, se pueden especificar valores observados o estimados del potencial de presión o flujos. Sin embargo, la alta variabilidad espacial de las propiedades hidrodinámicas del suelo ocasiona que en la mayoría de las ocasiones no se disponga de datos confiables.

Considerando lo anterior, para muchos medios bajo condiciones de flujo variable, se puede suponer que el gradiente hidráulico ( $H$ ) se aproxima a la unidad en la dirección vertical (McCord et al., 1991).

La condición de gradiente hidráulico unitario se expresa por:

$$\frac{\partial H}{\partial z} = 1 \quad (3.34)$$

donde  $H = \psi + z$  y su incorporación numérica al esquema se realiza a través de:

$$Q_i = -K(\psi) X_i \quad (3.35)$$

donde  $Q_i$  es el flujo que sale del dominio a través del nodo,  $K$  es la conductividad hidráulica y  $X_i$  es el área o segmento de frontera que rodea al nodo "i".

Para casos bidimensionales:

$$X_i = \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1}) \quad (3.36)$$

y para casos axisimétricos:

$$X_i = \frac{\pi}{3} [(x_{i-1} + 2x_i)(x_i - x_{i-1}) + (x_{i+1} + 2x_i)(x_{i+1} - x_i)] \quad (3.37)$$

### 3.3 MALLA DE ELEMENTOS FINITOS

Para dar solución numérica a la ecuación de Richards utilizando el método del elemento finito, es necesario discretizar el dominio bajo análisis generando una malla formada por una serie de nodos y elementos, los cuales pueden ser de cualquier forma y medida.

Cuando la cantidad de nodos es pequeña, es posible construir la malla de elementos de forma manual, pero conforme la malla es más densa este procedimiento se vuelve más laborioso y se pueden cometer graves errores, sobretodo en la variación del tamaño de los elementos, lo cual influye en la precisión de los resultados.

Para determinar las coordenadas espaciales de los nodos es necesario considerar las siguientes características:

- I. Los nodos se deben localizar a lo largo de la frontera del dominio o en aquellas regiones donde se encuentren localizados las fuentes puntuales o lineales. Los nodos localizados a lo largo de regiones donde la variación de la variable dependiente es un dato (potencial de presión) son llamados nodos Dirichlet, mientras que aquellos localizados a lo largo de regiones donde el valor del flujo está especificado son conocidos como nodos Neumann.
- II. El espaciamiento entre nodos debe de ser menor en aquellas regiones del dominio donde se espera se registren cambios rápidos del potencial. Se incluyen las regiones cercanas al punto de aplicación de goteros y lugares donde se tengan gradientes altos.
- III. Los nodos deben estar localizados en la interface entre materiales que tengan propiedades hidráulicas diferentes.
- IV. Como la medida del sistema global de ecuaciones se incrementa rápidamente, se debe realizar una adecuada numeración de los nodos con el objetivo de minimizar el ancho de la semibanda ( $SB$ ). Cuando se tiene una malla regular, el proceso de numeración se debe realizar en aquella dirección en la que se tenga el menor número de nodos.

$$SB = \alpha + 1 \quad (3.38)$$

donde  $\alpha$  es la máxima diferencia existente en la malla completa entre dos de los nodos de un elemento.

Por otro lado, la forma y tamaño de los elementos es determinada por las características propias del dominio. Cuando el eje vertical está orientado de manera positiva en la dirección ascendente, los vértices de cada elemento se numeran en el sentido antihorario.

Las propiedades de los elementos son:

- I. No se deben de traslapar los elementos.
- II. Se debe realizar una cambio gradual en el tamaño de los elementos.
- III. El tamaño de los elementos puede afectar la precisión de la solución obtenida, particularmente en problemas transitorios, donde influye en la magnitud del paso de tiempo requerido para obtener una solución estable.
- IV. Se deben considerar las características simétricas de los problemas bajo análisis, con el propósito de reducir el número de nodos y elementos, y con ello, disminuir el tiempo de cómputo requerido para realizar la simulación.

### 3.3.1 Generación de la malla

Considerando las características anteriores se realizó un programa para generar y numerar automáticamente las mallas de elementos finitos que se emplearon en las simulaciones de los diferentes escenarios de riego por goteo.

El método del mapeo fue utilizado para generar la malla y discretizar los dominios bajo análisis. La idea principal de este método, es generar la malla en un dominio de referencia que cuenta con una geometría elemental (área cuadrática unitaria) y posteriormente mediante una función de transporte se mapea la malla al dominio real.

Se tienen dos funciones de transporte, una para su aplicación en la dirección horizontal y la segunda para la vertical. Tales funciones son:

$$x = a_1 + a_2\eta + a_3\varepsilon + a_4\eta^2\varepsilon + a_5\eta\varepsilon^2 + a_6\eta^2 + a_7\varepsilon^2 + a_8\eta^2\varepsilon^2 \quad (3.39)$$

$$z = b_1 + b_2\eta + b_3\varepsilon + b_4\eta^2\varepsilon + b_5\eta\varepsilon^2 + b_6\eta^2 + b_7\varepsilon^2 + b_8\eta^2\varepsilon^2 \quad (3.40)$$

donde  $x$  y  $z$  representan las coordenadas horizontal y vertical en el dominio real y análogamente  $\varepsilon$  y  $\eta$  son las coordenadas en el dominio de referencia.

La aplicación de las ecs. (3.39) y (3.40) a ocho puntos del domino real y de referencia, genera dos sistemas de ecuaciones que permite calcular el valor de los coeficientes  $a_j$  y  $b_j$ .

$$[A]\{a\} = [x] \quad (3.41)$$

$$[A]\{b\} = [z] \quad (3.42)$$

con:

$$A_j = 1 + \varepsilon_j + \eta_j + \varepsilon_j^2 \eta_j + \varepsilon_j \eta_j^2 + \varepsilon_j^2 + \eta_j^2 + \varepsilon_j^2 \eta_j^2 \quad (3.43)$$

para  $j=1,2,\dots,8$

Una vez calculados los coeficientes de la función de transporte, se genera la malla en el domino de referencia, dividiendo el área unitaria en secciones de igual magnitud en las direcciones horizontal y vertical respectivamente ( $\varepsilon$  y  $\eta$ ). Finalmente, los nodos son transportados de dominio por medio de las funciones de transporte, las cuales proporcionan las coordenadas de estos puntos en el dominio real.

Para ilustrar el algoritmo de cálculo se presenta el siguiente ejemplo de generación de una malla simple. Con tal objetivo, se consideran los siguientes dominios real y de referencia (figs. 3.2 y 3.3).

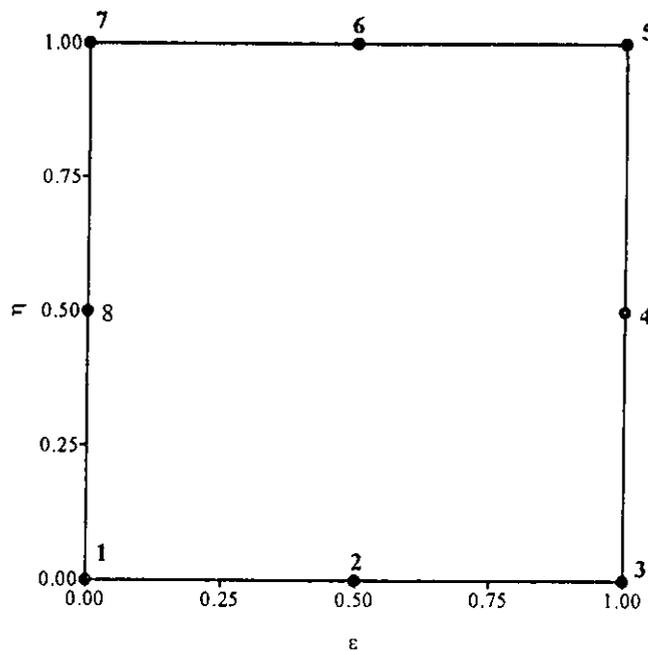


Fig. 3.2 Puntos en el domino de referencia para el cálculo de los coeficientes de la función de transporte.

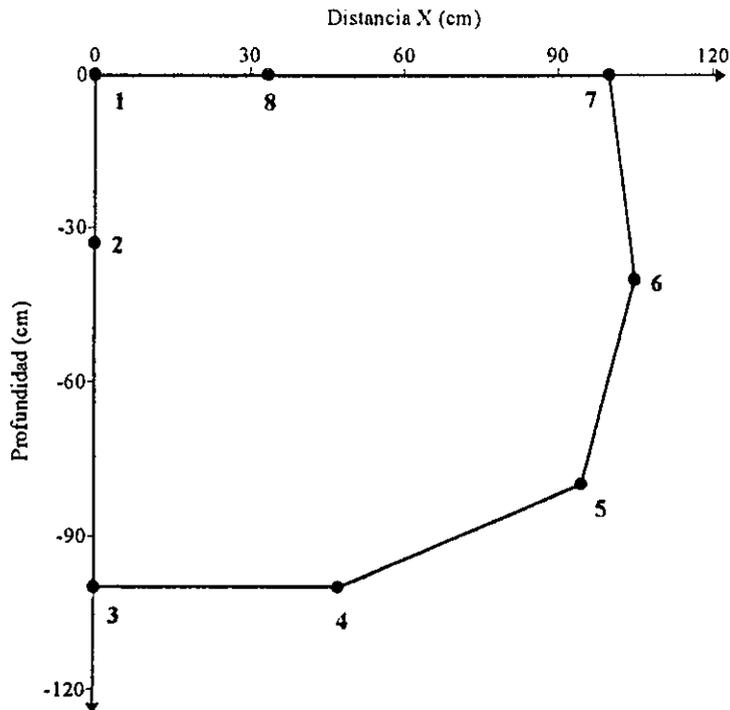


Fig. 3.3 Puntos en el dominio de real para el cálculo de los coeficientes de la función de transporte.

Las coordenadas de los puntos considerados para el cálculo de las funciones de transporte están dadas en la tabla 3.1.

Puntos	Dominio de referencia		Dominio real	
	$\epsilon$	$\eta$	$x$ (cm)	$z$ (cm)
1	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.5	0.0	0.0	-33.0
3	1.0	0.0	0.0	-100.0
4	1.0	0.5	47.5	-100.0
5	1.0	1.0	95.0	-80.0
6	0.5	1.0	105.0	-40.0
7	0.0	1.0	100.0	0.0
8	0.0	0.5	33.5	0.0

Tabla 3.1 Coordenadas de los puntos utilizados para el cálculo de los coeficientes de las funciones de transporte.

Utilizando las coordenadas anteriores, se plantean y resuelven los sistemas 3.41 y 3.42 obteniendo los siguientes coeficientes:

$j$	$a_j$	$b_j$
1	0	0
2	0	-32
3	34	0
4	61	-20
5	25	-48
6	0	-68
7	66	0
8	-91	88

Tabla 3.2 Coeficientes de la función de transporte

Posteriormente, se genera la malla en el dominio de referencia con el número de nodos requeridos (fig. 3.4). Para este caso, se consideran  $N_x=12$  en la dirección horizontal y  $N_y=9$  en la vertical. Los espaciamientos uniformes en cada dirección se calculan de la siguiente manera:

$$\Delta \varepsilon = \frac{1.0}{N_x - 1} = \frac{1.0}{11} = 9.09 \times 10^{-2} \quad (3.44)$$

$$\Delta \eta = \frac{1.0}{N_y - 1} = \frac{1.0}{8} = 12.5 \times 10^{-2} \quad (3.45)$$

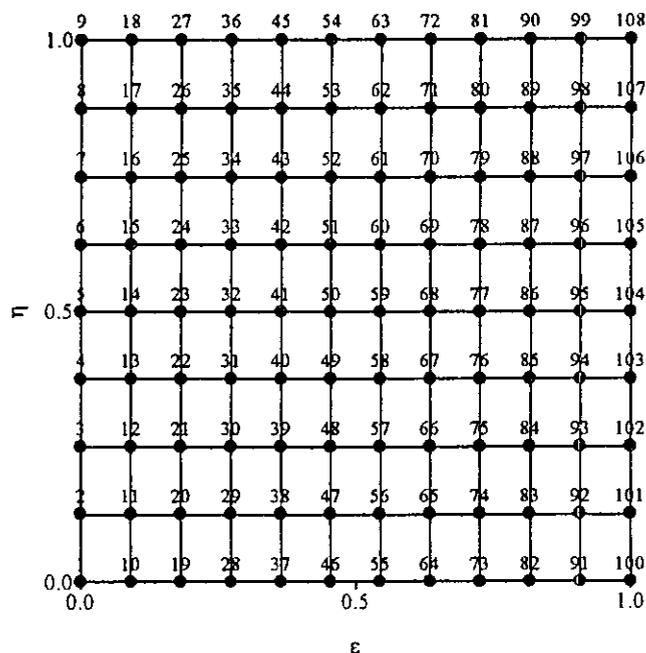


Fig. 3.4 Malla generada en el dominio de referencia

Finalmente, utilizando las funciones de transferencia (ecs. 3.39 y 3.40) la malla es mapeada al dominio real.

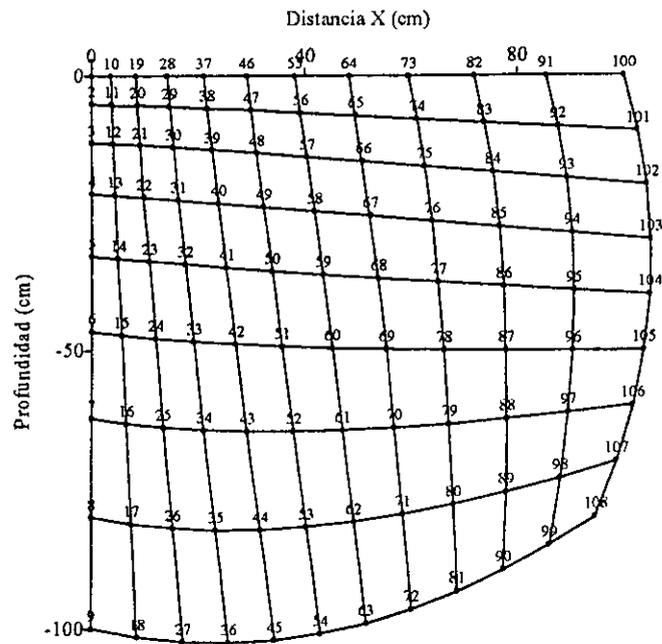


Fig. 3.5 Malla de elementos finitos generada

Si se desea generar una malla más densa alrededor de los puntos 1, 3, 5 ó 7 se debe reducir la distancia de los dos nodos circundantes al punto considerado en el dominio de referencia.

El programa desarrollado para resolver numéricamente la ecuación de Richards fue codificado en TC++ 3.0 y permite realizar simulaciones del flujo de agua en el suelo con gran flexibilidad.

## CAPITULO IV

### VALIDACIÓN DEL ESQUEMA NUMÉRICO

Una vez desarrollado el esquema numérico y antes de ser aplicado para simular diferentes procesos de transferencia de agua en los medios porosos, es necesario verificar la consistencia y precisión de sus resultados. Una de las formas en que se puede realizar, es mediante un proceso de refinamiento progresivo de la malla de elementos finitos, asumiendo que la solución de elemento converge a la solución exacta cuando los intervalos espaciales  $\Delta x \rightarrow 0$  y  $\Delta z \rightarrow 0$ . Sin embargo, es necesario efectuar un proceso de verificación en el cual se tengan soluciones independientes del esquema numérico.

Debido a que no se cuenta con datos de mediciones experimentales confiables, se realiza una comparación con soluciones analíticas. Para sistemas de riego por goteo superficial y subsuperficial se han desarrollado algunas soluciones para casos específicos asumiendo consideraciones simplificadoras. Si bien, esto origina que su aplicación sea restringida, son una herramienta adecuada para la validación de esquemas numéricos.

#### 4.1 COMPARACIÓN PARA EL CASO DE UNA FUENTE PUNTUAL SUPERFICIAL

En esta parte, se realiza una comparación de la solución numérica y de la analítica obtenida por Raats (ec. 2.54). Con tal objetivo, se seleccionaron dos tipos de suelos con propiedades hidráulicas contrastantes. Los parámetros de los suelos son reportados por Ammozegar et al. (1984), y utilizan el modelo de conductividad hidráulica propuesto por Gardner (ec. 2.15). El suelo "Pima" franco arcilloso tiene las siguientes características:  $\alpha = 0.014 \text{ cm}^{-1}$  y  $K_s = 1.15 \times 10^{-4} \text{ cm/s}$ ; y para el suelo franco arenoso:  $\alpha = 0.111 \text{ cm}^{-1}$  y un valor para la conductividad hidráulica saturada de  $K_s = 1 \times 10^{-3} \text{ cm/s}$ .

En la simulación numérica se utiliza el modelo completo de van Genuchten (ecs. 2.19 y 2.20). Para ello se relacionaron ambos modelos a través de la ec. 2.21 para  $\theta_w = 1.0$ ,  $\theta_d = 0$ , y  $m=0.5$  obteniéndose un valor de  $\alpha \lambda_c = 0.405$ . Los parámetros finales se presentan en la tabla 4.1. Como condición inicial se considera en ambos casos una distribución inicial uniforme del potencial de presión  $\psi_{ini} = -300 \text{ cm}$ . Adicionalmente, se supone un medio isotrópico y homogéneo.

Tipo de suelo	$\theta_r$	$\theta_s$	$m$	$\alpha$ $\text{cm}^{-1}$
"Pima" Franco arcilloso	0.350	0.02	0.5	0.00567
Franco arenoso	0.450	0.05	0.5	0.04496

Tabla 4.1 Parámetros hidráulicos utilizados en la validación de una fuente puntual superficial.

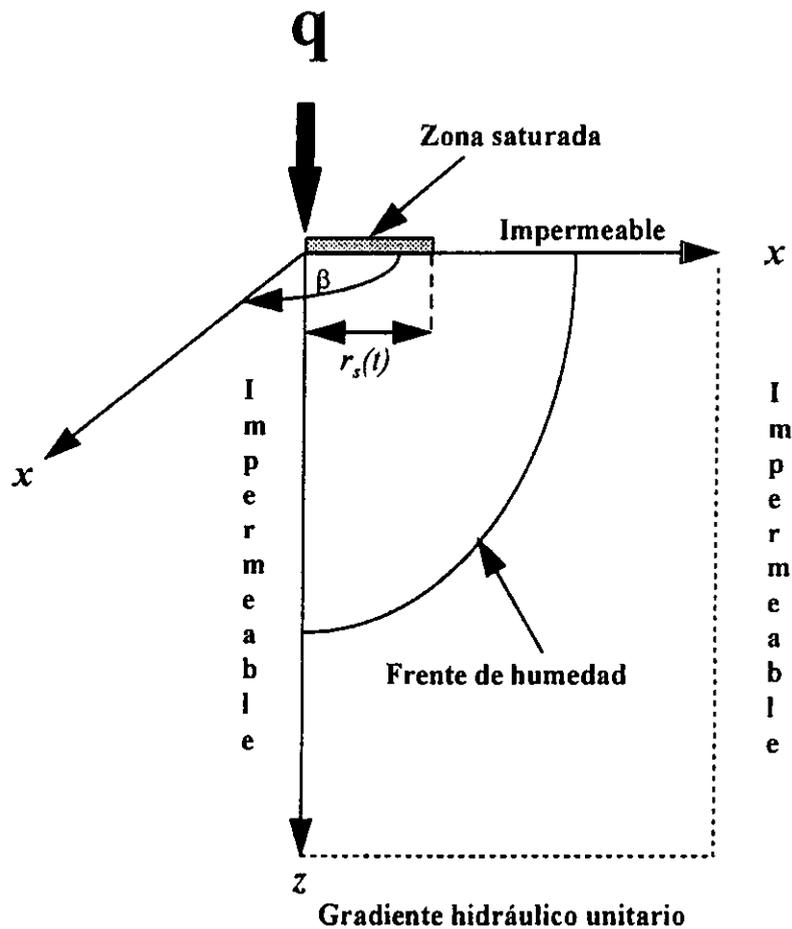


Fig. 4.1 Representación esquemática de una fuente puntual superficial

El movimiento de agua en el suelo originado por un sistema de riego por goteo puntual superficial, es modelado como un proceso tridimensional con simetría axial alrededor del eje vertical.

El caso consiste en obtener analítica y numéricamente, la distribución del potencial de presión para estado estacionario, originado por un gotero superficial localizado en el centro de un círculo de radio  $R$  (fig. 4.1), el cual descarga un gasto constante de  $1 \text{ l.p.h.}$  para los dos tipos de suelo considerados.

Las mallas de elementos finitos fueron generadas utilizando el método de mapeo explicado en la sección 3.3.1. Para el suelo franco arenoso la malla  $300 \times 250 \text{ cm}$  (fig. 4.2) contó con 1050 elementos y 566 nodos con espaciamentos mínimos de  $1.18 \text{ cm}$  y  $3.00 \text{ cm}$  y máximos de  $28.16 \text{ cm}$  y  $25.0 \text{ cm}$  en las direcciones horizontal y vertical respectivamente. Para el suelo franco arcilloso la malla irregular constó de 1102 elementos triangulares y 600 nodos, con espaciamentos mínimos alrededor del gotero de  $0.21 \text{ cm}$  y  $0.19 \text{ cm}$  en la

dirección  $x$  y  $z$  respectivamente y máximos  $27.38 \text{ cm}$  y  $26.12 \text{ cm}$ . La malla se prolongó arbitrariamente hasta una distancia de  $400 \text{ cm}$  en la dirección horizontal y  $250 \text{ cm}$  en la dirección vertical, con el propósito de representar la presencia de un solo emisor. Internamente, el programa divide las mallas generadas en elementos triangulares utilizando un procedimiento aleatorio.

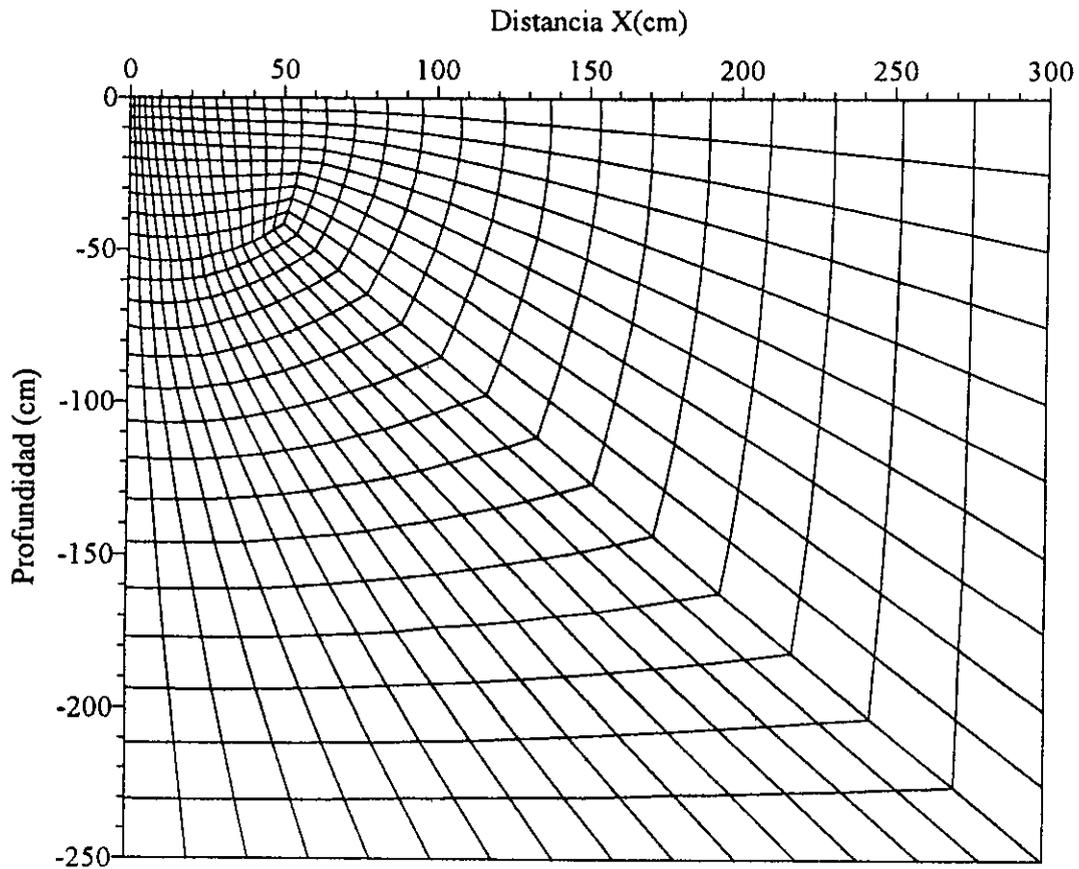


Fig. 4.2 Malla de elementos finitos utilizada para el suelo franco arenoso

Para la obtención de la solución para estado estacionario y debido a que no se conoce la dimensión de la zona saturada en la superficie, durante el proceso de simulación el modelo numérico va calculando la posición del radio saturado ( $r_s(t)$ ), hasta que alcanza su valor estacionario.

En la simulación numérica, el estado permanente se alcanza cuando el valor de los contenidos de humedad y potenciales de presión en los nodos no registran cambios y el gasto aplicado por el gotero es igual al flujo que sale a través de la frontera inferior.

Los valores del radio saturado para estado permanente  $r_s$ , calculados con el modelo numérico, fueron de 4.9 cm para el suelo franco arenoso y de 7.5 cm para el franco arcilloso.

En las figs. 4.3 y 4.4 se comparan los resultados analíticos y numéricos obtenidos. Se puede observar que en ambos casos se registran pequeñas diferencias del potencial de presión en los lugares cercanos al punto de aplicación del gotero (diferencias máximas menores al 5 % en ambos casos). La solución de elemento finito registra en la región un movimiento de humedad mayor en la dirección horizontal y por su parte el efecto de la gravedad en la dirección vertical es menos considerable que el de la solución analítica. Mientras la distancia al punto de aplicación se va incrementando, las dos soluciones tienen un comportamiento similar.

Por medio de la comparación, se verifica la confiabilidad del modelo numérico para desarrollar procesos de simulación tridimensionales con simetría axial.

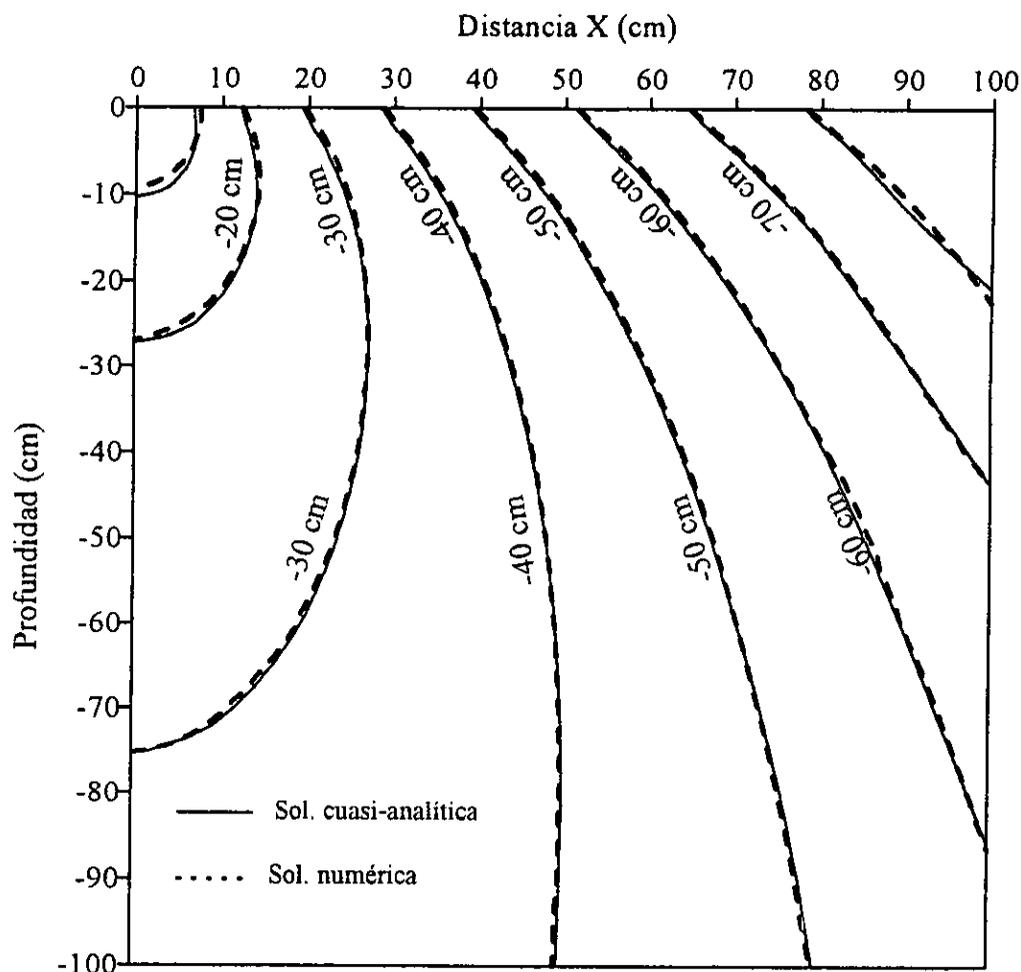


Fig. 4.3 Comparación de la distribución del potencial de presión (cm) para el suelo franco arenoso bajo una fuente puntual superficial ( $Q = 1 \text{ l.p.h}$ ).

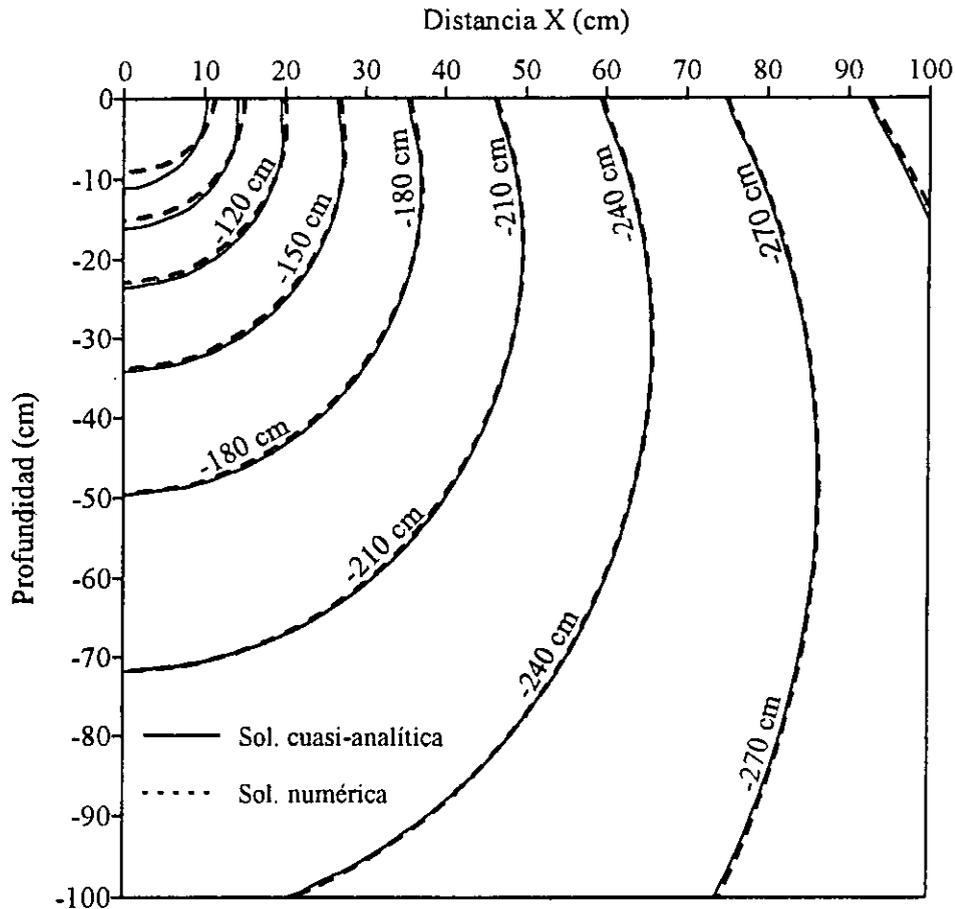


Fig. 4.4 Comparación de la distribución del potencial de presión (cm) para el suelo "Pima" franco arcilloso bajo una fuente puntual superficial ( $Q = 1 \text{ l.p.h}$ ).

## 4.2 COMPARACIÓN PARA EL CASO DE UN SISTEMA DE RIEGO POR CINTAS SUBSUPERFICIAL

### 4.2.1 Estado estacionario

Una segunda comparación es realizada analizando el proceso de infiltración bidimensional de agua en el suelo, originado por un sistema de riego por cintas subsuperficial.

En el primer caso se utilizó el suelo "Yolo" arcilloso (Amoozegar et al., 1984) con los siguientes parámetros para el modelo de Gardner:  $\alpha = 0.0367 \text{ cm}^{-1}$  y un valor de la conductividad hidráulica saturada de  $K_s = 9.3 \times 10^{-6} \text{ cm/s}$ . El gasto aplicado fue de  $10 \text{ cm}^2/\text{d}$  con una separación  $l$  entre las fuentes lineales de  $80 \text{ cm}$  localizadas a  $5 \text{ cm}$  de la superficie.

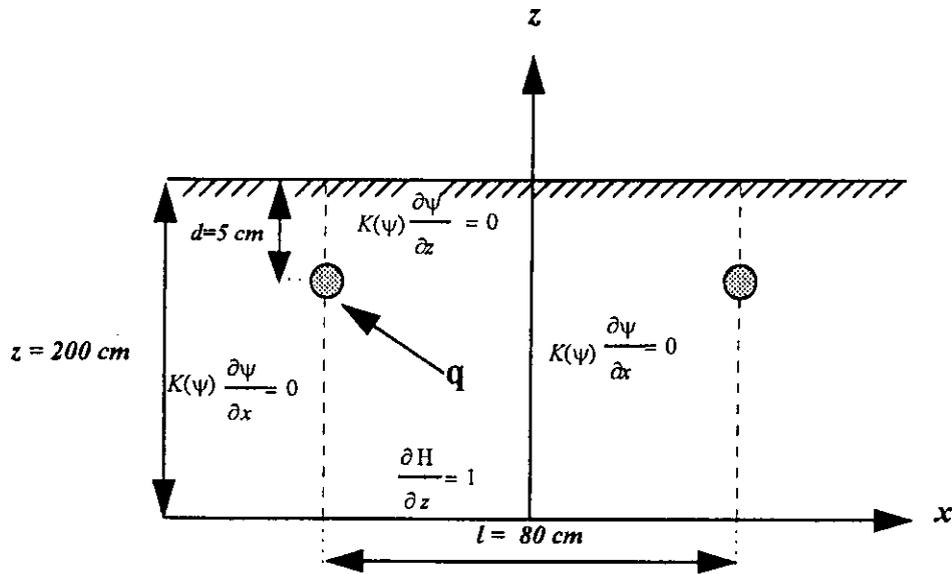


Fig. 4.5 Arreglo de fuentes lineales subsuperficiales para el suelo "Yolo" arcilloso.

La malla de elementos finitos para el suelo "Yolo" arcilloso se generó usando el método del mapeo y se prolongó arbitrariamente hasta una profundidad de  $200\text{ cm}$ , con el propósito de representar un medio semi-infinito. La malla de 500 nodos y 912 elementos tuvo espaciamientos mínimos de  $0.21\text{ cm}$  y  $0.36\text{ cm}$  alrededor de la fuente lineal en las direcciones horizontal y vertical respectivamente y máximos de  $4\text{ cm}$  y  $20.17\text{ cm}$  en la esquina inferior opuesta.

Con la intención de verificar que el esquema numérico puede ser aplicado a diferentes tipos de medios se seleccionó un segundo suelo con una alta conductividad hidráulica. La separación entre cintas de riego fue de  $l = 100\text{ cm}$ . A través de la fuente lineal localizada a  $10\text{ cm}$  de la superficie se aplicó un gasto de  $2880\text{ cm}^2/d$ . El suelo franco limoso (Russo, 1988) tiene las siguientes parámetros para el modelo de Gardner:  $\alpha = 0.0238\text{ cm}^{-1}$  y  $K_s = 1.5 \times 10^{-3}\text{ cm/s}$ . La malla utilizada ( $50 \times 200\text{ cm}$ ) contó de 625 nodos y 1152 elementos con espaciamientos mínimos de  $0.49\text{ cm}$  y  $0.40\text{ cm}$  y máximos de  $3.68\text{ cm}$  y  $19.57\text{ cm}$  en las direcciones "x" y "y" respectivamente.

En la modelación numérica se aprovechan las características simétricas que presenta el problema. Con el objetivo de obtener numéricamente la distribución del potencial de presión se siguieron dos procedimientos. El primero consistió en calcular la distribución directamente haciendo que el término de la derivada temporal de la ecuación 3.1 sea cero. Para este proceso el factor de relajación utilizado para el cálculo de la variable dependiente en la siguiente iteración fue de  $\alpha = 0.5$ , para lograr una mejor convergencia de la solución.

Un segundo procedimiento consistió en resolver el problema iniciando con una condición inicial arbitraria hasta un tiempo en el que no se registren cambios en el valor de la variable dependiente en los nodos. La solución obtenida utilizando los dos procedimientos anteriores fue la misma.

En las figs. 4.6 y 4.7 se realiza la comparación de las soluciones de elemento finito y de la ecuación 2.61 (con  $m=0$ ) para los dos tipos de suelo, registrándose una diferencia máxima del potencial de presión de  $0.3 \text{ cm}$  (0.5 %) en el suelo arcilloso y de  $0.95 \text{ cm}$  (1.45%) en el suelo franco limoso. Se puede concluir que ambas soluciones presentan un nivel de concordancia adecuado.

Mediante los dos ejemplos anteriores, se demuestra que el esquema de elemento finito puede ser utilizado para calcular la distribución de presiones y contenidos de humedad para diferentes procesos bidimensionales de movimiento de agua en medios porosos.

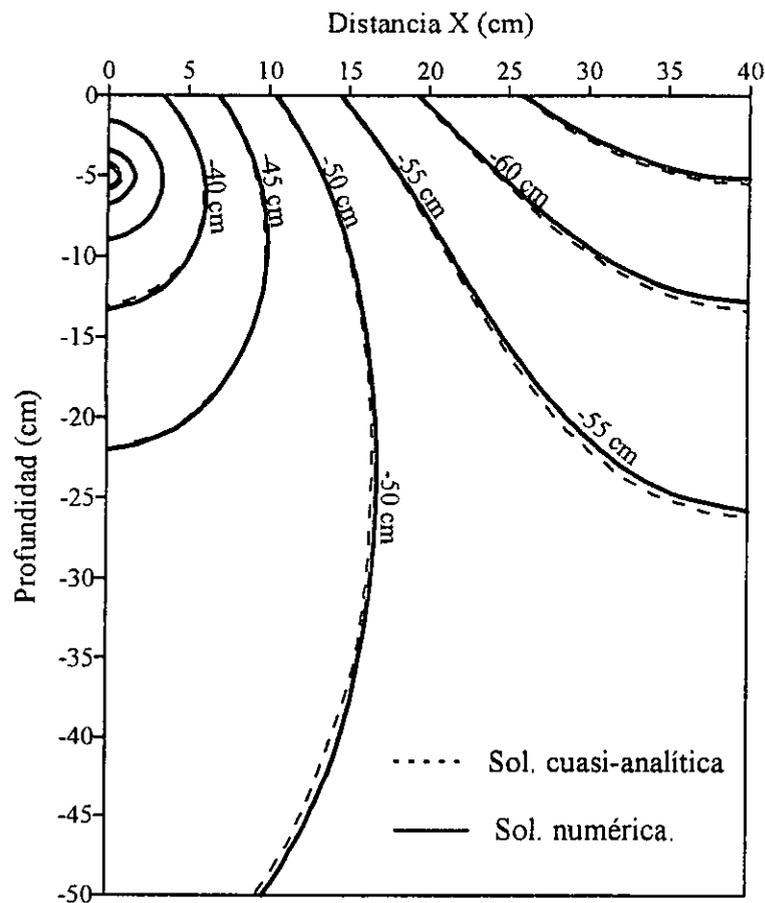


Fig. 4.6 Comparación de la distribución del potencial de presión para estado permanente para el suelo "Yolo" arcilloso, resultante de un sistema de riego por cintas subsuperficial localizado a  $5 \text{ cm}$  de la superficie.

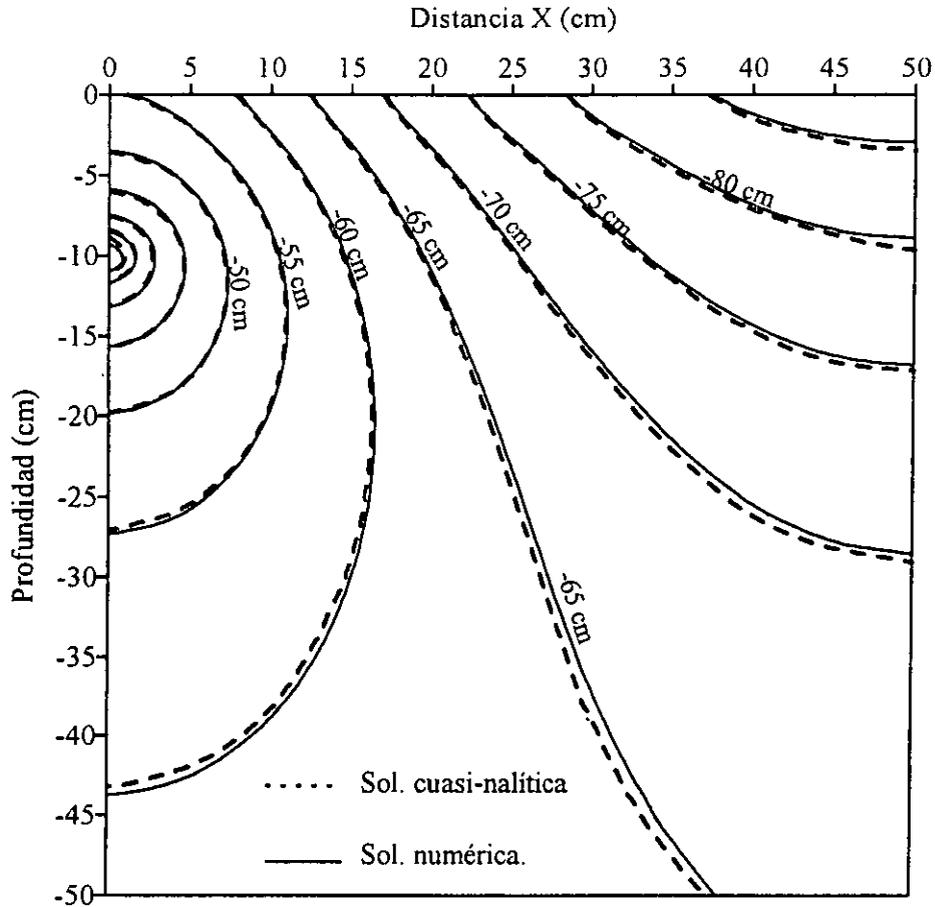


Fig. 4.7 Comparación de la distribución del potencial de presión para estado permanente para el suelo franco limoso, resultante de un sistema de riego por cintas subsuperficial localizado a 10 cm de la superficie.

#### 4.2.1 Estado transitorio

Una última comparación se realiza analizando el proceso transitorio de distribución de humedad bajo un escenario de riego por goteo subsuperficial.

En este caso, se compara contra la solución linealizada (ec. 2.59) seleccionando el suelo franco arcilloso “Yolo” (Angelakis et al., 1993) cuyos parámetros para el modelo de Gardner son:  $\alpha = 0.025 \text{ cm}^{-1}$  y  $K_s = 2.361 \times 10^{-4} \text{ cm/s}$ .

Aceptando la suposición de que la conductividad hidráulica  $K(\theta)$  es una función lineal del contenido de humedad, el valor del factor  $k$  calculado de los datos medidos fue de  $k = 2.611 \times 10^{-4} \text{ cm/s}$ . El gasto aplicado a través de la cintilla de riego localizada a 15 cm de

la superficie fue de  $q = 5.55 \times 10^{-3} \text{ cm}^3/\text{cm s}$  y la separación correspondiente entre fuentes correspondió a  $l = 100 \text{ cm}$ . El valor del potencial del presión inicial en el dominio completo fue de  $\psi = -300 \text{ cm}$ .

La malla ( $50 \times 200 \text{ cm}$ ) constó de 700 elementos y 1284 nodos con espaciamentos mínimos de  $\Delta x_{\min} = 0.33 \text{ cm}$ ,  $\Delta y_{\min} = 0.44 \text{ cm}$  alrededor de la fuente lineal y máximos de  $\Delta x_{\max} = 2.61 \text{ cm}$  y  $\Delta y_{\max} = 25.99 \text{ cm}$  en la esquina inferior opuesta.

Se realizó la simulación hasta un tiempo máximo de  $T_{\max} = 86400 \text{ s}$  con un paso de tiempo inicial de  $\Delta t_i = 0.1 \text{ s}$  y limitando el máximo a un valor de  $\Delta t = 240 \text{ s}$ .

En las figs. 4.8 y 4.9 se realiza la comparación de los resultados obtenidos para diferentes tiempos, donde se puede observar que las curvas equipotenciales de la solución numérica y la cuasi-analítica son muy similares, por lo que la confiabilidad del esquema numérico es indiscutible.

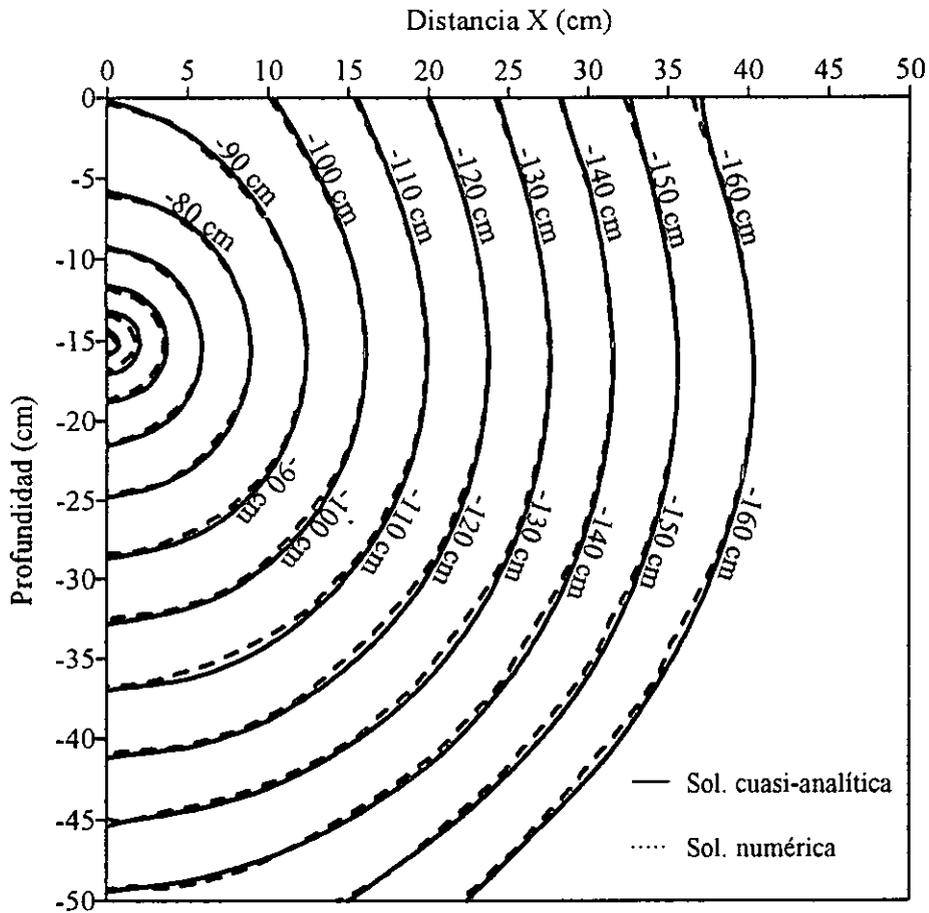


Fig. 4.8 Comparación de la distribución resultante de equipotenciales para un tiempo de 12 h con la solución cuasi-analítica y numérica para el suelo "Yolo" franco arcilloso.

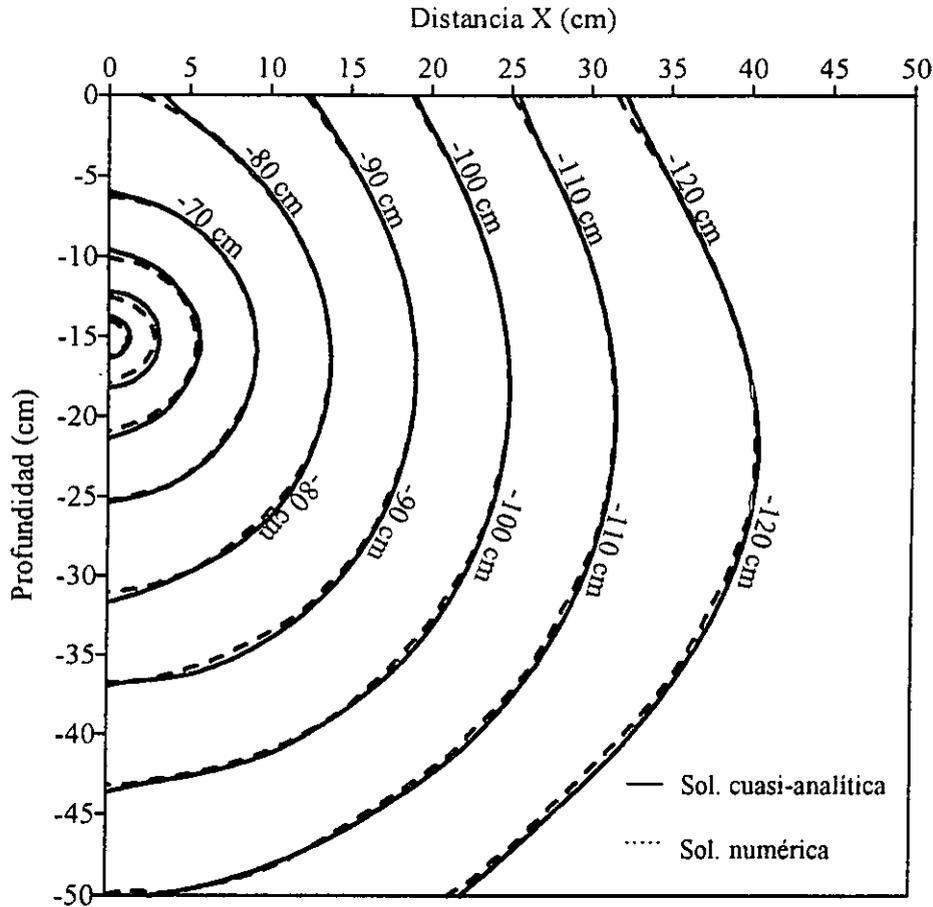


Fig. 4.9 Comparación de las curvas equipotenciales resultantes para un tiempo de 24 h para el suelo "Yolo" franco arcilloso.

En este mismo caso y para mostrar como la densidad de la discretización del dominio influye en la precisión de los resultados, se realizó una comparación de los valores del potencial que se obtienen para un tiempo de 6 h con la ec. 2.59 y los del esquema numérico utilizando diferentes grados de refinamiento de la malla de elementos finitos. Se utilizaron 7 mallas de elementos finitos con espaciamentos variables (tabla 4.2) y el valor de  $\psi$  en los puntos de comparación se calcularon usando la expresión 3.2. Los resultados se muestran en la tabla 4.3. El máximo número de nodos utilizados está limitado por el valor máximo del ancho de la semibanda que puede almacenar la computadora.

Para realizar una comparación de resultados se utilizó la prueba del error cuadrático medio, el cual está dado por:

$$E.C.M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\psi_{ana} - \psi_{num})^2 \quad (4.1)$$

donde  $n$  es el número total de datos,  $\psi_{ana}$  es el valor del potencial calculado con la solución cuasi-analítica y  $\psi_{num}$  es el valor obtenido con el esquema numérico.

	Malla 1	Malla 2	Malla 3	Malla 4	Malla 5	Malla 6	Malla 7
<b>Nodos</b>	100	200	300	400	500	600	690
<b>Elementos</b>	152	342	532	722	912	1102	1276
$\Delta x_{min}$ (cm)	5.00	1.60	0.92	0.64	0.49	0.39	0.39
$\Delta z_{min}$ (cm)	0.74	0.74	0.74	0.74	0.74	0.74	0.51
$\Delta x_{max}$ (cm)	20.0	9.51	6.22	4.63	3.68	3.06	3.06
$\Delta z_{max}$ (cm)	27.72	27.72	27.72	27.72	27.72	27.72	24.16

Tabla 4.2. Características de las mallas de elementos finitos utilizadas en la simulación.

El error numérico total está compuesto por la suma de los errores de redondeo y truncado. A medida que la malla de elementos finitos es más densa, los errores de redondeo asociados con la capacidad de manejo de cifras significativas del equipo de cómputo son los más importantes, mientras que para mallas gruesas, el error de truncamiento es más significativo.

De los resultados obtenidos se puede observar que cuando la malla de elementos finitos es más densa, se obtiene una solución más precisa. Sin embargo, debe considerarse que este procedimiento está limitado por la precisión del equipo de cómputo disponible.

De la tabla 4.3 se puede concluir que se pueden obtener resultados adecuados en este tipo de escenarios de riego por goteo, apartir de discretizar el dominio con 400 nodos.

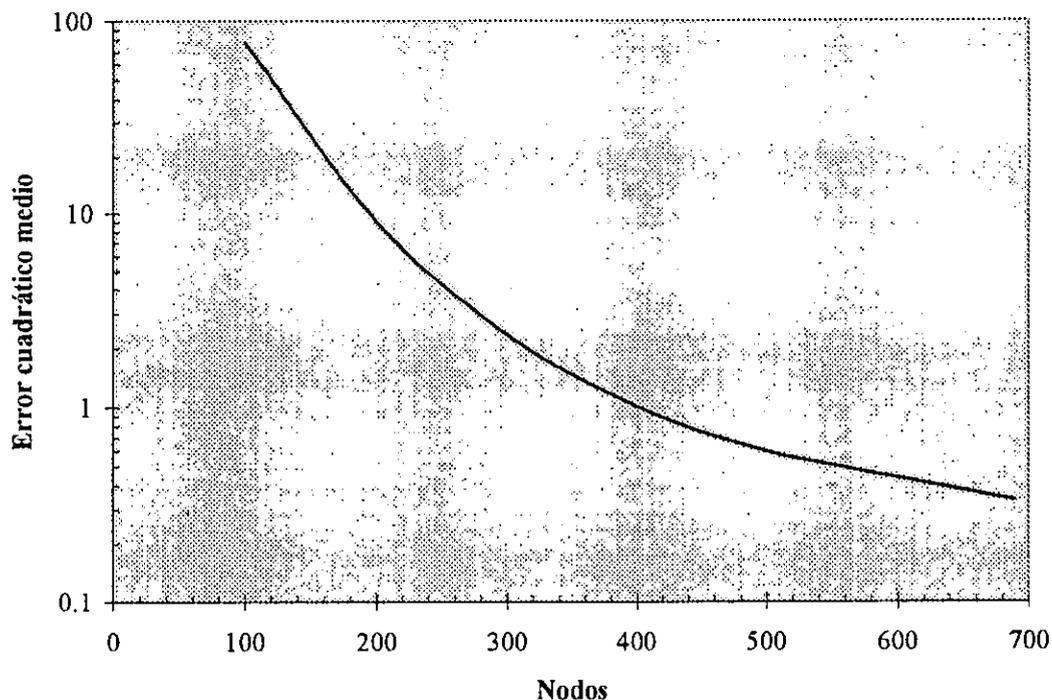


Fig. 4.10 Variación del error utilizando diferentes discretizaciones del dominio.

$x$ (cm)	$z$ (cm)	$\Psi_{0m}$ (cm)	$\Psi_{100}$ (cm)	$\Psi_{200}$ (cm)	$\Psi_{300}$ (cm)	$\Psi_{400}$ (cm)	$\Psi_{500}$ (cm)	$\Psi_{600}$ (cm)	$\Psi_{900}$ (cm)
0.0	0.0	-105.40	-107.97	-106.41	-106.17	-106.11	-106.08	-106.06	-105.90
5.0	0.0	-108.70	-111.69	-110.10	-109.69	-109.53	-109.44	-109.44	-109.27
10.0	0.0	-117.80	-123.47	-119.48	-118.84	-118.65	-118.56	-118.52	-118.36
20.0	0.0	-146.90	-151.03	-148.13	-147.61	-147.47	-147.42	-147.41	-147.23
30.0	0.0	-184.60	-182.59	-183.80	-184.21	-184.39	-184.49	-184.61	-184.47
50.0	0.0	-249.50	-229.21	-242.38	-246.12	-247.59	-248.33	-248.73	-248.64
0.0	-10.0	-77.10	-78.36	-78.02	-77.90	-77.86	-77.84	-77.82	-77.33
5.0	-10.0	-86.30	-89.75	-87.55	-87.16	-87.00	-86.91	-86.91	-86.68
10.0	-10.0	-102.40	-106.49	-103.49	-103.06	-102.93	-102.88	-102.86	-102.75
20.0	-10.0	-137.70	-140.55	-138.66	-138.32	-138.24	-138.21	-138.20	-138.12
30.0	-10.0	-177.10	-175.17	-176.69	-177.12	-177.19	-177.28	-177.35	-177.32
50.0	-10.0	-242.50	-222.13	-235.33	-239.02	-240.52	-241.31	-241.76	-241.58
5.0	-15.0	-76.20	-79.63	-76.58	-76.34	-76.36	-76.41	-76.35	-76.48
10.0	-15.0	-97.60	-99.71	-98.25	-98.05	-98.01	-98.00	-98.00	-97.90
20.0	-15.0	-135.90	-137.73	-136.61	-136.41	-136.37	-136.36	-136.36	-136.21
30.0	-15.0	-176.00	-173.59	-175.52	-176.06	-176.17	-176.28	-176.37	-176.27
50.0	-15.0	-242.00	-221.09	-234.77	-238.41	-239.96	-240.70	-241.12	-240.80
0.0	-20.0	-74.50	-74.90	-74.73	-74.74	-74.76	-74.77	-74.78	-74.63
5.0	-20.0	-85.20	-88.21	-86.31	-86.06	-85.87	-85.66	-85.55	-85.52
10.0	-20.0	-101.20	-106.41	-103.29	-102.74	-102.55	-102.46	-102.40	-102.23
20.0	-20.0	-137.50	-140.55	-139.08	-138.81	-138.74	-138.72	-138.72	-138.42
30.0	-20.0	-178.80	-175.27	-177.51	-177.99	-178.17	-178.33	-178.39	-178.01
50.0	-20.0	-242.80	-222.06	-236.24	-239.95	-241.35	-242.03	-242.41	-241.96
0.0	-30.0	-112.40	-114.65	-113.42	-113.39	-113.38	-113.31	-113.30	-113.11
5.0	-30.0	-116.60	-118.89	-117.93	-117.73	-117.54	-117.30	-117.07	-116.72
10.0	-30.0	-125.30	-129.22	-128.24	-127.15	-126.71	-126.48	-126.33	-125.57
20.0	-30.0	-153.40	-156.87	-155.65	-154.87	-154.57	-154.42	-154.33	-153.98
30.0	-30.0	-189.20	-188.32	-190.99	-190.59	-190.34	-190.20	-190.06	-189.95
50.0	-30.0	-249.20	-230.30	-244.38	-247.73	-248.89	-249.33	-249.40	-249.23
<b>E.C.M.</b>			78.766	9.104	2.346	1.002	0.593	0.441	0.337

Tabla 4.3 Valores del potencial de presión en los puntos de comparación

## CAPITULO V

### SIMULACIÓN DE CASOS PRÁCTICOS DE INTERÉS AGRÍCOLA

En el riego por goteo se realiza una aplicación frecuente y localizada de agua y agroquímicos con un alto grado de uniformidad, disminuyendo el volumen de suelo humedecido y restringiendo el desarrollo de las raíces a una zona de mojado. Tales características permiten elevar la producción.

Los sistemas de goteo subsuperficiales al encontrarse localizados a una determinada distancia de la superficie, maximizan las ventajas que se tienen en el riego por goteo y además, al no mantener humedecida en forma constante la superficie del suelo, disminuyen la proliferación de malas hierbas.

El proceso de distribución y redistribución de agua en suelos agrícolas, originado por una sistema de riego por cintillas, es analizado utilizando el modelo numérico desarrollado. Mediante su empleo, se describe la respuesta del medio ante las posibles variaciones en la localización espacial de emisores, flujos aplicados y periodos de riego.

#### 5.1 Simulación de las condiciones generadas por un sistema de riego subsuperficial.

Una de las principales características a considerar en un sistema riego por goteo subsuperficial, es la aplicación de pequeños volúmenes de agua durante largos periodos de tiempo de forma frecuente. lo cual origina que en el medio se generen condiciones cercanas a las que prevalecen en estado permanente.

Considerando lo anterior, se realizaron simulaciones con el propósito de determinar la variación en la distribución de humedad y potencial de presión, bajo diferentes distribuciones espaciales de los emisores y variaciones en el caudal aplicado, para condiciones estacionarias (fig. 5.1). Adicionalmente, se considera que el medio bajo análisis es homogéneo aunque el modelo numérico tiene la capacidad de manejar zonas estratificadas.

Para este análisis, se utiliza un suelo franco limoso "touchet" (Amoozegar et al. 1984) con los siguientes parámetros para el modelo de van Genuchten:  $\alpha = 6.318 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$  y un valor para la conductividad hidráulica saturada de  $K_s = 4.86 \times 10^{-4} \text{ cm/s}$ . Además, se eligió una distribución inicial uniforme del contenido de humedad arbitraria.

La separación entre cintas de riego simulada varia entre el rango de 40 *cm* y 200 *cm* y los emisores se encuentran localizados a 15 *cm* de la superficie.

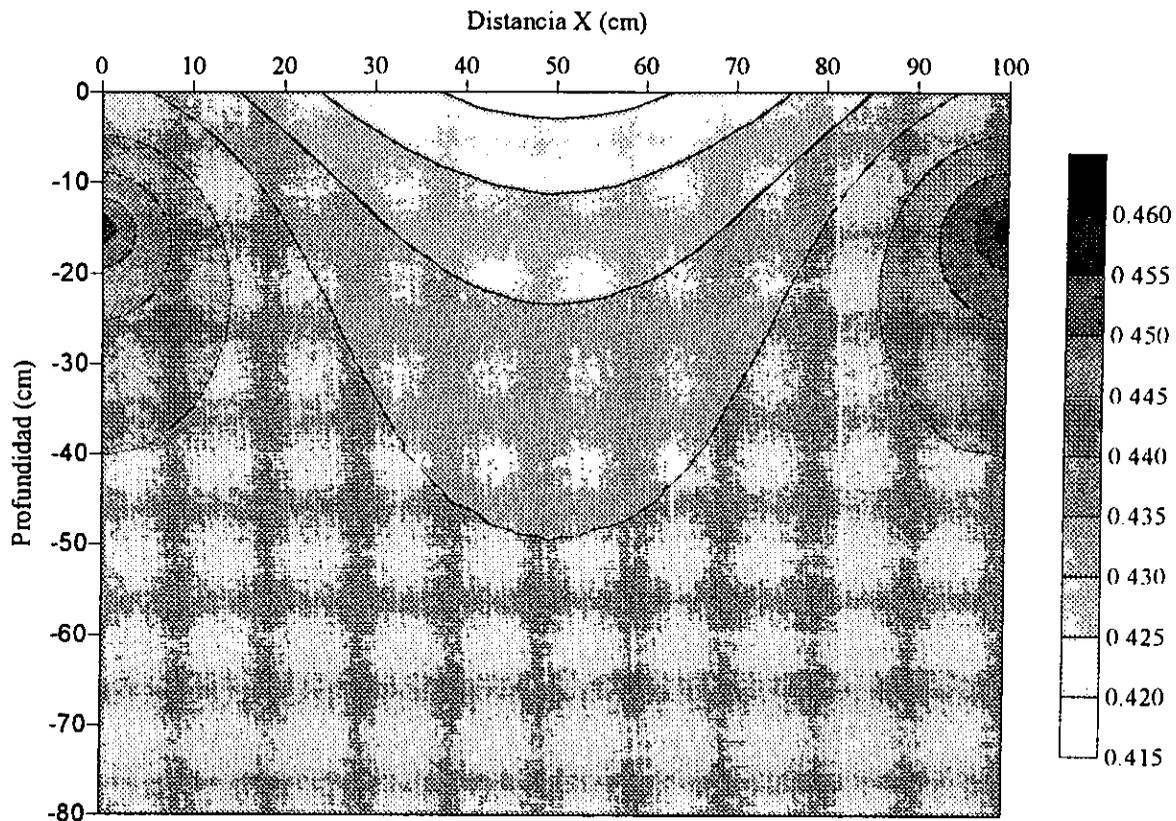


Fig. 5.1 Distribución del contenido de humedad originado por un sistema de riego por cintas subsuperficial para un gasto aplicado de  $Q = 896 \text{ cm}^3/d \text{ cm}$ .

Generalmente, los suelos que tienen una alta capacidad de drenado (grandes valores de conductividad hidráulica saturada) tales como los suelos arenosos, requieren de una aplicación de flujo que varía entre  $89.6 - 116.5 \text{ lt/d} \cdot \text{m}$  ( $0.5 - 0.65 \text{ gpm}/100 \text{ ft}$ ). Este gasto puede ser utilizado en cultivos tales como fresas, tomates, pimientos y pepinos. Cuando los suelos tienen una baja conductividad hidráulica, se requiere aplicar gastos de baja intensidad que oscilan entre  $44.8 - 53.8 \text{ lt/d} \cdot \text{m}$  ( $0.25 - 0.3 \text{ gpm}/100 \text{ ft}$ ).

Considerando que la mayoría de los emisores comerciales están diseñados entre los rangos anteriormente señalados, los tres gastos elegidos para realizar la simulación numérica fueron de:  $Q_1 = 1165 \text{ cm}^3/d \text{ cm}$ ,  $Q_2 = 896 \text{ cm}^3/d \text{ cm}$  y  $Q_3 = 538 \text{ cm}^3/d \text{ cm}$ .

En la fig. 5.2 se muestran los resultados obtenidos graficando el potencial de presión crítico (localizado a la mitad de la distancia entre emisores lineales en la superficie) y la separación entre fuentes para los gastos considerados. Esta gráfica puede ser utilizada como un criterio de diseño para elegir tanto la separación entre cintas de riego o el gasto que se desea aplicar para mantener los niveles de tensión en el suelo requeridos por el cultivo. De la tabla 5.1 se puede concluir que en suelos de textura fina, es posible aumentar la separación entre líneas de riego, manteniendo bajos niveles de tensión en el suelo regulando el gasto

aplicado. Sin embargo, en suelos que tengan una alta capacidad de drenado, como las arenas, el espaciamiento entre emisores debe ser menor que el de los suelos finos, debido a que se tiene un mayor movimiento vertical del flujo de agua.

Por medio de la utilización del modelo numérico es posible generar una serie de gráficas de diseño, que consideren las propiedades hidráulicas de los medios bajo análisis.

Separación entre cintas de riego (cm)	Potencial de presión crítico $\psi_c$ (cm)		
	$Q_1 = 116.5$ lt/dm	$Q_2 = 89.6$ lt/dm	$Q_3 = 53.8$ lt/dm
40	-48.00	-59.36	-81.36
50	-58.10	-74.01	-98.14
60	-70.78	-86.20	-110.92
80	-91.12	-105.92	-131.29
100	-107.59	-122.37	-148.61
120	-122.22	-136.98	-164.44
140	-135.09	-149.76	-179.13
160	-147.02	-161.79	-192.91
180	-158.24	-173.09	-205.94
200	-168.93	-183.84	-218.34

Tabla 5.1 Valores calculados del potencial de presión crítico a la mitad de la separación entre cintas de riego para los gastos utilizados

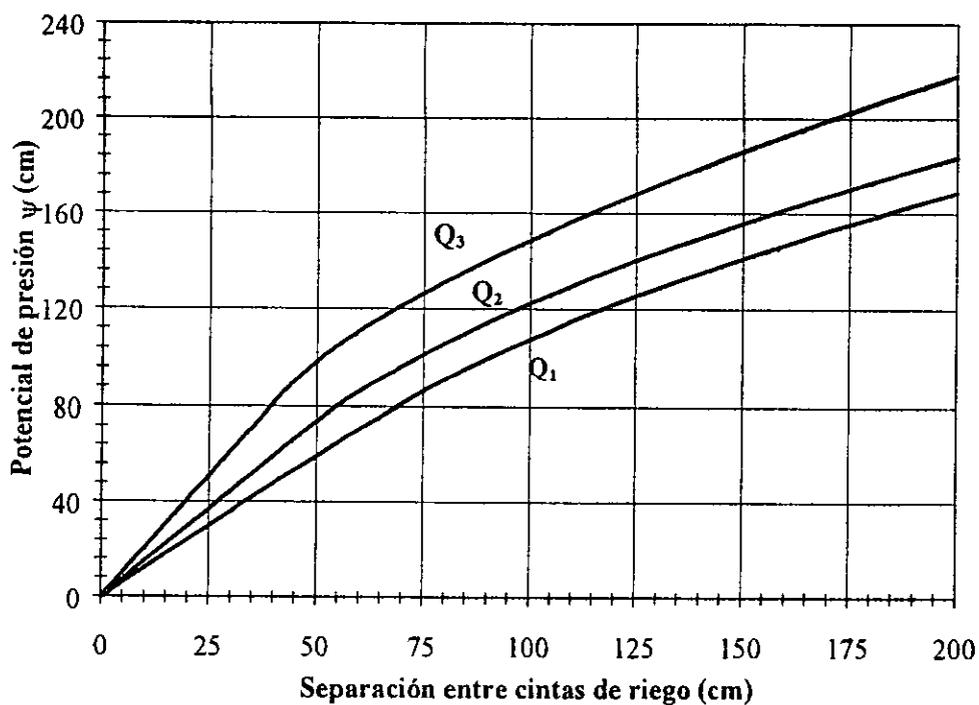


Fig. 5.2 Variación del potencial de presión crítico para el sistema de riego por cintas localizado a 15 cm de la superficie.

## 5.2 Simulación de sistemas de riego por goteo por pulsos usando fuentes lineales

En este caso, el objetivo consistió en analizar el comportamiento de la distribución del potencial de presión en un sistema de riego por cintas subsuperficial, bajo aplicaciones de gasto en forma continua y por pulsos (fig. 5.3) y determinar, con cual de las dos alternativas se logra establecer mejores condiciones de humedad.

En este ejemplo se utilizó el suelo franco (Warrick, 1985) que tiene los siguientes parámetros para el modelo de van Genuchten:  $\theta_s = 0.45$ ,  $\theta_r = 0.10$ ,  $\alpha = 0.01 \text{ cm}^{-1}$ ,  $m = 0.5$  y  $K_s = 6 \times 10^{-4} \text{ cm/s}$ .

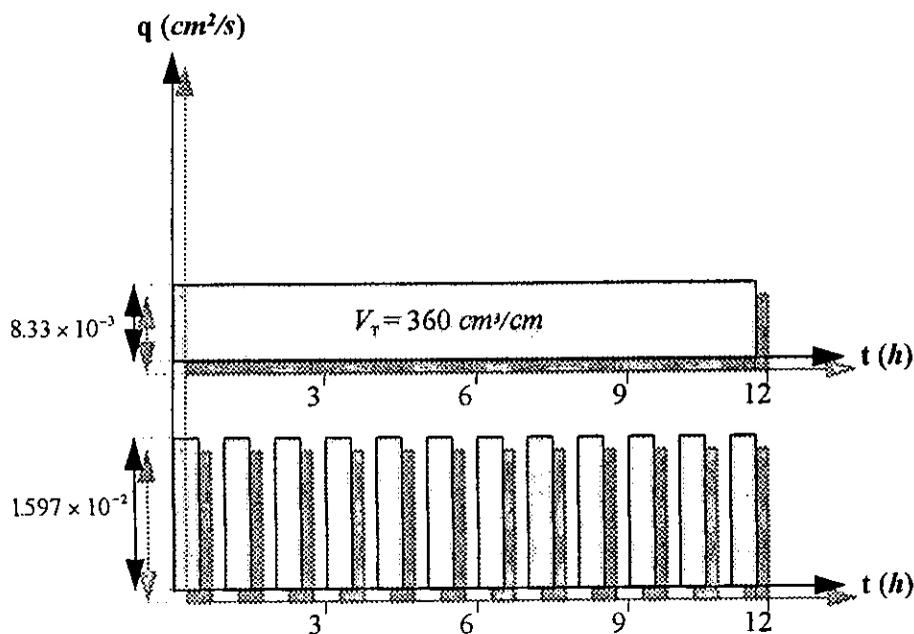


Fig. 5.3 Representación esquemática de la aplicación del flujo en los sistemas de riego por goteo continuo y por pulsos.

Las fuentes lineales paralelas se encuentran localizadas a una profundidad de  $10 \text{ cm}$  de la superficie y separadas a una distancia de  $l = 60 \text{ cm}$ . El volumen total aplicado en los dos escenarios es de  $V_T = 360 \text{ cm}^3/\text{cm}$ .

Se simuló durante un tiempo de  $T_{max} = 43200 \text{ s}$  para ambos casos (continua y por pulsos). En el riego por pulsos se realizaron 12 aplicaciones de la misma magnitud ( $n_q = 12$ ), con un gasto de  $q = 0.015972 \text{ cm}^2/\text{s}$  intercaladas con periodos de la misma

duración  $\Delta t_q = 1878.28 s$  en los cuales no se aplicó el gasto. Para la simulación numérica se toma en cuenta las características simétricas del problema.

$$V_r = q \Delta t_q n_q \quad (5.1)$$

En la fig. 5.4 se observa que el sistema por pulsos logra mantener mayores condiciones de humedad en la zona de raíces y cuando la profundidad aumenta los dos sistemas mantienen condiciones similares. En la fig. 5.5 se comprueba que para el caso de riego por pulsos, se logran condiciones de humedad más óptimas para las raíces y conforme la distancia se aproxima al punto medio de separación entre cintas de riego, prevalecen condiciones más secas que las que se logran con el sistema de riego continuo. Sin embargo, la última diferencia señalada es poco significativa y considerablemente menor a la que se tiene para distancias menores de  $x < 15 cm$ , por lo cual se concluye que al utilizar un sistema por pulsos se mantiene una humedad más alta en la zona radicular.

Si bien, el sistema de riego por goteo por pulsos permite establecer mejores condiciones de humedad, este procedimiento sólo puede ser aplicado en la práctica cuando se disponga de un sistema de riego automatizado que permita fácilmente controlar el volumen y los periodos de aplicación del flujo.

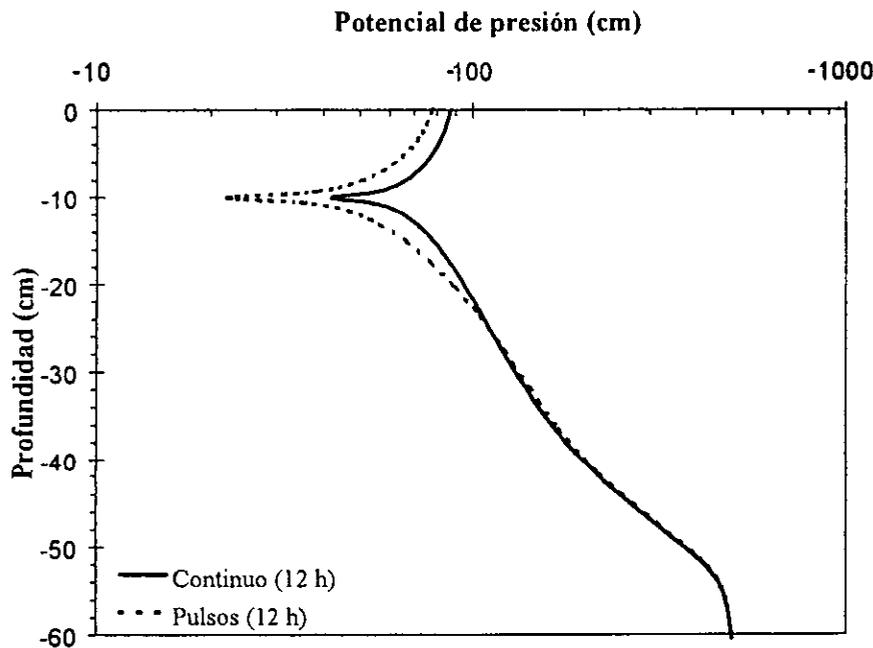


Fig. 5.4 Distribución vertical del potencial de presión en el origen  $x=0$

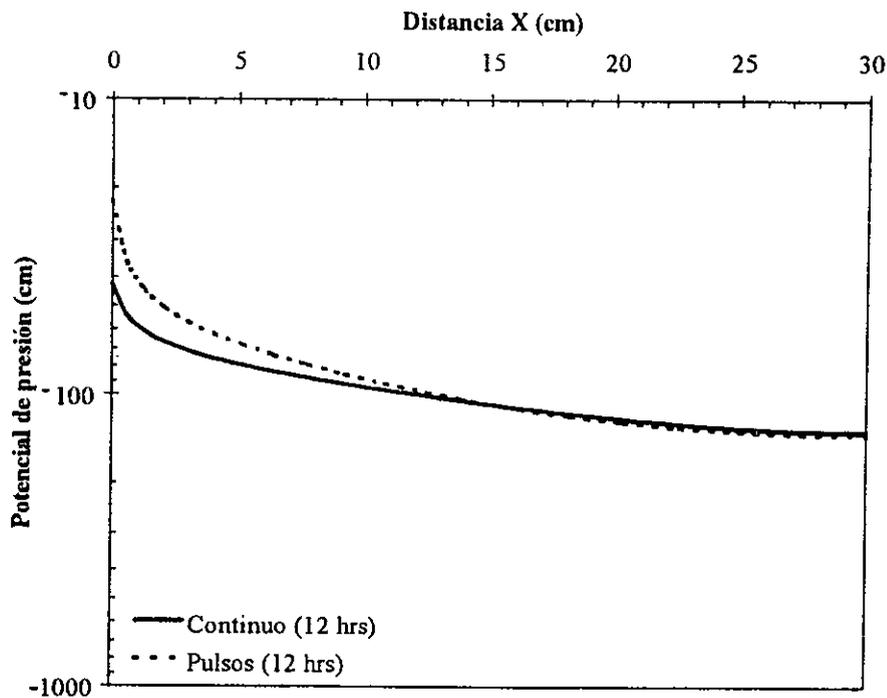


Fig. 5.5 Distribución lateral del potencial de presión a 10 cm de la superficie.

### 5.3 Simulación de fuentes lineales en suelos arenosos

En suelos constituidos principalmente por materiales gruesos como las arenas, el efecto de la gravedad origina que se tenga un mayor movimiento de agua en la dirección vertical que en la horizontal (alta capacidad de drenado). Cuando se pretende realizar la aplicación de fertilizantes o cualquier tipo de agroquímicos a través del mismo sistema de riego, se deben tener precauciones para evitar la contaminación de las aguas subterráneas, sobretodo, en medios con niveles freáticos someros.

En estos casos, una alternativa para tratar de disminuir el movimiento vertical del frente de humedad consiste en colocar una segunda cinta de riego por debajo de la línea principal y rellenar con un material arcilloso la zona que rodea a esta fuente. El procedimiento consiste en realizar una aplicación de un pequeño volumen de agua durante un periodo de tiempo corto a través de la segunda línea de riego. Como el material que rodea a la cinta de riego secundaria tiene una conductividad hidráulica baja, el movimiento de agua en esta zona requiere de un periodo de tiempo mayor y con ello se pretende lograr que esta región permanezca con un contenido de humedad alto. Posteriormente, se aplica el flujo requerido a través de la línea principal que permita satisfacer la demanda de agua requerida por el cultivo.

Para obtener una aproximación de las condiciones que se generan en un sistema real, se realizó una simulación numérica del caso. Para ello, se consideró un sistema de fuentes lineales espaciadas una distancia  $l = 100 \text{ cm}$ . En una primera etapa se consideraron dos escenarios, en el primero, se tiene un medio compuesto por un material grueso. Para este caso, se utiliza el suelo arenoso "Pomona" (Vellidis et al., 1989) con los siguientes parámetros para el modelo van Genuchten:  $\theta_s = 0.42$ ,  $\theta_r = 0.12$ ,  $\alpha = 0.029 \text{ cm}^{-1}$ ,  $n = 3.01$  y  $K_s = 2.861 \times 10^{-3} \text{ cm/s}$ .

En el segundo escenario (fig. 5.6), la sección de suelo que rodea al emisor inferior se rellenó con una arcilla "Chino" cuyos parámetros para el modelo de van Genuchten reportados por Amoozegar et al. (1984) son:  $\theta_s = 0.45$ ,  $\theta_r = 0.12$ ,  $\alpha = 8.3 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$ ,  $n = 2.0$  y  $K_s = 2.29 \times 10^{-5} \text{ cm/s}$ .

A través de la línea secundaria localizada a una profundidad de  $30 \text{ cm}$ , se aplicó un flujo de  $Q_s = 100 \text{ l/d} \cdot \text{m}$  durante un tiempo de  $T_s = 2 \text{ h}$ . Por la línea principal de riego localizada a una distancia de  $15 \text{ cm}$  de la superficie, se aplicó un gasto de  $Q_p = 116.5 \text{ l/d} \cdot \text{m}$  durante un tiempo de  $T_p = 24 \text{ h}$ .

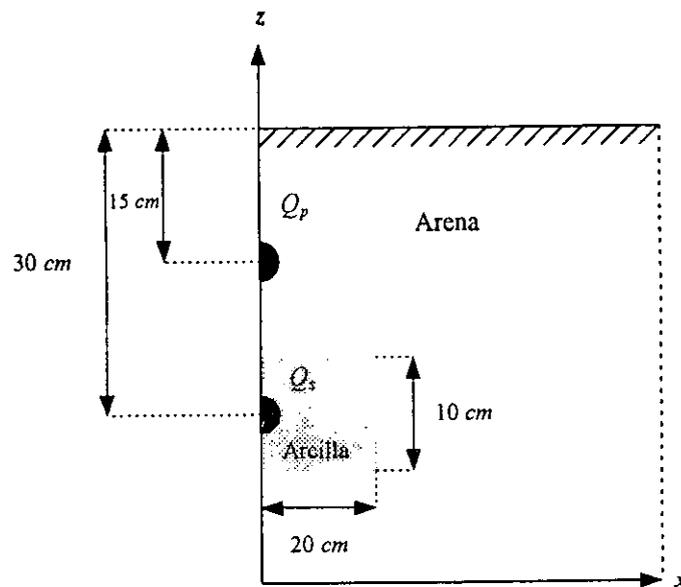


Fig. 5.6 Representación esquemática de dos fuentes lineales

En los resultados presentados en las figs. 5.7 - 5.8 se puede observar que al utilizar el sistema de dos tuberías con relleno de arcilla, el movimiento horizontal del frente de humedad aumenta significativamente, disminuyendo el vertical. Para tener una aproximación para el movimiento de solutos las figs. 5.9 y 5.10 muestran el campo de velocidades de los

dos escenarios considerados, constatando que el movimiento horizontal del flujo de agua aumenta para el segundo escenario, lo que permite concluir que esta técnica puede ser utilizada para tratar de disminuir el movimiento de químicos fuera de la zona de raíces.

Con el objetivo de determinar si la aplicación del gasto a través de la segunda línea de riego subsuperficial influye en la disminución del movimiento vertical del flujo de agua, se consideraron dos escenarios adicionales. En el tercer escenario, se considera que se tiene el relleno de material arcilloso sin fuente lineal (cinta de riego) y en el cuarto, se tienen dos cintas de riego en el suelo arenoso sin ningún tipo de relleno alrededor de la fuente secundaria. Se determinó para los cuatro escenarios, el volumen de agua acumulado en una región de  $30 \times 50$  cm, distancias horizontal y vertical respectivamente medidas a partir del origen en la superficie. El volumen de agua en el elemento se calculó con:

$$V_e = A_e \left( \frac{\theta_i + \theta_j + \theta_k}{3} \right) \quad (5.2)$$

donde  $\theta$  es el contenido de humedad en los nodos del elemento, y  $V_e$  es el volumen de agua por unidad de longitud en el elemento.

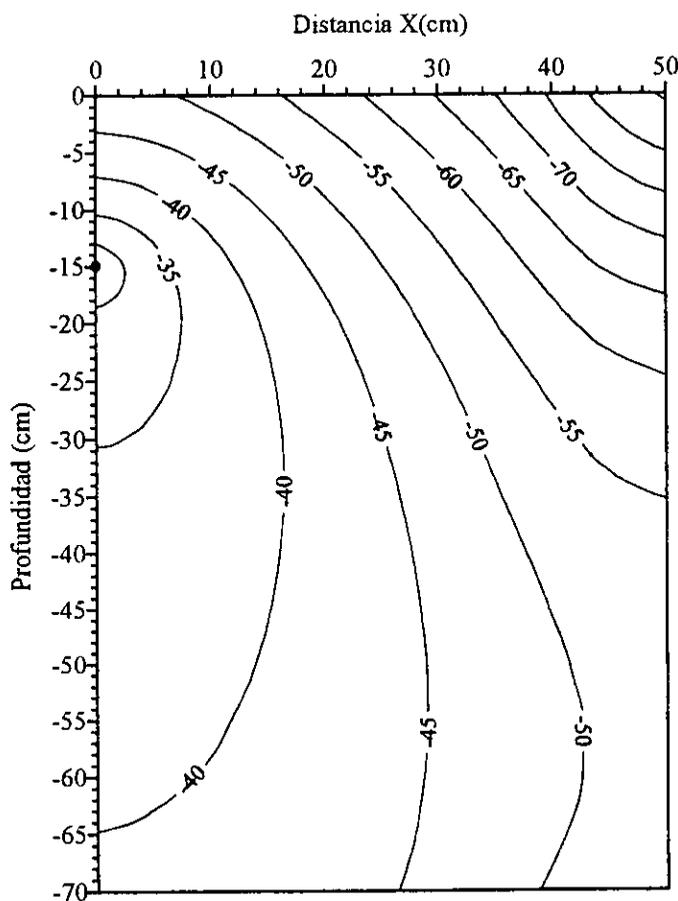


Fig. 5.7 Distribución del potencial de presión (cm de agua) en el suelo arenoso "Pomona" para una aplicación de flujo a través de la línea principal (escenario 1).

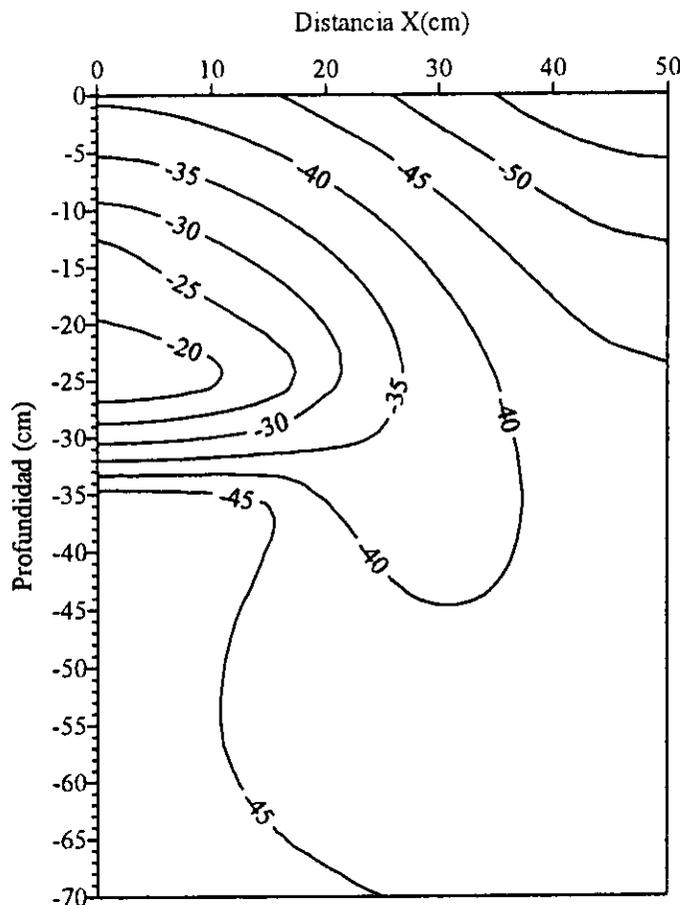
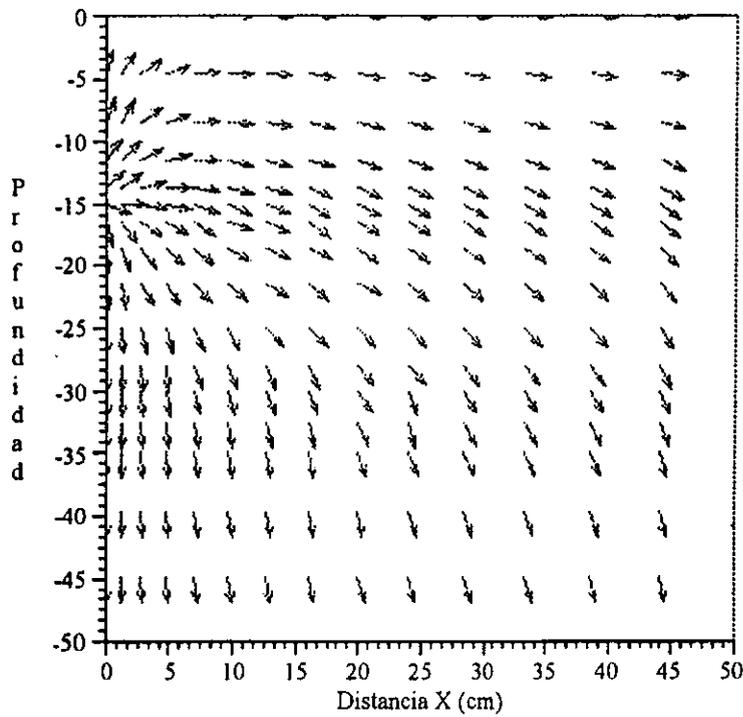


Fig. 5.8 Distribución del potencial de presión (cm de agua) en el suelo arenoso "Pomona" para el sistema de dos tuberías con relleno de arcilla (escenario 2).

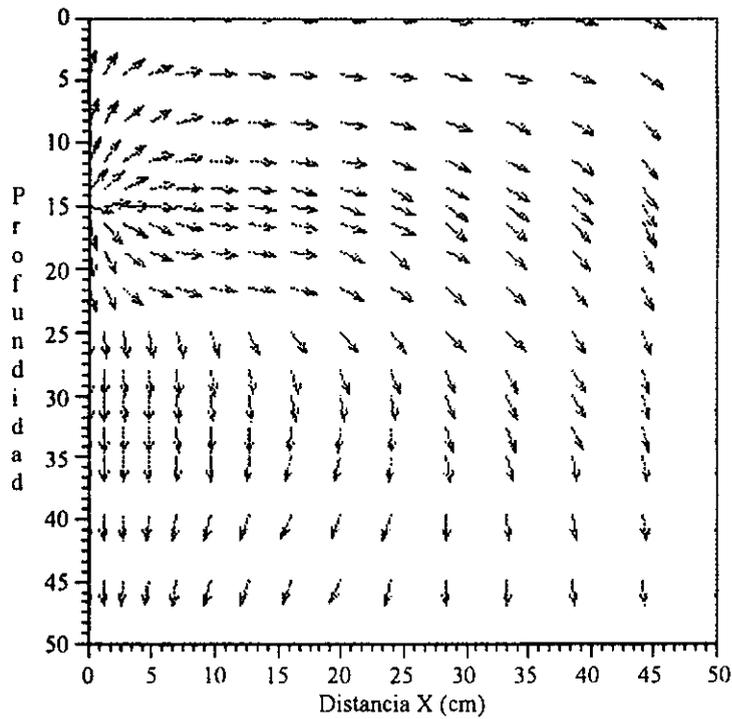
De los resultados del volumen de agua acumulado en los cuatro escenarios presentados en la tabla 5.2., se observa que el escenario con estrato de arcilla sin fuente lineal (escenario 3) origina condiciones de humedad iguales en la región considerada a las que se tienen cuando se aplica un flujo de agua a través de la línea secundaria (escenario 2) y la alternativa que consiste en colocar dos cintas de riego sin ninguna clase de relleno no aumenta el movimiento horizontal del agua (escenario 4). Por lo que se concluye que la mejor alternativa para disminuir el movimiento vertical del agua, es colocar un relleno de un material fino por debajo de la fuente lineal principal (fig. 5.11).

Escenario	Volumen (lts/m)													
	0 hrs	2 hrs	4 hrs	6 hrs	8 hrs	10 hrs	12 hrs	14 hrs	16 hrs	18 hrs	20 hrs	22 hrs	24 hrs	
1	26.2	30.5	34.3	36.9	38.4	39.2	39.7	40.0	40.2	40.3	40.4	40.5	40.6	
2	26.7	31.6	36.4	40.5	43.3	45.2	46.4	47.2	47.8	48.2	48.4	48.6	48.6	
3	26.2	31.1	35.9	40.1	43.0	45.0	46.3	47.2	47.8	48.2	48.4	48.6	48.6	
4	26.2	30.5	34.4	37.0	38.5	39.2	39.7	40.0	40.2	40.3	40.4	40.5	40.6	

Tabla 5.2: Variación del volumen de agua almacenado en la región considerada



**Fig. 5.9** Campo de velocidades originado por una fuente lineal localizada a 15 cm de la superficie en un medio arenoso homogéneo (escenario 1).



**Fig. 5.10** Campo de velocidades originado por el sistema de fuentes lineales con relleno de arcilla localizadas a 15 y 30 cm de la superficie (escenario 2).

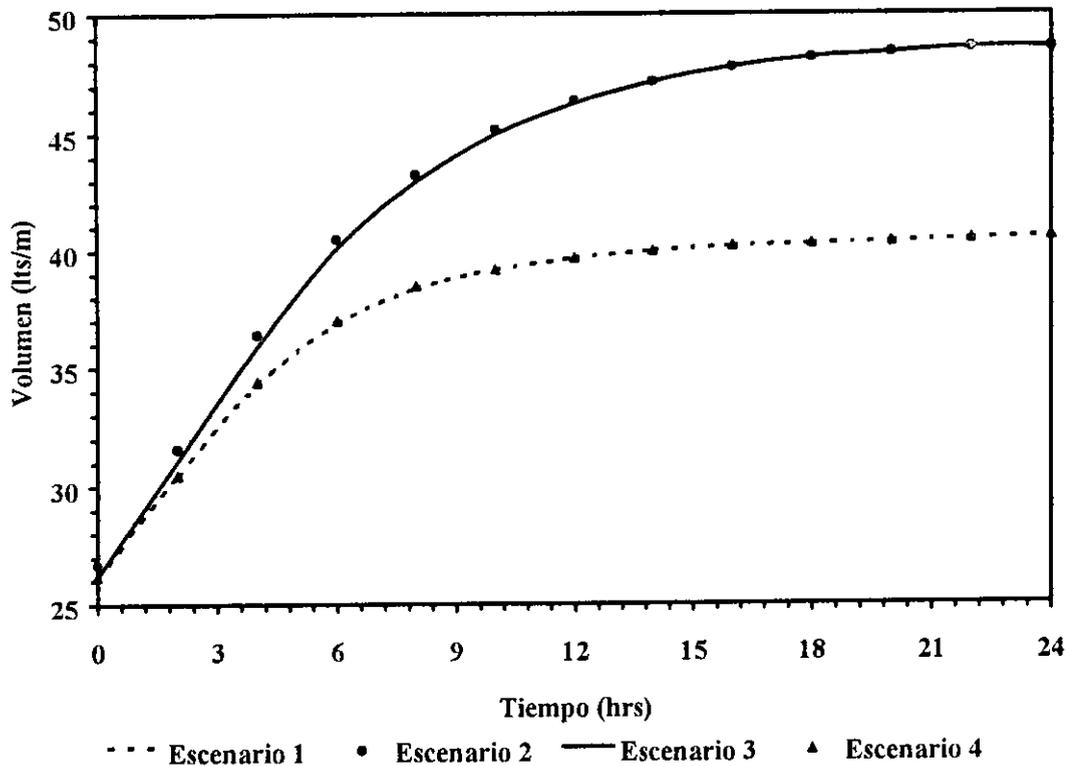


Fig. 5.11 Variación del volumen de agua infiltrado en la región considerada.

#### 5.4 Simulación de sistemas de riego subsuperficiales con evaporación en la superficie.

Aunque el riego por goteo subsuperficial reduce las pérdidas por evaporación, es necesario considerar este efecto para determinar de forma más precisa los patrones de distribución de humedad y el posible movimiento de solutos en la región.

Para ello, se consideraron tres sistemas de riego por goteo subsuperficiales cuyos emisores se localizan a 5, 15 y 25 cm de la superficie y separados una distancia  $l=100$  cm. El gasto aplicado a través del emisor fue de  $Q=1165\text{cm}^2/d$  y el medio utilizado en la simulación es el suelo arenoso "Pomona" (sección 5.3).

Se consideró una tasa de evaporación uniforme sobre toda la superficie de  $E_v = 5\text{ mm}/d$ . Considerando que la situación más desfavorable se presenta cuando se tiene una evaporación constante durante todo el periodo de riego y que en estos sistemas se generan condiciones "casi" permanentes, se obtuvo la distribución de humedad en el suelo para condiciones estacionarias.

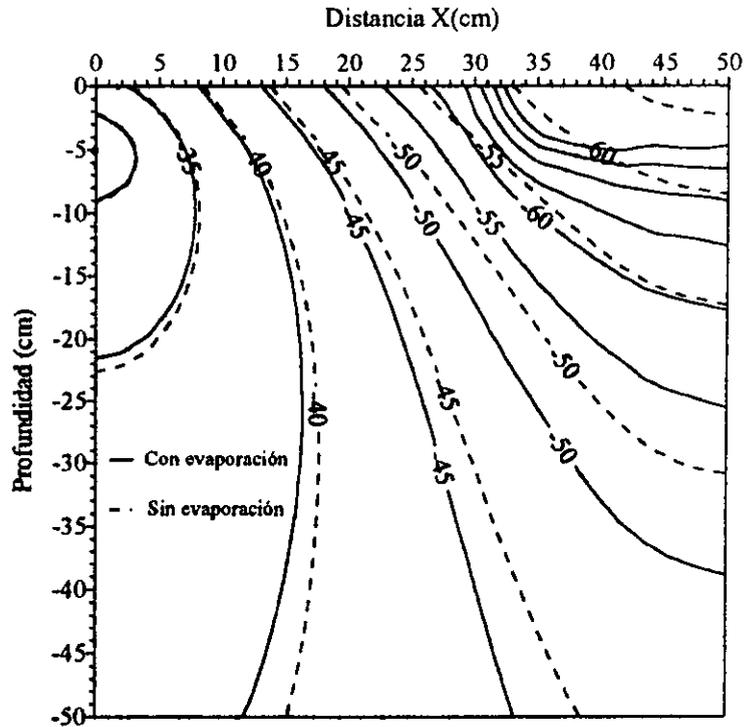


Fig. 5.12 Comparación de la distribución de potencial de presión (cm) en la arena "Pomona" para los casos en el que se considera flujo nulo en la superficie y para cuando se toma en cuenta la evaporación, para un sistema de riego por cintas localizado a 5 cm de la superficie.

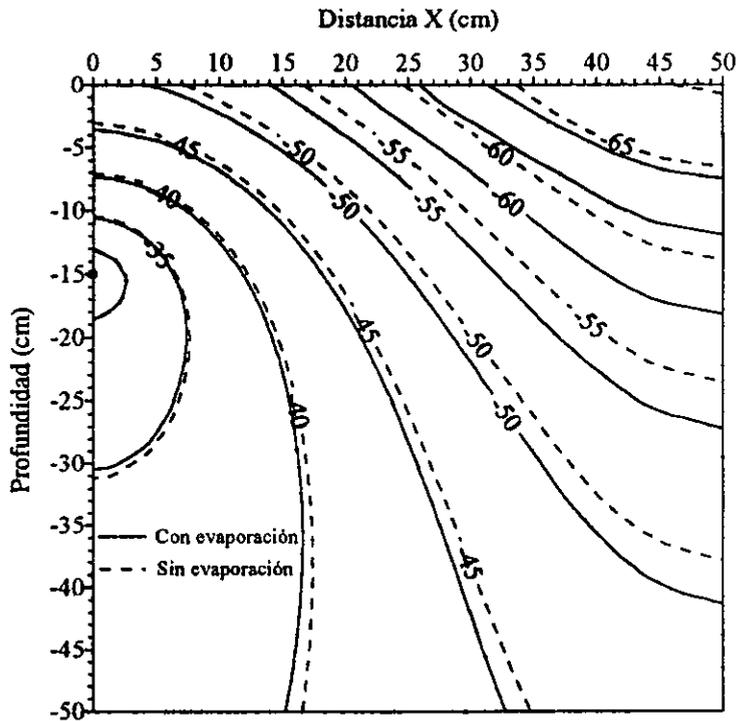


Fig. 5.13 Comparación de la distribución de potencial de presión (cm) en la arena "Pomona" para los casos en el que se considera flujo nulo en la superficie y para cuando se toma en cuenta la evaporación, para un sistema de riego por cintas localizado a 15 cm de la superficie.

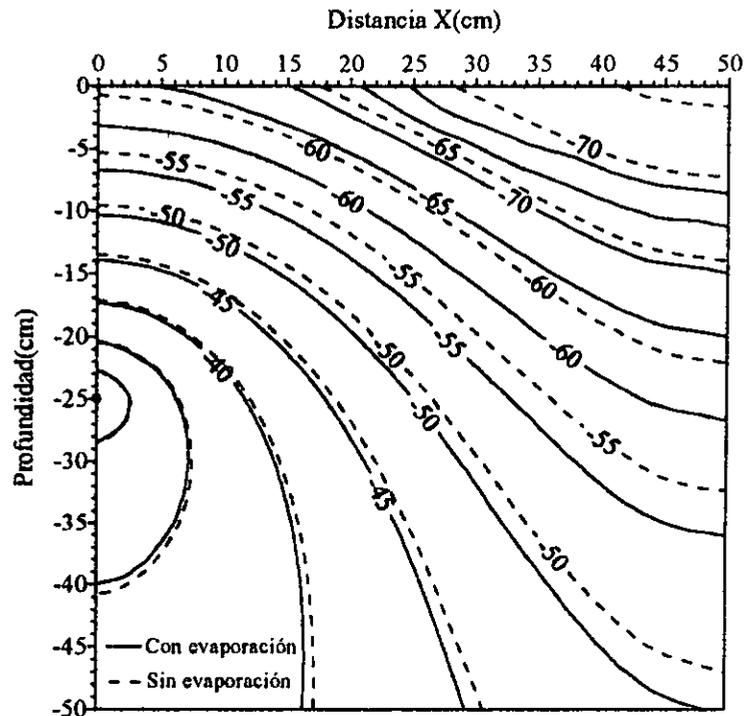


Fig. 5.14 Comparación de la distribución de potencial de presión (cm) en la arena "Pomona" para los casos en el que se considera flujo nulo en la superficie y para cuando se toma en cuenta la evaporación, para un sistema de riego por cintas localizado a 25 cm de la superficie.

En las figs. 5.12 - 5.14 se presentan los resultados de la simulación. Como se puede observar, los mayores cambios de humedad se registran conforme la distancia se acerca a la mitad de separación entre cintas de riego. También se observa que en la posible zona de desarrollo de las raíces, se registran solo pequeñas variaciones en los patrones de distribución del potencial, a pesar de que se consideró una alta tasa de evaporación y un suelo con un gran valor de conductividad hidráulica saturada. Conforme la profundidad del emisor aumenta, la zona de mojado donde se desarrollan las raíces, se ve menos afectada por los efectos de la evaporación. Se puede esperar que cuando se presentan evaporaciones importantes en la región, las sales permanezcan disueltas en la zona radicular y tiendan a concentrarse a la mitad de separación entre cintas de riego.

## CAPITULO VI

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este trabajo se desarrolla un modelo numérico bidimensional usando el método Galerkin de los elementos finitos para discretizar espacialmente la ecuación general de transferencia de agua y simular el proceso de infiltración y redistribución de agua bajo condiciones de riego localizado. De los resultados obtenidos se puede concluir:

1. La simulación realizada mediante la solución numérica de la ecuación de Richards, describe de forma adecuada el proceso físico del flujo de agua en los medios porosos parcialmente saturados.

2. Los resultados del esquema numérico reproducen de forma adecuada las soluciones cuasi-analíticas de Raats (1970) para goteo superficial y la de Warrick et al. (1979) para fuentes lineales subsuperficiales.

3. El modelo numérico desarrollado, es una herramienta útil para analizar el movimiento de agua en el suelo originado por sistemas de riego por goteo y determinar de forma aproximada las condiciones existentes en campo, presentando la ventaja en la flexibilidad del manejo de las condiciones iniciales y de frontera en comparación con las soluciones analíticas.

4. Utilizando el modelo numérico se pueden analizar diversas alternativas difíciles de evaluar experimentalmente en campo, que permitan eficientizar los sistemas de riego por goteo.

5. El programa puede ser usado para optimizar el tiempo, frecuencia y volúmenes de agua aplicados, manteniendo niveles de humedad óptimos en el suelo para los diferentes tipos de cultivos.

6. Otra aplicación del modelo es la de diseñar sistemas de riego por goteo, determinando el espaciamiento máximo entre emisores y, en el caso de sistemas subsuperficiales, analizar su comportamiento a diferentes profundidades, tomando en cuenta las características de cada suelo.

7. El análisis de los resultados del frente de humedad y campo de velocidades permite tener una primera aproximación del movimiento de fertilizantes solubles en el suelo.

Se recomienda realizar un proceso de validación del esquema numérico con experimentos de campo, con el objetivo de verificar el comportamiento de la solución en suelos heterogéneos.

Finalmente, se recomienda complementar el modelo numérico adicionando la ecuación bidimensional de transporte de solutos para analizar de forma precisa el movimiento de las sustancias químicas en el suelo.

## BIBLIOGRAFÍA

- Abramowitz, M., and I. A. Stegun, 1964. *Handbook of mathematical functions*. Nat. Bur. Stand. Appl. Math. Servs., Vol 55, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C.
- Ammozezar-Fard, A., A. W. Warrick and D. O. Lomen, 1984. *Design nomographs for trickle and subsurface irrigation*. J. Irrig. and Dr. Engr., ASCE, 110: 107-120.
- Angelakis, A. N., T. N. Kadir and E. Rolston, 1993. *Time-dependent soil water distribution under a circular trickle source*. Water Resour. Management, 7: 225-235.
- Bower H., 1964. *Rapid field measurement of air entry value and hydraulic conductivity of soil as significant parameters of flow system analysis*. Water Resour. Res, 36: 411-424.
- Brandt, A., E. Bresler, N. Diner, I. Ben Asher, J. Heller and D. Goldberg, 1971. *Infiltration a trickle source I. mathematical models*. Soil. Sci. Soc. Am. Proc, 35: 675-682.
- Bresler, E., 1978. *Analysis of trickle irrigation with application to design problems*. Irrigation Sci., 1: 3-17.
- Brooks, R. H. and A. J. Corey, 1964. *Hydraulic properties of porous media*. Hydrology paper 3. Colorado State Univ., Fort Collins.
- Bucks, D. A., Nakagama, F. S. and Warrick A. W., 1982. *Principles, practices and potentialities of trickle (drip) irrigation*. Adv. Irrig, I.
- Celia, M. A. and E. T. Bouloutas, 1990. *A general mass conservative numerical solution for the unsaturated flow equation*. Water Resour. Res. 7: 1483-1496.
- Gardner, W. R., 1958. *Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table*. Soil Sci., 85: 228-232.
- Healy, R. W., 1987. *Simulation of trickle irrigation*. Water Resour. Investigation. 87-4086. U.S. Government Printing Office, Washington, D.C.
- Huyakorn, S. P., and Pinder G., 1983. *Computational methods in subsurface flow*. Academic press, New York.
- Jury, W. A., W. R. Gardner and W. H. Gardner, 1991. *Soil physics*, 5ed., John Wiley and Sons, New York.

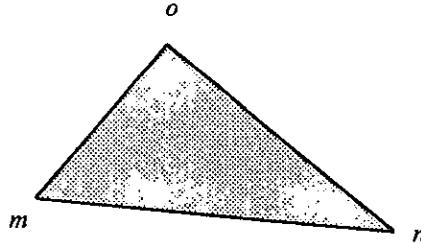
- McCord, J. T., 1991. *Application of second-type boundaries in unsaturated flow modeling*. Water Resour. Res., 27: 3257-3260.
- Merril, S. D., P. A. C. Raats and C. Dirksen, 1978. *Laterally confined flow from a point source at the surface of inhomogeneous soil column*. Soil Sci., 42: 851-857.
- Meshkat, M. and R. C. Warner, 1996. *Evaluation of the "sand tube irrigation" method to increase the efficiency of surface drip irrigation in arid land farming*. Report for presentation at the ASAE anual international meeting.
- Milly, P. C. D., 1985. *A mass-conservative procedure for time-stepping in models of unsaturated flow*. Adv. Water Resour. Res., 8: 32-36.
- Mori, M., 1983. *The finite element method and its applications*. Ed. Macmillan, New York.
- Neumann, S., 1973. *Saturated-unsaturated seepage by finite elements*. Journal of the Hydraulic Division, ASCE. HY12 : 2233-2249.
- Ojeda, B. W., 1996. *Determination of the hydraulic properties with point sources experiments*. Tesis de doctorado de la Universidad de Arizona, Tucson, Az.
- Philip, J. R., 1968. *Steady infiltration from buried point sources and spherical cavities*. Water Resour. Res., 4: 1039-1047.
- Rathfelder, K. and L. M. Abriola, 1994. *Mass conservative numerical solution of the head-based Richards equation*. Water Resour. Res., 30: 2579-2586.
- Raats, P. A. C., 1971. *Steady infiltration from point sources, cavities and basins*. Soil Sci. 35: 689-694.
- Richards, L. A., 1931. *Capillary conduction of liquids through porous mediums*. Physics 1: 318-333.
- Russo, D. 1988. *Determining soil hydraulic properties by parameter estimation: On the selection of a model for the hydraulic properties*. Water Resour. Res., 24: 453-459.
- Sisson, J. B., 1987. *Drainage from layered field soils: Fixed gradient models*. Water Resour. Res. 23: 2071-2075.
- Vreugdehhl, C. B., 1989. *Computational hydraulics: an introduction*. Springer-Verlay, Berlin.
- Warrick, A. W., 1993. *Class notes of the soil physics and trickle irrigated systems*. The University of Arizona, Tucson Az.

- Warrick, A. W., A. Amoozegar-Fard, D. O. Lomen, 1979. *Linearized moisture flow from line source with water extraction*. Transactions of the ASAE: 549-553.
- Warrick, A. W. and Broadbridge, 1992: Sorptivity and macroscopic capillary length relationships. *Water Resour. Res.*, 28: 427-431.
- Warrick, A. W., 1974. *Time-dependent linearized infiltration*. I. Point sources. *Soil. Sci. Soc. Am. Proc.*, 38: 383-386.
- Warrick, A. W., 1993. *Unsaturated-saturated flow near a quasi-linear line source*. *Water Resour. Res.*, 29: 3759-3762.
- Van Genuchten, M. Th., 1980. *A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of the unsaturated soils*. *Soil Sci. Soc. Amer. J.*, 44: 892-898.
- Zachman, D. W. and A. W. Thomas, 1973. *A mathematical investigation of steady infiltration from line sources*. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 37: 495-500.

## ANEXO A

### EVALUACIÓN DE LOS COEFICIENTES DE LAS MATRICES LOCALES DE RIGIDEZ, MASA Y GRAVEDAD

Antes de realizar la evaluación de los coeficientes es necesario definir las propiedades geométricas de un elemento triangular (fig A. 1).



**Fig.A.1** Elemento triangular

$$a_m = x_n^{(e)} z_o^{(e)} - x_o^{(e)} z_n^{(e)} \quad a_n = x_o^{(e)} z_m^{(e)} - x_m^{(e)} z_o^{(e)} \quad a_o = x_m^{(e)} z_n^{(e)} - x_n^{(e)} z_m^{(e)} \quad (\text{A.1})$$

$$b_m = z_n^{(e)} - z_o^{(e)} \quad b_n = z_o^{(e)} - z_m^{(e)} \quad b_o = z_m^{(e)} - z_n^{(e)} \quad (\text{A.2})$$

$$c_m = x_o^{(e)} - x_n^{(e)} \quad c_n = x_m^{(e)} - x_o^{(e)} \quad c_o = x_n^{(e)} - x_m^{(e)} \quad (\text{A.3})$$

donde los índices  $m$ ,  $n$ , y  $o$  representan los tres vértices del triángulo.

El área del elemento triangular está definida por:

$$A^{(e)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_m^{(e)} & z_m^{(e)} \\ 1 & x_n^{(e)} & z_n^{(e)} \\ 1 & x_o^{(e)} & z_o^{(e)} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (b_m c_n - c_m b_n) \quad (\text{A.4})$$

y las derivadas de las funciones de forma dadas en (2.30) son:

$$\frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x} = \frac{1}{2A^{(e)}} b_i \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial z} = \frac{1}{2A^{(e)}} c_i \quad (\text{A.6})$$

donde el índice  $i$  toma los valores de  $m, n$  y  $o$ .

Cálculo de los coeficientes de la matriz de rigidez

Si se calcula el primer coeficiente de (3.10) se fija el índice  $i=m$  y se corre el  $j$  sobre el primer vértice del elemento ( $m$ ) y además se tiene que considerar que el índice  $l$  corre sobre los tres vértices del elemento. Asumiendo las consideraciones anteriores se tiene:

$$B_{mm}^{(e)} = K_m \int_A \left[ \left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \right)^2 \right] dA + K_n \int_A \left[ \left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \right)^2 \right] dA + K_o \int_A \left[ \left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \right)^2 \right] dA \quad (\text{A.7})$$

Sustituyendo el valor de las derivadas de las funciones de interpolación (A.5 - A.6) se obtiene:

$$B_{mm}^{(e)} = \frac{(b_m^2 + c_m^2)}{2A^{(e)}} \left[ K_m \int_{A^{(e)}} \varphi_m^{(e)} dA + K_n \int_{A^{(e)}} \varphi_n^{(e)} dA + K_o \int_{A^{(e)}} \varphi_o^{(e)} dA \right] \quad (\text{A.8})$$

Para la integración en un dominio triangular de un polinomio se hace uso de la siguiente fórmula:

$$\int_A \varphi_m^\alpha \varphi_n^\beta \varphi_o^\gamma = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+3)} 2A^{(e)} \quad (\text{A.9})$$

donde  $\Gamma(X)$  es la función gamma completa de Euler. Se puede comprobar que para el caso de la matriz de rigidez todas las posibles combinaciones de índices dan como resultado  $\frac{A^{(e)}}{3}$ .

Sustituyendo el resultado anterior en A.8 se obtiene el valor del primer coeficiente de la matriz de rigidez.

$$B_{mm}^{(e)} = \left( \frac{K_m + K_n + K_o}{3} \right) \left( \frac{b_m^2 + c_m^2}{4A^{(e)}} \right) = \frac{\bar{K}}{4A^{(e)}} (b_m^2 + c_m^2) \quad (\text{A.10})$$

Para el segundo y el tercer coeficiente se realiza un procedimiento similar variando los índices  $j=n$  y  $j=o$  para las correspondientes variaciones del índice  $l$ , con lo que se obtiene:

$$B_{mn}^{(e)} = \frac{\bar{K}}{4A^{(e)}} (b_m b_n + c_m c_n) \quad (\text{A.11})$$

$$B_{mo}^{(e)} = \frac{\bar{K}}{4A^{(e)}} (b_m b_o + c_m c_o) \quad (\text{A.12})$$

Para la obtención de los coeficientes restantes se realiza un procedimiento análogo corriendo el índice  $i$  a los vértices  $n$  y  $o$  y fijándolo para las tres variaciones de los índices  $j$  y  $l$ .

Cálculo de los coeficientes de la matriz de masa

Para el cálculo de los coeficientes de la matriz de rigidez se utiliza las funciones de interpolación del sistema de masa concentrado dadas en (2.38). Se tiene que el número de nodos en el elemento  $n_e = 3$  y si se calcula el primer elemento  $i=j=m$  se obtiene:

$$M_{mm}^{(e)} = \int_{A^{(e)}} (\varphi_m^{(e)} \varphi_m^{(e)}) dA = \frac{1}{3} \int_{A^{(e)}} dA = \frac{A^{(e)}}{3} \quad (\text{A.13})$$

de manera similar se pueden calcular los coeficientes para  $i=j=n$  e  $i=j=o$

Evaluación de los coeficientes de la matriz de gravedad

Para el cálculo del primer componente de la matriz de gravedad se fija el índice  $i$  en el nodo  $m$  y se corre el índice  $l$  sobre las esquinas del elemento  $m, n$  y  $o$  obteniéndose:

$$G_m = K_m \frac{c_m}{2A^{(e)}} \int_{A^{(e)}} \phi_m^{(e)} dA + K_n \frac{c_m}{2A^{(e)}} \int_{A^{(e)}} \phi_n^{(e)} dA + K_o \frac{c_m}{2A^{(e)}} \int_{A^{(e)}} \phi_o^{(e)} dA \quad (\text{A.14})$$

Aplicando la fórmula de integración (A.6) se obtiene:

$$G_m = \frac{c_m}{2} \left( \frac{K_m + K_n + K_o}{3} \right) = \frac{\bar{K}}{2} c_m \quad (\text{A.15})$$

de manera análoga se obtienen los coeficientes para  $G_n$  y  $G_o$ .

## ANEXO B

### ALGORITMO PARA LA SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS

Se presenta el algoritmo para la solución numérica de la ecuación de transferencia de agua para casos bidimensionales, utilizando el método del elemento finito como se describe en el capítulo 3. Es posible utilizar los modelos completos de van Genuchten, Gardner-Russo o linealizado para el cálculo de las propiedades hidrodinámicas del suelo.

1. Al inicio de la simulación en  $t = 0$ , se definen los siguientes parámetros:

1.1 Constantes para el cálculo de las propiedades hidráulicas del suelo  
 $\theta_s$ ,  $\theta_r$ ,  $\alpha$ ,  $K_s$  y  $n$

1.2 Parámetros relacionados con el control del tiempo

1.2.1 Tiempo de simulación:  $T_{sim}$

1.2.2 Paso de tiempo inicial:  $\Delta t_i$

1.2.3 Paso de tiempo mínimo:  $\Delta t_{min}$

1.2.4 Paso de tiempo máximo:  $\Delta t_{max}$

1.3 Características geométricas de la malla de elementos finitos, la cual es generada y numerada automáticamente con el procedimiento descrito en la sección 3.3.1.

1.4 Condiciones iniciales y de frontera

1.4.1 Condición inicial.

1.4.1.1 Distribución del potencial de presión en todo el dominio  $\psi_0$ .

1.4.2 Condición de frontera superior.

1.4.3 Condiciones de frontera laterales.

1.4.4 Condición de frontera inferior.

1.5 Si se resuelve un problema de riego por goteo puntual superficial

1.5.1 Todo el flujo del gotero  $Q_g$  es aplicado en el primer nodo en la superficie localizado en el origen (condición de Neumann).

$$\Delta Q = Q_g$$

1.6 Si se resuelve un problema de fuentes lineales

1.6.1 Dado que la cinta es modelada como un punto, el gasto de éste emisor es aplicado en un solo nodo, cuya localización espacial es fijada (condición de Neumann).

## 2. Inicia el proceso de simulación

### 2.1 Repetir mientras el Tiempo $\leq T_{sim}$

#### 2.1.1 Avanza el tiempo

Tiempo = Tiempo +  $\Delta t$

Iteraciones = 1

#### 2.1.2 Se define el potencial de presión para el proceso iterativo

$$\psi_{t+\Delta t}^m = \psi_t$$

#### 2.1.3 Repetir mientras el máximo cambio en el potencial de presión registrado durante el proceso iterativo sea mayor que un valor establecido (.001)

##### 2.1.3.1 Se calculan las propiedades hidráulicas en cada nodo del dominio.

Contenido de humedad  $\theta(\psi) \Big|_{t+\Delta t}^m$ .

Conductividad hidráulica  $K(\theta) \Big|_{t+\Delta t}^m$ .

Capacidad específica  $C(\psi) \Big|_{t+\Delta t}^m$ .

##### 2.1.3.2 Se ensamblan las matrices de rigidez, gravedad y masa

Matrices locales (ecs. 3.13 - 3.16)

Ensamble global.

##### 2.1.3.3 Se forma el sistema global de ecuaciones (ec. 3.25)

##### 2.1.3.4 Si se considera nodos sujetos a condición del tipo dirichlet, se modifica el sistema global de ecuaciones.

##### 2.1.3.5 Se resuelve el sistema general de ecuaciones utilizando el método de Cholesky con almacenamiento vectorial y se obtiene el nuevo valor de potencial de presión en cada nodo del dominio $(\psi_{t+\Delta t}^{m+1})$ .

##### 2.1.3.6 Se localiza el nodo donde se registra el máximo cambio en el potencial de presión en las dos últimas iteraciones y se calcula la convergencia

$$\text{Cambio}(\psi) = \text{abs} \left( \frac{\psi_{t+\Delta t}^{m+1} - \psi_{t+\Delta t}^m}{\psi_{t+\Delta t}^{m+1}} \right)$$

##### 2.1.3.7 Si se resuelve el problema de riego por goteo superficial

2.1.3.7.1 Si el nodo donde está aplicado el flujo  $\Delta Q$  alcanza la saturación

( $\psi_{\text{Neumann}} \geq -0.25$ ) se tiene:

a) El nodo sujeto a condición de Neumann es fijado como un nodo con carga constante.

$$Q_{\text{Neumann}} = Q_{\text{Dirichlet}} \text{ y } \psi_D = 0.$$

b) Se reinicializa el valor de todos los potenciales

$$\psi_{t+\Delta t}^{m+1} = \psi_t$$

c) Utilizando la ec. 3.29 se calcula el flujo a través de todos los nodos dirichlet  $Q_d$ .

d) Se evalúa la diferencia entre el gasto anterior y el del gotero

$$\Delta Q = Q_g - Q_d$$

e) La diferencia  $\Delta Q$  es aplicada en el primer nodo posterior al último nodo Dirichlet localizado en la superficie.

f) Se reinicializa el tiempo y el número de iteraciones

$$\text{Tiempo} = \text{Tiempo} - \Delta t$$

$$\text{Iteraciones} = 1$$

2.1.4. Se actualiza el valor del potencial de presión para la siguiente iteración

$$\psi_{t+\Delta t}^m = \alpha \psi_{t+\Delta t}^{m+1} + (1 - \alpha) \psi_{t+\Delta t}^m$$

2.1.5 Se calculan los flujos de Darcy  $q_x$  y  $q_z$

2.1.6 Si Tiempo =  $T_{\text{max}}$  finaliza la simulación.

2.1.7. Si  $\text{Cambio} \leq 0.001$  entonces

2.1.6.1 Si Iteraciones < 3 se aumenta el paso de tiempo  $\Delta t$

2.1.6.2 Se avanza al siguiente nivel de tiempo ( paso 2.1).

2.1.8. Si  $\text{Cambio} > 0.001$  entonces regresar al paso 2.1.3.