003847/ 6.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

TORNEOS LIBRES DE SUBTORNEOS TRANSITIVOS GRANDES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

(MATEMATICAS)

P R E S E N T A :

ADOLFO SANCHEZ FLORES

DIRECTOR(A) DE TESIS: DR. GILBERTO CALVILLO VIVES.

MEXICO, D. F. 1997

AGRADECIMIENTOS

Doy las gracias a las siguientes personas que me ayudaron en la realización de este trabajo:

Al Dr. Gilberto Calvillo Vives, mi tutor de Doctorado.

Al Dr. Víctor Neumann Lara, quien me introdujo en el tema de esta tesis.

Al M. en C. Apolinar Calderón Segura y al Quim. Guillermo Krötzsch Gómez, por todo el apoyo técnico dado.

A Margarita Rosas Landa, por el apoyo mecanográfico.

Dedico este trabajo a todas las personas que de una u otra forma influyeron en mi formación académica; entre ellas, y muy especialmente, al Dr. David Romero Vargas.

TOURNAMENTS FREE OF LARGE TRANSITIVE SUBTOURNAMENTS

ADOLFO SÁNCHEZ FLORES

This thesis deals with the structure and size of the greatest tournaments that do not contain, for a given integer $k \leq 7$, the transitive tournament of order k (denoted TT_k). Also, related to the problem posed by Erdös and Moser of determining, for each integer $n > 0$, the greatest integer $v(n)$ such that all tournaments of order n contain $TT_{v(n)}$, some results are obtained, including computational aspects.

The notation and main properties of tournaments free of TT_4, that will be used in this work, are presented in the first two chapters. Then, in Chapter III, some theorems on tournaments free of TT_5 are proved; in particular, it is seen that there exists only one of this tournaments of order 12.

The Chapter IV deals with tournaments free of TT_6; the principal results are the uniqueness of these tournaments when they have order 26 and 27. The tournaments free of TT_7 are studied in Chapter V: It is proved that their order is at most 52; also, the greatest circulant tournament free of TT_7 is showed (which is of order 31).

The problem of extending any given tournament T of order n and free of TT_r, for an $r > 0$, to another one free of TT_{r+1}, is considered in Chapter VI: here it is established that there exist $v \in V(T)$ and two tournaments T' and T'' free of TT_{r+1}, respectively of orders $n+4$ and $n+5$, such that T' is extension of T and T'' is extension of $T \setminus v$; this gives a tournament of order 32 free of TT_7, that is the greatest (and unique of this order) known of this type.

The following Chapter, VII, deals with computational complexity: It is proved the NP-completeness of the problem of determining, given an integer k and a tournament, if the latter contains a transitive subtournament of order k. Finally, with the aid of a computer, the values $cv(r)$ ($r \leq 55$) and $gv(s)$ ($s < 1000$) are obtained in Chapter VIII, where $cv(r)$ and $gv(s)$ are, respectively, the greatest integers such that each circulant tournament of order r contains $TT_{cv(r)}$, and the Galois tournament of order s (whenever it exists) contains $TT_{gv(s)}$. In particular, better upper bounds for $v(n)$, $n \leq 991$, are given.

A conclusions section ends this work, where some ideas are presented about how can be continued this investigation.

Contenido

Indice de Figuras

RESUMEN

La presente tesis es, principalmente, un estudio sobre la estructura y el tamaño de los torneos más grandes que no contienen, para un entero dado $k \leq 7$, al torneo transitivo de orden k (el cual es denotado por TT_k). También se obtienen algunos resultados (incluyendo aspectos computacionales) relacionados con el problema propuesto por Erdös y Moser de determinar, para cada entero $n > 0$, el mayor entero $v(n)$ tal que todos los torneos de orden n contienen a $TT_{v(n)}$.

En los primeros dos capítulos se presentan la notación y los resultados básicos sobre torneos libres de TT_4 que se utilizarán a lo largo del trabajo. Después, en el Capítulo III, se prueban algunos teoremas sobre torneos libres de TT_5; en particular, se demuestra que existe un único torneo de orden 12 libre de estos subtorneos.

El Capítulo IV trata sobre torneos libres de TT_6; los resultados obtenidos más importantes son la unicidad de los torneos de orden 26 y 27 que no contienen a estos subtorneos. A continuación, en el Capítulo V, se estudian los torneos libres de TT_7: se prueba que todo torneo de orden 53 contiene estos subtorneos y se muestra el torneo circulante más grande que no los contiene (el cual es de orden 31).

El problema de extender un torneo dado cualquiera T de orden n y libre de TT_r, para un $r > 0$, a otro libre de TT_{r+1}, es tratado en el Capítulo VI; aquí se demuestra que existen $v \in V(T)$ y dos torneos T' y T'' libres de TT_{r+1}, respectivamente de órdenes $n+4$ y $n+5$, tales que T' es extensión de T y T'' es extensión de $T \setminus v$; esto va a dar un torneo de orden 32 libre de TT_7, que es el más grande (y único) conocido de este tipo.

El siguiente Capítulo, VII, trata sobre complejidad computacional: Se prueba que es NP-completo el problema de determinar, para un entero k y un torneo dados, si éste contiene un subtorneo transitivo de orden k. Finalmente, en el Capítulo VIII se obtienen, usando una computadora, los valores de $cv(r)$ ($r \leq 55$) y $gv(s)$ ($s < 1000$), donde $cv(r)$ y $gv(s)$ son, respectivamente, los enteros más grandes tales que todo torneo circulante de orden r

contiene a $TT_{cc(r)}$ y el torneo de Galois de orden s (cuando existe) contiene a $TT_{gc(s)}$. En particular, se dan mejores cotas superiores para $v(n)$, $n \leq 991$.

Se termina este trabajo con la sección de conclusiones, donde se dan algunas ideas de como continuar esta investigación.

CAPITULO 1

Introducción y Notación

Los *torneos* son, en *teoría de gráficas*, la clase más ampliamente estudiada de gráficas dirigidas. Sería largo enumerar todos los temas investigados sobre ellos; aunque no recientes, dos buenas bibliografías se pueden encontrar en [16, 22]. Aparte de su importancia en teoría de gráficas, han sido estudiados o relacionados con otras áreas matemáticas, tales como *álgebra lineal*, *teoría de grupos*, *probabilidad*, *topología* y *teoría de votos* (por ejemplo, véase respectivamente [11, 14, 9, 6, 8]).

Nuestro interés son los torneos que no contienen subtorneos transitivos "grandes", tema sobre el cual se empezó a trabajar desde hace más de 30 años [3, 7], con pocos resultados hasta la fecha.

Un contexto en el que aparece este tema es en la *teoría de preferencias*: Suponga que se tiene un conjunto de "candidatos" y otro conjunto de "electores" tal que cada elector ordena a los candidatos de mejor a peor. Un problema general que se presenta es el obtener uno o varios órdenes de los candidatos que "reflejen" los órdenes dados por los electores. Esto se puede tratar de resolver construyendo una digráfica tal que hay un vértice por cada candidato, y un candidato (vértice) apunta a otro si está mejor situado en al menos la mitad de los ordenes; suponiendo que el número de electores es impar, la digráfica resultante es un torneo T. Entonces, cada subtorneo transitivo de T induce naturalmente un orden en los vértices que lo componen, el cual "refleja" los órdenes preferenciales dados por los electores en los correspondientes candidatos. En particular, cuando T no tiene subtorneos transitivos grandes, se puede decir que la "elección" fue muy equilibrada y los órdenes dados por los electores son bastante "heterogéneos".

La presente tesis es un estudio sobre la estructura y el tamaño de los torneos más grandes que no contienen, para un entero dado $k \leq 7$, al torneo transitivo de orden k (al cual denotaremos por TT_k). Obtendremos algunos resultados relacionados con el problema propuesto por Erdös y Moser de determinar, para cada $n > 0$, el mayor entero $v(n)$ tal que todos los torneos de orden n contienen a $TT_{v(n)}$ [7].

Como $v(n)$ es una función creciente, calcularla es equivalente a encontrar, para cada entero $k > 0$, el orden $gt(k)$ del torneo más grande libre de TT_{k+1}. En particular, es fácil ver que $gt(k+1) \leq 2gt(k) + 1$; y como $gt(1) = 1$, $gt(2) = 3$ y $gt(3) = 7$, inicialmente se pensó que la igualdad siempre se cumplía [7]. Sin embargo, tiempo después se probó que $gt(4) = 13$ y $gt(5) = 27$ [21], es decir, el comportamiento de la función $gt(k)$ no es tan sencillo. Aquí obtendremos mejores cotas superiores para $v(n)$.

Por otro lado, se sabe que son únicos, salvo isomorfismos, los torneos de orden 7 y 13 libres, respectivamente, de TT_4 y de TT_5 [21], es decir, para $k = 4, 5$ (y trivialmente para $k = 2, 3$), los torneos más grandes libres de TT_k son únicos. Además, también existe un único torneo de orden 6 libre de TT_4 [21]. Presentaremos en este trabajo algunos resultados similares sobre la unicidad de los torneos más grandes libres de TT_k, para $k = 5, 6$.

Desde el punto de vista algorítmico, calcular $v(n)$ se puede enfocar como un problema *Min Max*, es decir, se necesita obtener, en cada torneo con n vértices, el tamaño de sus subtorneos transitivos más grandes, y después ver cual de estas cantidades es la menor. Sin embargo, esto no es práctico, pues el número de torneos con n vértices crece exponencialmente como función de n. Además, hablando en términos de *complejidad computacional* [10], todo hace pensar que el determinar, para un torneo dado, el tamaño de sus subtorneos transitivos más grandes es un problema NP-completo, ya que problemas semejantes en digráficas lo son

[15, 24]. Aquí probaremos que este problema es, efectivamente, NP-completo. También, aplicaremos este enfoque algorítmico pero restringiéndonos a ciertas familias de torneos frecuentemente utilizados, lo cual nos va a permitir obtener mejores cotas superiores de $v(n)$ ($n < 1000$).

Para valores pequeños de k (≤ 6), los torneos más grandes libres de TT_k contienen a los correspondientes para $k-1$. De esto surge el problema más general de extender un torneo cualquiera libre de TT_k a otro libre de TT_{k+1} (para un k dado), sobre el cual también trabajaremos.

Antes de precisar lo que vamos a hacer, veamos los conceptos y definiciones generales que utilizaremos a lo largo de esta tesis; los que no presentemos, pueden ser consultados en [4, 12, 10].

Todas las gráficas consideradas en este trabajo son dirigidas (es decir, digráficas), sin lazos ni aristas múltiples. En lo que sigue, G representará una digráfica cualquiera.

Denotaremos por $E(G)$ y $V(G)$ –o G, si no hay confusión– a los conjuntos de aristas y de vértices de G. Para $x, y \in V(G)$, xy será, cuando exista, la arista que va de x a y.

Dado $H \subset V(G)$, representará $\langle H \rangle$ —o simplemente H— la subdigráfica de G inducida por H. También, para G' otra digráfica, G *es libre de* G' si ninguna subdigráfica inducida de G es isomorfa a G'.

La digráfica G^c se define como: $V(G^c) = V(G)$ y $xy \in E(G^c)$ si y sólo si $yx \in E(G)$. Será $Aut(G)$ el grupo de automorfismos de G, y se llamará *anti-isomorfismo de* G a cualquier función $f\colon V(G) \mapsto V(G)$ tal que $xy \in E(G)$ si y sólo si $f(y)f(x) \in E(G)$. Además, $P \approx Q$ significará que las digráficas P y Q son isomorfas.

Sean $x, x_1, x_2, \ldots, x_r$ vértices en G con $W = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$. Denotaremos por $N_G^+(x) = \{y \in V(G) \mid xy \in E(G)\}$, $N_G^-(x) = \{y \in V(G) \mid yx \in E(G)\}$, $N_G^+(x_1, x_2, \ldots, x_r) =$

$N_G^+(W) = \bigcap_{i=1}^r N_G^+(x_i)$ y $N_G^-(x_1, x_2, \ldots, x_r) = N_G^-(W) = \bigcap_{i=1}^r N_G^-(x_i)$; $N_G^+(x)$ y $N_G^-(x)$ son la *exvecindad de x* y la *invecindad de x*, respectivamente. Por simplicidad, omitiremos el subíndice G cuando sea clara la digráfica G considerada en un contexto dado. Para el entero $n > 0$, será $V_n(G) = \{u \in V(G) \mid |N^+(u)| = n\}$; G es *n-regular* (o *regular*) si $V(G) = V_n(G)$.

Dados $R, S \subset V(G)$, diremos que *R cubre a S* o *S es cubierto por R* cuando $S \subset N_G^+(R)$. También, para $x, y \in V(G)$ y $M \subset V(G)$, $x \equiv y\ (M)$ si $N_G^+(x) \cap M = N_G^+(y) \cap M$ y $N_G^-(x) \cap M = N_G^-(y) \cap M$.

La digráfica G es un *torneo* si cada pareja de vértices, u y v, está unida por exactamente una arista, ya sea uv o vu. El torneo T es un *subtorneo de G* (denotado por $T \subset G$) si T es subgráfica inducida de G.

Una sucesión de tres vértices e_1, e_2, e_3 de G forma un *triángulo dirigido* (al cual denotamos por $e_1e_2e_3$) si $e_1e_2, e_2e_3, e_3e_1 \in E(G)$; $TD(G)$ será el conjunto de triángulos dirigidos de G. Un torneo es *transitivo* si es libre de triángulos dirigidos. Para cada entero $n > 0$, existe un único torneo transitivo de este orden, salvo isomorfismos, al cual representaremos como TT_n; por brevedad, $TT_n \subset G$ significará que G no es libre de TT_n.

Dado un subtorneo transitivo T de G con $V(T) = \{a_1, \ldots, a_s\}$, denotaremos a T como $(a_1, \ldots, a_s)$ cuando $a_{i+1}, \ldots, a_{s-1}, a_s \in N^+(a_i)$, para $i = 1, \ldots, s-1$, y a_1 será el *vértice fuente de T*. $TT(G)$ (resp., $TT_k(G)$) es el conjunto de subtorneos transitivos de G (resp., de orden k). Si G' es un subtorneo de G y $abc \in TD(G')$, un *centro de abc en G'* es cualquier vértice x de G' tal que $x \in N^+(a, b, c)$ o $x \in N^-(a, b, c)$.

Sea $n > 0$ un entero impar y sea A un conjunto de elementos distintos de cero del anillo Z_n de enteros módulo n tal que $|A| = (n-1)/2$ y $-x \notin A$, para todo $x \in A$. Entonces, la digráfica T definida como $V(T) = Z_n$ y $xy \in E(T)$ si y sólo si $y - x \in A$, para todo $x, y \in V(T)$, es un torneo llamado *el torneo circulante de orden n inducido por A*.

Similarmente, como existe un único campo F de orden m para cualquier entero m de la forma p^r, con p primo y r entero positivo, sea M la digráfica tal que $V(M) = F$ y, para todo $x, y \in V(M)$, $xy \in E(M)$ si y sólo si existe $z \in F \setminus 0$ con $y - x = z^2$. Es fácil ver que M es un torneo (que llamaremos *torneo de Galois*) si y sólo si $m \equiv 3$ (mod. 4).

Finalmente, $v(n)$, $cv(n)$ y $gv(n)$ serán los enteros más grandes tales que todo torneo de orden n contiene a $TT_{v(n)}$, todo torneo circulante de orden n contiene a $TT_{cv(n)}$, y el torneo de Galois de orden n (cuando exista) contiene a $TT_{gv(n)}$; también, $gt(k)$ será el tamaño del torneo más grande libre de TT_{k+1}.

Por simplicidad, abreviaremos la expresión *sin pérdida de generalidad* como *s.p.g.*.

En el siguiente Capítulo presentamos los resultados sobre torneos libres de TT_4 que estaremos ocupando a lo largo de este trabajo. Esencialmente, se establece la unicidad de los torneos de órdenes 6 y 7 que no contienen a TT_4 [21], los cuales son los más grandes con esta propiedad, y se ve que hay exactamente tres torneos de orden 5 libres de estos subtorneos.

Sobre torneos libres de TT_5, se sabe que son de orden a lo más 13, y que hay sólo uno con exactamente 13 vértices [21] y varios de orden 11. Si T es un torneo de este tipo con tamaño 12 y $x \in V(T)$, por el párrafo anterior se tiene que la exvecindad o la invecindad de x está "fija", lo cual restringe fuertemente la estructura de T y hace pensar en que tal vez T sea único, salvo isomorfismos. El principal objetivo del Capítulo III es probar esta unicidad.

En cuanto a los torneos que no contienen a TT_6, se conocen torneos de orden 27 con esta propiedad [21, 23] y claramente son los más grandes. Observe que si R es libre de TT_6 y de orden 26 o 27, del párrafo previo se deduce que cada $x \in V(R)$ tiene tanto su exvecindad como su invecindad "fijas" (que son necesariamente de tamaños 12 o 13), lo cual nuevamente nos hace pensar en la unicidad de tal torneo R. En el Capítulo IV se ve que, efectivamente, son únicos los torneos libres de TT_6 de órdenes 26 y 27.

Por lo anterior, es inmediato que los torneos más grandes que no contienen a TT_7 son de orden menor que 56. En el Capítulo V se demuestra que todo torneo libre de TT_7 tiene orden a lo más 52; también se muestra un torneo circulante de orden 31 que no contiene a este subtorneo. Posteriormente –Capítulo VIII– se "prueba", usando una computadora, que éste es el torneo circulante más grande libre de TT_7 (aquí están incluidos los de Galois).

Se sabe que son circulantes o de Galois los torneos más grandes libres de TT_k, para $k \leq 6$, [21]. Por el párrafo anterior es natural pensar que $k = 7$ es el primer caso en que los torneos más grandes que no contienen a TT_k no son ni circulantes ni de Galois. Nuestro objetivo es, pues, encontrar un torneo de orden mayor que 31 y que sea libre de TT_7; para esto, construiremos tal torneo agregando nuevos vértices al torneo de orden 27 que no contiene a TT_6. En el Capítulo VI consideramos el problema más general de extender un torneo dado cualquiera T de orden n y libre de TT_r, para $r > 0$, a otro libre de TT_{r+1}: se demuestra que existen $v \in V(T)$ y dos torneos T' y T'' libres de TT_{r+1}, respectivamente de órdenes $n+4$ y $n+5$, tales que T' es extensión de T y T'' es extensión de $T \setminus v$; esto nos da un torneo de orden 32 libre de TT_7, que es el más grande (y único) conocido de este tipo.

Con respecto al enfoque algorítmico para calcular $v(n)$, se sabe que es NP-completo el problema de determinar, para una digráfica R y un entero k dados, si R contiene una digráfica acíclica de orden k [15]. Es el objetivo del Capítulo VII probar que este problema sigue siendo NP-completo si suponemos que R es un torneo. Esto nos da otra razón para pensar que calcular $v(n)$ algorítmicamente es un problema intratable. Sin embargo, si nos restringimos a familias relativamente pequeñas de torneos no muy "grandes", se pueden generar cotas superiores de $v(n)$ calculando en cada uno de esos torneos el tamaño de sus subtorneos transitivos más grandes. En el Capítulo VIII se aplica esta idea –usando una computadora– en la familia de todos los torneos circulantes de orden $r \leq 55$ (*i.e.*, se calcula $cv(r)$), y en la familia de todos los torneos de Galois de orden $s < 1000$ (*i.e.*, se obtiene $gv(s)$). Esto genera mejores cotas superiores para $v(n)$, $n \leq 991$, que las actualmente conocidas.

CAPITULO 2

Torneos Libres de TT_4

En este capítulo presentamos los resultados sobre torneos libres de TT_4 que ocuparemos a lo largo de este trabajo; esencialmente, describimos a los torneos más grandes de este tipo (es decir, de ordenes 5, 6 y 7). Aunque algunos de estos resultados son nuevos, omitiremos las demostraciones, pues en general éstas son sencillas.

Sea ST_7 el torneo circulante de orden 7 inducido por el conjunto de residuos cuadráticos (mod. 7), es decir, por $\{1, 2, 4\}$. Se sabe que [21]:

P2.1 *ST_7 es el único torneo de orden 7 libre de TT_4; además, es el torneo más grande que no contiene estos subtorneos.*

Como $Aut(ST_7)$ es transitivo en vértices, entonces existe sólo un torneo, ST_6, de orden 6 contenido en ST_7, salvo isomorfismos. Para $i = 0, 1, 2, 3$, sea $\mathcal{T}_i$ el conjunto de triángulos dirigidos en ST_6 que tienen exactamente i vértices con exvecindades de tamaño 3 (Fig. 2.1,*a*). Claramente, $|\mathcal{T}_0| = 1$ y $|\mathcal{T}_3| = 1$; denotaremos por T_0 (resp., T_3) al único elemento en $\mathcal{T}_0$ (resp., $\mathcal{T}_3$). Es fácil verificar directamente que:

P2.2 *ST_6 es el único torneo de orden 6 libre de TT_4* [21].

P2.3 *i) $V(ST_6) = V_2(ST_6) \cup V_3(ST_6)$ con $|V_2(ST_6)| = |V_3(ST_6)| = 3$. Además, ii) si $x \in V_3(ST_6)$ (resp., $x \in V_2(ST_6)$), entonces $\langle N^+(x)\rangle \in \mathcal{T}_1$ (resp., $\langle N^-(x)\rangle \in \mathcal{T}_2$).*

P2.4 *ST_6 contiene exactamente ocho triángulos dirigidos: $|T_0| = 1, |T_1| = 3, |T_2| = 3$ y $|T_3| = 1$.*

P2.5 *$\{T_0, T_3\}$ es la única bipartición de $V(ST_6)$ tal que cada componente forma un triángulo dirigido.*

P2.6 *Sea $T \in TD(ST_6)$. Entonces, i) T cubre (resp., es cubierto por) un vértice t si y sólo si $T \in T_2$ (resp., $T \in T_1$); además, cuando existe, t es único. En particular, ii) cada $T \in TD(ST_6)$ tiene a lo más un centro en ST_6.*

P2.7 *Sea $ab \in E(T_0)$ (resp., $ab \in E(T_3)$). Entonces, existe $c \in V(T_3)$ (resp., $c \in V(T_0)$) tal que $abc \in TD(ST_6)$.*

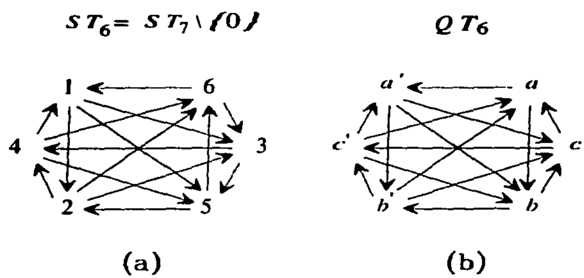

Fig. 2.1: **a:** El torneo ST_6 (conexión "inversa"), con $T_0 = \{356\}$, $T_1 = \{156, 235, 463\}$, $T_2 = \{126, 245, 134\}$ y $T_3 = \{124\}$; b: El torneo QT_6 (conexión "directa").

El torneo ST_6 puede verse como una conexión "inversa" entre T_3 y T_0, esto es, como para cada $h \in V(T_0)$ existe un único vértice $h' \in V(T_3) \cap N^+(h)$, se tiene $a'c'b' = T_3$ cuando $abc = T_0$. Similarmente, el torneo QT_6 de la Fig. 2.1.b se puede ver como una conexión "directa" entre los triángulos $\langle V_3(QT_6)\rangle$ y $\langle V_2(QT_6)\rangle$, es decir, para cada $h \in V_2(QT_6)$ existe sólo un $h' \in V_3(QT_6) \cap N^+(h)$, y $a'b'c' = \langle V_3(QT_6)\rangle$ cuando $abc = \langle V_2(QT_6)\rangle$. **Observe que** QT_6 **contiene a** TT_4.

Dado un torneo R **isomorfo a** ST_6, **denotaremos por** $T_i(R)$ **a la familia de triángulos dirigidos en** R **correspondiente a** T_i **en** ST_6, para $i = 0,1,2,3$, y $T_j(R)$ **será el triángulo de** R **correspondiente a** T_j, para $j = 0,3$.

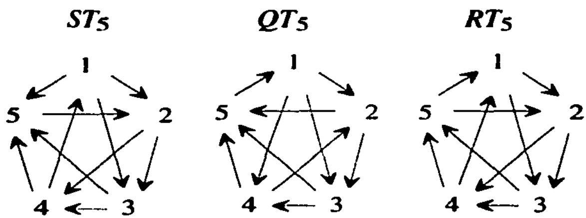

Fig. 2.2: Los torneos de orden 5 libres de TT_4.

Sea ST_5 **el torneo obtenido al eliminar un vértice** y **de** ST_6; **es fácil ver que** ST_5 **es independiente del vértice** y **seleccionado.** También, sean QT_5 y RT_5 **los torneos mostrados en la Fig. 2.2. No es difícil probar que:**

LEMA 2.1. *Los torneos ST_5, QT_5 y RT_5 no son isomorfos entre ellos y son los únicos de orden 5 libres de TT_4.*

P2.8 *Cada subtorneo de orden 5 en ST_6 es isomorfo a ST_5.*

P2.9 *Si $H \in \{ST_5, QT_5, RT_5\}$ entonces $H \approx H^c$.*

P2.10 *El torneo RT_5 es 2-regular.*

P2.11 *Sea $H \in \{ST_5, QT_5\}$. Entonces, $|V_1(H)| = 1$, $|V_2(H)| = 3$ y $|V_3(H)| = 1$. Además, si $x \in V_1(H)$ (resp., $x \in V_3(H)$), se tiene $\langle N^-(x)\rangle \in TD(H)$ (resp., $\langle N^+(x)\rangle \in TD(H)$).*

CAPITULO 3

Torneos Libres de TT_5

Este es el primer caso interesante sobre torneos libres de TT_k. Como ya hemos mencionado, si $r = k - 1 = 4$, esta r es la más pequeña tal que $gt(r) < 2gt(r-1) + 1$, es decir, $gt(4) = 13 < 15 = 2gt(3) + 1$. Se sabe que existe un único torneo, ST_{13}, de orden 13 libre de TT_5 [21], y es fácil ver que hay varios torneos de orden 11 libres de estos subtorneos. El objetivo principal en este capítulo es probar que sólo hay un torneo de orden 12 libre de TT_5. También, presentamos algunas propiedades del torneo ST_{13}, las cuales ocuparemos en capítulos posteriores.

TORNEOS DE ORDEN 13

Sea ST_{13} el torneo circulante de orden 13 inducido por el conjunto $\{1, 2, 3, 5, 6, 9\}$. Este torneo satisface [21]:

P3.1 *ST_{13} es el único torneo de orden 13 libre de TT_5; además, es el torneo más grande que no contiene estos subtorneos.*

P3.2 *Para cada $x \in V(ST_{13})$ se cumple $\langle N^+(x)\rangle \approx ST_6$ y $\langle N^-(x)\rangle \approx ST_6$.*

Además,

P3.3 *Si $x, y \in V(ST_{13})$ con $y \in N^+(x)$ entonces* $|N^-(x) \cap N^+(y)| \leq 4$ (pues, por P2.3-*i* y P3.2, $\langle N^+(x)\rangle \approx ST_6$, $|N^+(y)| = 6$ y $|N^+(x) \cap N^+(y)| = 2$ o 3).

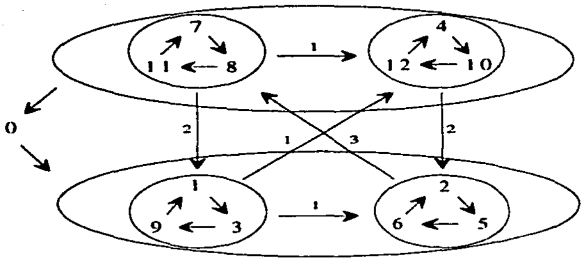

Fig. 3.1: Conexiones entre los triángulos 139, 256, $\langle\{7,8,11\}\rangle$ y $\langle\{4,10,12\}\rangle$ de ST_{13}, donde $A \xrightarrow{h} B$ significa: $\langle A \cup B\rangle \approx ST_6$ (resp., QT_6) con $A = \langle V_3(A \cup B)\rangle$ si $h = 1$ (resp., 2); A cubre a B si $h = 3$.

En la **Figura 3.1** se presenta una forma fácil de ver cualitativamente a ST_{13}, considerando las conexiones entre los triángulos $139 = T_3(N^+(0))$, $256 = T_0(N^+(0))$, $\langle\{7,8,11\}\rangle = T_3(N^-(0))$ y $\langle\{4,10,12\}\rangle = T_0(N^-(0))$. Aquí, para A y B dos de estos triángulos con $G = \langle V(A) \cup V(B)\rangle$, $A \xrightarrow{h} B$ significa: Si $h = 1$ entonces $G \approx ST_6$ con $A = T_3(G)$ y $B = T_0(G)$; si $h = 2$ entonces $G \approx QT_6$ con $A = \langle V_3(G)\rangle$ y $B = \langle V_2(G)\rangle$; finalmente, $h = 3$ quiere decir que A cubre B.

LEMA 3.1. *Sean $x, y \in V(ST_{13})$ con $y \in V_3(N^+(x))$ (resp., $y \in V_2(N^+(x))$). Entonces, existe un único $f \in Aut(ST_{13})$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ (resp., $f(y) = 2$).*

Demostración. Claramente, a lo más puede existir un automorfismo f de este tipo, pues $f(V_i(N^+(x))) = V_i(N^+(0))$ y $f(V_i(N^-(x))) = V_i(N^-(0))$, para $i \in \{2,3\}$. Como $Aut(ST_{13})$ es transitivo en vértices, podemos suponer, s.p.g., que $x = 0$; entonces, $y \in \{1,3,9\} = V_3(N^+(0))$ o $y \in \{2,5,6\} = V_2(N^+(0))$. Sea $R = \{1,2,3,5,6,9\}$ y, para $w \in \{1,3,9\}$, sea $f_w\colon Z_{13} \to Z_{13}$ la función $f_w(z) = wz$ (mod. 13). Puesto que $R = 3R$, es decir, $R = \{3r$

(mod. 13) | $r \in R\}$. se tiene $f_1, f_3, f_9 \in Aut(ST_{13})$. Finalmente, se debe tener el resultado ya que $f_1(1) = f_3(9) = f_9(3) = 1$ y $f_1(2) = f_3(5) = f_9(6) = 2$. ∎

Dado un vértice x de ST_{13}, sean $X^+ = \langle N^+(x) \rangle$ y $X^- = \langle N^-(x) \rangle$. Utilizando el Lema 3.1 es fácil verificar que se cumple:

P3.4 $\langle N^+(T_0(X^+)) \rangle = T_3(X^-)$ *y* $N^-(T_0(X^+)) = \{x\}$.

P3.5 *Si* $T \in T_1(X^+)$ *entonces* $|N^+(T)| = 1$ *y* $\langle N^-(T) \rangle \in TD(ST_{13})$.

P3.6 *Si* $T \in T_2(X^+)$ *entonces* $|N^+(T)| = 1$ *y* $N^-(T) = \{x\}$.

P3.7 $N^+(T_3(X^+)) = \emptyset$ *y* $N^-(T_3(X^+)) = \{x\}$.

De P2.4 y estas cuatro propiedades se deduce:

P3.8 *Sea* $T \in TD(ST_{13})$ *con* $|N^-(T)| \geq 2$ *(resp.,* $|N^+(T)| \geq 2$*), entonces* $\langle N^-(T) \rangle$ *(resp.,* $\langle N^+(T) \rangle$*) es un triángulo dirigido.*

LEMA 3.2. *Sean* $v \in V(ST_{13})$ *y* $F \in TD(ST_{13})$ *con* $M = \langle T_3(N^+(v)) \cup F \rangle \approx ST_6$. *Entonces,* $F \in \{T_0(N^+(v)), T_0(N^-(v))\}$, $F = T_0(M)$ *y, por tanto,* $T_3(N^+(v)) = T_3(M)$.

Demostración. Sean $abc = T_3(N^+(v))$ y $def = F$. Suponga, primero, que $N^+(v) \cap \{d, e, f\} \neq \emptyset$, digamos $d \in N^+(v)$. Por el Lema 3.1 podemos suponer, s.p.g., que $v = 0$ y $d \in \{1, 2\}$. Entonces, $\{a, b, c\} = \{1, 3, 9\}$, implicando $d = 2$ (Fig. 3.1). Como $N^+_M(2) = \{e, 3\}$, tenemos $2 \in V_2(M)$, y por P2.5 $F = T_0(M)$ y $|N^+(e) \cap \{1, 3, 9\}| = |N^+(f) \cap \{1, 3, 9\}| = 1$. De aquí que $e, f \in \{4, 5, 6, 10, 12\}$, esto es, $e \in \{4, 5\}$ y $f \in \{6, 10, 12\}$ (pues $2 \in N^-(e) \cap N^+(f)$). Pero $e = 4$ implicaría $TT_4 \approx \langle \{1, 2, 3, 4\} \rangle \subset M$; por tanto, $e = 5$. También debemos tener $f = 6$, ya que $f \in N^+(5) \cap \{6, 10, 12\} = \{6, 10\}$ y, si $f = 10$, $TT_4 \approx \langle \{1, 10, 2, 3\} \rangle \subset M$. Entonces, éste es el caso $F = T_0(N^+(v))$.

Ahora supóngase $N^+(v) \cap \{d, e, f\} = \emptyset$. Nuevamente por el Lema 3.1 podemos tomar, s.p.g., $v = 0$; en particular, $\{a, b, c\} = \{1, 3, 9\}$ y $d, e, f \in \{0, 4, 7, 8, 10, 11, 12\}$. Si existe

$g \in \{d, e, f\}$ con $g \notin \{4, 10, 12\}$, tenemos $|N^+(g) \cap \{1,3,9\}| \geq 2$; esto implica, por P2.5, $F = T_3(M)$ y $|N^+(h) \cap \{1,3,9\}| = 2$, para todo $h \in \{d, e, f\}$, es decir, $\{d, e, f\} = \{7, 8, 11\}$, que no es posible (Fig. 3.1). Por tanto, $F = T_0(N^-(e))$. ∎

Un *β-triángulo* es un torneo H con 7 vértices tal que H contiene dos triángulos dirigidos ajenos por vértices, T_1 y T_2, con T_1 cubriendo T_2, y el restante vértice $a \in V(H) \setminus V(T_1 \cup T_2)$ cubre T_1 y es cubierto por T_2. El vértice a es el *origen* de H (claramente H tiene un único origen) y H es denotado por $[a, T_1, T_2]$.

LEMA 3.3. *Para cada $x \in V(ST_{13})$, $[x, T_0(N^+(x)), T_3(N^-(x))]$ es el único β-triángulo en ST_{13} con origen x. Además, si $F, S \in TD(ST_{13})$ y F cubre S, entonces existe $y \in V(ST_{13})$ tal que $[y, F, S]$ es un β-triángulo de ST_{13}.*

Demostración. Por P3.4 $[x, T_0(N^+(x)), T_3(N^-(x))]$ es un β-triángulo, y por P2.4 y P3.5-3.7 éste es el único que tiene a x como origen. Para ver que existe $y \in V(ST_{13})$ tal que $[y, F, S]$ es un β-triángulo, sea $abc = F$. Por el Lema 3.1 podemos suponer, s.p.g., que $a = 0$ y $b \in \{1, 2\}$. Como $V(S) \subset N^+(0, b)$, entonces $b \in V_3(N^+(0))$, que implica $b = 1$ y $S = 236$. Es fácil verificar que $N^-(2, 3, 6) = \{0, 1, 10\}$ (es decir, $c = 10$) y $N^+(2, 3, 6) = N^-(0, 1, 10) = \{8\}$; el β-triángulo buscado es $[8, \langle\{0, 1, 10\}\rangle, 236]$. ∎

LEMA 3.4. *Sean $K = [x, S_1, S_2]$ y $R = [y, D_1, D_2]$ dos β-triángulos en ST_{13}. Entonces, $|V(K) \cup V(R)| \geq 10$.*

Demostración. Por el Lema 3.3, $x \neq y$. Claramente, podemos suponer, s.p.g., que $y \in N^+(x)$, $x = 0$ y $y \in \{1, 2\}$ (Lema 3.1); en particular, $V(S_1) = \{2, 5, 6\}$ y $V(S_2) = \{7, 8, 11\}$. Es fácil verificar que $R = [1, 367, \langle\{8, 9, 12\}\rangle]$ o $R = [2, 478, \langle\{0, 9, 10\}\rangle]$, si $y = 1$ o $y = 2$, respectivamente, (Lema 3.3). Por tanto, $|V(K) \cup V(R)| \geq 10$. ∎

LEMA 3.5. *ST_{13} contiene exactamente 13 β-triángulos y cada $x \in V(ST_{13})$ está contenido en exactamente siete de ellos.*

Demostración. Por el Lema 3.3, ST_{13} contiene exactamente 13 β-triángulos, y como hay 7 vértices en cada β-triángulo y $Aut(ST_{13})$ es transitivo en vértices, se tiene el resultado. ∎

TORNEOS DE ORDEN 12

Por la transitividad en vértices de $Aut(ST_{13})$, existe un único torneo, ST_{12}, de orden 12 contenido en ST_{13}, salvo isomorfismos. A continuación probaremos que ST_{12} es el único torneo de orden 12 libre de TT_5.

LEMA 3.6. *Sea G un torneo de orden 12 libre de TT_5 y sea $x \in V(G)$. Entonces, $\langle N^+(x)\rangle$ (y $\langle N^-(x)\rangle$) es isomorfo a ST_6, ST_5, QT_5 o RT_5.*

Demostración. Por P2.2 y el Lema 2.1 sólo necesitamos ver que $|N^+(x)| = 5$ o 6. Claramente, $|N^+(x)| \leq 7$ y $|N^-(x)| \leq 7$ (P2.1). Si $|N^+(x)| = 7$, entonces $\langle N^+(x)\rangle \approx ST_7$, $|N^-(x)| = 4$ y $\langle N^-(x)\rangle$ contiene a TT_3; en tal caso, en [19, 21] se prueba que G contiene a TT_5. De aquí que $|N^+(x)| \leq 6$. Similarmente se deduce que $|N_G^+(x)| \leq 6$, esto es, $|N^-(x)| \leq 6$. Por tanto, $|N^+(x)| = 5$ o 6. ∎

De este Lema es claro que:

P3.9 *Si G es un torneo de orden 12 libre de TT_5, entonces $V(G) = V_5(G) \cup V_6(G)$ y $|V_5(G)| = |V_6(G)| = 6$.*

LEMA 3.7. *Sea G un torneo de orden 12 libre de TT_5 y sea $x \in V_5(G)$. Entonces, $\langle N^+(x)\rangle \not\approx QT_5$.*

Demostración. Hagámosla por contradicción. Supóngase $\langle N^+(x)\rangle \approx QT_5$. Sea $N^+(x) = \{a, b, c, d, e\}$ con $N^+(d, x) = N^-(e) \cap N^+(x) = \{a, b, c\}$ y $abc \in TD(G)$ (Fig. 3.2,a).

Como $|N^-(d)| = 5$ o 6 (P3.9), tenemos $|N^-(d, x)| = 3$ o 4; pero $\langle N^-(d, x)\rangle$ es libre de TT_3 (pues G es libre de TT_5), implicando $|N^-(d, x)| = 3$ y $\langle N^-(d, x)\rangle \in TD(G)$. Entonces,

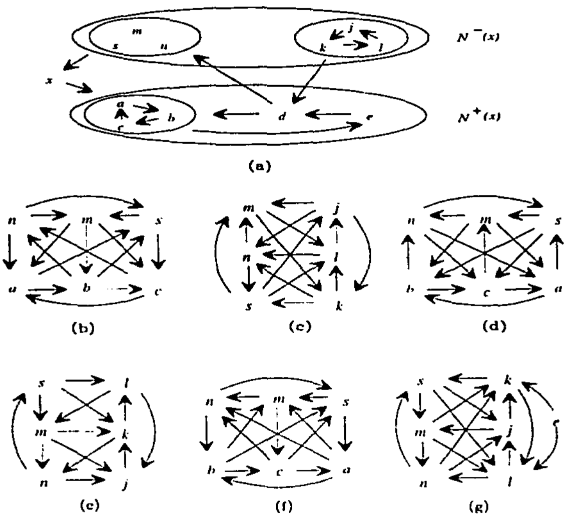

Fig. 3.2: Existe $x \in V(G)$ con $\langle N^+(x)\rangle \approx QT_5$. **a:** $N^+(x)$ y $N^-(x)$; **b, c:** Caso $abc \in \mathcal{T}_1(N^+(d))$; **d, e:** Caso $abc = T_0(N^+(d))$; **f, g:** Caso $abc = T_3(N^+(d))$.

sea $N^-(x) = \{j,k,l,m,n,s\}$ con $\langle N^-(d,x)\rangle = jkl$ y $N^+(d)\cap N^-(x) = \{m,n,s\}$. Por tanto, $\langle N^+(d)\rangle \approx ST_6$ y $abc \in TD(N^+(d))$. Por P2.4 hay cuatro casos.

Caso I. $abc \in \mathcal{T}_2(N^+(d))$.

Suponga, s.p.g., que m es el centro de abc en $\langle N^+(d)\rangle$ (P2.6-*i*), es decir, $a,b,c \in N^-(m)$. Aplicando P2.3-*i* en $\langle N^+(d)\rangle$ se tiene $n,s \in N^+(m)$. También por P2.3-*i*, $|N^-(m,x)| = 2$ o 3 (pues $\langle N^-(x)\rangle \approx ST_6$); como $|N^-(m)| = 5$ o 6 (P3.9) y $a,b,c,d \in N^-(m)\cap N^+(x)$, se sigue que $|N^-(m,x)| = 2$ y $|N^-(m)| = 6$. Por tanto, $e \in N^+(m)$, y puesto que $\{a,b,c,m,x\} \subset N^-(e)$ y $\langle\{a,b,c,m,x\}\rangle \approx QT_5$, por P2.8 $|N^-(e)| = 5$, $\langle N^+(e)\rangle \approx ST_6$ y $N^+(e) = \{d,j,k,l,n,s\}$. Finalmente, como $mns \notin TD(N^-(x))$, por P2.5 y P2.6-*i* existe el centro r de jkl en $\langle N^-(x)\rangle$, que no es m (pues $n,s \in N^+(m)$ y $|N^-(m,x)| = 2$); esto es, $r = s$ o $r = n$. Entonces, r y d son centros de jkl en $\langle N^+(e)\rangle$, contradiciendo P2.6-*ii*.

Caso II. $abc \in \mathcal{T}_1(N^+(d))$.

Suponga, s.p.g., que m es el centro de abc en $\langle N^+(d)\rangle$ (por P2.6-*i* $a,b,c \in N^+(m)$) y $s \in N^+(n)$. De P2.3-*i* deducimos $n,s \in N^-(m)$. Como $|N^-(n)\cap\{a,b,c\}| = |N^-(n)\cap N^+(d)| \geq 2$, por simetría podemos tomar, s.p.g., $b,c \in N^-(n)$; por ser m el único centro de abc en $\langle N^+(d)\rangle$ (P2.6-*ii*), se tiene $a \in N^+(n)$ (Fig. 3.2,*b*). Por P2.3-*ii* $\langle N^+(n,d)\rangle \in TD(N^+(d))$, es decir, $s \in N^+(a)$. También P2.3-*ii* implica $s \in N^-(c)$ (pues $a,n \in N^+(c)$ pero $\langle\{a,n,s\}\rangle \notin TD(N^+(d))$) y $s \in N^+(b)$ (pues $c,m \in N^+(s)$ pero $\langle\{b,c,m\}\rangle \notin TD(N^+(d))$).

Por otro lado, como $\langle\{m,n,s\}\rangle \notin TD(N^-(x))$, por P2.5 y P2.6-*i* existe el centro r de jkl en $\langle N^-(x)\rangle$, que no es s, ya que $s \in N^+(n)\cap N^-(m)$. Si $r = m$, entonces $j,k,l \in N^+(m)$ (pues $n,s \in N^-(m)$) y $|N^+(m)| \geq |\{a,b,c,j,k,l,x\}| = 7$, que no es posible. Por tanto, $r = n$ y $j,k,l \in N^-(n)$ (Fig. 3.2,*c*). Puesto que $|N^+(m)\cap N^-(x)| \geq 2$, por simetría podemos suponer, s.p.g., que $k,l \in N^+(m)$; entonces, $j \in N^-(m)$, ya que n es el único centro de jkl. Por P2.3-*ii*, $\langle N^-(m,x)\rangle = \langle\{n,s,j\}\rangle \in TD(N^-(x))$ y $j \in N^+(s)$. También por P2.3-*ii* se tiene $k \in N^-(s)$ (pues $j,m \in N^+(s)$ pero $\langle\{j,k,m\}\rangle \notin TD(N^-(x))$) y $l \in N^+(s)$ (pues $l,n,s \in N^+(k)$).

Observe que $e \in N^+(n) \cap N^-(m) \cap N^+(s)$, ya que $|N^-(n)| \geq |\{b, c, d, j, k, l\}| = 6$, $|N^+(m)| \geq |\{a, b, c, k, l, x\}| = 6$ y, si $e \in N^-(s)$, se tendría $\langle N^-(s) \rangle = \langle \{a, b, d, e, k, n\} \rangle$ ($\approx ST_6$) con d y e centros de abn, contradiciendo P2.6-*ii*.

Finalmente, como $\langle N^+(s) \rangle = \langle \{c, e, j, l, m, x\} \rangle \approx ST_6$ y x es el único centro de mlj en $\langle N^+(s) \rangle$, debe existir $t \in \{m, l, j\} \cap N^-(e)$, implicando $|N^-(e)| \geq |\{a, b, c, n, s, x, t\}| = 7$, que contradice P3.9.

Caso III. $abc = T_0(N^+(d))$.

Por P2.5 $\langle \{m, n, s\} \rangle = T_3(N^+(d))$; suponga, s.p.g., que $mns = T_3(N^+(d))$ y que $\langle N^+(d) \rangle$ ($\approx ST_6$) es como en la Fig. 3.2.*d*. Puesto que $|N^+(e) \cap \{j, k, l\}| \geq 2$ (en caso contrario, $\langle \{d, e, x\} \cup [N^-(e) \cap \{j, k, l\}] \rangle$ contendría a TT_5), por simetría podemos tomar, s.p.g., $k, l \in N^+(e)$. Por ser $\{mns, jkl\} = \{T_0(N^-(x)), T_3(N^-(x))\}$ (P2.5), de P2.7 se deduce que existe $r \in \{m, n, s\}$ con $rkl \in TD(N^-(x))$; nuevamente por simetría de $\langle N^+(d) \rangle$ podemos tomar, s.p.g., $r = m$. Observe que $m, n, s \in N^+(e)$, pues $t \in \{m, n, s\} \cap N^-(e)$ implica $\langle \{t, x, e\} \cup (N^+(t) \cap \{a, b, c\}) \rangle \approx TT_5$.

Por tanto, $N^+(e) = \{d, k, l, m, n, s\}$. Como $\langle \{d, n, s\} \rangle \notin TD(N^+(e))$, por P2.5 y P2.6-*i* existe el centro $p \in \{d, n, s\}$ de mkl en $\langle N^+(e) \rangle$, que no es d, ya que $d \notin N^+(k) \cap N^-(m)$. Si $p = n$, por ser $n \in N^+(m)$, se tiene $n \in N^+(k, l)$; de donde, $|N^-(n)| = 4$ en $\langle N^+(e) \rangle \approx ST_6$, contradiciendo P2.3-*i*. De aquí que $p = s$ y (puesto que $m \in N^+(s)$) $k, l, m \in N^+(s)$, implicando $s \in V_3(N^-(x))$. Por P2.5, $mns = T_3(N^-(x))$ y $jkl = T_0(N^-(x))$; entonces, $m \in V_3(N^-(x))$, $n, k, j \in N^+(m)$ y $njk \in TD(N^-(x))$ (Fig. 3.2.*e*).

Tenemos $N^+(m) = \{a, b, j, k, n, x\}$ con $n \in V_3(N^+(m))$ y $x \in V_2(N^+(m))$; por P2.6-*i* existe $t \in \{a, j, k\}$ centro de bnx en $\langle N^+(m) \rangle$. Como $a \in N^+(n) \cap N^-(b)$ y $j \in N^+(n) \cap N^-(x)$, se cumple $t = k$ y $b \in N^+(k)$. Por tanto, $\langle \{s, m, k, x, b\} \rangle \approx TT_5$, que es una contradicción.

Caso IV. $abc = T_3(N^+(d))$.

Por P2.5 $\langle\{m,n,s\}\rangle = T_0(N^+(d))$; suponga, s.p.g., que $\langle N^+(d)\rangle$ es como en la Fig. 3.2.f. Puesto que $jkl, mns \in TD(N^-(x))$, se tiene $mns = T_3(N^-(x))$ o $mns = T_0(N^-(x))$. De darse esto último, para $t \in \{m,n,s\}$ se cumple $5 \leq |N^+(t)| = |N^+(t) \cap N^-(x)| + |\{x\}| + |N^+(t) \cap \{a,b,c\}| + |N^+(t) \cap \{e\}| = 4 + |N^+(t) \cap \{e\}|$, es decir, $e \in N^+(t)$ y $|N^-(e)| \geq |\{a,b,c,m,n,s,x\}| = 7$, que no es posible (P3.9). Por tanto, $mns = T_3(N^-(x))$ y $jkl = T_0(N^-(x))$; por simetría de ST_6 podemos tomar, s.p.g., a $\langle N^-(x)\rangle$ como en la Fig. 3.2.g.

Primero veamos que si $h \in \{m,n,s\}$ con $N^+(h) \cap \{j,k,l\} \subset N^+(e)$, se cumple $e \in N^-(h)$. Suponga, s.p.g., que $h = m$ y $N^+(m) \cap \{j,k,l\} = \{k,l\} \subset N^+(e)$ con $e \in N^+(m)$. Entonces, $\langle N^+(m)\rangle = \langle\{c,e,k,l,n,x\}\rangle \approx ST_6$. Puesto que $\langle\{c,l,n\}\rangle \notin TD(G)$, por P2.5 y P2.6-$i$ existe el centro $t \in \{c,l,n\}$ de xek en $\langle N^+(m)\rangle$. Como $c \in N^+(x) \cap N^-(e)$ y $l \in N^+(e) \cap N^-(x)$, se tiene $t = n$ y $e \in N^+(n)$. Por tanto, $N^-(e) = \{a,b,c,m,n,x\}$, esto es, $N^+(n) \cap \{j,k,l\} = \{j,k\} \subset N^+(e)$ con $e \in N^+(n)$. Repitiendo los argumentos anteriores en n, s y xej (en vez de m, n y xek, resp.), obtenemos $e \in N^+(s)$, contradiciendo $|N^-(e)| < 7$.

Observe que $|N^+(e) \cap \{j,k,l\}| \geq 2$, pues en caso contrario $\langle\{d,e,x\} \cup (N^-(e) \cap \{j,k,l\})\rangle$ contendría a TT_5; por simetría se puede suponer, s.p.g., que $k, l \in N^+(e)$, Fig. 3.2.g. Del párrafo anterior deducimos $e \in N^-(m)$. También por ese párrafo debemos tener $j \in N^-(e)$, ya que de no ser así, aplicándolo en n y s, en vez de m, deduciríamos $n, s \in N^+(e)$, implicando $|N^+(e)| = |\{d,j,k,l,m,n,s\}| = 7$ (P3.9). Entonces, $\langle N^-(m)\rangle = \langle\{a,b,d,e,j,s\}\rangle \approx ST_6$; como $\langle\{a,e,j\}\rangle \notin TD(N^-(m))$ y $a, j \in N^+(s)$, por P2.3-ii $e \in N^-(s)$. El vértice b está en $N^+(k)$, pues en caso contrario, $\langle\{b,j,e,m,k\}\rangle \approx TT_5$. Por tanto, $\langle\{k,d,b,c,s\}\rangle \approx TT_5$ o $\langle\{c,e,n,k,s\}\rangle \approx TT_5$, si $c \in N^+(k)$ o $c \in N^-(k)$, respectivamente. ∎

LEMA 3.8. *Sea G un torneo de orden 12 libre de TT_5. Entonces, existe $x \in V(G)$ con $\langle N^+(x)\rangle \approx ST_5$ o $\langle N^-(x)\rangle \approx ST_5$.*

Demostración. Hagámosla por contradicción. Como G^c es libre de TT_5, por P2.9 y los Lemas 3.6 y 3.7 podemos suponer que $\langle N^+(r)\rangle \approx RT_5$ y $\langle N^-(s)\rangle \approx RT_5$, para todo $r \in V_5(G)$ y para todo $s \in V_6(G)$. Por P3.9, $|V_5(G)| = |V_6(G)| = 6$. Sea $x \in V_5(G)$, esto es, $\langle N^+(x)\rangle \approx RT_5$. Tenemos:

I1. ***Si*** $j \in N^+(x)$ ***con*** $|N^-(j,x)| \geq 3$, ***entonces*** $\langle N^-(j)\rangle \approx ST_6$ **(ya que** $\langle N^-(j)\rangle \approx RT_5$ **implica** $|N^-(j,x)| = 2$**)** ***y*** $\langle N^-(j,x)\rangle \in TD(N^-(x))$.

I2. ***Si*** $y_o \in V_3(N^-(x))$ ***entonces*** $\langle N^+(y_o)\rangle \approx ST_6$ **(pues** $\langle N^+(y_o)\rangle \approx RT_5$ **implica** $2 = |N^-(x) \cap N^+(y_o)|$**).**

Sea $B = \langle V_5(G)\rangle$. Puesto que $|V(B)| = 6$, existe $g \in V(B)$ con $|N_B^-(g)| \geq 3$, y por (*I2*) $|N_B^-(g)| = 3$ con $N_B^-(g) = V_2(N^-(g))$: podemos tomar, s.p.g., $x = g$. Entonces, $|N^+(k,x)| = 2$, para todo $k \in N^-(x)$, y hay 12 aristas de $N^-(x)$ a $N^+(x)$. Por (*I1*) existen $a, b \in N^+(x)$ con $\langle N^-(a,x)\rangle, \langle N^-(b,x)\rangle \in TD(N^-(x))$; sean $T_a = \langle N^-(a,x)\rangle$ y $T_b = \langle N^-(b,x)\rangle$. Veamos que T_a y T_b están en $\mathcal{T}_2(N^-(x)) \cup \mathcal{T}_3(N^-(x))$. Por ejemplo, para T_a, como en $\langle N^-(a)\rangle$ ($\approx ST_6$ por (*I1*)) el triángulo T_a cubre a x, es decir, $a \in V_5(G)$ y $T_a \in \mathcal{T}_2(N^-(a))$ (P2.6), aplicando (*I2*) en $V_3(N^-(a))$ se deduce $|V(T_a) \cap V_6(G)| \geq 2$; puesto que $V_2(N^-(x)) \subset V_5(G)$, se tiene $T_a \in \mathcal{T}_2(N^-(x)) \cup \mathcal{T}_3(N^-(x))$. Por tanto, existe $h_x \in V_3(N^-(x))$ con $h_x \in V(T_a) \cap V(T_b)$.

En vista de que $|N^+(h_x)| = 6$ -(*I2*)- y $\{a, b, x\} \cup [N^+(h_x) \cap V_2(N^-(x))] \subset V_5(G) \cap N^+(h_x)$, se tiene $|V_5(G) \cap N^+(h_x)| = 5$ y existe un único vértice $f_x \in V_5(G)$ con $f_x \in N^-(h_x)$; f_x es el vértice en $V_2(N^-(x)) \cap N^-(h_x)$.

Observe que $h_x \in V_5(G^c)$ con invecindad de orden 1 en $\langle V_5(G^c)\rangle$. Como el Lema 3.8 se cumple en G si y sólo si se cumple en G^c, podemos suponer, s.p.g., que existe $j \in V_5(G)$ con invecindad de orden 1 en $\langle V_5(G)\rangle$, esto es, $|N_B^-(j)| = 1$. Entonces, puesto que $\sum_{r \in B} |N_B^-(r)| = |E(B)| = 15$ y por (*I2*) $|N_B^-(t)| \leq 3$ (para todo $t \in V(B)$), aparte de x, existen otros tres vértices $y, z, q \in V_5(G)$ con invecindades de orden 3 en $\langle V_5(G)\rangle$.

Finalmente, si $h_y \neq h_x$ entonces, por ser $|N^+(h_x) \cap V_5(G)| = |N^+(h_y) \cap V_5(G)| = 5$ y $|V_5(G)| = 6$, se debe cumplir $|N^+(h_x, h_y)| \geq 4$, implicando que $\langle \{h_x, h_y\} \cup N^+(h_x, h_y)\rangle$ contiene a TT_6. Por tanto, $h_y = h_x$, que implica $f_y = f_x$. Análogamente se deduce $h_z =$

$h_q = h_x$ y $f_z = f_q = f_x$. De aquí que $\{x, y, z, q\} \subset N^+(h_x, f_x)$ y $\langle\{h_x, f_x, x, y, z, q\}\rangle$ contiene a TT_5. ■

TEOREMA 3.9. *Sea G un torneo de orden 12 libre de TT_5. Entonces, G es isomorfo a ST_{12}.*

Demostración. Por los Lemas 3.7 y 3.8 existe $x \in V(G)$ con $\langle N^+(x)\rangle \approx ST_5$ o $\langle N^-(x)\rangle \approx ST_5$. Claramente podemos suponer, s.p.g., que $\langle N^+(x)\rangle \approx ST_5$ (pues $ST_{12} \approx ST_{12}^c$); entonces, $\langle N^-(x)\rangle \approx ST_6$. Sea $N^+(x) = \{a, b, c, d, e\}$ como en la Fig. 3.3.

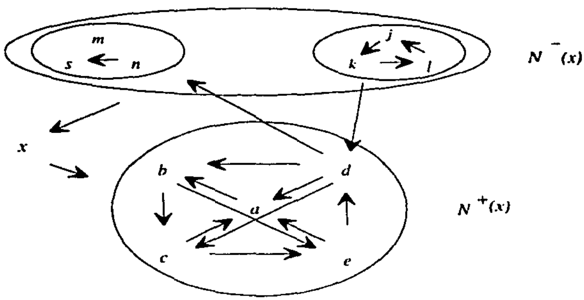

Fig. 3.3: Existe $x \in V(G)$ con $\langle N^+(x)\rangle \approx ST_5$ y, por tanto, $\langle N^-(x)\rangle \approx ST_6$.

Puesto que $|N^-(d)| \geq 5$, $x \in N^-(d)$ y $\{e\} = N^-(d) \cap N^+(x)$, tenemos $|N^-(d, x)| \geq 3$, que implica $\langle N^-(d, x)\rangle \in TD(G)$ (pues G es libre de TT_5) y $|N^-(d)| = 5$. Sea $N^-(x) = \{m, n, s, j, k, l\}$ con $jkl = \langle N^-(d, x)\rangle$, $\{m, n, s\} = N^+(d) \cap N^-(x)$ y $s \in N^+(n)$. Observe que:

t1. $\langle N^-(d)\rangle \approx ST_5$ (pues $\langle N^-(d)\rangle \not\approx QT_5$ —Lema 3.7— y $N^-(d) = \{e, j, k, l, x\}$ con $j, k, l \in N^-(x)$).

t2. $|N^+(e) \cap \{j,k,l\}| = 2$ –por (*11*).

Como $\langle N^+(d)\rangle \approx ST_6$ con $abc \in TD(N^+(d))$, por P2.4 hay cuatro casos.

Caso I. $abc \in T_2(N^+(d))$

Tómese, s.p.g., a m como el centro de abc en $N^+(d)$ –P2.6; entonces, $a,b,c \in N^-(m)$ y $n,s \in N^+(m)$ (Fig. 3.4,a). Puesto que $6 \geq |N^-(m)| \geq |\{a,b,c,d\}| + |N^-(m,x)| \geq 6$, tenemos $\langle N^-(m)\rangle \approx ST_6$ y $|N^-(m,x)| = 2$.

Veamos las direcciones de las aristas en $\langle N^-(x)\rangle$. Como $jkl \in TD(N^-(x))$ y $mns \notin TD(N^-(x))$, por P2.5 y P2.6 existe el centro $y \in \{m,n,s\}$ de jkl en $\langle N^-(x)\rangle$, que no es n (pues $n \in N^+(m) \cap N^-(s)$) ni m (pues $|N^-(m,x)| = 2$ y $s,n \in N^+(m)$), es decir, $s = y$. Entonces, $j,k,l \in N^+(s)$ y de P2.6-*ii* obtenemos $N^+(m) \cap \{j,k,l\} \neq \emptyset$; por simetría podemos suponer, s.p.g., $j \in N^+(m)$ (Fig. 3.4,b). Por tanto, P2.3 implica $k,l \in N^-(m)$ y $jns = \langle N^+(m) \cap N^-(x)\rangle \in TD(N^-(x))$; y como $j,s \in N^-(k)$, también por P2.6-*ii* $n \in N^+(k)$.

Ahora, consideremos el conjunto $N^+(e)$. Puesto que $\langle N^+(d)\rangle \approx ST_5$ en G^c –por (*11*) y P2.9– y $j,k,l \in N^-_{G^c}(s)$, entonces obtenemos un caso análogo al presente si tomamos G^c, d y x en vez de G, x y d, respectivamente, en el cual e juega el mismo papel. De aquí que podemos suponer, s.p.g., $|N^+(e)| = 6$ en G. Note que $m \in N^-(e)$, pues $N^-(m) = \{a,b,c,d,k,l\}$. Por ser $6 = |N^+(e)| = |\{a,d\}| + |N^+(e) \cap \{j,k,l\}| + |N^+(e) \cap \{n,s\}|$, de (*12*) obtenemos $n,s \in N^+(e)$. También, $j \in N^+(e)$, pues en caso contrario $\langle\{j,e,k,d,n\}\rangle \approx TT_5$.

Finalmente, como $N^+(m) = \{e,j,n,s,x\}$ con $n,s,j \in N^-(x) \cap N^+(e)$, se concluye $\langle N^+(m)\rangle \not\approx RT_5$ (P2.10) y $\langle N^+(m)\rangle \not\approx ST_5$ (P2.6-*ii*), que es una contradicción.

Caso II. $abc = T_3(N^+(d))$.

Aquí tenemos $\langle\{m,n,s\}\rangle = T_6(N^+(d))$. Suponga, s.p.g., que $\langle N^+(d)\rangle$ es como en la Fig. 3.4,c. Note que $e \in N^+(m)$, pues de no ser así, como $c,d,e,m,x \in N^-(a)$ con $c,d,e \in$

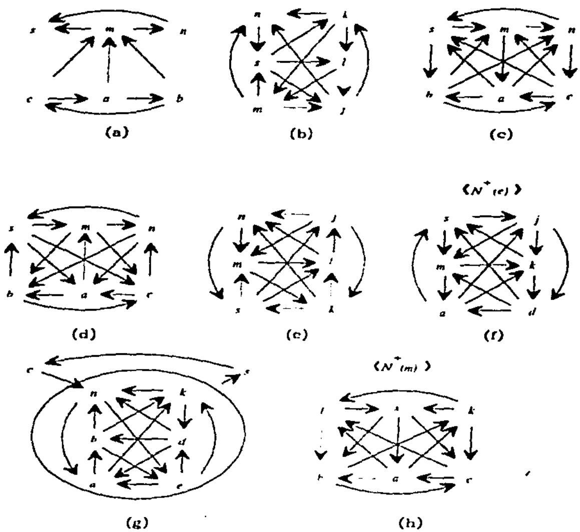

Fig. 3.4: Existe $x \in V(G)$ con $\langle N^+(x)\rangle \approx ST_5$. **a, b:** Caso $abc \in \mathcal{T}_2(N^+(d))$; **c:** Caso $abc = \mathcal{T}_3(N^+(d))$; **d:** Caso $abc = \mathcal{T}_0(N^+(d))$; **e, f, g, h:** Caso $abc \in \mathcal{T}_1(N^+(d))$.

$N^+(x) \cap N^-(m)$, por P2.6-*ii* y P2.10 $\langle N^-(a)\rangle \approx QT_5$, contradiciendo el Lema 3.7. También debemos tener $|N^+(e)| = 5$, ya que $|N^+(e)| = 6$ implica por *(12)* $n, s \in N^+(e)$ (pues $b, c, m, x \in N^-(e)$) y $\langle\{e, d, a, n, s\}\rangle \approx TT_5$.

Por P2.5 el triángulo $mns \in \{T_0(N^-(x)), T_3(N^-(x))\}$. Si $mns = T_0(N^-(x))$, entonces, para todo $z \in \{m, n, s\}$, $5 \leq |N^+(z)| = |N^+(z) \cap N^-(x)| + |\{x\}| + |N^+(z) \cap \{a, b, c, d\}| + |N^+(z) \cap \{e\}| = 4 + |N^+(z) \cap \{e\}|$, es decir, $e \in N^+(z)$, implicando $N^-(e) = \{b, c, m, n, s, x\} \cup [N^-(e) \cap \{j, k, l\}] = 7$ -por *(12)*-, que contradice P3.9.

Por tanto, $mns = T_3(N^-(x))$ y $jkl = T_0(N^-(x))$. Como $jlk = T_3(N^+_{G^c}(x))$, si ahora consideramos G^c, d, x, jlk, msn y acb, en vez de G, x, d, abc, mns y jkl, respectivamente, por *(11)* obtenemos un caso análogo al presente en el que e juega el mismo papel. Esto implica $|N^+(e)| = |N^+_{G^c}(e)| = 5$, que es una contradicción.

Caso III. $abc = T_0(N^+(d))$.

En este caso, $mns = T_3(N^+(d))$. Tómese, s.p.g., $\langle N^+(d)\rangle$ como en la Fig. 3.4.*d*. Como por *(11)* $\langle N^-(d)\rangle \approx ST_5$, tomando G^c, d, x, jlk y msn, en vez de G, x, d, abc y mns, respectivamente, obtenemos un caso análogo al presente o al caso II. Por tanto, debemos tener $jlk = T_0(N^+_{G^c}(x))$, esto es, $jkl = T_3(N^-(x))$, implicando $mns = T_0(N^-(x))$. Puesto que e y el conjunto $\{m, n, s\}$ juegan el mismo papel en ambas situaciones, podemos suponer, s.p.g., $|N^+(e) \cap \{m, n, s\}| \geq 2$.

Por ser $\langle N^-(a)\rangle = \langle\{c, d, e, n, s, x\}\rangle \approx ST_6$ con x el centro de ced y $c, d \in N^-(n)$, de P2.6-*ii* se deduce $e \in N^+(n)$, implicando $m, s \in N^+(e)$ y $\langle\{e, d, s, a, m\}\rangle \approx TT_5$, que es una contradicción.

Caso IV. $abc \in \mathcal{T}_1(N^+(d))$.

Aquí veremos que $G \approx ST_{12}$. Tómese, s.p.g., a m como el centro de abc en $\langle N^+(d)\rangle$;

entonces, $a, b, c \in N^+(m)$ –por P2.6– y $n, s \in N^-(m)$.

Veamos primero que las direcciones de las aristas en $\langle N^-(x)\rangle$ son como en la Fig. 3.4.e. Puesto que $\langle\{m, n, s\}\rangle \notin TD(N^-(x))$, por P2.5 y P2.6-*i* existe el centro $r \in \{m, n, s\}$ de jkl en $\langle N^-(x)\rangle$, que no es s, ya que $s \in N^-(m) \cap N^+(n)$. Sabemos que $|N^+(m) \cap \{j, k, l\}| \leq 2$ (pues $a, b, c, x \in N^+(m)$) y $n, s \in N^-(m)$; de aquí que $r = n$ con $j, k, l \in N^-(n)$ y existe $t \in \{j, k, l\} \cap N^-(m)$; por simetría podemos tomar, s.p.g., $t = j$. Entonces, $s, n, j \in N^-(m, x)$, y por P2.3 el triángulo sjn está en $TD(N^-(x))$ y $k, l \in N^+(m)$. Finalmente, como $\langle\{m, k, j\}\rangle \notin TD(N^-(x))$ y $m, j \in N^+(s)$, de P2.3-*ii* se deduce $k \in N^-(s)$, que implica $s, n, l \in N^+(k)$ y $sln \in TD(N^-(x))$.

Ahora, probaremos que el conjunto $N^+(e)$ y las direcciones de sus aristas son como en la Fig. 3.4.*f*. Considerando G^c con d y x, en vez de G, x y d, respectivamente, obtenemos un caso análogo al presente, por (*I1*), en el que e juega el mismo papel. Por tanto, podemos suponer, s.p.g., $|N^+(e)| = 6$ en G.

Puesto que $N^+(m) = \{a, b, c, k, l, x\}$, de debe tener $N^-(m) = \{d, e, j, n, s\}$; como $\langle\{j, d, e\}\rangle \notin TD(N^-(m))$ y $j, d \in N^-(n)$, por P2.3-*ii* y P2.10 el vértice $e \in N^+(n)$. Por ser $6 = |N^+(e)| = |\{a, d, m\}| + |N^+(e) \cap \{j, k, l\}| + |N^+(e) \cap \{s\}| = 5 + |N^+(e) \cap \{s\}|$, se sigue que $s \in N^+(e)$. También $j \in N^+(e)$, pues s es el centro de ned en $\langle N^-(m)\rangle$ y $n, d \in N^+(j)$. Finalmente, veamos que $k \in N^+(e)$, que implica –por (*I2*)– $l \in N^-(e)$. Como $\langle N^+(m)\rangle = \langle\{a, b, c, k, l, x\}\rangle \approx ST_6$, y x es el centro de abc en $\langle N^+(m)\rangle$, por P2.6-*ii* existe $r \in N^+(k) \cap \{a, b, c\}$; de donde, $N^+(k) = \{r, d, l, n, s, x\}$, implicando $e \in N^-(k)$.

Tenemos $N^+(e) = \{a, d, j, k, m, s\}$. Por P2.3-*ii* el triángulo $asm \in TD(N^+(e))$, pues $a, s, m \in N^+(d)$ y $a \in N^+(m)$. De aquí que $akd = \langle N^-(s) \cap N^+(e)\rangle \in TD(N^+(e))$, y por tanto $ajm = \langle N^-(k) \cap N^+(e)\rangle \in TD(N^+(e))$.

En seguida veremos que $\langle N^-(s)\rangle$ es como en la Fig. 3.4.g. Note que $s \in V_2(N^+(d))$, pues $s \in V_3(N^+(d))$ implica $b, c, m \in N^+(s)$ (ya que $a, n \in N^-(s)$) y $\langle\{b, c, m\}\rangle \in TD(N^+(d))$, contradiciendo $b, c \in N^+(m)$. Entonces, existe $h \in \{b, c\}$ con $h \in N^-(s)$, que implica

$\langle N^-(s)\rangle = \langle\{a,h,d,e,k,n\}\rangle \approx ST_6$. Por ser $a,h \in N^+(d)$, de P2.5 y P2.6 se deduce la existencia del centro de ekn en $\langle N^-(s)\rangle$, que debe ser h, pues $d \in N^+(e) \cap N^-(n)$ y $a \in N^+(e) \cap N^-(k)$. De aquí que $e,k,n \in N^+(h)$ (pues $e \in N^+(h)$) y $a,d \in N^-(h)$; esto significa $h = b$ (y $c \in N^+(s)$). Como $a,b,n \in N^+(d)$, tenemos $abn \in TD(N^-(s))$. Además, $n \in N^+(c)$, ya que $\langle\{c,m,n\}\rangle = \langle N^-(a) \cap N^+(d)\rangle \in TD(N^+(d))$.

Por tanto, $N^+(a) = \{b,j,k,l,s\}$ (pues $N^-(a) = \{c,d,e,m,n,x\}$), y sólo resta conocer las direcciones de algunas aristas entre $\{b,c\}$ y $\{j,k,l\}$. Puesto que $N^+(m) = \{a,b,c,k,l,x\}$ con $b,k,l \in N^+(a)$, entonces $bkl \in TD(N^+(m))$. Como $\langle\{b,c,x\}\rangle \notin TD(N^+(m))$ y $b,x \in N^+(l)$, de P2.3-*ii* se deduce $c \in N^-(l)$; de donde, $akc = \langle N^-(l) \cap N^+(m)\rangle \in TD(N^+(m))$ (Fig. 3.4,*h*). Finalmente, en vista de que $\langle N^-(n)\rangle = \langle\{b,c,d,j,k,l\}\rangle \approx ST_6$, se cumple $j \in N^+(b,c)$, pues $bjd = \langle N^+(l) \cap N^-(n)\rangle \in TD(N^-(n))$ y $b,d,k \in N^-(c)$.

Hemos visto que las direcciones de las aristas en G o G^c están fijas, salvo isomorfismos, y como ST_{12} es libre de TT_5 con $ST_{12}^c \approx ST_{12}$, debemos tener $G \approx ST_{12}$. ■

A continuación veremos, mediante un ejemplo, que hay más de un torneo de orden 11 libre de TT_5. Sea ST_{11} el torneo circulante de orden 11 inducido por los residuos cuadráticos (mod. 11), es decir, por el conjunto $\{1,3,4,5,9\}$.

TEOREMA 3.10. *El torneo ST_{11} es libre de TT_5 y no está contenido en ST_{13}.*

Demostración. En [18] se prueba que ST_{11} es libre de TT_5. Para ver que ST_{11} no está contenido en ST_{13}, como ST_{11} es regular, sólo necesitamos verificar que ningún subtorneo de orden 11 en ST_{13} es regular. Sean $x,y \in V(ST_{13})$ con $y \in N^+(x)$ y sea $H = ST_{13} \setminus \{x,y\}$. Tómese cualquier vértice $z \in N^+(x,y)$. Entonces, $|N_H^+(z)| = 6$ y $|N_H^-(z)| = 4$, es decir, H no es regular. ■

CAPITULO 4

Torneos Libres de TT_6

Hemos visto que los torneos más grandes libres de TT_5 son de orden 13, de aquí que los torneos más grandes libres de TT_6 son de orden a lo más 27. En [21, 23] se dan dos ejemplos de torneos con estas características, es decir, $v(27) = 5$ y $gl(5) = 27$. En este capítulo probamos que estos dos torneos son isomorfos; más precisamente, vemos que existe un único torneo, ST_{27}, de orden 27 libre de TT_6. También, similarmente a como sucede en torneos libres de TT_4 y de TT_5, probamos que sólo hay un torneo, ST_{26}, de orden 26 libre de TT_6. Además, presentamos varias propiedades de ST_{27} y ST_{26}, las cuales utilizaremos en el siguiente capítulo.

TORNEOS DE ORDEN 27

Se sabe que existen torneos de orden 27 libres de TT_6 [21, 23]; de aquí en adelante, ST_{27} denotará uno cualquiera de ellos. Como veremos en el Teorema 4.9, ST_{27} es esencialmente único, salvo isomorfismos.

Por P3.1 y P3.2 es claro que:

LEMA 4.1. *Los torneos más grandes libres de TT_6 son de orden 27. Además, si $x \in V(ST_{27})$ entonces $\langle N^+(x)\rangle \approx ST_{13}$ y $\langle N^-(x)\rangle \approx ST_{13}$.*

LEMA 4.2. *Sean $x, y \in V(ST_{27})$ con $y \in N^+(x)$. Entonces, se tiene $\langle N^+(x,y)\rangle \approx ST_6$, $\langle N^-(x,y)\rangle \approx ST_6$, $\langle N^+(x) \cap N^-(y)\rangle \approx ST_6$ y $|N^-(x) \cap N^+(y)| = 7$.*

LEMA 4.3. *Sean* $x, y, z \in V(ST_{27})$. *Entonces,* $|N^+(x,y,z)| = 2, 3$ *o* 4 *y* $|N^-(x,y,z)| = 2, 3$ *o* 4. *Además,* $|N^+(x,y,z)| + |N^-(x,y,z)| = 6$ *cuando* $\langle\{x,y,z\}\rangle \in TD(ST_{27})$.

Demostración. Suponga, primero, que $\langle\{x,y,z\}\rangle \notin TD(ST_{27})$, digamos, $xy, xz, yz \in E(ST_{27})$. Como $\langle N^+(x,y)\rangle \approx ST_6$ (Lema 4.2) y $z \in N^+(x,y)$, de P2.3 se deduce $|N^+(x,y,z)| = 2$ o 3. Similarmente se puede probar que $|N^-(x,y,z)| = 2$ o 3.

Ahora supóngase $\langle\{x,y,z\}\rangle \in TD(ST_{27})$, digamos, $xy, yz, zx \in E(ST_{27})$. Veamos primero que $|N^+(x,y,z)| + |N^-(x,y,z)| = 6$. Sea $r = |N^+(x,y,z)|$. Por ser $|N^+(y,z)| = 6$ (Lema 4.2) se tiene $6 - r = |N^-(x) \cap N^+(y,z)|$, y como $|N^-(x) \cap N^+(z)| = 6$ y $y \notin N^-(x)$, entonces $|N^-(x,y) \cap N^+(z)| = 6 - (6 - r) = r$; pero $|N^-(x,y)| = 6$ y $z \notin N^-(x,y)$, que implica $|N^-(x,y,z)| = 6 - r$.

Para terminar, sólo necesitamos probar que $|N^+(x,y,z)| < 5$, pues aplicando este resultado en ST_{27}^c se deduce $|N^-(x,y,z)| < 5$ en ST_{27}, esto es, $|N^+(x,y,z)| > 1$ en ST_{27}, por la igualdad del párrafo anterior. Supóngase $|N^+(x,y,z)| \geq 5$. Como $\langle N^+(x,y,z)\rangle \subset \langle N^+(x,y)\rangle \approx ST_6$, por P2.8, P2.11 y P2.3-*i* existe $v \in N^+(x,y,z)$ con $|N^+(x,y,z) \cap N^-(v)| = 2$, es decir, en $\langle N^-(v)\rangle$ ($\approx ST_{13}$) el triángulo xyz cubre sólo dos vértices, contradiciendo P3.8. Similarmente se deduce $|N^-(x,y,z)| = 2, 3$ o 4. ■

LEMA 4.4. *Sea* $\langle\{x,y,z\}\rangle \in TD(ST_{27})$. *Si* $|N^+(x,y,z)| \geq 3$ *(resp.,* $|N^-(x,y,z)| \geq 3$*) entonces* $\langle N^+(x,y,z)\rangle$ *(resp.,* $\langle N^-(x,y,z)\rangle$*) contiene un único triángulo dirigido* T*; además, cuando* $|N^+(x,y,z)| = 4$ *(resp.,* $|N^-(x,y,z)| = 4$*),* T *cubre (resp.,* T *es cubierto por) el otro elemento de* $N^+(x,y,z)$ *(resp.,* $N^-(x,y,z)$*).*

Demostración. Es suficiente con ver el caso $|N^+(x,y,z)| \geq 3$. Supóngase $|N^+(x,y,z)| \geq 3$. Si no existe $v \in N^+(x,y,z)$ con $|N^-(v) \cap N^+(x,y,z)| > 1$, claramente $\langle N^+(x,y,z)\rangle \in TD(ST_{27})$. Y si existen $v, v_1, v_2 \in N^+(x,y,z)$ con $v_1, v_2 \in N^-(v)$ entonces, puesto que $\langle N^-(v)\rangle \approx ST_{13}$ (Lema 4.1) y $x, y, z \in N^-(v)$, por P3.8 existe $v_3 \in N^-(v) \cap N^+(x,y,z)$ tal que $\langle\{v_1, v_2, v_3\}\rangle \in TD(N^-(v))$. ■

Para los primeros Lemas (hasta el Lema 4.10) supondremos fijos dos vértices x y y de $V(ST_{27})$ con $y \in N^+(x)$. Sean $A = \langle N^-(x,y)\rangle$, $B = \langle N^+(x) \cap N^-(y)\rangle$, $C = \langle N^+(x,y)\rangle$, $D = \langle N^-(x) \cap N^+(y)\rangle$ y $G = \langle N^+(y)\rangle$ (Fig. 4.1).

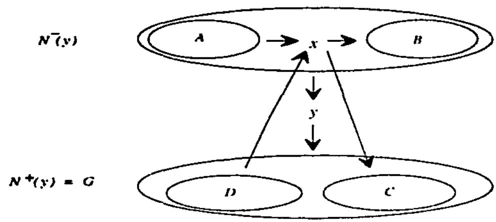

Fig. 4.1: $A = \langle N^-(x,y)\rangle$, $B = \langle N^+(x) \cap N^-(y)\rangle$, $C = \langle N^+(x,y)\rangle$ y $D = \langle N^-(x) \cap N^+(y)\rangle$.

Observación 4.1. *Si $T \in TD(C)$, entonces a lo más un vértice de $N^+(y)$ cubre a T* (pues en caso contrario se tendría $|N^-(T) \cap N^+(y)| = 3$ (P3.8) y, por tanto, $|N^-(T)| \geq |N^-(T) \cap N^+(y)| + |\{x,y\}| = 5$, contradiciendo el Lema 4.3).

Observación 4.2. *Se cumple $N^+(T_0(C)) \cap B = T_3(B)$* (por P3.4 con $ST_{13} = \langle N^+(x)\rangle$, $X^+ = C$ y $X^- = B$).

LEMA 4.5. *Sea $R \in T_2(C)$ y sea t_R el elemento de $N^+(x,y)$ cubierto por R (P2.6-i). Entonces, i) $N^-(R)$ es de la forma $\{a_R, x, y, d_R\}$, con $a_R \in V(T_3(A))$, $d_R \in V(D)$ y $x, y, d_R \in N^+(a_R)$; además, ii) $N^+(a_R, x, y) = R$, iii) $N^+(x, y, d_R) = R \cup \{t_R\}$ y iv) $a_R \neq a_R$ y $d_R \neq d_R$.*

para cada $S \in \mathcal{T}_2(C)$ *con* $S \neq R$.

Demostración. Sea $a \in V(T_3(A))$. Como $\langle N^+(a) \cap N^-(y) \rangle \approx ST_8$ (Lema 4.2), se tiene $|N^+(a,x) \cap N^-(y)| = 2$; y como $|N^+(a,x)| = 6$ y $y \in N^+(a,x)$, se deduce $|N^+(a,x,y)| = 3$. Además, puesto que $\langle N^+(a,x) \rangle \approx ST_6$ y y cubre a $N^+(a,x,y)$, por P2.6-i $\langle N^+(a,x,y) \rangle$ es un triángulo dirigido L de C. En vista de que $|N^-(L)| \geq 3$ y $x, y \in N^+(a)$, por el Lema 4.4 existe $d \in V(D)$ (es decir, $xyd \in TD(ST_{27})$) tal que $N^-(L) = \{x, y, d, a\}$ y $x, y, d \in N^+(a)$.

Veamos que $L \in \mathcal{T}_2(C)$. Se contradice el Lema 4.3 si $L = T_0(C)$, ya que $|N^+(L)| \geq 3$ (Observación 4.2) y $|N^-(L)| \geq |\{a, x, y, d\}| = 4$. Si $L \in \mathcal{T}_1(C)$, aplicando P3.5 (con $ST_{13} = \langle N^+(x) \rangle$ y $X^+ = \langle N^+(x,y) \rangle$) deducimos $|N^-(L) \cap N^+(x)| = 3$, lo cual implica $|N^-(L)| \geq |N^-(L) \cap N^+(x)| + |\{x, a, d\}| = 6$, que no es posible (Lema 4.3). Finalmente, supóngase $L = T_3(C)$. Como $\langle N^+(a,x,y) \rangle = L$, se cumple $a \in N^+(C \setminus L)$, es decir, $a \in N^+(T_0(C))$ (P2.5); por la Observación 4.2 y el Lema 4.4 $N^+(T_0(C)) = T_3(B) \cup \{a\}$ y $a \in N^+(T_3(B))$, contradiciendo P3.7 (con $ST_{13} = \langle N^-(y) \rangle$, $X^+ = B$ y $X^- = A$).

Por tanto, $L \in \mathcal{T}_2(C)$. Sea t el elemento de C cubierto por L (P2.6-i). Debemos tener $t \in N^+(d)$, pues en caso contrario, como L es cubierto en $\langle N^-(t) \rangle$ ($\approx ST_{13}$) por x y y, deduciríamos de P3.8 la existencia de $d' \in N^-(t)$ tal que $xyd' \in TD(N^-(t))$ y $x, y, d' \in N^-(L)$, que implicaría $|N^-(L)| \geq |\{a, x, y, d, d'\}| = 5$.

Entonces, si $R = L$, se cumplen las propiedades *i-iii* en esta R tomando $t_R = t$, $a_R = a$ y $d_R = d$. Por ser a el único elemento de $V(T_3(A))$ que cubre a L y $|V(T_3(A))| = |\mathcal{T}_2(C)|$ (P2.4), aplicando el análisis anterior a cada elemento de $V(T_3(A))$ deducimos que estas tres propiedades se cumplen en cada elemento de $\mathcal{T}_2(C)$ y que $a_R \neq a_S$, para todo $S, R \in \mathcal{T}_2(C)$ con $S \neq R$. Finalmente, si existen $S, R \in \mathcal{T}_2(C)$ con $d_S = d_R$, entonces $R \cup \{t_R\} = N^+(x, y, d_R) = S \cup \{t_S\}$, y por el Lema 4.4 $R = S$. ■

LEMA 4.6. *Existe un único* $z \in N^+(y) \cap N^-(x)$ *tal que* $|N^+(x,y,z)| = 3$; *además,* $\langle N^+(x,y,z) \rangle = T_3(C) = T_3(N_R^+(z))$ *y* $\langle N^+(x,y) \cap N^-(z) \rangle = T_0(C) = T_0(N_R^-(z))$.

Demostración. Como $|N^-(c) \cap N^+(y)| = 6$, para cada $c \in V(C)$, y $|E(C)| = 15$, entonces hay $6 \times 6 - 15 = 21$ aristas de D a C. Por otro lado, por el Lema 4.5 existen $d_1, d_2, d_3 \in V(D)$ con $|N^+(x, y, d_i)| = 4$, para $i = 1, 2, 3$. Por tanto, por ser $|N^+(x, y, d)| = 2, 3$ o 4 para cada $d \in V(D)$, debemos tener $V(D) = \{d_1, d_2, \ldots, d_6, z\}$ con $|N^+(x, y, d_i)| = 2$, para $i = 4, 5, 6$, y $|N^+(x, y, z)| = 3$. Del Lema 4.4 se sigue que $\langle N^+(x, y, z)\rangle$ es un triángulo $S \in TD(C)$.

Probemos que $S = T_3(C)$. Puesto que cada $T \in \mathcal{T}_1(C)$ es cubierto por un vértice de C (P2.6-i) y, por el Lema 4.5, cada $T' \in \mathcal{T}_2(C)$ es cubierto por un d_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, de la Observación 4.1 se sigue $S = T_0(C)$ o $S = T_3(C)$.

Supóngase $S = T_0(C)$. Por la Observación 4.2 $|N^+(S) \cap B| = 3$, y como $x, y, z \in N^-(S)$, por el Lema 4.3 se tiene $N^+(S) \cap N^+(y) = \emptyset$ y $N^-(S) \cap N^+(y) = \{z\}$; por tanto, tomando $ST_{13} = \langle N^+(y)\rangle$ $(= G)$, $X^+ = \langle N^+(y, z)\rangle$ y $X^- = \langle N^+(y) \cap N^-(z)\rangle$, el triángulo S cumple, de las propiedades P3.4-3.7, sólo P3.7, esto es, $S = T_3(N_R^+(z))$. Puesto que $\langle N^+(x, y, z)\rangle = T_0(C)$, por P2.5 $\langle N^+(x, y) \cap N^-(z)\rangle = T_3(C)$. Aplicando el Lema 3.2, con $ST_{13} = G$, $v = z$, $M = C$ y $F = T_3(C)$, obtenemos $T_3(C) = T_0(N_R^-(z))$ y $T_0(C) = S = T_3(N_R^+(z)) = T_3(\langle T_0(C) \cup T_3(C)\rangle) = T_3(C)$, que no es posible.

Por tanto, $S = T_3(C)$, y por P2.5 $\langle N^+(x, y) \cap N^-(z)\rangle = T_0(C)$. Como $x, y \in N^-(T_0(C))$ y por la Observación 4.2 $\{z\} \cup T_3(B) \subset N^+(T_0(C))$, del Lema 4.3 deducimos $N_R^-(T_0(C)) = \emptyset$ y $N_R^+(T_0(C)) = \{z\}$. Sea R el triángulo de G^c inducido por $V(T_0(C))$; entonces, $R \subset N^+_{G^c}(z)$ con $N^+_{G^c}(R) = \emptyset$ y $N^-_{G^c}(R) = \{z\}$, que significa $R = T_3(N^+_{G^c}(z))$ (por P3.4-3.7), es decir, en G, $T_0(C) = T_0(N_R^-(z))$. Además, aplicando el Lema 3.2, con $ST_{13} = G^c$, $v = z$, $M = C^c$ y $F = C^c \setminus R$, obtenemos $T_3(C) = T_3(N_R^+(z))$. ■

Sea $f_y : N^-(y) \to N^+(y)$ la función tal que $f_y(h) = k$, donde $k \in N^-(h)$ con $|N^+(h, y, k)| = 3$. Note que f_y es inyectiva, pues si, digamos, existiera $v \in N^-(y) \setminus x$ con $z = f_y(x) = f_y(v)$, entonces del Lema anterior se deduciría $xyz, vyz \in TD(N^-(T_3(C)))$, contradiciendo el Lema 4.4; por tanto, f_y es biyectiva.

LEMA 4.7. *Sea $z = f_y(x)$. Entonces, $\langle N^-(y, z)\rangle = \langle T_0(A) \cup T_3(B)\rangle$ y, por tanto, $\langle N^-(y) \cap$*

$\mathcal{N}^+(z)\rangle = \langle T_3(A) \cup \{x\} \cup T_0(B)\rangle$.

Demostración. Por el Lema 4.3 se sabe que $|\mathcal{N}^-(x,y,z)| = 3$. Aplicando el Lema 4.6 en ST_{27}^c, y y z (en vez de x) se deduce $\langle \mathcal{N}^-(y,z)\rangle = \langle T_0(A) \cup T_3(B)\rangle$ en ST_{27}. ■

LEMA 4.8. *La función f_y es un anti-isomorfismo.*

Demostración. Sean $z = f_y(x)$, $v \in \mathcal{N}^-(y)$ y $w = f_y(v)$. Necesitamos probar que $w \in \mathcal{N}^+(z)$ si y sólo si $v \in \mathcal{N}^-(x)$.

Suponga, primero, que $w \in \mathcal{N}^+(z) \cap C$ $(= T_3(C) = T_3(\mathcal{N}_R^+(z))$, por el Lema 4.6). Sea $w' \in T_3(C)$ con $ww' \in E(G)$. Utilizando el Lema 3.1 es fácil ver que si $a, b, c \in V(ST_{13})$ con $b, c \in V_3(\mathcal{N}^+(a))$, entonces $|\mathcal{N}^+(b,c)| = 2$. Por tanto, $w' \in T_0(\mathcal{N}_R^+(w))$, lo cual implica $w' \in \mathcal{N}^-(v)$ (aplicando el Lema 4.6 en v, y y w). Como $w \in T_3(\mathcal{N}_R^+(z))$, entonces $|\mathcal{N}_R^+(z) \cap \mathcal{N}_R^-(w)| = 2$, implicando $z \in T_0(\mathcal{N}_R^-(w))$; de aquí que $z \in \mathcal{N}^+(v)$ (nuevamente por el Lema 4.6 aplicado en v, y y w), es decir, $v \in T_0(A) \cup T_3(B)$ (Lema 4.7). Si $v \in T_3(B)$ se cumple $T_0(C) \cup \{w, w'\} \subset \mathcal{N}^-(v) \cap C$ (Observación 4.2 y Lema 4.6), que no es posible, por ser $|\mathcal{N}^-(v) \cap C| = 4$, pues $6 = |\mathcal{N}^-(v) \cap \mathcal{N}^+(x)| = |\mathcal{N}^-(v) \cap B| + |\mathcal{N}^-(v) \cap C| = 2 + |\mathcal{N}^-(v) \cap C|$. De aquí que $v \in T_0(A)$ y $f_y(T_0(A)) = T_3(C)$, por la biyectividad de f_y.

Ahora supóngase $w \in \mathcal{N}^+(z) \cap D$, que significa $w \in T_0(\mathcal{N}_R^+(z))$, pues por el Lema 4.6 $\mathcal{N}^+(z) \cap C = T_3(\mathcal{N}_R^+(z))$. Sea $T = \langle f_y^{-1}(T_0(\mathcal{N}_R^+(z)))\rangle$; es suficiente con probar que $T = T_3(A)$.

Como $z \in T_3(\mathcal{N}_R^-(w))$, por el Lema 4.6 $z \in \mathcal{N}^-(v)$, implicando $v \in T_3(A) \cup T_0(B)$ (Lema 4.7) y, en general, $T \subset V(T_3(A) \cup T_0(B))$. Sea $ww'w'' = T_0(\mathcal{N}_R^+(z))$ y sean $v' = f_y^{-1}(w')$ y $v'' = f_y^{-1}(w'')$. Puesto que $|\mathcal{N}_R^+(w,w')| \geq |T_3(\mathcal{N}_R^-(z))| = 3$ (P3.4), entonces $w' \in T_3(\mathcal{N}_R^+(w))$, que implica $v'v \in E(ST_{27})$ (por el caso anterior); similarmente se prueba $v''v', vv'' \in E(ST_{27})$, es decir, $T \in TD(\langle T_3(A) \cup T_0(B)\rangle)$. Aplicando P3.4 en $\langle \mathcal{N}^-(y)\rangle$, con $\mathcal{N}^+ = B$ y $\mathcal{N}^- = A$, obtenemos $TD(\langle T_3(A) \cup T_0(B)\rangle) = \{T_3(A), T_0(B)\}$, que significa $T = T_3(A)$ o $T = T_0(B)$.

Supóngase $T = T_0(B)$. Sea $T' = \langle f_y^{-1}(T_3(\mathcal{N}_R^-(z)))\rangle$; por el Lema 4.7 $T' \subset V(T_3(A) \cup T_0(B))$, ya que $v \in T_3(\mathcal{N}_R^-(z))$ implica $z \in T_0(\mathcal{N}_R^+(v))$ y $f_y^{-1}(v) \in \mathcal{N}^+(z)$ (Lema 4.6). De esto se sigue que $T' = T_3(A)$. Por otro lado, utilizando el Lema 3.1 es fácil ver que si $a \in V(ST_{13})$ entonces existen $b \in V_2(N^+(a))$ y $c \in V_3(N^-(a))$ con $c \in V_3(N^+(b))$. Por tanto, existen $h \in T_0(N_R^+(z))$ y $k \in T_3(N_R^-(z))$ con $k \in T_3(N_R^+(h))$, que implica (como hemos visto) $f_y^{-1}(k)f_y^{-1}(h) \in E(ST_{27})$. Pero $f_y^{-1}(h) \in T = T_0(B)$ y $f_y^{-1}(k) \in T_3(A)$, y aplicando P3.4 en $\langle N^-(y)\rangle$, $T_0(B)$ y $T_3(A)$ deducimos $f_y^{-1}(h)f_y^{-1}(k) \in E(ST_{27})$, que es una contradicción.

Por tanto, $T = T_3(A)$. Hemos probado que $f_y(A) = N_R^+(z)$: entonces se tiene el Lema, pues f_y es biyectiva. ■

TEOREMA 4.9. *Sean T y T' dos torneos de orden 27 libres de TT_6; también, sean $ab \in E(T)$ y $a'b' \in E(T')$. Entonces, existe un isomorfismo F de T sobre T' tal que $F(a) = a'$ y $F(b) = b'$. Por tanto, existe un único torneo de orden 27 libre de TT_6, y su grupo de automorfismos es transitivo en aristas.*

Demostración. Sean $f_b : N_T^-(b) \to N_T^+(b)$ y $f_{b'} : N_{T'}^-(b') \to N_{T'}^+(b')$ las funciones correspondientes a la función $f_y : N^-(y) \to N^+(y)$ previamente descrita. También, sean $G = \langle N_T^+(b)\rangle$ y $G' = \langle N_{T'}^+(b')\rangle$, y sea $H : N_T^+(b) \to N_{T'}^+(b')$ un isomorfismo tal que $H(f_b(a)) = f_{b'}(a')$ (recuérdese que $Aut(ST_{13})$ es transitivo en vértices). Defínase F como: $F(b) = b'$, $F(x) = H(x)$, si $x \in N_T^+(b)$, y $F(y) = z$, si $y \in N_T^-(b)$, donde $z = f_{b'}^{-1}(H(f_b(y)))$. Claramente, F es biyectiva.

Sea $hk \in E(T)$. Es directo que $F(h)F(k) \in E(T')$ cuando $b \in \{h, k\}$ o $hk \in E(N_T^+(b))$. Si $hk \in E(N_T^-(b))$ entonces $f_b(k)f_b(h) \in E(N_T^+(b))$ (Lema 4.8); de aquí que $H(f_b(k))H(f_b(h)) \in E(N_{T'}^+(b'))$ y $f_{b'}^{-1}(H(f_b(h)))f_{b'}^{-1}(H(f_b(k))) = F(h)F(k) \in E(N_{T'}^-(b'))$. Finalmente, por el Lema 4.6 tenemos para $h \in N_T^-(b)$ y $k \in N_T^+(b)$: $hk \in E(T)$ si y sólo si $k \in T_3(N_R^+(f_b(h))) \cup T_0(N_R^-(f_b(h)))$, que ocurre si y sólo si $H(k) \in T_3(N_{G'}^+(H(f_b(h)))) \cup T_0(N_{G'}^-(H(f_b(h))))$, que a su vez también sucede si y solamente si $f_{b'}^{-1}(H(f_b(h)))H(k) \in E(T')$, es decir, $F(h)F(k) \in E(T')$. ■

LEMA 4.10. *En ST_{27} existen triángulos $T \in TD(ST_{27})$ tales que $|N^+(T)| = 3$ y $|N^-(T)| = 3$. Además, en cada uno de estos triángulos T se cumple $\langle N^+(T)\rangle, \langle N^-(T)\rangle \in TD(ST_{27})$ y $N^+(N^+(T)) = N^-(T)$.*

Demostración. Por el Lema 4.6 existe $T \in TD(ST_{27})$ con $|N^+(T)| = 3$, y por los Lemas 4.3 y 4.4 $\langle N^+(T)\rangle, \langle N^-(T)\rangle \in TD(ST_{27})$. Veamos que $N^+(N^+(T)) = N^-(T)$.

Supóngase, s.p.g., $x, y \in V(T)$. Del Lema 4.6 se deduce $V(T) = \{x, y, z\}$ (donde $z = f_y(x)$) y $\langle N^+(T)\rangle = T_3(C)$. Como $\langle N^-(y,z)\rangle = \langle T_0(A) \cup T_3(B)\rangle$ (Lema 4.7), entonces $\langle N^-(x,y,z)\rangle = T_0(A)$ y, por tanto, necesitamos probar que $\langle N^+(T_3(C))\rangle = T_0(A)$.

Aplicando la propiedad P3.7 en $ST_{13} = \langle N^+(y)\rangle$ y $X^+ = N^+(y,z)$ se deduce $N^+(T_3(C)) \cap N^+(y) = \emptyset$ y $N^-(T_3(C)) \cap N^+(y) = \{z\}$ (recuérdese que $T_3(N_G^+(z)) = T_3(C)$), y aplicándola en $ST_{13} = \langle N^+(x)\rangle$ y $X^+ = C$ se tiene $N^+(T_3(C)) \cap N^+(x) = \emptyset$ y $N^-(T_3(C)) \cap N^+(x) = \{y\}$. Por tanto, $N^+(T_3(C)) \subset A$ y $N^-(T_3(C)) \subset \{x, y, z\} \cup A$. Del Lema 4.5 es fácil ver que ningún elemento de $T_3(A)$ cubre o es cubierto por $T_3(C)$, lo cual significa $N^+(T_3(C)) \subset T_0(A)$ y $N^-(T_3(C)) \subset \{x, y, z\} \cup T_0(A)$. Sea $v \in V(T_0(A))$; en la demostración del Lema 4.8 establecimos que $f_y(v) \in V(T_3(C))$, y como $f_y(v)v \in E(ST_{27})$ (Lema 4.6), se sigue que $v \notin N^-(T_3(C))$. Esto último implica $N^-(T_3(C)) = \{x, y, z\}$ y, por el Lema 4.3, $\langle N^+(T_3(C))\rangle = T_0(A)$. ■

LEMA 4.11. *Sea H un subtorneo de ST_{27} isomorfo a ST_{13} y sea $R = [y, S_1, S_2]$ un β-triángulo de ST_{27} contenido en H. Entonces, $|N^-(S_1)| = 2$ y $|N^+(S_2)| = 2$.*

Demostración. Por el Lema 4.3 $|N^-(S_1)| = 2$ o 3. Suponga que $|N^-(S_1)| = 3$. Por el Lema 4.4, $\langle N^-(S_1)\rangle \in TD(ST_{27})$; sean $x, z \in V(ST_{27})$ con $xyz = \langle N^-(S_1)\rangle$. Del Lema 4.10 se deduce que S_2 cubre a $\{x, y, z\}$ (Fig. 4.2). Sea $\{a, b, c\} \subset V(H)$ con $N_H^+(y) = \{a, b, c\} \cup V(S_1)$. Claramente, para $L = \langle N_H^+(y)\rangle$, se tiene $L \approx ST_6$, y por el Lema 3.3 (aplicado en H y $[y, S_1, S_2]$) se cumple $S_1 = T_0(L)$, que implica $\langle\{a, b, c\}\rangle = T_3(L)$. Sin embargo, como $|N^+(x, y, z)| = |V(S_1)| = 3$ (Lema 4.3), por el Lema 4.6 $S_1 = T_3(N^+(y, z))$; entonces, aplicando el Lema 3.2 (con $ST_{13} \approx N^+(y)$, $v = z$, $F = \langle\{a, b, c\}\rangle$ y $M = \langle S_1 \cup \{a, b, c\}\rangle$), se deduce $\langle\{a, b, c\}\rangle = T_0(\langle S_1 \cup \{a, b, c\}\rangle) = T_0(L)$, que es una contradicción. Un argumento similar en ST_{27}^{c} ($\approx ST_{27}$) implica $|N^+(S_2)| = 2$ en ST_{27}. ■

TEOREMA 4.12. *Sea H un subtorneo de ST_{27} isomorfo a ST_{13}. Entonces, existe $v \in V(ST_{27})$ tal que $H = \langle N^+(v)\rangle$ o $H = \langle N^-(v)\rangle$.*

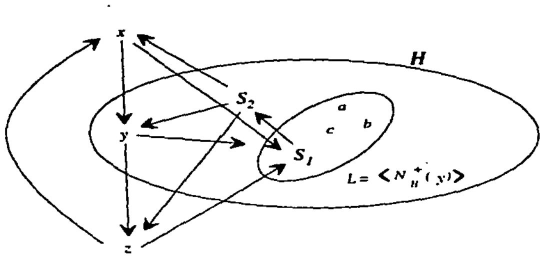

Fig. 4.2: El β-triángulo $R = [y, S_1, S_2]$ de $H \subset ST_{27}$ cuando $|N^-(S_1)| = 3$.

Demostración. Veamos primero que cada β-triángulo R de H cubre un único vértice de ST_{27}, el cual no está en $V(H)$, así como también es cubierto por sólo un vértice de ST_{27}, que tampoco está en $V(H)$. Sea $R = [z, S_1, S_2]$. Por los Lemas 4.3 y 4.11 $|N^-(S_1)| = 2$ y $|N^+(S_1)| = 4$; entonces, puesto que $V(S_2) \subset N^+(S_1)$, del Lema 4.4 se deduce la existencia de $x \in N^+(S_1) \cap N^+(S_2)$; $x \notin V(H)$ pues, por P3.8, $N^+_H(S_1) = S_2$. Aplicando el Lema 3.3 en $\langle N^-(x)\rangle$, S_1 y S_2 tenemos que también existe $z' \in N^-(x)$ con $z' \in N^-(S_1) \cap N^+(S_2)$; como $N^+(S_2) = \{x, z\}$ (Lema 4.11), se cumple $z = z'$ y $z \in N^-(x)$, es decir, x es cubierto por $\{z\} \cup S_1 \cup S_2$. Claramente, x es único, pues $4 = |N^+(S_1)| = |V(S_2) \cup \{x\}|$. Repitiendo las mismas ideas en ST^c_{27}, H^c y $R^c = [z, S^c_2, S^c_1]$ deducimos que en ST_{27} existe un único vértice y en $V(ST_{27})$, que tampoco está en $V(H)$, tal que y cubre $\{z\} \cup S_1 \cup S_2$.

Sean $A = \{w \in V(ST_{27}) \mid w$ cubre un β-triángulo de $H\}$ y $B = \{w \in V(ST_{27}) \mid w$ es cubierto por un β-triángulo de $H\}$; claramente, $A \cap B = \emptyset$ (pues $|V(H)| = 13$). Por el párrafo anterior, $|A| + |B| \leq 14$; suponga, s.p.g., que $|A| \leq 7$ (pues el caso $|B| \leq 7$ es análogo en ST_{27}^c). Por tanto, también por el párrafo anterior y por el Lema 3.5, existe $a \in A$ tal que a cubre dos β-triángulos K y R de H. Si existe $h \in V(H) \cap N^-(a)$, como los 7 β-triángulos de H que contienen a h (Lema 3.5) no son cubiertos por a, debe existir $a' \in A \backslash a$ tal que a' cubre otros dos β-triángulos K' y R' de H. Pero $|V(K) \cup V(R)| \geq 10$ y $|V(K') \cup V(R')| \geq 10$ (Lema 3.4), lo cual implica $|N^+(a, a')| \geq |(V(K) \cup V(R)) \cap (V(K') \cup V(R'))| \geq 7$, contradiciendo el Lema 4.2. De aquí que $\langle N^+(a) \rangle = H$. ∎

TORNEOS DE ORDEN MENOR QUE 27

Ahora veremos algunos resultados sobre torneos de orden 26 libres de TT_6. De P3.1 y el Teorema 3.9 es claro que:

LEMA 4.13. *Sea G un torneo de orden 26 libre de TT_6. Entonces, $V(G) = V_{12}(G) \cup V_{13}(G)$, $|V_{12}(G)| = 13$ y $|V_{13}(G)| = 13$. Además, para cada $x \in V_{12}(G)$ (resp., $x \in V_{13}(G)$), se cumple $\langle N^+(x) \rangle \approx ST_{12}$ y $\langle N^-(x) \rangle \approx ST_{13}$ (resp., $\langle N^+(x) \rangle \approx ST_{13}$ y $\langle N^-(x) \rangle \approx ST_{12}$).*

LEMA 4.14. *Sea G un torneo de orden 26 libre de TT_6 y sean $x, y \in V(G)$ con $y \in N^+(x) \cap V_{13}(G)$. Entonces, $|N^+(x, y)| = 6$.*

Demostración. Por el Lema 4.13, $\langle N^+(x) \rangle \approx ST_{12}$ o ST_{13}. Si $\langle N^+(x) \rangle \approx ST_{13}$, el resultado es claro usando P3.2. Supóngase $\langle N^+(x) \rangle \approx ST_{12}$ con $|N^+(x, y)| \neq 6$; por P2.8, P3.2 y el Teorema 3.9, se tiene $\langle N^+(x, y) \rangle \approx ST_5$. Entonces, existe $z \in N^+(x, y)$ con $|N^-(z) \cap N^+(x, y)| = 1$. Como $\langle N^+(y) \rangle \approx ST_{13}$, P3.2 implica $|N^-(z) \cap N^+(y)| = 6$; por tanto, $|N^-(z, x) \cap N^+(y)| = 5$, es decir, $|N^-(x) \cap N^+(y)| > 4$ en $\langle N^-(z) \rangle$ (que es isomorfo a ST_{12} o ST_{13}), contradiciendo P3.3. ∎

LEMA 4.15. *Sea G un torneo de orden 26 libre de TT_6 y sean $x, y \in V_{12}(G)$. Entonces, $|N^+(x, y)| = 5$.*

Demostración. Si $v \in V_{12}(G)$ y $z \in N^+(v)$ con $z \in V_5(N^+(v))$, por el Lema 4.14 $z \in V_{12}(G)$. Entonces, para todo $v \in V_{12}(G)$, como $\langle N^+(v) \rangle \approx ST_{12}$ y $|V_5(N^+(v))| = 6$, tenemos

$|N^+(v) \cap V_{12}(G)| \geq 6$. Pero $|V_{12}(G)| = 13$ y $\sum_{v \in V_{12}(G)} |N^+(v) \cap V_{12}(G)| = |E(\langle V_{12}(G)\rangle)| = 13(6)$, que implica $|N^+(v) \cap V_{12}(G)| = 6$, para todo $v \in V_{12}(G)$. Por tanto, $y \in V_5(\langle N^+(x)\rangle)$ si $x, y \in V_{12}(G)$ con $y \in N^+(x)$. ∎

TEOREMA 4.16. *Sea G un torneo de orden 26 libre de TT_6. Entonces, G está contenido en ST_{27}. En particular, existe un único torneo, que denotaremos por ST_{26}, de orden 26 libre de TT_6, salvo isomorfismos.*

Demostración. Sea h un vértice no contenido en $V(G)$ y sea H el torneo que contiene a G tal que $V(H) = V(G) \cup \{h\}$ y, para cada $x \in V(G)$, $h \in N^+(x)$ o $h \in N^-(x)$ si, respectivamente, $x \in V_{12}(G)$ o $x \in V_{13}(G)$ (Lema 4.13).

Veamos que H es libre de TT_6. Sea $x \in V_{12}(G)$ (el caso $x \in V_{13}(G)$ es análogamente analizado en H^c). Como, por definición, $h \in N_H^+(x)$, entonces es suficiente con probar que $\langle N^+(x) \cup \{h\}\rangle \approx ST_{13}$, es decir, $y \in N_H^-(h)$ o $y \in N_H^+(h)$ si $y \in V_5(\langle N^+(x)\rangle)$ o $y \in V_6(\langle N^+(x)\rangle)$, respectivamente. Si $y \in V_5(\langle N^+(x)\rangle)$, por el Lema 4.14, $y \in V_{12}(G)$, y por tanto $y \in N_H^-(h)$. Y $y \in V_6(\langle N^+(x)\rangle)$ implica, por el Lema 4.15, $y \in V_{13}(G)$, esto es, $y \in N_H^+(h)$.

Puesto que ST_{27} es el único torneo de orden 27 libre de TT_6, tenemos $H \approx ST_{27}$. También por el Teorema 4.9, $Aut(ST_{27})$ es transitivo en aristas, de donde se sigue el resultado. ∎

En torneos de orden 25 libres de TT_6 tenemos un resultado semejante al Lema 4.13:

TEOREMA 4.17. *Si G es un torneo de orden 25 libre de TT_6, entonces $V(G) = V_{11}(G) \cup V_{12}(G) \cup V_{13}(G)$ con $V_{12}(G) \neq \emptyset$ y $|V_{11}(G)| = |V_{13}(G)| \leq 12$. Además, para cada $x \in V(G)$, se cumple $\langle N^-(x)\rangle \approx ST_{13}$, $\langle N^+(x)\rangle \approx ST_{12} \approx \langle N^-(x)\rangle$ o $\langle N^+(x)\rangle \approx ST_{13}$, si $x \in V_{11}(G), V_{12}(G)$ o $V_{13}(G)$, respectivamente.*

Para torneos de orden 24 y 25 proponemos la siguiente:

CONJETURA. *Todos los torneos libres de TT_6 de orden 24 y 25 están contenidos en ST_{27}.*

Para torneos de orden 23 la correspondiente conjetura es falsa. Sea ST_{23} el torneo circulante de orden 23 inducido por el conjunto de residuos cuadráticos (mod. 23), es decir, por el conjunto $RQ_{23} = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18 \}$.

TEOREMA 4.18. *El torneo ST_{23} es libre de TT_6 y no está contenido en ST_{27}.*

Demostración. Probemos primero que ST_{23} no está contenido en ST_{27}. Es suficiente con ver que si $A = \{a, b, c, d\} \subset V(ST_{27})$, entonces $H = ST_{27} \setminus A$ no es regular. Suponga, s.p.g., que $b, c \in N^+(a)$ y $c \in N^+(b)$. Como $\langle N^+(a) \rangle \approx ST_{13}$ (por el Lemma 4.1) y $\langle N^+(a, b) \rangle \approx ST_6$ (por P3.2), existe $x \in N^+(a, b, c)$ con $x \neq d$. Entonces, $|N^-_H(x)| = 9$ o 10, y $|N^+_H(x)| = 13$ o 12, es decir, H no es regular.

Falta ver que ST_{23} es libre de TT_6. Puesto que ST_{23} es el torneo de Galois de orden 23, la función $F_{r,s}(z) = rz + s$ es un automorfismo de ST_{23}, para todo $r \in RQ_{23}$ y para todo $s \in Z_{23}$, es decir, $Aut(ST_{23})$ es transitivo en aristas. Entonces, si W es uno de los más grandes subtorneos transitivos de ST_{23}, podemos suponer, s.p.g., $0, 1 \in W$ con $[W \setminus \{0, 1\}] \subset N^+(0, 1)$. Es este caso, es fácil verificar que $\langle N^+(0, 1) \rangle = \langle \{2, 3, 4, 9, 13\} \rangle \approx ST_5$, implicando que ST_{23} es libre de TT_6. ∎

CAPITULO 5

Torneos Libres de TT_7

Hasta ahora hemos visto que la estructura de los torneos más grandes libres de TT_k, para cada $k \in \{3, 4, 5, 6\}$, es bastante simétrica y relativamente sencilla, pues son torneos circulantes o de Galois. Sin embargo, como veremos en éste y en los próximos capítulos, todo hace pensar que la estructura de los torneos más grandes libres de TT_7 es más complicada; en particular, $gt(6) < 2gt(5) - 1$. En este capítulo probamos que todo torneo de orden 53 contiene a TT_7 (es decir, $gt(6) \leq 52$). También, presentamos un torneo circulante de orden 31 libre de TT_7, el cual, como veremos en el Capítulo VIII, es el más grande, y el único, circulante (incluidos los de Galois) libre de estos subtorneos.

Utilizando el Teorema 4.9 es fácil ver que todo torneo de orden mayor que 55 contiene a TT_7. Veamos que estos subtorneos también están en todo torneo de orden 53. Suponga que existe un torneo ST_{53} de orden 53 libre de TT_7. Por el Lema 4.1 y los Teoremas 4.9 y 4.16 es claro que:

P5.1 $V(ST_{53}) = V_{25}(ST_{53}) \cup V_{26}(ST_{53}) \cup V_{27}(ST_{53})$. *Además, si $x \in V_{26}(ST_{53}) \cup V_{27}(ST_{53})$ (resp., $x \in V_{25}(ST_{53})$), entonces $\langle N^+(x)\rangle \approx \langle N^-(x)\rangle \approx ST_{26}$ o $\langle N^+(x)\rangle \approx ST_{27}$ (resp., $\langle N^-(x)\rangle \approx ST_{27}$).*

LEMA 5.1. $|V_{27}(ST_{53})| = |V_{25}(ST_{53})| > 1$.

Demostración. Obviamente, $|V_{27}(ST_{53})| = |V_{25}(ST_{53})|$. Para ver que $|V_{27}(ST_{53})| > 1$, suponga que a lo más existen un vértice $r \in V_{27}(ST_{53})$ y un vértice $s \in V_{25}(ST_{53})$. Si

$N^+(r,s) = \emptyset$, entonces $r \in N^+(s)$ (pues $\langle N^+(r)\rangle \approx ST_{27}$) y $|N^+(s) \cap N^-(r)| = 24$, implicando $TT_6 \subset \langle N^+(s) \cap N^-(r)\rangle$ y $TT_7 \subset ST_{53}$. Por tanto, podemos suponer que existen $x, y \in V_{26}(ST_{53})$ con $x \in V_{12}(N^-(y))$ y, si existen, $r, s \in N^-(y)$; claramente, $A = \langle N^+(x,y)\rangle \approx ST_{13}$.

Sea t un vértice que no está en $V(ST_{53})$ y sea H el torneo isomorfo a ST_{27} que contiene a $\langle N^+(y)\rangle$ tal que $V(H) = \{t\} \cup N^+(y)$ –Teorema 4.16. Por el Teorema 4.12 existe $z_x \in V(H)$ con $A = \langle N^+_H(z_x)\rangle$ o $A = \langle N^-_H(z_x)\rangle$. Si $A = \langle N^+_H(z_x)\rangle$ con $z_x \in N^+(y)$ (es decir, $z_x \neq t$) entonces, para cada $v \in A$, se tiene $\langle N^-(v)\rangle \approx ST_{26}$ con $x, y, z_x \in N^-(v)$ y $|N^+(x,y,z_x) \cap N^-(v)| = |A \cap N^-(v)| = 6$, que no es posible, por el Lema 4.3 y el Teorema 4.16.

Suponga que $z_x \in N^+(y)$ con $A = \langle N^-_H(z_x)\rangle$. Como $z_x \in V_{26}(ST_{53})$ y $x \in N^+(z_x)$, se cumple $|N^+(x,z_x)| \geq 12$ y $N^+(x,z_x) \subset N^+(x) \cap N^-(y)$. Por tanto, $|N^+(x,z_x)| = 12$ (pues $x \in V_{12}(N^-(y))$) y $|N^-(x) \cap N^+(z_x)| = 13$; de aquí que $|N^-(x,y) \cap N^+(z_x)| = 1$ (pues $|N^-(x) \cap N^+(y,z_x)| = 12$) y $|N^-(x,y,z_x)| = 12$. Sea k un vértice que no está en $V(ST_{53}) \cup \{t\}$ y sea F un torneo isomorfo a ST_{27} que contiene a $\langle N^-(x)\rangle$ ($\approx ST_{26}$) tal que $V(F) = N^-(x) \cup \{k\}$; si $M = \langle N^-(x,y)\rangle$, entonces $M \subset F$, $M \approx ST_{13}$ y, por el Teorema 4.12, existe $w \in V(F)$ tal que $M = N^+_F(w)$ o $M = N^-_F(w)$; pero $z_x \in V(F)$ con $|N^-_F(z_x) \cap M| = 12$, contradiciendo F, w y z_x el Lema 4.2.

Por lo anterior, debemos tener $z_x = t$, para cada $x \in V_{12}(N^-(y)) \setminus \{r,s\}$. Esto implica la existencia de $x_1, x_2 \in V_{12}(N^-(y)) \cap V_{26}(ST_{53})$ tales que $x_2 \in N^+(x_1)$ y $N^+(x_1,y) = N^+(x_2,y)$ ($\approx ST_{13}$); es decir, en $\langle N^+(x_1)\rangle$ ($\approx ST_{26} \subset ST_{27}$) se tiene $|N^+(x_2,y)| = 13$, que no es posible, por el Lema 4.2 ∎

TEOREMA 5.2. *Todos los torneos de orden 53 contienen a TT_7.*

Demostración. Sea ST_{53} un torneo de orden 53 libre de TT_7. Primero, obtendremos un vértice $y \in V_{27}(ST_{53})$ tal que $V_{11}(N^-(y)) \neq \emptyset$. Por el Lema 5.1 sabemos que existen $r, y \in V_{27}(ST_{53})$ con $r \in N^-(y)$. Como $|N^-(y)| = 25$, entonces $V_{11}(N^-(y)) = \emptyset$ si y sólo si

$V(N^-(y)) = V_{12}(N^-(y))$ (Lema 4.17): pero $r \in V_{12}(N^-(y))$ implicaría $|N^+(r,y)| = 14$ y, por P3.1, $TT_7 \subset ST_{53}$. De aquí que $V_{11}(N^-(y)) \neq \emptyset$.

Sean $x, y \in V(ST_{53})$ con $y \in V_{27}(ST_{53})$ y $x \in V_{11}(N^-(y))$. Puesto que $|N^+(x)| \geq 25$ (P5.1), se tiene $|N^+(x,y)| \geq 13$ y, por tanto, $D = \langle N^+(x,y)\rangle \approx ST_{13}$ y $|N^+(x)| = 25$. Por el Teorema 4.12 existe $z \in N^+(y)$ tal que $D = \langle N^-(z) \cap N^+(y)\rangle$ o $D = \langle N^+(z,y)\rangle$. Sean $A = \langle N^-(x,y)\rangle$, $B = \langle N^+(x) \cap N^-(y)\rangle$ y $C = \langle N^+(y) \setminus (D \cup \{z\})\rangle$ –Fig. 5.1. Como $TT_7 \not\subset ST_{53}$ y $|N^-(y)| = 25$ con $x \in V_{11}(N^-(y))$, entonces $|A| = 13$ con $A \approx ST_{13}$. Además, $C \approx ST_{13}$, pues $C = \langle N^+(y) \cap N^-(z)\rangle$ o $C = \langle N^+(y,z)\rangle$.

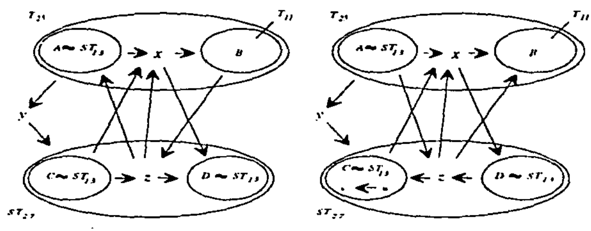

Fig. 5.1: El torneo ST_{53} con $y \in V_{27}(ST_{53})$ y $x \in V_{11}(N^-(y))$. **a**: Caso $D = \langle N^+(x,y,z)\rangle$; **b**: Caso $D = \langle N^+(x,y) \cap N^-(z)\rangle$.

Primero supóngase $D = \langle N^+(y,z)\rangle$. En este caso, $C = \langle N^+(y) \cap N^-(z)\rangle$ y $A \subset N^+(z)$, ya que $\langle A \cup C \cup \{z\}\rangle = \langle N^-(x)\rangle \approx ST_{27}$. De aquí que $|N^+(z)| \geq |A \cup D \cup \{x\}| = 27$, implicando $B \subset N^-(z)$ (Fig. 5.1,a). Observe que en ST_{53}^c se cumple $y \in V_{11}(N^-(x))$, $x \in V_{27}(ST_{53}^c)$, $\langle N^+(x,y)\rangle = A^c$ y $z \in N^+(x)$ con $V(A^c) = N^+(x) \cap N^-(z)$, que es análogo al caso $D = \langle N^-(z) \cap N^+(y) \rangle$ en ST_{53}.

Por tanto, podemos tomar, s.p.g., $D = \langle N^-(z) \cap N^+(y) \rangle$. Entonces, $C = \langle N^+(y, z) \rangle$ y $A \subset N^-(z)$ (pues $\langle A \cup C \cup \{z\} \rangle = \langle N^-(x) \rangle \approx ST_{27}$), que implica $B \subset N^+(z)$ (pues $|N^-(z)| = |A \cup D \cup \{y\}| = 27$) –Fig. 5.1.*b*. Ahora obtendremos un vértice $v \in V(C)$ tal que $v \notin V_{27}(ST_{53})$. Por ser $|N^+(z)| = |B \cup C \cup \{x\}| = 25$, por el Lema 4.17 existe $v \in V(C)$ con $v \notin V_{13}(N^+(z))$; como $|N^+(v) \cap V(C)| = 6$ y $x \in N^+(v)$, se cumple $|N^+(v) \cap V(B)| \leq 5$. Además, $|N^+(v) \cap V(A)| = 7$ (pues $\langle A \cup C \cup \{z\} \rangle = \langle N^-(x) \rangle \approx ST_{27}$); de aquí que $|N^+(v)| = |N^+(v, y)| + |N^+(v) \cap N^-(y)| \leq 13 + 13 = 26$ y $v \notin V_{27}(ST_{53})$.

Finalmente, sean $v \in V(C)$ con $v \notin V_{27}(ST_{53})$, $H = \langle N^+(y) \cap N^-(v) \rangle$ ($\approx ST_{13}$) y $w \in V_3(N_H^+(z))$. Puesto que $z \in V_2(N_H^-(w))$, por P2.3-*ii* se tiene que $R_1 = \langle N_H^-(w, z) \rangle \in TD(D)$ y $V(R_1)$ cubre $\{v, w, z\}$. Similarmente, para $K = \langle N^-(v, x) \rangle$ ($\approx ST_{13}$), por ser $w \in V_3(N_K^+(z))$ (pues $N^+(z) \cap K = N^+(z) \cap H$), se debe tener $z \in V_2(N_K^-(w))$, $P_1 = \langle N_K^-(w, z) \rangle \in TD(A)$ y $V(P_1)$ cubre a $\{v, w, z\}$. Sin embargo, como $\langle N^-(v) \rangle \approx ST_{26}$ o ST_{27}, entonces $\langle N^-(v, w) \rangle \approx ST_{12}$ o ST_{13} y $|N^-(v, w, z)| \leq 6$, contradiciendo $V(P_1) \cup V(R_1) \cup \{y\} \subset N^-(v, w, z)$. ■

TEOREMA 5.3. $v(n) \geq \lfloor \log_2(n/53) \rfloor + 7$, *para* $n \geq 28$.

Demostración. Sea k el entero tal que $53 \cdot 2^k > n \geq 53 \cdot 2^{k-1}$. Hagamos inducción sobre k. Los casos $k = 0$ y $k = 1$ son fáciles de probar usando el Teorema 5.2. Supóngase $k > 1$ y sean T un torneo de orden n y $x \in V(T)$. Como $|N^+(x)| \geq 53 \cdot 2^{k-2}$ o $|N^-(x)| \geq 53 \cdot 2^{k-2}$, por hipótesis de inducción se tiene que $\langle N^+(x) \rangle$ o $\langle N^-(x) \rangle$ contiene un TT_{k+5}, el cual forma con x un torneo transitivo de orden $k + 6 = \lfloor log_2(n/53) \rfloor + 7$. ■

En seguida presentamos un torneo circulante de orden 31 libre de TT_7, el cual, como veremos en el Capítulo VIII, es el más grande (y el único de este orden) de los torneos circulantes (incluidos los de Galois) que es libre de TT_7. Sea ST_{31} el torneo circulante de orden 31 inducido por $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 19, 20, 25\}$; ST_{31} no es el torneo inducido por el conjunto de residuos cuadráticos (mod. 31).

TEOREMA 5.4. *El torneo ST_{31} es libre de TT_7.*

Demostración. Sea $\langle\{u_0, u_1, \ldots, u_r\}\rangle$ uno de los subtorneos transitivos más grandes de ST_{31}, con $u_{i+1}, \ldots, u_r \in N^+(u_i)$, para todo $i \in \{0, \ldots, r-1\}$. Como $Aut(ST_{31})$ es transitivo en vértices, podemos suponer, s.p.g., $u_0 = 0$. Para $x \in Z_{31}$, sea $f_x : Z_{31} \mapsto Z_{31}$ la función $f_x(z) = zx \pmod{31}$. Puesto que $R = 5R$, esto es, $R = \{5r \pmod{31} \mid r \in R\}$, tenemos $f_5, f_{25} \in Aut(ST_{31})$. Además, como cada $r \in R$ está en $B = \{1,2,3,4,8\}$, $5B$, o $25B$, también podemos tomar, s.p.g., $u_1 \in B$. Es fácil verificar que los conjuntos

$$N^+(0,2) = \{3,4,5,7,9\}, \qquad N^+(0,3) = \{4,5,7,8,10,13\},$$
$$N^+(0,4) = \{5,7,8,9,13,14,19\} \text{ y } N^+(0,8) = \{2,9,10,13,15\}$$

son libres de TT_5. Finalmente, para $u_1 = 1$, tenemos

$$N^+(0,1) = \{2,3,4,5,8,9,10,14,15,20\}, \qquad \langle N^+(0,1,2)\rangle = \langle\{3,4,5,9,10,15\}\rangle \approx ST_6,$$
$$\langle N^+(0,1,3)\rangle = \langle\{4,5,8,10\}\rangle \not\approx TT_4, \qquad \langle N^+(0,1,4)\rangle = \langle\{5,8,9,14\}\rangle \not\approx TT_4,$$
$$\langle N^+(0,1,5)\rangle = \langle\{8,9,10,14,15,20\}\rangle \approx ST_6, \qquad \langle N^+(0,1,8)\rangle = \langle\{2,9,10,15\}\rangle \not\approx TT_4,$$
$$N^+(0,1,9) = \{3,10,14\}, \qquad \langle N^+(0,1,10)\rangle = \langle\{4,14,15,20\}\rangle \not\approx TT_4,$$
$$\langle N^+(0,1,14)\rangle = \langle\{2,3,8,15\}\rangle \not\approx TT_4, \qquad \langle N^+(0,1,15)\rangle = \langle\{3,4,9,20\}\rangle \not\approx TT_4$$

y

$$\langle N^+(0,1,20)\rangle = \langle\{2,3,4,8,9,14\}\rangle \approx ST_6.$$

Entonces, $r \leq 5$ y ST_{31} es libre de TT_7. ■

CAPITULO 6

Inmersión de Torneos

En los capítulos anteriores hemos visto, para $k = 4, 5, 6$, que el torneo más grande libre de TT_k contiene al correspondiente para $k - 1$. Estudiando el caso $k = 5$, pudimos encontrar una forma de construir ST_{13} a partir de una copia H de ST_7, eliminando de H un vértice x y agregando una copia L de ST_6 junto con otro vértice y tales que $H \setminus x$ y L forman la exvecindad y la invecindad de y, respectivamente. Generalizando estas ideas, en este capítulo tratamos el problema de extender un torneo dado cualquiera T de orden n y libre de TT_r, para $r > 0$, a otro libre de TT_{r+1}: Probamos que existen $r \in V(T)$ y dos torneos T' y T'' libres de TT_{r+1}, respectivamente de ordenes $n + 4$ y $n + 5$, tales que T' es extensión de T y T'' es extensión de $T \setminus r$; en particular, esto nos da un torneo de orden 32 libre de TT_7, que es el más grande (y único) conocido de este tipo.

TEOREMA 6.1. *Dado un entero $k > 4$, sea M un torneo de orden n libre de TT_k tal que M contiene a TT_4. Entonces, existe otro torneo G de orden $n + 4$ y libre de TT_{k+1} tal que G contiene a M. En particular, esta conclusión se cumple en torneos libres de TT_k de orden $n > 7$.*

Demostración. Sea $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subset V(M)$ con $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{TT}_4(M)$ (ver pag. 4) y sea $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ un conjunto de vértices no contenidos en $V(M)$, los conjuntos $\{x_1, x_2, x_3\}$ y $\{y_1, y_2, y_3\}$ serán denotados como A y B, respectivamente. Sea G el torneo que contiene a M tal que $V(G) = V(M) \cup Y$, $B \subset N^+(y_4) \cap N^-(x_4)$, $X \subset N^-(y_4)$, $\langle A \cup B \rangle \approx ST_6$

con $x_1y_1y_2 = T_3(\langle A \cup B\rangle)$ y $x_2x_3y_3 = T_0(\langle A \cup B\rangle)$, y $y_i \equiv x_i\ (M \setminus X)$, para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. (Fig. 6.1).

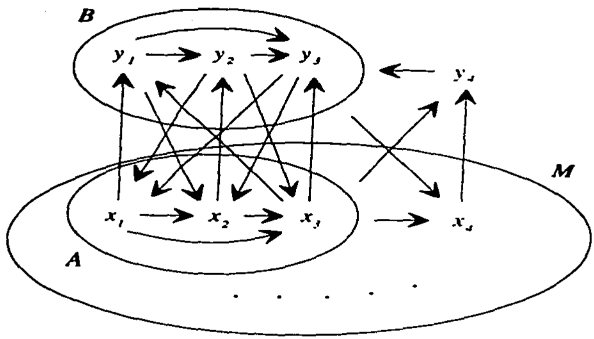

Fig. 6.1: La extensión G del torneo M.

Para ver que G es libre de TT_{k+1}, sea F uno de los subtorneos transitivos más grandes de G; suponga que el orden s de F es mayor que k. Entonces:

I1) $|V(F) \cap H| \geq 2$, *para* $H = Y$, $A \cup \{y_4\}$ *o* $B \cup \{x_4\}$ (pues $G \setminus H \approx M$).

Veamos, primero, que $1 \leq |V(F) \cap A| \leq 2$, $1 \leq |V(F) \cap B| \leq 2$ y $|V(F) \cap (A \cup B)| \leq 3$. Como $\langle A \cup B\rangle \approx ST_6$, se tiene $|V(F) \cap (A \cup B)| \leq 3$. Por $(I1)$, $|V(F) \cap Y| \geq 2$ y $|V(F) \cap (A \cup \{y_4\})| \geq 2$, es decir, $|V(F) \cap B| \geq 1$ y $|V(F) \cap A| \geq 1$; por tanto, $|V(F) \cap A| \leq 2$ y $|V(F) \cap B| \leq 2$.

Del párrafo anterior y $(I1)$ se deduce $y_4 \in V(F)$. Si $x_4 \in V(F)$, se cumple $V(F) \cap B = \emptyset$, que no es posible. De aquí que $x_4 \notin F$, lo cual implica $|V(F) \cap B| = 2$ y $|V(F) \cap A| = 1$. Como

$A \subset N^-(y_4)$ y $B \subset N^+(y_4)$ con $|N^-(x_1) \cap B| = |N^-(x_2) \cap B| = 2$ y $\{y_2\} = N^-(x_3) \cap B$, debemos tener $x_3, y_1, y_3 \in V(F)$, esto es, $\{x_3, y_1, y_3, y_4\} = V(F) \cap (X \cup Y)$. Finalmente, puesto que $f \in N^+(x_3)$ si y sólo si $f \in N^+(y_3)$, para todo $f \in V(F) \setminus \{x_3, y_1, y_3, y_4\} \subset M$, –pues $x_3 \equiv y_3$ $(M \setminus X)$– y $y_1, y_4 \in N^+(x_3) \cap N^-(y_3)$, entonces $f \in N^+(x_3)$ si y sólo si $f \in N^+(y_i)$, para todo $f \in V(F) \setminus \{x_3, y_1, y_3, y_4\}$ y para todo $i \in \{1, 3, 4\}$. Por tanto, $F' = \langle \{x_4\} \cup (F \setminus y_4) \rangle \in \mathcal{TT}_s(G)$; pero $(V(F') \setminus x_3) \subset B \cup (M \setminus A) \approx M$, lo cual implica $s - 1 < k$, que es una contradicción. ∎

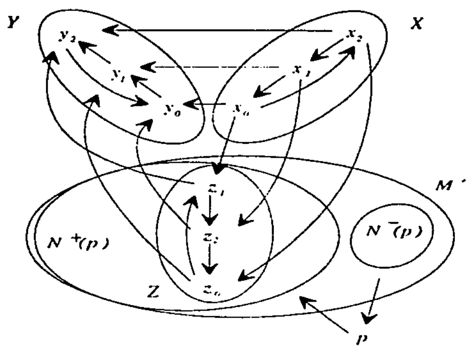

Fig. 6.2: Los torneos $H = \langle X \cup Y \cup Z \rangle$ y $G = \langle H \cup M' \rangle$. Las aristas no indicadas en H van de Y a $X \cup Z$ y de Z a X.

A continuación presentamos un torneo que ocuparemos al probar nuestros siguientes resultados: Dados los conjuntos disjuntos de vértices $X = \{x_0, x_1, x_2\}$, $Y = \{y_0, y_1, y_2\}$ y $Z = \{z_0, z_1, z_2\}$, sea H el torneo con $V(H) = X \cup Y \cup Z$ tal que (Fig. 6.2):

$x_0x_2x_1,\ y_0y_1y_2,\ z_0z_1z_2 \in TD(H)$,

$\langle X \cup Y\rangle \approx ST_6$ con $x_0x_2x_1 = T_0(X \cup Y)$ y $N^+(x_i) \cap Y = \{y_i\}$, para $i \in Z_3$,

$\langle X \cup Z\rangle \approx ST_6$ con $x_0x_2x_1 = T_0(X \cup Z)$ y $N^+(x_j) \cap Z = \{z_{j+1}\}$, para $j \in Z_3$.

y

$\langle Y \cup Z\rangle \approx QT_6$ con $Z = V_2(\langle Y \cup Z\rangle)$ y $N^+(z_k) \cap Y = \{y_{k+1}\}$, para $k \in Z_3$.

Observe que H es isomorfo al subtorneo de ST_{13} inducido por $4 = x_0, 12 = x_1, 10 = x_2, 7 = y_0, 8 = y_1, 11 = y_2, 3 = z_0, 9 = z_1$ y $1 = z_2$ (Fig. 3.1).

LEMA 6.2. *Dado $r \in Z_3$, sea $g_r\colon H \mapsto H$ la función tal que $g_r(v_i) = v_{i+r}$, para todo $v \in \{x, y, z\}$ y para todo $i \in Z_3$. Entonces, g_r es un automorfismo de H.*

Demostración. En la prueba del Lema 3.1 obtuvimos tres automorfismos, f_1, f_3, f_9, de ST_{13} que mantienen fijo el vértice 0. Tomando a H como en el párrafo anterior, es decir, $H = \langle\{1, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}\rangle$, es fácil verificar que los automorfismos g_0, g_1 y g_2 son las restricciones a H de f_1, f_3 y f_9, respectivamente. ∎

LEMA 6.3. *Sea M un torneo de orden n libre de TT_k tal que existe $p \in V(M)$ con $TD(N^+(p)) \neq \emptyset$ o $TD(N^-(p)) \neq \emptyset$. Entonces, existe un torneo G de orden $n+5$ tal que G es libre de TT_{k+1} y $[M \setminus p] \subset G$.*

Demostración. Claramente, podemos suponer, s.p.g., que $TD(N^+(p)) \neq \emptyset$. Construiremos el torneo G usando H y $M' = M \setminus p$. Supóngase $V(H) \cap V(M') = \{z_0, z_1, z_2\}$ $(= Z)$ con $z_0z_1z_2 \in TD(N^+_{M}(p))$. Sea G el torneo que contiene como subtorneos a M' y a H tal que $V(G) = X \cup Y \cup V(M')$, $x_i \equiv z_i$ $(M' \setminus z_i)$ y $y_j \equiv p$ $(M' \setminus Z)$, para $i, j \in Z_3$. Observe que las direcciones de las aristas entre $\{x_i\}$ y $Z \setminus z_i$ dada en G coinciden con las que tienen en H (Fig. 6.2). También note que:

t1) *Si M' contiene un torneo transitivo $(b_1, \ldots, b_{k-1})$ de orden $k-1$, entonces existen b_i, b_j, con $i < j$ (es decir, $b_j \in N^+(b_i)$), tales que $b_i \in N^+_M(p)$ y $b_j \in N^-_M(p)$* (pues en caso contrario, $\langle\{b_1, \ldots, b_{k-1}, p\}\rangle \approx TT_k$ en M).

t2) *Si* $y_i, y_j \in Y$ *entonces* $N^-(y_i, y_j) \cap N^+_{M'}(p) = \emptyset$ (pues $y_l \equiv p$ $(M' \setminus Z)$, para $l \in Z_3$, y $\langle Y \cup Z\rangle \approx QT_6$ con $Y = V_3(\langle Y \cup Z\rangle)$).

Sea $A = (a_1, \ldots, a_s)$ uno de los subtorneos transitivos más grandes de G y suponga $s > k$. Como $\langle X \cup Y\rangle \approx ST_6$, $|V(A) \cap (X \cup Y)| \leq 3$. Además, si $|V(A) \cap (X \cup Y)| \leq 1$ entonces, puesto que $|V(A) \cap M'| < k$, se cumpliría $s \leq k$. Por tanto, $2 \leq |V(A) \cap (X \cup Y)| \leq 3$. Observe que $|V(A) \cap X| \leq 2$ y $|V(A) \cap Y| \leq 2$, pues $\langle X\rangle, \langle Y\rangle \in TD(G)$. Dividiremos la prueba en tres casos.

Caso I. $V(A) \cap X = \emptyset$.

Se tiene, $|V(A) \cap Y| = 2$. Del Lema 6.2 es fácil ver que podemos tomar, s.p.g., $\{y_0, y_1\} = V(A) \cap Y$. Como $A \setminus \{y_0, y_1\} \subset M$, se cumple $s - 2 < k$, es decir, $s = k + 1$. Entonces, $|A \setminus \{y_0, y_1\}| = k - 1$ y por *(t1)* existen $a_i, a_j \in A \setminus \{y_0, y_1\}$, con $a_j \in N^+(a_i)$, tales que $a_i \in N^+_M(p)$ y $a_j \in N^-_M(p)$. Por tanto, $y_0, y_1 \in N^+(a_j)$, que implica $y_0, y_1 \in N^+(a_i)$, contradiciendo *(t2)*.

Caso II. $|V(A) \cap X| = 1$.

Nuevamente por el Lema 6.2 podemos tomar, s.p.g., $\{x_0\} = V(A) \cap X$; entonces, $|V(A) \cap Y| = 1$ o 2. Supóngase, primero, $|V(A) \cap Y| = 1$; sea $\{y'\} = V(A) \cap Y$. Si $z_0 \notin A$, se tendría $\langle\{z_0\} \cup (A \setminus \{x_0, y'\})\rangle \in TT_{s-1}(M')$ y $s - 1 < k$. Por tanto, $z_0 \in A$. Puesto que $x_0 y_0 z_0 \in TD(G)$, debemos tener $y_0 \notin A$ y $y' \in \{y_1, y_2\}$, implicando $x_0 \in N^+(y')$. Además, $s = k + 1$, pues $A \setminus \{x_0, y'\} \in TT_{s-2}(M')$. Por *(t1)* existen $a_i, a_j \in A \setminus \{x_0, y'\}$, con $a_j \in N^+(a_i)$, tales que $a_i \in N^+_M(p)$ y $a_j \in N^-_M(p)$. Como $y' \in N^+(a_j)$, entonces $x_0 \in N^+(a_j)$ y $z_0 \in N^+(a_j)$ (pues $x_0 \equiv z_0$ $(M' \setminus z_0)$), lo cual implica $y', x_0, z_0 \in N^+(a_i)$, que no es posible, por ser $N^-(y_1, z_0) \cap N^+_M(p) = \emptyset = N^-(y_2, z_0) \cap N^+_M(p)$.

Ahora supóngase $|V(A) \cap Y| = 2$. Sea $\{y', y''\} = V(A) \cap Y$. Primero considérese el caso $z_0 \notin A$. Entonces, $\langle\{z_0\} \cup (A \setminus \{x_0, y', y''\})\rangle \in TT_{s-2}(M')$ y $s - 2 \leq k - 1$, es decir,

$s = k + 1$. Por (*I1*) existen $m_1, m_2 \in \{z_0\} \cup (A \setminus \{x_0, y', y''\})$ con $m_2 \in N^+(m_1)$ tales que $m_1 \in N^+_{M}(p)$ y $m_2 \in N^-_{M}(p)$. Como $m_2 \neq z_0$ y $y', y'' \in N^+(m_2)$, entonces $x_0 \in N^+(m_2)$ (pues $m_2, x_0, y', y'' \in A$ y $x_0 \in N^+(y') \cup N^+(y'')$), que implica $z_0 \in N^+(m_2)$ y $m_1 \in A$, es decir, $y', y'' \in N^+(m_1)$, contradiciendo (*I2*).

De aquí que debemos tener $z_0 \in A$. Pero $y_0 \notin A$, pues $x_0y_0z_0 \in TD(G)$, implicando $\{y_1, y_2\} = V(A) \cap Y$, que no es posible, por ser $y_1y_2z_0 \in TD(G)$.

Caso III. $|V(A) \cap X| = 2$.

Nuevamente por el Lema 6.2 podemos tomar, s.p.g., $\{x_0, x_1\} = V(A) \cap X$. Note que $z_1, y_0 \notin A$, pues $x_1x_0z_1, x_1x_0y_0 \in TD(G)$. Si $V(A) \cap Y = \emptyset$, tendríamos $\langle \{z_1\} \cup (A \setminus \{x_0, x_1\}) \rangle \in TT_{s-1}(M')$, implicando $s - 1 \leq k - 1$ y $s \leq k$. Por tanto, supóngase $V(A) \cap Y \neq \emptyset$, esto es, $V(A) \cap Y = \{y'\}$ con $y' \in \{y_1, y_2\}$. Como $\langle \{z_1\} \cup (A \setminus \{x_0, x_1, y'\}) \rangle \in TT_{s-2}(M')$, se cumple $s - 2 \leq k - 1$, es decir, $s = k + 1$.

Veamos que $z_0 \notin A$. Por (*I1*) existen $m_1, m_2 \in \{z_1\} \cup (A \setminus \{x_0, x_1, y'\})$ con $m_2 \in N^+(m_1)$ tales que $m_1 \in N^+_{M}(p)$ y $m_2 \in N^-_{M}(p)$. Entonces, $x_0, z_0 \in N^+(m_2)$ (ya que $m_2, y', x_0 \in A$ con $x_0 \in N^+(y')$ y $y' \in N^+(m_2)$). Debemos tener $m_1 = z_1$, pues $m_1 \neq z_1$ implica $m_1 \in A$, $y' \in N^+(m_1)$ y $m_1 = z_0$ (por ser $y' \in \{y_1, y_2\}$), contradiciendo $z_0 \in N^+(m_2)$. Finalmente, $z_0 \notin A$, pues $z_1, m_2 \in \langle \{z_1\} \cup (A \setminus \{x_0, x_1, y'\}) \rangle \in TT(M')$ y $z_0z_1m_2 = z_0m_1m_2 \in TD(G)$.

Por tanto, $\langle \{z_0\} \cup (A \setminus \{x_0, x_1, y'\}) \rangle \in TT_{s-2}(M')$ y por (*I1*) existen $m_3, m_4 \in \{z_0\} \cup (A \setminus \{x_0, x_1, y'\})$ con $m_4 \in N^+(m_3)$ tales que $m_3 \in N^+_{M}(p)$ y $m_4 \in N^-_{M}(p)$. Como $x_0 \in N^+(m_4)$ (ya que $x_0, y', m_4 \in A$ con $y' \in N^-(x_0) \cap N^+(m_4)$), tenemos $z_0 \in N^+(m_4)$ y $m_3 \neq z_0$, esto es, $m_3 \in A$, implicando $m_3 \in N^-(y')$, que no es posible, ya que $N^-(y') \cap N^+_{M}(p) \subset \{z_0, z_1\}$. ∎

TEOREMA 6.4. *Dado un entero $k > 0$, sea M un torneo de orden $n > 3$ libre de TT_k. Entonces, existe un torneo G de orden $n + 5$ libre de TT_{k+1} tal que $(M \setminus p) \subset G$, para un vértice $p \in V(M)$.*

Demostración. Si existe $p \in V(M)$ con $TD(N^+(p)) \neq \emptyset$ o $TD(N^-(p)) \neq \emptyset$, del Lema 6.3 se sigue el resultado. Por tanto, supóngase $\langle N^+(p)\rangle, \langle N^-(p)\rangle \in \mathcal{TT}(M)$, para todo $p \in V(M)$. Claramente, también podemos suponer, s.p.g., $TT_{k-1} \subset M$. Sea $(y, a_1, \ldots, a_{k-2})$ uno de los subtorneos transitivos más grandes de M y sea $\langle N^-(y) \cup \{y\}\rangle = (b_s, \ldots, b_1, y)$. Observe que $V(M) = \{y, a_1, \ldots, a_{k-2}, b_1, \ldots, b_s\}$, $k \geq 4$ (pues $n \geq 4$) y $s \leq k-2$. Sea g un vértice no contenido en $V(M)$ y sea G el torneo que contiene a M tal que $V(G) = V(M) \cup \{g\}$ y $gc_i \in E(G)$ si y sólo si i es impar, donde $c_0 = a_{k-2}, \ldots, c_{k-3} = a_1, c_{k-2} = y, c_{k-1} = b_1, \ldots, c_{n-1} = b_s$. Empecemos viendo el caso $n \geq 6$. Probaremos, por contradicción, que G es libre de TT_k. Sea $D = (d_1, \ldots, d_k) \in \mathcal{TT}_k(G)$; claramente, $g \in V(D)$. Sea d el vértice fuente en $D \setminus g$. Debemos tener:

t3) $N^+_M(d) = V(D) \setminus \{d, g\}$ (pues $\langle N^+_M(d)\rangle \in \mathcal{TT}_l(M)$, para un $l \leq k-2$).

Primero suponga que $d = b_i$, para un $i \in \{1, \ldots, s\}$. Como $TD(\langle\{g, y, b_1, \ldots, b_j\}\rangle) \neq \emptyset$, para $j > 1$, por (*t3*) $d = b_1$. Además, puesto que $TD(\langle\{g, y, a_1, b_1\}\rangle) \neq \emptyset$ y $y \in N^+(b_1)$, nuevamente por (*t3*) se tiene $b_1 \in N^+(a_1)$. Entonces, $b_1 y a_1 \in TD(M)$ con $y, a_1 \in N^-(a_2)$, lo cual implica $b_1 \in N^+(a_2)$ y $|N^+_M(d)| = |N^+_M(b_1)| \leq |\{y, a_3, \ldots, a_{k-2}\}| = k-3$, contradiciendo $D \in \mathcal{TT}_k(G)$.

Ahora supóngase $d \in \{y = a_0, a_1, \ldots, a_{k-2}\}$, digamos $d = a_i$, $i \in \{0, \ldots, k-2\}$. Por (*t3*) se cumple $d = a_{k-2}$, ya que $a_{k-3}, a_{k-2} \in N^+(a_i) \cup \{a_i\}$, para $i = 0, \ldots, k-3$, y $a_{k-3}a_{k-2}g \in TD(G)$. Como $|N^+_M(d)| = |N^+_M(a_{k-2})| = k-2$ y $y, a_1, \ldots, a_{k-3} \notin N^+_M(a_{k-2})$, debemos tener $\{b_1, \ldots, b_s\} = N^+_M(a_{k-2})$ (pues $s \leq k-2$), implicando $s = k-2$, $2s+1 = n \geq 6$ y $s \geq 3$, que no es posible, por ser $TD(\langle\{g, b_1, b_2, b_3\}\rangle) \neq \emptyset$.

Por tanto, G es libre de TT_k. Si G no cumple las hipótesis del Lema 6.3, repitiendo el procedimiento anterior se obtiene finalmente un torneo G', con $M \subset G'$, que ciertamente las cumple, de donde se sigue el resultado. Finalmente, si $n = 4$ o 5, aplicando el mismo procedimiento se encuentra que el único caso en que G no es libre de TT_k es cuando M es el torneo 2-regular de orden $n = 5$ ($k = 4$); pero este torneo es la exvecindad de cualquier vértice en el torneo de Galois de orden 11, el cual es libre de TT_5 [18]. ∎

COROLARIO 6.5. *Existe un torneo de orden 32 libre de TT_7. Además, los torneos más grandes libres de TT_7 no son torneos circulantes ni de Galois.*

Demostración. Como ST_{27} es libre de TT_6 con orden 27, por el Teorema 6.4 existen torneos de orden 32 libres de TT_7. Finalmente, en el Capítulo VIII "probaremos", usando una computadora, que tanto los torneos circulantes como los de Galois contiene a TT_7, si son de orden mayor que 31. ∎

Este corolario es importante, porque este es el menor k tal que los torneos más grandes libres de TT_k no son circulantes ni de Galois.

CAPITULO 7

Complejidad Computacional

Calcular el valor $v(n)$ se puede enfocar algorítmicamente como un problema *Min Max*, es decir, se necesita obtener, en cada torneo con n vértices, el tamaño de sus subtorneos transitivos más grandes, y después ver cual de estas cantidades es la menor. Un primer problema con este enfoque es que el número de torneos con n vértices crece exponencialmente como función de n. Además, aunque sólo consideráramos familias "pequeñas" de estos torneos (con el fin de generar cotas superiores para $v(n)$), tendríamos el problema de que es NP-completo determinar, para un entero k y un torneo dados, si éste contiene un subtorneo transitivo de orden k; esto es, aparentemente es un problema intratable. En realidad, sólo se ha probado que es NP-completo el caso más general en el que se tiene una digráfica y se quiere determinar si ésta contiene una subdigráfica acíclica de orden k [15]. En este capítulo probamos que en torneos sigue siendo un problema NP-completo.

Los conceptos no descritos en este capítulo pueden ser consultados en [10].

Llamaremos *Problema del Subtorneo Transitivo de un Torneo* (o simplemente STT) al siguiente problema de decisión:

INSTANCIA: Un torneo T de orden n y un entero k ($1 \leq k \leq n$).

PREGUNTA: ¿Contiene T a TT_k?

Para probar que STT es NP-completo, utilizaremos el problema de 3-*Satisfabilidad* (3-SAT) [5], el cual aparece en el siguiente contexto:

Sea $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ un conjunto de variables Booleanas. Una *asignación de verdad* para U es una función $t: U \mapsto \{V, F\}$. Si $t(u) = V$, se dice que u *es verdadera bajo* t; en caso contrario, u *es falsa bajo* t. Si u es una variable en U, entonces u y $\overline{u}$ son *literales* sobre u. La literal u es verdadera bajo t si y sólo si u es verdadera bajo t; la literal $\overline{u}$ es verdadera si y sólo si la variable u es falsa.

Una *cláusula* sobre U es un conjunto de litarales sobre U. Ella representa la disyunción de tales literales y es *satisfecha* por una asignación de verdad si y sólo si al menos uno de sus miembros es verdadero bajo tal asignación. Una colección C de cláusulas sobre U es *satisfecha* por una asignación de verdad para U que simultaneamente satisface todas las cláusulas en C.

Bajo estos términos, el problema de 3-Satisfabilidad es:

INSTANCIA: Una colección C de cláusulas sobre un conjunto finito U de variables tal que $|c| = 3$, para todo $c \in C$.

PREGUNTA: ¿Existe una asignación de verdad para U que satisfaga todas las cláusulas en C?

TEOREMA 7.1. *El problema STT es NP-completo.*

Demostración. Es claro que $STT \in NP$. Transformaremos a 3-SAT en STT. Sea $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ el conjunto de variables y sea $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ el conjunto de cláusulas de una instancia arbitraria de 3-SAT. Supondremos, s.p.g., que no existen $u \in U$ y $c \in C$ con $u, \bar{u} \in c$. Debemos construir un torneo T y un entero k tales que T tiene un subtorneo transitivo de orden k si y sólo si C es satisfecho por alguna asignación de verdad.

Al construir T, algunos de sus vértices están relacionados con las variables en U; los demás, salvo uno auxiliar, dependen de las cláusulas.

Asociado con cada par de literales u_i y $\overline{u}_i$, $1 \leq i \leq n$, tomamos tres vértices, $v_i, \bar{v}_i, r_i$, los cuales forman el triángulo dirigido $R_i = v_i\bar{v}_ir_i$. Además, R_j cubre a R_i siempre que $i < j$.

Por cada cláusula c_i tenemos una copia H_i de ST_7 como sigue: Sean u_{i_1}, u_{i_2} y u_{i_3} las variables en U asociadas a las literales en c_i. Entonces, H_i es como en la Fig. 7.1.a, donde estamos asociando a cada u_{i_j} los vértices $a_{i_j}(i)$ y $b_{i_j}(i)$, $j = 1, 2, 3$. Además, H_i cubre a H_l cuando $i < l$ (Fig. 7.1.b).

Las direcciones de las aristas entre H_i y R_j son como sigue: El vértice h_i cubre a todo R_j y r_j es cubierto por todo H_i. Sea $u_{i_0} \in U$ tal que una de sus literales asociadas está en c_i ($i.e.$, $|c_i \cap \{u_{i_0}, \bar{u}_{i_0}\}| = 1$): Si $i_0 \neq j$, entonces $a_{i_0}(i)$ y $b_{i_0}(i)$ cubren a R_j; si $i_0 = j$ con $u_{i_0} \in c_i$, entonces $a_{i_0}(i)$ y $b_{i_0}(i)$ cubren a v_{i_0} y son cubiertos por $\bar{\mathrm{v}}_{i_0}$; en caso contrario, $a_{i_0}(i)$ y $b_{i_0}(i)$ cubren a $\bar{\mathrm{v}}_{i_0}$ y son cubiertos por v_{i_0} (Fig. 7.1.c-e).

Finalmente, agregaremos un vértice z tal que cubra a cada R_j y sea cubierto por todo H_i.

El torneo T así construido tiene $3n + 7m + 1$ vértices y, claramente, sus subtorneos transitivos tiene a lo más $2n + 3m + 1$ vértices. Veamos que C es satisfecha por una asignación de verdad si y sólo si T contiene un subtorneo transitivo de orden $k = 2n + 3m + 1$.

Suponga que existe una asignación de verdad, f, que satisface a C. Sea X el subtorneo de T que contiene a $\{r_1, \ldots, r_n, h_1, \ldots, h_m, z\}$, a v_j (resp., $\bar{\mathrm{v}}_j$) cuando $f(u_j) = V$ (resp., F), y a exactamente un par (cualquiera de ellos) $\{a_{i_0}(i), b_{i_0}(i)\}$ de cada H_i tal que la literal o en c_i asociada a u_{i_0} ($i.e.$, $\{o\} = c_i \cap \{u_{i_0}, \bar{u}_{i_0}\}$) sea verdadera bajo f.

Veamos que $X \approx TT_k$. Claramente, $|X| = k$. Para ver que X es transitivo, sólo necesitamos probar que si $p \in R_j$ y $q \in H_i$ con $pq \in E(T)$, entonces $p \not\in V(X)$ ó $q \not\in V(X)$: Suponga que $p \in V(X)$. Por construcción, se debe tener $p \in \{\mathrm{v}_j, \bar{\mathrm{v}}_j\}$ y $q \in \{a_j(i), b_j(i)\}$; supondremos $p = \mathrm{v}_j$ y $q = a_j(i)$, ya que los otros casos son análogos. Como $p \in V(X)$, se tiene $f(u_j) = V$; pero $\mathrm{v}_j a_j(i) \in E(T)$ implica, por construcción, $\bar{u}_j \in c_i$. Entonces, la literal $\bar{u}_j$ es falsa en c_i bajo f, es decir, $a_j(i), b_j(i) \not\in V(X)$.

Ahora suponga que T contiene un subtorneo transitivo Y de orden k. Claramente $z \in V(Y)$, $|V(Y) \cap V(R_j)| = 2$, para $j = 1, \ldots, n$, y $|V(Y) \cap V(H_i)| = 3$, para $i = 1, \ldots, m$. Sea $f: U \mapsto \{V, F\}$ la función tal que $f(u_j) = V$ si y sólo si $\mathrm{v}_j \in Y$. Veamos que f satisface a C. Sea $c_i \in C$. Como $|V(Y) \cap V(H_i)| = 3$, existen $j \in \{1, \ldots, n\}$ y $a_j(i), b_j(i) \in H_i$ tales que $a_j(i) \in V(Y)$ ó $b_j(i) \in V(Y)$; como ambos casos son análogos, supondremos, s.p.g., que $a_j(i) \in V(Y)$. Por construcción de T se tiene $a_j(i) \in N^-(v_j) \cap N^+(\bar{v}_j)$ ó $a_j(i) \in N^+(v_j) \cap N^-(\bar{v}_j)$; sólo veremos el primer caso, pues el otro es similar. En tal caso, nuevamente por la construcción de T, se cumple $u_j \in c_i$. Además, como $z\bar{v}_j a_j(i) \in TD(T)$ con $z, a_j(i) \in V(Y)$, se tiene $\bar{v}_j \notin V(Y)$, es decir, $v_j \in V(Y)$ (pues $|V(Y) \cap V(R_j)| = 2$); por tanto, $f(u_j) = V$ y f satisface c_i.

Finalmente, $STT \in NP$-completo, pues 3-$SAT \in NP$-completo [5] y claramente la construcción de T a partir de U y de C es polinomial. ∎

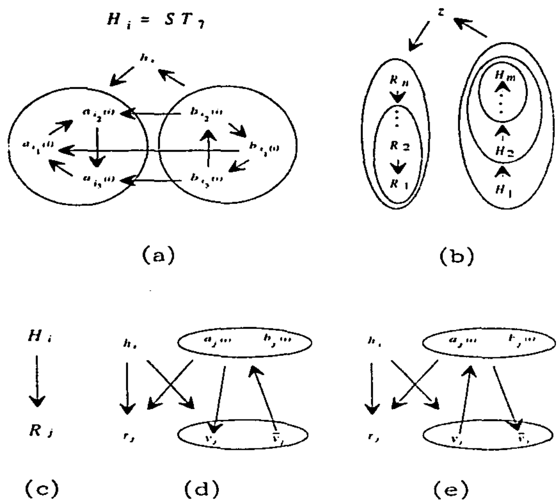

Fig. 7.1: El torneo T. **a:** $H_i \approx ST_7$ (las aristas no mostradas van de las a's a las b's); **b:** $V(T) = V(H_1) \cup \ldots \cup V(H_m) \cup V(R_1) \cup \ldots \cup V(R_n) \cup \{z\}$. **c-e:** Relaciones entre $\{h_i, a_{i_0}(i), b_{i_0}(i)\} \subset H$ y R_j. **c:** $i_0 \neq j$; d: $i_0 = j$ con $u_{i_0} \in c_i$; e: $i_0 = j$ con $\bar{u}_{i_0} \in c_i$.

CAPITULO 8

Resultados Computacionales

Como hemos visto a lo largo de este trabajo, para valores pequeños de n (≤ 31), los valores exactos de $v(n)$ son inducidos por torneos circulantes o de Galois. En este último capítulo obtenemos, usando una computadora, los valores de $cv(r)$ ($r \leq 55$) y $gv(s)$ ($s < 1000$) –ver pag. 5. En particular, damos mejores cotas superiores para $v(n)$, $n \leq 991$.

TORNEOS CIRCULANTES

Para $n > 0$ entero impar, hemos definido $cv(n)$ como el entero más grande tal que todo torneo circulante de orden n contiene a $TT_{cv(n)}$. Para calcular $cv(n)$, suponga que T es un torneo circulante de orden n inducido por un conjunto A y sea H uno de los subtorneos transitivos más grandes de T; recuerde que $|A| = (n-1)/2$. Como un elemento x, distinto de cero, está en A si y sólo si $-x \notin A$, entonces siempre existe un torneo circulante T' isomorfo a T con $01 \in E(T')$; por tanto, podemos tomar, s.p.g., $01 \in E(T)$, y esencialmente hay a lo más $2^{(n-3)/2}$ torneos circulantes de orden n. También podemos suponer, s.p.g., que $0 \in H$ con $[H \setminus 0] \subset N^+(0)$, pues $Aut(T)$ es transitivo en vértices. Usando estas ideas y una computadora (ACER 486 a 50MHZ), hemos obtenido los valores de $cv(n)$ presentados en la Tabla 8.1.

Dos torneos circulantes T_1 y T_2, de orden n, inducidos por los conjuntos A_1 y A_2, respectivamente, son *Ádám-isomorfos* [1] si existe una unidad u de Z_n tal que $A_2 = \{u \cdot t \mid t \in A_1\}$;

n	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
$cr(n)$	3	3	4	4	4	6	5	5	5	5	6	6	6
$o(n)$	1	1	**3**	2	1	14	1	2	1	1	**16**	**9**	4

n	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55
$cr(n)$	6	7	7	7	7	7	7	8	7	8	8	8	8
$o(n)$	1	> 40	> 40	17	14	1	4	**> 40**	1	**> 40**	> 40	> 40	> 40

Tabla 8.1: Valores de $cr(n)$ y $o(n)$, $n \leq 55$. En las entradas en negrillas está $o'(n)$, en vez de $o(n)$.

claramente, T_1 y T_2 son isomorfos si son Ádám-isomorfos. Sea $o(n)$ (resp., $o'(n)$) el número de torneos circulantes de orden n libres de $TT_{cr(n)+1}$ que no son isomorfos (resp., no son Ádám-isomorfos); entonces, $o(n) \leq o'(n)$. También en la Tabla 8.1 mostramos los valores $o(n)$ ($n \leq 55$). Los entradas en negrilla corresponden a $o'(n)$, en vez de $o(n)$; con la posible excepción de estas entradas, en general se tiene $o(n) = o'(n)$, por el siguiente [17]:

TEOREMA 8.1. *Sea $n > 0$ un entero impar no divisible por cuadrados. También, sean T_1 y T_2 dos torneos circulantes de orden n. Entonces, T_1 y T_2 son isomorfos entre ellos si y sólo si son Ádám-isomorfos.*

Observe que $cr(n)$ no es una función creciente. También note que el torneo ST_{31}, presentado en el Capítulo V, es el único torneo circulante libre de TT_7 con orden 31. En general, para $k = 3, 4, 5, 6$ (y aparentemente también para $k = 7$), es único el torneo circulante más grande libre de TT_{k+1}.

TORNEOS DE GALOIS.

Es bien sabido que existe un torneo de Galois de orden n si y sólo si $n \equiv 3 \pmod{4}$ con $n = p^r$, para p primo y $r \in \mathbb{N}$. En la Tabla 8.2 presentamos nuestros resultados computacionales (en una Silicon Graphics Power Series 4D/3105) del orden $gr(n)$ del subtorneo

$gv(n)$	n
3	7
4	11
5	19, 23, 27
7	31, 43, 47
8	67, 83
9	59, 71, 79, 107
11	103, 127, 131, 139, 151, 163, 167, 191, 199
12	179, 239, 251, 271
13	211, 223, 227, 263, 307, 311, 331, 343, 347, 367
14	243, 283, 443
15	379, 383, 419, 439, 463, 467, 479, 499, 547, 563, 587, 619
16	487, 571, 659
17	359, 431, 491, 503, 523, 599, 607, 631, 643, 647, 683, 691, 719, 727, 739, 743, 751, 787, 811, 827, 839, 859, 863, 883, 887, 947, 971
18	907, 967
19	823, 911, 919, 983, 991

Tabla 8.2: El orden $gv(n)$ del subtorneo transitivo más grande en el torneo de Galois de orden $n < 1000$. Los órdenes 27, 243 y 343 son los únicos que no son primos

transitivo más grande contenido en el torneo de Galois de orden n, para $n < 1000$. Casi todos estos torneos de Galois son también torneos circulantes, pues son de orden primo. Los torneos de Galois de orden $27 = 3^3$, $243 = 3^5$ y $343 = 7^3$, son los únicos que no son de orden primo y, por tanto, no son circulantes. De las Tablas 8.1 y 8.2 es claro que $gv(n) = v(n)$ o $gv(n) \geq cv(n)$ en los torneos de Galois de orden $n \leq 47$ (exceptuando $n = 31$).

Por otro lado, las mejores cotas superiores conocidas para $v(n)$ son [7, 23]:

$$v(n) \leq \lfloor 2\log_2(n) \rfloor + 1 \tag{1}$$

y

$$v(n) \leq \left\lfloor -\frac{3}{2} + \sqrt{3n + \frac{13}{4}} \right\rfloor, \quad n \equiv 3 \pmod{4}, \tag{2}$$

$n \leq$	31	45	47	63	83	90	107	127	181	199	255	271	362	367	443	511	619	659	724	971	991
C1	6	7	7	8	8	9	9	11	11	11	12	12	13	13	14	15	15	16	17	17	19
C2	10	11	12	12	13	13	14	14	15	16	16	17	17	18	18	18	19	19	19	20	20
C3	8	10	10	12	14	15	16	18	22	23	26	27	31	31	35	37	41	43	45	52	53

Tabla 8.3: Cotas superiores de $v(n)$, $n \leq 991$. **C1**: Las mejores cotas inducidas de las Tablas 8.1 y 8.2. **C2**: $v(n) \leq \lfloor 2\log_2 n \rfloor + 1$. **C3**: $v(n) \leq \left\lfloor -\frac{3}{2} + \sqrt{3n + \frac{13}{4}} \right\rfloor$, $n \equiv 3 \pmod{4}$.

donde (2) es mejor que (1) sólo cuando $n \leq 59$. Como $v(n)$ es una función creciente con $v(n) \leq cv(n)$ y $v(n) \leq gv(n)$, en la Tabla 8.3 presentamos las cotas superiores **C1** para $v(n)$, $n \leq 991$, inducidas de las Tablas 8.1 y 8.2, comparadas con las cotas **C2** y **C3** dadas por (1) y (2), respectivamente. En general, las cotas **C1** son mejores que **C2** y **C3**. Sin embargo, al crecer n, la diferencia entre **C1** y **C2** se vuelve menor.

CONCLUSIONES

En esta tesis hemos obtenido algunos resultados sobre los torneos más grandes libres de TT_k, para $k \leq 7$. En particular, para $k \leq 6$, vimos que estos torneos son únicos y tienen una estructura bastante simétrica.

Sin embargo, para el caso $k = 7$, sólo pudimos acotar el valor $gt(6)$ y ver que los correspondientes torneos no son de Galois ni circulantes, a diferencia de lo que ocurre cuando $k \leq 6$.

También "probamos", con la ayuda de una computadora, que los torneos de Galois inducen mejores cotas superiores para $v(n)$, $n \leq 991$, que las actualmente conocidas ($k > 7$). Sin embargo, demostramos que este método, para calcular cotas superiores, aparentemente sólo puede aplicarse en torneos relativamente pequeños, pues el problema algorítmico asociado es NP-completo.

En general, nuestros resultados confirman lo que esperábamos con respecto al comportamiento de las funciónes $v(n)$ y $gt(k)$, esto es, calcularlas es un problema muy complicado.

Algunos caminos posibles para continuar trabajando en este tema son los siguientes:

Primero, por lo que vimos en esta tesis, es muy probable que los torneos grandes libres de TT_k que conocemos actualmente, para $k \geq 7$, no sean los más grandes de su tipo. Siendo optimistas, uno esperaría que los torneos que determinan el valor $gt(k)$ sean, de alguna forma, simétricos y estén relacionados con los correspondientes a $gt(k-1)$. Entonces, un problema básico es encontrar una "mejor" familia de estos torneos, la cual va a determinar buenas cotas inferiores para $gt(k)$.

Muy posiblemente se pueda encontrar la familia (una de ellas) que determina los valores exactos de $gt(k)$. Sin embargo, demostrar que son óptimas las cotas inferiores para $gt(k)$ inducidas por esta familia, aparenta ser la parte más difícil del problema. En cuanto al cálculo de cotas superiores de $gt(k)$, un posible camino es ver si para cada k existe un entero $i_k \geq 0$ tal que $gt(k+j+1) = 2gt(k+j)+1$, para $0 \leq j < i_k$, y $gt(k+i_k+1) < 2gt(k+i_k)+1$; en particular, creemos que tal i_k siempre existe y cumple $i_k \leq 2$, para todo $k > 1$.

Finalmente, pensamos que el problema de encontrar torneos libres de subtorneos transitivos grandes, debe estar relacionado con el tema de los torneos *regulares en r-transitivos*, es decir, torneos en los que $|N^+(T)| = |N^+(T')|$, para todo T y T' subtorneos transitivos de orden r. Esto último, a su vez, aparentemente tiene que ver con el tema más estudiado de los torneos fuertemente regulares [2, 13, 20]. De aquí que otro camino para continuar trabajando en el tema de esta tesis sea el encontrar tales relaciones.

REFERENCIAS

[1] A. Ádám. *Research problem 2-10. J. Combin. Theory* **2**, 393 (1967).

[2] A. Astié-Vidal y V. Dugat. *Near-homogeneous tournaments and permutation groups* , *Discrete Math.* **102**, 111-120 (1992).

[3] D. H. Bent. *Score problems of round-robin tournaments*, M. S. Thesis, University of Alberta.

[4] J. A. Bondy y U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, Macmillan, London, 1976.

[5] S. A. Cook, *The complexity of theorem-proving procedures*, en Proc. 3th Ann. ACM Symp. on Theory of Computing, (Association for Computing Machinery, New York, 1971) 151-158.

[6] D.S. Demariya y M. Burtsio. *Some combinatorial applications of the homotopy theory of tournaments*, en Proceedings of the Steklov Inst. of Math., no. 3, (1993) 105-109.

[7] P. Erdös y L. Moser, *On the representation of directed graphs as unions of orderings*, *Publ. Math. Inst. Hungar Acad. Sci.* 9, 125-132 (1964).

[8] D.C. Fisher y J. Ryan. *Tournament games and Condorcet voting*, *Linear Algebra Appl.* **217**, 87-100 (1995).

[9] D.C. Fisher y J. Ryan, *Probabilities within optimal strategies for tournament games*. *Discrete Appl. Math.* **56**, 87-91 (1995).

[10] M. R. Garey y D. S. Johnson, *Computers and Intractability*. W. H. Freeman and Company, New York, 1979.

[11] D.A. Gregory, S.J. Kirkland y B.L. Shader, *Pick's inequality and tournaments*. *Linear Algebra Appl.* **186**, 15-36 (1993).

[12] F. Harary, *Graph Theory*. Addison-Wesley Reading, Mass., 1969.

[13] M. Herzog y K.B. Reid, *Regularity in tournaments*. en Theory and Applications of Graphs, Lecture Notes in Math. 642, (Springer, Berlin-New York, 1978) 442-453.

[14] N. Ito, *Note on even tournaments whose authomorphism groups contain regular subgroups*. *Hokkaido Math. J.* **22**, 99-103 (1993).

[15] R. M. Karp, *Reducibility among combinatorial problems*. en Complexity of Computer Computations, (Plenum Press, New York, 1972) 85-103.

[16] J. Moon, *Topics in Tournaments*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968.

[17] M. Muzychuk, *Ádám's conjecture is true in the square-free case*. *J. Combin. Theory* A **72**, 118-134 (1995).

[18] V. Neumann-Lara, *The 3 and 4-dichromatic tournaments of minimum order*. *Discrete Math.* **135**, 233-243 (1994).

[19] V. Neumann-Lara, *A short proof of a theorem of Reid and Parker on tournaments*. *Graphs and Combin.* **10**, 363-366 (1994).

[20] I.K.B. Reid y E. Brown, *Doubly regular tournaments are equivalent to skew Hadamard matrices*. *J. Combin. Theory* A **12**, 332-338 (1972).

[21] I.K.B. Reid y E.T. Parker, *Disproof of a conjecture of Erdös and Moser on tournaments*, *J. Combin. Theory* **9**, 225-238 (1970).

[22] K.B. Reid y L.W. Beineke, *Tournaments*, en Selected Topics in Graph Theory (Academic Press, London, 1978) 169-204.

[23] C. Tabib, *About the inequalities of Erdös and Moser on the largest transitive subtournament of a tournament*, en Combinatoire énumérative, Lecture Notes in Math. 1234, (Springer, Berlin-New York, 1986) 308-320.

[24] M. Yannakakis, *Node- and edge-deleiton NP-complete problems*, en Proc. 10th Ann. ACM Symp. on Theory of Computing, (Association for Computing Machinery, New York, 1978) 253-264.