26
2 ejm

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA SOLUCION NEWTONIANA AL PROBLEMA DE PAPPUS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

MARTINEZ REYES MAGALLY

DIRECTOR DE TESIS:
MAT. GUILLERMO E. ZAMBRANA CASTAÑEDA

1998

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
La solución newtoniana al problema de Pappus

realizado por Magally Martínez Reyes

con número de cuenta 8915783-9 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Mat. Guillermo E. Zambrana Castañeda	
Propietario	M. en C. Rafael Martínez Fnriquez	Rafael Martínez
Propietario	Dr. Carlos Alvarez Jimenez	
Suplente	Mat. Julio Cesar Guevara Bravo	
Suplente	M. en C. Carlos Torres Alcaraz	

Consejo Departamental de Matemáticas

Mat. Julio Cesar Guevara Bravo

INDICE

A mis padres, *Gil Martínez Ramírez y Elena Josefina Reyes Lucero.*

A quienes agradezco el apoyo económico y moral que durante el trayecto de mis estudios me han brindado, y que me ha permitido concluír esta primera etapa de los mismós. Siendo meritorio dedicarles esta tesis, ya que para mí es, en efecto, la mejor herencia que pude recibir de ustedes.

A mi hermana, *Mayela Martínez Reyes.*

A quien agradezco las palabras de comprensión y aliento que recibí, esperando corresponder, en su momento, a dicho apoyo.

A mi esposo, *José Macario López Balderas.*

A quien agradezco las observaciones y críticas en torno al esclarecimiento metodológico de esta tesis, así como su participación en la redacción de la misma. Esperando que este sea el inicio de futuras investigaciones que trabajemos en conjunto.

En cualquier trabajo de investigación resulta sumamente útil el apoyo intelectual, así como la apertura a ciertas fuentes de información y el acceso a instrumentos y materiales de trabajo diversos, por lo que no dudo en reconocer el apoyo brindado por las siguientes personas:

A mi director de tesis, *Mat. Guillermo E. Zambrana Castañeda*, por el asesoramiento intelectual, que me ayudo a ubicar el espacio temático en torno al cual iba girar mi investigación, así como la estructura metodológica de la tesis.

A mis sinodales, por el tiempo empleado en la revisión de la tesis y por sus valiosas observaciones: *Dr. Carlos Alvarez Jimenez, M. en C. Rafael Martínez Enriquez, M. en C. Carlos Torres Alcaraz y Mat. Julio Cesar Guevara Bravo.*

Y, a quienes debo el apoyo técnico y de edición de la presente tesis, sin el cual no hubiera logrado llegar a buen fin: el *Dr. Alejandro Garciadiego Dantán y la Act. Claudia Elena G. Palacios Macías.*

INTRODUCCION

En la cultura griega, la geometría aparece como una herramienta para solucionar problemas; una parte importante del método para resolverlos pasó de ser empírico y apriorístico a ser analítico y sintético[1]. Estos últimos se ven enriquecidos con los trabajos de Euclídes, Arquímedes y Apolonio, entre otros. Los hombres que se encargaron de rescatar y difundir dichos trabajos son llamados comentadores, entre ellos encontramos a Pappus. Él puso énfasis en problemas que nadie había resuelto, tales como la duplicación del área, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo. Estos problemas, en la medida en la que debían ser resueltos según el método sintético y analítico, se clasificaron en: problemas de construcción (síntesis), especialmente el estudio de lugares geométricos[2]; y la aplicación de la teoría de las secciones cónicas (análisis).

Uno de estos problemas sin solución fue el problema del lugar geométrico de tres y cuatro líneas; o problema de Pappus, que como se verá más adelante, recibe este nombre en honor a quien le dio un sentido claro y acabado al problema. Éste consiste en que dadas (tres) cuatro líneas en posición, encontrar el lugar geométrico de los puntos desde los cuales otras (tres) cuatro líneas se pueden trazar a las (tres) cuatro líneas dadas, en ángulos iguales con la línea que tocan, tales que el producto (cuadrado) de (una de ellas) dos de ellas está siempre en una razón dada con el producto de las otras dos. El lugar geométrico es una cónica que pasa por las intersecciones de las (tres) cuatro líneas dadas (véase Apéndice II).

Los intentos de demostración, para tal problema, que se dieron en la tradición griega antigua, no llegaron a buen término, entre otras cosas porque no se tenía una clara concepción del problema (Apéndice II); dentro de los primeros intentos que se dieron estaban los de Aristeo, Euclides y Apolonio. Así, el problema llegó hasta la época en que Pappus lo rescata y lo plantea más claramente sin lograr resolverlo. Dos mil años después Descartes lo conoce y mediante su geometría analítica lo resuelve; Newton al estudiar dicha solución critíca las bases metodológicas del mismo, al realizar un análisis comparativo entre las herramientas de Descartes y las griegas, y propone su propia solución siguiendo el método de fluxiones y momentos, una fusión de conceptos griegos y de su tiempo.

Los trabajos modernos que de alguna forma tratan la solución de Newton a este problema, tienden a desarrollar cuatro diferentes posibilidades; primero, que la solución newtoniana concuerda con el método griego; segundo, que no concuerda con dicho método; tercero, que el problema fue la piedra angular en donde descanzaron grandes investigaciones futuras, y, cuarto; que tan sólo fue otro de tantos problemas que llegó a solucionar. Algunos expertos en matemáticas griegas como Jones [1986], Knorr [1986] y Heath [1981], afirman la cuarta posibilidad; en cambio Boyer [1989], Gjertsen [1986] y Kline [1956], defienden la primera; éste último tambien comparte el tercero junto con Whiteside [1969] y Westfall [1980]; finalmente, algunos expertos, como De

1 El método analítico consiste en suponer algo como verdadero y deducir de él propiedades, hasta llegar a otro hecho cuya verdad no sea cuestionable. El método sintético, contrario al anterior, va de lo particular a lo general, dispone causas y consecuencias en un orden natural hasta llegar a construir lo que se busca [Vera 1970, Pappus, 991].

2 El lugar geométrico es el conjunto de puntos que describen una curva que cumple con cierta propiedad [Unguru 1996].

Gandt [1990], Galluzzi [1986], Grosholz [1987] y el mismo Whiteside [1969] entre otros, afirman la segunda.

Así, cada uno ve la solución newtoniana de acuerdo a su perspectiva o interés intelectual. Pero, ninguno ha desarrollado un trabajo en extenso sobre esto, puesto que para ellos todo está enmarcado en el uso de la geometría en el *Principia*, y el problema de Pappus viene a ser parte del mismo. Sin embargo, las características del problema lo hacen sobresalir del *Principia*, como veremos más adelante; ya que por un lado resultó ser la base donde se sustentó la geometría analítica de Descartes; y por el otro, desarrolló elementos que más tarde le serán de gran utilidad a Newton en el cálculo diferencial e integral, e incluso en una incipiente geometría diferencial, a pesar de algunas argumentaciones contrarias.

Luego, no es sólo un problema cuya solución quedo truncada por varios años y que retomaron Descartes y Newton como entretenimiento, o más aún, *so pretexto* para una rencilla de carácter intelectual; sino que entraña un trasfondo que nos lleva a cuestionar la metodología, y por ende, el fundamento de cada concepción que busca resolverlo.

Ante la crítica de Newton, se creyó que el problema fue resuelto por éste conforme al método griego; al menos, eso es lo que se afirmó; sin embargo, tampoco logra resolverlo conforme a dicho criterio. Por ello, es posible encontrar, en Newton y Descartes, un paralelismo conceptual y un intento metodológico análogo: un rigor analítico y una construcción sintética; ambos utilizando herramientas que no son propias del método griego, aunque Newton haya afirmado lo contrario. Esto se ejemplifica en lo siguiente.

En los griegos los instrumentos para el trazo de curvas son la regla y el compás; en Newton son instrumentos mecánicos; y en Descartes no existe diferenciación alguna entre uno y otro instrumento, ya que para él lo más importante es la representación algebraica de las figuras. Consecuentemente, las herramientas entre los tres métodos analizados muestran una clara diferenciación conceptual (comparación metodológica); por ejemplo: en los griegos existe una geometría de los puntos fijos que se basa en deducciones lógicas (analítico) y en una validación sintética a través de la construcción de las figuras; en Descartes, en pasar de una representación geométrica a su correspondiente expresión algebraica, obteniendo una expresión más simple (análisis), para regresar nuevamente a la figura geométrica y viceversa (síntesis); y en Newton, es una geometría de los puntos móviles que se basa en cantidades evanescentes -que tienden a cero- (análisis) y en una construcción final como criterio de validación geométrico (síntesis).

Como se puede observar, todos los métodos tienen una parte sintética y otra analítica, pero difieren en la forma en que cada uno lo interpreta; ya que en cada caso la argumentación deductiva recae sobre diferentes supuestos: puntos fijos - puntos algebraicos - puntos móviles, respectivamente. Y en esta revision metodológica y conceptual es donde se sustenta nuestro análisis, cuya finalidad es determinar hasta qué grado cada solución cumple con los requisitos que impone la geometría griega; en especial la newtoniana.

Es por ello que se tuvo que recurrir a una revisión histórica (Apéndice II), tratando de identificar los fundamentos que conforman a la tradición geométrica de los griegos, para poder evaluar correctamente las soluciones de Descartes y Newton (Apéndice I, método y solución de Descartes como punto de referencia en la comparación con lo realizado por Newton), e inclusive la de los mismos griegos. Mientras que en el capítulo central realizamos una revisión breve del problema para situarnos históricamente, pasando luego a la parte técnica de la solución de Newton al problema de Pappus (Libro I, Sección V, Lemas XVII-XXI); clarificando las herramientas que fue utilizando hasta llegar a la demostración (sección 1.2), puntualizando cada elemento que sirvió de comparación entre uno y otro método. En especial, esta parte requirió de anotaciones al margen (entre corchetes) para hacer accesible la demostración y el desarrollo lógico de cada herramienta utilizada. También incluimos una sección sobre la historia del método newtoniano, buscando dar causalidad a nuestro análisis. Finalmente la sección 1.4 incluye las diferencias más marcadas entre cada método de solución.

Así, los criterios de validación que cada cual tomemos respecto a dicha solución estarán en función de la posición metodológica con la cual nos identifiquemos, ya que éste es un problema de método (conceptos, herramientas e instrumentos), por lo que no se pretende discutir los fundamentos tanto históricos como específicos de la geometría en general; de lo que se trata, en cierta forma, es de determinar que elementos están fundamentando tal demostración.

Es por ello, que nos hemos propuesto sopesar las aportaciónes de las soluciones al problema de Pappus anteriores a la de Newton, sólo como punto de comparación. Y con ello, poder realizar el análisis metodológico de la solución newtoniana, valorando la demostración conforme a los postulados de la tradición geométrica griega.

I. La solución de Newton al problema de Pappus

1. El problema de Pappus

La solución newtoniana del problema de Pappus (véase Apéndice I, pag. 73), ha sido evaluada en medida de su adecuación a la tradición geométrica griega de fines de la antigüedad [Knorr 1986]. En este sentido se ha perpetuado la creencia de que sólo 2000 años después Newton logró resolverlo conforme a dicho criterio [Boyer 1985]. Una revisión histórica de los diversos métodos de solución tanto en la antigüedad (Euclides, Apolonio, Aristeus y el mismo Pappus) como en el siglo XVII (Descartes y Newton), e incluso las reconstrucciones modernas con base en hallazgos originales (Jones y Knorr), aportan elementos que cuestionan tal creencia, al menos en cuanto a la validez de la demostración.

Este problema desconcertó a los geómetras griegos desde la antiguedad, ya que a pesar de todo el armazón de conocimientos geométricos que poseían (teoría de proporciones, teoría de las secciones cónicas y el estudio de los lugares geométricos), no lograron solucionarlo.

Los primeros intentos por solucionar el problema, que entre los griegos se conoce como el lugar geométrico de tres y cuatro líneas, fueron de Aristeo para los casos de dos, tres y cuatro líneas sin llegar a resultados satisfactorios. El siguiente, fue Euclides pero sólo consiguió la solución para el caso de dos líneas; quien lo retoma es Apolonio, resolviendo únicamente la parte analítica para el caso de tres líneas. De esta forma llega a la época de los comentadores, donde Pappus profundiza el problema al determinar que la solución requiere de una parte analítica y otra sintética, como marca la tradición geométrica, y lo generaliza para más de cuatro líneas (véase Apéndice II). Es por ello que cuando Descartes conoce el problema 2000 años después, lo denomina problema de Pappus en honor a quien le da este sentido tan definido. Y en relación a esto, es que el problema de Pappus ha merecido el respeto y admiración de los investigadores contemporáneos, quienes ven en él al precursor de la geometría analítica cartesiana y la fuente de una de las controversias más interesantes entre dos colosos: Descartes y Newton.

El problema fue resuelto por Descartes usando su geometría analítica, pero Newton aboga por una solución conforme a los cánones griegos, es decir, que se de una solución que corresponda al uso de los métodos analítico y sintético griegos; es este afán, Newton presenta su propia solución, donde busca rescatar dichos métodos mediante la noción de puntos en movimiento, como la 'forma natural' de extender los resultados de la geometría antigua a la geometría actual, conformando su método de fluxiones y momentos. El sustento teórico de tal método descansa en el siguiente criterio newtoniano:

> Como los antiguos (según cuenta Pappus) consideraban de mayor importancia la mecánica para la inteligencia de las cosas naturales, y como los modernos -rechazando formas substanciales y cualidades ocultas- han intentado reducir los fenómenos de la naturaleza a las leyes matemáticas, he querido en este trabajo cultivar la matemática en tanto que se relaciona con la filosofía... Toda la dificultad de la filosofía parece consistir en que, a partir de los fenómenos del movimiento, investiguemos las fuerzas de la naturaleza y después desde estas fuerzas demostremos el resto de los fenómenos... Desde la mecánica se postula su solución mientras en geometría se enseña el uso de las soluciones. Se funda,

pues la geometría en la práctica mecánica y no es otra cosa que aquella parte de la mecánica universal que propone y demuestra con exactitud el arte de medir. [Newton 1987]

Newton conoce el problema desde una edad temprana, gracias a su investigación de los problemas clásicos de lugares geométricos, entre ellos el problema de Pappus; extrajo varios resultados importantes, al grado de que después los incorpora casi cual estaban redactados al *Principia*.

Casi por el mismo tiempo en que Newton realiza su estudio de la geometría griega, relee la *Geometría* de Descartes. Dieciseis años antes, por su propia cuenta, la había estudiado de forma minuciosa, lo introdujo a las matemáticas. Ahora él va a escribir en los márgenes complementarios cosas como *vix probo* (penosamente lo apruebo), *error*, y *Non Geom* (no es geometría). Probablemente en conexión con estas lecturas, Newton toma la posición de considerar 'errores en la *Geometría* de Descartes'. Una introducción a los problemas de lugares geométricos entre 1665-1670, abre con un frontal ataque contra Descartes y el análisis moderno. En el futuro, nunca se referirá a su debate con Descartes, aunque a menudo repita sus objeciones, al grado de llamar a la geometría cartesiana 'el análisis de las trampas (trucos, chapucerías) en matemáticas'. La controversia con Descartes influyó no sólo el contenido sino además la forma en que se desarrollan los *Principia*[1].

El primer libro de los *Principia* está operando con construcciones matemáticas exclusivamente, donde se hace abstracción sistemática de la masa en todos los llamados 'cuerpos', que por eso son puros puntos y no cuerpos efectivamente 'físicos'. No obstante, la matemática de Newton aparece impregnada por conceptos totalmente físicos, nacidos del legado de sus antecesores [Galileo, Kepler, Descartes].

El libro I contiene docenas de problemas sobre la determinación de secciones cónicas que satisfacen condiciones dadas: teniendo focos dados, pasando a través de puntos dados, tangentes a líneas dadas, etc. Además de los problemas propios de lugares geométricos. De éstos, primero trabajo sobre una serie de proposiciones que constituyen líneas rectas o círculos; éstos fueron requiriendo cada vez más el paso a lugares sólidos, o cónicas; llegando a establecer cuatro proposiciones de gran generalidad: dadas ciertas condiciones, una lista considerable de las cuales incluye, el lugar en cuestión será una línea recta, un círculo, una cónica (o lugar geométrico sólido) o una curva de mayor dimensión (un lugar geométrico lineal) [2].

Así, de los lugares geométricos planos, pasa a los lugares geométricos sólidos, entre ellos el problema de Pappus. Newton asimiló la solución analítica en los inicios de sus estudios matemáticos, por lo que afirmó que los geómetras griegos habían solucionado el problema[3]; no obstante que Descartes opinara lo contrario. En siete proposiciones, Newton ofrece su propia solución, en la cual reduce las cuatro líneas o lugar geométrico sólido a

1 Citado en [Westfall, 378-380]; Trinity College Library, Math 4, 336-44. *David Gregory's diary*, May 1708. Hiscock, p.42.

2 Citado en [Westfall, 1980, 378]; Loca plana, Mathematical Papers 4, 230-44. *Cf.* Math 4, 244-50 y sobre *Quaestionum solutio geometrica*, Math 4, 250-68.

3 Newton afirma que los griegos no fallaron al solucionar el problema de Pappus; sino que los comentadores, entre ellos Pappus, no tuvieron la capacidad para interpretar los resultados. Sin embargo, no existe ninguna evidencia que permita sustentar la creencia de Newton, tan es así, que después de un tiempo evitó cualquier comentario en relación a ello.

su primera construcción orgánica de las cónicas. Entonces, en seis proposiciones adicionales llega irremediablemente a enfrentar el problema de demostrar cuándo un problema de lugar geométrico es un lugar geométrico sólido[4]. El resultado de estos estudios será un pequeño tratado que esperaba publicar, pero que nunca salió a la luz.

Newton introduce una versión modificada de las primeras siete proposiciones de su tratado preliminar en el *Principia* (Libro I, Sección V, Lemas XVII-XXI, Proposición XXII). Manifiesta haberlas insertado para ejercitar su pensamiento matemático en público, en las cuales evita establecer formas de análisis moderno, dando un golpe a la jactancia de Descartes.

La solución de Newton a este 'famoso problema de los antiguos que concierne a cuatro líneas que comenzó con Euclides y fue llevado hasta Apolonio', es sintético más bien que analítico[5] [Boyer 1956, 140]. De hecho, afirma en sus *Mathematical Papers* [VII, 401]: El descubrimiento del lugar geométrico de tres y cuatro líneas fue, sin embargo, en dos partes: la primera analítica y la última sintética. Para él, el problema bien podía ser resuelto por una curva que representa el lugar geométrico de puntos que cumplen la propiedad, pero también podía serlo por la intersección de varios lugares geométricos. Por ello afirma que de las condiciones dadas del lugar geométrico se puede conocer de qué tipo es y cómo puede ser descrito, así en un problema particular se pueden encontrar aparte los lugares geométricos que son simples, y al intersectarlos determinar y describir el lugar geométrico general[6]. Sin duda, esto refleja que Newton tuvo en mente la generalización del problema de Pappus, además de las posibles variantes del mismo, como el que aparece en los *Mathematical Papers* [V, problema 12, nota 240, 202].

Resumiendo, es de aquí que surge la discusión metodológica de Newton a la solución del problema dada por Descartes, analicemos entonces la tan renombrada solución de Newton, buscando evaluar su adecuación a la tradición geométrica griega. Para ello necesitamos retomar, brevemente:

1) Algunos de los conceptos teóricos que permiten situarnos en dicho contexto, una exposición detallada se encontrará en el Apéndice II, con lo que se busca establecer a qué nos referimos cuando hablamos de la tradición geométrica griega y la diferencia de terminología respecto a Newton. Además de establecer el enfoque del problema que Newton le está dando;

2) una serie de herramientas donde se observa el uso newtoniano de los términos (1.2), para esclarecer qué elementos son necesarios al hacer la demostración y su uso; y

4 Westfall. Solutio problematis veterum de loco solido; Math 4, 282-320.

5 En el Principia muchas demostraciones son dadas por Newton de forma analítica y el resto sintéticamente, pero su demostración sintética equivale a su descubrimiento analítico que fue derivado por medio del método de fluxiones y momentos [Whiteside 1969, VII, 445-449]. No se tiene pruebas de que Newton haya logrado tener todos los resultados por este método y que luego haya decidido presentarlos en conexión con una visión geométrica, como muchos historiadores han establecido

6 Whiteside. 1969. Math 4, 226. *Cf.* D.T.Whiteside, "Introduction", *The Mathematical Works of Isaac Newton*, 2 vols, New York, 1964. Vease además J.J. Milne, "Newton's Contributions to the Geometry of Conics" en W.J. Greenstreet, ed., *Isaac Newton, 1642-1727*, London, 1927, pp. 96-104.

3) situarnos en el contexto del método (1.3 y 1.3.1), para establecer las diferencias respecto a cada método usado y así apreciar el trabajo de Newton (1.4 y 1.5).

Nótese que no basta con enumear las proposiciones a las que hace referencia Newton para la demostración, sino que se trata de buscar una secuencia conceptual, dentro del *Principia*, que nos lleve hasta el resultado esperado y, con ayuda de lo enumerado, finalmente a una conclusión.

La secuencia conceptual que se pretende realizar en los *Principia*, es análogo a lo que Newton hizo con la *Geometría* de Descartes, ya que es de observar que en el momento en que Newton revisa tal trabajo -ya asimilada la geometría griega-, encuentra ciertas diferencias conceptuales. Estas diferencias son análogas a las que se encontrarán a lo largo del *Principia*, ya que si Newton criticó a Descartes en cuanto a su apreciación conceptual y las herramientas utilizadas, también es de suponer que en Newton pasa lo mismo.

Si en Descartes el uso de instrumentos algebraicos fue criticado, en Newton también pueden ser criticados sus instrumentos mecánicos. Si en Descartes existen conceptos asociados a la identificación de puntos con posición en el plano, con expresiones algebraicas; en Newton existe el de puntos en movimiento; situaciones que no son concebibles dentro de la geometría griega.

Sin embargo, no basta tan sólo con puntualizar donde están las concordancias y diferencias del método newtoniano respecto a la tradición griega o a Descartes, sino que se debe encontrar la razón de esto; así como, dejar por un momento nuestra crítica presentista para valorar la demostración conforme a las condiciones y concepción propia de la época de la demostración, es por ello que se dan los apéndices I y II como guía histórica.

1.1 La demostración

La forma en que Newton enuncia el problema de Pappus se contrapone con la forma en que aparece tanto en la versión original de Pappus (veáse Apéndice II) como en la de Descartes (veáse Apéndice I), por presentarse en secciones y no como parte de un solo enunciado.

Newton inicia la Sección V del *Principia*, donde presenta la solución, con el Lema XVII, donde verifica la posibilidad de la situación geométrica descrita en el problema original, incluyendo ciertas variantes; para continuar con el Lema XVIII, donde da por hecho lo anterior y reafirma las condiciones necesarias para resolver el problema; hasta llegar al Lema XIX que corresponde ya al enunciado original salvo dos condiciones, que serán expuestas en los respectivos Corolarios 1 y 2, con lo que completa el problema. Veamos dicho desarrollo; las anotaciones pertinentes se harán entre corchetes para facilitar el seguimiento de la demostración.

> Lema XVII: Si de un punto P cualquiera de una sección cónica dada se trazan las líneas rectas PQ, PR, PS y PT según ángulos dados sobre los

lados prolongados AB, CD, AC y DB de un trapecio ABDC que se halla inscrito en esa sección, y trazadas las líneas una a cada uno, ocurrirá que el rectángulo PQ•PR de los lados opuestos AB y CD guardará con el rectángulo PS•PT de los otros dos lados opuestos AC y BD, una razón dada.

Dem.

Caso 1: Supongamos primero que las líneas trazadas hasta un par de lados opuestos son paralélas a cualquiera de los otros lados, por ejemplo: PQ y PR al lado AC, y PS y PT al lado AB. Además, sean dos de los lados opuestos, por ejemplo AC y BD paralélos entre sí. Entonces también la recta que bisecta esos lados paralélos será uno de los diámetros de la sección cónica y bisectará igualmente a RQ. Sea O el punto donde RQ es bisectada, y PO será una ordenada a ese diámetro. Prolónguese PO hasta K, de manera que OK sea igual a PO, y OK será una ordenada sobre el otro lado del diámetro (figura 1)[7].

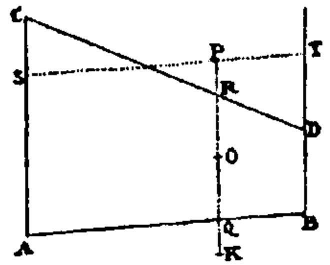


Figura 1

Puesto que los puntos A, B, P y K están situados en la sección cónica y PK corta AB en un ángulo dado, el rectángulo PQ•QK [PQK] (por las Propocisiones XVII, XIX, XXI y XXIII de libro III de las *Cónicas* de Apolonio) guardará con el rectángulo AQ•QB [AQB] una razón dada. Pero QK y PR son iguales, puesto que son diferencias iguales de OK, OP y OQ, OR; por lo cual son iguales los rectángulos PQK y PQ•PR; y en consecuencia el rectángulo PQ•PR está con el rectángulo AQB, esto es, con el rectángulo PS•PT en una razón dada. *Q.E.D.*

[Supongamos PQ, PR $\|$ AC y PS, PT $\|$ AB; sean AC $\|$ BD, entonces por las relaciones de paralelismo y las propiedades de las cónicas, CD bisectará a RQ y será uno de los diámetros de la sección cónica. Así, RO=OQ, OK=PO, QK=PR. Siguiendo el enunciado de la demostración, tenemos:

$PQ \bullet QK \approx AQ \bullet QB$

$PQ \bullet QK = PQ \bullet PR$

$\Rightarrow PQ \bullet PR \approx AQ \bullet QB = PS \bullet PT$]

7 Las figuras 1-16 son tomadas de [Newton 1982]. Nótese la ausencia de las secciones cónicas en las figuras aún cuando son mencionadas en el texto original.

Caso 2: Supongamos ahora que los lados opuestos del trapecio AC y BD no sean paralelos. Trazemos Bd paralela a AC y que corte tanto a la recta ST en t, como a la sección cónica en d. Unamos Cd, cortando PQ en r, y trácese DM paralela a PQ, cortando a Cd en M y a AB en N (figura 2). Entonces (debido a los triángulos semejantes BTt y DBN) Bt o PQ:Tt=DN:NB. Y así, Rr:AQ o PS=DM:AN.

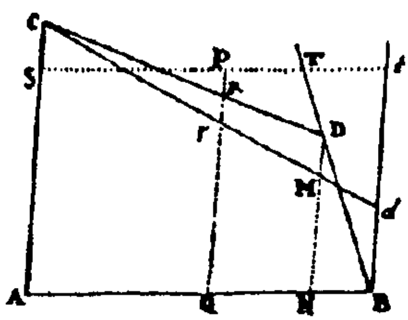


Figura 2

Luego, multiplicando antecedentes por antecedentes y consecuentes por consecuentes, como el rectángulo PQ•Rr es al rectángulo PS•Tt, del mismo modo el rectángulo NDM es al rectángulo ANB, y (por el caso 1) el rectángulo PQ•Pr es al rectángulo PS•Pt y, dividiendo también es el rectángulo PQ•PR al rectángulo PS•PT. *Q.E.D.*

[De los triángulos semejantes, BTt ≈ DBN, se obtiene Bt o PQ:Tt=DN:NB, pero entonces por la manera en que se construyó la figura y las relaciones anteriores, se tiene Rr:AQ o PS=DM:AN. Siguiendo el enunciado de la demostración, PQ•Rr:PS•Tt y NDM:ANB. Y así, al reducir al caso anterior, PQ•Pr:PS•Pt y PQ•PR:PS•PT]

Caso 3: Supongamos por último, que las cuatro líneas PQ, PR, PS, PT no son paralélas a los lados AC, AB, sino que son inclinados respecto a ellos.

En su lugar trácese Pq y Pr paralelas a AC; así como Ps y Pt paralelas a AB (figura 3); puesto que los ángulos de los triángulos PQq, PRr, PSs y PTt están dados, las razones de PQ a Pq, PR a Pr, PS a Ps, PT a Pt estarán dadas también; y por tanto las razones compuestas PQ•PR a Pq•Pr y PS•PT a Ps•Pt estarán dadas. Pero, a partir de lo antes demostrado está dada la razón de Pq•Pr a Ps•Pt; luego, también lo estará la razón de PQ•PR a PS•PT. *Q.E.D.*

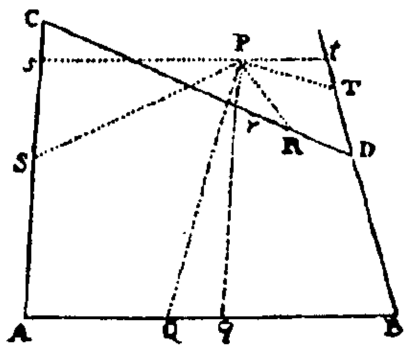


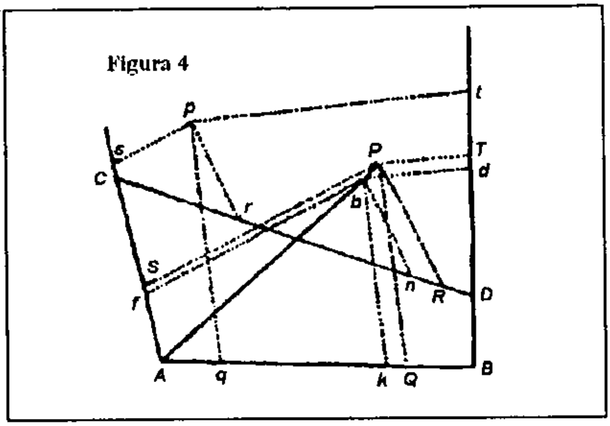
Figura 3

[Por construcción, PQ:Pq, PR:Pr, PS:Ps, PT:Pt ⇒ (por composición de razones) PQ•PR:Pq•Pr, PS•PT:Ps•Pt ⇒ (por los casos 1 y 2) Pq•Pr ≈ Ps•Pt ⇒ PQ•PR ≈ PS•PT. Este desarrollo corresponde a la parte analítica de la solución, según el criterio griego adoptado también por Newton, véanse Apéndices I y II. Es decir, se están deduciendo las propiedades partiendo de la figura, o de condiciones dadas].

Lema XVIII: Suponiendo las mismas cosas, si el rectángulo PQ•PR de las líneas trazadas a dos lados opuestos del trapecio, guarda con el rectángulo PS•PT de las trazadas a los otros dos lados, una razón dada, entonces el punto P desde donde se trazan dichas líneas es tangente a la sección cónica descrita en torno al trapecio.

Supongamos una sección cónica descrita por los puntos A, B, C, D e infinitos puntos P, como por ejemplo p. Afirmo que el punto P siempre será tangente a esta sección. Si se niega, únase AP cortando a esta sección cónica en algún otro lugar distinto de P si es posible, como por ejemplo en b (figura 4). Por consiguiente, si desde esos puntos p y b, se trazan sobre los lados del trapecio según ángulos dados las rectas pq, pr, ps, pt y bk, bn, bf, bd; tendremos (por el Lema XVII) que como bk•bn es a bf•bd, así es pq•pr a ps•pt, y así (por hipótesis) como PQ•PR a PS•PT. Y debido a la semejanza de los trapecios bkAf y PQAS, como bk a bf así PQ a PS. Por lo cual, dividiendo los términos de la proposición precedente por los correspondientes términos de ésta, tendremos bn a bd como PR aPT. En consecuencia los trapecios equiángulos Dnbd y DRPT son semejantes y sus diagonales Db y DP coinciden. Y de este modo, b cae en la intersección de las rectas AP y DP, y por tanto coincide con P. Por ello, sea cual sea el punto donde se suponga P caerá en la sección cónica supuesta. *Q.E.D.*

Figura 4



[Siguiendo el enunciado de la demostración tenemos, por el Lema VII, que: bk•bn:bf•bd y Pq•Pr:Ps•Pt, luego, por hipótesis, PQ•PR:PS•PT. Pero, por ser semejantes los trapecios bkAf≈PAQS⇒ (propiedades de trapecios semejantes) bk:bf≈PQ:PS. Así, desarrollando lo enunciado por Newton:

$$\Rightarrow \frac{bk \bullet bn}{bk} : \frac{bf \bullet bd}{bf} \approx \frac{PQ \bullet PR}{PQ} : \frac{PS \bullet PT}{PS}$$

⇒ bn:bd≈PR:PT

⇒ Dnbd≈DRPT ⇒ Db = DP (diagonales)

⇒ b ϵ AP∩DP ⇒ b=P]

Corolario: De aquí que, si desde un punto común P se trazan tres rectas PQ, PR y PS sobre otras tres dadas en posición (AB, CD y AC), una a cada una y según ángulos dados, y el rectángulo PQ•PR formado por dos de las trazadas es al cuadrado de la tercera PS, según una razón dada, el punto P desde el que fueron trazadas estará ubicado en la sección cónica tangente a las líneas AB, CD en A y C; y viceversa [por el Lema XVIII]. Pues permaneciendo idéntica la posición de las tres rectas AB, CD y AC hágase que la línea BD se aproxime y coincida con AC [uso de puntos en movimiento]; luego, hágase lo mismo con PT hacia PS; y entonces el rectángulo PS•PT devendrá en PS^2 y las rectas AB y CD que antes cortaban la curva en los puntos A y B, C y D ya no cortan sino que tocan tan sólo la curva en esos puntos coincidentes, luego son tangentes a ellos.

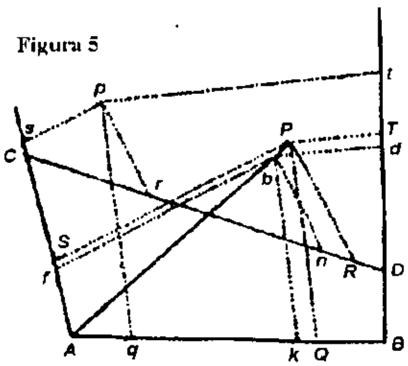
[Esta parte corresponde al lugar geométrico de tres líneas, presentado como un caso particular del lugar geométrico de cuatro líneas cuando dos de ellas coinciden. Además, aunque sigue perteneciendo a la parte analítica de la solución según la tradición griega, Newton usa el argumento moderno de puntos en movimiento; retomaremos esto en la discusión].

ESCOLIO

En este Lema el nombre de la sección cónica debe entenderse en sentido amplio, abarcando tanto la sección rectilínea a través del vértice del cono como la circular paralela a la base. Porque si el punto p resulta encontrarse con una recta, por la cual son unidos los puntos A y D, o C y B, la sección cónica se tornará en dos rectas, una de las cuales es la recta que une los otros dos de los cuatro puntos

[porque la sección cónica deberá pasar por los puntos A, B, C, D y P; y si A, D y P están en una recta, sólo queda que B y C estén en otra].

Figura 5



Si los dos ángulos opuestos del trapecio son, sumados, iguales a dos rectos, y si las cuatro líneas PQ, PR, PS y PT son trazadas hasta sus lados en ángulos rectos, o en cualesquiera otros ángulos iguales, y el rectángulo PQ•PR bajo dos de las líneas trazadas PQ y PR es igual al rectángulo PS•PT bajo las otras dos PS y PT, la sección cónica se convertirá en un círculo. Y lo mismo sucederá si las cuatro líneas son trazadas en cualquier ángulo, y el rectángulo PQ•PR, bajo un par de líneas trazadas, es al rectángulo PS•PT bajo el otro par como el rectángulo bajo los senos de los ángulos S y T, en que están trazadas las dos últimas líneas PS y PT, al rectángulo bajo los senos de los ángulos Q y R, en que están trazadas las dos primeras PQ y PR

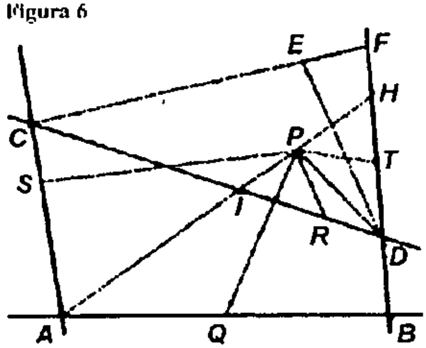
[porque los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito en la circunferencia son suplementarios, se tiene que $\measuredangle BAC + \measuredangle BDC = 180°$, $\measuredangle ACD + \measuredangle ABD = 180°$, y

PQ•PR = PS•PT. Además, PQ•PR:PS•PT = (sen ∡ S • sen ∡ T):(sen ∡ Q • sen ∡ R) también lo cumple. Para una demostración exhaustiva de esto véase Whiteside. 1969. *Mathematical Papers* VI, 249, nota 32].

En todos los otros casos el lugar del punto P será una de las tres figuras que caen frecuentemente bajo el nombre de las secciones cónicas. Pero podemos sustituir el trapecio ABCD por una figura cuadrilateral cuyos dos lados opuestos se cruzan entre sí como diagonales. Y uno o dos de los cuatro puntos A, B, C, D pueden llevarse al infinito, con lo que los lados de la figura que convergen en dichos puntos resultarán paralelos; y en tal caso la sección cónica pasará por los demás puntos mientras que en la dirección de las paralelas irá hacia el infinito.

Lema XIX: Hallar el punto P a partir del cual, si cuatro líneas rectas PQ, PR, PS, PT son trazadas hasta otras cuatro AB, CD, AC, BD dadas en posición, una a una y con ángulos dados, el rectángulo PQ•PR comprendido entre dos cualesquiera de las líneas trazadas mantendrá con el rectángulo PS•PT, comprendido entre las otras dos, una razón dada.

Figura 6



Supongamos que las líneas AB y CD, hasta las que se trazan las dos rectas PQ y PR, que contienen uno de los rectángulos, se crucen con otras dos líneas dadas en posición, en los puntos A, B, C, y D. Desde uno de ellos, digamos A, tracese la recta AH en la que queremos hallar el punto P. Corte esta línea a las opuestas BD y CD, a saber, a BD en H y a CD en I; y por estar dados todos los ángulos de la figura estarán dadas las razones de PQ a PA y de PA a PS, y por lo tanto la de PQ a PS estará dada también (figura 6).

Esta razón, tomada como un divisor de la razón dada de PQ•PR a PS•PT, proporciona la razón de PR A PT, y multiplicando las razones dadas de PI a PR, y de PT a PH se obtendrá la razón de PI a PH, y en consecuencia, el punto P. *Q.E.D.*

[Por construcción, PQ:PA, PA:PS ⇒ PQ:PS. Si se componen las razones cono indica Newton, entonces:

$$\frac{PQ\bullet PR}{PQ}:\frac{PS\bullet PT}{PS} \Rightarrow PR:PT$$

Y multiplicando las razones, $PI:PR\bullet PT:PH \Rightarrow \frac{PI\bullet PT}{PR\bullet PH} = \frac{PI\bullet PT}{PH\bullet PR}$ determinando el punto p]

Corolario 1: De aquí que también se pueda trazar una tangente a cualquier punto D del lugar de todos los puntos P.

Pues la cuerda PD, cuando coinciden P y D, esto es, cuando AH es trazada a través del punto D, resulta una tangente. En tal caso la razón última de las líneas evanescentes IP y PH, se encontrará como se ha visto más arriba. Por lo mismo, trácese CF, paralela a la propia AD, tal que corte a BD en F y córtese en E según la dicha razón última, DE será entonces tangente dado que CF y la *evanescente* IH son paralelas y cortadas de modo semejante en E y P.

Corolario 2: De aquí también puede determinarse el lugar de todos los puntos P.

Tracemos por uno cualquiera de los puntos A, B, C, D, por ejemplo A, la tangente AE al lugar de todos los puntos [por el Corolario 1] y por otro punto cualquiera B, tracemos una paralela BF a la tangente y que corte al lugar en F. Por el Lema XIX se hallará el punto F. Bisectando a BF en G, y trazando la línea indefinida AG, ésta será la posición del diámetro del cual son ordenadas BG y FG. Hágase que AG encuentre al lugar en H, y entonces AH será su diámetro o *latus transversum*, respecto del cual el *latus rectum*[8] será como BG^2 a AG•GH.

[En las cónicas si 2a es la longitud del eje que pasa por un punto y 2b la del conjugado, el *latus transversum* será igual a 2a, y el *rectum* igual a $2b^2/a$, si la cónica es una elipse o una hipérbola. Con respecto a estos dos ejes la ecuación canónica de la elipse o hipérbola es

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,\ \text{por tanto,}\ \frac{+y^2}{(a+x)(a-x)} = \frac{b^2}{a^2}$$

$$= \frac{2b^2/a}{2a} = \frac{L_r}{L_t} = \frac{\textit{latus rectum}}{\textit{latus transversum}},$$

y el cuadrado de la ordenada será al producto de los segmentos determinados en el eje como el *latus rectum* al *latus transversum*, propiedad de ambas cónicas que Newton utilizará frecuentemente. Esto es tomado de lo que Apolonio establece en las proposiciones 11, 12, 13 y 21 del Libro I de las *Cónicas*. Entonces de b^2:AG•GH $= L_r:L_t \Rightarrow BG^2$:AG•GH como $L_r:L_t$].

Si AG nunca cortase al lugar de los puntos, permaneciendo la línea AH infinita, entonces el lugar será una parábola y su *latus rectum* correspondiente al diámetro AG será BG^2/AG.

[Esto se deduce de dos formas: 1) Por lo anterior, $L_r:L_t$ como $BG^2:AG \bullet GH$ es válido para una elípse; pero una parábola puede considerarse como el límite de una familia de elipses cuando el eje tiende al infinito, luego la relación $L_r:L_t$ como BG^2/AG se da. 2) Sabemos que si de un punto cualquiera de la parábola se traza una perpendicular al eje, entonces ésta es media proporcional entre el lado recto y la porción del eje comprendida entre el vértice y el pie de la perpendicular. Esto es $\frac{L_r}{BG} : \frac{BG}{AG} \approx L_r : \frac{BG^2}{AG}$]

Pero si corta al lugar en algún punto, entonces el lugar geométrico será una hipérbola cuando los puntos A y H estén situados al mismo lado del punto G; y una elipse cuando G esté entre A y H [por las propiedades de las cónicas]; salvo cuando por casualidad se de que el ángulo ABG sea recto y al mismo tiempo BG^2 será igual al rectángulo AGH, caso en el que tendremos un círculo.

Hasta aquí, hemos visto como Newton desarrolló por secciones el problema general a partir de la secuencia de Lemas XVII-XIX, hasta llegar al Corolario 2 donde se da la solución del problema. Los Lemas XVII y XVIII corresponden a la parte analítica de la solución, y el Lema XIX a la parte sintética. Referente a los Corolarios 1 y 2, en el 1 hace uso del concepto de puntos en movimiento; mientras en la argumentación del 2 reafirma la idea del primero. Esto es importante ya que aún así, el Corolario 2 es presentado conforme a la tradición de la geometría griega, tal y como él afirma:

> Y de este modo hemos dado en este Corolario, no por cálculo analítico sino por composición geométrica como exigían los antiguos, una solución para el famoso problema por ellos planteado de las cuatro líneas, iniciado por Euclides y continuado por Apolonio.

Más adelante discutiremos ésto. Ahora bien, por la forma en que Newton presentó tales resultados, requerí de hacer acotaciones en el desarrollo de las demostraciones -en corchetes cuadrados-, insertando elementos que permitieran comprender la forma en que conceptos, tales como: puntos en movimiento, razones últimas de cantidades evanescentes[9] y propiedades de las cónicas, fueron por él comprendidos. Por ello, las herramientas empleadas hasta ahora requieren de una revisión más profunda[10].

8 *latus rectum* traduce el ὀρθία de Apolonio, el parámetro (Παρ' ἣν δύνανται) de la cónica dependiente de las dimensiones del cono y de la posición con respecto a él del plano que lo secciona.

9 Por cantidades evanescentes debe entenderse aquellas diferencias de magnitudes que pueden hacerse tan pequeñas como se requiera, es decir, son diferencias de puntos que paulatinamente se acercan tanto que su diferencia tiende a cero.

10 A partir de aquí, denominaremos herramientas al conjunto de resultados preliminares (lemas, corolarios, teoremas, etc.) necesarios para la demostración de un enunciado específico.

1.2 Las herramientas

Si nos remontamos a la Sección I del *Principia*, encontramos que en el Lema XI emplea por primera vez el uso de razones y proporciones para cantidades evanescentes, es decir, conjuga los conceptos modernos de tiempo, movimiento y trayectorias como conjuntos de puntos con los propios de la geometría griega. En la Sección II, la Proposición IV, Teorema IV presenta una demostración interesante que conjuga los razonamientos geométricos con elementos físicos; al igual que la Proposición VI, Teorema V, donde se conjugan fuerza, movimiento, tiempo, distancias y áreas. Finalmente el Lema XVI de la Sección IV presenta una versión puntual del problema a resolver. Veamos las herramientas mencionadas.

Los resultados siguientes son tomados del Libro primero (Del movimiento de los cuerpos), Sección primera (Del método de las razones primeras y últimas por cuyo medio se demuestra lo que sigue), del *Principia* [Newton 1987, 166-167].

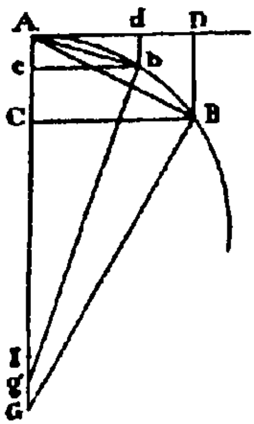


Figura 7

Lema XI: La subtensa[11] evanescente del ángulo de contacto, en todas las curvas que tienen curvatura finita en el punto de contacto, es al fin como el cuadrado de la subtensa del arco contiguo.

Demostración:

Caso 1: Sea dicho arco AB, la tangente AD. Sea BD la subtensa del ángulo de contacto perpendicular a la tangente, y AB la subtensa del arco. Trácese $AG \perp AD$ y $BG \perp AB$, que se encuentra en G (figura 7).

Muévanse después los puntos D, B, G hacia d, b, g, y sea I la última intersección de BG y AG cuando D y B se acercan hacia A. Es evidente que la distancia GI puede ser más pequeña que una distancia dada.

Por otra parte (por la naturaleza de los círculos que pasan por los puntos A, B, G, y A, b, g), $AB^2 = AG \bullet BD$, $Ab^2 = Ag \bullet bd$,

[Como el triángulo ABG está inscrito en una circunferencia, entonces $AB^2 = AG \bullet AC$, pero $AC = BD \Rightarrow AB^2 = AG \bullet BD$. Análogo para $Ab^2 = Ag \bullet Ac = Ag \bullet bd$]

y por tanto la razón de AB^2 a Ab^2 se compone de las razones de AG a Ag y BD a bd. Pero como GI puede tomarse menor que cualquier longitud dada, puede hacerse que la razón AG a Ag diste menos que la igualdad de una cantidad dada y, por lo tanto, que la razón AB^2 a Ab^2 diste menos de la razón de BD a bd que una cantidad dada. Luego por el lema I[12], la razón última entre AB^2 y Ab^2 es la razón última entre BD y bd. *Q.E.D.*

Caso 2: Inclínese BD sobre AD en un ángulo dado cualquiera y la razón última de BD a bd siempre será la misma de antes y por tanto, la misma que AB^2 a Ab^2. *Q.E.D.*

Caso 3: Y aunque no esté dado el ángulo D, pero la recta BD converja a un punto dado o bien se construya con otra regla cualquiera, sin embargo los ángulos D, d se construirán con una ley común y siempre tenderán a la igualdad y se acercarán entre sí más que una diferencia dada y, en consecuencia, al fin serán iguales, por el Lema I, y por lo tanto las líneas BD, bd están entre sí en la misma razón. *Q.E.D.*

Corolario 1: De donde, como las tangentes AD, Ad, de los arcos AB, Ab y sus senos BC, bc sean al final iguales a las cuerdas AB, Ab, sus cuadrados serán al fin como las subtensas BD, bd.

[Del lema I, AB^2 y $Ab^2 \approx BD$ y $bd \rightarrow AD^2 - CB^2$ y $Ad^2 - cb^2 \approx Bd$ y bd]

Corolario 2: Tales cuadrados serán a sí mismo al final como los senos versos (las sagitas[13]) de los arcos que bisectan a las cuerdas y convergen en un punto dado.
Puesto que dichas sagitas son como las subtensas BD, bd.

[BD y bd $\approx$ BC y bc $\approx$ AB^2 y Ab^2 $\approx$ AD^2 y Ad^2 $\approx$ BC^2 y bc^2].

11 Segmento de recta que se forma al unir los extremos de un arco o de una línea quebrada.

12 Las cantidades, así como las razones de cantidades, que tienden a la igualdad constantemente en un cierto tiempo finito y antes del límite de dicho tiempo se aproximan mutuamente más que una diferencia dada, al final se hacen iguales.

13 Segmento del diámetro, comprendido entre la cuerda perpendicular a éste y el diámetro. Porción del radio comprendida entre el punto medio de una cuerda y la circunferencia.

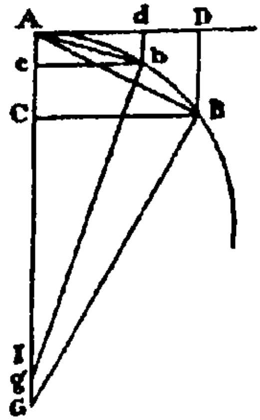


Figura 8

Corolario 3: Y, por consiguiente, la sagita (el seno verso) es como el cuadrado del tiempo en que un cuerpo describe el arco a una velocidad dada.

[cb y CB ≈ Ab^2 y AB^2, donde Ab y AB son el tiempo en que se describe el arco a una velocidad dada].

Corolario 4: Los triángulos rectilíneos ADB, Adb están al fin en razón cúbica de los lados AD, Ad y en razón de la potencia 3/2 (sesquiplicada) de los lados DB, db; por cuanto que se da la existencia de la razón compuesta de los lados AD y DB, Ad y db. Igualmente los triángulos ABC, Abc están al final en la razón cúbica de los lados BC, bc (figura 8).

Llamo razón sesquiplicada a la subduplicada de la triplicada, que se compone pues de la simple y la subduplicada[14].

[$\blacktriangle ADB : \blacktriangle Adb = AD^3 : Ad^3 = DB^{3/2} : db^{3/2}$, se deriva de $\blacktriangle ADB : \blacktriangle Adb = AD \bullet DB : Ad \bullet db$, y de la proporción última $AD^2 : Ad^2 = DB : db$. Así también se obtiene en última instancia $\blacktriangle ABC : \blacktriangle Abc = BC^3 : bc^3$.]

Corolario 5: Y puesto que DB, db son al final paralelas y en razón cuadrada de las mismas AD, Ad, las áreas curvilineas últimas ADB, Adb serán (por la naturaleza de la parábola) dos tercios de los triángulos rectilíneos ADB, Adb; y los segmentos AB, Ab serán un tercio de los mismos triángulos. Y en consecuencia, dichas áreas y dichos segmentos estarán en razón triplicada [cubos], ya de las tangentes AD, Ad, ya de las cuerdas y arcos AB, Ab.

Tales resultados nos introducen a la forma en que Newton manejará las razones y proporciones de cantidades evanescentes como si fueran cantidades determinadas, de la misma forma en que los griegos manejan las suyas. De hecho, él mismo especifica que a partir de este momento considerará ambas como iguales, y que la introducción de estas razones más que salirse del marco de la tradición griega, la amplian; evitando así demostraciones largas por reducción al absurdo.

Si dentro del mismo Libro I, pasamos ahora a la Sección II (Sobre el descubrimiento de las fuerzas centrípedas), encontramos resultados importantes por la introducción de argumentos sobre razón y proporción en cuerpos físicos. [Newton 1987, 181]

> Proposición IV, Teorema IV: Las fuerzas centrípedas de los cuerpos que mediante movimientos regulares describen círculos distintos, tienden a los centros de los mismos círculos; y son entre si como el cuadrado de los arcos descritos en tiempos iguales divididos respectivamente por los radios de los círculos.
>
> Demostración: Estas fuerzas tienden a los centros de los círculos, por la Proposición II[15] y por el Corolario 2[16] de la Proposición I, y son entre sí como los senos versos de los arcos mínimos descritos en tiempos iguales (por el Corolario 4 de la Proposición I), esto es como los cuadrados de los

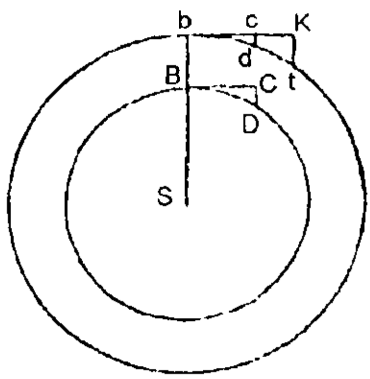


Figura 9

14 Duplicata ratio = razón cuadrada = $(a/b)^2$; Subduplicada ratio = raíz cuadrada de la razón = $\sqrt{a/b}$; Triplicada ratio = razón cúbica = $(a/b)^3$; Subtriplicada ratio = raíz cúbica de la razón = $\sqrt[3]{(a/b)}$; Sesquiplicada ratio = potencia 3/2 de la razón = $(a/b)^{3/2} = \sqrt[2]{(a/b)^3}$; etc. [Newton 1987, 168, nota 15]

15 Todo cuerpo que, unido por un radio al centro de otro cuerpo que se mueve de cualquier modo, describe alrededor de dicho centro áreas proporcionales a los tiempos, es urgido por una fuerza compuesta por la fuerza centrípeda tendiente a ese otro cuerpo y de toda la fuerza aceleratriz con la que es urgido el otro cuerpo.

16 Si las cuerdas AB, BC, de dos arcos sucesivamente descritos en tiempos iguales por el mismo cuerpo en espacios libres de resistencia, se completan en un paralelogramo ABCV, la diagonal BV de dicho paralelogramo pasará a través del centro de fuerzas, si es prolongada en ambos sentidos, en la posición que adquiere en última instancia cuando los arcos son disminuidos hasta lo infinito (figura 11).

mismos arcos divididos por los diámetros de los círculos (según el Lema VII); y en consecuencia, estos arcos son como los arcos descritos en cualesquiera tiempos iguales y los diámetros son como los radios, las fuerzas serán como los cuadrados de cualesquiera arcos descritos en el mismo tiempo divididos por los radios de los círculos. *Q.E.D.*

Esta demostración no es tan interesante como la que se presenta en la siguiente versión:

Una vez construida la figura, la demostración se cifra en que la figura tKb es semejante a la figura DCB (figura 9),

> < <y por el Lema V [17], la línea CD será a la línea Kt como el arco Bd al arco bt: o sea, por el Lema XI (véase página 18), la línea naciente tK a la línea naciente dc como bt^2 a bd^2;

[Por construcción, tK y dc $\approx$ bt^2 y bd^2],

> y, por tanto, la línea DC a la línea naciente dc como BD•bt a bd^2

$$\begin{array}{ll} [tK \text{ y } dc & \approx bt^2 \text{ y } bd^2 \Rightarrow \text{(semejanza)} \\ \downarrow & \downarrow \\ DC & BD^2 \end{array}$$

Reescribiendo, DC y dc $\approx$ BD•bt y bd^2];

> a lo que es igual, como $\frac{BD \bullet bt}{Sb}$ a $\frac{bd^2}{Sb}$ y por ende

[al ser iguales las razones bt/Sb y BD/SB]

> como $\frac{BD^2}{SB}$ a $\frac{bd^2}{Sb}$. *Q.E.D.* > >

Nótese la abstracción de los componentes físicos de los cuerpos, y su manejo tanto en la primera como en la segunda demostración. Justamente esta última es un reflejo de lo que Newton especifica como la reducción de lo físico y lo mecánico a la geometría.

Continuando con resultados importantes por la notación y la introducción de razones para puntos en movimiento, dentro del Libro I, Sección II, están:

> Proposición VI, Teorema V: Si en un espacio sin resistencia un cuerpo gira en una órbita alrededor de un centro inmóvil y describe en un tiempo muy pequeño un arco naciente en ese instante y el seno verso (la sagita) del arco se supone trazado bisectando la cuerda y, prolongada, pase por el centro de fuerzas: la fuerza centrípeda en el punto medio del arco será directamente como el seno verso (la sagita) e inversamente como el cuadrado del tiempo.

16 Todos los lados homogéneos de figuras semejantes son proporcionales entre sí tanto si son rectilíneas como si son curvilíneas; y las áreas son como el cuadrado de los lados.

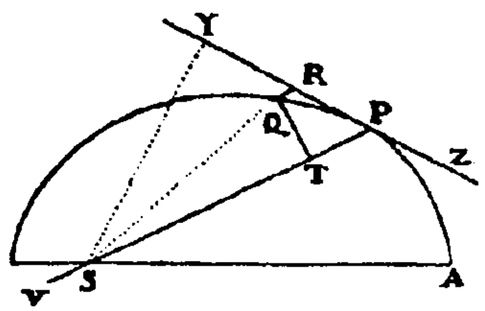


Figura 10

Demostración:

Pues el seno verso en un tiempo (momento) dado es como la fuerza (por el Corolario 4 de la Proposición I [18]), y al aumentar el tiempo según una razon cualquiera, el seno verso, por el aumento del arco según la dicha razón, aumenta según la misma razón cuadrada (por los Corolarios 2 y 3 del Lema XI[19]); y, por tanto, es como la fuerza y el cuadrado del tiempo.

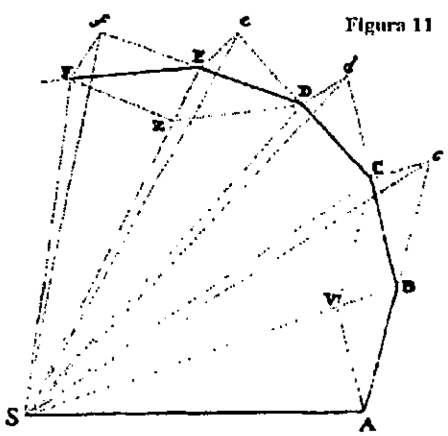


Figura 11

Dividase por el cuadrado del tiempo a ambos

$[cb/pb^2 = CA/PA^2]$

y la fuerza será directamente como el seno verso (la sagita) e inversamente como el cuadrado del tiempo

$[BD/PA^2 = bd/Pb^2]$.

También se puede demostrar esto facilmente por el Corolario 4 del Lema X[20].

Corolario 1: Si un cuerpo P gira en torno a un centro S describe la curva APQ; en la cual la recta ZPR es tangente a dicha curva en un punto cualquiera P y desde cualquier otro punto Q de la curva se traza QR paralela a la distancia SP, que encuentra a la tangente en R; y trácese QT perpendicular a la línea SP (figura 10); entonces la fuerza centrípeda será inversamente como el sólido $\frac{SP^2 \bullet QT^2}{QR}$;

siempre que se considere la magnitud del sólido alcanzada en el último momento, cuando coinciden los puntos P y Q. Pues QR es igual a la sagita (seno verso) del doble del arco QP en cuya mitad se halla P, y el doble del triángulo SQP o SP•QT es proporcional al tiempo en que es descrito dicho doble arco; por tanto, puede tomarse como representación del tiempo.

La prueba según una versión preliminar de Newton es la siguiente:

Pues en la figura infinitamente pequeña QRPT la línea naciente QR (figura 12), en un tiempo dado es como la fuerza centrípeta (por la Ley II) y con fuerza dada como el cuadrado del tiempo (por el Lema X), y por tanto, no dado ninguno, como la fuerza centrípeta y el cuadrado del tiempo conjuntamente, y por tanto, la fuerza centrípeta es directamente como la línea QR y como el cuadrado del tiempo inversamente.

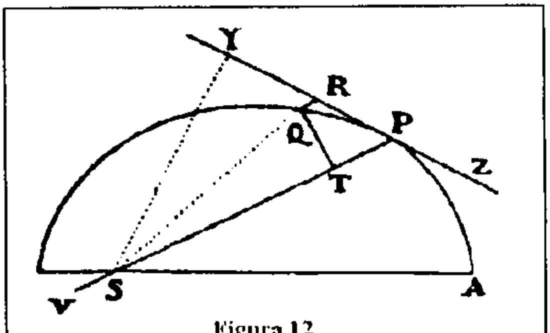


Figura 12

18 Las fuerzas por las que cualesquiera cuerpos en espacios no resistentes son desviados de trayectorias rectilíneas y constreñidos a trayectorias curvas, son entre sí como los senos versos de arcos descritos en tiempos iguales, convergentes al centro de fuerzas, sagitas y bisectantes de las cuerdas de dichos arcos mientras éstos disminuyen *in infinitum*. Pero tales senos versos son las mitades de las diagonales de las que [se] habla en el Corolario 3. [Las diagonales son VB, EZ, véase la figura 11].

19 Lema XI. Corolario 2: Tales cuadrados [AB^2 y Ab^2 = BD y bd] serán al final como los senos versos (las sagitas) de los arcos que bisectan a las cuerdas y convergen en un punto dado. Puesto que dichas sagitas son como las subtensas BD, bd. [BD y bd = BC y bc = AB^2 y Ab^2 = AD^2 y Ad^2 = BC^2 y bc^2]. Corolario 3: Y, por consiguiente, la sagita (el seno verso) es como el cuadrado del tiempo en que un cuerpo describe el arco a una velocidad dada [cb y CB = Ab^2 y AB^2, donde Ab y AB son el tiempo en que se describe el arco a una velocidad dada].

20 Lema X: Los espacios que un cuerpo recorre empujado por una fuerza cualquiera finita tanto si dicha fuerza es determinada y siempre la misma, como si es continuamente creciente o decreciente, son al comienzo del movimiento como los cuadrados de los tiemp   Corolario 4: Y por tanto, las fuerzas están al comienzo del movimiento, en razón directa a los espacios descritos y en razón inversa a los cuadrados de los tiempos.

Pero el tiempo es como el área SPQ o su doble SP•QT

[A_{SQP} = (SP•QT)/2 o su doble SP•QT],

esto es como SP y QT conjuntamente, y por tanto la fuerza centrípeta es como QR directamente y $SP^2 \bullet QT^2$ inversamente, esto es, como $SP^2 \bullet QT^2/QR$ inversamente. *Q.E.D.*

Corolario 2: Por un razonamiento semejante, la fuerza centrípeta es inversamente como el sólido $SY^2 \bullet QP^2$ /QR, si SY es una perpendicular desde el centro de fuerza a PR, la tangente de la órbita. Porque los rectángulos SY•QP, SP•QT son iguales.

[$A_{(SY)(QP)}$ = (longitud de arco)(radio)/2 = (*l*•r) /2 = SP•(*l*/2) = SP•(QP/2) = SP•QT]

Corolario 3: Si la órbita es un círculo, o corta concéntricamente un círculo, esto es, contiene un ángulo muy pequeño de contacto o de sección con el círculo y tiene la misma curvatura y el mismo radio de curvatura en el punto P; y si la cuerda PV del círculo es trazada desde el cuerpo por el centro de fuerzas; la fuerza centrípeta será inversamente como el sólido $SY^2 \bullet PV$.

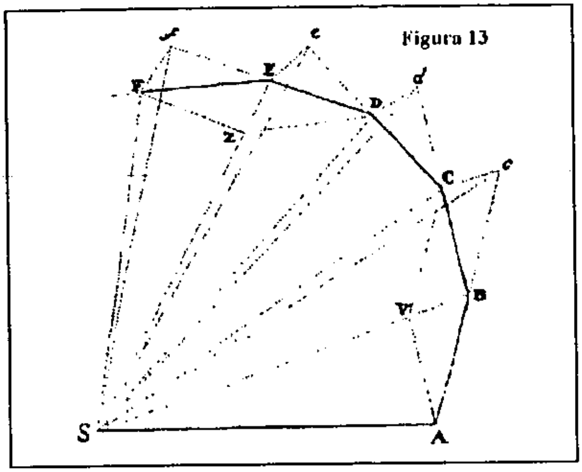
Porque PV es $\frac{QP^2}{QR}$

Corolario 4: Supuesto esto, la fuerza centrípeta es como el cuadrado de la velocidad directamente; y dicha cuerda inversamente. Pues la velocidad es inversamente como la perpendicular SY, por el Corolario 1 de la Proposición I[21].

[Pues la velocidad en los puntos A, B, C, D, E, es como las bases AB, BC, CD, DE, EF de los triángulos iguales; y estas bases son inversamente como las perpendiculares trazadas a ellas. Véase figura 13].

Corolario 5: De aquí que, si se da una figura curvilínea APQ y se da en ella también el punto S al que se dirige continuamente la fuerza centrípeta, se puede hallar la ley de la fuerza centrípeta por la que un cuerpo P es retenido en el perímetro de dicha figura, desviado continuamente de la trayectoria recta, figura que resultará descrita al girar. Efectivamente se puede hallar calculando o bien el sólido $SP^2 \bullet QT^2$ /QR, o bien el sólido $SY^2 \bullet PV$ inversamente proporcional a dicha figura.

21 La velocidad de un cuerpo atraído hacía un centro inmovil en un espacio no resistente, es inversamente como la perpendicular trazada desde tal centro a la tangente de la curva.



Una vez más, nótese la forma de manejar las razones y proporciones de cantidades evanescentes y las igualdades a las que se llega como cantidades determinadas.

En el Lema XVI de la Sección IV (De cómo hallar órbitas elípticas, parabólicas e hiperbólicas a partir de un foco dado) [Newton 1987], existe un detalle interesante, en esta secuencia de herramientas, por lo cercano que resulta con el problema a estudiar, donde se muestra la solución puntual; es decir, es el problema general para el caso en que sólo se consideran puntos, mientras que en el enunciado general se manejan rectas; véase Lema XIX. Aunque no daremos la demostración es importante como antecedente conceptual.

> Lema XVI: Trazar desde tres puntos dados a otro cuarto punto no dado, tres rectas cuyas diferencias o se dan o son nulas.

Finalmente, en esta secuencia llegaríamos a la Sección V (La obtención de órbitas cuando no se da ninguno de los focos), donde se encuentran insertos los Lemas anteriormente citados. Hasta aquí, el problema de Pappus está resuelto de acuerdo a la concepción newtoniana del método de fluxiones y momentos (ver 1.3.1), y si retomamos el criterio de Newton (véase pág. , cita), incluso estaría resuelto conforme a la tradición geométrica griega. Pero, es justamente la adecuación a tal tradición la que se cuestiona. Luego, la discusión que estamos insertando es la apreciación y diferencia metodológica y conceptual que tiene Newton sobre la geometria griega, ya que presenta el concepto de puntos en movimiento, mientras que la griega comprende puntos estáticos; asimismo, mientras en Newton la construcción de curvas puede generarse por distintos instrumentos[22], en los griegos se restringe al uso de regla y compás. De ahí se deriva la consecuencia de si el problema fue o no resuelto de acuerdo a la concepción griega. Estas diferencias no son sustentables en la creencia de algunos teóricos, ya que afirman que los puntos en movimiento están implícitos en el pensamiento geométrico griego, y que los instrumentos utilizados por Newton no degeneran a esta tradición clásica, sino que la enriquecen. Veamos esto detalladamente.

1.3 El método newtoniano

En el método geométrico de Newton podemos encontrar algunos aspectos que forman parte de la geometría griega y de la geometría contemporánea; aunque las diferencias conceptuales en cada una de ellas es notoria:

Aspectos de la tradición geométrica griega

1.- Retoma la sistematización y coherencia lógica que da Euclides a sus demostraciones geométricas, lo que denomina 'lenguaje elegante'; aspectos que, según él, se pierden dentro de la exposición cartesiana y ceden lugar a un 'lenguaje confuso'[23].

Este interés se ve plasmado en la forma que estructura el *Principia*, incluso si nos restringimos a nuestro punto de interés, la solución al problema de Pappus, podemos ver, como se señalo, una secuencia teórica.

2.- Reafirma los aspectos del método analítico y sintético (composición y resolución para Newton), aunque difiere en cuanto a los instrumentos empleados para la construcción de curvas [24].

El rescatar los métodos empleados por los griegos forma parte de una concepción adquirida como parte de una corriente intelectual propia de Cambridge (ver 1.3.1), pero también denota una concepción muy específica respecto a la geometría y su valor epistemológico.

Es por ello que se dan tanto similitudes como desacuerdos respecto a la tradición griega; por un lado, se tiene un análisis metodológico que lo lleva a establecer su propio método, pero difiere en los instrumentos para la construcción de curvas, por considerar a la geometría como un instrumento que permite acceder al conocimiento físico, en donde la generación de curvas puede ser por cualquier medio. Por el otro, se aceptan los principios establecidos para verificar que una curva pertenece a la geometría; y aún más, que conforme se clasifiquen las curvas quedarán clasificados los problemas y entonces debera seguirse cierto método de resolución.

Aspectos del método contemporáneo

1.- Aprecia la información que proporciona la ecuación algebraica de la curva como portadora de su naturaleza (Descartes).

22 Por instrumentos se entiende el conjunto de artefactos con que se puede trazar una figura o curva. Diferencíese del concepto de herramientas (nota 10).

23 Revise la carga ideológica de Newton como parte de la corriente neoplatonista que adopta (ver 1.3.1).

24 Acepta que la solución de cualquier problema debe pasar por un análisis y una síntesis para ser aceptada en geometría; o lo que él denomina composición y resolución respectivamente. Sin embargo se sale de la restricción del uso de regla y compás, ya que admite que toda curva puede ser considerada geométrica sin importar cómo fue trazada; esto refleja cierta influencia de la clasificación cartesiana de curvas, véase Apéndice I.

Newton asimila esto, incluso mejor que sus propios creadores. Para él, la curva es importante por sí misma, y no sólo como portadora de información; además acepta como Descartes, que una ecuación algebraica asociada a una curva proporciona información sobre esta última, mas no está de acuerdo en emplearlo en geometría.

2.- Rescata, a su vez, la idea de asociar cuerpos en movimiento con puntos de naturaleza geométrica (Barrow).

Su maestro, Barrow, le transmite la concepción de puntos en movimiento, aunque no para emplearlos propiamente en geometría, sino como parte de un campo en formación: el cálculo diferencial e integral; lo que forma parte del siguiente punto.

3.- También asocia el cálculo infinitesimal de Wallis con cuerpos en movimiento de Barrow, para llegar a su idea de fluxión (diferenciación); y,

4.- Profundiza y desarrolla el álgebra de Viete a un lenguaje más claro y sencillo.

El uso adecuado del álgebra aplicada a esta concepción de puntos en movimiento lo lleva a constituir el cálculo diferencial e integral, pero también le proporciona una visión clara entre las diferencias de cada disciplina: la aritmética trata números y objetos numerables, y la solución a problemas de esta índole se relaciona con las operaciones básicas; la geometría con medidas y objetos medibles, y las soluciones a problemas con operaciones mecánicas de trazo y construcción de figuras exactas; la mecánica con fuerza y movimiento de cuerpos, y las soluciones a tales problemas con aplicación de cuerpos con fuerza y movimiento de trayectorias específicas.

Por ello, cuando Newton habla de cuerpos físicos sin propiedades mecánicas, está hablando de puntos que pueden ser tratados en geometría, y entonces asignarles magnitud para ser manejados como lo hacían los griegos.

Así, la revaloración metodológica que realiza Newton en la geometría griega y la revisión conceptual de los aspectos de la geometría contemporánea, le permiten recrear un nuevo método geométrico. El resultado de este proceso será el método de fluxiones y momentos, o también denominado de razones primeras y últimas (véanse 1 y 1.3.1).

Este método asocia los puntos estáticos de la geometría griega con puntos en movimiento (Barrow), buscando extender las propiedades geométricas de los primeros a estos puntos móviles. Así, el movimiento de un punto aparece vinculado a parámetros de naturaleza geométrica que permiten establecer ecuaciones con incógnitas a despejar (Viete y Descartes). Si se conoce la naturaleza de estas ecuaciones y la manera de construir las figuras que se forman por el movimiento de los puntos (Wallis), entonces es posible una geometría de los puntos en movimiento.

Por ejemplo, en la figura 14 la curva c es trazada de antemano, el punto A y la tangente AD son fijos, el punto B recorre la curva y se acerca al punto A, trayendo consigo a la cuerda AB (figura 15). De ésta forma el ángulo BAD disminuye hasta desvanecerse (lema 7, curvatura continua), con lo que al final los puntos A, B y C coinciden en un mismo punto (figura 16). Los segmentos AB y AD son prolongados hasta los puntos d y b, se toma el arco Acb como 'copia' del arco ACB, por lo que cuando B se acerca a A ambos coinciden, pero se mantiene la longitud finita entre A y b.

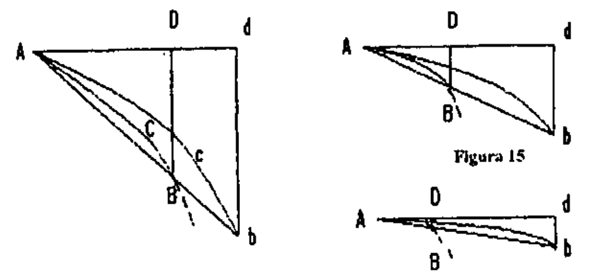


Figura 14

Figura 15

Figura 16

Newton entonces afirma que al final las cuerdas Ab, Ad y el arco Acb coinciden y son iguales, y lo mismo es válido para sus modelos infinitamente pequeños. La demostración se sustenta en la preservación constante de la semejanza entre dos figuras, una finita y la otra desvaneciente, ambas se deforman manteniendose semejantes a cada instante. [De Gandt 1995, 171]

De esta forma, cuerpos con fuerza, velocidad y movimiento no pertenecen a la geometría, pero pueden ser expresados por medio de líneas, superficies, áreas y ángulos, y en este sentido es que Newton afirma que se reducen a la geometría.

Luego, el método de fluxiones y momentos, o razones primeras y últimas, fue para Newton el modo natural de extender los principios de la geometría antigua más allá de líneas rectas y círculos, al tratamiento de líneas curvas generadas por un flujo continuo, como afirma en su *Geometría Curvilínea*.

> las cantidades que incrementan en un fluído continuo, las llamaremos fluyente, a la velocidad de los fluídos la llamaremos fluxiones y los incrementos momentáneos los llamaremos momentos, y el método por el cual se trata a estas clases la llamaremos el método de fluxiones y momentos: este método es sintético o analítico, cada uno puede encontrarse a lo largo del *Principia*, aunque el alcance de éste no fue elaborado para explicar estos métodos, sino para apreciar la física, y principalmente el movimiento de los cielos dentro de la filosofía natural... El método de 'razones primeras y últimas', que aparece al principio del libro I (en 11 lemas), es asumido como el modo sintético de fluxiones, mientras que el 'cálculo' algebraico de fluxiones es el modo analítico. [Newton, en Whiteside 1969, VIII, nota 43, 455]

Esta idea del flujo, método fluxional, encuentra una expresión diferente en el método de las razones primeras y últimas del *Principia*, ya que lo aplica en lugar de las variables en ecuaciones algebraicas como lo hace Descartes en su geometría analítica (véase Apéndice I) y lo elige sobre el lenguaje de las figuras geométricas (lenguaje elegante de la geometría griega, véase Apéndice II).

1.3.1 Conformación histórica del método

Ya mencionamos que en el método geométrico de Newton podemos encontrar aspectos que forman parte de la geometría griega y de la geometría contemporánea; se han desarrollado éstos y hemos establecido la forma en que se relacionan para constituir el nuevo método geométrico newtoniano, y cómo funciona este último; es decir, hemos visto la parte técnica, ahora nos falta la parte histórica. Veamos brevemente como llega Newton a establecer su método.

Como parte de una corriente neoplatónista que busca rescatar los legados de la matemática griega, alrededor de 1665 Newton estudia la geometría antigua, lo que lo llevó a cuestionar la concepción de la geometría moderna, es decir, la forma de abordar los problemas por parte de sus predecesores, en especial Descartes.

> Habla con remordimiento de su equivocación en el comienzo de sus estudios matemáticos, en aplicar él mismo los trabajos de Descartes y otros algebristas, antes de que considerara los *Elementos* de Euclides con gran atención, un escrito de gran merecimiento. [Westfall 1980, 378; citado de Pemberton].

Significativamente, dedica una importante parte de su esfuerzo en restituir los métodos geométricos griegos, como si quisiera que su método de estudio reposara sobre los antiguos en lugar de los modernos.

> El resolver lugares geométricos de los antiguos, le dice a Gregory, es un tesoro del análisis. El restaurar la técnica de resolución de lugares geométricos, apreciando la solución del problema, es la recompensa [*Ibid*].

Newton dirige sus esfuerzos a los últimos libros de la tradición antigua, como los *Porismas* de Euclides. En el ensayo *Veterum loca sólida restituta* [Whiteside 1969, IV, 277] muestra gran rechazo por las vías analíticas y mucho aprecio por los griegos y sus métodos de proporciones simples.

En 1667 redactó un resumen de sus hallazgos, y llegó a su método de fluxiones, por lo que para 1680 tenía muy claro lo que estaba realizando. Aunque planea publicar sus trabajos en los inicios de 1690, nada sucede al final. Él nunca ceso, sin embargo, de alabar a los geómetras griegos, constantemente menciona su deuda directa a la autoridad de los antiguos filósofos de Grecia y Fenicia, como fuente intelectual que informa su teoría de la luz, su concepto de materia y sus ideas cosmológicas fundamentales.

Uno de los aspectos que rescata de la geometría antigua es la diferencia conceptual y metodológica entre cada disciplina. Para Newton, la aritmética tiene que ver con números y objetos numerables; la geometría con medidas y todo objeto que tenga largo, ancho y profundidad; la mecánica con fuerza y movimiento de un lugar a otro. Y las soluciones a preguntas aritméticas tienen que ver con las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíces; las geométricas son aquellas realizadas con operaciones mecánicas de trazo de líneas y construcción de figuras exactas condicionadas por postulados; mecánicas son aquellas operaciones de aplicación de fuerzas y cuerpos en movimiento que siguen líneas asignadas.

Por lo que Newton establece la geometría como una especie particular de mecánica condicionada por definiciones, axiomas, postulados y construcción de problemas. Pero las cantidades geométricas y mecánicas pueden ser expresadas por números y tratadas entonces como en aritmética. El método para resolver problemas en aritmética y geometría es dual: por composición o por resolución; se compone cuando se procede directamente de algo dado a algo buscado (analisis), y se resuelve cuando se asume lo que se busca como dado y luego llegamos a algo conocido, desde donde es posible regresar a lo supuesto (síntesis) [Whiteside 1969, VIII, 173-176]. Entonces, el método propuesto por Newton representa la síntesis de ello.

En cuanto al tipo de curvas aceptadas en su concepción geométrica, Newton admite que dado que la geometría es para uso humano, y el trazo de curvas simples involucra el uso de la mano, entonces toda curva debera ser considerada geométrica por su trazo, ya sea que se emplee regla y compás como lo hacían los griegos o bien mediante instrumentos mecánicos. Esta es una característica que se contrapone a la tradición geométrica griega del uso de regla y compás para el trazo de curvas, que tiene su razón de ser en la concepción mecánica y física que sustenta su método (véase 1.4). Además, denota cierta influencia cartesiana sobre la clasificación de curvas por su naturaleza y no por la forma de construcción (véase Apéndice I).

Sin embargo, la única restricción que impondrá a las curvas para considerarlas geométricas es que sus propiedades puedan ser demostradas sintéticamente (criterio de validez), con lo que pretende suavizar su posición anterior y mantenerse en el marco de la tradición griega. El que la validez de una proposición descance en su demostración sintética es un criterio heredado de los griegos, que Newton acepta (véase 1.4).

Así los fundamentos de los geómetras antiguos descansan en los métodos de análisis y síntesis, lo que garantiza su aceptación en geometría. Estos no solían estar a la vista de todo el público, pero para Newton eso no significa que no los tengan.

> Para ayudar al nuevo análisis, el señor Newton estudió más de las proposiciones en sus *Principia Philosophiae*, [él escribió animosamente]: pero ya que los antiguos para lograr pensamientos ciertos no admitían nada en geometría previamente, todo era demostrado sintéticamente; por lo que el Sistema de los Cielos pudo ser fundado sobre una buena geometría. Y ahora esto dificulta que hombres ineptos puedan ver el análisis por el cual aquellas proposiciones fueron encontradas [*Ibid*].

La geometría de los antiguos también se relaciona con magnitudes, por lo que Newton afirma que sólo extiende esta idea a sus trabajos. Cuerpos con fuerza, velocidad y movimiento no pertenecen a la geometría pero pueden ser expresados por medio de entes geométricos, y en este punto afirma que se reducen a la geometría. Para Newton la forma natural de extender los principios de la geometría antigua más allá de líneas rectas y círculos a otras curvas fue su método de fluxiones y momentos, en especial las razones primeras y últimas de puntos en movimiento.

Otro aspecto rescatado por Newton de la geometría griega fue la clasificación de problemas. Desde que las secciones cónicas fueron descubiertas, la geometría griega distinguió tres clases de problemas: planos, sólidos y lineales; para Newton el lineal se refiere a lo mecánico, pero en el sólido sin los postulados no es posible describirlos geométricamente y sin la descripción no es posible dar una técnica para la construcción de problemas. También diferenció entre teorema, problema y porisma, y esto es asumido en el sentido de los geómetras griegos (ver Apéndice II). Newton define porisma como sigue:

Un porisma es una proposición por la cual, fuera de las circunstancias de un problema, reunimos algunas cosas dadas de uso para el análisis. Tomamos sobre la forma de un teorema o de un problema por placer y en consecuencia, es considerado como clase media entre cada uno. Las cosas dadas, sin embargo, las cuales están así para ser reunidas son directa e inversamente proporcionales a otras relaciones de cantidad desconocidas, asimismo el contorno de figuras y las líneas en las cuales se localizan los puntos desconocidos son usualmente el lugar geométrico de los puntos; y los demás, longitudes, ángulos y puntos están respecto a la determinación de lugares geométricos o de lo contrario contribuyen al análisis del problema.

Esta definición guarda relación no sólo con la forma en que los griegos entienden el porisma, sino también con el método adecuado para resolverlos, análisis problemático, tal y como Pappus lo definió, véase Apéndice II.

Pero no sólo la tradición griega es la que conforma su concepción filosófica y teológica que da sentido a su método, sino que también el contacto con la geometría de su época lo provee de elementos.

Logra un dominio completo de los conocimientos físicos, mecánicos y matemáticos de su época gracias a Descartes, Gassendi, Galileo, Boyle, Hoobs, Morre y Kepler, entre otros; aún cuando estos avances logrados en los siglos XV y XVI están impregnados de ideas escolásticas, aligeradas del peso metafísico por la crítica de estos siglos y por las depuraciones no siempre definitivas de Descartes, Galileo, Huygens, y algunos otros. Por lo que Newton no abandona a Platón y Aristóteles para adoptar sin más la nueva filosofía de sus antecesores (filosofía natural), en especial la cartesiana.

Ya desde 1664 destina un espacio en su 'Notebook' con el título de *Questiones Quaedam Philosophcae*, que responde a lecturas extracurriculares, donde propone contraejemplos y hace observaciones de lo que lee, buscando precisiones conceptuales; fruto de este esfuerzo serán los resultados que más tarde conformarán la base de sus *Principios matemáticos de la filosofía natural*.

La filosofía natural que descubre en 1664 no era demasiado ortodoxa en Cambridge, lugar que está dominado intelectualmente por el empirísmo jacobiano y por la filosofía de Descartes, apoyada en la autoridad del químico Boyle y el platónico Henry More. Así como en las ideas de su maestro, Isaac Barrow, que influyeron en él para concebir los números como marcas o signos de magnitudes geométricas, y las magnitudes geométricas como entes generados por el movimiento [Newton 1987, 123].

Por filosofía natural se entiende la problematización del funcionamiento del mundo, desde una perspectiva física, mecánica y matemática, pero donde la intervención divina tiene un precedente; por ello comprende a la óptica, el análisis y la alquimia. La filosofía natural tiene tanto de metodología como de filosofía, pues no es un mero arsenal experimental al que recurre sino también una concepción de la verdad y, por supuesto, una concepción del mundo. Por lo que la filosofía natural toma como punto de partida la solución matemática para desde ella avanzar hacia una explicación física, sistema adoptado por Newton. [*Ibid*, 25]

Al mismo tiempo, resurge la tendencia pitagórica, ahora a través del platonismo y el neoplatonismo (Cambridge), ofreciendo una ontología esencialmente afín a los nuevos ideales de exactitud y verificabilidad del conocimiento [*Ibid*, 42].

Newton, entonces, considera imprescindible saber matemáticas y considera no menos imprescindible disponer de técnicas instrumentales capaces de permitir experimentar, concepto donde se combina una interrogación hecha por la naturaleza y una combinación de las premisas implícitas en el investigador, tal y como su concepción de la filosofía natural lo exigía.

Newton estudia problemas cartesianos de impactos entre cuerpos perfectamente elásticos, de centros de gravedad y, por tanto, de lugares geométricos, de reflexión y refracción, etc. Estos estudios lo llevan inevitablemente a plantearse problemas conceptuales, más allá de los puramente métricos.

Su revisión lo lleva a formular con precisión la estructura matemática de los problemas de velocidad, espacio, tiempo y movimiento. Ya en 1664 logra un dominio del álgebra (Vieta), la geometría analítica (Descartes) y el análisis infinitesimal (Wallis), vislumbrando estrategias para sintetizarlos, ya que percibe que la ecuación de la curva entraña la propia naturaleza de la curva, de tal modo que el estudio de la ecuación se convierte en el estudio de una curva, de sus propiedades y de sus límites.

Así, Newton ha comprendido la veracidad del método analítico moderno más claramente que sus propios creadores. Para él, la ecuación algebraica no es meramente una herramienta para ayudar a una construcción geométrica, la ecuación es más básica que la curva, la ecuación define, o como dice Newton, expresa la naturaleza de la curva; entonces, la ecuación viene a ser un foco de atención por sí misma. Aunado a esto, está el hecho de que los logros matemáticos no son independientes de sus estudios de mecánica, ya que conecta internamente unos problemas con otros.

De donde podemos afirmar que Newton llevó un proceso en el que mejora la estructura algebraica (Viete, Descartes, etc.) y, por tanto, la generalidad y rigor de lo estudiado; conserva la perspectiva mecánica relacionada con la imágen de puntos en movimiento (Barrow), incorporando con presición variables de tiempo, velocidad y espacio. Diríase que las herramientas van estando listas.

1.4 Diferencias metodológicas

Esta geometría de los puntos en movimiento (idea de flujo en Newton) no se da en la geometría griega, ya que ni siquiera consideraban las curvas, rectas o cualquier figura geométrica formada por un conjunto de puntos o sucesión de los mismos; veánse, por ejemplo, la definición de línea recta que da Euclides en el libro I de los *Elementos*, donde dos puntos marcan la frontera de una recta pero ésta no está formada por puntos (véase [Jones, Ch., 1987, 381]), o la forma en que define Apolonio a las cónicas como las curvas que se generan al seccionar un cono por un plano inclinado, pero no lo hace como el conjunto de puntos que cumplen una cierta propiedad (véase Apéndice II). Esto también se hace patente en la distinción que hacen entre teoremas, problemas y porismas, así como en la adecuación del método para resolver cada uno de ellos (análisis (problemático o teorético) y síntesis; véase Apéndice II). Newton nunca especificó su posición respecto a los puntos en movimiento dentro de la geometría griega, pero lo que si acepta es la distinción entre problemas, teoremas y porismas tal y como los griegos lo concebían. Entonces, ¿cómo puede introducir el concepto de puntos en movimiento sin salirse del marco de la tradición griega? Veamos su respuesta.

> Las cosas que han sido desarrolladas sobre las líneas curvas y las superficies que comprenden, pueden aplicarse facilmente a las superficies curvas y los contenidos de los sólidos. Estos Lemas se enuncian como premisas para evitar el tedio de deducir largas demostraciones *ad absurdum* siguiendo la costumbre de los antiguos geómetras. Ya que el método de los indivisibles abrevia las demostraciones. Pero como la hipótesis de los indivisibles parece de alguna manera más ruda y por ello, es considerada menos geométrica como método, he preferido reducir las demostraciones de las proposiciones siguientes a las sumas y razones primeras y últimas de cantidades nacientes y evanescentes, es decir, a los límites de esas sumas y razones, enunciando así del modo más breve posible la demostración de tales límites. Por este medio se prueba lo mismo que por el método de los indivisibles, así podemos utilizar con mayor seguridad principios ya demostrados. Por tanto, si en lo sucesivo considerase las cantidades como formadas por partículas constantes o usara pequeñas curvas como rectas, no debe entenderse que me refiero a indivisibles, sino a divisibles evanescentes, ni a las sumas y razones de partes determinadas, sino siempre a los límites de sumas y razones; y la fuerza de tales demostraciones debe atribuirse siempre al método de los Lemas precedentes... De igual manera ha de entenderse por razón última de cantidades evanescentes la razón de cantidades no antes de desvanecerse, ni después, sino aquella con la cual se desvanecen. [De modo análogo para la razón de cantidades nacientes]... Y hay un límite semejante en todas las cantidades y proporciones que comienzan y cesan. Y como tales límites ciertos y definidos, determinarlos es un problema estrictamente geométrico. Pero cualquier cosa geométrica puede usarse para determinar y demostrar cualquier cosa que sea geométrica también... Así pues, para que sea más facilmente entendido, cuando en lo que sigue diga cantidades mínimas, evanescentes o últimas, no se entienda que son cantidades de determinada magnitud sino aquellas que se conciben disminuyendo siempre sin limite. [Newton 1987, 267].

Por otro lado, Whiteside afirma que el concepto de razones primeras y últimas (puntos en movimiento), fue exclusivamente moderno, y que nada similar tuvo que ver con la geometría clásica. En este sentido el 'error' de Newton, tuvo que ver con su percepción conceptual, partiendo de que algunos conceptos, sobre todo en la época antigua, eran abstracciones de objetos de la naturaleza; así para él, cuerpos físicos sin propiedades mecánicas eran representaciones geométricas de puntos en movimiento. Y posiblemente en este sentido es que Newton ve esto como algo natural, que extiende los resultados anteriores.

Otra diferencia de la geometría newtoniana respecto a la griega es el tipo de instrumentos empleados en la construcción de curvas. Newton acepta la clasificación griega de las curvas (lineales, planas y sólidas); sin embargo, difiere en cuanto a la contrucción, al no restringirse sólo al uso de la regla y el compás impuesta por Euclides; afirmando que la construcción de curvas desde la más simple hasta la más compleja puede hacer uso de cualquier instrumento mecánico[25] (incluyendo el uso de la mano), siempre y cuando cumpla con el criterio de validéz de la geometría griega; es decir, que la curva haya pasado por una demostración sintética[26].

Es por ello que Newton, al concebir una curva como conjunto de puntos o como aquella figura que describe un punto en movimiento, está generando una serie de curvas que rebasan por mucho a la idea de curva en los griegos. Entonces, para no salirse 'tanto' de la tradición clásica se ve forzado a imponer la demostración sintética, como hemos analizado, para validar la pertenencia de la curva a su propia geometría. Y por ello, afirma que:

> la diferencia entre el análisis actual que se origina de la aritmética y el álgebra, es que ellos no componen sus proposiciones... Por esta razón las proposiciones de los libros del *Principia*, las cuales encontré por análisis, son demostradas por síntesis. [Newton, en Whiteside 1969, VIII, 450]

Luego, los adjetivos 'último' y 'extremo' caracterizan bastante bien a esta geometría, oponiéndola a la de los geómetras antiguos. Newton considera el devenir 'extremo' (último) de las relaciones geométricas, estudia las 'proporciones últimas' o 'relaciones extremas' (ultimatae rationes); las proporciones 'primeras' o 'nacientes' pueden considerarse también como un tipo de relación extrema. [De Gandt 1995, 167]

Sin importar el lenguaje, el concepto de razones primeras y últimas es exclusivamente moderno, la geometría clásica nunca ha contenido nada similar a esto. Así, el *Principia* se arropa en las proporciones de la geometría clásica, sin embargo, las proposiciones fueron las razones últimas de cantidades que se aproximan a cero, Euclides nunca habría reconocido a semejante descendiente [Westfall 1980, 426].

Un ejemplo especifico de la salida de Newton de los cánones de la geometría griega se encuentra en la Sección V del *Principia*, los lemas 21 y 22 sobre la transformación de figuras no correponden a la concepción euclidiana.

En cuanto a la geometría de Descartes, es claro que no concuerda ni con la concepción ni con el método. Pero revisemos algunas diferencias.

25 Newton en el análisis y construcción de curvas, en particular las cónicas, utilizó como guía un cierto instrumental mecánico, artefactos compuestos de regla y cuadrantes con hilos que determinan un punto móvil, el cual al moverse sobre un plano según lo permitían las longitudes variables del hilo describía curvas más o menos complejas.

26 La posición de Newton tiene su razón de ser en la concepción mecánica y física que empleará para su método; y se acerca más a la clasificación cartesiana de curvas por su naturaleza y no por la forma de construcción. La única restricción que impondrá a las curvas para considerarlas geométricas es que sus propiedades puedan ser demostradas sintéticamente (criterio de validez), con lo que pretende mantenerse en el marco de la tradición griega.

1.- Newton comprendió que la veracidad del método analítico moderno descansa en la ecuación algebraica, pero sin considerarla como herramienta para construir curvas sino como portadora de la naturaleza de las curvas mismas. Así para él, la palabra análisis representa una contraposición metodológica respecto a los antiguos geómetras.

> Las ecuaciones son expresiones de cálculo aritmético y no tienen propiamente lugar en la geometría, excepto en el sentido de que permitan probar que cantidades geométricas verdaderas (esto es, líneas, superficies, sólidos y proporciones) coincidan unas con otras. Multiplicaciones, divisiones y cálculos de este tipo han sido recientemente introducidos en la geometría de forma poco aconsejable y contra los primeros principios de dicha ciencia, y el fruto reciente de tal confusión es la pérdida de esta simplicidad en la que consiste la elegancia de la geometría. [Newton, Arithmetica Universalis, 1707, p.282]; citado en [Kline 1992, 420].

2.- La geometría cartesiana no busca llegar a la síntesis del problema, es decir, a la construcción de figuras, por lo que no todos los resultados pueden ser admitidos en geometría.

3.- El método cartesiano no maneja puntos en movimiento.

4.- Descartes maneja una clasificación de curvas, aunque ésta no es tomada por Newton, está influenciada por elementos de la primera. En especial el que no se de como norma de clasificación el medio por el cual se traza la curva, incluyendo artefactos mecánicos para el trazo.

La designación moderna según el grado habre camino para la idea del orden de la curva. Este trabajo también acondiciono de una nueva distinción entre curva algebraica y trascendente. [Boyer 1956, 139]

Todo lo anterior, nos lleva a concluir lo siguiente.

1.5 Conclusiones

Redondeando, el Problema de Pappus ha sido analizado conforme a la concepción metodológica propuesta por Newton. Se ha observado el desarrollo del problema en el *Principia*, Sección V, bajo los Lemas XVII-XIX hasta concluir en el Corolario 2; tal desarrollo está sustentado en lo que ha denominado el método de fluxiones y momentos; que a su vez se encuentra conformado por los métodos analítico y sintético, ambos rescatados de la concepción geométrica griega. Y se ha hecho evidente la disociación conceptual de tal método frente al griego (en cuanto a las herramientas e instrumentos utilizados para dicho problema), sobresaliendo diferencias muy marcadas. Dichas diferencias, han sido omitidas por algunos y por otros rescatadas. Se ha pretendido, a raíz de estas diferencias, recrear una discusión en torno a la solución del problema, pero sustentada en la adecuación conceptual del método griego en el de fluxiones y momentos, y en base a ello hemos llegado a las siguientes conclusiones:

El método geométrico utilizado por Newton por un lado desborda el marco tradicional de la geometría clásica; y por el otro, se contrapone al método analítico moderno. Es geometría, pero no la de Euclides o Apolonio, ni mucho menos la de Descartes (véanse Apéndices I y II). Por lo mismo, podemos inferir que Newton:

1. Está conciente de su salida del marco tradicional de la geometría antigua, al menos en lo que se refiere a la intervención de lo infinitamente pequeño o de las cantidades que se desvanecen (puntos en movimiento), aunque no lo hace textualmente, tal y como se denota en las citas. En lo que se refiere al movimiento es menos claro, ya que no especifica su posición respecto a los puntos en movimiento como parte de la geometría griega; salvo por la identificación de la geometría con la práctica del trazo de curvas, que realiza en el prefacio de los *Principia*: los puntos se mueven sobre líneas, las curvas se generan como trayectorias de puntos móviles. Así como en la aceptación de la clasificación de curvas y de problemas (y el método de solución adecuado para cada uno), que impone la geometría griega.

2. Asimismo, los indivisibles le parecen muy 'rudos' y poco 'seguros', por lo que en la Sección I del *Principia* da una especie de preámbulo matemático consagrado a las 'razones primeras y últimas' o 'proporciones extremas', con lo que busca esclarecer la naturaleza de tales conceptos y la forma en que son comprendidos como parte de la tradición clásica [De Gandt 1995, 167].

Así, admite lo infinitamente pequeño. Ciertos elementos de las figuras deben considerarse como *muy pequeños*; Newton habla de *lineola, linea nascens, linea mínima, linea quam mínima, distantia quam mínima*; precisa que algunos segmentos son infinitamente (*infinite*) o indefinidamente (*indefinite*) pequeños, se interesa por arcos 'nacientes' o 'disminuyendo al infinito', contempla dos posiciones inmediatas vecinas sobre la misma curva (*locus proximus*), etc. [*Ibid.*, 166].

3. Pretende dar un método riguroso, claro y lógico, pero está lejos del modelo euclidiano. Sin duda, por la fusión que realiza entre los conceptos propios de su época y la geometría clásica, su exposición no resulta tan clara y elegante como deseaba, aspecto que critica a Descartes (Apéndice I). Sin embargo, hay que subrayar que los escritos originales de Newton están estructurados en un inglés muy distinto al de la actualidad, ello posiblemente afecte la comprensión de éstos.

4. Se apoya de forma excesiva en las figuras, para hacer evidentes las relaciones de las que se auxilia para demostrar los resultados, contrario a la tradición geométrica griega. [*Ibid.* 167]. Sin el auxilio de figuras resulta imposible entender lo que plantéa, sobre todo los argumentos que usan el concepto de razones primeras y últimas, e incluso se justifica por lo novedoso del método geométrico; y

5. Emplea utencilios mecánicos para el trazo de curvas, fuera del rango de la regla y el compás como restringía la geometría griega. Su misma concepción física del método geométrico lo obliga a salirse de tal restricción, sobre todo por la variedad de curvas con que se encuentra.

De todo lo anterior se deduce que, por un lado, la argumentación del *Principia* es definitivamente sintética, ya que interpreta una figura, estableciendo algunas relaciones de proporcionalidad que son poco después transformadas según las reglas geométricas usuales de los griegos. Y por el otro, innovadora, la gran diferencia de Newton respecto a los antiguos geómetras consiste en estudiar el devenir de estas relaciones cuando ciertos elementos de las figuras tienden a posiciones límites o son infinitamente pequeños [De Gandt 1995, 166].

Así, la demostración de Newton, aparece en primer término acorde con el criterio griego de la adecuación a una parte analítica y su contraparte sintética, salvo en un paso de la demostración del Corolario 2 del Lema XIX, donde hace uso del resultado del Corolario 1 del mismo Lema, este último se sustenta en el uso de razones primeras y últimas, principio que, como vimos, no es propio de la tradición geométrica griega; aún cuando hace la reducción de la física y la mecánica a la geometría. De hecho, resulta interesante el hecho de que sin este paso tan controversial no sea posible solucionar el problema[27]. Luego, la solución de Newton no es totalmente acorde con la tradición geométrica griega, pero se acerca mucho más que cualquier otra.

27 Véanse los intentos de solución actuales dados por Jones, Knorr y Heath principalmente, en el Apéndice II, y compare su relación con la parte analítica de la solución de Newton; así como también, en la parte sintética, su recurrencia a postulados (implícitos) de lo que en la actualidad conocemos como geometría moderna, y que requeriría de un análisis más profundo para establecer su adecuación a la geometría griega, por lo menos sabemos que existen diferencias marcadas.

APÉNDICE I

I. La solución de Descartes al problema de Pappus

1.1 El método

Hay aspectos de la geometría griega que resultaron fundamentales para el desarrollo de la geometría analítica, entre los cuales podemos considerar:

1) La teoría de proporciones, dentro de la cual se asociaron relaciones algebraicas, pasando de relacionar magnitudes a relacionar números;

2) La aplicación de áreas, con la que es posible resolver problemas sobre igualdad de áreas interpretándolos algebraicamente, como en el caso de los tres problemas clásicos;

3) El estudio de las cónicas, la expresión de las propiedades de las cónicas en términos de la aplicación de áreas resulta compatible con el álgebra simbólica y con la asociación de curvas y ecuaciones en la geometría analítica;

4) La idea de lugar geométrico, del que partirá la asociación de ecuaciones y por consiguiente el desarrollo del método de la geometría analítica; y

5) El descubrimiento de las curvas mecánicas, fundamentales para la solución de los tres problemas clásicos.

Es precisamente la interpretación aritmética de las relaciones entre magnitudes geométricas, una interpretación radicalmente distinta a la de los matemáticos griegos, la que conducirá al desarrollo de la geometría analítica. Veamos brevemente cómo se da este proceso.

Fruto del paso de las matemáticas medievales hacia las denominadas matemáticas modernas, es que alrededor de los siglos XV y XVI se da una tendencia hacia un álgebra simbólica, que permitió a los matemáticos ir más allá de la herencia griega, sobrepasando la visualización geométrica y el uso de potencias mayores que la cúbica. Bajo esta perspectiva se da un movimiento que intenta resolver problemas geométricos de manera algebraica, dando un enfoque distinto a las operaciones, la notación y los concéptos en aritmética, álgebra y geometría. Como parte de este proceso sobresalen los nombres de Viete, Fermat y Descartes.

Las contribuciones fundamentales de Viete son: el paso del estudio de ecuaciones particulares ($x^2+6x+3=20$) a ecuaciones generales ($ax^2+bx+c=d^2$), usando vocales para las cantidades desconocidas y consonantes para las conocidas, de esta manera logra distinguir tres tipos de magnitudes algebraicas: números, parámetros (o constantes) y variables; desarrolla una incipiente teoría general de las ecuaciones al pasar de casos particulares a casos generales, aunque se limita a ecuaciones con una sóla incógnita; su idea de variable le permite expresar relaciones entre elementos geométricos inconmensurables, inexpresables en términos de números enteros. De esta forma, como sus variables y parámetros se refieren a magnitudes geométricas, es el primero en aplicar de manera sistemática el álgebra para solucionar problemas geométricos. Aunque esta concepción es parte de la esencia de la geometría analítica, Viete está lejos de construirla, ya que ésta es mucho más que la simple combinación de álgebra y geometría. [Rodriguez 1992, 17-18]

Sin duda, la aplicación del simbolismo literal (algebraico) a los problemas geométricos, junto con el método mecánico de cálculo, permitió la 'traducción' de un problema geométrico a un problema algebraico.

> Esto preparó el camino para la manipulación libre y la simplificación de las expresiones algebraicas relevantes, de acuerdo a las reglas algorítmicas. Donde el problema geométrico estaba determinado, el resultado de la simplificación era invariablemente una ecuación algebraica irreducible en una incógnita, cuyas raíces proporcionan las posibles magnitudes de las líneas originales desconocidas. [Boyer 1956, 62]

Los problemas de representación geométrica de las raíces de una ecuación cúbica o bicuadrática irreducible a los que se enfrenta Viete, lo llevan a asociar éstos con los problemas geométricos de la trisección de un ángulo y la duplicación del cubo (dos de los problemas clásicos), cuya solución requería la construcción de las curvas mecánicas; y por ende extender los postulados de Euclides o liberarse de ellos para construir nuevas curvas como requiere la solución de los problemas, este último paso lo efectuará Descartes para llegar a la conformación de la geometría analítica. Justamente a esto debemos la afirmación de Descartes: "comienzo las reglas de mi álgebra con lo que Viete escribió al final de su libro, ... Así, empiezo donde él termina." [Descartes 1954, nota 18, 10, citado en Rodriguez 1992, 20]

De esta forma para fines del siglo XVI se arraiga esta tendencia hacia una simbolización algebraica de la geometría, así como a la construcción de soluciones geométricas para problemas algebráicos; junto con esto se da un renovado interés por las obras de Apolonio, como se observa en los intentos por restituir distintas partes de sus tratados perdidos, lo que señala un resurgimiento notable de la geometría que se extenderá hasta principios del siglo XVII. [Boyer 1956, 66-71]

Si bien podríamos analizar el surgimiento de la geometría analítica a partir de dos trabajos independientes, el de Fermat y el de Descartes, sólo rescataremos los elementos que más tarde nos permitan diferenciar los conceptos de esta geometría, de aquellos dados por los griegos; por lo que no daremos una reconstrucción histórica exhaustiva.

> ... la geometría analítica elemental -como se enseña hoy- cubre usualmente cuatro temas principales [...]: la derivación de fórmulas a partir de puntos, líneas, ángulos y áreas, junto con la aplicación de estas a teoremas y problemas; la graficación de curvas; la deducción de ecuaciones de lugares geométricos; y el estudio de las propiedades de las curvas, especialmente de ecuaciones lineales y cuadráticas. De estos temas, Descartes hizo énfasis en el tercero y consideró brevemente algunos aspectos del último; Fermat enfatizó el último y resolvió algunos problemas relacionados con el tercero. El segundo tema no se desarrolló sino hasta principios del siglo XVIII y el primer tema hasta el fin de éste. [Boyer 1989, 102]

Ejemplo de la preocupación de Fermat es la siguiente idea:

> Siempre que en una ecuación final se han encontrado dos cantidades desconocidas, tenemos un *locus* (lugar geométrico), y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva. [Boyer 1989, 75, 83; Collette 1986, 23]

Esto permite a Fermat hacer un procedimiento inverso en relación a la forma en que los griegos trataban algunos problemas de lugar geométrico, donde la curva era 'dada' y se deducían las propiedades geométricas de la curva. Desde una perpectiva actual[1], esto es equivalente a

> añadir algunas líneas que cumplan el papel de 'ejes coordenados', para al final dar una descripción verbal (retórica) de las propiedades geométricas de la curva. El procedimiento de Fermat empieza con una ecuación algebraica utilizando la terminología de Viete, para luego demostrar que puede ser pensada como un lugar geométrico -una curva- con respecto a un 'sitema coordenado'. [Rodriguez 1992, 22]

En el caso de Descartes, él retoma la preocupación de Viete sobre la construcción de raíces de ecuaciones, planteándose la construcción de problemas en geometría (en el sentido de los griegos) a través de la solución algebraica de ecuaciones, aunque el procedimiento es algebraico, el significado es geométrico. El método es nuevo por cuanto representa de forma gráfica las ecuaciones. Y en este contexto, el papel que juega la busqueda de la solución al problema de Pappus será esencial, ya que por un lado dará un camino a seguir en la formulación del método de la geometría analítica, y por el otro, permitirá evidenciar la potencialidad del mismo.

1.2 Diferencias metodológicas entre el método griego y el método cartesiano

Para Descartes todo problema geométrico podía ser reducido a través del álgebra a términos elementales, donde finalmente era posible conocer las longitudes de ciertas líneas rectas indispensables para la construcción, solucionando el problema. De esta forma, plantea la manipulación de las magnitudes de las rectas como si fueran números, a las que se les puede aplicar las operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación, división y extraer raíces) obteniendo un número al que se le asocia una nueva recta, regresando a los términos geométricos.

En realidad, el supuesto de Descartes es sustituir la concepción griega de tomar magnitudes de rectas, por longitudes de las mismas y asignarles letras, con las cuales puede operar. Por ejemplo, la multiplicación de dos o más magnitudes geométricas resulta una nueva magnitud (otra recta) y no un área o volúmen como en el caso de los geómetras griegos, que además se limitaban a la manipulación de sólo tres magnitudes. En el caso de la división, esta aparecerá como una operación inversa a la multiplicación con el sentido geométrico descrito, así al dividir dos líneas rectas lo que se obtiene es otra línea recta, a diferencia de los griegos, donde aparece como una comparación entre rectas en términos de razones y proporciones. Aún más claro resulta esto en la extracción de raíces cuadradas, pues Descartes habla de $\sqrt{5}$ como número o como el lado de un cuadrado de

1 Es necesario aclarar que existen dos corrientes dentro de esta perspectiva actual, una propuesta por Zeuthen, Heath y otros, que considera los trabajos sobre cónicas de Apolonio y sus continuadores como fundamento del orígen de la geometría analítica. Y otra, sostenida por Knorr, Jones y Unguru, quienes están en contra de esta primera propuesta. Esta última corriente es a la que hacemos referencia.

área 5, que siempre es posible construir; mientras que para los griegos esto es imposible. De esta forma Descartes da un enfoque radical sobre cómo concebir lo geométrico.

Ahora, ¿cómo pasa Descartes de un problema geométrico a interpretarlo como un problema algebraico? Citemos su respuesta:

> Si, entonces, queremos resolver cualquier problema, debe considerarse en principio como ya resuelto, dando nombre a todas las líneas que se estimen necesarias para su construcción, tanto a las que son desconocidas [incógnitas] como a las que se conocen. A continuación, sin hacer distinción entre las líneas conocidas y las desconocidas, debemos descifrar el problema de tal manera que muestre más naturalmente el modo en que ellas dependen mutuamente, hasta que sea posible expresar a una misma cantidad de dos formas: esto es lo que se entiende por una ecuación, pues los términos de una de estas dos expresiones son iguales a los de la otra. Deben hallarse tantas ecuaciones como líneas desconocidas se han propuesto... [Descartes 1954, 6-9; 1987, 282; A-T, VI, 373 latín]

Después indica la manera en que habrán de relacionarse tales líneas según la naturaleza del problema: se busca que las líneas desconocidas estén determinadas por las conocidas, pero si el problema resulta ser más complicado que algún otro problema familiar para nosotros, entonces supongamos a este último resuelto, y determinemos las líneas desconocidas en términos de dicho problema familiar, obteniendo tantas ecuaciones como líneas desconocidas tengamos. Así, lo único que resta hacer es resolver las ecuaciones, luego, el problema se ha reducido a un problema algebraico. [Descartes 1954, 9; 1987, 282; A-T, VI, 373 latín]

Esta explicación (del método) guarda gran similitud con el método analítico de los griegos, que Pappus menciona en el Libro 7 de la *Colección*, véase Apéndice II. Pues se asume lo que se busca como resuelto, deduciendo consecuencias hasta llegar a algo conocido con anterioridad (principios básicos), de donde la solución será el inverso de esto, es decir, la construcción mediante el método sintético. Sin embargo, esta similitud está lejos de ser un sustento metodológico del método propuesto por Descartes, y esto se hace evidente en las siguientes diferencias:

1) El método cartesiano se denomina analítico en el sentido de que busca analizar un ente geométrico mediante un conjunto de herramientas[2] en un lenguaje diferente (algebraico), y después hacer la traducción de los resultados del análisis a la forma geométrica original; por lo que la construcción de la figura resultante es parte misma del método y no corresponde, como en el caso de los griegos, a otro método distinto (sintético). Descartes no entiende lo 'sintetico' como una legitimación deductiva de lo analítico; contrástese esto con la concepción de Newton.

2) El método analítico cartesiano tiene un procedimiento determinado a seguir, por lo que sólo es necesario dominar una serie de fórmulas de la geometría analítica. En cambio, en el método sintético griego no se sabe donde empezar, porque no lleva un orden

2 Véase la manera de entender este concepto en la nota 10, página 17.

preestablecido de enfoque o planteamiento; entonces, para emplearlo se requiere una destreza que sólo se adquiere después de recurrir a la experiencia y a los tanteos sucesivos.

3) Mientras los métodos analítico y sintético griegos sólo buscan resolver *problemas* sobre lugares geométricos o problemas exclusivamente geométricos, el método cartesiano permite *resolver problemas y establecer teoremas* de geometría, pues el alcanzar un resultado algebraico o analítico puede conducir al descubrimiento de un resultado geométrico insospechado, por lo que resulta un método notablemente fértil. En este sentido diríamos que Descartes se interesa por lo que Pappus llama análisis problemático, en contraposición de lo teorético, donde se enfatiza la posibilidad o imposibilidad de ciertas construcciones (ver Apéndice II).

4) Para resolver un problema de lugar geométrico por el método analítico cartesiano, se pone la figura correspondiente en un sistema coordenado de referencia, se establece la relación geométrica que mantiene al *punto móvil* en su lugar geométrico, se traduce la relación anterior a una ecuación algebraica, se identifica el lugar geométrico buscado por medio de su ecuación algebraica y, finalmente, se construye la curva; contráste esto con la concepción newtoniana. El último paso ha sido eliminado en la geometría analítica moderna.

Esta última distinción muestra la necesidad que siente Descartes de construir las raíces de las ecuaciones (o las curvas que describen las ecuaciones algebraicas que son solucións del problema), mediante los métodos griegos, obteniendo así un segmento de línea recta, o una curva, a pesar de que él no comparte la perpetuidad de la geometría griega como lo hace Fermat, y más tarde Newton. Esta posición también se contrapone con nuestra concepción actual donde la construcción de la raíz involucra elementos de dos sistemas numéricos: los reales o los complejos y todo el armazón teórico que los sustenta. De hecho, Descartes está convencido de que no toda solución formalmente posible de una ecuación algebraica es, en efecto, construible.

Finalmente, retomemos una última conclusión de Descartes sobre su método:

> De esta manera, todas las cantidades desconocidas pueden ser expresadas en términos de una sola cantidad, siempre que el problema pueda ser construido mediante círculos y líneas rectas, o por medio de secciones cónicas, o incluso por algunas otras curvas de grado no superior al tercero o cuarto. Pero no me detengo en la explicación detallada de esto, pues los privaría del placer de aprender por ustedes mismos y de la utilidad de cultivar su espíritu al ejercitarse en tales cuestiones, que es, según mi opinión, el principal resultado que se puede obtener de esta ciencia... [*Ibid.*, 1954, 10; 1987, 283; A-T, VI, 374 latín]

Una vez establecidas las diferencias metodológicas, estamos en condiciones de poder analizar la solución de Descartes al problema de Pappus. Aunque pudiera parecer, a diferencia del primer capítulo, que el planteamiento es mucho más sencillo por la similitud con nuestro conocimiento actual de la geometría analítica, el desarrollo del mismo hará evidente la necesidad de su contraparte en notación moderna.

1.3 La solución al problema

Ya hemos mencionado que el problema de Pappus juega un papel fundamental en la concepción cartesiana, no sólo como guía metodológica sino también como evidencia de la potencialidad del método, por lo que se hace necesario indagar sobre cómo logro Descartes tener acceso a tal problema. Sobre ello contamos con dos versiones, una que se encuentra en un trabajo bíografico especializado [Lachterman 1989, 144-146], que es respaldado por algunos historiadores, como [Collette 1986]; y otra que es propuesta por un especialista en historia de las matemáticas, Boyer [1956, 87], y que también cuenta con amplio apoyo.

En la primera, se afirma que el problema de Pappus fue transmitido a Descartes en 1631 por un corresponsal llamado Golius, quien excéptico de los rumores sobre su nuevo método para resolver problemas geométricos, lo reta a resolverlo. Descartes ansioso por echar por tierra el reto de Golius, y como más tarde contó a Mersenne[3], trabajó por seis semanas hasta que llegó a la solución. A sus propios ojos, este suceso lo coloco más alla de los antiguos y de sus propios contemporáneos.

Dos comentarios adicionales de Pappus hacen que el desafío se vuelva más interesante para Descartes: primero, que cuando más de cuatro líneas son dadas en el problema, el lugar geométrico resultante "no es conocido en el tiempo presente [de Pappus] pero es simplemente llamado *líneas (grammai)* o *lugar geométrico lineal.*" Descartes lo llama *lugar geométrico supersólido*. Segundo, cuando más de seis líneas son dadas, la figura contenida por estas -no siendo figuras planas o sólidas- son incomprensibles, corresponderán a más de tres dimensiones. Pappus entonces añade proféticamente que estos problemas de orden mayor pueden ser manejados por medio de composición de razones. [Lachterman 1989, 144-146]

La segunda versión, nos dice que es a través de un tratado de un hombre llamado Adriadne, que Descartes llega a conocer el problema enunciado por Pappus sobre el lugar geométrico de tres y cuatro líneas, razón por la cual decide llamarlo *problema de Pappus*. Tal problema lo inspirará para inventar su geometría analítica [Boyer 1989, 87]. Esta última afirmación es de vital importancia, ya que hipotéticamente nos induce a afirmar que es la búsqueda de la solución al problema de Pappus, la que determinará el sustento teórico de la geometría analítica y el que finalmente permitirá establecer el método analítico cartesiano.

Establecer la veracidad de cada versión es un trabajo de investigación de gran amplitud que escapa a nuestros propósitos. Sea cual fuere la forma en que Descartes conoció el problema, y sin importar si es tomado como evidencia de la potencialidad del método, o como guía metodológica del mismo, puesto que ambas situaciones se dan, lo que si se puede constatar es su interés en la solución del problema; que además debe cumplir el planteamiento metodológico de Pappus, es decir, debe cubrir la parte sintética y la parte analítica, conforme a la metodología griega. De donde, no basta con determinar que clase de curva corresponde al problema, sino que también se debe construir.

---

3 Descartes era un hombre de gran arrogancia, por lo que era común que afirmara algo por sólo crear controversia y ganar popularidad. Razón por la cual establecer la veracidad de la presente afirmación requiere de una investigación a fondo, la fuente debe consultarse en [Shea 1993].

Para Descartes, las cónicas, al igual que otras curvas, son esencialmente lugares geométricos, esto es, colecciones de un número infinito de puntos, los cuales satisfacen la 'ecuación' que se extrae de las condiciones del problema.

Es importante señalar que Descartes no considera la solución del problema de Pappus como algo aislado de su método para resolver problemas geométricos, por el contrario, al presentar la solución de este problema particular, desea mostrar al lector cómo resolver todos los problemas, o más radicalmente, cómo todos los problemas pueden ser reducidos a un tipo de problema más simple [*Ibid*, 144]. Analicemos entonces la solución que propone.

Lo primero que debemos notar es que Descartes establece el enunciado del problema en sus propios términos; a lo que surge inmediatamente la pregunta de ¿porqué tal necesidad? La respuesta a esto sólo adquiere sentido como justificación a su posterior clasificación de las curvas, donde dará énfasis al criterio algebraico y no a la forma en que son obtenidas tales curvas (como en la clasificación de los geométras griegos), más adelante analizaremos esto con detalle, por ahora veamos el problema:

> Así pues, la cuestión cuya solución había sido iniciada por Euclides y continuada por Apolonio sin haber llegado a ser solventada por nadie, es la siguiente: Teniendo tres, cuatro o más líneas dadas en posición, se requiere primero encontrar un punto a partir del cual puedan ser trazadas otras tantas líneas, cada una de ellas formando un ángulo dado con una de las líneas dadas, de modo que el rectángulo formado por dos de estas líneas esté en una razón dada con el cuadrado de la tercera, si no hay más que tres rectas; o con el rectángulo de las otras dos si no hay más que cuatro. O bien, si hay cinco, que el paralelepípedo construido por tres guarde una razón dada con el paralelepípedo construido por las otras dos y cualquiera de las dadas; si hay seis, que el paralelepípedo construido sobre tres guarde una proporción dada con el paralelepípedo formado por otras tres; si hay siete, que el resultado obtenido cuando se multipliquen cuatro de ellas entre sí, guarde la proporción dada con el resultado de la multiplicación de las otras tres y también de una línea dada; si hay ocho, que el producto de cuatro de ellas esté en una razón dada con el producto de las cuatro restantes. De este modo, tal cuestión puede hacerse extensiva a cualquier otro número de líneas. A continuación y puesto que existen una infinidad de puntos que pueden cumplir lo que se trata de hallar, es necesario conocer y trazar la línea en la que se encuentran todos; Pappus afirma que, cuando no existen sino tres o cuatro líneas rectas dadas, se encuentra en una de las tres secciones cónicas, pero no intenta determinarla ni escribirla, al igual que tampoco intenta explicar aquellas en que deben encontrarse todos estos puntos cuando la cuestión es planteada para un número mayor de líneas. Solamente indica que los antiguos habían imaginado una de aquellas que habían mostrado ser muy útiles, que parecía la más simple, pero, sin embargo, no era la más importante. Esto me ha dado oportunidad para intentar ver si puedo llegar tan lejos como lo que ellos han alcanzado mediante el método que utilizo. [Descartes 1954, 22; 1987, 288; A-T, VI, 380 latín]

Posteriormente, Descartes afirma -en primer lugar- que para el caso de tres, cuatro o cinco líneas, siempre puede ser resuelto mediante la 'geometría elemental', es decir mediante la geometría griega que se restringe al uso de la regla y el compás; salvo en el caso de que las cinco líneas sean paralelas, pero esto entra dentro de los casos de seis a nueve líneas, donde los puntos son hallados usando alguna de las cónicas; salvo en el caso de que las nueve líneas sean paralelas, analogamente, éste entra en los casos de 10 a 13 líneas, donde se usan las curvas de grado mayor al de las secciones cónicas; excepto si las trece líneas son paralelas. En este caso como en el de 14 a 17 líneas, será preciso usar una curva de grado aún mayor que la precedente y así sucesivamente. Y en segundo lugar, cuando sólo hay tres o cuatro líneas dadas, los puntos buscados se encuentran en alguna de las tres secciones cónicas o en algunas ocasiones, en la circunferencia del círculo o en una línea recta. Igualmente, de 5 a 8 líneas, los puntos se encuntran en una línea de grado mayor al de las cónicas, o de manera excepcional en las cónicas, en un círculo o en una línea recta; finalmente, si son de 9 a 12, los puntos estarán en una línea de grado mayor a las precedentes, y así al infinito [*Ibid.*].

Este planteamiento resulta interesante pues es análogo a la forma en que Pappus enfoca el problema, es decir, hay dos partes de la solución, una que obedece al método analítico y otra al método sintético, la primera corresponde al método analítico cartesiano, y la segunda es parte de la construcción mediante geometría elemental que Descartes incluye como parte de su método.

Por último, antes de mostrar la solución del problema, Descartes afirma:

> Finalmente, la primera y más simple de todas las líneas después de las secciones cónicas, es la que puede describirse por la intersección de una parábola y de una línea recta en la forma que explicaremos. De suerte que yo pienso haber resuelto enteramente lo que Pappus dice haber sido investigado en relación con esto en la antigüedad; por ello, trataré de dar la demostración en pocas palabras... [Descartes 1954, 23; 1987, 289; A-T, VI, 382 latín]

Veamos la solución propuesta por Descartes:

> Sean AB, AD, EF, GH,... cualquier número de rectas dadas en posición, y sea C el punto que se requiere encontrar, desde el que trazando varias rectas CB, CD, CF, y CH,... formando los ángulos CBA, CDA, CFE, CHG,... respectivamente con las líneas dadas, de modo que el producto de algunas de estas sea igual al producto del resto, o por lo menos que estos productos guarden una relación dada, lo cual en nada dificulta el problema (figura 1)[4].

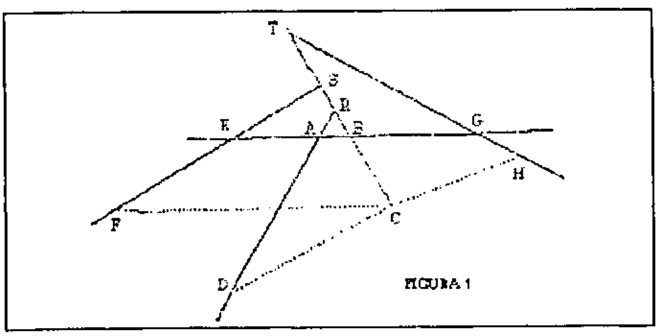


FIGURA 1

En primer lugar, supongo resuelto el problema y, como tantas líneas confunden[5], considero sólamente una de las líneas dadas junto con otra de las trazadas, por ejemplo AB y CB, como las principales y con las que intento relacionar todas las demás.

Escritura de Descartes

Concedamos que el segmento de línea AB, que está entre los puntos A y B, sea llamado x, y que B sea y. Prolónguense las otras líneas dadas hasta encontrarse con estas dos, prolongadas también, si es necesario (siempre que ninguna sea paralela a las líneas principales).

Escritura moderna

Llamemos a los segmentos $AB=x$, $BC=y$; prolongando las líneas dadas hasta encontrarse con éstas [que funcionan como ejes], que también pueden ser prolongadas si no son paralelas a alguna de las otras.

Entonces, en la figura se puede observar que las líneas dadas cortan a AB en los puntos A, E, G; asimismo cortan a BC en los puntos R, S, T.

Ahora, como los ángulos del triángulo ARB son dados, la proporción que se da entre los lados AB y BR también es conocida, estableciéndola como $z:b$. Si tenemos que $AB:BR=z:b$ y como $AB=x$, tenemos que $RB=bx/z$. Y ya que B está entre C y R, tenemos que $CR=y+bx/z$. Porque si R está entre C y B, CR será igual a $y+bx/z$; y si C está entre B y R, CR será $-y+bx/z$.

ARB Y CBA son dados por hipótesis, luego RAB también es conocido por ser suplementario, $RAB=180°-(ABR+ARB)$ [Euclides I,32,36]. De donde se pueden conocer todos los ángulos del triángulo, y la razón entre los senos de los ángulos opuestos es conocida, y como tenemos $AB/BR=z/b$, de lo anterior, $x/BR=z/b$. Aplicando que el producto de medios es igual al producto de los extremos, $xb=BR\bullet z$, de donde $BR=bx/z$, nótese que esto sólo es posible definiendo las operaciones aritméticas de segmentos de líneas. Ya que
$CR=BR+BC$ si B está entre C y R;
$CR=y+bx/z$;
$CR=CB-BR$, si R está entre C y B;
y $CR=BR-CB$, si C está entre B y A,
nótese el uso de operaciones aritméticas.

De igual modo los tres ángulos del triángulo DRC son conocidos, en consecuencia, también lo es la proporción que existe entre los lados CR y CD. Llamemos a esta razón $z:c$, y como $CR=y+(bx/z)$

Como el ángulo CDA está dado, el ángulo $DCR=ARB$, así el ángulo RCD puede conocerse, así como la proporción entre los lados, de donde $CR/CD=z/c$. Y $CD=c\bullet CR/z$, pero $CR=y+bx/z$, entonces $CD=c(y+bx/z)/z=(cy/z)+(cbx/z^2)$, tenemos que $CD=(cy/z)+(cbx/zz)$.

nótese que Descartes entiende zz como z^2, zzz como z^3, etc.

Después de esto, como las líneas AB, AD y EF están dadas en posición, la distancia de A a E es conocida, si llamamos a esta distancia k, entonces EB será igual a $k+x$; pero será $k-x$ si el punto B se encuentra entre E y A; y será $-k+x$ si E está entre A y B. Y puesto que los ángulos del triángulo ESB son dados, la proporción entre BE y BS también es conocida; y si la llamamos $z:d$, entonces tenemos que $BS=(dk+dx)/z$, y la línea completa $CS=(zy+dk+dx)/z$;
pero sería $CS=(zy-dk-dx)/z$ si el punto S está entre B y C;
y sería $CS=(-zy+dk+dx)/z$, si C está entre B y S.

Ya que $BE=EA+AB$, si A está entre E y B, $EA=k$, $BE=k+x$. $BE=EA-AB$, si B está entre E y B; $BE=-EA+AB$, si E está entre A y B. Donde Descartes toma siempre el primer caso para la demostración.
Puesto que los ángulos del triángulo ESB son dados, puede establecerse $BE/BS=z/d$, o también $(k+x)/BS=z/d$; operando obtenemos $BS=(k+x)d/z$; y puesto que $CS=BS+BC$, si B está entre C y S; $CS=BS-BC$ si C está entre B y S; $CS=BC-BS$, si S está entre B y C; entonces, $CS=(k+x)d/z+y$, de donde

$CS=(zy+dk+dx)/z$. Notese que el sentido de los segmentos no es relevante.

Además los tres ángulos del triangulo FSC son dados y, por tanto, también lo es la proporción de CS a CF, que es la misma de $z:e$; por lo tanto, la línea CF será $(ezy+dek+dex)/zz$.

El ángulo CFS está dado, así el ángulo SCF se conoce, y como $CS/CF=z/e$ entonces, $CF=eCS/z$, pero $CS=(yz+dk+dx)/z$, así, $CF=(eyz+edk+edx)/z^2$

Del mismo modo, también AG al que llamaremos l está dada, y BG será $l-x$, y como los ángulos del triángulo BGT son también dados, tenemos que la proporción de BG a BT es conocida, llamemosla $z:f$, así BT será $(fl-fx)/z$ y
$CT=(zy+fl-fx)/z$.
Ahora bien, puesto que la proporción de TC con CH es dada

Ahora, los ángulos del triángulo BGT y los del triángulo TCH están dados, es decir, el ángulo CBA está dado, de donde se deduce el ángulo TGB; y AB, GH son dadas, luego se conoce el ángulo TGB y de ahí el ángulo BTG. Análogamente para el triángulo HCT; así conocemos la proporción entre sus lados, esto es, $BG/BT=z/f$, $CT/CH=z/g$, luego

4 Las figuras 1, 2 y 4 son tomadas de [Descartes 1954, 300-312].

5 Evitar la confución y favorecer la claridad es una de las cualidades que Descartes destaca de su método. Desde tal perspectiva debe tomarse su crítica a la geometría de los antiguos, cuya confusión y oscuridad le llevan a pensar en la necesidad de buscar "otro método que estuviera libre de tantos defectos" (A-T, VI, 18, 1-8). El método equivale a un procedimiento de análisis cuya claridad, simplicidad y alcence explicativo-resolutivo le hace sobresalir sobre el procedimiento seguido desde la antigüedad (establecer ecuaciones que relacionan las áreas dadas con las buscadas o deseadas); y "estima dar una demostración de que su método es mejor que el ordinario." (A-T,I, 340, 10-11). [Descartes 1987, notas 22 y 23, 481-482]

en virtud del triángulo TCH, llamémosla $z:g$, así $CH=(gzy+fgl-fgx)/zz$.

$BT=fBG/z$, pero $BG=l-x$, $BT=(fl-fx)/z$.
Por otro lado, tenemos que:
$CT=BC+BT$, si B está entre C y T;
$CT=BT-BC$, si C está entre B y T;
$CT=BC-BT$, si T está entre C y B; así,
$CT=y+(fl-fx)/z=(yz+fl+fx)/z$;
$(BC=y)$.
Y como $CH=gCT/z$, entonces
$CH=(gyz+gfl-gfx)/z^2$.

Llegado a este punto, Descartes interrumpe la demostración para aclarar la naturaleza de la expresión que hemos obtenido, lo que lo lleva a la clasificación de sus curvas -que mencionaremos en detalle más adelante-, y a determinar cuándo el problema es plano (según la clasificación de los griegos).

Así, Descartes afirma que sin importar el número de líneas dadas y el de las trazadas desde C, siguiendo las condiciones del problema, siempre pueden ser expresadas en tres términos: el primero, está compuesto de una cantidad desconocida y, multiplicada o dividida por alguna otra cantidad conocida; el segundo está integrado por una cantidad desconocida x, multiplicada o dividida por algúna otra conocida; y el tercero, por una cantidad conocida. La única excepción es cuando las líneas sean paralelas a la línea AB, en cuyo caso el término compuesto de la cantidad x será cero; o bien a la línea CB, en cuyo caso el compuesto por la cantidad y será cero; en cuanto a los signos (+ y -) que aparecen, se pueden tener todas las combinaciones posibles.

Asimismo, si se multiplican varias líneas entre sí, las cantidades x e y que estarán en el producto pueden tener tantas dimensiones como el número de líneas que se multiplican; cuando se consideran dos líneas no tenemos más de dos dimensiones; y no más de tres cuando son el resultado de una multiplicación de tres líneas, y así sucesivamente.

Y para distinguir qué tipo de curva es, Descartes plantea lo siguiente: para determinar el punto C solamente se pide que el producto de cierto número de líneas guarde una cierta proporción con el producto de otras; podemos tomar una de las dos cantidades desconocidas x o y, y determinando una en función de la otra, si el problema no es propuesto para más de cinco líneas, la cantidad x que nunca se utiliza para la expresión de la primera línea nunca tendrá más de dos dimensiones. De modo que, tomando y como conocida, tenemos: $x^2=\pm ax\pm b^2$; de donde se puede encontrar x mediante regla y compás [como muestra en un ejemplo], y tomando diferentes valores para y obtenemos otros para x, entonces podemos encontrar diversos puntos como C, describiéndose la curva requerida.

Procediendo igual para cuando hay seis o más líneas, si entre las que son dadas algunas son paralelas a BA o BC, una de las dos x o y debe tener dos dimensiones en la ecuación [segundo grado], así es posible encontrar C por regla y compás. Pero si todas son paralelas, aunque sólo se consideren cinco líneas, C no puede localizarse de esta manera ya que al no encontrarse x en la ecuación no podemos tomar y como conocida, sino que es preciso calcular este valor; y como y tendrá tres dimensiones, sólo se puede calcular obteniendo la raíz de una ecuación cúbica, lo que usualmente no se puede hacer sin emplear alguna sección cónica. Y si son hasta nueve líneas dadas no todas paralelas, puede lograrse que la ecuación no sobrepase el cuadrado del cuadrado [no superior al cuarto grado], tales ecuaciones se resuelven empleando secciones cónicas [como mostrará más adelante]. Y aunque sean 13 líneas dadas siempre puede expresarse la ecuación de modo que no alcance más del cuadrado del cubo [no superior al sexto grado], de donde,

> puede resolverse del modo que explicaré por medio de una línea que es solamente un grado superior a las secciones cónicas. Esto constituye la primera parte de lo que aquí deseaba demostrar; pero antes de iniciar la segunda, es necesario que facilite algúnas observaciones relacionadas con la naturaleza de las líneas curvas. [Descartes 1987, 292-294; A-T, VI, 385-387, latín]

A reserva de mencionar más adelante la clasificación de las curvas que da Descartes, la continuación de la demostración se encuentra en el libro II de la *Geometría*. Partiendo del hecho de que puede determinar a las líneas CB, CD, CF y CH en términos de x y de y, continua:

> Ahora, después de haber clasificado todas las líneas según ciertos tipos o clases, me es fácil continuar con la respuesta que anteriormente he facilitado en relación con el problema de Pappus. En primer lugar, he mencionado que cuando no hay sino tres o cuatro líneas rectas dadas, la ecuación que permite determinar los puntos buscados es de segundo grado. Se infiere de ello que la curva en que tales puntos se encuentran necesariamente ha de ser alguna de las de primer tipo [círculo, parábola, hipérbola y elipse],... Cuando no han sido dadas más de ocho líneas, esta ecuación será a lo sumo una bicuadrática y, en consecuencia, la curva resultante pertenecerá a la segunda clase o a la primera. Cuando no hay más de doce líneas dadas, la ecuación no excede el cuadrado del cubo y, por tanto, la línea buscada no pertenece sino a la tercera clase o a una inferior, y así sucesivamente.

Pero, como la posición de las líneas puede variar de muchas formas, introduciéndose modificaciones en las cantidades conocidas y en los signos empleados, no hay una curva del primer tipo que no sea útil para el problema con cuatro líneas, ni alguna del segundo tipo cuando se plantea para ocho, ni una de la tercera clase cuando se plantea para doce, y así para otros casos.

> De modo que no hay una línea curva, cuya ecuación pueda ser obtenida y que pueda ser aceptada en Geometría, que no sea útil para algún número de líneas. [Descartes 1987, 300-301; A-T, VI, 397, latín]

Con lo que a continuación nos dará la solución para el problema de Pappus para el caso de tres o cuatro líneas. Es importante notar cómo Descartes pasa del caso general que trató de forma analítica (primera parte), a considerar un caso particular (tres y cuatro líneas) para mostrar la parte sintética de la solución, aún cuando también enuncia de manera general esta parte.

1.3.1 Solución sintética de Descartes para el caso de tres y cuatro líneas

Descartes busca mostrar la forma de determinar la curva para este caso, además de hacer evidente que corresponde al primer tipo, donde son consideradas las tres secciones cónicas y el círculo.

Considérense nuevamente las cuatro líneas dadas, AB, AD, EF y GH, y dejemos que el lugar geométrico generado por el punto C sea aquel que satisfaga que, si a través de él son trazadas las cuatro líneas CB, CD, CF y CH, formando ángulos dados con las líneas dadas, el producto de CB y CF es igual al producto de CD y CH. Esto es equivalente a decir que si CB$=y$, entonces

Escritura de Descartes

$CD=(czy+cbx)/zz$
$CF=(ezy+dek+dex)/zz$
$CH=(gzy+fgl-fgx)/zz$
entonces la ecuación está dada como sigue:

$$yy=[(cfglz-dekzz)y-(dezz+cfgz-bcgz)xy+bcfglx-bcfgxx]/ezzz-cgzz$$

Suponiendo ez mayor que cg, si fuese menor sería necesario cambiar los signos (+ y -). Si y es cero o menor que cero en esta ecuación, y puesto que el punto C se encuentra en el ángulo DAG, será preciso suponerlo también en el ángulo DAE, o EAR, o RAG, y los signos deberan ser alterados para llegar a este resultado.
Si para cada una de estas cuatro posiciones el valor de y fuera cero, el problema será irresoluble. Pero supongamos la solución posible, y para abreviar las expresiones, escribamos $2m$ en lugar de $(cflgz-dekzz)/ezzz-cgzz$; y $2n/z$ en lugar de $(dezz+cfgz-bcgz)/ezzz-cgzz$. De este modo obtenemos:
$$yy=2my-(2n/z)xy+(bcfglx-bcfgxx)/ezzz-cgzz,$$
de donde la raíz será:
$$y=m-(nx)/z+\sqrt{mm-(2mnx)/z+(nnxx)/zz+(bcfglx-bcfgxx)/ezzz-cgzz}$$
De nuevo, para abreviar, hagamos $(-2mn)/z+(bcfgl)/ezzz-cgzz$ igual

Escritura moderna

Como suponemos CB•CF=CD•CH, entonces sustituyendo:
$$y(ezy+dek+dex)/z^2=[(czy+cbx)/zz][(gzy+fgl-fgx)/zz],$$
de donde, $ez^3y^2+dekyz^2+dexyz^2=(czy+cbx)\bullet(gzy+fgl-fgx)$; así
$$y^2=[(cfglz-dekz^2)y-(bcgz-dez^2-cfgz)xy+bcfglx-bcfgx^2]/ez^3-cgz^2$$

Ahora, si $ez>cg$, entonces $ez^3-cgz^2>0$, y su raíz cuadrada es real; esto le permite a Descartes olvidarse de raíces negativas. Si $y=0$, entonces en la ecuación:

$(bcfglx-bcfgx^2)/ez^3-cgz^2=0$, y $bcfglx=bcfgx^2$, de donde $x=l$,

luego, la solución del problema geométrico a pasado al problema algebraico de solucionar una ecuación de segundo grado con dos variables.

Si $y<0$, sólo necesita hacer el cambio de signos. Si suponemos que existe solución, abreviamos como sigue:
$2m=(cflgz-dekz^2)/ez^3-cgz^2$
y $2n/z=(dez^2+cfgz-bcgz)/ez^3-cgz^2$.
Y así tenemos que,
$$y^2=2my-(2n/z)xy+(bcfglx-bcfgx^2)/ez^3-cgz^2$$

cuya raíz positiva es:
$$y=[2(m-\{nx\}/z)+\sqrt{4(m-\{nx\}/z)^2+4(bcfglx-bcfgx^2)/ez^3-cgz^2}]/2;\ así$$

$$y=m-(nx)/z+\sqrt{m^2-(2mnx)/z+(n^2x^2)/z^2+(bcfglx-bcfgxx)/ez^3-cgz^2}$$

a *o*, y *nn/zz-(bcfg)/ezzz-cgzz* igual a *-p/m*; hacemos esto, pues podemos designarlas como se quiera ya que son cantidades dadas. Entonces tenemos que:

$y=m-(nx)/z+\sqrt{m^2+ox-(p/m)x^2}$

De nuevo abreviamos, puesto que estamos manejando cantidades conocidas, hacemos
$(-2mn)/z+(bcfgl)/ez^3-cgz^2=o$,
$n^2/z^2-(bcfg)/ez^3-cgz^2=-p/m$,
luego,
$y=m-(nx)/z+\sqrt{m^2+ox-(p/m)x^2}$

Esta debe ser la longitud de la línea BC, dejando a AB o *x* indeterminada [se obtiene algebraicamente el valor de BC, pero su longitud será establecida geométricamente]. Ya que el problema es propuesto para tres o cuatro líneas, siempre se pueden tener tales términos, aunque alguno de ellos pueda ser nulo y los signos puedan variar. [Descartes 1987, 302-303; 1954, 60-64; A-T, VI, 400, latín]

Hasta aquí, lo que Descartes hace es obtener el valor de BC en términos algebraicos, pero le falta la construcción de la misma, lo que hará de la siguiente manera:

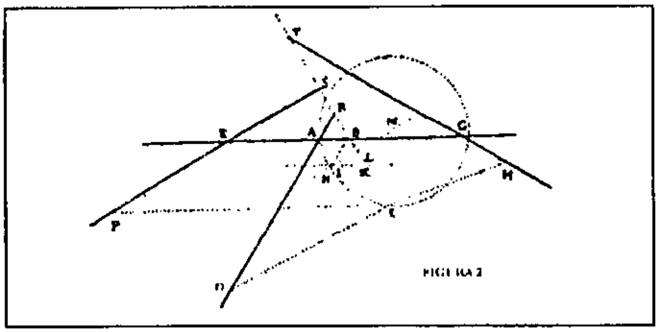


FIGURA 2

Después de esto, trazo KI igual y paralela a AB, de tal forma que corte a BC en el segmento BK igual a *m* (ya que la expresión para BC es $+m$; si fuera $-m$, habría que trazar IK del otro lado de AB, mientras que si fuera cero, no se traza IK (figura 2). Seguidamente, trazo IL de forma que

Escritura de Descartes

IK:KL::*z*:*n*, esto es, de modo que si IK es igual a *x*, KL es igual a *nx/z*. De esta forma conozco la razón de KL a IL, que llamo *n*:*a*, así si KI es igual a *nx/z*, entonces IL es igual a *ax/z*. Tomo el punto K entre L y C, ya que la ecuación contiene a *-nx/z* (si fuera *+nx/z* tomaría L

Escritura moderna

Si $IK/KL=z/n$, entonces $KL=IKn/z=nx/z$. Y si $KL/IL=a/n$ entonces, $IL=KLa/n=ax/z$.

En la figura, $BC=BL+LC$, pero $BL=BK-KL$; $BM=m$ y $BL=nx/z$, entonces, $BL=m-nx/z$, así $BC=m-nx/z+LC$, comparando esto con la ecuación

entre K y C, y si nx/z fuera cero, no trazaría IL). Hecho esto, la línea LC queda determinada por los términos que restan de la ecuación, esto es:
$LC=\sqrt{mm+ox-(pxx)/m}$
Si LC fuera cero, el punto C estaría sobre la línea IL, y si fueran sus valores de forma que se pueda extraer su raiz, esto es, si mm y $(pxx)/m$ tuvieran el mismo signo, ya sea positivo o negativo, y oo fuera igual a $4pm$, o también si mm y ox, o bien ox y $(pxx)/m$ fueran cero, entonces el punto C estará sobre otra línea recta cuya posición puede ser tan fácilmente calculable como la de IL.

Si ninguno de estos casos ocurre el punto C siempre está en una de las tres secciones cónicas, o en un círculo cuyo diámetro estará sobre la línea IL, y con la línea LC aplicada en orden a su diámetro; o por el contrario, LC paralela al diámetro e IL aplicada en orden. En particular, si el término pxx/m es cero, la sección cónica es una parábola; si tiene valor positivo, entonces es una hipérbola; y si por último tiene valor negativo, es una elipse. La única excepción será cuando la cantidad aam es igual a pzz y el ángulo ILC es recto, en cuyo caso tenemos un círculo en vez de una elipse.

Si la sección cónica es una parábola, su lado recto es igual a oz/a, y su eje se encuentra siempre sobre la línea IL. Para encontrar contrar el vértice N, es necesario

$BC=m-nx/z+\sqrt{m^2+ox-px^2/m}$, LC tendrá que ser $\sqrt{m^2+ox-px^2/m}$,
Si LC fuera cero, estaría sobre IL, y si éste fuera un cuadrado perfecto, es decir,
i) si m^2 y $(px^2)/m$ tienen el mismo signo (+ o -), y $o^2=4pm$, entonces

$$
\begin{aligned}
LC &= \sqrt{m^2 \pm 2x\sqrt{pm} + (px^2)/m} \\
&= \sqrt{[m+\sqrt{(p/m)}x]^2} \\
&= m+\sqrt{(p/m)}x
\end{aligned}
$$

así, $BC=m-nx/z+m+\sqrt{(p/m)}x=$
$2m+(\sqrt{p/m}-n/z)x=$
$2BR+(\sqrt{p/m}-n/z)AB.$
ii) si $m^2=ox=0$, entonces $LC=\sqrt{px^2/m}$,
así, $BC=m+nx/z+x\sqrt{p/m}=$
$m+(\sqrt{p/m}-n/z)x=$
$BK+(\sqrt{p/m}-n/z)AB$
iii) si $ox=px^2/m=0$, entonces
$LC=\sqrt{m^2}$, así
$BC=m-nx/z+m=2m+nx/z=$
$2BK+(n/z)AB$

En cada caso, la ecuación es lineal, luego, será la ecuación de una recta. Mas adelante se verá la identificación que hace Descartes entre ecuaciones y su representación geométrica.
Pero cuando no se da ninguno de estos casos, el punto C está en alguna de las secciones cónicas, o en un círculo cuyo diámetro estará sobre la línea IL, donde LC es una ordenada con relación a su diámetro; o bien, LC paralela al diámetro, donde IL es la ordenada. En particular, si $px^2/m=0$,
$LC=\sqrt{m^2+ox} \Rightarrow BC=m-nx/z+\sqrt{m^2+ox}$, que es una parábola; si es positivo es una hipérbola; si es negativo es una elipse; y en el caso especial en que $a^2m=pz^2$ y el triángulo ILC es rectángulo, será un círculo, en lugar de una elipse.

Y si esta sección es una parábola, su lado recto es igual a oz/a y su eje siempre está sobre IL. Para encontrar el vértice N, hagamos IN igual a am^2/oz, tal que el punto I esté siempre construir IN igual a am^2/oz, y el punto I debe encontrarse entre L y N si *mm* es positivo y *ox* también lo es; también L debe hallarse entre I y N si *mm* es positivo y *ox* negativo; igualmente N está entre I y L si *mm* es negativo y *ox* positivo. Pero nunca puede darse el valor -*mm* cuando los términos están establecidos como lo indicamos. Finalmente, el punto N debe coincidir con el punto I si *mm* es igual a cero. Por este medio es fácil encontrar esta parábola de acuerdo con el primer problema del libro I de Apolonio[6].

entre L y N si tenemos m^2+ox; que L esté entre I y N si tenemos m^2-ox; y que N esté entre I y L si se tiene $-m^2+ox$. Pero es imposible que m^2 pueda ser negativo cuando los términos están dados como antes. Finalmente, si $m^2=0$, los puntos N e I deben coincidir. Es fácil determinar esta parábola con el primer *porisma* del libro I de Apolonio.[7]

Es importante revisar cuidadosamente esta última afirmación, ya que en ella se observa de manera clara esta identificación que hace Descartes entre la ecuación de una curva y su representación geométrica; así que analicemos la forma de desarrollar esta proposición por parte de Apolonio y contrastemos su aplicación en la construcción que busca dar Descartes para el caso en que tenemos una parábola. Lo siguiente es esencialmente establecido por [Rodriguez 1992, 74-78], salvo algunas anotaciones de [Vera 1970, Apolonio, 327-328].

La proposición (Apolonio I,11) es la siguiente:

> Si un cono es cortado por dos planos, uno que pasa a través de su eje y otro que corta a la base del cono en una línea recta perpendicular a la base del triángulo axial [triángulo según el eje], y más aún, si el diámetro de la sección es paralelo a uno de los lados del triángulo axial, entonces el cuadrado de toda recta trazada desde la sección del cono a su diámetro, paralela a la intersección del plano cortante con la base del cono [es decir, el cuadrado de la ordenada de un punto de la sección], será igual al rectángulo formado por la recta que separa en el diámetro que empieza en el vértice de la sección y por otra recta cuya razón a la situada entre el ángulo del cono y el vértice de la sección es la misma que la del cuadrado de la base del triángulo axial respecto al rectángulo contenido por los dos lados sobrantes del rectángulo. Llamaremos parábola a tal sección.

6 Descartes 1954, 64-68; 1987, 300-305; A-T, VI, 397, latín.

7 *vid.* [Rodriguez 1992, 70-73].

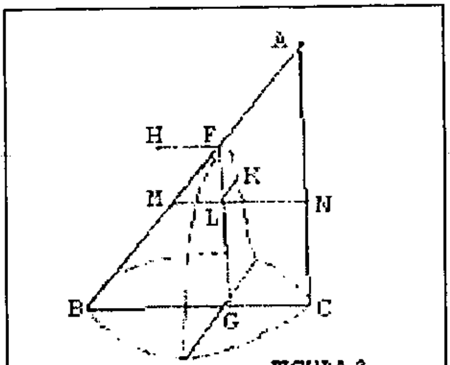


FIGURA 3

Sea A el vértice de un cono y su base el círculo BC. Córtese el cono con un plano a través de su eje, y sea esta sección el triángulo ABC [Apolonio I,3]. Córtese de nuevo al cono con un plano que corte a su base en la línea recta DE perpendicular a la línea recta BC del triángulo ABC, y a la superficie del cono según la línea DFE cuyo diámetro FG [Apolonio I,7 y definición 4] es paralelo al lado AC del triángulo axial [del triángulo que pasa por el eje] (figura 3; fuente: [Rodriguez 1992, 74]).

Trácese la línea recta FH desde el punto F perpendicular a la línea recta FG, de forma que

Escritura de Apolonio

cuad.BC:rect.BA,AC::FH:FA.[8]
Tómese al azar el punto K de la sección, a través de K trácese la línea recta KL paralela a la línea DE. Digo que
cuad.KL:rect.FH:FL
Trácese a través de L la línea recta BC. Y como la línea DE es paralela a la línea KL, tenemos que el plano formado por KL y MN es paralelo al plano formado por BC y DE [Euclides XI,15], esto es, a la base del cono. Así, el plano formado por KL y MN es un círculo de diámetro MN [Apolonio I,4]. KL es perpendicular a MN, ya que DE es perpendicular a BC [Euclides XI,10], de donde,

Escritura moderna

Dada la figura, supongamos que $BC^2{:}BA\bullet AC{::}FH{:}FA$, es decir, $BC^2/BA\bullet AC=FH/FA$, lo que se debe demostrar es que: $KL^2=FH\bullet FL$.

Tenemos que $ML\bullet LN=KL^2$ [Euclides III,31; VI,8, porisma].
Es decir, como MNK es un círculo, trazamos MK y KN, de donde el ángulo MKN es recto, así, KL es la media proporcional entre ML y LN, esto es $ML/KL=KL/LN$, por lo tanto $ML\bullet LN=KL^2$.
Ahora, tenemos que
$BC/CA=MN/NA=ML/LF$ (1)
[Euclides VI,4], así también
$BC/BA=MN/MA=$

rect.ML,LN=cuad.KL [Euclides, III.31; VI,8, porisma]; y como cuad.BC:rect.BA,AC::HF:FA, y cuad.BC:rect.BA,AC comp. BC:CA, BC:BA [Euclides VI,23], por lo tanto, HF:FA comp. BC:CA, BC:BA.

Pero,
BC:CA::MN:NA::ML:LF [Euclides VI,4], y BC:BA::MN:MA::ML:MF:: NL:FA [Euclides VI,2]; por lo tanto, HF:FA comp. ML:LF,NL:FA
pero,
rect.ML,LN:rect.LF,FA comp. ML: LF,LN:FA [Euclides VI,23].
Por lo tanto,
HF:FA::rect.ML,LN:rect.LF,FA
pero, tomando a la línea FL como altura común,
HF:FA::rect.HF,FL:rect.LF,FA
[Euclides VI,1]; por lo tanto
rect.ML,LN:rect.LF,FA::
rect.HF,FL:rect.LF,FA [Euclides V,11]; entonces
rect.ML,LN=rect.HF,FL [Euclides V,9];

Pero, rect.ML,LN=cuad.KL, por lo que también,
cuad.KL=rect.HF,FL.

LM/MF=NL/FA (2) [Euclides VI,2] componiendo (1) y (2), y usando [Euclides VI,23], tenemos que $BC^2/CA•BA=MN^2/NA•MA=ML•NL/LF•FA$; por lo tanto,
HF/FA=ML•NL/LF•FA.

Ahora, sabemos que
HF/FA=HF•FL/FL•FA [Euclides VI,1]
de donde,
ML•LN=HF•FL [Euclides V,9]. Pero,
ML•LN=KL^2, por lo tanto
KL^2=HF•FL.
Esta igualdad en un sentido más moderno puede interpretarse como la ecuación canónica de la parábola, es decir, KL sería la ordenada, FL la abscisa y HF el parámetro, así la igualdad anterior puede escribirse como la siguiente ecuación: $y^2=px$.

Sea esta sección llamada una parábola, y sea HF la línea recta hacia la cual las líneas rectas trazadas en en dirección al diámetro FG, están aplicadas en cuadrado, y se llama también el lado recto[9].

Ahora, aplicando esto a la demostración que Descartes estaba enunciando para el caso de la parábola, tenemos que de la figura y por la proposición anterior, la ecuación de la parábola será $LC^2=p$LN (1), donde p es el lado recto (figura 4).

Así, tenemos que por un lado LN=IL+IN; sea IN=Z y como IL=ax/z, entonces LN=ax/z+Z.

Por otro lado, de la ecuación $y=m-nx/z+\sqrt{m^2+ox}$, donde LC=$\sqrt{m^2+ox}$, se tiene LC=$y-m+nx/z$, de donde, sustituyendo en (1)

8 Esta construcción, que Apolonio da por hecha, la resuelve Eutocio, considerando un rectángulo tal que sea OP•PR=AB•AC y aplicando al lado PR un rectángulo equivalente al cuadrado de BG, y siendo PQ el otro lado del rectángulo, pone FH:FA=PQ:PO, y como los rectángulos RO y RQ son entre sí como sus bases, se tiene: PQ/PO=rect.RQ/rect.OR= $PQ•PR/PO•PR=BG^2/AB•AC$=FH/FA. [Vera 1970. Apolonio, nota 37]

$(y-m+nx/z)^2=(ax/z+Z)p$

Pero también, $(y-m+nx/z)^2=m^2+ox$, entonces $axp/z+Zp=m^2+ox$, igualando término a término, tenemos $ap/z=o$ y $Zp=m^2$, esto implica, $p=oz/a$ y $Z=m^2/p=am^2/oz$. Por lo tanto, el lado recto IN será am^2/oz. [Descartes 1954, 68, nota 112, inglés; 79-80, español]

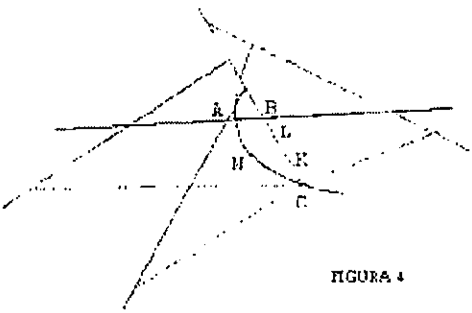


FIGURA 4

Lo que se observa de aquí, es que la ecuación cartesiana es equivalente a la ecuación obtenida desde la perspectiva de Apolonio, con lo que se evidencía la validez del método de Descartes, y lo útil que resulta la asociación de una ecuación a una figura geométrica.

Posteriormente, Descartes continua desarrollando la solución para cuando se necesita construir el círculo, la hipérbola o la elipse; casos que resumiremos brevemente.

> Si la línea pedida es un círculo, una elipse o una hipérbola, es preciso en primer lugar hallar el punto M, que es el centro de la figura. Tal punto siempre se encuentra en la línea recta IL y puede ser hallado tomando IM igual a $aom/2pz$. Así, si $o=0$, entonces M coincide con I. Si la línea que se desea encontrar es un círculo o una elipse, debemos tomar el punto M del mismo lado que el punto L respecto de I, cuando ox es positivo; o en el lado opuesto si ox es negativo. Por el contrario, en el caso de una hipérbola, si se tiene ox, el centro M está hacia L; si fuera $-ox$, debería tomarse hacia la otra parte. Según todo esto, el lado recto de la figura debe ser $\sqrt{(o^2z^2+4mpz^2)/a^2}$ si $m^2>0$ y la línea es un círculo o una elipse; o si $m^2<0$ y el lugar es una hipérbola. Pero si la línea buscada es un círculo o una elipse y $m^2<0$, o si es una hipérbola y $o^2>4mp$, con $m^2>0$, el lado recto será $\sqrt{(o^2z^2-4mpz^2)/a^2}$. Y si $m^2=0$, el lado recto será oz/a; y si $oz=0$, entonces será $\sqrt{4mpz^2/a^2}$.
>
> Asimismo, en relación con el correspondiente diámetro debe ser hallada una línea que sea al lado recto como am^2 es a pz^2; es decir, si el lado recto es $\sqrt{(o^2z^2+4mpz^2)/a^2}$, entonces el diámetro será $\sqrt{(a^2o^2m^2+4a^2m^3)/p^2z^2}$.

> En cada uno de estos casos, el diámetro de la sección se encuentra en la línea IM, siendo LC de las aplicadas por orden. Es evidente que siendo MN igual a la mitad del diámetro y tomando N y L en el mismo lado del M, el punto N será el vértice de este diámetro. Siguiendo lo expuesto es fácil determinar la curva de acuerdo con los problemas segundo y tercero del primer libro de Apolonio.
>
> Pero, cuando esta sección es una hipérbola, $m^2>0$ y $o^2=0$ o $o^2<4pm$, entonces debe trazarse la línea MOP por M de forma que sea paralela a LC y que CP lo sea a LM, así como tomar $MO=\sqrt{m^2-(o^2m/4p)}$, pero si $ox=0$ $\Rightarrow$ $MO=m$. Considerando O como el vértice de la hipérbola, con OP el diámetro y CP la línea aplicada; en tal caso, el lado recto es $\sqrt{(4a^4m^4/p^2z^4)-(a^4o^2m^3/p^3z^4)}$ y su diámetro será $\sqrt{4m^2-(o^2m/p)}$. No obstante, debemos considerar una excepción, cuando $ox=0$, el lado recto es $2a^2m^2/pz^2$ y el valor del diámetro es $2m$. A partir de estos datos la curva puede ser determinada de acuerdo con el problema tercero del primer libro de Apolonio. [Descartes 1987, 305-306].

Todo este desarrollo le permite a Descartes concluir:

> Puesto que todas las ecuaciones que no son superiores a las de segundo grado se incluyen en la discusión que ha sido dada, no sólo se resuelve completamente el problema de los antiguos relativo a tres o cuatro líneas, sino también cuanto se relaciona con lo que ha sido llamado composición de lugares sólidos y planos..., pues la solución de cualquiera de estos problemas de lugar no es más que la de encontrar un punto para cuya completa determinación falta una condición, siendo las otras condiciones tales que todos los puntos de una sola línea la satisfagan. Si esta línea es recta o circular decimos que se trata de un lugar plano; pero si es una parábola, una hipérbola o una elipse, entonces se dice que se trata de un lugar sólido. En cada caso puede obtenerse una ecuación que contenga a dos cantidades desconocidas, que es semejante a alguna de las que acabo de resolver.
>
> Si la curva en la que se encuentra el punto buscado es de un grado superior al de las secciones cónicas, puede ser llamada, siguiendo el mismo procedimiento, un lugar supersólido, y así sucesivamente... Los antiguos llegaron a obtener como nivel superior de análisis la composición de lugares sólidos y cuanto Apolonio expuso acerca de las secciones cónicas podría responder al deseo de solventar los problemas relacionados con la composición de tales lugares. Así mismo se ve que lo que he considerado como la primera clase de curvas no puede incluir a otras que el círculo, la hipérbola, la parábola y la elipse, que es cuanto había intentado probar. [Descartes 1987, 310-311; 1954, 79-80; A-T, VI, 407, latín]

Todavía Descartes nos muestra un último caso en el que se consideran cinco líneas variando el paralelismo de las mismas, pero por la analogía del planteamiento no se presentará aquí, puesto que lo que nos interesa es comparar los planteamientos metodológicos de cada solución, para no perdernos en ejemplificaciones. Más interesante para nuestros propositos resulta el desarrollar la solución analítica contemporánea del mismo, para contrastar los planteamientos y las herramientas utilizadas en cada solución.

9 Apolonio de Pérgamo. 1969. *Conics*, en *Great Books*, *Encyclopeedia Britanica*, 11: 615-616.

Es importante señalar que Descartes da algunas ideas implícitas en su método, cuya validez da por sentado, pero que desde una perspectiva contemporánea son de vital importancia, es por esto que se verá una solución contemporánea del problema usando el método de la geometría analítica que nos es familiar. Las ideas a las que nos referimos son:

1) La posibilidad de definir un lugar geométrico a partir de una ecuación, que lleva implícito el uso de ejes de referencia o ejes coordenados que dan sustento al método analítico contemporáneo; y

2) La ecuación de segundo grado tiene como lugar geométrico una sección cónica o un círculo, que es la ya mencionada asociación de curvas geométricas con ecuaciones.

Revisemos entonces la solución contemporánea que es propuesta por [Rodriguez 1992, 81-85].

1.3.2 Solución analítica contemporánea del problema

Teniendo siempre en cuenta el planteamiento que acaba de hacerse, resolveremos primero el caso particular para tres líneas, pasando luego a la generalización para cualquier caso.

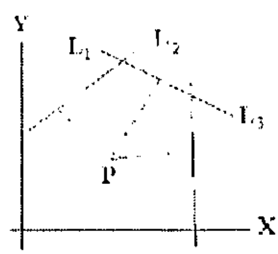


FIGURA 5

Sean $L_1 = A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $L_2 = A_2x + B_2y + C_3 = 0$, $L_3 = A_3x + B_3y + C_3 = 0$, tres rectas dadas y sea $P = (x_1, y_1)$ un punto del plano que satisface que

$d(P,L_1)^2 = d(P,L_2)d(P,L_3)$ (1)

donde $d(P,L_i)$, $i = 1,2,3$, es la distancia de un punto P del plano a una recta L_i dada, esta distancia es igual a: $d(P,L_i) = |A_ix_i + B_iy_i + C_i| / \sqrt{A_i^2 + B_i^2}$
(figura 5; fuente: [Rodriguez 1992, 81])

Lo que se tiene que demostrar es que el lugar geométrico de los puntos que satisfacen (1) es una cónica, es decir, que (1) es una ecuación cuadrática.

Demostración:

Sabemos que: $d(P,L_1)=|A_1x_1+B_1y_1+C_1|/\sqrt{A_1^2+B_1^2}$
$d(P,L_2)=|A_2x_1+B_2y_1+C_2|/\sqrt{A_2^2+B_2^2}$
$d(P,L_3)=|A_3x_1+B_3y_1+C_3|/\sqrt{A_3^2+B_3^2}$

de donde, si sustituímos en (1) obtenemos

$|A_1x_1+B_1y_1+C60_1|^2/(\sqrt{A_1^2+B_1^2})^2=(|A_2x_1+B_2y_1+C_2|)(|A_3x_1+B_3y_1+C_3|)/(\sqrt{A_2^2+B_2^2})(\sqrt{A_3^2+B_3^2})$

Sin pérdida de generalidad, tomemos el caso en que todos los valores absolutos son positivos, esto es
$(A_1x_1+B_1y_1+C_1)^2/A_1^2+B_1^2=(A_2x_1+B_2y_1+C_2)(A_3x_1+B_3y_1+C_3)/\sqrt{(A_2^2+B_2^2)(A_3^2+B_3^2)}$

Hagamos $r=A_1^2+B_12$ y $s^2=(A_2^2+B_2^2)(A_3^2+B_3^2)$, sustituyendo y desarrollando las operaciones obtenemos
$(s^2A_1^2-rA_2A_3)x_1^2+(2s^2A_1B_1-rA_2B_3-rA_3B_2)x_1y_1+(s^2B_1^2-rB_2B_3)y_1^2+(2s^2A_1C_1-rA_2C_3-rA_3C_2)x_1+(2s^2B_1C_1-rB_2C_3-rB_3C_2)y_1+s^2C_1^2-rC_2C_3=0$

Así, igualando el coeficiente de x_1^2 con A, el de x_1y_1 con B, el de y_1^2 con C, los de x_1 y y_1 con D y E respectivamente, e igualando $s^2C_1^2-rC_2C_3$ con F, obtenemos la ecuación $Ax_1^2+Bx_1y_1+Cy_1^2+Dx_1+Ey_1+F=0$, que es una ecuación cuadrática. *Q.E.D.*

Ahora, la generalización del problema de Pappus cuando se tienen *2n o 2n+1* líneas rectas, se traduce en encontrar el lugar geométrico de los puntos que satisfacen que el producto de las distancias de uno de estos puntos a *n* de las rectas dadas es igual, o proporcional, al producto de este punto a las *n o n+1* rectas restantes. Suponiendo los resultados de la geometría analítica que nos es familiar, la solución de este problema queda reducido a encontrar la ecuación de grado *n o n+1*, según el caso, que representa a tal lugar. Esto sólo tiene sentido en una visión actual, pues tales ecuaciones pueden ser representadas geométricamente en el plano, situación inconcebible dentro de la geometría griega.

Veamos la solución al caso general:
Sean L_1, $L_2,\ldots$, L_{2n} (o L_1, $L_2,\ldots,L_{2n+1}$) rectas dadas; sea P un punto del plano. El lugar geométrico de los puntos P que satisfacen que $\Pi d(P,L_i)=\Pi d(P,L_j)$, $i\neq j$ (1), es la gráfica de una ecuación de grado *n o n+1*, según sea el caso.

Demostración:
Sean $L_1=A_1x+B_1y+C_1=0$,
$L_2=A_2x+B_2y+C_3=0$,
$L_3=A_3x+B_3y+C_3=0$

.
.
.

$L_{2n}=A_{2n}x+B_{2n}y+C_{2n}=0$

Sea $P=(x_1,y_1)$, luego

$$d(P,L_1)=|A_1x_1+B_1y_1+C_1|/\sqrt{A_1^2+B_1^2}$$
$$d(P,L_2)=|A_2x_1+B_2y_1+C_2|/\sqrt{A_2^2+B_2^2}$$
$$d(P,L_3)=|A_3x_1+B_3y_1+C_3|/\sqrt{A_3^2+B_3^2}$$
$$\vdots$$
$$d(P,L_{2n})=|A_{2n}x_1+B_{2n}y_1+C_{2n}|/\sqrt{A_{2n}^2+B_{2n}^2}$$

Ahora, sustituyendo en (1) tenemos

$$\Pi|A_ix_1+B_iy_1+C_i|/\sqrt{A_i^2+B_i^2}=\Pi|A_jx_1+B_jy_1+C_j|/\sqrt{A_j^2+B_j^2}, \text{ con } i\neq j$$

Luego, *S.P.G.*, tomando sólo los valores positivos e igualando todo a cero obtenemos

$$\Pi(A_ix_1+B_iy_1+C_i)/\sqrt{A_i^2+B_i^2}-\Pi(A_jx_1+B_jy_1+C_j)/\sqrt{A_j^2+B_j^2}=0, \text{ con } i\neq j \qquad (2)$$

Y como el grado de un producto de polinomios distintos de cero es igual a la suma de los grados de sus factores, entonces (2) será la diferencia de dos polinomios de grado *n o n+1* según el caso, de donde (2) será una ecuación de grado *n o n+1*, siendo esto lo que se quería demostrar. [Rodriguez 1992, 81-85]

1.4 Clasificación de curvas

Ya antes habíamos mencionado que Descartes establece el enunciado del problema de Pappus en sus propios términos, aún cuando contaba con el enunciado original, y ahora podríamos agregar también que lo generaliza antes de resolverlo; ambas situaciones se explican en la medida en que dan sentido a su posterior clasificación de las curvas; donde la interpretación algebraica de los lugares geométricos permite dar una clasificación en términos de ecuaciones, sin distinguir la manera en que se construyen las curvas asociadas a éstas (como en la clasificación de los geométras griegos). En la clasificación de Descartes se observa el sentido geométrico de las ecuaciones sin importar el número de líneas involucradas; en contraste con la tradición geométrica griega, donde consideran a los puntos, las líneas, las superficies y los volúmenes como entes geométricos con una dimensión definida, por lo que su modo de construcción determinaba la clasificación en curvas planas (recta y circunferencia), curvas sólidas (cónicas) y curvas lineales (mecánicas), véase Apéndice III. La diferencia en la concepción de Descartes puede deducirse de la siguiente afirmación:

> ... para comprender a la vez todas aquellas [curvas] que se dan en la naturaleza y para clasificarlas por orden según ciertos tipos [o géneros], no conozco algo más apropiado que afirmar que todos los puntos de las que pueden llamarse geométricas, es decir, de aquellas que caen bajo cierta medida precisa y exacta, tienen necesariamente alguna relación con todos los puntos de una línea recta y esta relación puede ser expresada por alguna ecuación válida para todos los puntos. [Descartes 1987, 297; 1954, 48; A-T, VI, 393, latín]

Descartes clasifica a las curvas de la siguiente manera:

> Del primero y más simple tipo [género]: todas las curvas cuya ecuación no involucre términos mayores que el rectángulo [producto] de dos cantidades desconocidas (términos en xy) o bien el cuadrado de una misma cantidad (términos en x^2 *o* y^2). Por lo que sólo están comprendidas el círculo, la parábola, la hipérbola y la elipse.
>
> Del segundo tipo [género]: todas aquellas en las que la ecuación contenga uno o más cantidades desconocidas (deben ser dos para explicar la relación entre dos puntos), alcanzan grados tres o cuatro.
>
> Del tercer género [tipo]: aquellas en las que la ecuación alcanza el quinto o sexto grado; y así para las otras curvas, hasta el infinito, sin excluir a ninguna, aún cuando su construcción no sea geométrica. [Descartes 1987, 298; 1954, 48; A-T, VI, 394, latín]

Esta clasificación modifica de manera radical el criterio de la clasificación de los griegos, haciendo a un lado los métodos de construcción y dando prioridad a las propiedades expresadas de forma algebraica en función de líneas dadas, las que actualmente juegan el papel de ejes coordenados.

APÉNDICE II

I. Antecedentes históricos del problema

1.1 Método de tanteo

Frente a las necesidades prácticas, que surgieron durante las antiguas culturas orientales y prehelénicas, como el reparto y la medición de tierras, el cálculo de áreas y tributación de las mismas, la edificación de templos y ornamentos, así como la construcción de casas, palacios y acueductos, se contempla a la geometría como una herramienta para solucionar estos problemas específicos. Durante este periodo se desarrollan las nociones de figura, forma, área, volumen, entre otros; sin embargo, aún no existe un manejo teórico-conceptual. Estas nociones se desarrollan en un ambiente empírico, en donde el proceso de conocimiento está dado por reproducciones del aspecto físico en que se desenvuelven, siempre ateniendose a la utilidad práctica de los mismos. Tan es así, que puede uno aventurarse a afirmar que el método aplicable para ese periodo es el de tanteo.

El método de tanteo, o de ensayo y error, consiste en que ciertos casos específicos obedecen a una cierta relación descriptiva y numérica sin llegar a una demostración lógica o a ciertas propiedades categóricas que den lugar a una teoría. Tal método fue apriorístico ya que sólo fue sustentable en la medida en que se resolvieron esos problemas prácticos. Así, su fundamentación esta dada por un razonamiento empírico, en donde la observación y la experiencia determinan un cuadro lleno de analogías, excento de entendimiento lógico.

Parte de los elementos que fueron rescatados del método de ensayo y error, y que posteriormente conformaron parte de los métodos analítico y sintético, han sido las relaciones analógicas y empíricas desarrolladas a través de la observación y la experiencia. De hecho, la cultura griega inserta en su concepción geométrica estos elementos como parte del proceso cognoscitivo, pero dando prioridad al razonamiento deductivo, es decir, llegar a conclusiones geométricas por demostraciones lógicas y no por experimentación de tanteos. [Eves 1985, 6]

1.2 El método sintético y el método analítico

Los antecedentes que dieron origen al desarrollo de la geometría griega estan determinados por el contacto continuo que tuvieron algunos filósofos y matemáticos de la antigüedad con las culturas egipcia y babilónica, aunque aún quedan dudas sobre este proceso, como lo planteá Eves:

> El grado o la extensión de la deuda de la geometría griega a la geometría oriental antigua es difícil de estimar, y la trayectoria de transmisión de una a otra no ha sido descubierta hasta ahora satisfactoriamente [Eves 1985, 9].

Este planteamiento en cierta forma nos muestra como el pensamiento geométrico del este fue inspirador de la geometría griega; aunque no existan elementos suficientes para comprobarlo, es necesario subrayar este posible legado [*vid.* Zhmud 1996].

La concepción geométrica de los griegos rompe con el antiguo esquema cognoscitivo y sienta las bases del método deductivo para conformar a la geometría como una ciencia. Los aspectos causales que dan origen al desarrollo de la geometría en Grecia no son en modo alguno prácticos como los de Egipto y Babilonia, sino que muestran un conocimiento sistematizado y una estructura conceptual con alto grado de abstracción y generalidad.

El desarrollo de la geometría griega tendrá su sustento en los estudios de Tales de Mileto, quién desarrolla -después de viajar por Egipto- un razonamiento lógico y desecha la experimentación intuitiva, sentando las bases del método deductivo.

> Además, el hecho de que el primer pensamiento deductivo fuera efectuado en el campo de la geometría, en lugar de en álgebra, por ejemplo, inaguró una tradición en matemáticas que se mantuvo hasta muy recientemente [Eves 1985, 11].

Bajo este aspecto, Tales parte de la consideración de que el universo es cognocible y de que sus detalles pueden ser deducidos por una lógica axiomática, lo cual fue útil en esta primera etapa de la geometría griega para liberar al hombre de los experimentos intuitivos y darle una mayor organización conceptual.

Con Pitágoras y sus discípulos se fundamenta la incipiente geometría, y la teoría de los números, desarrollando los temas que más tarde aparecerán en los libros I, II, IV y VI de los *Elementos* de Euclides.

La escuela pitagórica estableció la división en ramas de la matemática: estudiaba el cuántos o bien el cuánto. Los cuántos, es decir la cantidad discreta, podía estudiarse en sí (aritmética) o en relación con otra (música), mientras que el cuánto, es decir la cantidad continua, podía estudiarse fija (geometría) o móvil (astronomía) [Rey Pastor 1984, 25]. También estableció el método de prueba consistente en hacer un razonamiento deductivo a partir de ciertos postulados; este método constituye el procedimiento más poderoso para generalizar la experiencia, puesto que transforma un determinado número de casos en un teorema. Este encadenamiento lógico da una estructura a la geometría, que culminará en la obra de Euclides.

Dentro de los problemas estudiados por los pitagóricos cabe resaltar el de la aplicación de áreas que dividían en tres formas: la aplicación simple (parábola) que consiste en construir sobre un segmento dado un rectángulo de área dada; la aplicación por exceso (hipérbola) que consiste en prolongar un segmento dado de un cierto segmento desconocido, de manera que el rectángulo que tiene como altura el segmento desconocido y por base el segmento prolongado tenga una área dada; y la aplicación por defecto (elipse) que consiste en restar a un segmento dado un segmento desconocido, de manera que el rectángulo cuya altura es el segmento desconocido tenga una área dada. El problema de la división en media y extrema razón pertenece a este tipo de problemas. [Rey Pastor 1984, 25]

La introducción de la lógica demostrativa le da un cierto cuerpo normativo a la geometría. Así, la geometría adquirió un carácter teórico que permitió la ampliación y sistematización de esta rama, pero también la alejo de su origen y aplicación en la práctica.

Este carácter teórico esta impregnado de elementos míticos impuestos por Pitágoras, que se reflejan en la utilización de instrumentos precisos que permitan reproducir las cualidades de perfección y exactitud de las divinidades en figuras y cuerpos geométricos, como el círculo y la esfera. Apareciendo así, como instrumentos reproductores de la perfección, la regla y el compás como exclusivos de esta rama.

Con Platón continua este planteamiento mítico pitagórico que impregna a la geometría griega. El sentido de abstracción de la geometría fue un aporte de Platón, el cual se caracteriza por ser independiente a la experiencia y accesible sólo a unos cuantos[1]. Con ello hizo una contribución epistemológica a la concepción filosófica de la geometría, dándole un carácter enteramente abstracto, quedando fuera de su apreciación cualquier aportación práctica. Es más, se consideraba denigrante cualquier actividad manual o cálculo numérico, cuando éstos aparecían se les ocultaba con algo de geometría, pues se consideraban propios de los esclavos, a quienes estaba vedado cualquier tipo de conocimiento.

También desarrolló el estudio de la lógica, su critica al papel de la percepción sensorial y de la mente en el proceso de conocimiento fue muy importante, pero sin duda su mayor esfuerzo es la fundación de la Academia, donde difundió el estudio de la geometría, y de la que más tarde surgen hombres que contribuyen enormemente a la ciencia. La tradición académica continua con Aristóteles a través del Liceo, defendiendo el carácter abstracto de los principios y estableciendo categorías como: inducción, deducción, definición y diversas formas del silogismo, que dan un papel preponderante a la lógica en el proceso de acceder a las verdades objetivas, evitando en lo sucesivo cualquier acercamiento con la experimenta-ción práctica.

Con la extensión territorial de la cultura griega a manos de Alejandro Magno, discípulo de Aristóteles, la ciencia griega se pone en contacto con las viejas fuentes de la cultura oriental, produciendose el periodo más fertil para la geometría griega.

Ptolomeo, otro discípulo de Aristóteles, funda el Museo de Alejandría, instituto de investigación y enseñanza que supera por mucho a las anteriores escuelas; y por primera vez bajo el subsidio del gobierno alejandrino se crean condiciones óptimas para generar un gran avance en las ciencias exactas; aunado a esto y a hombres como Euclides, Arquímedes e Hipparco, el cuerpo de la geometría quedó formulado de manera coherente y lógico.

Hipócrates de Quíos y Eudoxio fueron parte de esta transformación importante de la geometría; Hipócrates denoto con letras las figuras geométricas facilitando su manejo y se ocupo de la solución geométrica de los problemas llamados clásicos -cuadratura del círculo, duplicación del cubo y trisección del ángulo-, que si bien no resolvió, permitieron establecer conceptos y técnicas que vinieron a dar un fundamento más a la geometría;

1 Aspecto que aún hoy se sigue manejando en las instituciones de educación modernas. De hecho, no sólo es inherente a la geometría sino que se hace extensivo a todas las matemáticas, generando con ello toda una serie de prejuicios que obstaculizan el acercamiento de muchas personas hacia esta disciplina.

así tambien condujeron a Hippias de Elis a construir curvas de orden superior -que fueron construidas con instrumentos mecánicos sin restricción al uso de regla y compás-, como la conchoide o la cisoide, entre otras; además, se dio el estudio de las propiedades de las cónicas como medio de resolución de problemas, tradición que especificaremos con detalle más adelante.

Eudoxio estableció la teoría de proporciones, aplicable a magnitudes, como aparece en el libro V de los *Elementos*; y el método de aproximaciones sucesivas o de exhaución para medir áreas y volúmenes, que bajo ciertas modificaciones de Arquímedes dio grandes resultados de importancia para la creación del cálculo infinitesimal. Memecmo desarrolla las secciones cónicas y sus propiedades fundamentales. Y como culminación, Euclides escribe los 13 libros de los *Elementos*, estableciendo una manera de hacer geometría que tendrá vigencia durante más de 2000 años.

Hipócrates fue el primero en intentar dar una presentación lógica de la geometría en la forma de una ordenación de proposiciones basadas en unas cuantas definiciones y suposiciones iniciales. Mejores intentos fueron los de Leon, Teudio y otros, pero no es sino hasta Euclides que este esfuerzo toma una forma acabada.

Los *Elementos* no contienen toda la geometría griega ni es un resumen de ella, sino que contienen una gran parte de los trabajos anteriores a Euclides y de él mismo, pero seleccionados de acuerdo a un criterio prefijado, lo que lo convirtió en un sistema tan fuerte que determinó un modelo de construcción científica, una especie de método sistemático y objetivo que se extendió a todas las ramas de la ciencia. Su contenido proviene de gran parte de los pitagóricos y de Eudoxio; y su orientación de Platón, del que tomo la abstracción y la primacía del conocer sobre el hacer; y de Aristóteles, de quien toma el riguroso método deductivo, y la separación entre principos (definiciones, axiomas, etc.) y teoremas. Su método se conoce actualmente como método axiomático.

Así como Platón sólo acepta la perfección del círculo y la esfera, Euclides sólo permite el uso de la regla y el compás, y aunque esto no es explícito, se deduce de su propio método; reafirmando así el caracter general y abstrácto de la tradición geométrica griega.

Otros libros importantes de Euclides, aunque no tan renombrados como el primero, son: *Datos*, *Porismas*, *Cónicas* y *Lugares geométricos superficiales*, en los que profundizó más en el estudio de la geometría de lo que se presenta en los *Elementos*. De hecho, muchos de ellos dieron pauta para que sus contemporáneos realizarán importantes aportaciones sobre lo que él inició. Tal es el caso de Arquímedes, cuyos trabajos ya presentan un rigor en las demostraciones y una expresión expositiva sistemática parecida a la forma en que en la actualidad son presentados los artículos de las revistas de investigación. Es importante señalar esto puesto que Arquímedes habla de un método para descubrir resultados, lo que muestra ya una asimilación y estructura conceptual propia de la concepción geométrica euclidiana. Su método no sólo involucra a la geometría euclidiana sino también una extensión del método de Eudoxio sobre la aplicación de áreas.

Posteriormente, con los estudios y aportaciones de Apolonio, quien completa la teoría geométrica de las secciones cónicas y plantea problemas relativos a lugares geométricos, vienen a redondear la labor emprendida por Euclides y a establecer definitivamente lo que se conoce como la tradición de la geometría griega, que define una forma de hacer geometría donde ésta tiene ya principios y leyes que le dan una estructura conceptual científica.

El estudio de las denominadas secciones cónicas empieza con Memecmo, pero no es sino hasta los trabajos de Apolonio que se desarrolla una forma especial de estudiarlas. Por secciones cónicas entendemos lo que resulta del proceso de seccionar un cono circular oblícuo por medio de un plano. Los nombres que usamos actualmente para denominarlas (elipse, hipérbola y parábola) son dados por Apolonio, pero hay un cambio más radical en su teoría que los simples nombres.

Arquímedes y Memecmo habían definido las propiedades de las cónicas en términos de proporciones, haciendo uso de la teoría euclidiana de proporciones, mientras que Apolonio los plantea en términos de relaciones de áreas, es decir, emplea la concepción y el lenguaje de la teoría de aplicación de áreas (veáse anteriormente la alusión que se hace a esta teoría por los pitagóricos). Esta manera de concebir a las cónicas resulta fundamental para una posterior asociación de las curvas con ecuaciones algebraicas en la geometría analítica. Es por ello que a partir de que Apolonio completa y sistematiza el estudio de las cónicas se plantea, por parte de los historiadores, la idea de que la diferencia entre la geometría moderna y la geometría antigua es más de método y notación que de contenido.

Con los estudios de Apolonio la geometría griega llega a su climax y con su muerte,

> ... la edad de oro de la geometría griega llegó a su fin, y los pocos geómetras que siguieron hicieron poco más que llenar los detalles y tal vez desarrollar en forma independiente algunas teorías cuyos gérmenes ya estaban contenidos en los trabajos de los tres grandes predecesores: [Euclides, Arquímides y Apolonio]. [Eves 1985, 33]

1.2.1 Los comentadores

Frente al gran legado geométrico de la época de oro, surgen otros grandes hombres que buscan preservar el conocimiento geométrico adquirido hasta ese momento, cuando éste aparentemente llegó a un estadio determinante, marcando los límites de la geometría griega. Entre éstos podemos mencionar a Menelao, Herón, Claudio y Ptolomeo, pero nuestro interés se centra en aquellos que son llamados comentadores, pero que bien pueden ser considerados geómetras, tales como Teón, Proclo, Hippias, Eutocio y Pappus.

La tradición de los geómetras griegos puso énfasis en los problemas de construcción[2], especialmente en el estudio de lugares geométricos[3] y la aplicación de la teoría de las cónicas iniciada por Euclides y Memecmo, y completada por Apolonio. Esta tradición es la que los comentadores posteriores, como Pappus, transmitirán y de alguna forma tratarán de enriquecer.

Los procesos de construcción, es decir, el diseño de figuras geométricas mediante regla y compás fueron indispensables en la demostración de este tipo de problemas.

Dichos procesos de construcción resultaron una herramienta útil para el estudio de tales problemas, por lo que fueron agrupados en lo que actualmente se conoce como *campo del análisis*, Pappus al respecto comenta que:

> Los libros que pertenecen al 'campo del análisis' se presentan en el orden siguiente: el libro único de los *Datos* de Euclides; los dos libros de la *Sección de razón*, los dos libros de las *Secciones de espacios*, los dos de la *Sección determinada* y los dos de *Contactos*, de Apolonio; los tres libros de *Porismas*, de Euclides; los dos *Sobre las inclinaciones*, de Apolonio; los dos *Sobre lugares planos* y los ocho sobre las *Cónicas*, del mismo; los cinco *Sobre lugares sólidos* de Aristeo; los dos *Sobre lugares superficiales* de Euclides, y los dos *Sobre las medias* de Eratóstenes. Estas obras forman la llamada Colección Analítica de los antiguos. [Vera 1970, Pappus, 993]

Los que a su vez contribuyeron en la conformación de métodos para resolver este tipo de problemas, tales como: el análisis y la síntesis. Estos han sido desarrollados primordialmente por tres hombres: Euclides, Arquímedes y Aristeo el viejo.

> El análisis -continúa Pappus- es el camino que parte de la cuestión que se busca, se considera lo que se deriva de ello y lo que le precede, hasta que volviendo sobre los pasos dados, se llega a una conclusión que ya se conoce o pertenece al orden de los principios, y este camino se llama análisis porque es una inversión de la solución, mientras que en la síntesis, por el contrario, suponiendo la cuestión, finalmente, conocida por el análisis, disponiendo sus consecuencias y causas en un orden natural y enlazando unas y otras, se llega a construir lo que buscamos, y este método es la síntesis. [Vera 1970, Pappus, 991]

Sin embargo, hay que distinguir entre dos clases de análisis: el teorético, que se dice que es el propio de la investigación[4]; y el problemático, que se utiliza para encontrar lo que se propone[5].

> En el análisis teorético se considera establecido y verdadero lo que se busca, y después, apoyandose en las consecuencias deducidas y aceptadas como verdaderas, y respondiendo a la hipótesis, se llega a una cuestión ya fijada que, si es verdadera, también lo es lo que se busca y la demostración será la inversa del análisis, y si es falsa, falsa será también la que se busca. En el análisis problemático[6] se supone conocida la proposición, y después, teniendo en cuenta las consecuencias deducidas y admitidas como verdaderas, se llega a una cuestión que si se puede realizar o ya está adquirida -lo que los matemáticos llaman datos

2 Recuérdese que los problemas de construccion se iniciaron con los problemas clásicos, anteriormente mencionados, y se desarrollan gracias a los fallidos intentos por resolver justamente estos problemas.

3 Por lugar geometrico entendemos, según las descripciones de Proclo, una posición de una línea o superficie que tiene por todas partes una y la misma propiedad. [Unguru 1987, 203]

4 También es conocido como análisis de teoremas, proposiciónes en las cuales la validez de una aseveración está determinada.

5 Se conoce como análisis de problemas, proposiciones que requieren de la construcción de un objeto descrito para varios hechos o datos.

6 El análisis de problemas es muy común en los tratados griegos, resaltándo dos aspectos, por un lado existe un gran repertorio de operaciones que son reversibles como pasos de construcciones geométricas, y por el otro, este análisis da información sobre las condiciones de posibilidad y el número de soluciones del problema, la determinación de la cual corresponde al porisma, y es parte esencial de la solución completa de un problema. Esencial para este tipo de análisis es el concepto de existencia *dada*, propiedad que es asumida al inicio del problema. La palabra *dado* tuvo un cierto rango de connotación matemática en la antigüedad pero se conoce comúnmente como 'asumido', 'determinado' y 'determinado y construible', la distinción entre los dos últimos sólo surge en problemas como el de la trisección del ángulo, donde los postulados admitidos no permiten la construcción del objeto, pero se considera que existe. [Jones 1986, 66]

o hipótesis- también se podrá realizar la proposición, y la demostración será, como antes, inversa del análisis, y si se llega a una cuestión imposible, también lo será el problema. [Vera 1970, Pappus, 991]

Así, la tradición geométrica griega establece claramente la distinción entre cada uno de los métodos posibles de solución y los asigna según el tipo de problema que se desea resolver, esta es una forma de dar un carácter normativo a la geometría. Nótese la importancia de la exploración metodológica a través de la historia, ya que ahora contamos con un criterio de distinción entre los principios que dan sustento a los métodos sintético y analítico.

Esta distinción entre el uso del método analítico y el sintético se basa en las características de los problemas a resolver, de esta manera los elementos que constituyen el problema son determinantes y cada uno de ellos forman parte de un concepto establecido, por lo que ahora se hace necesario diferenciar cada concepto geométrico y resaltar sus elementos teóricos. Entonces, analicemos los conceptos geométricos que se han mencionado y que son parte de este lenguaje propio de la tradición griega.

1.3 Conceptos teóricos de la geometría griega

A diferencia del lenguaje propio de la aritmética que no ha sufrido grandes cambios en cuanto a su apreciación conceptual, la geometría se ha manifestado como una disciplina en constante evolución metodológica y con ello se ha visto en la necesidad de emplear un lenguaje más específico y sistemático. He ahí la importancia de diferenciar la apreciación conceptual que existe entre la geometría tradicional griega y la geometría moderna, esto se hace evidente en las denominaciones que empleaban los griegos tales como longitud, área o volúmen donde no se estaba pensando en números asignados a una representación -como en la actualidad-, sino en manejar relaciones entre las magnitudes de las figuras que ya estaban identificadas con letras; para ellos hablar de geometría era hablar de magnitudes y no de números (para una discusión detallada véase [Jones, Ch. 1987, 8]).

Esta geometría de las magnitudes no permitió el desarrollo de lo que comunmente conocemos como fracciones[7], pero si de relaciones especiales que se denominaron razones y proporciones; tales relaciones fueron importantes en los métodos de resolución de problemas geométricos, ya que su solución exigía la construcción de figuras u objetos. Las construcciónes dependían de la forma en que las razones y proporciones relacionaban a las magnitudes de las líneas o segmentos de curvas. Es por ello que se afirma que los griegos desarrollaron una geometría de las medidas, la cual se entiende como el manejo de figuras geométricas a las que se les asocian magnitudes.

Los metodos de resolución de problemas geométricos además de exigir la construcción de figuras requerían el manejo de una serie de conceptos que dieran coherencia lógica y esta-blecieran la veracidad de los resultados, a dicho procedimiento metodológico se le conoce como demostración. La base de dicha demostración se sustentaba en un conjunto de nocio-nes causales que le daban orientación y sistematización; a dichas nociones Euclides las denominó *nociones comunes* y posteriormente con la geometría moderna fueron llamados *principios básicos*.

Los principios básicos conforman el eje central en torno al cual se desarrolla el discurso científico, estos se presentan como el eslabón del conocimiento, y su veracidad será el sustento de todo el discurso. Todos los demás términos técnicos son derivados de los principios básicos, su veracidad depende de su relación con dichos principios. Tal es el caso de los axiomas y postulados.

Aunque los matemáticos actuales empleen axioma y postulado como sinónimos, los griegos antiguos hicieron la distinción, adoptada por Euclides, de que un axioma es una suposición inicial a todos los estudios, mientras que un postulado es una suposición inicial que pertenece al estudio en mano.

Los principios básicos y los axiomas son considerados como la base de la que parte el discurso, es decir, sólo de estos principios es posible empezar a deducir mediante un razonamiento lógico las consecuencias del discurso. Estos principios deducidos se llaman teoremas. Sin embargo, habría que distinguir entre lo que es un problema, un teorema y un porisma, tal como lo diferenciaron los geómetras griegos.

El problema es una proposición que obligatoriamente requiere de una construcción para su demostración; el teorema es una proposición que debe demostrarse, incluya o no una construcción; y por último, un porisma es a lo que normalmente denominaron resolución de problemas sobre lugares geométricos[8]. Estos últimos abundan en el 'campo del análisis'.

Cuando de un problema[9] se dice que tiene varias soluciones, significa que pertenece a los problemas sobre lugares geométricos, justamente las condiciones de posibilidad y el número de soluciones del problema, determinan al porisma. Su solución es una curva, que podra ser plana, sólida o lineal, estas tres categorías clasifican a las curvas según la forma en que son generadas.

Los griegos[10] clasificaron a las curvas en tres grupos: los lugares planos, que son los lugares engendrados por la línea y el círculo; los lugares sólidos, formados por secciónes cónicas, es decir, por la parábola, la elípse y la hipérbola; y, por último, los lugares lineales, constituidos por las llamadas curvas mecánicas, que son generadas a partir de la intersección de diversas curvas en movimiento.

7 Número y magnitud se distinguen por su divisibilidad. Magnitud, siendo continua, es infinitamente divisible; también número es divisible, pero finitamente: cuando el proceso de división llega a la unidad debe parar, lo que impide a los números ser continuos. Ya que si la unidad fuera divisible, habría razón para suponer que sus partes son divisibles, y así en adelante hasta que la unidad fuera infinitamente divisible. Esto haría al número continuo e indistingible de magnitud. Luego, no hay fracciones. [Jones, Ch. 1987, 8].

8 No es totalmente clara esta distinción, pero parece ser que usan este término en función del libro de Euclides sobre porismas que aborda este tema, para una discusión detallada véase [Knorr 1986].

9 Es importante señalar que mientras Proclo habla de teoremas sobre lugares geométricos, en Pappus encontramos que son problemas sobre lugares geométricos, si bien puede ser un detalle de traducción, lo cierto es que si existe una diferencia entre la concepción de cada uno hacia el legado de la tradición griega, para una discusión detallada véase nuevamente [Knorr 1986].

10 Aunque hay que notar que esta clasificación ya había sido establecida -a groso mod[illegible] de Apolonio, no es sino hasta Pappus que adquiere un caracter normativo. Mas aún, Pappus se enfrenta a problemas que no encajan en esta calsificación; para una discusión detallada véase [Knorr 1986, 441-445].

Sin embargo, habría que distinguir entre la propiedad que poseen las curvas y su origen geométrico. En particular, la parábola, la hipérbola y la elipse son definidas comosecciones de un cono, es decir, este es el origen geométrico que las define, aunque al mismo tiempo responden a preguntas como: ¿qué curva tiene la propiedad de que si desde uno de sus puntos se considera su distancia hacia tres líneas fijas, en un ángulo dado, los rectángulos cuyos lados son dos de las distancias sostienen una relación fija con el cuadrado de la tercera distancia? Esta es una propiedad que poseen las cónicas, pero no es una manera alternativa de definirlas. Con esto último lo que se busca es demostrar que los puntos sobre una sección cónica dada proveen de una solución a un determinado lugar geométrico. [Unguru 1996, 203-207]

Y es en este contexto donde el problema de lugares geométricos adquiere mas significado. Ya que es aquí donde el llamado problema de Pappus -o problema del lugar geométrico con respecto a tres y cuatro líneas- adquiere sentido.

1.4 El problema de Pappus

Antes de continuar, es importante retomar de la exposición anterior los elementos necesarios para analizar las soluciones al problema de Pappus. Observese como del desarrollo del método de tanteo se extraén las relaciones analógicas y empíricas desarrolladas a través de la observación y la experiencia, aspectos que aunados a un razonamiento deductivo dieron sustento a los métodos sintético y analítico griegos. De ahí se caracterizó al 'cuerpo del análisis' y a ciertos tipos de problemas de construcción, dentro de los cuales se enmarcan los que corresponden a lugares geométricos. Además se establecieron clasificaciones para las curvas y una distinción muy importante entre problemas, teoremas y porísmas, a los cuales se les aplican los métodos sintético y analítico, todo esto enmarcado dentro del uso de la regla y el compás como marca la tradición geométrica griega.

Conforme a ello, estamos en posibilidad no sólo de identificar cada elemento en el problema de Pappus sino de determinar hasta que punto cada uno de los intentos de demostración que le fueron dados, son válidos dentro de esta tradición geométrica.

Los primeros intentos en dar una demostración para el problema de Pappus -que en ese momento no se conoce con este nombre, sino como el lugar geométrico respecto a tres y cuatro líneas- se encuentran en los estudios de problemas sobre lugares geométricos realizados por Aristeo, aunque no se tiene suficiente información sobre esto, al menos sabemos que fueron estudiados para tres casos: dos, tres y cuatro líneas, sin llegar a un resultado satisfactorio.

Euclides, basandose en este estudio, escribe acerca de cómo los lugares geométricos son solucionados a partir de las cónicas de Aristeo, pero sin pretender dar su demostración completa, salvo en el caso para dos líneas. El siguiente en retomar el problema es Apolonio, quien afirma en el libro III de las *Cónicas* que el problema no fue enteramente resuelto por Euclides, y en cuanto a él mismo, solo logró demostrarlo para el caso de tres líneas, llegando así hasta la época de los comentadores, en donde Pappus profundiza el problema, clasifica las demostraciones hasta el momento logradas y generaliza los casos para más de cuatro líneas [11].

Pappus al igual que sus antecesores se quedaron en el intento; esto es concebible dadas las limitaciones que la misma concepción geométrica griega les impuso. A pesar de que ya se contaba con una teoría sobre la aplicación de áreas y el estudio de las cónicas, y un conjunto de elementos útiles en la resolución de problemas de esta índole, que constituyeron el 'cuerpo del análisis', y enfoques metodológicos necesarios para acceder a la demostración de dicho problema.

Veamos detalladamente estos intentos de demostración que hemos mencionado, para ello comencemos por dar la última versión del problema que aparece en el planteamiento de Pappus. Dado que se conserva su escrito original, la *Colección*, el enunciado del problema se puede extraer del mismo, sin embargo, dadas las limitaciones para conseguirlo nos hemos apoyado en la traducción que ha hecho Descartes, en su libro de la *Geometría*, y el cual presenta una gran veracidad[12]. Libro que le sirve de plataforma para desarrollar su geometría analítica y evidenciar la potencialidad de su método.

El problema se puede enunciar de la siguiente manera:

> Si son dadas tres líneas rectas en posición, y se trazan otras tres líneas rectas desde un mismo punto formándose ángulos conocidos con las tres líneas dadas, y si, a su vez, es conocida la proporción del rectángulo formado por dos de las líneas trazadas con el cuadrado de la otra, entonces el punto se encuentra en un lugar sólido dado en posición, es decir, sobre una de las tres secciones cónicas. Y si, de nuevo, se trazan cuatro líneas sobre cuatro rectas dadas en una determinada posición, en ángulos dados, y se da la proporción del rectángulo formado por dos de las trazadas con el formado por las otras dos, entonces y de modo semejante el punto se encuentra sobre una sección cónica. Por otra parte se ha demostrado que únicamente a dos líneas corresponde un lugar plano; pero, si hay más de cuatro líneas, el lugar del punto no es de los que son conocidos, es de los llamados simplemente 'líneas', sin conocerse nada más sobre su naturaleza o propiedades. Y no se ha hecho la síntesis de ninguna de estas líneas ni demostrado su aplicación a estos lugares, ni aún respecto a una de ellas, no la primera, pero si la más clara, ha sido examinada siendo de utilidad. Las proposiciones relacionadas con las mismas son éstas:
>
> Si desde un punto son trazadas cinco líneas rectas, dadas en posición, sobre otras rectas bajo ángulos dados, y se da la proporción entre el paralelepípedo rectangular comprendido bajo tres de las trazadas y el paralelepípedo rectangular formado por las otras dos y la línea dada, el punto se encontrará sobre una cierta línea. Si las rectas dadas son seis y se da la proporción del sólido comprendido bajo tres de las trazadas con el sólido bajo las otras tres, el punto se encontrará igualmente sobre cierta línea. Pero si hay más de seis rectas, no podemos saber si se guarda la proporción de algo comprendido por cuatro líneas con algo comprendido bajo el resto, pues nada hay que esté comprendido bajo más de tres dimensiones... Sin embargo, poco antes de nosostros se ha acordado la libertad de hablar así, sin designar, empero, nada que no sea inteligible, diciendo: lo comprendico por tales rectas con respecto al cuadrado de tal recta, o lo comprendido por tales otras. Y es fácil, por medio de las relaciones compuestas, enunciar y demostrar en general las anteriores proposiciones del siguiente modo:
>
> Si desde un punto se trazan sobre rectas dadas otras rectas que formen ángulos dados y, a la vez, se posee la relación compuesta de una de las trazadas a otra de ellas, de la segunda con la segunda, de la tercera con la tercera y, si son siete, de la última con la

11 La falta de documentos originales obstaculiza el análisis de hasta que punto Euclides había avanzado en la solución del problema y para cuantos casos, sólo sabemos que en Apolonio aparecen los casos para dos y tres líneas resueltos, aunque sin determinar la solución por completo, pues encuentra las curvas pero no demuestra que sean líneas o secciones cónicas según el caso.

línea dada o, si son ocho, la de la cuarta con su correspondiente, el punto se encontrará sobre una de las líneas dadas en posición. De modo semejante, cualquiera que sea el número de rectas -par o impar-, puede afirmarse lo mismo. Pero, como he dicho, para cualquiera de los lugares que siguen al que coresponde a cuatro rectas, ninguna síntesis ha sido propuesta de modo que la línea sea conocida. [Descartes 1954, 18-22 inglés, 286-287 español, A-T, VI, 378-379 latín]

Una versión moderna del problema aparece en la figura 1; y en la figura 2 se presenta la versión según la apreciación de Descartes.

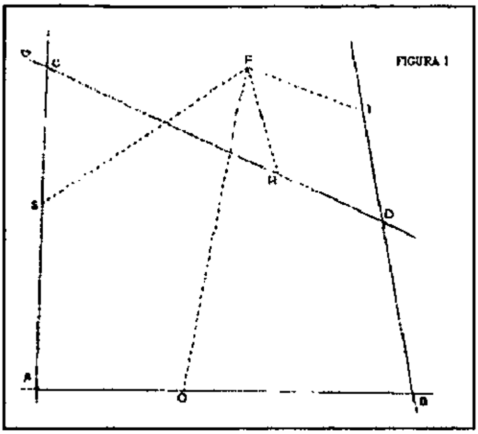


Fig. 1. (Fuente: [Lachterman 1989, 144-146]). El problema de Pappus: Dadas (tres) cuatro líneas en posición, encontrar el lugar geométrico de los puntos desde los cuales otras (tres) cuatro líneas se pueden trazar a las (tres) cuatro líneas dadas en ángulos iguales con la línea que tocan, tal que el producto (cuadrado) de (una) dos de ellas está siempre en una razón dada con el producto de las otras dos. El lugar geométrico es una cónica que pasa por las intersecciones de las (tres) cuatro líneas dadas. [Versión moderna].

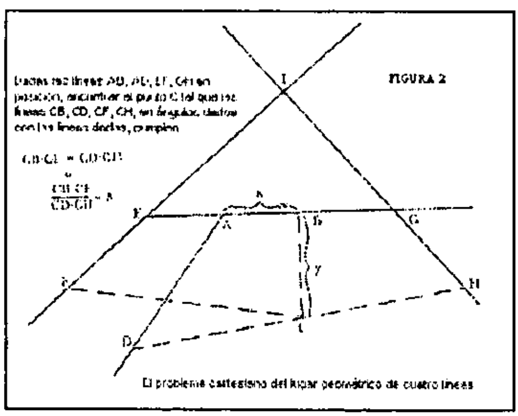


Fig. 2. (Fuente: [*Ibid.*]). El problema de Pappus según la versión de Descartes. Resuelve el problema tomando dos rectas como ejes de referencia (x, y), establece las propiedades de las curvas en función de x y y, obteniendo $x^2 = \pm ax + b^2$, de donde puede encontrar x con regla y compás. Ahora, al tomar distintos valores para y obtendrá otros para x; luego encuentra diversos puntos que cumplen la propiedad, describiéndose la curva requerida.

12 La traducción que aparece en el libro de Descartes resulta ser fiel, gracias a que se cuenta con tres versiones: latín, ingles y español; todas con relativa fidelidad a la traducción que aparece en el libro original de Pappus, según lo dado por hecho por diversos historiadores.

Veamos primero el caso para dos líneas. Aunque al parecer Euclides cuenta con la demostración de este caso, la falta de documentos que lo amparen nos hizo recurrir a la única fuente disponible, [Jones 1987, 542]. En donde aparece el enunciado, mas no la demostración, que se extrae del libro I de Apolonio *Sobre Lugares Planos*.

> Lugar geométrico 6: Dadas las líneas rectas L_1 y L_2, sea un punto variable P tal que, si M_1 y M_2 son segmentos dibujados de P en una dirección fija hacia L_1 y L_2, o $M_1:M_2$ o M_1+kM_2 (k constante) resultan constantes. Entonces el lugar geométrico de P es una línea recta. [Cuando L_1 y L_2 no son paralelas, este lugar geométrico es equivalente a la representación cartesiana de una línea recta. La generalización de esto a más de dos líneas es el lugar geométrico 'multilíneas', o de n líneas, discutido por Pappus más adelante].

1.4.1 Soluciones propuestas para el problema de Pappus en el caso de tres líneas

Para el caso de tres líneas, esencialmente es a partir de la proposición 54 del libro III de las *Cónicas* de Apolonio, que se puede dar una relación entre las cónicas y las condiciones que establece el problema de Pappus.

> Proposición 54: Si por los puntos de contacto de dos tangentes a una sección cónica o a la circunferencia de un círculo se trazan paralelas a las tangentes y transversales a un mismo punto de la curva que corten a las paralelas, entonces la razón del rectángulo limitado por los segmentos producidos en relación al cuadrado de la línea recta que une los puntos de contacto, se compone de la del cuadrado del segmento interior de la recta que une el punto de intersección de las tangentes con el punto medio de la línea recta que une a los puntos de contacto, junto con el cuadrado del otro segemento (el residuo), y también de la razón del rectángulo limitado por las tangentes respecto a la cuarta parte del cuadrado sobre la línea recta que une a los puntos de contacto.

La demostración de esta proposición se dará a continuación, contrastando su escritura en versión de Apolonio y en sentido moderno.

> Sea ABC la sección de un cono o la circunferencia de un círculo y AD, CD las tangentes; únase AC y biséctese en E, únase DBE y trácese AF desde A paralela a CD y CG desde C paralela a AD; sea H un punto sobre la sección y únase AHG y CHF (figuras 3, 4 y 5)[13].

Escritura de Apolonio	Escritura Moderna
Digo que: rect.AF,CG:cuad.AC comp.[14] cuad.EB:cuad.BD,rect.AD,DC. cuatro veces cuad.AC o rect. AE,EC.	P.D. $FA\bullet GC:AC^2::EB^2(CD\bullet DA):$ $BD^2(CE\bullet EA)$, i.e. $(FA\bullet GC)/AC^2=EB^2(CD\bullet DA)/$ $BD^2(CE\bullet EA)$
Trácese desde H paraléla a AC, KHOXL, y desde B, MBN paralela a AC; entonces es evidente que MN es tangente (Apolonio II,29,5,6), y	Trácese KHOXL paralela a AC y MBN paralela a AC (MN es tangente) Como AE=EC, MB=BN, KO=OL, OH=OX (Apolonio II,7)

como AE=EC, también
MB=BN
y KO=OL
y OH=OX (Apolonio
y KH=XL II,7)

y cómo MB y MA son tangentes
y KHL fue trazada paralela a
MB, entonces
cuad.AM:cuad.MB::cuad.AK:
rect.XK,KM (Apolonio III,16)
o cuad.AM:rect.MB,BN::cuad.AK:
rect.LH,HK

y KH=XL, y como MB y MA son
tangentes y KHL es paralela
a MB entonces,

$AM^2/MB^2=AK^2/XK \bullet KH$
(Apolonio III,16)
o $AM^2/(MB \bullet BN)=AK^2/(LH \bullet HK)$
y $(NC \bullet AM)/AM^2=(LC \bullet AK)/AK^2$
(Euclides VI,2, V,18)
por lo tanto

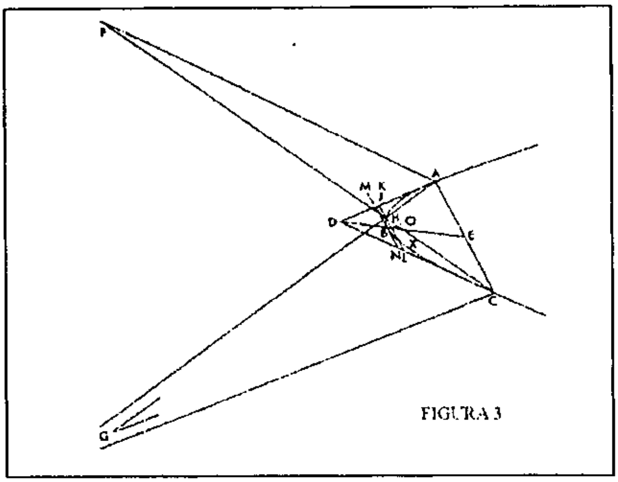


FIGURA 3

y rect.NC,AM:cuad.AM::rect.
LC,AK:cuad.AK (Euclides
VI,2, V,18)
por lo tanto, es igual a
rect.NC,AM:rect.MB,BN::rect.
LC,AK:rect.LH,HK, pero
rect.LC,AK:rect.LH,HK comp.
LC:LH,AK:HK
o rect.LC,AK:rect.LH,HK comp.

$(NC \bullet AM)/(MB \bullet BN)=(LC \bullet AK)/(LH \bullet HK)$ (1)

pero, tenemos que
$AM^2=AK^2(MB \bullet BN)/(LH \bullet HK)$
y $AM^2=AK^2(NC \bullet AM)/(LC \bullet AK)$
así,
$AK^2(MB \bullet BN)/(LH \bullet HK)=AK^2(NC \bullet AM)/(LC \bullet AK)$

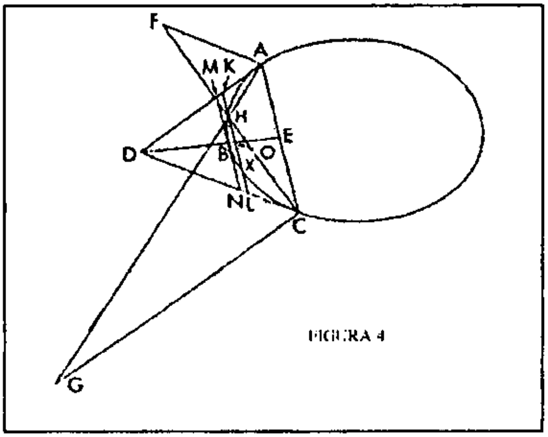


FIGURA 4

FA:AC,GC:CA
lo cual es lo mismo que
rect.GC,FA:cuad.CA
entonces
rect.NC,AM:rect.MB,BN::
rect.GC,FA:cuad.CA
pero tomando el rectángulo
ND,DM como media,
rect.NC,AM:rect.MB,BN comp.
rect.NC,AM:rect.ND,DM,
rect.ND,DM:rect.MB,BN
por lo tanto
rect.GC,FA:cuad.CA comp.
rect.NC,AM:rect.ND,DM,
rect.ND,DM:rect.MB,BN
pero
rect.NC,AM:rect.ND,DM::
cuad.EB:cuad.BD
y rect.ND,DM:rect.NB,BM::
rect.CD,DA::rect.CE,EA
de donde
rect.GC,FA:cuad.CA comp.
cuad.BE:cuad.BD,rect.CD,DA:
rect.CE,EA.[15]

de donde
(LC•AK)/(LH•HK)=(NC•AM)/
(MB•BN)
pero
(LC•AK)/(LH•HK)=(FA•GC)/
CA^2 (2)
entonces por (1) y (2) tenemos
que (NC•AM)/(MB•BN)=
(CG•FA)/CA^2 (3)

pero, tomando el rectángulo
ND,DM como media proporcional
entre lo que sería el rectángulo
NC,AM y el rectángulo MB,BN;
esto es
(NC•AM)/(ND•DM)=
(ND•DM)/(MB•BN)
y componiendo, tenemos que
(NC•AM)/(MB•BN)=(NC•AM)•
(ND•DM)/(ND•DM)(MB•BN) (4)
luego, por (3) y (4) tenemos
(GC•FA)/AC^2=(NC•AM)(ND•DM)/
(ND•DM)(MB•BN)
pero componiendo

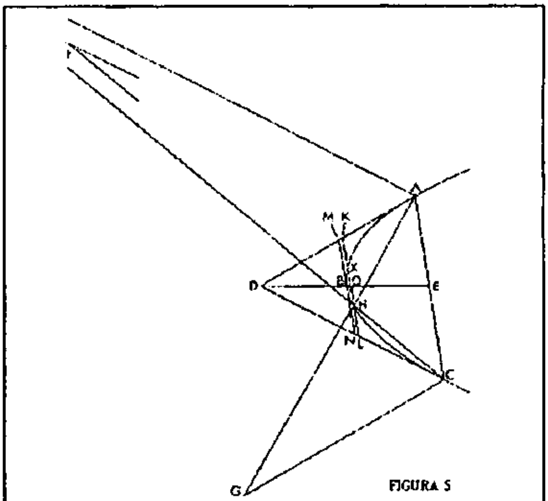


FIGURA 5

$NC/ND = EB/BD$ con $AM/DM = EB/BD$
asi como
$ND/NB = CD/CE$ con $DM/BM = DA/EA$
tenemos respectivamente que
$(NC \bullet AM)/(ND \bullet DM) = EB^2/BD^2$ y
$(ND \bullet DM)/(NB \bullet BM) = (CD \bullet DA)/(CE \bullet EA)$, por lo tanto
$(GC \bullet FA)/AC^2 = EB^2(CD \bullet DA)/BD^2(CE \bullet EA)$[16]

Este resultado nos induce a pensar en una sección cónica o en un círculo como el lugar geométrico respecto a tres líneas, o bien responde a la pregunta: ¿cual es el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a tres rectas dadas, son tales que el cuadrado de una de estas distancias está en una razón constante con el rectángulo formado por las otras dos distancias?

> De ahí, podemos inducir que la párabola, la elipse, la hipérbola y el círculo satisfacen las propiedades del lugar geométrico de tres líneas, como se vio en la proposición 54, y el cual puede ser establecido para secciones opuestas (hipérbola con ambas ramas) en III,55 y III,56. Tal hecho podemos enunciarlo del siguiente modo: alguna sección cónica, círculo o sección opuesta puede ser considerada como el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a tres líneas rectas fijas son tales que, el cuadrado de una de las distancias está siempre en una razón constante con el rectángulo contenido por las otras dos distancias, (rect.AF,CG: cuad.AC comp. cuad.EB:cuad.BD, rect.AD,DC:cuatro veces cuad.AC).

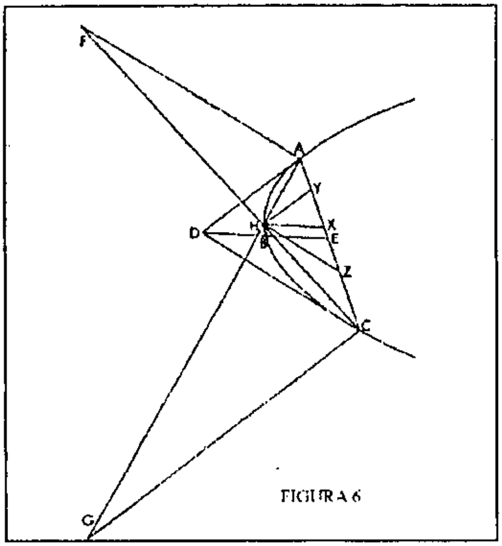


FIGURA 6

Lo anterior nos confirma que Apolonio llegó a establecer la relación que había entre la propiedad del lugar geométrico de tres líneas y las cónicas, resolviendo de esta manera la parte analítica, más no la parte sintética, del problema. Y es justamente esta parte, que aparece en el apéndice del libro III de las *Cónicas*, la que estudiaremos. Y en la que demostrarémos que el problema no fue satisfactoriamente resuelto.

> Consideremos las rectas AD, DC, y AC fija y dada, luego DE será fija, dada y bisectará a AC; de donde las líneas AC, EB, BD, AD y DE, así como los cuadrados sobre ellas y los rectángulos comprendidos por ellas son fijos y dados. Como el punto H es tomado de puntos diferentes a lo largo de la cónica, las líneas rectas AF y CG cambian de magnitud, sin embargo el rectángulo AF,GC permanece constante por la proporción anterior (figura 6).
>
> Tracemos HX paralela a BE, HY a AD y HZ a DC; HX es la distancia de H a AC en un ángulo dado; y de la relación de paralelismo, AY representa la distancia de H a AD en un ángulo dado y ZC representa la distancia de H a DC en otro ángulo dado; entonces por triángulos semejantes

Escritura de Apolonio	Escritura moderna
CZ:ZH::AC:AF	CZ/ZH = AC/AF
AY:YH::AC:CG	AY/YH = AC/CG
entonces, componiendo	luego, multiplicando
rect.CZ,AY:rect.ZH,YH::cuad.AC: rect.AF,CG	$CZ \bullet AY/ZH \bullet YH = AC^2/AF \bullet CG$

Ahora, hemos visto que el rectángulo AF,CG es una magnitud constante cuando el punto H cambia, y el cuadrado sobre AC es constante, luego su razón es constante

rect.CZ,AY:rect.ZH,YH está en una razón constante (1)	CZ•AY/ZH•YH = cte. (1)
Además, por triángulos semejantes, ZH:HX::CD:DE YH:HX::AD:DE	Además, por triángulos semejantes ZH/HX = CD/DE y YH/HX = AD/DE
entonces, componiendo rect.ZH,YH:cuad.HX::rect.CD,AD:: cuad.DE	entonces, multiplicando $ZH\bullet YH/HX^2 = CD\bullet AD/DE^2$

Pero el rectángulo CD,AD y el cuadrado sobre DE son magnitudes constantes cuando el punto H cambia, luego su razón es constante. Por lo tanto,

rect.ZH,HY:cuad.HX está en una razón constante (2)	$ZH\bullet YH/HX^2$ = cte. (2)
componiendo (1) y (2), obtenemos una razón constante, es decir rect.CZ,AY:cuad.HX está en una razón constante	componiendo (1) y (2), obtenemos una razón constante, $CZ\bullet AY/HX^2$ = cte.

En otras palabras, cuando el punto H cambia, el rectángulo formado por las distancias de H a dos puntos de las líneas dadas (en ángulos dados), tiene una razón constante respecto al cuadrado sobre la distancia de H a la tercera línea (en ángulo dado). Si se eligen otros ángulos, la propiedad de ser constante se mantiene, aunque la razón constante no será la misma (figura 7).

Resumiendo, una parábola, elipse, hipérbola o círculo son el lugar geométrico de tres líneas en relación a dos tangentes cualesquiera con respecto a ellas y a una línea recta que une los puntos de contacto. Una sección opuesta es, asimismo, un lugar geométrico de tres líneas respecto a cualquier par de tangentes a otra sección, junto con la línea que une sus puntos de contacto. Las dos secciones opuestas juntas son un lugar geométrico con respecto a dos tangentes, una en cada sección, y a la línea recta que une sus puntos de contacto[17].

13 Las figuras 3-7 son tomadas de [Apolonio 1989, 793-796].

14 Por comp. se entiende composición de razones (Euclides VI,23). Esto en sentido moderno equivale a la 'multiplicación' de razones.

15 Apolonio de Pérgamo. 1989. *Conics*, en *Great Books, Encyclopeedia Britanica*, 11: 793-96. Citado en [Rodriguez 1992, 57-58].

16 [Rodriguez 1992, 59-60]. La demostración de la proposición 54 se basa en I,32 y 46-47, según se trate de la parábola o de las cónicas con centro, y II,7, del mismo libro de Apolonio.

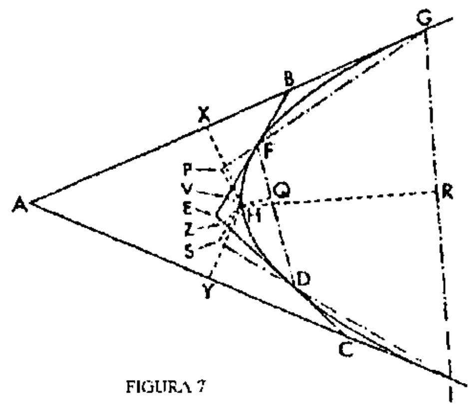


FIGURA 7

En cuanto a estas curvas, Apolonio parte de ellas y deduce las propiedades que satisfacen el lugar geométrico de tres líneas, pero no verifica que los puntos que cumplen dichas condiciones formen tales curvas, no especificando a cuál de ellas se refiere, y menos aún su construcción, de hecho Apolonio no tuvo forma de dar este último paso.

Hasta aquí, se han desarrollado las soluciones tanto de Euclides como de Apolonio, pero más adelante observaremos como contrastan con la forma en que el problema es abordado por Pappus, ya que para él no es sólo mostrar que las cónicas satisfacen las propiedades del lugar geométrico de tres líneas (análisis del problema), sino también el inverso, que dadas las líneas y las condiciones que se piden, uno pueda mostrar que el punto que las cumple está en una de las secciónes cónicas, y más aún, construir tal curva (síntesis del problema). Es decir, Pappus emplea los métodos sintético y analítico, mientras que Euclides y Apolonio sólo el método analítico.

Esta diferenciación entre la parte sintética y analítica de la solución del problema puede observarse en la siguiente reconstrucción actual[18] dada por uno de los especialistas en matemáticas griegas, W.R.Knorr. Con esta reconstrucción buscamos evidenciar el contraste y las dificultades para este caso, así como las herramientas que son necesarias para resolver tal problema.

Para Knorr (*vid.* Knorr 1986, 120-127), la solución del problema general de tres líneas puede ser construida sobre la base de III,16 de la *Cónica* de Apolonio, esto contrasta con la posición de Zeuthen -aceptada por varios historiadores, entre ellos Heath-, que sustenta la solución en la proposición III,54 (*ibid*, 123). En referencia a la proposición III,16 (escrita en notación moderna y con auxilio de la figura posterior) observemos su aplicación en la solución del problema.

III,16: Si OP, OQ son tangentes a una cónica y KK´es una línea secante, paralela a OQ, la cual intersecta a la cónica en R, entonces $OP^2:OQ^2 = PK^2:KR \bullet RK'$.

El hecho de que una cónica tenga la propiedad del lugar geométrico de tres líneas se sigue de III,16, ya que si trazamos las tangentes TP, TP´a la cónica y la cuerda PP´que bisecta a la cónica en V, y unimos TV tocando a la cónica en Q (figura 8)[19], entonces TV será el diámetro correspondiente a la ordenada paralela a PP´ (esto es, QV bisectará a toda cuerda paralela a PP´, figura 9). Sin embargo, si OQ es trazada paralela a PP´, será tangente a la cónica en Q. Si enseguida trazamos líneas desde R paralelas a TP, TV y TP´tocando a PP, respectivamente, en S, V´y S´, entonces KR=PS, RK´=S´P´y PK´:RV´=PT:TV.

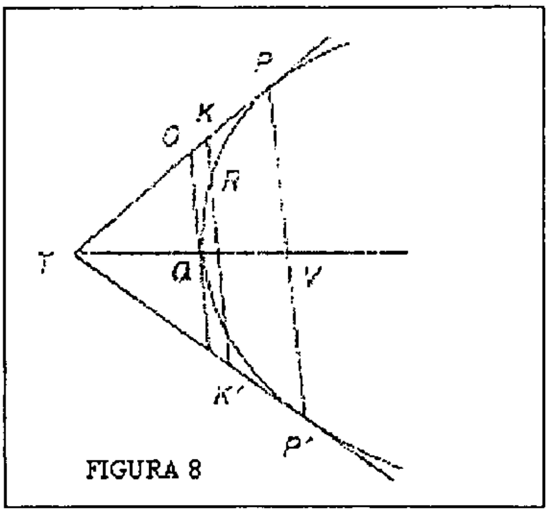


FIGURA 8

Tenemos entonces por III,16 y las relaciones anteriores que: $OP^2:OQ^2=PK^2:KR \bullet RK'=(RV'^2:PS \bullet S'P')(PT^2:TV^2)$;
así que $RV^2:PS \bullet S'P'$ tiene un valor dado, independientemente de la elección del punto R sobre la cónica. Como las longitudes PS, S´P´y RV son las respectivas distancias de R a las líneas TP, TP´, PP´en las direcciones dadas de PP´, TV´, se observa que R está en el lugar geométrico de tres líneas relativo a las líneas TP, TP´, PP´, y el valor dado de la razón [parte analítica].

17 Apolonio de Pérgamo. 1989. *Conics*, en *Great Books, Encyclopeedia Britanica*, 11: 799-804.

18 Es muy distinto mostrar el planteamiento de Apolonio en notación actual, que dar una reconstrucción moderna de una posible solución al problema, pues este último se basa en el criterio de la persona que lo propone y no propiamente de lo hecho por Apolonio; mientras que en el primero se presenta lo escrito unicamente por él.

19 Las figuras 8-10 son tomadas de [Knorr 1986, 120-127].

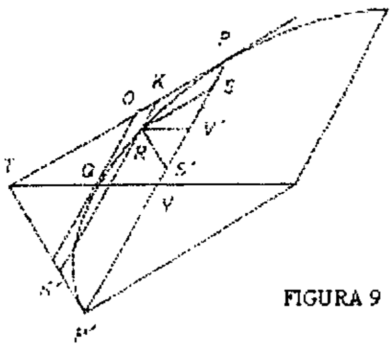


FIGURA 9

Inversamente, para encontrar la curva que satisface las condiciones del lugar geométrico de tres líneas, notemos que si Q es la intersección de la curva con TV, entonces $QV^2:PS \bullet S'P' = M^2:N^2$, una razón dada (figura 10). Ya que $PS = S'P' = OQ$ y $OQ:TQ = PV:TV$, se tiene que $QV:TQ = (M:N)(PV:TV)$ es una razón dada. Podemos así determinar Q sobre la línea dada VT por medio de esta proporción y entonces introducir la cónica de vértice Q, diámetro TV y tangentes TP,TP´. Cuando Q bisecta a VT, la cónica es la parábola cuyo lado recto L satisface la relación $PV^2 = QV \bullet L$; de lo contrario, encontramos Q´por medio de la relación armónica $QV:VQ' = QT:TQ'$, luego QQ´será el diámetro de la cónica y L su lado recto, para $PV^2:QV \bullet VQ' = L:QQ'$. Esto produce una elipse cuando QV es menor que TQ y una hipérbola cuando es mayor.

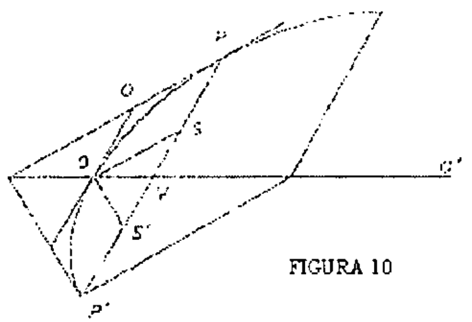


FIGURA 10

Observese ahora el contraste que hay entre la proposición 54 y la 16, en el intento por resolver un problema específico: determinar una cónica que pasa através de tres puntos dados y que sea tangente a dos de las líneas dadas. De las figuras anteriores y usando los datos, podemos especificar el valor de $QS \bullet Q'S':QQ'^2$ tal que la razón PV:PT es dada de III,54; esto determina P y su conjugado armónico P´de PV:PT::P´V:P´T, de manera que el diámetro PP´es conocido.

De la relación $QV^2:PV\bullet VP'$: $L:PP'$, el lado recto L es conocido; así hemos encontrado la cónica requerida, aunque aún no sabemos cúal es y por lo tanto no podemos construirla; mientras que usando III,16 sabemos qué curva es y podemos construirla.

Los casos en que se consideran ambas ramas de la hipérbola, son aspectos del problema que no están dentro del rango de la teoría de las cónicas antes de los trabajos de Apolonio. Las proposiciones II,55 y III,56 dan solución a estas variantes; al igual que dos configuraciones análogas a III,16, (II,18, 19), una donde las tangentes son trazadas desde PP'sobre una rama y R está sobre la segunda; y la otra cuando las tangentes son trazadas en diferentes ramas, de donde se puede completar la construcción del lugar geométrico. Y justamente este es el contraste entre el enfoque de Zeuthen y el de Knorr, así como la posibilidad o imposibilidad de construir la cónica requerida en cada caso.

Finalmente, Knorr concluye que la solución del problema para tres líneas, donde el lugar geométrico es una parábola, una elipse o una sóla rama de una hipérbola, estuvo disponible para cualquiera que conociera la propiedad demostrada en *Cónicas* III,16 [Knorr 1986, 122].

Sin embargo, este supuesto de Knorr está fuera del contexto histórico en que el problema fue planteado. En su momento, no sólo Apolonio, sino ninguno de los geometras griegos logró plantear el problema de la forma en que Knorr pretende. De hecho, lo que se observa, es que sólo hasta Pappus se da la necesidad de emplear los métodos sintético y analítico en la solución del problema.

De esta larga exposición podemos concluir, que ya sea como sugiere Heath (tomando como base III,54-56 y el apéndice del libro III de Apolonio), o bien como lo hace Knorr (usando III,16-19), Apolonio no completa la solución del problema de Pappus para el caso de tres líneas. Es cierto que la geometría había aportado los elementos necesarios, pero no la concepción completa del problema. Lo que Knorr plantea es sólo una reconstrucción *a posteriori*, y como tal debe tomarse.

Incluso, Heath y Tannery sugieren que el problema para el caso de tres líneas pudo ser estudiado por Euclides, usando la relación siguiente: para dos términos dados a y b, si un término indeterminado x es tal que la razón $a\text{-}x:x\text{-}b=a:b$, entonces x es la media armónica. De aquí, el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias x, a y b están en tres líneas dadas satisfacen esta relación. Pero no contamos tampoco con fuentes para afirmar o negar tal hipótesis.

1.4.2 Soluciones propuestas para el lugar geométrico de cuatro líneas

La misma idea desarrollada para el caso de tres líneas es utilizada para determinar la propiedad que distingue a las cónicas y al círculo como el lugar geométrico respecto a cuatro rectas dadas. De hecho, Apolonio [1989, 800-804] muestra como el lugar geométrico de cuatro líneas puede ser deducido del de tres líneas.

> Si para cualquier sección cónica construimos cuatro tangentes AG, BE, AI y EC, y construimos las líneas FG, GI, ID y DF que unen los puntos de

contacto, y trazamos las distancias para cualquier punto H sobre la cónica a estas líneas rectas en cualesquiera ángulos dados (figura 11)[20], entonces por la propiedad del lugar geométrico de tres líneas con respecto al triángulo FBG, para algún punto H sobre la cónica

Escritura de Apolonio		Escritura moderna	
rect.HX,HY:cuad.HP es constante;	(a)	$HX \bullet HY/HP^2$ = cte.	(a)
con respecto al triángulo AIG		Aplicando el resultado para tres líneas al rectángulo AIG tenemos,	
rect.HX,HY:cuad.HR es constante;	(b)	$HX \bullet HY/HR^2$ = cte.	(b)
con respecto al triángulo DCI		Análogamente para el triángulo DCI, se obtiene	
rect.HY,HZ:cuad.HS es constante;	(c)	$HY \bullet HZ/HS^2$ = cte.	(c)
con respecto al triángilo EFD		Ahora respecto al triángulo EFD, tenemos	
rect.HZ,HV:cuad.HQ es constante;	(d)	$HZ \bullet HV/HQ^2$ = cte.	(d)

Obsérvese que hemos tomado sucesivamente un par de tangentes y la línea que une sus puntos de contacto; además de que los rectángulos en las cuatro razones anteriores presentan un arreglo cíclico, tal que si el inverso de (a) es compuesto con (b), y el inverso de (c) con (d), obtenemos dos razones constantes

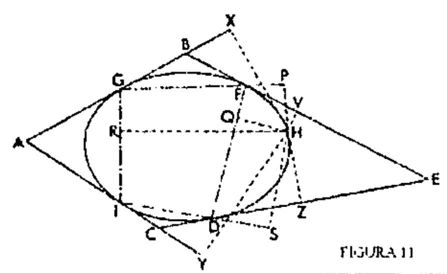


FIGURA 11

pllpd.[21] HY,HP,HP: pllpd.HV,HR,HR	(e)	$(HP^2/HX \bullet HV) \bullet (HX \bullet HY)/HR^2 = HY \bullet HP^2/HV \bullet HR^2$ = cte.	(e)
pllpd.HV,HS,HS: pllpd.HY,HQ,HQ	(f)	$(HS^2/HY \bullet HZ) \bullet (HZ \bullet HV)/HQ^2 = HV \bullet HS^2/HY \bullet HQ^2$ = cte.	(f)
Además, componiendo el primero de estos con el segundo, tendremos rect.HP,HS:rect.HQ,HR es una razón constante.		Multiplicando ambos, $(HY \bullet HP^2/HV \bullet HS^2) \bullet (HV \bullet HS^2/HY \bullet HQ^2) = HP^2 \bullet HS^2/HR^2 \bullet HQ^2$ Sacando raíz cuadrada, $HP \bullet HS/HR \bullet HQ$ = cte.	

Y esta es la propiedad del lugar geométrico de cuatro líneas, es decir, el lugar geométrico de los puntos tales que el rectángulo comprendido por las distancias de los puntos H a cualesquiera dos líneas rectas fijas y dadas FG e ID, tienen con el rectángulo contenido por las distancias de H a las otras dos rectas fijas IG e ID, es una razón constante.

El método riguroso para efectuar estas composiciones es como sigue:
Invirtiendo (a), por Euclides XI,32 tenemos las razones constantes

cuad.HP:rect.HX,HV::
pllpd.HP,HP,HY:pllpd.HX,HV,HY.
rect.HX,HY:cuad.HR::
pllpd.HX,HY,HV:pllpd.HR,HR,HV.

Euclides XI,32 dice que dos paralelepípedos sólidos de igual altura son uno a otro como sus bases, luego

$HP^2/HX\bullet HV=HY\bullet HP^2/HX\bullet HV\bullet HY$
$HX\bullet HY/HR^2=HX\bullet HY\bullet HV/HV\bullet HR^2$

De aquí, por definición, la razón constante compuesta de estas dos es
pllpd.HY,HP,HP:pllpd.HV,HR,HR.
Y en la misma forma encontramos la razón constante compuesta del inverso de (c) y (d). Ahora
pllpd.HY,HP,HP:pllpd.HV,HR,HR
comp. HY:HV, cuad.HP:cuad.HR,
pllpd.HV,HS,HS:pllpd.HY,HQ,HQ
comp. HV:HY, cuad.HS:cuad.HQ.

De aquí, multiplicando las partes derechas de ambos miembros obtenemos la razón constante
$HY\bullet HP^2/HV\bullet HR^2$
Y análogamente encontramos la razón constante compuesta del inverso de (c) y (d): $HV\bullet HS^2/HY\bullet HQ^2$. Ahora,
$HY\bullet HP^2/HV\bullet HR^2=$
$(HY/HV)\bullet HP^2/HR^2$
$HV\bullet HS^2/HY\bullet HQ^2=(HV/HY)\bullet HS^2/HQ^2$

Si entonces tomamos dos líneas M y N tales que
HP:HR::HR:M (g)
HS:HQ::HQ:N (h)
entonces
cuad.HP:cuad.HR::HP:M, y
cuad.HS:cuad.HQ::HS:N
de aquí,
razón comp. HY:HV,
cuad.HP:cuad.HR
razón comp. HY:HV, HP:M, y
razón comp. HV,HY,
cuad.HS:cuad.HQ
razón comp. HV:HY, HS:N.
Pero
rect.HY,HP:rect.HV,M comp.
HY:HV,HP:M.
rect.HV,HS:rect.HY,N comp.
HV:HY,HS:N,
y

pllpd. HY,HP,HS:pllpd.HV,M,HS::

Sean M y N tales que
$HP/HR=HR/M$ (g)
$HS/HQ=HQ/N$ (h)
entonces
$HR^2=HP\bullet M$ y $HQ^2=HS\bullet N$,
sustituyendo:
$HP^2/HR^2=HP^2/HP\bullet M=HP/M$
$HS^2/HQ^2=HS^2/HS\bullet N=HS/N$

de aquí, $HY/HV\bullet HP^2/HR^2=$
$HY/HV\bullet HP/M$, y
$HV/HY\bullet HS^2/HQ^2=HV/HY\bullet HS/N$

Pero,
$HY\bullet HP/HV\bullet M=HY/HV\bullet HP/M$
$HV\bullet HS/HY\bullet N=HV/HY\bullet HS/N$
y
$HV\bullet HS\bullet M/HY\bullet N\bullet M=HV\bullet HS/HY\bullet N$
$HY\bullet HP\bullet HS/HV\bullet M\bullet HS=$
$HY\bullet HP/HV\bullet M$;
y estas son razones constantes. De aquí,

rect.HY,HP:rect.HV,M;

pllpd.HV,HS,M:pllpd.HY,N,M:: rect.HV,HS:rect.HY,N
y estas son razones constantes.
De aquí, componiendo, obtenemos la razón constante
pllpd.HY,HP,HS:pllpd.HY,N,M,
lo cual es lo mismo que la razón constante: rect.HP,HS:rect.N,M
Ahora tomando L y O como constantes
rect.HP,HS:rect.N,M::L:O, y
rect.HP,HS:rect.HR,HQ::rect.HR,HQ: rect.M,N.

multiplicando obtenemos una razón constante
$(HY \bullet HP \bullet HS/HV \bullet M \bullet HS)(HV \bullet HS \bullet M/HY \bullet N \bullet M) = HY \bullet HP \bullet HS/HY \bullet N \bullet M$
lo cual es lo mismo que la razón constante:
$(HY \bullet HP/HV \bullet M)(HV \bullet HS/HY \bullet N) = HP \bullet HS/N \bullet M$
Ahora, tomamos L y M como constantes, tenemos
$HP \bullet HS/N \bullet M = L/O$ y
$HP \bullet HS/HR \bullet HQ = HR \bullet HQ/M \bullet N$.

Por composición de (g) y (h). Pero razones iguales tienen razones duplicadas iguales (Nota de Heath a Euclides VI,22) y de aquí
rect.HP,HS:rect.HR,HQ es constante.

Por la multiplicación de (g) y (h). Pero razones iguales al elevarlas al cuadrado siguen siendo iguales (Nota de Heath a Euclides VI,22) y de aquí
$HP \bullet HS/HR \bullet HQ$ es constante.

En el caso de secciones opuestas, esto se muestra en III,56
rect.MA,BN:cuad.AB comp. cuad.LD: cuad.DE, rect.AE,EB:cuatro veces cuad.AB. o rect.AL, LB.

En el caso de secciones opuestas, esto se muestra en III,56
$MA \bullet BN/AB^2 = LD^2/DE^2 \bullet (AE \bullet EB/4AB^2)$

Entonces, es evidente para las mismas razones de antes que para diferentes puntos C, las magnitudes MA y BN pueden cambiar, pero el rectángulo MA,BN es una magnitud constante.

Como antes, sea CX trazada paralela a DE, CY a EA, CZ a EB (figura 12). Por triángulos semejantes

AY:YC::AB:BN
BZ:ZC::AB:MA
Por lo tanto, componiendo
rect.AY,BZ:rect.YC,ZC::cuad.AB: rect.MA,BN

$AY/YC = AB/BN$,
$BZ/ZC = AB/MA$
Por lo tanto, multiplicando
$AY \bullet BZ/YC \bullet ZC = AB^2/BN \bullet MA$

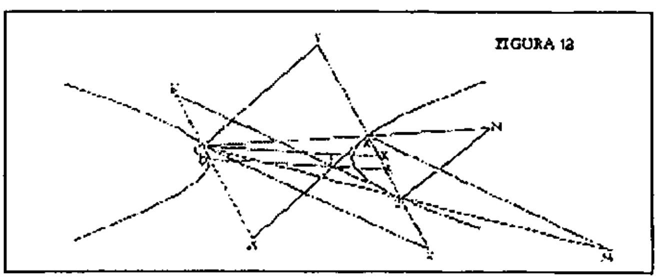


FIGURA 12

Donde el rectángulo MA,BN es constante cuando C cambia, y además el cuadrado sobre AB es constante, luego

rect.AY,BZ:rect.YZ,ZC es una razón constante (1)

Asimismo, por triángulos semejantes
ZC:CX::EB:EL
YC:CX::EA:EL
de donde, componiendo
rect.YC,ZC:cuad.CX::rect.EB,EA:cuad.EL, entonces
rect.YZ,ZC:cuad.CX es una razón constante (2)
Componiendo (1) y (2) obtenemos una razón constante
rect.AY,BZ:cuad.CX

$AY\bullet BZ/YC\bullet ZC=\text{cte.}$ (1)
Asimismo, por triángulos semejantes

$ZC/CX=EB/EL$, $YC/CX=EA/EL$
de donde, multiplicando
$ZC\bullet YC/CX^2=EB\bullet EA/EL^2$
entonces
$ZC\bullet YC/CX^2=\text{cte.}$ (2)

Multiplicando (1) y (2)
$(AY\bullet BZ/YC\bullet ZC)(ZC\bullet YC/CX^2)=$
$AY\bullet BZ/CX^2=\text{cte.}$

Pero AY y BZ son magnitudes iguales a CA´y CB´, distancias desde C. Esta es la propiedad del lugar geométrico de tres líneas de la sección C respecto a las líneas rectas EA y EB tangentes a la otra sección, y AB la línea recta que une sus puntos de contacto. Y así sucesivamente, la sección opuesta es el lugar geométrico de las tres líneas tangentes a las otras dos secciones opuestas. Este es, además un lugar geométrico de cuatro líneas que puede ser mostrado en la misma forma de antes.

Asimismo de III,55 podemos concluir que ambas secciones opuestas son el lugar geométrico de tres líneas del triángulo formado por tangentes a cada una de las secciones y la línea recta que une sus puntos de contacto. Por III,55,

rect.HA,DN:cuad.AD::rect.AG,GD:cuad.CG.

$HA\bullet DN/AD^2=AG\bullet GD/CG^2$

Ahora, como los tres últimos términos de esta proposición son constantes cuando el punto F cambia, entonces, aunque HA y DN cambian con F, aún permanece constante en magnitud el rectángulo HA,DN. Luego, reproduciendo la figura de III,55, dejando YF paralela a DL, FZ a KA y FX a GE, donde E es el punto medio de AD (figura 13). Entonces, por triángulos semejantes

YD:FY::AD:HA
AZ:FZ::AD:DN

$YD\bullet FY=AD\bullet HA$,
$AZ\bullet FZ=AD\bullet DN$

20 Las figuras 11-14 son tomadas de [Apolonio 1989, 709-804].

21 Por plllpd. se entiende el paralelepípedo formado por tres magnitudes, es decir, denota el volúmen del paralelepípedo. En sentido moderno, equivalente a la multiplicación de tres magnitudes.

Luego, componiendo
rect.YD,AZ:rect.FY,FZ::cuad.AC:
rect.HA,DN

Luego, multiplicando
$YD \bullet AZ/FY \bullet FZ = AC^2/HA \bullet DN$

Pero, los dos últimos términos son constantes, de donde

rect.YD,AZ:rect.FY,FZ es una razón constante (1)
Asimismo, por triángulos semejantes
FY:FX::DG:EG,
FZ:FX::AG,EG,
entonces, componiendo
rect.FY,FZ:cuad.FX::rect.DG,AG:
cuad.EG.

$YD \bullet AZ/FY \bullet FZ = \text{cte.}$ (1)
Asimismo, por triángulos semejantes

$FY/FX = DG/EG$, $FZ/FX = AG/EG$
entonces, multiplicando
$FY \bullet FZ/FX^2 = DG \bullet AG/EG^2$

Pero los últimos dos términos son constantes, de donde

rect.FY,FZ:cuad.FX es una razón constante. (2)

$FY \bullet FZ/FX^2 = \text{cte.}$ (2)
Multiplicando (1) y (2)

Componiendo (1) y (2) vemos que rect.YD,AZ:cuad.FX es una razón constante.

$(YD \bullet AZ/FY \bullet FZ)(FY \bullet FZ/FX^2) =$
$YD \bullet AZ/FX^2 = \text{cte.}$

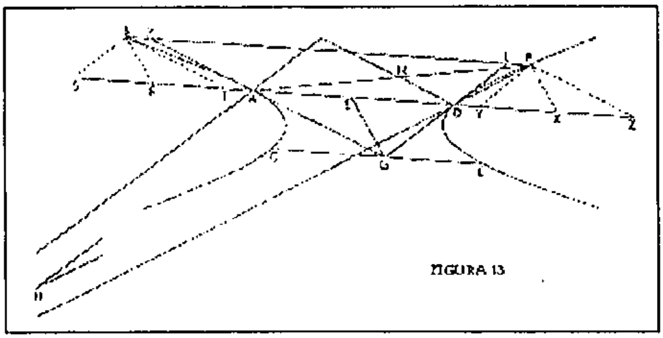


FIGURA 13

Pero esta es la definición de un lugar geométrico de tres líneas tal que el rectángulo formado por las distancias de cualquier punto sobre el lugar geométrico a dos rectas fijas, tiene con el cuadrado sobre la distancia a una tercera recta fija, es una razón constante. Pero, DY=LF y AZ=KF, y FX es la distancia de F a AD, y así, la razón satisface la definición.

Mas aún, si consideramos el punto B de la intersección de la línea recta KF, trazada paralela a AD, con la otra sección opuesta, y trazamos BS paralela a FY, BR a FX, y BT a FZ, donde hay paralelas entre paralelas, BR=FX, KF=AZ, TA=BK.

Pero se mostró en el curso de III,55 que BK=LF, BL=KF. De donde, TA=BK=YD=LF, AZ=KF=BL.

Entonces, rect.LF,KF:cuad.FX:: rect.BK,BL:cuad.BR

Entonces, $LF \bullet KF/FX^2 = BK \bullet BL/BR^2$

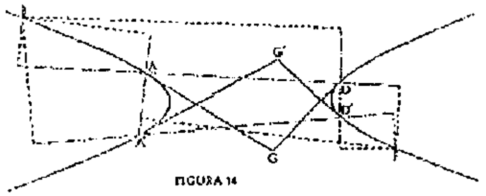


FIGURA 14

Luego, cualquier punto B sobre una sección opuesta satisface la razón constante con respecto a sus distancias a las tres rectas fijas AD, GD, y AG, con F sobre la otra sección opuesta (figura 14).

Puede ser deducido similarmente que las secciones opuestas son a la vez, un lugar geométrico de cuatro líneas con respecto a cualesquiera cuatro líneas rectas fijas que unen sus puntos, dos en cada sección (siendo los puntos, cuatro puntos de contacto o cuatro tangentes, y las líneas rectas, las líneas que los unen).

Resumiendo, parábola, elipse, círculo e hipérbola son lugares geométricos de cuatro líneas con respecto a cualquier cuadrilátero inscrito. Asimismo, una sección opuesta es un lugar geométrico de cuatro líneas con respecto a cualquier cuadrilátero inscrito en la otra sección. Las dos secciones opuestas juntas son un lugar geométrico de cuatro líneas para cualesquiera cuatro líneas rectas que unen sus puntos, dos de ellos situados en cada sección opuesta[22].

Como se puede observar, lo que Apolonio muestra es que las secciones cónicas satisfacen las condiciones del lugar geométrico para cuatro líneas, una vez mas sólo tenemos la parte analítica de la solución del problema, falta la parte sintética: dadas las condiciones establecer a qué curva nos referimos y construirla.

Análogamente al caso de tres líneas, podemos mostrar dos reconstrucciónes actuales: una de Knorr, y la otra de Jones. En la primera buscamos llegar hasta donde sea posible mediante los argumentos propios de la geometría de Apolonio, para notar el contraste entre la parte sintética y analítica del problema; en la segunda, haremos incapie en el desarrollo del problema dado por Aristeus, Euclides y Eratóstenes en sus trabajos sobre lugares geométricos, trabajos perdidos de los que Jones ofrece su reconstrucción;

estableciendo así los elementos que evidencían las dificultades para este caso y la imposibilidad de su solución.

Para Knorr (*vid.* Knorr 1986, 120-127), la solución general para el caso de cuatro líneas puede ser construida sobre la base de III,17 de la *Cónica* de Apolonio (escrita en notación moderna y con auxilio de la figura 15[23]):

III,17: Si RR´, SS´son secantes paralelas a OP, OQ respectivamente, y se encuentran en un punto J, entonces $OP^2:OQ^2 = RJ\bullet JR':SJ\bullet JS'$.

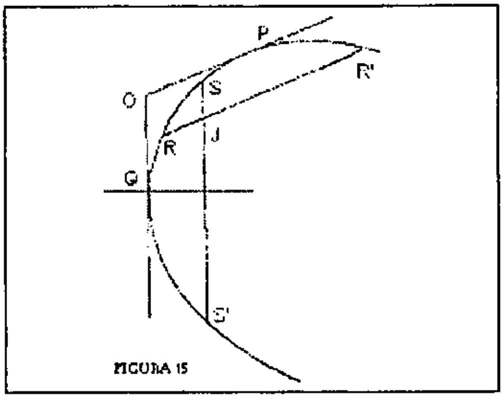


FIGURA 15

Habiendo establecido que las cónicas satisfacen la propiedad del lugar geométrico de tres líneas -dice Knorr-, uno puede derivar que éstas satisfacen la propiedad del lugar geométrico de cuatro líneas, considerando las tangentes trazadas para los cuatro vértices de un cuadrilátero inscrito y aplicando el resultado de tres líneas sucesivamente a cada uno de los cuatro lados (figura 16). Pero el inverso a la construcción del lugar geométrico de cuatro líneas no es tan directo como en el caso de tres líneas, Zeuthen propone una construcción diferente desarrollada en base a la relación de los segmentos de las cuerdas que se intersectan y usando III,17.

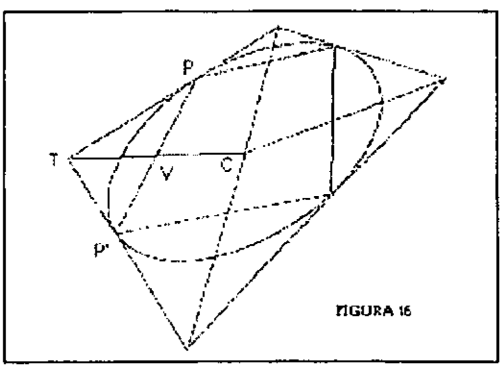


FIGURA 16

En primer lugar, dadas cuatro líneas que intersectan al trapecio ABCD, con lados AD y BC paralelos, deseamos determinar el lugar geométrico de los puntos R tal que RI•RK:AI•IB tiene un valor dado, los cuatro segmentos aquí son las distancias de R a los respectivos lados de ABCD, medidos en las direcciones AD, AB (figuras 17 y 18). Concevimos la cónica alrededor de ABCD cuyo diámetro es la bisectriz de los lados paralelos AD, BC y cuyas ordenadas estarán en la dirección de AD. Entonces, por III,17, la razón RI•IS:AI•IB tiene un valor constante para toda cuerda trazada paralela a las direcciones fijadas, mientras que RK=IS.

Luego, ésta será una solución para el lugar geométrico de R, si puede ser planeada de forma que esta razón tenga el valor especificado en el problema del lugar geométrico, cuando las cuerdas son paralelas a AD, AB respectivamente. [Y hasta aquí la parte analítica del problema].

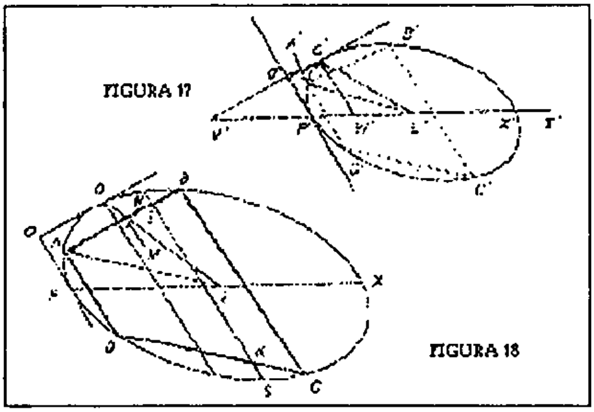


FIGURA 17

FIGURA 18

Para construir esta cónica, Zeuthen propone la introducción de una cónica auxiliar, que resulta ser similar a la requerida. De donde, las tangentes paralelas a AD, AB tocan en segmentos tales que la razón de sus cuadrados $OP^2:OQ^2$ es igual al producto de los segmentos de las cuerdas intersectadas, podemos asignar segmentos O´P´, O´Q´ respectivamente paralelos a AD, AB tal que $O'P'^2:O'Q'^2$ tiene el valor dado, y dibujamos P´T´paralela a la bisectriz de AD, BC. De esta forma, O´P´, O´Q´serán tangentes y P´T´será la dirección del diámetro de la cónica auxiliar similar a una buscada. Extendiendo O´Q´hasta que toque a P´T´en V´, y trazando desde Q´una línea paralela a O´P´que toca a P´T´en W´. Ahora, localizamos el punto X´sobre P´T´mediante la relación armónica con V´, P´y W´, esto es, P´V´:P´W´=X´V´:X´W´. Así, P´X´es el diámetro de la cónica (vía *Cónicas* I,36) y su lado recto L´es determinado por la relación $Q'W'^2:P'W'\bullet W'X' = L':P'X'$(vía I,21).

22 Apolonio de Pérgamo. 1989. *Conics*, en *Great Books*, Encyclopaedia Britanica, 11:799-804

23 Las figuras 15-18 son tomadas de [Knorr 1986, 120-127]

> Para terminar la construcción, se puede circunscribir alrededor de ABCD la cónica similar que está en la figura auxiliar. Por ejemplo, ya que la bisectriz E´de P´X´es el centro de la cónica auxiliar, la dirección E´Q´es conocida, la línea análoga en la figura requerida puede tocar al diámetro en el mismo ángulo y pasar a través del punto medio M de AB, una cuerda paralela a la tangente correspondiente a OQ. Esto determina el centro E de la cónica requerida. Si unimos E con A, la dirección de la línea correspondiente en la cónica auxiliar es la misma, de donde A´se encuentra por la correlación con A. Podemos ahora inscribir el trapecio A´B´C´D, similar a ABCD, y de éste determinar los puntos O,P,Q y X que especifican la cónica. Alternativamente, la razón EQ:EP de los diámetros conjugados ha sido encontrada. Zeuthen propone una aplicación de *Cónicas* III,27, de la cual el diámetro de la cónica requerida puede ser determinado, y por lo tanto, la cónica misma. [Parte sintética del problema].

En la explicación de Zeuthen -nos señala Knorr-, no solamente Euclides puede producir una solución de esta clase para el caso del lugar geométrico de cuatro líneas donde la figura referida es un trapecio, sino que además lo puede extender al caso de un cuadrilátero, para esto Zeuthen usa un lema que se basa en una proposición de lugares geométricos que Pappus cita del *Porisma*. Desafortunadamente, Zeuthen asume que Euclides accede a una extensión de la citada proposición, en la que el lugar geométrico de un punto dado puede ser tomado no sólo de una línea, sino de una cónica (esto es, la curva descrita por el lugar geométrico de cuatro líneas). [Knorr 1986, 125]

Después de esto, Knorr hace notar que el método de Zeuthen es innecesariamente complicado y da su propia versión para pasar del caso en que se tiene el cuadrilátero al del cuadrado, de hecho esto se relaciona con el siguiente problema: dados cinco puntos determinar la cónica que pasa por ellos (*Cónica* IV,25). Debido a lo complicado que resulta no sólo el método de Zeuthen, sino también el de Knorr, y al hecho de que están fuera de nuestro análisis metodológico, omitiremos ambos[24].

Como en el caso del lugar geométrico de tres líneas, la solución geométrica del lugar de cuatro líneas está fuera del alcance de todos los geómetras antes de que Apolonio introdujera su estudio de las dos ramas de la hipérbola (III, 20-23). Uno esperaría entonces que la solución parcial, quizás siguiendo el método de Zeuthen, fuera trabajada posteriormente a Euclides, e incluso al propio Apolonio. [*Ibid.*]

Pero, ¿en donde queda ese eslabón que hizo que el problema no fuera resuelto por Euclides, ni por Apolonio, y llegara de esta forma hasta Pappus, quien finalmente tampoco logra resolverlo? Tratemos de verlo a través de la única reconstrucción que tenemos de los trabajos perdidos sobre lugares geométricos de Aristeus, Euclides y Eratóstenes, dada por Jones [1986, 590].

> El problema del lugar geométrico de cuatro líneas debe ser resuelto en dos partes (la siguiente es esencialmente la reconstrucción de Zeuthen). Primero (figura 19)[25], sean las líneas dadas AB, BΓ, ΓΔ, ΔA, dos de las cuales no son paralelas, y la razón $\alpha:\beta$. Queremos probar que para algún punto M sobre una sección cónica dada, si los segmentos de línea $M\Pi_{AB}$, $M\Pi_{B\Gamma}$,

$M\Pi_{\Gamma\Delta}$, $M\Pi_{\Delta A}$ son trazados en una dirección dada, entonces las líneas dadas satisfacen esta ecuación:

$(M\Pi_{AB} \bullet M\Pi_{\Gamma\Delta}):(M\Pi_{B\Gamma} \bullet M\Pi_{\Delta A}) = \alpha:\beta$ (1)

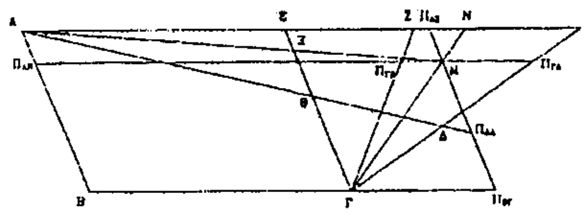


FIGURA 19

Primero probaremos que este lugar geométrico de cuatro líneas, dos de ellas no paralelas, puede ser reducido al lugar geométrico de cuatro líneas, dos de ellas paralelas.

Sin pérdida de generalidad, asumamos que la dirección de las líneas trazadas hacia las líneas dadas desde un punto sobre el lugar geométrico son paralelas a AB o BΓ (cambiar las direcciones requiere un cambio del valor $\alpha:\beta$). Tracemos AEH paralela a BΓ y ΓΘE paralela a AB. Por hipótesis, para alguna M en el lugar geométrico la ecuación (1) se cumple, a la vez que de las paralelas

$M\Pi_{AB}:M\Pi_{\Delta A} = AE:\Theta\Xi$

$M\Pi_{\Gamma\Delta}:M\Pi_{B\Gamma} = HN:\Gamma E$

Entonces la ecuación (1) es equivalente a esta ecuación para una M arbitraria:

$HN:\Theta\Xi = (\alpha:\beta)(\Gamma E:AE)$ (2)

[El desarrollo es el siguiente: $M\Pi_{AB}/M\Pi_{\Delta A} = AE/\Theta\Xi$, $M\Pi_{\Gamma A}/M\Pi_{B\Gamma} = HN/\Gamma E$; $\alpha/\beta = M\Pi_{AB} \bullet M\Pi_{\Gamma\Delta}/M\Pi_{\Delta A} \bullet M\Pi_{B\Gamma} = AE/\Theta E \bullet HN/\Gamma E$, de donde, $(\alpha/\beta)(\Gamma E/AE) = HN/\Theta\Xi$]

En particular, si elegimos en lugar de M un punto Z sobre AH tal que

$HZ:\Theta E = (\alpha:\beta)(\Gamma E:AE)$ (3)

Entonces Z está sobre el lugar geométrico definido por cuatro líneas dadas y $\alpha:\beta$. De las ecuaciones (2) y (3) se sigue:

$ZN:\Xi E = (\alpha:\beta)(\Gamma E:AE)$

[Equivalente a: $HN/\Theta\Xi = (\alpha/\beta)(\Gamma E/AE)$, $HZ/\Theta E = (\alpha/\beta)(\Gamma E/AE)$ y $HN/HZ \approx ZN$, $\Theta\Xi/\Theta E \approx E\Xi$]

24 Estos métodos están comprendidos en lo que actualmente se denomina geometría moderna; ésta se toma como una extensión de la geometría griega, pero difiere en los instrumentos propios de cada método, para una disición detallada véanse [Eves 1985] y [Knorr 1986].

Pero, también de las paralelas

$M\Pi_{AB}:M\Pi_{AZ}=AE:\Xi E$
$M\Pi_{\Gamma Z}:M\Pi_{B\Gamma}=ZN:\Gamma E$
Luego, $(M\Pi_{AB}\bullet M\Pi_{\Gamma Z}):(M\Pi_{B\Gamma}\bullet M\Pi_{ZA})=\alpha:\beta$

[$M\Pi_{AB}/M\Pi_{AZ}=AE/\Xi E$ y $M\Pi_{\Gamma Z}/M\Pi_{B\Gamma}=ZN/\Gamma E$, entonces, $M\Pi_{AB}\bullet M\Pi_{\Gamma Z}/M\Pi_{B\Gamma}\bullet M\Pi_{AZ}=AE\bullet ZN/\Gamma E\bullet \Xi E=\alpha/\beta$, esto último se deduce de la realción anterior: $ZN/\Xi E=(\alpha/\beta)(\Gamma E/AE)$ de donde $ZN\bullet AE/\Xi E\bullet \Gamma E=\alpha/\beta$]

Asi que M está sobre un nuevo lugar geométrico para cuatro líneas, donde las líneas son AB, BΓ, ΓZ, ZA, con ZA paralela a BΓ y la razón $\alpha:\beta$ que es la requerida.

Esta parte de la solución no requiere teoremas sobre cónicas, no ha sido mostrado aún que el lugar geométrico tiene alguna relación con las secciones cónicas.

Podemos notar de paso que una parte de la demostración es análogo al primer porisma del libro de *Porismas* de Euclides: si las líneas rectas h y e, los puntos H (sobre h), A y B, y la razón $\alpha:\beta$ son dados, entonces es posible construir una línea m y un punto M sobre ella tal que para cualquier punto G sobre h, si GA intersecta a e en E, y EB intersecta a m en N, entonces $HG:MN=\alpha:\beta$ (figura 20). La construcción de tales líneas es útil para un paso en la demostración del problema del lugar geométrico de cuatro líneas que estamos resolviendo. Aquí en lugar de requerir que dos líneas variables intersecten a una línea recta, tenemos que su intersección satisface la propiedad del lugar geométrico de cuatro líneas.

Ahora reduciremos el lugar geométrico de cuatro líneas, donde dos de las líneas son paralelas, a un lugar geométrico sólido que ya antes vimos está implicado en el libro III de Apolonio, y del cual Aristeus puede haber provado que era una sección cónica determinada, mediante análisis. En la figura 19, sea ABΓΔ un trapezoide con AΔ paralela a BΓ, y sea M tal que está sobre el lugar geométrico. Sea EZ la línea que biseca a AΔ y BΓ, y sea $M\Pi_{AB}\Pi_{\Gamma\Delta}N$ trazada paralela a AΔ y N localizado en ésta de manera que $M\Pi_{\Gamma\Delta}=N\Pi_{AB}$.

Asimismo, sin pérdida de generalidad, medimos la distancia de M a ΔA y BΓ paralela a AB, y la distancia de M a AB y ΓΔ paralela a AΔ y BΓ. Entonces, por hipótesis

$(M\Pi_{AB}\bullet M\Pi_{\Gamma\Delta}):(A\Pi_{AB}\bullet B\Pi_{AB})=\alpha:\beta$
Luego, $(M\Pi_{AB}\bullet N\Pi_{AB}):(A\Pi_{AB}\bullet B\Pi_{AB})=\alpha:\beta$

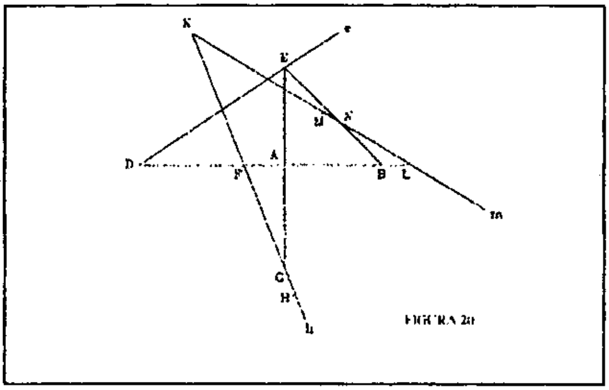


FIGURA 26

> Pero AB es dado, y MN es bisectada por una línea dada en una dirección dada. Por lo tanto,este lugar geométrico es reducido al lugar geométrico asociado a teoremas del Libro III de las *Cónicas* de Apolonio. No se mostrará la reconstrucción de la síntesis de Euclides y Apolonio, que sólo aparecen en la obra de Zeuthen. [Jones 1986, 590]

La dificultad para conseguir la obra en donde aparece la reconstrucción de Zeuthen, impide el que continuemos con la solución sintética del problema, aunque el manejar una reconstrucción, está sujeto a duda el hecho de que realmente alguno de estos geómetras haya logrado desarrollar la parte sintética; ya que de ser este el caso aparecería alguna referencia secundaria, pero tampoco contamos con nada parecido. Sin embargo, esto no nos impide extraer elementos comparativos entre las soluciones de los tres geómetras mencionados y lo hecho por Apolonio.

Para producir una solución del lugar geométrico, Euclides había tenido dificultades en tres casos. Primero, a menos que la distancia a las líneas dadas sea marcada, habrá dos secciones cónicas complementarias que resolverán el lugar geométrico. Segundo, el análisis sólo necesita probar que si un punto satisface la propiedad del lugar geométrico entonces está en una sección cónica dada, pero en la síntesis hemos de construir la sección, y así tenemos que conocer si es elipse, círculo, parábola o hipérbola. Tercero, cuando las dos ramas de la hipérbola son consideradas como curvas separadas, una síntesis completa debería tomar ambas, pero respecto a las ramas individuales, podemos tener el lugar geométrico de cuatro líneas que no pasa por la intersección de todas las líneas dadas.

Quizás las mejoras que Apolonio buscó sobre los trabajos de Euclides pertenecen a todos estos aspectos, al menos fue el primero en hacer un análisis completo cuando se considera la hipérbola; pero sobre la parte sintética de la solución del problema ya hemos visto que no logra desarrollarla. Sin embargo, *a posteriori*, podemos ver parte de su trabajo como un intento de tratamiento sintético sobre lugares geométricos:

> De la propiedad de los lugares geométricos como está en la ecuación (1) anterior, es claro que el lugar pasa a través de cada una de las intersecciones A, B, Γ, Δ. Podemos encontrar algún punto específico M_0

> tal que esté en el lugar geométrico, por un procedimiento relatado en un problema de la *Sección Determinada*[26] de Apolonio. De donde, la síntesis requiere ser descrita como la construcción de una sección cónica que pasa por cinco puntos dados A, B, Γ, Δ, M_0 y también, el demostrar que cualquier punto M sobre la sección satisface la ecuación (1). Mas aún, se probaría que un punto que no está sobre el objeto construido no puede estar en el lugar geométrico, pero para ello debemos construir ambas cónicas que constituyen el lugar geométrico. [*Ibid.*]

En un contexto totalmente diferente, Pappus da la primera de estas partes: la construcción de una cónica (especificamente una elipse) que pasa por cinco puntos dados.

> Si cuatro de los puntos son los vértices de un trapezoide, es decir, si las líneas que unen dos pares de puntos son paralelas, entonces el problema se resuelve facilmente. Si la línea que pasa por los puntos medios de las dos paralelas fuera un diámetro de la elipse, en la que las paralelas son ordenadas, entonces una construcción usando los cinco puntos determina los puntos finales de los diámetros y la magnitud del lado recto.Pero si no se da que dos de las líneas que unen pares de los cinco puntos son paralelas, entonces, Pappus da otra construcción reemplazando uno de los puntos por otro nuevo que completa el trapezoide con tres de los otros.

Todo lo anterior es de gran importancia para conocer las mejoras que para este tipo de procedimientos da Pappus, y si esto deriva en última instancia en una síntesis sobre el lugar geométrico de cuatro líneas.

Esta larga exposición sirvió para mostrarnos hasta que punto desarrollarón Euclides y Apolonio la solución del problema para el caso de tres y cuatro líneas. Haciendo énfasis en que sólo tenemos la parte analítica de la solución, y aunque las reconstrucciónes de Knorr y Jones ponen en evidencia la posibilidad de la solución sintética, en realidad ninguno de ellos (Euclides, Apolonio, Eratóstenes y Aristeus) logró obtenerla. En cuanto a Pappus, la falta de documentos originales obstaculizó el contrastar lo que hizo en relación a sus predecesores, la fuente más completa es la traducción de Zeuthen, pero a falta de esta recurrimos a la de Jones y a lo poco que aparece en Knorr, de donde sabemos que profundiza el problema, en el sentido de que especifica claramente que la solución al problema requiere de un analísis y una síntesis; tiene acceso a las demostraciones hasta el momento logradas, pero no sólo las contempla sino que ahonda en ellas buscando extraer los elementos importantes y proponer una solución acorde con la tradición griega, a la vez que desarrolla aquellas partes oscuras o poco analizadas de la teoría planteada en las demostraciones anteriores; y por último, generaliza los casos para más de cuatro líneas. Es por ello que su contribución va más allá de una compilación, tan es así que cuando Descartes llega a tener conocimiento de este problema lo denomina *problema de Pappus*, en honor a quien da este sentido tan acabado y claro al problema.

BIBLIOGRAFIA

APOLONIO de Pérgamo. 1989. *Conics*, en *Great Books*, Encycloeedia Britanica, **11**:799-804.

BALL, W. W. Rouse. 1960. *A Short Account of the History of Mathematics*. New York: Dover Publications, Inc.

BOYER, C. B. 1956. *History of Analytic Geometry*. New York: Scripta Mathematica.

BOYER, C. B. y Merzbach U. C. 1989. *A History of Mathematics*. Jhon Wiley & Sons, Inc. Second Edition.

CARRASCO, Licea Guadalupe. 1988. *Retrospectiva histórica de la integral*. Tesis profesional, Licenciatura en Actuaría, UNAM, Facultad de Ciencias. México.

COLLETTE, J.P. 1986. *Historia de las matemáticas 1*. México, Siglo XXI. [Trad. Pilar Gonzales Gayoso].

COOLIDGE, J.L. 1945. *A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces*. Oxford University Press.

DE GANDT, F. 1990. "El estilo matemático de los *Principia* de Newton". *Mathesis* VI, **2**: 163-190.

____________. 1995. *Force and geometry in Newton's Principia*. Translated by Curtis Wilson. Princenton, New Yersey: Princenton University Press. [De Gandt, Francois. 1947. Force and geometrie].

DESCARTES, R. 1954. The geometry of Descartes. New York: Dover.

____________. 1987. *Discurso del método, Dióptrica, Meteoros y Geometría*. Madrid: Ediciones Alfaguara. [Prólogo, traducción y notas de Guillermo Quintás Alonso].

ENCYCLOPEDIA BRITANNICA. 1978. *Great Books of The Western World*. The University of Chicago. [Ed. Robert Magnurd Hutchins, Mortimer J. Adler].

EUCLIDES. 1991. *Elementos*. Libro I-IV. Editorial Gredos #155. [Introducción de Luis Vega, traducción y notas de Maria Luisa Puertas Castaños].

EVES, H. 1985. *Estudio de las Geometrías*. UTEHA. 2 vol. [Traducción al español por Susana Blumovicz de Sipersten, revisión de Santiago Alonso].

FIERZ, M. 1968. "Auffausung der Mathematik und die mathematische From der *Principia*". *Helvetica Physica Acta* **41**:821-26.

GALUZZI, M. 1986. "Calculus and geometry in Newton's Mathematical work: some remarks". *Quaderno* **10**:1-19. Universitá degli studi di milano Simonetta Di Sieno.

GJERTSEN, D. 1986. *The Newton Handbook*. Routledge & Kegan Paul. London and New York.

GROSHOLZ, E. 1987. "Some Uses of Proportion in Newton's Principia, Book I: A case study in applied mathematics". *Studies in the History and Philosophy of Science*. 209-20.

GUICCIARDINI, N. 1989. *The development of newtonian calculus in Britian 1700-1800*. Cambridge University Press.

HEATH, T. 1963. *A manual of Greek Mathematics*. New York: Dover Publications Inc.

_________. 1981. *A History of Greek Mathematics*. New York: Dover Publications Inc.Vol 1.

JONES, A. 1986. *Pappus of Alexandria. Book 7 of the Collection*. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag. 2 vol. [Edited with translation and commentary: Alexander Jones].

JONES, Ch. 1987. "Las paradojas de Zenón y los primeros fundamentos de las matemáticas", *Mathesis* III, 1:3-14.

_____________. "La influencia de Aristóteles en el fundamento de los *Elementos*", *Mathesis* III, 4:375-388.

KLINE, M. 1956. *Famous Problems of Elementary Geometry*. New York: Dover Publications Inc.

_______. 1992. *El pensamiento matemático desde la antigüedad a nuestros días*. Alianza Universidad # 715. Vol. I. [Versión española de Mariano Martínez, Juan Torres, Alfonso Casal. Coordinación y revisión de Jesús Hernandez. Versión original: Mathematical thought from Ancient to Modern Times. 1972. Oxford University Press].

KNORR, W. 1986. *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. New york: Dover Publications Inc.

LACHTERMAN, D. 1989. *The Etics of Geometry: A Genealogy of Modernity*. New York: Routledge.

NEWTON, I. 1982. *Principios matemáticos de la filosofía natural*. Madrid: Editora Nacional. [Ed. Antonio Escohotado].

________. 1987. *Principios de la filosofía natural*. México: Alianza Editorial. 2 vol. [Introducción, traducción y notas de Eloy Roda García].

________. 1962. *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. California: Dover Publications Inc. Vol. I. [Mottle's translation revised by F. Cajori].

PAPPUS. 1970. *The Collection*, en *Científicos Griegos*. Ed. Francisco Vera, Madrid: Aguilar.

REY PASTOR, . 1984. *Historia de la Matemática*. Barcelona: Gedisa.

RODRIGUEZ, P. 1992. *La Herencia Griega de Descartes. Algunos detalles del origen de la Geometría Analítica*. Tesis profesional. Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias. UNAM, México.

SHEA, W. R. 1993. *La magia de los números y el movimiento. La carrera científica de Descartes*. Alianza Editorial # 746.

THOMSON, W. 1930. *The Commentary of Pappus on Book X of Euclid's Elements*. Cambridge: Harvard University Press. [Arabic text and translation by William Thomson. With introductory remarks, notes and glosary of technical terms by Gustav Junge and William Thomsom].

TURNBULL, H. 1947. *The Mathematical Discoveries of Newton*. London & Glasgow: Blackie & Son Limited.

______________. 1993. *The Great Mathematicians*. Barnes & Noble.

UNGURU, S. 1974. "Pappus in the Thierteenth Century in the Latin West". *Archive for the History of Exact Science* 13,1:307-324.

UNGURU, S. y FRIED, M. 1996. "Sobre el carácter sintético-geométrico de la *Cónica* de Apolonio". *Mathesis* XII, **2**:148-223.

VERA, F. 1970. *Científicos Griegos*. Madrid: Aguilar.

WEAVWE, J. "Pappus Introductory Paper". 1916-17. *Bulletin of the American Mathematical Society* **23**:127-135.

WESTFALL, R. 1980. *Nevert at Rest. A Biography of Isaac Newton*. Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney: Cambridge University Press.

WHITESIDE, D. 1969. *The Mathematical Papers of Isaac Newton*. Cambridge University Press. [Ed. by D. T. Whiteside].

ZHMUD, L. 1996. "Las matemáticas griegas y el oriente". *Mathesis* XII, **2**:116-145.