30
2ejm

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TOPOLOGIA PRODUCTO Y FUNCIONES CARDINALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

CARLOS GERARDO PANIAGUA RAMIREZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA

1998

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

TOPOLOGIA PRODUCTO Y FUNCIONES CARDINALES

realizado por CARLOS GERARDO PANIAGUA RAMIREZ.

con número de cuenta 8933822-9 , pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA.
Propietario	DR. ADALBERTO GARCIA MAYNEZ.
Propietario	M.EN C. FIDEL CASARRUBIAS SEGURA.
Suplente	DRA. SYLVIA DE NEYMET URBINA.
Suplente	DR. OLEG G. OKUNEV.

Consejo Departamental de Matemáticas
MAT. CESAR GUEVARA BRAVO

Topología Producto y Funciones Cardinales

Carlos Gerardo Paniagua Ramírez

Enero de 1998

A mi padre ...
en quien siempre me he inspirado.

A mi madre ...
que siempre está a mi lado.

A los pequeños genios ...
Mary, José Antonio, Hugo y Michel.

Y a ti, que aún en la distancia ...
estás cerca de mi.

Simplemente...¡Gracias!

Hace algunos años cuando pensaba en lo que debía hacer con mi vida, en lo que era en aquel entonces el futuro inmediato, sabía que continuar estudiando era la mejor alternativa. Recuerdo que en aquellos días soñaba con hacer bastantes cosas, pero a fuerza de ser sincero, debo reconocer que estudiar Matemáticas no era una de las opciones y hoy al voltear la mirada y remontar el pensamiento hacia aquellos días, se que la elección no pudo haber sido mejor. No puedo negar que me siento bastante contento de poder dar este primer paso en las Matemáticas, así como tampoco olvido que sin el apoyo de tantas personas que han acompañado mis días, dificilmente lo hubiera conseguido.

Hoy quiero agradecer en primera instancia a mis padres y a mis hermanos, muy en especial a Mary a quien buena parte de la acertada elección corresponde, por el apoyo y la comprensión que en todo momento de mi vida han tenido conmigo.

Al Dr. Angel Tamariz Mascarúa, por aceptar la dirección de tesis, por todo lo que me ha enseñado durante la realización de la misma, así como por el invaluable apoyo que me ha brindado durante los últimos años.

A los Profesores Sylvia de Neymet, Adalberto García-Máynez y Oleg Okunev por dedicar parte de su tiempo a la revisión del trabajo y por las atinadas observaciones hechas, gracias a las cuales podemos presentar un mejor escrito.

A los profesores Fernando Hernández y Fidel Casarrubias, con quienes he tenido la fortuna de convivir durante los últimos tres años, por su gran paciencia y todo el tiempo que dedicaron en solucionar muchas dudas y problemas que día tras día les presentaba, no sólo durante la realización del trabajo sino desde mucho tiempo antes y porque junto con el profesor Angel Tamariz me han ayudado a comenzar en el estudio del maravilloso mundo de la Topología. también quiero agradecer al profesor Fidel Casarrubias por su invaluable ayuda en lo que fue la edición e impresión del trabajo.

A todos y cada uno de mis amigos, cuyos nombres me permitire omitir porque ellos saben bien quienes son además de que no deseo aburrir, por haber compartido conmigo todos los buenos y malos momentos que han tenido nuestras vidas.

A todos ustedes y a las grandes personas que pudiera haber olvidado, Simplemente ... ¡Gracias!

Carlos Gerardo Paniagua Ramírez
Ciudad Universitaria, Facultad de Ciencias
México, D. F.
Enero de 1998

Contenido

Introducción

Dada una familia de espacios topológicos $\{X_s\}_{s\in S}$ es posible construir nuevos espacios a partir de dicha familia, para ello podemos emplear operaciones entre espacios topológicos como la suma topológica y el producto topológico.Una vez que se construye el nuevo espacio, resulta importante tener una descripción adecuada del mismo. Por ejemplo, podemos estar interesados en saber cómo son los conjuntos abiertos o cómo podemos obtener una base. Para tal fin, en general, sólo se dispone del conocimiento que se pueda tener de los espacios que componen la familia.

Pero no sólo es importante lo anterior, es también interesante preguntarse acerca de las propiedades que se preservan con las operaciones topológicas, cuáles de las propiedades se pierden al realizar las operaciones entre los espacios, qué se puede decir cuando la familia está compuesta con espacios de una misma clase, como por ejemplo espacios compactos, espacios conexos, espacios Hausdorff, etc.

En el presente trabajo se hace un estudio de los productos topológicos así como de algunos de sus subespacios. En el capítulo preliminar se incluye una sección dedicada a los números cardinales, una a las definiciones y resultados sobre los que se desarrolla buena parte del trabajo y una tercera dedicada al Axioma de Elección que supondremos como cierto durante todo el presente trabajo.

Durante el primer capítulo comenzamos con la definición de la Topología de Tychonoff, el comportamiento de los conjuntos abiertos y cerrados en productos, así como también del producto de funciones. Finalizamos esta parte del trabajo con un estudio acerca del comportamiento de algunas de las principales clases de espacios topológicos en productos topológicos.

En el segundo capítulo introducimos el concepto de Función Cardinal, se analizan algunas de sus propiedades, se definen algunas de ellas, y terminamos esta parte con un análisis del comportamiento de las funciones cardinales en los productos topológicos.

El tercer capítulo está dedicado al estudio de un importante tema de la Topología General, la Universalidad. En este capítulo analizamos a los cubos de Alexandroff y de Tychonoff que son ejemplos relevantes de espacios universales, también se estudian los espacios Cero Dimensionales y El Erizo que es un espacio universal para espacios metrizables.

El cuarto capítulo del trabajo está dedicado por completo al estudio de los espacios de funciones continuas, que son subespacios de productos topológicos. En los espacios de funciones continuas se estudian las funciones restricción, la Evaluación Canónica, la estructura algebraica de los espacios de funciones, concluyendo con el comportamiento de algunas funciones cardinales en los espacios de funciones continuas.

0

Capítulo Preliminar

En este capítulo se hace una recopilación tanto de conceptos como de resultados que serán usados durante el desarrollo del presente trabajo. En primer lugar se incluye una sección dedicada a los números cardinales, en la cual, se definen sus principales propiedades así como las operaciones más básicas entre ellos. En la segunda sección se enuncian algunas definiciones y resultados de la Topología General que sirven de base para el desarrollo del primer capítulo. El orden en el cual son presentados éstos resultados y definiciones está directamente relacionado con la aparición de los mismos en el trabajo, y en algunos casos se ha intentado agrupar los conceptos que están relacionados para facilitar su localización. Finalmente en la tercera sección se enuncia el *Axioma de Elección.* Este axioma garantiza en una primera instancia, la existencia de funciones de elección, por lo cual, podemos garantizar que los productos topológicos no son vacíos.

0.1 Números Cardinales

Sean X y Y conjuntos, diremos que estos conjuntos son *equipotentes* si existe una función biyectiva entre ellos. A cada conjunto X se le asigna un número cardinal, éste se conoce como la *cardinalidad* del conjunto X y se denota como $|X|$; la igualdad $|X| = |Y|$ es cierta si y sólo si X y Y son equipotentes. El número cardinal asignado al conjunto de todos los enteros positivos $\mathbb{N}^+$ es denotado por el simbolo $\aleph_0$, y el número cardinal asignado al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es denotado por $\mathfrak{c}$.

Sean m y n dos números cardinales y sean X y Y conjuntos tales que $|X| = m$ y $|Y| = n$. Diremos que m es *menor o igual* que n $(m \leq n)$, o bien n es *mayor o igual* que m $(n \geq m)$, si existe una función $f : X \to Y$ inyectiva.

Un conjunto es *numerable* cuando es finito o bien tiene cardinalidad $\aleph_0$. Un conjunto es *infinito* cuando su cardinalidad es mayor o igual a $\aleph_0$. En el caso de que la cardinalidad de un conjunto infinito X sea $\aleph_0$, se dirá que el conjunto es un conjunto *infinito numerable*.

Para números cardinales las operaciones de suma y multiplicación son definidas de la siguiente manera:

Sean m y n dos números cardinales y sean X y Y conjuntos tales que: $X \cap Y = \phi$, $|X| = m$ y $|Y| = n$. Entonces $m+n$ es la cardinalidad del conjunto $X \cup Y$, esto es $m + n = |X \cup Y|$.

Sean m y n dos números cardinales y sean X y Y conjuntos tales que $|X| = m$ y $|Y| = n$. El producto de dos números cardinales es la cardinalidad del conjunto $X \times Y$. El producto de dos números cardinales m y n es denotado por $m \cdot n$, o también por mn.

Para todo número cardinal m, el número 2^m es definido como la cardinalidad de la familia de todos los subconjuntos de un conjunto X que satisface $|X| = m$.

Es posible demostrar que $2^{\aleph_0} = c = |\mathbb{R}|$.

En forma más general, dados números cardinales m y n, con $n \neq 0$, se define n^m como la cardinalidad del conjunto de todas las funciones de X en Y, donde $|X| = m$ y $|Y| = n$.

Para la exponenciación (o potenciación) de números cardinales se tienen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} n^{m_1+m_2} &= n^{m_1} \cdot n^{m_2} \\ (n_1 \cdot n_2)^m &= n_1^m \cdot n_2^m \\ (n^{m_1})^{m_2} &= n^{m_1 \cdot m_2} \end{aligned}$$

El hecho fundamental en cuanto a desigualdades de números cardinales, esta expresado en el siguiente teorema.

Teorema 0.1 (Cantor-Bernstein) *Si $m \leq n$ y $n \leq m$, entonces $m = n$*

No es difícil demostrar que $|f(X)| \leq |X|$ para cualquier función definida en un conjunto X. Esto implica en particular que la familia de todos los subconjuntos de cardinalidad $\leq m$ en un conjunto de cardinalidad $n \geq m$, tiene cardinalidad $\leq n^m$.

La suma de dos números cardinales, al menos uno de los cuales es infinito, es igual al mayor de los dos números. Lo mismo es cierto para el producto de dos números cardinales diferentes de cero, al menos uno de los cuales es infinito.

$$\begin{aligned} n + m &= \text{máx}\{n, m\} \\ n \cdot m &= \text{máx}\{n, m\} \end{aligned}$$

En particular tenemos que

$$m + m = m \cdot m = m, \text{ para toda } m \geq \aleph_0.$$

Si $m \leq n$, diremos que m es ***menor*** que n, o también que n es *mayor* que m si $m \neq n$, y lo denotaremos de la siguiente manera: $m < n$ ó $n > m$. Se cumple entonces que

$$m < 2^m \text{ para todo número cardinal } m;$$

en particular, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Dado un conjunto de números cardinales $\{m_s\}_{s \in S}$, la *mínima cota superior o supremo* de $\{m_s\}_{s \in S}$, es el menor número cardinal m tal que $m \geq m_s$ para toda $s \in S$. La notación usual para este número cardinal es: $sup\{m_s : s \in S\}$. Este número cardinal siempre existe.

0.2 Algunas Definiciones y Resultados de la Topología General.

En esta sección se dan las definiciones que se consideran necesarias para el desarrollo del trabajo, así como, diversos resultados de la Topología General que caracterizan propiedades topológicas asi como a clases de espacios topológicos. Los resultados, tanto teoremas como proposiciones, son enunciados sin demostración. Las demostraciones pueden ser consultadas en los textos cuya referencia aparece previamente al enunciado del resultado.

0.2.1 Continuidad

Diremos que una función $f : X \to Y$, entre dos espacios topológicos, es una ***función continua en un punto*** $x_0 \in X$, si para cualquier abierto $A \subset Y$ tal que $f(x_0) \in A$, existe un abierto $U \subset X$ tal que $f(U) \subset A$. Diremos que f ***es continua en*** X, si es continua en cada punto $x \in X$.

Teorema 0.2 **([W, pag.74], [GT, pag.79])** *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

i) f es continua;
ii) Para cualquier abierto $U \subset Y$, $f^{-1}(U)$ es abierto en X;
iii) Para cualquier cerrado $F \subset Y$, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

Una función $f : X \to Y$, entre espacios topológicos, es *abierta* (*cerrada*) si la imagen directa de todo conjunto abierto (cerrado) de X es un conjunto abierto (cerrado) en Y.

Sean X, Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es un *homeomorfismo* si f es biyectiva y además f y f^{-1} son funciones continuas.

Teorema 0.3 ([W, pag.74], [T, pag.75]) *Sean X, Y dos espacios topologicos y $f : X \to Y$ una función continua y biyectiva. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*
i) f^{-1} es continua;
ii) f es abierta;
iii) f es cerrada;
iv) f es homeomorfismo.

Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos. Diremos que f es un *encaje* si f es un homeomorfismo a su imagen.

0.2.2 Topología Débil

Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos y sea $f_\alpha : X \to X_\alpha$ una función para cada $\alpha \in I$. La menor topología en el conjunto X que hace a todas las funciones f_α continuas recibe el nombre de *topología débil* inducida por la familia de funciones $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}$ y por la familia de espacios topológicos $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$.

La topología débil tiene como una sub-base a la familia de todos los subconjuntos de la forma $f_\alpha^{-1}(U)$, en donde U es un abierto en el espacio topológico X_α y $\alpha \in I$.

Sean τ_1 y τ_2 dos topologías para un espacio X. Diremos que *τ_2 es más fina que τ_1* o bien que *τ_1 es más gruesa que τ_2*, ($\tau_1 \leq \tau_2$). si $\tau_1 \subset \tau_2$.

0.2.3 Numerabilidad y Densidad

Un espacio topológico X es *primero numerable* si para cada $x \in X$ existe una base de vecindades $\mathcal{B}_x$ numerable.

Un espacio topológico X es ***segundo numerable*** si existe una base numerable para la topología de X.

Un subconjunto D de un espacio topológico X es *denso* si para todo subconjunto diferente del vacío $U \subset X$ se cumple que $D \cap U \neq \emptyset$.

Un espacio topológico X es ***separable*** si contiene un subconjunto denso numerable.

Teorema 0.4 **([T, pag.116])** *Sea X un espacio topológico y D un subconjunto de X. Entonces, D es denso en X si y sólo si $\overline{D} = X$.*

0.2.4 Conjuntos Ordenados, Pre-ordenados y Dirigidos

Sea S un conjunto. Una ***partición*** $\mathcal{P}$ de S es una colección de subconjuntos no vacios de S, ajenos por pares y cuya unión es el conjunto S.

Una relación binaria $\leq$ en un conjunto X es un *orden* si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Es usual denotar orden por $\leq$. Un *conjunto ordenado* es una pareja $(X, \leq)$ en donde X es un conjunto y $\leq$ es un orden en X.

Una relación binaria en un conjunto M se dice un *pre-orden* si es reflexiva y transitiva. Un ***conjunto pre-ordenado*** es una pareja $(M, \leq)$ en donde M es un conjunto y $\leq$ es un pre-orden.

Un conjunto pre-ordenado se dice ***dirigido*** si para todo par de elementos $x, y \in M$, existe un elemento $z \in M$ tal que $x \leq z$ y $y \leq z$.

0.2.5 Redes

En este trabajo utilizaremos redes para determinar propiedades relacionadas a la convergencia. Una ***red*** en un conjunto X es una función $f : \Delta \to X$, en donde Δ es un conjunto dirigido.

Es usual denotar a las redes de las siguientes dos maneras:

$$(x_\lambda)_{\lambda \in \Delta} \text{ o bien como } \{x_\lambda : \lambda \in \Delta\}.$$

Sea X un espacio topológico, sea $(x_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ una red en X y $x \in X$. x es un *punto límite* de la red $(x_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ si para toda vecindad U de x en X existe $\lambda_0 \in \Delta$ tal que si $\lambda \geq \lambda_0$ entonces $x_\lambda \in U$. También se dice que la red converge a x.

x es un *punto de acumulación* de la red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ si para toda vecindad U de x en X y cada $\lambda \in \Delta$, existe $\lambda_0 \in \Delta$ tal que $\lambda_0 \geq \lambda$ y $x_{\lambda_0} \in U$.

Es usual denotar al *conjunto de puntos límite* de una red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ en X como $\lim(x_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$.

Se dice que una red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ en X está *eventualmente* en un subconjunto A de X si existe $\lambda_0 \in \Delta$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ se tiene que $x_{\lambda_0} \in A$.

Un tipo especial de redes son las redes universales.

Sea $(x_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ una red en un conjunto X. $(x_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ es una *red universal* en X si para todo subconjunto A de X, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ está eventualmente en A o en $X \setminus A$.

Teorema 0.5 ([W, pag.76]) *Si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ es una red universal en X y $f : X \to Y$ es una función, entonces $\left(f\left(x_\lambda\right)_{\lambda\in\Delta}\right)$ es una red universal en Y.*

La continuidad de una función está determinada por el comportamiento de las imagenes de redes y los conjuntos de puntos límite de las mismas.

Teorema 0.6 ([Eng, pag.51]) *Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es continua si y sólo si $f\left(lim\left(x_\lambda\right)_{\lambda\in\Delta}\right) \subset lim\left(f\left(x_\lambda\right)_{\lambda\in\Delta}\right)$ para toda red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ en X.*

0.2.6 Los Axiomas de Separación

Un espacio topológico X es un espacio T_0 si dados dos puntos distintos $x, y \in X$, existe un abierto en X que contiene a uno de ellos pero no al otro.

Un espacio topológico es T_1 si dados dos puntos distintos cualesquiera $x, y \in X$, existen dos abiertos A_1, A_2 tales que $x \in A_1 \setminus A_2$ y $y \in A_2 \setminus A_1$.

Teorema 0.7 ([GT, pag.89], [T, pag.127]) *Un espacio topológico X es T_1 si y sólo si cualquier subconjunto de X formado por un elemento es cerrado.*

Un espacio topológico X es llamado T_2 o *espacio Hausdorff* si dados dos puntos distintos $x, y \in X$ existen dos abiertos ajenos A_1 y A_2 tales que $x \in A_1$ y $y \in A_2$.

Un espacio topológico X es T_3 o *Regular* si es un espacio T_1 y para cualquier cerrado $F \subset X$ y cualquier punto $x \in X \setminus F$ existen abiertos ajenos U_1 y U_2 tales que $F \subset U_1$ y $x \in U_2$.

Teorema 0.8 ([Eng, pag.38], [T, pag.135]) *Un espacio topológico X es regular si y sólo si X es un espacio T_1 y dado cualquier abierto U en X y $x \in U$, existe un abierto V tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.*

Un espacio topológico X es llamado $T_{3\frac{1}{2}}$, *espacio Tychonoff* o bien *completamente regular*, si X es un espacio T_1 y para todo $x \in X$ y todo subconjunto cerrado $F \subset X$ tal que $x \notin F$, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para toda $y \in F$.

Un espacio topológico X es *Normal* o T_4 si X es T_1 y dados dos conjuntos cerrados ajenos F_1 y F_2 en X, existen abiertos ajenos U_1 y U_2 tales que $F_1 \subset U_1$ y $F_2 \subset U_2$.

Un espacio topológico X es *hereditariamente normal* o T_5 si X es normal y todo subespacio de X también es normal.

Un subconjunto Y de X es un G_δ si se puede expresar como la intersección numerable de conjuntos abiertos.

Un espacio topológico X es *perfectamente normal* o T_6 si X es normal y todo subconjunto cerrado de X es un G_δ.

Teorema 0.9 ([Eng, pag.68]) *Cualquier subespacio de un espacio T_i es un espacio T_i, para $i \in \left\{0,1,2,3,3\frac{1}{2}\right\}$. Normalidad es hereditaria con respecto a subconjuntos cerrados. La Normalidad perfecta es una propiedad hereditaria.*

0.2.7 Propiedades de Recubrimientos

Recordemos que una *cubierta abierta (cerrada)* de un espacio topológico X es una familia $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos abiertos (cerrados) de X tales que $\bigcup_{s\in S} A_s = X$. Una cubierta $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in T}$ es un *refinamiento* de la cubierta $\{A_s\}_{s\in S}$ si para toda $t \in T$ existe $s \in S$ tal que $B_t \subset A_s$. En este caso $\mathcal{B}$ *refina a* $\mathcal{A}$. Finalmente una cubierta $\mathcal{A}^*=\{A_s^*\}_{s\in S^*}$ es una *subcubierta* de la cubierta $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s\in S}$ de X si $S^* \subset S$ y $A_s^* = A_s$ para toda $s \in S^*$; en particular, una subcubierta es un refinamiento.

Una familia $\{A_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos de un espacio topológico X es *localmente finita* si para toda $x \in X$ existe una vecindad U tal que el conjunto $\{s \in S : U \cap A_s \neq \phi\}$ es finito. Si cada punto tiene una vecindad que intersecta a lo más a un conjunto de la familia, dirémos que la familia es *discreta*.

Un espacio topológico X es *compacto* si X es un espacio Hausdorff y toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

Teorema 0.10 **([W, pag.118])** *Para un espacio topológico X, las siguientes proposiciones son equivalentes:*
a) X es compacto;
b) Toda red universal en X converge.

Teorema 0.11 **([W, pag.119])** *Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva. Si X es compacto, entonces Y es compacto.*

Decimos que un espacio topológico X es *localmente compacto* si cada punto de X está contenido en una vecindad compacta. Es decir, para cada punto $x \in X$ podemos encontrar un compacto K y un abierto V tales que $x \in V \subset K$.

Teorema 0.12 **([W, pag.131])** *Sea $f : X \to Y$ una función continua, abierta y sobreyectiva. Si X es localmente compacto, entonces Y también es localmente compacto.*

Un espacio X es *numerablemente compacto* si es un espacio T_2 y de cualquier cubierta abierta numerable del espacio, es posible extraer una subcubierta finita.

Un espacio X es *Lindelöf* si toda cubierta abierta del espacio, tiene una subcubierta numerable.

Teorema 0.13 **([Eng, pag.203])** *La imagen continua de un espacio numerablemente compacto (Lindelöf) es un espacio numerablemente compacto (Lindelöf).*

Teorema 0.14 **([Eng, pag.202], [GT, pag.100])** *En un espacio topológico Hausdorff X son equivalentes:*
a) X es numerablemente compacto;
b) Toda sucesión $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$ tiene un punto de acumulación.

Teorema 0.15 **([T, pag.172], [GT, pag.94])** *Si X es un espacio regular y Lindelöf, entonces es normal.*

Ejemplo 0.16 *La línea de Sorgenfrey es el espacio topológico obtenido al dotar al conjunto de los numeros reales* $\mathbb{R}$ *con la topología*

$$\tau = \{\phi, \mathbb{R}\} \bigcup \{E \subset \mathbb{R}\text{: } E \text{ es unión de intervalos de la forma } [x, z)\}.$$

Este espacio es un espacio regular y Lindelöf. Así, en virtud del teorema anterior es un espacio normal.

La línea de Sorgenfrey es un espacio muy importante de la Topología General, ya que sirve como contraejemplo para muchas propiedades, en particular nos serán de gran utilidad las propiedades que tiene el cuadrado de la Línea de Sorgenfrey.

Un espacio topológico Hausdorff es *paracompacto* si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto localmente finito.

Teorema 0.17 **([Eng, pag.300])** *Si* X *es un espacio regular y Lindelöf, entonces* X *es paracompacto.*

Teorema 0.18 **[Eng, pag.300], [T, pag.180])** *Todo espacio paracompacto es normal.*

Teorema 0.19 **([Eng, pag.126])** *Si* $A \times \{y\}$ *es un subespacio compacto de* $X \times Y$ *contenido en un conjunto abierto* W *en* $X \times Y$, *entonces se pueden encontrar abiertos* $U \subset X$ *y* $V \subset Y$ *tales que*

$$A \times \{y\} \subset U \times V \subset W.$$

0.2.8 CONEXIDAD

Un espacio X es *conexo* si no existen abiertos ajenos no vacíos U y V tales que $X = U \cup V$.

Teorema 0.20 **([W, pag.192])** *La imagen continua de un espacio conexo es nuevamente un espacio conexo.*

Teorema 0.21 **([T, pag.192])** *Si* $X = \bigcup_{s \in S} X_s$ *en donde* X_s *es conexo para toda* $s \in S$ *y* $\bigcap_{s \in S} X_S \neq \phi$, *entonces el espacio* X *es conexo.*

Teorema 0.22 **([W, pag.193])** *Si* $E \subset X$ *es conexo y* $E \subset A \subset \overline{E}$, *entonces* A *es un espacio conexo.*

Si $x \in X$, el mayor de los subconjuntos conexos C_x de X tal que $x \in C_x$ se llama la *componente conexa de* x. C_x es la unión de todos los conjuntos conexos de X que contienen a x.

Proposición 0.23 **([W, pag.194], [GT, pag.57])** *Las componentes conexas son conjuntos cerrados.*

Un espacio X es *localmente conexo* si para toda $x \in X$ existe una base local de vecindades que consiste de conjuntos conexos abiertos.

Teorema 0.24 **([W, pag.200])** *La imagen continua y abierta de un espacio localmente conexo es nuevamente un espacio localmente conexo.*

Sea X un espacio topológico, un subespacio Y de X se dice que es una *trayectoria* en X si existe una función continua y sobreyectiva $f : [0,1] \to Y$.

Sea X un espacio topológico, se dice que X es *conexo por trayectorias* si para cada par de puntos $x, y \in X$, existe una trayectoria en X que los contiene.

0.2.9 Metrizabilidad

Un subespacio A de X es *funcionalmente cerrado*, o *conjunto cero*, si existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $A = f^{-1}(0)$. El complemento de un conjunto cero es un *conjunto co-cero* o *funcionalmente abierto*.

Una familia de subconjuntos de un espacio topológico es llamada *$\sigma-$localmente finita (discreta)* si esta puede ser representada como la unión numerable de familias localmente finitas (discretas).

Teorema 0.25 **(de Metrización de Bing [GT, pag.254])** *Un espacio topológico X es metrizable si y sólo si es regular y tiene una base σ-discreta.*

Proposición 0.26 **([Eng, pag.254])** *Todo subconjunto cerrado de un espacio metrizable es funcionalmente cerrado, en particular resulta ser un G_δ.*

Proposición 0.27 **([Eng, pag.71])** *Si $\mathcal{F}=\{F_s\}_{s\in S}$ es una cubierta cerrada localmente finita de un espacio X y $\{f_s : F_s \to Y\}_{s\in S}$ es una familia de funciones continuas tales que si $F_s \cap F_{s*} \neq \phi$, entonces*

$f_s(x) = f_{s^*}(x)$ para toda $x \in X$ y para toda pareja $s, s^* \in S$. Entonces la función $f : X \to Y$ definida como $f(x) = f_s(x)$ para $x \in F_s$ y $s \in S$ es continua.

Un subespacio A de X está *C-encajado* (*C^*−encajado*) si toda función continua (respectivamente continua y acotada) $f : A \to \mathbb{R}$ se puede extender a una función $f^* : X \to \mathbb{R}$ continua.

0.3 El Axioma de Elección

Durante todo el texto supondremos cierto el axioma de elección, y dada su importancia dedicamos esta sección del capítulo para enunciarlo, así como a cuatro de sus equivalencias.

Antes de enunciarlo necesitamos mencionar un par de definiciones.

Diremos que un elemento x_0 de un conjunto ordenado X es un *elemento maximal* de X, si $x_0 \leq x \in X$ implica que $x_0 = x$.

Sea X un conjunto y $\mathcal{P}$ una propiedad conjuntista. La propiedad $\mathcal{P}$ es de *carácter finito* si el conjunto vacío tiene esta propiedad y $A \subset X$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$ si y sólo si todos los subconjuntos finitos de A tienen la propiedad $\mathcal{P}$.

Axioma 1 (de Elección) *Para toda familia $\{X_s\}_{s\in S}$ de conjuntos no vacíos existe una función $f : S \to \bigcup_{s\in S} X_s$ tal que $f(s) \in X_s$ para toda $s \in S$.*

La función cuya existencia garantiza el axioma es precisamente una *función de elección.*

Las siguientes proposiciones son equivalentes al axioma de elección.

Teorema 0.28 (de Zermelo) *En todo conjunto X existe una relación $<$ que bien ordena al conjunto X.*

Lema 0.29 (Teichmüller-Tukey) *Si $\mathcal{P}$ es una propiedad de carácter finito perteneciente a los subconjuntos de un conjunto X, entonces todo conjunto $A \subset X$ que tiene la propiedad $\mathcal{P}$ está contenido en un conjunto $B \subset X$ que tiene la propiedad $\mathcal{P}$ y que es maximal en la familia de todos los subconjuntos de X que tienen la propiedad $\mathcal{P}$ ordenados con la relación $\subset$.*

Lema 0.30 (Kuratowsky-Zorn) *Si para todo subconjunto linealmente ordenado A de un conjunto X ordenado por $\leq$ existe un $x_0 \in X$ tal que $x \leq x_0$ para todo $x \in A$, entonces X tiene un elemento maximal.*

La demostración de la equivalencia de las proposiciones se puede consultar en **[Eng, pag.8]**

Aún cuando las equivalencias del axioma no son directamente utilizadas en el texto, consideramos importante mencionarlas ya que ello nos da una idea de la importancia del axioma de elección al ser equivalente a dos principios maximales y a uno que tiene que ver con el buen ordenamiento de un conjunto.

1

Producto de Espacios Topológicos

1.1 Productos Cartesianos

Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in S}$ una familia de conjuntos no vacíos. El *producto cartesiano* $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$de los conjuntos X_α es el conjunto de todas las funciones de dominio S y contradominio $\bigcup_{\alpha\in S} X_\alpha$ tales que la imagen del elemento $\alpha \in S$ pertenece a X_α para cada uno de los elementos α en el conjunto de índices S, es decir

$$\prod_{\alpha\in S} X_\alpha = \{f : S \to \bigcup X_\alpha \mid f(\alpha) \in X_\alpha, \forall\alpha \in S\}.$$

A cada elemento del producto lo representaremos de la siguiente manera:

si $x \in \prod_{\alpha\in S} X_\alpha$ entonces $x = (x_\alpha)_{\alpha\in S}$ donde $x_\alpha = x(\alpha)$ es llamada *$\alpha-$ésima coordenada* del punto x.

Al conjunto X_α se le conoce como el *$\alpha-$ésimo conjunto factor* del producto $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$.

La función $\pi_\beta : \prod_{\alpha\in S} X_\alpha \to X_\beta$ definida como $\pi_\beta(x) = x_\beta$ es llamada *proyección* de $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$ en el $\beta-$ésimo conjunto factor X_β; π_β es también conocida como la *$\beta-$ésima proyección.*

Si $X_\alpha = X$ para toda α perteneciente a S, entonces $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$ es el conjunto X^S de todas las funciones de S en X.

1.2 Topología Producto

Sea X_α un espacio topológico para cada $\alpha \in S$. Deseamos definir una topología en $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$, *la Topología de Tychonoff* o *Topología Producto.* Esta se obtiene tomando como base para los conjuntos abiertos en $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$, a los conjuntos de la forma $\prod_{s\in S} W_s$, donde

i) W_s es un abierto en X_s para toda $s \in S$.

ii) $W_s \neq X_s$ sólo para un número finito de elementos s de S.

Nótese que como $W_s = X_s$ para toda $s \in S$, excepto para un número finito de elementos $s_i \in S$ con $i \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces

$$\prod_{s \in S} W_s = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{s_i}^{-1}(W_{s_i}) = \pi_{s_1}^{-1}(W_{s_1}) \bigcap \pi_{s_2}^{-1}(W_{s_2}) \bigcap \cdots \bigcap \pi_{s_n}^{-1}(W_{s_n}).$$

Por lo tanto, la topología producto es precisamente aquella topología en $\prod_{\alpha \in S} X_\alpha$ que tiene como una sub-base a la colección

$$\{\pi_\alpha^{-1}(W_\alpha) \mid \alpha \in S, W_\alpha \text{ es abierto en } X_\alpha\}.$$

Si consideramos, para cada X_α, una base $\mathcal{B}_\alpha$ entonces los conjuntos de la forma $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{s_i}^{-1}(W_{s_i})$, donde $W_{s_i} \in \mathcal{B}_{\alpha_i}$, forman una base para la topología producto. Esta base se conoce como la *Base Canónica* de la topología producto y resulta ser bastante notable, pues se obtiene a partir de las bases de los espacios factores.

Proposición 1.1 *Si $\{X_\alpha\}_{\alpha \in S}$ es una familia de espacios topológicos, entonces para toda $\beta \in S$, la proyección $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in S} X_\alpha \to X_\beta$ es una función continua, abierta y sobreyectiva.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\beta \in S$ y consideremos la β-ésima proyección

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha \in S} X_\alpha \to X_\beta.$$

Para demostrar la continuidad de π_β consideremos un abierto U no trivial (i.e. $\phi \neq U \subsetneq X_\beta$), y consideremos la imagen inversa de U bajo la función π_β, es decir $\pi_\beta^{-1}(U)$. Esta es precisamente el conjunto $\prod_{s \in S} W_s$, donde $W_s = X_s$ si $s \neq \beta$ y $W_s = U$ cuando $s = \beta$ y este conjunto es un abierto en el producto topológico. Por lo tanto la $\beta-$ésima proyección $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in S} X_\alpha \to X_\beta$ es una función continua.

Ahora mostraremos que la función π_β es una función abierta. Obsérvese que para un abierto básico $W = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{s_i}^{-1}(W_{s_i})$

$$\pi_\beta(W) = \begin{cases} X_\beta & si\ \beta \neq s_i,\ \forall i = 1, 2, ..., n \\ W_{s_i} & si\ \beta = s_i, \text{ para algún } i \in \{1, 2, ..., n\}\ , \end{cases}$$

en ambos casos, ya sea $\pi_\beta(W) = X_\beta$ o bien $\pi_\beta(W) = W_{s_i}$, obtenemos conjuntos abiertos del espacio X_β. Por lo tanto, la $\beta-$ésima proyección. $\pi_\beta : \prod_{\alpha\in S} X_\alpha \to X_\beta$ manda abiertos básicos en conjuntos abiertos.

Ahora sea U un conjunto abierto de $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$, entonces $U = \bigcup_{a\in A} W_a$ donde W_a es un abierto canónico en $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$, y sea $y \in \pi_\beta(U)$, entonces existe $x \in U$ tal que $\pi_\beta(x) = y$. Como $U = \bigcup_{a\in A} W_a$, existe $a_0 \in A$ tal que $x \in W_{a_0}$. Entonces $y = \pi_\beta(x) \in \pi_\beta(W_{a_0}) \subset \pi_\beta(U)$ y como W_{a_0} es un abierto básico, tenemos que $\pi_\beta(W_{a_0})$ es un conjunto abierto en X_β. De donde, $\pi_\beta(U)$ es un conjunto abierto. Por lo tanto, π_β es una función abierta.

Finalmente sea $x \in X_\beta$, entonces $\pi_\beta^{-1}(x) = \prod_{s\in S} W_s$, donde $W_s = X_s$ si $s \neq \beta$ y $W_s = \{x\}$ cuando $s = \beta$. Luego como cada uno de los espacios es no vacío tenemos que $\pi_\beta^{-1}(x) = \prod_{s\in S} W_s \neq \phi$. Por lo tanto, la β−ésima proyección $\pi_\beta : \prod_{\alpha\in S} X_\alpha \to X_\beta$ es una función sobreyectiva ■

Observación 1 *La topología producto es precisamente la topología débil inducida por la familia de funciones $\{\pi_s\}_{s\in S}$ en el conjunto $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$. De donde, tenemos que esta topología es la menor topología en el producto $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$ para la cual todas las funciones proyección*

$$\pi_s : \prod_{\alpha\in S} X_\alpha \to X_s$$

resultan ser continuas. Es decir, cualquier otra topología en $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$ para la cual las funciones π_s son continuas contiene a la topología producto.

Proposición 1.2 *Si $\{X_\alpha\}_{\alpha\in S}$ es una familia de espacios topológicos y $A_\alpha \subset X_\alpha$ para toda $\alpha \in S$, entonces las dos topologías definidas en el conjunto $\prod_{\alpha\in S} A_\alpha$, la topología de subespacio heredada de $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$ y la topología producto de los subespacios $\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}$, coinciden.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $A_\alpha \neq \phi$, para cada $\alpha \in S$. Como la restricción

$$\pi_\alpha |_{\prod_{\alpha\in S} A_\alpha} : \prod_{\alpha\in S} A_\alpha \to A_\alpha$$

es una función continua, la topología de subespacio en $\prod_{\alpha\in S} A_\alpha$ es más fina que la topología producto en $\prod_{\alpha\in S} A_\alpha$ (Ver Observación 1). Por otro lado, cualquier abierto del subespacio $\prod_{\alpha\in S} A_\alpha$ es la intersección de $\prod_{\alpha\in S} A_\alpha$ con un abierto de $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$, es decir, es la unión de intersecciones de $\prod_{\alpha\in S} A_\alpha$ con miembros de la base canónica de $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$:

$$\left(\prod_{\alpha\in S} A_\alpha\right)\bigcap\left(\bigcup_{a\in A} W_a\right) = \bigcup_{a\in A}\left(\left(\prod_{\alpha\in S} A_\alpha\right)\bigcap W_a\right)$$

donde cada W_a es miembro de la base canónica de $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$. De donde resulta que cada conjunto de la forma

$$\left(\prod_{\alpha\in S} A_\alpha\right)\bigcap W_a$$

es un abierto básico en $\prod_{\alpha\in S} A_\alpha$, entonces tenemos que la topología producto es más fina que la topología de subespacio. Por lo tanto, las topologías coinciden ■

Proposición 1.3 *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in S}$ una familia de espacios topológicos y $A_\alpha \subset X_\alpha$ para toda $\alpha \in S$. Entonces en el producto $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$ se cumple que $\overline{\prod_{\alpha\in S} A_\alpha} = \prod_{\alpha\in S} \overline{A_\alpha}$.*

Demostración. Sean $x \in \prod_{\alpha\in S} X_\alpha$ y β_x una base local de x en $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$ consistente de abiertos canónicos. Entonces $x \in \overline{\prod_{\alpha\in S} A_\alpha}$ si y sólo si para todo $\prod_{\alpha\in S} W_\alpha \in \beta_x$,

$$\left(\prod_{\alpha\in S} W_\alpha\right)\bigcap\left(\prod_{\alpha\in S} A_\alpha\right) = \prod_{\alpha\in S}(W_\alpha \cap A_\alpha) \neq \phi;$$

es decir para cada $\alpha \in S$ y cualquier vecindad W_α de la α–ésima coordenada de x se tiene que $W_\alpha \cap A_\alpha \neq \phi$ y esto último se cumple si y sólo si $x \in \prod_{\alpha\in S} \overline{A_\alpha}$ ■

Corolario 1.4 *Sea $A_\alpha \subset X_\alpha$ para cada $\alpha \in S$. Entonces el conjunto $\prod_{\alpha\in S} A_\alpha$ es cerrado en el producto $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$ si y sólo si A_α es cerrado en X_α para toda $\alpha \in S$.*

Demostración. $\Rightarrow$] Si el producto $\prod_{\alpha\in S} A_\alpha$ es cerrado en $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$ entonces coincide con su cerradura. Ahora, como la cerradura es igual al producto de las cerraduras de los conjuntos A_α (Proposición 1.3) y sabemos que estos están contenidos en su cerradura, tenemos que cada uno de los conjuntos A_α coincide con su cerradura; por tanto A_α es cerrado.

$\Leftarrow$] Si cada uno de los A_α es cerrado, entonces

$$\overline{\prod_{\alpha\in S} A_\alpha} = \prod_{\alpha\in S} \overline{A_\alpha} = \prod_{\alpha\in S} A_\alpha$$

Por lo tanto $\prod_{\alpha\in S} A_\alpha$ es un conjunto cerrado en el producto $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$ ■

Corolario 1.5 *Sea $A_\alpha \subset X_\alpha$ para cada $\alpha \in S$. Entonces el conjunto $\prod_{\alpha\in S} A_\alpha$ es denso en el producto $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$ si y sólo si A_α es denso en X_α para toda $s \in S$.*

DEMOSTRACIÓN. Si el conjunto $\prod_{\alpha\in S} A_\alpha$ es denso en $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$, entonces por el corolario 1.4

$$\prod_{\alpha\in S} X_\alpha = \overline{\prod_{\alpha\in S} A_\alpha} = \prod_{\alpha\in S} \overline{A_\alpha}$$

ahora para que se dé la igualdad es una condición necesaria y suficiente que los espacios factores coincidan y esto sucede si y sólo si $\overline{A_\alpha} = X_\alpha$, es decir, si y sólo si A_α es denso en el espacio factor X_α para toda $\alpha \in S$ ■

Un resultado bastante notable que nos permite determinar cuándo una función, cuyo codominio es un producto topológico, es continua está plasmado en la siguiente proposición.

Proposición 1.6 *Una función $f : X \to \prod_{\alpha\in S} Y_\alpha$ es continua si y sólo si la composición $\pi_\alpha \circ f$ es continua para toda $\alpha \in S$.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$] Como π_α es continua, si f es una función continua tenemos que $\pi_\alpha \circ f$ es continua, por ser la composición de dos funciones continuas.

$\Leftarrow$] Supongamos ahora que $\pi_\alpha \circ f$ es una función continua para toda $\alpha \in S$ y sea $U \subset \prod_{\alpha\in S} Y_\alpha$ un abierto básico, $U = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_i)$ en donde U_i es un conjunto abierto en Y_{α_i}. Ahora consideremos a $f^{-1}(U)$ y observemos que

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_i)\right) = \\ \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}\left(\pi_{\alpha_i}^{-1}(U_i)\right) &= \bigcap_{i=1}^{n} \left(\pi_{\alpha_i} \circ f\right)^{-1}(U_i). \end{aligned}$$

Como $\pi_\alpha \circ f$ es continua para toda $\alpha \in S$, tenemos que $(\pi_{\alpha_i} \circ f)^{-1}(U_i)$ es un conjunto abierto en X. Entonces $\bigcap_{i=1}^{n} (\pi_{\alpha_i} \circ f)^{-1}(U_i)$ también es un conjunto abierto en X. Por lo tanto, $f^{-1}(U)$ es abierto en X: y ello demuestra que la función f es continua ∎

Definición 1.7 *Sea $G = \{g_\alpha : X \to Y_\alpha\}_{\alpha \in S}$ una familia de funciones entre espacios topológicos. Definimos $g : X \to \prod_{\alpha \in S} Y_\alpha$ con la fórmula $(g(x))(\alpha) = g_\alpha(x)$ para toda $x \in X$ y para toda $\alpha \in S$.*

La siguiente proposición es un corolario inmediato de la proposición 1.6 y de la definición de la función g.

Corolario 1.8 *La función g es continua si y sólo si g_α es continua para toda $\alpha \in S$.*

DEMOSTRACIÓN. Simplemente obsérvese que $\pi_\beta \circ g = g_\beta$ para toda $\beta \in S$ ∎

Proposición 1.9 *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in S}$ una familia de espacios topológicos y sea $\{\Delta_\mu\}_{\mu \in M}$ una partición de S, entonces los espacios*

$$\prod_{\alpha \in S} X_\alpha \ y \ \prod_{\mu \in M} \left\{ \prod_{\alpha \in \Delta_\mu} X_\alpha \right\}$$

son espacios homeomorfos; es decir, el producto topológico es asociativo.

DEMOSTRACIÓN. Para cada $\mu \in M$, sea $Z_\mu = \prod_{\alpha \in \Delta_\mu} X_\alpha$ y sea P_β la función proyección de $Z_\mu = \prod_{\alpha \in \Delta_\mu} X_\alpha$ en su β-ésimo espacio factor. Entonces definimos $\pi_\mu : \prod_{\alpha \in S} X_\alpha \to Z_\mu$ como $(x_\alpha)_{\alpha \in S} \longmapsto (x_\alpha)_{\alpha \in \Delta_\mu}$; π_μ es una sobreyección. Para cada $\beta \in \Delta_\mu$, la función $P_\beta \circ \pi_\mu$ es la proyección de $\prod_{\alpha \in S} X_\alpha$ en su $\beta-$ésimo espacio factor. entonces π_μ es una función continua.

Ahora definimos $f : \prod_{\alpha \in S} X_\alpha \to \prod_{\mu \in M} Z_\mu$ de la siguiente manera: $x \longmapsto (\pi_\mu(x))_{\mu \in M}$. Por el corolario anterior, la función f es continua. La función f también es una función abierta; para mostrarlo basta hacerlo para abiertos básicos de $\prod_{\alpha \in S} X_\alpha$. Sea $U = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \subset \prod_{\alpha \in S} X_\alpha$ un abierto básico. Para ello, si $K(U) = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ y además se cumple que $K(U) \cap \Delta_\mu \neq \phi$, entonces $\pi_\mu(U) = \prod_{\alpha \in S} W_\alpha = W$ donde $K(W) = K(U) \cap \Delta_\mu$, es decir si $\alpha \in K(W)$ se tiene que $\pi_\alpha(W) = U_\alpha$ y si $\alpha \notin K(W)$ entonces $\pi_\alpha(W) = X_\alpha$. Ahora si $K(U) \cap \Delta_\mu = \phi$, entonces $\pi_\mu(U) = Z_\mu$.

Por lo tanto $f(U)$ es un abierto en $\prod_{\mu \in M} Z_\mu$. Finalmente, f es una biyección debido a que $\{\Delta_\mu\}_{\mu \in M}$ es una partición de S. De todo lo anterior concluimos que f es un homeomorfismo y esto demuestra que $\prod_{\mu \in M} Z_\mu \cong \prod_{\alpha \in S} X_\alpha$. ■

Proposición 1.10 *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in S}$ una familia de espacios topológicos y sea $\phi : S \to S$ una biyección. Entonces los espacios topológicos $\prod_{\alpha \in S} X_\alpha$ y $\prod_{\alpha \in S} X_{\phi(\alpha)}$ son homeomorfos, es decir, el producto topológico es conmutativo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $Y_\alpha = X_{\phi(\alpha)}$ para toda $\alpha \in S$. Consideremos $\phi^* : \prod_{\alpha \in S} X_\alpha \to \prod_{\alpha \in S} Y_\alpha$ definida de la siguiente manera: $(\phi^*(x))(\alpha) = x(\phi(\alpha))$ para cada $x \in \prod_{\alpha \in S} X_\alpha$ y $\alpha \in S$. Denotemos mediante P_α y R_α a las proyecciones de $\prod_{\alpha \in S} X_\alpha$ y $\prod_{\alpha \in S} Y_\alpha$ en X_α y Y_α, respectivamente. Como $R_\alpha \circ \phi^* = P_{\phi(\alpha)}$ para cada $\alpha \in S$, por la proposición 1.6, ϕ^* es continua. Ahora, ϕ^* también es inyectiva y suprayectiva; en efecto, si $p, q \in \prod_{\alpha \in S} X_\alpha$, $p \neq q$ entonces $p(\alpha) \neq q(\alpha)$ para alguna $\alpha \in S$, de donde $\phi^*(p) \neq \phi^*(q)$. Por lo tanto, ϕ^* es inyectiva. Ahora, para probar la suprayectividad, sea $y \in \prod_{\alpha \in S} Y_\alpha$, entonces $y = \phi^*(x)$ en donde $x \in \prod_{\alpha \in S} X_\alpha$ se define de manera que $x(\alpha) = y(\phi^{-1}(\alpha))$. Finalmente $(\phi^*)^{-1}$ es continua pues $P_\alpha \circ (\phi^*)^{-1} = R_{\phi^{-1}(\alpha)}$. Por lo tanto, ϕ^* es un homeomorfismo.
■

1.2.1 PRODUCTO DE FUNCIONES

Definición 1.11 *Dadas dos familias de espacios topológicos $\{X_s\}_{s \in S}$, $\{Y_s\}_{s \in S}$ y una familia $\{f_s : X_s \to Y_s\}_{s \in S}$ de funciones, la función que asigna a cada punto $x = (x_s)_{s \in S} \in \prod_{s \in S} X_s$ el punto*

$$f(x) = (f_s(x_s))_{s \in S} \in \prod_{s \in S} Y_s$$

se denomina función producto o producto cartesiano de las funciones $\{f_s\}_{s \in S}$ la cual se denota $\prod_{s \in S} f_s$ o bien como $f_1 \times f_2 \times ... \times f_k$ si $S = \{1, 2, ..., k\}$. Así

$$\prod_{s \in S} f_s : \prod_{s \in S} X_s \to \prod_{s \in S} Y_s.$$

La función producto, $f = \prod_{s\in S} f_s$ así definida posee las siguientes propiedades:

$f(\prod_{s\in S} A_s) = \prod_{s\in S} f_s(A_s)$ y $f^{-1}(\prod_{s\in S} B_s) = \prod_{s\in S} f_s^{-1}(B_s)$, donde $A_s \subset X_s$ y $B_s \subset Y_s$.

Definición 1.12 *Si ahora $X_s = X$ para toda $s \in S$, es decir que todos los espacios son el mismo espacio topológico X, y $\{f_s : X \to Y_s\}_{s\in S}$ es una familia de funciones, la función que asigna a cada punto $x \in X$ el punto*

$$f(x) = y = (f_s(x))_{s\in S} \in \prod_{s\in S} Y_s$$

se denomina la diagonal de las funciones $\{f_s\}_{s\in S}$ y ésta se denota como $\triangle_{s\in S} f_s$ o bien $f_1 \triangle f_2 \triangle ... \triangle f_k$ si $S = \{1, 2, ..., k\}$.

Para la diagonal tenemos que se cumplen las siguientes propiedades: $f(A) \subset \prod_{s\in S} f_s(A)$ y $f^{-1}(\prod_{s\in S} B_s) = \bigcap_{s\in S} f_s^{-1}(B_s)$, donde $A \subset X$ y $B_s \subset Y_s$.

Obsérvese que la diagonal $\triangle_{s\in S} f_s$ es la composición de la diagonal $i = \triangle_{s\in S} id_{X_s} : X \to \prod_{s\in S} X_s$ con $X = X_s$ para $s \in S$, y el producto cartesiano $\prod_{s\in S} f_s : \prod_{s\in S} X_s \to \prod_{s\in S} Y_s$.

Definición 1.13 *La imagen de X bajo la función $\triangle_{s\in S} id_{X_s}$*

$$i(X) \subset X^m = \prod_{s\in S} X_s,$$

donde $\mid S \mid = m$, se conoce como la diagonal del producto X^m. Se denotará como Δ.

Definición 1.14 *Sea X un espacio topológico, $\{Y_s\}_{s\in S}$ una familia de espacios topológicos y $\mathcal{F} = \{f_s : X \to Y_s\}_{s\in S}$ una familia de funciones. Entonces,*

1.- Diremos que la familia $\mathcal{F}$ separa puntos si para cada par de puntos x, $y \in X$ distintos, existe $f_s \in \mathcal{F}$ tal que $f_s(x) \neq f_s(y)$.

2.- Si para cada $x \in X$ y cada subconjunto cerrado $A \subset X$ tal que $x \notin A$, existe $f_s \in \mathcal{F}$ tal que $f_s(x) \notin \overline{f_s(A)}$, diremos entonces que la familia $\mathcal{F}$ separa puntos de conjuntos cerrados o que $\mathcal{F}$ es una familia regular.

Después de las definiciones preliminares dispongámonos ahora a pasar a los resultados.

Lema 1.15 *Si la función continua $f : X \to Y$ es uno a uno y la familia de un elemento $\{f\}$ separa puntos de conjuntos cerrados, entonces la función f es un encaje.*

Demostración. Es suficiente demostrar que la función es cerrada, lo cual es equivalente a demostrar que para cualquier conjunto cerrado $A \subset X$, $f(A) = \overline{f(A)}$. Siempre se cumple que $f(A) \subset \overline{f(A)}$, por lo que sólo resta demostrar que $\overline{f(A)} \subset f(A)$.

Sea $y = f(x) \in f(X) \setminus f(A)$, entonces $x \notin \overline{A}$ y como f separa puntos de conjuntos cerrados, $y = f(x) \notin \overline{f(A)}$. Por lo tanto $\overline{f(A)} \subset f(A)$, y de esto se sigue que la función f es cerrada, y por ser además continua e inyectiva, se concluye que f es un encaje ∎

Teorema 1.16 (Diagonal) *Si la familia $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s\in S}$ de funciones continuas, donde $f_s : X \to Y_s$, separa puntos. Entonces la función diagonal*

$$f = \triangle_{s\in S} f_s : X \to \prod_{s\in S} Y_s$$

es una función uno a uno. Si además la familia separa puntos de conjuntos cerrados, entonces f es un encaje. En particular, si existe $s \in S$ tal que f_s es un encaje, entonces f es un encaje.

Demostración. Como la familia $\mathcal{F}$ separa puntos, entonces para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existe $s \in S$ tal que $f_s(x) \neq f_s(y)$. Entonces $f(x) \neq f(y)$, lo cual demuestra que la función f es uno a uno.

Ahora, si la familia $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s\in S}$ separa puntos de conjuntos cerrados, entonces la familia de un sólo elemento $\{f\}$ también lo hace, ya que sí $f(x) \in \overline{f(A)}$ para algún $A = \overline{A} \subset X$, entonces

$$f_s(x) = \pi_s \circ f(x) \in \pi_s(\overline{f(A)}) \subset \overline{\pi_s\,(f\,(A))} = \overline{f_s(A)}$$

para toda $s \in S$. Entonces $x \in A$, pues $\mathcal{F}$ separa puntos de conjuntos cerrados. Luego aplicando el lema anterior, concluimos que f es un encaje.

Finalmente, si para alguna $s \in S$, f_s es un encaje, entonces f es una biyección sobre su imagen; por lo cual separa puntos. La función f_s es cerrada, por lo cual separa puntos de conjuntos cerrados. Entonces F separa puntos de puntos y también puntos de conjuntos cerrados. Por lo tanto la familia de un sólo elemento $\{f\}$ también lo hace, y nuevamente aplicando el Lema 1.15 tenemos que f es un encaje ■

Corolario 1.17 *La diagonal Δ del producto cartesiano X^m es homeomorfa a X.*

Demostración. Puesto que la función identidad $id : X \to X$ es un homeomorfismo, aplicando el teorema anterior tenemos que la diagonal $\Delta_{s\in S} id{:}X \to X^m$ es un encaje y por ser sobre la diagonal del producto Δ, es un homeomorfismo ■

Proposición 1.18 *Si la función producto $f = \prod_{s\in S} f_s$ es cerrada, donde $f_s : X_s \to Y_s$ y $X_s \neq \phi$ para toda $s \in S$, entonces todas las funciones f_s son funciones cerradas.*

Demostración. Sean $s_0 \in S$ y F un subconjunto cerrado en X_{s_0}. El conjunto $\pi_{s_0}^{-1}(F)$ es cerrado en $\prod_{s\in S} X_s$. Como la función f es cerrada, $f\left(\pi_{s_0}^{-1}(F)\right) \subset \prod_{s\in S} Y_s$, es un cerrado también, pero $f\left(\pi_{s_0}^{-1}(F)\right) = \prod_{s\in S} A_s$, donde $A_s = f_s(X_s)$ si $s \neq s_0$ y $A_{s_0} = f_{s_0}(X_{s_0})$ si $s = s_0$. Por el Corolario 1.4 sabemos que un producto de la forma $\prod_{s\in S} A_s$ es cerrado si y sólo si cada uno de los factores A_s es cerrado. En particular, $A_{s_0} = f_{s_0}(X_{s_0})$ es cerrado en Y_{s_0}. Por lo tanto, f_{s_0} es una función cerrada ■

Proposición 1.19 *Sea $\{f_s : X_s \to Y_s\}_{s\in S}$ una familia de funciones. Entonces el producto cartesiano $f = \prod_{s\in S} f_s$ es abierto si y sólo si todas las funciones f_s son abiertas y existe un subconjunto finito $S_0 \subset S$ tal que $f_s(X) = Y_s$ para toda $s \in S \setminus S_0$.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $s_0 \in S$ y $U \subset X_{s_0}$ un abierto no vacío. El conjunto $U \times \prod_{s\neq s_0} X_s$ es abierto en $\prod_{s\in S} X_s$. Como las proyecciones son funciones continuas y abiertas (Ver Proposición 1.1), tenemos que $\pi_{s_0} \circ f$ es una función abierta. Por lo tanto,

$$(\pi_{s_0} \circ f)\left(U \times \prod_{s\neq s_0} X_s\right) = f_{s_0}(U)$$

es un abierto en Y_{s_0}. De donde, f_{s_0} es una función abierta.

Ahora como f es una función abierta, entonces

$$f\left(\prod_{s\in S} X_s\right) \subset \prod_{s\in S} Y_s$$

es un conjunto abierto no vacío, por lo tanto $f\left(\prod_{s\in S} X_s\right)$ contiene a un conjunto de la forma $\prod_{s\in S} W_s$ en donde $W_s \neq Y_s$ a lo más para un subconjunto finito $S_0 \subset S$. De esto último tenemos que si $s \notin S_0$, entonces $f_s(X_s) = Y_s$.

$\Leftarrow$] Sea W un subconjunto abierto básico no vacío de $\prod_{s\in S} X_s$. Supongamos que $W = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{s_i}^{-1}(W_{s_i}) = \prod_{s\in S} W_s$, sea

$$S^* = \{s_1, s_2, ..., s_n\} \subset S$$

Entonces para toda $s \in S\backslash (S^* \bigcup S_0)$, $f_s(W_s) = Y_s$, y como los conjuntos S_0 y S^* son finitos, su unión también es finita. De donde, para casi todos los $s \in S$, $f_s(W_s) = Y_s$. Por lo tanto,

$$f(W) = f\left(\prod_{s\in S} W_s\right) = \prod_{s\in S} f_s(W_s)$$

es un abierto canónico en $\prod_{s\in S} Y_s$. Por lo tanto, f es abierta ■

Proposición 1.20 *Sea $\{f_s : X \to Y_s\}_{s\in S}$ una familia de funciones. Si la diagonal $f = \Delta_{s\in S} f_s$ es abierta, entonces todas las funciones f_s son funciones abiertas.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $s_0 \in S$, $U \subset X$ un abierto no vacío y p_{s_0} la s_0−ésima proyección de $\prod_{s\in S} Y_s$. Tenemos que $(p_{s_0} \circ f)(U) = f_{s_0}(U)$. Como las proyecciones son funciones continuas y abiertas (Ver Proposición 1.1), se cumple que $p_{s_0} \circ f$ es una función abierta, por ser composición de funciones abiertas. Por lo tanto $f_{s_0}(U)$ es un abierto en Y_{s_0}. Por lo tanto, f_{s_0} es una función abierta ■

Una propiedad importante de la topología producto, es su buen comportamiento en cuanto a convergencia se refiere, un ejemplo de ello se da con la convergencia de redes.

Antes de enunciar un resultado consideremos una red τ, entonces denotaremos por *Lim* τ a el *conjunto de puntos límite de la red* τ.

Teorema 1.21 *Una red $\tau = \{x_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$ en el producto $\prod_{s\in S} X_s$ converge a un punto $x \in \prod_{s\in S} X_s$ si y sólo si la red*

$$\tau_s = \{\pi_s(x_\sigma), \sigma \in \Sigma\}$$

converge a $\pi_s(x)$ para toda $s \in S$.

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$] Como las proyecciones son funciones continuas (Ver Proposición 1.1), si x $\in$Lim τ, entonces $\pi_s(x)$ $\in$Lim τ_s para toda $s \in S$ (Ver Teorema 0.6).

$\Leftarrow$] Ahora sea $x \in \prod_{s\in S} X_s$ tal que para cada $s \in S$,

$$\pi_s(x) \in Lim\tau_s.$$

Entonces para cada vecindad U de x, existen elementos $s_1, s_2, ..., s_n \in S$ y conjuntos abiertos $U_i \subset X_{s_i}$, en donde $i \in \{1, 2, ..., n\}$, tales que $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{s_i}^{-1}(U_i) \subset U$. Por hipótesis existen $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n \in \Sigma$ tales que $\pi_{s_i}(x_\sigma) \in U_i$ para $\sigma \geq \sigma_i$ y esto para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Como el conjunto Σ es un conjunto dirigido, existe $\sigma^* \in \Sigma$ tal que $\sigma_i \leq \sigma^*$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Entonces se cumple que para toda $\sigma \geq \sigma^*$, $x_\sigma \in \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{s_i}^{-1}(U_i) \subset U$. Por lo tanto x $\in$Lim τ ■

1.3 Propiedades Multiplicativas

En esta sección se estudia el comportamiento de algunas propiedades topológicas en los productos topológicos.

Definición 1.22 *Una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es hereditaria (respectivamente, hereditaria con respecto a subconjuntos cerrados, subconjuntos abiertos) si para cualquier espacio X que tiene la propiedad $\mathcal{P}$, todo subespacio (respectivamente, todo subespacio cerrado, todo subespacio abierto) de X también tiene la propiedad $\mathcal{P}$.*

Definición 1.23 *Si la propiedad $\mathcal{P}$ no es hereditaria pero todo subespacio de X tiene la propiedad $\mathcal{P}$, entonces diremos que X satisface $\mathcal{P}$ hereditariamente.*

Definición 1.24 *Sea m un número cardinal. Una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es multiplicativa (respectivamente m- multiplicativa, finitamente multiplicativa) si para cualquier familia $\{X_s\}_{s\in S}$ (respectivamente tal que $|S| \leq m$, $|S| < \aleph_0$) de espacios topológicos con la propiedad $\mathcal{P}$, el producto $\Pi_{s\in S} X_s$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$.*

Observación 2 *Sea $Y = \Pi_{s\in S} X_s$, elijamos un punto $x_s^+ \in X_s$ para cada $s \in S$ y consideremos $X_{s_0}^+ = \Pi_{s\in S} A_s$ donde $A_s = \{x_s^+\}$ para $s \neq s_0$ y $A_{s_0} = X_{s_0}$. Es claro que la restricción de la $\pi_{s_0}-$ésima proyección a $X_{s_0}^+$,*

$$i_{s_0} = \pi_{s_0}|_{X_{s_0}^+} : X_{s_0}^+ \to X_{s_0}$$

es un homeomorfismo; por lo tanto, el espacio X_{s_0} se puede encajar en $Y = \Pi_{s\in S}X_s$. Además si el producto $Y = \Pi_{s\in S}X_s$ es un espacio T_1, entonces $X^+_{S_0}$ es un subespacio cerrado en $Y = \Pi_{s\in S}X_s$ (Ver Corolario 1.4). Por lo tanto, X_{s_0} es encajable como subespacio cerrado en $Y = \Pi_{s\in S}X_s$ cuando Y es T_1.

1.3.1 Axiomas de Separación

Teorema 1.25 *El producto arbitrario de espacios topológicos T_i es un espacio topológico T_i, para $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$. Si el producto cartesiano $\Pi_{s\in S}X_s$ es un espacio topológico T_i, entonces todos los espacios factores X_s son espacios topológicos T_i para $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 5, 6$.*

Demostración. Por la observación 2, sabemos que cada espacio factor es homeomorfo a un subespacio del producto $\Pi_{s\in S}X_s$, que es cerrado cuando el producto es T_1. Como la propiedad de ser T_i es herediatria para $i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$, la normalidad es hereditaria con respecto a subconjuntos cerrados, el ser perfectamente normal y el ser hereditariamente normal son propiedades hereditarias, obtenemos que todos los espacios factores X_s son espacios T_i para $i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 5, 6\}$ cuando $\Pi_{s\in S}X_s$ es T_i.

(T_0) : Sean $x, y \in Y = \Pi_{s\in S}X_s$ con $x \neq y$ entonces existe $s_0 \in S$ tal que $x_{s_0} \neq y_{s_0}$. Luego como X_{s_0} es un espacio T_0, existe un abierto U tal que $x_{s_0} \in U$ y $y_{s_0} \notin U$. Por lo tanto el conjunto $V = \pi_{s_0}^{-1}(U)$ es un abierto en el producto $Y = \Pi_{s\in S}X_s$ tal que $x \in V$ y $y \notin V$. Por lo tanto, $Y = \Pi_{s\in S}X_s$ es un espacio T_0.

(T_1) : Sea $x \in Y = \Pi_{s\in S}X_s$, $x = (x_s)_{s\in S}$. Como cada uno de los espacios factores X_s es un espacio T_1, entonces el conjunto $\{x_s\}$ es cerrado en X_s; luego $x = \Pi_{s\in S}\{x_s\}$ es cerrado en $Y = \Pi_{s\in S}X_s$. Por lo tanto, los conjuntos unipuntuales en Y son conjuntos cerrados en Y, entonces $Y = \Pi_{s\in S}X_s$ es un espacio T_1.

(T_2) : Sean $x, y \in Y = \Pi_{s\in S}X_s$ con $x \neq y$. Entonces existe $s_0 \in S$ tal que $x_{s_0} \neq y_{s_0}$; luego como X_{s_0} es un espacio T_2, existen abiertos U y V tales que $x_{s_0} \in U$, $y_{s_0} \in V$ y $U \cap V = \phi$. Por lo tanto, los abiertos $U^* = \pi_{s_0}^{-1}(U)$ y $V^* = \pi_{s_0}^{-1}(V)$ del producto $Y = \Pi_{s\in S}X_s$ cumplen que $x \in U^*$, $y \in V^*$ y $U^* \cap V^* = \phi$. Por lo tanto, $Y = \Pi_{s\in S}X_s$ es un espacio T_2.

(T_3) : Sea $x \in A \subset Y = \Pi_{s\in S}X_s$, en donde A es abierto en Y. Para demostrar que $Y = \Pi_{s\in S}X_s$ es un espacio regular demostraremos que existe B abierto tal que $x \in B \subset \overline{B} \subset A$.

Como A es abierto, existe un elemento básico $B^* = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{s_i}^{-1}(A_i)$ tal que $x \in B^* \subset A$, donde A_i es un abierto en X_{s_i} que conteniene a la s_i–ésima coordenada de x, x_{s_i} para $i \in \{ 1, ..., n\}$. Ahora, como cada uno de los espacios X_s es un espacio regular entonces existe $B_i \subset X_{s_i}$ abierto tal que $x_{s_i} \in B_i \subset \overline{B_i} \subset A_i$ y esto para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Tenemos entonces que $C = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{s_i}^{-1}(\overline{B_i})$ es un conjunto cerrado en $Y = \Pi_{s \in S} X_s$ conteniendo al abierto $B = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{s_i}^{-1}(B_i)$ (las proyecciones son funciones continuas) y contenido en A. De todo esto tenemos que $x \in B \subset C \subset A$. Por lo tanto $Y = \Pi_{s \in S} X_s$ es un espacio regular.

$(T_{3\frac{1}{2}})$: Es suficiente demostrar que para cada $x = \{x_s\}_{s \in S} \in Y = \Pi_{s \in S} X_s$ y cualquier vecindad V de x de la forma $\pi_{s_0}^{-1}(W_{s_0})$, donde W_{s_0} es un abierto en X_{s_0}, existe una función continua $f : Y \to I$ tal que

$$f(y) = \begin{cases} 0 & si\ y = x \\ \\ 1 & \text{si } y \in Y \backslash V \end{cases}$$

Ahora, como cada uno de los espacios factores es completamente regular entonces, para X_{s_0}, existe $f_{s_0} : X_{s_0} \to I$ tal que

$$f_{s_0}(x_{s_0}) = 0 \text{ y } f_{s_0}(X_{s_0} \backslash W_{s_0}) \subset \{1\},$$

entonces la función $f = f_{s_0} \circ \pi_{s_0} : Y \to I$ cumple con lo requerido. es decir, $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para toda $y \in Y \setminus V$, pues

$$f(x) = (f_{s_0} \circ \pi_{s_0})(x) = f_{s_0}(\pi_{s_0}(x)) = f_{s_0}(x_{s_0}) = 0$$

y además,

$$f(y) = f_{s_0} \circ \pi_{s_0}(y) = f_{s_0}(y_{s_0}) = 1$$

dado que $y_{s_0} \notin W_{s_0}$. Por lo tanto, $Y = \Pi_{s \in S} X_s$ es completamente regular ∎

1.3.2 Compacidad y Propiedades Cercanas a la Compacidad

Compacidad

Teorema 1.26 (de Tychonoff) *Sea $\{X_s\}_{s \in S}$ una familia de espacios topológicos. Entonces $\Pi_{s \in S} X_s$ es compacto si y sólo si X_s es compacto para toda $s \in S$.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow]$ Sea $Y = \Pi_{s\in S}X_s$. Como $Y \neq \phi$, para cada $s \in S$, $\pi_s : Y \to X_s$ es una función continua y sobreyectiva, es decir, X_s es la imagen continua de un conjunto compacto. Por lo tanto, X_s es compacto.

$\Leftarrow]$ Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ una red universal en $Y = \Pi_{s\in S}X_s$ (Ver Sección 0.2.5). Entonces para cada $s \in S$, $(\pi_s(x_\alpha))_{\alpha\in\Delta}$ es una red universal en X_s (Teorema 0.5). Dado que para cada $s \in S$, X_s es compacto, la red $(\pi_s(x_\alpha))_{\alpha\in\Delta}$ converge a algún punto $x_s^* \in X_s$ para toda $s \in S$. Entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ converge al punto $x = (x_s^*)_{s\in S} \in Y = \Pi_{s\in S}X_s$ ∎

Compacidad Local

Teorema 1.27 *$\Pi_{s\in S}X_s$ es localmente compacto si y sólo si, para toda $s \in S$, X_s es localmente compacto y X_s es compacto para todos los espacios factores excepto, tal vez, para un número finito de ellos.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow]$ a) Sea $\alpha \in S$ y consideremos a la $\alpha-$ésima proyección

$$\pi_s : \Pi_{s\in S}X_s \to X_\alpha .$$

Como π_α es una función continua, abierta y sobreyectiva entonces X_α es localmente compacto (Teorema 0.12).

b) Sea $x \in \Pi_{s\in S}X_s$ y sea W una vecindad compacta de x en $\Pi_{s\in S}X_s$. Entonces W contiene una vecindad básica de la forma $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$, de lo cual se sigue que si $\alpha \neq \alpha_i$, $i \in \{1,2,...,n\}$, entonces $\pi_\alpha(W) = X_\alpha$. Por lo tanto, X_α es compacto para toda $\alpha \neq \alpha_i$, es decir para todo espacio factor excepto tal vez un número finito de los mismos.

$\Leftarrow]$ Sea $x \in \Pi_{s\in S}X_s$ y sea U una vecindad básica de x en $\Pi_{s\in S}X_s$, digamos $U = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{s_i}^{-1}(U_{s_i})$, donde se está suponiendo que el conjunto $G = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ contiene a todos los índices para los cuales el espacio factor correspondiente no es compacto. Ahora es suficiente encontrar una vecindad compacta de x contenida en U. Como para todo $s \in S$ el espacio factor correspondiente X_s es localmente compacto entonces existe $K_{s_i} \subset U_{s_i}$ con $x \in K_{s_i}$ y cada uno de los K_{s_i} son vecindades compactas para $i \in \{1,2,...,n\}$.

Por lo tanto $K = \Pi_{s\in S\setminus G}\ X_s \times \Pi_{s_i\in G}\ K_{s_i}$ es una vecindad compacta de x en $\Pi_{s\in S}X_s$ (Teorema 1.26), y que además está contenida en la vecindad básica U de x. Por lo tanto, $\Pi_{s\in S}X_s$ es localmente compacto ∎

Compacidad Numerable

En general el producto de dos espacios numerablemente compactos no es un espacio numerablemente compacto. Un ejemplo de ello se puede encontrar en [**Dug, pag.244**]

Sin embargo existe un resultado parcial para el producto de espacios numerablemente compactos.

Teorema 1.28 *Sea $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de espacios primero numerables. Entonces $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ es numerablemente compacto si y sólo si X_i es numerablemente compacto para toda $i \in \mathbb{N}$.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow]$ Como las proyecciones son funciones continuas y sobreyectivas y la propiedad de ser numerablemente compacto se preserva bajo imagenes continuas (Teorema 0.13), resulta entonces que los espacios factores X_i son numerablemente compactos.

$\Leftarrow]$ Es suficiente demostrar que toda sucesión en $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ tiene un punto de acumulación (Teorema 0.14).

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$, entonces $(\pi_i(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X_i para cada $i \in \mathbb{N}$. Como X_i es numerablemente compacto, existe $x_i^* \in X_i$ tal que x_i^* es punto de acumulación de la sucesión $(\pi_i(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$, y esto para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces el punto $x^* = (x_i^*)$ es un punto de acumulación de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En efecto, dado un abierto básico W en $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ que contiene al punto x^* es el producto de elementos básicos de los espacios factores y por la elección de los puntos x_i^* se sigue que existen elementos de la sucesión en el abierto W. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ es numerablemente compacto ■

Paracompacidad

Es sabido que la paracompacidad no es, en general, una propiedad multiplicativa ni siquiera en el caso de productos finitos. Un ejemplo de ello es la línea de Sorgenfrey, la cual es un espacio paracompacto cuyo producto por sí misma ya no lo es, pues si lo fuera automáticamente sería un espacio normal (Teorema 0.18).

Sin embargo, existen resultados parciales con respecto al producto de espacios paracompactos; uno de ellos es el siguiente.

Teorema 1.29 *El producto de un espacio paracompacto con un espacio compacto es paracompacto.*

Demostración. Sean X un espacio paracompacto, Y un espacio compacto y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $X \times Y$. Para cada $x \in X$, un número finito de elementos de $\mathcal{U}$ digamos U_1^x, $U_2^x, ..., U_{n_x}^x$, cubren al subespacio $\{x\} \times Y$. Elijamos una vecindad abierta $V_x \in N(x)$, donde $N(x)$ es una base local de vecindades para x en X, tal que $V_x \times Y \subset \bigcup_{i=1}^{n_x} U_i$ (Teorema 0.19). Entonces la familia $\mathcal{V} = \{V_x : x \in X\}$ forma una cubierta abierta de X. Sea $\mathcal{W}$ un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{V}$, entonces para cada $W \in \mathcal{W}$, existe $x_W \in X$ tal que $W \subset V_{x_W}$. Ahora consideremos a los conjuntos de la forma $(W \times Y) \bigcap (\bigcap_{i=1}^{n_x} U_i^x)$ que se forman tomando $W \in \mathcal{W}$ y $x_W \in X$ de tal forma que $W \subset V_{x_W}$. Entonces la familia

$$\mathcal{G} = \left\{(W \times Y) \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{n_x} U_i^x\right) : W \in \mathcal{W} \text{ y } x \in X \text{ es tal que: } W \subset V_{x_W}\right\}$$

es una cubierta abierta de $X \times Y$; que refina a $\mathcal{U}$. Además, dado que $(x, y) \in X \times Y$, existe una vecindad $U \in N(x)$ que intersecta sólo una cantidad finita de elementos $W \in \mathcal{W}$. Por lo tanto, la vecindad $U \times Y$ intersecta sólo a un número finito de elementos de la familia $\mathcal{V} = \{V_x\}_{x \in X}$. Por lo tanto, $X \times Y$ es un espacio paracompacto ■

1.3.3 Conexidad

Conexidad

Teorema 1.30 *Sea $\{X_s\}_{s \in S}$ una familia de espacios topológicos, entonces $\Pi_{s \in S} X_s$ es conexo si y sólo si X_s es conexo para toda $s \in S$.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Sea $Y = \Pi_{s \in S} X_s$. Como $Y \neq \phi$, para cada $s \in S$, $\pi_s : Y \to X_s$ es una función continua y sobreyectiva, es decir, X_s es la imagen continua de un conjunto conexo; por lo tanto, X_s es un conjunto conexo (Teorema 0.20).

$\Leftarrow]$ Ahora, sea $x \in Y = \Pi_{s \in S} X_s$ y sea E la componente conexa de x en $\Pi_{s \in S} X_s$. El subespacio E es un conexo en $\Pi_{s \in S} X_s$. Es suficiente demostrar que E es denso en $\Pi_{s \in S} X_s$.

Para ello consideremos un abierto en el producto $\Pi_{s \in S} X_s$, supongamos que este abierto es de la forma $U = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{s_i}^{-1}(U_{s_i})$, es decir, un abierto canónico. Sea $y_i \in U_{s_i}$, para $i \in \{1, 2, ..., n\}$, y definamos los conjuntos $E_1, ..., E_n$ de la siguiente manera:

$$E_1 = \{z \in Y \mid z_{s_1} \in X_{s_1},\ z_s = x_s \forall s \neq s_1\}$$

$$E_2 = \{z \in Y \mid z_{s_1} = y_{s_1}, z_{s_2} \in X_{s_2},\ z_s = x_s \forall s \in S \setminus \{s_1, s_2\}\}$$

$$\vdots$$

$$E_n = \{z \in Y \mid z_{s_i} = y_{s_i},\ \text{si}\ i = 1, \ldots, n-1,\ z_{s_n} \in X_{s_n}$$
$$\text{y}\ z_s = x_s\ \text{si}\ s \in S \setminus \{s_1, s_2 \ldots, s_n\}\}$$

Resulta que $E_k \cong X_{s_k}$; por lo tanto, E_k es conexo. Además, $E_k \cap E_{k+1} \neq \phi$ para $k = \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Por lo cual, $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = F$ es un conjunto conexo (Teorema 0.21). Como $x \in F$, y $F \cap U \neq \phi$, se sigue que cada básico de $\Pi_{s \in S} X_s$ contiene puntos de E. Por lo tanto, hemos demostrado que $\overline{E} = \Pi_{s \in S} X_s$; es decir, E es denso en el producto. Como la cerradura de un conexo es nuevamente un conexo (Teorema 0.22), tenemos que $\Pi_{s \in S} X_s$ es un conjunto conexo ■

Conexidad Local

Teorema 1.31 *El producto $\Pi_{s \in S} X_s$ es localmente conexo si y sólo si para toda $s \in S$, X_s es localmente conexo y X_s es conexo para todos los espacios factores excepto tal vez para un número finito de ellos.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow\rfloor$ a) Sea $\alpha \in S$ y consideremos la α–ésima proyección

$$\pi_s : \Pi_{s \in S} X_s \to X_\alpha.$$

Como π_α es una función continua, abierta y sobreyectiva entonces X_α es localmente conexo (Teorema 0.24).

b) Sea $x \in \Pi_{s \in S} X_s$ y sea W una vecindad conexa de x en $\Pi_{s \in S} X_s$. Entonces W contiene una vecindad básica de la forma $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$. De lo cual se sigue que si $\alpha \neq \alpha_i$, para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces $\pi_\alpha(W) = X_\alpha$. Por lo tanto, X_α es conexo para toda $\alpha \neq \alpha_i$; es decir, los espacios factores son conexos, con excepción tal vez de un número finito de los mismos.

$\Leftarrow\rfloor$Sea $x \in \Pi_{s \in S} X_s$ y sea U una vecindad básica de x en $\Pi_{s \in S} X_s$; digamos $U = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{s_i}^{-1}(U_{s_i})$, donde suponemos que el conjunto $G = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ incluye a todos los índices para los cuales el espacio factor correspondiente no es conexo. Ahora es suficiente encontrar una vecindad conexa de x contenida en U. Como para toda $s \in S$ el espacio factor correspondiente X_s es localmente conexo, entonces existe $C_{s_i} \subset U_{s_i}$ con $x \in C_{s_i}$ y cada uno de los C_{s_i} es conexo para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Por lo tanto $C = \Pi_{s\in S\setminus G} X_s \times \Pi_{s_i \in G} C_{s_i}$ es una vecindad conexa de x en $\Pi_{s\in S}X_s$, ya que el producto topológico de espacios conexos es nuevamente un espacio conexo (Teorema 1.30), que además está contenida en la vecindad básica U. Por lo tanto, $\Pi_{s\in S}X_s$ es localmente conexo ■

1.3.4 METRIZABILIDAD

Definición 1.32 *Decimos que dos metricas ρ_1 y ρ_2 en un conjunto M son equivalentes si ellas generan la misma topología en M.*

Teorema 1.33 *Toda métrica ρ en un conjunto M es equivalente a una métrica acotada.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos las métricas

$$\rho_1(x,z) = \min\{1, \rho(x,z)\} \ y \rho_2(x,z) = \frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)}.$$

Estas definen una topología equivalente a la inducida por la métrica ρ y claramente son acotadas por el 1 ■

Teorema 1.34 *El producto, no vacío, $M = \prod_{\alpha\in S} M_\alpha$ es metrizable si y sólo si cada M_α es metrizable y M_α es un punto para toda $\alpha \in S$, excepto a lo más para un conjunto numerable de índices.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow\rfloor$ Sea $\alpha \in S$, M_α es homeomorfo a un subespacio del producto (Observación 2), y por lo tanto es metrizable. Además el producto es primero numerable, debido a que M es metrizable, por lo tanto la familia de los espacios M_α con más de un punto es a lo más numerable. Lo anterior se debe a que primero numerable es una propiedad $\aleph_0$-multiplicativa, es decir el producto de más de $\aleph_0$ espacios primero numerables ya no es un espacio primero numerable (Ver Corolario 2.28).

$\Leftarrow\rfloor$ Sean $M_1, M_2, M_3, ...$ espacios metrizables y sea ρ_i una métrica para M_i tal que ρ_i es una métrica acotada por 1 y equivalente a la métrica de M_i para toda $i \in \{1,2,3,...\}$. Consideremos la métrica ρ en $M = \prod_{i\in S} M_i$ definida de la siguiente manera: para $x = (x_1, x_2, x_3, ...)$ y $z = (z_1, z_2, z_3, ...)$

$$\rho(x,z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i(x_i, z_i)}{2^i}$$

Se puede demostrar que ρ es una métrica. Ahora demostraremos que ρ genera la topología producto en $\prod_{i=1}^{\infty} M_i$. Para ello, sea

$$x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in \prod_{i=1}^{\infty} M_i$$

y sea U una vecindad canónica de la forma

$$U = U_{\rho_1}(x_1, \varepsilon_1) \times U_{\rho_2}(x_2, \varepsilon_2) \times ... \times U_{\rho_n}(x_n, \varepsilon_n) \times \prod_{i=n+1}^{\infty} M_i.$$

Elegimos ε de la siguiente manera

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{\varepsilon_1}{2}, \frac{\varepsilon_2}{2^2}, \frac{\varepsilon_3}{2^3}, ..., \frac{\varepsilon_n}{2^n}\right\}$$

Ahora, si $z \in B_\rho(x, \varepsilon)$, entonces $\rho(x, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i(x_i, z_i)}{2^i} < \varepsilon$, por lo cual $\rho_i(x_i, z_i) < \varepsilon < \varepsilon_i$ para toda $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Por lo tanto, $z_i \in U_{\rho_i}(x_i, \varepsilon_i)$ para toda $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$; entonces $B_\rho(x, \varepsilon) \subset U$. Por lo tanto, la topología inducida por ρ es más fina que la topología producto en $\prod_{i=1}^{\infty} M_i$.

Ahora sea $W_\rho(x, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ y sea $N \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande para que $\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces se cumple que

$$U = U_{\rho_1}\left(x_1, \frac{\varepsilon}{2N}\right) \times \ldots \times U_{\rho_N}\left(x_N, \frac{\varepsilon}{2N}\right) \times \prod_{i=N+1}^{\infty} M_i$$

está contenida en $W_\rho(x, \varepsilon)$. Para demostrarlo, sea $z \in U$, entonces

$$\rho_i(x_i, z_i) < \frac{\varepsilon}{2N} \text{ para } i \in \{1, 2, 3, ..., N\}.$$

Además $\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{\rho_i(x_i, z_i)}{2^i} \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$, esto por la elección de la ε y debido a que las métricas ρ_i están acotadas por el 1. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \rho(x, z) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i(x_i, z_i)}{2^i} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\rho_i(x_i, z_i)}{2^i} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{\rho_i(x_i, z_i)}{2^i} < N \cdot \frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon . \end{aligned}$$

Tenemos entonces que $\rho(x,z) < \varepsilon$, y $z \in W_\rho(x,\varepsilon)$. De esto último se sigue que la topología producto es más fina que la topología inducida por la métrica ρ. De todo lo anterior concluimos que la topología inducida por la métrica ρ es equivalente a la topología producto, por lo tanto $M = \prod_{i\in S} M_i$ es metrizable ■

El resultado anterior nos muestra que la metrizabilidad es una propiedad $\aleph_0-$*multiplicativa.*

2

Funciones Cardinales en Productos Topológicos

2.1 Funciones Cardinales

En este capítulo se tratan las funciones cardinales, despues de dar la definición formal veremos que este tipo de funciones ya han sido introducidas en el capítulo preliminar en donde se define el concepto de cardinalidad, en la sección dedicada a números cardinales, esta es una función cardinal y cabe destacar que es sin duda una de las más sencillas además de que su uso es bastante frecuente.

Definición 2.1 *Una función cardinal, es una función que asocia a cada espacio topológico X un número cardinal $f(X)$, de tal modo que a espacios topológicos homeomorfos les asocia el mismo número cardinal.*

Definición 2.2 *Sea X un espacio topológico, el peso de X es el número cardinal*

$$w(X) = \textit{mín}\left\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \textit{ es una base para la topología de } X\right\} + \aleph_0$$

Definición 2.3 *Sea $x \in X$, el carácter de x en X es el número cardinal*

$$\chi(x, X) = \textit{mín}\left\{|\mathcal{B}_x| : \mathcal{B}_x \textit{ es una base local para} x \textit{ en } X\right\} + \aleph_0$$

Definición 2.4 *El carácter de X es el número cardinal*

$$\chi(X) = \textit{Sup}\left\{\chi(x, X) : x \in X\right\}.$$

Definición 2.5 *La densidad de X, es el mínimo cardinal m tal que existe un subconjunto denso de cardinalidad m.*

$$d(X) = \textit{mín}\left\{|D| : D \subset \overline{D} = X\right\} + \aleph_0$$

Definición 2.6 *Una familia celular en un espacio topológico X es una colección de abiertos no vacíos y ajenos dos a dos.*

Definición 2.7 *La celularidad es el supremo de los cardinales que puede tener una familia celular en X, es decir,*

$$c(X) = Sup\{\, |\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ es una familia celular}\} + \aleph_0.$$

2.1.1 Algunas Propiedades de las funciones cardinales

Definición 2.8 *Sea φ una función cardinal, se dice que φ es monótona si: $Y \subset X \Rightarrow \varphi(Y) \leq \varphi(X)$*

Proposición 2.9 *Las funciones cardinales peso y carácter son funciones cardinales monótonas.*

Demostración. Sea X un espacio topológico y sea $Y \subset X$. Sea $\mathcal{B}$ una base para la topología de X tal que $|\mathcal{B}| = w(X)$. Entonces la familia $\mathcal{B}_Y = \{U \bigcap Y : U \in \mathcal{B}\}$ es una base para la topología de Y y cumple que $|\mathcal{B}_Y| \leq |\mathcal{B}| = w(X)$. Por lo tanto, por definición de peso tenemos que $w(Y) \leq |\mathcal{B}_Y| \leq |\mathcal{B}| = w(X)$. Por lo tanto, el peso es una función cardinal monótona.

Sea X un espacio topológico y sea $Y \subset X$. Sea $x \in Y$ y sea $\mathcal{B}_{(x,X)}$ una base local para x en X tal que $|\mathcal{B}_{(x,X)}| = \chi(x, X)$. Consideremos la colección $\mathcal{B}_{(x,Y)} = \{U \cap Y : U \in \mathcal{B}_{(x,X)}\}$. Entonces $\mathcal{B}_{(x,Y)}$ es una base local para x en Y que cumple:

$$|\mathcal{B}_{(x,Y)}| \leq |\mathcal{B}_{(x,X)}| = \chi(x, X) \leq \chi(X).$$

Por lo tanto, por definición de carácter de x en Y, tenemos que

$$\chi(x, Y) \leq |\mathcal{B}_{(x,Y)}| \leq |\mathcal{B}_{(x,X)}| = \chi(x, X) \leq \chi(X).$$

Entonces $\chi(X)$ es cota superior para todos los caracteres de puntos en el subespacio Y. Dado que $\chi(Y)$ es el supremo de los números $\chi(x, Y)$, entonces $\chi(Y) \leq \chi(X)$. Por lo tanto, el carácter es una función cardinal monótona ■

Proposición 2.10 *Para todo espacio topológico X, tenemos que $\chi(X) \leq w(X)$; es decir, la función peso domina a la función carácter en cualquier espacio topológico.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{B}$ una base para la topología de X tal que $|\mathcal{B}| = w(X)$. Ahora elijamos un elemento $x \in X$. La familia

$$\mathcal{B}_x = \{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$$

es una base local para x en X. Por lo tanto, tenemos las siguientes desigualdades:

$$\chi(x, X) \leq |\mathcal{B}_x| \leq |\mathcal{B}| = w(X).$$

Como $\chi(X)$ es el supremo del conjunto $\{\chi(x, X) : x \in X\}$, entonces $\chi(X) \leq w(X)$, lo cual demuestra la proposición ■

Proposición 2.11 *Si X es un espacio topológico T_0 entonces* $|X| \leq 2^{w(X)}$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{B}$ una base para la topología de X tal que $|\mathcal{B}| = w(X)$. Para cada $x \in X$, consideramos la siguiente base local de vecindades: $\mathcal{B}(x) = \{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$. Ahora, dado que X es un espacio T_0, para cualquier par de puntos $x, z \in X$, $x \neq z$, existe un abierto $V \in \mathcal{B}$ tal que, sin perdida de generalidad podemos suponer, $x \in V$ y $z \notin V$. Es decir $V \in \mathcal{B}(x)$ y $V \notin \mathcal{B}(z)$. Por lo tanto, $\mathcal{B}(x) \neq \mathcal{B}(z)$.

Consideramos ahora la función $\gamma : X \to \mathcal{P}(\mathcal{B})$ definida por $\gamma(x) = \mathcal{B}(x)$. Esta función es una inyección de X en $\mathcal{P}(\mathcal{B})$. De donde,

$$|X| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{B})| = 2^{w(X)}.$$

Por lo tanto, $|X| \leq 2^{w(X)}$ ■

Proposición 2.12 *En cualquier espacio topológico X el peso domina a la densidad, y la densidad domina a la celularidad. Esto es, $c(X) \leq d(X) \leq w(X)$ para todo espacio topológico X.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{B}$ una base para la topología de X tal que $|\mathcal{B}| = w(X)$. Ahora elijamos un elemento $x_U \in U$ para cada elemento U de la base $\mathcal{B}$. Entonces el conjunto $D = \{x_U : U \in \mathcal{B}\}$ es un subconjunto denso de X cuya cardinalidad no excede a la cardinalidad de $\mathcal{B}$, es decir $|D| \leq |\mathcal{B}| = w(X)$. Entonces tenemos que

$$d(X) \leq |D| \leq w(X).$$

Ahora sea $D \subset X$, denso tal que$|D| = d(X)$ y sea $\mathcal{G} = \{U_t\}_{t\in T}$ una familia celular de X. Como D es denso, para cada $U_t \in \mathcal{G}$ se tiene que $U_t \cap D \neq \phi$. Si para cada $t \in T$ elegimos $y_t \in U_t \cap D$, y consideramos la función $g : \mathcal{G} \to D$ tal que $g(U_t) = y_t$. Esta función g es una inyección de $\mathcal{G}$ en D. Por lo tanto, $|\mathcal{G}| \leq |D| = d(X)$. Ahora, por definición de celularidad, resulta que

$$|\mathcal{G}| \leq c(X) \leq |D| = d(X)$$

lo cual completa la demostración ∎

Proposición 2.13 *Si X es un espacio metrizable entonces $c(X) = d(X) = w(X)$.*

Demostración. Para demostrar la igualdad probaremos que

$$w(X) \leq d(X) \text{ y } c(X) \geq d(X)$$

Sea $D \subset X = \overline{D}$ tal que $|D| = d(X)$. Consideremos la siguiente familia $\mathcal{B} = \left\{B_{(x,r)} : x \in D\,, r \in \mathbb{Q}^+\right\}$,en donde $B_{(x,r)}$ es la bola de radio r con centro en x. Se tiene que $|\mathcal{B}| \leq |D|\,|\mathbb{Q}^+| \leq |D|$. Ahora sólo resta demostrar que $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X. Sea $x \in X$ y $r \in \mathbb{Q}^+$y consideremos la bola abierta $B_{(x,r)}$. Este es un conjunto abierto en X y como D es denso en X tenemos que $B_{\left(x,\frac{r}{4}\right)} \bigcap D \neq \phi$. Sea $z \in B_{\left(x,\frac{r}{4}\right)} \bigcap D$, entonces $\delta(x,z) < \frac{r}{4}$. Consideremos al conjunto abierto $B_{\left(z,\frac{r}{4}\right)}$. Este tiene las siguientes características:

a) $x \in B_{\left(z,\frac{r}{4}\right)}$ ya que $\delta(x,z) < \frac{r}{4}$, y

b) $B_{\left(z,\frac{r}{4}\right)} \subset B_{(x,r)}$. En efecto, sea $a \in B_{\left(z,\frac{r}{4}\right)}$ entonces

$$\delta(a,x) \leq \delta(a,z) + \delta(x,z) < \frac{r}{2}$$

Por lo tanto $\delta(x,a) < r$; entonces $a \in B_{(x,r)}$, con lo que demostramos que $B_{\left(z,\frac{r}{4}\right)} \subset B_{(x,r)}$ y esto a su vez demuestra que $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X. Por lo tanto $w(X) \leq |\mathcal{B}| \leq |D| = d(X)$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, consideremos a los conjuntos

$$g_n = \left\{A \subset X : si\ x,y \in A,\ x \neq y, \delta(x,y) > \frac{1}{n}\right\},$$

definimos una relación de orden parcial en g_n de la siguiente manera $A \leq B$ si y sólo si $A \subset B$. Sea $\mathcal{C} \subset g_n$ una cadena. Entonces, la unión de todos los conjuntos de la cadena también pertenece a g_n. Es claro que la unión de todos los conjunto de C es una cota superior para la cadena. Por lo tanto, aplicando el lema de Zorn, existe un conjunto maximal A_n en g_n.

Sea $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Resulta que D es denso en X. En efecto, supongamos que D no es denso y sea $x \in X \setminus \overline{D}$. Tenemos entonces que $\delta\left(x, \overline{D}\right) > 0$. De donde, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\delta\left(x, \overline{D}\right) > \frac{1}{i_0}$. Como $\delta\left(x, \overline{D}\right) > \frac{1}{i_0}$ y $A_{i_0} \subset D$, $\delta(x, y) > \frac{1}{i_0}$ para toda $y \in A_{i_0}$, de donde para todo par de puntos distintos $z, y \in A_{i_0} \cup \{x\}$, $\delta(z, y) > \frac{1}{i_o}$. Entonces $A_{i_0} \cup \{x\} \in g_{i_o}$ y $A_{i_0} \subsetneq A_{i_0} \cup \{x\}$ (lo cual contradice la maximalidad de A_{i_0}). Por lo tanto, D es denso en X. Ahora, para toda $n \in \mathbb{N}$ y todo par de puntos $x \neq y \in A_n$, las vecindades $B_{\left(x, \frac{1}{2n}\right)} \bigcap B_{\left(y, \frac{1}{2n}\right)} = \phi$. Además, como $A_n \subset A_{n+1}$, se sigue que podemos construir familias celulares de cardinalidad $|A_n|$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $c(X) \geq |D| \geq d(X)$. De esto último concluimos que en espacios metrizables

$$c(X) = d(X) = w(X).$$

Una demostración alternativa a este mismo resultado se basa en el teorema de metrización de Bing (Teorema 0.25). Dado que el espacio X es metrizable, existe $\mathcal{B}$ una base $\sigma-$discreta de X. Entonces $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$, es claro que cada familia $\mathcal{B}_n$ es una familia celular. Por lo tanto, se cumple $|\mathcal{B}_n| \leq c(X)$. De donde resulta que

$$w(X) \leq |\mathcal{B}| \leq c(X) \cdot \aleph_0 = c(X) \ \blacksquare$$

La densidad y la celularidad no son funciones cardinales monótonas, para mostrarlo consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.14 *Si $X = \mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ en donde $\mathbb{R}_l$ es la línea de Sorgenfrey, entonces $d(\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l) = \aleph_0$, pues $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$, y además, $|\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = \aleph_0$. Sea $Y = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$. El conjunto Y es un subespacio discreto de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$. Por lo cual, su densidad y celularidad coinciden con la cardinalidad del mismo, es decir, $d(Y) = 2^{\aleph_0} = c(X)$. Por lo tanto*

$$\aleph_0 = d(X) < d(Y) = 2^{\aleph_0} \ y \ \aleph_0 = c(X) < c(Y) = 2^{\aleph_0}.$$

Proposición 2.15 *Si Y es un subespacio abierto no vacío de un espacio topológico X, entonces $d(Y) \leq d(X)$ y $c(Y) \leq c(X)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $D \subset X$ denso tal que $|D| = d(X)$. Sea $D^* = D \cap Y$, entonces D^* es un subconjunto denso en Y. En efecto, como Y es un abierto no vacío y D denso, $D \cap Y \neq \phi$, y en la topología de Y todo conjunto abierto U en Y es un conjunto abierto en X, por ser Y abierto. Por lo tanto, $U \cap D^* = U \cap D \neq \phi$. De lo cual se sigue que D^* es denso en Y. Ahora, por definición de densidad tenemos que $d(Y) \leq |D^*| \leq |D| = d(X)$. Por lo tanto, $d(Y). \leq d(X)$.

Ahora, como todo conjunto abierto U en Y es un conjunto abierto en X, por ser Y abierto. Toda familia celular de Y es una familia celular de X. De donde, $c(Y) \leq c(X)$ ∎

Proposición 2.16 *Si $D \subset \overline{D} = X$, entonces $d(X) \leq d(D)$ y $c(D) \leq c(X)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $D \subset X$ denso y sea $A \subset D$ un denso en D tal que $|A| = d(D)$. Es suficiente demostrar que A es un subconjunto denso de X. Para ello, sea U un abierto no vacío en X. Entonces el conjunto $D \cap U$ es un abierto en la topología de D, y además, por ser D denso sabemos que no es vacío. Entonces $A \cap U = A \cap (D \cap U) \neq \phi$ pues A es denso en D. Por lo tanto, A es un subconjunto denso de X. Entonces $d(X) \leq |A| = d(D)$.

Ahora, dada una familia celular en D, esta induce una familia celular en X. En efecto, dados dos conjuntos abiertos ajenos y no vacíos U^* y V^* en D, existen conjuntos abiertos U y V en X, tales que $U^* = U \cap D$ y $V^* = V \cap D$. Estos conjuntos U y V también son ajenos, pues en caso contrario tendríamos un abierto $W = U \cap V$ no vacío tal que

$$W \cap D = (U \cap V) \cap D = (U \cap D) \cap (V \cap D) = U^* \cap V^* = \phi$$

lo cual contradice la densidad del conjunto D. Por lo tanto, $c(X)$ es cota superior para el conjunto de las cardinalidades de las familias celulares de D. De donde, $c(D) \leq c(X)$ ∎

Proposición 2.17 *Sea $f : X \to Y$ una sobreyección continua, entonces $d(Y) \leq d(X)$. Si además, f es abierta, entonces $w(X) \geq w(Y)$ y $\chi(X) \geq \chi(Y)$*

DEMOSTRACIÓN. Sea $D \subset X$ denso, entonces $f(D)$ es denso en Y, pues si no lo fuera tendríamos que existe un abierto no vacío U en Y tal que $f(D) \cap U = \phi$. Ahora, $f^{-1}(U)$ es un abierto no vacío en

X, pues f es continua. Además, $f^{-1}(U) \cap D = \phi$. Pero ésto último contradice la hipótesis de que D es denso en X. Por lo tanto $f(D)$ es un denso en Y. De ello se sigue que $d(Y) \leq |f(D)| \leq |D| = d(X)$.

Ahora, si β es una base de X tal que $|\beta| = w(X)$. La familia $\beta^* = \{f(U) : U \in \beta\}$ es una base para Y. En efecto, sea $y \in V \subset Y$, con V abierto. Como f es suprayectiva y continua existen $x \in X$ y $U \in \beta$ tales que $x \in U$ y

$$y = f(x) \in f(U) \subset V,$$

y por ser f una función abierta $f(U)$ es abierto en Y. Por lo tanto, β^* es base. De donde,

$$w(Y) \leq |\beta^*| \leq |\beta| = w(X).$$

Sea $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Si $\beta(x)$ es una base local de vecindades de x en X tal que $|\beta(x)| = \chi(x, X)$. La familia $\beta^*(y) = \{f(V) : V \in \beta(x)\}$ es una base local para y en Y. De donde, $\chi(x, X) \geq \chi(y, Y)$ y por lo tanto, $\chi(X) \geq \chi(Y)$ ■

2.2 Funciones Cardinales en Productos

Antes de comenzar el estudio de las funciones cardinales en productos, introduciremos un poco de notación y daremos algunas definiciones que serán de utilidad tanto en lo restante del capítulo como en los siguientes; además, de que ello permitirá simplificar la notación empleada en las demostraciones.

Dada una familia de espacios topológicos $\{X_\alpha\}_{\alpha \in S}$,

$$\widetilde{W} = \widetilde{W}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n; B_1, B_2, ..., B_n)$$

es el conjunto $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(B_i)$, donde B_i es un abierto en X_{α_i} para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Es decir, $\widetilde{W}$ es el conjunto de funciones $f \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ tales que $f(\alpha_i) \in B_i$, para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Sean $x_i = f(\alpha_i) \in X_{\alpha_i}$ y B_i un abierto en X_{α_i} tal que $x_i \in B_i$, para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Entonces la vecindad $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(B_i) = \widetilde{W}(f; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n; B_1, B_2, ..., B_n)$ de f es el conjunto de funciones $g \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ tales que $g(\alpha_i) \in B_i$, para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Por lo tanto, empleando la notación anterior tenemos las siguientes definiciones:

Definición 2.18

$$\widetilde{W} = \widetilde{W}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n; B_1, B_2, ..., B_n) =$$
$$= \left\{ f \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha : f(\alpha_i) \in B_i, \ i = 1, 2, ..., n \right\}.$$

Definición 2.19 *Sea $f \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ y B_i un abierto en X_{α_i} tal que $f(\alpha_i) \in B_i$ para toda $i = 1, 2, ..., n$. Entonces*

$$\widetilde{W}(f; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n; B_1, B_2, ..., B_n) =$$
$$= \left\{ g \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha : g(\alpha_i) \in B_i, \ i = 1, 2, ..., n \right\}.$$

2.2.1 El peso y carácter en productos topológicos

Teorema 2.20 *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos y m un número cardinal transfinito tal que: $m \geq w(X_\alpha)$ para toda $\alpha \in I$ y $m \geq |I|$. Entonces $w\left(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha\right) \leq m$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}_\alpha$ una base para la topología de X_α, para cada $\alpha \in I$, tal que $|\mathcal{B}_\alpha| \leq m$. Ahora consideremos la familia $\mathcal{W}$ de todos los conjuntos

$$\widetilde{W}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n; B_1, B_2, ..., B_n)$$

en donde $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} \subset I$ y $B_i \in \mathcal{B}_{\alpha_i}$, (Ver Definición 2.18). Esta familia forma una base para la topología de $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Ahora sólo resta demostrar que $|\mathcal{W}| \leq m$.

Sea T un conjunto tal que $|T| = m$. Como $|\mathcal{B}_\alpha| \leq m$, para toda $\alpha \in I$ existe una función inyectiva $i_\alpha : \mathcal{B}_\alpha \to T$. Ahora consideremos la función $G : \mathcal{W} \to \bigcup_{n \in N} (I^n \times T^n)$ definida de modo que a cada elemento de $\mathcal{W}$ de la forma

$$\widetilde{W}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n; B_1, B_2, ..., B_n),$$

le asignamos la 2-eneada

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n; i_{\alpha_1}(B_1), i_{\alpha_2}(B_2), ..., i_{\alpha_n}(B_n)) \in \bigcup_{n \in N} (I^n \times T^n);$$

Claramente esta función es una inyección de $\mathcal{W}$ en $\bigcup_{n \in N} (I^n \times T^n)$. Ahora sólo resta mostrar que la cardinalidad de $\bigcup_{n \in N} (I^n \times T^n)$ no excede a m

$$\left|\bigcup_{n\in N} I^n \times T^n\right| \leq \sum_{n\in N} |\, I^n \times T^n| \leq \aleph_0 \cdot |\, I^n \times T^n| \leq \aleph_0 \cdot m \cdot m = m.$$

De ello podemos concluir que $|\mathcal{W}| \leq m$, y ésto implica que

$$w\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right) \leq m$$

■

Teorema 2.21 *Sean $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos, m un número cardinal transfinito tal que: $m \geq \chi(X_\alpha)$ para toda $\alpha \in I$ y $m \geq |I|$. Entonces $\chi\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right) \leq m$.*

Demostración. Sea $x \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ y sea, para cada $\alpha \in I$, $\mathcal{B}_\alpha(x)$ una base local de vecindades para la $\alpha-$ésima coordenada de x, x_α, de modo que $|\mathcal{B}_\alpha(x)| \leq m$. Sea $\mathcal{U}$ la familia de todos los conjuntos de la forma

$$W(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n; B_1(x), B_2(x), ..., B_n(x))$$

(Ver Definición 2.19), en donde $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} \subset I$ y $B_i(x) \in \mathcal{B}_{\alpha_i}(x)$.

La familia $\mathcal{B}(x) = \mathcal{U}$ es una base local de vecindades para x en $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. Ahora sólo resta demostrar que la cardinalidad de esta familia $\mathcal{U}$ es $\leq m$.

Sea T un conjunto tal que $|T| = m$. Como $|\mathcal{B}_\alpha(x)| \leq m$, entonces para toda $\alpha \in I$, existe una función inyectiva $i_\alpha : \mathcal{B}_\alpha(x) \to T$, luego consideremos la función $H : \mathcal{U} \to \bigcup_{n\in N}(I^n \times T^n)$ definida de la siguiente manera: a cada elemento de $\mathcal{U}$ de la forma

$$W(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n; B_1(x), B_2(x), ..., B_n(x))$$

le asignamos la 2-eneada

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n; i_{\alpha_1}(B_1), i_{\alpha_2}(B_2), ..., i_{\alpha_n}(B_n)) \in \bigcup_{n\in N}(I^n \times T^n).$$

Claramente esta función es una inyección de $\mathcal{U}$ en $\bigcup_{n\in N}(I^n \times T^n)$. Ahora,

$$\left|\bigcup_{n\in N}(I^n \times T^n)\right| \leq \sum_{n\in N} |\, I^n \times T^n| \leq \aleph_0 \cdot |\, I^n \times T^n| \leq \aleph_0 \cdot m = m.$$

De ello podemos concluir que $|\mathcal{U}| \leq m$, y por lo tanto,

$$\chi\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right) \leq m$$

■

Corolario 2.22 $w\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right) \leq |I| \cdot Sup\{w(X_\alpha) : \alpha \in I\}$

DEMOSTRACIÓN. Basta tomar como m al cardinal

$$|I| \cdot Sup\{w(X_\alpha) : \alpha \in I\} = máx\{|I|, Sup\{w(X_\alpha) : \alpha \in I\}\}$$

y aplicar el Teorema 2.20 ■

Corolario 2.23 $\chi\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right) \leq |I| \cdot Sup\{\chi(X_\alpha) : \alpha \in I\}$

DEMOSTRACIÓN. Basta tomar como m al cardinal

$$|I| \cdot Sup\{\chi(X_\alpha) : \alpha \in I\} = máx\{|I|, Sup\{\chi(X_\alpha) : \alpha \in I\}\}$$

y aplicar el Teorema 2.21 ■

Definición 2.24 *El espacio T_0 de cardinalidad 2 es el conjunto $F = \{0,1\}$ con la topología $T = \{\phi, \{0\}, \{0,1\}\}$.*

Definición 2.25 *Sea $m \geq \aleph_0$. El espacio F^m es llamado Cubo de Alexandroff de peso m, es decir, es el producto $\prod_{s\in S} F_s$, en donde $F_s = \{0,1\}$ con la topología $T = \{\phi, \{0\}, \{0,1\}\}$ y $|S| = m$. Obsérvese que los conjuntos F_s con esta topología son espacios T_0 y no son T_1.*

Corolario 2.26 *Si $|K| \geq \aleph_0$ y $D(2)$ es el espacio discreto de cardinalidad 2, entonces $w\left(D(2)^K\right) = |K|$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el corolario 2.22, sabemos que $w\left(D(2)^K\right) \leq |K|$. Por lo tanto, basta probar que $|K| \leq w\left(D(2)^K\right)$

Para cada $\alpha \in K$, sea $f_\alpha : K \to \{0,1\}$ definida de la siguiente manera:

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = \alpha \\ 0 & si\ x \neq \alpha \end{cases}$$

Ahora consideremos a $\mathbf{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha \in K}$. Claramente $\mathbf{F} \subset D(2)^K$ y $|\mathbf{F}| = |K|$. Además, $\{f_\alpha\} = \pi_\alpha^{-1}(\{1\}) \bigcap \mathbf{F}$ para toda $\alpha \in K$. Por lo tanto, $\mathbf{F}$ es un subespacio discreto de $D(2)^K$. Finalmente, por monotonía tenemos que

$$|K| = w(\mathbf{F}) \leq w\left(D(2)^K\right) \leq |K|.$$

Por lo tanto, $|K| = w\left(D(2)^K\right)$ ∎

Corolario 2.27 *Si $|K| \geq \aleph_0$ y F es el espacio T_0 de cardinalidad 2, entonces $w\left((F)^K\right) = |K|$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que F tiene la siguiente topología $T = \{\phi, F, \{1\}\}$. Para cada $\alpha \in K$, sea $f_\alpha : K \to \{0,1\}$ definida de la siguiente manera:

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = \alpha \\ 0 & si\ x \neq \alpha \end{cases}$$

Ahora consideremos a $\mathbf{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha \in K}$. Claramente $\mathbf{F} \subset F^K$ y $|\mathbf{F}| = |K|$. Además, para toda $\alpha \in K$, $\{f_\alpha\} = \pi_\alpha^{-1}(\{1\}) \bigcap \mathbf{F}$. Por lo tanto, $\mathbf{F}$ es un subespacio discreto de F^K. Nuevamente por monotonía tenemos que

$$|K| = w(\mathbf{F}) \leq w\left(F^K\right)$$

y por el corolario 2.22

$$w\left(F^K\right) \leq |K|.$$

Por lo tanto, $w\left(F^K\right) = K$ ∎

Corolario 2.28 *Primero Numerable y Segundo Numerable son propiedades $\aleph_0-$ multiplicativas*

DEMOSTRACIÓN. Sea $Y = \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$ un producto de espacios primero numerables, tal que $|I| \leq \aleph_0$. Como cada Y_α es primero numerable, se cumple que $\chi(Y_\alpha) \leq \aleph_0$. Por lo tanto en virtud del teorema 2.21, tenemos que $Y = \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$ es primero numerable.

Ahora si cada Y_α es segundo numerable, se tiene que $w(Y_\alpha) \leq \aleph_0$. Por lo tanto, aplicando el teorema 2.20, $Y = \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$ es un espacio segundo numerable ∎

Proposición 2.29 *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos ninguno de los cuales es indiscreto. Entonces*

$$w\left(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha\right) = |I| \cdot Sup\left\{w\left(X_\alpha\right) : \alpha \in I\right\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que

$$w\left(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha\right) \leq |I| \cdot Sup\left\{w\left(X_\alpha\right) : \alpha \in I\right\}$$

Ahora, como para cada $\alpha \in I$ el espacio X_α es homeomorfo a un subespacio de $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ (Ver Observación 2) y la función cardinal peso es monótona, $w\left(X_\alpha\right) \leq w\left(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha\right)$ para cada $\alpha \in I$. Por lo tanto,

$$Sup\left\{w\left(X_\alpha\right) : \alpha \in I\right\} \leq w\left(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha\right);$$

de donde, sólo resta demostrar que $|I| \leq w\left(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha\right)$.

Si X_α no es indiscreto entonces existen p_α y $q_\alpha \in X_\alpha$ tales que $p_\alpha \notin \overline{\{q_\alpha\}}$. Consideremos al subespacio $\Gamma_\alpha = \{p_\alpha, q_\alpha\}$. La topología de Γ_α heredada de X_α puede ser cualquiera de las dos siguientes:

$i)$ $T_{\Gamma_\alpha} = \{\phi, \Gamma_\alpha, \{p_\alpha\}, \{q_\alpha\}\}$ si $q_\alpha \notin \overline{\{p_\alpha\}}$

$ii)$ $T_{\Gamma_\alpha} = \{\phi, \Gamma_\alpha, \{p_\alpha\}\}$ si $q_\alpha \in \overline{\{p_\alpha\}}$

Caso (i) Si $\left|\left\{\alpha \in I : q_\alpha \notin \overline{\{p_\alpha\}}\right\}\right| = |I|$, entonces

$$D\left(2\right)^{|I|} \subset \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$$

y por la monotonia del peso tenemos que $|I| = w\left(D\left(2\right)^{|I|}\right) \leq w\left(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha\right)$

Caso (ii) Si $\left|\left\{\alpha \in I : q_\alpha \in \overline{\{p_\alpha\}}\right\}\right| = |I|$, entonces $F^{|I|} \subset \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, por lo tanto $|I| = w\left(F^{|I|}\right) \leq w\left(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha\right)$

Nótese que siempre se tiene alguno de los dos casos anteriores. En efecto, como el número de espacios factores es igual a $|I|$ y cada uno de ellos contiene una copia de $D\left(2\right)$ o bien una copia de

F_0, necesariamente se cumple que la suma de las cardinalidades de $\left|\left\{\alpha \in I : q_\alpha \notin \overline{\{p_\alpha\}}\right\}\right|$ y $\left|\left\{\alpha \in I : q_\alpha \in \overline{\{p_\alpha\}}\right\}\right|$ es igual a $|I|$, es decir

$$\begin{aligned}\left|\left\{\alpha \in I : q_\alpha \notin \overline{\{p_\alpha\}}\right\}\right| + \left|\left\{\alpha \in I : q_\alpha \in \overline{\{p_\alpha\}}\right\}\right| &= \\ máx\left\{\left|\left\{\alpha \in I : q_\alpha \notin \overline{\{p_\alpha\}}\right\}\right|, \left|\left\{\alpha \in I : q_\alpha \in \overline{\{p_\alpha\}}\right\}\right|\right\} &= |I|.\end{aligned}$$

Esto es posible si y sólo si alguno de los sumandos tiene cardinalidad igual a $|I|$. De los dos casos concluimos que $|I| \leq w\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right)$. Por lo tanto $w\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right) = |I| \cdot Sup\{w(X_\alpha) : \alpha \in I\}$ ∎

Ahora calculemos la función carácter en el *Cubo de Cantor*, este nos será de utilidad un poco más adelante cuando abordemos los temas relacionados a la universalidad.

Definición 2.30 *Sea $m \geq \aleph_0$. El cubo de Cantor de peso m, es el espacio producto $D(2)^m$, es decir, el Cubo de Cantor es el producto $\prod_{\alpha\in I} D_\alpha$ en donde cada uno de los D_α es el espacio discreto de cardinalidad 2, y $|I| = m$.*

Definición 2.31 *El cubo de Cantor $D^{\aleph_0}$ es conocido como Conjunto de Cantor.*

Teorema 2.32 *Sea $m \geq \aleph_0$. Entonces para todo $x \in D(2)^m$ tenemos que $\chi(x, D(2)^m) = m$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe $x \in D(2)^m$ tal que

$$\chi(x, D(2)^m) = n < m$$

y sea $\mathcal{B}(x)$ una base local de x en $D(2)^m$ tal que $|\mathcal{B}(x)| = n$. Para cada $U \in \mathcal{B}(x)$, elijamos una vecindad $W(U)$ de x de la forma $\prod_{\alpha\in I} W_\alpha$ donde $W_\alpha \neq D(2)$ sólo para $\alpha \in S(U) \subset I$, con $|S(U)| < \aleph_0$ y $|I| = m$, y además $W(U) \subset U$. La familia $\mathcal{B}_0(x) = \{W(U) : U \in \mathcal{B}(x)\}$ así obtenida también forma una base local para x, y $|\mathcal{B}_0(x)| = n$. El conjunto $S_0 = \bigcup_{U\in\mathcal{B}(x)} S(U)$ tiene cardinalidad $\leq n \cdot \aleph_0 < m$. Entonces existe $s^* \in I \setminus S_0$. De donde, la vecindad $\pi_{s^*}^{-1}(\pi_{s^*}(x))$ no contiene a ningún elemento de $\mathcal{B}_0(x)$, pero esto último contradice que $\mathcal{B}_0(x)$ es una base local de x en $D(2)^m$. Por lo tanto, $\chi(x, D(2)^m) \geq m$. Como $w(D(2)^m) = m$ (Ver Corolario 2.26), entonces $m \leq \chi(x, D(2)^m) \leq \chi(D(2)^m) \leq w(D(s)^m) = m$. Por lo tanto, $\chi(x, D(2)^m) = m$ para todo $x \in D(2)^m$ ∎

2.2.2 La densidad y la celularidad en productos topológicos

Ahora analizaremos el comportamiento de las funciones cardinales densidad y celularidad en productos topológicos. En el caso de la densidad no tenemos resultados generales que impliquen igualdades como para las funciones cardinales peso y carácter. Sin embargo es posible dar una cota superior tanto para la densidad como para la celularidad de un producto topológico a partir de la densidad de los espacios factores; esto es una consecuencia del teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery que se demuestra en esta sección.

Lema 2.33 *Sea $m \geq \aleph_0$, entonces $d\left(D(m)^{2^m}\right) \leq m$*

Demostración. Sea $T = D(2)^m$. Entonces $w(T) \leq m$ (Teorema 2.21). Además, $|T| = 2^m$. Ahora sea $\mathcal{B}$ una base para la topología de T tal que $|\mathcal{B}| \leq m$, y sea

$$\gamma = \{\mathcal{G} \subset \mathcal{B} : |\mathcal{G}| < \aleph_0 \text{ y } \mathcal{G} \text{ es una familia celular}\}.$$

Tenemos que $|\gamma| \leq m$. Ahora sea G el conjunto de todas las funciones $h : T \to D(m)$ tales que existe una familia celular finita $\mathcal{U}(h) = \{U_1, U_2, ..., U_n\}$ para la cual se cumple que $h|_{U_i} \equiv$ *cte.* y $h|_{T \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i} \equiv$ *cte.* Ahora como $|\gamma| \leq m$ entonces $|G| \leq m$. Mostraremos que el conjunto G es denso en $D(m)^{2^m} \cong D(m)^{|T|}$. Sea $V \subset D(m)^{|T|}$ abierto y no vacío, y sean $t_1, t_2, ..., t_k \in T$ distintos entre sí y $z_1, z_2, ..., z_k \in D(m)$ tales que $\bigcap_{i=1}^k \pi_{t_i}^{-1}(\{z_i\}) \subset V$. Como T es un espacio T_2 existen abiertos ajenos $U_1, U_2, ..., U_k$ en $\mathcal{B}$ tales que $t_i \in U_i$. Consideremos ahora la siguiente función:

$$g(t) = \begin{cases} z_i & \text{si } t \in U_i, i \in \{1, 2, ..., k\} \\ z_1 & \text{si } t \in T \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i \end{cases}$$

Claramente $g \in G \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^k \pi_i^{-1}(\{z_i\})\right)$. Por lo tanto, el conjunto G es denso en $D(m)^{2^m}$; de donde se sigue que $d\left(D(m)^{2^m}\right) \leq m$ ■

Teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery

Teorema 2.34 *Sea $m \geq \aleph_0$. Si $\{X_\alpha\}_{\alpha \in S}$ es una colección de espacios topológicos tales que $|S| \leq 2^m$ y $d(X_\alpha) \leq m$ para toda $\alpha \in S$, entonces $d\left(\prod_{\alpha \in S} X_\alpha\right) \leq m$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $|S| = 2^m$ y sea A_α un subespacio denso de X_α tal que $|A_\alpha| \leq m$, para cada $\alpha \in S$. Entonces $\prod_{\alpha \in S} A_\alpha$ es un subespacio denso de $\prod_{\alpha \in S} X_\alpha$. Por lo cual, es suficiente demostrar que $d\left(\prod_{\alpha \in S} A_\alpha\right) \leq m$.

Sea $D(m)$ el espacio discreto de cardinalidad m. Como $|A_\alpha| \leq m$, para cada $\alpha \in S$, existe una función suprayectiva y continua $f_\alpha : D(m) \to A_\alpha$. Entonces la función producto

$$F = \prod_{\alpha \in S} f_\alpha : D(m)^{|S|} \to \prod_{\alpha \in S} A_\alpha$$

es continua y suprayectiva. Por lo tanto, tenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$d\left(\prod_{\alpha \in S} A_\alpha\right) \leq d\left(D(m)^{|S|}\right) = d\left(D(m)^{2^m}\right) \leq m$$

La primera desigualdad es consecuencia de la proposición 2.17 y la segunda se debe al lema anterior; por lo tanto tenemos que

$$d\left(\prod_{\alpha \in S} X_\alpha\right) \leq d\left(\prod_{\alpha \in S} A_\alpha\right) \leq m.$$

Esta última desigualdad es consecuencia de la proposición 2.16 ∎

Corolario 2.35 *La Separabilidad es una propiedad* c*−multiplicativa.*

DEMOSTRACIÓN. Basta tomar $m = \aleph_0$ y aplicar el teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery (Teorema 2.34) ∎

Observación 3 $d\left(\prod_{\alpha \in S} X_\alpha\right) \geq m = \sup\{d(X_\alpha) : \alpha \in S\}$. *Basta considerar la proyección $\pi_\alpha : \prod_{\alpha \in S} X_\alpha \to X_\alpha$. Como es una función continua y suprayectiva, por la proposición 2.17 tenemos que $d(X_\alpha) \leq d\left(\prod_{\alpha \in S} X_\alpha\right)$ para cada $\alpha \in S$. De donde, $d\left(\prod_{\alpha \in S} X_\alpha\right) \geq m =$* $\sup\{d(X_\alpha) : \alpha \in S\}$. *Sí además $|S| \leq 2^m$, con el resultado anterior y el teorema 2.34 concluimos que $d\left(\prod_{\alpha \in S} X_\alpha\right) = m$.*

Corolario 2.36 *Sea $m \geq \aleph_0$, entonces* $d\left(D(m)^{2^m}\right) = m$.

La demostración es inmediata a partir de la observación anterior.

Corolario 2.37 *Sea $m \geq \aleph_0$. Si $\{X_\alpha\}_{\alpha \in S}$ es una colección de espacios topológicos tales que $|S| \leq 2^m$ y $sup\{d(X_\alpha) : \alpha \in S\} = m$, entonces*

$$d\left(\prod_{\alpha \in S} X_\alpha\right) = m.$$

Demostración. Por el teorema 2.34 sabemos que $d\left(\prod_{\alpha \in S} X_\alpha\right) \leq m$, y por la observación 3, sabemos también que $d\left(\prod_{\alpha \in S} X_\alpha\right) \geq m$. Por lo tanto concluimos que $d\left(\prod_{\alpha \in S} X_\alpha\right) = m$ ∎

Teorema 2.38 *Sea $m \geq \aleph_0$. Si $d(X_\alpha) \leq m$ para toda $\alpha \in S$, entonces cualquier familia celular en $\prod_{\alpha \in S} X_\alpha$ tiene cardinalidad $\leq m$.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que $c\left(\prod_{\alpha \in S} X_\alpha\right) > m$. Sea $\mathcal{U} = \{U_t\}_{t \in T}$ una familia celular en $\prod_{\alpha \in S} X_\alpha$ con $|T| > m$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $|T| \leq 2^m$. Entonces, para toda $t \in T$, existen $S_t \subset S$, con $|S_t| < \aleph_0$, y una familia $\{W_s^t\}_{s \in S}$, en donde $W_s^t = X_s$ si $s \in S \setminus S_t$ y W_s^t es un abierto propio de X_s si $s \in S_0$, de modo que $U_t = \prod_{\alpha \in S_0} W_\alpha^t \times \prod_{\alpha \in S \setminus S_0} X_\alpha$.

El conjunto $S_0 = \bigcup_{t \in T} S_t$ cumple que $|S_0| \leq 2^m$. Así $\prod_{\alpha \in S_0} X_\alpha$ contiene un subconjunto denso A tal que $|A| \leq m$. Ahora consideremos a la familia $\left\{\prod_{\alpha \in S_0} W_\alpha^t\right\}_{t \in T}$. Esta familia consiste de subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{\alpha \in S} X_\alpha$. Luego, como $U_t = \prod_{\alpha \in S_0} W_\alpha^t \times \prod_{\alpha \in S \setminus S_0} X_\alpha$ para toda $t \in T$, los miembros de

$$\left\{\prod_{\alpha \in S_0} W_\alpha^t\right\}_{t \in T}$$

son ajenos por pares y además cada miembro de esta familia contiene un elemento de A. Entonces se tiene que $m < |T| \leq |A| \leq m$. De donde se sigue que $m < m$; lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $|T| \leq m$. Por lo tanto $c\left(\prod_{\alpha \in S} X_\alpha\right) \leq m$ ∎

Corolario 2.39 *En el producto de espacios separables, cualquier familia celular tiene cardinalidad a lo mas numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Basta con tomar $m = \aleph_0$ en el teorema anterior ∎

Observación 4 *Si* $sup\{c(X_\alpha) : \alpha \in S\} = m$ *y* $d(X_\alpha) \leq m$ *para toda* $\alpha \in S$, *entonces* $c\left(\prod_{\alpha\in S} X_\alpha\right) = m$. *En efecto, por el Teorema 2.38 tenemos que* $c\left(\prod_{\alpha\in S} X_\alpha\right) \leq m$.

Ahora, supongamos que $c\left(\prod_{\alpha\in S} X_\alpha\right) < m$, *entonces existe* $\alpha \in S$ *tal que* $c(X_\alpha) > c\left(\prod_{\alpha\in S} X_\alpha\right)$. *Por lo tanto, existe una familia celular* $\mathcal{G}_\alpha$ *tal que* $|\mathcal{G}_\alpha| > c\left(\prod_{\alpha\in S} X_\alpha\right)$. *La familia* $\mathcal{G} = \left\{\pi_\alpha^{-1}(U) : U \in \mathcal{G}_\alpha\right\}$ *es una familia celular en* $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$ *de cardinalidad mayor que*

$$c\left(\prod_{\alpha\in S} X_\alpha\right),$$

pero esto no es posible. Por lo tanto, $c\left(\prod_{\alpha\in S} X_\alpha\right) = m$.

2.3 Más Funciones Cardinales

En esta sección introduciremos tres funciones cardinales más, a saber, el peso de red, el pseudocarácter y el i-peso. Además, se hará un estudio del comportamiento de estas funciones en productos topológicos.

Observación 5 *El concepto de red que se introduce a continuación no debe ser confundido con aquel dado en el capítulo preliminar, se mantiene el nombre debido a que es el que se usa más frecuentemente en la literatura relacionada a funciones cardinales, aunque también en ocasiones se da el nombre de malla.*

Definición 2.40 *Una red en un espacio* X *es una familia* $\mathcal{R}$ *de subconjuntos de* X *tal que, para cualquier punto* $x \in X$ *y cualquier vecindad* $U \in N(x)$, *existe* $P \in \mathcal{R}$ *con* $x \in P \subset U$.

De acuerdo a la definición anterior podemos definir otra función cardinal en el espacio topológico X, el peso red.

Definición 2.41 *El peso de red de un espacio topológico* X, *es el mínimo cardinal de una red en el espacio* X.

$$nw(X) = mín\{|\mathcal{R}| : \mathcal{R} \text{ es una red en } X\} + \aleph_0$$

Definición 2.42 *Una condensación es una función biyectiva y continua.*

Definición 2.43 *Se dice que un espacio topológico X puede ser condensado en Y si existe una condensación de X sobre Y.*

Definición 2.44 *El i-peso de un espacio topológico X es el número cardinal*

$$iw(X) = \text{mín}\{w(Y) : X \text{ puede ser condensado en } Y\}$$

Definición 2.45 *Una familia $\mathcal{G}$ es una pseudobase de x en X si los elementos de $\mathcal{G}$ son abiertos, y además, $\bigcap \mathcal{G} = \{x\}$.*

Definición 2.46 *El pseudocarácter local en x de X es el número cardinal*

$$\psi(x, X) = \text{mín}\{|\mathcal{G}| : \mathcal{G} \text{ es una pseudobase de } x \text{ en } X\} + \aleph_0$$

Definición 2.47 *El pseudocarácter de un espacio topológico X, es*

$$\psi(X) = Sup\{\psi(x, X) : x \in X\}$$

Observación 6 *El concepto de pseudocarácter sólo se define para espacios topológicos T_1, pues es en éstos donde se puede asegurar la existencia de una pseudobase para cada punto del espacio.*

Observación 7 *No es difícil verificar que las funciones cardinales peso de red, i-peso y pseudocarácter son funciones cardinales monotonas. También se puede verificar facilmente que para cualquier espacio topológico X,*

$$\psi(X) \leq \chi(X), \ nw(X) \leq w(X) \ \text{ y } iw(X) \leq w(X).$$

Además es importante destacar que en espacios discretos las funciones cardinales peso de red, peso, densidad y celularidad coinciden, y son iguales a la cardinalidad del espacio.

Para ilustrar un poco lo anterior, calcularemos la función pseudocarácter de $D(2)^{|I|}$.

Ejemplo 2.48 $\psi\left(D(2)^{|I|}\right) = |I|$. *En efecto, como el pseudocarácter está dominado por el carácter tenemos que*

$$\psi\left(D(2)^{|I|}\right) \leq |I| = \chi\left(D(2)^{|I|}\right),$$

supongamos ahora que

$$\psi\left(D(2)^{|I|}\right) = n < |I|$$

Sea $\overline{0} : I \to D(2)$ *la función constante cero, y sea* $\mathcal{B}(0)$ *una pseudobase de ésta función en* $D(2)^{|I|}$ *tal que* $|\mathcal{B}(0)| \leq |I|$. *Sin perdida de generalidad, podemos suponer que los elementos de* $\mathcal{B}(0)$ *son abiertos canónicos de* $D(2)^{|I|}$. *Así, como todo* $U \in \mathcal{B}(0)$ *es de la forma* $\prod_{\alpha\in I} U_\alpha$ *donde* $U_\alpha \neq D(2)$ *sólo para* $\alpha \in S(U) \subset I$, *con* $|S(U)| < \aleph_0$. *Sea*

$$S^* = \bigcup_{U\in\mathcal{B}(0)} S(U)$$

$S^* \subset I$, *y además* $|S^*| \leq |\mathcal{B}(0)| \leq |I|$. *Por lo tanto, existe* $\alpha \in I\backslash S^*$. *Sea* $h : I \to D(2)^{|I|}$ *tal que* $h(x) = 0$ *si* $x \in S^*$ *y* $h(x) = 1$ *si* $x \in I\backslash S^*$. *La función* h *cumple que* $h(S(U)) = \{0\}$ *y además* $h \neq \overline{0}$. *De donde,* $h \in U$ *para toda* $U \in \mathcal{B}(0)$. *Por lo tanto,* $h \in \bigcap_{u\in\mathcal{B}(0)} U$, *pero esto último contradice que* $\mathcal{B}(0)$ *es una pseudobase de* $\overline{0}$ *en* $D(2)^{|I|}$. *Por lo tanto,* $|I| \leq \psi\left(D(2)^{|I|}\right)$. *De donde concluimos que* $\psi\left(D(2)^{|I|}\right) = |I|$.

Algunas de las propiedades que poseen las funciones cardinales peso de red e i-peso están plasmadas en los siguientes resultados.

Proposición 2.49 *Sea* $f : X \to Y$ *una función continua y suprayectiva, entonces* $nw(Y) \leq nw(X)$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{R}$ una red en X tal que $|\mathcal{R}| = nw(X)$. Entonces la familia $\mathcal{R}^* = \{f(W) : W \in \mathcal{R}\}$ es una red en Y. En efecto, como la función f es continua y sobre, para toda $y \in Y$ y toda vecindad V de y, existen $x \in X$ y un abierto U tales que $f(x) = y$, $x \in U$ y $f(U) \subset V$. Ahora, como $\mathcal{R}$ es una red, existe $W \in \mathcal{R}$ tal que $x \in W \subset U$. Entonces $y \in f(W) \subset V$. De donde, $\mathcal{R}^*$ es una red en Y y además $|\mathcal{R}^*| \leq |\mathcal{R}| = nw(X)$. Por lo tanto, $nw(Y) \leq |\mathcal{R}^*| = nw(X)$ ■

Lema 2.50 *Para todo espacio topológico Hausdorff* X, *existe una función biyección continua de* X *en un espacio Hausdorff* Y, *tal que* $w(Y) \leq nw(X)$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $m = nw(X)$, y $\mathcal{R}$ una red en X tal que $|\mathcal{R}| = nw(X)$. Sea τ la topología de X. Consideremos a la familia $\mathcal{G}$ consistente de parejas de elementos R_1, $R_2 \in \mathcal{R}$ para las cuales existen abiertos ajenos U_1, U_2 tales que $R_1 \subset U_1$ y $R_2 \subset U_2$. Notemos que si $|X| \geq 2$ y como X es T_2 entonces $\mathcal{G} \neq \phi$. Escojamos para cada pareja de elementos de $\mathcal{G}$ escojamos una pareja de los abiertos U_1, U_2, y sea β_0 la familia de todos los conjuntos obtenidos de este modo. La familia β consistente de todas la intersecciones finitas de miembros de β_0 tiene las siguientes propiedades:

i) Para cualquier pareja B_1, B_2 y para cualquier punto $x \in B_1 \bigcap B_2$, existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset B_1 \bigcap B_2$.

ii) Para cada $x \in X$, existe $U \in \beta$ tal que $x \in U$.

Entonces si denotamos por τ^* a la topología generada por β se sigue, de la definición de red y que (X, τ) es Hausdorff, que (X, τ^*) también es Hausdorff. Además, $|\beta| \leq m$ y como $\tau^* \subset \tau$ se sigue que la función $i : (X, \tau) \to (X, \tau^*)$ es una función continua y biyectiva ■

Teorema 2.51 *Sea X un espacio compacto, entonces $nw(X) = w(X)$.*

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente demostrar que $nw(X) \geq w(X)$.

Como X es compacto, X es Hausdorff. Entonces, por el lema anterior, existe un espacio Hausdorff Y y una biyección continua $f : X \to Y$, donde el espacio Y cumple la siguiente desigualdad $w(Y) \leq nw(X)$. Además, para espacios compactos toda biyección continua es un homeomorfismo. Por lo tanto $w(X) = w(Y) \leq nw(X)$ ■

Teorema 2.52 *Si un espacio compacto Y es la imagen continua de un espacio topológico X, entonces $w(Y) \leq w(X)$*

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición 2.49 se sigue que

$$nw(Y) \leq nw(X) \leq w(X).$$

Ahora, como Y es compacto $nw(Y) = w(Y)$. Por lo tanto, $w(Y) \leq w(X)$ ■

Corolario 2.53 *Si X es un espacio compacto, entonces $w(X) = iw(X)$*

DEMOSTRACIÓN. Basta hacer notar que toda condensación $f : X \to Y$ del espacio compacto X sobre el espacio topológico Y, es un homeomorfismo. Por lo tanto, $w(X) = iw(X)$ ■

Los resultados que se obtienen en espacios producto para las funciones cardinales definidas anteriormente son muy similares a los obtenidos con anterioridad para las funciones peso y carácter, tal como se muestra a continuación.

Teorema 2.54 *Sean $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos y m un número cardinal transfinito tal que $m \geq nw(X_\alpha)$ para toda $\alpha \in I$ y $m \geq |I|$. Entonces $nw\left(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha\right) \leq m$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{R}_\alpha$ una red en X_α tal que $|\mathcal{R}_\alpha| = nw(X_\alpha)$ para cada $\alpha \in I$. Consideremos a la familia $\mathcal{R}$ de todos los conjuntos de la forma $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(R_i)$, en donde $R_i \in \mathcal{R}_{\alpha_i}$ y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in I$. Esta familia $\mathcal{R}$ es una red en $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ cuya cardinalidad no excede a m. Por lo tanto $nw\left(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha\right) \leq m$ ■

Corolario 2.55 *Si $|K| \geq \aleph_0$ y F es el espacio T_0 de cardinalidad 2, entonces $nw\left((F)^K\right) = |K|$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que F tiene la siguiente topología $T = \{\phi, F, \{1\}\}$. Para cada $\alpha \in K$, sea $f_\alpha : K \to \{0,1\}$ definida de la siguiente manera:

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = \alpha \\ 0 & si\ x \neq \alpha \end{cases}$$

Ahora consideremos a $\mathbf{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha \in K}$. Claramente $\mathbf{F} \subset F^K$ y $|\mathbf{F}| = |K|$. Además, $\{f_\alpha\} = \pi_\alpha^{-1}(\{1\}) \bigcap \mathbf{F}$. Por lo tanto, $\mathbf{F}$ es un subespacio discreto de F^K. Entonces, $|K| = nw(\mathbf{F})$, y por la monotonía de la función cardinal peso de red, tenemos que

$$|K| = nw(\mathbf{F}) \leq nw\left(F^K\right).$$

Además $nw\left(F^K\right) \leq w\left(F^K\right) = K$. Por lo tanto, $nw\left(F^K\right) = K$ ■

Corolario 2.56 *Sean $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos tales que ninguno de los X_α es indiscreto. Entonces*

$$nw\left(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha\right) = |I| \cdot Sup\{nw(X_\alpha) : \alpha \in I\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Si en el teorema anterior tomamos como m al cardinal

$$|I| \cdot Sup\{nw(X_\alpha) : \alpha \in I\} = máx\{|I|, Sup\{nw(X_\alpha) : \alpha \in I\}\}.$$

Sabemos que $nw\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right) \leq |I| \cdot Sup\{nw(X_\alpha) : \alpha \in I\}$. Ahora, como para cada $\alpha \in I$, el espacio X_α es homeomorfo a un subespacio de $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ (Ver Observación 2) y como la función cardinal peso de red es monótona, entonces $nw(X_\alpha) \leq nw\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right)$. Por lo tanto

$$Sup\{nw(X_\alpha) : \alpha \in I\} \leq nw\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right);$$

de donde, sólo resta demostrar que $|I| \leq nw\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right)$.

Si X_α no es indiscreto entonces existen p_α y $q_\alpha \in X_\alpha$ tales que $p_\alpha \notin \overline{\{q_\alpha\}}$. Consideremos al subespacio $\Gamma_\alpha = \{p_\alpha, q_\alpha\}$. La topología de Γ_α heredada de X_α puede ser cualquiera de las dos siguientes:

$i)$ $T_{\Gamma_\alpha} = \{\phi, \Gamma_\alpha, \{p_\alpha\}, \{q_\alpha\}\}$

$ii)$ $T_{\Gamma_\alpha} = \{\phi, \Gamma_\alpha, \{p_\alpha\}\}$

Caso (i) Si $\left|\left\{\alpha \in I : q_\alpha \notin \overline{\{p_\alpha\}}\right\}\right| = |I|$, entonces

$$D(2)^{|I|} \subset \prod_{\alpha\in I} X_\alpha.$$

Luego, sabemos que el espacio $D(2)^{|I|}$ es un espacio compacto cuyo peso es $|I|$. Como en espacios compactos el peso y el peso de red coinciden y la función cardinal peso de red es monótona, tenemos que $|I| = nw\left(D(2)^{|I|}\right) \leq nw\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right)$

Caso (ii) Si $\left|\left\{\alpha \in I : q_\alpha \in \overline{\{p_\alpha\}}\right\}\right| = |I|$, entonces $F^{|I|} \subset \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$, por lo tanto, por el corolario anterior

$$|I| = nw\left(F^{|I|}\right) \leq nw\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right).$$

Por lo tanto

$$nw\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right) = |I| \cdot Sup\{nw(X_\alpha) : \alpha \in I\}$$

■

Teorema 2.57 *Sean $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos y m un número cardinal transfinito tal que $m \geq iw\left(X_\alpha\right)$ para toda $\alpha \in I$ y $m \geq |I|$. Entonces $iw\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right) \leq m$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean Y_α un espacio topológico, $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ una condensación tal que $w(Y_\alpha) = iw(X_\alpha)$, para cada $\alpha \in I$. Por el Teorema 2.21, sabemos que $w\left(\prod_{\alpha\in I} Y_\alpha\right) \leq m$. Entonces si consideramos la función producto f inducida por la familia de funciones $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha \in I\}$

$$f = \prod_{\alpha\in I} f_\alpha : \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$$

no es difícil constatar que esta función es una condensación. Por lo tanto,

$$iw\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right) \leq w\left(\prod_{\alpha\in I} Y_\alpha\right) \leq m$$

y esto último completa la demostración ■

Corolario 2.58 *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos tales que todos los espacios X_α contienen al espacio discreto de cardinalidad 2. Entonces*

$$iw\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right) = |I| \cdot Sup\left\{iw\left(X_\alpha\right) : \alpha \in I\right\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Si en el teorema anterior tomamos como m al cardinal

$$|I| \cdot Sup\left\{iw\left(X_\alpha\right) : \alpha \in I\right\} = máx\left\{|I|, Sup\left\{iw\left(X_\alpha\right) : \alpha \in I\right\}\right\}.$$

Sabemos que $iw\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right) \leq |I| \cdot Sup\left\{iw\left(X_\alpha\right) : \alpha \in I\right\}$. Ahora, como para cada $\alpha \in I$, el espacio X_α es homeomorfo a un subespacio de $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ (Observación 2) y la función cardinal i-peso es monótona, entonces $iw\left(X_\alpha\right) \leq iw\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right)$. Por lo tanto

$$Sup\left\{iw\left(X_\alpha\right) : \alpha \in I\right\} \leq iw\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right).$$

De donde, sólo resta demostrar que $|I| \leq iw\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right)$.

Como X_α contiene una copia de $D(2)$ para toda $\alpha \in I$, entonces existen p_α y $q_\alpha \in X_\alpha$ tales que $\Gamma_\alpha = \{p_\alpha, q_\alpha\}$ y la topología de este subespacio es $T_{\Gamma_\alpha} = \{\phi, \Gamma_\alpha, \{p_\alpha\}, \{q_\alpha\}\}$, entonces $D(2)^{|I|} \subset \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. Luego sabemos que el espacio $D(2)^{|I|}$ es un espacio compacto cuyo peso es $|I|$. Como en espacios compactos $w = nw = iw$ y debido a la monotonia de la función cardinal i-peso tenemos que $|I| = iw\left(D(2)^{|I|}\right) \leq iw\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right)$ ∎

Teorema 2.59 *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos T_1 y m un número cardinal tránsfinito tal que $m \geq \psi(X_\alpha)$ para toda $\alpha \in I$ y $m \geq |I|$. Entonces $\psi\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right) \leq m$.*

Demostración. Sea $x \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ y sea, para cada $\alpha \in I$, $\mathcal{G}_\alpha(x)$ una pseudobase local de vecindades para la $\alpha-$ésima coordenada de x, x_α, de modo que $|\mathcal{G}_\alpha(x)| \leq m$. Sea $\mathcal{G}$ la familia de todos los conjuntos de la forma

$$W(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n; G_1, G_2, ..., G_n) = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(G_i),$$

en donde $G_i \in \mathcal{G}_{\alpha_i}$. Esta familia $\mathcal{G}$ es una pseudobase de x en $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. Por lo tanto, es suficiente demostrar que la cardinalidad de esta familia $\mathcal{G}$ es $\leq m$.

Sea T un conjunto tal que $|T| = m$. Como $|\mathcal{G}_\alpha(x)| \leq m$, para toda $\alpha \in I$, existe una función inyectiva $i_\alpha : \mathcal{G}_\alpha(x) \to T$. Consideremos la función $H : \mathcal{G} \to \bigcup_{n\in N}(I^n \times T^n)$ definida de la siguiente manera: a cada elemento de $\mathcal{G}$ de la forma $W(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n; G_1, G_2, ..., G_n)$ le asignamos la 2-eneada

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n; i_{\alpha_1}(G_1), i_{\alpha_2}(G_2), ..., i_{\alpha_n}(G_n)) \in \bigcup_{n\in N}(I^n \times T^n).$$

Claramente esta función es una inyección de $\mathcal{G}$ en $\bigcup_{n\in N}(I^n \times T^n)$. Ahora sólo resta verificar que la cardinalidad de $\bigcup_{n\in N}(I^n \times T^n)$ no excede a m

$$\left|\bigcup_{n\in N}(I^n \times T^n)\right| \leq \sum_{n\in N} |I^n \times T^n| \leq \aleph_0 \cdot |I^n \times T^n| \leq \aleph_0 \cdot m \cdot m = m.$$

De ello podemos concluir que $|\mathcal{G}| \leq m$, y también que

$$\psi\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right) \leq m$$

■

Corolario 2.60 *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos T_1 con al menos dos puntos. Entonces*

$$\psi\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right) = |I|\cdot Sup\{\psi(X_\alpha) : \alpha\in I\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Si en el teorema anterior tomamos como m al cardinal

$$|I|\cdot Sup\{\psi(X_\alpha):\alpha\in I\} = máx\{|I|, Sup\{\psi(X_\alpha):\alpha\in I\}\}.$$

Sabemos que $\psi\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right) \le |I|\cdot Sup\{\psi(X_\alpha):\alpha\in I\}$. Ahora, como para cada $\alpha\in I$, el espacio X_α es homeomorfo a un subespacio de $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ (Observación 2) y la función ψ es monótona, entonces $\psi(X_\alpha)\le\psi\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right)$ para toda $\alpha\in I$. Por lo tanto,

$$Sup\{\psi(X_\alpha):\alpha\in I\}\le\psi\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right).$$

Así, es suficiente demostrar que $|I|\le\psi\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right)$.

Si $|X_\alpha|\ge 2$ entonces para cada $\alpha\in I$, existen p_α y $q_\alpha\in X_\alpha$ con $p_\alpha\ne q_\alpha$. Como X_α es T_1, $\Gamma_\alpha=\{p_\alpha,q_\alpha\}$ es un subespacio discreto de X_α. Así, $\Gamma_\alpha\cong D(2)$. Por lo tanto, $D(2)^{|I|}\subset\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. Finalmente, por el ejemplo 2.48 y la monotonia de la función cardinal pseudocarácter tenemos que

$$|I| = \psi\left(D(2)^{|I|}\right)\le\psi\left(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha\right)$$

■

3

Universalidad

En este capítulo abordaremos un tema muy interesante en la Topología General, el tema de la universalidad; su principal importancia radica en que la existencia de espacios universales reduce el estudio de una determinada clase de espacios a estudiar los subespacios del espacio universal.

En primera instancia definiremos lo que es un espacio universal y se darán demostraciones de algunos resultados acerca de espacios universales, posteriormente se enunciarán más resultados que son consecuencia directa de proposiciones y teoremas previamente demostrados.

Definición 3.1 *Diremos que un espacio topológico X es universal para todos los espacios que poseen una propiedad P, si X tiene la propiedad P y cada espacio que tiene la propiedad P se puede encajar en X.*

3.1 El cubo de Tychonoff y el cubo de Hilbert

Definición 3.2 *El Cubo de Tychonoff de peso m, con $m \geq \aleph_0$, es el espacio I^m, es decir, es el producto $\prod_{s \in S} I_s$, donde $I_s = I$ para toda $s \in S$ y $\mid S \mid = m$. El cubo de Tychonoff de peso $\aleph_0$ es conocido también como el Cubo de Hilbert.*

Observación 8 *Notemos que si $n \leq m$ entonces I^n se puede encajar en I^m. Además, como I no es un espacio indiscreto, aplicando el teorema 2.30 obtenemos que $w(I^m) = m$.*

Teorema 3.3 *El cubo de Tychonoff de peso m es universal para todos los espacios Tychonoff de peso $\leq m$, con $m \geq \aleph_0$.*

DEMOSTRACIÓN. El intervalo $[0,1] = I$ es $T_{3\frac{1}{2}}$ entonces I^m es $T_{3\frac{1}{2}}$ (Ver Teorema 1.25). Además sabemos que $w(I^m) = m$. Por lo tanto el espacio I^m es $T_{3\frac{1}{2}}$ y tiene peso $\leq m$. Ahora resta demostrar que todo espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ de peso $\leq m$ se puede encajar en I^m.

Sea X un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ de peso $\leq m$. La familia de todos los conjuntos funcionalmente abiertos (Ver Sección 0.2.9) es una base para el espacio X y como $w(X\ ) \leq m$, es posible elegir una subcolección de esta base cuya cardinalidad no exceda a m. Como X es $T_{3\frac{1}{2}}$ existe $\mathcal{B} = \{U_s\}_{s\in S}$, en donde $| S | \leq m$, U_s es un conjunto funcionalmente abierto para toda $s \in S$ y $\mathcal{B}$ es una base de la topología de X. Para cada $s \in S$ existe $f_s : X \to I$ continua tal que $f_s^{-1}((0,1]) = U_s$. Sea $F = \{f_s\}_{s\in S}$; esta familia de funciones separa puntos de conjuntos cerrados por ser $\mathcal{B}$ una base para la topología de X, y por ende al ser X un espacio T_1 separa puntos de puntos, con ello se satisface las hipótesis del Teorema Diagonal (Teorema 1.16). Entonces

$$F = \triangle_{s\in S} f_s : X \to I^m$$

es un encaje de X en I^m. Por lo tanto, I^m es universal para todos los espacios $T_{3\frac{1}{2}}$ cuyo peso sea $\leq m$ ■

Teorema 3.4 *El cubo de Tychonoff I^m es universal para todos los espacios compactos de peso$\leq m$, con $m \geq \aleph_0$.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud del teorema 2.29, se sigue que $w(I^m) = m$. Además, por el teorema 1.26, se sigue que I^m es un espacio compacto. Por lo tanto, sólo resta demostrar que todo espacio compacto de peso m se puede encajar en I^m.

Sea X un espacio compacto de peso m, entonces X es normal; en particular, X es un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$. Por lo tanto, aplicando el teorema anterior, X se puede encajar en I^m. Es claro que el encaje es cerrado pues I^m en un espacio T_2, y en esta clase de espacios los conjuntos compactos son cerrados ■

Una reformulación del resultado anterior, que enunciaremos como corolario, nos proporciona una caracterización importante de los espacios compactos.

Corolario 3.5 *El conjunto de espacios compactos de peso$\leq m$, con $m \geq \aleph_0$, coincide con la colección de subconjuntos cerrados de I^m.*

Como resultado de los dos teoremas anteriores obtenemos de manera inmediata el siguiente corolario.

Corolario 3.6 *Un espacio topológico X es de Tychonoff si y sólo si se puede encajar en un espacio compacto.*

Antes de continuar con los teoremas de universalidad incluiremos un importante teorema de la Topología General, el teorema de metrización de Urysohn, ya que como un colorario al mismo obtendremos un importante resultado de universalidad.

3.1.1 Teorema de Metrización de Urysohn

Teorema 3.7 (De Metrización de Urysohn) *Para espacios topológicos T_1, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) X es regular y segundo numerable.

b) X es separable y metrizable.

c) X se puede encajar como subespacio del cubo de Hilbert $I^{\aleph_0}$.

Demostración. a) $\Rightarrow$ c) Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de X y sea

$$\mathcal{A} = \left\{(U,V) : U,V \in \mathcal{B} \text{ y } \overline{U} \subset V\right\}.$$

$\mathcal{A}$ es numerable, y como X es regular y Lindelöf, X es normal (Ver Teorema 0.15). Para cada pareja $(U,V) \in \mathcal{A}$, existe una función $f_{U,V} : X \to I$ tal que $f\left(\overline{U}\right) = 0$ y $f(X \setminus V) = 1$.

Ahora, sea $\mathbf{F} = \{f_{U,V} : U,V \in \mathcal{A}\}$. Entonces $\mathbf{F}$ es numerable y separa puntos de conjuntos cerrados de X, y como estamos trabajando en espacios T_1, también separa puntos de puntos. Entonces por el Teorema diagonal (Teorema 1.16) $\prod_{u,v\in A} f_{u,v} : X \to I^{\aleph_0}$ es un encaje.

c) $\Rightarrow$ b) $I^{\aleph_0}$ es separable y metrizable, pues es el producto numerable de espacios metrizables y separables, entonces también lo es todo subespacio de $I^{\aleph_0}$; en particular, X es separable y metrizable.

b) $\Rightarrow$ a) Como X es separable, existe $D \subset X$ tal que D es denso en X y $|D| \leq \aleph_0$. Sea $\mathcal{B} = \left\{B_{\left(x,\frac{1}{n}\right)} : x \in D\right\}$, en donde $B_{\left(x,\frac{1}{n}\right)}$ es la bola abierta con centro en x y radio $\frac{1}{n}$. El conjunto $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X y $|\mathcal{B}| \leq \aleph_0$. Por lo tanto, X es segundo numerable; y por ser metrizable, entonces X es regular ∎

Corolario 3.8 *El cubo de Hilbert $I^{\aleph_0}$ es universal para todos los espacios separables y metrizables (regulares y segundo numerables).*

3.2 El cubo de Alexandroff

Recordemos que el cubo de Alexandroff de peso m, con $m \geq \aleph_0$, es el espacio F^m , es decir es el producto $\prod_{s \in S} F_s$, en donde $F_s = \{0, 1\}$ con la topología $T = \{\phi, \{0\}, \{0,1\}\}$ y $|S| = m$.

Teorema 3.9 *El cubo de Alexandroff de peso m es universal para todos los espacios T_0 de peso $m \geq \aleph_0$.*

DEMOSTRACIÓN. Como F es un espacio T_0, entonces F^m también es un espacio T_0 (Ver Teorema 1.25). Además, sabemos que el peso de F^m es precisamente m (Ver Corolario 2.27).

Sea X un espacio topológico T_0 de peso m, y sea $\mathcal{B}$ una base de X tal que $|\mathcal{B}| = m$. Para cada $U \in \mathcal{B}$, sea $f_U : X \to F$ definida de la siguiente manera:

$$f_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in U \\ 1 & si\ x \in X \setminus U \end{cases}$$

Es fácil comprobar que esta función es continua. Sea $\mathbf{F} = \{f_U\}_{U \in \mathcal{B}}$; ahora, resta demostrar que $\mathbf{F}$ separa puntos de conjuntos cerrados.

Sea $M \subset X$, M cerrado y sea $x \in X \setminus M = V_x$. El conjunto V_x es abierto, entonces existe $U_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_x \subset V_x$. Si consideramos la función $f_{U_x} : X \to F$, tenemos que $f_{U_x}(x) = 0$ y además $0 \notin \overline{f_{U_x}(M)}$ por que $\overline{f_{U_x}(M)} = \overline{\{1\}} = \{1\}$. Por lo tanto, $\mathbf{F}$ separa puntos de conjuntos cerrados; luego como el espacio X es T_0, tenemos que $\mathbf{F}$ también separa puntos de puntos. Luego, por el teorema diagonal (Teorema 1.16), tenemos que la función

$$f = \Delta_{U \in \mathcal{B}} f_U : X \to F^m$$

es un encaje. Por lo tanto, el espacio F^m es universal para todos los espacios T_0 de peso $m \geq \aleph_0$ ■

3.3 Espacios Cero Dimensionales

Definición 3.10 *Un espacio topológico X es llamado Cero Dimensional, si X es un espacio T_1 y existe una base para la topología de X compuesta por conjuntos que son simultaneamente abiertos y cerrados en X.*

Definición 3.11 *Una cubierta de un espacio topológico X que consistente de conjuntos funcionalmente abiertos (respectivamente, funcionalmente cerrados), es llamada una cubierta funcionalmente abierta (respectivamente, funcionalmente cerrada).*

Teorema 3.12 *El producto de espacios topológicos $\prod_{s \in S} X_s$ es Cero Dimensional si y sólo si todos los espacios factores X_s son Cero Dimensionales.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow]$ Todo espacio factor X_s es homeomorfo a un subespacio de $\prod_{s \in S} X_s$ y como la propiedad de ser cero dimensional es hereditaria, tenemos que X_s es cero dimensional para toda $s \in S$.

$\Leftarrow]$Para cada $s \in S$, sea $\mathcal{B}_s$ una base para la topología de X_s compuesta por conjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados en X_s. Sea $\mathcal{B}$ la familia de los conjuntos de la forma $\prod_{s \in S} W_s$, en donde $W_s \in \mathcal{B}_s$ y $|\{s \in S : W_s \neq X_s\}| < \aleph_0$. La familia $\mathcal{B}$ es una base para la topología de $\prod_{s \in S} X_s$. Además, los conjuntos de la familia $\mathcal{B}$ son abiertos y cerrados en $\prod_{s \in S} X_s$. En efecto, sea $W = \prod_{s \in S} W_s \in \mathcal{B}$, W es cerrado por ser el producto de conjuntos cerrados (Ver corolario 1.4), y además, es abierto por que $\mathcal{B}$ es una base de $\prod_{s \in S} X_s$. Por lo tanto, $\prod_{s \in S} X_s$ es un espacio cero dimensional ■

Teorema 3.13 *El cubo de Cantor $D(2)^m$ es universal para todos los espacios Cero Dimensionales de peso $m \geq \aleph_0$.*

DEMOSTRACIÓN. Como el espacio $D(2)$ es cero dimensional, $D(2)^m$ es cero dimensional (Teorema 3.12). Además, $w(D(2)^m) = m$ (Ver Corolario 2.26). Entonces es suficiente demostrar que todo espacio cero dimensional de peso m se puede encajar en $D(2)^m$.

Sea X un espacio topológico cero dimensional de peso m y sea $\mathcal{B} = \{U_s\}_{s \in S}$ una base de X compuesta por conjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados en X y tal que $|\mathcal{B}| = m$. Para cada $s \in S$, definimos la función $f_s : X \to D(2)$ dada por

$$f_s(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in U_s \\ \\ 0 & si \quad x \in X \setminus U_s \end{cases}$$

Ahora consideremos la diagonal de la familia de funciones $\{f_s\}_{s \in S}$,

$$f = \Delta_{s \in S} f_s : X \to D(2)^m.$$

Es fácil constatar que esta función separa puntos de puntos y también puntos de conjuntos cerrados. Por lo tanto, aplicando el teorema diagonal (Teorema 1.16) se sigue que f es un encaje. Por lo tanto, $D(2)^m$ es universal para todos los espacios cero dimensionales de peso m ■

3.4 *El Erizo de m Espinas*

Ejemplo 3.14 *Sea m un número cardinal infinito, S un conjunto de cardinalidad m, y sea $I_s = I \times \{s\}$ para toda $s \in S$. Consideremos el conjunto $\bigcup_{s \in S} I_s$ y definimos en él la siguiente relación: $(x, s_1) \sim (y, s_2)$ siempre que $x = 0 = y$, o bien $x = y$ y $s_1 = s_2$. No es difícil comprobar que esta es una relación de equivalencia. La función*

$$\rho\left([(x, s_1)], [(y, s_2)]\right) = \begin{cases} |x - y| & si \quad s_1 = s_2 \\ \\ x + y & si \quad s_1 \neq s_2 \end{cases}$$

define una métrica en el conjunto de las clases de equivalencia de $\bigcup_{s \in S} I_s$ bajo la relación de equivalencia $\sim$.

A este espacio métrico se le conoce como *Erizo de m Espinas* y se denota por $J(m)$.

El peso de $J(m)$ es exactamente m. En efecto, la familia de todas las bolas de radio racional con centro en los puntos de la forma $[(x, s)]$, donde x es racional, forman una base para la topología de $J(m)$; así, $w(J(m)) \leq m$.

Ahora consideremos el subespacio A de $J(m)$ que consta de todos los puntos de la forma $[(1, s)]$; éste es un subespacio discreto de cardinalidad m. Por lo tanto, $m = w(A) \leq w(J(m)) \leq m$; la primera desigualdad es consecuencia de la monotonía de la función cardinal peso (Proposición 2.9). Por lo tanto $w(J(m)) = m$.

Observación 9 *La función $j_s : I \to J(m)$ tal que $j_s(x) = [x, s]$ para toda $s \in S$ es un encaje.*

El ejemplo anterior es importante por que a partir de este espacio obtenémos un espacio universal, como se establece en el teorema siguiente.

Teorema 3.15 *Sea $m \geq \aleph_0$. El producto $[J(m)]^{\aleph_0}$ de $\aleph_0$ copias del erizo de m espinas $J(m)$ es universal para todos los espacios metrizables de peso m.*

DEMOSTRACIÓN. El espacio $[J(m)]^{\aleph_0}$ es un espacio metrizable, por ser el producto numerable de espacios metrizables (Proposición 1.34). Además, por ser el espacio $J(m)$ un espacio no indiscreto resulta que $w\left([J(m)]^{\aleph_0}\right) = m$, ya que $m \geq \aleph_0$ (Teorema 2.29). Por lo tanto, $[J(m)]^{\aleph_0}$ es un espacio metrizable de peso m.

Sea X un espacio metrizable de peso m, entonces tiene una base σ−discreta, es decir, existe una base $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$, donde $\mathcal{B}_i = \{U_s : s \in S_i\}$ es una familia discreta (Teorema 0.25). Esta base la podemos tomar de modo que la cardinalidad de la misma sea exactamente el peso de X, es decir $|S| = m$, en donde $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que el conjunto S coincide con el utilizado previamente en la construcción de $J(m)$, (Véase el Ejemplo 3.14), pues la construcción de $J(m)$ no depende de manera esencial de la elección del conjunto S. Para cada $i \in \mathbb{N}$ y cualquier $s \in S_i$, existe una función continua $f_s : X \to I$ tal que $U_s = f^{-1}((0,1])$ (Proposición 0.26). Ahora, como la familia $\mathcal{B}_i$ es una familia discreta, la familia $\left\{\overline{U_s}\right\}_{s\in S_i}$ también lo es. Si definimos

$$f_i(x) = \begin{cases} j_s \circ f_s(x) & \text{para } x \in \overline{U_s} \\ \\ j_{s_0}(0) & \text{para } x \in X \setminus \bigcup_{s\in S_i} U_s \end{cases}$$

donde s_0 es un elemento fijo de S, entonces $f_i : X \to J(m)$ es continua (Proposición 0.27). La familia $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ separa puntos de conjuntos cerrados. Finalmente, por el teorema diagonal (Teorema 1.16), la función

$$\Delta_{i\in\mathbf{N}} f_i : X \to [J(m)]^{\aleph_0},$$

es un encaje. Por lo tanto, $[J(m)]^{\aleph_0}$ es universal para todos los espacios metrizables de peso m ■

4

Espacios de Funciones Continuas

En este capítulo se estudiarán algunas funciones cardinales sobre los espacios de funciones continuas; los cuales son una clase de subespacios densos de espacios producto de especial importancia. Particularmente se estudia con un poco más de cuidado el espacio de funciones $C_p(X)$.

A lo largo de este capítulo sólo consideraremos espacios topológicos Tychonoff. Así, espacio topológico o simplemente espacio significará espacio topológico Tychonoff, a menos que se indique lo contrario.

4.1 Espacios de Funciones

Como ya hemos mencionado en el capítulo 1, dados dos espacios topológicos X y Y, Y^X denota al conjunto de todas las funciones de X en Y. A este conjunto lo podemos dotar con la topología de Tychonoff de la siguiente manera. Para cada conjunto finito $x_1, x_2, ..., x_n$ de elementos de X y cada colección finita $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ de conjuntos abiertos de Y denotaremos por

$$\widetilde{W} = \widetilde{W}(x_1, x_2, ..., x_n; B_1, B_2, ..., B_n)$$

al conjunto $\bigcap_{i=1}^n \pi_{x_i}^{-1}(B_i)$; es decir, al conjunto de funciones $f \in Y^X$ tales que $f(x_i) \in B_i$, para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Como sabemos, la familia $\mathcal{B}$, que consta de todos los conjuntos $\widetilde{W}$, es una base para la topología de Tychonoff de Y^X.

En el caso de que el espacio Y sea precisamente el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, los conjuntos $\widetilde{W}$ se pueden tomar de la forma

$$\widetilde{W}(x_1, x_2, ..., x_n; \varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{x_2}, ..., \varepsilon_{x_n}),$$

donde $\varepsilon_{x_i} > 0$ para $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Aqui los conjuntos B_i resultan ser intervalos de la forma $(r_i - \varepsilon_i, r_i + \varepsilon_i)$ con $r_i \in \mathbb{R}$ y para facilitar la notación omitimos la r_i respectiva.

Si $\varepsilon_{x_1} = \varepsilon_{x_2} = ... = \varepsilon_{x_n} = \varepsilon$, denotaremos al abierto básico

$$\widetilde{W}(x_1, x_2, ..., x_n; \varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{x_2}, ..., \varepsilon_{x_n})$$

como

$$\widetilde{W}(x_1, x_2, ..., x_n; \varepsilon).$$

Esto pues la familia de intervalos de radio $\varepsilon > 0$ con centro en numeros racionales forman una base para la topología de $\mathbb{R}$. Entonces una base $\mathcal{B}$ para el espacio topológico $\mathbb{R}^X$ es la formada por los conjuntos de la forma $\widetilde{W}(x_1, x_2, ..., x_n; \varepsilon)$, tomando como ε un real positivo. De igual manera en el capítulo 1, hacíamos notar que no es necesario considerar a todos los conjuntos abiertos del espacio Y para formar una base para Y^X, es suficiente considerar a los elementos de una base para la topología del espacio Y y ello nos proporciona una base para Y^X.

Ahora consideremos al siguiente subconjunto de Y^X:

$$C(X,Y) = \{f \in Y^X : f \text{ es una función continua}\}$$

Si a este subconjunto lo dotamos con la topología de subespacio heredada de Y^X, obtenemos el espacio topológico $C_p(X,Y)$. A la topología heredada también se le conoce como *topología de la convergencia puntual.*

Observación 10 *La familia $\mathcal{W}$ de todos los conjuntos de la forma*

$$W(x_1, ..., x_n; B_1, ..., B_n) = \widetilde{W}(x_1, ..., x_n; B_1, ..., B_n) \bigcap C(X,Y)$$

Es una base para la topología en $C_p(X,Y)$.

Ahora, sean $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$, f una función de X en Y, $B_i \in \mathcal{B}_Y(f(x_i))$, en donde $\mathcal{B}_Y(f(x_i))$ es una base local de vecindades para $f(x_i)$ en Y, y esto para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Observación 11 *Para cada $f \in Y^X$, la familia $\mathcal{B}(f)$ de todos los conjuntos de la forma*

$$\widetilde{W}(f; x_1, ..., x_n; B_1, ..., B_n) = \{g \in Y^X : g(x_i) \in B_i,\ i = 1, ..., n\}$$

Es una base local de vecindades de $f \in Y^X$; de donde, si $f \in C(X,Y)$, la familia de los conjuntos de la forma

$$W(f; x_1, ..., x_n; B_1, ..., B_n) = \widetilde{W}(f; x_1, ..., x_n; B_1, ..., B_n) \bigcap C(X,Y)$$

Constituyen una base local de f en $C_p(X,Y)$.

Definición 4.1 *$C_p(X,Y)$ es el espacio de todas las funciones continuas de X en Y, dotado con la topología de la convergencia puntual.*

La siguiente proposición justifica el por qué de la terminología empleada.

Proposición 4.2 *Sea $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una red en $C_p(X,Y)$.*
Entonces $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge a f en $C_p(X,Y)$ si y sólo si $\{f_\lambda(x)\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $f(x)$, para cada $x\in X$.

La demostración de esta proposición es análoga a la dada para el teorema de convergencia de redes en productos topológicos (Teorema 1.21), motivo por el cual se omite.

Para el caso en que $Y=\mathbb{R}$, escribiremos simplemente $C_p(X)$ en lugar de $C_p(X,\mathbb{R})$. Así, $C_p(X)$ *es el espacio de todas las funciones continuas de X en* $\mathbb{R}$, dotado con la topología de la convergencia puntual. Este espacio será nuestro principal objeto de estudio durante el resto del capítulo.

Proposición 4.3 *Para cualquier espacio topológico X, $C_p(X)$ es denso en $\mathbb{R}^X$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $f\in\mathbb{R}^X$, $x_1, x_2, ..., x_n\in X$ y $\varepsilon>0$. Consideremos al abierto básico $\widetilde{W}=\widetilde{W}(f;x_1,x_2,...,x_n;\varepsilon)$ de $\mathbb{R}^X$. Como el espacio X es Tychonoff, existe una función continua $g:X\to\mathbb{R}$ tal que $g(x_i)=f(x_i)$, para cada $i\in\{1,2,...,n\}$. Tenemos entonces que $g\in\widetilde{W}\bigcap C_p(X)$. De donde concluimos que $C_p(X)$ es denso en $\mathbb{R}^X$ ■

Como un corolario a esta última proposición y al corolario 2.39 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.4 *Para cualquier espacio topológico X, la celularidad de $C_p(X)$ es numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue del hecho que $c(\mathbb{R}^X)\leq\aleph_0$ (Corolario 2.39) y que $C_p(X)$ es denso en $\mathbb{R}^X$, pues la celularidad no se incrementa en subespacios densos ■

Proposición 4.5 *Si Y es conexo por trayectorias, entonces $C_p(X,Y)$ es denso en Y^X.*

Demostración. Consideremos una función $g \in Y^X$ y una vecindad básica $\widetilde{W} = \widetilde{W}(g; x_1, ..., x_n; B_1, ..., B_n)$ de g en Y^X. Como Y es conexo por trayectorias, podemos hallar trayectorias

$$\sigma_i : [i, i+1] \to Y$$

tales que $\sigma_i(i) = g(x_i)$ y $\sigma_i(i+1) = g(x_{i+1})$ para $i \in \{1, ..., n-1\}$. Entonces la función $\sigma : [1, n] \to Y$ definida por $\sigma(t) = \sigma_i(t)$ si $i \leq t \leq i+1$ es una función continua. Ahora, por ser X un espacio Tychonoff, existe una función continua $f : X \to [1, n]$ tal que $f(x_i) = i$. La función $f \circ \sigma$ es un elemento de $\widetilde{W} \bigcap C_p(X, Y)$. Por lo tanto, $C_p(X, Y)$ es denso en Y^X. ■

4.2 Las funciones restricción π_Y y $f^{\#}$

Definición 4.6 *Sean X, Y y Z espacios topológicos. Si $f : X \to Z$ es una función continua, entonces f induce una función entre los espacios de funciones continuas $C_p(Z, Y)$ y $C_p(X, Y)$, a saber: la función*

$$f^{\#} : C_p(Z, Y) \to C_p(X, Y),$$

dada por: $f^{\#}(h) = h \circ f$, donde $h \in C_p(Z, Y)$.

Si consideramos el caso particular de que la función f es un encaje y el espacio Y sea conexo por trayectorias, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.7 *Si Y es un espacio conexo por trayectorias e $i : X \to Z$ es un encaje, entonces $i^{\#}(C_p(Z, Y))$ es un subespacio denso de $C_p(X, Y)$.*

Demostración. Sea

$$W = W(x_1, x_2, ..., x_n; C_1, C_2, ..., C_n)$$

un abierto canónico en $C_p(X, Y)$. Consideremos al abierto

$$\widetilde{W} = \widetilde{W}(i(x_1), i(x_2), ..., i(x_n); C_1, C_2, ..., C_n)$$

de Y^Z. Dado que $C_p(Z, Y)$ es denso en Y^Z (Ver Proposición 4.5), podemos elegir $f \in C_p(Z, Y) \bigcap \widetilde{W}$. Entonces f es una función en

$C_p(Z,Y)$ para la cual $i^{\#}(f) \in W$. Por lo tanto, $i^{\#}(C_p(Z,Y))$ es un subespacio denso de $C_p(X,Y)$ ∎

Es habitual denotar por π_X a la función $i^{\#} : C_p(Z) \to C_p(X)$ cada vez que $i : X \to Z$ sea una función inclusión; la proposición siguiente enuncia algunas propiedades de las funciones π_X, llamadas *funciones restricción.*

Proposición 4.8 *Sea X un subespacio de un espacio topológico Z. Entonces:*

(a) Si X es cerrado en Z entonces $\pi_X : C_p(Z) \to C_p(X)$ es una función abierta.

(b) Si X está $C-$encajado en Z, entonces $\pi_X : C_p(Z) \to C_p(X)$ es suprayectiva.

(c) Si X es un subespacio denso de Z, entonces $\pi_X : C_p(Z) \to C_p(X)$ es una condensación a su imagen.

DEMOSTRACIÓN. (a) Consideremos $f \in C_p(Z)$, y sea

$$W = W(f; z_1, z_2, ..., z_n; \varepsilon)$$

una vecindad básica cualquiera de f en $C_p(Z)$. No es difícil demostrar que si $\{z_1, z_2, ..., z_n\} \subset X$ entonces

$$\pi_X(W) = W(\pi(f); z_1, z_2, ..., z_n; \varepsilon) \bigcap \pi_X(C_p(Z)).$$

Supongamos entonces que existe $l \in \mathbb{N}$, con $1 \leq l < n$, tal que: $\{z_1, z_2, ..., z_l\} \subset X$ y $\{z_{l+1}, z_{l+2}, ..., z_n\} \subset Z \backslash X$. En este caso tenemos que

$$\pi_X(W) = W(\pi_X(f); z_1, z_2, ..., z_l; \varepsilon) \bigcap \pi_X(C_p(Z))$$

En efecto, si g es un elemento de $\pi_X(W)$ entonces existe $h \in W$ tal que $h|_X = \pi_X(h) = g$. Ahora dado que Z es un espacio Tychonoff, y $X \subset Z$ es cerrado y $\{z_{l+1}, z_{l+2}, ..., z_n\} \subset Z \setminus X$, podemos elegir una función continua $\psi : Z \to \mathbb{R}$ de tal manera que: $\psi(X) \subseteq \{0\}$ y $\psi(z_j) = f(z_j) - h(z_j)$, para cada $j = l+1, l+2, ..., n$. Entonces $\psi + h$ es una función en $C_p(Z)$ que tiene las siguientes dos propiedades:

$$\pi_X(\psi + h) \in W(\pi_X(f); z_1, z_2, ..., z_l; \varepsilon) \text{ y } \pi_X(\psi + h) = g$$

Así entonces,

$$g \in W(\pi_X(f); z_1, z_2, ..., z_l; \varepsilon) \bigcap \pi_X(C_p(Z)).$$

Por lo tanto,

$$\pi_X(W) \subset W(\pi_X(f); z_1, z_2, ..., z_l; \varepsilon) \bigcap \pi_X(C_p(Z)).$$

Ahora sea $h \in W(\pi_X(f); z_1, z_2, ..., z_l; \varepsilon) \bigcap \pi_X(C_p(Z))$, entonces $h \in \pi_X(C_p(Z))$ y $h \in W(\pi_X(f); z_1, z_2, ..., z_l; \varepsilon)$ de esto último sabemos que

$$|\pi_X \circ f(z_i) - h(z_i)| < \varepsilon$$

para toda $i \in \{1, 2, ..., l\}$, luego es claro entonces que $h \in \pi_X(W)$ pues $\{z_{l+1}, z_{l+2}, ..., z_n\} \subset Z \setminus X$.

(b) Sea $f \in C_p(X)$. Como X está $C-$ encajado en Z, f se puede extender a una funcion continua $f^+ : Z \to \mathbb{R}$. Entonces $\pi_X(f^+) = f^+|_X = f$. Por lo tanto π_X es suprayectiva.

(c) Es suficiente demostrar que la función π_X es inyectiva. Sean f_1 y $f_2 \in Z$, tales que $f_1 \neq f_2$. Elijamos $z_0 \in Z$ tal que $f_1(z_0) \neq f_2(z_0)$; entonces el conjunto

$$G = f_1^{-1}((f_1(z_0) - r,\ f_1(z_0) + r)) \bigcap f_2^{-1}((f_2(z_0) - r,\ f_2(z_0) + r)),$$

donde $r = \frac{|f_1(z_0) - f_2(z_0)|}{2}$, es un subconjunto abierto y no vacío de Z. Dado que X es denso en Z, podemos elegir $x_0 \in X \bigcap G$. Por la forma en que se tomo el conjunto G, necesariamente $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$; de donde, $\pi_X(f_1) \neq \pi_X(f_2)$ ■

Observación 12 *Notese que si $id_X : X \to X$ es la función identidad sobre el conjunto X, $f : X \to Z$ y $g : Z \to W$ son funciones continuas entre espacios topológicos. Entonces $(id_X)^{\#} = id_{Y^X}$ y $(g \circ f)^{\#} = f^{\#} \circ g^{\#}$.*

Una propiedad importante de la función $f^{\#}$, inducida por la función continua f es la enunciada en la siguiente proposición.

Proposición 4.9 *Si Y es un espacio topológico, y $f : X \to Z$ es una función continua, entonces $f^{\#} : Y^Z \to Y^X$ es una función continua.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\phi \in Y^Z$, y $W = W(x_1, x_2, ..., x_n; B_1, B_2, ..., B_n)$ es un abierto básico en Y^X que contiene a $f^{\#}(\phi)$, entonces

$$\widehat{W} = W(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n); B_1, B_2, ..., B_n)$$

es un abierto en Y^Z que contiene a ϕ y tal que $f^{\#}\left(\widehat{W}\right) \subset W$. Por lo tanto, $f^{\#}$ es continua ■

Proposición 4.10 *Si $f : X \to Z$ es una función suprayectiva entre espacios topológicos, entonces $f^{\#} : Y^Z \to Y^X$ es un encaje cerrado.*

Demostración. Claramente, la sobreyectividad de la función f implica la inyectividad de la función $f^{\#}$. Por la proposición 4.9, es suficiente demostrar que la función $f^{\#}$ es abierta a su imagen y que $f^{\#}\left(Y^Z\right)$ es un subespacio cerrado de Y^X.

Sea $W = W(z_1, z_2, ..., z_n; B_1, B_2, ..., B_n)$ es un abierto básico en Y^Z. Sea $\psi \in f^{\#}(W)$. Elijamos $x_i \in f^{-1}(z_i)$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Entonces

$$\psi \in W(x_1, x_2, ..., x_n; B_1, B_2, ..., B_n) \bigcap f^{\#}\left(Y^Z\right) \subset f^{\#}(W)$$

Ahora, dado que para toda x_1, $x_2 \in X$

$$f^{\#}\left(Y^Z\right) = \left\{\psi \in Y^X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \psi(x_1) = \psi(x_2)\right\},$$

si $\psi \in Y^X \setminus f^{\#}\left(Y^Z\right)$ entonces existen x_1 y x_2 en X tales que $f(x_1) = f(x_2)$ y $\psi(x_1) \neq \psi(x_2)$. Sean U_1 y U_2 abiertos ajenos en Y que contienen a $\psi(x_1)$ y a $\psi(x_2)$ respectivamente. Entonces

$$\psi \in W(x_1, x_2; U_1, U_2) \subset Y^X \setminus f^{\#}\left(Y^Z\right).$$

De donde, $f^{\#}\left(Y^Z\right)$ es cerrado en Y^X ■

4.3 La Evaluación Canónica y el Encaje Canónico de X en $C_p(C_p(X))$

Definición 4.11 *Sean X un conjunto, Y un espacio topológico y $\mathcal{G}$ una subfamilia de Y^X. La evaluación de la familia $\mathcal{G}$ en el punto $x \in X$ es la función*

$$e_x : \mathcal{G} \to Y$$

dada por: $e_x(g) = g(x)$, en donde $g \in \mathcal{G}$.

Definición 4.12 *La función $\psi_{\mathcal{G}} : X \to \mathbb{R}^{\mathcal{G}}$ definida por medio de $\psi_{\mathcal{G}}(x) = e_x$, donde $x \in X$, es llamada evaluación canónica asociada a la familia $\mathcal{G}$.*

Observación 13 *Si dotamos a $\mathcal{G}$ con la topología de subespacio con respecto a Y^X, cada función e_x resulta ser una función continua. De esto último se sigue que, sí $\mathcal{G}$ es un subespacio de Y^X entonces*

$$\psi_{\mathcal{G}}(X) = \{e_x : x \in X\} \subset C_p(\mathcal{G}).$$

Proposición 4.13 *Para cada espacio X y cada subespacio $\mathcal{G}$ de $C_p(X)$, la función $\psi_{\mathcal{G}} : X \to C_p(\mathcal{G})$ es una función continua.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in X$ arbitrario. Sea $W = W(e_x; f_1, ..., f_n; \varepsilon)$ una vecindad básica de $\psi_{\mathcal{G}}(x) = e_x$ en $C_p(\mathcal{G})$. Como cada f_i es una función continua de X en $\mathbb{R}$,

$$\psi_{\mathcal{G}}^{-1}(W) = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(f_i(x) - \varepsilon, f_i(x) + \varepsilon,)$$

es un abierto que contiene a x. De donde se obtiene la continuidad de $\psi_{\mathcal{G}}$ ■

Observación 14 *De acuerdo con las definiciones 1.14(1) y 1.14(2), sabemos que toda familia regular separa puntos en espacios T_1 y que la propiedad de ser Tychonoff de un espacio X implica la regularidad de las familias de funciones continuas $C(X)$ y*

$$C^*(X) = \{f \in C(X) : f(X) \subset \mathbb{R} \text{ es acotado}\}.$$

Proposición 4.14 *Para cada conjunto X y cada subfamilia $\mathcal{G}$ de $\mathbb{R}^X$, la familia $\psi_{\mathcal{G}}(X) \subset \mathbb{R}^{\mathcal{G}}$ es una familia que separa puntos de $\mathcal{G}$.*

DEMOSTRACIÓN. Si g_1 y g_2 son dos puntos distintos de $\mathcal{G}$, entonces existe $x_0 \in X$ tal que $g_1(x_0) \neq g_2(x_0)$. Entonces la función $e_{x_0} : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ es tal que $e_{x_0}(g_1) \neq e_{x_0}(g_2)$. Por lo tanto, la familia $\psi_{\mathcal{G}}(X)$ separa puntos ■

Proposición 4.15 *Sea $\mathcal{G}$ un subespacio de $\mathbb{R}^X$. Si $\mathcal{G}$ es una familia de funciones continuas que separa puntos de X, entonces la función*

$$\psi_{\mathcal{G}} : X \to C_p(\mathcal{G})$$

es una condensación a su imagen.

DEMOSTRACIÓN. Para establecer esta proposición es suficiente demostrar que la función $\psi_{\mathcal{G}}$ es inyectiva. Para ello, sean x_1 y x_2 dos puntos diferentes de X. Dado que $\mathcal{G}$ es una familia que separa puntos del espacio X, existe $g \in \mathcal{G}$ tal que $g(x_1) \neq g(x_2)$. De donde, $\psi_{\mathcal{G}}(x_1) \neq \psi_{\mathcal{G}}(x_2)$. Por lo tanto, $\psi_{\mathcal{G}}$ es inyectiva ∎

Proposición 4.16 *Sea $\mathcal{G}$ un subespacio de $\mathbb{R}^X$. Si $\mathcal{G}$ es una familia regular, entonces*

$$\psi_{\mathcal{G}} : X \to C_p(\mathcal{G})$$

es un encaje.

DEMOSTRACIÓN. Dado que $\mathcal{G}$ separa puntos, pues es regular,

$$\psi_{\mathcal{G}} : X \to C_p(\mathcal{G})$$

resulta ser continua y biyectiva a su imagen. De donde, es suficiente demostrar que

$$\psi_{\mathcal{G}}^{-1} : \psi_{\mathcal{G}}(X) \to X$$

es continua.

Sea $y \in \psi_{\mathcal{G}}(X)$. Sea U un abierto en X que contiene a $x = \psi_{\mathcal{G}}^{-1}(y)$. Dado que $x \notin X \backslash U$, existe $g \in \mathcal{G}$ tal que $g(x) \notin \overline{g(X \backslash U)}$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $(g(x) - \varepsilon, g(x) + \varepsilon) \bigcap g(X \backslash U) = \phi$. Entonces $W(y; f; \varepsilon) \bigcap \psi_{\mathcal{G}}(X)$ es una vecindad de y en $\psi_{\mathcal{G}}(X)$ para la cual $\psi_{\mathcal{G}}^{-1}(W(y; f; \varepsilon) \bigcap \psi_{\mathcal{G}}(X)) \subset U$. De esto último se sigue la continuidad de $\psi_{\mathcal{G}}^{-1}$ ∎

El siguiente corolario muestra que todo espacio topológico X es homeomorfo a un conjunto de funciones continuas cuyo dominio de definición resulta ser el espacio $C_p(X)$.

Corolario 4.17 *Sea X un espacio de Tychonoff. Entonces X es homeomorfo a un subespacio del espacio de funciones $C_p(C_p(X))$ y a un subespacio del espacio de funciones $C_p\left(C_p^*(X)\right)$.*

La demostración es inmediata de la proposición anterior.

4.4 Estructuras algebraicas de Y^X y $C(X)$

Gracias a la estructura algebraica de $\mathbb{R}$, es posible dotar a $\mathbb{R}^X$ de una suma, producto y una multiplicación por escalares.

Definición 4.18 *Sean f y $g \in \mathbb{R}^X$. Para cada $x \in X$ y cada $r \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x) \\ (fg)(x) &= f(x)\cdot g(x) \\ (rf)(x) &= r\cdot f(x) \end{aligned}$$

Con estas operaciones $\mathbb{R}^X$ resulta ser un álgebra sobre el campo de los números reales. Más aún, puesto que $\mathbb{R}^X$ es un álgebra y las operaciones en $\mathbb{R}^X$ se han definido de manera puntual, resulta que al aplicar dichas operaciones a funciones continuas, obtenemos de nueva cuenta funciones continuas; es decir, $C(X)$ es una subálgebra de $\mathbb{R}^X$. Es claro que tanto $\mathbb{R}^X$ como $C(X)$ tienen también estructura de grupo, anillo o espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Las operaciones así definidas tienen otra relación con la topología de $\mathbb{R}^X$, son funciones continuas. Así podemos concluir que con las operaciones definidas anteriormente (Definición 4.18), $\mathbb{R}^X$ *es un álgebra topológica*. En particular, $C_p(X)$ *es un álgebra topológica* sobre $\mathbb{R}$.

Observación 15 *En todos los razonamientos anteriores no fue fundamental el conjunto de los números reales $(\mathbb{R})$, para elaborarlos, únicamente ocupamos la estructura algebraica de $\mathbb{R}$, así como el hecho de que las operaciones algebraicas son funciones continuas; por ello se tienen generalizaciones obvias cuando se considera cualquier álgebra, grupo, anillo o espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{R}$. Por lo tanto, si Y es un álgebra sobre $\mathbb{R}$ (respectivamente grupo, anillo, espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{R}$) se puede dar a Y^X estructura de álgebra (respectivamente grupo, anillo, espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$).*

Si tenemos una familia de álgebras topológicas $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$, entonces el producto $Y = \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$ también tiene una estructura de álgebra topológica, si definimos las operaciones en Y coordenada a coordenada. Por ejemplo, la suma de dos puntos $x = (x_\alpha)$ y $y = (y_\alpha)$ sera el punto $x + y = (x_\alpha + y_\alpha)$; análogamente con las demas operaciones. La topología de Y sera la topología producto.

Por otra parte, diremos que dos álgebras topológicas sobre $\mathbb{R}$ (resp. grupos, anillos, espacios vectoriales topológicos) son *topológicamente isomorfas* si existe un homeomorfismo $\dot{H} : Y \to Z$ que preserva la estrutura algebraica correspondiente.

Proposición 4.19 *Sea $Y = \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$, entonces:*

a) El espacio $C_p(X,Y)$ es homeomorfo al espacio $\prod_{\alpha\in A} C_p(X,Y_\alpha)$.

b) Sí además cada Y_α es un álgebra topológica sobre $\mathbb{R}$, entonces $C_p(X,Y)$ es topológicamente isomorfa a $\prod_{\alpha\in A} C_p(X,Y_\alpha)$.

Demostración. (*a*) Sea

$$H : \left(\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha\right)^X \to \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha^X$$

la función que a cada $f \in \left(\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha\right)^X$ le asigna $H(f) \in \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha^X$, la cual es la función definida de la siguiente manera

$$H(f)(\alpha)(x) = f(x)(\alpha).$$

Esta función es una biyección, su inversa es la función

$$H^{-1} : \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha^X \to \left(\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha\right)^X$$

definida de la siguiente manera

$$H^{-1}((f_\alpha)) = \Delta_{\alpha\in A} f_\alpha$$

es decir la función que asigna a cada elemento $(f_\alpha) \in \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha^X$ la función diagonal inducida por (f_α), la función H^{-1} es continua. Para demostrar que la función H es continua sea $g = \pi_\beta \circ H(f)$ y sea

$$\widetilde{W} = \widetilde{W}(g; x_1, x_2, ..., x_n; B_1, B_2, ..., B_n)$$

una vecindad local de g. Si consideramos la vecindad $\widetilde{W}$ de f definida de la siguiente manera

$$\widetilde{W}\left(f; x_1, x_2, ..., x_n; P_\beta^{-1}(B_1), P_\beta^{-1}(B_2), ..., P_\beta^{-1}(B_n)\right)$$

en donde P_β es la $\beta-$ésima proyección del producto $\left(\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha\right)^X$, es fácil comprobar que $H\left(\widetilde{W}\right) \subset \widetilde{W}$, y esto último demuestra la continuidad de H. Por lo tanto la función H es un homeomorfismo. Además,

$$H\left(C_p\left(X,\prod_{\alpha\in A}Y_\alpha\right)\right)=\prod_{\alpha\in A}C_p\left(X,Y_\alpha\right).$$

De donde, $C_p(X,Y)$ es homeomorfo a $\prod_{\alpha\in A}C_p(X,Y_\alpha)$.

(b) Es suficiente demostrar que la función H, definida en (a), también preserva las operaciones algebraicas. Consideremos funciones cualesquiera f,g y $h\in C_p\left(X,\prod_{\alpha\in A}Y_\alpha\right)$ y un escalar arbitrario $r\in\mathbb{R}$. Sean $\alpha\in A$ y $x\in X$ elementos cualesquiera, entonces

$$\begin{aligned}
H(rf+gh)(\alpha)(x) &= (rf+gh)(\alpha)(x)\\
&= ((rf)(x)+(gh)(x))(\alpha)\\
&= (rf(x)+g(x)h(x))(\alpha)\\
&= rf(x)(\alpha)+g(x)(\alpha)h(x)(\alpha)\\
&= rH(f)(\alpha)(x)+H(g)(\alpha)(x)H(h)(\alpha)(x).
\end{aligned}$$

De donde, $H(rf+gh)=rH(f)+H(g)H(h)$. Por lo tanto H preserva las operaciones algebraicas y ello completa la demostración

■

Proposición 4.20 *Sea $X=\Sigma_{\alpha\in A}X_\alpha$ la suma libre topológica de los espacios X_α, y sea Y un espacio cualquiera. Entonces:*

a) El espacio $C_p(X,Y)$ es homeomorfo al espacio $\prod_{\alpha\in A}C_p(X_\alpha,Y)$.

b) Si además Y es un álgebra topológica, entonces $C_p(X,Y)$ es topológicamente isomorfa a $\prod_{\alpha\in A}C_p(X_\alpha,Y)$.

DEMOSTRACIÓN. (a) Para cada $\alpha\in A$, denotemos por i_α a la función inclusión de X_α en X, y sea $h_\alpha: Y^X\to Y^{X_\alpha}$ tal que $h_\alpha(f)=f\circ i_\alpha$. Las funciones h_α son continuas. En efecto, sean $f\in Y^X$, $g=h_\alpha(f)$ y

$$\widetilde{W}=\widetilde{W}(g;x_1,x_2,...,x_n;C_1,C_2,...,C_n)$$

una vecindad local de g en Y^{X_α}. Entonces $\widetilde{W}$ es también una vecindad local de f en Y^X, además se cumple que $h_\alpha\left(\widetilde{W}\right)=\widetilde{W}$, de donde obtenemos la continuidad de la función h_α.

Consideremos ahora la función $H: Y^X\to\prod_{\alpha\in A}Y^{X_\alpha}$, donde

$$H(f)(\alpha)(x)=f\circ i_\alpha(x)$$

Para cada $f \in Y^X$. Esta función es una biyección, y puesto que $\pi_\alpha \circ H = h_\alpha$, para cada $\alpha \in A$, concluimos que la función H es continua.

Por otra parte, sea

$$\widetilde{W} = \widetilde{W}(f; x_1, x_2, ..., x_n; B_1, B_2, ..., B_n)$$

un abierto básico canónico en Y^X. Entonces, si denotamos por $\widetilde{W}_{\alpha_i}$ a los conjuntos $\widetilde{W}(x_i; B_i) \subset Y^{X_{\alpha_i}}$, donde $x_i \in X_{\alpha_i}$, se tiene que

$$H\left(\widetilde{W}\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}\left(\widetilde{W}_{\alpha_i}\right).$$

En efecto, si $f \in \widetilde{W}$, y si $1 \leq i \leq n$, entonces

$$\pi_{\alpha_i}(H(f))(x_i) = f \circ i_{\alpha_i}(x_i) = f(x_i) \in B_i,$$

de donde $H(f) \in \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}\left(\widetilde{W}_{\alpha_i}\right)$. Ahora si $g \in \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}\left(\widetilde{W}_{\alpha_i}\right)$, entonces, dado que H es suprayectiva, existe $f \in Y^X$ tal que $H(f) = g$. De aquí se sigue que

$$f(x_i) = f \circ i_{\alpha_i}(x_i) = H(f)(\alpha_i)(x_i) = f(\alpha_i)(x_i) \in B_i;$$

es decir, $f \in \widetilde{W}$. Por lo tanto, $H\left(\widetilde{W}\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}\left(\widetilde{W}_{\alpha_i}\right)$. De donde, H es una función abierta.

Finalmente, dado que las inclusiones son funciones continuas se tiene que $H(C_p(X,Y)) \subset \prod_{\alpha \in A} C_p(X_\alpha, Y)$; y si

$$g \in \prod_{\alpha \in A} C_p(X_\alpha, Y)$$

la sobreyectividad de la función H, permite argumentar la existencia de una función $f \in Y^X$ tal que $H(f) = g$. Pero como para esta función se tiene que: $f \circ i_{\alpha_i} = \pi_\alpha \circ g$, para cada $\alpha \in A$, f es continua. De donde $\prod_{\alpha \in A} C_p(X_\alpha, Y) \subset H(C_p(X,Y))$. Por lo tanto,

$$\prod_{\alpha \in A} C_p(X_\alpha, Y) = H(C_p(X,Y))$$

y por tanto concluimos que la función H es un homeomorfismo.

(b) Es suficiente demostrar que la función H, definida en (a), también preserva las operaciones algebraicas. Consideremos funciones cualesquiera f,g y $h \in C_p\left(X,\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha\right)$ y un escalar arbitrario $r \in \mathbb{R}$. Sean $\alpha \in A$ y $x \in X$ elementos cualesquiera, entonces

$$\begin{aligned} H\left(rf+gh\right)\left(\alpha\right)\left(x\right) &= \left(rf+gh\right)i_\alpha\left(x\right) \\ &= \left(rf\right)i_\alpha\left(x\right)+\left(gh\right)i_\alpha\left(x\right) \\ &= r\left(f\circ i_\alpha\left(x\right)\right)+\left(g\circ i_\alpha\left(x\right)\right)\left(h\circ i_\alpha\left(x\right)\right) \\ &= rH\left(f\right)\left(\alpha\right)\left(x\right)+H\left(g\right)\left(\alpha\right)\left(x\right)H\left(h\right)\left(\alpha\right)\left(x\right). \end{aligned}$$

De donde, $H\left(rf+gh\right) = rH\left(f\right)+H\left(g\right)H\left(h\right)$. Por lo tanto H preserva las operaciones algebraicas y ello completa la demostración ■

4.5 Funciones Cardinales en $C_p\left(X\right)$

Antes de calcular funciones cardinales en el espacio $C_p\left(X\right)$, vamos a considerar algunos hechos con respecto a las bases tanto locales como para la topología de $C_p\left(X,Y\right)$. En primer lugar mostraremos que el espacio Y puede ser considerado como subespacio cerrado de $C_p\left(X,Y\right)$.

Proposición 4.21 *Sea $\xi_Y : Y \to C_p\left(X,Y\right)$ la función que a cada punto $y\in Y$ le asigna la función constante $k_y : X \to Y$ con valor y. Entonces ξ_Y es un encaje cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que la función $\xi_Y : Y \to C_p\left(X,Y\right)$ es una función inyectiva. Sea $y\in Y$, y

$$W = W\left(x_1,x_2,...,x_n;B_1,B_2,...,B_n\right)$$

un abierto básico en $C_p\left(X,Y\right)$ tal que $\xi_Y\left(y\right)\in W$. Entonces $y = k_y\left(x_i\right)\in B_i$, para cada $i=1,2,...,n$. Sea $B=\bigcap_{i=1}^{n} B_i$; entonces $y\in B$ y $\xi_Y\left(B\right)\subset W$. De donde, ξ_Y es continua en $y\in Y$. Es fácil constatar que para $B\subset Y$ abierto

$$\xi_Y\left(B\right)=\bigcup\left\{W\left(x,B\right):x\in X\right\}\bigcap\xi_Y\left(Y\right),$$

de donde, resulta que ξ_Y es una función abierta.

Ahora si $f\in C_p\left(X,Y\right)\setminus\xi_Y\left(Y\right)$, entonces existen x_1 y x_2 en X, $x_1\neq x_2$, tales que $f\left(x_1\right)\neq f\left(x_2\right)$. Sean U_1 y U_2 abiertos ajenos en Y que satisfacen $f\left(x_i\right)\in U_i$, para $i=1,2$. Entonces $f\in W\left(x_1,x_2;U_1,U_2\right)\subset C_p\left(X,Y\right)\setminus\xi_Y\left(Y\right)$ ■

Observación 16 *Si P es una propiedad hereditaria con respecto a los subconjuntos cerrados y Y no satisface P, entonces $C_p(X,Y)$ no satisface P. Por ejemplo, $C_p(X)$ no es numerablemente compacto para cualquier espacio X.*

Como consecuencia de la proposición anterior y de la monotonía de las funciones cardinales peso y carácter resulta que para cualesquier par de espacios X y Y se cumple:

$$w(Y) \leq w(C_p(X,Y)) \text{ y } \chi(Y) \leq \chi(C_p(X,Y)).$$

Otro hecho importante lo proporciona el siguiente resultado.

Proposición 4.22 *Sean X, Y y Z espacios topológicos. Si Y está encajado en Z, entonces $C_p(X,Y)$ es homeomorfo a un subespacio de $C_p(X,Z)$. Además, $C_p(X,Y)$ es un subespacio cerrado en $C_p(X,Z)$ si Y está encajado de forma cerrada en el espacio Z.*

Demostración. Sea $i : Y \to Z$ un encaje, y sea $\xi : C_p(X,Y) \to C_p(X,Z)$ la función dada por $\xi(f) = i \circ f$. Es claro que ξ es una función bien definida y que la inyectividad de la función i implica la de ξ. Sea $h \in C_p(X,Y)$, y sea

$$W = W(x_1, x_2, ..., x_n; C_1, C_2, ..., C_n)$$

un abierto básico en $C_p(X,Z)$ tal que $\xi(f) \in W$. Para cada $i = 1, 2, ..., n$, sea $B_i = i^{-1}(C_i)$. Entonces

$$f \in W(x_1, x_2, ..., x_n; B_1, B_2, ..., B_n)$$

y además

$$\xi(W(x_1, x_2, ..., x_n; B_1, B_2, ..., B_n)) \subset W(x_1, x_2, ..., x_n; C_1, C_2, ..., C_n).$$

De donde tenemos que ξ es una función continua.

Ahora para demostrar que es una función abierta a su imagen, sea

$$W(x_1, x_2, ..., x_n; B_1, B_2, ..., B_n)$$

un abierto en $C_p(X,Y)$, como $i : Y \to Z$ es un encaje, entonces tenemos que $i(B_j)$ con $j \in \{1, 2, ..., n\}$ es un conjunto abierto en $i(Y)$. Por lo tanto, existen abiertos $C_1, C_2, ..., C_n$ en la topología de Z, tales que $i(B_i) = C_i \bigcap i(Y)$, el conjunto

$$\widetilde{W} = W(x_1, x_2, ..., x_n; C_1, C_2, ..., C_n)$$

es un abierto en $C_p(X,Z)$. Además se cumple

$$\xi(W(x_1,x_2,...,x_n;B_1,B_2,...,B_n)) = \widetilde{W}\bigcap i(Y).$$

De donde obtenemos que ξ es una función abierta.

Si ahora suponemos que i es un encaje cerrado. Sea

$$h \in C_p(X,Z) \setminus \xi(C_p(X,Y)).$$

Entonces existe $x_0 \in X$ tal que $h(x_0) \in Z \setminus i(Y)$; sea $C \subset Z$ un abierto tal que $h(x_0) \in C \subset Z \setminus i(Y)$. Entonces

$$h \in W(x_0;C) \subset C_p(X,Z) \setminus \xi(C_p(X,Y)).$$

De donde ξ resulta ser un encaje cerrado ■

Observación 17 *Como resultado de las observaciones 10 y 11 tenemos las siguientes desigualdades para las funciones cardinales peso y carácter en el espacio $C_p(X,Y)$.*

$$w(C_p(X,Y)) \leq |X| \cdot w(Y) \text{ y } \chi(C_p(X,Y)) \leq |X| \cdot \chi(Y)$$

Es claro que se da la igualdad cuando $Y = \mathbb{R}$. Es decir, en este caso, el peso y el carácter coinciden con la cardinalidad del espacio dominio X, (aquí estamos suponiendo que $|X| \geq \aleph_0$, pues si $n = |X| < \aleph_0$, entonces $\mathbb{R}^X = \mathbb{R}^n$ y el espacio $\mathbb{R}^n$ es primero numerable, segundo numerable, separable y metrizable).

Teorema 4.23 *Para cualquier espacio topológico infinito X,*

$$|X| = \chi(C_p(X)) = w(C_p(X))$$

DEMOSTRACIÓN. Dado que $\chi(C_p(X)) \leq w(C_p(X)) \leq w(\mathbb{R}^X) \leq |X| \cdot w(\mathbb{R})$, es suficiente demostrar que $|X| \leq \chi(C_p(X))$. Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que $\chi(C_p(X)) < |X|$. Sea $\mathcal{G}$ una base local de la función constante cero, $\mathbf{0}$, en $C_p(X)$ de cardinalidad estrictamente menor que $|X|$. Podemos suponer que los elementos de $\mathcal{G}$ son de la forma $W(\mathbf{0};x_1,x_2,...,x_n;\varepsilon)$, con $x_1,x_2,...,x_n \in X$ y $\varepsilon > 0$. Para cada $W(\mathbf{0};x_1,x_2,...,x_n;\varepsilon) \in \mathcal{G}$, sean

$$K(W) = \{x_1,x_2,...,x_n\} \text{ y } Y = \bigcup\{K(W) : W \in \mathcal{G}\}$$

Entonces $|Y| < |X|$; sea $x^* \in X \setminus Y$. Consideremos ahora la vecindad $W(\mathbf{0};x^*;1)$ de $\mathbf{0}$ en $C_p(X)$. Sea $V = W(\mathbf{0};x_1,x_2,...,x_n;\varepsilon)$ un elemento arbitrario en $\mathcal{G}$. Como $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset Y$, $x^* \neq x_i$ para cada $i = 1, 2, ..., n$, y dado que X es un espacio de Tychonoff, podemos elegir una función $g \in C_p(X)$ tal que: $g(x_i) = 0$, para cada $i = 1, 2, ..., n$, y $g(x^*) = 1$. Entonces se tiene que $g \in V \backslash W(0; x^*; 1)$. Por lo tanto, $V \not\subseteq W(0; x^*; 1)$, pero esto último contradice el hecho de que $\mathcal{G}$ es una base local de vecindades para la función $\mathbf{0}$. De donde, $|X| \leq \chi(C_p(X))$. Por lo tanto

$$|X| = \chi(C_p(X)) = w(C_p(X)) \blacksquare$$

Corolario 4.24 *Para cualquier espacio topológico X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $|X| \leq \aleph_0$.

(b) $C_p(X)$ *es un espacio segundo numerable.*

(c) $C_p(X)$ *es un espacio primero numerable.*

(d) $C_p(X)$ *es un espacio metrizable.*

DEMOSTRACIÓN. $(a) \Rightarrow (d)$ Como $\mathbb{R}$ es un espacio metrizable y $|X| \leq \aleph_0$, entonces $\mathbb{R}^X$ es un producto a lo más numerable de espacios metrizables, por lo tanto, es metrizable. Como la metrizabilidad es una propiedad hereditaria, tenemos que $C_p(X)$ es metrizable.

$(d) \Rightarrow (c)$ Todo espacio metrizable es primero numerable.

$(c) \Rightarrow (b)$ y $(b) \Rightarrow (a)$ son inmediatas a partir del teorema anterior

$\blacksquare$

Ejemplo 4.25 *Como una consecuencia inmediata del corolario anterior, tenemos que los espacios topológicos $C_p(\mathbb{N})$ y $C_p(\mathbb{Q})$ son metrizables y separables, mientras que $C_p(\mathbb{R})$ no es metrizable.*

Definición 4.26 *Una trayectoria no trivial en un espacio X es una función continua $t : [0, 1] \to X$ tal que $t(0) \neq t(1)$.*

En un espacio Hausdorff la existencia de una trayectoria no trivial implica la existencia de un subconjunto homeomorfo a $\mathbb{R}$ $[W, pag.222]$.

Proposición 4.27 *Sea X un espacio topológico cualquiera, y sea Y un espacio topológico que contiene una trayectoria no trivial, entonces:*

$$w(C_p(X, Y)) = |X| \cdot w(Y) \ \ y \ \chi(C_p(X, Y)) = |X| \cdot \chi(Y)$$

Demostración. Dado que Y contiene una trayectoria no trivial, $C_p(X)$ es homeomorfo a un subespacio del espacio $C_p(X,Y)$, la monotonía de las funciones cardinales peso y carácter implica que

$$|X| = w(C_p(X)) \leq w(C_p(X,Y))$$

y

$$|X| = \chi(C_p(X)) \leq \chi(C_p(X,Y))$$

Así mismo, dado que Y es homeomorfo a un subespacio de $C_p(X,Y)$,

$$w(Y) \leq w(C_p(X,Y)) \text{ y } \chi(Y) \leq \chi(C_p(X,Y)).$$

Por lo tanto,

$$w(C_p(X,Y)) \geq |X| \cdot w(Y) \text{ y } \chi(C_p(X,Y)) \geq |X| \cdot \chi(Y).$$

Como $w(C_p(X,Y)) \leq |X| \cdot w(Y)$ y $\chi(C_p(X,Y)) \leq |X| \cdot \chi(Y)$ (Observación 16). Concluimos que

$$\begin{aligned} w(C_p(X,Y)) &= |X| \cdot w(Y) \text{ y} \\ \chi(C_p(X,Y)) &= |X| \cdot \chi(Y) \ \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 4.28 *Sean X y Y espacios topológicos tales que Y contiene una trayectoria no trivial, entonces:*

(a) $C_p(X,Y)$ es primero numerable si y sólo si $|X| \leq \aleph_0$ y Y es primero numerable.

(b) $C_p(X,Y)$ es segundo numerable si y sólo si $|X| \leq \aleph_0$ y Y es segundo numerable.

Demostración. $(a) \Rightarrow]$ Es consecuencia inmediata del teorema anterior.

$\Leftarrow]$ Es claro pues primero numerable es una propiedad $\aleph_0-$ multiplicativa (Corolario 2.28), y hereditaria.

$(b) \Rightarrow]$ Es consecuencia inmediata del teorema anterior.

$\Leftarrow]$ Es claro pues segundo numerable es una propiedad $\aleph_0-$ multiplicativa (Corolario 2.28), y hereditaria. $\blacksquare$

Tambien existe un resultado similar al del Corolario 4.24 para espacios topológicos X y Z.

Corolario 4.29 *Para cualesquiera espacios topológicos X y Z, las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) $|X| \cdot |Z| \leq \aleph_0$.
(b) $C_p(X, C_p(Z))$ *es segundo numerable.*
(c) $C_p(X, C_p(Z))$ *es primero numerable.*
(d) $C_p(X, C_p(Z))$ *es metrizable.*

La demostración de este corolario es muy similar a la del corolario 4.24, motivo por el cual se omite.

Ahora se tratará el comportamiento de las funciones cardinales peso red, pseudocarácter y el i-peso en $C_p(X)$.

Proposición 4.30 *Para cualquier espacio topológico* X, *se cumple*

$$nw(X) = nw(C_p(X))$$

Demostración. Primero demostraremos que $nw(C_p(X)) \leq nw(X)$. Para ello, sean $\mathcal{R}$ una red en X tal que $nw(X) = |\mathcal{R}|$, y $\mathcal{B}$ una base numerable de $\mathbb{R}$. Para cada par de colecciones finitas $R_1, ..., R_k \in \mathcal{R}$ y $U_1, ..., U_k \in \mathcal{B}$ consideramos a los conjuntos

$$W(R_1, ..., R_k; U_1, ..., U_k) = \{f \in C(X) : f(R_i) \subset U_i, i = 1, ..., k\}$$

y sea

$$\mathcal{G} = \{W(R_1, ..., R_k; U_1, ..., U_k) : U_i \in \mathcal{B} \text{ y } R_i \in \mathcal{R},\ i = 1, ..., k\}.$$

La familia $\mathcal{G}$ cumple con $|\mathcal{G}| \leq |\mathcal{R}|$. Además la familia $\mathcal{G}$ es una red en $C_p(X)$. En efecto, sean $f \in C_p(X)$ y $W(f; x_1, x_2, ..., x_k; \varepsilon)$ una vecindad canónica de f en $C_p(X)$, aquí suponemos además que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Ahora, elijamos $U_1, U_2, ..., U_k \in \mathcal{B}$ tales que

$$f(x_i) \in U_i \subset (f(x_i) - \varepsilon, f(x_i) + \varepsilon) \text{ para } i = 1, 2, ..., k.$$

Como la función f es continua, existen $R_1, R_2, ..., R_k \in \mathcal{R}$ tales que $x_i \in R_i$ y $f(R_i) \subset U_i$ para $i = 1, 2, ..., k$. Entonces

$$f \in W(R_1, ..., R_k; U_1, ..., U_k) \subset W(f; x_1, x_2, ..., x_k; \varepsilon).$$

En efecto, $f \in W(R_1, ..., R_k; U_1, ..., U_k)$ ya que $f(R_i) \subset U_i$ para cada $i = 1, 2, ..., k$. Ahora, sea $g \in W(R_1, ..., R_k; U_1, ..., U_k)$. Como $x_i \in R_i$, se tiene que $g(x_i) \in U_i$, entonces $|f(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon$, y esto se cumple para toda $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Por lo tanto, $g \in W(f; x_1, x_2, ..., x_k; \varepsilon)$. De donde, $\mathcal{G}$ es una red en $C_p(X)$. Por lo tanto, $nw(C_p(X)) \leq nw(X)$.

Para demostrar que $nw(X) \leq nw(C_p(X))$, recordemos la inclusión de X en $C_p(C_p(X))$ y la monotonía del peso red. Ahora, aplicando la desigualdad recien probada, es decir, $nw(C_p(X)) \leq nw(X)$ tenemos que

$$nw(X) \leq nw(C_p(C_p(X))) \leq nw(C_p(X)).$$

Por lo tanto, concluimos que $nw(X) = nw(C_p(X))$ ■

Teorema 4.31 *Para cualquier espacio topológico X se cumple*

$$d(X) = iw(C_p(X)) = \psi(C_p(X)).$$

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente demostrar que

$$iw(C_p(X)) \leq d(X) \leq \psi(C_p(X)),$$

ya que $iw(C_p(X)) \geq \psi(C_p(X))$. Sean $\tau = d(X)$ y $Y \subset X = \overline{Y}$ tal que $|Y| = \tau$. Entonces

$$w(C_p(Y)) \leq w\left(\mathbb{R}^Y\right) = \tau = d(X).$$

La función restricción $\pi_Y : C_p(X) \to Z \subset C_p(Y)$ es una condensación de $C_p(X)$ en $Z = \pi_Y(C_p(X)) \subset C_p(Y)$, de aquí obtenemos que:

$$w(Z) \leq w(C_p(Y)) \leq \tau.$$

Entonces $iw(C_p(X)) \leq w(Z) \leq \tau$.

Ahora mostraremos que $d(X) \leq \psi(C_p(X))$. Sea $f \in C_p(X)$, $f \equiv 0$ y fijemos una familia $\mathcal{G}$ de vecindades canónicas de f en $C_p(X)$ tal que $\bigcap \mathcal{G} = \{f\}$, es decir, $\mathcal{G}$ es una pseudobase que consta de abiertos canónicos. Para cada $W = W(f; x_1, x_2, ..., x_k; \varepsilon) \in \mathcal{G}$, sea $K(W) = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ y consideremos al subespacio $Y = \bigcup\{K(W) : W \in \mathcal{G}\}$, $Y \subset X$. Claramente $|Y| \leq |\mathcal{G}|$ y además $\overline{Y} = X$. En efecto, supongamos lo contrario. Entonces existe $x^* \in X \setminus \overline{Y}$ y $g \in C_p(X)$ tal que $g(x^*) = 1$ y $g|_{\overline{Y}} \equiv 0$. Entonces $g \in \bigcap \mathcal{G}$ y $g \neq f$, pero esto último contradice el hecho de que $\mathcal{G}$ es una pseudobase de f. Por lo tanto, Y es denso en X y $d(X) \leq \psi(C_p(X))$. De todo lo anterior tenemos que

$$iw(C_p(X)) \leq d(X) \leq \psi(C_p(X)) \leq iw(C_p(X)).$$

De donde concluimos que

$$iw(C_p(X)) = d(X) = \psi(C_p(X)) \blacksquare$$

Antes de proseguir con resultados de funciones cardinales en $C_p(X)$ demostraremos un lema que involucra a la función $f^{\#}$, introducida en la sección 4.2

Lema 4.32 *Si $f : X \to Y$ es una condensación, entonces $f^{\#} : C_p(Y) \to C_p(X)$ es un encaje y $f^{\#}(C_p(Y))$ es denso en $C_p(X)$.*

Demostración. Para demostrar que $f^{\#}$ es un encaje es suficiente demostrar que es abierta. Sea $W = W(y_1, y_2, ..., y_n; B_1, B_2, ..., B_n)$ un abierto canónico en $C_p(X)$. Como f es biyección, para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$ existe $x_i \in X$ tal que $f(x_i) = y_i$. Entonces

$$f^{\#}(W) = W(x_1, x_2, ..., x_n; B_1, B_2, ..., B_n) \bigcap f^{\#}(C_p(Y)).$$

En efecto, sea $g \in W$ y como $g(y_i) \in B_i$, para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$

$$g \circ f(x_i) = g(f(x_i)) = g(y_i) \in B_i.$$

Tenemos que $f^{\#}(g) \in W(x_1, x_2, ..., x_n; B_1, B_2, ..., B_n)$. Por lo tanto,

$$f^{\#}(W) \subset W(x_1, x_2, ..., x_n; B_1, B_2, ..., B_n) \bigcap f^{\#}(C_p(Y)).$$

Ahora, sea $h \in W(x_1, x_2, ..., x_n; B_1, B_2, ..., B_n) \bigcap f^{\#}(C_p(Y))$. Como $h \in f^{\#}(C_p(Y))$, existe $g \in C_p(Y)$ tal que $h = g \circ f$. Del hecho que $h \in W(x_1, x_2, ..., x_n; B_1, B_2, ..., B_n)$ tenemos que $h(x_i) \in B_i$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$. De donde,

$$g(y_i) = g(f(x_i)) = g \circ f(x_i) = h(x_i) \in B_i,$$

es decir, $g \in W$. Por lo tanto, $h \in f^{\#}(W)$. Entonces,

$$f^{\#}(W) \supset W(x_1, x_2, ..., x_n; B_1, B_2, ..., B_n) \bigcap f^{\#}(C_p(Y)).$$

Para demostrar que $f^{\#}(C_p(Y))$ es denso en $C_p(X)$ tomemos $g \in C_p(X)$ y sean $W(g; x_1, x_2, ..., x_n; B_1, B_2, ..., B_n)$ una vecindad básica de g en $C_p(X)$, $y_i = f(x_i)$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Como f es biyectiva, existe $h \in C_p(Y)$ tal que $h(y_i) = g(x_i)$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces $f^{\#}(h) \in W(g; x_1, x_2, ..., x_n; B_1, B_2, ..., B_n)$. Por lo tanto, $f^{\#}(C_p(Y))$ es denso en $C_p(X)$ $\blacksquare$

Teorema 4.33 *Para cualquier espacio topológico X se cumple que*

$$iw(X) = d(C_p(X))$$

DEMOSTRACIÓN. Como X se puede encajar en $C_p(C_p(X))$, entonces

$$iw(X) \leq iw(C_p(C_p(X))).$$

Por el teorema anterior $iw(C_p(C_p(X))) \leq d(C_p(X))$.

Ahora mostraremos que $d(C_p(X)) \leq iw(X)$. Para ello, sea $f : X \to Y$ una condensación tal que $w(Y) = iw(X)$. Por el Teorema 4.30,

$$nw(C_p(X)) \leq nw(Y) \leq w(Y)$$

Entonces $nw\left(f^{\#}(C_p(Y))\right) \leq w(Y)$. Como f es una condensación. por el lema 4.32, sabemos que $C_p(Y)$ es homeomorfo a $f^{\#}(C_p(Y))$. Por lo tanto, $nw\left(f^{\#}(C_p(Y))\right) = nw(C_p(Y))$. Nuevamente por el lema 4.32 $\overline{f^{\#}(C_p(Y))} = C_p(X)$. de donde

$$d(C_p(X)) \leq d\left(f^{\#}(C_p(Y))\right) \leq nw\left(f^{\#}(C_p(Y))\right) = nw(C_p(Y))$$

Finalmente por la elección del espacio Y y que el peso domina al peso de red,

$$nw(C_p(Y)) = nw(Y) \leq w(Y) = iw(X)$$

de donde $d(C_p(X)) \leq iw(X)$ y ello completa la demostración ■

Definición 4.34 *Dos espacios topológicos X y Y son t-equivalentes si $C_p(X)$ es homeomorfo a $C_p(Y)$.*

Como consecuencia de los teoremas 4.23, 4.30, 4.31, 4.33, obtenemos el último resultado presentado en este trabajo.

Corolario 4.35 *Si X y Y son dos espacios t-equivalentes. Entonces*

a) $nw(X) = nw(Y)$
b) $d(X) = d(Y)$
c) $iw(X) = iw(Y)$
d) $|X| = |Y|$

Índice Analítico