41061
5 29.

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS
PROFESIONALES ARAGON
DIVISION DE ESTUDIOS DE
POSGRADO E INVESTIGACION

COMPARACION DE MATERIALES DIDACTICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN ENSEÑANZA SUPERIOR

P R E S E N T A

JUAN TAMAYO ZARAGOZA

258082

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1998

AGRADECIMIENTO

Agradezco sinceramente a la Mtra. Guadalupe Sánchez Villers, directora de tesis, por su colaboración y por el tiempo que dedicó hasta lograr su culminación.

DEDICATORIAS

A mi esposa Graciela, por su apoyo inquebrantable.

A mis hijos : Paola, Juan Jesús y Nestor.

A mis papás : Juan y Ma. de la Luz.

JURADO

Presidente :	Mtro. Antonio Carrillo Avelar
Vocal :	Mtra. Guadalupe Sánchez Villers
Secretario :	Mtro. Juan García Cortes
Suplente :	Mtro. Aurelio Cuevas Díaz
Suplente :	Mtro. Jesús Escamilla Salazar

CONTENIDO

"TITULO: COMPARACIÓN DE MATERIALES DIDÁCTICOS"

1) INTRODUCCIÓN

Es sabido para todos nosotros que el sistema educativo a nivel nacional se encuentra muy estancado, en particular en UPIICSA, en el área de matemáticas ; son grandes los rezagos que se presentan desde el inicio en ésta institución (hace más de dos décadas). La enseñanza que se ofrece en el área de matemáticas, está centrada en: la memorización, la repetición, la mecanización, la algorítmia, la utilización de fórmulas y de ciertas técnicas, las cuales se les obliga a los estudiantes a usarlas sin dar la justificación de cómo surgen y qué utilidad práctica pueden tener en la resolución de problemas. Es por esto que uno de los fines de la presente investigación, consiste en realizar aportes que apoyen el proceso de enseñanza-aprendizaje. De tal forma que el alumno ahora ya no debe adoptar una actitud pasiva, en la que desempeñe el papel de un depósito vacío que esté esperando ser llenado, a través de un embudo ; antes bien se requiere que adopte una actitud: crítica, creativa, reflexiva, analista. Asi mismo es necesario que sea partícipe en la construcción del conocimiento, en donde el alumno ya no sea sujeto pasivo de enseñanza, sino sujeto activo de aprendizaje.

El profesor por su parte, debe transformar su figura, dejando a un lado el papel central, ya no debe ser el orador, el que lo sabe todo, el transmisor del conocimiento, ahora se requiere que el profesor basado en su experiencia ; oriente, guíe y les sugiera a los alumnos las estrategias que les sean útiles para que poco a poco construyan el conocimiento, acercándose paulatinamente a él.

Resulta claro que lo anterior no es tarea fácil, ya que tanto los alumnos como los profesores estamos acostumbrados o tenemos muy arraigadas las ideas de recibir y transmitir aprendizajes que son tradicionalistas (mecanicistas). Sin embargo estamos conscientes de las dificultades que se pueden presentar al utilizar un material (como el que se propone en éste trabajo) en el que apartir de la **resolución de problemas,** el alumno de pasos tendientes a la construcción del conocimiento y de ésta forma el propósito es que adquiera **aprendizajes significativos,** que son con los que se pueden resolver problemas de la vida real.

También aclaramos que no se está satanizando el aprendizaje memorístico, repetitivo y mecanicista , en lo que no estamos de acuerdo es que la enseñanza que se brinda esté basada solamente en estos tres elementos. De hecho en el material didáctico que se presenta, al principio de cada sección, se manejan fuertemente los elementos constructivistas y posteriormente también se recurre a los elementos antes citados, con el fin de que los alumnos logren también habilidades en la algorítmia, siendo éste un elemento muy importante en el aprendizaje de las matemáticas.

Consideramos también importante señalar que uno de los aspectos que motivaron la realización de la presente investigación, se fue gestando a través de los años de impartir el curso de Cálculo Diferencial en ésta institución (UPIICSA) y dicha inquietud fue culminada al utilizar la experiencia acumulada al impartir dicho curso y al recurrir a las bases teóricas adquiridas al cursar la **Maestría en enseñanza Superior** impartida por la **ENEP-Aragón** en las instalaciones de la UPIICSA..

Esta investigación se realizará en dos etapas, la primera de ellas consiste en la elaboración de un material didáctico para el tema de funciones, bajo un enfoque constructivista y la segunda consiste en utilizar éste material didáctico en un grupo de Administración Industrial y confrontar los resultados con los obtenidos en otro grupo de Administración Industrial, en donde se haya utilizado el material mecanicista (tradicionalista) y posteriormente la idea es analizar los resultados, para realizar las conclusiones pertinentes.

Consideramos también importante recalcar el hecho de que el alumno por si solo y por muy buen material didáctico utilizado, jamás va a lograr construir el conocimiento, o dar algunos lineamientos para su construcción. Es necesario que el profesor recurra a su experiencia y a su habilidad para orientar y guiar a los alumnos con el fin de que logren acercamientos vada vez más precisos referentes la construcción del conocimiento.

Finalmente en este apartado, se hace explícito el tipo de estudio que se llevará a cabo y será, exploratorio, correlacional, transversal y de campo.

2) ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN

ANTECEDENTES

Al leer revistas de carácter técnico, leer algunas secciones de ciertos periódicos, escuchar la radio o ver programas culturales en la T.V., nos damos cuenta que los avances, sobre todo científicos y tecnológicos, se están dando a un ritmo vertiginoso en la sociedad actual, lo cuál impone necesariamente nuevas tecnologías o nuevas formas en el sistema educativo de nuestro país en su conjunto.

La UPIICSA, como institución integrante del sistema educativo y en particular el área de matemáticas, deben favorecer los avances, ajustes y renovaciones dentro del campo pedagógico, con el fin de que los alumnos que egresan como profesionistas de la UPIICSA, no terminen con una preparación caduca, con una preparación que no les sirva para enfrentar la realidad, con conocimientos deficientes que los limiten para darles solución a los problemas que surgen en el campo laboral; antes bien se requiere de alumnos que dispongan de los conocimientos, herramientas y habilidades suficientes para enfrentar con eficacia los retos que se le presenten como futuros profesionistas, al actuar como ciudadanos constructivos que contribuyan al desarrollo de nuestro país.

Ahora para el logro de las ideas expuestas, se requiere del trabajo conjunto de todos los profesores de ésta institución (UPIICSA) y de las autoridades de la misma, para propiciar alternativas desde el punto de vista educativo. De ésta forma sería posible que se conservara el prestigio de nuestra institución y de nuestros egresados, y que terminemos el presente siglo e iniciemos el siguiente como una institución que se conserve a la vanguardia como una de las mejores opciones de enseñanza a nivel superior.

En las ideas siguientes, seremos más específicos al hacer algunas observaciones de lo que ocurre en UPIICSA dentro del campo educativo, y en particular de lo que sucede en el área de matemáticas. Para tal efecto, al recurrir a la experiencia acumulada a través de quince años de impartir clases en UPICCSA, nos damos cuenta que el proceso de enseñanza-aprendizaje utilizado por todos los maestros (o por la gran mayoría de ellos) al impartir sus clases se mantienen muy conservadores, predominando en ellos: la mecanización, la memorización y la repetición, entre otros. Resulta frustrante observar que siendo las matemáticas una ciencia en la que se debe privilegiar la creatividad, la crítica, la reflexión, el pensamiento, el razonamiento, el cuestionar los resultados, el proponer alternativas, el preguntarse por el por qué, etc., la estamos reduciendo a una ciencia en la que se limitan las capacidades del alumno en todo sentido, en las que básicamente al alumno se le enseña el manejo de ciertas fórmulas, técnicas y procedimientos de manera mecánica. Se concibe a la matemática como una ciencia pulida y acabada, en la que todas las verdades son absolutas y por consiguiente deben ser aceptadas por los alumnos de manera dogmática.

Esta forma de enseñar las matemáticas en UPIICSA, propicia que estemos formando alumnos ajenos totalmente a los problemas que acontecen en la realidad, ya que la enseñanza transmitida está descontextualizada de lo que sucede fuera de la escuela. Generalmente no se remiten a problemas de la vida diaria como punto de partida de un tema, es común que se establezca una cortina entre los contenidos teóricos y su vinculación con la realidad. Esto da como resultado que a los alumnos no les interese ésta materia, al no resultarle de utilidad para resolver problemas prácticos.

Somos conscientes en el hecho de que proponer alternativas y llevarlas a la práctica de forma tal que contribuyan a resolver los problemas antes planteados, no es tarea fácil, ya que se requiere de una lucha constante y tenaz en contra de una gran cantidad de factores que se anteponen y que tienen injerencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje, como son: Los planes y programas de estudio, las políticas en las academias, la falta de preparación y conformismo de la planta docente, los exámenes departamentales, la preparación insuficiente de los alumnos de primer ingreso a UPIICSA, etc. Pero no debemos mantenernos al margen tomando como excusa las razones anteriores, antes bien, necesitamos estar conscientes de nuestra responsabilidad como docentes e independientemente de las dificultades que se puedan presentar para superar los rezagos en los que se encuentra la enseñanza que transmitimos, es urgente la actualización y la preparación, para de esta forma contar con elementos teóricos y prácticos (sobre todo se requiere de un cambio de mentalidad) que sirvan como base para iniciar con propuestas didácticas (como puede ser la elaboración de materiales didácticos) cuyo fin sea el mejoramiento del proceso de enseñanza-aprendizaje.

JUSTIFICACIÓN

En primer lugar consideramos sobresaliente el hecho de que una gran cantidad de autores tienen fuertes avances teóricos sobre el constructivismo, pero ninguno de ellos (al menos en lo que hemos consultado) se ha dado a la tarea de elaborar materiales que respondan a las necesidades de un tema completo de matemáticas (como es el tema de funciones), bajo un enfoque constructivista a través de la resolución de problemas. Estas carencias de los materiales didácticos elaborados bajo dicho enfoque, ha propiciado, que la gran mayoría de la planta docente de UPIICSA, en el área de matemáticas, no conozca o tenga poco conocimiento de la enseñanza de las matemáticas bajo un enfoque constructivista, que en los cursos de Cálculo Diferencial para los alumnos de la carrera de Administración Industrial, en el primer semestre, los profesores jamás orienten o sirvan de guía a los alumnos para que ellos mismos construyan el conocimiento paulatinamente; es decir, el profesor no orienta al alumno para que éste vaya logrando acercamientos cada vez más precisos acerca de la construcción institucional del conocimiento, siendo éste un camino que propicie el logro de aprendizajes significativos en los alumnos, que son los que perdura en él para toda la vida y es con el que se pueden lograr resultados más halagadores en cuanto a la resolución de problemas, al compararse con un aprendizaje mecanicista (como es el que se lleva a la práctica en la actualidad).Se debe tener presente que uno de los objetivos básicos al enseñar las matemáticas es la resolución de problemas; es decir, la idea de que todos los cursos de matemáticas deberían estar orientados hacia la resolución de problemas. Problemas de todo tipo, como son los rutinarios (éstos son problemas que pueden ser resueltos con el uso directo de ciertas técnicas o algorítmos) y sobre todo los problemas no rutinarios, en estos se encuentran contemplados los problemas de la vida diaria y obviamente para su solución no es suficiente el uso de fórmulas y tecnicismos, sino que se requiere de mucho más, como puede ser: el razonamiento, el pensar, la reflexión, la creatividad, etc.

Resulta claro que los problemas no rutinarios difícilmente pueden ser resueltos por alumnos que fueron instruidos bajo un enfoque mecanicista, antes bien se requiere de elementos didácticos que apoyen ya no métodos mecanicistas de enseñanza, sino procesos alternantes que propicien aprendizajes significativos, como puede ser la enseñanza de la matemática bajo un enfoque constructivista a través de la resolución de problemas.

3) MARCO TEÓRICO

Se considera que uno de los retos de todo docente consiste en privilegiar las enseñanzas destinadas a asegurar la asimilación reflexiva y crítica de las formas de pensamiento fundamentales, como el pensamiento deductivo, el pensamiento experimental o el pensamiento histórico, y también formas de pensamiento reflexivo y critico. En este sentido se considera importante sustituir la enseñanza mecanicista, enciclopédica, aditiva y fraccionaria, por mecanismos que aseguren por parte de los alumnos la asimilación reflexiva de los conocimientos de cada curso. (Bourdieu, 1990).

"En los últimos quince años la propuesta de aprender matemáticas a través de la resolución de problemas ha estado presente en el ambiente educativo" (Santos, 1991, 1992, 1994). De ésta forma uno de los puntos sobresalientes que serán tomados en cuenta en éste trabajo será la resolución de problemas, siendo de gran utilidad el uso de mapas conceptuales para la construcción del conocimiento matemático, a través de la resolución de problemas. Además es importante la asimilación de conceptos, los pasos en los procesos de matematización, las actitudes de los estudiantes de matemáticas, su motivación, su grado de implicación en los procesos de aprendizaje, etc. (Contreras, 1993). A estos puntos se les dará relevancia en la elaboración y utilización del material didáctico propuesto, ya que se consideran básicos para el mejoramiento del proceso de aprendizaje de los alumnos.

Este autor no desconoce el hecho de que la enseñanza de la matemática ha estado centrada demasiado tiempo en lo que Bell, Castello y Kucheman (1983), denominaron hechos, algorítmicos y técnicas, obviando -cuando no se presupone- la formación de las estructuras conceptuales. Con esta perspectiva, no es sorprendente encontrar que el alumno encuentra aburrido el aprendizaje (memorización) de fórmulas, ni que el número de procedimientos rebase la capacidad de su memoria, dando paso al olvido y a una retención pobre, o bien que se pierda en la búsqueda de criterios para elegir los procedimientos adecuados a cada situación (Acuña, 1991; Fuenlabrada, 1991; Mancera y Escareño, 1993). De hecho ésta es la forma cómo se enseña la matemática en UPIICSA, razón por la cual se considera importante la elaboración de materiales que propicien alternativas didácticas que contribuyan a la superación de los rezagos en los que ha estado inmersa la enseñanza de la matemática en dicha institución.

Existen autores que trabajan varios tipos de aprendizaje de los cuales el que tiene más interés para fines de este trabajo es el aprendizaje basado en la resolución de problemas. Al respecto los puntos que nos parecen de mayor relevancia son los siguientes:

a) Las condiciones que posibilitan la solución de un problema

- La Información adquirida.
- Manejo de reglas de inferencia (Inducción, deducción y reglas lógicas)
- Habilidad heurística

b) La elaboración de estrategias, Bruner (citado por Lafourcade) distingue en este sentido entre:

- Constructivismo acumulativo o tendencias a precisar los límites de la tarea a asegurar la reducción de lo desconocido, y

- Empirismo episódico o tendencia a poner a prueba hipótesis específicas. (Lafourcade, 1980),

En la resolución de problemas es común que se recurra a la heurística y a la creatividad, siendo la heurística el estudio de los caminos y medios del descubrimiento y la invención; estudia especialmente, la resolución de problemas, las etapas que se presentan con más frecuencia y naturalidad y que nos dan más posibilidad de acercarnos a la solución (Leclero, 1988; Polya, 1973; Shoenfeld, 1980).,

El problema debe estar relacionado con las cosas que le son familiares al alumno, y debe servir a un fin (objetivo) comprensible. La clase deberá trabajar sobre problemas más importantes, ricos en contenido y que sirvan de entrada a un capitulo de matemáticas (Polya, 1973).

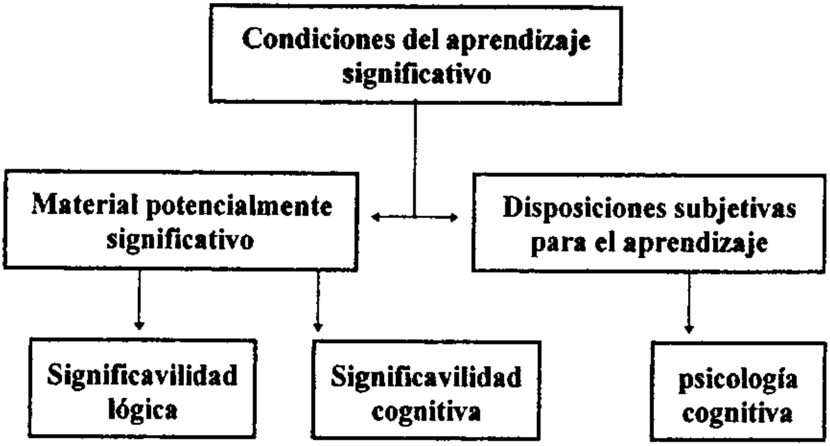
Así mismo la creatividad responde a la idea de que el acto creativo responde a la solución de problemas; la convicción de que la fuente de la creatividad se halla en la vida inconsciente y la idea de que el acto creativo ocurre súbitamente. De esta forma parece generalmente aceptado que la creatividad es tal, sólo en la medida en que resulte benéfica para el individuo, para su grupo social o en la situación -de planteamiento de un problema- que la origina, y que en tanto representa una alternativa de sustitución a lo tradicional o acostumbrado. Dentro de éste panorama no es extraño que se vea desalentado en el salón de clases todo asomo de comportamiento creativo que no cumpla con las ideas y suposiciones antes señaladas. Se impedirá de ésta forma, el posible desarrollo gradual creativo como algo consciente y deliberado (Acuña, 1986, 1991).

Los autores anteriores otorgan relevancia a la resolución de problemas (aspecto importante en este trabajo). Ahora se verá la relación de este punto con el aprendizaje significativo que es también de gran importancia en esta investigación. El concepto más importante de la teoría de Ausubel es el **Aprendizaje Significativo**; autores como Novak comentan que este ocurre cuando la nueva información se enlaza con los conceptos pertinentes que existen ya en la estructura cognoscitiva del que aprende. El grado de significancia nueva variará de un estudiante a otro, de acuerdo con la adecuación de los conceptos pertinentes que posea (Novak, 1978).

Conforme a la teoría de Ausubel, la prueba más importante del aprendizaje significativo es la capacidad para resolver problemas nuevos pertinentes; es decir debe advertirse que la acción de resolver problemas es realmente un proceso de aprendizaje significativo.

En este sentido también hay quien afirma y con quien estamos de acuerdo que el aprendizaje significativo, ya sea por recepción, ya sea por descubrimiento se opone al aprendizaje mecánico, repetivo, memorístico (como el que se utiliza en UPIICSA en la enseñanza de las matemáticas), comprende la adquisición de nuevos significados. Así pues, la clave del aprendizaje significativo está en la vinculación sustancial de las nuevas ideas y conceptos con el bagage cognitivo del individuo (Pérez, 1990). Este autor muestra también el:Modelo de aprendizaje significativo de Ausubel, el cuál se muestra a continuación.

Modelo de aprendizaje significativo de Ausubel



Debido a la importancia que tiene el aprendizaje significativo en la enseñanza de las matemáticas señalamos que: es un elemento clave en la educación superior, promueve el desarrollo personal de los alumnos, tiene un elevado valor funcional, equivale a poner de relieve el proceso de construcción de significados como el aspecto central del proceso de enseñanza-aprendizaje. Ahora podemos remontarnos, la tradición puerocentrista de los movimientos pedagógicos renovadores de principios de siglo, que tiene sus bases en el pensamiento de Rousseau y a la que también pertenecen autores muy destacados como : Claparede, Dewey, Ferreire, Montessori, Declory, Cousinet, Freinet y muchos otros que haciendo a un lado sus diferencias entre sus planteamientos respectivos, comparten el principio de autoconstrucción del conocimiento; es decir, ven al alumno como **"el artesano de su propia construcción"** (Coll, 1988). Cabe hacer mención de la tradición más reciente de la hipótesis del aprendizaje por descubrimiento desarrolló a partir de la década de los sesentas y de las propuestas pedagógicas que defienden el principio de que el alumno obtiene el conocimiento con sus propios medios, o como Bruner afirma en su trabajo sobre el acto de descubrimiento "mediante el uso de su propia mente" (Bruner, 1961, cita de Coll.). Podemos también citar las propuestas pedagógicas de Piaget inspiradas en las tesis que él mismo proponía sintetizar en la siguiente afirmación elevada a "principio fundamental de los métodos activos : comprender es inventar o reconstruir por reinvención" (Piaget, 1974 cita de Coll, 1988); (Labinowics, 1980).

Se construyen significados integrando o asimilando el nuevo material de aprendizaje a los materiales que ya se poseen de comprensión de la realidad. De igual forma la comprensión de significados implica una acomodación, una diversificación, un enriquecimiento, una mayor interconexión de los esquemas previos. El conocimiento que realmente construye el alumno es considerado como un hecho definitivamente individual, es el resultado de una compleja serie de interacciones (por lo tanto no pueden ser transmitidas) en las que intervienen como mínimo tres elementos: el alumno, los contenidos de aprendizaje y el profesor. En éste proceso el profesor es considerado como el orientador, guía o facilitador del aprendizaje, ya que a él le corresponde crear las condiciones óptimas para que se produzca una interacción grupal constructiva entre los alumnos y el objeto de conocimiento (Coll, 1988; Block y Papacostas, 1984; Mendoza, 1992).

Para Piaget la explicación del proceso de aprendizaje requiere dos hechos fundamentales: asimilación y acomodación. Considera a la asimilación como la acción del sujeto sobre el objeto para incorporarlo a él y como un hecho complementario de la asimilación es la acomodación, considerada para Piaget como la acción que el objeto ejerce sobre el sujeto. Además llama al interjuego asimilación-acomodación con un término genérico: adaptación, siendo considerado el proceso de aprendizaje como el proceso de adaptación (Labinowicz 1980).

Ya antes se le dio relevancia al uso de los Mapas Conceptuales para la resolución de problemas, ahora los retomamos nuevamente como elementos que favorecen la adquisición de aprendizajes significativos, dado que: pueden representar relaciones significativas entre conceptos en forma de proposiciones, pueden fomentar la creatividad. La construcción de mapas conceptuales permite observar nuevas relaciones y por consiguiente nuevos significados, ayudan al que aprende a hacer más evidente los conceptos claves o las proposiciones que se van a aprender, a los que sugieren conexiones entre los nuevos conocimientos y lo que sabe el alumno. Los mapas conceptuales elaborados concienzudamente, revelan con claridad la organización congnitiva de los alumnos (Novak, 1988).

El aprendizaje escolar debiera ser un proceso activo desde el punto de vista del alumno, en el cuál éste construya, modifique, enriquezca y diversifique sus esquemas de conocimiento con respecto a los distintos contenidos escolares a partir del significado y el sentido que puede atribuir a esos contenidos y al propio hecho de aprendizaje. Existen evidencias que afirman que los alumnos aprenden matemáticas sólo cuando ellos construyen activamente sus conceptos. Desde esta perspectiva, la enseñanza de las matemáticas debe entenderse, necesariamente, desde la concepción constructivista en que nos movemos, como una ayuda al proceso de aprendizaje. Ayuda necesaria, porque sin ella es altamente improbable que los alumnos lleguen a aprender (de la manera más significativa posible)°, los conocimientos necesarios para su desarrollo personal. Pero sólo ayuda, porque la enseñanza no puede sustituir la actividad mental constructivista del alumno ni ocupar su lugar (Onrubia, 1993; Polya, 1973; Santos, 1991).

En la enseñanza de las matemáticas en UPIICSA es común que no se salga de los patrones establecidos, contrario a esto se debe romper con las tendencias en las cosas sólo estructuradas e intentar experimentar con tendencias no estructuradas, así debemos enfrentar al alumno con textos que enseñen las formas de construir el pensamiento; es decir, se debe de enseñar a pensar a los alumnos, ya no se trata únicamente de repetir resultados sino de investigar como fueron construidos; es decir las verdades teóricas deben enseñarse con las formas como fueron construidas (Zemelman, 1987; Polya, 1973).

Al adoptar una tendencia constructivista, los objetos matemáticos ya no habitan en un mundo etéreo y externo de quien conoce, sino que son producidos, construidos, por él mismo en un proceso continuo de asimilación y acomodación que ocurre en sus estructuras cognitivas. Para Piaget (y, en esencia, para todos los constructivistas), el sujeto se acerca al objeto de conocimiento dotado de ciertas estructuras intelectuales que le permiten "ver" al objeto de cierta manera y extraer de él cierta información, misma que es asimilada por dichas estructuras. La nueva información produce modificaciones -acomodaciones- en las estructuras intelectuales, de tal manera que cuando el sujeto se acerca lo "ve" de manera diferente a como lo había visto originalmente y es otra la información que ahora le es relevante. Sus observaciones se modifican sucesivamente conforme lo hacen sus estructuras cognitivas, construyéndose así el conocimiento sobre el objeto. En la perspectiva constructivista, es la actividad del sujeto lo que resulta primordial:

no hay "objeto de enseñanza" sino "objeto de aprendizaje" (Moreno y Waldegg, 1992).

Otro autor que no debemos olvidar es David P. Ausubel ya que es creador de la teoría del aprendizaje significativo, el cual además de lo que los autores anteriores han comentado de su teoría, agrega que adquirir grandes volúmenes de conocimiento es sencillamente imposible si no hay aprendizaje significativo. La coherencia del discurso, lograda por "comprensión", facilita indudablemente el aprendizaje y la retención; pero a menos que el aprendizaje sea también significativo será muy poco el conocimiento, organizado de cualquier otra manera, que pueda asimilarse (Ausubel, 1983). Se considera importante tener esto presente, dado que en la enseñanza de las matemáticas es práctica común que al alumno se le obligue a "aprender" una gran cantidad de conocimientos casi siempre de manera mecánica con base en la repetición, conocimientos que cuando mucho son retenidos por el estudiante hasta el día en el que presenta el examen, en fechas posteriores se olvida casi totalmente del conocimiento retenido.

También en éste trabajo al elaborar los contenidos del material didáctico del tema de funciones, considero importante recurrir a Margarita Pansza Gónzalez quien en su documento "Elaboración de Programas" da algunas ideas que serán de utilidad tomarlas en cuenta. De la misma forma también creo conveniente considerar a Frida Díaz-Barriga y otros, ya que dan sugerencias para la elaboración de los programas de estudio para cada curso del plan curricular.

Finalmente se considerarán las ideas de los autores ya citados, las ideas propias y las de Mendoza (1992), Block y Papacostas (1984), Fuenlabrada (1991), Schroeder y Lester (1989). Las cuales servirán de base para indicar la forma o los procedimientos generales que serán utilizados en la elaboración del material didáctico ya mencionado.

Para la elaboración de dicho material, serán consideradas cuatro etapas y en ellas se pretenderá considerar al contexto histórico en el que se fue construyendo el conocimiento; es decir, se tratará de utilizar un camino "análogo" en la medida de lo posible de como sucedió en la realidad.

-Primera etapa. En ésta etapa se iniciará con el planteamiento de una serie de problemas de preferencia de la vida real, procurando que incluyan aspectos o conceptos del tema de funciones que sean significativas para los alumnos. De ésta manera se está procediendo de forma similar a como fue construido el conocimiento. Ya que históricamente, primero aparecieron los problemas y posteriormente fue construido el conocimiento necesario para darles solución. En la actualidad es práctica común que el orden se trabaje invertido; primero se da el conocimiento y posteriormente se utiliza para resolver problemas, problemas que generalmente, no vinculan el conocimiento adquirido en la escuela con lo que ocurre fuera de ella.

Se debe tener presente el hecho de que la comprensión debe ser una meta primaria de la enseñanza, se cree que el aprendizaje de las matemáticas por parte de los alumnos es más rico cuando es generado por ellos mismos, que cuando es impuesto por un libro o por un profesor. Una ventaja de un conocimiento autogenerado es que está ligado a todo lo que conoce el estudiante. Además cuando los alumnos construyen nuevos conocimientos matemáticos por sí mismos, aprenden no sólo conceptos, hechos, técnicas, etc., sino también cómo manejar y regular la aplicación de éste nuevo conocimiento. Esto es, ellos se encargan de su conocimiento (y de su aprendizaje en general), haciendolo así más útil para ellos en la solución de problemas y en el aprendizaje de nuevos conceptos y métodos. Creemos que enseñar vía resolución de problemas y enseñar vía desarrollo de la comprensión son, no solamente compatibles, sino también mutuamente beneficiosas.

-Segunda etapa. En esta etapa debe de aparecer el conocimiento como un instrumento que le permita resolver un problema; es decir, al intentar resolver un problema, el alumno se dará cuenta de que con los conocimientos que posee, no son suficientes para resolverlo y es en éste. momento cuando el profesor debe de buscar estrategias para hacer que aparezca el propósito en el alumno para que construya el conocimiento matemático. Para tal efecto, el docente debe de recurrir a su experiencia y sugerir a los alumnos que reflexionen, que sean creativos, que recurran a la heurística, a la inducción, a la deducción, al ensayo y error, a las analogías, a las reglas lógicas, etc. La idea de que el alumno sea participe en la construcción de su conocimiento propicia una transformación total en la metodología didáctica utilizada, en virtud de que ahora se trata ya no de proporcionar el conocimiento, sino de brindar las condiciones para que él lo construya; esto es, situaciones que lleven a una génesis escolar del conocimiento.

Consideramos importante resaltar el hecho de que diseñar situaciones de construcción del conocimiento no es tarea fácil, y menos lo es llevarla a la práctica, ya que una construcción implica un sujeto activo en su relación con el objeto de conocimiento. Es por esto, que tal vez no siempre se logren crear las condiciones para que el alumno realice una construcción absoluta de un conocimiento. Puede ocurrir que en varias ocasiones se logren únicamente aproximaciones a él. Debemos estar conscientes de que si para el aprendizaje de un cierto concepto se inicia con el planteamiento de un problema, en un primer momento los estudiantes crearán instrumentos precarios, alejados de los convencionales. Esto es algo a lo que estamos poco acostumbrados, pero aún así, consideramos que es el camino que se tiene que recorrer y que de cualquier forma representa avances importantes.

-Tercera etapa. En esta etapa se debe verificar que los problemas propuestos sean de tal forma que se puedan generar los mecanismos de retroalimentación necesaria para que el alumno pueda comprobar si en determinados momentos va bien o se regresa (esto es, si las construcciones que ha hecho están bien o están mal).

-Cuarta etapa. En esta etapa final, se debe de dar la fase de institucionalización, en donde el profesor desempeña un papel protagonista. Esta fase cierra un ciclo en el proceso de construcción, consistiendo en una traducción a lo convencional; es decir, el maestro hace pequeñas síntesis de los avances del proceso o bien da informaciones tales como la denominación convencional de ciertos conceptos o representaciones, la simbología, la notación, etc.

A continuación, en la medida de los posibles, se utilizan los elementos teóricos que se manejan en este apartado en la elaboración de un material didáctico para el tema de funciones.

MATERIAL DIDACTICO PARA EL TEMA DE FUNCIONES.

CONTENIDO TEMATICO

I) Concepto de función, dominio, imagen o rango y gráfica.

II) Tipos de funciones : constante, lineal, cuadrática, cúbica, raíz cuadrada y racional

III) operaciones con funciones.

a) Suma, resta, producto y cociente de funciones.

b) Composición de funciones.

c) Operaciones de la forma:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

IV) Funciones trascendentes

a) Logaritmo natural

b) Exponencial

I) CONCEPTO DE FUNCION, DOMINIO, IMAGEN O RANGO Y GRAFICA.

El objetivo en ésta sección es que el alumno determine o dé elementos para el concepto de función, dominio y rango, y que además construya sus gráficas.

Como ya se indicó en la introducción la metodología que se utilizará será la constructivista en la que se iniciará a partir de problemas, en cada uno de ellos se plantean ciertas actividades de tal forma que al ser realizadas por los alumnos y con las sugerencias y la guía del profesor, éstos deberán dar aportes para la construcción de los conceptos antes mencionados.

Al final de ésta sección se incluye un resumen en el que se dará la notación y la simbología convencional. También se anexa una lista de ejercicios.

Problema 1) Considerar la siguiente tabla de impuestos

Ingreso Neto	**Impuesto Correspondiente**
$ 0.00 ⟶ $ 1000.00	$ 0.00
1000.01 ⟶ 2000.00	100.00
2000.01 ⟶ 4000.00	250.00
4000.01 ⟶ 6000.00	500.00
6000.01 ⟶ 10000.00	1000.00

ACTIVIDADES

A) ¿Qué impuestos pagarán las personas que ganan las cantidades siguientes?
a) $900, b) $1500, c) $1950, d) $2740, e) $4600, f) $6001, g) $9999.50 y h) $10000.01.

B) ¿Será posible que haya personas que ganan diferentes cantidades y paguen el mismo impuesto?

C) ¿Será posible que una persona que gana una cantidad fija, pague impuestos diferentes?

D) ¿Será posible que a una persona que gana cierta cantidad, no se le asigne su impuesto correspondiente?

E) En la tabla anterior, ¿tiene sentido preguntarse por el impuesto que pagarán las personas que ganan más de $10000.00?

F) Construir una gráfica considerando los datos de la tabla. (Se sugiere utilizar el eje X para los ingresos y el eje Y para los impuestos).

***Problema 2)* En éste problema supóngase que se relacionan las horas de un día con su temperatura correspondiente en punto fijo.**

Actividades

a) ¿Será posible que en una hora fija, halla diferentes temperaturas?

b) ¿Será posible que a diferentes horas del día, les corresponda la misma temperatura?

c) ¿Será posible que a una hora fija, no le corresponda temperatura alguna?

d) ¿En qué intervalo de tiempo se encuentran contenidas todas las horas de un día?

e) Considerando las temperaturas (aprox.) que han existido en el D.F., dar un intervalo en donde estén incluidas todas ellas.

f) Construir una gráfica al asignarle a ciertas horas del día temperaturas aproximadas. (En el plano cartesiano, se sugiere sustituir al eje X por la horas del día y el eje Y por las temperaturas).

***Problema 3** Un taxi cobra $4.00 por el primer kilómetro y $3.00 por cada km. adicional, la distancia se mide hasta el Km. más cercano inmediato.*

Actividades

a) ¿Cuál es el cobro que se les haría a usuarios que recorran los kilómetros: 1, 2, 3, 4, 5, etc.?

b) ¿Será posible que a usuarios que hayan recorrido igual número de Kms., el cobro sea diferente?

c) ¿Será posible que a un usuario del taxi, no le cobren la cantidad correspondiente?

d) ¿Qué cantidades de Kms. una persona puede utilizar el taxi?

e) ¿Cuál sería el cobro posible?

f) Utilizar una expresión algebraica, para representar la tarifa del taxi en términos de la distancia recorrida.

g) Construir una gráfica, utilizando la expresión algebraica obtenida en el inciso f).

Problema 4) ***Un estacionamiento en la ciudad cobra $6.00 por la primera hora, y $4.00 por cada hora adicional. Se recuerda que en los estacionamientos al rebasar una hora cobran la siguiente completa.***

Actividades

a) Obtener el cobro del estacionamiento por diferentes tiempos. (Por ejemplo: 1, 2, 3, 3.5, 4, 5, 5.1, etc).

b) ¿Será posible que a dos coches que permanecieron el mismo tiempo en el estacionamiento les cobren cantidades diferentes?

c) ¿Será posible que a 2 ó más coches que duraron tiempos diferentes les cobren la misma cantidad?

d) ¿Será posible que a un usuario del estacionamiento no le cobren la cantidad correspondiente?

e) ¿Cuánto tiempo podrá estar el coche en el estacionamiento?

f) ¿Cuáles serán las posibles cantidades que cobrará el dueño del estacionamiento?

g) Construir una expresión algebraica en la que se relacione la cantidad pagada con el número de horas que se usó el estacionamiento. (Recuerda que para cuestiones de pago, por ejemplo: 2.6 horas equivale a 3, y 4.9 equivale a 5 horas, etc).

h) Construir una gráfica utilizando la expresión algebraica obtenida.

Problema 5) ***Los costos de producción para el helicóptero supersónico Z-2, son $4.5 millones por helicóptero. Los costos de investigación y desarrollo para diseñar el Z-2 fueron $185 millones.***

Actividades

a) ¿Cuántos helicópteros puede producir la empresa?

b) ¿Podrá ocurrir que si se construye una cantidad igual de helicópteros, los costos sean diferentes?

c) ¿Qué costos representan para la empresa si se producen: 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc. helicópteros?

d) Construir una gráfica utilizando los resultados obtenidos en el inciso c).

e) Si se supone que el número de helicópteros producidos se representa por la literal "x", expresar el costo en términos de "x".

RESUMEN.

Como ya se dedujo anteriormente, una función es una correspondencia entre variables de dos conjuntos, en la que a cada elemento de uno de ellos (el primero) se le hace corresponder un único elemento del otro (el segundo). Ahora si A es el primer conjunto y B es el segundo y si se representa por f a la correspondencia de A en B, entonces tendríamos:

$$f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B} \quad (f \text{ de A en B})$$

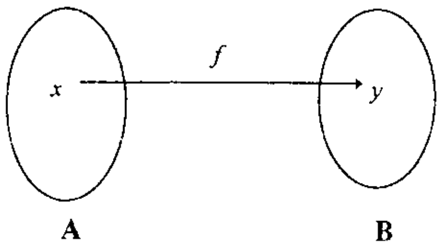
en donde al conjunto **A** se le llama **Dominio de la función** f y a **B** se le llama **contradominio de la función.**

La **notación** que se acostumbra para el dominio de la función f es: $\mathbf{D}_f$. Además si a un elemento "x" de A le corresponde un único elemento "y" de B, se dice que "y" es imagen de "x" y la **simbología que se utiliza generalmente es**:

$$f(x) = y \qquad (f \text{ de } x \text{ igual a } y)$$

en donde "x" es la **variable libre** y "y" es la **variable dependiente.**

Una representación geométrica es:



Y al conjunto de todas las imágenes de cada elemento del conjunto A (dominio) se le llama **Rango o Imagen** de la función f y la notación que utilizaremos será: R_f

<u>NOTA</u>: Observamos que el contradominio es un conjunto que contiene como subconjunto el rango o imagen de la función.

Es importante también aclarar que el dominio natural de una función $f(x)$, es el conjunto de todos los valores de "x" para los cuales la función está bien definida. En el caso de problemas en donde se usen las funciones, como en los cinco problemas ya trabajados, el dominio está restringido al contenido mismo del problema. Es decir, el dominio natural de una función, es un dominio ampliado y el dominio de una función aplicada a problemas, es un dominio restringido.

Por ejemplo:
En el problema 3, la función obtenida fue:

$$f(x) = 4 + 3(x - 1)$$
$$= 4 + 3 - 3$$
$$\boxed{f(x) = 3x + 1}$$

en donde x representa el número de Kilómetros y $f(x)$ el cobro que hace el taxista. Su dominio resultó ser el conjunto.

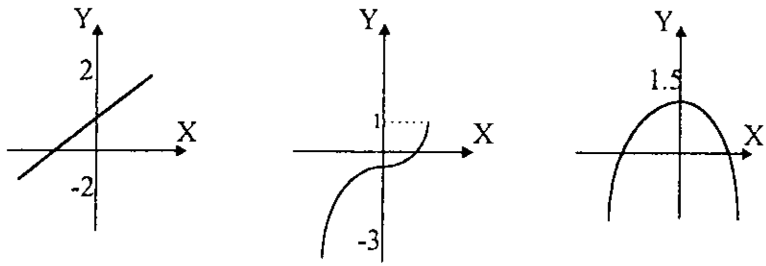
$$\{1, 2, 3, 4, \ldots\} = \mathbb{N}$$

y el rango es $\mathbf{R}_f = \{4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, \ldots\}$

ahora si la función $f(x) = 3x + 1$ se trabaja sin hacer referencia a ningún problema particular, observamos que la "x" puede tomar cualquier valor; es decir el $D_f = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Observación: Una forma de obtener el rango de una función después de haber construido su gráfica es, considerar el intervalo en donde inicia la gráfica hasta el punto donde termina, esto se hace tomando como eje de referencia al eje Y. También se pudo observar que el dominio de una función siempre se trabaja en el eje X.

Como ejemplos, a continuación se dan algunas gráficas de funciones y a partir de ellas se indica el rango de cada una:



El $R_f = [-2, 2]$ El $R_f = [-3, 1]$ El $R_f = (-\infty, 1.5]$

Para el problema 4, la función obtenida fue:

$$\begin{aligned} f(x) &= 6 + 4(x-1) \\ &= 6 + 4x - 4 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = 4x + 2}$$

recuérdese que "x" representó el número de horas en el estacionamiento y $f(x)$ el cobro realizado.

El Dominio es $D_f = \{1, 2, 3, 4,...\}$
y el $Rf = \{6, 10, 14, 18, 22, 26, 30,...\}$

nuevamente si $f(x) = 4x + 2$ se trabaja de manera arbitraria el $D_f=\mathbb{R}$ y el $R_f=\mathbb{R}$, ya que "x" puede tomar cualquier valor.

De la misma forma para el problema 5, la función fue:

$$\boxed{f(x) = 185 + 4.5x}$$

en donde "x" representó el número de helicópteros producidos y $f(x)$ representa los costos.

El $D_f=\{0, 1, 2, 3,...\}$ y el
$R_f=\{185, 189.5, 194, 198.5,..\}$

También si $f(x) = 185 + 4.5x$ representa una función arbitraria, el $D_f=\mathbb{R}$ y el $R_f=\mathbb{R}$

EJERCICIOS

I) En cada caso decir si la correspondencia indicada, representa una función o no y justificar su respuesta.

1) La correspondencia de madre a hijos.

2) La correspondencia de hijos a madre.

3) La correspondencia de cada coche con el número de su placa.

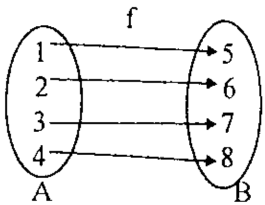
4) La correspondencia de la marca de un coche con su color.

5) La correspondencia de un alumno con las calificaciones obtenidas en cada materia en un semestre.

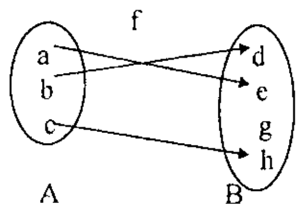
6) La correspondencia de las calificaciones obtenidas en cada materia en un semestre con un alumno.

II) Decir cuáles correspondencias de las que se dan, representan una función y obtener el dominio y rango para cada una de ellas.

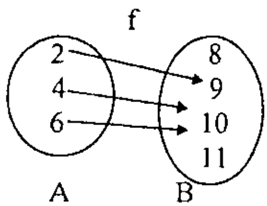
1)



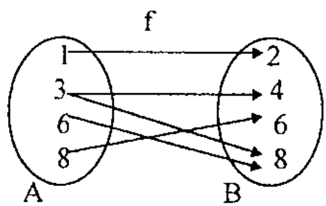
2)



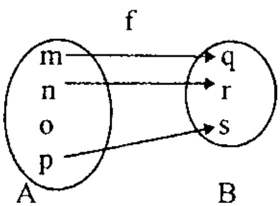
3)



4)



5)



II) TIPOS DE FUNCIONES : CONSTANTE, LINEAL, CUADRATICA, CUBICA, RAIZ CUADRADA Y RACIONAL.

El objetivo en ésta sección es que el alumno identifique el tipo de función, construya sus gráficas y obtenga el dominio y el rango para cada una de ellas. Al igual que en la sección anterior, se iniciará planteando algunos problemas en los que al ser trabajados por los alumnos, aparezcan funciones de los tipos anteriores citados. Posteriormente se incluye un resumen en el que se indica el tipo de función obtenida en cada problema y también se presentarán las generalidades teóricas para cada una de ellas. Al final se dará una serie de ejercicios y problemas para que el alumno identifique el tipo de funciones y practique la algoritmia al obtener el rango y construya sus gráficas.

Problema 6 ***Supóngase que en un salón de clases todos los alumnos obtuvieron la calificación de 7.***

Actividades

a) Construir una función en la que a cada alumno se le relacione con su calificación.

b) Obtener el dominio.

c) Construir la gráfica.

d) Obtener el rango.

Problema 7 ***Considérese una empresa en la que todos los empleados ganan $2,000 mensuales.***

Actividades

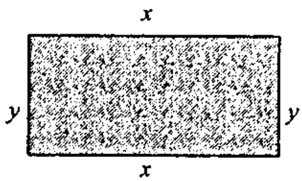
a) Construir una función en la que a cada empleado se le relacione con su sueldo.

b) Obtener el dominio.

c) Construir la gráfica.

d) Decir cuál es el rango.

<u>Problema 8</u> Supóngase que se tienen 100 m. de alambre y se requiere circular un terreno rectangular.



<u>Actividades.</u>

a) ¿Qué dimensiones pueden tomar sus lados?

b) ¿Será posible que un lado mida 50 mts.?

c) ¿Variará el área del terreno?

d) Si varía:

i) ¿cuál podría ser el área máxima?
ii) ¿cuál podría ser el área mínima?

Sugerencia: trabajar con rectángulos de diferentes medidas en sus lados.

e) Construir una función en la que se relacione el área con la medida de uno de sus lados.

f) Obtener el dominio.

g) Construir la gráfica.

h) Obtener el rango, (recuerde que el rango es el intervalo que se obtiene considerando el punto donde inicia la gráfica hasta el punto donde termina; esto es considerando el eje Y).

i) ¿Da alguna información la gráfica?. Si muestra alguna información, será útil para comprender las respuestas de los incisos a, b, c, y d.

Problema 9) ***Una tienda departamental contrata regularmente un anuncio en un diario. El perímetro que elige es de 88 cm y el periódico le cobra una cantidad fija, además les exige a los anunciantes incluir márgenes de 1 cm arriba, abajo y a los costados de sus anuncios.***

Actividades

a) ¿Qué dimensiones pueden tomar sus lados?

b) ¿Será posible que un costado del anuncio mida 44 cm?

c) Obtener el área del texto impreso variando las dimensiones.

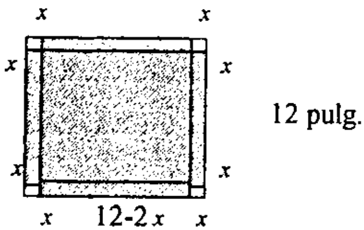
d) ¿Qué dimensiones le convienen más a la tienda departamental del texto impreso?

e) Construir una función en la que se relacione el área del texto impreso con la magnitud de uno de sus lados.

f) Obtener el dominio, hacer la gráfica y encontrar el rango de la función obtenida.

g) ¿Representa alguna utilidad la gráfica?

Problema 10) ***Se tiene una lámina cuadrada de 12 pulgadas de lado y se quiere hacer una caja abierta, cortando cuadrados iguales en las esquinas y doblándolos hacia arriba.***



Actividades

a) Los cuadrados que se van a doblar (o la x) ¿que valores pueden tomar?

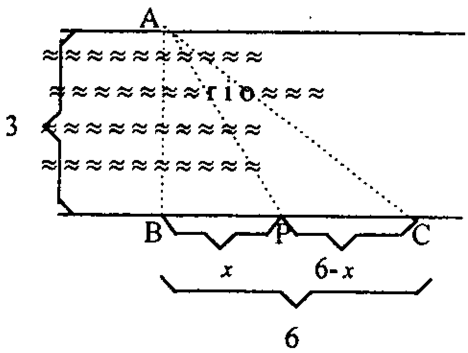
b) ¿Es posible que x=7?

c) ¿Al variar el valor de x, variará el volumen de la caja?

d) Construir una función en la que se relacione el volumen con la x.

e) Obtener para ésta función: el dominio, hacer la gráfica y decir cuál es el rango.

Problema 11) ***Los puntos A y B están opuestos uno del otro en las riberas de un río recto que mide 3 km de ancho. El punto C está en la misma ribera que B, pero 6 Km río abajo de B. Una compañía de teléfonos desea tender una cable de A a C. El costo por Km de cable por agua es $1250 y por tierra es $1000 el Km.***



Actividades.

a) Obtener el costo para la compañía, si el recorrido utilizado es de A a B y de B a C.

b) Obtener el costo para la compañía, si el recorrido es directamente de A a C.

c) ¿Qué valores puede tomar la x?

d) Obtener el costo para la compañía, siguiendo la trayectoria de A a P y de P a C (AP y de PC), cuando x toma los valores: 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

e) De los valores anteriores de x, ¿para cuál el costo es mínimo y para cuál es máximo?

f) Construir una función en la que se relacione el costo con "x".
(Utilizar la ruta AP+PC)

Problema 12) ***Supóngase que el número de días que se necesitan para completar un trabajo varía inversamente con el número de hombres que trabajan en él, si lo hacen con igual rapidez.***

Actividades

a) Construir una función en la que se relacione el número de días con el número de hombres.

b) ¿Cuál es el dominio?

c) Construir la gráfica, considerar que la constante de proporcionalidad es k=1 (tomar en cuenta la observación).

d) Obtener el rango.

Observación. Recuerde que cuando aparece la expresión $y = kx$ (k constante), se dice que "y" es directamente proporcional a "x" o que "y" varía directamente a "x" y si:

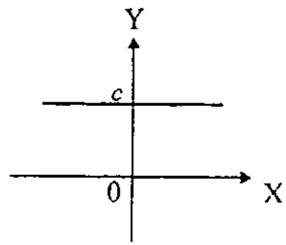
$$y = \frac{k}{x}$$

se dice que "y" es inversamente proporcional a "x" o que "y" varía inversamente con "x". En ambos casos k es la constante de proporcionalidad.

RESUMEN

FUNCIONES CONSTANTES

En los problemas 6 y 7, se obtuvieron funciones constantes, ya que como se pudo observar, independientemente del elemento considerado en el dominio, la función le asigna un valor constante. Las funciones constantes se representan de la siguiente forma: $f(x) = c$ en donde c es una constante. Como x puede tomar cualquier valor el $D_f=\mathbb{R}$ (Recordar que las expresiones que no tienen sentido son las divisiones entre cero y las raíces cuadradas de números negativos, esto es considerando los números reales), la gráfica es una recta paralela al eje X y que pasa por c y por último el rango es $\{c\}$.



FUNCIONES LINEALES

El tipo de funciones que resultó en los problemas 3, 4 y 5 se clasifican como lineales, ya que si al hacer la gráfica se unen los puntos resultantes, lo que se obtiene es una línea recta.

En general éste tipo de funciones se representan como:

$$f(x) = ax + b$$

en donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

El $D_f = \mathbb{R}$, su gráfica es una línea recta y el rango son todos los reales; es decir: $R_f = \mathbb{R}$ (Recuerde que el rango en el intervalo formado por el punto donde inicia la gráfica hasta el punto donde termina; esto es, considerando el eje Y).

Sugerencia. ***Para la construcción de la gráfica de funciones lineales, es suficiente con obtener dos puntos y unirlos, dado que no se debe olvidar que dos puntos determinan una línea recta.***

FUNCIONES CUADRATICAS

En los problemas 8 y 9 aparecen funciones cuadráticas. En general éste tipo de funciones son de la forma :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

en donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.
El $Df = \mathbb{R}$ y las gráficas como se debe recordar son parábolas.

Sugerencia: ***Para construir la gráfica de éste tipo de funciones, se requiere considerar cinco o más puntos.***

FUNCIONES CUBICAS

El tipo de función que apareció en el problema 10 es cúbica. En general éstas funciones son de la forma:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

en donde a, b, c, y d son constantes y $a \neq 0$.

OBSERVACION: ***También se puede decir que las funciones lineales, cuadráticas, cúbicas, etc., son polinomiales en donde el $D_f = I\!R$***

FUNCION RAIZ CUADRADA

Un ejemplo de éste tipo de funciones se obtuvo en el problema 11. En general podemos afirmar que éstas funciones son todas aquellas en donde aparezcan raíces cuadradas.

Sugerencia: ***Para obtener el dominio de éstas funciones no se debe olvidar que la expresión que se encuentra dentro del radical debe ser mayor o igual que cero.***

Ejemplo: Si $f(x) = \sqrt{x+3}$

$$x + 3 \geq 0$$

$$x \geq -3 \quad \therefore \text{ El } D_f = [-3, +\infty)$$

FUNCIONES RACIONALES

El problema 12 dio como resultado una función racional. En general las funciones racionales aparecen cuando se tienen cocientes y el dominio para cada una de ellas son todos los reales excepto el valor o valores para los cuales el denominador sea igual a cero.

Por ejemplo el dominio de $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ es $\mathbb{R}-\{1\}$

EJERCICIOS

Identificar el tipo de función, dar el dominio, hacer la gráfica y decir cuál es el rango para cada una de ellas.

1) $f(x)=-1$	2) $f(x)=10$	3) $f(x)=2x-3$
4) $f(x)=1-4x$	5) $f(x)=x^2$	6) $f(x)=x^2+1$
7) $f(x)=x^2-2$	8) $f(x)=-x^2$	9) $f(x)=-x^2+3$
10) $f(x)=-x^2-1$	11) $f(x)=(x+1)^2$	12) $f(x)=(x-4)^2$

Al construir la gráfica de las funciones de la 5 a la 12 y analizar cada una de ellas, ¿qué conclusiones puede deducir?

13) $f(x)=x^3$	14) $f(x)=x^3+1$	15) $f(x)=x^3-2$
16) $f(x)=-x^3$	17) $f(x)=-x^3+3$	18) $f(x)=(x+2)^3$
19) $f(x)=(x-1)^3$	20) $f(x)=(x-1)^3-4$	

También para las funciones de la 13 a la 20 después de construir su gráfica, ¿qué puede concluir?

21) $f(x)=\lvert x\rvert$	22) $f(x)=\lvert x\rvert+2$	23) $f(x)=\lvert x\rvert-1$
24) $f(x)=\lvert x+2\rvert$	25) $f(x)=\lvert x-1\rvert$	26) $f(x)=\lvert x+2\rvert-3$

Nota: a las funciones del 21 al 26, se les llama funciones valores absolutos.

Observación. Se recuerda que: $|x| = x$ si $x \geq 0$
y que $|x| = -x$ si $x < 0$

27) $f(x) = \sqrt{x}$ 28) $f(x) = \sqrt{x - 2}$

29) $f(x) = \sqrt{x + 3}$ 30) $f(x) = \sqrt{1 - x}$

31) $f(x) = \sqrt{3 - x}$ 32) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

33) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ 34) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$

35) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ 36) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Analizar las funciones de la 27 a la 34 y después de construir las gráficas, ¿qué conclusiones puede dar?

37) $f(x) = \frac{1}{x}$ 38) $f(x) = \frac{1}{x - 1}$

39) $f(x) = \frac{2}{x + 3}$ 40) $f(x) = \frac{3}{2x + 3}$

41) $f(x) = \frac{1}{1 - x}$ 42) $f(x) = \frac{2}{3 - x}$

43) $f(x) = \frac{x}{x + 1}$ 44) $f(x) = \frac{3x}{2 - x}$

45) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ 46) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

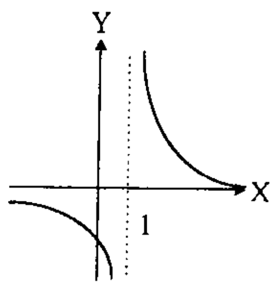
47) $f(x) = \frac{4x^2}{9 - x^2}$ 48) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

49) $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$ 50) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-9}$

__Sugerencia__. *Para la construcción de la gráfica de las funciones de la 37 a la 50 es conveniente considerar las asíntotas horizontales y verticales. Recuerda que las gráficas son curvas que se aproximan a cada una de las asíntotas.*

Ejemplo: la gráfica de la función:

$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ es:



La asíntota horizontal es el eje X y la asíntota vertical es la línea punteada; es decir, es la recta paralela al eje Y que pasa por el $x=1$ y éste es el valor que se eliminó de su dominio.

51) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$ 52) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$

53) $f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x^2-4}$ 54) $f(x)=\dfrac{x(x-3)(x+3)}{x^2-3x}$

<u>Sugerencia.</u> ***Para construir la gráfica de éstas funciones se recomienda simplificar los cocientes.***

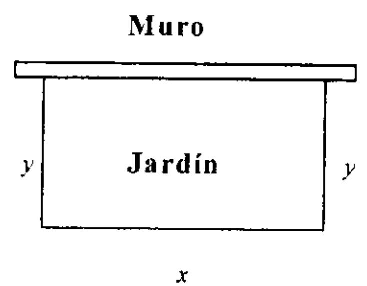
Construir una función para cada problema que se da, obtener su dominio y decir cuál es el rango.

55) El alquiler de un automóvil es de $100 mas $1.70 por km. recorrido.

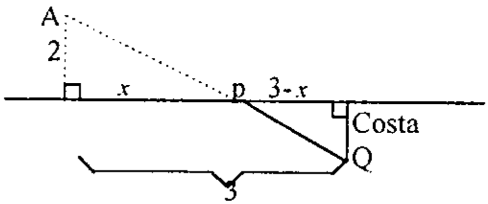
56) El costo total al imprimir una revista es $250 más $1.20 veces el número de revistas impresas.

57) Una empresa tiene un costo directo de $23 asociado a la producción de cada maleta que fabrica y los costos fijos ascienden a $12,000 mensuales.

58) Un jardín rectangular va a ser construido junto a un largo muro de ladrillo y circundado por los otro tres lados por una cerca. Si el perímetro de la cerca es de 100 m., expresar el área del jardín en función de "x". (Ver la figura)



59) Un hombre está en un bote a 2 Km. del punto A más próximo a la costa. Tiene que ir al punto Q, situado a 3 km. más abajo por la costa y a un kilómetro tierra adentro. Puede remar a 2 km. por hora y caminar a 6 Km. por hora. Construir una función si utiliza la ruta de A a P y de P a Q.



III) OPERACIONES CON FUNCIONES

a) Suma, resta, producto y cociente de funciones.

b) Composición de funciones.

c) Operaciones de la forma: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

OBJETIVO

En ésta unidad se pretende que el alumno se de cuenta de la utilidad práctica y teórica de las operaciones con funciones y adquiera habilidad algebraica para su realización.

En el desarrollo de ésta parte se plantean y resuelven algunos problemas en los que se hace necesario operar con funciones, posteriormente se presenta un resumen en el que se incluye el desarrollo teórico, se dan algunos ejemplos y finalmente se incluye una lista de ejercicios.

Problema 13) ***Supóngase que el precio fijo implicado en la producción de un juguete es de $1000 por mes y el costo variable por juguete es de $2.00.*** Además el precio de venta de cada juguete es de $5.00.

Actividades

a) Obtener la utilidad para la empresa si se venden x juguetes.

b) Obtener la utilidad si en un mes se venden 2500 juguetes.

c) Si en otra empresa, es producido el mismo juguete en un precio fijo de $2000 y el costo variable por juguete es de $1.00. Obtener el costo total en ambas empresas por producir x juguetes en un mes.

Solución.

a) El costo total al producir x juguetes en un mes es: $C(x) = 1000 + 2x$

El ingreso mensual para la empresa será:

$$I(x) = 5x$$

Y la utilidad $U(x)$ al vender x juguetes es:

$$\begin{aligned} U(x) &= I(x) - C(x) \\ &= 5x - (1000 + 2x) \\ &= 5x - 1000 - 2x \\ &= 3x - 1000 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\boxed{U(x) = 3x - 1000}$

b) En este inciso x=2500, luego:

$$\begin{aligned} U(2500) &= 3(2500)-1000 \\ &= 7500-1000 \\ &= 6500 \end{aligned}$$

Por tanto la utilidad es: \$6500 en un mes.

c) El costo $C_1(x)$ al producir x juguetes en un mes resulta ser:

$$C_1(x) = 2000 + x$$

Ahora representemos al costo total $C_t(x)$ al producir x juguetes en ambas empresas, luego:

$$\begin{aligned} \boxed{C_t(x) = C(x) + C_1(x)} \\ &= (1000+2x)+(2000+x) \\ &= 1000+2x+2000+x \end{aligned}$$

$$=3000+3x$$

$$\therefore \quad \boxed{C_t(x)=3000+3x}$$

d) Supóngase que se producen 1500 juguetes en un mes en cada una de las empresas.

Obtener:

i) El porcentaje de costos invertidos en la primer empresa con respecto a los costos totales.

ii) El porcentaje de los costos invertidos en la segunda empresa con respecto a los costos totales.

Respuesta

Recordemos que el costo para x juguetes producidos por la primer empresa es:

$$C(x)=1000+2x$$

y como en éste caso $x=1500$, luego:

$$\begin{aligned} C(1500)&=1000+2(1500)\\ &=1000+3000\\ &=4000 \end{aligned}$$

También sabemos que los costos totales son:

$$C_t(x)=3000+3x$$

en particular si $x=1500$, obtenemos que:

$$\begin{aligned} C_t(1500)&=3000+3(1500)\\ &=3000+4500\\ &=7500 \end{aligned}$$

Ahora el porcentaje de los costos invertidos en la primer empresa con respecto a los costos totales es: $\frac{C(x)}{Ct(x)}$

y cuando x=1500, se tiene: $\frac{4000}{7500}$=.5333

Por lo tanto el porcentaje es: 53.33%.

ii) De la misma forma, el porcentaje de los costos invertidos en la segunda empresa con respecto a los costos totales, resulta ser:

$$\frac{C_1(x)}{Ct(x)}$$

nuevamente para x=1500, se obtiene:

$$\frac{2000+1500}{750}=\frac{3500}{7500}=.4666$$

Por lo tanto el porcentaje es: 46.66%.

<u>Problema 14)</u> Supóngase que x es el número de venados, en miles, en un parque estatal. Sea $f(x)$ el número de venados, en miles, en el mismo parque estatal un año después. Supongamos que una investigación indica que hay una relación entre x y $f(x)$ dada aproximadamente por:

$$f(x)=x+\frac{1}{x}$$

Si x_0 denota el número de venados inicialmente, x_1 el número de venados dos años después, etc.

Actividades

a) Expresar a x_1, x_2, etc., en términos de la función f.

b) Obtener la cantidad de venados en el primero y segundo año si se inicia con 1000 venados (x_0=1)

Respuesta:

a) Como x es el número de venados en un parque estatal y $f(x)$ es el número de venados en un año después, entonces:

$$x_1=f(x_0) \text{ y } x_2=f(x_1)$$

observamos que x_2 se puede representar de la forma:

$$x_2=f(x_1)=f(f(x_0))$$

$$\therefore \boxed{x_2=f(f(x_0))}$$

b) Como $x_0=1$, entonces: $x_1=f(x_0)=x_0+\frac{1}{x_0}$

luego: $$x_1=f(1)=1+\frac{1}{1}=1+1=2$$

Por lo tanto, después del primer año hay en el parque estatal 2000 venados.

Y como $x_2=f(x_1)=x_1+\frac{1}{x_1}$, luego:

$$x_2=f(2)=2+\frac{1}{2}=2.5$$

Por lo tanto, después de 2 años, existen en el parque estatal 2500 venados.

RESUMEN

a) Suma, resta, producto y cociente de funciones.

Al darle solución al problema 13, fue necesario utilizar las operaciones entre funciones:

$$I(x)+C(x),\ C(x)+C_1(x),\ \frac{C(x)}{Ct(x)}\ \text{y}\ \frac{C_1(x)}{Ct(x)}$$

En general, la suma, resta, producto y cociente de funciones se definen de la siguiente forma:

Definición: Si f y g son dos funciones entonces:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\ g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

El $D_{f+g}=D_{f-g}=D_{f.g}=D_f\cap D_g$

y el $D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x|\ g(x)=0\}$

Ejemplos:

1) Si $f(x)=3x-4$ y $g(x)=x^2-9x$

obtener: $f+g$, $f-g$, $f.g$, $\frac{f}{g}$ y sus dominios correspondientes.

Solución:

$$(f+g)=f(x)+g(x)=(3x-4)+(x^2-9x)$$
$$=3x-4+x^2-9x$$
$$=x^2-6x-4$$

$$(f-g)=f(x)-g(x)=(3x-4)-(x^2-9x)$$
$$=3x-4-x^2+9x$$
$$=-x^2+11x-4$$

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=(3x-4)(x^2-9x)$$
$$=3x^3-27x^2-4x^2+36x$$
$$=\ 3x^3-31x^2+36x$$

Ahora como el $D_f=\mathbb{R}$ y el $D_g=\mathbb{R}$

entonces el $D_{f+g}=D_{f-g}=D_{f.g}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$

y el $D_f=\mathbb{R}-\{0,9\}$, esto ocurre dado que

$$x^2-9x = x(x-9)=0,$$

de donde se deduce que $x=0$ y $x=9$

2) Si $f(x)=\sqrt{x+2}$ y $g(x)=\sqrt{5-4x}$

obtener: $f+g$, $f-g$, $f.g$, $\dfrac{f}{g}$ y sus dominios correspondientes

Solución: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{5-4x}$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x+2}\ -\ \sqrt{5-4x}$$

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=\left(\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{5-4x}\right)=$$
$$=\sqrt{(x+2)(5-4x)}$$
$$=\sqrt{5x-4x^2+10-8x}$$
$$=\sqrt{-4x^2-3x+10}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{5-4x}}=\sqrt{\frac{x+2}{5-4x}}$$

Para obtener el dominio de $f(x)$, $x+2\geq 0$, de donde $x\geq -2$, luego el

$$D_f=[-2+\infty)$$

de la misma forma, el dominio de $g(x)$ son todos los valores de x, tales que:

$$5\text{-}4x\geq 0$$
$$5\geq 4x$$
$$\frac{5}{4}\geq\frac{4x}{4}$$
$$\frac{5}{4}\geq x \quad \text{o} \quad x\leq\frac{5}{4}$$

luego el $D_g=(-\infty,\frac{5}{4}]$

En vista de lo anterior, se deduce que:

el $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f.g} = [-2,+\infty] \cap (-\infty, \frac{5}{4}]$

$= [-2, \frac{5}{4}]$

y el $D_{f/g} = \left[-2, \frac{5}{4}\right] - \left\{\frac{5}{4}\right\} = \left[-2, \frac{5}{4}\right)$

b) Composición de funciones

Al trabajar con el problema 14 y al darle solución al primer inciso, se llegó a una expresión de la forma:

$$\boxed{x_2 = f(f(x_0))}$$

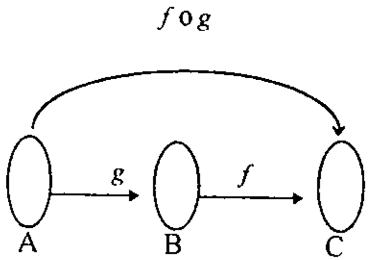
a ésta expresión se le conoce en las matemáticas como una **composición de funciones**, en general la definición de la composición de funciones es:

Definición.- ***Si f y g son dos funciones, la composición de f con g se representa de la forma fog y se define como sigue:***

$$\boxed{(fog)(x) = f(g(x))}$$

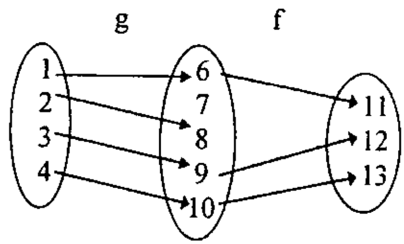
y el $D_{fog} = \{ x \in D_g | \, g(x) \in D_f \}$

La representación geométrica es la siguiente:



Ejemplos.

1) Si se da la correspondencia:



Obtener: $(fog)(1)$, $(fog)(2)$, $(fog)(3)$, $(fog)(4)$ y encontrar D_{fog}.

Respuesta: $(fog)(1)=f(g(1))=f(6)=11$

$(fog)(2)$=No está definida.

$(fog)(3)=f(g(3))=f(9)=12$

$(fog)(4)=f(g(4))=f(10)=13$

y el $D_{fog}=\{1, 3, 4\}$

2) Si $f(x)=3x-4$ y $g(x)=x^2-9x$, obtener fog, gof y sus dominios correspondientes.

Respuesta: $(fog)(x)=f(g(x))=f(x^2-9x)=3(x^2-9x)-4$

$$=3x^2-27x-4$$

Un proceso que podemos utilizar para la evaluación algebraica de la composición de funciones es la siguiente ; la función

$$f(x)=3x-4$$

se expresa de tal forma que en todos los lugares en donde aparece la x se escriban paréntesis con nada adentro; es decir:

$$f(\ )=3(\ )-4$$

ahora como lo que se desea es obtener $f(x^2-9x)$, lo único que se requiere es escribir dentro del paréntesis x^2-$9x$, de donde:

$$f(x^2-9x)=3(x^2-9x)-4$$

$$=3x^2-27x-4$$

Utilizando un proceso similar a éste, obtenemos:

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(3x-4)$$

$$g(\quad)=(\quad)^2-9(\ )$$

Luego: $g(3x-4)=(3x-4)^2-9(3x-4)$

$$=9x^2-24x+16-27x+36$$

$$=9x^2-51x+52$$

Además como el $D_f=\mathbb{R}$ y el $D_g=\mathbb{R}$,

$D_{fog}=\mathbb{R}$ y $D_{fog}=\mathbb{R}$

c) Operaciones de la forma: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Como ya se definió en la composición de funciones: $(fog)(x) = f(g(x))$

ahora si: $g(x) = x + h$, entonces:

$$\boxed{(fog)(x) = f(g(x)) = f(x+h)}$$

También se recuerda que en el problema 13, al darle solución aparecieron la resta y el cociente de función, ahora al continuar estas tres operaciones podemos construir la operación:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Esta operación tiene una gran relevancia teórica, dado que constituye la parte más importante de uno de los conceptos sobresalientes del cálculo diferencial, nos estamos refiriendo al **concepto de la derivada de una función**. Debido a la importancia de éste concepto y a su utilidad, es de gran interés que el alumno adquiera habilidad algebraica en el manejo de ésta operación, por lo cuál se dan los ejemplos siguientes:

Ejemplos :

Para cada una de las funciones que se dan, obtener la operación:

$$\boxed{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

1) $f(x)=x^2+3x-5$

Primeramente es necesario obtener $f(x+h)$ y para tal efecto, expresamos a la función $f(x)$ de tal forma que en cada lugar en donde aparece la x se escriban paréntesis con nada adentro (proceso utilizado en la composición de funciones); es decir:

$$f(\ )=(\ )^2+3(\ )-5$$

posteriormente, en cada paréntesis se escribe $x+h$, de donde:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= (x+h)^2+3(x+h)-5 \\ &= x^2+2xh+h^2+3x+3h-5 \end{aligned}$$

Ahora ya podemos trabajar con la operación completa:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x^2+2xh+h^2+3x+3h-5)-(x^2+3x-5)}{h}$$

$$=\frac{(x^2+2xh+h^2+3x+3h-5-x^2-3x+5)}{h}$$

$$=\frac{2xh+h^2+3h}{h}=\frac{h(2x+h+3)}{h}=2x+h+3$$

2) $f(x)=\sqrt{2x-5}$

Al utilizar un procedimiento similar al anterior, tenemos lo siguiente:

$f(\ )=\sqrt{2(\ )-5}$ de donde

$f(x+h)=\sqrt{2(x+h)-5}=\sqrt{2x+2h-5}$

luego:

$$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{2x+2h-5}-\sqrt{2x-5}}{h}$$

$$= \frac{(\sqrt{2x+2h-5}-\sqrt{2x-5})(\sqrt{2x+2h-5}+\sqrt{2x-5})}{h(\sqrt{2x+2h-5}+\sqrt{2x-5})}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2x+2h-5}\right)^2-\left(\sqrt{2x-5}\right)^2}{h(\sqrt{2x+2h-5}+\sqrt{2x-5})}$$

$$= \frac{2x+2h-5-2x+5}{h(\sqrt{2x+2h-5}+\sqrt{2x-5})}$$

$$\frac{2h}{h(\sqrt{2x+2h-5}+\sqrt{2x-5})} = \frac{2}{\sqrt{2x+2h-5}+\sqrt{2x-5}}$$

3) $f(x)=\dfrac{7}{8-4x}$

$$f(x+h)=\frac{7}{8-4(x+h)}=\frac{7}{8-4x-4h}$$

luego:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{7}{8-4x-4h}-\dfrac{7}{8-4x}}{h}$$

$$= \frac{\dfrac{7(8-4x)-7(8-4x-4h)}{(8-4x-4h)(8-4x)}}{h}$$

$$= \frac{\dfrac{56-28x-56+28x+28h}{(8-4x-4h)(8-4x)}}{h}$$

$$= \frac{\dfrac{28h}{(8-4x-4h)(8-4x)}}{\dfrac{h}{1}}$$

$$= \frac{28h}{h(8-4x-4h)(8-4x)} = \frac{28}{(8-4x-4h)(8-4x)}$$

EJERCICIOS

1. Realizar las operaciones: $f+g$, $f-g$, $f.g$, $\frac{f}{g}$ y obtener sus dominios correspondientes para cada una de las parejas de funciones que se dan:

1) $f(x)=3x+1$ y $g(x)=2-x$

2) $f(x)=x^2+2$ y $g(x)=1-x^2$

3) $f(x)=x^3+1$ y $g(x)=2-x^3$

4) $f(x)=\sqrt{x+1}$ y $g(x)=\sqrt{3x-2}$

5) $f(x)=\sqrt{4-x}$ y $g(x)=\sqrt{5-7x}$

6) $f(x)=\dfrac{2}{3x-1}$ y $g(x)=\dfrac{1}{2x-3}$

7) $f(x)=\dfrac{5}{1-x}$ y $g(x)=\dfrac{1}{4-x}$

2) Obtener: fog, gof, fof, y gog para cada pareja de funciones que se dan en el ejercicio I.

3) Obtener $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para cada una de las funciones siguientes:

1) $f(x)=3x+1$ y 2) $f(x)=2-x$

3) $f(x)=x^2+2$ y 4) $f(x)=1-x^2$

5) $f(x)=x^3+1$ y 6) $f(x)=2-x^3$

7) $f(x)=\sqrt{x+1}$ y 8) $f(x)=\sqrt{3x-2}$

9) $f(x)=\sqrt{4-x}$ y 10) $f(x)=\sqrt{5-7x}$

11) $f(x)=\frac{2}{3x-1}$ y 12) $f(x)=\frac{1}{2x-3}$

13) $f(x)=\frac{5}{1-x}$ y 14) $f(x)=\frac{1}{4-x}$

IV) Funciones Trascendentes
IV.1) Funciones Exponenciales
IV.2) Funciones Logarítmicas

Objetivo. ***En éste apartado se pretende que el alumno comprenda la construcción que se hace de las funciones exponenciales y logarítmicas, a partir de la resolución de problemas, así como su utilidad práctica y teórica.***

En ésta unidad se utiliza un desarrollo similar al de los anteriores, se plantea y se resuelve un problema en el que aparecen las funciones exponenciales. Las logarítmicas se construyen como funciones inversas a las exponenciales. En el resumen se dan las generalidades teóricas, se resuelven algunos ejemplos y al final se plantean una lista de ejercicios.

Problema 15) Uno de los problemas que frecuentemente se presentan en la administración y la economía consiste en obtener el monto que un ahorrador tiene en el banco, después de una cierta cantidad de años, si el pago de los intereses es anual y si el ahorrador depositó una cantidad fija en el banco.

Para darle respuesta a este problema, iniciamos con las anotaciones siguientes:

c=cantidad de dinero depositada en el banco.
i=interés anual que paga el banco a los ahorradores.
$f(x)$=cantidad de dinero que tiene el ahorrador en el banco después de x años.

Primeramente se representa el monto de dinero que tiene el ahorrador al terminar el primer año, éste es, la cantidad de dinero depositada, más los intereses generados en ese año; es decir:

$$c + ic = c(1 + i)$$

de la misma forma, el monto de dinero al término del segundo año será:

lo que tiene al término del primer año, más los intereses generados en el segundo; es decir :

$$c + ic + i(c + ic) =$$
$$= c + ic + ic + i^2c$$
$$= i^2c + 2ic + c$$
$$= c(i^2 + 2i + 1)$$
$$= c(i + 1)^2$$

Observación: ***Recuerde que***

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$y \;\; (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

de la misma forma, el monto de dinero al terminar el tercer año es:

$$=i^2c+2ic+c+i\,(i^2c+2ic+c)$$

$$=i^2c+2ic+c+i^3c+2i^2c+ic$$

$$=i^3c+3i^2c+3ic+c$$

$$=c(i^3+3i^2+3i+1)$$

$$=c(i+1)^3$$

En general, el monto que el ahorrador tiene en el banco después de x años será:

$$\boxed{f(x)=c(i+1)^x}$$

Ahora si se supone que el ahorrador depositó \$5000 con un pago del 4% anual, después de 10 años la cantidad que tiene es:

Observe que en éste caso:

c=\$5000
i=4%=0.04

y x=10 años

Luego: $f(x)=c(i+1)^x=5000(0.04+1)^{10}$

$=5000(1.04)^{10}$

$=7401.22$

Por lo tanto, el monto que el ahorrador tiene en el banco, después de 10 años es:

$$\boxed{f(10)=\$7401.22}$$

También se da el caso en que el interés se pague k veces en un año, lo cual ocasiona que el número de periodos sea xk, luego la cantidad de dinero ahorrada después de x años será:

$$f(x) = c\left(1+\frac{i}{k}\right)^{xk}$$

Supongamos ahora que el ahorrador, deposita \$5000 en un banco, con un interés del 4% y que éstos se pagan por trimestres. ¿Qué cantidad tendrá el ahorrador después de 10 años?

nuevamente: c=\$5000

i=4%=0.04

x=10 años

y como el interés se paga cada 3 meses, en el año se paga 4 veces, luego: k=4

$$\therefore \quad f(x) = c\left(1+\frac{i}{k}\right)^{xk} \qquad \Rightarrow$$

$$f(10) = 5000\left(1+\frac{0.04}{4}\right)^{10(4)}$$

$$=5000(1+.01)^{40}$$

$$=5000(1.01)^{40}$$

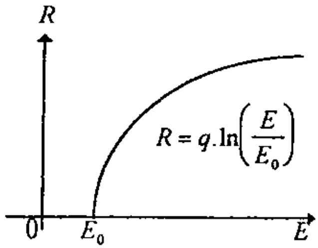
$$= 744.3$$

Luego el monto total, después de 10 años es: \$7444.31

Problema 16) Es común que en psicología se maneje la ley de **Weber - Fechner** de estímulo - respuesta, expresa que la respuesta R está relacionada con el estímulo E mediante la ecuación:

$$R = q.\ln\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

donde E_0 es el valor mínimo del estímulo que puede ser detectado por el sujeto (el objeto de estímulo), y que es una constante de proporcionalidad determinada por el experimento. A continuación se da una gráfica de este modelo. (Baum, Miller y Schuitz, 1992).



Nótese que en la gráfica, no se incluyen los valores de R para E entre 0 y E_0, ya que resultarían negativos.

Observación. ***Desafortunadamente, éste modelo es utilizado por algunos levantadores de pesas para levantar más peso de lo normal.***

Por ejemplo, supóngase que el mínimo voltaje que un levantador de pesas puede sentir es de 40V y que una sacudida de 400V lo "induce" a levantar 9 libras más del valor normal. ¿Qué voltaje debe aplicarse al levantador de pesas para que alce 18 libras por encima del valor normal?

Respuesta.

$$R = q.\ln\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

$$9 = q.\ln\left(\frac{400}{40}\right) = q.\ln 10$$

es decir ; $$q = \frac{9}{\ln 10} = \frac{9}{2.3025} = 3.9086$$

luego: $$18 = 3.9086.\ln\left(\frac{E}{40}\right) \quad \Rightarrow$$

$$18 = 3.9086(\ln E - \ln 40) \quad \Rightarrow$$

$$18 = 3.9086 \ln E - 3.9086 \ln 40 \quad \Rightarrow$$

$$18 + 3.9086 \ln 40 = 3.9086 \ln E \quad \Rightarrow$$

$$\ln E = \frac{18 + 3.9086.\ln 40}{3.9086} \quad \Rightarrow$$

$$\ln E = \frac{18 + 3.9086.(3.6888)}{3.9086} \quad \Rightarrow$$

$$\ln E = \frac{32.4183}{3.9086} = 8.294$$

Luego: $\ln E = 8.294 \quad \Rightarrow$

$$e^{\ln E} = e^{8.294} \quad \Rightarrow$$

Por lo tanto : $E \approx 4000$ V

<u>Nota:</u> ***Es claro que éste método puede resultar peligroso.***

RESUMEN

<u>IV.1. FUNCIONES EXPONENCIALES</u>

Al darle solución al problema 15 y a una variante de éste, aparecieron funciones de la forma:

$$f(x) = c(i+1)^x \qquad \text{y} \qquad f(x) = c\left(1+\frac{i}{k}\right)^{xk}$$

a éstas funciones se les llama **<u>Exponenciales</u>**.

<u>Observación</u>. ***Matemáticamente se demuestra que si k es grande, se tiene que:***

$$\left(1+\frac{i}{k}\right)^{kx} \approx c\,e^{ix}$$

en donde $e \approx 2.7182$ es considerado la base del logaritmo natural, de lo anterior se deduce que :

$$f(x) = c\left(1+\frac{i}{k}\right)^{kx} \approx c\,e^{ix}$$

es decir: $\boxed{f(x) \approx c\ e^{ix}}$ cuando k es grande.

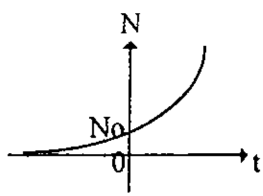
En las matemáticas, existe una función exponencial muy usada, ya que intervienen en varios modelos que incluyen lo que se conoce como **<u>incremento exponencial</u>** o bien **<u>decremento exponencial</u>**. El modelo de incremento exponencial es de la forma:

$$N = No\ e^{kt} \qquad \text{para } k>0$$

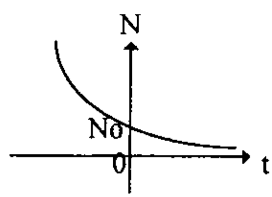
y el modelo de decremento exponencial es:

$$N = No\ e^{-kt} \qquad \text{si } k>0$$

Sus gráficas son:



$N = No\ e^{kt}$

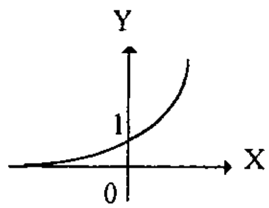


$N = No\ e^{-kt}$

La función exponencial a la que nos referimos es:

$$\boxed{f(x)=e^{x}}$$

para la cual el $D_f=\mathbb{R}$ y el $R_f=(0+\infty)$. Su gráfica es la siguiente:

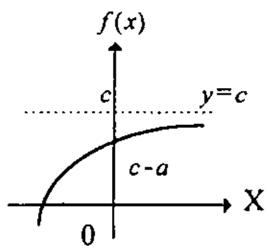


CURVAS DE APRENDIZAJE

Como un ejemplo más en donde se utiliza la función exponencial ($f(x)=e^{x}$), se da el siguiente. A las funciones exponenciales de la forma

$$f(x)=c-a\,e^{-kx}$$

donde c, a y k son positivos, con frecuencia son citados como curvas de aprendizaje, esto es debió al extenso empleo que los psicólogos utilizan para describir el aprendizaje. Clark Hull empleó el caso especial $c=a$ de ésta función como una de las ecuaciones básicas en su **teoría del refuerzo del aprendizaje** para describir la relación entre la firmeza del aprendizaje $f(x)$ y el número de refuerzo (Draper y Klingman, 1976). La gráfica es:



en ella se observa que $f(x)=c-a\,\mathrm{e}^{-kx}$, crece rápidamente al principio y posteriormente se va aproximando a la asíntota $y=c$. Se ha encontrado que éstas curvas son apropiadas para representar varios ejemplos de costo y producción (Draper y Kingman, 1976).

IV.2. FUNCIONES LOGARITMICAS

En el problema 16, aparece la ecuación:

$$K=q.\ln\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

en la cuál intervienen las funciones logarítmicas. A continuación se da un desarrollo en el que se observa la necesidad de trabajar con las funciones logarítmicas.

Al resolver algunos problemas, se presenta la necesidad de obtener la solución de ecuaciones de la forma:

1) $3^x=27$
2) $2^{x+4}=\frac{1}{2}$
3) $10^y=5$

observamos que la solución de la ecuación 1, es $x=3$, la solución de la ecuación 2, es $x=-5$ y para darle solución a la ecuación 3, ya no resulta tan directo, dado que no es fácil encontrar al tanteo un valor de "y" tal que $10^y=5$. Para darle solución a dicha ecuación se requiere utilizar logaritmos.

Definición.- ***La función logaritmo base*** a ***es*** $y=\log_a x$ ***si y solo si*** $a^y=x$***, donde*** $a>0$.

Observemos en ésta definición que "y" es el exponente al que se tiene que elevar "a" para que de como resultado x.

Ejemplos:

i) $\log_2 16=4$, dado que $2^4=16$

ii) $\log_3 27=3$, dado que $3^3=27$

iii) $\log_{25} 5=\frac{1}{2}$, dado que $25^{1/2}=5$

iv) $\log_{10} 5=y$, dado que $10^y=5$

Nótese que en el cuarto ejemplo se le dio solución a la ecuación antes planteada, siendo ésta:

$$10^y=5$$

luego, su solución es:

$$y=\log_{10} 5 \approx 0.69897$$

A continuación se dan las propiedades de la función $f(x)=\log_a x$, ya que resultan ser una herramienta muy poderosa para simplificar muchos cálculos

1) $\log_a (x.y)=\log_a x+\log_a y$

2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$

3) $\log_a x^r = r\log_a x$

Las bases de los logaritmos que se utilizan con más frecuencia son: a=10 y a=e (e=2.7182).

Por ésta razón se utilizan las notaciones especiales:

$$y=\log_{10} x=\log x$$

el nombre que se le da es, **logaritmo de base 10 o decimal** y

$$y=\log_e x=\ln x$$

recibe el nombre de **logaritmo natural**.

Observación.- *Las propiedades para la función logaritmo natural son:*

1) $\ln(x.y) = \ln x + \ln y$

2) $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

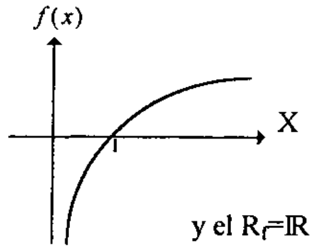
3) $\ln x^r = r \ln x$

Nota. En el ejemplo planteado en el problema 16, se utilizó la propiedad 2.

En síntesis, el dominio, la gráfica y el rango de la función.

$\boxed{f(x) = \ln x}$

es: $D_f=(0,+\infty)$



y el $R_f=\mathbb{R}$

FUNCIONES INERSAS

Definición. ***Si*** $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ ***para toda*** x ***en el dominio de*** g ***y*** f***, respectivamente, entonces*** $f(x)$ ***es la función inversa de*** $g(x)$ ***y*** $g(x)$ ***es la función inversa de*** $f(x)$.

Considerando ésta definición, tenemos que si $f(x)=\log_a x$ y $g(x)=a^x$, entonces

$$f(g(x))=f(a^x)=\log_a a^x=x$$

ya que x es el exponente de la potencia de a que produce a^x. De manera análoga

$$g(f(x))=g(\log_a x)=a^{\log_a x}=x$$

ya que $\log_a x$ es el exponente de a que produce x. De lo anterior se deduce que:

$$f(x)=\ln x \quad \text{y} \quad g(x)=a^x$$

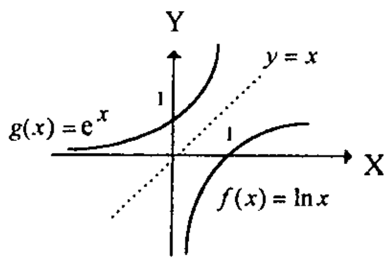
son funciones inversas (Baum, Miller y Schultz, 1992).

En particular, las funciones $f(x)=\ln x$ y $g(x)=e^x$ son funciones inversas, es decir:

$$f(g(x))=f(e^x)=\ln(e^x)=x$$

$$\text{y} \quad g(f(x)=g(\ln x)=e^{\ln x}=x$$

siendo sus gráficas:



En las matemáticas, resulta ser de más utilidad el $\ln$, que el $\log$, por ésta razón se dan algunos ejemplos de ecuaciones en donde se utiliza el $\ln$.

Ejemplo 1.

Si $e^{x} = x$. Obtener x.

Respuesta: $e^{x}=3 \Rightarrow \ln(e^{x})=\ln 3$

ahora como las funciones $\ln x$ y e^{x} son funciones inversas, sabemos que:

$\ln(e^{x})=x$, luego

$x = \ln 3 = 1.0986$

Ejemplo 2.

Si $e^{2-x}=0.5$ Obtener x.

Respuesta. $e^{2-x}=0.5 \Rightarrow \ln(e^{2-x})=\ln(0.5) \Rightarrow$

$2-x=\ln(0.5)$

$2-\ln(0.5)= x$

$x=2-(-0.6931)$

$\therefore \quad x=2.6931$

Ejemplo 3.

Si $\ln x=4.35$, obtener x.

Respuesta: $\ln x=4.35$

$e^{\ln x}=e^{4.35}$

$x=e^{4.35}$

$\therefore \quad x=77.4784$

EJERCICIOS.

I. Dar el dominio, hacer la gráfica y decir cual es el rango de cada una de las funciones siguientes.

1) $f(x)=e^{x+3}$	2) $f(x)=e^{x-2}$
2) $f(x)=e^{2x-1}$	4) $f(x)=e^{-x}$
5) $f(x)=e^{2-3x}$	6) $f(x)=e^{x^2}$
7) $f(x)=e^{x^2-1}$	8) $f(x)=\ln(x+2)$
9) $f(x)=\ln(3x-1)$	10) $f(x)=\ln(x^2+3))$
11) $f(x)=\ln(1-2x)$	12) $f(x)=\ln(x^2-1)$

II.- Obtener el valor de x en cada una de las ecuaciones siguientes :

1) $e^x=10$	2) $e^{x+3}=2$
3) $e^{2x-5}=30$	4) $e^{\frac{x}{4}}=25$
5) $\ln(x+1)=1$	6) $\ln(3x-10)=5$
7) $\ln(x^2-1)=2$	8) $\ln(2x^2+6)=4$

III) Resolver los problemas que se plantean a continuación.

1,- Una empresa deposita $10,000 en un banco.

a) Si el banco le paga a la empresa el 6% de interés anual. ¿En 15 año qué capital tiene?

b) Si el banco le paga el 6% de intereses y estos son pagados cada cuatro meses. Obtener el capital que tiene la empresa en 15 años.

2.- Una persona tiene $15,000 para depositar y espera mantener éste depósito durante 18 años. Se presentan dos opciones: Se paga un interés de 7% cada semestre o 6.5% de interés trimestral. ¿Cuál opción escogería la persona?

3.- Para obtener $ 25,000 después de 18 años al 7% de interés anual. ¿Qué cantidad tiene que depositarse?

4.- Un trabajo en una línea de producción consiste en atornillar un pequeño tornillo en una plancha de metal. Para un empleado regular, el número de planchas que completa por hora, se describe por la ecuación:

$f(x) = 50 - 40\, e^{-0.30x}$

donde x es el número de horas que el empleado ha trabajado en la línea de producción.

a) ¿Cuántas planchas completas el empleado en la primera hora?
b) ¿Cuántas completa en la sexta hora?

5.- El número de empresas dedicadas a una industria particular se describe mediante la ecuación: $N=5(0.5)^{0.75x}$ donde x es el número de años desde que se inicia la industria. ¿Cuántas empresas existirán en la industria después de 5 años? ¿Cuántas empresas existían inicialmente?

4) PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

¿Existe mayor habilidad para resolver problemas en los alumnos del primer semestre de la carrera de Administración Industrial en UPIICSA, que tomaron un curso bajo un enfoque constructivista, y aquéllos que siguieron un método mecanicista?

5) OBJETIVOS

i) Elaborar un material didáctico para el tema de funciones bajo un enfoque constructivista para lograr en los alumnos :
  a) Aprendizajes significativos
  b) Una mejor habilidad para la resolución de problemas

ii) Como segundo objetivo se pretende que éste material sea utilizado por otros profesores que impartan en ésta institución (UPIICSA) el curso de Cálculo Diferencial a los alumnos de la carrera de Administración Industrial, propiciando en ellos las habilidades para la resolución de problemas.

iii) Finalmente se espera que éste material despierte el interés y sea el punto de partida para investigaciones posteriores tendientes a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje en el área de matemáticas.

6) HIPOTESIS

HIPOTESIS DE TRABAJO

Tienen más habilidad para resolver problemas los alumnos que utilizaron un enfoque constructivista.

4) PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

¿Existe mayor habilidad para resolver problemas en los alumnos del primer semestre de la carrera de Administración Industrial en UPIICSA, que tomaron un curso bajo un enfoque constructivista, y aquéllos que siguieron un método mecanicista?

5) OBJETIVOS

i) Elaborar un material didáctico para el tema de funciones bajo un enfoque constructivista para lograr en los alumnos :
  - **a) Aprendizajes significativos**
  - **b) Una mejor habilidad para la resolución de problemas**

ii) Como segundo objetivo se pretende que éste material sea utilizado por otros profesores que impartan en ésta institución (UPIICSA) el curso de Cálculo Diferencial a los alumnos de la carrera de Administración Industrial, propiciando en ellos las habilidades para la resolución de problemas.

iii) Finalmente se espera que éste material despierte el interés y sea el punto de partida para investigaciones posteriores tendientes a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje en el área de matemáticas.

6) HIPOTESIS

HIPOTESIS DE TRABAJO

Tienen más habilidad para resolver problemas los alumnos que utilizaron un enfoque constructivista.

4) PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

¿Existe mayor habilidad para resolver problemas en los alumnos del primer semestre de la carrera de Administración Industrial en UPIICSA, que tomaron un curso bajo un enfoque constructivista, y aquéllos que siguieron un método mecanicista?

5) OBJETIVOS

i) Elaborar un material didáctico para el tema de funciones bajo un enfoque constructivista para lograr en los alumnos :

a) Aprendizajes significativos

b) Una mejor habilidad para la resolución de problemas

ii) Como segundo objetivo se pretende que éste material sea utilizado por otros profesores que impartan en ésta institución (UPIICSA) el curso de Cálculo Diferencial a los alumnos de la carrera de Administración Industrial, propiciando en ellos las habilidades para la resolución de problemas.

iii) Finalmente se espera que éste material despierte el interés y sea el punto de partida para investigaciones posteriores tendientes a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje en el área de matemáticas.

6) HIPOTESIS

HIPOTESIS DE TRABAJO

Tienen más habilidad para resolver problemas los alumnos que utilizaron un enfoque constructivista.

HIPOTESIS NULA
Tienen más habilidad para resolver problemas los alumnos que utilizaron un enfoque mecanicista.

7) IDENTIFICACION DE LAS VARIABLES

- **Habilidad para resolver problemas**
- **Método constructivista**
- **Método mecanisista**

8) METODOLOGIA Y DISEÑO DE LA INVESTIGACION

Esta investigación consiste en la elaboración de un material didáctico para el tema de funciones, utilizando un enfoque constructivista. Para la obtención de posibles resultados, se recurrirá a dos grupos del primer semestre de la carrera de Administración Industrial, de tal forma que en uno de ellos se utilice el material elaborado y en el otro se use el material mecanicista. Ahora para la realización de dicha investigación es necesario recurrir a ciertos estudios y por el carácter de ella el estudio será de tipo : **exploratorio, correlacional, transversal y de campo.** Las razones del por qué es necesario utilizar los estudios anteriores, se dan a enseguida.

El **estudio exploratorio** se utiliza normalmente cuando el objeto es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado o que no ha sido abordado antes. Esto es, cuando la revisión de la literatura reveló que únicamente hay ideas vagamente relacionadas con el problema de estudio. En vista de que en éste trabajo se cumplen las condiciones citadas, consideramos que se trata de un **estudio exploratorio**, ya que además se determinan tendencias a identificar relaciones potenciales entre variables y que además pueden establecer las bases de investigaciones más completas.

HIPOTESIS NULA
Tienen más habilidad para resolver problemas los alumnos que utilizaron un enfoque mecanicista.

7) IDENTIFICACION DE LAS VARIABLES

- **Habilidad para resolver problemas**
- **Método constructivista**
- **Método mecanisista**

8) METODOLOGIA Y DISEÑO DE LA INVESTIGACION

Esta investigación consiste en la elaboración de un material didáctico para el tema de funciones, utilizando un enfoque constructivista. Para la obtención de posibles resultados, se recurrirá a dos grupos del primer semestre de la carrera de Administración Industrial, de tal forma que en uno de ellos se utilice el material elaborado y en el otro se use el material mecanicista. Ahora para la realización de dicha investigación es necesario recurrir a ciertos estudios y por el carácter de ella el estudio será de tipo : **exploratorio, correlacional, transversal y de campo.** Las razones del por qué es necesario utilizar los estudios anteriores, se dan a enseguida.

El **estudio exploratorio** se utiliza normalmente cuando el objeto es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado o que no ha sido abordado antes. Esto es, cuando la revisión de la literatura reveló que únicamente hay ideas vagamente relacionadas con el problema de estudio. En vista de que en éste trabajo se cumplen las condiciones citadas, consideramos que se trata de un **estudio exploratorio**, ya que además se determinan tendencias a identificar relaciones potenciales entre variables y que además pueden establecer las bases de investigaciones más completas.

HIPOTESIS NULA
Tienen más habilidad para resolver problemas los alumnos que utilizaron un enfoque mecanicista.

7) IDENTIFICACION DE LAS VARIABLES

- **Habilidad para resolver problemas**
- **Método constructivista**
- **Método mecanisista**

8) METODOLOGIA Y DISEÑO DE LA INVESTIGACION

Esta investigación consiste en la elaboración de un material didáctico para el tema de funciones, utilizando un enfoque constructivista. Para la obtención de posibles resultados, se recurrirá a dos grupos del primer semestre de la carrera de Administración Industrial, de tal forma que en uno de ellos se utilice el material elaborado y en el otro se use el material mecanicista. Ahora para la realización de dicha investigación es necesario recurrir a ciertos estudios y por el carácter de ella el estudio será de tipo : **exploratorio, correlacional, transversal y de campo.** Las razones del por qué es necesario utilizar los estudios anteriores, se dan a enseguida.

El **estudio exploratorio** se utiliza normalmente cuando el objeto es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado o que no ha sido abordado antes. Esto es, cuando la revisión de la literatura reveló que únicamente hay ideas vagamente relacionadas con el problema de estudio. En vista de que en éste trabajo se cumplen las condiciones citadas, consideramos que se trata de un **estudio exploratorio**, ya que además se determinan tendencias a identificar relaciones potenciales entre variables y que además pueden establecer las bases de investigaciones más completas.

Es de **tipo correlacional**, por qué el propósito es medir el grado de relación que existe entre las variables planteadas, siendo estas : habilidad para resolver problemas, modelo constructivista t modelo mecanicista. Además se pretende responder a preguntas de investigación como : ¿Al utilizar una metodología constructivista, aumenta la habilidad para resolver problemas ?, etc. Además en vista de que en la presente investigación los datos fueron recolectados en un sólo momento y teniéndose como propósito describir variables y analizar su incidencia e interrelación en un momento dado, cumple también con los requisitos para ser un **estidio transversal (transeccionado)**. Por último es una **investigación de campo**, ya que se van a considerar tres variables, dos libres y una dependiente, para analizar posteriormente las consecuencias de las variables libre sobre la dependiente (Habilidad para resolver problemas), dentro de una situación de cierto control para el investigador ; es decir, en ésta investigación se trabaja con el modelo constructivista y con el modelo mecanicista para posteriormente analizar la habilidad para resolver problemas en los alumnos.

Con el objeto de extraer las conclusiones y la información de relevancia sobresaliente para los fines de esta investigación, se recurrirá a algunos instrumentos de recopilación de información como son:

- Las entrevistas estructuradas tanto a profesores que imparten la materia de cálculo diferencial, como a los alumnos de los dos grupos antes mencionados que la cursan.

- Las encuestas a profesores y alumnos

- La evaluación del aprendizaje en el tema de funciones.

9) ANALISIS DE LOS RESULTADOS

Los puntos que serán considerados para realizar este análisis son los siguientes :

i) Análisis de los resultados obtenidos en los alumnos mediante la aplicación de un examen a partir de la resolución de problemas.

II) Análisis de los resultados obtenidos con la aplicación de una encuesta a los alumnos sobre la utilización del material didáctico con un enfoque constructivista.

III) Análisis de los resultados obtenidos con la aplicación de una encuesta a los profesores que impartieron el curso tradicional de calculo diferencial en la carrera de Administración Industrial.

IV) Metodología aplicada para la utilización del material didáctico con enfoque constructivista.

V) Comentarios acerca de la utilización de la metodología con enfoque constructivista

- **Aspectos que se consideran favorables con la utilización del material didáctico con enfoque constructivista.**

- **Aspectos que influyeron para que los resultados no fueran los óptimos.**

I) ANALISIS DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN LOS ALUMNOS MEDIANTE LA APLICACIÓN DE UN EXAMEN A PARTIR DE LA RESOLUCION DE PROBLEMAS (Anexo 2).

SECUENCIA 1AV1

Grupo en el que se utilizó para el tema de funciones el material didáctico bajo un enfoque constructivista.

RESULTADOS DEL EXAMEN APLICADO

Como se puede observar en el examen aplicado aparecen siete reactivos, de tal forma que los primeros cinco están considerados como ejercicios tradicionales (ejercicios que se plantean comúnmente en los exámenes) y los problemas 6 y 7 se consideran como aquellos en los que el Cálculo Diferencial es útil para resolver problemas que pueden presentarse en la vida cotidiana y que serán considerados como uno de los elementos para medir la habilidad para resolver problemas por parte de los alumnos. Además se hace mención de que en el examen se pidió resolver los cinco problemas que quisiera cada alumno.

De los 41 alumnos que presentaron dicho examen , 18 lo aprobaron y 23 lo reprobaron ; es decir, el 44% lo aprobó y el 56% lo reprobó. **(Gráfica 1).**

También se hace saber que de los 41 alumnos, 16 trabajaron con los problemas 6 o 7 referentes a aplicaciones de funciones y después de calificar éstos problemas se concluyó que fueron resueltos correctamente en un 54.46% por los 16 alumnos. **(Gráfica 2).**

El comentario que hacemos al respecto es que los alumnos están muy influenciados por la enseñanza tradicionalista, ya que pudimos observar que le huyen a los problemas con "aplicaciones reales", esto es por qué casi todos los alumnos que resolvieron los problemas 6 o 7 (referente a aplicaciones) fue debido a que no sabían como resolver alguno o algunos de los primeros cinco problemas ; es decir, los alumnos que trabajaron los problemas con aplicaciones reales fue por qué no pudieron resolver algunos problemas tradicionales (los primeros cinco).

SECUENCIA 1AV6

Grupo en el que se utilizó para el tema de funciones un material didáctico tradicional.

RESULTADOS DEL EXAMEN APLICADO

En ésta secuencia presentaron 42 alumnos el examen, de los cuales 16 (38%) lo aprobaron y 26 (62%) lo reprobaron.. **(Gráfica 3).**

del total de alumnos que presentaron el examen, 10 de ellos trabajaron los problemas 6 o 7, los cuales fueron resueltos correctamente en un 27.5%. **(Gráfica 4).**

Ahora se da una síntesis en la que se comparan los resultados en el examen por las dos secuencias.

Como ya se indicó el 44% de los alumnos de la Sec. 1AV1 aprobó el examen y el 38% de la Sec. 1AV6 hizo lo mismo. **(Gráfica 5).**

De forma análoga los problemas 6 o 7, fueron resueltos correctamente en un 54.46% por los 16 alumnos de la Sec. 1AV1 y un 27.5% por los 10 alumnos de la Sec. 1AV6. **(Gráfica 6).**

Al analizar ambos resultados, nos damos cuenta que los resultados del examen son ligeramente mejores en la sec. 1AV1, en la que se utilizó el material didáctico bajo un enfoque constructivista, ya que superó en un 6% a la sec. 1AV6, en donde se utilizó un material didáctico tradicional.

Referente a las respuestas de los problemas 6 o 7, resultó ser más notoria la diferencia, dado que la sec. 1AV1 superó en un 26.96% a la sec. 1AV6. Ahora como éstos problemas se consideran como aplicaciones del Cálculo Diferencial, podemos afirmar que los alumnos de la sec. 1AV1 adquirieron más habilidad para la resolución de problemas, siendo ésta una de las variables planteadas en el proyecto titulado **"COMPARACIÓN DE MATERIALES DIDÁCTICOS"** objeto de la presente investigación.

Continuando con el análisis, podemos afirmar que aunque los resultados obtenidos en el examen son ligeramente mejores en el grupo donde se utilizó el ya mencionado material didáctico, no debemos tomar actitudes triunfalistas ni mucho menos presumir de que la metodología constructivista a través de la resolución de problemas es la panacea y que con ella se resuelven todos los problemas de aprendizaje en el campo educativo. Antes bien es necesario reconocer que en el proceso de enseñanza-aprendizaje existen una gran cantidad de factores que intervienen y que uno de los que consideramos importantes es la metodología y el material didáctico utilizado por el profesor al impartir sus cursos.

Consideramos que el éxito o el fracaso al utilizar una metodología como la planteada, depende en gran medida del empeño, la dedicación, el trabajo, el compromiso y el entusiasmo con el que cada profesor realice su actividad docente. Existen comentarios erróneos de algunos profesores en el sentido de que al utilizar metodologías diferentes a las tradicionales, los maestros no tienen que trabajar ni de que preocuparse, porque creen que lo único que tienen que hacer es dejar que los alumnos expongan los temas del curso.

Finalmente en éste apartado, indicamos que la metodología constructivista, si es trabajada con toda seriedad representa alternativas con las que podamos lograr que nuestros alumnos adquieran aprendizajes significativos, aprendizajes que en el área de matemáticas en la UPIICSA y en particular en el curso de Cálculo

Diferencial cada día son más raquíticos, lo que ocasiona que los índices de reprobación sean muy altos.

II) ANALISIS DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS CON LA APLICACIÓN DE UNA ENCUESTA A LOS ALUMNOS SOBRE LA UTILIZACION DEL MATERIAL DIDACTICO CON UN ENFOQUE CONSTRUCTIVISTA (Anexo 3).

Al analizar los resultados de esta encuesta nos damos cuenta que a pesar de que el **66%** de los alumnos les gustan las matemáticas, un **80%** le cuesta trabajo para entenderlas y las razones que se desprenden de la encuesta y de los comentarios hechos en clases, es que un **50%** de los alumnos trabaja y por consiguiente el **75%** del total del grupo le dedica al estudio de las matemáticas media hora o menos tiempo al día. Además a pesar de que el promedio general obtenido en el nivel bachillerato fue de **8** y el promedio en matemáticas resultó ser de **7.5**. Las bases matemáticas con las que los alumnos de ésta secuencia ingresaron a la UPIICSA son muy deficientes, lo que provoca que al llevar a la práctica metodologías no tradicionalistas, no resulte fácil lograr resultados favorables, pero tampoco es imposible, se considera que es un reto que se nos presenta a todos los docentes que no somos conformistas y que tenemos inquietudes para someter a prueba alternativas didácticas que propicien mejores aprendizajes en nuestros alumnos.

Ahora al continuar con el análisis, los resultados fueron muy favorables referente a la metodología constructivista y al material didáctico utilizado, ya que :

- El **80.5%** opinó que era buena y que representa una alternativa para mejorar el aprendizaje de los alumnos. **(Gráficas 7 y 8).**

Las razones que dieron los alumnos a éste respecto fueron : a través de ésta metodología se ve muy clara la vinculación de las matemáticas con problemas que se presentan en la vida real, lo cual propicia que :

-Hubiera una mayor participación de todo el grupo en la clase.
- La clase haya sido muy amena y dinámica.
- Se entendió la razón y el por qué de las cosas
- Permite al alumno razonar, investigar y trasmitir los conocimientos adquiridos con ayuda de los demás compañeros y del profesor.
- Hubo más confianza para preguntar las dudas.

El **75%** de los alumnos se dio cuenta que las matemáticas si están relacionadas con la realidad, propicia la participación activa del alumno y que se requiere de más trabajo por parte del alumno. **(Gráficas 9, 10 y 11).**

El **94.5%** califica como bueno el hecho de que los alumnos participen en la construcción del conocimiento a partir de la resolución de problemas y considera que la metodologia constructivista aporta elementos para mejorar la capacidad de razonamiento del alumno. **(Gráfica 12).**

- El **89%** opinó que de las dos metodologías utilizadas por el profesor (Constructivista y Mecanicista), la constructivista permite obtener un mejor aprendizaje y propicia la habilidad para resolver problemas. **(Gráficas 13 y 14).**

Las razones que los alumnos dieron para justificar el por qué con una metodología constructivista se obtiene un mejor aprendizaje fueron :

a) Se observa de donde salen los conceptos y para qué sirven.
b) Propicia más la investigación por parte del alumno.
c) Ya no se atiene únicamente a lo que el profesor dice.

d) Los alumnos se sienten más obligados a trabajar, ya que tienen mayor participación y se involucran más en los temas a en los temas a tratar.
e) En clases existió retroalimentación por parte de todos y esto provocó que hubiera más trato y más confianza con el profesor.
f) Los alumnos ven la relación que las matemáticas tienen con problemas de la vida real y esto ocasiona que muestren más interés por las matemáticas al reflexionar y analizar más los conceptos.
g) Se aprende de verdad.
h) Se aprende mejor y con menos dificultad.

- Finalmente un **97.5%** opinó que la metodología constructivista propicia : la reflexión, el análisis y la creatividad. **(Gráfica 15).**

Al término de esta encuesta los alumnos hicieron los comentarios siguientes :

a) Gran cantidad de ellos consideraron que si se hubiera dedicado más tiempo a este material los resultados hubieran sido mejores, aunado a esto también comentaron que el número de alumnos fue muy alto.
b) Otros alumnos comentaron que debería iniciarse con esta metodología desde niveles más bajos para que no fuera tan fuerte el cambio a nivel superior.
c) También dijeron que en esta metodología el alumno está más obligado a asistir a clases y a investigar.
d) Un gran porcentaje de alumnos hizo el comentario, que las bases deficientes con las que ingresaron a la UPIICSA propiciaron que no hayan aprovechado de una mejor manera esta metodología y su respectivo material didáctico.
e) Muchos otros opinaron que esta metodología debiera utilizarse en otros temas y en otras materias y que también sería saludable una combinación de ambas (constructivista y tradicionalista) en donde se inicien los temas con el planteamiento de problemas y al final se terminara con ejercicios mecánicos, que son necesarios en su vida como estudiantes.

f) Por último comentaron que mediante problemas adecuados se puede terminar con el tabú hacia las matemáticas y hacer de ésta una materia agradable y más accesible.

Se observa que las opiniones dadas por los alumnos referente a la metodología constructivista y al material didáctico utilizado, fueron muy satisfactorias, ya que los porcentajes obtenidos a favor son muy altos y esta situación nos compromete a seguir trabajando con mayor entusiasmo en la elaboración de materiales didácticos con dicho enfoque, para brindárselos a los alumnos y en la medida de lo posible trabajarlos en los grupos, al implementar metodologías constructivistas. Es claro que los espacios para trabajar con metodologías diferentes a las tradicionales no son los apropiados, pero consideramos que con la unión y el trabajo organizado de todos los profesores, podemos influir para que las condiciones sean cada día más propicias y así experimentar con alternativas didácticas.

III) ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS CON LA APLICACIÓN DE UNA ENCUESTA A LOS PROFESORES QUE IMPARTIERON EL CURSO TRADICIONAL DE CALCULO DIFERENCIAL EN LA CARRERA DE ADMINISTRACION INDUSTRIAL (Anexo 4).

Iniciamos el análisis comentando que **once** fueron los profesores que impartieron el curso de Cálculo Diferencial y únicamente **siete** entregaron su encuesta, a pesar de haberlos visitado personalmente en **cuatro** ocasiones para solicitarles su entrega, es ésta la razón del por qué se consideraron las opiniones solamente de **siete** profesores.

La experiencia docente de éstos profesores es en promedio de **16 años**, **cuatro** de ellos son licenciados en **Física y Matemáticas**, uno es **Matemático** y dos son **Ingenieros**. Referente a los cursos de actualización docente, **cuatro** profesores tienen cursos aislados y diplomados o maestrías, **uno** tiene sólo cursos aislados y **dos** no tienen cursos de formación docente. Además **cuatro** de ellos tienen experiencia profesional no docente : **dos** en ingeniería, uno en ventas y el último en actividades administrativas. Dado que estas últimas actividades se han llevado a cabo por poco tiempo, ello implica que su actividad ha estado centrada básicamente en el ejercicio docente.

Los comentarios que haremos a este respecto son los siguientes : los profesores a los que se les aplicó la encuesta y que imparten el curso de Cálculo Diferencial, tienen bastante experiencia docente y buena preparación en el campo pedagógico, lo cuál es básico para que si somos responsables y estamos comprometidos con nuestros alumnos, podamos cumplir de manera brillante con nuestras actividades docentes. Además el hecho de que su actividad sea exclusiva al magisterio, lo limita en el sentido de que no puede transmitir a sus alumnos experiencias profesionales vividas en la industria o en la empresa y que en dichas experiencias sean de utilidad los conceptos teóricos trabajados en los cursos.

Horas de nombramiento y clasificación. Cuatro profesores tienen **40** horas de base, uno tiene **31** horas y dos tienen **15** horas interinas, **2** de ellos son profesores de carrera **Titulares**, **3** son profesores de carrera **Asociados** y **dos** son profesores de **Asignatura.**

Al analizar los datos anteriores, podemos afirmar que un **71%** de los profesores encuestados tiene la preparación académica y docente, la experiencia docente, el tiempo disponible dentro de la institución (UPIICSA) y la clasificación para planear muy bien su práctica educativa y para que sus opiniones sean muy dignas de tomarse en cuenta, lo cual se hace en esta encuesta. **(Gráfica 16).**

A continuación se dan los porcentajes obtenidos :

- Un **86%** de los profesores opinó que entre un 25% y un 50% influye el material didáctico utilizado en el proceso de enseñanza-aprendizaje. **(Gráfica 17).**

Opiniones obtenidas al utilizar un material didáctico tradicionalista

- Un **100%** opinó que los alumnos razonan muy poco, que participan de igual manera y que obtienen poca habilidad para resolver problemas. **(Gráfica 18).**

- El **86%** indicó que los alumnos logran poca creatividad y que muestran poco interés para preguntarse por el por qué de las cosas. **(Gráfica 19).**

- Un **71%** dijo que se logra que sean poco reflexivos y que ven muy poco la vinculación de las matemáticas con la realidad. **(Gráfica 20).**

- El **86%** indicó que no se adquieren aprendizajes significativos. **(Gráfica 21).**

- Un **57%** comentó que con un material tradicionalista se avanza muy poco en el sentido de que los alumnos den sus puntos de vista y sean propositivos. **(Gráfica 22).**

Las razones que dieron los profesores del por qué la metodología tradicionalista (mecanicista) no es la mejor opción para el proceso de enseñanza-aprendizaje, fueron las siguientes :

- Sólo queda al nivel de memorización y repetición de algorítmos mecánicos que se olvidan rápidamente ; es decir, no se alcanza un aprendizaje significativo.

- Se debe de trabajar metodologías con las cuales se propicie que el alumno razone, siendo esto uno de los elementos básicos para el aprendizaje de la matemática.

Otros comentarios al respecto, fueron que :

- Existen algunas características positivas en el mecanicismo y que es conveniente utilizarlo al inicio de cualquier tipo de enseñanza.

Opiniones obtenidas al utilizar un material didáctico bajo un enfoque constructivista, como el proporcionado para el tema de funciones

- Un **100%** dijo que se logra que los alumnos razonen mucho, que ven muy clara la vinculación de las matemáticas con la realidad y que se obtiene un aprendizaje significativo por parte del alumno. **(Gráficas 23 y 24).**

- El **86%** opinó que propicia que el alumno sea muy participativo y se ve motivado para proponer y dar sus puntos de vista. **(Gráfica 25).**

- Un **71%**. comentó que el alumno adquiere mucha habilidad para resolver problemas y que muestra mucho interés para preguntarse, por el porqué de las cosas. **(Gráfica 26).**

- Un **57%** indicó que el material bajo un enfoque constructivista propicia el que el alumno sea muy reflexivo y muy creativo. **(Gráfica 27)..**

Otros comentarios hechos por los profesores fueron los siguientes :

- El **86%** considera conveniente utilizar una metodología en el curso de Cálculo Diferencial que tome como punto de partida el planteamiento de problemas. **(Gráfica 28).**

Razones que consideraron importantes : Una síntesis de las razones que dieron es la siguientes :

- Desde el principio es conveniente vincular la materia con problemas prácticos, para que el alumno se de cuenta de la necesidad de utilizar los conceptos del Cálculo Diferencial en la solución de ellos. Así también pueden elegirse problemas de tal forma que al trabajar los alumnos con ellos puedan comprenderlos y posteriormente den la pauta para que construyan o den lineamientos para la construcción de los conceptos matemáticos.

- El **100%** dijo que si las condiciones fueran propicias en UPIICSA al impartir el curso de Cálculo Diferencial, utilizaría metodologías diferentes a las tradicionales, que la utilización de la metodología constructivista requiere de un mayor esfuerzo y preparación por parte del profesor y que el proceso de enseñanza-aprendizaje puede ser mejorado si éstas metodologías se utilizan aunadas con su respectivo material didáctico. **(Gráficas 29 y 30).**

- También opinaron que el material didáctico bajo un enfoque constructivista, que se les proporcionó, en cuanto a :

a) **Estructura :** está **bien**, ya que parte de lo particular a lo general, sobre todo en el aspecto de los conocimientos que el alumno maneja.
b) **Organización de los contenidos :** es **adecuado**, ya que tiene un orden lógico para llegar a los conceptos de función, dominio, rango, etc.
c) **Selección y planteamiento de los problemas** : es **adecuado,** porque induce a los alumnos a participar, proponer, reflexionar y a plantear sus propias definiciones.

Al analizar los resultados obtenidos en esta encuesta, podemos observar muy claramente que los profesores están conscientes de que la metodología tradicionalista (mecanicista), no representa la mejor opción en cuanto al proceso de enseñanza-aprendizaje y a la adquisición de aprendizajes significativos. A pesar de esto se observa una apatía muy arraigada que existe en la mayoría de ellos, en cuanto a realizar cambios, trabajar con nuevos problemas, nuevas bibliografías, participar en la elaboración de nuevos materiales didácticos, incluir otros elementos en el proceso de evaluación de nuestros alumnos, etc. Aunque si están de acuerdo con los planteamientos que se hacen referente a la metodología constructivista y opinan que si realizarían cambios en su actividad docente, si las condiciones fueran favorables en la UPIICSA, podría ocurrir que aún en la situación en la que se tuvieran las condiciones optimas, los profesores continuáramos con la misma apatía.

IV) METODOLOGIA APLICADA PARA LA UTILIZACION DEL MATERIAL DIDACTICO CON ENFOQUE CONSTRUCTIVISTA

Este material se utilizó en la Sec. 1AV1 (grupo al que pertenece el alumno), la cual tiene horario de 20 a 22 horas los días martes y jueves.

- Se formaron nueve equipos, de los cuales seis de ellos estuvieron integrados por seis alumnos y los tres restantes estuvieron integrados por cuatro alumnos.

- Se les proporcionó a todos los alumnos de esta secuencia el material sujeto a prueba.

- Con el fin de identificar a cada alumno, se les pidió que portaran un gafete en forma de pareja ordenada, en la que el primer número identificara el número del alumno asignado en el equipo y el segundo proporcionaba el número del equipo. Por ejemplo

(3, 5)

número asignado en el equipo | **número del equipo**

esto fue con el fin de que desde cualquier lugar en el salón de clases se pudiera identificar al alumno que asistia, que participaba en las discusiones de equipo, grupales y sus aportaciones personales para ser consideradas en la evaluación , sin que el alumno se percatara de ello.

Formas como fue trabajado el material

- En clases de realizaron discusiones por equipo con el fin de llevar a cabo las actividades planteadas en cada uno de los problemas y posteriormente con la participación de todos los equipos se les dio solución a cada problema y se efectuaron las síntesis correspondientes.

- Se llevaron a cabo exposiciones de algunos problemas por equipos previamente determinados y al darles solución los participantes de los demás equipos dieron sus opiniones y sugerencias.

- Se realizaron también exposiciones personales por aquellos alumnos que así lo quisieron.

En todos los casos, el requisito era que todos los alumnos debieran haber preparado el material previamente para que fuera más rica la discusión en clases. El profesor intervino únicamente para dar sus puntos de vista como un participante más del grupo o cuando existieron confusiones que no fueron aclaradas por los alumnos.

Se aclara que de éstas tres formas de trabajo la que dio mejores resultados fue la primera (aunque se necesitó dedicar más tiempo), ya que los alumnos mostraron más interés y las discusiones, las aportaciones y los comentarios fueron muy ricos y abundantes.

V) COMENTARIOS ACERCA DE LA UTILIZACION DE LA METODOLOGIA CON ENFOQUE CONSTRUCTIVISTA

- **Aspectos que se consideraron favorables en la utilización del material didáctico con enfoque constructivista.**

- Hubo una gran discusión, sobre todo cuando el material fue trabajado por todos los equipos en el salón de clases. Las discusiones se realizaron al dar cada equipo los resultados obtenidos en cada actividad planteada.

- En varias ocasiones, al participar el profesor como una persona más de la clase, algunos alumnos ya no aceptaban como dogma lo dicho por el maestro, sino que lo cuestionaban.

- Al darse las discusiones, se pudo observar que era necesario precisar algunos de los problemas planteados y también algunas actividades dadas en el material didáctico.

- Al iniciar con el material didáctico, varios alumnos interpretaban de una manera errónea algunas afirmaciones hechas en éste material y al ir avanzando se suplieron dichas deficiencias.

Aspectos que influyeron para que los resultados no fueran los óptimos.

- El número de alumnos en el grupo fue muy alto (48)
Esto provocó que no se llevara un mejor control en cuanto a la participación de cada alumno en los equipos, en las discusiones grupales y en las aportaciones personales. La idea consistía en estar más en contacto con cada alumno para percibir mejor sus dificultades y carencias que pudieran obstaculizar su aprendizaje.

- El tiempo que se le dedicó al material de experimentación no fue suficiente. Esto es debido a que en UPIICSA se realizan tres exámenes departamentales (las fechas en las que se llevan a cabo se establecen desde el inicio del semestre por las autoridades) y es necesario cubrir todo el material previamente fijado antes de la realización de cada examen.

- El horario de este grupo. El horario fue de 20 a 22 horas y debido a que buen porcentaje de los alumnos trabajan (aproximadamente el 50%), esto ocasionó que después de las 21.30 horas algunos alumnos estaban más interesados en que se terminara la clase que en continuar con ella.

- Falta de costumbre por parte de los alumnos, de trabajar el material antes de utilizarlo en clases (están muy acostumbrados a estudiar un poco antes del examen).

- **Es difícil utilizar una metodología constructivista.** Cuando se tienen tan arraigadas las ideas tradicionalistas (mecanicistas), en las que el alumno únicamente llega al salón de clases a ver que pesca, sin poner nada de su parte.

■ **No están acostumbrados a razonar,** prefieren las recetas sin importar para que les sirven o de donde salen.

- **Nivel muy bajo.** El nivel con el que ingresan a la UPIICSA los alumnos de la carrera de Administración Industrial en el área de matemáticas es muy deficiente, lo que provoca el que surjan dificultades para que se cumplan los objetivos planteados por el profesor al inicio del curso.

De lo anteriormente expuesto ; se concluye lo siguiente : al analizar los resultados obtenidos en los alumnos mediante la aplicación de un examen a partir de la resolución de problemas, los resultados obtenidos con la aplicación de una encuesta a los alumnos sobre la utilización del material didáctico con un enfoque constructivista, los resultados obtenidos con la aplicación de una encuesta a los profesores que impartieron el curso tradicional de Cálculo Diferencial en la carrera de Administración Industrial, la metodología aplicada para la utilización del material didáctico con enfoque constructivista y los comentarios acerca de la utilización de la matodología con enfoque constructivista. **Se acepta totalmente la hipótesis de trabajo planteada en esta investigación**, siendo ésta :

Tienen más habilidad para resolver problemas los alumnos que utilizaron un enfoque constructivista.

Es decir, la metodología constructivista con su respectivo material didáctico representa una de las alternativas que debiéramos tomar en cuenta al impartir nuestros cursos, sin olvidar que la meta o el fin es lograr mejoras en el aprendizaje de nuestros alumnos, siendo éste el objetivo básico que todo profesor debiéra tener presente.

Propuestas o Sugerencias

- Se sugiere que se imprima por parte de la institución (UPIICSA) el material didáctico para el tema de funciones con enfoque constructivista, con el fin de que los alumnos puedan adquirirlo y que represente para ellos una alternativa didáctica, en cuanto al aprendizaje del Cálculo Diferencial.

- Se sugiere que para la obtención de mejores resultados los grupos en los que se utilice un material didáctico constructivista, deben de tener como máximo 30 alumnos y el tiempo para trabajar con dicho material no debe de ser tan restringido.

- Una sugerencia más es que los profesores que imparten el curso de Cálculo Diferencial nos organicemos para completar el material didáctico con enfoque constructivista para todo el curso y lo utilicemos en nuestros grupos.

- Se propone que las políticas institucionales le den preferencia a la actividad académica y no quede ésta supeditada a la actividad administrativa, como ocurre en la actualidad.

- Es urgente un cambio de mentalidad en el profesor en el que no únicamente busque la forma de dedicar el menor tiempo posible a sus actividades docentes, es necesario que tome con responsabilidad su actividad y así contribuya al logro de mejores aprendizajes para sus alumnos.

- El intercambio académico entre los profesores que impartimos la misma asignatura debe de aumentar con el fin de que se discutan experiencias de aprendizaje, tocándose puntos como :

  a) Metodología utilizada
  b) Materiales didácticos usados
  c) Estrategias didácticas empleadas
  d) Resultados obtenidos
  e) etc

- Por último se sugiere que los profesores nos preparemos en los tópicos sobre el campo de la docencia, para de ésta forma tener más alternativas al impartir nuestros cursos y salir del empantanamiento en el que varios de nosotros nos encontramos

10) CONCLUSIONES

Después de haber terminado la presente investigación, al dar los resultados y al haber hecho el análisis de ellos, consideramos, que si se cumplieron los objetivos planteados, ya que :

- Se elaboró el material didáctico para el tema de funciones bajo un enfoque constructivista, el cual al ser utilizado en clases propició avances en cuanto al logro de **aprendizajes significativos** y se mejoró la habilidad para resolver problemas por parte de los alumnos.

- El presente trabajo ha **despertado el interés** de algunos profesores, en el sentido de que han tomado algunas ideas para adecuarlas a sus cursos y a sus trabajos y también han dado sugerencias para mejorarlo.

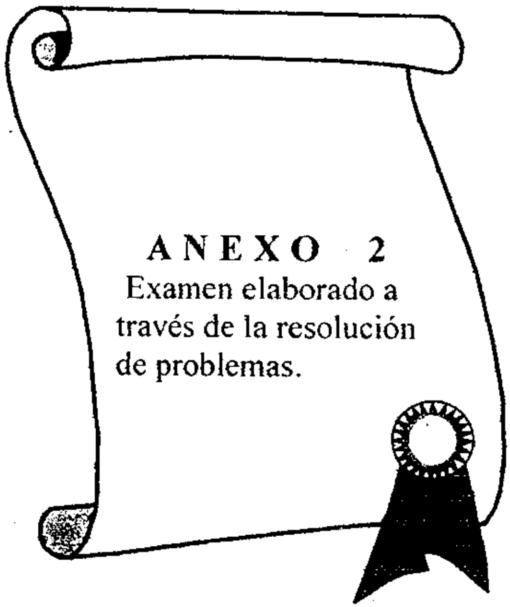
- Se fomentó la inquietud en los alumnos para formar parte activa dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, así como en la **construcción del conocimiento..**

- Hubo **respuestas muy satisfactorias** por parte de los alumnos de la Sec. 1AVI, respecto al material didáctico y respecto a la metodología utilizada, ya que se dio un porcentaje muy alto de participación, de reflexión y de discusión en los temas tratados.

- A pesar de que se pudieran mejorar los resultados en cuanto al aprendizaje de nuestros alumnos, al utilizar una metodología constructiva como la propuesta en éste trabajo, a nivel curricular no es fácil llevarse a la práctica por la gran cantidad de factores que operan en su contra, entre otros pueden citarse :
    a) La apatía de gran número de profesores.
    b) La no existencia de materiales didácticos apropiados.
    c) Las políticas institucionales.
    d) Y en general sería necesario que se realizara una reestructuración del Plan de Estudios existente en la UPIICSA, con la participación de todos los profesores o la mayoría de ellos.

- Finalmente consideramos que independientemente de las conclusiones obtenidas, esta investigación **ya está dando sus frutos**, por que ha propiciado que nosotros como docentes, acostumbrados a realizar nuestra actividad de una forma empírica, ahora ya nos estemos preocupando por los fundamentos teóricos que respaldan el campo educativo. Además ha servido para afianzarse de los conocimientos teóricos y prácticos en cuanto a la realización y desarrollo de los proyectos de investigación, actividad que no le damos mucha importancia, pero es requerida por todos los profesores que no queremos vivir y morir en el anonimato.

"COMPARACION DE MATERIALES DIDACTICOS"



EXAMEN APLICADO A LAS SECUENCIAS 1AV1 Y 1AV6

NOTA. Resolver únicamente cinco problemas

Resolver las desigualdades siguientes :

1) **a)** $\frac{1}{3}x - \frac{1}{5} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x$ **b)** $\frac{3x}{x+2} < 0$

2) $|x^2 - 5x - 1| > 0$

Para cada una de las funciones que se dan : obtener el dominio, hacer la gráfica y decir cuál es el rango.

3) a) $f(x) = 2 - (x+1)^2$ b) $f(x) = |x-3| + 2$

4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

5) $f(x) = \frac{2x}{9 - x^2}$

PROBLEMAS

6) Supóngase que un estacionamiento en la ciudad cobra \$6.00 por la primera hora y \$4.00 cada hora adicional. Construir una función en la que se relacione el cobro del estacionamiento con el número de horas que se utilizó, dar el dominio, y decir cuál es el rango.

7) Si los costos de producción por cada maleta de piel que se fabrica son de \$20.00 y que los costos fijos mensuales de investigación para diseñar las maletas fueron de \$10 000.00. Construir una función en la que se

"COMPARACION DE MATERIALES DIDACTICOS"

ANEXO 3
Encuesta a alumnos

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

UNIDAD PROFESIONAL INTERDISCIPLINARIA DE INGENIERIA CIENCIAS SOCIALES Y ADMINISTRATIVAS

"COMPARACION DE MATERIALES DIDACTICOS"

Encuesta para los alumnos de la Sec. 1AV1, en la que se utilizó en el tema de funciones un material didáctico bajo un enfoque constructivista

La presente encuesta forma parte del trabajo de investigación, titulado "COMPARACION DE MATERIALES DIDACTICOS" donde uno de los objetivos consiste en retomar los comentarios que viertan los alumnos de dicha secuencia al ser encuestados, referente a las experiencias vividas al trabajar el material didáctico bajo un enfoque constructivista.

DATOS GENERALES

- Nombre del alumno : ____________________
-Escuela de procedencia : ____________________
-Promedio general : ____________________
-Promedio obtenido en matemáticas : ____________________

E N C U E S T A

1) Te gustan las matemáticas
si ( ) no ( )

2) Las entiendes con facilidad
mucho ( ) poco ( ) nada ( )

3) Que tiempo le dedicas al estudio de las matemáticas actualmente cada día
2 horas ( ) 1 hora ( ) media hora ( )
menor tiempo ( )

4) Si no las entiendes con facilidad, ¿consideras que la forma como se enseña es la adecuada ?
si ( ) no ( )

NOTA. Considere las experiencias vividas en el tema de funciones para contestar las siguientes preguntas.

5) La metodologia utilizada fue
buena ( ) regular ( ) mala ( )

Razones que consideres importantes : ____________________
____
____
____

6) Consideras que ésta metodología puede representar una alternativa para mejorar el aprendizaje de los alumnos

buena ( ) regular ( ) mala ( )

7) Las matemáticas están relacionadas con la realidad (en particular el tema de funciones)

mucho ( ) poco ( ) nada ( )

8) Como calificas el hecho de que los alumnos participen en la construcción del conocimiento a partir de la resolución de problemas

bueno ( ) regular ( ) malo ( )

9) Consideras que ésta metodología propicia la participación activa del alumno ?

mucho ( ) poco ( ) nada ( )

10) Propicia la habilidad para resolver problemas ?

mucho ( ) poco ( ) nada ( )

11) De las dos metodologías empleadas con el profesor, ¿cuál consideras que te permite obtener un mejor aprendizaje ?

Constructivista ( ) Mecanicista ( )

Razones____

____

____

____

12) En cuál de ellas, se requiere más trabajo por parte del alumno

en la constructivista ( ) en la tradicionalista ( )

13) Consideras que la metodología constructivista aporta elementos para mejorar la capacidad de razonamiento en el alumno ?

mucho ( ) poco ( ) nada ( )

14) Consideras que ésta metodología (Constructivista) propicia : la reflexión, el análisis y la creatividad, siempre y cuando sea tomada con toda seriedad ?

mucho (   ) poco (   ) nada (   )

15) **Algún comentario que quisieras hacer al respecto y que no esté incluido en la encuesta :**

____

____

____

____

____

____

Por tu cooperación, gracias.

"COMPARACION DE MATERIALES DIDACTICOS"

ANEXO 4

Encuesta a profesores

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

UNIDAD PROFESIONAL INTERDISCIPLINARIA DE INGENIERIA CIENCIAS SOCIALES Y ADMINISTTRATIVAS

"COMPARACION DE MATERIALES DIDACTICOS"

Encuesta para los profesores que en la actualidad están impartiendo el curso de Cálculo Diferencial en la carrera de Administración Industrial

INFORMACION GENERAL

La presente encuesta forma parte del trabajo de investigación, titulado "COMPARACION DE MATERIALES DIDACTICOS" donde uno de los objetivos consiste en retomar los elementos y experiencias que viertan los profesores encuestados, respecto a los pros y contras que a su juicio pudiera surgir al utilizar para el tema de funciones un material didáctico bajo un enfoque constructivista (éste material será proporcionado a cada uno de los profesores encuestados)

DATOS GENERALES

- Nombre del profesor :___________________________
- Profesión :___________________________
- Experiencia docente (número de años)___________________
- ¿Tienes cursos de formación docente ?

  si ( ) no ( )
- En caso afirmativo mencione si son cursos ( )
  - a) Aislados de actualización
  - b) Diplomados, especializaciones o maestrías en general
- En caso de tener experiencia profesional no docente, indicar el ramo :___________________________
- Horas de nombramiento : Base ( ), Interinas ( )
- Clasificación :

  Asignatura ( ) Asociado ( ) Titular ( )

E N C U E S T A

1) ¿Tiene conocimiento de algún material elaborado bajo un enfoque constructivista ?

   si ( ) no ( )

2) En caso afirmativo, ¿lo ha utilizado en sus cursos ?

   si ( ) no ( )

3) Si lo ha utilizado en sus cursos, el resultado ha sido

   bueno ( ) regular ( ) malo ( )

4) Con base en su experiencia, considera que la metodología tradicionalista (mecanicista) es la mejor opción para el proceso de enseñanza-aprendizaje

   si ( ) no ( )

5) Algunas razones que quieras indicar___________________________

____

____

____

6) En que porcentaje considera que el material didáctico utilizado influye en el proceso de enseñanza-aprendizaje

100% ( ) 50% ( ) 25% ( ) otro ( )

7) Considera usted que con un material tradicionalista (mecanicista) al ser utilizado, se logre :

a) Que el alumno razone
mucho ( ) poco ( ) nada ( )

b) Que sea reflexivo
mucho ( ) poco ( ) nada ( )

c) Que participe
mucho ( ) poco ( ) nada ( )

d) Que sea creativo
mucho ( ) poco ( ) nada ( )

e) Que vea la vinculación de las matemáticas con la realidad
mucho ( ) poco ( ) nada ( )

f) Que adquiera habilidad para resolver problemas
mucho ( ) poco ( ) nada ( )

g) Que de sus puntos de vista y sea propositivo
mucho ( ) poco ( ) nada ( )

h) Que muestre interés para preguntarse, por el porqué de las cosas
mucho ( ) poco ( ) nada ( )

i) Que adquiera aprendizaje significativo
si ( ) no ( )

8) Considera usted que con un material bajo un enfoque constructivista como el proporcionado para el tema de funciones, al ser utilizado dé alternativas para :

a) Que el alumno razone
mucho ( ) poco ( ) nada ( )

b) Que sea reflexivo
mucho ( ) poco ( ) nada ( )

c) Que participe
mucho ( ) poco ( ) nada ( )

d) Que sea creativo
mucho ( ) poco ( ) nada ( )

e) Que vea la vinculación de las matemáticas con la realidad
mucho ( ) poco ( ) nada ( )

f) Que adquiera habilidad para resolver problemas
mucho ( ) poco ( ) nada ( )

g) Que de sus puntos de vista y sea propositivo
mucho ( ) poco ( ) nada ( )

h) Que muestre interés para preguntarse, por el porqué de las cosas
mucho ( ) poco ( ) nada ( )

i) Que adquiera un aprendizaje significativo
si ( ) no ( )

9) ¿Considera conveniente utilizar una metodología en el curso de Cálculo Diferencial que tome como punto de partida el planteamiento de problemas ?
si ( ) no ( )

■ **Razones que considere importantes :**

10) Si las condiciones fueran propicias en UPIICSA al impartir el curso de Cálculo Diferencial, utilizaría metodologías diferentes a las tradicionales (mecanicistas)

si ( ) no ( )

Razones

11) Uno de los problemas que frecuentemente se presentan en el curso de Cálculo Diferencial es que no se relacionan los elementos teóricos con los problemas de la realidad. ¿Qué hace para vincular la teoría con la práctica ?

12) Qué opiniones puede dar acerca del material didáctico bajo un enfoque constructivista, que se le proporcionó, en cuanto a :

a) Estructura :

b) Organización de los contenidos :

c) Selección y planteamiento de los problemas : ______________

____

____

13) Considera que la utilización de ésta metodología requiera de un mayor esfuerzo y preparación del profesor

si ( )   no ( )

14) Considera que el proceso de enseñanza-aprendizaje puede ser mejorado con la implementación de otras metodologías aunadas con su respectivo material didáctico

mucho ( )   poco ( )   nada ( )

15) Según su experiencia, cuales serían los obstáculos más importantes para utilizar otras metodologías al impartir el curso de Cálculo Diferencial en UPIICSA______________________________________

____

____

____

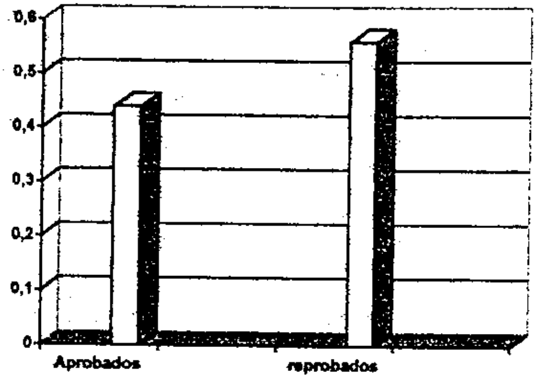
____

"COMPARACION DE MATERIALES DIDACTICOS"

ANEXO 5

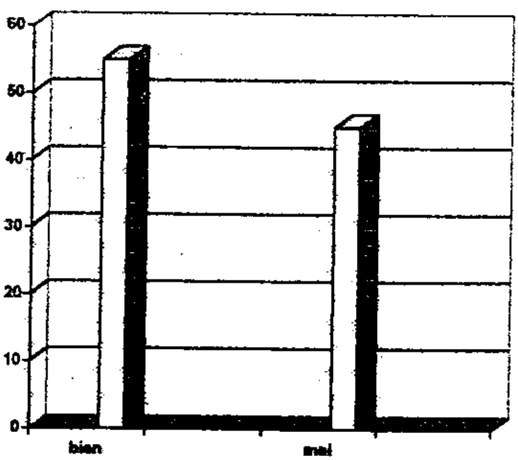
Gráficas

Resultados del examen aplicado a la Sec. 1AV1.



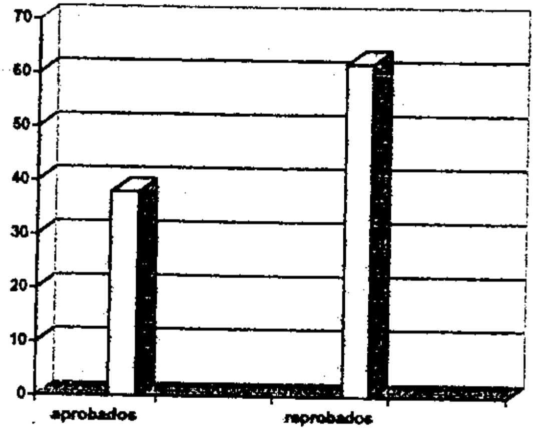
Gráfica 1.

Resultados de los problemas 6 o 7 resueltos por 16 alumnos de la Sec. 1AV1.



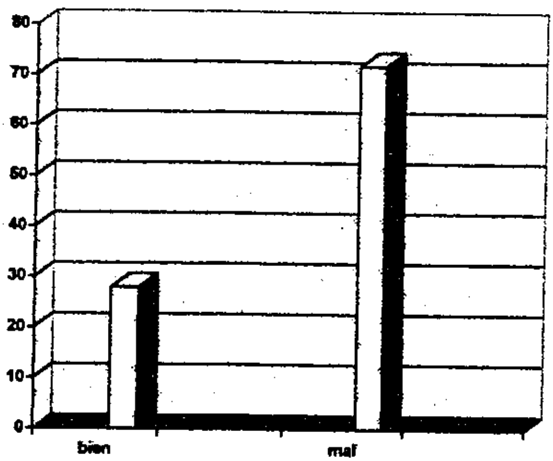
Gráfica 2.

Resultados del examen aplicado a la Sec. 1AV6.



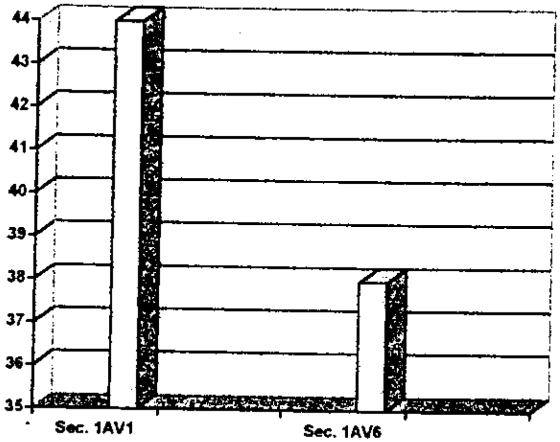
Gráfica 3.

Resultados de los problemas 6 o 7 resueltos
por 10 alumnos de la Sec. 1AV6.



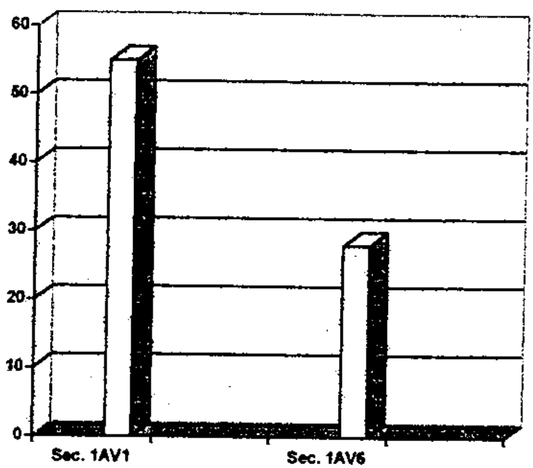
Gráfica 4.

Porcentajes en los que los alumnos de las Sec. 1AV1 y 1AV6 aprobaron el examen.



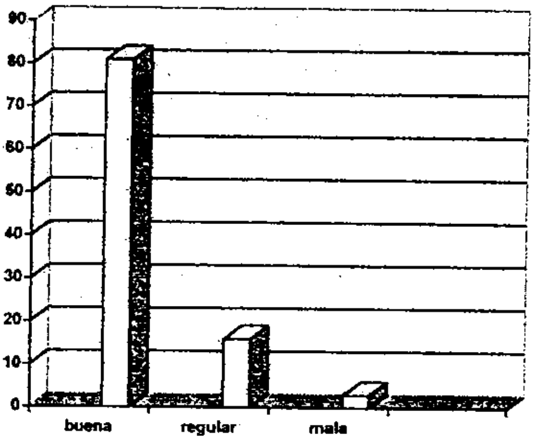
Gráfica 5.

Porcentajes en los que fueron resueltos correctamente los problemas 6 o 7.



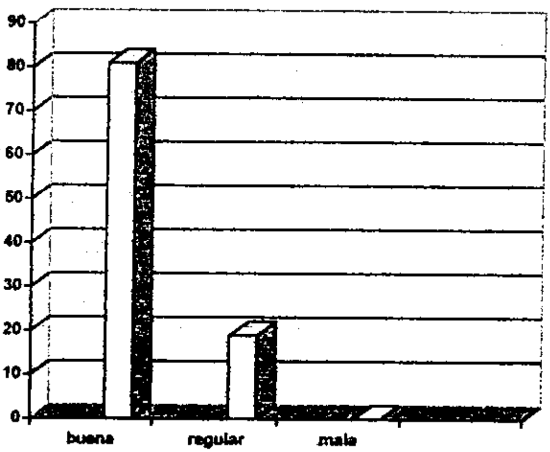
Gráfica 6.

Consideraron a la Metodología Constructivista
como buena



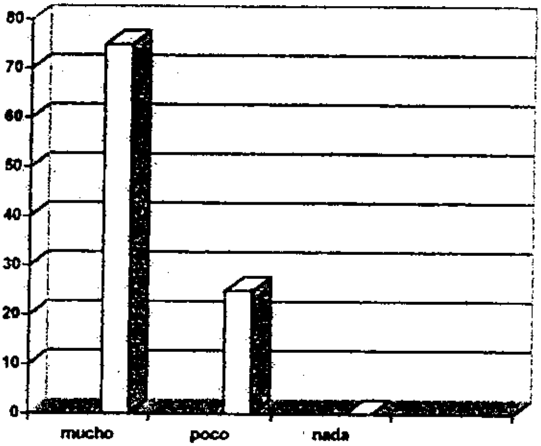
Gráfica 7.

Representa alternativas de aprendizaje



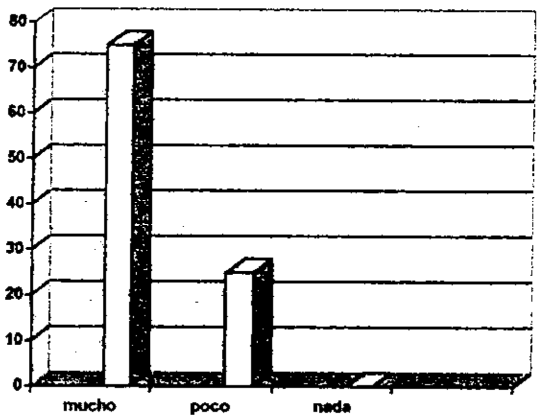
Gráfica 8.

Las matemáticas están relacionadas con la realidad



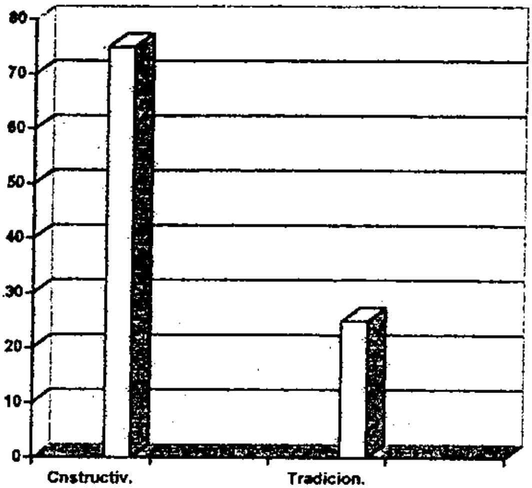
Gráfica 9.

Propicia la participación activa



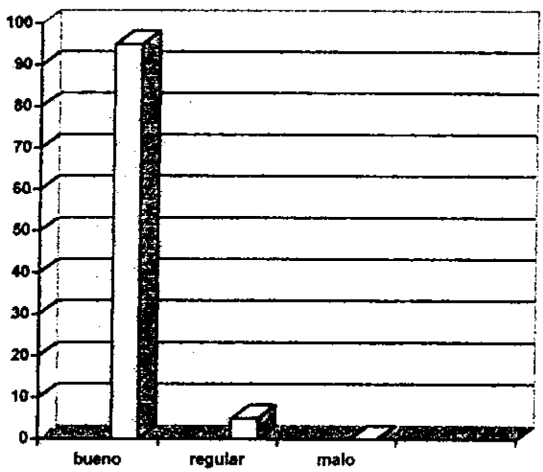
Gráfica 10.

Se requiere de más trabajo por el alumno



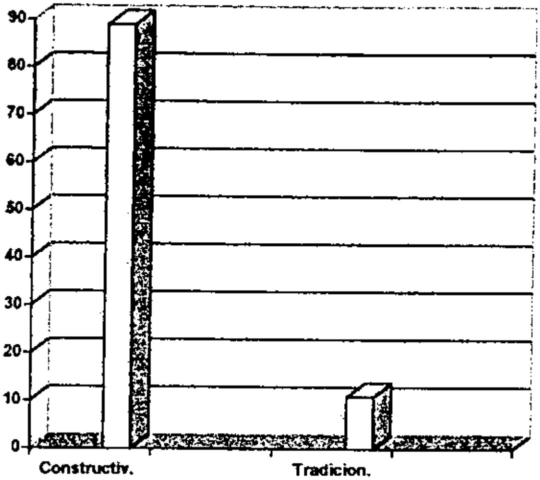
Gráfica 11.

Participación en la construcción del conocimiento y aporta elementos para mejorar la capacidad de razonamiento



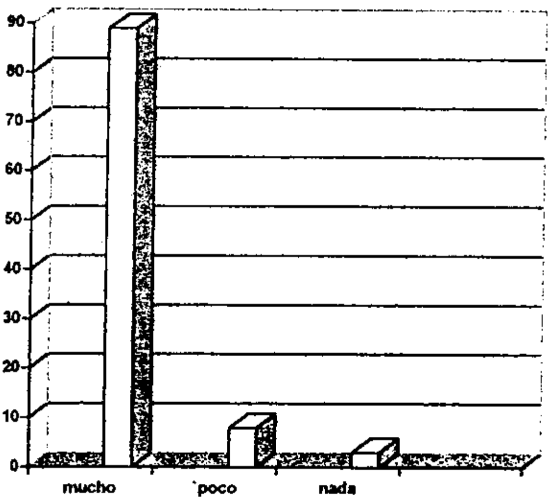
Gráfica 12

Permite un mejor aprendizaje

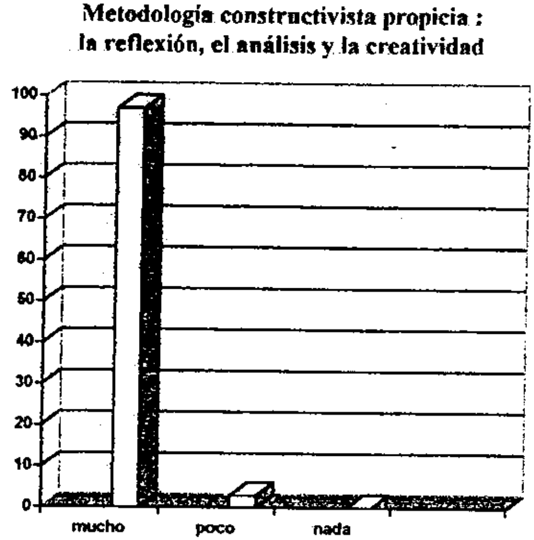


Gráfica 13

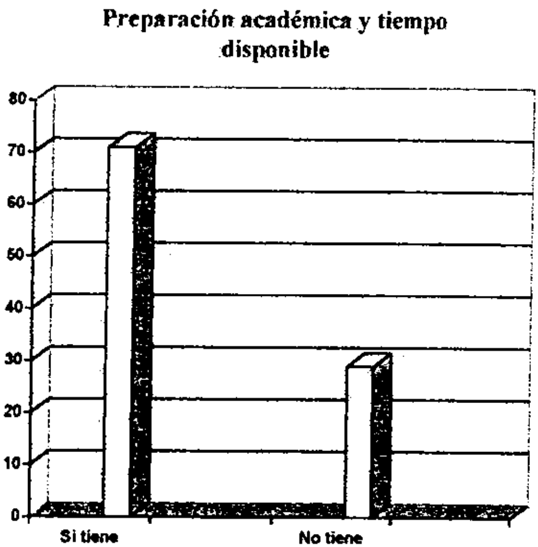
Habilidad para resolver problemas



Gráfica 14.

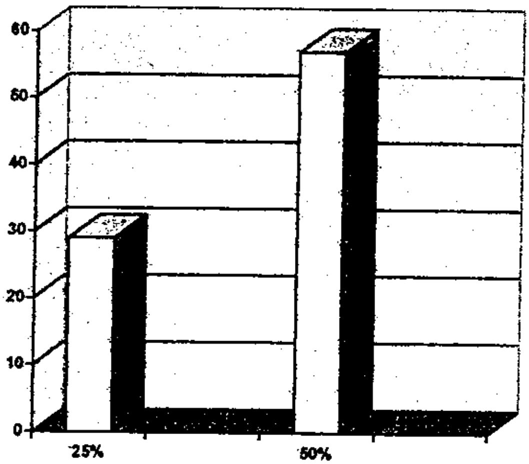


Gráfica 15.



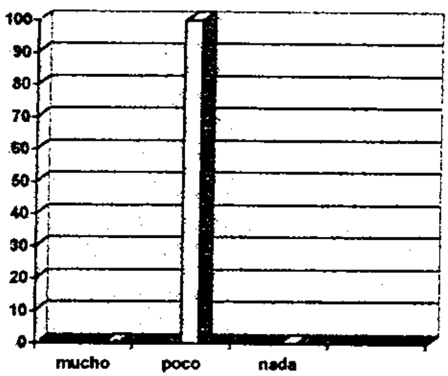
Gráfica 16.

El material didáctico influye en el proceso de enseñanza-aprendizaje



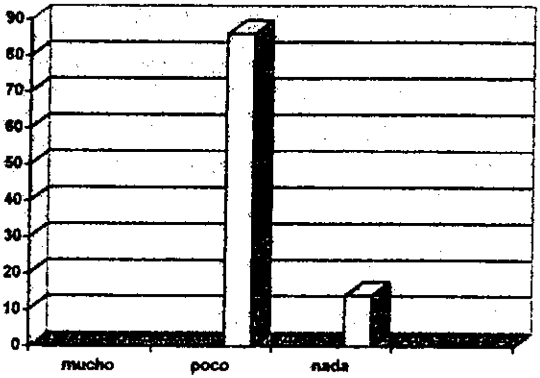
Gráfica 17.

Los alumnos razonan, participan y obtienen habilidad para resolver problemas muy poco (Material tradicionalista)



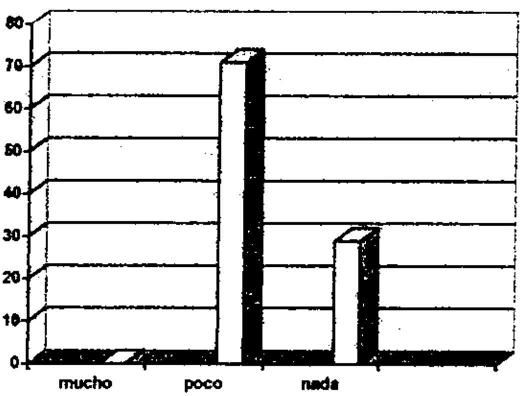
Gráfica 18.

Poca creatividad y poco interés



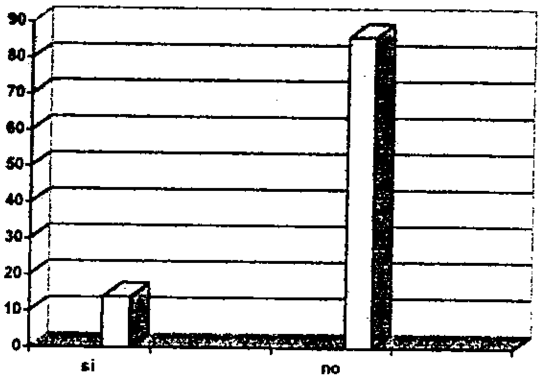
Gráfica 19.

Poco reflexivos y poca vinculación



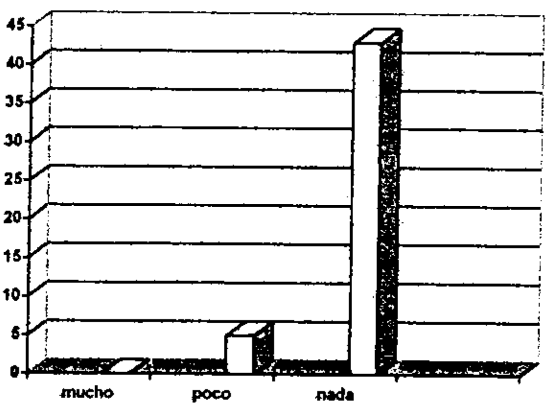
Gráfica 20.

Aprendizajes significativos



Gráfica 21.

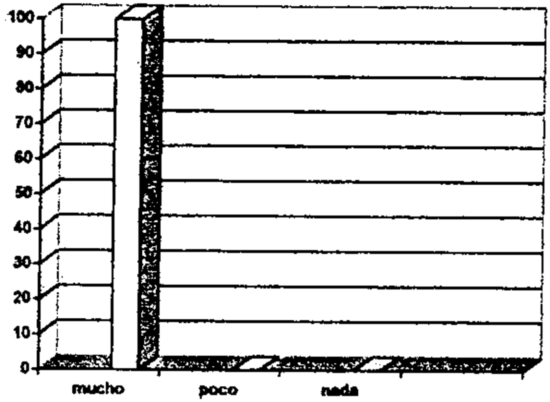
Puntos de vista y propositivos



Gráfica 22.

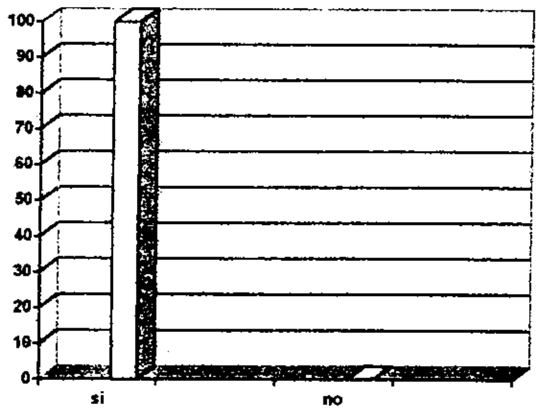
Enfoque constructivista

Razonan mucho y ven muy clara la vinculación de las matemáticas con la realidad



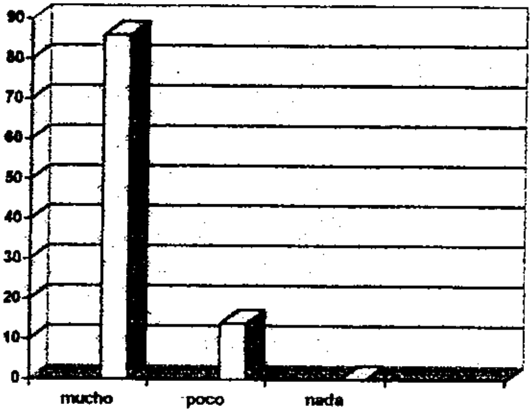
Gráfica 23.

Aprendizajes significativos



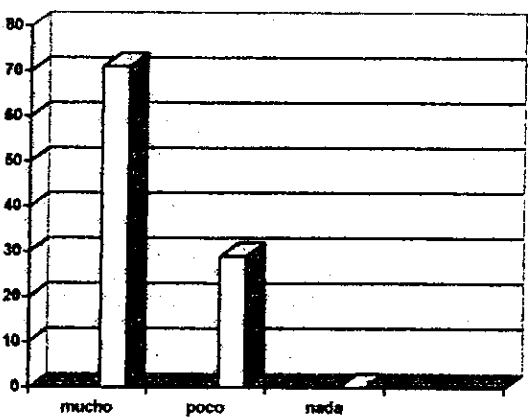
Gráfica 24.

Propositivo y dan sus puntos de vista



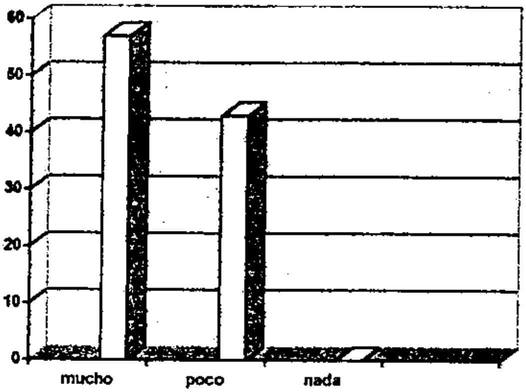
Gráfica 25.

Mucha habilidad y mucho interés



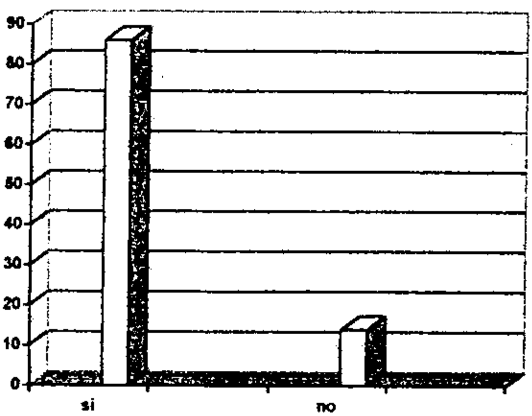
Gráfica 26.

Enfoque constructivista
Muy reflexivo y creativo



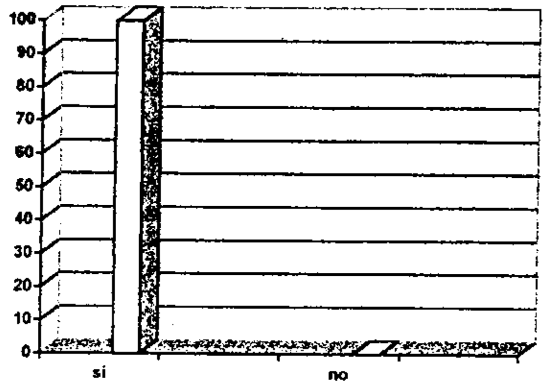
Gráfica 27.

Planteamiento de problemas



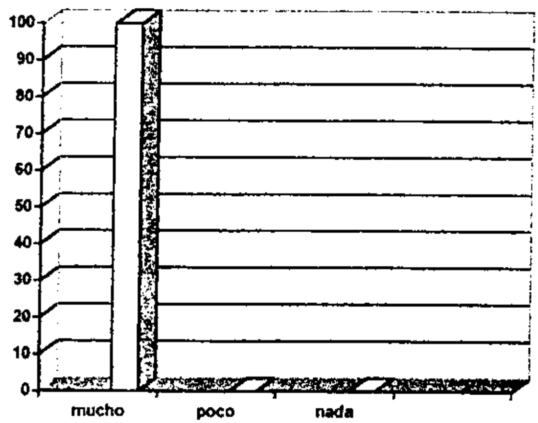
Gráfica 28.

Condiciones propicias y mayor esfuerzo



Gráfica 29.

Mejoras en el proceso de enseñanza-aprendizaje



Gráfica 30.

BIBLIOGRAFIA

- Acuña, C. 1986. CREATIVIDAD: LA LIBERTAD SECRETA. Artículo, Perfiles Educativos. No. 34. México..

- Acuña , C. 1991. ESTRATEGIAS COGNITIVAS. Aprendizaje en Solución de Problemas. Serie: Sobre la Universidad. No. 16. UNAM, Centro de Investigación y Servicios Educativos.

- Ausubel, D. 1983. SIGNIFICADO Y APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO. PSICOLOGIA EDUCATIVA: UN PUNTO DE VISTA COGNOSCITIVO. Trillas, México. pp. 46-71.

- Block, D. y Papacostas, A. 1984. DIDACTICA CONSTRUCTIVISTA Y MATEMATICAS UNA INTRODUCCION. Revista cero en conducta. CINVESTAV. IPN. México.

- Bourdieu, P y F Gros. 1988. LOS CONTENIDOS DE LA ENSEÑANZA. Universidad Futura, Vol. 2, No. 4. UAM Azcapotzalco. Trad. Mario Rueda Beltran. México.

- Braum A., y otros. 1992. CALCULO APLICADO. Ed. Limusa. Grupo Noriega Editores. Primera edición.

- Bruner, J. 1961. "The act of discovery", Harvard Educacional Review, 31, 21-32.

- Coll, C. 1988. APRENDIZAJE ESCOLAR Y CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO. Cap. 9. Publicado en Infancia y aprendizaje. Paidos Educador.

- Contreras, C. 1993. MAPAS CONCEPTUALES Y RESOLUCION DE PROBLEMAS. Dpto. de Didáctica de las Ciencias (Experimentales, Sociales y Matemáticas). Universidad de Sevilla.

- Cruse A. 1986. LECCIONES DE CALCULO 1. INTRODUCCION A LA DERIVADA. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana.

- Díaz, F. Lule, M. Pacheco, D. Rojas, S. Saád, E. 1995. METODOLOGIA DE DISEÑO CURRICULAR PARA EDUCACION SUPERIOR. Trillas. México. reimpresión.
- Dolciani, Berman y Freilick. 1981. ALGEBRA MODERNA. Ed. Publicaciones Culturales S.A. Reimpresión Décima quinta.
- Díaz ,F. Barriga y otros. 1995. METODOLOGÍA DE DISEÑO CURRICULAR para educación superior. Tercera reimpresión. Trillas.
- Fuenlabrada, I. 1991. LA INVESTIGACION EN DIDACTICA DE LA MATEMATICA. Un problema actual. Avance y Perspectiva, vol. 10.
- Labinowicz, E. 1980. INTRODUCCION A PIAGET. Aspectos Psicológicos. Trad. Humberto López Pineda. Ed. Adison Wesley Iberoamericana. Impreso en México D.F. en 1986.
- Lafaurcade, P. 1980. PLANEACION, CONDUCCION Y EVALUACION EN LAENSEÑANZA SUPERIOR. Ed. Buenos Aires pp. 67-98.
- Larson-Hostetler. 1990. CALCULO CON GEOMETRIA ANALITICA. Ed. Mc. Graw Hill. Tercera Edición.
- Leclerco, R. 1988. SUPLEMENTO DEL SEMINARIO DE PROBLEMAS CIENTIFICOS Y FILOSOFICOS. Historia de la Heurística. Trad. Rebeca de Gortari. UNAM. México.
- Leithold, L. 1994. EL CALCULO CON GEOMETRIA ANALITICA. Ed. Harla Harper & Row. Quinta edición.
- Mancera, E. y Escareño, F. 1993. PROBLEMAS, MAESTROS, Y LA RESOLUCION DE PROBLEMAS. Rev. de Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

- Mendoza, E. 1992. LA CONSTRUCCION DEL CONOCIMIENTO EN LA INVESTIGACION EDUCATIVA DE LA ENSEÑANZA DE LA CIENCIA. CISE. UNAM. México.

- Moreno L y Waldegg, G. 1992. CONSTRUCCION Y EDUCACION MATEMATICA. Artículo, Sección de Matemática educativa. CINVESTAV. México.

- Novak, J. 1978. EL PROCESO DE APRENDIZAJE Y LA EFECTIVIDAD DE LOS METODOS DE ENSEÑANZA. Tomado de Perfiles Educativos, julio-agosto-septiembre. (traducción de Serafín Zamora Briones). México.

- Novak, J. 1988. APRENDIENDO A APRENDER. Mapas conceptuales para el aprendizaje significativo. Trad. Juan y Eugenio Campanario. Ed. Martínez Roca, Barcelona.

- Onrubia, J. 1993. ENSEÑAR: CREAR ZONAS DE DESARROLLO PROXIMO E INTERVENIR EN ELLAS. Coll y otros. El constructivismo en el aula. Biblioteca de Aula, Barcelona.

- Panzsa, M. ELABORACION DE PROGRAMAS. Operatividad de la didáctica. Tomo 2. Genrika, México.

- Parra, B. 1990. DOS CONCEPCIONES DE RESOLUCION DE PROBLEMAS DE MATEMATICAS. Rev. de Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

- Pérez, A. 1990.LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE: ANALISIS DIDACTICO DE LAS PRINCIPALES TEORIAS DEL APRENDIZAJE. Morata, Madrid España, pp. 34-62.

- Piaget, 1974. A DÓNDE VA LA EDUCACIÓN, versión castellana, Barcelona, Taide.

- Polya, G. 1973. LA ENSEÑANZA POR MEDIO DE PROBLEMAS. Tra. Ed. Princeton, N.J. Princeton University Press. Trad. Cézar Cristobal E. en 1986.

- Santos, L. 1992. RESOLUCION DE PROBLEMAS; EL TRABAJO DE ALAN SCHOENFELD: UNA PROPUESTA A CONSIDERAR EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS. Rev. de Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

- Santos, L. 1991. LA RESOLUCION DE PROBLEMAS: ELEMENTOS PARA UNA PROPUESTA EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICA CINVESTAV. IPN. México.

- Santos, L. 1994. LA RESOLUCION DE PROBLEMAS EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS. Cinvestav-IPN. México.

- Schroeder, T y Lester F, Jr. 1989. DESARROLLO DE LA COMPRENSION EN MATEMATICAS VIA RESOLUCION DE PROBLEMAS. Trad. Ruiz J., Brauer, D., Nuñz, R., Bonfil, A. y Ramiez, R. Realizada en 1993.

- Shoenfeld, A. 1980. HEURISTICA EN EL SALON DE CLASES. Yearbook Editor. USA. Trad. Rosario Preisser R.

- Zemelman, H. 1987. EL CONOCIMIENTO COMO CONSTRUCCION Y COMO INFORMACION. UNAM SEP ANUIES. pp 81-120. México.