00365 $\frac{3}{2}$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

TRIPLES Y EXTENSION DE FUNTORES DE LOCALIZACION

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO
DE MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A:
MAT. AARON APARICIO HERNANDEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. EMILIO LUIS PUEBLA

1997

DEDICATORIA

Una tierna sonrisa tuya
eleva mi espiritu al éxtasis de la emoción,
y en ese momento que te sonrojas
tiembla mi cuerpo ...

A mis grandes amigos Rosalba y Aarón Alberto,
por tenerlos siempre presentes durante el camino ...

A la memoria de mi abuelo Gregorio ...

AGRADECIMIENTOS

En estas lineas quiero expresar mi agradecimiento a aquellas personas que han contribuído en mi formación como matemático.

Agradezco a mi director de tesis el Dr. Emilio Lluis Puebla por el interés y la paciencia mostrada en la exposición y realización de esta tesis.

Agradezco a mi asesor el Dr. Francisco Raggi Cárdenas por el apoyo brindado durante mis estudios de maestría.

Agradezco también a los integrantes de mi jurado: Dr. José Ríos M., Dr. Juan Morales R., Dr. Hugo Rincón M., Dr. Carlos Signoret P., y Dra. Martha Takane I. Por todas sus observaciones y sugerencias para el mejoramiento de esta tesis.

Doy las gracias a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA) y al Instituto de Matemáticas, por asignarme un espacio de estudio y apoyarme económicamente en la realización de mis estudios.

A mis compañeros del cubículo 201: Juancho, Miguel Angel, Humberto, Dino, Ricardo y Mary. Por los ratos agradables que disfrutamos durante estos años.

Agradezco a Leonardo Espinoza por sus sugerencias en la edición de este trabajo.

Finalmente agradezco a la Facultad de Ciencias y a la UNAM por darme la oportunidad de disfrutar de sus instalaciones, en donde el conocimiento nace cada día.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN 1

1 TRIPLES Y FUNTORES ADJUNTOS. 5

1.1 Triples y T-álgebras. 5

1.2 Triples y funtores dominantes. 14

2 TRIPLES Y ADJUNCIONES DE GALOIS. 21

2.1 Triples idempotentes. 21

2.2 Adjunciones de Galois. 31

3 LOCALIZACIÓN Y PAREJAS ORTOGONALES. 37

3.1 Funtores de localización y parejas ortogonales. 37

3.2 Extensión de triples. 41

3.3 Extensión de parejas ortogonales. 45

3.4 Extensiones de Kan. 48

3.5 Extensión de triples idempotentes. 53

3.6 Aplicaciones a localización de grupos. 56

SIMBOLOGÍA 63

BIBLIOGRAFÍA 65

Introducción

Dada una categoría $\mathbf{A}$, un *triple* $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ en $\mathbf{A}$, consiste de un funtor $T : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ y dos transformaciones naturales $\eta : 1_{\mathbf{A}} \longrightarrow T$, $\mu : T^2 \longrightarrow T$ tales que (i) $\mu \circ T\eta = 1_T = \mu \circ \eta T$ y (ii) $\mu \circ \mu T = \mu \circ T\mu$. Si además μ es isomorfismo, entonces el triple $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ se llama *idempotente*. La presente tesis tiene como objetivo estudiar bajo que condiciones un triple idempotente $\mathcal{T}'$ definido en la subcategoría plena $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$ puede extenderse a un triple idempotente $\mathcal{T}$ en $\mathbf{A}$ de manera universal, así como explicar sus antecedentes y consecuencias. De hecho, la exposición detallada que aparece en las demostraciones de teoremas y proposiciones fueron hechas por el autor de esta tesis. Además, como resultado original en la sección 2.2 el autor demuestra la relación que existe entre los triples idempotentes y las *adjunciones de Galois* (teorema 2.2.3). Este importante resultado no se ha publicado en otra parte. Muchas construcciones que son llamadas de *localización* en cualquier rama del Álgebra o de la Geometría, comparten una característica común, a saber son *funtores idempotentes* o mejor dicho, parte de un *triple idempotente*. Los categoristas tienen bien estudiado este concepto [2, Cap.III], [14, Cap.VI], [17, Sec.21]. Cuando por primera vez estuvieron disponibles las técnicas de localización en la Topología Algebraica al principio de los años setenta, la categoría de homotopía de los CW-complejos nilpotentes fue la más natural para desarrollar la teoría y fue en esa categoría donde las principales aplicaciones fueron descubiertas [7, 13, 18]. Durante las últimas dos décadas varios funtores han aparecido en la literatura, que extienden a la P-localización clásica sobre todos los grupos y todos los espacios. Algunos de estos funtores son idempotentes (por ejemplo, los descritos en [4] y [16]), mientras que otros no lo son [7]. En general los funtores de completación no son idempotentes, sin embargo se restringen a funtores idempotentes en muchas subcategorías decentes. En [8] hubo un intento por entender las relaciones entre los funtores de localización y los funtores de completación que existen en varias subcategorías de grupos y de espacios. Se observó que la localización homológica de Bousfield con coeficientes en $\mathbb{Z}_P$ (donde $\mathbb{Z}_P$ denota el anillo de los enteros localizados en P, con P un conjunto de primos) es *final* entre todas las extensiones idempotentes de la P-localización de espacios nilpotentes sobre todos los espacios. También se observó que la localización de Ribenboim tenía que ser *inicial* entre todas las extensiones idempotentes de la P-localización de grupos nilpotentes sobre todos los grupos. Estas observaciones dieron lugar a dos preguntas naturales:

(i) ¿Existe una extensión idempotente inicial de la P-localización de los espacios nilpotentes sobre todos los espacios?.
(ii) ¿Existe una extensión idempotente final de la P-localización de los grupos nilpotentes sobre todos los grupos?.

En [27] se responde afirmativamente a la pregunta (ii) y lo presentamos en el capítulo III. Este mismo resultado se obtuvo simultáneamente con diferentes técnicas por Berrick y Tan [3]. Esta aproximación está basada en un proceso que permite asociar a un triple dado un triple idempotente de manera universal, la cual funciona en categorías completas y bien potenciadas. La primera asociación fue descrita por Fakir en [11]. De hecho en [27] aparecen resultados que son válidos en un marco más amplio y que presentamos en los capítulos II y III de esta tesis. En la sección 3.1 recordamos el concepto de *pareja ortogonal* visto en [8] y analizamos la relación entre triples, adjunciones y parejas ortogonales en general. Las parejas ortogonales son herramientas muy útiles para estudiar las relaciones entre los funtores de localización y otros conceptos usuales tales como las *extensiones de Kan*. Ciertos argumentos se convierten en conceptos simples usando esta terminología. También en la sección 3.5 se demuestra que si $\mathbf{A}$ es una categoría completa y bien potenciada y $\mathfrak{D}$ es cualquier subcategoría plena de $\mathbf{A}$ con $K : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbf{A}$ la inclusión, entonces la extensión de Kan derecha de K a lo largo de K es suficiente para asegurar que la pareja ortogonal generada por $\mathfrak{D}$ admite un funtor de localización (corolario 3.5.3). En otras palabras, la saturación de $\mathfrak{D}$ es reflexiva en $\mathbf{A}$. Esto también fue demostrado por Pfenniger en [15] bajo la hipótesis de que $\mathfrak{D}$ es pequeña. En el caso en que $\mathbf{A}$ es la categoría de los grupos y $\mathfrak{D}$ es la subcategoría plena de los grupos nilpotentes P-locales, este resultado asegura la existencia de un funtor L_P que es final entre todas las extensiones idempotentes de la P-localización de grupos nilpotentes sobre todos los grupos. Una manera de visualizar a L_P es aproximando la $\mathbf{Z}_P$-completación con un triple idempotente (para un grupo G, la $\mathbf{Z}_P$-completación $\widehat{G}_P$ es el límite inverso de la torre $\{(G/\Gamma^i(G))_P\}$, donde $\Gamma^i(G)$ denota el i-ésimo término de la sucesión central descendente de G).

La clase de homomorfismos que son invertibles por L_P coinciden con la clase de homomorfismos que son invertibles por el funtor de $\mathbf{Z}_P$-completación (teorema 3.6.5). De hecho, $L_P(G)$ es isomorfo a $\widehat{G}_P$ en muchos casos. A saber, para todos los grupos G para los cuales $\widehat{G}_P \cong (\widehat{G}_P)\widehat{}_P$. Estos grupos incluyen a todos los grupos finitamente generados y más generalmente a todos los grupos G para los cuales $H_1(G;\mathbf{Z}_P)$ es finitamente generado como $\mathbf{Z}_P$-módulo. El funtor L_P no es equivalente al funtor de $H\mathbf{Z}_P$-localización de Bousfield. Por ejemplo, el efecto de un grupo libre en dos generadores es diferente. Este hecho resulta sorprendente, ya que rompe la analogía con la Teoría de Homotopía. Desde luego, si uno considera la $\mathbf{Z}_P$-completación de Kan-Bousfield de espacios (que no es idempotente) y buscamos un triple idempotente que tenga las mismas clases de equivalencia en la categoría de homotopía punteada de espacios, entonces uno encuentra precisamente el funtor de $H_*(\ ;\mathbf{Z}_P)$-localización, contrario a lo que se tiene en la categoría de los grupos.

Para consultar definiciones y terminología no dadas en este trabajo, ver [2, 14, 20].

FALTA PAGINA

No. 4

Capítulo 1

TRIPLES Y FUNTORES ADJUNTOS.

1.1 Triples y T-álgebras.

Definición 1.1.1. Sea $\mathbf{A}$ una categoría. Un *triple (o mónada)* $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ en $\mathbf{A}$, consiste de un funtor $T : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ y dos transformaciones naturales $\eta : 1_{\mathbf{A}} \longrightarrow T$, $\mu : T^2 \longrightarrow T$ que hacen conmutar los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\eta T"] \arrow[dr, "1_T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "1_T"] \\ & T & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "\mu T"] \arrow[d, "T\mu"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd}$$

Es decir, se cumplen (i) $\mu \circ T\eta = 1_T = \mu \circ \eta T$ y (ii) $\mu \circ \mu T = \mu \circ T\mu$.

EJEMPLOS.

(1) En toda categoría $\mathbf{A}$ existe el triple trivial $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ con $T = 1_{\mathbf{A}}$ y $\eta = \mu = 1_T$.

(2) Sea M un monoide y X un conjunto, con $m, n, r \in M$ y $x \in X$. Definimos $T : Conj \longrightarrow Conj$ con $TX = M \times X$ y si $f : X \longrightarrow Y$, entonces $Tf : M \times X \longrightarrow M \times Y$, $(m, x) \longmapsto (m, f(x))$. Sean

$\eta X : X \longrightarrow M \times X$ con $x \longmapsto (1, x)$ y $\mu X : M \times (M \times X) \longrightarrow M \times X$ con $(m, (n, x)) \longmapsto (mn, x)$. Con estas definiciones $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ es un triple. En efecto, veamos que se cumple la primera ecuación: $(\mu X \circ T\eta X)(m, x) = \mu X(m, 1, x) = (m, x)$ y $(\mu X \circ \eta TX)(m, x) = \mu X(1, m, x) = (m, x)$, así $\mu \circ T\eta = 1_T = \mu \circ \eta T$. Ahora veamos que la segunda ecuación se cumple. Por un lado $(\mu X \circ \mu TX)(m, n, r, x) = \mu X(mn, r, x) = (mnr, x)$ y por otro lado $(\mu_X \circ T\mu X)(m, n, r, x) = \mu X(m, nr, x) = (mnr, x)$, así $\mu \circ \mu T = \mu \circ T\mu$ y por lo tanto, $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ es un triple.

(3) Sea R un anillo conmutativo con 1 y X un grupo abeliano, con $m, n, r \in R$ y $x \in X$. Se define un funtor $T : \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ con $TX = R \otimes X$ y si $f : X \longrightarrow Y$, entonces $Tf : R \otimes X \longrightarrow R \otimes Y$, $r \otimes x \longmapsto r \otimes f(x)$. Ahora consideremos $\eta X : X \longrightarrow R \otimes X$ con $x \longmapsto 1 \otimes x$ y $\mu X : R \otimes (R \otimes X) \longrightarrow R \otimes X$ con $(m \otimes (r \otimes x)) \longmapsto (mr) \otimes x$. Con estas definiciones $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ es un triple. En efecto, veamos que se cumple la primera ecuación: $(\mu X \circ T\eta X)(m \otimes x) = \mu X(m \otimes 1 \otimes x) = m \otimes x$ y $(\mu X \circ \eta TX)(m \otimes x) = \mu X(1 \otimes m \otimes x) = m \otimes x$, así $\mu \circ T\eta = 1_T = \mu \circ \eta T$. Ahora veamos que la segunda ecuación también se cumple: Por un lado $(\mu X \circ \mu TX)(m \otimes n \otimes r \otimes x) = \mu X(mn \otimes r \otimes x) = mnr \otimes x$ y por otro lado $(\mu_X \circ T\mu X)(m \otimes n \otimes r \otimes x) = \mu X(m \otimes nr \otimes x) = mnr \otimes x$, así $\mu \circ \mu T = \mu \circ T\mu$ y por consiguiente $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ es un triple.

(4) Sea $\mathbf{A} = Conj$. Definimos el *triple conjunto potencia* $\mathcal{T} = (\wp, \eta, \mu)$ de la siguiente manera. $\wp : Conj \longrightarrow Conj$ es el funtor conjunto potencia, esto es $\wp(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ y si $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo de conjuntos con $X \subseteq A$, entonces $\wp(f)(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$. Además $\eta_A : A \longrightarrow \wp(A)$ y $\mu_A : \wp(\wp(A)) \longrightarrow \wp(A)$, donde $\eta_A(a) = \{a\}$ y $\mu_A(B) = \bigcup_{X \in B} X$. Con estas definiciones $\mathcal{T} = (\wp, \eta, \mu)$ es un triple.

P. Huber [22] demostró el siguiente resultado que permite caracterizar a los triples.

Proposición 1.1.1. *Si $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es un funtor adjunto izquierdo del funtor $G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$, con unidad $\eta : 1_\mathbf{A} \longrightarrow GF$ y counidad $\varepsilon : FG \longrightarrow 1_\mathbf{B}$, entonces $\mathcal{T} = (GF, \eta, G\varepsilon F)$ es un triple en $\mathbf{A}$.*

Demostración: Por hipótesis η es unidad y ε es counidad. Por lo tanto se cumplen las siguientes identidades triangulares: $(G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G) = (G \xrightarrow{1_G} G)$ y $(F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon F} F) = (F \xrightarrow{1_F} F)$. Ahora veamos que se cumple la primera ecuación:

$$\begin{aligned} G\varepsilon F \circ GF\eta &= G(\varepsilon F \circ F\eta) && \text{por ser } G \text{ funtor} \\ &= G(1_F) && \text{por la primera identidad triangular} \\ &= 1_{GF} && \text{pues } G \text{ es funtor.} \end{aligned}$$

Por otra parte, calculemos $G\varepsilon F \circ \eta GF$:

$$\begin{aligned} G\varepsilon F \circ \eta GF &= (G\varepsilon \circ \eta G)F && \text{por ser } G \text{ funtor} \\ &= (1_G)F && \text{por la segunda identidad triangular} \\ &= 1_{GF} && \text{pues } F \text{ es funtor.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $G\varepsilon F \circ GF\eta = 1_{GF} = G\varepsilon F \circ \eta GF$.
Por otra parte, la segunda ecuación también se cumple:

$$\begin{aligned} G\varepsilon F \circ GFG\varepsilon F &= (G\varepsilon \circ GFG\varepsilon)F && \text{por ser } F \text{ funtor} \\ &= G(\varepsilon \circ FG\varepsilon)F && \text{pues } G \text{ es funtor} \\ &= G(\varepsilon \circ \varepsilon FG)F && \text{por ser } \epsilon \text{ transformación natural} \\ &= G\varepsilon F \circ G\varepsilon FGF && \text{porque } F \text{ y } G \text{ son funtores.} \end{aligned}$$

Así, $G\varepsilon F \circ GFG\varepsilon F = G\varepsilon F \circ G\varepsilon FGF$ y por lo tanto, $\mathcal{T} = (GF, \eta, G\varepsilon F)$ es un triple en $\mathbf{A}$. ∎

Ejemplo. Sean R y S anillos, M un bimódulo. Si $\mathbf{A} = R$-**mod** y $\mathbf{B} = S$-**mod** entonces existen dos funtores $F\_ = M \underset{R}{\otimes} \_$ y $G\_ = \mathrm{Hom}_S(M, \_)$ tales que F y G forman una pareja de funtores adjuntos, esto es, existe un isomorfismo natural $\mathrm{Hom}_S(M \underset{R}{\otimes} A, B) \cong \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(M, B))$; cuya unidad $\eta A : A \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(M, M \underset{R}{\otimes} A)$ es tal que $(a)(m) \mapsto m \otimes a$, donde la counidad $\varepsilon B : M \underset{R}{\otimes} \mathrm{Hom}_S(M, B) \longrightarrow B$, $m \otimes h \mapsto h(m)$. Por lo tanto $\mathcal{T} = (GF, \eta, G\varepsilon F)$ es un triple en $\mathbf{A}$.

Debido a la proposición anterior sabemos que los funtores adjuntos inducen triples. Por lo tanto, al menos existen tantos triples como funtores adjuntos.

Después de que Huber probó el resultado anterior, P. J. Hilton conjeturó lo siguiente: Todo triple induce un par de funtores adjuntos. La respuesta fue dada más o menos al mismo tiempo, usando dos construcciones distintas por S. Eilenberg y J. C. Moore [24] y H. Kleisli [23] (ver teorema 1.1.3).

Definición 1.1.2. Un *cotriple* en una categoría $\mathbf{A}$ es un triple en $\mathbf{A}^{op}$. Es decir, un cotriple $\mathcal{T}' = (T', \varepsilon, \delta)$ en $\mathbf{A}$ consiste de un funtor $T' : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ y dos transformaciones naturales $\varepsilon : T' \longrightarrow 1_{\mathbf{A}^{op}}$, $\delta : T' \longrightarrow T'^2$ que satisfacen los duales de los diagramas de un triple.

Por lo tanto, el dual de un triple es un cotriple y a continuación veremos que existe un resultado análogo a la proposición 1.1.1.

Proposición 1.1.2. *Si $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es un funtor adjunto izquierdo del funtor $G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$, con unidad $\eta : 1_{\mathbf{A}} \longrightarrow GF$ y counidad $\varepsilon : FG \longrightarrow 1_{\mathbf{B}}$, entonces $\mathcal{T}' = (FG, \varepsilon, F\eta G)$ es un cotriple en $\mathbf{A}$.*

Demostración: Es inmediato por la proposición 1.1.1 y por el hecho de que G es adjunto izquierdo de F, vistos como funtores entre $\mathbf{B}^{op}$ y $\mathbf{A}^{op}$, con ε unidad y η counidad. ∎

Definición 1.1.3. La *categoría de Kleisli* para un triple $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ en $\mathbf{A}$, que denotaremos con $\mathbf{A}_{\mathcal{T}}$, se define de la siguiente manera:
i) $\operatorname{Ob} \mathbf{A}_{\mathcal{T}} = \operatorname{Ob} \mathbf{A}$.
ii) $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}_{\mathcal{T}}}(A, B) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(A, TB)$.

Ahora veremos cómo se define la *composición* en la categoría de Kleisli, esto es, si $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}_{\mathcal{T}}}(A, B)$ y $g \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}_{\mathcal{T}}}(B, C)$, entonces queremos definir $g \bullet f \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}_{\mathcal{T}}}(A, C)$, donde A, B y C son objetos de $\mathbf{A}$. Por hipótesis, si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ son morfismos de $\mathbf{A}_{\mathcal{T}}$, entonces $f : A \longrightarrow TB$ y $g : B \longrightarrow TC$ son morfismos de $\mathbf{A}$. Por lo tanto, $Tg : TB \longrightarrow T^2C$ es morfismo de $\mathbf{A}$ y como $\mu C : T^2C \longrightarrow TC$ también es morfismo de $\mathbf{A}$, entonces la siguiente composición de morfismos $A \xrightarrow{f} TB \xrightarrow{Tg} T^2C \xrightarrow{\mu C} TC$ es la composición deseada, esto es

$$g \bullet f = \mu C \circ Tg \circ f. \tag{1.1}$$

Observación. Se puede ver que con estas definiciones $\mathbf{A}_{\mathcal{T}}$ es una categoría. A continuación veremos que $\bullet$ es asociativa en $\mathbf{A}_{\mathcal{T}}$ y que $1_{\mathbf{A}_{\mathcal{T}}} = \eta A$, donde $1_{\mathbf{A}}$ denota la identidad en $\mathbf{A}$. En efecto, si $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ y $h : C \longrightarrow D$ son morfismos de $\mathbf{A}_{\mathcal{T}}$, entonces $f : A \longrightarrow TB$, $g : B \longrightarrow TC$ y $h : C \longrightarrow TD$ son morfismos de $\mathbf{A}$. Por lo tanto $g \bullet f = \mu C \circ Tg \circ f$ y $h \bullet g = \mu D \circ Th \circ g$. Ahora definimos el morfismo $(h \bullet g) \bullet f : A \longrightarrow TD$ como sigue: $A \xrightarrow{f} TB \xrightarrow{Tg} T^2C \xrightarrow{T^2h} T^3D \xrightarrow{T\mu D} T^2D \xrightarrow{\mu D} TD$. Por lo tanto se tiene que:

$$
\begin{aligned}
(h \bullet g) \bullet f &= \mu D \circ T(h \bullet g) \circ f && \text{por la ecuación (1.1)} \\
&= \mu D \circ T(\mu D \circ Th \circ g) \circ f && \text{por definición} \\
&= (\mu D \circ T\mu D) \circ T^2 h \circ Tg \circ f && \text{pues } T \text{ es funtor} \\
&= \mu D \circ \mu TD \circ T^2 h \circ Tg \circ f && \text{porque } T \text{ es triple} \\
&= \mu D \circ (Th \circ \mu C \circ Tg) \circ f && \text{por ser } \mu \text{ transf. natural} \\
&= \mu D \circ Th \circ (\mu C \circ Tg \circ f) && \text{por asociatividad} \\
&= h \bullet (g \bullet f) && \text{por definición.}
\end{aligned}
$$

Luego $\bullet$ es asociativa en $\mathbf{A}_{\mathcal{T}}$.

Ahora, si $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}_{\mathcal{T}}}(A, B)$, entonces sustituyendo $C = B, g = 1_B$ en la ecuación (1.1), se tiene que $A \xrightarrow{f} TB \xrightarrow{T\circ 1_B} T^2B \xrightarrow{\mu B} TB$. Por lo tanto $f = g \bullet f = \mu B \circ T \circ 1_B \circ f = \mu B \circ T \circ f = \mu B \circ Tf$, esto es,

$$f = \mu B \circ Tf. \tag{1.2}$$

Además, como η es una transformación natural, entonces los siguientes diagramas conmutan:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta A"'] & B \arrow[d, "\eta B"] \\
TA \arrow[r, "Tf"'] & TB
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta A"'] & TB \arrow[d, "\eta TB"] \\
TA \arrow[r, "Tf"'] & T^2B
\end{tikzcd}
$$

El diagrama de la derecha conmuta, por lo que $\eta TB \circ f = Tf \circ \eta A$.

$$
\begin{aligned}
f \bullet \eta A &= (\mu B \circ Tf) \circ \eta A && \text{por la ecuación (1.2)}\\
&= \mu B \circ (Tf \circ \eta A) && \text{por asociatividad}\\
&= \mu B \circ (\eta TB \circ f) && \text{por el diagrama anterior}\\
&= (\mu B \circ \eta TB) \circ f && \text{por asociatividad}\\
&= 1_{TB} \circ f && \text{porque } T \text{ es triple}\\
&= f && \text{por definición.}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $f \bullet \eta A = f$. Ahora, sustituyendo $f = \eta A$ en la ecuación (1.2) se tiene que $\eta A = \mu A \circ T\eta A$. De igual modo, si $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}_{\mathcal{T}}}(C, A)$ entonces $\eta A \bullet g = (\mu A \circ T\eta A) \circ g = 1_{TA} \circ g$, luego $\eta A \bullet g = g$. Así $1_{\mathbf{A}}$ en $\mathbf{A}_{\mathcal{T}}$ es ηA, es decir $\eta A : A \longrightarrow TA$ sirve como la identidad en la categoría de Kleisli.

Una pregunta natural es ¿cuál es la categoría de Kleisli del triple conjunto potencia en la categoría de los conjuntos?.

Un morfismo $A \longrightarrow \wp(B)$ en la categoría de los conjuntos se puede obtener como función multivaluada de A en B o como una relación entre A y B. Esto es, dado $A \xrightarrow{f} \wp(B)$ le asociamos $R_f \subseteq A \times B$, donde $(a,b) \in R_f$ significa que $b \in f(a)$. Por lo tanto $(a,b) \in R_f \iff b \in f(a)$. Sean $A \xrightarrow{f} \wp(B)$ y $B \xrightarrow{g} \wp(C)$ funciones, con $a \in A, b \in B$ y $c \in C$, entonces queremos ver qué es $g \bullet f$: $(g \bullet f)(a) = \mu C(\wp(g)(f(a))) = \bigcup\{g(b) \mid b \in f(a)\}$. Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
(a,c) \in R_{g\bullet f} &\iff c \in (g \bullet f)(a)\\
&\iff \exists\, b \in B \text{ tal que } (b \in f(a) \text{ y } c \in g(b))\\
&\iff \exists\, b \in B \text{ tal que } ((a,b) \in R_f \text{ y } (b,c) \in R_g)\\
&\iff (a,c) \in R_g \circ R_f.
\end{aligned}
$$

Además, 1_A en la categoría de Kleisli está representado por la función $\eta(A) : A \longrightarrow \wp(A)$ donde $\eta(A)(a) = \{a\} \subseteq A$. Luego $(a,a') \in R_{\eta A} \iff a' \in \{a\}$, es decir $R_{\eta A}$ es la relación identidad en A. Por consiguiente, la categoría de Kleisli del triple conjunto potencia, es la categoría cuyos objetos son conjuntos y cuyos morfismos son relaciones binarias (excepto por isomorfismo).

Definición 1.1.4. La *categoría de Eilenberg-Moore* para un triple $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ en $\mathbf{A}$, que denotaremos con $\mathbf{A}^{\mathcal{T}}$ se define como sigue:
1) Los objetos se llaman $\mathcal{T}$-*álgebras* y las $\mathcal{T}$-*álgebras* son parejas (A, a) donde $a : TA \longrightarrow A$ es un morfismo de $\mathbf{A}$ y A es un objeto de $\mathbf{A}$ tales que:

$$(i)\ a \circ \eta A = 1_A\ , \quad (ii) \quad a \circ \mu A = a \circ Ta. \tag{1.3}$$

Es decir, los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta A"] \arrow[dr, "1_A"'] & TA \arrow[d, "a"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^2A \arrow[r, "\mu A"] \arrow[d, "Ta"'] & TA \arrow[d, "a"] \\ TA \arrow[r, "a"'] & A \end{tikzcd}$$

2) Los morfismos se llaman *homomorfismos de* $\mathcal{T}$-*álgebras* $(A, a) \longrightarrow (B, b)$ y son morfismos $f : A \longrightarrow B$ tales que,

$$b \circ Tf = f \circ a. \tag{1.4}$$

Es decir el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "a"'] & TB \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Teorema 1.1.3. *Si $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ es un triple en $\mathbf{A}$, entonces existe una categoría $\mathbf{B}$ y un par de funtores adjuntos $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ y $G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ tales que $T = GF$, $\eta : 1_{\mathbf{A}} \longrightarrow GF$ es la unidad y $\varepsilon : FG \longrightarrow 1_{\mathbf{B}}$ es la counidad; con $\mu = G\varepsilon F$.*

Demostración: Como $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ es un triple en $\mathbf{A}$, entonces existe la categoría de Kleisli $\mathbf{A}_{\mathcal{T}}$, es decir, $\mathrm{Ob}\,\mathbf{A}_{\mathcal{T}} = \mathrm{Ob}\,\mathbf{A}$ y $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}_{\mathcal{T}}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A, TB)$. Sea $\mathbf{B} = \mathbf{A}_{\mathcal{T}}$ y definimos el funtor $G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ como sigue. Para cada A en $\mathbf{B}$ $GA = TA$ y para cada morfismo f en $\mathbf{B}$,

$$Gf = \mu B \circ Tf. \tag{1.5}$$

El funtor $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ se define de la siguiente manera: $FA = A$ para cada A en $\mathbf{A}$ y para cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ de $\mathbf{A}$,

$$Ff = Tf \circ \eta A. \tag{1.6}$$

Además, por ser η una transformación natural, $Ff = Tf \circ \eta A = \eta B \circ f$. Así

$$Ff = \eta B \circ f. \tag{1.7}$$

Ahora veamos que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A, GB) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(FA, B)$. Como $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A, TB) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(A, B)$ y $FA = A$, $GB = TB$, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A, GB) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(FA, B)$.

Además se tiene lo siguiente:

i) G preserva identidades pues

$$\begin{aligned}
G \circ 1_A &= G \circ \eta A && \text{pues } \eta A \text{ es la identidad} \\
&= \mu A \circ T\eta A && \text{porque } Gf = \mu B \circ Tf \\
&= 1_{TA} && \text{por ser T triple} \\
&= 1_{GA} && \text{porque } TA = GA.
\end{aligned}$$

Por consiguiente $G \circ 1_A = 1_{GA}$.

ii) G es funtor. En efecto, si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ son morfismos de $\mathbf{A}$, entonces

$$\begin{aligned}
Gg \circ Gf &= (\mu C \circ Tg) \circ (\mu B \circ Tf) && \text{por la ecuación (1.5)} \\
&= \mu C \circ (Tg \circ \mu B) \circ Tf && \text{por asociatividad} \\
&= \mu C \circ (\mu TC \circ T^2 g) \circ Tf && \text{por ser } \mu \text{ transf. natural} \\
&= (\mu C \circ \mu TC) \circ T^2 g \circ Tf && \text{por asociatividad} \\
&= (\mu C \circ T\mu C) \circ T^2 g \circ Tf && \text{porque } T \text{ es triple} \\
&= \mu C \circ (T\mu C \circ T^2 g) \circ Tf && \text{por asociatividad} \\
&= \mu C \circ T(\mu C \circ Tg \circ f) && \text{pues } T \text{ es funtor} \\
&= \mu C \circ T(g \bullet f) && \text{por la ecuación (1.1)} \\
&= G(g \bullet f) && \text{por la ecuación (1.5).}
\end{aligned}$$

Así $Gg \circ Gf = G(g \bullet f)$ y por lo tanto, G es funtor.

iii) F preserva identidades pues

$$\begin{aligned} F \circ 1_A &= \eta A \circ 1_A && \text{por ser } Ff = \eta B \circ f \\ &= \eta A && \text{por definición.} \end{aligned}$$

Por consiguiente $F \circ 1_A = \eta A$.

iv) F es funtor. Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ son morfismos de $\mathbf{B}$, entonces

$$\begin{aligned} Fg \bullet Ff &= \mu C \circ TFg \circ Ff && \text{por la ecuación (1.1)} \\ &= \mu C \circ T(\eta C \circ g) \circ (\eta B \circ f) && \text{porque } Ff = \eta B \circ f \\ &= \mu C \circ T\eta C \circ Tg \circ \eta B \circ f && \text{por ser } T \text{ funtor} \\ &= (\mu C \circ T\eta C) \circ Tg \circ \eta B \circ f && \text{por asociatividad} \\ &= 1_{TC} \circ Tg \circ \eta B \circ f && \text{pues } T \text{ es triple} \\ &= Tg \circ \eta B \circ f && \text{pues } 1_{TC} \circ f = f \\ &= (Tg \circ \eta B) \circ f && \text{por asociatividad} \\ &= (\eta C \circ g) \circ f && \text{por ser } \eta \text{ transf. natural} \\ &= F(g \circ f) && \text{por la ecuación (1.7).} \end{aligned}$$

Así $Fg \bullet Ff = F(g \circ f)$ y por lo tanto, F es funtor.

Es claro que $T = GF$ y como T es triple, entonces $\eta A : A \longrightarrow GFA = TA$ es transformación natural. Ahora veamos que también se cumplen las dos identidades triangulares.

Sea $\varepsilon A = 1_{TA} : FGA \longrightarrow A$ un morfismo de $\mathbf{A}_{\mathcal{T}}$. Entonces

$$\begin{aligned} \varepsilon FA \bullet F\eta A &= \mu A \circ T(\varepsilon FA) \circ F\eta A && \text{por la ecuación (1.1)} \\ &= \mu A \circ T(1_{TFA}) \circ F\eta A && \text{porque } \varepsilon FA = 1_{TFA} \\ &= \mu A \circ T(1_{TA}) \circ (\eta TA \circ \eta A) && \text{pues } FA = A \text{ y } Ff = \eta B \circ f \\ &= \mu A \circ (1_{T^2A}) \circ \eta TA \circ \eta A && \text{por ser T funtor} \\ &= \mu A \circ \eta TA \circ \eta A && \text{pues } \mu \circ 1_A = \mu \\ &= (\mu A \circ \eta TA) \circ \eta A && \text{por asociatividad} \\ &= 1_{TA} \circ \eta A && \text{porque } T \text{ es triple} \\ &= \eta A && \text{pues } 1_{TA} \circ \eta = \eta \\ &= 1_{FA} && \eta A \text{ es la identidad en FA.} \end{aligned}$$

Por consiguiente, $\varepsilon FA \circ F\eta A = 1_{FA}$. Para verificar la otra identidad triangular, sea $B = FA$ un objeto de $\mathbf{A}_T$. Entonces,

$$\begin{aligned}
G\varepsilon FA \circ \eta GFA &= G\varepsilon A \circ \eta TA && \text{pues } FA = A \text{ y } T = GF \\
&= G1_{TA} \circ \eta TA && \text{porque } \varepsilon FA = 1_{TFA} \\
&= (\mu A \circ T(1_{TA})) \circ \eta TA && \text{por la ecuación (7)} \\
&= \mu A \circ (1_{T^2A}) \circ \eta TA && \text{por ser } T \text{ funtor} \\
&= \mu A \circ \eta TA && \text{pues } \mu \circ 1_{T^2} = \mu \\
&= 1_{TA} && \text{pues } T \text{ es triple} \\
&= 1_{GFA} && \text{por ser } \eta \text{ la identidad en FA.}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $G\varepsilon FA \circ \eta GFA = 1_{GFA}$. ■

Por la importancia que tienen, más adelante regresaremos a las categorías de Kleisli y de Eilenberg-Moore.

1.2 Triples y funtores dominantes.

Sean $\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}$ y $\check{\mathbf{C}}$ categorías y consideremos los pares de funtores:

$$i) \quad H : \check{\mathbf{C}} \longrightarrow \check{\mathbf{A}} \quad , \quad ii) \quad \check{G}\check{F} : \check{\mathbf{A}} \longrightarrow \check{\mathbf{C}} \tag{1.8}$$

$$i) \quad \check{G} : \check{\mathbf{B}} \longrightarrow \check{\mathbf{C}} \quad , \quad ii) \quad \check{F}H : \check{\mathbf{C}} \longrightarrow \check{\mathbf{B}} \tag{1.9}$$

Definición 1.2.1. Un funtor $\check{F} : \check{\mathbf{A}} \longrightarrow \check{\mathbf{B}}$ es *fiel y pleno* si $\mathrm{Hom}_{\check{\mathbf{A}}}(A, A') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\check{\mathbf{B}}}(\check{F}A, \check{F}A')$ es una biyección.

Proposición 1.2.1. *Sean $\check{G} : \check{\mathbf{B}} \longrightarrow \check{\mathbf{C}}$ y $\check{F}H : \check{\mathbf{C}} \longrightarrow \check{\mathbf{B}}$ funtores adjuntos, con unidad $\eta : 1 \longrightarrow \check{G}\check{F}H$ y counidad $\varepsilon : \check{F}H\check{G} \longrightarrow 1$. Si $\check{F}$ es fiel y pleno, entonces existe $\varepsilon' : H\check{G}\check{F} \longrightarrow 1$ una transformación natural tal que $\check{F}\varepsilon' = \varepsilon\check{F}$ y además $H : \check{\mathbf{C}} \longrightarrow \check{\mathbf{A}}$, $\check{G}\check{F} : \check{\mathbf{A}} \longrightarrow \check{\mathbf{C}}$ es un par de funtores adjuntos con η unidad y ε' counidad. Además $H, \check{G}\check{F}$; $\check{F}H, \check{G}$ generan el mismo triple en $\check{\mathbf{C}}$.*

Demostración: Como $\check{F}$ es fiel y pleno, entonces definimos $\varepsilon' : H\check{G}\check{F} \longrightarrow 1$ como sigue: Para cada A en $\check{\mathbf{A}}$, $\check{F}\varepsilon'(A) = \varepsilon\check{F}(A)$. Además, ε' es una transformación natural ya que ε lo es. Por otro lado, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \check{G}\check{F}\varepsilon' \circ \eta\check{G}\check{F} &= \check{G}\varepsilon\check{F} \circ \eta\check{G}\check{F} && \text{por definición} \\ &= (\check{G}\varepsilon \circ \eta\check{G})\check{F} && \text{por ser } \check{F} \text{ funtor} \\ &= (1_{\check{G}})\check{F} && \text{por la identidad triangular.} \\ &= 1_{\check{G}\check{F}} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\check{G}\check{F}\varepsilon' \circ \eta\check{G}\check{F} = 1_{\check{G}\check{F}}$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \check{F}(\varepsilon' H \circ H\eta) &= \check{F}\varepsilon' H \circ \check{F}H\eta && \text{por ser } \check{F} \text{ funtor} \\ &= \varepsilon\check{F}H \circ \check{F}H\eta && \text{por definición} \\ &= 1_{\check{F}H}. \end{aligned}$$

Así $\check{F}(\varepsilon' H \circ H\eta) = 1_{\check{F}H}$ y como $\check{F}$ es fiel y pleno, entonces $\varepsilon' H \circ H\eta = 1$. Luego H y $\check{G}\check{F}$ es un par de funtores adjuntos con η unidad y ε' counidad. Además, $(\check{G}\check{F})\varepsilon' H = \check{G}(\check{F}\varepsilon')H = \check{G}(\varepsilon\check{F})H$ y por lo tanto, (1.8) y (1.9) generan el mismo triple en $\check{\mathbf{C}}$. ∎

Definición 1.2.2. Sea $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un funtor. Se dice que $\mathbf{E}$ es la *imagen* de F si $\mathbf{E}$ es la subcategoría plena de $\mathbf{B}$, cuyos objetos son las $F-$imágenes de los objetos de $\mathbf{A}$. Si F se factoriza como

$$\mathbf{A} \xrightarrow{L} \mathbf{E} \xrightarrow{K} \mathbf{B}, \tag{1.10}$$

donde K es la inmersión plena y L es suprayectivo en los objetos, entonces la ecuación (1.10) se llama la *factorización canónica* de F.

Nótese que L es pleno (resp. fiel) si, y sólo si, F es pleno (resp. fiel).

Teorema 1.2.2. *Si $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ y $G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ es un par de funtores adjuntos, con η unidad, ε counidad y $F = KL$ es la factorización canónica de F, entonces $GK : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{A}$ es adjunto derecho de L con η unidad y ε_o counidad tal que $K\varepsilon_o = \varepsilon K$. Además, los dos pares de funtores adjuntos generan el mismo triple en $\mathbf{A}$.*

Demostración: Es inmediato de la proposición 1.2.1, aplicado a $F = KL$. ∎

Observación. Los resultados del teorema anterior se siguen obteniendo al reemplazar, la factorización canónica (1.10) de $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ por la factorización canónica agrandada $\mathbf{A} \xrightarrow{\bar{L}} \bar{\mathbf{E}} \xrightarrow{\bar{K}} \mathbf{B}$, donde $\bar{\mathbf{E}}$ es la cerradura de $\mathbf{E}$ en la imagen de F bajo isomorfismos.

Definición 1.2.3. Un funtor $\check{F} : \check{\mathbf{A}} \longrightarrow \check{\mathbf{B}}$ se llama *dominante*, si para cada objeto B de $\check{\mathbf{B}}$ existe un objeto A de $\check{\mathbf{A}}$ y un par de morfismos φ y ϕ de $\check{\mathbf{B}}$

$$B \xrightarrow{\varphi} \check{F}A \xrightarrow{\phi} B \quad \text{tal que } \phi \circ \varphi = 1_B. \tag{1.11}$$

Es decir, todo objeto de $\check{\mathbf{B}}$ es retracto de un objeto de la forma $\check{F}A$, con A en $\check{\mathbf{A}}$.

Proposición 1.2.3. *Sean $F, G : \check{\mathbf{B}} \longrightarrow \mathbf{A}$ funtores y $\check{F} : \check{\mathbf{A}} \longrightarrow \check{\mathbf{B}}$ un funtor dominante, entonces se cumple lo siguiente:*
i) Toda transformación natural $\varepsilon : F \longrightarrow G$ está determinada por $\varepsilon\check{F}$.
ii) Si $\check{F}$ es pleno, entonces toda transformación natural $\varepsilon_o : F\check{F} \longrightarrow G\check{F}$ determina a $\varepsilon : F \longrightarrow G$ tal que $\varepsilon\check{F} = \varepsilon_o$.

Demostración: i) Si B es un objeto de $\check{\mathbf{B}}$ y $B \xrightarrow{\varphi} \check{F}A \xrightarrow{\phi} B$ es una dominación de B con $\phi\circ\varphi = 1_B$, entonces se tienen dos rectángulos conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
FB \arrow[r, "F\varphi"] \arrow[d, "\varepsilon B"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & F\check{F}A \arrow[r, "F\phi"] \arrow[d, "\varepsilon\check{F}A"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & FB \arrow[d, "\varepsilon B"] \\
GB \arrow[r, "G\varphi"'] & G\check{F}A \arrow[r, "G\phi"'] & GB
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon B &= \varepsilon B \circ 1_B && \text{porque } 1_B \text{ es funtor} \\
&= \varepsilon B \circ (F\phi \circ F\varphi) && \text{pues } \check{F} \text{ es funtor dominante} \\
&= \varepsilon B \circ F\phi \circ F\varphi && \text{por asociatividad} \\
&= G\phi \circ \varepsilon\check{F}A \circ F\varphi && \text{porque (2) conmuta} \\
&= G\phi \circ G\varphi \circ \varepsilon B && \text{porque (1) conmuta.}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $G\phi \circ G\varphi \circ \varepsilon B = \varepsilon B \circ F\phi \circ F\varphi$ y por consiguiente el rectángulo grande conmuta.

ii) Definimos $\varepsilon B = G\phi \circ \varepsilon_o A \circ F\phi$. Es claro que εB es independiente de la dominación que se escoja y por i) ε está determinado por la regla $\varepsilon \breve{F} = \varepsilon_o$. Ahora, veamos que ε es una transformación natural. Sea $g : B \longrightarrow B'$ un morfismo de $\breve{\mathbf{B}}$, entonces queremos ver que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
FB \arrow[r, "\varepsilon B"] \arrow[d, "Fg"'] \arrow[dr, phantom, "(8)"] & GB \arrow[d, "Gg"] \\
FB' \arrow[r, "\varepsilon' B"'] & GB'
\end{tikzcd}$$

Como $\breve{F}$ es dominante, entonces consideremos los diagramas conmutativos de las dominaciones.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & \breve{F}A \arrow[l, shift left, "\phi"] \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, dotted, "\breve{F}f"] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & B \arrow[d, "g"] \\
B' \arrow[r, "\varphi'"'] & \breve{F}A' \arrow[r, "\phi'"'] & B'
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis, como $\breve{F}$ es pleno, entonces existe $f : A \longrightarrow A'$ tal que $\breve{F}f = \varphi' \circ g \circ \phi$. Ahora, vamos a demostrar finalmente que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
FB \arrow[r, "F\varphi"] \arrow[d, "Fg"'] \arrow[dr, phantom, "(5)"] & F\breve{F}A \arrow[r, "\varepsilon_o A"] \arrow[d, "F\breve{F}f"] \arrow[dr, phantom, "(6)"] & G\breve{F}A \arrow[r, "G\phi"] \arrow[d, "G\breve{F}f"] \arrow[dr, phantom, "(7)"] & GB \arrow[d, "Gg"] \\
FB' \arrow[r, "F\varphi'"'] & F\breve{F}A' \arrow[r, "\varepsilon_o A'"'] & G\breve{F}A' \arrow[r, "G\phi'"'] & GB'
\end{tikzcd}$$

Como (3) conmuta, entonces (5) también. Además, por ser ε_o una transformación natural, entonces (6) conmuta. Por otro lado, como G es funtor y (4) conmuta, entonces (7) conmuta; por lo tanto, (8) conmuta. Así ε es una transformación natural. ∎

Proposición 1.2.4. *Sean $H : \breve{\mathbf{C}} \longrightarrow \breve{\mathbf{A}}$, $\breve{G}\breve{F} : \bar{\mathbf{A}} \longrightarrow \breve{\mathbf{C}}$ un par de funtores adjuntos, con unidad $\eta : 1 \longrightarrow \breve{G}\breve{F}H$ y counidad $\varepsilon' : H\breve{G}\breve{F} \longrightarrow 1$.*
i) Si $\breve{F}$ es pleno y dominante, entonces existe $\varepsilon : \breve{F}H\breve{G} \longrightarrow 1$ transformación natural tal que $\varepsilon\breve{F} = \breve{F}\varepsilon'$.
ii) $\breve{G} : \breve{\mathbf{B}} \longrightarrow \breve{\mathbf{C}}$ y $\breve{F}H : \breve{\mathbf{C}} \longrightarrow \breve{\mathbf{B}}$ son funtores adjuntos, con η unidad y ε counidad. Además $H, \breve{G}\breve{F}$; $\breve{F}H, \breve{G}$ generan el mismo triple en $\bar{\mathbf{C}}$.

Demostración: i) Como $\check{F}H\check{G}, 1 : \bar{\mathbf{B}} \longrightarrow \bar{\mathbf{B}}$ son funtores, entonces por la proposición 1.2.3, $\check{F}\varepsilon' : \check{F}H\check{G}\check{F} \longrightarrow \check{F}$ es una transformación natural y $\check{F}\varepsilon'$ determina a $\varepsilon : \check{F}H\check{G} \longrightarrow 1$ dada por:

$$\varepsilon B = \phi \circ \check{F}\varepsilon' A \circ \check{F}H\check{G}\varphi, \tag{1.12}$$

(pues $B \xrightarrow{\varphi} \check{F}A = \bar{\mathbf{B}} \xrightarrow{\check{F}H\check{G}} \bar{\mathbf{B}} \xrightarrow{\varepsilon\check{F}A} \check{F}A = B \xrightarrow{\phi} B$). Así $\varepsilon\check{F} = \check{F}\varepsilon'$.

ii) Por hipótesis η es unidad, solo resta probar que ε es counidad. Para ello, es suficiente probar que se cumplen las identidades triangulares, esto es; $\varepsilon\check{F}H \circ \check{F}H\eta = 1_{\check{F}}$ y $\check{G}\varepsilon \circ \eta\check{G} = 1_{\check{G}}$. Veamos que se cumple la primera identidad.

$$\begin{aligned}
\varepsilon\check{F}H \circ \check{F}H\eta &= \check{F}\varepsilon' H \circ \check{F}H\eta && \text{pues } \varepsilon\check{F} = \check{F}\varepsilon' \\
&= \check{F}(\varepsilon' H \circ H\eta) && \text{por ser } \check{F} \text{ funtor} \\
&= \check{F}(1) && \text{porque } \varepsilon' \text{ es counidad} \\
&= 1_{\check{F}} && \text{por ser } \check{F} \text{ funtor.}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\varepsilon\check{F}H \circ \check{F}H\eta = 1_{\check{F}}$. Ahora verifiquemos la segunda identidad:

$$\begin{aligned}
(\check{G}\varepsilon \circ \eta\check{G})B &= \check{G}\varepsilon B \circ \eta\check{G}B && \text{por definición} \\
&= \check{G}(\phi \circ \check{F}\varepsilon' A \circ \check{F}H\check{G}\varphi) \circ \eta\check{G}B && \text{por la ecuación (1.12)} \\
&= \check{G}\phi \circ (\check{G}\check{F}\varepsilon' A \circ \check{G}\check{F}H\check{G}\varphi) \circ \eta\check{G}B && \text{pues } \check{G} \text{ es funtor} \\
&= \check{G}\phi \circ \check{G}\check{F}\varepsilon' A \circ (\check{G}\check{F}H\check{G}\varphi \circ \eta\check{G}B) && \text{por asociatividad} \\
&= \check{G}\phi \circ \check{G}\check{F}\varepsilon' A \circ (\eta\check{G}\check{F}A \circ \check{G}\varphi) && F \text{ y } \check{G} \text{ son adjuntos} \\
&= \check{G}\phi \circ (\check{G}\check{F}\varepsilon' A \circ \eta\check{G}\check{F}A) \circ \check{G}\varphi && \text{por asociatividad} \\
&= \check{G}\phi \circ 1_A \circ \check{G}\varphi && \text{pues } \varepsilon' \text{ es counidad} \\
&= \check{G}\phi \circ \check{G}\varphi && \text{por ser } 1_A \text{ funtor} \\
&= \check{G}(\phi \circ \varphi) && \text{porque } \check{G} \text{ es funtor} \\
&= \check{G}(1) && \check{F} \text{ es funtor dominante} \\
&= 1_{\check{G}} && \text{pues } \check{G} \text{ es funtor.}
\end{aligned}$$

Por consiguiente $\check{G}\varepsilon \circ \eta\check{G} = 1_{\check{G}}$, así $\check{F}H$ y $\check{G}$ son funtores adjuntos. Finalmente, como $\varepsilon\check{F} = \check{F}\varepsilon'$ entonces $\check{G}\varepsilon\check{F}H = \check{G}\check{F}\varepsilon' H$. Luego $H, \check{G}\check{F}$; $\check{F}H, \check{G}$ generan el mismo triple en $\bar{\mathbf{C}}$. ∎

Observación. Nótese que los procesos descritos en la proposición 1.2.1 y en la proposición 1.2.4 son inversos uno del otro, además; si $\tilde{F}$ es fiel, pleno y dominante, entonces los pares (1.8) y (1.9) son adjuntos y determinan el mismo triple. Sin embargo podemos aplicar la proposición anterior a la factorización canónica y al mismo tiempo el adjunto derecho.

Teorema 1.2.5. *Sean $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ y $G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ un par de funtores adjuntos, con η unidad, ε counidad y $G = EG_o$ la factorización canónica de G. Si G es pleno, entonces G_oF es adjunto de E, con η unidad, ε_o counidad y $\varepsilon_oG_o = G_o\varepsilon$. Además, las dos adjunciones generan el mismo triple en $\mathbf{A}$.*

Demostración: Es claro por la proposición anterior. ∎

Proposición 1.2.6. *Si $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ y $G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ es un par de funtores adjuntos, con F dominante, entonces (i) G es fiel.*
(ii) Si G es pleno en la imagen de F, entonces G es pleno.

Demostración: (i) Sean A un objeto de $\mathbf{A}$ y B un objeto de $\mathbf{B}$ con $g, h : FA \longrightarrow B$ morfismos de $\mathbf{B}$. Probemos que si $G(u) = G(v)$, entonces $u = v$. Sean $u, v : B \longrightarrow B'$ morfismos de $\mathbf{B}$ y construímos una dominación $B \xrightarrow{\varphi} FA \xrightarrow{\phi} B$ tal que $\phi \circ \varphi = 1_B$. Por hipótesis $G(u) = G(v)$ implica $G(u) \circ G(\phi) = G(v) \circ G(\phi)$, por lo tanto $G(u \circ \phi) = G(v \circ \phi)$, luego $u \circ \phi = v \circ \phi$. Por consiguiente $u \circ \phi \circ \varphi = v \circ \phi \circ \varphi$ y como $\phi \circ \varphi = 1_B$, entonces $u = v$. Por lo tanto G es fiel.

(ii)Si G es pleno en la imagen de F y $u : G(B_1) \longrightarrow G(B_2)$ es un morfismo de $\mathbf{A}$, entonces consideramos las dominaciones resp. $B_i \xrightarrow{\varphi_i} FA_i \xrightarrow{\phi_i} B_i$ tales que $\phi_i \circ \varphi_i = 1_{B_i}$ con $i = 1, 2$ y construímos $G\varphi_2 \circ u \circ G\phi_1 : GFA_1 \longrightarrow GFA_2$. Como G es pleno en la imagen de F, entonces existe $v : FA_1 \longrightarrow FA_2$ un morfismo de $\mathbf{B}$ tal que $Gv = G\varphi_2 \circ u \circ G\phi_1$. Por lo tanto $(G\varphi_2)^{-1} \circ Gv = u \circ G\phi_1$. Además, por ser $\phi_2 \circ \varphi_2 = 1_{B_2}$ entonces $G\phi_2 \circ Gv = u \circ G\phi_1$, luego $G\phi_2 \circ Gv \circ (G\phi_1)^{-1} = u$ y como $\phi_1 \circ \varphi_1 = 1_{B_1}$ entonces $G\phi_2 \circ Gv \circ G\varphi_1 = u$. Finalmente $u = G\phi_2 \circ Gv \circ G\varphi_1 = G(\phi_2 \circ v \circ \varphi_1)$, así $u = G(\phi_2 \circ v \circ \varphi_1)$ y por lo tanto, G es pleno. ∎

Observación. Se puede ver que los resultados de esta sección tienen formulaciones duales.

FALTA PAGINA

No. 20

Capítulo 2

TRIPLES Y ADJUNCIONES DE GALOIS.

2.1 Triples idempotentes.

En el capítulo I, vimos que si $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ es un triple en $\mathbf{A}$, entonces $\mu \circ T\eta = 1_T = \mu \circ \eta T$. Una pregunta natural es ¿cuándo $\mu \circ \eta T = \mu \circ T\eta \iff \eta T = T\eta$?. Se puede demostrar que esto sucede en el caso en que μ es isomorfismo natural, por lo tanto se tiene la siguiente definición.

Definición 2.1.1. Un triple $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ en $\mathbf{A}$ se llama *idempotente* si μ es isomorfismo natural.

A. Deleanu [9], demostró el siguiente resultado que permite caracterizar a los triples idempotentes de una manera más sencilla; sin embargo no es la única como veremos más adelante.

Proposición 2.1.1. *Sea $\mathcal{T}$ un triple en $\mathbf{A}$. $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ es idempotente si, y sólo si $\eta T = T\eta$.*

Demostración: $\Longrightarrow$) Si $\mathcal{T}$ es un triple, entonces $\mu \circ \eta T = \mu \circ T\eta = 1_T$ y como μ es isomorfismo; por lo tanto, $\eta T = T\eta$.

$\Longleftarrow$) Si $\mathcal{T}$ es un triple, entonces η es una transformación natural, por lo tanto los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta A"'] & B \arrow[d, "\eta B"] \\ TA \arrow[r, "Tf"'] & TB \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^2A \arrow[r, "\mu A"] \arrow[d, "\eta T^2 A"'] & TA \arrow[d, "\eta TA"] \\ T^3A \arrow[r, "T\mu A"'] & T^2A \end{tikzcd}.$$

Por lo tanto $\eta T \circ \mu = T\mu \circ \eta T^2$. Ahora, como $\eta T = T\eta$ y T es funtor, entonces $\eta T^2 = T\eta T$. Por lo tanto se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \eta T \circ \mu &= T\mu \circ \eta T^2 && \text{porque } \eta \text{ es una transf. natural} \\ &= T\mu \circ T\eta T && \text{por hipótesis} \\ &= T(\mu \circ \eta T) && \text{pues } T \text{ es funtor} \\ &= T(1_T) && \text{porque } T \text{ es triple} \\ &= 1_{T^2} && \text{pues } T \text{ es funtor.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\eta T \circ \mu = 1_{T^2}$ y como $\mu \circ \eta T = 1_T$, entonces μ es isomorfismo. Por lo tanto $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ es idempotente. ∎

A continuación daremos otras definiciones y posteriormente veremos algunos ejemplos.

Definición 2.1.2. Sea R un anillo conmutativo con 1 y $S \subset R$ subconjunto cerrado bajo productos finitos, con 1 en S. Sea M un R-módulo, M es *S-local* si la función $f : M \longrightarrow M$ con $f(m) = ms$ es isomorfismo, para toda s en S.

Observación. Se puede ver que, para cada R-módulo existe una función $f : M \longrightarrow N$ tal que:
(i) N es S-local.
(ii) f es universal con respecto a (i), es decir; si $g : M \longrightarrow N'$ es otra función con N' S-local, entonces existe una única $h : N \longrightarrow N'$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & N \arrow[d, dotted, "h"] \\ & N' \end{tikzcd}$$

Al morfismo f se le llama *morfismo de localización* y en tal caso se dice que f localiza a M en S. La construcción de N se hace como módulo de fracciones. Primero se toman parejas (m, s) y definimos una relación de equivalencia en las parejas: $(m, s) \sim (n, r)$ si, y sólo si existe t tal que $mrt = nst$ con m, n en M y s, r, t en S. $S^{-1}M$ es el conjunto de todas las clases de equivalencia, m/s es la clase de equivalencia que contiene a (m, s). Por lo tanto, podemos definir una función $f : M \longrightarrow S^{-1}M$ tal que $f(m) = m/1$ y se puede ver que $S^{-1}M$ es S-local y f es universal. Además, como R es un R-módulo, entonces $S^{-1}R$ está definido y el morfismo canónico $g : R \longrightarrow S^{-1}R$ es un morfismo de anillos, pues $(r/s)(r'/s') = (rr'/ss')$. Análogamente, $S^{-1}M$ es un módulo sobre $S^{-1}R$, con $(m/s')(r/s) = (mr/s's)$.

Ejemplos

(1) Sea $\mathbf{A}$ la categoría de R-módulos, $TM = S^{-1}M$ con S fijo y $\eta M : M \longrightarrow S^{-1}M$ el morfismo canónico $m \longmapsto m/1$, entonces ηTM es el morfismo $m/s \longmapsto (m/s)/1$ y $T\eta M$ es el morfismo $m/s \longmapsto (m/1)/s$. Es claro que ηT y $T\eta$ son isomorfismos y $\eta T = T\eta$. Por consiguiente tenemos un triple idempotente.

(2) Sea $\mathbf{A}$ la categoría cuyos objetos son espacios métricos y cuyos morfismos son funciones uniformemente continuas. TX es la completación $\hat{X}$ de X, cuya construcción se hace tomando clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy. $\eta X : X \longrightarrow \hat{X}$ es el morfismo canónico $x \longmapsto \{x, x, ..., x, ...\}$. Por lo tanto ηTX es el morfismo $\{x_1, x_2, ...\} \mapsto \{\{x_1, x_2, ...\}, \{x_1, x_2, ...\}, ...\}$ y $T\eta X$ es el morfismo $\{x_1, x_2, ...\} \mapsto \{\{x_1, x_1, ...\}, \{x_2, x_2, ...\}, ...\}$. Es claro que ηT, $T\eta$ son isomorfismos y $\eta T = T\eta$. Por lo tanto tenemos otro triple idempotente.

Teorema 2.1.2. *Si* $\mathbf{B}$ *es una subcategoría de* $\mathbf{A}$ *con* B *en* $\mathbf{B}$, *entonces son equivalentes:*
(i) Para alguna A *en* $\mathbf{A}$ $\quad B \cong TA$.
(ii) $\eta B : B \longrightarrow TB$ *es isomorfismo.*

Demostración: $(ii) \Longrightarrow (i)$ es claro tomando $A = B$.

$(i) \Longrightarrow (ii)$ Por hipótesis $f : B \longrightarrow TA$ es isomorfismo y como T es funtor, entonces Tf es isomorfismo. Además η es una tranformación natural, por lo tanto, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta B"'] & TA \arrow[d, "\eta TA"] \\ TB \arrow[r, "Tf"'] & T^2A \end{tikzcd}$$

Como f, Tf y ηTA son isomorfismos entonces ηB es isomorfismo. ■

A. Deleanu, A. Frei y P. J. Hilton [10] demostraron los siguientes resultados que permiten caracterizar a los triples idempotentes.

Proposición 2.1.3. *Si $\mathcal{T} = (GF, \eta, G\varepsilon F)$ es un triple en $\mathbf{A}$, entonces son equivalentes:*
(i) $\mathcal{T}$ *es idempotente,*
(ii) εF *es isomorfismo,*
(iii) $F\eta$ *es isomorfismo,*
(iv) $F\eta \circ \varepsilon F = 1_F$.

Demostración: $(iii) \iff (iv) \iff (ii)$ es inmediato.
$(ii) \implies (i)$ Por hipótesis εF es isomorfismo y como G es funtor, entonces $G\varepsilon F = \mu$ es isomorfismo, así $\mathcal{T}$ es idempotente.
$(i) \implies (iv)$ Si $\mathcal{T}$ es idempotente, entonces $\mu = G\varepsilon F$ es isomorfismo, así $GF\eta \circ G\varepsilon F = 1_{GF}$ y $G\varepsilon F \circ GF\eta = 1_{GF}$; además, por ser G funtor $GF\eta \circ G\varepsilon F = G(F\eta \circ \varepsilon F) = 1_{GF}$. Por otro lado, $F\eta \circ \varepsilon F : FGF \longrightarrow FGF$ y G es fiel en la imagen de F, por lo tanto $F\eta \circ \varepsilon F = 1_F$. Así $(i) \iff (ii)$. ■

Proposición 2.1.4. *Si $\mathcal{T} = (GF, \eta, G\varepsilon F)$ es un triple en $\mathbf{A}$, entonces son equivalentes:*
(1) $\eta GF = GF\eta$,
(2) $\mathcal{T}$ *es idempotente,*
(3) εF *es isomorfismo,*
(4) $F\eta$ *es isomorfismo,*
(5) $F\eta \circ \varepsilon F = 1_F$.

Demostración: Basta probar $(1) \iff (2)$, lo que es claro por la proposición 2.1.1, con $T = GF$. ■

Este resultado se usará posteriormente para probar el teorema 2.2.3.

Teorema 2.1.5. *Si* $(\eta, \varepsilon) : F \dashv G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *es situación adjunta, entonces*
(i) G *es fiel* $\Longleftrightarrow$ *cada componente* εB *de la counidad es epimorfismo.*
(ii)G *es pleno* $\Longleftrightarrow$ *cada* εB *es sección.*
(iii)G *es fiel y pleno* $\Longleftrightarrow$ *cada* εB *es isomorfismo y* $FG(B) \cong B$.

Demostración: [14, teorema 1,p.88] ∎

Proposición 2.1.6. *Si* G *es adjunto derecho de* F *y* G *es pleno, entonces* $\mathcal{T}$ *es idempotente.*

Demostración: Si G es pleno, entonces por el teorema 2.1.5 *(ii)* εB es sección, por consiguiente $G\varepsilon$ es sección. Además $G\varepsilon \circ \eta G = 1_G$, así $G\varepsilon$ es isomorfismo; luego $G\varepsilon F = \mu$ es isomorfismo y por lo tanto, $\mathcal{T}$ es idempotente. ∎

Observación. El ejemplo que aparece después de la proposición 1.1.1 induce un triple que no es idempotente, ya que el funtor $G\_ = \mathrm{Hom}_S(M, \_)$ no es pleno; sin embargo si el módulo M es proyectivo entonces el triple si es idempotente.

La siguiente proposición es inversa de la proposición 1.2.6 y la usaremos posteriormente.

Proposición 2.1.7. *Sean* $\mathcal{T} = (GF, \eta, G\varepsilon F)$ *un triple idempotente en* $\mathbf{A}$ *y* $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, $G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ *un par de funtores adjuntos con* F *dominante y* G *fiel y pleno, entonces existe* $\varepsilon : FG \longrightarrow 1_{\mathbf{B}}$ *transformación natural y* G *es adjunto derecho de* F, *con* η *unidad y* ε *counidad. Además, la adjunción genera a* $\mathcal{T}$.

Demostración: Como $\mathcal{T}$ es idempotente, entonces por la proposición 2.1.3 $F\eta$ es isomorfismo. Ahora, para algún B en $\mathbf{B}$ escogemos una dominación $B \xrightarrow{\varphi} FA \xrightarrow{\phi} B$ tal que $\phi \circ \varphi = 1_B$ y definimos $\varepsilon = \phi \circ (F\eta)^{-1} \circ FG\varphi : FG \longrightarrow 1_{\mathbf{B}}$. Probaremos que ε es una tranformación natural y por consiguiente ε es independiente de la dominación que se escoja. Sean B_1, B_2

objetos de $\mathbf{B}$ y $g : B_1 \longrightarrow B_2$ un morfismo de $\mathbf{B}$, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[r, shift left, "\varphi_1"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "I"] & FA_1 \arrow[l, shift left, "\phi_1"] \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, dotted, "h"] \arrow[dr, phantom, "II"] & B_1 \arrow[d, "g"] \\
B_2 \arrow[r, "\varphi_2"'] & FA_2 \arrow[r, "\phi_2"'] & B_2
\end{tikzcd}$$

Donde $h = \varphi_2 \circ g \circ \phi_1$ y $\phi_i \circ \varphi_i = 1$, $i = 1, 2$. Como $\phi_2 \circ \varphi_2 = 1_{B_2}$, entonces $\phi_2 \circ h = (\phi_2 \circ \varphi_2) \circ g \circ \phi_1 = 1 \circ g \circ \phi_1 = g \circ \phi_1$. Luego II conmuta. Además, si $h : FA_1 \longrightarrow FA_2$, entonces $Gh : GFA_1 \longrightarrow GFA_2$ y como $T = GF$, por lo tanto $Gh : TA_1 \longrightarrow TA_2$. Por otro lado, por ser η una transformación natural, se tienen dos diagramas conmutativos.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta A"'] & B \arrow[d, "\eta B"] \\
TA \arrow[r, "Tf"'] & TB
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
TA_1 \arrow[r, "Gh"] \arrow[d, "\eta TA_1"'] & TA_2 \arrow[d, "\eta TA_2"] \\
T^2A_1 \arrow[r, "TGh"'] & T^2A_2
\end{tikzcd}$$

El diagrama de la derecha conmuta, luego $TGh \circ \eta TA_1 = \eta TA_2 \circ GH$. Como T es idempotente, entonces $\eta T = T\eta$. Así $TGh \circ T\eta A_1 = T\eta A_2 \circ GH$ y por consiguiente $GFGh \circ GF\eta A_1 = GF\eta A_2 \circ Gh$. Por lo tanto $G(FGh \circ F\eta A_1) = G(F\eta A_2 \circ h)$, además G es fiel, así

$$FGh \circ F\eta A_1 = F\eta A_2 \circ h\,. \tag{2.1}$$

Ahora, probemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "III"] & FA_1 \arrow[l, "\phi_1"'] \arrow[r, "F\eta A_1"] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, phantom, "IV"] & FGFA_1 \arrow[d, "FGh"] \arrow[dr, phantom, "V"] & FGB_1 \arrow[l, "FG\varphi_1"'] \arrow[d, "FGg"] \\
B_2 & FA_2 \arrow[l, "\phi_2"] \arrow[r, "F\eta A_2"'] & FGFA_2 & FGB_2 \arrow[l, "FG\varphi_2"]
\end{tikzcd}$$

Es claro que III conmuta porque I conmuta y por la ecuación (2.1) IV conmuta. Además, V conmuta ya que III conmuta; por lo tanto, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
FGB_1 \arrow[r, "\varepsilon B_1"] \arrow[d, "FGg"'] & B_1 \arrow[d, "g"] \\
FGB_2 \arrow[r, "\varepsilon B_2"'] & B_2
\end{tikzcd}$$

Así ε es una transformación natural. Además, por hipótesis $F\eta$ es isomorfismo si, y sólo si, $F\eta \circ \varepsilon F = 1_F$, si, y sólo si, $\varepsilon F = (F\eta)^{-1}$; por lo tanto $\varepsilon F \circ F\eta = 1_F$ y por consiguiente se tiene la primera identidad triangular. Ahora, veamos que la segunda identidad triangular también se cumple:

$$
\begin{aligned}
G\varepsilon \circ \eta G &= G(\phi \circ (F\eta)^{-1} \circ FG\varphi) \circ \eta G && \text{por definición} \\
&= G\phi \circ G(F\eta)^{-1} \circ GFG\varphi \circ \eta G && \text{por definición de } \varepsilon \\
&= G\phi \circ G(F\eta)^{-1} \circ \eta GF \circ G\varphi && \text{porque } G \text{ es funtor} \\
&= G\phi \circ G(F\eta)^{-1} \circ GF\eta \circ G\varphi && \text{pues } \eta \text{ es natural} \\
&= G\phi \circ G(F\eta^{-1} \circ F\eta) \circ G\varphi && \text{por ser } \eta T = T\eta \\
&= G\phi \circ G(1_F) \circ G\varphi && \text{por ser } G \text{ funtor} \\
&= G\phi \circ (1_{GF}) \circ G\varphi && (F\eta)^{-1} \circ F\eta = 1_F \\
&= G\phi \circ G\varphi && \text{pues } 1_F \text{ es funtor} \\
&= G(\phi \circ \varphi) && \text{porque } G(1_F) = 1_{GF} \\
&= G(1) && \text{porque } G \text{ es funtor} \\
&= 1_G && \text{pues } F \text{ es dominante} \\
& && \text{porque } G \text{ es funtor.}
\end{aligned}
$$

Por consiguiente $G\varepsilon \circ \eta G = 1_G$, así F es adjunto de G. Además $G(F\eta)^{-1} = G\varepsilon F = \mu$ y es claro que la adjunción genera el mismo triple. ∎

Ahora ya sabemos que si $F \dashv G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ genera el mismo triple $\mathfrak{T} = (GF, \eta, G\varepsilon F)$, entonces F y T hacen invertible la misma familia de morfismos S de $\mathbf{A}$ [17, 21.8.8(a)].

Observación. Sea $\mathbf{A}$ una categoría y S un subconjunto de morfismos de $\mathbf{A}$. Se puede ver que existe una categoría pequeña $\mathbf{A}[S^{-1}]$ y un funtor $F_S : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}[S^{-1}]$ con las siguientes propiedades:
(i) Para cada s en S, $F_S(s)$ es un isomorfismo.
(ii) Si $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es un funtor, tal que $F(s)$ es un isomorfismo para toda s en S, entonces existe un único funtor $H : \mathbf{A}[S^{-1}] \longrightarrow \mathbf{B}$ tal que $F = H \circ F_S$.
A la categoría $\mathbf{A}[S^{-1}]$ se le llama la *categoría de fracciones* de $\mathbf{A}$ con respecto a S.

Teorema 2.1.8. *Si $\mathcal{T} = (GF, \eta, G\varepsilon F)$ es un triple en $\mathbf{A}$, entonces son equivalentes.*
(i) $\mathcal{T}$ es idempotente.
(ii) Todo par adjunto que genera a $\mathcal{T}$ con F dominante, tiene adjunto derecho G el cual es fiel y pleno.
(iii) Si S es la familia de morfismos que T hace invertibles, entonces $F_S : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}[S^{-1}]$ tiene adjunto derecho G_S y generan a $\mathcal{T}$.

Demostración: $(ii) \Longrightarrow (i)$ Por hipótesis, existe un par de funtores adjuntos $F \dashv G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ que genera a $\mathcal{T}$ y F es dominante. Además, G es fiel y pleno, y por la proposición 2.1.6 $\mathcal{T}$ es idempotente.
$(i) \Longrightarrow (iii)$ Sea $\mathbf{A} \xrightarrow{L} \mathbf{A}_S \xrightarrow{K} \mathbf{A}$ la factorización canónica de T, entonces por el teorema 1.2.2 L y K son funtores adjuntos, con η unidad y ε counidad; además L y K generan a $\mathcal{T}$. Por otro lado, como S es la familia de morfismos que L hace invertibles, entonces por [17, teorema 21.8.9(a)] existe un único funtor $H : \mathbf{A}[S^{-1}] \longrightarrow \mathbf{A}_S$ tal que $H \circ F_S = L$ y H resulta ser isomorfismo, ya que K es fiel y pleno; por lo tanto, por la proposición 1.2.1 $F_S \dashv G_S = KH : \mathbf{A}[S^{-1}] \longrightarrow \mathbf{A}$ y además F_S y G_S generan a $\mathcal{T}$.
$(iii) \Longrightarrow (ii)$ como $\mathcal{T} = (GF, \eta, G\varepsilon F)$ es un triple en $\mathbf{A}$, entonces existe $F \dashv G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ con F dominante y $F_S \dashv G_S : \mathbf{A}[S^{-1}] \longrightarrow \mathbf{A}$ generan a $\mathcal{T}$, entonces por [17, teorema 21.2.9] existe un funtor $H : \mathbf{A}[S^{-1}] \longrightarrow \mathbf{B}$ fiel y pleno tal que $H \circ F_S = F$, $G \circ H = G_S$ y por [21, proposición 1.3] G_S es fiel y pleno. Así G es pleno en la imagen de H, pero la imagen de H coincide con la imagen de F y por la proposición 1.2.6 G es fiel y pleno. ∎

Proposición 2.1.9. *Si $\check{F} : \check{\mathbf{A}} \longrightarrow \check{\mathbf{B}}$ es funtor dominante y $\varepsilon : F \longrightarrow G$ es una transformación natural con $F, G : \check{\mathbf{B}} \longrightarrow \mathbf{A}$, entonces ε es isomorfismo natural si, y sólo si, $\varepsilon\check{F}$ es isomorfismo natural.*

Demostración: $\Longrightarrow$) Por hipótesis ε es isomorfismo natural y como $\check{F}$ es funtor, entonces $\varepsilon\check{F}$ es isomorfismo natural.
$\Longleftarrow$) Sean B un objeto de $\mathbf{B}$ y $B \xrightarrow{\varphi} \check{F}A \xrightarrow{\phi} B$ con $\phi \circ \varphi = 1_B$ una dominación de B. Como $\varepsilon\check{F}$ es isomorfismo natural, entonces se tiene el

siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} FB \arrow[r, "F\varphi"] \arrow[d, "\varepsilon B"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & F\bar{F}A \arrow[r, "F\phi"] \arrow[d, "\varepsilon \bar{F}A"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & FB \arrow[d, "\varepsilon B"] \\ GB \arrow[r, "G\varphi"'] & G\bar{F}A \arrow[r, "G\phi"'] & GB \end{tikzcd}$$

I y II conmutan porque ε es una tranformación natural y $\bar{F}$ es dominante. Sólo resta probar que ε tiene inverso $\varepsilon^{-1} : G \longrightarrow F$. Definimos $(\varepsilon B)^{-1} = F\phi\circ(\varepsilon\bar{F}A)^{-1}\circ G\varphi : GB \longrightarrow FB$, el cual tiene sentido porque I y II conmutan, así ε es isomorfismo y como ε es una transformación natural; por lo tanto, ε es isomorfismo natural. ∎

Ahora caracterizamos la categoría de Kleisli y la categoría de Eilenberg-Moore del triple idempotente $\mathfrak{T}$.

Teorema 2.1.10. *Si $\mathfrak{T} = (T, \eta, \mu)$ es un triple idempotente en $\mathbf{A}$ y S es una familia de morfismos invertibles por T, entonces $\mathbf{A}[S^{-1}] \cong \mathbf{A}_{\mathfrak{T}}$.*

Demostración: Si $\mathfrak{T}$ es un triple idempotente, entonces por el teorema 2.1.8, para algún par de funtores adjuntos $F \dashv G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ genera a $\mathfrak{T}$. Además, S es la familia de morfismos invertibles por T y por [17, teorema 21.8.9(b)] existe un único funtor $H : \mathbf{A}[S^{-1}] \longrightarrow \mathbf{B}$ con $H \circ F_S = F$. Además por el teorema 2.1.8, F_S tiene adjunto derecho G_S y generan a $\mathfrak{T}$. En particular $G_S \circ F_S = G \circ F = G \circ H \circ F_S$, luego $G_S = G \circ H$; por lo tanto $\mathbf{A}[S^{-1}] \cong \mathbf{A}_{\mathfrak{T}}$ con respecto a los funtores adjuntos $F_S : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}[S^{-1}]$, $G_S : \mathbf{A}[S^{-1}] \longrightarrow \mathbf{A}$. ∎

Observación. Si consideramos a

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\bar{L}} \bar{\mathbf{A}}_S \xrightarrow{\bar{K}} \mathbf{A} \text{ tal que } \bar{K} \circ \bar{L} = T, \tag{2.2}$$

la factorización canónica *agrandada* del funtor $T : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$, donde $\mathfrak{T} = (T, \eta, \mu)$ es un triple idempotente en $\mathbf{A}$, entonces por la proposición 2.1.7 $\bar{L} \dashv \bar{K}$, con counidad $\bar{\varepsilon} : \bar{L}\bar{K} \longrightarrow 1$ y la adjunción genera a $\mathfrak{T}$.

Lema 2.1.11. *Sean $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ un triple idempotente en $\mathbf{A}$ y A un objeto de $\mathbf{A}$, entonces son equivalentes.*
(i) $A \in \bar{\mathbf{A}}_S$,
(ii) ηA *es sección,*
(iii) ηA *es invertible,*
(iv) A *es cerrado izquierdo por* S.

Demostración: *(i)* $\Longrightarrow$ *(iii)* Si $A \in \bar{\mathbf{A}}_S$, entonces $A \cong TB$ con B en $\mathbf{B}$. Además, si $\mathcal{T}$ es idempotente, entonces $\mu \circ \eta T = 1_T = \mu \circ T\eta$, así $\mu^{-1} = \eta T = T\eta$ y como μ es isomorfismo, por lo tanto ηT es invertible. Luego ηTB es invertible con inverso μB, por consiguiente ηA es invertible con $A \cong TB$.
(iii) $\Longrightarrow$ *(i)* Si $\eta A : A \longrightarrow TA$ es invertible, entonces $A \cong TA$ y por lo tanto $A \in \bar{\mathbf{A}}_S$, así hemos probado *(i)* si y sólo si *(iii)*.
(ii) $\Longrightarrow$ *(iii)* Sean $F \dashv G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ un par de funtores adjuntos que genera a $\mathcal{T}$, con η unidad y ε counidad. Como ηA es sección, entonces $a \circ \eta A = 1$, donde $a : TA \longrightarrow A$. Además por la proposición 2.1.3, $\mathcal{T}$ es idempotente si, y sólo si, $F\eta$ es isomorfismo, con inverso εF. Como $a \circ \eta A = 1_A$, entonces $F(a \circ \eta A) = F(1_A) = 1_{FA}$, así $F(a \circ \eta A) = 1_{FA}$; luego por ser F funtor $F(a \circ \eta A) = Fa \circ F\eta A = 1_{FA}$. Por consiguiente $Fa \circ F\eta A = 1_{FA}$, lo que implica $Fa \circ F\eta A \circ \varepsilon FA = 1_{FA} \circ \varepsilon FA$; además $F\eta A \circ \varepsilon FA = 1_{FA}$ y por lo tanto $Fa \circ 1_{FA} = \varepsilon FA$, así $Fa = \varepsilon FA$. Por otra parte, como $a : TA \longrightarrow A$ entonces $Fa : FTA = FGFA \longrightarrow FA$ es adjunto de $\eta A \circ a$ y εFA es adjunto de 1_{GFA}, por lo tanto $\eta A \circ a = 1_{FA}$, luego ηA es invertible.
(i) $\Longrightarrow$ *(iv)* Por la ecuación (2.2) $\bar{L}s$ es invertible para algún $s \in S$. Si además $A \in \bar{\mathbf{A}}_S$, entonces $\bar{\mathbf{A}}_S(\bar{L}s, A) \cong \mathbf{A}(s, \bar{K}A)$ porque $\bar{L}$ y $\bar{K}$ son funtores adjuntos; por lo tanto $A = \bar{K}A$ es cerrado izquierdo para S.
(iv) $\Longrightarrow$ *(ii)* Si $\mathcal{T}$ es triple idempotente y A es cerrado izquierdo para S entonces $\eta A \in S$, por lo tanto ηA induce $\eta A^* : [TA, A] \cong [A, A]$; luego $TA \cong A$ y como $\eta A : A \longrightarrow TA$, entonces ηA es sección. ■

Teorema 2.1.12. *Si $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ es un triple idempotente en $\mathbf{A}$, entonces $\bar{\mathbf{A}}_S \cong \mathbf{A}^{\mathcal{T}}$ y $\bar{\mathbf{A}}_S$ es igual a la subcategoría plena de $\mathbf{A}$ que consiste de todos los objetos que son cerrados izquierdos para S.*

Demostración: Vamos a construir un isomorfismo entre $\bar{\mathbf{A}}_S$ y la categoría de $\mathcal{T}$-álgebras sobre $\mathbf{A}$. Ahora, recordemos que una $\mathcal{T}$-álgebra es una pareja

(A, a), donde $a : TA \longrightarrow A$ es un morfismo de $\mathbf{A}$ tal que para cada objeto A en $\mathbf{A}$, $a \circ \eta A = 1_A$ y $a \circ \mu A = a \circ Ta$. Por el lema anterior, si $a \circ \eta A = 1_A$, entonces ηA es invertible, así $a = \eta A^{-1}$. Además $a \circ \mu A = a \circ Ta$, luego $\eta A^{-1} \circ \mu A = \eta A^{-1} \circ Ta$, por lo tanto $\mu A = Ta$, así $\mu A = T(\eta A^{-1})$. Por otro lado, por el lema 2.1.11 los objetos de $\mathbf{A}$ que admiten la estructura de $\mathcal{T}$-álgebra, son precisamente los objetos de $\bar{\mathbf{A}}_S$ y la estructura de $\mathcal{T}$-álgebra en cada objeto es entonces única y está dada por ηA^{-1}. La naturalidad de η implica que todo morfismo de $\bar{\mathbf{A}}_S$ es un homomorfismo de álgebras y por lo tanto el isomorfismo entre $\bar{\mathbf{A}}_S$ y $\mathbf{A}^{\mathcal{T}}$ está dado. Además, nótese que este isomorfismo es el correcto ya que los funtores adjuntos $\bar{L}$ y $\bar{K}$ conectan a $\mathbf{A}$ con $\mathcal{T}$, de ahí que se requiera $\mu A \circ \eta TA = \mu A \circ T\eta A = 1_{TA}$. ■

2.2 Adjunciones de Galois.

H. Herrlich y M. Hušek [25, 1990] trabajaron con ciertas tranformaciones naturales que llamaron *Adjunciones de Galois*, más precisamente.

Definición 2.2.1. (F, G) es *Adjunción de Galois* si, y sólo si, existe $(\eta, \varepsilon) : F \dashv G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ adjunción tal que ηG es isomorfismo natural.

Observación. La definición de adjunción de Galois que dieron Herrlich y Hušek, piden además de lo anterior que εF también sea isomorfismo natural; sin embargo no es necesario ya que si uno lo es, entonces el otro también y recíprocamente como podrá verse en el siguiente teorema. (Equivalentemente uno podría pedir que $F\eta$ sea epimorfismo o $G\varepsilon$ sea monomorfismo o $G\varepsilon F$ sea isomorfismo natural, ver teorema 2.2.5).

Teorema 2.2.1. *Si* $(\eta, \varepsilon) : F \dashv G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ *es situación adjunta, entonces son equivalentes:*
(1) $\eta GF = GF\eta$.
(2) ηG *es isomorfismo natural.*
(3) $\varepsilon FG = FG\varepsilon$.
(4) εF *es isomorfismo natural.*

Demostración: (1) $\Longrightarrow$ (2) Por hipótesis F y G son funtores adjuntos, por consiguiente se cumplen las identidades triangulares, esto es $G\varepsilon \circ \eta G = 1_G$

y $\varepsilon F \circ F\eta = 1_F$. La primera identidad triangular nos dice que $G\varepsilon$ es inverso izquierdo de ηG, ahora probaremos que $G\varepsilon$ también es inverso derecho de ηG. Como η es una transformación natural, entonces el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} GFGB \arrow[r, "\eta GFGB"] \arrow[d, "G\varepsilon B"'] & GFGFGB \arrow[d, "GFG\varepsilon B"] \\ GB \arrow[r, "\eta GB"'] & GFGB \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
(\eta G \circ G\varepsilon)(B) &= \eta GB \circ G\varepsilon B && \text{por definición}\\
&= GFG\varepsilon B \circ \eta GFGB && \text{pues } \eta \text{ es transf. natural}\\
&= GFG\varepsilon B \circ (\eta GF)GB && \text{por asociatividad}\\
&= GFG\varepsilon B \circ (GF\eta)GB && \text{por hipótesis}\\
&= GF(G\varepsilon B) \circ GF(\eta GB) && \text{por asociatividad}\\
&= GF(G\varepsilon B \circ \eta GB) && \text{pues } GF \text{ es funtor}\\
&= GF(1_{GB}) && \text{por la identidad triangular}\\
&= 1_{GFGB} && \text{pues } GF \text{ es funtor.}
\end{aligned}$$

Así $G\varepsilon$ es inverso derecho de ηG. Por lo tanto ηG es isomorfismo natural.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Supongamos que ηG es isomorfismo natural, entonces $G\varepsilon$ es el inverso de ηG.

$$\begin{aligned}
\varepsilon FGB &= \varepsilon FGB \circ 1_{FGB} && \text{porque } 1_{FGB} \text{ es funtor}\\
&= \varepsilon FGB \circ F(1_{GB}) && \text{por definición}\\
&= \varepsilon FGB \circ F(\eta GB \circ G\varepsilon B) && \text{por hipótesis}\\
&= \varepsilon FGB \circ (F\eta GB \circ FG\varepsilon B) && \text{pues } F \text{ es funtor}\\
&= (\varepsilon FGB \circ F\eta GB) \circ FG\varepsilon B && \text{por asociatividad}\\
&= (1_{FGB}) \circ FG\varepsilon B && \text{pues } \varepsilon F \circ F\eta = 1_F\\
&= FG\varepsilon B && \text{por definición.}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\varepsilon FG = FG\varepsilon$.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Es análogo a (1), pues existen adjunciones entre $\mathbf{A}^{op}$ y $\mathbf{B}^{op}$. Por lo tanto, si $\varepsilon FG = FG\varepsilon$, entonces εF es isomorfismo natural.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Supongamos que εF es isomorfismo natural, entonces existe $F\eta$ inverso de εF.

$$\begin{aligned}
\eta GFA &= \eta GFA \circ 1_{GFA} && \text{porque } 1_{GFA} \text{ es funtor}\\
&= \eta GFA \circ G(1_{FA}) && \text{por definición}\\
&= \eta GFA \circ G(\varepsilon FA \circ F\eta A) && \text{por hipótesis}\\
&= \eta GFA \circ (G\varepsilon FA \circ GF\eta A) && \text{pues } G \text{ es funtor}\\
&= (\eta GFA \circ G\varepsilon FA) \circ GF\eta A && \text{por asociatividad}\\
&= (G\varepsilon FA \circ \eta GFA) \circ GF\eta A && \text{pues } \varepsilon F \text{ es isomorfismo}\\
&= (1_{GFA}) \circ GF\eta A && \text{pues } G\varepsilon \circ \eta G = 1_G\\
&= GF\eta A && \text{por definición.}
\end{aligned}$$

Por consiguiente $\eta GF = GF\eta$. ■

Una consecuencia inmediata del teorema anterior se resume en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.2. *Si $(\eta, \varepsilon) : F \dashv G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ es situación adjunta, entonces son equivalentes:*
(1) (F, G) es adjunción de Galois.
(2) $\eta GF = GF\eta$.
(3) ηG es isomorfismo natural.
(4) $\varepsilon FG = FG\varepsilon$.
(5) εF es isomorfismo natural.

Observación. Si comparamos la proposición 2.1.4 y el teorema anterior, nos damos cuenta que existe una relación muy estrecha entre los triples idempotentes y las adjunciones Galois; por lo tanto una pregunta natural es, ¿Qué relación guardan los triples idempotentes y las adjunciones de Galois?. Se puede ver que ambas cosas coinciden, como podrá observarse en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.3. *Si $(\eta, \varepsilon) : F \dashv G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ es situación adjunta, entonces son equivalentes:*
(1) $\mathcal{T} = (GF, \eta, G\varepsilon F)$ es triple idempotente.
(2) $\eta GF = GF\eta$.

(3) (F, G) *es adjunción de Galois.*
(4) ηG *es isomorfismo natural.*
(5) $\varepsilon FG = FG\varepsilon$.
(6) εF *es isomorfismo natural.*

Demostración: Es inmediato por la proposición 2.1.4 y el teorema 2.2.2 ∎

Ejemplo. Sea R un anillo y M, R en R-**mod**. Si $\mathbf{A} = \mathbf{B} = R$-**mod**, entonces existe un par de funtores adjuntos $F = 1_M$ y $G\_ = R \underset{R}{\otimes} \_$ con unidad $\eta M : M \longrightarrow R \underset{R}{\otimes} M$, $m \mapsto 1 \otimes m$ y counidad $\varepsilon M : R \underset{R}{\otimes} M \longrightarrow M$, $r \otimes m \mapsto rm$ tal que η es isomorfismo natural. Por lo tanto, $(GF, \eta, G\varepsilon F)$ es un triple idempotente y por consiguiente $(1_M, R \underset{R}{\otimes} M)$ es adjunción de Galois. Lo que significa $R \underset{R}{\otimes} M \cong M$.

A. Aparicio [26, 1993] demostró los siguientes resultados, que son de gran utilidad para obtener más ejemplos de adjunciones de Galois.

Proposición 2.2.4. *Si* (F, G) *es adjunción de Galois, entonces* (G^{op}, F^{op}) *es adjunción de Galois.*

Demostración: [26, proposición 3.2,p.37] ∎

Teorema 2.2.5. *Si* $(\eta, \varepsilon) : F \dashv G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ *es situación adjunta, entonces son equivalentes:*
(1) (F, G) *es adjunción de Galois.*
(2) $F\eta$ *es isomorfismo natural.*
(3) ηG *es epimorfismo.*
(4) $F\eta$ *es epimorfismo.*
(5) $\eta GF = GF\eta$.

Demostración: [26, proposición 3.2,p.38] ∎

Teorema 2.2.6. *Sea* $(\eta, \varepsilon) : F \dashv G : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *situación adjunta. Si* η *es epimorfismo o* G *es pleno, entonces* (F, G) *es adjunción de Galois.*

Demostración: [26, teorema 3.5,p.40] ∎

Observación. El ejemplo que aparece después de la proposición 1.1.1 induce un triple que no es idempotente, ya que el funtor $G\_ = \text{Hom}_S(M, \_)$ no es pleno; sin embargo si el módulo M es proyectivo entonces el triple inducido es idempotente y por lo tanto $(M \underset{R}{\otimes} \_, \text{Hom}_S(M, \_))$ es adjunción de Galois.

El teorema anterior es una versión análoga a la de la proposición 2.1.6 como era de esperarse.

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ categorías. A cada funtor $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ le asociamos la clase $\mathcal{L}(F)$ de morfismos de $\mathbf{A}$ que son invertibles por F y la llamamos $F-$*equivalencias*, esto es; $\mathcal{L}(F) = \{f \in \mathbf{A} \text{ tal que } Ff \text{ es isomorfismo}\}$. Además, si A es un objeto de $\mathbf{A}$, entonces denotamos con $\mathcal{D}(F)$ a la clase de objetos en $\mathbf{B}$ que son isomorfos a FA; y usamos la misma letra para denotar a la clase de objetos en una categoría y la subcategoría plena con estos objetos. Así

$$\mathbf{A} \xrightarrow{F} \mathcal{D}(F) \xrightarrow{K} \mathbf{B} \quad \text{tal que} \quad K \circ F = F, \tag{2.3}$$

es la factorización canónica agrandada de F, donde K es la inclusión. Además por la sección 1.1, un triple $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ en $\mathbf{A}$, consiste de un funtor $T : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ y dos transformaciones naturales $\eta : 1_{\mathbf{A}} \longrightarrow T$, $\mu : T^2 \longrightarrow T$ tales que $\mu \circ T\eta = 1_T = \mu \circ \eta T$ y $\mu \circ \mu T = \mu \circ T\mu$. Luego por la proposición 1.1.1, si $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ y $G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ es un par de funtores adjuntos con η unidad y ε counidad, entonces $\mathcal{T} = (GF, \eta, G\varepsilon F)$ es un triple. Inversamente, todo triple es inducido por algún par de funtores adjuntos, el cual no está determinado en general de manera única. Es claro que entre todos los pares de funtores adjuntos inducidos por un triple dado, existe uno inicial dado por Kleisli y otro terminal dado por Eilenberg-Moore (teorema 1.1.3). Una consecuencia inmediata del capítulo anterior, es el siguiente teorema.

Teorema 2.2.7. *Si $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ es un triple en $\mathbf{A}$, entonces son equivalentes.*
(i) $\mu : T^2 \longrightarrow T$ *es isomorfismo natural.*
(ii) Para cada objeto A de $\mathbf{A}$, $\eta A \in \mathcal{L}(T)$.
(iii) $T\eta = \eta T$.

Demostración: Es claro por la proposición 2.1.1 y el lema 2.1.11. ∎

Observación. Otras caracterizaciones de triples idempotentes se dieron en la sección 2.1. Por otra parte, si $\mathcal{T}$ es idempotente, entonces la factorización

$$\mathbf{A} \xrightarrow{T} \mathcal{D}(T) \xrightarrow{K} \mathbf{A} \quad \text{tal que} \quad K \circ T = T, \tag{2.4}$$

induce un par de funtores adjuntos dado por $\mathcal{T}$. Además, la subcategoría plena $\mathcal{D}(T)$ es isomorfa a la categoría de Eilenberg-Moore $\mathbf{A}^{\mathcal{T}}$ de $\mathcal{T}$ (teorema 2.1.12) y es equivalente a la categoría de Kleisli $\mathbf{A}_{\mathcal{T}}$ de $\mathcal{T}$ por [16,corolario 2.3]. De hecho, $\mathbf{A}_{\mathcal{T}}$ es isomorfa a la categoría de fracciones de $\mathbf{A}$ con respecto a la clase $\mathcal{L}(T)$ (teorema 2.1.10).

Capítulo 3

LOCALIZACIÓN Y PAREJAS ORTOGONALES.

3.1 Funtores de localización y parejas ortogonales.

Definición 3.1.1. Sean $\mathbf{A}$ una categoría y $\mathcal{W}$ una clase de morfismos en $\mathbf{A}$. Un objeto B en $\mathbf{A}$ es $\mathcal{W}$-*local* si cada morfismo $w : X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{W}$ induce una biyección $\mathrm{Hom}\,(Y, B) \cong \mathrm{Hom}\,(X, B)$. Una $\mathcal{W}$-*localización* de un objeto A en $\mathbf{A}$ es un morfismo $w : A \longrightarrow B$ con B $\mathcal{W}$-local y $w \in \mathcal{W}$.

Se puede ver que cualesquiera dos $\mathcal{W}$-localizaciones de A son isomorfas. Además, una $\mathcal{W}$-localización $w : A \longrightarrow B$ satisface cada una de las siguientes condiciones universales.
(i) w es inicial entre todos los morfismos $f : A \longrightarrow X$ con X $\mathcal{W}$-local.
(ii) w es terminal entre todos los morfismos $f : A \longrightarrow X$ con $f \in \mathcal{W}$.
También, si A es $\mathcal{W}$-local y $w : A \longrightarrow B$ es una $\mathcal{W}$-localización, entonces w es isomorfismo. Ahora, supongamos que cada objeto de $\mathbf{A}$ tiene una $\mathcal{W}$-localización, entonces existe un funtor $T : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ y una transformación natural $\eta : 1 \longrightarrow T$ tal que $\eta A : A \longrightarrow TA$ es una $\mathcal{W}$-localización, para cada A en $\mathbf{A}$. Claramente (T, η) es único excepto por isomorfismo natural, a (T, η) se le llama el *funtor* $\mathcal{W}$-*localización*. Cuando $T : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ es un funtor y $\eta : 1 \longrightarrow T$ es una transformación natural, con $\eta TA = T\eta A$ y ηTA

es isomorfismo natural, entonces T es *idempotente*. Es claro que (T, η) es idempotente. Recíprocamente, todo funtor idempotente (T, η) en $\mathbf{A}$ puede obtenerse como $\mathcal{W}$-localización, donde $\mathcal{W}$ consiste de todos los morfismos $f : A \longrightarrow B$ en $\mathbf{A}$ tales que Tf es isomorfismo.

Definición 3.1.2. Sean $\mathbf{A}$ una categoría y A, B objetos de $\mathbf{A}$. Un morfismo $f : A \longrightarrow B$ y un objeto X de $\mathbf{A}$, se llaman *ortogonales* si la función $f^* = \mathbf{A}(f, X) : \mathbf{A}(B, X) \longrightarrow \mathbf{A}(A, X)$ es una biyección, es decir; para toda $k : A \longrightarrow X$ existe un único $g : B \longrightarrow X$ tal que $k = g \circ f$, esta situación la denotamos con $f \perp X$.

$\mathbf{A}(X, Y)$ es el conjunto de morfismos entre los objetos X, Y de $\mathbf{A}$. Para la clase de morfismos $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^{\perp}$ denota la clase de objetos ortogonales a cada f en $\mathcal{L}$; esto es $\mathcal{L}^{\perp} = \{X \in \mathbf{A} \mid X \perp f \text{ para cada } f \in \mathcal{L}\}$. Los objetos en $\mathcal{L}^{\perp}$ se llaman *objetos cerrados izquierdos* para $\mathcal{L}$ (ver lema 2.1.11 y teorema 2.1.12). Análogamente para la clase de objetos $\mathcal{D}$, denotamos con $\mathcal{D}^{\perp}$ a la clase de morfismos ortogonales a cada $X \in \mathcal{D}$.

Definición 3.1.3. Una *pareja ortogonal* en $\mathbf{A}$, es una pareja $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ que consiste de una clase de morfismos $\mathcal{L}$ y una clase de objetos $\mathcal{D}$ tales que $\mathcal{L}^{\perp} = \mathcal{D}$, $\mathcal{D}^{\perp} = \mathcal{L}$.

A continuación enunciamos un resultado de J.F. Adams [1] que permite dar varios ejemplos de parejas ortogonales.

Proposición 3.1.1. *Si $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ es un triple idempotente en $\mathbf{A}$, entonces $(\mathcal{L}(T), \mathcal{D}(T))$ es una pareja ortogonal.*

Demostración: [1, proposición 2.10,p.20] ■

Con este resultado obtenemos varios ejemplos, ya que triples idempotentes hay muchos.

Observación. Por el teorema 2.1.2 si $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ es un triple idempotente en $\mathbf{A}$, entonces las clases $\mathcal{L} = \{f : A \longrightarrow B \mid Tf : TA \cong TB\}$, $\mathcal{D} = \{X \mid \eta X : X \cong TX\}$ forman una pareja ortogonal. Por otra parte, dada una pareja ortogonal $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ en $\mathbf{A}$, existe un triple idempotente $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$

tal que $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}$ y $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}$ si, y sólo si para cada objeto X existe un morfismo $\varphi : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{L}$ con Y en $\mathcal{D}$; en este caso T se llama *funtor de localización* asociado con $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ y los objetos en $\mathcal{D}$ son *T-locales.*

Lema 3.1.2. *Si $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ es funtor adjunto izquierdo de $G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$, entonces $\mathcal{L}(F) = \mathcal{D}(G)^{\perp}$.*

Demostración: Si $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo de $\mathbf{A}$ y X es un objeto de $\mathbf{B}$, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}(B, GX) \arrow[r, "\mathbf{A}(f,GX)"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathbf{A}(A, GX) \arrow[d, "\cong"] \\ \mathbf{B}(FB, X) \arrow[r, "\mathbf{B}(Ff,X)"'] & \mathbf{B}(FA, X) \end{tikzcd}$$

Claramente los morfismos verticales son isomorfismos porque F y G son funtores adjuntos. Además, los morfismos horizontales son los inducidos por f, así el diagrama conmuta y por lo tanto, $\mathcal{L}(F) = \mathcal{D}(G)^{\perp}$. ■

Teorema 3.1.3. *Sea $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ un triple en $\mathbf{A}$. Si $(\eta, \varepsilon) : F \dashv G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ es un par de funtores adjuntos que induce a $\mathcal{T}$, entonces $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(F)$, $\mathcal{D}(T)^{\perp\perp} = \mathcal{D}(G)^{\perp\perp}$ y $\mathcal{L}(T) = \mathcal{D}(T)^{\perp}$.*

Demostración: Como $T = GF$ entonces $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(G)$ y $\mathcal{L}(F) \subseteq \mathcal{L}(T)$. Ahora, supongamos que $f : A \longrightarrow B$ es T-equivalencia, entonces tomando $\psi = (Tf)^{-1} \circ \eta B$ obtenemos un diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta A"'] & B \arrow[d, "\eta B"] \arrow[dl, dotted, "\psi"'] \\ TA \arrow[r, "Tf"'] & TB \end{tikzcd}$$

que corresponde bajo la adjunción al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "1"'] & FB \arrow[d, "1"] \arrow[dl, dotted, "\varphi"'] \\ FA \arrow[r, "Ff"'] & FB \end{tikzcd}$$

Lo que demuestra que f es F-equivalencia y por lo tanto, $\mathcal{L}(T) \subseteq \mathcal{L}(F)$, así $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(F)$. Análogamente, si $f : A \longrightarrow B$ es ortogonal a todos los objetos en la imagen de T, entonces existe un único morfismo $\psi : B \longrightarrow TA$ tal que $\eta A = \psi \circ f$. Por un lado $Tf \circ \psi \circ f = Tf \circ \eta A = \eta B \circ f$, luego el primer diagrama conmuta. Por otro lado, como el segundo diagrama conmuta entonces $\mathcal{D}(T)^{\perp} \subseteq \mathcal{L}(F) = \mathcal{L}(T)$, así $\mathcal{D}(T)^{\perp} \subseteq \mathcal{L}(T)$. Además, por el lema anterior $\mathcal{D}(G)^{\perp} = \mathcal{L}(F)$; lo que implica $\mathcal{D}(G)^{\perp\perp} = \mathcal{L}(F)^{\perp} = \mathcal{L}(T)^{\perp}$. Así $\mathcal{D}(G)^{\perp\perp\perp} = \mathcal{L}(T)^{\perp\perp}$ y por lo tanto, $\mathcal{L}(T) \subseteq \mathcal{L}(T)^{\perp\perp} = \mathcal{D}(G)^{\perp\perp\perp} = \mathcal{D}(G)^{\perp} \subseteq \mathcal{D}(T)^{\perp}$, luego $\mathcal{L}(T) \subseteq \mathcal{D}(T)^{\perp}$ y por consiguiente $\mathcal{L}(T) = \mathcal{D}(T)^{\perp}$. Análogamente $\mathcal{D}(T)^{\perp\perp} = \mathcal{D}(G)^{\perp\perp}$. ∎

Como consecuencia del teorema anterior se tiene $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{L}(T)^{\perp}$, esto es, para algún triple $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ los objetos de la forma TX (o isomorfos a estos) son ortogonales a todas las T-equivalencias, pero $\mathcal{L}(T)^{\perp}$ podría ser muy grande si el triple $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ no es idempotente. Por supuesto nuestro interés es determinar la clase $\mathcal{L}(T)^{\perp}$ en general.

Proposición 3.1.4. *Sea $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ un triple idempotente en $\mathbf{A}$. Si para cada objeto X de $\mathbf{A}$, $\eta X : X \longrightarrow TX$ es sección, entonces $X \in \mathcal{L}(T)^{\perp}$.*

Demostración: Es inmediato por el lema 2.1.11. ∎

Es natural preguntarse, si en todo triple $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ se tiene que la clase $\mathcal{L}(T)^{\perp}$, coincide con la clase de objetos X tales que $\eta X : X \longrightarrow TX$ es sección. Esta clase está contenida en $\mathcal{L}(T)^{\perp}$ por la proposición anterior y contiene a $\mathcal{D}(T)$ porque $\mu \circ \eta T = 1_T$. Sin embargo, el siguiente ejemplo demuestra que no es el caso.

Ejemplo. Sea $\mathbf{A}$ la categoría de homotopía punteada de espacios topológicos conexos por trayectorias, que tienen el mismo tipo de homotopía de un CW-complejo y $\mathbf{B}$ la subcategoría plena de los espacios simplemente conexos. Sea $F = \Sigma$ el funtor suspensión reducido y $G = \Omega$ el funtor espacio de lazos, entonces $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ y $G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ forman un par de funtores adjuntos. Luego, si $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ es el triple inducido por F y G, entonces la clase $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(F)$ es precisamente la clase de equivalencia de homología entera. Por lo tanto, $\mathcal{L}(T)^{\perp}$ es la clase de espacios $H_*(\ ;\mathbb{Z})$-locales de Bousfield conexos por trayectorias. Ahora, si X es un $K(G, 1)$ donde G es un grupo $H\mathbf{Z}$-local no conmutativo, entonces $X \in \mathcal{L}(T)^{\perp}$ y el morfismo natural $\eta X : X \longrightarrow \Omega\Sigma X$ no es sección (pues de lo contrario la identidad de G se factorizaría por medio de $\pi_1(\Omega\Sigma X)$ que es conmutativo, lo que contradice la elección de G).

Uno puede preguntarse además, ¿cuándo la igualdad $\mathcal{L}(T)^{\perp} = \mathcal{D}(T)$ implica que el triple $\mathcal{T}$ es idempotente?. En otras palabras, ¿si $(\mathcal{L}(T), \mathcal{D}(T))$ es una pareja ortogonal, entonces $\mathcal{T}$ es idempotente?. La respuesta es no, como puede observarse en el siguiente contraejemplo.

Ejemplo. Sea $\mathbf{A}$ la categoría de los conjuntos infinitos numerables y $\mathbf{B}$ la categoría de los espacios vectoriales infinitos numerables sobre el campo $\mathbf{Z}_2$. Sea $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ el funtor que asigna a cada conjunto X el espacio vectorial con base X y $G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ el funtor que olvida, entonces F es adjunto izquierdo de G. Sea $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ el triple inducido por F y G, entonces la clase $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(F)$ es la clase de todas las biyecciones en $\mathbf{A}$. Por lo tanto, cualesquiera dos objetos de $\mathbf{A}$ son isomorfos; así $\mathcal{D}(T) = \mathbf{A} = \mathcal{L}(T)^{\perp}$. Por otro lado, para cada conjunto X, el morfismo $\eta X : X \longrightarrow TX$ es estrictamente inyectivo y por consiguiente $\mathcal{T}$ no es idempotente.

3.2 Extensión de triples.

Antes de definir qué es una extensión entre triples, es conveniente decir lo que es un morfismo de triples. A continuación lo haremos y veremos un resultado que usaremos en la proposición 3.3.2.

Definición 3.2.1. Si $\mathcal{T}' = (T', \eta', \mu')$ y $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ son triples en $\mathbf{A}$, entonces un *morfismo de triples* $\alpha : \mathcal{T}' \longrightarrow \mathcal{T}$ es una transformación natural $\alpha : T' \longrightarrow T$ tal que

$$(i)\ \eta = \alpha \circ \eta' \ , \quad (ii) \quad \mu \circ \alpha^2 = \alpha \circ \mu'. \tag{3.1}$$

Es decir, los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} 1_{\mathbf{A}} \arrow[r, "\eta'"] \arrow[dr, "\eta"'] & T' \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dl, phantom, "(1)"] \\ & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T'^2 \arrow[r, "\alpha^2"] \arrow[d, "\mu'"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T' \arrow[r, "\alpha"'] & T \end{tikzcd}$$

Además por ser α una transformación natural, se tiene lo siguiente $\alpha^2 = \alpha \circ \alpha = T\alpha \circ \alpha T' = \alpha T \circ T'\alpha$; así la ecuación (3.1 (ii)) se convierte en

$$\mu \circ \alpha T \circ T'\alpha = \alpha \circ \mu' = \mu \circ T\alpha \circ \alpha T'. \tag{3.2}$$

La siguiente proposición da un método para construir morfismos de triples.

Proposición 3.2.1. *Sean $\mathcal{T}' = (T', \eta', \mu')$ y $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ triples en $\mathbf{A}$. Si $\sigma : T'T \longrightarrow T$ es una transformación natural tal que (3) y (4) conmutan,*

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\eta' T"] \arrow[dr, "1_T"'] & T'T \arrow[d, "\sigma"] \arrow[dl, phantom, "(3)"] \\
 & T
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
T'^2T \arrow[r, "\mu' T"] \arrow[d, "T'\sigma"'] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & T'T \arrow[d, "\sigma"] \\
T'T \arrow[r, "\sigma"'] & T
\end{tikzcd}$$

entonces $\alpha = \sigma \circ T'\eta : T' \longrightarrow T$ es un morfismo de triples.

Demostración: Para ver que $\sigma \circ T'\eta$ es un morfismo de triples, hay que probar (*i*) $\eta = \sigma \circ T'\eta \circ \eta'$ y (*ii*) $(\sigma \circ T'\eta) \circ \mu' = \mu \circ (\sigma \circ T'\eta)T \circ T'(\sigma \circ T'\eta)$. La condición (ii) se reduce a verificar que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
T'^2 \arrow[rr, "\mu'"] \arrow[dr, "T'^2\eta"] \arrow[dd, "T'^2\eta"'] & & T' \arrow[dr, "T'\eta"] \arrow[d, phantom, "(1)"] & & \\
 & T'^2T \arrow[rr, "\mu' T"] \arrow[d, "T'^2T\eta"] \arrow[dl, phantom, "(2)"] \arrow[drr, phantom, "(3)"] & & T'T \arrow[d, "T'T\eta"'] \arrow[dr, "\sigma"] & \\
T'^2T \arrow[r, "T'^2T\eta"] \arrow[d, "T'\sigma"'] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & T'^2T^2 \arrow[rr, "\mu' T^2"] \arrow[d, "T'\sigma T"] \arrow[drr, phantom, "(5)"] & & T'T^2 \arrow[d, "\sigma T"'] \arrow[r, phantom, "(6)"] & T \arrow[dl, "T\eta"'] \arrow[d, "1"] \arrow[dl, phantom, "(7)"] \\
T'T \arrow[r, "T'T\eta"'] & T'T^2 \arrow[rr, "\sigma T"'] & & T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T
\end{tikzcd}$$

Primero demostremos que (i) se cumple, para ello consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
1_{\mathbf{A}} \arrow[r, "\eta'"] \arrow[d, "\eta"'] & T' \arrow[d, "T'\eta"] \\
T \arrow[r, "\eta' T"] \arrow[dr, "1_T"'] & T'T \arrow[d, "\sigma"] \\
 & T
\end{tikzcd}$$

El rectángulo conmuta porque η' es una transformación natural. Por hipótesis, el triángulo también conmuta, así $\sigma \circ T'\eta \circ \eta' = 1_T \circ \eta = \eta$. Por lo tanto la primera condición se cumple. Ahora, veamos que la segunda condición también se cumple. Para esto es suficiente probar que $(\sigma \circ T'\eta) \circ \mu' = \mu \circ \sigma T \circ T'T\eta \circ T'\sigma \circ T'^2\eta$ (ya que T y T' son funtores).

Por un lado, como μ' es una transformación natural, entonces los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} T'^2A \arrow[r, "\mu' A"] \arrow[d, "T'^2 f"'] & T'A \arrow[d, "T'f"] \\ T'^2B \arrow[r, "\mu' B"'] & T'B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T'^2A \arrow[r, "\mu' A"] \arrow[d, "T'^2 \eta"'] & T'A \arrow[d, "T'\eta"] \\ T'^2TA \arrow[r, "\mu' TA"'] & T'TA \end{tikzcd}$$

Por lo tanto (1) conmuta, análogamente (3) conmuta. Es claro que (2) conmuta porque la identidad es una tranformación natural.
Por otro lado, como σ es una transformación natural, entonces los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} T'TA \arrow[r, "\sigma A"] \arrow[d, "T'Tf"'] & TA \arrow[d, "Tf"] \\ T'TB \arrow[r, "\sigma B"'] & TB \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T'TA \arrow[r, "\sigma A"] \arrow[d, "T'T\eta"'] \arrow[dr, phantom, "*"] & TA \arrow[d, "T\eta"] \\ T'TTA \arrow[r, "\sigma TA"'] & TTA \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} T'\sigma T \circ T'^2T\eta &= T'(\sigma T \circ T'T\eta) && \text{pues } T' \text{ es funtor} \\ &= T'(T\eta \circ \sigma) && \text{porque } * \text{ conmuta} \\ &= T'T\eta \circ T'\sigma && \text{pues } T' \text{ es funtor.} \end{aligned}$$

Así $T'\sigma T \circ T'^2T\eta = T'T\eta \circ T'\sigma$ y por consiguiente (4) conmuta.
Ahora, veamos que (5) conmuta.

$$\begin{aligned} \sigma T \circ \mu TT &= (\sigma \circ \mu T)T && \text{pues } T \text{ es funtor} \\ &= (\sigma \circ T'\sigma)T && \text{por hipótesis} \\ &= \sigma T \circ T'\sigma T && \text{pues } T \text{ es funtor.} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\sigma T \circ \mu T^2 = \sigma T \circ T'\sigma T$, así (5) conmuta. Es claro que (6) conmuta porque σ es una transformación natural. Además, como T es triple entonces $\mu \circ T\eta = 1_T$, es decir (7) conmuta. Por consiguiente el diagrama grande conmuta, así $\sigma \circ T'\eta \circ \mu' = \mu \circ \sigma T \circ T'T\eta \circ T'\sigma \circ T'^2\eta$. ∎

Definición 3.2.2. Sean $\mathbf{A}$ una categoría, $\mathbf{B}$ subcategoría plena de $\mathbf{A}$ y $K : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ la inclusión. Si $\mathcal{T}' = (T', \eta', \mu')$ es un triple en $\mathbf{B}$ y $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ es un triple en $\mathbf{A}$, se dice que $\mathcal{T}$ *extiende* a $\mathcal{T}'$ si existe $\phi : KT' \longrightarrow TK$ equivalencia natural tal que

$$(i)\ \eta K = \phi \circ K\eta' \ , \quad (ii) \quad \phi \circ K\mu' = \mu K \circ T\phi \circ \phi T'. \tag{3.3}$$

La ecuación (3.3) quiere decir que ϕ es compatible con la estructura del triple. Además, si T' es idempotente, entonces (ii) es consecuencia de (i) como puede verse a continuación.

Proposición 3.2.2. *Si $\mathcal{T}' = (T', \eta', \mu')$ es un triple idempotente en $\mathbf{B}$ tal que $\eta K = \phi \circ K\eta'$, entonces*

$$\phi \circ K\mu' = \mu K \circ T\phi \circ \phi T'. \tag{3.4}$$

Demostración: Como ϕ es una transformación natural, entonces los siguientes diagramas conmutan.

$$\begin{tikzcd} KT'A \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[d, "KT'f"'] & TKA \arrow[d, "TKf"] \\ KT'B \arrow[r, "\phi_B"'] & TKB \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} KT'A \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[d, "KT'\eta'A"'] & TKA \arrow[d, "TK\eta'A"] \\ KT'T'A \arrow[r, "\phi T'A"'] & TKT'A \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\phi \circ K\mu' &= 1_{TK} \circ \phi \circ K\mu' && \text{porque } 1_{TK} \text{ es funtor} \\
&= (\mu \circ T\eta)K \circ \phi \circ K\mu' && \text{pues } \mathcal{T} \text{ es triple} \\
&= \mu K \circ T\eta K \circ \phi \circ K\mu' && \text{por ser } K \text{ funtor} \\
&= \mu K \circ T(\phi \circ K\eta') \circ \phi \circ K\mu' && \text{por hipótesis} \\
&= \mu K \circ T\phi \circ TK\eta' \circ \phi \circ K\mu' && \text{pues } T \text{ es funtor} \\
&= \mu K \circ T\phi \circ (TK\eta' \circ \phi) \circ K\mu' && \text{por asociatividad} \\
&= \mu K \circ T\phi \circ (\phi T' \circ KT'\eta') \circ K\mu' && \text{pues } \phi \text{ es transf. natural} \\
&= \mu K \circ T\phi \circ \phi T' \circ (KT'\eta' \circ K\mu') && \text{por asociatividad} \\
&= \mu K \circ T\phi \circ \phi T' \circ K(T'\eta' \circ \mu') && \text{pues } K \text{ es funtor} \\
&= \mu K \circ T\phi \circ \phi T' \circ K(1_{T'}) && \text{por hipótesis} \\
&= \mu K \circ T\phi \circ \phi T' \circ (1_{KT'}) && \text{porque } f(1) = 1_f \\
&= \mu K \circ T\phi \circ \phi T' && \text{porque } 1_K \text{ es funtor.}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\phi \circ K\mu' = \mu K \circ T\phi \circ \phi T'$. ∎

3.3 Extensión de parejas ortogonales.

Definición 3.3.1. Sean (s,d) una pareja ortogonal en $\mathbf{B}$ y $(\mathcal{L},\mathcal{D})$ una pareja ortogonal en $\mathbf{A}$, decimos que $(\mathcal{L},\mathcal{D})$ *extiende* a (s,d) si $s \subseteq \mathcal{L}$ y $d \subseteq \mathcal{D}$.

Proposición 3.3.1. *Si $\mathbf{B}$ es subcategoría plena de $\mathbf{A}$, con $\mathcal{T}' = (T', \eta', \mu')$ un triple idempotente en $\mathbf{B}$ y $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ un triple idempotente en $\mathbf{A}$, entonces $\mathcal{T}$ extiende a $\mathcal{T}'$ si, y sólo si, la pareja ortogonal $(\mathcal{L}(T), \mathcal{D}(T))$ extiende a la pareja ortogonal $(\mathcal{L}(T'), \mathcal{D}(T'))$.*

Demostración: Es claro porque $\mathbf{B}$ es subcategoría plena de $\mathbf{A}$ y $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ son triples idempotentes. ∎

Definición 3.3.2. Si $(\mathcal{L}_1,\mathcal{D}_1)$ y $(\mathcal{L}_2,\mathcal{D}_2)$ son parejas ortogonales en $\mathbf{A}$, entonces

$$(\mathcal{L}_1,\mathcal{D}_1) \leq (\mathcal{L}_2,\mathcal{D}_2) \iff \mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2. \tag{3.5}$$

Por lo tanto, la colección de todas la extensiones de $(\mathcal{L},\mathcal{D})$ induce un orden parcial.

Proposición 3.3.2. *Si $\mathcal{T}' = (T', \eta', \mu')$ y $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ son triples idempotentes en $\mathbf{A}$, entonces $(\mathcal{L}(T), \mathcal{D}(T)) \leq (\mathcal{L}(T'), \mathcal{D}(T'))$ si, y sólo si, existe un único morfismo de triples $\alpha : T' \longrightarrow T$.*

Demostración: $\Longrightarrow$) Supongamos que $(\mathcal{L}(T), \mathcal{D}(T)) \leq (\mathcal{L}(T'), \mathcal{D}(T'))$, entonces $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(T')$. Por lo tanto, para cada objeto A de $\mathbf{A}$ existe un único diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta' A"] \arrow[dr, "\eta A"'] & T'A \arrow[d, "\alpha A"] \\ & TA \end{tikzcd}$$

con $\eta A = \alpha A \circ \eta' A$, porque $\eta' A \in \mathcal{L}(T')$ y $TA \in \mathcal{D}(T')$. La compatibilidad de α con μ y μ' se sigue del hecho de que T' es idempotente y de la proposición 3.2.2, esto es, $\alpha \circ \mu' = \mu \circ T\alpha \circ \alpha T'$. Por lo tanto $\alpha : T' \longrightarrow T$ es morfismo de triples.

$\Longleftarrow$) Veamos que $(\mathcal{L}(T), \mathcal{D}(T)) \leq (\mathcal{L}(T'), \mathcal{D}(T'))$. Es suficiente probar $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(T')$. Por hipótesis, existe un único morfismo de triples $\alpha : T' \longrightarrow T$ y por consiguiente $\alpha : T' \longrightarrow T$ es una transformación natural tal que $\eta = \alpha \circ \eta'$ y $\alpha \circ \mu' = \mu \circ T\alpha \circ \alpha T'$. Por un lado, si $A \in \mathcal{D}(T)$ entonces $\eta A : A \longrightarrow TA$ es isomorfismo y por el diagrama anterior αA es epimorfismo. Por otro lado, si T' es idempotente, entonces $T'\eta' A = \eta' T' A$ es isomorfismo. Además como $\eta A = \alpha A \circ \eta' A$, entonces $T'\eta A = T'(\alpha A \circ \eta' A) = T'\alpha A \circ T'\eta' A$, así $T'\eta A = T'\alpha A \circ T'\eta' A$. Por lo tanto $T'\alpha A = T'\eta A \circ T'\eta' A^{-1}$, luego $T'\alpha A$ es isomorfismo ya que cada uno lo es. Ahora, por hipótesis $\mathcal{T}'$ es triple idempotente en $\mathbf{A}$ y por consiguiente η' es una tranformación natural, así los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta' A"'] & B \arrow[d, "\eta' B"] \\ T'A \arrow[r, "T'f"'] & T'B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T'A \arrow[r, "\alpha A"] \arrow[d, "\eta' T' A"'] & TA \arrow[d, "\eta' TA"] \\ T'T'A \arrow[r, "T'\alpha A"'] & T'TA \end{tikzcd}$$

Luego $T'\alpha A \circ \eta' T' A = \eta' TA \circ \alpha A$. Por lo tanto $T'\alpha A \circ \eta' T' A$ es isomorfismo, ya que cada uno lo es. Luego αA es sección y como αA es epimorfismo, entonces αA es isomorfismo. Así lo que hemos visto es que ηA y αA son isomorfismos y como $\eta A = \alpha A \circ \eta' A$, entonces $\eta' A$ es isomorfismo. Luego $A \in \mathcal{D}(T')$ y por lo tanto, $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(T')$. ∎

Observación. Sea $\mathbf{B}$ subcategoría plena de $\mathbf{A}$ y (s, d) una pareja ortogonal en $\mathbf{B}$. Por [8, proposición 2.2] sabemos que si $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ es una extensión de (s, d) en $\mathbf{A}$, entonces

$$(d^{\perp}, d^{\perp\perp}) \leq (\mathcal{L}, \mathcal{D}) \leq (s^{\perp}, s^{\perp\perp}), \tag{3.6}$$

donde la extensión en $\mathbf{A}$ es con respecto al orden parcial definido por la ecuación (3.5) y la ortogonalidad pensada en $\mathbf{A}$. A la pareja ortogonal en $\mathbf{A}$, generada por la clase s se llama *extensión máxima* de (s, d). Análogamente, a la pareja ortogonal generada por la clase d se llama *extensión mínima* de (s, d).

Ejemplo. Sea $\mathbf{A}$ la categoría de los grupos finitos y $\mathbf{B}$ la subcategoría de los grupos nilpotentes finitos. Para un primo p fijo, consideremos la pareja ortogonal (s, d) en $\mathbf{B}$ asociada a la p-localización de la sección 3.6, entonces la clase d consiste de todos los p-grupos y la pareja ortogonal $(\mathcal{L}, \mathcal{D}) = (d^{\perp}, d)$ en $\mathbf{A}$ es la extensión máxima y mínima de (s, d) en $\mathbf{A}$. Así la pareja $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ admite un funtor de localización, que asocia a cada grupo finito su p-cociente máximo; el cual resulta ser la única extensión de todos los grupos finitos de la p-localización de los grupos nilpotentes finitos.

Nótese que si suponemos que la pareja (s, d), está asociado con algún triple idempotente en $\mathbf{B}$, entonces las parejas $(d^{\perp}, d^{\perp\perp})$ y $(s^{\perp}, s^{\perp\perp})$ no necesariamente corresponden a triples idempotentes en $\mathbf{A}$. Por lo tanto, no se sigue de (3.6) que todo triple idempotente en $\mathbf{B}$, tiene extensión inicial y extensión final sobre $\mathbf{A}$. Sin embargo, se puede establecer un hecho más débil.

Teorema 3.3.3. *Sean $\mathbf{B}$ una subcategoría de $\mathbf{A}$, $\mathcal{T}' = (T', \eta', \mu')$ un triple idempotente en $\mathbf{B}$ y $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ un triple idempotente en $\mathbf{A}$ tal que $\mathcal{T}$ extiende a $\mathcal{T}'$, entonces:*
(i) Si $(\mathcal{L}(T), \mathcal{D}(T)) = (\mathcal{L}(T')^{\perp}, \mathcal{D}(T')^{\perp\perp})$, entonces $\mathcal{T}$ es final entre todas las extensiones de $\mathcal{T}'$ sobre $\mathbf{A}$, es decir; si $\tilde{\mathcal{T}}$ es un triple idempotente en $\mathbf{A}$ tal que $\tilde{\mathcal{T}}$ extiende a $\mathcal{T}'$, entonces existe un único morfismo de triples $\beta : \tilde{\mathcal{T}} \longrightarrow \mathcal{T}$.
(ii) Si $(\mathcal{L}(T), \mathcal{D}(T)) = (\mathcal{L}(T')^{\perp}, \mathcal{D}(T')^{\perp\perp})$, entonces $\mathcal{T}$ es inicial entre todas las extensiones de $\mathcal{T}'$ sobre $\mathbf{A}$ (en el mismo sentido que (i)).

Demostración: Es claro por la ecuación (3.6) y por la proposición 3.3.1. ∎

Definición 3.3.3. Una categoría se llama *pequeña* si Ob $(\mathbf{A})$ es un conjunto.

Ejemplo. Los conjuntos preordenados y los monoides considerados como categorías son pequeñas.

Definición 3.3.4. Una categoría es *completa* si todo diagrama pequeño en $\mathbf{A}$ tiene límite.

Teorema 3.3.4. *Si $\mathbf{A}$ es una categoría entonces son equivalentes:*
(1) $\mathbf{A}$ es completa,
(2) $\mathbf{A}$ tiene productos e igualadores,
(3) $\mathbf{A}$ tiene productos e intersecciones finitas,
(4) $\mathbf{A}$ tiene productos fibrados y objeto final.

Demostración: [20, teorema 12.4,p.196] ∎

Ejemplos. Conj, Vec, Top y Grp son categorías completas porque tienen productos e igualadores.

Definición 3.3.5. Si $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ y $G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ son funtores, entonces la *categoría coma* $(F{\downarrow}G)$ es la categoría cuyos objetos son ternas (A, f, B), donde $A \in \operatorname{Ob}\mathbf{A}$, $B \in \operatorname{Ob}\mathbf{B}$ y $f : FA \longrightarrow GB$ es morfismo de $\mathbf{C}$; cuyos morfismos de ternas $(A, f, B) \longrightarrow (A', f', B')$ son parejas (a, b), donde $a : A \longrightarrow A'$ es un morfismo de $\mathbf{A}$ y $b : B \longrightarrow B'$ es un morfismo de $\mathbf{B}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "Fa"] \arrow[d, "f"'] & FA' \arrow[d, "f'"] \\ GB \arrow[r, "Gb"'] & GB' \end{tikzcd}$$

Las identidades son $1_{(A,f,B)} = (1_A, 1_B)$ y la composición se define componente a componente, esto es, $(a', b') \circ (a, b) = (a' \circ a, b' \circ b)$.

Definición 3.3.6. Sea A un objeto de $\mathbf{A}$, la *categoría de objetos bajo* A es la categoría $(A{\downarrow}\mathbf{A})$, cuyos objetos son parejas (f, A'), donde A' es un objeto de $\mathbf{A}$ y $f : A \longrightarrow A'$ es un morfismo de $\mathbf{A}$. Los morfismos son morfismos de parejas $h : (f, A') \longrightarrow (f', A'')$, con $h : A' \longrightarrow A''$ y $f' = h \circ f$; esto es, conmuta el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & A' \arrow[d, "h"] \\ & A'' \end{tikzcd}$$

3.4 Extensiones de Kan.

Si $\mathbf{C}$ es una categoría y $K : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ es un funtor, entonces consideremos $\mathbf{C}^{\mathbf{A}}$ la categoría de funtores de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{C}$; cuyos objetos son funtores $S : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ y los morfismos son transformaciones naturales $\sigma : S \longrightarrow S'$. Se define el funtor $\mathbf{C}^K : \mathbf{C}^{\mathbf{A}} \longrightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{B}}$ dado por $\sigma : S \longrightarrow S' \mapsto \sigma K : SK \longrightarrow S'K$. El problema de la extensión de Kan es encontrar los adjuntos izquierdo y derecho de $\mathbf{C}^K$. Consideremos primero el problema para el adjunto derecho.

Definición 3.4.1. Sean $K : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ y $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ funtores, la *extensión de Kan derecha de F a lo largo de K* y que denotamos con $\mathrm{Ran}_K F$, es la pareja $R, \varepsilon : RK \longrightarrow F$, donde R es un funtor en $\mathbf{C}^{\mathbf{A}}$ y ε es una transformación natural que es universal como morfismo de $(\mathbf{C}^K \downarrow F)$ donde $\mathbf{C}^K : \mathbf{C}^{\mathbf{A}} \longrightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{B}}$ y $F \in \mathbf{C}^{\mathbf{B}}$.

Así, la universalidad determina el funtor $R = \mathrm{Ran}_K F$ de manera única excepto por isomorfismo natural, esto es; para cada pareja de funtores $S, \varphi : SK \longrightarrow F$, existe una única transformación natural $\sigma : S \longrightarrow R$ tal que $\varphi = \varepsilon \circ \sigma K : SK \longrightarrow F$; es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[dr, "R"'] \arrow[dr, bend left=40, "S"] \arrow[dr, phantom, bend left=20, "\swarrow\sigma"] & \\
\mathbf{B} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

La asignación $\sigma \mapsto \varepsilon\sigma K$ es un isomorfismo natural en S y por consiguiente $\mathrm{Nat}\,(S, R = \mathrm{Ran}_K F) \cong \mathrm{Nat}\,(SK, F)$. Este isomorfismo natural determina $\mathrm{Ran}_K F$ para K y F. Esta extensión de Kan se le llama derecha porque aparece a la derecha de hom-set (aunque algunos autores llaman a R la *extensión de Kan izquierda de F a lo largo de K*). A continuación enunciaremos algunos resultados que utilizaremos más adelante.

Teorema 3.4.1. *Sean $K : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ y $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ funtores, tales que la composición $(A\downarrow K) \xrightarrow{Q} \mathbf{B} \xrightarrow{F} \mathbf{C}$ tiene límite para cada A en $\mathbf{A}$, con λ cono límite, escribimos*

$$RA = \varprojlim((A\downarrow K) \xrightarrow{Q} \mathbf{B} \xrightarrow{F} \mathbf{C}) = \lim{}_f FB \quad F \in (A\downarrow K), \tag{3.7}$$

cada $g : A \longrightarrow A'$ induce una única flecha $Rg : \varprojlim FQ \longrightarrow \varprojlim FQ'$ que conmuta con los conos límites, estas fórmulas definen un funtor $R : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ y para cada B en $\mathbf{B}$ las componentes $\lambda_{1_{KB}} = \varepsilon B$ del cono límite definen una transformación natural $\varepsilon : RK \longrightarrow F$ y R, ε es una extensión de Kan derecha de F a lo largo de K.

Demostración: [14, teorema 1,p.234]. ■

Corolario 3.4.2. *Si* $\mathbf{B}$ *es una categoría pequeña y* $\mathbf{C}$ *es una categoría completa, entonces todo funtor* $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ *tiene extensión de Kan derecha a lo largo de cualquier* $K : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ *y* $\mathbf{C}^K$ *tiene adjunto derecho.*

Demostración: [14, corolario 2,p.235]. ∎

Observación. El caso originalmente estudiado por Kan en 1958 es cuando $\mathbf{C}$ es la Categoría de los Conjuntos.

Corolario 3.4.3. *Si el funtor* $K : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ *es fiel y pleno, entonces el morfismo universal* $\varepsilon : RK \longrightarrow F$ *para la extensión de Kan* R *de* F *a lo largo de* K *es un isomorfismo natural* $\varepsilon : RK \cong F$.

Demostración: [14, corolario 3,p.235]. ∎

Corolario 3.4.4. *Si* $\mathbf{B}$ *es subcategoría plena de* $\mathbf{A}$ *y* $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ *es un funtor tal que cada composición* $(A{\downarrow}K) \xrightarrow{Q} \mathbf{B} \xrightarrow{F} \mathbf{C}$ *tiene límite* A *en* $\mathbf{C}$, *entonces existe un funtor* $R : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ *con* $RK = F$, *(es decir,* R *extiende a* F*) tal que la transformación natural identidad* $1 : RK \longrightarrow F$ *hace que* R *sea la extensión de Kan derecha de* F *a lo largo de* $K : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$.

Demostración: [14, corolario 4,p.236]. ∎

Resumiendo. Sean $K : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ y $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ funtores. Si $\mathbf{C}$ es una categoría completa y para cada objeto A de $\mathbf{A}$, la categoría coma $(A{\downarrow}K)$ tiene subcategoría inicial pequeña, entonces la extensión de Kan derecha $R = \mathrm{Ran}_K F$ de F puede ser calculada como límite puntual (teorema 3.4.1)

$$RA = \varprojlim FQ_A, \tag{3.8}$$

donde $Q_A : (A{\downarrow}K) \longrightarrow \mathbf{B}$ es la proyección $A \longrightarrow KB$ en $\mathbf{B}$. Si K es inmersión plena y R es construído como en (3.8), entonces RK es naturalmente equivalente a F (corolario 3.4.3). Pero como $\mathbf{B}$ es subcategoría plena, entonces $RK = F$ (corolario 3.4.4). Además, si $K : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ tiene adjunto izquierdo $L : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, entonces para cada funtor $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ y para cada objeto A en $\mathbf{A}$ existe $\varprojlim FQ_A = FLA$. Por lo tanto la extensión de Kan derecha de F a lo largo de K existe puntualmente y está dada por

$$FL = \mathrm{Ran}_K F. \tag{3.9}$$

Lo que quiere decir en particular, que si $\mathfrak{T} = (T, \eta, \mu)$ es el triple inducido por los funtores adjuntos L y K, entonces $T = \mathrm{Ran}_K K$. De manera más general se tiene lo siguiente.

Proposición 3.4.5. *Sean* $K : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ *un funtor y* $\mathfrak{T}' = (T', \eta', \mu')$ *un triple en* $\mathbf{B}$. *Si* $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ *y* $G : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{B}$ *es un par de funtores adjuntos inducidos por* $\mathfrak{T}'$, *entonces* $\mathrm{Ran}_K KT' = \mathrm{Ran}_{KG} KG$.

Demostración: Por hipótesis F y G son funtores adjuntos y por (3.9) $\mathrm{Ran}_G KG = KGF = KT'$, pues $GF = T'$. Así $\mathrm{Ran}_K KT' = \mathrm{Ran}_K(\mathrm{Ran}_G KG) = \mathrm{Ran}_{KG} KG$. Por lo tanto $\mathrm{Ran}_K KT' = \mathrm{Ran}_{KG} KG$. ∎

Observación. Si $K : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ es un funtor, cuya extensión de Kan derecha $T : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ de K a lo largo de K existe, entonces existe una transformación natural $\varepsilon : TK \longrightarrow K$ tal que para cada funtor $S : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$, la aplicación $\sigma \mapsto \varphi = \varepsilon \circ \sigma K$ es una biyección $\varphi : \mathrm{Nat}\,(S, T = \mathrm{Ran}_K K) \cong \mathrm{Nat}\,(SK, K)$. Ahora, si $S = 1_{\mathbf{A}}$ y definimos $\eta : 1_{\mathbf{A}} \longrightarrow T$ con $\eta = \varphi^{-1}(1_K)$; $S = T^2$ y $\mu : T^2 \longrightarrow T$ con $\mu = \varphi^{-1}(\varepsilon \circ T\varepsilon)$, entonces η y μ son transformaciones naturales y (T, η, μ) es un triple en $\mathbf{A}$. A este triple se le llama *triple codenso* de K. Más aún, K es codenso si, y sólo si, η es isomorfismo.

La proposición anterior nos dice que, para estudiar las extensiones de triples idempotentes sobre categorías muy grandes via extensiones de Kan, es suficiente considerar triples de ciertas inmersiones. Si suponemos que el triple T' es idempotente, entonces T' es inducido por un par de funtores adjuntos $\mathbf{B} \xrightarrow{F} \mathfrak{D}(T') \xrightarrow{G} \mathbf{B}$, donde $F = T'$ y G es la inclusión. Si además, suponemos que $K : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ es inmersión plena, entonces la extensión de Kan derecha R de KT' a lo largo de K en el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B} \arrow[r, "K"] \arrow[d, "T'"'] & \mathbf{A} \arrow[d, "1_{\mathbf{A}}"] \\
\mathbf{B} \arrow[r, "K"'] & \mathbf{A}
\end{tikzcd}$$

es parte del triple codenso $R = (R, \eta, \mu)$ de la inmersión de $\mathcal{D}(T')$ en $\mathbf{A}$; el cual existe por la proposición 3.4.5. Además, R es una extensión de T' sobre $\mathbf{A}$. El siguiente lema será de gran utilidad más adelante.

Lema 3.4.6. *Si $K : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{A}$ es inmersión plena tal que $R = \mathrm{Ran}_K K$ existe puntualmente, entonces $\mathcal{L}(R) = \mathcal{D}^{\perp}$.*

Demostración: (i) Veamos que $\mathcal{D}^{\perp} \subseteq \mathcal{L}(R)$. Si $f \in \mathcal{D}^{\perp}$ entonces $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo de $\mathcal{D}^{\perp}$ y por consiguiente f induce un isomorfismo de categorías $(A{\downarrow}K) \cong (B{\downarrow}K)$. Así, por la ecuación (3.8) f es R-equivalencia y por lo tanto $f \in \mathcal{L}(R)$, luego $\mathcal{D}^{\perp} \subseteq \mathcal{L}(R)$.
(ii) Veamos que $\mathcal{L}(R) \subseteq \mathcal{D}^{\perp}$. Como $R = \mathrm{Ran}_K K$ y K es inmersión plena, entonces R es la identidad en los objetos de $\mathcal{D}$, por lo tanto $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}(R)$. Por el teorema 3.1.3 $\mathcal{L}(R) = \mathcal{D}(R)^{\perp}$ y como $\mathcal{D}(R)^{\perp} \subseteq \mathcal{D}^{\perp}$, entonces $\mathcal{L}(R) \subseteq \mathcal{D}^{\perp}$; luego por (i) y (ii) $\mathcal{L}(R) = \mathcal{D}^{\perp}$. ∎

Teorema 3.4.7. *Si $\mathbf{A}$ es una categoría, $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ es una pareja ortogonal en $\mathbf{A}$ y $K : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{A}$ es la inclusión, entonces $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ admite un funtor de localización si, y sólo si, $\mathrm{Ran}_K K$ existe puntualmente. Cuando éste sea el caso diremos que $\mathrm{Ran}_K K$ es el funtor de localización asociado con $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$.*

Demostración: $\Longrightarrow$) Si $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ admite un funtor de localización, entonces existe un funtor de localización T para $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ y por (3.9) $T = \mathrm{Ran}_K K$ existe puntualmente.
$\Longleftarrow$) Supongamos que $R = \mathrm{Ran}_K K$ existe puntualmente, entonces por el lema anterior $\mathcal{L}(R) = \mathcal{D}^{\perp}$. Además $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ es una pareja ortogonal $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{L}^{\perp} = \mathcal{D}, \mathcal{D}^{\perp} = \mathcal{L}$. Por lo tanto $\mathcal{L}(R) = \mathcal{D}^{\perp} = \mathcal{L}$, luego $\mathcal{L}(R) = \mathcal{L}$. Por otra parte, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}(R)$ porque K es la inclusión y como $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ es una pareja ortogonal en $\mathbf{A}$, entonces $\mathcal{D}(R) \subseteq \mathcal{D}(R)^{\perp\perp} = \mathcal{L}(R)^{\perp} = \mathcal{L}^{\perp} = \mathcal{D}$. Luego $\mathcal{D}(R) \subseteq \mathcal{D}$ y por consiguiente $\mathcal{D} = \mathcal{D}(R)$. Así $\mathcal{L}(R) = \mathcal{L}$ y $\mathcal{D} = \mathcal{D}(R)$. Sólo resta probar la idempotencia de R, lo cual es claro ya que para cada objeto A en $\mathbf{A}$ se tiene que RA es un objeto de $\mathcal{D}(R)$ y por consiguiente de $\mathcal{D}$, así $R^2A = RA$ y por lo tanto, $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ admite un funtor localización R. ∎

Nótese que el teorema 3.4.7 es un caso especial de [14, X.7.2], que a su vez se obtuvo como consecuencia del lema 3.4.6.

Definición 3.4.2. Sea $\mathcal{D}$ la clase de objetos de $\mathbf{A}$, $\mathcal{D}$ se llama *saturado* si $\mathcal{D}^{\perp\perp} = \mathcal{D}$.

Observación. Nótese que si $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ es una pareja ortogonal en $\mathbf{A}$, entonces $\mathcal{L}$ y $\mathcal{D}$ son saturados. Además, el teorema anterior nos dice que si $\mathcal{L}$ es saturado, entonces la existencia del funtor de localización para $(\mathcal{D}^{\perp}, \mathcal{D}^{\perp\perp})$ es equivalente a la existencia de $\mathrm{Ran}_K K$. Para clases arbitrarias $\mathcal{D}$, no necesariamente saturadas una implicación es verdadera bajo ciertas restricciones en la categoría $\mathbf{A}$ (ver corolario 3.5.3).

3.5 Extensión de triples idempotentes.

Definición 3.5.1. Una categoría $\mathbf{A}$, se llama *bien potenciada* si todo objeto de $\mathbf{A}$ tiene solamente un conjunto pequeño de subobjetos, es decir, $Sub_{\mathbf{A}}X$ es isomorfo a un conjunto pequeño, para cada X en $\mathbf{A}$.

Ejemplos. Top, Grp, R-mod y Ord son categorías bien potenciadas.

En el caso en que $\mathbf{A}$ es una categoría completa y bien potenciada, existe un proceso general para asociar a cualquier triple en $\mathbf{A}$, un triple idempotente de manera universal dado por Fakir [11].

Teorema 3.5.1. *Sea $\mathbf{A}$ una categoría completa y bien potenciada. Si $\mathcal{R} = (R, \eta, \mu)$ es un triple en $\mathbf{A}$, entonces existe un triple idempotente $\mathcal{R}_\infty = (R_\infty, \eta_\infty, \mu_\infty)$ en $\mathbf{A}$ y un monomorfismo de triples $\varphi : \mathcal{R}_\infty \longrightarrow \mathcal{R}$ con las siguientes propiedades.*
(i) φ es universal, es decir, si $\phi : \breve{\mathcal{R}} \longrightarrow \mathcal{R}$ es un morfismo con $\breve{\mathcal{R}}$ idempotente, entonces existe un único morfismo $\phi_\infty : \breve{\mathcal{R}} \longrightarrow \mathcal{R}_\infty$ tal que $\varphi \circ \phi_\infty = \phi$.
(ii) $\eta_\infty R : R \longrightarrow R_\infty R$ es isomorfismo.
(iii) Si $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo de $\mathbf{A}$, entonces f es R_∞-equivalencia $\Longleftrightarrow$ f es R-equivalencia.

Demostración: [11, p.100]. ■

A continuación recordemos como se construye R_∞, el cual será de gran ayuda más adelante.

(i) Definimos $(R_0, \eta_0, \mu_0) = (R, \eta, \mu)$.
(ii) Si $\alpha + 1$ es ordinal sucesor de α, entonces $R_{\alpha+1}$ es el igualador de $R_\alpha \eta_\alpha$ y

$\eta_\alpha R_\alpha$, junto con las únicas transformaciones naturales $\eta_{\alpha+1}$ y $\mu_{\alpha+1}$ que hacen conmutar los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\eta_{\alpha+1}"] \arrow[dr, "\eta_\alpha"'] & R_{\alpha+1} \arrow[d, "K_{\alpha+1}"] \\ & R_\alpha \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (R_{\alpha+1})^2 \arrow[r, "K_{\alpha+1}R_{\alpha+1}"] \arrow[d, "\mu_{\alpha+1}"'] & R_\alpha R_{\alpha+1} \arrow[r, "R_\alpha K_{\alpha+1}"] & (R_\alpha)^2 \arrow[d, "\mu_\alpha"] \\ R_{\alpha+1} \arrow[rr, "K_{\alpha+1}"'] & & R_\alpha \end{tikzcd}$$

(iii) Si ω es ordinal límite con $\alpha < \omega$, entonces $R_\omega = \varprojlim R_\alpha$, es decir tomamos el límite sobre todos los ordinales α menores que ω. Por lo tanto para cada objeto X de $\mathbf{A}$, tenemos un sistema inverso de monomorfismos que necesariamente estabiliza a algún ordinal, porque $\mathbf{A}$ es bien potenciada. Denotamos con $R_\infty X$ al objeto obtenido por estabilización. El funtor R_∞ es parte del triple $\mathcal{R}_\infty = (R_\infty, \eta_\infty, \mu_\infty)$. Además $R_\infty \eta_\infty = \eta_\infty R_\infty$, lo que quiere decir que el triple $\mathcal{R}_\infty$ es necesariamente idempotente. Por consiguiente podemos establecer el siguiente resultado.

Teorema 3.5.2. *Sean $\mathbf{A}$ una categoría completa y bien potenciada, $\mathbf{B}$ subcategoría plena de $\mathbf{A}$ y $K : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ la inclusión. Si $\mathcal{T}' = (T', \eta', \mu')$ es un triple en $\mathbf{B}$ tal que $R = \mathrm{Ran}_K KT'$ existe puntualmente, entonces R es parte de un triple $\mathcal{R} = (R, \eta, \mu)$ en $\mathbf{A}$ y el triple idempotente asociado $\mathcal{R}_\infty = (R_\infty, \eta_\infty, \mu_\infty)$ satisface lo siguiente:*
(i) $\mathcal{R}_\infty$ extiende a $\mathcal{T}'$ en $\mathbf{A}$.
(ii) $(\mathcal{L}(\mathcal{R}_\infty), \mathcal{D}(\mathcal{R}_\infty)) = (\mathcal{D}(T')^\perp, \mathcal{D}(T')^{\perp\perp})$.
(iii) $\mathcal{R}_\infty$ es final entre todas las extensiones idempotentes de $\mathcal{T}'$ sobre $\mathbf{A}$.

Demostración: Por las observaciones hechas antes del lema 3.4.6, es claro que el funtor R es parte de un triple $\mathcal{R} = (R, \eta, \mu)$ en $\mathbf{A}$ y además $\mathcal{R}$ extiende a $\mathcal{T}'$ en $\mathbf{A}$. Sea $\mathcal{R}_\infty$ el triple idempotente que se obtiene aplicando el teorema anterior al triple $\mathcal{R}$. Ahora escogemos a R de tal forma que el isomorfismo natural $KT' \longrightarrow RK$ sea la identidad, por lo tanto, si B es un objeto de $\mathbf{B}$ entonces $R\eta B = T'\eta' B = \eta RB$, pues $\mathcal{T}'$ es idempotente. Por lo tanto de la construcción de $\mathcal{R}_\infty$ se tiene que $R_1 B = RB$, análogamente,

$$R_\infty B = RB = T'B. \tag{3.10}$$

Por lo tanto, $\mathcal{R}_\infty$ extiende a $\mathcal{T}'$ en $\mathbf{A}$ y por consiguiente (i) está probado. Ahora veamos que se cumple (ii). En efecto, por el lema 3.4.6 $\mathcal{L}(R) = \mathcal{D}^\perp$

y por la ecuación (3.10) $\mathcal{L}(R) = \mathcal{L}(R_\infty) = \mathcal{L}(T') = \mathcal{D}^\perp$; así por el teorema 3.5.1 (iii) $\mathcal{D}(T') = \mathcal{L}(R) = \mathcal{L}(R_\infty)$ y por lo tanto, $(\mathcal{L}(\mathcal{R}_\infty), \mathcal{D}(\mathcal{R}_\infty)) = (\mathcal{D}(T')^\perp, \mathcal{D}(T')^{\perp\perp})$. El inciso (iii) es claro por el teorema 3.3.3 (i). ■

Corolario 3.5.3. *Sean* $\mathbf{A}$ *una categoría completa y bien potenciada,* $\mathcal{D}$ *subcategoría plena de* $\mathbf{A}$ *y* $K : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{A}$ *la inclusión. Si* $\mathrm{Ran}_K K$ *existe puntualmente, entonces la pareja ortogonal* $(\mathcal{D}^\perp, \mathcal{D}^{\perp\perp})$ *admite un funtor de localización.*

Demostración: Si definimos $\mathbf{B} = \mathcal{D}$ y $T' = 1$ en el teorema anterior, entonces $\mathcal{D}(T')$ es la cerradura de $\mathcal{D}$ bajo isomorfismos, así $(\mathcal{L}(\mathcal{R}_\infty), \mathcal{D}(\mathcal{R}_\infty)) = (\mathcal{D}^\perp, \mathcal{D}^{\perp\perp})$, pues $T' = 1$. Por lo tanto, R_∞ es el funtor de localización asociado a la pareja ortogonal $(\mathcal{D}^\perp, \mathcal{D}^{\perp\perp})$. ■

Observación. Como consecuencia importante del corolario anterior es el teorema 3.6.2, donde $\mathbf{A}$ es la categoría de los grupos y $\mathcal{D}$ es la subcategoría plena de los grupos nilpotentes P-locales. En este caso $\mathrm{Ran}_K K$ es la $\mathbf{Z}_P$-completación y el funtor de localización asociado con la pareja ortogonal $(\mathcal{D}^\perp, \mathcal{D}^{\perp\perp})$ es L_P, (como podrá verse en la próxima sección). Por otra parte por el teorema 3.4.7, si $\mathcal{D}$ es saturado, entonces la existencia del funtor de localización para $(\mathcal{D}^\perp, \mathcal{D}^{\perp\perp})$, es equivalente a la existencia de $\mathrm{Ran}_K K$ y además, en este caso $\mathrm{Ran}_K K$ es idempotente.

Definición 3.5.2. Si $\mathcal{D}$ es una clase arbitraria de objetos, entonces decimos que la pareja ortogonal $(\mathcal{D}^\perp, \mathcal{D}^{\perp\perp})$ está *generada* por $\mathcal{D}$.

Corolario 3.5.4. *Sea* $\mathbf{A}$ *una categoría completa y bien potenciada. Si* $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ *es una pareja ortogonal de* $\mathbf{A}$ *generada por un conjunto de objetos, entonces* $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ *admite un funtor de localización.*

Demostración: Sea $\mathcal{D}_0$ una subcategoría pequeña plena de $\mathbf{A}$, cuyos objetos generan a la pareja ortogonal $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ con $K : \mathcal{D}_0 \longrightarrow \mathbf{A}$ el funtor inclusión, entonces para cada objeto X de $\mathbf{A}$, la categoría coma $(X \downarrow K)$ es pequeña y por (3.8) $\mathrm{Ran}_K K$ puede ser calculado puntualmente. Así por el corolario anterior $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ admite un funtor de localización. ■

El resultado anterior primero fue obtenido por M. Pfenniger [15] y puede compararse con [6, teorema 3.4], el cual se deriva una conclusión similar en ciertas categorías cocompletas. Nosotros terminamos esta sección con una observación que es inmediata del teorema 3.5.1 y damos alguna idea adicional en el problema de caracterizar a la clase $\mathcal{L}(T)^{\perp}$ para un triple $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ que no es idempotente (ver la discusión anterior y posterior de la proposición 3.1.4).

Proposición 3.5.5. *Sea* $\mathbf{A}$ *una categoría completa y bien potenciada. Si* $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ *es un triple en* $\mathbf{A}$, *entonces* $\mathcal{L}(T)^{\perp} = \mathcal{D}(T_{\infty})$.

Demostración: Es claro por el teorema 3.5.1. ■

3.6 Aplicaciones a localización de grupos.

Definición 3.6.1. Sea G un grupo, se define la *sucesión central descendente* de G como $\ldots \subseteq \Gamma^{i+1}(G) \subseteq \Gamma^{i}(G) \subseteq \ldots \subseteq \Gamma^{1}(G)$, con $\Gamma^{1}(G) = G$, $\Gamma^{i+1}(G) = [G, \Gamma^{i}(G)]$, $i \geq 1$; donde $[G, \Gamma^{i}(G)]$ es el subgrupo de G generado por $aba^{-1}b^{-1}$, con $a \in G$ y $b \in \Gamma^{i}(G)$.

Nótese que $\Gamma^{2}(G) = [G, G]$ es el subgrupo conmutador de G.

Definición 3.6.2. Un grupo G es *nilpotente* si $\Gamma^{j}(G) = \{1\}$ para alguna j suficientemente grande.

Definición 3.6.3. Sea G un grupo, se define la *sucesión central ascendente* de G como $\{1\} = Z^{0}(G) \subseteq Z^{1}(G) \subseteq \ldots \subseteq Z^{i}(G) \subseteq Z^{i+1}(G) \subseteq \ldots$ con $Z^{i+1}(G)/Z^{i}(G) =$ centro de $G/Z^{i}(G)$, $i \geq 0$ y $Z^{1}(G) = Z(G)$ es el centro de G. Por lo tanto, G tiene c clases nilpotentes (es decir $\mathrm{nil}(G) = c$) si, y sólo si, $Z^{c}(G) = G$ y $Z^{c-1}(G) \neq G$.

Ejemplo. Si Grp es la categoría de los grupos, $\mathcal{N}$ es la subcategoría plena de los grupos nilpotentes y $\mathcal{N}_c$ es la subcategoría plena de los grupos nilpotentes, con $\mathrm{nil}(G) \leq c$; esto es, los objetos en $\mathcal{N}_c$ son grupos G tales que $\Gamma^{c+1}(G) = \{1\}$. En particular $\mathcal{N}_1 = Ab$ es la categoría de los grupos abelianos.

Notación. Si P es un conjunto de números primos, entonces P' denota el conjunto de números primos complementario. Además, si $n \in \mathbb{Z}$ es un producto de primos en P', entonces por abuso de lenguaje escribimos $n \in P'$.

Definición 3.6.4. Un grupo G es *P-local* si $f : G \longrightarrow G$ con $f(x) = x^n$ es biyectiva para todo $n \in P'$.

Definición 3.6.5. Sea $\mathbf{B}$ una subcategoría plena de $\mathbf{A}$, un homomorfismo $l : G \longrightarrow G_P$ en $\mathbf{B}$ es una *P-localización* si G_P es P-local. Es decir l es P-universal con respecto a $\mathbf{B}$.

Observación. Si cada grupo en $\mathbf{B}$ admite un morfismo de P-localización, entonces para cada morfismo $\phi : G \longrightarrow K$ existe un único morfismo $\phi_P : G_P \longrightarrow K_P$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "l"'] & K \arrow[d, "l"] \\ G_P \arrow[r, "\phi_P"'] & K_P \end{tikzcd}$$

Por lo tanto se tiene un funtor $T : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B}$ llamado el *funtor de P-localización* y podemos ver a l como una transformación natural $l : 1 \longrightarrow T$, que tiene la propiedad universal con respecto a los morfismos de los grupos P-locales en $\mathbf{B}$. A lo largo de esta sección, $\mathcal{T}'_P = (T'_P, \eta', \mu')$ denotará el triple idempotente en $\mathcal{N}$ correspondiente a la P-localización. Este triple es la restricción de un triple idempotente en $\mathcal{N}_c$ para cada c y nosotros denotamos a las restricciones con la misma letra $\mathcal{T}'_P$. La notación usual para η'_N es $l : N \longrightarrow N_P$. Ahora, nuestro objetivo es discutir las extensiones idempotentes inicial y final de $\mathcal{T}'_P$, sobre la categoría de los grupos Grp. La respuesta depende si vemos a $\mathcal{T}'_P$ como triple en $\mathcal{N}$ o en $\mathcal{N}_c$, para algún c. Nosotros consideramos el segundo caso que es mucho más fácil.

Teorema 3.6.1. *Si $\mathcal{T}'_P$ es un triple en $\mathcal{N}_c$, entonces $\mathcal{T}'_P$ tiene una extensión idempotente final $\mathcal{T}_P$ en Grp tal que $T_P(G) = (G/\Gamma^{c+1}(G))_P$.*

Demostración: Si $K : \mathcal{N}_c \longrightarrow Grp$ es el funtor inclusión, entonces K tiene adjunto izquierdo $F : Grp \longrightarrow \mathcal{N}_c$ tal que $F(G) = G/\Gamma^{c+1}(G)$. Por lo tanto, por (3.9) se tiene que $\mathrm{Ran}_K KT'_P = KT'_P F$, pues F es adjunto izquierdo de K. Ahora, si llamamos a $T_P = \mathrm{Ran}_K KT'_P$, entonces $T_P(G) = (G/\Gamma^{c+1}(G))_P$. Por consiguiente el funtor T_P es parte de un triple $\mathcal{T}_P$ en Grp que es idempotente. Por otra parte, por la proposición 3.4.5 y por el lema 3.4.6 $\mathcal{L}(T_P) = \mathcal{D}(T'^{\perp})$. Así por el teorema 3.3.3 el triple $\mathcal{T}_P$ es final entre todas las extensiones idempotentes de $\mathcal{T}'_P$ en Grp. ∎

En otras palabras, entre todas las extensiones de los triples idempotentes de $\mathcal{T}'_P$ en Grp; el único dado por el teorema anterior tiene el menor número de objetos locales posibles y convierte tantos morfismos como sea posible en isomorfismos. Por otro lado, por el ejemplo [8, 3.3] el funtor de localización de Ribenboim $l : G \longrightarrow G_P$ es inicial entre todas las extensiones idempotentes de $\mathcal{T}'_P$ en Grp. Así, entre todas las extensiones idempotentes de $\mathcal{T}'_P$ en Grp, el último tiene tantos objetos locales como sea posible y da lugar al menor número posible de morfismos invertibles.

Ahora, consideremos la misma situación que teníamos cuando $\mathcal{N}_c$ es remplazada por la categoría $\mathcal{N}$ de los grupos nilpotentes. La extensión idempotente inicial de $\mathcal{T}'_P$ sobre Grp es otra vez la localización de Ribenboim por el mismo argumento dado en [8]. Sin embargo, en este caso la inclusión $K : \mathcal{N} \longrightarrow Grp$ no tiene adjunto izquierdo y por lo tanto no es obvio en principio de que la extensión idempotente final exista. Nosotros posteriormente aprovecharemos los resultados de las secciones anteriores, para demostrar que tal extensión final necesariamente existe.

Sea $\mathcal{D}$ subcategoría plena de Grp, tal que para cada grupo G la categoría coma $(G{\downarrow}K)$ tiene subcategoría inicial pequeña, donde $K : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{A}$ es la inclusión. Entonces por (3.8) $\mathrm{Ran}_K K$ existe y se le llama *funtor $\mathcal{D}$-completación.* Nos restringiremos a la clase $\mathcal{D}(\mathcal{T}'_P)$ de los grupos nilpotentes P-locales. En este caso, para un grupo G la categoría coma $(G{\downarrow}K)$ tiene subcategoría inicial pequeña, que consiste de las composiciones $G \twoheadrightarrow G/\Gamma^i(G) \xrightarrow{l} (G/\Gamma^i(G))_P$ con $1 \leq i < \infty$. Por lo tanto, $R = \mathrm{Ran}_K K$ existe y está dado por $\widehat{G}_P = RG = \varprojlim (G/\Gamma^i(G))_P$; el cual se denota con $\widehat{G}_P$ y se le llama la *completación nilpotente P-local* o la *$\mathbf{Z}_P$-completación* del grupo G. El triple correspondiente $\mathcal{R} = (R, \eta, \mu)$ no es idempotente en la categoría de los grupos Grp [7, IV.5.4]. En [19, III.1.4] aparece una prueba detallada para P arbitrario.

Al triple anterior $\mathcal{R}$ que no es idempotente, le asociamos un triple idempotente $\mathcal{R}_\infty$ como en el teorema 3.5.2, el cual es final entre todas las extensiones idempotentes de $\mathcal{T}'_P$ sobre Grp. Usaremos la notación L_P en lugar de R_∞. Por lo tanto, hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 3.6.2. *Si $\mathcal{T}'_P$ es un triple en $\mathcal{N}$, entonces $\mathcal{T}'_P$ tiene una extensión idempotente final $\mathcal{L}_P = (L_P, \eta, \mu)$ sobre Grp.*

Observación. Para un grupo G, la localización $L_P(G)$ es un subgrupo de $\widehat{G}_P$, el cual se construye como sigue (el proceso es análogo a lo que se hizo después del teorema 3.5.1). Sea $\eta G : G \longrightarrow \widehat{G}_P$ el homomorfismo de $\mathbf{Z}_P$-completación. R_1 es el igualador de $R\eta$ y ηR, esto es,

$$R_1 G \xrightarrow{R_1} \widehat{G}_P \underset{\eta RG}{\overset{R\eta G}{\rightrightarrows}} (\widehat{G}_P)\widehat{\ }_P\,. \tag{3.11}$$

Como ηG se factoriza a través de $R_1 G$, usamos la misma letra para denotar al homomorfismo $\eta G : G \longrightarrow R_1 G$. Este proceso puede ser iterado por inducción transfinita. La torre $\{R_\alpha G\}$ tiene que ser estabilizado por algún ordinal y de esta manera obtenemos un subgrupo $L_P G = \bigcap_\alpha R_\alpha G$ de $\widehat{G}_P$ que sigue conteniendo a la imagen de $\eta G : G \longrightarrow \widehat{G}_P$.

Teorema 3.6.3. *Si $\eta G : G \longrightarrow \widehat{G}_P$ es una transformación natural, entonces η induce isomorfismos en $\widehat{G}_P \cong L_P(\widehat{G}_P)$ y $\widehat{G}_P \cong (L_P G)\widehat{\ }_P$.*

Demostración: El primer isomorfismo está dado por el teorema 3.5.1 (ii). Por otro lado, como $\eta G : G \longrightarrow L_P G$ es L_P-equivalencia si, y sólo si, ηG es R-equivalencia, entonces por el teorema 3.5.1 (iii) $\widehat{G}_P \cong (L_P G)\widehat{\ }_P$. ∎

Proposición 3.6.4. *Sea $\mathbf{A}$ una categoría y $\mathcal{R} = (R, \eta, \mu)$ un triple en $\mathbf{A}$. Si A es un objeto de $\mathbf{A}$ tal que $\eta A : A \longrightarrow RA$ es sección, entonces para cada G el morfismo $\mathbf{A}(\eta G, A) : \mathbf{A}(RG, A) \longrightarrow \mathbf{A}(G, A)$ es suprayectivo. Además, si ηG se factoriza como $G \xrightarrow{\pi} Q \xrightarrow{h} RG$ con π epimorfismo, entonces $\mathbf{A}(\pi, A) : \mathbf{A}(Q, A) \cong \mathbf{A}(G, A)$.*

Demostración: Supongamos que $\eta A : A \longrightarrow RA$ es sección. Entonces por la proposición 3.1.4 A está en $\mathcal{L}(R)^\perp$ y como $\eta G : G \longrightarrow RG$, entonces

$\mathbf{A}(\eta G, A) : \mathbf{A}(RG, A) \longrightarrow \mathbf{A}(G, A)$ es suprayectivo. Además, $\eta G = h \circ \pi$, π es epimorfismo y ηG es sección entonces π es isomorfismo. Por lo tanto $\mathbf{A}(\pi, A) : \mathbf{A}(Q, A) \cong \mathbf{A}(G, A)$. ∎

Observación. Si A está en $\mathcal{D}(R)$, entonces ηA es sección, así por la proposición anterior, todo morfismo de la forma $f : G \longrightarrow RK$, se puede factorizar a través de ηG y posiblemente no de manera única. En nuestro contexto, si tomamos a R como el triple de $\mathbf{Z}_P$-completación en la categoría de los grupos, entonces todo homomorfismo $f : G \longrightarrow \widehat{K}_P$ se puede factorizar a través de G y posiblemente no de manera única [3, lema 2.4]. Además, la segunda parte de la proposición anterior nos dice que la suprayectividad de $G \xrightarrow{\pi} Im\eta G$, es ortogonal a todos los grupos en $\mathcal{D}(R)$. Por lo tanto π es R-equivalencia por el teorema 3.1.3, así $\widehat{G}_P \cong (Im\eta G)\widehat{}_P$.

Teorema 3.6.5. *Si $\varphi : G \longrightarrow H$ es un homomorfismo de grupos, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
(a) $\varphi_* : L_P(G) \cong L_P(H)$.
(b) $\varphi_* : \widehat{G}_P \cong \widehat{H}_P$.
(c) *φ es ortogonal a $\widehat{K}_P$, para cada grupo K.*
(d) $\varphi_* : (G/\Gamma^i(G))_P \cong (H/\Gamma^i(H))_P$ *para* $1 \leq i \leq \infty$.

Demostración: (a) $\Longleftrightarrow$ (b) es claro por el teorema 3.5.1 (iii). (b) $\Longleftrightarrow$ (c) Es precisamente la igualdad $\mathcal{L}(R) = \mathcal{D}(R)^{\perp}$ obtenido en el teorema 3.1.3. Ahora probemos (c) $\Longrightarrow$ (d), para i fijo escogemos $G/\Gamma^i(G)$ en (c) y por consiguiente obtenemos un homomorfismo $\phi : H \longrightarrow (G/\Gamma^i(G))_P$ tal que $\phi \circ \varphi : G \longrightarrow (G/\Gamma^i(G))_P$ es el morfismo natural, pues $\varphi : G \longrightarrow H$. Así ϕ factoriza al morfismo $\bar{\phi} : (H/\Gamma^i(H))_P \longrightarrow (G/\Gamma^i(G))_P$ el cual es inverso derecho e izquierdo de $\varphi_* : (G/\Gamma^i(G))_P \longrightarrow (H/\Gamma^i(H))_P$. Por lo tanto $\varphi_* : (G/\Gamma^i(G))_P \cong (H/\Gamma^i(H))_P$. (d) $\Longrightarrow$ (b) Es claro tomando el límite inverso. ∎

Sea $R = \mathbf{Z}_P$, $H_*(X; R)$ denota la homología de X con coeficientes en R; así $H_1(X; R) \cong R \times abX$ donde abX es la abelianización de X. Si X, Y son grupos y $\alpha : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo de grupos, entonces HR es el conjunto de todas las $\alpha : X \longrightarrow Y$ tales que $\alpha_* : H_i(X; R) \longrightarrow H_i(Y; R)$ es isomorfismo para $i = 1$ y epimorfismo para $i = 2$, donde X y Y actuan trivialmente en R. Se puede ver que todo grupo tiene una HR-localización.

Observación. La equivalencia entre (b) y (c) en el teorema anterior es notable, puesto que si un homomorfismo de grupos $\varphi : G \longrightarrow H$ induce un isomorfismo en los límites inversos de las torres $\{(G/\Gamma^i(G))_P\}$ y $\{(H/\Gamma^i(H))_P\}$; entonces induce un isomorfismo por escalones entre las torres completas. Como caso especial $\eta G : G \longrightarrow L_P(G)$ induce $(\eta G)_* : (G/\Gamma^i(G))_P \cong (H/\Gamma^i(H))_P$ para $1 \leq i \leq \infty$. En particular para $i = 2$ se obtiene el siguiente isomorfismo

$$(\eta G)_* : H_1(G; \mathbf{Z}_P) \cong H_1(L_P(G); \mathbf{Z}_P). \tag{3.12}$$

A continuación veremos la relación entre L_P y el funtor $E^{\mathbf{Z}_P}$ de $H\mathbf{Z}_P$-localización de Bousfield [4, 5], esto es $\eta G : G \longrightarrow E(G) = E^{\mathbf{Z}_P}(G)$ es la $H\mathbf{Z}_P$-localización de G. Si $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ es una pareja ortogonal en $\mathcal{G}rp$, entonces la clase $\mathcal{D}$ es cerrada bajo límites inversos. Por lo tanto, como $\widehat{G}_P$ es el límite inverso de los grupos nilpotentes P-locales, entonces $\widehat{G}_P$ es L_P-local y por consiguiente también es T-local para cualquier triple idempotente $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ que extiende a $\mathcal{T}'_P$ sobre $\mathcal{G}rp$. El funtor $E^{\mathbf{Z}_P}$ de $H\mathbf{Z}_P$-localización es parte de tal triple idempotente, por lo tanto, existe un homomorfismo natural $\rho : E^{\mathbf{Z}_P}G \longrightarrow \widehat{G}_P$ que se factoriza a través de $L_P G$ en el siguiente diagrama conmutativo, donde todos los grupos del renglón inferior son $H\mathbf{Z}_P$-locales.

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl] \arrow[d, "\eta G"] \arrow[dr, "\eta G"] & \\ E^{\mathbf{Z}_P}G \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "\rho"'] & L_P G \arrow[r] & \widehat{G}_P \end{tikzcd} \tag{3.13}$$

Corolario 3.6.6. *Si G, K son grupos $H\mathbf{Z}_P$-locales, entonces $f : G \longrightarrow K$ es epimorfismo si, y sólo si, $f_* : H_1(G; \mathbf{Z}_P) \longrightarrow H_1(K; \mathbf{Z}_P)$ es epimorfismo.*

Demostración: [5, corolario 2.13, p.7]. ■

Observación. Por el corolario anterior, puesto que los morfismos del triángulo izquierdo en (3.13) se convierten en isomorfismos al aplicarles $H_1(\ ; \mathbf{Z}_P)$, entonces el morfismo $h : E^{\mathbf{Z}_P}G \longrightarrow L_P G$ en (3.13) es epimorfismo para cualquier grupo G. En otras palabras $L_P G$ es la imagen de ρ.

Teorema 3.6.7. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(a) $L_P(G) = \widehat{G}_P$.
(b) $R\eta G$ *y* ηRG *en (3.11) son isomorfismos y* $R\eta G = \eta RG$, *en particular* $\widehat{G}_P \cong (\widehat{G}_P)\hat{}_P$.
(c) $\rho : E^{\mathbf{Z}_P}G \longrightarrow \widehat{G}_P$ *es epimorfismo.*
(d) $\rho_* : H_1(E^{\mathbf{Z}_P}G; \mathbf{Z}_P) \longrightarrow H_1(\widehat{G}_P; \mathbf{Z}_P)$ *es epimorfismo.*
(e) $(\eta G)_* : H_1(G; \mathbf{Z}_P) \longrightarrow H_1(\widehat{G}_P; \mathbf{Z}_P)$ *es epimorfismo.*
(f) $(\eta G)_* : H_1(G; \mathbf{Z}_P) \cong H_1(\widehat{G}_P; \mathbf{Z}_P)$.

Demostración: (b) $\Longleftrightarrow$ (a) Como $R\eta G, \eta RG : \widehat{G}_P \longrightarrow (\widehat{G}_P)\hat{}_P$ son isomorfismos y $R\eta G = \eta RG$, entonces por el teorema 3.6.3 $L_P(\widehat{G}_P) = (L_P G)\hat{}_P$; así $L_P(G) = \widehat{G}_P$.
(a) $\Longrightarrow$ (f) Por (3.12) $(\eta G)_* : H_1(G; \mathbf{Z}_P) \cong H_1(L_P(G); \mathbf{Z}_P)$ y por hipótesis $L_P(G) = \widehat{G}_P$, por lo tanto $(\eta G)_* : H_1(G; \mathbf{Z}_P) \cong H_1(\widehat{G}_P; \mathbf{Z}_P)$.
(f) $\Longrightarrow$ (e) es inmediato.
(e) $\Longrightarrow$ (d) Por la observación anterior $\rho : E^{\mathbf{Z}_P}G \longrightarrow \widehat{G}_P$ es epimorfismo e $Im\rho = L_P(G)$, así $L_P(G) = \widehat{G}_P$. Ahora por hipótesis $(\eta G)_*$ es epimorfismo y $\eta G : G \longrightarrow \widehat{G}_P$, por consiguiente ρ_* es epimorfismo.
(d) $\Longrightarrow$ (c) Es claro que ρ es epimorfismo ya que ρ_* lo es.
(c) $\Longrightarrow$ (d) Como $Im\rho = L_P(G)$ y $\rho : E^{\mathbf{Z}_P}G \longrightarrow \widehat{G}_P$ es epimorfismo, entonces $L_P(G) = \widehat{G}_P$. ∎

Por el comentario hecho al final del teorema 3.6.1, la condición (b) y por lo tanto todas sus equivalencias (a) $\Longleftrightarrow$ (f) no son válidas en general. Por ejemplo, si G es un grupo libre con un número infinito numerable de generadores [5, lema 13.2,p.57]. Por otro lado, las condiciones equivalentes del teorema anterior se cumple siempre que $H_1(G; \mathbf{Z}_P)$ es finitamente generado como $\mathbf{Z}_P$-módulo [5, teorema 13.3,p.57]. En particular, si G es finitamente generado, entonces $L_P(G) = \widehat{G}_P$. Sin embargo, para un grupo libre con dos generadores $E^{\mathbf{Z}_P}G \neq \widehat{G}_P$, al menos si $2 \in P$ [5, proposición 4.4,p.26]. Esto demuestra que los funtores $E^{\mathbf{Z}_P}G$ y L_P son distintos. De hecho, coinciden en clases muy restringidas de grupos, tales como aquellos grupos para los cuales la torre $\{(G/\Gamma^i(G))_P\}$ se estabiliza; ciertamente en este último caso, si denotamos con $(G/\Gamma^s(G))_P$ el primer término que se estabiliza, entonces $E^{\mathbf{Z}_P}G = (G/\Gamma^s(G))_P$ [4, lema 7.5] y $\widehat{G}_P = (G/\Gamma^s(G))_P$ es nilpotente; por lo tanto $L_P(G) = (G/\Gamma^s(G))_P$. Esto sucede para todos los grupos perfectos (aquellos para los cuales $L_P(G) = \{1\}$) y todos los grupos finitos.

SIMBOLOGÍA

$F \dashv G$	F es funtor adjunto izquierdo de G
F, G, H	funtores
GF	$G \circ F$
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	categorías
$Mor\,\mathbf{A}$	clase de morfismos de $\mathbf{A}$
f, g, h	morfismos
$\mathrm{Ob}\,\mathbf{A}$	clase de objetos de $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^{op}$	categoría opuesta o dual
FA	$F(A)$
$\Longleftrightarrow$	si, y sólo si
$\Longrightarrow$	entonces o implica
$\cong$	isomorfismo
$\in$	pertenece o es elemento de
$\mathbf{N}$	conjunto de los números naturales
$\mathbf{Z}$	conjunto de los números enteros
P	conjunto de los números primos
$\mathbf{Z}_P$	anillo de los números enteros localizados en P
$\wp(X)$	conjunto potencia de X
$Conj$	categoría de los conjuntos
Top	categoría de los espacios topológicos
Grp	categoría de los grupos
Ab	categoría de los grupos abelianos
R-**mod**	categoría de los R-módulos izquierdos
Ord	categoría de los números ordinales
$\otimes$	producto tensorial

FALTA PAGINA

No. 64

Bibliografía

[1] J. F. Adams, *Localization and Completion*, University of Chicago, 1975.

[2] M. Barr and C. Wells, *Toposes, Triples and Theories*, Springer-Verlag Vol. 278, (1985).

[3] A.J. Berrick and G.C. Tan, *The minimal extension of P-localization on groups*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., to appear.

[4] A.K. Bousfield, *The localization of spaces with respect to homology*, Topology 14 (1975), 133–150.

[5] A.K. Bousfield, *Homological localization towers for groups and $\pi-$modules*, Mem. Amer. Math. Soc., 10 (1977) No. 186.

[6] A.K. Bousfield, *Constructions of factorization systems in categories*, Journal of Pure and Applied Algebra 9, (1977), 207-220.

[7] A.K. Bousfield and D.M. Kan, *Homotopy limits, Completions and localizations*, Lecture Notes in Math. 304 (1972).

[8] C. Casacuberta, G. Peschke and Pfenniger, *On orthogonal pairs in categories and localization*, in: Adams Memorial Symposium on Algebraic Topology, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 175 (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992) 211-223.

[9] A. Deleanu, *Idempotent codensity monads and the profinite completion of topological groups*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 86 (1983) 154-163.

[10] A. Deleanu, A. Frei and P. Hilton, *Idempotent triples and completion*, Math. Z. 143 (1975) 91-104.

[11] S. Fakir, *Monade idempotente associée a une manade*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A 270 (1970) 99-101.

[12] A. García Rodicio, *Métodos homológicos en grupos P-locales*, Tesis de Doctorado, Universidad de Santiago de Compostela, España, 1986.

[13] P. Hilton, G. Mislin and J. Roitberg, *Localization of nilpotent groups and spaces*, North-Holland Math. Studies, 15 (1975).

[14] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Springer, 5 (1975).

[15] M. Pfenniger, *On completions*, U.C.N.W. Maths Preprint 91.17, Bangor (1991).

[16] P. Ribenboim, *Torsion et localisation de groupes arbitraires*, Lectures Notes in Math. Springer 740 (1978) 444–456.

[17] H. Schubert, *Categories*, Springer, Berlin (1972).

[18] D. Sullivan, *Genetics of homotopy theory and the Adams conjeture*, Ann. of Math. 100 (1974) 1-79.

[19] G.C. Tan, *Localization of groups and spaces: the minimal P-localization of groups*, Ph.D. Thesis, National University of Singapore, 1993.

[20] J. Adámek, H. Herrlich, and G.E. Strecker, *Abstract and concrete categories*, John Wiley & Sons, Inc. New York (1990).

[21] P. Gabriel and M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*. Springer (1967).

[22] P. Huber, *Homotopy theory in general categories*, Math. Ann. 144 (1961) 361-385.

[23] H. Kleisli, *Every standard construction is induced by a pair of adjoint functors*, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965) 544-546.

[24] S. Eilenberg and J.C. Moore, *Adjoint functors and triples*, Illinois Journal of Math. 9 (1965) 381-398.

[25] H. Herrlich and M. Hušek, *Galois connections categorically*, Journal of Pure and Applied Algebra 68 (1990) 165-180.

[26] A. Aparicio *Adjunciones de Galois*, Tesis de Lic. Facultad de Ciencias, UNAM (1993).

[27] C. Casacuberta, A. Frei and G.C. Tan, *Extending localization functors*, Journal of Pure and Applied Algebra 103 (1995), 149-165.