59
2 ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
"ACATLAN"

EL FORMALISMO DEL METODO DE VARIACION DE PARAMETROS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
LICENCIADA EN MATEMATICAS APLICADAS Y COMPUTACION
P R E S E N T A :
BLANCA DE LA ROSA MIRA

ASESOR: FIS. MANUEL VALADEZ RODRIGUEZ

SANTA CRUZ ACATLAN, EDO. DE MEXICO ENERO DE 1998

257579

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Iniciar un proyecto es cosa relativamente fácil,
basta con avivar un poco la lumbre del
entusiasmo.

Perseverar en él hasta el éxito,
es cosa diferente, eso ya es algo que requiere
continuidad y esfuerzo.

Comenzar, está al alcance de todos,
continuar, distingue a los hombres de carácter.

Por eso la médula de todo proyecto,
desde el punto de vista de su realización práctica,
es la perseverancia,
virtud que consiste en llevar las cosas hasta el final.

Es preciso, pues, ser perseverante,
formarse un carácter no solo intrépido, sino
persistente, paciente e inquebrantable.

Los más grandes proyectos
son siempre de quienes se preparan,
de quienes luchan y de quienes perseveran.

Roger Patron Lujan

Si tienes un título universitario, puedes estar seguro de una cosa ...

¡ Qué tienes un título universitario !

George Bernard Shaw

Agradecimientos

Siempre que una persona llega a una meta, suele acordarse de todos aquellos que directa o indirectamente la apoyaron en el camino hacia ella. Por eso hoy yo agradezco a todos los que a mi me apoyaron y les dedico este trabajo.

A *Dios* por todo.

A *mis padres Antonio y Angelina,*
por su cariño, su comprensión, su confianza, su apoyo incondicional pero sobretodo por su constante motivación a seguir adelante.

A *mis hermanas Angelina, Guadalupe, Esthela y Verónica,*
por su amistad, su apoyo en todo momento y por compartir su vida conmigo.

A *mi hermano Norberto,*
por ser para mí más que un hermano, por su confianza y porque ojalá algún día llegue él a esta meta.

A *mi pequeño Carlitos,*
porque a pesar del poco tiempo que hemos compartido juntos, ha sabido llenar mi vida con su inocencia y su alegría.

A *Juan Carlos,*
por estar siempre conmigo y por quererme tanto.

Al *Profesor Manuel Valadez Rodríguez,*
por asesorar este trabajo, por lo mucho que siempre me ha ayudado y por ser un gran amigo.

Al *Maestro Víctor Palencia Gómez,*
por el apoyo que en todo momento me ha brindado y por ser una gran persona a quien admiro y respeto.

A ***todos mis amigos***
(perdón por no nombrarlos pero no quisiera omitir a ninguno),
por su amistad, su apoyo y por dedicarme parte de su tiempo.

A ***todos mis compañeros del Centro de Cómputo,***
porque juntos hemos aprendido muchas cosas y hemos compartido innumerables experiencias.

A ***todos lo profesores de la ENEP Acatlán,***
por contribuir de alguna manera en mi formación profesional, en especial al profesor Héctor Argüelles Tejeda quien me ha brindado su amistad.

A *la UNAM,*
por haberme dado la oportunidad de llegar a esta meta y el orgullo de pertenecer a la máxima casa de estudios.

Gracias

Blanca de la Rosa Mira

EL FORMALISMO DEL MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS

ÍNDICE

CAPÍTULO III.- DESARROLLO GENERAL DEL MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS

INTRODUCCIÓN

En diversas disciplinas de estudio existen muchos problemas de relativa importancia que requieren, para su estudio, de la elaboración de un modelo matemático que los represente. Algunos de estos modelos están constituidos por ecuaciones diferenciales.

En el campo de las matemáticas aplicadas, las ecuaciones diferenciales juegan un papel importante. En sus principios aparecieron representando problemas mecánicos y geométricos, posteriormente se extendió su campo de aplicación a todas las ramas de la física y en la actualidad es común encontrarlas aplicadas en disciplinas tan diversas como lo son la biología, la química, la sociología, la economía y la fisiología.

Si dado un problema, lo podemos representar por medio de una ecuación diferencial, es lógico pensar en los métodos que se pueden emplear para resolver dicha ecuación. Existen diversos procedimientos que nos permiten hallar la función o las funciones desconocidas que satisfacen una ecuación diferencial dada, sin embargo, cada uno de ellos es aplicable solo a una cierta clase de ecuaciones diferenciales.

El objetivo de este trabajo es desarrollar el formalismo del método de variación de parámetros para resolver ecuaciones diferenciales, utilizando procedimientos matriciales.

En el capítulo 1 se presentan los conceptos y la teoría básica de las ecuaciones diferenciales. Se exponen algunos métodos de solución, entre ellos, el de reducción de orden, el de operadores diferenciales, el de coeficientes indeterminados, el de transformada de Laplace y el de serie de potencias. Al final de este capítulo, se habla acerca del espacio de soluciones, se definen los conceptos de dependencia e independencia lineal y se menciona el sistema fundamental de soluciones de una ecuación diferencial homogénea y su relación con el wronskiano.

En el capítulo 2 se da una introducción a los sistemas de ecuaciones lineales y a su representación matricial. Gran parte de este capítulo se dedica a los métodos de solución de dichos sistemas en donde se hace referencia a la aplicación de operaciones elementales de fila que aunque no se requiere para el desarrollo de este trabajo, se expone por presentar un documento más completo debido a que dicha aplicación es uno de los procesos más poderosos para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Se finaliza este capítulo exponiendo la teoría de los determinantes de matrices e introduciendo el concepto de matriz inversible.

En el capítulo 3 se presenta la fundamentación teórica del método de variación de parámetros como un método general para resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas empleando recursos matriciales. Se comienza el capítulo recordando que la solución general de una ecuación diferencial lineal no homogénea de orden n está constituida por la solución general de la ecuación homogénea asociada con ella y una solución particular de la ecuación dada. Posteriormente, al hablar del método mencionado, se dice que para poder emplearlo se requiere conocer el sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada con la ecuación no homogénea correspondiente, y se reconoce que esto representa una limitante para el método, sin embargo, si se conoce dicho sistema el método puede ser empleado para hallar la solución particular de una ecuación no homogénea dada. Para encontrar dicha solución, se parte del hecho de que la combinación lineal de las n soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea correspondiente, forman otra solución de la misma ecuación. El método toma esa otra solución y cambia las constantes por funciones de tal manera que esta nueva combinación sea una solución que satisfaga la ecuación no homogénea en cuestión. Para determinar las funciones que forman parte de la solución mencionada, se requiere de n condiciones. La ecuación diferencial no homogénea impone solo una de ellas, por lo tanto, la elección de las otras n-1 condiciones es arbitraria. Con las n condiciones requeridas, se forma un sistema de n ecuaciones con n incógnitas que se representa en forma matricial. Tales incógnitas son las funciones que se tienen que determinar. Finalmente, se expone como se resuelve dicho sistema y se dan algunos ejemplos utilizando el método.

Capítulo 1
ECUACIONES DIFERENCIALES

En este capítulo se introduce la terminología básica de las ecuaciones diferenciales. Se exponen brevemente los tipos de ecuaciones diferenciales que existen y se dan algunos ejemplos. Se habla también de algunos métodos de solución y del espacio de soluciones, mencionando el sistema fundamental de soluciones, el wronskiano y los conceptos de dependencia e independencia lineal.

1.1 Definiciones

Las ecuaciones diferenciales son parte importante de las matemáticas ya que, además de resolver problemas puramente matemáticos, proporcionan también un medio eficaz para resolver numerosas cuestiones prácticas de la ciencia en general. Por ejemplo en las ciencias físicas y sociales hay una gran cantidad de problemas importantes que pueden resolverse si se plantean en términos matemáticos a través de una ecuación diferencial.

Se entiende por *ecuación diferencial*, cualquier relación en la que intervienen una variable dependiente y sus derivadas con respecto a una o más variables independientes. En general, una ecuación diferencial es aquella que contiene derivadas de una función desconocida.

Un ejemplo clásico de ecuación diferencial es la que representa la segunda Ley de Newton:

$$m\frac{d^2u(t)}{dt^2} = F\left[t, u(t), \frac{du(t)}{dt}\right],$$

para la posición $u(t)$ de una partícula de masa m, sobre la que actúa una fuerza F, la cual puede ser función del tiempo t, de la posición $u(t)$ y de la velocidad $du(t)/dt$.

La *solución* de una ecuación diferencial de dos variables es una relación, sin derivadas, entre las variables que satisface dicha ecuación. Por ejemplo, dada la ecuación diferencial $y'=f(x,y)$, se le llama solución a cualquier función $y=\phi(x)$, tal que exista ϕ' y satisfaga la igualdad $\phi'(x) = f[x,\phi(x)]$. Si f depende sólo de x, $y'=f(x)$, entonces ϕ es una antiderivada de f y se escribe

$$y = \phi(x) = \int^{x} f(t)dt + c,$$

donde c es una constante arbitraria.

En el estudio de las ecuaciones diferenciales, al evaluar una antiderivada o una integral indefinida se usa una constante de integración. De esta manera al resolver una ecuación diferencial de la forma $F(x,y,y')=0$, se obtendrá una familia de funciones $G(x,y,c)=0$ que contendrá un parámetro arbitrario c, de tal manera que cada miembro de dicha familia será una solución de la ecuación diferencial. En el caso de una ecuación diferencial del tipo $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$, se espera obtener una familia n-paramétrica de soluciones $G(x, y, c_1, \ldots, c_n)=0$.

Si todas las soluciones de $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$ en un intervalo I pueden obtenerse de $G(x, y, c_1, \ldots, c_n)=0$ mediante valores específicos de los c_i, con $i = 1, \ldots, n$, entonces se dice que la familia n-paramétrica es la *solución general* de la ecuación diferencial.

1. 2 Tipos de Ecuaciones

Las ecuaciones diferenciales se pueden clasificar de acuerdo con algunas de sus características. Una clasificación que se basa en si la función desconocida depende de una o de varias variables independientes, las divide en ordinarias, parciales y mixtas. Una ecuación es *ordinaria* si sólo contiene derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, ejemplos de este tipo de ecuaciones son:

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = e^{-x^2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} - 5y = 1,$$

en las cuales la variable dependiente es y y la variable independiente es x.

Si la ecuación diferencial contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se llama *ecuación diferencial parcial.* Por ejemplo, las igualdades

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0,$$

$$a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

corresponden a ecuaciones diferenciales parciales y se trata, respectivamente, de las ecuaciones de Laplace y de onda.

Cuando la ecuación diferencial contiene tanto derivadas ordinarias como derivadas parciales, se le denomina *ecuación diferencial mixta.* Un ejemplo de este tipo lo representa la ecuación de Euler[1]

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x} = 0,$$

donde $y_x = dy/dx$.

Una segunda clasificación se puede hacer de acuerdo al orden de la ecuación. El *orden* de una ecuación diferencial es igual al de la derivada de mayor orden que interviene en ella. Las igualdades

[1] Leonhard Euler, matemático suizo (1707-1783)

$$x^2\frac{dy}{dx}+y=0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-4y=x,$$

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}-3x\frac{dy}{dx}+2y=e^x,$$

son ejemplos de ecuaciones diferenciales de primero, segundo y tercer orden, respectivamente.

Una ecuación diferencial ordinaria general de orden n es una expresión de la forma

$$(1.1) \qquad F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\ldots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

y simboliza una relación entre la variable independiente x y los valores de la función y y sus primeras n derivadas $y', y'', \ldots, y^{(n)}$. En el caso de la ecuación anterior, su solución sería una función $y=\phi(x)$, tal que existan $\phi^{(n)}, \phi^{(n-1)}, \ldots, \phi'$ y satisfagan la igualdad $\phi^{(n)}(x)=f\,[x, \phi(x), \ldots, \phi^{(n-1)}(x)]$. En este trabajo se supondrá que siempre es posible despejar la derivada de más alto orden en una ecuación diferencial ordinaria, esto es, supondremos que la igualdad (1.1) siempre puede escribirse como

$$y^{(n)}=f\left(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots\ ,\ y^{(n-1)}\right).$$

Otra clasificación importante, se basa en la linealidad de la ecuación. Se dice que la ecuación diferencial $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$ es *lineal*, si F es una función lineal en las variables $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Las siguientes igualdades corresponden a ecuaciones de este tipo.

$$y''+y=0,$$

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0,$$

$$x^3y''' - x^2y'' + 3xy + 5y = e^x.$$

La expresión general para una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden n es

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \tag{1.2}$$

donde los coeficientes a_i con i=1,..., n y g son funciones dadas que dependen sólo de la variable independiente x y a_n no es la función idénticamente nula.

Si dada una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden, la función y y sus derivadas no aparecen como en (1.2), decimos que dicha ecuación es *no lineal*. Un problema físico que da origen al planteamiento de una ecuación diferencial no lineal es el correspondiente al movimiento del péndulo físico. Tal movimiento queda descrito por la ecuación

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} sen\theta = 0 .$$

Otro ejemplo del mismo tipo, es el siguiente

$$y''' + 2e^x y'' + yy' = x^4;$$

donde la no linealidad se debe al término yy'.

En cuanto a las soluciones de una ecuación diferencial, es importante hacer notar que la solución general difiere para ecuaciones lineales y no lineales. Por ejemplo, para una ecuación lineal de primer orden, se puede obtener una solución que contenga una constante arbitraria, de la cual pueden obtenerse todas las soluciones posibles, con sólo especificar diferentes valores para dicha constante. En las ecuaciones no lineales puede que esto no suceda, pues aún cuando se encuentre una solución que contenga una constante arbitraria, se puede dar el caso de que existan otras soluciones que no se puedan obtener asignando un valor a dicha constante. Por lo tanto, sólo usaremos el término solución general cuando se trate de ecuaciones lineales.

1.3 Métodos de Solución

En la primera parte de esta sección, centraremos nuestra atención en los métodos de solución de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\ldots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0. \tag{1.3}$$

En la mayoría de los casos es relativamente fácil comprobar que una función dada $y = y(x)$ es solución de dicha ecuación. Para ello basta con calcular las derivadas de $y(x)$ y mostrar que al sustituir ésta y sus derivadas en (1.3), la igualdad se satisface *idénticamente*. El problema se presenta cuando se parte de la ecuación diferencial y se debe hallar su solución.

Salvo para las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, lamentablemente no existe un método analítico general para resolver todo tipo de ecuaciones. Se dispone de varios métodos de solución, sin embargo cada uno de ellos, en general, solo es aplicable a una cierta clase de ecuaciones de la forma (1.3). Cabe señalar que para aquellas ecuaciones lineales que no pueden resolverse por integrales simples, existe el método de solución por series de potencia que se citará más adelante.

Ecuaciones Diferenciales Lineales

Para resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$(1.4) \qquad y' + p(x)y = g(x),$$

suponemos que existe una función $\mu = \mu(x)$, llamada *factor integrante*, tal que

$$(1.5) \qquad \mu(y' + py) = (\mu y)'.$$

Si este es el caso, entonces, de (1.4) nos queda

$$(\mu y)' = \mu g,$$

igualdad que puede ser integrada de inmediato para obtener la solución general de la ecuación diferencial (1.4) como

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int^x \mu(s)g(s)ds \; + \; c\right].$$

Por otra parte, de la expresión (1.5) se sigue que el factor integrante μ está dado por

$$\mu(x) = \exp\left[\int^x p(t)dt\right].$$

Ecuaciones Diferenciales de Variables Separables

Consideremos ahora la siguiente ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y). \tag{1.6}$$

Esta clase de ecuaciones son llamadas *ecuaciones separables*, o *ecuaciones de variables separables*. Aquí, el miembro de la derecha está formado por un producto de dos funciones, cada una de las cuales depende de sólo una de las variables involucradas en la ecuación. De esta forma, podemos separar las variables reescribiendo la igualdad (1.6) como sigue

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$$

y entonces resolverla por lo métodos tradicionales de integración. Se obtiene

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Estas ecuaciones diferenciales se resuelven de manera muy sencilla ya que el encontrar su solución se reduce a un problema de integración, aunque en muchas ocasiones las integrales que se obtienen son difíciles ó a veces imposibles de resolver analíticamente.

Observemos que la ecuación

$$y\,dx + x\,dy = 0$$

es separable y que, además, es equivalente a la diferencial del producto de x y y. Es decir,

$$y\,dx + x\,dy = d(xy) = 0.$$

Integrando se obtiene la solución implícita $xy = c$.

Ecuaciones Diferenciales Exactas

Sabemos que si $z = f(x,y)$ es una función con derivadas parciales de primer orden continuas en una región R del plano xy, entonces su *diferencial total* en R es

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

La expresión

$$M(x\,,y)\,dx + N(x\,,y)\,dy,$$

representa una *diferencial exacta* en una región R del plano xy, si ésta corresponde a la diferencial total de alguna función $f(x, y)$. Una ecuación diferencial

(1.7) $$M(x\,,y)\,dx + N(x\,,y)\,dy = 0$$

se dice que es *exacta* si la expresión del primer miembro es una diferencial exacta. Esto es, si existe una función $f(x, y)$ tal que

(1.8) $$M = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{y} \quad N = \frac{\partial f}{\partial y},$$

de modo que la igualdad (1.7) se pueda expresar como

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0,$$

o sea $df=0$. En tal caso, la solución de la ecuación queda como $f(x,y)=c$.

Si la función f tiene segundas derivadas parciales continuas en R, de las igualdades (1.8) se llega a que

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},$$

y de aquí que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},$$

Por lo tanto, una condición necesaria y suficiente para que la ecuación (1.7) sea exacta es que

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Para resolver una ecuación exacta primero debemos suponer que existe una función $f(x,y)$ tal que $\partial f/\partial x=M(x,y)$. De esta manera será posible encontrar f integrando $M(x,y)$ con respecto a x y manteniendo y constante; esto es,

$$f(x,y)=\int^{x}M(\xi,y)d\xi+g(y) \tag{1.9}$$

donde la constante de integración vendría siendo la función $g(y)$, hasta el momento desconocida. Ahora para encontrar $g(y)$, derivamos (1.9) con respecto a y y usamos el hecho de que $\partial f / \partial y = N(x , y)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(\xi, y)d\xi + g'(y) \\ &= N(x , y).\end{aligned}$$

De aquí resulta

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(\xi,y)d\xi . \tag{1.10}$$

Finalmente, se debe de integrar (1.10) con respecto a y y sustituir el resultado en (1.9). La solución de la ecuación estaría dada por $f(x, y) = c$.

Factores de Integración

Existen algunas ecuaciones que aunque no son exactas, pueden llegar a serlo cuando se multiplican por una función apropiada. Por ejemplo, si la ecuación

$$M(x , y) + N(x , y)y' = 0 \tag{1.11}$$

no es exacta, se busca una función μ (la cual puede depender tanto de x como de y) tal que al multiplicarla por la ecuación anterior nos dé una ecuación exacta, es decir, tal que la igualdad

$$\mu \, [\, M(x , y) + N(x , y)y'] = 0$$

resulte ser una ecuación de este tipo. Si este es el caso, se debe cumplir que

$$(1.12) \qquad \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

A la función μ, cuando existe, se le llama *factor integrante* de la ecuación diferencial y, gracias a este factor, la ecuación (1.11) se puede resolver por el método de las ecuaciones exactas y su solución satisfará la ecuación original. Nuevamente, dicha solución estará dada implícitamente en la forma $f(x, y) = c$.

En general, aún cuando el factor integrante μ exista, podría no ser fácil encontrarlo. De la igualdad (1.12) vemos que la función μ satisface la ecuación diferencial parcial

$$N\mu_x - M\mu_y + (N_x - M_y)\mu = 0,$$

que podría, en un momento dado, ser más complicada de resolver que la ecuación diferencial original.

Los dos casos más simples en que pueden obtenerse factores integrantes son cuando μ es función sólo de una de las variables ya sea de x ó de y. Si suponemos que μ es función solamente de x, tenemos que

$$(\mu M)_y = \mu M_y \quad \text{y} \quad (\mu N)_x = \mu N_x + N\frac{d\mu}{dx},$$

y dado que $(\mu M)_y = (\mu N)_x$, encontramos

$$(1.13) \qquad \frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu.$$

Obviamente, en esta expresión , el cociente del lado derecho debe ser función únicamente de x. Si es así, entonces la hipótesis de que el factor integrante μ depende sólo de x es correcta y $\mu(x)$ puede encontrarse resolviendo la ecuación diferencial de primer orden *lineal* (1.13). De la misma forma, en ocasiones puede encontrarse un factor integrante que sólo depende de y.

Ecuaciones Diferenciales con Coeficientes Homogéneos

Como se mencionó anteriormente, las dos clases de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden que pueden resolverse directamente por medio de integrales, son aquellas *en las que las variables se separan* y en las que las ecuaciones son exactas o se pueden llevar a una ecuación exacta. Existe otra clase de ecuaciones que requiere de un cambio de variable para llegar, de manera relativamente sencilla, a su solución; una clase importante de ecuaciones que hacen uso de esta técnica son las llamadas ecuaciones diferenciales homogéneas.

Una función f evaluada en (x, y) se dice que es *homogénea de grado n*, si

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y),$$

es decir, si al sustituir en la función x y y por tx y ty, sale de la función resultante como factor común t^n, y los términos restantes conforman la función original. Por ejemplo,

$$f(x,y) = x - 3\sqrt{xy} + 5y, \qquad g(x,y) = x^2 + 3xy + y^2 \quad \text{y} \quad h(x,y) = \sqrt{x+y}$$

son funciones homogéneas de grado 1, grado 2 y grado 1/2, respectivamente. En muchos casos podemos reconocer si una función es homogénea con solo examinar el grado de cada término.

Se dice que una ecuación diferencial de la forma

(1.14) $$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es *homogénea*, si M y N son funciones homogéneas del mismo grado.

El método para resolver ecuaciones homogéneas, se basa en transformar éstas en ecuaciones de variables separables por medio del cambio de variable $v=y/x$, sea cual sea la función $f(x,y)$ en cuestión.

En las ecuaciones homogéneas, la función f no depende de x y y en forma separada, sino de las razones y/x ó x/y. Por lo tanto, dichas ecuaciones son de la forma

(1.15) $$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Con el cambio de variable mencionado, la igualdad (1.15) se transforma en

(1.16) $$\frac{dy}{dx}=F(v).$$

Considerando v como la nueva variable dependiente, debemos sustituir dy/dx en la ecuación (1.16) por una expresión equivalente en términos de v. Tomando en cuenta que $v=y/x$ tenemos que $y=xv$, de manera que, derivando esta expresión, obtenemos

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v,$$

con lo que (1.16) queda como

$$x\frac{dv}{dx}+v=F(v).$$

Lo importante de esta transformación es que las variables se pueden separar independientemente de la función F; quedando

$$\frac{dx}{x}=\frac{dv}{F(v)-v}. \tag{1.17}$$

Para obtener la solución de la ecuación original, basta con resolver esta ecuación para v y después reemplazar v en el resultado por y/x.

Hasta aquí se han mencionado clases especiales de ecuaciones diferenciales, todas ellas de primer orden, que se resuelven en términos de funciones elementales. Ahora, se hablará de *ecuaciones de orden n*, las cuales, en general, para resolverlas se debe recurrir a otro tipo de procedimientos.

Ecuaciones Diferenciales de Orden *n*

La *ecuación diferencial* general de orden n es una función de la forma

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0. \tag{1.18}$$

Debido a que una ecuación de orden n implica la *n-ésima* derivada de la función desconocida, en principio podría pensarse en que se requiere de integrar n veces para determinar tal función, por lo que cabría esperar que las soluciones que se encuentren para (1.18) contengan n constantes arbitrarias. De hecho, en ocasiones se emplea el término de integral de una ecuación diferencial, para referirse a una solución de ésta. Como ejemplo, podemos dar la ecuación de segundo orden

$$y'' = g(x),$$

cuya solución esta dada por

$$y = \phi(x) = c_1 + c_2 x + \int^{x}\left[\int^{t} g(s)ds\right]dt,$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Un *problema de valor inicial* para una ecuación diferencial lineal de orden n es

(1.19) $$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

con

(1.20) $$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \cdots \quad , \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

para el cual se busca una solución en algún intervalo I que contenga al punto $x = x_0$. Las restricciones dadas en (1.20) reciben el nombre de *condiciones iniciales*.

Dado que, por lo general no es posible encontrar una solución de la ecuación (1.19) a simple vista, primero debemos asegurarnos de que dicha ecuación realmente tenga una solución. El siguiente teorema da las condiciones suficientes para la existencia de una solución única de (1.19).

Teorema. Sean $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, ... , $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en un intervalo abierto I y sea $a_n(x) \neq 0$ para toda x contenida en el intervalo. Si x_0 es cualquier punto en I y si $y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}$ son números arbitrarios, la *ecuación* (1.19) *tiene una y sólo una* solución $y(x)$ sobre el intervalo completo tal que

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y_0', \quad \cdots \quad , \quad y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

Bajo estos supuestos, en cualquier punto x_0 de I se pueden prescribir los valores de $y(x)$, $y'(x), \ldots , y^{(n-1)}(x)$, y existirá una solución que tome esos valores en el punto dado.

A pesar de que el teorema anterior asegura la existencia de una solución de (1.19), puede suceder que no sea posible expresarla en *forma analítica*.

Otro tipo de problema consiste en resolver una ecuación diferencial de orden n en la cual la variable dependiente y (o sus derivadas) se especifica en dos puntos diferentes. Un problema como

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

con $y(a)=y_0, \quad y(b)=y_1$

se le conoce con el nombre de *problema de valores de frontera.*

Por ejemplo, para el siguiente problema

$$x^2y''-2xy'+2y=6 \qquad \text{con} \qquad y(1)=0, \qquad y(2)=3,$$

se busca una función definida en un intervalo que contenga $x=1$ y $x=2$, que satisfaga la ecuación diferencial y cuya gráfica pase por los puntos (1,0) y (2,3). Los problemas de valores de frontera se encuentran a menudo en las aplicaciones de ecuaciones diferenciales parciales.

Ecuaciones Diferenciales Homogéneas

Consideremos nuevamente la ecuación *(1.19). Si el término $g(x)$* es igual a 0, dicha ecuación se reduce a la *ecuación homogénea*

$$(1.21) \qquad a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0.$$

Si $g(x)$ no es la función idénticamente nula, se dice que (1.19) es una *ecuación no homogénea*. Nótese que en este contexto, el uso que se le da a la palabra homogénea es diferente al que se le dio anteriormente en esta misma sección.

Las siguientes igualdades

$$2y'' + 3y' - 5y = 0$$

$$x^3y''' + 2xy'' + 5y' + 6y = e^x$$

son ejemplos, respectivamente, de una ecuación diferencial lineal de segundo orden, homogénea y de una de tercer orden, no homogénea.

Es importante hacer notar que una *ecuación diferencial* homogénea siempre tiene la solución trivial $y=0$ y que para resolver una ecuación no homogénea, tenemos que resolver primero la ecuación homogénea asociada. Posteriormente, en la sección 1.4 se hablará acerca del sistema fundamental de soluciones de las ecuaciones homogéneas, por ahora sólo se dará un teorema relacionado con la solución de (1.21).

Teorema. Sean y_1, y_2, ... , y_n soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n (1.21) en un intervalo abierto I. Entonces la combinación lineal

(1.22) $$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x),$$

en donde c_i, $i = 1, \dots , n$ son constantes arbitrarias, también es una solución de la ecuación (1.21) en el intervalo especificado.

La combinación dada en (1.22) es la *solución general* de la ecuación (1.21). Al hecho de que una combinación lineal de soluciones sea también solución de la ecuación se le conoce con el nombre de *principio de superposición*.

Ahora se definirá la solución general de una ecuación lineal no homogénea. Supóngase que $g(x)$ no es la función idénticamente nula y sea y_p cualquier función que no contiene parámetros arbitrarios y que satisface la ecuación (1.19). A tal función se le conoce con el nombre de *solución particular* de dicha ecuación.

Si y_p es una solución dada de la ecuación (1.19) en un cierto intervalo abierto I y si

$$y_c = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x),$$

es la solución general de la ecuación homogénea asociada (1.21), en dicho intervalo, entonces la *solución general* de la ecuación no homogénea en el intervalo mencionado se define como

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x) + y_p(x)$$

$$= y_c(x) + y_p(x).$$

En este caso, a la combinación lineal $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)$ se le conoce como *solución complementaria* de dicha ecuación. En otras palabras, la solución general de la ecuación diferencial lineal no homogénea está formada por la solución complementaria más cualquier solución particular de ésta.

Algunas ecuaciones de orden 2 o mayor se pueden resolver por métodos analíticos. El resto de esta sección está dedicada a la exposición de algunos de ellos.

Método de Reducción de Orden

Empezaremos con un método que nos permite encontrar una segunda solución linealmente independiente a partir de una solución conocida. Este método se conoce con el nombre de *reducción de orden* y se debe a D'Alembert[2]. Tomemos como caso particular la ecuación de segundo orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1.23}$$

y supongamos que se conoce una solución $y_1 \not\equiv 0$ de dicha ecuación y que c es una constante arbitraria, entonces cy_1 es también una solución de (1.23). De la misma forma podemos tratar de determinar una función v, tal que $y = v(x)y_1(x)$ sea también una solución de la ecuación. Proponemos entonces

$$y = v(x)y_1(x), \tag{1.24}$$

calculando las dos primeras derivadas de y, encontramos

$$y' = v(x)y(x) + v'(x)y_1(x)$$

$$y'' = v(x)y_1''(x) + 2v'(x)y_1'(x) + v''(x)y_1(x)$$

de manera que al sustituir y, y' y y'' en la ecuación (1.23) y después de reagrupar términos, obtenemos

[2] Jean le Roand D'Alembert, físico y matemático francés (1717-1783).

$$(1.25) \qquad v(y_1'' + py_1' + qy_1) + v'(2y_1' + py_1) + v''y_1 = 0\,.$$

La cantidad del primer paréntesis es cero debido a que y_1 es solución de la ecuación diferencial (1.23). Los términos restantes de (1.25) los podemos dividir entre y_1 en cualquier intervalo en el que dicha función no se anule para obtener

$$(1.26) \qquad v'' + \left(p + 2\frac{y_1'}{y_1}\right)v' = 0$$

La ecuación anterior es lineal de primer orden en la variable w=v' y su solución está dada por

$$w(x) = c\exp\left[-\int^x \left(p(t) + 2\frac{y_1'(t)}{y_1(t)}\right)dt\right] = cu(x),$$

donde c es una constante arbitraria, y

$$u(x) = \frac{1}{[y_1(x)]^2}\exp\left[-\int^x p(t)dt\right].$$

De esta forma

$$v(x) = c\int^x u(t)dt\,.$$

Por lo tanto, dos soluciones de la ecuación (1.23) son

$$y = y_1(x) \qquad \text{y} \qquad y = y_1(x)\int^x u(t)dt\,.$$

Las dos soluciones anteriores son linealmente independientes debido a que la antiderivada de la función u no puede ser una constante.

En conclusión, podemos decir que si y_1 es una solución de la ecuación (1.23), la sustitución $y = y_1(x)v(x)$ conduce a una ecuación diferencial lineal de orden n-1 en v. Si se conoce una solución de la ecuación para v se puede nuevamente usar el método de reducción de orden para obtener una ecuación de orden n-2 y así sucesivamente hasta que se obtenga una ecuación de primer orden. Sin embargo, en la práctica, este método no se usa para ecuaciones de orden superior al segundo. Si $n = 2$ la ecuación reducida es de primer orden y, por lo tanto, se puede resolver más fácilmente.

Ecuaciones con Coeficientes Constantes

En general, el tratar de resolver ecuaciones diferenciales lineales cuando los coeficientes no son constantes, resulta complicado. Para el caso de ecuaciones con coeficientes constantes, el problema es un tanto más sencillo. Con el fin de resolver problemas de este tipo se introduce el concepto de operador diferencial.

Definición. Para cada entero positivo n se define el *operador* D^n mediante la expresión

(1.27)
$$D^n \equiv \frac{d^n}{dx^n}$$

y se toma $D^0=I$.

Dicho operador se aplica a funciones que tienen al menos n derivadas y, como se verá posteriormente, tiene la ventaja de simplificar la notación y el manejo algebraico cuando se emplea para resolver ecuaciones diferenciales. Queda claro de la definición que si m y n son enteros no negativos, se cumple $D^m D^n = D^{m+n}$.

Supóngase que a_0, a_1, ... , a_n son $n+1$ funciones de la variable x y constrúyase la función

$$F(x,t) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) t^k.$$

Si se define $F(x,D)$ mediante

(1.28) $$F(x,D) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) D^k,$$

la ecuación diferencial lineal de orden n

(1.29) $$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x),$$

se puede expresar en términos del operador $F(x,D)$ en la forma

$$F(x,D)y = g(x).$$

Si las funciones a_0, a_1, ... , a_n son constantes, se puede escribir a $F(x,t)$ como un polinomio f en la variable t; esto es

(1.30) $$F(x,t) = f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k,$$

obteniéndose de (1.28) la relación

(1.31) $$f(D) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k.$$

En general, dados los operadores diferenciales $F_1(x,D)$ y $F_2(x,D)$, la igualdad $F_1F_2=F_2F_1$ no se verifica, sin embargo, si los coeficientes son constantes; en cuyo caso $F_1(x,D)=f_1(D)$ y $F_2(x,D)=f_2(D)$, los operadores $f_1(D)$ y $f_2(D)$ conmutan bajo el producto.

Con base en lo anterior, si f es el polinomio dado en (1.30), la ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes

$$\sum_{K=0}^{n} a_k \frac{d^k y}{dx^k} = g(x),$$

se puede escribir en la forma simplificada

(1.32) $$f(D)y=g(x),$$

y la ecuación homogénea correspondiente, como

(1.33) $$f(D)y=0.$$

Si f y h son polinomios, se dice que los operadores diferenciales $f(D)$ y $h(D)$ son iguales, si se satisface la igualdad $f(D)y=h(D)y$, para toda función y con un número adecuado de derivadas. Si $f(D)$ y $h(D)$ son operadores diferenciales, el producto de estos se define mediante la expresión

$$[f(D)h(D)]y = f(D)[h(D)y].$$

Las leyes conmutativa y asociativa se cumplen para las operaciones de suma y producto de operadores, además, es válida la ley distributiva del producto respecto a la suma.

Una propiedad importante de los operadores diferenciales, está relacionada con la función exponencial y es la que se establece en seguida.

Proposición. Si f es el polinomio definido en (1.30), entonces

$$f(D)e^{ax}=e^{ax}f(a). \tag{1.34}$$

Este resultado es inmediato si se toma en cuenta que $D^k e^{ax}=a^k e^{ax}$. De esta forma, dada la ecuación diferencial (1.33), se observa que su solución se puede obtener *directamente*, calculando las raíces del polinomio f. Si alguna o algunas de las raíces son complejas, las soluciones correspondientes quedan en términos de senos y cosenos.

Otra propiedad importante es la que se expone a continuación.

Proposición. Si una función y tiene al menos n derivadas, entonces

$$(D-aI)^n(e^{ax}y)=e^{ax}D^n y. \tag{1.35}$$

Usando el principio de inducción, se puede probar esta igualdad fácilmente y, a partir de ella, se deduce lo siguiente:

Corolario. Si f es el polinomio dado en (1.30) y si y es una función con al menos n derivadas, entonces

$$e^{ax}f(D)y=f(D-aI)^n[e^{ax}y]. \tag{1.36}$$

Para probar ésto, basta con aplicar la igualdad (1.35) en cada uno de los miembros de la suma de la derecha.

Con los recursos proporcionados por las igualdades (1.34), (1.35) y (1.36), es posible resolver cualquier ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes; es decir, cualquier ecuación diferencial de la forma (1.33). Si la ecuación es no homogénea como en (1.32) pero g es la solución de alguna ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes, el método anterior sigue siendo aplicable si se procede como sigue: supóngase que $g(x)$ es la solución de la ecuación diferencial $h(D)y=0$, entonces, de (1.32) tenemos

$$h(D)\,[f(D)y]=f(D)\,[h(D)y]=h(D)g=0.$$

De aquí que para resolver la ecuación lineal no homogénea (1.32), basta con encontrar la solución de la ecuación homogénea

$$(1.37) \qquad h(D)f(D)y=0,$$

reduciéndose con esto el trabajo, a calcular los valores de ciertas constantes. Con el fin de ilustrar los conceptos anteriores, consideremos la ecuación diferencial

$$(1.38) \qquad y''' - y'' = 3e^x + sen\,x.$$

Escribiendo ésta en la forma

$$(1.39) \qquad D^2(D-I)y = 3e^x + sen\,x$$

vemos que las raíces del polinomio correspondiente $f(t)=t^2(t-1)$, son 0, 0 y 1, de manera que la solución complementaria y_c de la ecuación homogénea queda como

$$y_c = c_1 + c_2x + c_3\,e^x,$$

donde las c_j son constantes arbitrarias que quedan determinadas por condiciones iniciales.

Para obtener la solución particular y_p de (1.38), observemos que la función $g(x) = 3e^x + sen\, x$ es la solución de una ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes $h(D)y=0$, donde h es un polinomio con raíces 1 y $\pm\, i$, de manera que debe cumplirse la igualdad

$$h(D)g=(D-I)(D^2+I)g=0.$$

Aplicando el operador diferencial $h(D)$ en la igualdad (1.39), se llega a la ecuación diferencial

$$D^2(D^2+I)(D-I)^2y=0,$$

cuya solución general es

$$y=c_1+c_2x+c_3e^x+c_4xe^x+c_5\cos x+c_6\, sen\, x.$$

Las constantes c_4 , c_5 y c_6 no son arbitrarias y pueden evaluarse derivando tres veces la función $y_p = c_4xe^x + c_5\cos x + c_6\, sen\, x$ y sustituyendo su segunda y tercera derivadas en (1.38). De esta manera se obtiene $c_4=3$, $c_5=c_6=\frac{1}{2}$. Con lo cual, la solución general $y=y_c+y_p$ de la ecuación diferencial (1.38) queda como

$$y=c_1+c_2x+c_3e^x+3xe^x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\, sen\, x.$$

Transformada de Laplace

Otro método para resolver ecuaciones diferenciales lineales se vale del uso de tranformadas integrales. Una *transformada integral* es una relación de la forma

$$(1.40) \qquad f(s) = \int_{\alpha}^{\beta} k(s,t)F(t)dt$$

en donde una función dada F se transforma en otra función f, por medio de una integral. Se dice que la función f es la *transformada* de F y que la función k es el *núcleo* de la transformación. Cuando el núcleo de la transformación esta dado por

$$\begin{aligned} k(s,t) &= e^{-st} && \text{cuando } t \geq 0 \\ &= 0 && \text{cuando } t < 0 \end{aligned}$$

y los límites de integración son $\alpha=0$ y $\beta=\infty$, a la relación (1.40) se le conoce con el nombre de *Transformada de Laplace*[3] y se le denota por $\mathcal{L}\{F(t)\}=f(s)$. Una de las propiedades más importantes de dicha transformada es la siguiente

$$(1.41) \qquad \mathcal{L}\left\{F^{(n)}(t)\right\} = s^n f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} F^{(k)}(0)\,.$$

En general, la transformada de Laplace reduce el problema de resolver una ecuación diferencial, a resolver una ecuación algebraica. En el caso de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, este procedimiento simplifica aún más la tarea.

Considérese la ecuación

$$(1.42) \qquad \sum_{K=0}^{n} a_k \frac{d^k Y}{dt^k} = G(t)\,,$$

[3] Pierre Simón de Laplace, matemático y astrónomo francés (1749-1827).

donde los coeficientes a_k son constantes. Supóngase que la transformada de Laplace de $Y(t)$ es $y(s)$ y que la de $G(t)$ es $g(s)$; es decir $\mathcal{L}\{Y(t)\}=y(s)$ y $\mathcal{L}\{G(t)\}=g(s)$. Supóngase además que se dan n condiciones iniciales $Y^{(k)}(0)=Y_0^{(k)}$, para k=0, 1, ... , n-1. Entonces, aplicando transformada de Laplace a ambos miembros de la igualdad (1.42), encontramos

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k s^k\right) y(s) - \sum_{j=0}^{n-1} A_j s_j = g(s), \tag{1.43}$$

donde

$$A_j = \sum_{i=j+1}^{n} a_i Y_0^{(i-j-1)}. \tag{1.44}$$

De (1.43), resulta

$$y(s) = \left(g(s) + \sum_{j=0}^{n-1} A_j s^j\right)\left(\sum_{k=0}^{n} a_k s^k\right)^{-1}.$$

Sacando transformada inversa a ambos lados de esta igualdad, se llega a la solución $Y(t)$ de la ecuación propuesta, quedando

$$Y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{y(s)\}. \tag{1.45}$$

Con el fin de ilustrar la técnica de la transformada de Laplace para resolver problemas con valores iniciales , consideremos la ecuación

$$Y'' - Y' - 2Y = 0 \tag{1.46}$$

con las condiciones iniciales $Y(0) = 1$, $Y'(0) = 0$.

Tomando la transformada de Laplace de la ecuación (1.46), obtenemos

$$\mathcal{L}\{Y'' - Y' - 2Y\} = 0.$$

Recordando que la *transformada* es un operador lineal, podemos expresar la transformada de una suma como la suma de las transformadas

$$\mathcal{L}\{Y''\} - \mathcal{L}\{Y'\} - 2\mathcal{L}\{Y\} = 0. \tag{1.47}$$

Haciendo uso de la propiedad (1.41), podemos expresar $\mathcal{L}\{Y''\}$ y $\mathcal{L}\{Y'\}$ en términos de $\mathcal{L}\{Y\}$, quedando la ecuación (1.47) de la siguiente forma

$$s^2\mathcal{L}\{Y\} - sY(0) - Y'(0) - s\mathcal{L}\{Y\} + Y(0) - 2\mathcal{L}\{Y\} = 0,$$

ó bien

$$(s^2 - s - 2)y(s) + (1 - s)Y(0) - Y'(0) = 0, \tag{1.48}$$

donde $y(s) = \mathcal{L}\{Y\}$. Sustituyendo las condiciones iniciales en (1.48) y despejando $y(s)$, obtenemos

$$y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)}. \tag{1.49}$$

Desarrollando en fracciones parciales el segundo miembro de (1.49), encontramos que

$$y(s) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s-2}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{s+1}\right).$$

De (1.45) tenemos que $Y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{y(s)\}$, por lo tanto

$$Y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s-2}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{s+1}\right)\right\}.$$

Sabemos que la transformada inversa de $\frac{1}{s-a}$ es e^{at}, de esta manera

$$Y(t)=\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{2}{3}e^{-t}.$$

La ventaja de usar este procedimiento es que al final no aparecen constantes que tengan que ser evaluadas. La razón de ésto es que si se imponen condiciones iniciales y se usa la transformada de Laplace, los valores de dichas constantes se toman en cuenta en el mismo proceso.

El Método de Variación de Parámetros

Otro método para resolver ecuaciones diferenciales, es el método de variación de parámetros también denominado método de Lagrange[4]. Éste es un método general para determinar una solución particular de la ecuación

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x), \tag{1.50}$$

donde las funciones a_i, con i=0,1 , ... , n son continuas sobre un cierto intervalo.

[4] J.L. Lagrange, matemático francés (1736 - 1813).

Para usar este método, es necesario conocer el conjunto fundamental de soluciones (véase la sección 1.4, Espacio de Soluciones) de la ecuación homogénea correspondiente

$$(1.51) \qquad a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0.$$

Suponiendo que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son las n soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea (1.51), entonces $y_c(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)$ es la solución general de dicha ecuación. El método de variación de parámetros consiste en reemplazar las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ por n funciones $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de tal manera que

$$(1.52) \qquad y_p(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)+\cdots+u_n(x)y_n(x)$$

satisfaga la ecuación diferencial no homogénea (1.50). Con este método es posible determinar las funciones $u_1, u_2, \ldots, u_n$ con lo cual estaría dada la solución de la ecuación.

El desarrollo del formalismo relativo al método de variación de parámetros es, precisamente, el objetivo de este trabajo, por lo que profundizaremos en él en el tercer capítulo.

Soluciones en Series de Potencias

Sabemos que en algunas ocasiones es posible resolver ecuaciones diferenciales en términos de funciones elementales. Pero, por lo general, las ecuaciones de mayor interés en casi todos los campos de estudio, no se pueden resolver con dichas funciones sino mediante series de potencias.

El método de solución en series de potencias es el único método analítico para resolver ecuaciones diferenciales lineales de orden n. Este método se basa en expresar

y como una serie infinita en potencias de $x - x_0$, donde x_0 es un punto especificado. Es decir, dada la ecuación

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x), \tag{1.53}$$

se busca encontrar soluciones que tengan desarrollo en serie de Taylor[5] de la forma

$$y=b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_k(x - x_0)^k + \cdots \tag{1.54}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k .$$

La manera más práctica de encontrar la solución por este método, es sustituir la serie (1.54) y sus derivadas por y, y', ... , $y^{(n)}$ en la ecuación (1.53), después se determinan los b_k de forma tal que se satisfaga dicha ecuación. Es conveniente señalar, que las funciones a_i con $i=1$, ..., n de la ecuación mencionada, también se deben sustituir por su desarrollo en serie de potencias de $x - x_0$.

Definición. Se dice que una función f es analítica en un punto $x = x_0$, si admite un desarrollo en series de potencias de la forma

$$f(x)=\sum_{k=o}^{\infty} b_k(x-x_0)^k .$$

En tal caso los coeficientes b_k vienen dados necesariamente por

[5] *Taylor Brook, matemático inglés (1685-1731).*

$$b_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0).$$

Al principio de este trabajo se supuso que siempre es posible despejar la derivada de más alto orden en una ecuación diferencial ordinaria, es decir, que la igualdad

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{1.55}$$

siempre puede escribirse como

$$y^{(n)} = \frac{g(x)}{a_n(x)} - \frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}y^{(n-1)} - \cdots - \frac{a_1(x)}{a_n(x)}y' - \frac{a_0(x)}{a_n(x)}y, \tag{1.56}$$

de aquí que se deban de considerar dos casos: cuando $a_n(x) = 0$ y $a_n(x) \neq 0$. Como este método considera la solución de la ecuación (1.55) en la vecindad de un punto x_0, *entonces, si* $a_n(x_0) \neq 0$ a este punto se le conoce como *punto ordinario* de la ecuación, pero si $a_n(x_0)=0$, a dicho punto se le llama *punto singular*. Si x_0 es un punto singular, los cocientes $\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}, \cdots, \frac{a_1(x)}{a_n(x)}, \frac{a_0(x)}{a_n(x)}$ se vuelven no acotados cuando $x \to x_0$.

A pesar de que conceptualmente este método puede parecer complicado, en la práctica resulta sencilla su aplicación. Como ejemplo, consideremos la siguiente ecuación

$$y' = y. \tag{1.57}$$

Si suponemos que ésta tiene solución en forma de series de potencias alrededor del punto $x=0$, dicha solución estaría dada por

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{1.58}$$

la cual esperaríamos que converja para $|x| < R$ con algún R positivo ; esto es, suponemos que (1.57) tiene solución analítica en el origen. Dado que una serie de potencias de este tipo puede ser derivada término a término en su intervalo de convergencia, se tiene

(1.59) $$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots .$$

Como $y' = y$, tenemos que los coeficientes de las series (1.58) y (1.59) deben ser iguales, por lo tanto:

(1.60) $$a_1 = a_0, \qquad 2a_2 = a_1, \qquad 3a_3 = a_2, \quad \ldots \quad , \quad (n+1)a_{n+1} = a_n, \quad \ldots$$

De (1.60) se pueden deducir expresiones para los a_n en términos de a_0, obteniendo

$$a_1 = a_0, \qquad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{2 \cdot 3}, \quad \cdots \quad , \quad a_n = \frac{a_0}{n!}, \quad \cdots$$

Si sustituimos estos coeficientes en (1.58), obtenemos la *solución en serie de potencias*

(1.61) $$y = a_0\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

de la ecuación dada.

Cabe señalar que el método no garantiza que la ecuación (1.57) posea una solución en serie de potencias de la forma (1.58), más bien se muestra que si (1.57) tiene tal solución, entonces debe ser la dada en (1.61).

Si observamos la serie (1.61), podemos reconocer fácilmente que corresponde a la serie de e^x, así que (1.61) se puede escribir como

$$y = a_0 e^x \ .$$

Claro está que se pudo haber llegado a esta solución directamente separando variables e integrando, pero lo importante es darse cuenta de que existe este método sobre todo para aquellas ecuaciones que no se pueden resolver por los métodos tradicionales.

1.4 Espacio de Soluciones

Recordemos que si $y_1, y_2, \dots, y_n$ son soluciones de la ecuación diferencial

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0\,, \tag{1.62}$$

entonces la combinación lineal $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)$, donde los c_i con $i= 1, \dots, n$ son constantes arbitrarias, también es solución de (1.62).

En la teoría de las ecuaciones lineales homogéneas se establece el hecho importante de que una combinación lineal de soluciones de una ecuación lineal homogénea dada, es también solución de dicha ecuación.

Se dice que n soluciones $y_1, y_2, \dots, y_n$ de la ecuación diferencial (1.62) forman un *conjunto fundamental de soluciones*, si cualquier solución de ésta puede expresarse como una combinación lineal de $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Se puede probar que n soluciones $y_1, y_2, \dots, y_n$ forman un conjunto fundamental de soluciones, demostrando que para toda solución $y = \phi(x)$ de la ecuación (1.62) se pueden encontrar constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$ tales que $\phi(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)+\dots+c_ny_n(x)$. Para determinar dichas constantes, se escoge un punto x_0 en el intervalo $\alpha < x < \beta$, entonces $\phi(x_0), \phi'(x_0), \dots, \phi^{(n-1)}(x_0)$ son, respectivamente, los valores de la solución elegida y sus derivadas en ese punto. Después se buscan las constantes c_1, c_2, ... , c_n de modo que la función $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)+...+c_ny_n(x)$ y sus derivadas tomen los mismos valores de $\phi(x_0)$, $\phi'(x_0)$, ... , $\phi^{(n-1)}(x_0)$ en $x = x_0$. Por tanto, las cantidades c_1, c_2, ... , c_n deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{ccccccccc} c_1y_1(x_0) & + & c_2y_2(x_0) & + & \cdots & + & c_ny_n(x_0) & = & \phi(x_0) \\ c_1y_1'(x_0) & + & c_2y_2'(x_0) & + & \cdots & + & c_ny_n'(x_0) & = & \phi'(x_0) \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0) & + & c_2y_2^{(n-1)}(x_0) & + & \cdots & + & c_ny_n^{(n-1)}(x_0) & = & \phi^{(n-1)}(x_0) \end{array} \tag{1.63}$$

El sistema de ecuaciones (1.63) tendrá una solución única para c_1, c_2, ... , c_n siempre que el determinante de la matriz de los coeficientes sea diferente de cero, es decir, det $A \neq 0$, donde

$$A = \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \tag{1.64}$$

A la función det A se le denomina *wronskiano* de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ en el punto x_0 y se denota por $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x_0)$; esto es $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x_0)=$ det A.

Los valores de c_1, c_2, ... , c_n determinados por el sistema de ecuaciones (1.63), hacen que las funciones $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$ y ϕ satisfagan las mismas condiciones iniciales en $x = x_0$ así como la misma ecuación diferencial (1.62) y, puesto que sólo existe una solución para el problema con valores iniciales, se concluye que $\phi(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)+ \cdots + c_ny_n(x)$ para cada valor de x contenido en el intervalo $\alpha < x < \beta$.

Teorema: Si las funciones $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son continuas sobre el intervalo abierto $\alpha < x < \beta$ *y si* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *son soluciones* de la ecuación diferencial (1.62), que satisfacen la condición

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) \neq 0$$

para todo punto contenido en el intervalo $\alpha < x < \beta$, entonces cualquier solución de la ecuación diferencial (1.62) sobre el intervalo señalado puede expresarse como una combinación lineal de $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Demostración . Se prueba el teorema para el caso $n=2$. Consideremos la ecuación de segundo orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1.65}$$

supóngase que las funciones y_1, y_2 y y_3 son soluciones de la ecuación diferencial (1.65) y que $W(y_1, y_2)(x)$ nunca es igual a cero en el intervalo $\alpha < x < \beta$. Para demostrar que $y_3 = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ para algunas constantes c_1 y c_2, consideremos el sistema

$$\begin{aligned} y_1'' + py_1' + qy_1 &= 0 \\ y_2'' + py_2' + qy_2 &= 0 \\ y_3'' + py_3' + qy_3 &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por $-y_2$, la segunda por y_1 y sumando ambas ecuaciones, obtenemos

$$(y_1y_2'' - y_1''y_2) + p(y_1y_2' - y_1'y_2) = 0. \tag{1.66}$$

Haciendo $W_{12}(x) = W(y_1 , y_2)$ y recordando que $W_{12}' = y_1y_2'' - y_1''y_2$, podemos escribir la ecuación (1.66) de la siguiente manera

(1.67) $$W_{12}' + pW_{12} = 0.$$

Realizando cálculos similares, obtenemos

(1.68) $$W_{23}' + pW_{23} = 0$$

(1.69) $$W_{13}' + pW_{13} = 0$$

Las ecuaciones diferenciales (1.67), (1.68) y (1.69) son lineales de primer orden y pueden integrarse inmediatamente para obtener sus soluciones, las cuales quedan como

(1.70) $$W_{12}(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = c_{12}\exp\left[-\int^x p(t)dt\right]$$

(1.71) $$W_{23}(x) = y_2(x)y_3'(x) - y_2'(x)y_3(x) = c_{23}\exp\left[-\int^x p(t)dt\right]$$

(1.72) $$W_{13}(x) = y_1(x)y_3'(x) - y_1'(x)y_3(x) = c_{13}\exp\left[-\int^x p(t)dt\right]$$

donde c_{12}, c_{13} y c_{23} son constantes y, en particular $c_{12} \neq 0$ ya que por hipótesis W_{12} nunca se anula en el intervalo.

Multiplicando la ecuación (1.71) por $-y_1(x)$, la ecuación (1.72) por $y_2(x)$ y sumando ambas ecuaciones, se obtiene

$$\left[y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)\right]y_3(x)=\left[-c_{23}y_1(x)+c_{13}y_2(x)\right]\exp\left[-\int^x p(t)dt\right].$$

Finalmente, sustituyendo $y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)$ en la ecuación (1.70) y cancelando las exponenciales, queda

$$y_3(x)=\frac{-c_{23}}{c_{12}}y_1(x)+\frac{c_{13}}{c_{12}}y_2(x),$$

con lo cual se comprueba que y_3 puede expresarse como una combinación lineal de y_1 y y_2.

La solución general de una ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden, representada como una combinación lineal de n soluciones, cuyo wronskiano no se anula, está relacionada con la independencia lineal de las n funciones con las que se construye el wronskiano.

Sean $b_1, b_2, \dots, b_n$ n funciones de la variable x. Se dice que $b_1, b_2, \dots, b_n$ son linealmente dependientes en un intervalo $\alpha < x < \beta$, si existen n constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$ no todas cero, tales

$$c_1b_1(x)+c_2b_2(x)+\dots+c_nb_n(x)=0$$

para toda x contenida en el intervalo $\alpha < x < \beta$. Se dice que $b_1, b_2, \dots, b_n$ son linealmente independientes en dicho intervalo, si la ecuación (1.62) sólo se cumple cuando $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ para toda x contenida en ese intervalo, es decir, si no son linealmente dependientes.

Es importante determinar si las n soluciones y_1, y_2, ... , y_n de la ecuación homogénea (1.62) son linealmente independientes. Una condición necesaria y suficiente para la independencia lineal es que el wronskiano de dichas soluciones no se anule en ningún punto contenido en el intervalo.

Capítulo 2
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En este capítulo se da una introducción a los sistemas de ecuaciones líneales y a su representación matricial. Se habla también de matrices inversibles, de métodos para encontrar la inversa de una matriz y de determinantes.

2.1 Sistemas de Ecuaciones Lineales

En una gran cantidad de aplicaciones en la física, la ingeniería e incluso, en las áreas de ciencias sociales, se presenta el problema de resolver sistemas de ecuaciones lineales. En general, dado un campo F, un sistema de m ecuaciones lineales con n *incógnitas sobre* F *es un conjunto* de igualdades de la forma

$$(2.1) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = y_i \qquad i=1,\dots,m.$$

donde los a_{ij} y los y_i son elementos de F. Se denomina *solución* del sistema a toda *n-ada* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de elementos del campo que satisface *simultáneamente* cada una de las ecuaciones del sistema (2.1). Si el sistema no tiene solución, se dice que es *inconsistente* y, si la tiene, se denomina *consistente*.

Si $y_1=y_2=\cdots=y_m=0$, se dice que el sistema (2.1) es *homogéneo*. La solución $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ de un sistema homogéneo se denomina *solución trivial*. Una solución de un sistema homogéneo en la cual no todos los $x_1, x_2, \dots, x_n$ son iguales a cero se denomina *solución no trivial*.

Los conceptos que se establecen después de este párrafo tienen como objeto el inducir la definición de ciertas operaciones importantes que se pueden efectuar con las ecuaciones de un sistema lineal y que nos conducirán, posteriormente, a la noción de operación elemental de fila, con los elementos de una matriz. El proceso conocido como reducción por filas de una matriz, que es una herramienta para encontrar soluciones de sistemas de ecuaciones lineales, se realiza efectuando operaciones del tipo mencionado.

Volvamos al sistema (2.1). Si multiplicamos cada una de las ecuaciones que lo forman por algún elemento no nulo del campo F, digamos la fila i por $c_i \neq 0$, se llega al nuevo sistema

$$c_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = c_i y_i, \qquad i=1, \ldots, m.$$

Es claro, que toda solución del sistema (2.1) es también solución de este último sistema. Ahora, si sumamos miembro a miembro las ecuaciones del nuevo sistema, obtenemos

$$(2.2) \qquad \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i,$$

que, de acuerdo con lo establecido anteriormente, tenemos que toda solución del sistema (2.1), es también solución de esta última ecuación.

A la expresión (2.2) se le denomina *combinación lineal* de las ecuaciones del sistema (2.1).

Es importante señalar, en referencia a las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales, que si una ecuación del sistema se multiplica por algún escalar no nulo, la solución o soluciones del sistema no se alteran. Lo mismo sucede si se suman dos o más ecuaciones del sistema o se intercambian dos de ellas.

Definición.- Considérese el siguiente sistema de k ecuaciones lineales con n incógnitas

$$(2.3) \qquad \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = d_i, \qquad i=1,\ldots,k.$$

Se dice que (2.1) y (2.3) son *sistemas equivalentes* si cada ecuación de cada sistema se puede expresar como combinación lineal de las ecuaciones del otro sistema. De ser así, dichos sistemas tendrán exactamente las mismas soluciones.

A pesar de lo sencillo que pueden parecer los conceptos de combinación lineal y de equivalencia de sistemas de ecuaciones, sus repercusiones son relevantes. En seguida daremos un ejemplo relativo a estos conceptos.

Ejemplo. Compruébese que los dos siguientes sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes.

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= 0 \\ \tfrac{1}{2}x_1 + x_2 + \tfrac{5}{2}x_3 &= 0 \end{aligned} \quad , \qquad \begin{aligned} x_1 \qquad - x_3 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned} .$$

Denotemos por A_j (j=1,2,3) las ecuaciones del primer sistema y por B_j (j=1,2) las ecuaciones del segundo, entonces

$$\begin{aligned} A_1 &= -B_1 + B_2 \\ A_2 &= B_1 + 3B_2 \\ A_3 &= (1/2)B_1 + B_2 \end{aligned} \quad , \qquad \begin{aligned} B_1 &= (-3/4)A_1 + (1/4)A_2 \\ B_2 &= (1/3)A_1 + (2/3)A_3 . \end{aligned}$$

Con respecto a la solución de los sistemas dados en el ejemplo anterior, podemos decir que toda terna de números de la forma (c, $-3c$, c), donde c es cualquier número complejo, es solución de ambos sistemas.

Existen varios métodos para encontrar soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. Uno de ellos es el de *eliminación*. La idea básica de dicho método, es eliminar algunas variables sumando un múltiplo escalar adecuado de una ecuación a *otra* ecuación del mismo sistema. Esta eliminación nos conduce a un nuevo sistema lineal el cual es equivalente al *sistema original* pero de alguna manera más fácil de resolver y, como se mencionó anteriormente, toda solución del nuevo sistema será también *solución* del *sistema original*.

Antes de continuar con lo referente a la solución de sistemas de ecuaciones lineales, se introducirá la *definición* de matriz para simplificar la notación y porque la representación matricial de un sistema lineal tiene algunas ventajas para manejar los procesos que llevan a su solución.

2.2 Representación Matricial

En algunas ocasiones resulta conveniente definir las *matrices* como cierta clase de funciones. Hacerlo de esta manera tiene la ventaja de que se pueden aplicar los conceptos relativos a funciones en los desarrollos en los que intervienen matrices. Introduciremos el concepto de matriz desde este enfoque y, posteriormente, lo llevaremos al lenguaje y la notación comúnmente empleados para las matrices.

Definición. Sean F un campo, k un número entero positivo e I_k el conjunto de los k primeros enteros positivos. Una función $A : I_m \times I_n \rightarrow F$ se denomina *matriz* de mxn sobre el campo F o con elementos en F. Si A y B son matrices de mxn sobre F y si c es un escalar, se definen la suma $A+B$ de A y B y el producto cA del escalar c por la matriz A como las operaciones usuales de suma de funciones y producto de escalares por funciones.

De acuerdo con la definición, tenemos que una matriz A de mxn sobre el campo F es un conjunto de parejas ordenadas de la forma $\left((i,j)\ ,\ A(i,j)\right)$. La representación usualmente aceptada para la matriz A es la de un arreglo rectangular de m renglones y n columnas. Tomando $A(i,j) = a_{ij}$ se propone

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

donde $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ y a_{ij}

representan la *i-ésima* fila, la *j-ésima* columna y el *ij-ésimo* elemento de la matriz A, con $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$. Emplearemos también la expresión $A=[a_{ij}]$ para referirnos a la matriz A y la expresión $(A)_{ij}$ para hacer referencia a su elemento a_{ij}.

Si $A=[a_{ij}]$ y $B=[b_{ij}]$ son matrices de mxn sobre el campo F, de la definición se deduce que $A=B$ si, y sólo si $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i y todo j; además, queda claro, también de la definición, que el i,j-ésimo elemento de la suma $A+B$ es la suma del i,j-ésimo elemento de A y el i,j-ésimo elemento de B; es decir,

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

De igual manera, para el producto cA, donde c es un escalar, resulta

$$(cA)_{ij} = ca_{ij}.$$

Si A y B son matrices de mxn, escribimos $A+(-1)B$ como $A-B$ y llamamos a esto la *diferencia* entre A y B.

Se dice que A es una *matriz cuadrada* cuando $m=n$. Una matriz de mxn cuyos elementos son únicamente ceros, se denomina *matriz nula* de mxn.

Definición.- Sea Z el conjunto de los números enteros y sea $\delta: ZxZ \rightarrow \{0,1\}$, la función definida por

$$\delta(i,j)=\begin{cases}1, & \text{si} \quad i=j \\ 0, & \text{si} \quad i\neq j\end{cases} \qquad \text{para } i,j=1,\ldots,n.$$

A tal función se le denomina *delta de Kronecker* y se acostumbra escribir $\delta(i,j)=\delta_{ij}$.

Para todo entero positivo n definimos una matriz I de nxn dada elemento a elemento por

$$(I)_{ij}=\delta_{ij}, \qquad i,j=1,\ldots,n.$$

A dicha matriz se le denomina *matriz identidad* de nxn .

Definición.- Sea F un campo y sea $A=[a_{ij}]$ una matriz de mxn sobre F. A la matriz $A^t=[a'_{ij}]$ de nxm definida elemento a elemento por $a'_{ij}=a_{ji}$ para todo i y todo j se le denomina *transpuesta* de la matriz A.

Una matriz A es *simétrica* si $A^t=A$ y es *antisimétrica* si $A^t=-A$. Es claro que $A=(a_{ij})$ es simétrica si y sólo si $a_{ij}=a_{ji}$ y es antisimétrica si y sólo si $a_{ij}=-a_{ji}$.

Ahora se definirá el producto entre el matrices.

Definición.- Sea $A=[a_{ij}]$ una matriz de mxn con elementos en el campo F y sea $B=[b_{ij}]$ una matriz de nxp sobre F. Se define el *producto* AB de A y B como la matriz $C=[c_{ij}]$ de mxp, cuyos elementos están dados por

(2.4) $$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \qquad \text{para } 1 \leq i \leq m \text{ y } 1 \leq j \leq p.$$

Nótese que el producto AB, sólo se puede efectuar cuando el número de columnas de A es igual al número de filas de B. Incluso, aún cuando los productos AB y BA se puedan efectuar, no necesariamente AB es igual a BA. Se sigue de aquí que, la multiplicación de matrices es no conmutativa.

Teorema. Sea F un campo y sean A, B y C matrices sobre F. Supóngase que los productos BC y $A(BC)$ están definidos, entonces, también los productos AB y $(AB)C$ se pueden efectuar y

$$A(BC) = (AB)C\,;$$

es decir, el producto de matrices es asociativo.

Demostración. Si el producto BC está definido, supongamos que es una matriz de mxn, entonces, existe un entero positivo p de manera tal que la matriz B es de mxp y la matriz C es de pxn. De igual manera, si el producto $A(BC)$ está definido, la matriz A debe ser de qxm, siendo q algún entero positivo. Entonces, los productos AB y $(AB)C$ están definidos y son matrices de qxp y qxn, respectivamente. Por otra parte, si A, B y C tienen elementos a_{ij}, b_{ij} y c_{ij}, en ese orden, de la definición dada en (2.4) tenemos que

$$\begin{aligned} [A(BC)]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(BC)_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{l=1}^{p} b_{kl}\, c_{lj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{ik}\, b_{kl}\, c_{lj} \end{aligned}$$

$$= \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kl}\, c_{lj}$$

$$= \sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kl} \right) c_{lj}$$

$$= \sum_{l=1}^{p} (AB)_{il}\, c_{lj}$$

$$= [(AB)C]_{ij}$$

con lo cual se prueba el teorema.

Regresando al sistema lineal (2.1), podemos definir las siguientes matrices

(2.5) $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

De acuerdo con esto, podemos expresar dicho sistema como $AX=Y$. Si $y_1=y_2=\cdots=y_m=0$, evidentemente, Y será la matriz nula de mx1 y, en tal caso, el sistema queda como

(2.6) $$AX=0,$$

expresión que representa un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

A la matriz A dada en (2.5) se le denomina *matriz de los coeficientes* del sistema de ecuaciones y a la matriz

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & y_n \end{array}\right] = [A \mid Y]$$

se le denomina *matriz aumentada* del sistema. La matriz de los coeficientes y la matriz aumentada de un sistema lineal son importantes para los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Cabe señalar que el sistema de ecuaciones (2.6) siempre tiene al menos la solución $X=0$ que, como se mencionó en la sección anterior, se denomina solución trivial de dicho sistema. En el caso del sistema no homogéneo $AX=Y$ no se puede garantizar la existencia de una solución. En la siguiente sección se hablará de como tratar de encontrar soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales.

2.3 Métodos de Solución

Se mencionó ya que uno de los procesos más poderosos para resolver sistemas de ecuaciones lineales es el de la aplicación de operaciones elementales de fila sobre las matrices. En seguida se dará la definición de este tipo de operaciones que corresponde a lo que se conoce como proceso de eliminación de variables. Cabe aclarar que aún cuando en este trabajo se manejen las operaciones elementales sobre filas, el procedimiento es totalmente semejante y conduce a los mismos resultados si se trabaja con columnas.

Definición.- Sea F un campo y sea F^{mxn} el conjunto de las matrices de mxn con elementos en F. Supóngase que p y q son dos enteros positivos tales que $1 \leq p, q \leq m$. *Una operación elemental de filas* es una función e: $F^{mxn} \rightarrow F^{mxn}$ que está definida por alguna de las tres siguientes reglas: si $A = [a_{ij}]$ pertenece a F^{mxn} y si c está en F,

1. $[e(A)]_{ij} = (A)_{ij}$ si $i \neq r$; $[e(A)]_{rj} = c(A)_{rj}$, $c \neq 0$
2. $[e(A)]_{ij} = (A)_{ij}$ si $i \neq r$; $[e(A)]_{rj} = (A)_{rj} + c(A)_{sj}$
3. $[e(A)]_{ij} = (A)_{ij}$ si $i \neq r$, $i \neq s$; $[e(A)]_{rj} = (A)_{sj}$, $[e(\mathrm{A})]_{sj} = (A)_{rj}$

Queda claro que las operaciones definidas arriba se refieren a lo siguiente:

1. Multiplicación de la fila r de A por un escalar c ($c \neq 0$).
2. Reemplazo de la r-ésima fila de A por la fila r más c veces la fila s, donde c es cualquier escalar.
3. Intercambio de las filas r y s de A.

En términos de estas operaciones, se definen las matrices elementales.

Definición.- Sea E una matriz de nxn. Se dice que E es una *matriz elemental* si se puede obtener de la matriz identidad de nxn mediante la aplicación de una sola operación elemental de filas.

Teorema. Sea F un campo y sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ matrices de mxn y nxp, respectivamente, sobre F. Supóngase que e es una operación elemental de filas, entonces

$$e(AB) = e(A)B.$$

Corolario 1. Sea e una operación elemental de filas y sea E la matriz elemental de nxn dada por $E=e(I)$. Entonces, para toda matriz A de nxn se cumple

$$e(A) = EA.$$

Corolario 2. Sean A y B matrices de mxn sobre F. Se dice que B es *equivalente por filas* a A si y sólo si $B=PA$, donde P es un producto de matrices elementales de mxm.

Demostración. Supóngase que B es equivalente por filas a A. Entonces debe existir una sucesión $e_1, \ldots, e_r$ de operaciones elementales de fila tal que, al aplicarla a la matriz A se obtiene

$$A = A_0 \to A_1 \to \cdots \to A_r = B,$$

donde, $A_j = e_j(A_{j-1})$ para $j=1, \ldots, r$. Sea $E_j = e_j(I)$; de acuerdo con el corolario 1, se tiene que

$$A_1 = e_1(A)=E_1A, \qquad\qquad A_2 = e_2(A_1)=E_2(E_1A) = (E_2 E_1)A$$

y en general para $j=1, \ldots, r$

$$A_j = (E_j \cdots E_2 E_1) A.$$

De esta forma, para $j=r$ resulta

$$B = (E_r \cdots E_2 E_1)A.$$

Si $P = E_r \cdots E_2 E_1$, tenemos que $B=PA$, con lo que se concluye la demostración.

Ahora, mediante un teorema, se establecerá una de las propiedades más importantes de las operaciones elementales de fila sobre matrices.

Teorema. Si e es una operación elemental de filas, entonces, existe una operación elemental de filas e^{-1}, que es del mismo tipo que e tal que $e^{-1}(eA)=e(e^{-1}A)=A$, para toda matriz A de mxn.

Demostración. Sea $A=[a_{ij}]$ una matriz de mxn sobre el campo F, y sea e una operación elemental de filas del tipo dado en la primera regla. Se define e^{-1} mediante la expresión

$$(e^{-1}A)_{ij} = a_{ij} \qquad \text{si } i \neq p; \qquad (e^{-1}A)_{pj} = c^{-1}a_{pj}.$$

De donde resulta $e^{-1}(eA)=e(e^{-1}A)=A$. Ahora, si e es del tipo especificado en la segunda regla, se define e^{-1} por medio de

$$(e^{-1}A)_{ij} = a_{ij} \qquad \text{si } i \neq p; \qquad (e^{-1}A)_{pj} = a_{pj} - ca_{qj},$$

aquí nuevamente tenemos que $e^{-1}(eA)=e(e^{-1}A)=A$. Finalmente, si e es del tipo descrito en la tercera regla, se define $e^{-1} = e$. Con esto se termina la demostración.

En seguida se verá, mediante un ejemplo, como se resuelven sistemas de ecuaciones lineales haciendo uso del proceso de eliminación de variables.

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 14 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= -2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Para resolverlo, multiplicamos la primera ecuación por -2 y la sumamos a la segunda, después multiplicamos la primera ecuación por -3 y la sumamos a la tercera, obteniendo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ -7x_2 - 4x_3 &= 2 \\ -5x_2 - 10x_3 &= -20. \end{aligned}$$

Ahora, multiplicamos la tercera ecuación de este nuevo sistema por $-1/5$ y la intercambiamos con la segunda y nos queda

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -7x_2 - 4x_3 &= 2. \end{aligned}$$

En seguida, multiplicamos la segunda ecuación por 7 y la sumamos a la tercera, obteniendo con ello

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 10x_3 &= 30. \end{aligned}$$

Queda claro, por la forma en que se llegó al último sistema, que éste y el (2.7) son equivalentes, por lo tanto tienen exactamente las mismas soluciones. En este caso, la solución de ambos sistemas, está dada por

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = -2 \qquad \text{y} \qquad x_3 = 3$$

Definición.- Sean A y B matrices de mxn con elementos en el campo F. Se dice que B es *equivalente por filas* a A, si B resulta de A mediante la aplicación de una sucesión finita de operaciones elementales de fila.

Ejemplo. Considérese la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Realicemos ahora, sobre la matriz A, una sucesión de operaciones elementales de fila.

1. Se multiplica la primera fila por -2 y se suma a la segunda y se obtiene la siguiente matriz

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Se suma la primera fila de A_1 a la tercera; se obtiene

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si tomamos $B = A_2$, podemos decir entonces que B es equivalente por filas a A o que las matrices A y B son equivalentes por filas, dado que toda operación elemental de filas es inversible.

Cabe señalar que la sucesión de operaciones elementales efectuada para llegar de la matriz A a la matriz A_2 no es única, ya que puede obtenerse el mismo resultado mediante una sucesión diferente.

El plantear matricialmente un sistema, nos induce a resolverlo a través del proceso de eliminación de variables, ya que mediante éste obtenemos un sistema equivalente al primero pero que, en principio, puede ser resuelto con mayor facilidad.

Ejemplo. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

(2.8)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0. \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

La matriz A de los coeficientes del sistema queda como

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}..$$

Sobre la matriz A, se realiza la siguiente sucesión de operaciones elementales de fila:

1. Se suma la primera fila a la segunda.
2. Se multiplica la primera fila por -3 y se suma a la tercera.
3. Se multiplica la segunda fila por 1/3.
4. Se multiplica la segunda fila por 8 y se suma a la tercera.
5. Se multiplica la segunda fila por -2 y se suma a la primera.

Los resultados son los siguientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -8 & -16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & -16 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se concluye de aquí que toda terna de la forma ($-3c$, $-2c$, c), donde c es cualquier escalar, es solución del sistema (2.8).

Es evidente que la sucesión de operaciones elementales de fila que se realizó sobre la matriz del ejemplo anterior, tenía como finalidad la de "reducir", de alguna manera, la matriz original de tal forma que pudiese encontrarse la solución del sistema (2.8) con mayor facilidad.

Daremos en seguida una definición con la que quedará formalizado el término reducir.

Definición.- Sea F un campo y sea R una matriz de mxn sobre F. Se dice que R es *reducida por filas* si:

a) el primer elemento no nulo de cada fila no nula de R es igual a 1;
b) cada columna de R que tiene el primer elemento no nulo de alguna fila tiene todos sus otros elementos iguales a 0.

Dada cualquier matriz, por medio de un número finito de operaciones elementales de filas, puede transformarse en una matriz reducida por filas o en una matriz escalón reducida por filas (la cual definiremos después de este párrafo), hecho que proporciona un instrumento para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Definición.- Sea R una matriz de mxn, sobre el campo F. Se dice que R es una *matriz escalón reducida por filas* si:

a) R es reducida por filas;

b) toda fila de R que tiene todos sus elementos iguales a 0 está debajo de todas las filas que tienen elementos no nulos;

c) si las filas $1, \dots, r$ son las filas no nulas de R, y si el primer elemento no nulo de la fila i está en la columna k_i, $i=1, \dots, r$, entonces $k_1<k_2<\cdots<k_r$.

Regresemos ahora a los sistemas de ecuaciones lineales. Supongamos que $RX=0$ es un sistema donde R es una matriz escalón reducida por filas. Si el número r de filas no nulas de R es menor que el número de columnas n, entonces el sistema $RX=0$ tiene una solución no trivial, esto es, una solución $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en donde no todo x_j es igual a cero. Esto se debe a que como $r < n$, se puede entonces elegir algún x_j que no esté entre las primeras r incógnitas y construir una solución asignándole un valor arbitrario a la x_j. Esta observación nos conduce a uno de los hechos fundamentales sobre sistemas homogéneos de ecuaciones lineales y da lugar al siguiente teorema.

Teorema.- Si A es una matriz de mxn sobre el campo F, con $m < n$, el sistema homogéneo de ecuaciones lineales $AX=0$ tiene una solución no trivial.

Una diferencia básica entre un sistema homogéneo y uno no homogéneo es que mientras el primero siempre tiene la solución trivial $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$, el segundo no necesariamente tiene solución.

Hasta aquí se han mencionado los aspectos esenciales del proceso de eliminación de variables para resolver sistemas de ecuaciones lineales. La idea básica en este proceso es comenzar con el sistema de ecuaciones lineales $AX=Y$, y obtener una matriz aumentada $[C \mid D]$, que sea reducida por filas o escalón reducida por filas y que sea equivalente a la matriz $[A \mid Y]$. Ahora, como $[C \mid D]$ representa el sistema $CX=D$, el cual es muy sencillo de resolver por la estructura de $[C \mid D]$, al resolverlo encontramos también el conjunto solución del sistema $AX=Y$. Este proceso es el más utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales con la computadora.

Consideremos nuevamente el sistema de ecuaciones lineales (2.7)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 2x1 - 3x_2 + 2x_3 &= 14 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= -2. \end{aligned}$$

Primero formamos la matriz aumentada del sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right],$$

luego multiplicamos por −2 la primera fila y la sumamos a la segunda

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right],$$

en seguida multiplicamos por −3 la primera fila y la sumamos a la tercera

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \end{array}\right]$$

ahora multiplicamos la tercera fila por $-1/5$ y la intercambiamos por la segunda

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \end{array}\right],$$

después multiplicamos por 7 la segunda fila y la sumamos a la tercera

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \end{array}\right]$$

y por último multiplicamos la tercera fila por $1/10$

$$(2.9) \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Esta última matriz es reducida por filas, y de aquí tenemos que $x_3=3$, $x_2+2x_3=4$ y $x_1+2x_2+3x_3=6$. Ahora sustituyendo en forma regresiva obtenemos

$$x_2=4-2(3)=-2 \qquad \text{y} \qquad x_1=6-2(-2)-3(3)=1.$$

Por lo tanto, la solución del sistema (2.7) es: $x_1=1$, $x_2=-2$ y $x_3=3$.

De igual manera, mediante otra sucesión de operaciones elementales de fila aplicadas a la matriz (2.9), podemos llegar a una matriz escalón reducida por filas, para ello:

Multiplicamos por -2 la tercera fila y la sumamos a la segunda

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right],$$

después multiplicamos por -3 la tercera fila y la sumamos a la primera

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

y finalmente, multiplicamos por -2 la segunda fila y la sumamos a la primera

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Con esto, nuevamente concluimos que la solución del sistema (2.7) es $x_1=1$, $x_2=-2$ y $x_3=3$.

Como se puede observar, al obtener la matriz escalón reducida por filas se llega a la solución del sistema sin necesidad de sustitución regresiva, pero obviamente, requiere de más operaciones el llevar una matriz a la forma escalón reducida por filas que a la forma reducida por filas. De hecho, para pasar de la matriz reducida por filas (2.9) a la matriz escalón reducida por filas, debieron realizarse ciertas operaciones de fila equivalentes a aquellas que se efectuaron para terminar de resolver el problema después de haber llegado a (2.9).

Más adelante se hablará de otro método para resolver sistemas de ecuaciones lineales conocido como la Regla de Cramer, el hecho de que no se trate aquí es debido a que requiere del uso de determinantes, los cuales vamos a definir en la siguiente sección.

2.4 Determinantes

En esta sección, cuando usemos el término matriz, nos referiremos siempre a una matriz cuadrada. Si K es un anillo conmutativo con unidad y si K^{nxn} es el conjunto de las matrices de nxn con elementos en K, definiremos el *determinante* de un elemento de K^{nxn} como una función de K^{nxn} en K. Se introduce primero el determinante de una matriz de 2x2 por ser éste un caso especial.

Definición.- Sea $A=[a_{ij}]$ una matriz de 2x2 sobre el anillo K; esto es

(2.10) $$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

donde cada a_{ij} pertenece a K.

Se define el *determinante* de A, denotado por $|A|$ o por *det A*, como

(2.11) $$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

La definición anterior es válida únicamente para calcular el determinante de matrices de 2x2. Para el caso de una matriz de nxn ($n>2$), existe un método que nos permite calcular su determinante. Dicho método es conocido como *desarrollo por cofactores* y lo que hace es reducir el problema de calcular el determinante de una matriz de nxn a calcular determinantes de matrices de $(n-1)x(n-1)$. De esta manera, se puede repetir el proceso con cada matriz de $(n-1)x(n-1)$ para obtener matrices de $(n-2)x$ $(n-2)$ y así sucesivamente hasta llegar a matrices de 2x2 en donde se emplea la igualdad (2.11).

Definición.- Sea K un anillo conmutativo con unidad y sea $A=[a_{ij}]$ una matriz de nxn sobre K. Sea A_{ij} la matriz de $(n-1)x(n-1)$ que se obtiene de A al eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna. Al determinante $|A_{ij}|$ se le denomina *menor* del elemento a_{ij}.

Definición.- Sea $A=[a_{ij}]$ una matriz de nxn sobre el anillo K. El *cofactor* c_{ij} de a_{ij} se define como $c_{ij}=(-1)^{i+j}|A_{ij}|$.

Definición.- Sea $A=[a_{ij}]$ una matriz de nxn sobre el anillo K. Se define

(2.12) $$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{ik}$$

(2.13) $$= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}c_{kj}\,.$$

Las igualdades (2.12) y (2.13) representan el desarrollo del determinante de A con respecto a su i-ésima fila y a su j-ésima columna, respectivamente.

Sea

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

Para evaluar el determinante de A mediante un desarrollo por cofactores según la primera fila, debemos encontrar primero los menores A_{1j} correspondientes, es decir,

$$|A_{11}|=\begin{vmatrix}5 & 6\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4, \qquad |A_{12}|=\begin{vmatrix}4 & 6\\ 7 & 2\end{vmatrix}=-34 \quad \text{y} \quad |A_{13}|=\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 1\end{vmatrix}=-31,$$

y estos resultados los empleamos para calcular los cofactores c_{1j}

$$c_{11}=(-1)^2(4)=4, \qquad c_{12}=(-1)^3(-34)=34 \qquad c_{13}=(-1)^4(-31)=-31.$$

Ahora, sabemos que el $|A|=\sum_{i=1}^{n} a_{1i}c_{1i}$, por lo tanto

$$|A|=(3)(4)+(-1)(34)+(2)(-31)=-84.$$

En seguida enunciaremos algunas de las propiedades básicas de los determinantes.

1. Si consideramos el determinante como una función de los vectores columna de la matriz, el determinante es una función lineal; es decir, si $A=(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, donde A_i es la i-ésima columna de A, esto es

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix},$$

entonces

$$\det A = \det (A_1, A_2, \ldots, A_n),$$

y de acuerdo con esto, tenemos que

$$\det (A_1, \ldots, A_{p-1}, A_p + B, A_{p+1}, \ldots, A_n) = \det (A_1, \ldots, A_{p-1}, A_p, A_{p+1}, \ldots, A_n) + \det (A_1, \ldots, A_{p-1}, B, A_{p+1}, \ldots, A_n)$$

2. Si t es un número, entonces

$$\det (A_1, \ldots, tA_p, \ldots, A_n) = t \det (A_1, \ldots, A_p, \ldots, A_n)$$

3. Si dos columnas de una matriz son iguales, entonces el determinante de dicha matriz es igual a cero.

4. Si I es la matriz identidad de nxn, entonces $\det(I) = 1$.

5. Si se suma un múltiplo de una columna a otra columna de la misma matriz, entonces el valor del determinante no cambia.

6. Si se intercambian dos columnas de una matriz, entonces el determinante cambia de signo.

7. El determinante de una matriz es igual al determinante de su transpuesta.

8. Los n vectores columna (o fila) de una matriz de nxn son linealmente dependientes si y sólo si el determinante de la matriz es igual a cero.

Haciendo uso del determinante de una matriz, podemos obtener otro método para resolver un sistema lineal de n ecuaciones con n *incógnitas*. Este método se conoce como *regla de Cramer*[6] y se explica mediante el siguiente teorema.

Teorema.- Considérese el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = y_i \qquad \text{con } i=1,\ldots,n$$

y sean A la matriz de coeficientes del sistema y

$$Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Si $|A| \neq 0$, entonces el sistema tiene la solución única

$$x_i = \frac{|A_{(i)}|}{|A|} \qquad \text{con } i=1,\ldots, n;$$

donde $A_{(i)}$ es la matriz obtenida de A al reemplazar su i-ésima columna por Y.

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

[6] Gabriel Cramer, matemático suizo (1704 - 1752).

$$(2.14)\qquad \begin{aligned} -2x_1 + \ x_2 - \ x_3 &= -7 \\ x_1 - 2x_2 + \ x_3 &= \ 4\,. \\ 3x_1 - \ x_2 - 2x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Para este caso tenemos que $|A| = -10$ y, por tanto

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -7 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-20}{-10} = 2\,, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -7 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-10}{-10} = 1$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-40}{-10} = 4\,.$$

Así, la solución del sistema (2.14) queda como

$x_1=2,$ $\qquad$ $x_2=1$ $\qquad$ y $\qquad$ $x_3=4.$

En conclusión, podemos decir que si un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene una matriz de coeficientes cuyo determinante es diferente de cero, entonces ese sistema tiene una solución que se puede determinar mediante la regla de Cramer.

Parecería natural pensar que la teoría de los determinantes sólo se utiliza en el caso en que los elementos de las matrices son escalares, sin embargo, la aplicación de dicha teoría se extiende a cuestiones más generales; por ejemplo al caso de funciones.

2.5 Matrices Inversibles

Empezaremos esta sección dando la definición de matriz inversible.

Definición.- Sea F un campo y sea A una matriz cuadrada nxn sobre F. Una matriz B de nxn sobre F, que tiene la propiedad de que $AB=BA=I$, se llama *inversa* de A. Si A es una matriz que tiene inversa, se le denomina *matriz inversible* o *matriz no singular*. Si A no tiene inversa se le llama *matriz singular*. La inversa de una matriz se denota por A^{-1} y es única como pre o como posmultiplicadora.

En la sección 2.3 dijimos que si A y B son matrices de nxn sobre F, B es equivalente por filas a A si y sólo si $B=PA$, donde P es un producto de matrices elementales de nxn. Supongamos que B es la matriz I de nxn. De acuerdo con la definición anterior, tenemos que si $PA=I$, entonces la matriz P es la inversa de A, es decir $P=A^{-1}$.

Una aplicación de la inversa de una matriz es en la solución de un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema.- Si un sistema $AX=Y$ de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene una matriz de coeficientes A no singular, entonces el sistema tiene una solución única y está dada por $X=A^{-1}Y$.

Fácilmente se puede demostrar este teorema con solo multiplicar por A^{-1} cada miembro del sistema $AX=Y$, es decir, $A^{-1}(AX)=A^{-1}Y$ y como $A^{-1}(AX)=(A^{-1}A)X=IX=X$, tenemos que $X=A^{-1}Y$.

Propiedades de las matrices inversas

i) El producto de una matriz por su inversa es conmutativo

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

ii) La inversa de la inversa de una matriz es la matriz original

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

iii) La inversa de un producto de matrices no singulares, es igual al producto de las inversas tomadas en orden contrario

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

iv) Si A es una matriz no singular, entonces A' es no singular y $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

Actualmente se dispone de muchos métodos para invertir matrices. En este trabajo sólo mencionaremos dos, uno de ellos es a través de operaciones elementales de fila y el otro es el conocido como método de la matriz adjunta.

Para encontrar la matriz inversa de A por medio de operaciones elementales de fila, primero formamos la llamada matriz particionada $[A \mid I]$. Se le denomina particionada debido a que está compuesta de más de una matriz: en este caso de la matriz A y de la matriz identidad. Sobre dicha matriz realizamos una cierta sucesión de operaciones elementales de fila hasta transformarla en $[I \mid B]$ lo cual es posible si A es una matriz no singular. En ese momento podemos decir que B es la inversa de A. Es importante que consideremos a $[A \mid I]$ como una sola matriz de tal manera que lo que se haga en una fila de A se realice también en la correspondiente de I.

Consideremos la siguiente matriz

(2.15) $$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 5 & 5 & 1\end{bmatrix}.$$

Ahora formamos la matriz particionada $[A \mid I]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

en seguida multiplicamos por –5 la primera fila y la sumamos a la tercera

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1\end{array}\right],$$

después multiplicamos la segunda fila por 1/2

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1\end{array}\right],$$

ahora multiplicamos la segunda fila por –1 y la sumamos a la primera para obtener

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1\end{array}\right],$$

después multiplicamos la tercera fila por –1/4

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right],$$

ahora multiplicamos por -3/2 la tercera fila y la sumamos a la segunda

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right],$$

y finalmente multiplicamos por 1/2 la tercera fila y la sumamos a la primera

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right],$$

Por lo tanto, para el caso de la matriz A dada en (2.15), nos queda

$$B=\tfrac{1}{8}\begin{bmatrix} 13 & -4 & -1 \\ -15 & 4 & 3 \\ 10 & 0 & -2 \end{bmatrix}=A^{-1}.$$

Fácilmente se puede verificar que $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

Es importante señalar que A es una matriz singular si y sólo si A es equivalente por filas a una matriz B que tiene por lo menos una fila que consta solamente de ceros. Por lo tanto, si al realizar operaciones de fila a la matriz particionada $\left[A \mid I\right]$ llegamos a una matriz con esta característica, podemos suspender el proceso concluyendo que es una matriz singular.

Antes de empezar a describir el método de la matriz adjunta, introduciremos una definición.

Definición.- Sea $A=[a_{ij}]$ una matriz de nxn sobre el campo F. Se define la matriz $adj(A)$ de nxn, denominada *adjunta* de A, como la matriz cuyo i,j-ésimo elemento es el cofactor c_{ji} del elemento a_{ij} de A; es decir,

$$adj(A)=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}.$$

El método de la matriz adjunta se basa en la teoría de los determinantes y consiste en construir la matriz adjunta de la matriz original y dividir cada elemento de la misma por el determinante de la matriz dada.

Teorema.- Sean F un campo y A una matriz de nxn con elementos en K. Si $|A| \neq 0$, entonces

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\text{adj}(A)).$$

Ejemplo.- Considérese la siguiente matriz.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Para hallar A^{-1} por el método de la matriz adjunta, primero deben determinarse los cofactores c_{ij} de la matriz A.

$$c_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}6 & 2\\ 0 & -3\end{vmatrix}=-18, \qquad c_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=17, \qquad c_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5 & 6\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-6,$$

$$c_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & -3\end{vmatrix}=-6, \qquad c_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-10, \qquad c_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2,$$

$$c_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 6 & 2\end{vmatrix}=-10, \qquad c_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{vmatrix}=-1 \quad \text{y} \quad c_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & 6\end{vmatrix}=28.$$

Por lo tanto la matriz C de cofactores es

$$C=\begin{bmatrix}-18 & 17 & 6\\ -6 & -10 & -2\\ -10 & -1 & 28\end{bmatrix},$$

y como la $\text{adj}(A)=C'$, tenemos que

$$\text{adj}(A)=\begin{bmatrix}-18 & -6 & -10\\ 17 & -10 & -1\\ -6 & -2 & 28\end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$A^{-1}=-\frac{1}{94}\begin{bmatrix}-18 & -6 & -10\\ 17 & -10 & -1\\ -6 & -2 & 28\end{bmatrix}.$$

Teorema.- Sea F un campo y sea A una matriz de nxn sobre F, entonces $A(\text{adj}(A)) = (\text{adj}(A))A = |A|\, I$.

De acuerdo con el teorema anterior tenemos que

$$\begin{aligned} a_{i1}c_{j1} + a_{i2}c_{j2} + \cdots + a_{in}c_{jn} &= |A| \qquad \text{si } i = j \\ &= 0 \qquad \text{si } i \neq j, \end{aligned}$$

esto significa que

$$A(\text{adj}(A)) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix} = |A|\, I.$$

De acuerdo con el enunciado anterior, para construir la solución general de una ecuación no homogénea, necesitamos conocer la solución general de la ecuación *homogénea* asociada y además una solución particular de la ecuación no homogénea. Veremos ahora como encontrar ésta última.

Ha sido mencionado que el método de coeficientes indeterminados y el método de operadores, sirven sólo para tipos limitados de funciones, tales como polinomios, exponenciales, etc. *Sin embargo el método de variación de parámetros, también* conocido como método de Lagrange, sirve para todos los casos. También hemos dicho ya que el método mencionado es un método general para determinar una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea (3.1) siempre y cuando se conozca el sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea correspondiente (3.2) y, definitivamente ésta es la limitante más importante del método.

El procedimiento consiste en reemplazar las constantes c_1, c_2, ..., c_n de la solución general de la ecuación homogénea (3.2) por funciones u_1, u_2, ... , u_n de manera que se satisfaga la igualdad (3.1), es decir, se intenta encontrar funciones $u_1(x)$, $u_2(x)$,..., $u_n(x)$, tales que la combinación lineal $u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2 + \ldots + u_n(x)y_n$, sea una *solución de la ecuación no homogénea*. En principio, esto podría parecer una mala idea, ya que se está cambiando el problema de encontrar una función desconocida $y(x)$ por el problema, aparentemente más difícil, de encontrar n funciones desconocidas $u_1(x)$, $u_2(x)$,..., $u_n(x)$. Por el hecho de reemplazar las constantes c_i por funciones $u_i(x)$ que varían con x, se le dio el nombre de ***método de variación de parámetros.***

La importancia del método de variación de parámetros es que hace posible determinar las funciones u_i de una forma relativamente sencilla. Para encontrar dichas funciones, se requieren n condiciones. Obsérvese que la ecuación diferencial no homogénea impone solamente una condición sobre las n funciones desconocidas u_1, u_2,..., u_n, ésta está dada por el hecho de que la igualdad

$$y_p(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)+\cdots+u_n(x)y_n(x) \tag{3.3}$$

debe de satisfacer la ecuación diferencial (3.1) y las otras n-1 condiciones son arbitrarias, es decir, se tiene cierta libertad para seleccionarlas y pueden elegirse de manera tal que faciliten los cálculos requeridos.

Considérese la ecuación diferencial lineal no homogénea de orden n

$$\sum_{k=0}^{n} q_k(x)y^{(k)} = g(x), \tag{3.4}$$

donde $q_0, \ldots, q_n$ son $n+1$ funciones arbitrarias de x y q_n es no nula. Sean $y_1, \ldots, y_n$, n soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea correspondiente

$$\sum_{k=0}^{n} q_k(x)y^{(k)} = 0. \tag{3.5}$$

Entonces, esto quiere decir que las y_k forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación (3.5) y que cualquier otra solución de ésta será una combinación lineal de dichas funciones; esto es, si la función $y=y(x)$ resuelve la ecuación (3.5), entonces

$$y = c_1y_1+\ldots+c_ny_n,$$

para algunas constantes $c_1, \ldots, c_n$.

Supongamos ahora que $u_1, \ldots, u_n$ son n funciones tales que

(3.6) $$y_p = \sum_{j=1}^{n} u_j y_j$$

es una solución de la ecuación diferencial no homogénea (3.4), entonces

(3.7) $$\sum_{k=0}^{n} q_k(x) y_p^{(k)} = g(x).$$

Ahora, el problema es determinar el valor de las funciones u_k, de la solución y_p dada en la igualdad (3.6), para ello procedemos de la manera siguiente:

En primer lugar, se deriva la expresión (3.6) obteniendo

(3.8) $$y_p' = \sum_{j=1}^{n} (u_j y_j' + u_j' y_j).$$

De acuerdo con Lagrange, el matemático que inventó el método, si observamos la igualdad (3.8) podemos darnos cuenta de que si hacemos otra diferenciación, se introducirían más términos, y de lo que se trata es de simplificar las expresiones resultantes, por lo que debemos de aprovechar la libertad que tenemos de imponer condiciones sobre las u_j de manera tal que se cumpla el objetivo. Por lo tanto, se eligen las u_j de forma tal que

(3.9) $$\sum_{j=1}^{n} u_j' y_j = 0.$$

El hecho de igualar esto con cero es porque, como se mencionó en el párrafo anterior, la idea es que los cálculos posteriores se simplifiquen, pero de la misma forma se hubiera podido igualar el miembro izquierdo de (3.9) con cualquier otra función, por ejemplo *sen x* o e^x. Después de proponer la igualdad (3.9), tenemos que

$$(3.10) \qquad y_p' = \sum_{j=1}^{n} u_j y_j'.$$

Tomando en cuenta esta igualdad, calculamos la segunda derivada de y_p, obteniendo

$$y_p'' = \sum_{j=1}^{n} (u_j y_j'' + u_j' y_j'),$$

como en el caso anterior y por las mismas razones, nuevamente proponemos

$$(3.11) \qquad \sum_{j=1}^{n} u_j' y_j' = 0,$$

con lo que obtenemos

$$y_p'' = \sum_{j=1}^{n} u_j y_j''.$$

Podemos continuar de esta forma hasta encontrar las primeras n derivadas de y_p, de tal manera que para la (n-1)-ésima derivada obtendríamos

$$y_p^{(n-1)} = \sum_{j=1}^{n} (u_j y_j^{(n-1)} + u_j' y_j^{(n-2)}),$$

donde nuevamente propondríamos

(3.12) $$\sum_{j=1}^{n} u_j' y_j^{(n-2)} = 0,$$

quedando de esta manera que

$$y_p^{(n-1)} = \sum_{j=1}^{n} u_j y_j^{(n-1)}.$$

Finalmente para la n-ésima derivada de y_p encontramos que

$$y_p^n = \sum_{j=1}^{n} (u_j y_j^{(n)} + u_j' y_j^{(n-1)}).$$

Si sustituimos las derivadas de y_p en la ecuación (3.7) resulta

(3.13) $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} q_k y_p^{(k)} &= q_n y_p^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} q_k y_p^{(k)} \\ &= q_n \left(\sum_{j=1}^{n} (u_j y_j^{(n)} + u_j' y_j^{(n-1)}) \right) + \sum_{k=0}^{n-1} q_k \left(\sum_{j=1}^{n} u_j y_j^{(k)} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} q_k \left(\sum_{j=1}^{n} u_j y_j^{(k)} \right) + q_n \sum_{j=1}^{n} u_j' y_j^{(n-1)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} u_j \left(\sum_{k=0}^{n} q_k y_j^{(k)} \right) + q_n \sum_{j=1}^{n} u_j' y_j^{(n-1)} \\ &= g(x).\end{aligned}$$

Como las y_j son soluciones de la ecuación homogénea (3.5), tenemos que

$$\sum_{k=0}^{n} q_k y_j^{(k)} = 0 \qquad \text{para } j = 1\,, \ldots\,, n,$$

por lo tanto, de la igualdad (3.13) obtenemos

$$q_n \sum_{j=1}^{n} u_j' y_j^{(n-1)} = g(x), \tag{3.14}$$

o bien

$$\sum_{j=1}^{n} u_j' y_j^{(n-1)} = \frac{g(x)}{q_n}. \tag{3.15}$$

Tomando en cuenta las igualdades (3.9), (3.11), (3.12) y (3.15), podemos ver que bajo el procedimiento planteado se obtiene un sistema de n ecuaciones con n incógnitas u_1', u_2', $\cdots$, u_n', el cual se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} u_j' y_j^{(k)} &= 0 && \text{para } k = 0, 1, \ldots , n\text{-}2 \\ &= \frac{g(x)}{q_n} && \text{para } k = n\text{-}1. \end{aligned} \tag{3.16}$$

3.2 La Matriz del Sistema Fundamental de Soluciones de la Ecuación Homogénea

En el capítulo 2 cuando hablamos acerca de los sistemas de ecuaciones, hicimos mención de que el plantear un sistema en forma matricial tiene algunas ventajas para encontrar su solución, tomando en cuenta eso, plantearemos el sistema (3.16) matricialmente.

Empezaremos definiendo una matriz $\mathcal{F}$ de n x n mediante las expresiones

$$\left(\mathcal{F}\right)_{ij} = y_j^{(i-1)}$$

y una matriz $\mathcal{U}'$ de n x 1 donde $(\mathcal{U}')_k = u_k'$, con estas definiciones podemos escribir el sistema de ecuaciones (3.16) como

$$\mathcal{F}\mathcal{U}' = \frac{g(x)}{q_n} \in_n \tag{3.17}$$

donde $\in_i$ es un vector columna de n elementos cuya j-ésima componente está dada por $(\in_i)_j = \delta_{ij}$

Ahora, la matriz $\mathcal{F}$ es inversible en el intervalo formado por la intersección de los intervalos donde las funciones y_k son soluciones de la ecuación diferencial homogénea (3.5), ya que dichas funciones forman allí un sistema fundamental de soluciones de la ecuación citada. De esta manera, el wronskiano W de $y_1, \ldots, y_n$ no se anula en el intervalo señalado y, puesto que $W = \det \mathcal{J}$, tenemos que $\det \mathcal{J} \neq 0$.

Sea $C = (c_{ij})$ la matriz de cofactores de $\mathcal{J}$. Se tiene

$$\operatorname{adj} \mathcal{J} = C^t,$$

quedando de la ecuación (3.17) que

(3.18) $$\mathcal{U}' = \frac{g(x)}{q_n \mathrm{W}}(adj\, \mathcal{J}) \in_n .$$

Expresando esta igualdad componente a componente nos queda que, para $i=1, \ldots, n$,

$$u_i' = \frac{g(x)}{q_n \mathrm{W}} \sum_{j=1}^{n} \left(adj\, \mathcal{J}\right)_{ij} (\in_n)_j$$

$$= \frac{g(x)}{q_n \mathrm{W}} \sum_{j=1}^{n} \delta_{nj} \left(adj\, \mathcal{J}\right)_{ij}$$

$$= \frac{g(x)}{q_n \mathrm{W}} \left(adj\, \mathcal{J}\right)_{in}.$$

Por otra parte, $\left(\operatorname{adj} \mathcal{J}\right)_{in} = c_{ni}$, de manera que si definimos una función f como

(3.19) $$f = \frac{g(x)}{q_n \mathrm{W}},$$

tenemos que las expresiones para las u_i se pueden escribir en la forma

(3.20) $$u_i' = fc_{in} \qquad \text{para } i = 1, \ldots, n$$

Obviamente, integrando ambos lados de estas igualdades obtenemos las n funciones u_k, quedando

(3.21) $$u_i(x) = \int f(x) c_{ni}(x)dx \qquad \text{para } i = 1, \ldots, n$$

y de aquí que la función y_p propuesta en la igualdad (3.6) quede como

(3.22) $$y_p(x) = \int_a^x \left[\sum_{j=1}^{n} y_j(x) c_{nj}(\xi) f(\xi) \right] d\xi,$$

donde a es una constante.

3.3 Solución de una Ecuación Diferencial no Homogénea por el Método de Variación de Parámetros

En esta sección presentaremos algunos ejemplos que ilustran la aplicación del método desarrollado en las secciones anteriores.

Ejemplo. Resolver la siguiente ecuación

(3.23) $$y'' - 3y' + 2y = xe^x + 2x.$$

Evidentemente, esta ecuación se resuelve fácilmente por otros métodos; por ejemplo por el de coeficientes indeterminados o por el de operadores, ya que se trata de una ecuación con coeficientes constantes y su término no homogéneo es una combinación de polinomios y exponenciales. Resolviéndola por cualquiera de esos métodos llegaríamos a la solución

$$y(x) = \frac{3}{2} + x + \left(c_1 - x - \frac{x^2}{2}\right)e^x + c_2 e^{2x},$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Ahora aplicando el método de variación de parámetros, tenemos para este caso que $n=2$, $q_2=1$ y $g(x) = xe^x+2x$. La solución general de la ecuación homogénea

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

es: $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$, por lo tanto el sistema fundamental de soluciones de dicha ecuación está formado por las funciones $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = e^{2x}$, quedando de aquí que

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Tenemos que $W(y_1, y_2) = \det \mathcal{J} = e^{3x}$, entonces, de acuerdo a la expresión dada en (3.19), se tiene que

$$f(x) = \frac{xe^x + 2x}{e^{3x}}.$$

Calculando los cofactores correspondientes, se observa que en este caso, $y_{21}(x) = -e^{2x}$ y $y_{22}(x) = e^{x}$.

Según la expresión dada en la igualdad (3.21) tenemos que

$$u_1(x) = \int \frac{xe^x + 2x}{e^{3x}}(-e^{2x})dx = -\int (x + 2xe^{-x})dx$$

$$= -\frac{x^2}{2} + (2x+2)e^{-x},$$

$$u_2(x) = \int \frac{xe^x + 2x}{e^{3x}}(e^x)dx = \int (xe^{-x} + 2xe^{-2x})dx$$

$$= (-x-1)e^{-x} - (x + \tfrac{1}{2})e^{-2x}.$$

Y de aquí que

$$y_p(x) = \frac{3}{2} + x - (1 + x + \frac{x^2}{2})e^x.$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación (3.23) es

$$y(x) = \frac{3}{2} + x + \left(c_1 - x - \frac{x^2}{2}\right)e^x + c_2e^{2x},$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Esta solución, como se mencionó anteriormente, pudo haber sido encontrada por otros métodos.

En la práctica puede ser difícil o, en ocasiones imposible, resolver las integrales obtenidas para las funciones u_i. Por ejemplo, supongamos que el lado derecho de la ecuación (3.23) es *sen* x^3 en lugar de xe^x+2x. En este caso llegaríamos a las igualdades

$$u_1' = -e^{-x}\, sen\, x^3 \quad \text{y} \quad u_2' = e^{-2x}\, sen\, x^3,$$

de modo que

$$u_1 = -\int e^{-x}\, sen\, x^3\, dx + c_1 \quad \text{y} \quad u_2 = \int e^{-2x}\, sen\, x^3\, dx + c_2.$$

Por supuesto estas integrales no pueden calcularse usando funciones elementales; sin embargo, esto no es una limitante, ya que siempre queda el recurso numérico. La solución de la ecuación, para este caso se podría expresar como

$$y = e^x\left(-\int e^{-x}\, sen\, x^3\, dx + c_1\right) + e^{2x}\left(\int e^{-2x}\, sen\, x^3\, dx + c_2\right),$$

Veremos otro ejemplo en el que no se puede aplicar el método de operadores en virtud de que los coeficientes de la ecuación no son constantes.

Ejemplo. Resolver la ecuación diferencial

(3.24) $$(1-x)y''+xy'-y = 2(x-1)^2e^{-x}$$

Para este caso tenemos que $n=2$ quedando $q_2(x)=-(x-1)$ y $g(x)=2(x-1)^2e^{-x}=-2q_2^2(x)e^{-x}$.

El sistema fundamental de soluciones de la ecuación

$$(1-x)y'' + xy' - y = 0$$

lo forman las funciones $y_1(x) = x$ y $y_2(x) = e^x$ quedando entonces que

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{pmatrix}$$

De aquí se obtiene $W = \det \mathcal{F} = (x-1)e^x = -q_2(x)e^x$, resultando de la igualdad (3.19) que

$$f(x) = -2e^{-2x}.$$

Tomando en cuenta que para este caso $y_{21}(x) = -e^x$ y $y_{22}(x) = x$, de la igualdad (3.21) obtenemos

$$u_1(x) = 2\int e^{-x}dx = -2e^{-x}$$

$$u_2(x) = -2\int xe^{-2x}dx = \frac{1}{2}(2x+1)e^{-2x}$$

y de aquí que

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}(2x-1)e^{-x}.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación (3.24) es

$$y(x) = c_1 x + c_2 e^x - \frac{1}{2}(2x-1)e^{-x},$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Daremos un último ejemplo.

Ejemplo. Resolver la ecuación diferencial

(3.25) $$y'''-2y''+y'-2y = g(x),$$

donde g es una función no idénticamente nula.

Se tiene para este caso que $n=3$ y $q_3(x)=1$. El sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea

$$y'''-2y+y'-2y=0$$

está formado por las funciones $y_1(x) = e^{ix}$, $y_2(x) = e^{-ix}$ y $y_3(x) = e^{2x}$, quedando de aquí que

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} e^{ix} & e^{-ix} & e^{2x} \\ ie^{ix} & -ie^{-ix} & 2e^{2x} \\ -e^{ix} & -e^{-ix} & 4e^{2x} \end{pmatrix}$$

El wronskiano W de las funciones y_j ($j=1,2,3$) queda en este caso como $W = -10ie^{2x}$, resultando, según la expresión (3.19) que

$$f(x) = -\frac{i}{10}e^{-2x}g(x).$$

Observando ahora que $y_{31}(x) = (2+i)e^{(2-i)x}$, $y_{32}(x) = -(2-i)e^{(2+i)x}$ y $y_{33}(x) = -2i$, y de acuerdo con la igualdad (3.21), tenemos que

$$u_1(x) = \frac{1-2i}{10}\int_a^x e^{-i\xi}g(\xi)d\xi$$

$$u_2(x) = \frac{1+2i}{10}\int_a^x e^{i\xi}g(\xi)d\xi$$

$$u_3(x) = -\frac{1}{5}\int_a^x e^{-2\xi}g(\xi)d\xi$$

Efectuando la suma de los productos y_ju_j encontramos para y_p la expresión análoga a la dada en (3.22), la cual queda en este caso como

$$y_p(x) = \frac{1}{10}\int_a^x \left[(1-2i)e^{-i(\xi-x)} + (1+2i)e^{i(\xi-x)} - 2e^{-2(\xi-x)}\right]g(\xi)d\xi,$$

o bien, introduciendo el cambio de variable $u = \xi - x$, encontramos

$$y_p(x) = \frac{1}{10}\int_a^x \left(b_1e^{-iu} + b_2e^{iu} + b_3e^{-2u}\right)g(u+x)du,$$

donde $b_1 = 1-2i$, $b_2 = 1+2i$ y $b_3 = -2$. Por ejemplo, si $g(\xi) = e^{2\xi}$, esta última igualdad queda como

$$y_p(x) = \frac{1}{10}\int_0^{a-x}\left(b_1e^{-iu} + b_2e^{iu} + b_3e^{-2u}\right)e^{2(u+x)}du.$$

Tomando $a = 0$ y resolviendo la integral obtenemos

$$y_p(x) = \left(\frac{4+3i}{50}\right)e^{-ix} + \left(\frac{4-3i}{50}\right)e^{ix} + \left(\frac{5x-4}{25}\right)e^{2x}.$$

Finalmente, dado que e^{ix}, e^{-ix} y e^{2x} son soluciones de la ecuación homogénea correspondiente, podemos escribir la solución general de la ecuación diferencial (3.25) como

$$y(x) = c_1e^{ix} + c_2e^{-ix} + c_3e^{2x} + \frac{1}{5}xe^{2x}.$$

Como aclaración respecto a este ejemplo, queremos señalar que hubiera sido totalmente equivalente trabajar con el conjunto fundamental de soluciones

$$y_1(x) = \cos x, \qquad y_2(x) = \operatorname{sen} x, \qquad y_3(x) = e^{2x},$$

y se hubiera llegado al mismo resultado. Obviamente las funciones y_1 y y_2 provienen de las funciones complejas e^{ix} y e^{-ix}.

CONCLUSIONES

A través de las páginas de este documento, se observa la trascendencia de la formación y el conocimiento de materias como Álgebra Lineal, Cálculo Diferencial y Ecuaciones Diferenciales, todos ellas impartidas en la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación. Dicha formación y conocimientos son, a mi entender, requisitos que debe cubrir un alumno de la Licenciatura mencionada. Estos elementos fueron los que dieron paso a la elaboración del presente trabajo.

Las conclusiones se pueden empezar reconociendo que resolver una ecuación de orden mayor o igual que dos es todo un reto. El método que se propone en este trabajo es una alternativa, como todos los demás métodos para encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales.

En principio, cualquier problema que pueda ser planteado en términos matemáticos, a través de una ecuación diferencial no homogénea, podría ser resuelto utilizando el método de variación de parámetros, sin embargo, y por desgracia, el método presenta algunas limitantes. Entre éstas, definitivamente la más importante la representa el hecho de que para poder emplear el método, es necesario conocer el sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada con la ecuación no homogénea. Si se conoce el sistema fundamental de soluciones, se puede entonces aplicar el método. Al aplicarlo, parecería que siempre hay que calcular una matriz de funciones de nxn, sin embargo, sólo hay que calcular el último renglón de dicha matriz que se convierte en la última columna de una cierta matriz de cofactores, porque en realidad, son los únicos valores que se utilizan para encontrar las funciones que se requieren para determinar la solución buscada.

Con este procedimiento se ahorran nx(n-1) operaciones en el cálculo de una matriz, aunque su determinante, que también se requiere, se tiene que calcular completo.

Si regresamos al hecho ya citado, de la enorme dificultad que en general representa el resolver una ecuación diferencial de orden mayor o igual que dos, podríamos señalar aquí que el método desarrollado admite la aplicación del *análisis numérico*, tanto en las partes referentes al álgebra lineal como a las concernientes a procesos de integración.

Finalmente, se considera que la exposición de este método, no es recomendable con fines académicos para darse en un primer curso de Ecuaciones Diferenciales, debido a los conocimientos que se requieren y que van implícitos en la aplicación de éste. Sin embargo, se podría considerar como un tema extra al finalizar el temario que comprende la materia de Ecuaciones Diferenciales.

BIBLIOGRAFÍA

[1] GIORDANO WEIR, *Differential Equations, a modelling approach,* Addison Wesley, 1991.

[2] KENNETH HOFFMAN, RAY KUNZE, *Álgebra Lineal*, Prentice Hall, Méx, D.F. 1987.

[3] LANG SERGE, Algebra Lineal, Fondo Educativo Interamericano, México, D.F., 1986

[4] MOORE JOHN T., *Elements of Linear Algebra and Matriz Theory*, McGraw-Hill, México D.F., 1973

[5] RAINVILLE EARL D., *Ecuaciones Diferenciales*, McGraw-Hill, México D.F., 1993.

[6] SIMMONS GORGE F., *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas*, McGraw-Hill, México D.F., 1993

[7] VALADEZ R. MANUEL, *Notas sobre Series de Fourier*, por publicar.

[8] VALADEZ R. MANUEL, *Notas sobre Álgebra Lineal* I, por publicar.

[9] WILLIAM E. BOYCE, *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*, NORIEGA LIMUSA, Méx. D.F., 1991.