22
2ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNOS ASPECTOS DE LA MEDIDA EN GRUPOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A:

Natalia Bárbara Mantilla Beniers

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES

Director de Tesis:

DR. GUILLERMO GRABINSKY STEIDER

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

1997

VNIVERSDAD NACIONAL AVFNºMA DE MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Algunos aspectos de la medida en grupos

realizado por Natalia Bárbara Mantilla Beniers

con número de cuenta 9350521-5 , pasante de la carrera de matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario
Guillermo Grabinsky Steider
Propietario Alejandro Bravo Mojica
Propietario
María Emilia Caballero Acosta
Suplente
Luis Briseño Aguirre
Suplente
José Alfredo Amor Montaño

Consejo Departamental de Matemáticas

MAT. CESAR GUEVARA BRAVO

Para Ulli, Víctor y Sebastián.

Para quienes luchan.

Agradecimientos

Agradezco a Guillermo Grabinsky, que me presentó el rico e interesante mundo de la Teoría de la Medida y sobrevivió a mi recorrido por él a "ritmo de tai chi", y a María Emilia Caballero, quien logró convencerme de que el Análisis era, pese a todo lo pronosticado, disfrutable. Gracias también a Alejandro Bravo. Luis Briseño y José Alfredo Amor, que un día recibieron mi visita y esta tesis...

Ahora bien, tanto Favio como Carlos intentaron hacerme menos sufrido mi paso por las tierras de la computación, y a ellos se deben primeras impresiones de mi tesis y varios consejos para el uso del SWP. Guilmer ayudó a liberar el ejemplar de María Emilia de las garras del cubículo 002, y Javier Páez fue el que finalmente hizo un todo de los varios capítulos de esta tesis. A todos, muchas, muchas gracias. Me hace muy feliz que a fin de cuentas esté aquí este trabajo.

Por último, quiero dejar constancia de que esta tesis está aquí pese a los repetidos esfuerzos de Leo por que eso sucediera, y tal vez por las llamadas "de impresión" de Juan Manuel. También debo reconocer la cooperación de Campero, que no ha dejado de hacer las dos cosas en que se basa nuestra amistad.

Introducción.

El presente trabajo recoge distintos resultados de la teoría de la medida. En él se habla sobre varios conjuntos medibles y sobre sus medidas y se presentan diversas construcciones de conjuntos que no lo son. La intención de esto es mostrar los elementos que son relevantes a la teoría de la medida. Se apreciará que la manera en que la teoría de la medida distingue entre dos conjuntos se diferencía de la de otras áreas de las matemáticas. Los conjuntos exhibidos en el primer capítulo también justifican la necesidad de otros parámetros de medición.

La exposición de varias construcciones de conjuntos no medibles permite ver líneas de pensamiento de diversos autores, y en ese mismo capítulo se exponen algunos resultados posteriores que están relacionados con las construcciones. Uno de estos resultados utiliza una "descomposición" del conjunto que ofrece otro punto de vista de la manera de actuar de la medida.

En el capítulo tres se considera a las medidas de Lebesgue-Stieltjes generadas por funciones continuas. Su propósito principal es el de presentar a un subgrupo de $\mathbb{R}$ no medible para todas ellas.

Por último, en el capítulo cuatro se presenta un método para ampliar el espectro de los conjuntos medibles dada una medida y siempre que no se suponga la hipótesis del continuo. La construcción de esta extensión es válida para cualquier grupo métrico compacto infinito con medida izquierda de Haar, y se obtiene un incremento considerable en la cantidad de conjuntos medibles. En este mismo capítulo se incluyen construcciones de conjuntos que no son medibles para las extensiones obtenidas. Resalta por la sencillez de su construcción el conjunto no medible en el producto cartesiano infinito no numerable de grupos topológicos.

Para mejor manejo del material se han incluido dos apéndices. Estos contienen tanto resultados conocidos como demostraciones de enunciados tomados como ciertos a lo largo de la tesis, y que no se demostraron en su momento por ser de carácter técnico y considerarse que podían romper el hilo del discurso.

Encuentro que lo que podría considerarse como un estudio de las "patologías" en un área permite en realidad adentrarse en el conocimiento de la materia, y vuelve natural el comportamiento que antes llamaba la atención. Claramente, las "patologías" aquí expuestas son apenas una pequeña parte de los tipos de comportamiento inesperado, así que no se aspira sino a enfatizar unas pocas características de la teoría dela medida, pero espero que su reunión tenga coherencia suficiente.

Notación.

Se respetarán las siguientes convenciones notacionales a lo largo de la tesis:

$\mathfrak{c}$ cardinal del continuo

$\omega_{\mathfrak{c}}$ es el menor ordinal con exactamente $\mathfrak{c}$ predecesores

$\#(A)$ cardinalidad del conjunto A

$\langle\{x_\alpha : \alpha \in \Xi\}\rangle_G$ conjunto formado por las combinaciones lineales de x_α para $\alpha \in \Xi$ con escalares en G

$D(A) = \{x - y : x, y \in A\}$ es el conjunto diferencia de A.

$A \uplus B$ unión de los conjuntos **ajenos** A y B

$\biguplus_{n=1}^{\infty} A_i$ es la unión de la familia de conjuntos **ajenos** $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$.

λ^2 medida (plana) de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$

λ medida (lineal) de Lebesgue

λ_* medida interior de Lebesgue

λ^* medida exterior de Lebesgue

$\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{*}$ $\sigma-$ álgebra de los conjuntos Lebesgue-medibles

λ_f medida de Lebesgue-Stieltjes inducida por la función f

$\mathfrak{M}_f$ ($\mathfrak{M}_\nu$) subconjuntos de $\mathbb{R}$ λ_f- medibles ($\nu-$ medibles)

μ medida arbitraria (en $\mathbb{R}$)

ρ medida exterior

Se utiliza la siguiente notación para llamar a otras secciones de la tesis:

[4] Referencia número 4 dentro de las revistas que aparecen en la bibliografía.

[A.3] Apéndice A, teorema (o lema, propiedad o definición) 3.

[1.19] Teorema (o lema, o propiedad, o corolario o definición) 19 del capítulo 1.

Capítulo 1

ALGUNOS CONJUNTOS MEDIBLES.

En este capítulo se discutirán algunos conjuntos medibles con propiedades curiosas. El conjunto de Cantor clásico aparece como el ejemplo típico de un conjunto no numerable de medida cero. Dentro de ese grupo se ubicará también a conjuntos descritos por medio de su expansión decimal. Más adelante se construirán conjuntos "tipo Cantor" con interior vacío que tienen medida positiva (cantorianos "gordos"), y se mostrará que en general están conformados exclusivamente por números irracionales. Todavía en la recta real, se expondrá una manera de construir conjuntos cuya intersección con cualquier intervalo, así como con su complemento, tiene medida positiva.

Se destacará la importancia del Teorema de Steinhaus, y se examinará un problema de Halmos sobre la medida de un conjunto dada cierta relación de éste con sus traslaciones por elementos de un subconjunto denso de $\mathbb{R}$. En cuanto a subconjuntos del plano, se construye un conjunto de medida cero que contiene círculos de todos los radios.

Esta excursión por el mundo de los conjuntos medibles con propiedades curiosas tiene la intención de mostrar el poder de la medida de Lebesgue para asignar medidas a una amplia gama de conjuntos. Asimismo, permite una comparación de diversas nociones de lo que es grande y lo que es pequeño según distintas áreas de las matemáticas.

I. DOS CONJUNTOS DE CARDINAL c Y MEDIDA CERO.

El primer conjunto que se presenta es un conjunto cerrado, denso en ninguna parte y perfecto. Se obtiene de la intersección de una sucesión de conjuntos definidos inductivamente:

- I_1 es el conjunto resultante de quitar al intervalo $[0,1]$ el subintervalo $\left(\frac{5}{10}, \frac{6}{10}\right)$.
- I_n se obtiene quitando de I_{n-1} los subintervalos $\left(\frac{5+k10}{10^n}, \frac{6+k10}{10^n}\right)$ para

$k \in \left\{0, 1, \ldots, \sum_{k=2}^{n-1} 9 \cdot 10^{n-k}\right\}$

Así se obtiene la colección $\{I_n\}$ y definimos $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. En lo que sigue se demostrará que F es cerrado, denso en ninguna parte y perfecto.

Otra manera de describir a F es por medio de la expansión decimal de los números entre 0 y 1. El problema que esto presenta surge de que la expansión decimal no es única, de manera que se presentará esta otra manera de presentar a F. pero se trabajará con la primera construcción.

Es claro que se obtienen los mismos resultados si en vez de omitirse el sexto décimo se omite uno distinto -de la misma manera que resulta irrelevante el que la partición se hiciera en décimos o en pedazos de cualquier otro tamaño.

Teorema 1.1. Sea $F = \{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n} : a_n$ es un dígito distinto del $5\}$. Entonces F es un conjunto perfecto y denso en ninguna parte.

Demostración.

Es fácil ver que F es cerrado, puesto que cada conjunto I_n es cerrado y F se obtiene de la intersección de estos. Para comprobar que es perfecto, basta con checar que todo punto de F es punto de acumulación. A este efecto es útil observar que los números de la forma $\frac{5+k10}{10^n}$,para

$k \in \left\{0, ..., \sum_{k=2}^{n} 9 \cdot 10^{n-k}\right\}$, pertenecen todos a F.

Sea $x \in F$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $\frac{1}{10^{n_0}} < \varepsilon$. Por lo tanto, existe $k \in \mathbf{N}$ tal que $\left[\frac{m}{10^{n_0}}, \frac{m+1}{10^{n_0}}\right] \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Si $m = 5 + k \cdot 10$, donde $k \in \left\{0, 1, ..., \sum_{k=2}^{n} 9 \cdot 10^{n-k}\right\}$, entonces $\frac{m}{10^{n_0}} \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap F$.

Si m no es de esa forma, subdividimos al intervalo $\left(\frac{m}{10^{n_0}}, \frac{m+1}{10^{n_0}}\right)$ en diez partes iguales . Así, $\frac{m}{10^{n_0}} + \frac{5}{10} \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap F$, lo cual demuestra que x es punto de acumulación de F.

A continuación se verá que para todas $x, y \in F$, $x < y$, existe $z \in (x, y) \backslash F$ y existe $V(z)$ vecindad abierta de z tal que $V(z) \cap F = \phi$ (esto es equivalente, en $\mathbb{R}$, a demostrar que F es denso en ninguna parte [A.16]).

Sean $x, y \in F$, $x < y$. Entonces $\varepsilon = y - x > 0$. Sea $n_0 \in \mathbf{N}$ como antes. Entonces $\left(\frac{m}{10^{n_0}} + \frac{5}{10}, \frac{m}{10^{n_0}} + \frac{6}{10}\right) \cap F = \phi$. Tomamos $z \in \left(\frac{m}{10^{n_0}} + \frac{5}{10}, \frac{m}{10^{n_0}} + \frac{6}{10}\right)$ cualquiera, y como vecindad de z al mismo subintervalo. ■

Teorema 1.2. El conjunto F tiene medida de Lebesgue cero.

Demostración.

Podemos observar que en I_1 se ha removido un subintervalo abierto de tamaño $\frac{1}{10}$, en I_2 se han quitado 9 subintervalos de tamaño $\frac{1}{100}$, al tercer paso la longitud de los subintervalos que se quitan suma $\frac{81}{1000}$, y así sucesivamente: en el enésimo paso se omiten subintervalos de un tamaño total de $\frac{9^{n-1}}{10^n}$. Así, si calculamos la medida de D^c, obtenemos que $\lambda(D^c) = 1$, lo que implica que $\lambda(D) = 0$. ■

El siguiente conjunto de esta sección es el conocido conjunto ternario de Cantor. Aquí sólo se recuerda su construcción y se demuestra que tiene medida cero. Más adelante se estudiarán variantes de este conjunto con propiedades interesantes.

Sea C_0 el intervalo $[0,1]$. Se divide a C_0 en tres subintervalos de igual longitud: $\left[0,\frac{1}{3}\right]$, $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ y $\left[\frac{2}{3},1\right]$, sea $C_1 = \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right]$ el resultado de omitir el intervalo central de C_0. Si ahora cada uno de los intervalos que constituyen a C_1 se divide en tres subintervalos de la misma longitud, en la misma manera en que se dividió a C_0, obtenemos al conjunto C_2 como resultado de quitar el subintervalo abierto del centro tanto de $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ como de $\left[\frac{2}{3},1\right]$. Suponiendo que C_{n-1} ha sido construido, obtenemos a C_n repitiendo este procedimiento para cada intervalo de los que conforman a C_{n-1}. Así, C_n es la unión de 2^n intervalos cerrados, cada uno de longitud $\frac{1}{3^{n-1}}$. El conjunto de Cantor se define como

$$C = \lim_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Se supondrá conocido el hecho de que C es un conjunto perfecto, totalmente disconexo y del cardinal del continuo (los primeros dos resultados se obtienen de manera muy parecida a la vista en el **teorema 1.1**). Esto último es de particular interés puesto que el conjunto de Cantor es tal vez el ejemplo más simple de un conjunto no numerable de medida cero.

Teorema 1.3. Si λ denota a la medida de Lebesgue y C al conjunto ternario de Cantor, entonces $\lambda(C) = 0$.

Demostración.

Denotamos por C^c al conjunto $[0,1] \setminus C$. Entonces

$$\lambda(C^c) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1.$$

Como $\lambda([0,1]) = 1$, es claro que $\lambda(C) = 0$ ■

II. CONJUNTOS TIPO CANTOR DE MEDIDA POSITIVA.

Una construcción análoga a la del conjunto ternario de Cantor clásico arroja conjuntos simétricos de medida positiva. Con un poco de cuidado, podemos obtener, además, conjuntos del tipo Cantor formados únicamente por números irracionales:

Para $\alpha \in (0,1]$, desprendemos del intervalo $[0,1]$ un subintervalo abierto, centrado en $\frac{1}{2}$ de longitud $\frac{\alpha}{3}$, dejando dos subintervalos cerrados de igual tamaño. De éstos, quitamos dos subintervalos abiertos centrales de tamaño $\frac{\alpha}{3^2}$, para dejar 2^2 subintervalos cerrados que tengan una misma longitud. Iterando este procedimiento obtenemos sucesivos conjuntos K_n, formados, en el enésimo paso, por 2^n intervalos cerrados de igual tamaño. A la intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ de estos conjuntos de intervalos la denotamos por C_α. Este conjunto resulta ser perfecto, absolutamente disconexo y de medida $1-\alpha$ (positiva para $\alpha \in (0,1)$). Por haberlos construido dejando en cada paso intervalos de un mismo tamaño, los conjuntos C_α resultantes son simétricos respecto del $\frac{1}{2}$, y en lo que sigue veremos cuándo $C_\alpha \cap (0,1)$ está formado exclusivamente por números irracionales. De hecho, se demostrará el siguiente

Teorema 1.4. El conjunto $\{\alpha \in (0,1] : C_\alpha \setminus \{0,1\} \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$ es de segunda categoría.

Para ello, necesitamos esta

Definición 1.5. Sea $\lfloor x \rfloor = \{\alpha \in (0,1] : x \in C_\alpha\}$.

Si demostramos que $\forall x \in (0,1)$ el conjunto $\lfloor x \rfloor$ es cerrado y denso en ninguna parte, entonces $\bigcup_{x\in A} \lfloor x \rfloor$ será un conjunto de primera categoría para todo $A \subset (0,1)$ numerable. En particular, si $A = \mathbb{Q} \cap (0,1)$ obtendremos un conjunto de primera categoría $Q = \bigcup_{x\in \mathbb{Q}\cap(0,1)} \lfloor x \rfloor$ tal que si $\beta \in (0,1] \setminus Q$, entonces $C_\beta \setminus \{0,1\} \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Para cada $\alpha \in (0,1]$ se obtendrá una función biyectiva $\varphi_\alpha : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow C_\alpha$. La idea tras la definición de φ_α es la siguiente:

Si observamos la construcción de los C_α, veremos que cada $x \in C_\alpha$ resulta de la intersección de una sucesión **única** de intervalos cerrados anidados. Además, una vez que hemos elegido un intervalo en el paso n, hay solamente dos opciones para elegir un intervalo en el paso $n+1$: el intervalo izquierdo o el derecho. Por esta razón es suficiente decir si x está en un intervalo izquierdo o en uno derecho en cada momento de la construcción. La manera en que φ_α hace correponder a subconjuntos S de $\mathbb{N}$ con elementos de C_α es enviando a cada S a la x que está precisamente en el enésimo intervalo **derecho** para cada $n \in S$ y nada más para estos (esto es, si $m \notin S$, es porque x está en el intervalo izquierdo al emésimo paso). Por la manera en que se construyó a C_α, a cada S corresponde una sola x (pues la S determina una sucesión única de intervalos), así que φ_α está bien definida. Asimismo, se puede comprobar que la φ_α resulta ser biyectiva para cada $\alpha \in (0, 1]$.

A continuación veremos una manera de obtener a φ_α explícitamente.

Definición 1.6. Dada $x \in (0,1)$, denotamos por x_n al extremo izquierdo del enésimo intervalo cerrado al que pertenece x. Claramente $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \to x$.

Definición 1.7. Para $S \subset \mathbf{N}$, sea $\Lambda(S) = 2\sum_{n \in S} 3^{-n}$, y sea $\Gamma(S) = \sum_{n \in S} 2^{-n}$. Entonces:

1.8. $\Lambda(\varnothing) = \Gamma(\varnothing) = 0$

1.9. $\bigcup\{\Lambda(S) : S \subset \mathbf{N}\} = C_1$ y $\bigcup\{\Gamma(S) : S \subset \mathbf{N}\} = C_0 = [0, 1]$

(Esto es claro si observamos que Λ permite obtener cualquier número entre 0 y 1 cuya expansión ternaria utilice únicamente ceros y doses, lo que es exactamente el conjunto de Cantor, y que Γ permite escribir cualquier número del intervalo $[0, 1]$ en su expresión binaria).

1.10. $\frac{1}{6} = (\frac{2}{3} - \frac{1}{2}) = \Lambda(\{1\}) - \Gamma(\{1\})$

1.11. *a.* $1 \notin S \neq \varnothing \Rightarrow \Lambda(S) < \Gamma(S)$

b. $1 \in S \neq \mathbf{N} \Rightarrow \Lambda(S) > \Gamma(S)$

(*a*) Por inducción se tiene que si $n > 1$ entonces $3^n > 2^{n+1}$,

De este modo, $2 \cdot 3^{-n} < 2^{-n}\ \forall n > 1$ y así,

$$\Lambda(S) = \sum_{n \in S} 3^{-n} < \Gamma(S) = \sum_{n \in S} 2^{-n} \text{ para toda } S \subset \mathbf{N} \text{ tal que } 1 \notin S. \blacksquare$$

(*b*) $1 \in S \neq \mathbb{N}$. Como $1 \in S$ y $\frac{1}{6} = \Lambda(\{1\}) - \Gamma(\{1\})$, y como $S \setminus \{1\}$ es un subconjunto propio de $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, se tiene que

$$0 \leq \sum_{n \in S \setminus \{1\}} 2^{-n} - \sum_{n \in S \setminus \{1\}} 2 \cdot 3^{-n} < \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} 2^{-n} - \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} 2 \cdot 3^{-n} = \frac{1}{6},$$

por lo que

$$\Gamma(S) - \Lambda(S) = \textstyle\sum_{n \in S} (2^{-n} - 2 \cdot 3^{-n}) = \frac{1}{6} - \sum_{n \in S \setminus \{1\}} (2^{-n} - 2 \cdot 3^{-n}) > 0 \blacksquare$$

Observando la construcción de C_α, vemos que, en el primer paso restan dos intervalos de longitud $l_1 = 2^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)$. En el segundo paso, quedan 4 intervalos de longitud $l_2 = 2^{-1}\left(l_1 - \frac{\alpha}{3^2}\right)$ y, al enésimo paso, tenemos 2^n intervalos, cada uno de longitud

$$l_n = 2^{-1}\left(l_{n-1} - \frac{\alpha}{3^n}\right) = 2^{-n}\left[1 - \left(\frac{\alpha}{3}\right)\left(1 + \frac{2}{3} + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)\right] = 2^{-n}(1-\alpha) + 3^{-n}(\alpha).$$

Entonces, para $S \subset \mathbb{N}$ y $x \in C_\alpha$ tales que $\varphi_\alpha(S) = x$, se sigue que:

$$n \in S \Rightarrow x_n - x_{n-1} = l_n + \frac{\alpha}{3^n} = 2^{-n}(1-\alpha) + 2 \cdot 3^{-n}(\alpha)$$

Como $x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - x_{k-1})$ y $n \notin S \Rightarrow x_n - x_{n-1} = 0$, entonces $x = \sum_{n \in S} ((1-\alpha) \cdot 2^{-n} + \alpha \cdot 3^{-n})$.

Teorema 1.12. La función $\varphi_\alpha : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to C_\alpha$, dada por

$$\varphi_\alpha(S) = (1-\alpha)\Gamma(S) + (\alpha)\Lambda(S),$$

es biyectiva para toda $\alpha \in (0, 1]$.

Demostración.

Sea $\alpha \in (0, 1]$, entonces φ_α está bien definida porque cada $S \subset \mathbb{N}$ define una sucesión única de intervalos cerrados y anidados $\{I_n\}$ tal que $\forall \varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ que hace que $\lambda(I_n) < \varepsilon$. Por lo tanto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ es un único punto $x \in C_\alpha$.

Si $S \neq T$, entonces existe $n \in S \triangle T$. Sin perder generalidad, supongamos que $n \in S$. Entonces, en el enésimo paso, ϕ_α toma el intervalo derecho I_n para S y el izquierdo J_n para T. Puesto que $I_n \cap J_n = \varnothing$, $(\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k) \cap (\bigcap_{k=1}^{\infty} J_k) = \text{o}$, por lo que φ_α es inyectiva.

Por último, si tomamos $x \in C_\alpha$, entonces $x = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, donde cada I_k es un intervalo izquierdo o derecho -pensado como subintervalo de I_{k-1}. Sea

$$\begin{aligned} S_x \quad = \quad & \{k \in \mathbf{N} : I_k \text{ es el subintervalo derecho tras dividir } I_{k-1} \text{ según lo señalado} \\ & \text{en la construcción}\}. \end{aligned}$$

Entonces $\varphi_\alpha(S_x) = x$. ■

Proposición 1.13. Si $\alpha \neq \beta$ y $\varnothing \neq E \neq \mathbf{N}$ entonces

$\varphi_\alpha(S) - \varphi_\beta(S) = (\beta - \alpha)[\Gamma(S) - \Lambda(S)] \neq 0.$

Demostración.

Tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(S) - \varphi_\beta(S) &= [(1-\alpha)\Gamma(S) + \alpha \cdot \Lambda(S)] - [(1-\beta)\Gamma(S) + \beta \cdot \Lambda(S)] = \\ &= [(1-\alpha) - (1-\beta)]\Gamma(S) - (\beta - \alpha)\Lambda(S) = (\beta - \alpha)[\Gamma(S) - \Lambda(S)] \neq 0 \end{aligned}$$

Puesto que por la observación 1.11 se sabe que $\Gamma(E) - \Lambda(E) \neq 0$. ■

1.14. Dadas $\alpha, \beta \in (0, 1]$ se cumple que

$$\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\|_\infty = \frac{|\alpha - \beta|}{6}$$

Esta identidad se verifica como sigue:

$$\begin{aligned} \|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\|_\infty &= \sup\{|\varphi_\alpha(S) - \varphi_\beta(S)| : S \subset \mathbf{N}\} = \\ &= \sup\{|[\beta - \alpha][\Gamma(S) - \Lambda(S)]| : S \subset \mathbf{N}\} \end{aligned}$$

$$= |\alpha - \beta| \sup \{|[\Gamma(S) - \Lambda(S)]| : S \subset \mathbb{N}\} = \tfrac{|\alpha-\beta|}{6}$$

La penúltima igualdad se comprueba fácilmente separando el valor absoluto $|[\Gamma(S) - \Lambda(S)]|$ en casos. ■

Lema 1.15. El conjunto $\lfloor x \rfloor$ es cerrado.

Demostración.

Haremos la demostración comprobando que $\lfloor x \rfloor^c$ es abierto:

Sea $\alpha \in (0,1] \cap \lfloor x \rfloor^c$ entonces $x \notin C_\alpha$ y $d(x, C_\alpha) = \inf\{d(x,y) : y \in C_\alpha\} > 0$. De hecho, como C_α es compacto, el ínfimo se alcanza. De este modo, si tomamos β de manera que $|\beta - \alpha| < 6 \cdot d(x, C_\alpha)$, podemos demostrar que $x \notin C_\beta$. Procederemos por reducción al absurdo:

Supongamos que $x \in C_\beta$, entonces $\exists S_x \subset \mathbb{N}$ tal que $\varphi_\beta(S_x) = x$, entonces

$$\tfrac{|\alpha-\beta|}{6} < d(x, C_\alpha) = \min\{|\varphi_\alpha(S) - x| : S \subset \mathbb{N}\} \leq |\varphi_\alpha(S_x) - \varphi_\beta(S_x)| \leq$$

$$\leq \sup\{|\varphi_\alpha(S) - \varphi_\beta(S)| : S \subset \mathbb{N}\} = \|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\|_\infty = \tfrac{|\alpha-\beta|}{6},$$

lo cual es absurdo.

Entonces $x \notin C_\beta$ y $\beta \notin \lfloor x \rfloor$, así que $\lfloor x \rfloor$ es cerrado. ■

Definición 1.16. Sea $<_\bullet$ una relación binaria entre elementos de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por:

$E <_\bullet F \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $E_{n-1} = F_{n-1}$ y $E_n \subset F_n$, $E_n \neq F_n$,

donde $H_k = H \cap \{1, ..., k\}$, $k \geq 0$.

Lema 1.17. La relación $<_\bullet$ definida en 1.16 es un orden total [A.2.]

Se deja la demostración al lector.

Lema 1.18. Para toda $\alpha \in (0,1]$, $E <_\bullet F \Leftrightarrow \varphi_\alpha(E) < \varphi_\alpha(F)$.

Demostración.

Tomando $n = \min\{k \in \mathbb{N} : k \in F \backslash E\}$ tenemos que

$\frac{(1-\alpha)}{2^n}+\frac{\alpha}{3^n}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{(1-\alpha)}{2^k}+\frac{\alpha}{3^k}\right)\geq\sum_{k\in E^{n+1}}\left(\frac{(1-\alpha)}{2^k}+\frac{\alpha}{3^k}\right)$, donde

$$H^m = H \cap \{m, m+1, \ldots\}$$

entonces $\varphi_\alpha(E) \leq \varphi_\alpha(F)$. Por inyectividad de φ_α, $\varphi_\alpha(E) \neq \varphi_\alpha(F)$, así que $\varphi_\alpha(E) < \varphi_\alpha(F)$.

Lema 1.19. La función $f:(0,1] \to (0,1]$ dada por $f(\alpha) = \varphi_\alpha(S)$ es continua.

Sea $\varepsilon > 0$. Sea $\delta = 6\varepsilon$. Si $|\alpha - \beta| < \delta$ entonces

$$|\varphi_\alpha(S) - \varphi_\beta(S)| \leq \|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\|_\infty = \frac{|\alpha-\beta|}{6} < \varepsilon$$

■

Lema 1.20. Para toda $x \in (0,1)$, $\lfloor x \rfloor$ es denso en ninguna parte.

Demostración.

Sea $x \in (0,1)$, y $\alpha, \beta \in (0,1)$ tales que $\varphi_\alpha(E) = x = \varphi_\beta(F)$. Como $<_*$ es orden *total*, podemos suponer sin perder generalidad que $E <_* F$. Vamos a encontrar $\gamma \in (\alpha, \beta)$ para la que exista una vecindad abierta V_γ tal que $\rho \in V_\gamma \Rightarrow x \notin C_\rho$.

Sea $n = \min\{k \in \mathbb{N} : k \in F \setminus E\}$.

Sea $G = E_n \cup \{n+1, n+2, \ldots\}$.

Si definimos $U_\rho = (\varphi_\rho(G), \varphi_\rho(F_n)) \subset \mathbb{R}$ entonces $\emptyset \neq U_\rho \subset [0,1] \setminus C_\rho$.

Además, $\varphi_\beta(G) < \varphi_\beta(F_n) \leq x \leq \varphi_\alpha(G) < \varphi_\alpha(F_n)$. Como U_ρ se deforma continuamente de U_α en U_β cuando ρ va de α a β[1], existe $\gamma \in (\alpha, \beta)$ para la que $x \in U_\gamma$. Esto es, para la que $\gamma \notin \lfloor x \rfloor$. Como $\lfloor x \rfloor$ es cerrado, existe una vecindad abierta de γ, $V_\gamma \subset \lfloor x \rfloor^c$. Así, $\forall \rho \in V_\gamma$, $x \notin C_\rho$. Por lo tanto, $\lfloor x \rfloor$ es denso en ninguna parte. ■

[1] Por el **lema 1.19**, a cambios pequeños de ρ corresponden cambios pequeños de $\varphi_\rho(G)$ y de $\varphi_\rho(F_n)$, o lo que es lo mismo, de U_ρ.

Teorema 1.21. El conjunto $Q = \bigcup_{x\in(0,1)\cap\mathbb{Q}} \lfloor x \rfloor$ es de primera categoría.

Demostración.

Se sigue del **lema 1.20.** ■

Resumiendo, hemos obtenido el

Teorema 1.22. El conjunto $I = (0,1]\setminus Q$, es de segunda categoría. Si $\alpha \in I$ entonces $C_\alpha \cap (0,1)$ está formado exclusivamente por números irracionales, es simétrico y tiene medida positiva $1-\alpha$.

Teorema 1.23. Sea $K = \bigcup\{(x,y) \in l_{\Gamma,\Lambda}(E) : E \subset \mathbb{N}\} \subset [0,1]^2$, donde $l_{\Gamma,\Lambda}(E)$ es el segmento de recta que une a $(\Gamma(E), 0)$ con $(\Lambda(E), 1)$. Entonces

$$C_\alpha = K \cap [\mathbb{R} \times \{\alpha\}] \text{ y } \lfloor a \rfloor = K \cap [\{a\} \times \mathbb{R}].$$

Demostración.

Si para cada $l_{\Gamma,\Lambda}(E)$ escribimos la ecuación correspondiente, obtenemos una expresión como la siguiente:

$$y = \frac{x}{\Lambda(E) - \Gamma(E)} + \left[\frac{\Lambda(E)}{\Gamma(E) - \Lambda(E)} + 1\right]$$

Cuando tomamos la intersección de K con la recta $y = \alpha$ y despejamos x, esta ecuación se convierte en:

$$x = (1-\alpha)\cdot\Gamma(E) + \alpha\cdot\Lambda(E)$$

Es decir, al variar $E \subset \mathbb{N}$ obtenemos $\bigcup\{\varphi_\alpha(E) : E \subset \mathbb{N}\} = C_\alpha$ de esta intersección. Análogamente, la intersección de K con $x = a$ deja:

$$a = (1-y)\cdot\Gamma(E) + y\cdot\Lambda(E)$$

lo puntos que se quedan son exactamente aquellos $\alpha \in (0, 1]$ que hacen que $x \in C_\alpha$. ■

Teorema 1.24. K es cerrado.

Demostración.

Sea $(x_0, y_0) \notin K$.

Supongamos que (x_0, y_0) es punto de acumulación de K. Entonces existe $\{(x_n, y_n)\} \subset K$ tal que $(x_n, y_n) \longrightarrow (x_0, y_0)$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Para cada $n \in \mathbf{N}$, sea $l_n = l_{\Gamma,\Lambda}(E) \in K$ tal que $(x_n, y_n) \in l_n$. Se demostrará que la sucesión dada por $(x'_n, y_0) = l_n \cap \mathbf{R} \times \{y_0\}$ también converge a (x_0, y_0).

Supongamos que existe $\delta > 0$ tal que $|x_n - x'_n| = d((x_0, y_0), (x'_n, y_0)) \geq \delta$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Como las pendientes de los segmentos de recta $l_{\Gamma,\Lambda}(E)$ varían entre -1 y 1, los puntos $(x_0 - \delta, y_0)$, $(x_0, y_0 - \delta)$, $(x_0, y_0 + \delta)$ y $(x_0 + \delta, y_0)$ son los vértices de un cuadrado -rotado $\frac{\pi}{4}$ - adentro del cual no hay elementos de K. Pero supusimos que $\{(x_n, y_n)\}$ era una sucesión convergente a (x_0, y_0), así que no puede existir dicha δ.

Por lo tanto, $(x_0, y_0) \in C'_{y_0} = C_{y_0}$, así que $(x_0, y_0) \in K$, contradiciendo nuestra elección de (x_0, y_0). ■

Proposición 1.25. $\lambda^2(K) = \frac{1}{2}$

Demostración.

Podemos escribir

$$\lambda^2(K) = \int_0^1 \lambda(K^\alpha)\, d\lambda(\alpha) = \int_0^1 (1 - \alpha)\, d\lambda(\alpha) = \frac{1}{2},$$

donde K^α denota la α−sección de K definida por

$$K^\alpha = \{x \in [0, 1] : (x, \alpha) \in K\} = C_\alpha \times \{\alpha\}. \blacksquare$$

III. UN CONJUNTO "FLACO" DE CIRCUNFERENCIAS.

El conjunto que se expone a continuación es un subconjunto del plano, formado por circunferencias de todos los radios, que tiene medida cero. Se conocen construcciones de conjuntos con estas mismas características dadas por BESICOVICH Y RADO [1] y por KINNEY [6]. Sus resultados fueron obtenidos de manera independiente. y DAVIES [4] aportó una construcción más cuatro años después. El conjunto de Kinney es muy simple, pero su demostración de que tiene medida cero es muy complicada. Davies da una construcción menos simple, y basa su demostración en las propiedades de los 1-conjuntos (definidos en el **1.32**) y en ciertas propiedades de la medida de Hausdorff que se enuncian a continuación (sin demostración):

Definición 1.26. Dado un subconjunto no vacío U de $\mathbb{R}^n$, definimos el *diámetro* de U como $|U| = \sup\{\|x-y\|_2 : x, y \in U\}$, donde $\|\|_2$ es la métrica euclidiana en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.27. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ tal que $E \subset \bigcup_i U_i$ donde $U_i \subset \mathbb{R}^n$ y $0 < |U_i| \leq \delta$ para toda i, con $\delta > 0$. Entonces decimos que $\{U_i\}$ es una $\delta -$ *cubierta* de E.

Definición 1.28. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ y $s \geq 0$. Para $\delta > 0$ definimos

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es una } \delta - \text{cubierta } \textbf{numerable} \text{ de } E\right\}$$

Se puede comprobar que es una medida exterior en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.29. Definimos la *medida exterior de Hausdorff $s-$dimensional* de E haciendo $\delta \longrightarrow 0$. Así,

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(E).$$

Es interesante observar que este límite existe siempre, si bien puede ser infinito, ya que $\mathcal{H}^s_\delta$ crece cuando δ decrece.

También $\mathcal{H}^s$ es medida exterior. La restricción de $\mathcal{H}^s$ a la $\sigma-$ álgebra de los conjuntos $\mathcal{H}^s-$medibles recibe el nombre de *medida de Hausdorff s − dimensional.* Esta $\sigma-$ álgebra contiene a la $\sigma-$ álgebra de Borel.

Definición 1.30. Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^s-$ medible y tal que $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ recibe el nombre de *s − conjunto*. A los 1-conjuntos también se les llama conjuntos *linealmente medibles*.

Nótese que las medidas λ y $\mathcal{H}^1$ coinciden en $\mathbb{R}$. Obsérvese también que para un conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$, la proyección de E sobre una recta cualquiera de pendiente u (denotada $\pi_u(E)$) cumple que $\lambda(\pi_u(E)) \leq \mathcal{H}^1(E)$.

Teorema 1.31. Si $E \subset \mathbb{R}^2$ es un 1-conjunto entonces se cumple una (y sólo una) de las siguientes:

(i) La medida lineal de Lebesgue de la proyección de E sobre todas las direcciones[2] excepto tal vez una es positiva.

(ii) La medida de la proyección de E es cero para casi todas las direcciones[3] .

Definición 1.32. Un 1-conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ es *irregular* si la medida de la proyec-

[2] Esto quiere decir que, si tomamos el haz de rectas que pasan por el origen y proyectamos E -perpendicularmente- sobre cada una de ellas, la medida (lineal) de Lebesgue de esta proyección será positiva para todas las rectas excepto tal vez una.

[3] Es decir, que el conjunto formado por las pendientes de las rectas que hacen que la medida λ de la proyección de E sobre ellas sea positiva tiene medida lineal de Lebesgue cero. Así, si denotamos como $A = \{u : \lambda(\pi_u(E)) > 0\}$, donde π_u es la proyección sobre la recta con pendiente u, tenemos que $\lambda(A) = 0$.

ción de E es cero para casi todas las direcciones.

Claramente, si E es un 1-conjunto cuya proyección sobre dos direcciones distintas tiene medida cero, entonces E es irregular.

Teorema 1.33. Si un 1-conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ es irregular y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función analítica, entonces $A = \{f(x) : x \in E\}$ es un 1-conjunto irregular.

Para una discusión más amplia de las propiedades de estos conjuntos se recomienda al lector acudir al libro de K. J. Falconer que aparece en la bibliografía.

La exposición siguiente utilizará la construcción de Kinney junto con las propiedades de las proyecciones de los 1-conjuntos irregulares.

Sea C el conjunto de Cantor. Se sabe que $[0,1] \subset \{d - c : (c,d) \in C \times C\}$. Puesto que toda $r \in (0,1)$ se puede escribir de al menos tres maneras distintas como diferencia de dos números en C, para cada $r \in [0,1]$ elegimos el par $(c,d) \in C \times C$ que se encuentra ubicado más a la izquierda que los demás y tal que $r = d - c$ (esto es posible[4] dado que $C \times C$ es compacto).

Sea E el conjunto formado por dichos pares.

Para $(c,d) \in E$ construimos la circunferencia centrada en $\left(\frac{c+d}{2}, 0\right)$ y de radio $\frac{d-c}{2}$. Claramente, la unión de estos círculos sobre los puntos de E contiene circunferencias de cualquier radio entre 0 y $\frac{1}{2}$.

Definición 1.34. El *conjunto de Kinney* es esa unión. Si denotamos por $C_{(p,q),r} = \{(u,v) : u^2 + v^2 = 2up + 2vq + r^2 - p^2 - q^2\}$ al círculo centrado en el punto

[4] Sea $f : C \times C \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = y - x$ y sea $S_{x_0} = \{(x,y) : x_0 \leq x, y \in \Re\}$. Claramente, para $r \in [0,1]$ fija, el conjunto $R = \{x_0 : f^{-1}(r) \subset S_{x_0}\}$ tiene supremo (pues $0 \in R$ implica que R es no vacío y $S_{x_0} \cap f^{-1}(r) = \emptyset$ para toda $x_0 > 1$, así que R está acotada superiormente por el 1). Es fácil comprobar -usando la compacidad de C- que el par ordenado $(\sup R, \sup R + r)$ es el elemento de $C \times C$ más a la izquierda del conjunto y con la propiedad de que $y - x = r$. ∎

(p, q) con radio r, lo podemos escribir como

$$K = \bigcup_{(c,d)\in E} C_{\left(\left(\frac{c+d}{2},0\right),\frac{d-c}{2}\right)}$$

Tomando una cantidad numerable de copias similares al conjunto de Kinney obtenemos un conjunto de medida cero que contiene círculos de todos los radios.

Teorema 1.35. El conjunto de Kinney tiene medida cero.

Demostración.

Primero se demostrará que existe un 1-conjunto compacto irregular $E_1 \subset C \times C$ tal que $E \subset E_1$.

Construiremos E_1 a partir de la intersección de los siguientes conjuntos (definidos inductivamente):

En el primer paso construyamos tres cuadrados $I_{1,1}$, $I_{1,2}$ e $I_{1,3}$ de lado $\frac{1}{3}$ en las dos esquinas inferiores y en la esquina superior izquierda del cuadrado unitario. En el segundo paso, construyamos 3^2 cuadrados $I_{2,1}, \ldots, I_{2,3^2}$ de lado $\frac{1}{3^2}$, localizados en las 2 esquinas inferiores y en la esquina superior izquierda de cada uno de los cuadrados del paso uno. Se continúa de esta manera para obtener una sucesión $\{I_{n,j}\}_{j=1,\ldots,3^n}^{n=1,\ldots,\infty}$.

Sea $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=1}^{3^n} I_{n,j}\right)$.

Sea E_1 la intersección de G con el triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Claramente, E_1 es compacto. A continuación veremos que $E \subset E_1$.

Si $(x_0, y_0) \in E$ es porque $0 \leq y_0 - x_0 \leq 1$, i.e., $y_0 \geq x_0$, así que todos los pares ordenados que están en E se ubican por encima de la recta $y = x$.

Como para toda $r \in [0,1]$ existen $x_0, y_0 \in C$ tales que $y_0 - x_0 = r$, hay puntos $(x_0, y_0) \in C \times C$ tales que cumplen con la ecuación de la recta $y = x + r$. Puesto que

$C \times C$ es un conjunto simétrico respecto a la recta $y = 1 - x$, podemos garantizar que siempre existe el par (x_0, y_0) en $C \times C$ y por debajo de la recta $y = 1 - x$ que hace que $y_0 - x_0 = r$. También por razones de simetría de $C \times C$ se puede ver que para toda $r \in [0, 1]$ hay un punto $(x_0, y_0) \in E_1$ tal que $y_0 - x_0 = r$. Como E_1 no omite a la pareja (x, y) más a la izquierda en $C \times C$ con la propiedad deseada, $E \subset E_1$.

De esta manera, la proyección de E_1 sobre la recta $y = -x$ (dada por la función $\Pi(x, y) = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$) es el segmento de longitud $\frac{\sqrt{2}}{2}$. De ahí que la medida lineal de E_1, $\mathcal{H}^1(E_1) \geq \lambda(E_1) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Como E_1 se puede cubrir con $\frac{3^n+1}{2}$ cuadrados de lado $\frac{1}{3^n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{H}^1(E_1) \leq lim_{n \to \infty} \frac{3^n + 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3^n} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{H}^1(E_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, así que E_1 es un 1-conjunto.

La demostración de que E_1 es irregular se sigue fácilmente del hecho de que las proyecciones de E_1 sobre el eje x y el eje y son subconjuntos del conjunto de Cantor, por lo que son de medida cero.

A continuación daremos una función analítica bajo la cual la imagen de E_1 es un conjunto que contiene al conjunto de Kinney. Se verá que dicha imagen tiene medida cero, lo que por completez de la medida implica que K es de medida cero.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la función dada por $f(x, y) = (x + y, -xy)$. Claramente, f es real-analítica. Por el **teorema 1.33,** $A = \{f(x) : x \in E_1\}$ es un 1-conjunto irregular compacto. Utilizando la notación establecida en la definición 1.34, tenemos que

$$K = \bigcup_{(c,d) \in E} C_{((\frac{c+d}{2}, 0), \frac{d-c}{2})} \subset \bigcup_{(c,d) \in E_1} C_{((\frac{c+d}{2}, 0), \frac{d-c}{2})}$$

Ahora, para $(a,b) \in A$, sea $D_{(a,b)} = \{(u,v) : u^2 + v^2 = au + b\}$ y sea $D = \bigcup_{(a,b)\in A} D_{(a,b)}$. Demostraremos que $K \subset D$.

Sea $(c,d) \in E \subset E_1$ entonces $(c+d, -cd) \in A$, por lo que

$$C_{((\frac{c+d}{2},0),\frac{d-c}{2})} = \left\{(u,v) : (u - \tfrac{c+d}{2})^2 + (v-0)^2 = \left(\tfrac{d-c}{2}\right)^2\right\} =$$
$$= \{(u,v) : u^2 + v^2 = (c+d)u - cd\} = D_{(c+d,-cd)} \in D.$$

Por lo tanto,

$$K = \bigcup_{(c,d)\in E} C_{((\frac{c+d}{2},0),\frac{d-c}{2})} \subset \bigcup_{(c,d)\in E} D_{(c+d,-cd)} = \bigcup_{(a,b)\in A} D_{(a,b)} = D.$$

Puesto que A es compacto, D es cerrado (de hecho, resulta ser compacto) y por lo tanto es medible. Para demostrar que la medida de D es cero, utilizaremos el teorema de Fubini y el hecho de que $D_u = \{v : (u,v) \in D\}$ es un conjunto de medida cero para casi toda u. A continuación se demostrarán varias afirmaciones con el objeto de obtener esto.

Como A es un 1-conjunto irregular, su proyección sobre la recta de pendiente $m = \frac{-1}{u}$ (que denotaremos con $l_{\frac{-1}{u}}$) tiene medida cero para casi toda u. El conjunto de intersecciones con el eje y de las rectas con pendiente fija u por puntos (a,b) de A se puede ver como una transformación lineal del conjunto A proyectado en la recta $l_{\frac{-1}{u}}$. Puesto que este tenía medida cero para casi toda u, dicho conjunto de intersecciones tiene medida cero para casi toda u.

Pero tenemos que $(u,v) \in D$ si y sólo si existe $(a,b) \in A$ tal que $u^2+v^2 = au+b$, es decir. si y sólo si u^2+v^2 es la intersección con el eje y de la recta con pendiente $-u$ por un punto (a,b) de A. Por lo tanto, para casi toda u el conjunto $\{u^2 + v^2 : (u,v) \in D\}$ es de medida cero. Esto quiere decir que $\{v : (u,v) \in D\} = D_u$ es un conjunto de medida cero para casi toda u. Por el Teorema de Fubini, D tiene medida cero. Puesto que λ^2 es una medida completa, el conjunto de Kinney es medible y es de medida cero. ■

IV. UN CONJUNTO "ARQUIMEDIANO"

El siguiente es un teorema en el que se demuestra la existencia de conjuntos medibles que intersectan a cualquier intervalo en un conjunto de medida positiva, pero menor a la del intervalo. Es resultado de la pregunta natural de si hay una manera de separar a los números reales en dos subconjuntos A y B de modo tal que cualquier intervalo intersecta en un conjunto de la mitad de su medida a uno y a otro subconjuntos y, si bien la respuesta es negativa, se obtiene una "separación" de $\mathbb{R}$ con características parecidas:

Teorema 1.36. Existe un conjunto de tipo $\mathfrak{F}_\sigma$ y denso en ninguna parte $A \subset I = [0, 1]$ tal que

$$0 < \lambda(A \cap V) < \lambda(V)$$

para todo $V \subset I$ conjunto abierto no vacío.

Demostración.

Se abreviará con CTDP el ser un subconjunto de I "Compacto, Totalmente Disconexo y de medida Positiva"[5] (un ejemplo de éstos son los conjuntos C_α que se

[5] Es interesante observar que si un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es compacto y totalmente disconexo, entonces es denso en ninguna parte:

Sea $A \subset \mathbb{R}$ compacto y totalmente disconexo. Sean $x, y \in A$ tales que $x < y$. Tomamos $z \in (x, y) \setminus A$. Demostraremos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(z - \frac{1}{n}, z + \frac{1}{n}) \cap A = \emptyset$.

Supongamos que no es así. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $z_n \in (z - \frac{1}{n}, z + \frac{1}{n}) \cap A$. Pero entonces la colección de bolas abiertas con centro en z_n y radio $\frac{1}{n(n+1)}$ sería parte de una cubierta abierta de A sin subcubierta finita. Pero esto contradice la compacidad de A, lo que demuestra que la z elegida debe tener una vecindad abierta, ajena con A. ■

estudiaron en el inciso anterior).

Sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración de los subintervalos de I con extremos racionales. Construímos sucesiones $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos CTDPs como sigue:

Tómense A_1, B_1 conjuntos CTDPs ajenos (se pueden elegir ajenos por ser densos en ninguna parte) contenidos en I_1.

Una vez elegidos $A_1, B_1, ..., A_{n-1}, B_{n-1}$, su unión C_n es un conjunto totalmente disconexo y compacto, y por lo tanto es un conjunto denso en ninguna parte, de manera que $I_n \backslash C_n$ contiene algún subintervalo no vacío J, que a su vez contiene a otra pareja A_n, B_n de conjuntos ajenos CTDPs. Con las sucesiones así obtenidas, formamos

$$A = \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Entonces, si $V \subset I$ es un intervalo abierto y no vacío, existe I_n subintervalo con extremos racionales contenido propiamente en V para alguna n. Por lo tanto, $A_n \subset V$ y $B_n \subset V$, de donde

$$0 < \lambda(A_n) \leq \lambda(A \cap V) < \lambda(A \cap V) + \lambda(B_n) \leq \lambda(V).$$

La última desigualdad es cierta porque A y B_n son ajenos. ■

NOTA: Usando conjuntos similares se puede construir $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto de tipo $\mathfrak{F}_\sigma$ y denso en ninguna parte tal que $\lambda(A) < \infty$ y $0 < \lambda(A \cap V) < \lambda(V)$ $\forall V \subset \mathbb{R}$ abierto.

Una construcción explícita de un conjunto que cumpla con los requisitos del **Teorema** 1.30 se encuentra en un artículo de A. SIMOSON [10]. Sin embargo, la demostración anterior es más directa y basta para exhibir la existencia de cierto conjunto en el próximo capítulo.

V. EL TEOREMA DE STEINHAUS

En esta subsección se presentan dos versiones del teorema de Steinhaus. La primera se destaca por mostrar una extensión interesante y natural del teorema original , en la que se consideran las cuatro operaciones aritméticas básicas que se pueden realizar con un conjunto y se estudia la existencia de intervalos en los conjuntos resultantes (en $A+B$, y $A \cdot B$ y A/B cuando el cero no forma parte de los conjuntos en los últimos dos casos).

La segunda versión tiene el interés de presentar el resultado de Steinhaus en un marco más general: la demostración utiliza sólo propiedades de un grupo topológico localmente compacto.

Dentro de esta sección se enuncia también la formulación más frecuente del teorema. No se expone su demostración por quedar esta cubierta con la del **teorema 1.41**.

Teorema de Steinhaus.

Sea A subconjunto de $\mathbb{R}$ Lebesgue-medible y tal que $\lambda(A) > 0$. Entonces el conjunto diferencia $D(A) = \{x - y : x, y \in A\}$ contiene un intervalo abierto que tiene al cero como punto interior.

Para nuestra siguiente definición recordemos que un conjunto A tiene medida cero si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto abierto U_n tal que $A \subset U_n$ y $\lambda(U_n) < \frac{1}{n}$. Entonces $A \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ es de tipo G_δ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ tiene medida cero.

Definición 1.37. Si además es cierto que un conjunto D, denso en $\mathbb{R}$, está contenido en A, entonces decimos que A es un conjunto G_δ *−denso.*

NOTA: Este concepto se puede tomar también en relación con un subconjunto de los números reales. Esto es, de manera que A sea un conjunto denso en un intervalo no vacíoI.

Lema 1.38. Si H es un conjunto tipo G_δ−denso, entonces $\mathbb{R}\setminus H$ es un conjunto de primera categoría.

Demostración.

Escribimos $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$, donde los H_n son un conjuntos abiertos tales que un conjunto D denso en $\mathbb{R}$ está contenido en H_n para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $(H_n)^c$ es un conjunto cerrado y denso en ninguna parte (pues si contuviera intervalos, entonces $D \cap (H_n)^c$ sería no vacío, lo cual es absurdo). ■

Teorema 1.39. Sean G y H dos conjuntos tipo G_δ, "densos" en sendos intervalos abiertos no vacíos I y J. Si $*$ denota a cualquiera de las cuatro operaciones aritméticas $+, -, \cdot$ ó $/$, entonces

$$G * H = I * J.$$

Excepto que en el caso de la multiplicación y la división el 0 puede encontrarse en $I * J$ pero no en $G * H$.

Demostración.

Primeramente, considérese el caso más sencillo: $I = J = \mathbb{R}$ y $* = +$.

Sea $r \in \mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = r - x$.

Puesto que f es un homeomorfismo, si U es un conjunto abierto. $f(U)$ también lo es. y $f(U \cap V) = f(U) \cap f(V)$, de donde $f(H)$ es un conjunto tipo G_δ y sigue siendo denso en $\mathbb{R}$. Por eso y por el **lema 1.38**, $\mathbb{R}\setminus f(H)$ es de primera categoría. Si aplicamos el Teorema de la Categoría de Baire, obtenemos que $f(H)$ es de segunda categoría, por lo que no puede quedar contenido en $\mathbb{R}\setminus G$, que también es de primera categoría.

Esto quiere decir que existe $x \in H$ tal que $f(x) \in G$. Pero $f(x)+x = r$, de manera que $r \in G + H$, y $\mathbb{R} = I * J \subset G * H$. La otra contención es obvia.

Para I y J arbitrarias, sea $r = i_0 + j_0 \in I + J$. Como I y J son abiertos y $i_0 = i_0 + j_0 - j_0 \in I \cap (r - J)$, entonces $X = I \cap (r - J)$ es un intervalo abierto no vacío y tanto $G \cap X$ como $f(H) \cap X$ son conjuntos tipo G_δ densos en X, de manera que $G \cap f(H) \cap X \neq \varnothing$ y $r = f(x) + x$ para alguna $x \in H$, i.e., $r \in G + H$. Por lo tanto, $I + J \subset G + H$.

Cuando la operación es la resta, tomamos $f(x) = x + r$; para el producto, sea $f(x) = r/x$, y para la división sea $f(x) = rx$ con $r \neq 0$ en los últimos dos casos. La demostración es análoga, puesto que en todos los casos f es un homeomorfismo. ∎

Lema 1.40. Sea G un grupo topológico [B.1] con idéntico e, F un subconjunto compacto de G, y U un subconjunto abierto de G tal que $F \subset U$. Entonces existe una vecindad V de e tal que $(F + V) \cup (V + F) \subset U$.

Demostración.

Como U es abierto y $F \subset U$, para toda $x \in F$ existen V_x, W_x vecindades abiertas de e tales que $x + V_x \subset U$ y $W_x + x \subset U$. Entonces $\{x + V_x\}$ y $\{W_x + x\}$ son dos cubiertas abiertas para F. Por la compacidad de F existen $\{x_1(v), \ldots, x_n(v)\}$ y

$\{x_1(w), ..., x_m(w)\}$ subconjuntos finitos de F tales que

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i + V_{x_i} \text{ y } F \subset \bigcup_{j=1}^{m} W_{x_j} + x_j.$$

Si definimos $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ y $W = \bigcap_{i=1}^{m} W_{x_i}$, entonces

$$X = V \cap W$$

es una vecindad de e para la cual $(X + F) \cup (F + X) \subset U$. ■

Teorema 1.41. Sea G un grupo topológico [B.1] localmente compacto con idéntico e y μ una medida izquierda de Haar [B.3]. Si A es un subconjunto $\mu-$ medible de G tal que

$0 < \mu(A) < \infty$, entonces el conjunto $A - A = \{y - x : x, y \in A\}$ tiene a e como punto interior.

Demostración.

Como μ es regular, $\mu(A) = \sup\{\mu(E) : E \text{ es compacto y } E \subset A\}$, de manera que se supondrá que A es compacto. También por regularidad existe un conjunto abierto U tal que $A \subset U$ y $\mu(U) < 2 \cdot \mu(A)$. Como se vio en el **lema 1.34**, existe una vecindad V de e para la cual $V + A \subset U$. A continuación se demostrará que precisamente para esta vecindad V, $V \subset A - A$. Para ello:

Sea $v \in V$. Entonces $v + A \cap A \neq \emptyset$, puesto que si A y $v + A$ fueran ajenos,

$$\mu(U) \geq \mu(v + A) + \mu(A) = 2 \cdot \mu(U).$$

Por lo tanto, existen $x, y \in A$ tales que $v + x = y$, así que $v = y - x$. ■

Para demostrar la siguiente aplicación del Teorema de Steinhaus:

Teorema 1.42. Toda $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función aditiva y medible es lineal.

Necesitaremos del siguiente lema:

Lema 1.43 Toda función f aditiva y acotada en alguna vecindad del 0 es continua.

Demostración.

Sea $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M$ para toda $x \in U$. Se demostrará que f es continua en 0.

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{M}{n} < \varepsilon$.

Sea $\delta' > 0$ tal que $(-\delta', \delta') \subset U$.

Sea $\delta = \frac{\delta'}{n}$. Sea $x \in (-\delta, \delta)$, entonces $x = \frac{z}{n}$ para $z \in (-\delta', \delta')$. Entonces $|f(x) - f(0)| = |f(x)| = \left|\frac{1}{n} f(z)\right| = \frac{1}{n} |f(z)| \leq \frac{M}{n} < \varepsilon$.

Claramente, por la aditividad de f se tiene la continuidad en todo $\mathbb{R}$. ∎

Lema 1.44. Toda $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ función aditiva y continua es lineal.

Demostración.

Tenemos que $\forall m, n \in \mathbb{Z}$, $f(\frac{m}{n}x) = \frac{m}{n} f(x)$. Por continuidad de la función. $\forall r \in \mathbb{R}$, $f(rx) = rf(x)$. ∎

Demostración del teorema 1.42.

Sea $E_m = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq m\}$. Entonces $\mathbb{R} = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$. Por lo tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda(E_m) > 0$. Por el **teorema de Steinhaus,** existe una U vecindad del cero tal que $U \subset D(E_m)$. Así, si $x \in U$, entonces $x = y - z$ para algunos $y, z \in E_m$. De manera que $|f(x)| = |f(y) - f(z)| \leq 2m$. Por lo tanto, f está acotada en U. Por los **lemas 1.43 y 1.44**, f es lineal. ∎

La siguiente aplicación del **teorema de Steinhaus** sirve para dar un ejemplo de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ con medida λ^2 positiva pero que no contiene ningún rectángulo de medida positiva:

Ejemplo 1.45. Sea $X = \mathbb{R}$, $S = \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ y λ la medida lineal de Lebesgue. Sea $E \subset [0,1]$ un conjunto tipo Cantor de medida positiva.

Definimos $S \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}} \times \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ por $S = \{(x, e - x) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1]\,,\ e \in E\}$. Tomando la función $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi(x,y) = (x, y - x)$, tenemos que $S = \{\varphi(x,y) : x \in [0,1]\,,\ y \in E\}$, por lo que S es compacto y por lo tanto medible. Por el Teorema de Fubini,

$(\lambda \times \lambda)(S) = \int_0^1 \left(\int_0^1 \chi_S(x,y)\, dy \right) dx = \int_0^1 \lambda(E)\, dx = \lambda(E) > 0.$

Supongamos que existe un rectángulo medible $A \times B \subset S$ de $\lambda \times \lambda$ medida positiva. Entonces $\lambda(A) > 0$ y $\lambda(B) > 0$. Por el **teorema de Steinhaus,** $A + B$ contiene un intervalo abierto no vacío. Pero $(a,b) \in A \times B \subset S$. Entonces $a + b = e$ para alguna $e \in E$. Entonces $A + B \subset E$, lo cual es absurdo. ■

VI. UN CONJUNTO EN RELACIÓN CON SUS TRASLACIONES.

A continuación se obtendrá un resultado que relaciona la medida de un conjunto (o de su complemento) con la medida de las diferencias simétricas del conjunto con distintos trasladados suyos. Este resultado permite obtener propiedades específicas no ya de un solo conjunto medible, sino de toda una clase de estos:

Teorema 1.46. Si D es un subconjunto denso de $\mathbb{R}$ y E es un subconjunto de $\mathbb{R}$ Lebesgue-medible tal que

$$\lambda(E \triangle (E + x)) = 0 \text{ para toda } x \in D.$$

entonces, o bien $\lambda(E) = 0$, o $\lambda(E^c) = 0$.

NOTA: Para esta demostración se usará un resultado que depende del siguiente

Lema 2.1. Para cualquier $E \subset \mathbb{R}$ conjunto Lebesgue-medible de medida positiva, si $\alpha \in (0,1)$, entonces existe un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que $\lambda(E \cap I) \geq \alpha \cdot \lambda(I)$.

Este **lema** se demuestra en el próximo capítulo, pero su demostración es independiente del **teorema 1.43.**

Lema 1.47. Sean $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto Lebesgue medible y de medida positiva. $\alpha \in (0,1)$, e $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto no vacío tal que $\lambda(E \cap I) \geq \alpha\lambda(I)$ (dicho intervalo existe por el **lema 2.1**). Sea

$$I = \biguplus_{k=1}^{n} I_k = \left(a, a+\frac{\zeta}{n}\right) \cup \left(a+\frac{\zeta}{n}, a+\frac{2\zeta}{n}\right] \cup \ldots \cup \left(a+\frac{(n-1)\zeta}{n}, b\right),$$

donde $\zeta = b - a$ y n es un entero positivo cualquiera. Entonces existe $m \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$\lambda(E \cap I_m) \geq \alpha \cdot \lambda(I_m).$$

Demostración.

Supóngase que $\lambda(E \cap I_k) < \alpha \cdot \lambda(I_k)$ para toda $k \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces

$$\alpha \cdot \lambda(I) \leq \lambda(E \cap I) = \lambda\left(E \cap \left(\biguplus_{k=1}^{n} I_k\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(E \cap I_k) < \sum_{k=1}^{n} \alpha \cdot \lambda(I_k) = \alpha \cdot \lambda(I),$$

lo cual es imposible. ■

Así, para $\alpha \in (0,1)$ fija, podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < 1 - \alpha$ y $n \in \{1, \ldots, m-1\}$ tal que $\alpha < \frac{n}{m} < 1$, y si tenemos

Demostración del teorema 1.46.

Se demostrará el teorema por contrapuesta:

Supongamos $\lambda(E) > 0$ y $\lambda(E^c) > 0$. Sea $\alpha \in \left(\frac{3}{4}, 1\right)$. Entonces existen $I, J \subset \mathbb{R}$

intervalos abiertos no vacíos tales que

$$\lambda(E \cap I) \geq \alpha \cdot \lambda(I) \text{ y } \lambda(E^c \cap J) \geq \alpha \cdot \lambda(J).$$

Sin perder generalidad podemos suponer que $\lambda(I) \leq \lambda(J)$. Sean $n, m \in \mathbf{N}$ tales que

$$\alpha \cdot \lambda(J_m) \leq \lambda(I_n) < \lambda(J_m),$$

y $x \in D$ tal que $I_n + x \subset J_m$. Si para esta x suponemos que

$$\lambda((E+x)\setminus E) = \lambda((E+x) \cap E^c) = 0,$$

y llamamos F al conjunto $(E+x) \cap E^c$, entonces

$$\lambda(J_m) = \lambda(J_m \setminus F) \geq \lambda((E+x) \cap (J_m \setminus F)) + \lambda(E^c \cap (J_m \setminus F)) >$$

$$> \lambda((E+x) \cap ((I_n+x)\setminus F)) + \lambda(E^c \cap (J_m \setminus F)) = \lambda((E+x) \cap (I_n+x)) + \lambda(E^c \cap J_m) \geq$$

$$\geq \alpha \cdot \lambda(I_n) + \alpha\lambda(J_m) > 2\alpha \cdot \lambda(I_n) \geq 2\alpha(\alpha \cdot \lambda(J_m)) > 2\left(\tfrac{3}{4}\right)^2 \cdot \lambda(J_m) =$$

$$= \tfrac{9}{8} \cdot \lambda(J_m) > \lambda(J_m)$$

lo cual es imposible, por lo que para cualquier conjunto D denso en $\mathbb{R}$, existe $x \in D$ tal que $\lambda((E+x) \triangle E) > 0$. ■

El siguiente resultado es aplicación del **teorema 1.46.**

Teorema 1.48. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Lebesgue medible tal que el conjunto $\{t \in \mathbb{R} : f(t) \neq f(t+x)\}$ tiene medida (de Lebesgue) cero para toda x en un conjunto D denso en $\mathbb{R}$. Entonces f es constante casi dondequiera (relativo a λ).

Demostración.

Para $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado, sea $E_I = \{t \in \mathbb{R} : f(t) \in I\}$.

Sea $I_n = [(-1)^n \cdot n, ((-1)^n \cdot n) + 1]$. Entonces $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Claramente, $E_I = \{f^{-1}(s) : s \in I\}$. Por lo tanto, E_{I_n} es un conjunto medible para toda $n \in \mathbf{N}$.

Por otra parte, si $\lambda(E_{I_n}) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lambda(\mathbb{R}) = \lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{I_n}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_{I_n}) = 0$ fuerza a que $\lambda(\mathbb{R}) = 0$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda(E_{I_N}) > 0$.

A continuación se demostrará que para dicha N, $\lambda(E_{I_N} \triangle (E_{I_N} - x)) = 0$ para toda x en el conjunto D denso en $\mathbb{R}$ al que se hace mención en las hipótesis.

Sea $x \in D$. Tómese $t \in E_{I_N} \triangle (E_{I_N} - x)$. Entonces $t \in f^{-1}(I_N)$ o bien $(t+x) \in f^{-1}(I_N)$. Es decir, o bien $f(t) \in I_N$, o bien $f(t+x) \in I_N$, pero no ambas. Esto es, $f(t) \neq f(t+x)$ para toda $t \in E_{I_N} \triangle (E_{I_N} - x)$. De esta manera,

$$\lambda(\{t \in \mathbb{R} : f(t) \neq f(t+x)\}) = \lambda(E_{I_N} \triangle (E_{I_N} - x)) = 0$$

para toda $x \in D$. Aplicando el **teorema 1.46**, obtenemos que $\lambda(\mathbb{R} \backslash E_{I_N}) = 0$.

Si ahora bisectamos el intervalo I_N, en dos subintervalos A y B, $\lambda(E_A)$ o $\lambda(E_B)$ será positiva. Llamamos C_1 a aquél de los subintervalos que tuvo preimagen de medida positiva. Entonces

$$\lambda(E_{C_1} \triangle (E_{C_1} - x)) = 0 \; \forall x \in D,$$

por una argumentación como la que se dio anteriormente. Por lo tanto, $\lambda(\mathbb{R} \backslash E_{C_1}) = 0$ (esto muestra, además, que el otro subintervalo no tenía preimagen de medida positiva).

Por repetidas bisecciones, obtenemos una sucesión de intervalos cerrados y anidados $\{C_n\}$ tal que $\lambda(\mathbb{R} \backslash E_{C_n}) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $\lambda(C_n) \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, tenemos que su intersección es un solo punto. Sea $\{c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. Entonces $f(t) = c$ casi dondequiera (relativo a λ). ■

Capítulo 2

ALGUNOS CONJUNTOS NO MEDIBLES.

Durante todo este capítulo se hace uso frecuente del Axioma de Elección y sus equivalentes [A.1] para la construcción de conjuntos no medibles. Por lo pronto, en el marco particular de la recta real o del plano euclidiano y en relación con la medida de Lebesgue. Será hasta los próximos capítulos donde el espacio en el que se trabaje o las medidas que se utilicen sean más generales.

Como primer conjunto no medible, se obtiene al conjunto de Vitali. Posteriormente se examinan las construcciones de Bernstein, Halmos y Simoson. Dentro de este contexto se introduce la noción de completamente no medible dada por Simoson y se revisan los conjuntos antes construidos para obtener ciertas descomposiciones de interés. Con estos elementos se obtiene un cálculo de la medida de un conjunto en donde su parte no medible "cuenta dos veces".

La construcción de conjuntos no medibles responde a la pregunta de si es posible "medir" cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ con una función que asigne a los intervalos su tamaño "natural", esto es, su longitud, y que sea invariante bajo movimientos rígidos. A este problema se le conoce como el problema "difícil" de la medida en $\mathbb{R}$, y equivale a encontrar una función conjuntista no negativa μ tal que:

(*i*) $\mu(E)$ está definida para todo $E \subset \mathbb{R}$

(*ii*) $\mu(I) =$ longitud (I) para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$

(*iii*) μ es σ-aditiva.

(*iv*) μ es invariante bajo isometrías de $\mathbb{R}$ i.e., si $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una isometría, entonces:

$\mu(j(E)) = \mu(E)\ \forall E \subset \mathbb{R}$

La respuesta negativa se dio vía la construcción de conjuntos no medibles. En todas las construcciones que se hicieron se utilizaba alguna forma del axioma de elección. En el año de 1962 R. SOLOVAY [12] demuestra la necesidad de este axioma para la construcción de conjuntos no medibles. En los ejemplos que a continuación se discuten, el axioma de elección y el principio del buen orden son las suposiciones más socorridas.

I. CONJUNTO DE VITALI (1905).

Definimos una relación $\sim$ en $[0, 1]$ como sigue: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$.

$\sim$ es relación de equivalencia, por lo que induce una partición de $[0, 1]$.

Construimos $V \subset [0, 1]$ el conjunto de Vitali tomando exactamente un representante de cada clase. Esto es posible porque se ha supuesto el axioma de elección, y en este caso V resulta ser no numerable. Ahora veremos que no es posible definir $\mu(V)$, para ello demostraremos que:

1. Si p y q son dos racionales distintos, entonces las traslaciones $V + p$ y $V + q$ son ajenas.

2. $[0,1] \subset \biguplus_{r \in \mathbb{Q}'} V + r \subset [-1,2]$ donde $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q} \cap [-1,1]$

(1) Sean $p, q \in \mathbb{Q}$, $p \neq q$, $x \in (V+p) \cap (V+q)$ entonces existen v_1 , $v_2 \in V$ tales que

$v_1 + p = x = v_2 + q$. Por lo tanto, $v_1 \sim v_2$. Por la construcción de V, esto quiere decir que $v_1 = v_2$. En consecuencia, $p = q$, lo que contradice la hipótesis.

(2) Como $V \subset [0,1]$ entonces $\forall v \in V, \forall r \in \mathbb{Q}', v + r \in [-1,2]$, por lo que $V + r \subset [-1,2]$. Además, si $x \in [0,1]$ existe $v \in V$, única, tal que $x \sim v$, por lo que $r = x - v \in \mathbb{Q}'$ y $x = v + r \in V + r$.

Si μ satisface (ii), (iii) y (iv), por 1 y 2 tenemos que:

$$1 = \mu([0,1]) \leq \mu(\cup_{r \in \mathbb{Q}'} V + r) = \sum_{r \in \mathbb{Q}'} \mu(V + r) = \sum_{r \in \mathbb{Q}'} \mu(V) \leq \mu([-1,2]) = 3.$$

De donde, como

$$\sum_{r \in \mathbb{Q}'} \mu(V) > 0,$$

necesariamente $\mu(V) > 0$. Pero, a la vez,

$$\sum_{r \in \mathbb{Q}'} \mu(V) < +\infty \Rightarrow \mu(V) = 0,$$

por lo qúe $\mu(V)$ no puede estar definido. ■

II. CONJUNTO DE BERNSTEIN (1908).

Sea $\Psi = \{F \subset \mathbb{R} : F$ es cerrado no numerable $\}$ entonces $\#(\Psi) = \mathfrak{c}$ [A.9]. Si tomamos ω_c el menor ordinal que tenga exactamente $\mathfrak{c}$ predecesores y "bienordenamos" los $F \in \Psi$ de manera que $\Psi = \{F_\alpha : 1 \leq \alpha < \omega_\mathfrak{c}\}$ entonces podemos definir una sucesión transfinita de pares (p_α, q_α) tales que $p_\alpha, q_\alpha \in F_\alpha$ $1 \leq \alpha < \omega_\mathfrak{c}$. Para ello, usando nuevamente el Principio del Buen Orden, "bienordenamos" a $\mathbb{R}$, y consideramos que los $F_\alpha \in \Psi$ heredan este orden. Así,

(i) Sean p_1, q_1 los primeros dos elementos de F_1 según el orden heredado de $\mathbb{R}$.

(ii) Si para $1 \leq \beta < \omega_c$ ya han sido elegidos los p_α, q_α con α ordinal, $\alpha \leq \beta$, tomamos $p_\beta, q_\beta \in F_\beta \setminus \cup_{1 \leq \alpha < \beta} \{p_\alpha, q_\alpha\}$ los primeros dos elementos del conjunto según el orden heredado.

Esto siempre es posible pues $\#(F_\beta) = \mathfrak{c}$ y al ser $\alpha < \omega_c$, $\#(\cup_{1 \leq \alpha < \beta < \omega_c} \{p_\alpha, q_\alpha\}) < \mathfrak{c}$, de manera que hay elementos en F_β que no han sido elegidos.

Sea $\mathfrak{B} = \{p_\alpha : 1 \leq \alpha < \omega_c\}$ el conjunto de Bernstein entonces:

(a) $q_\alpha \in \mathfrak{B}^c$ si $1 \leq \alpha < \omega_c$

(b) $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}^c$ intersectan a cualquier conjunto cerrado no numerable.

(c) $\mathfrak{B}$ (y por tanto su complemento) es no medible.

La primera afirmación es consecuencia directa de la construcción del conjunto de Bernstein. La segunda se cumple porque en Ψ estaban listados todos los conjuntos cerrados no numerables, y el inciso (c) se demuestra a continuación por reducción al absurdo:

Si $\mathfrak{B}$ fuera λ-medible, él o su complemento tendría medida positiva, por ser cierto que $\lambda(\mathbb{R}) > 0$. Supongamos que $\lambda(\mathfrak{B}) > 0$. Por la regularidad de λ, existe $K \subset \mathfrak{B}$ un conjunto compacto tal que $\lambda(K) > 0$. Lo cual significa que K es no numerable y por ser compacto, K es cerrado, pero entonces $K = F_\alpha \in \Psi$ y $p_\alpha \in \mathfrak{B}$, lo cual es absurdo. ■

III. CONSTRUCCIÓN DE HALMOS.

Para esta construcción son necesarios algunos lemas que facilitan la demostración de la no medibilidad del conjunto descrito por Halmos, y que tienen en sí interés en esta discusión.

Lema 2.1. Si $E \subset \mathbb{R}$ es Lebesgue-medible, $0 < \lambda(E) < \infty$ y $\alpha \in (0,1)$, entonces existe un intervalo abierto U tal que $\lambda(E \cap U) \geq \alpha\lambda(U)$.

Demostración.

Sea $\mathfrak{U} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ es abierto}\}$. Como $\lambda(E) = inf\{\lambda(U) : E \subset U \in \mathfrak{U}\}$ podemos encontrar $U_0 \in \mathfrak{U}$ tal que $E \subset U_0$ y $\alpha\lambda(U) \leq \lambda(E)$

Si $\{U_n\}$ es la sucesión de intervalos abiertos ajenos cuya unión es U_0 , entonces

$$\alpha \cdot \lambda(U_0) = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E \cap U_n)$$

Por lo tanto, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha\lambda(U_m) \leq \lambda(E \cap U_m)$

Sea $U = U_m$. ■

Lema 2.2. Dada $\xi \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sea $A = \{n + m\xi : n, m \in \mathbb{Z}\}$. Entonces A es denso en $\mathbb{R}$ y asimismo lo son

$B := \{n + m\xi : m \in \mathbb{Z},\, n = 2k,\, k \in \mathbb{Z}\}$ y

$C := \{n + m\xi : m \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$. Y además $A = B \uplus C$.

Nótese que A y B son subgrupos aditivos de $\mathbb{R}$, pero C no lo es.

Demostración.

Dado $U \subset \mathbb{R}$, un intervalo abierto, sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda(U) > \frac{1}{k}$.

Para cada $i \in \mathbb{Z}$ $\exists! n_i = n(i) \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq n_i + i\xi < 1$.

Sea $x_i = n_i + i\xi$.

Por el principio de las casillas, en $\{x_i : i \in \{1, ..., k+1\}\}$ debe haber $i \neq j$, $i, j \in \{1, ..., k+1\}$ tales que $|x_i - x_j| < \frac{1}{k}$. Entonces tomamos $m \in \mathbb{Z}$ de manera que $m(x_i - x_j) \in U$, y como

$$m(x_i - x_j) = m(n_i - n_j) + m(i-j)\xi,$$

se sigue que

$$U \cap A \neq \emptyset.$$

Para demostrar la densidad de B y C observamos que para cada $i \in \mathbb{Z}$ $\exists! n_i \in \mathbb{Z}$ tal que

$0 \leq n_i + i\xi < 2$ y usamos un argumento análogo. Claramente, $A = B \uplus C$. ■

Teorema 2.3. Existe al menos un conjunto E_0 que es no medible.

Demostración.

Sea $\sim$ la relación definida en $\mathbb{R}$ como sigue:

$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in A$. Por la forma que tiene A, $\sim$ es de equivalencia.

Usando el axioma de elección construimos E_0 un conjunto formado por exactamente un elemento de cada clase de equivalencia. A continuación veremos que E_0 no es medible.

(i) $\lambda_* (E_0) = 0$

Sea $F \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ tal que $F \subset E_0$. Como $x - y \in A \cap D(F) \subset A \cap D(E_0) = \{0\}$ entonces $x = y$, y $\{0\} = A \cap D(F)$, así pues, F necesariamente tiene medida cero (ver el **teorema de Steinhaus** en la sección V del capítulo 1).

Por lo tanto, $\lambda_* (E_0) = 0$.

(*ii*) Si E_0 fuera medible, su medida debería ser positiva.

Tenemos que $\forall a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$ se cumple que $(E_0 + a_1) \cap (E_0 + a_2) = \emptyset$ y $\biguplus_{a \in A} E_0 + a = \mathbb{R}$. Así que, si E_0 fuera medible, como $\lambda(E_0 + a) = \lambda(E_0)$ y $\#(A) = \aleph_0$ tendríamos $\lambda(E_0) > 0$, por lo que la medida de E_0 no se puede definir. ■

Corolario 2.4. Existe un subconjunto $M \subset \mathbb{R}$ tal que, para todo conjunto G Lebesgue-medible,

$$\lambda_*(M \cap G) = 0 \text{ y } \lambda^*(M \cap G) = \lambda(G).$$

Demostración.

Sea $M = E_0 + B$. Si $F \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ y $F \subset M$, entonces

$\forall x, y \in F$, $x - y = (e - e') + (b - b')$ donde $(e - e') \notin A \setminus \{0\}$ y $(b - b') \in B$ como B es grupo, si $(e - e') = 0$, $x - y \in B$, y si no, $x - y \notin A$.

Como $A = B \uplus C$, entonces $x - y \notin C$. Puesto que C es denso en $\mathbb{R}$, $(x - y) \notin C$, implica que $D(F)$ contiene intervalos, por lo que $\lambda(F) = 0$ y $\lambda_*(M) = 0$.

Además, $M^c = E_0 + C = E_0 + (B + 1) = M + 1$, lo que implica que $\lambda_*(M^c) = 0$.

Si G es cualquier Lebesgue-medible, la monotoneidad de λ_* implica que

$$\lambda_*(M \cap G) = \lambda_*(M^c \cap G) = 0.$$

Por lo tanto, $\lambda^*(M \cap G) = \lambda(G)$

En particular, lo anterior quiere decir que $\lambda_*(M) = 0$ y que $\lambda^*(M) = \lambda(\mathbb{R})$. ■

IV. CONSTRUCCIÓN DE SIMOSON.

El propósito de los siguientes **lemas** es el de obtener algunos ejemplos de conjuntos (no medibles) A tales que

$$\lambda^{*}(A\cap I)=\lambda(I)=\lambda^{*}(A^{c}\cap I)\ \ \forall I \text{ intervalo de } \mathbb{R}.$$

Definición 2.5. Sea $I=(a,b)\subset\mathbb{R}$ no vacío. Para cualquier subconjunto A de $\mathbb{R}$, sean

$\beta(A|I)=\sup\left\{\frac{\lambda^{*}(A\cap J)}{\lambda(J)} : J \text{ es un subintervalo abierto, no vacío y acotado de } I\right\}$

$\alpha(A|I)=\inf\left\{\frac{\lambda^{*}(A\cap J)}{\lambda(J)} : J \text{ es un subintervalo abierto, no vacío y acotado de } I\right\}$

Una manera intuitiva de entender a α y β es como medidas extremas de la densidad del conjunto A en I. A continuación veremos que los únicos valores posibles para α y β son 0 y 1. Para ello, enunciamos y demostramos los siguientes

Lema 2.6. Sean $I_1\subset I_2$ y $A_1\subset A_2$. Entonces

$$\alpha(A_2|I_1)\geq\alpha(A_1|I_2)\ \text{ y }\ \beta(A_1|I_1)\leq\beta(A_2|I_2)$$

Demostración.

$$\alpha(A_1|I_2)\leq\frac{\lambda^{*}(A_1\cap J_1)}{\lambda(J_1)}\leq\frac{\lambda^{*}(A_2\cap J_1)}{\lambda(J_1)}\leq\alpha(A_2|I_1).$$

Donde J_k es un subintervalo abierto, no vacío y acotado de I_k.

La primera desigualdad es cierta por ser α un ínfimo que toma en cuenta a las $J_1\subset I_1$ porque $I_1\subset I_2$, la segunda lo es porque $A_1\subset A_2$, y la tercera debido a que tenemos más posibilidades de elección para J_2 que para J_1.

Análogamente,

$$\beta(A_1|I_1)\leq\frac{\lambda^{*}(A_2\cap J_1)}{\lambda(J_1)}\leq\beta(A_2|I_2)$$

La primera desigualdad es cierta porque $A_1 \subset A_2$, la siguiente porque $\beta(A_2|I_2)$ considera también a $\frac{\lambda^*(A_2 \cap J_1)}{\lambda(J_1)}$ para toda $J_1 \subset I_1$, y la tercera lo es por ser β un supremo. ■

Lema 2.7. Sea A cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$, y sea I cualquier intervalo abierto no vacío. Si existe J un subintervalo acotado de I tal que $\beta(A|J) = 1$ (o $\alpha(A|J) = 0$), entonces $\beta(A|I) = 1$ (o $\alpha(A|I) = 0$). Más aún, si $\alpha(A|J) = 1$ para todo J subintervalo abierto no vacío de I, entonces $\alpha(A|I) = 1$.

Demostración.

Si J es un subintervalo abierto no vacío de I y $\beta(A|J) = 1$ (o $\alpha(A|J) = 0$), entonces, usando el **lema 2.6** con $A_1 = A_2 = A$ y $I_1 = J \subset I = I_2$, se tiene:

$1 = \beta(A|J) \leq \beta(A|I) \leq 1$ y

$0 = \alpha(A|J) \geq \alpha(A|I) \geq 0.$

y, claramente, si $\forall (a,b) = J \subset I,\ J \neq \emptyset,\ \alpha(A|J) = 1$, entonces $\alpha(A|I) = 1$. ■

Teorema 2.8. Sea I un intervalo abierto no vacío. Entonces para cualquier conjunto A tal que $\lambda^*(A \cap I) > 0$, tenemos que:

(i) $\beta(A|I) = 1$ y

(ii) $\alpha(A|I) = 0$ ó $\alpha(A|I) = 1$.

Demostración.

Sea I un intervalo. Podemos suponerlo acotado por el **Lema** 2.7. Para demostrar (i) procederemos por contradicción.

Supongamos que existe $\varsigma \in (0,1)$ tal que $\lambda^*(A \cap J) \leq \varsigma\lambda(J)\ \forall (a',b') = J \subset I$, $(a',b') \neq \emptyset$.

Sea $\varepsilon \in \left(0, \left(\frac{1}{\varsigma} - 1\right)\lambda^*(A \cap I)\right)$ y sea U un subconjunto abierto de I que contenga a $A \cap I$ tal que

$$\lambda(U) < \lambda^*(A \cap I) + \varepsilon.$$

Escribimos $U = \biguplus_{n=1}^{p} J_n$, donde cada J_n es un subintervalo abierto de I, $J_n \cap J_m = \emptyset$ si $n \neq m$, y p es un número natural o es infinito entonces definimos

$U' = \biguplus_{k=1}^{p'} J_k'$, donde J_k' son precisamente aquellos J_n tales que

$$\lambda^*(A \cap J_n) > 0$$

Como tales, los intervalos J_k' siguen siendo ajenos entre sí y p' es un número natural o es infinito, luego, tenemos la siguiente serie de desigualdades:

$$\begin{aligned}\lambda^*(A \cap I) + \varepsilon > \textstyle\sum_{n=1}^{p} \lambda(J_n) \geq \sum_{k=1}^{p'} \lambda(J_k') &= \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{p'} \frac{\lambda(J_k')}{\lambda^*(A \cap J_k')} \lambda^*(A \cap J_k') \geq \sum_{k=1}^{p'} \left(\frac{1}{\varsigma}\right) \lambda^*(A \cap J_k') = \\ &= \textstyle\left(\frac{1}{\varsigma}\right) \sum_{n=1}^{p} \lambda^*(A \cap J_n) \geq \left(\frac{1}{\varsigma}\right) \lambda^*(A \cap I)\end{aligned}$$

Así obtenemos que:

$$\varepsilon > \left(\frac{1}{\varsigma}\right) \lambda^*(A \cap J) \leq \varsigma\lambda^*(A \cap I) - \lambda^*(A \cap I) = \left(\frac{1}{\varsigma} - 1\right) \lambda^*(A \cap I),$$

lo cual contradice nuestra elección de ε.

Por lo tanto, podemos concluir que no existe $\zeta \in (0,1)$ tal que $\forall (a', b') = J \subset I$, $(a', b') \neq \emptyset$, $\lambda^*(A \cap J) \leq \varsigma\lambda(J)$.

Además, $\lambda^*(A \cap I) > 0 \Rightarrow \frac{\lambda^*(A \cap I)}{\lambda(I)} > 0 \Rightarrow \beta(A|I) > 0 \Rightarrow \beta(A|I) = 1$.

La demostración de (ii) la haremos separando el caso en que A es medible del caso en que no lo es.

Caso I : A medible.

Si $\alpha(A|I) < 1$, existe J subintervalo abierto no vacío de I tal que $\lambda(A \cap J) < \lambda(J)$.

Como A es medible,

$$\lambda(J) = \lambda(A \cap J) + \lambda(A^c \cap J)$$

así que $\lambda(A^c \cap J) > 0$ y $\lambda(A^c \cap I) > 0$. Por (i) tenemos que $\beta(A|I) = 1$, así que, dada $\varepsilon \in (0,1)$, existe J' subintervalo abierto no vacío de I tal que

$$\frac{\lambda(A^c \cap J')}{\lambda(J')} > 1 - \varepsilon = \left[\frac{\lambda(A^c \cap J') + \lambda(A \cap J')}{\lambda(J')}\right] - \varepsilon$$

Entonces

$$\frac{\lambda(A^c \cap J')}{\lambda(J')} > \left[\frac{\lambda(A^c \cap J')}{\lambda(J')} + \frac{\lambda(A \cap J')}{\lambda(J')}\right] - \varepsilon$$

de donde

$$\varepsilon > \frac{\lambda(A \cap J')}{\lambda(J')}$$

por lo que $\alpha(A|I) = 0$. De esta manera, es claro que sólo hay dos valores posibles para $\alpha(A|I)$: 0 y 1, lo que demuestra la afirmación.

Caso II : A no es medible.

Si $\alpha(A|I) < 1$ y $\varepsilon > 0$ es tal que $\alpha(A|I) + 2\varepsilon < 1$, entonces existe J' subintervalo abierto no vacío de I tal que

$$\lambda^*(A \cap J') < (\alpha(A|I) + \varepsilon) \cdot \lambda(J')$$

Sea $V \subset J'$ abierto que contenga a $A \cap J'$ y tal que

$$\lambda(V) < (\alpha(A|I) + 2\varepsilon) \cdot \lambda(J')$$

(Obsérvese que $\lambda^*(A \cap J') \leq \lambda(V) < (\alpha(A|I) + 2\varepsilon) \cdot \lambda(J')$). Como V es medible, usando el *caso* I, tenemos que

$$\frac{\lambda(V \cap J')}{\lambda(J')} = \frac{\lambda(V)}{\lambda(J')} < \alpha(A|I) + 2\varepsilon$$

Por lo que

$$\mathit{inf}\left\{\frac{\lambda(V \cap K)}{\lambda(K)} : K \text{ es un subintervalo abierto, acotado y no vacío de } I\right\} < \alpha(A|I) + 2\varepsilon < 1$$

Entonces $\alpha(V|I) = 0$ y, usando el **Lema** 2.6, con $A_1 = A$ y $V = A_2$ tenemos que

$$\alpha(A|I) \leq \alpha(V|I) = 0,$$

así que $\alpha(A|I) = 0$.

O bien, tenemos que $\alpha(V|J') = 0$, de donde usando el **lema** 2.6, con $(A \cap J') = A_1$ y $A = A_2$, tenemos que $\alpha(A \cap J'|J') = 0$, y $\alpha(A|J') = 0$. Usando otra vez el **lema** 2.6, ahora con $(A \cap J') = A_1$ y $V = A_2$, obtenemos que $\alpha(A|I) = 0$. Lo que muestra, nuevamente, que los valores posibles para $\alpha(A|I)$ son 0 y 1. ■

Definición 2.9. Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es *arquimediano* si $D = \{r \in \mathbb{R}: A + r = A\}$ es un subconjunto denso de $\mathbb{R}$.

Observamos que si A es arquimediano, entonces A^c también lo es.

A continuación veremos que cualquier conjunto arquimediano de medida exterior positiva debe "ocupar" toda la medida de $\mathbb{R}$.

Teorema 2.10. Sea A un conjunto arquimediano de medida exterior positiva. Entonces para todo $I \subset \mathbb{R}$ intervalo,

$$\lambda^*(A \cap I) = \lambda(I).$$

Demostración.

Si $I^\circ = \emptyset$, entonces $\exists a \in \mathbb{R}$ tal que $I \subset [a, a]$, y $0 \leq \lambda^*(A \cap I) \leq \lambda(I) = 0$.

Si $I^\circ \neq \emptyset$, sea $J = (a, b) \subset I$ no vacío y acotado. Sea $n \in \mathbb{N}$ fija.

Como $\lambda^*(A) > 0$, debe existir J' abierto acotado no vacío tal que $\frac{\lambda(J')}{2} < \lambda^*(A \cap J')$. Si no fuera así, tendríamos que $\forall J' \subset \mathbb{R}$ abierto no vacío acotado,

$$\frac{\lambda(J')}{2} \geq \lambda^*(A \cap J'),$$

esto es, que $\forall J' \subset \mathbb{R}$ abierto no vacío acotado $\beta(A|J') < 1$, lo que, por el **teorema** 2.8, quiere decir que $\beta(A|J') = 0$, pero $0 < \lambda^*(A) = \lambda^*(\cup_{n=0}^{\infty}(A \cap M_n))$, donde $M_n = [-n-1, -n] \cup [n, n+1]$, y $0 < \lambda^*(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^*(A \cap M_n) \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda^*(A \cap M_m) > 0$. Así que, tomando $J' = (-m-1, -m)$ o $J' = (m, m+1)$ tenemos un intervalo acotado abierto no vacío que cumple $\beta(A|J') = 1$. Además podemos elegir $n' \in \mathbb{N}$ y J' de manera que

$$\frac{1}{2n'} \leq \lambda(J') < \frac{1}{n'} \leq \frac{\lambda(J')}{n}$$

Sea k el máximo número de subintervalos adyacentes J_i de longitud $\frac{1}{n'}$ contenidos en J, donde

$$J_i = \left(a + \frac{i-1}{n'}, a + \frac{i}{n'}\right) i \in \{1, \ldots, k\}$$

Entonces tenemos que si $n \to \infty$, $\frac{k}{n'} \to \lambda(J)$ (esto se comprueba fácilmente si observamos que $\left|\lambda(J) - \frac{k}{n'}\right| < \frac{1}{n'} \leq \frac{\lambda(J')}{n}$, así que para $\varepsilon > 0$ tomamos $n \in \mathbb{N}$ de manera que $\frac{\lambda(J)}{n} < \varepsilon$, de donde

$$m \geq n \Rightarrow \left|\lambda(J) - \frac{k(m)}{n'(m)}\right| < \frac{1}{n'(m)} < \frac{\lambda(J)}{m} < \varepsilon).$$

Como A es arquimediano, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ existe $r_i \in D$ tal que $J' + r_i \subset J_i$, donde D es el denso correspondiente a A. Puesto que la medida de Lebesgue es invariante bajo traslaciones,

$$\frac{1}{2n'} = \frac{\lambda(J_i)}{4} \leq \frac{\lambda(J')}{2} < \lambda^*(A \cap J') = \lambda^*((A \cap J') + r_i) =$$

$$= \lambda^*((A + r_i) \cap (J' + r_i)) = \lambda^*(A \cap (J' + r_i)) \leq \lambda^*(A \cap J_i)$$

Como los J_i son abiertos ajenos, y $J_i \subset J \; \forall i \in \{1, ..., k\}$, tenemos que

$$\lambda^*(A \cap J) \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda^*(A \cap J_i) \geq \frac{k\lambda(J_i)}{4} = \frac{\frac{k}{n'}}{4} \rightarrow \frac{\lambda(J)}{4} \text{ si } n \rightarrow \infty$$

de manera que $\lambda^*(A \cap J) \geq \frac{\lambda(J)}{4}$ para toda $J \subset I$ intervalo abierto acotado no vacío. Por el **teorema** 2.8, $\alpha(A|J) = 1$ y por el **lema** 2.7, $\alpha(A|I) = 1$, así que $\lambda^* \; (A \cap I) = \lambda(I)$. ■

A continuación se construirán algunos conjuntos arquimedianos no medibles. En su construcción se utilizan equivalentes del axioma de elección o el axioma mismo. En este caso el equivalente es la suposición de la existencia de una base de Hamel para el espacio cociente $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Q}}$.

Una observación que recalcamos es que también el complemento de un conjunto arquimediano es arquimediano.

Ejemplo 2.11. Sea H una base de Hamel para $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Q}}$, y sea $h' \in H$ fijo. Definimos $A = \{\sum_{i=1}^{n} q_i h_i : q_i \in \mathbb{Q},\ h_i \in H \backslash \{h'\}, n \in \mathbb{N}\}$.

Si $x \in (A + q^1 h') \cap (A + q^2 h')$ entonces $x = \sum_{i=1}^{n_1} q_i^1 h_i^1 + q^1 h' = \sum_{i=1}^{n_2} q_i^2 h_i^2 + q^2 h'$, de donde $(q^1 - q^2) h' \in A$, por lo que $q^1 = q^2$. Así pues, podemos escribir $\mathbb{R} = \biguplus_{q \in \mathbb{Q}} A + qh'$.

Como la medida exterior de Lebesgue es invariante bajo traslaciones y $\lambda(\mathbb{R}) > 0$, entonces $\lambda^*(A) > 0$.

Dado que A es denso (pues simplemente tomando $h \in H\backslash\{h', 0\}$ tenemos $\{q_i h\}_{i\in\mathbb{N}} \subset A$ denso en $\mathbb{R}$) y que $A + x = A\ \forall x \in A$, entonces A es arquimediano. Asímismo, A^c es arquimediano. Observando que $A + h' \subset A^c$, obtenemos que $\lambda^*(A^c) > 0$. Aplicando el **teorema** 2.10 a A y a su complemento, tenemos que $\forall I \subset \mathbb{R}$ intervalo,

$$\lambda^*\ (A \cap I) = \lambda(I) = \lambda^*\ (A^c \cap I)$$

Claramente el conjunto resultante A es no medible.

Ejemplo 2.12. Definimos $\sim$ en $\mathbb{R}$ como sigue:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : (p,q) = 1 \text{ y } q = 2k+1\} =: \mathbb{Q}'$$

Observemos que $\mathbb{R} = \biguplus\left\{\alpha + \frac{p}{q} : \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}'\right\}$. De esta manera, si construimos un conjunto W con exactamente un elemento de cada clase (Axioma de Elección), y luego formamos:

$B = \left\{\alpha + \frac{p}{q} : p, q \text{ enteros impares y } \alpha \in W\right\}$,

entonces B^c estará formado por elementos de la forma $\alpha + \frac{2p}{q}$, con $p \in \mathbb{Z}$ y q impar.

Además, $\forall p, q$ impares, $B^c + \frac{p}{q} = B$. Por un argumento análogo al del **ejemplo 2.11**, B y su complemento tienen medida exterior positiva. Sea $D = \left\{\frac{2p}{q} : p \in \mathbb{Z} \text{ y } q \text{ impar}\right\}$,ent D es denso, $B + d = B\ \forall d \in D$ y $B^c + d = B^c\ \forall d \in D$. Por lo tanto, B y su complemento son arquimedianos de medida exterior positiva, así que se verifica que

$$\lambda^*\ (B \cap I) = \lambda(I) = \lambda^*\ (B^c \cap I)\,.\ \blacksquare$$

V. FÓRMULA PARA LA SUMA DE LAS PARTES.

Definición 2.13. Un subconjunto C de un conjunto medible D es *completamente no medible* respecto a D si para todos los subconjuntos medibles E de D con medida positiva, $E \cap C$ es no medible.

Teorema 2.14. C es completamente no medible respecto a un conjunto medible D si y sólo si C es un conjunto no medible tal que para cualquier conjunto $E \subset C$ que sea medible, $E \cap D$ tiene medida cero (es decir, si C es un conjunto no medible de medida interior cero).

Demostración.

Supongamos que C es un conjunto completamente no medible respecto a D. Sea $E \subset C$ medible. Si $\lambda(E) > 0$, entonces tendríamos $E \subset D$ un conjunto medible, de medida positiva y tal que $E = E \cap C$ es medible. Por lo tanto, $\lambda(E) = 0$.

Supongamos ahora que C es un conjunto no medible tal que $\forall E \subset C$ que sea medible se tiene que $\lambda(E) = 0$.

Sea D una cubierta medible para C. Se demostrará que C es completamente no medible respecto a D.

Sea $E \subset D$ un conjunto medible, $\lambda(E) > 0$. Si $E \cap C$ es medible, entonces (por hipótesis) E no puede tener medida positiva. Pero si $\lambda(E \cap C) = 0$, entonces $\lambda(E \backslash C) > 0$, así que $E \cap C^c$ sería un conjunto medible, de medida positiva, contenido en $D \backslash C$. Pero esto contradice la definición de cubierta medible. Por lo tanto, $E \cap C$ debe ser no medible para todo $E \subset D$ medible de medida positiva. ■

De lo anterior se desprende la siguiente observación:

Corolario 2.15. Si C es completamente no medible respecto a un conjunto medible D, entonces D es una cubierta medible de C y para dichos C y D se tiene que

$$\lambda^{*}(C) = \lambda(D) = \lambda^{*}(C \cap D)$$

Esto se comprueba como sigue: si suponemos $\lambda^{*}(C) < \lambda(D)$, podemos encontrar un conjunto medible D_0 tal que $C \subset D_0 \subset D$ y que $\lambda^{*}(C) \leq \lambda(D_0) < \lambda(D)$, de manera que $(D \backslash D_0) \cap C = \varnothing$, lo cual es absurdo. Si suponemos ahora que $\lambda^{*}(C \cap D) < \lambda(D)$ encontramos un D_0 medible tal que

$$C^{c} \cap D \subset D_0 \subset D \text{ y } \lambda^{*}(C^{c} \cap D) \leq \lambda(D_0) < \lambda(D),$$

por lo que $D \backslash D_0 \subset C$, lo que es imposible. ■

Definición 2.16. Decimos que tres conjuntos B, C y D son una *descomposición* de un conjunto A si se cumplen las siguientes propiedades:

(i) B es medible

(ii) C es completamente no medible respecto a D

(iii) $A = B \cup C$,

(iv) $B \cap D = \varnothing$

donde alguno o varios de los conjuntos B, C y D pueden ser vacíos.

Teorema 2.17. Cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}$ puede descomponerse de manera única (excepto por conjuntos de medida cero).

Demostración.

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ no medible, y sea

$\mathcal{B} = \{E \subset A : E$ es medible$\}$, entonces:

(a) Puesto que $\emptyset \in \mathcal{B}$, tenemos que $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

(b) $A \backslash E$ es no medible (por ser A no medible)

(c) En $(\mathcal{B}\ , \subset)$, $\subset$ es un orden parcial, y

(d) Sea $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ una cadena. Para demostrar que $\mathcal{S}$ tiene una cota superior $\mathcal{B}$, construiremos

$$\mathbb{B} = \bigcup_{E \in \mathcal{S}} E$$

Entonces:

- $\mathbb{B} \subset A$
- $\mathbb{B}$ es medible.
- $\mathbb{B}$ es cota superior de la cadena (y es un elemento de $\mathcal{B}$).

Aplicando el **lema de Zorn,** tenemos que $\mathcal{B}$ tiene elementos maximales (que pertenecen a $\mathcal{B}$). Sea B un elemento maximal.

Si tomamos $C = A \backslash B$, y D una cubierta medible de C, entonces B, C y D son los elementos de la descomposición de A, y son únicos salvo por conjuntos de medida cero. ■

Teorema 2.22. Si $A \subset \mathbb{R}$ y B, C y D son conjuntos que descomponen a A, entonces se verifica la siguiente **fórmula "para la suma de las partes"**:

$$\lambda^* (A \cap I) + \lambda^* (A^c \cap I) = \lambda (I) + \lambda (D \cap I).$$

Separaremos la demostración en una serie de lemas:

Lema 2.23. Sean $B' = B^c \cap D^c$ y $C' = C^c \cap D$. Entonces los conjuntos B', C' y D forman una descomposición de A^c. Además, dichos B, B' y D son ajenos y $B \uplus B' \uplus D = \mathbb{R}$.

Demostración.

(i) B' es medible por ser intersección de conjuntos medibles. Además,

$A = B \cup C \subset \dot{B} \cup D \Rightarrow B' = B^c \cap D^c \subset A^c$.

(ii) Si $E \subset D$, E medible, $\lambda(E) > 0$, entonces $E \cap C' = E \cap C^c \cap D$. $E \cap C^c$ medible $\Rightarrow$ $\lambda(E \cap C^c) = 0$. Pero entonces $E \backslash C^c = E \cap C$ es medible y $\lambda(E \cap C) > 0$, lo cual es absurdo. Entonces $\forall E \subset D$, E medible, $\lambda(E) > 0 \Rightarrow E \cap C'$ es no medible.

(iii) $B' \cup C' = (B^c \cap D^c) \cup (C^c \cap D) = (B \cup D)^c \cup (C \cup D^c)^c = [(B \cup D) \cap (C \cup D^c)]^c$

$$= [(B \cap D^c) \cup C]^c = [(B \cup C)^c \cup (D^c \cup C)^c] = A^c \cup (D \cap C^c) = A^c$$

Claramente, $B' \cap C' = \varnothing$, de manera que $B' \cup C'$ es ajena.

(iv) $B' \cap D = \varnothing$.

Por la manera en que se definieron, es claro que B, B' y D son conjuntos ajenos. Por último,

$$B \cup B' \cup D = B \cup (B^c \cap D^c) \cup D = B \cup D \cup (B \cup D)^c = \mathbb{R},$$

con lo que queda demostrado el **Lema.** ■

Lema 2.24. Si X, $Z \subset \mathbb{R}$ son medibles y $\lambda(X \cap Z) = 0$, entonces

$$\lambda(X \cup Z) = \lambda(X) + \lambda(Z).$$

Demostración.

Claramente, $X \backslash Z$, $(X \cap Z)$ y $Z \backslash X$ son conjuntos ajenos, así que $\lambda(X) = \lambda(X \backslash Z) +$

$\lambda(X \cap Z) = \lambda(X \backslash Z)$ y $\lambda(Z) = \lambda(Z \backslash X) + \lambda(X \cap Z) = \lambda(Z \backslash X)$, entonces $\lambda(X \cup Z) = \lambda(X \backslash Z) + 2 \cdot \lambda(X \cap Z) + \lambda(X \backslash Z) = \lambda(X) + \lambda(Z)$.

Lema 2.25. Si W, X, Y y Z son tales que X y Z son medibles, $\lambda(X \cap Z) = 0$ y $W \subset X$, $Y \subset Z$, entonces

$$\lambda^*(W \cup Y) = \lambda^*(W) + \lambda^*(Y).$$

Demostración.

$\lambda^*(W \cup Y) = \inf \{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) : W \cup Y \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}^* \forall n\} =$

$= \inf \{\sum_{n=1}^{\infty} [\lambda(B_n) + \lambda(C_n)] : \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset X, \ \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \subset Z, \ W \cup Y \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cup C_n) \} =$

$= \inf \{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) : W \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\} + \inf \{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(C_n) : Y \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\} =$

$= \lambda^*(W) + \lambda^*(Y)$ ■

NOTA: Lo anterior puede establecerse también usando cubiertas medibles.

Demostración del teorema 2.22.

Usando los **lemas** anteriores, comprobaremos finalmente la *fórmula para la suma de las partes* :

$\lambda^*(A \cap I) + \lambda^*(A^c \cap I) = \lambda^*((B \cap I) \cup (C \cap I)) + \lambda^*((B' \cap I) \cup (C' \cap I)) =$

$= \lambda(B \cap I) + \lambda^*(C \cap I) + \lambda(B' \cap I) + \lambda^*(C' \cap I) =$

$= \lambda(B \cap I) + \lambda(D \cap I) + \lambda(B' \cap I) + \lambda(D \cap I) =$

$= \lambda((B \cup D \cup B') \cap I) + \lambda(D \cap I) =$

$= \lambda([(B \cup D) \cup (B^c \cap D^c)] \cap I) + \lambda(D \cap I) =$

$= \lambda(I) + \lambda(D \cap I)$ ■

Observaciones : Cuando A es medible, D es vacío y la fórmula da

$$\lambda(A \cap I) + \lambda(A^c \cap I) = \lambda(I)$$

Si A es como en los ejemplos **2.12** y **2.13**, entonces tenemos

$$\lambda^*(A \cap I) + \lambda^*(A^c \cap I) = 2 \cdot \lambda(I)$$

Es natural preguntarse si hay conjuntos A que arrojen resultados intermedios (donde la suma no dé sólo la longitud del intervalo, pero tampoco llegue a ser dos veces ésta). La respuesta es que es posible construir tales conjuntos. Una construcción consiste en tomar un conjunto A que tenga una parte medible B de medida positiva y una parte no medible parecida a los conjuntos de 2.12 y 2.11. Esta construcción nos proporciona conjuntos de cualquier medida deseada entre $\lambda(I)$ y $2 \cdot \lambda(I)$ para un intervalo I elegido de antemano. La construcción que veremos en 2.27 da como resultado conjuntos cuya medida está entre $\lambda(I)$ y $2 \cdot \lambda(I)$ para cualquier intervalo I no vacío.

Teorema 2.26. Dados $I = (a, b) \neq \varnothing$, y $\gamma \in (\lambda(I), 2 \cdot \lambda(I)) \subset \mathbb{R}$, $\exists A \subset \mathbb{R}$ tal que

$\lambda(I) < \lambda^*(A \cap I) + \lambda^*(A^c \cap I) = \gamma \cdot \lambda(I) < 2 \cdot \lambda(I)$.

Demostración.

Sean $I = (a, b) \neq \varnothing$, y $\gamma \in (\lambda(I), 2 \cdot \lambda(I)) \subset \mathbb{R}$. Sea $\vartheta = 2 \cdot \lambda(I) - \gamma$.

Formamos $J = (a, a + \vartheta)$ y $X = E \cap [a+\vartheta, b)$, donde E es el conjunto arquimediano construido en **2.12.**

Sea $A = J \uplus X$ entonces para esta I, $\lambda^*(A \cap I) + \lambda^*(A^c \cap I) = \lambda(J) + 2 \cdot \lambda^*(X \cap I) = \vartheta + 2(\lambda(I) - \vartheta) = 2 \cdot \lambda(I) - \vartheta = \gamma$. ■

Teorema 2.27. Existe $A \subset \mathbb{R}$ tal que $\forall I \subset \mathbb{R}$ intervalo no vacío

$$\lambda(I) < \lambda^*(A \cap I) + \lambda^*(A^c \cap I) < 2 \cdot \lambda(I)$$

además, $A \cap I$ es no medible.

Demostración.

Sea G un conjunto medible tal que $\forall I \subset \mathbb{R}$ intervalo no vacío $0 < \lambda(G \cap I) < \lambda(I)$ (como en 1.30.). Sea E como en el ejemplo **2.12** o **2.13**. Si $A = G \cap E$:

(a) En la descomposición de A, $D = G$

(b) $\lambda(I) < \lambda^*(A \cap I) + \lambda^*(A^c \cap I) = \lambda(I) + \lambda(G \cap I) < 2 \cdot \lambda(I)\ \forall I \subset \mathbb{R}$ intervalo no vacío. Claramente, $A \cap I$ es un conjunto no medible. ■

VI. DESCOMPOSICIONES DE CONJUNTOS.

Usando la equivalencia vista en **teorema 2.14** daremos las descomposiciones de los conjuntos no medibles construidos hasta ahora.

2.28. $A = V$ el conjunto de Vitali tiene una descomposición en:

$B = \varnothing$, $C = V$ y D una cubierta medible para C.

Demostración.

Sea $E \subset V = C$ medible, entonces $\biguplus_{q \in \mathbb{Q}'} E + q \subset \biguplus_{q \in \mathbb{Q}'} V + q \subset [-1, 2]$, de donde $\sum_{q \in \mathbb{Q}'} \lambda(E) \leq 3$. Por lo tanto, $\lambda(E) = 0$. ■

2.29. $A = \mathfrak{B}$ el conjunto de Bernstein: el conjunto medible B de su descomposición es vacío, C se puede tomar como el mismo $\mathfrak{B}$ y D como una cubierta medible para C.

Demostración.

Tomando $E \subset \mathfrak{B}$ medible, $\lambda(E) > 0$, por la regularidad de λ, $\exists K \subset E$ compacto de medida positiva.

Sea $\alpha < \omega_c$ tal que $K = F_\alpha$, y $q_\alpha \in K \cap \mathfrak{B}^c$

$K \subset E \subset \mathfrak{B}$, por lo que $K \cap \mathfrak{B}^c = \emptyset$, lo cual es absurdo.

De manera que, si $E \subset \mathfrak{B}$ es medible, entonces $\lambda(E) = 0$ ■

2.30. E_0 según la construcción de Halmos. Entonces su descomposición es análoga a las anteriores: su parte medible puede tomarse vacía, y $E_0 = C$ su parte completamente no medible respecto a una cubierta medible de E_0.

Demostración.

Sea $F \subset E_0$ medible. Por lo visto en la demostración de no mediblidad de E_0 [2.3.i], F debe tener medida cero. ■

VII. CONJUNTOS NO MEDIBLES EN $\mathbb{R}^2$.

Existe una manera considerablemente simple de construir conjuntos no medibles en $\mathbb{R}^2$, definiendo una $\sigma-$ álgebra y una medida adecuadas.

Sea $X = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ y, $\forall E \subset [0, 1]$, sea

$$\hat{E} = \{(x, y) : x \in E, y \in [0, 1]\} \subset X.$$

Sea $S = \left\{\hat{E} : E \subset [0, 1]\right\}$. Entonces S es una $\sigma-$ álgebra de conjuntos en $X = [0, 1]^2$.

Dado un conjunto E Lebesgue-medible, definimos $\mu(\hat{E}) = \lambda(E)$ .Para dicha medida μ, el conjunto "diagonal" M descrito por

$$M = \left\{(x, y) : x \in [0, 1], y = \frac{1}{2}\right\} \subset X$$

es no medible; de hecho, es un conjunto "extremo", en el sentido de que $\mu_*(M) = 0$ y $\mu^*(M) = 1$. ■

Capítulo 3

SUBGRUPOS UNIVERSALMENTE NO MEDIBLES DE $\mathbb{R}$.

Si en el capítulo anterior se estudió a conjuntos no medibles respecto a la medida de Lebesgue, en éste se verá cómo construir conjuntos que resulten no medibles para una mayor cantidad de medidas. Lo que aquí se expone es una modificación de un argumento dado por F. Bernstein en el cual construye subgrupos de $\mathbb{R}$ que resultan ser no medibles para toda una clase de medidas exteriores regulares de Borel en $\mathbb{R}$ que son continuas. La clase de medidas respecto a la cual se construirá un subgrupo no medible de $\mathbb{R}$ en este capítulo es el de las medidas de Lebesgue-Stieltjes λ_f inducidas por funciones continuas no decrecientes f. A la propiedad de no ser medible respecto a ninguna de estas medidas es a lo que llamaremos ser "universalmente no medible".

Adicionalmente, obtendremos una manera de partir a cualquier subconjunto λ_f- medible de $\mathbb{R}$ con medida λ_f finita y positiva en $\mathfrak{c}$ conjuntos ajenos, todos ellos no medibles respecto a λ_f.

Como último punto, obtendremos una equivalencia entre los conjuntos "tipo Bernstein" y los conjuntos universalmente no medibles.

Definición 3.1. Sea λ_f la medida exterior de Lebesgue-Stieltjes inducida por una función continua, no constante, monótona no decreciente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por medio de la fórmula

$$\lambda_f^* (E) = inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (f (b_j) - f (a_j)) : a_j \leq b_j, \ a_j, b_j \in \mathbb{R} \text{ y } E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j) \right\}$$

para $E \subset \mathbb{R}$.

Se denotará por $\mathfrak{M}_f$ a la familia de los subconjuntos λ_f- medibles de $\mathbb{R}$ (es decir, la familia de los $A \subset \mathbb{R}$ que cumplen que $\lambda_f^* (S) = \lambda_f^* (S \cap A) + \lambda_f^* (S \backslash A)$ para todo subconjunto $S \subset \mathbb{R}$), y por λ_f a la medida resultante de restringir λ_f^* a la $\sigma-$ álgebra $\mathfrak{M}_f$.

Sea J el conjunto formado por las λ_f aquí definidas.

Es claro que la medida exterior de Lebesgue se obtiene cuando se toma $f(x) = x$.

Proposición 3.2. Si $\lambda_f^*(A) < \infty$, entonces es equivalente que $A \in \mathfrak{M}_f$ y que $\sup \{\lambda_f(K) : K \subset A, \ K \text{ es compacto}\} = \inf \{\lambda_f(V) : A \subset V, \ V \text{ es abierto}\}$.

3.3.*a*. Para toda $\lambda_f \in J$, $\lambda_f (\mathbb{R}) > 0$.

b. Si C es un subconjunto numerable de $\mathbb{R}$, entonces $\lambda_f(C) = 0$.

c. Si $B \subset \mathbb{R}$ es de Borel, entonces $B \in \mathfrak{M}_f$.

(*a*) Como f es una función no constante y no decreciente, hay $a, b \in \mathbb{R}$ donde $f(a) \neq f(b)$. Si suponemos $a < b$, entonces $0 < \lambda_f([a,b]) \leq \lambda_f (\mathbb{R})$.

(*b*) Cada singulete $\{x\}$ está contenido en el abierto $A_n = (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ para toda $n \in \mathbf{N}$, por lo que $0 \leq \lambda_f(\{x\}) \leq f(x + \frac{1}{n}) - f(x - \frac{1}{n}) \to 0$ si $n \to \infty$ por ser f continua. Si escribimos $C = \bigcup_{x_n \in C} \{x_n\}$ obtenemos el resultado por $\sigma-$ aditividad de la medida.

(c) Es claro pues cada abierto de $\mathbb{R}$ pertenece a $\mathfrak{M}_f$.

Definición 3.4. Llamamos a un conjunto $S \subset \mathbb{R}$ *universalmente no medible* si no existe $\lambda_f \in J$ para la cual $S \in \mathfrak{M}_f$.

Definición 3.5. El *índice* de un subgrupo H de un grupo dado X es el cardinal del grupo cociente (o del conjunto de clases izquierdas, si H no es normal en X), $\#(\frac{X}{H})$.

Teorema 3.6. Existe un subgrupo H del grupo aditivo $\mathbb{R}$ que tiene índice $\mathfrak{c}$ y es universalmente no medible.

Demostración.

Sea $\mathfrak{F}$ el conjunto de los subconjuntos cerrados no numerables de $\mathbb{R}$. Como se puede ver en [A.9] , el cardinal de $\mathfrak{F}$ es el del continuo, y todo $F \in \mathfrak{F}$ tiene a su vez cardinal $\mathfrak{c}$ [A.13].

Sea $\omega_\mathfrak{c}$ el menor número ordinal con exactamente $\mathfrak{c}$ predecesores. Si asignamos a cada $F \in \mathfrak{F}$ un elemento del conjunto de predecesores de $\omega_\mathfrak{c}$, podemos escribir $\mathfrak{F} = \{F_\alpha : \alpha < \omega_\mathfrak{c}\}$.

Puesto que el campo de los números racionales $\mathbb{Q}$ es numerable y que la familia de los subconjuntos finitos de cualquier conjunto infinito tiene el mismo cardinal que el conjunto [A.15] , se tiene que cualquier subconjunto S de $\mathbb{R}$ que tenga menos de $\mathfrak{c}$ elementos tendrá un generado lineal sobre $\mathbb{Q}$ que también contará con menos de $\mathfrak{c}$ elementos. Por lo tanto, es posible construir, usando inducción transfinita, un conjunto $\{x_\alpha : \alpha < \omega_\mathfrak{c}\} \cup \{y_\alpha : \alpha < \omega_\mathfrak{c}\}$, de números reales diferentes que sea linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$ y tal que $x_\alpha, y_\alpha \in F_\alpha$ para toda α : basta con tomar cualquier

$$x_\alpha \in F_\alpha \setminus \langle \{x_\beta, y_\beta : \beta < \alpha\} \rangle_{\mathbb{Q}},$$

y luego cualquier

$$y_\alpha \in F_\alpha \setminus \langle \{x_\alpha\} \cup \{x_\beta, y_\beta : \beta < \alpha\} \rangle_{\mathbb{Q}}.$$

Una vez hecho esto, sea $H = \langle \{x_\alpha : \alpha < \omega_\mathfrak{c}\} \rangle_{\mathbb{Q}}$. Entonces H es un subgrupo de $\mathbb{R}$ universalmente no medible: procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe $\lambda_f \in J$ tal que $H \in \mathfrak{M}_f$. Si $\lambda_f(H) > 0$, entonces (por regularidad de λ_f) existe un conjunto compacto $K \subset H$ de λ_f- medida positiva. Entonces K es no numerable [3.3.b] y cerrado, así que el cardinal de K debe ser $\mathfrak{c}$ [A.13]. Por lo tanto, existe $\beta < \omega_\mathfrak{c}$ tal que $K = F_\beta$. Pero entonces $y_\beta \in H$, lo que contradice la independencia de $\{x_\alpha, y_\alpha : \alpha < \omega_\mathfrak{c}\}$, de manera que $\lambda_f(H) = 0$, por lo tanto $\lambda_f(H^c) > 0$. Argumentando como antes, esto nos lleva a que exista $x_\gamma \in F_\gamma \subset H^c$ para alguna $\gamma < \omega_\mathfrak{c}$ aunque $x_\alpha \in H$ para toda α. De esta manera, también $\lambda_f(H^c) = 0$. En consecuencia, $\lambda_f(\mathbb{R}) = 0$, lo que contradice que $\lambda_f \in J$. Por lo tanto, H es universalmente no medible. ■

Nótese que los conjuntos $\{H + y_\alpha : \alpha < \omega_\mathfrak{c}\}$ forman una familia de $\mathfrak{c}$ clases ajenas de H.

Lema 3.7. Para todo $B \subset \mathbb{R}$ conjunto de Borel no numerable existe $\lambda_f \in J$ tal que $0 < \lambda_f(B) < \infty$.

Demostración.

Sea $B \subset \mathbb{R}$ un conjunto de Borel no numerable. Puesto que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B \cap [-n, n]$ es no numerable, podemos suponer a B acotado. Por la afirmación de la

NOTA en el punto A.13 sabemos que existe un subconjunto K de B homeomorfo al $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Si tomamos $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función "escalera" de Cantor (también conocida como la *función singular de Lebesgue*) ligeramente modificada:

-definida constante, igual a cero, para $x\leq 0$,

-igual a uno para $x\geq 1$ y tal que

- $f(x)=\sum_{j=1}^{N-1}\frac{\beta_j}{2^j}+\frac{1}{2^N}$ para $x\in(0,1)$, donde $x=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha_j}{3^j}$ con $\alpha_j=0,1$ o 2, N el primer índice tal que $\alpha_N=1$ (si no hay tal, entonces $N=+\infty$) y $\beta_j=\frac{\alpha_j}{2}$.

Entonces f es continua y no constante, de manera que induce una medida de Lebesgue-Stieltjes en $\mathbb{R}$. El lector puede comprobar que para dicha medida $\lambda_f(C)=1$. De ahí que $0<\lambda_f(B)<\infty$. ∎

Lema 3.8. Sea K un conjunto compacto, $\lambda_f\in J$ tal que $\lambda_f(K)>0$, E un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $x_0\in\mathbb{R}$ dado. Definimos $\nu(E)=\lambda_f(K\cap(E+x_0))$. Entonces $\nu\in J$.

Demostración.

Primeramente se demostrará que ν es una medida en $\mathbb{R}$, a continuación se dará una función no decreciente, continua y no constante g tal que $\nu=\lambda_g$.

Puesto que podemos escribir $\nu=\lambda_f^K\circ\tau_{x_0}$, donde λ_f^K es la medida dada por $\lambda_f^K(E)=\lambda_f(K\cap E)$ y donde $\tau_{x_0}(E)=E+x_0$, la ν es una medida en $\mathbb{R}$.

Sea $g(x)=\nu((-\infty,x])$ entonces:

(i) g es una función bien definida (pues la ν es una medida), no decreciente y acotada.

Sean $x,y\in\mathbb{R}$, $x<y$. Entonces $(-\infty,x]\subset(-\infty,y]$ y, puesto que la ν es una medida, se cumple que $g(x)\leq g(y)$.

Puesto que K es compacto y λ_f es regular, $\nu(E) \leq \nu(\mathbb{R}) = \lambda_f(K) < \infty$, por lo que

$g(x) = \nu((-\infty, x]) = \lambda_f(K \cap (-\infty, x + x_0]) \leq \lambda_f(K) < \infty$ para toda $x \in \mathbb{R}$, así que g está acotada.

(*ii*) g es continua.

Sea $x \in \mathbb{R}$ y sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua, existe $\delta = \delta(f, x) > 0$ tal que

$$\text{si } |(x + x_0) - (y + x_0)| < \delta \text{ entonces } |f(x + x_0) - f(y + x_0)| < \varepsilon.$$

Sin perder generalidad podemos suponer $x < y$, así que, siempre que

$$|x - y| = |(x + x_0) - (y + x_0)| < \delta$$

tendremos que

$$\begin{aligned}|g(y) - g(x)| &= g(y) - g(x) = \nu((-\infty, y]) - \nu((-\infty, x]) = \\ &= \nu((x, y]) \leq \lambda_f((x + x_0, y + x_0]) = f(x + x_0) - f(y + x_0) = \\ &= |f(x + x_0) - f(y + x_0)| < \varepsilon,\end{aligned}$$

de manera que g es continua.

(*iii*) g es no constante.

Como $\nu(K - x_0) = \lambda_f(K \cap ((K - x_0) + x_0)) = \lambda_f(K) > 0$ y, al ser $K - x_0$ un conjunto compacto, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $K - x_0 \subset [-n, n]$, tenemos que

$$0 < \nu(K - x_0) \leq \nu((-n, n]) = \nu((-\infty, n]) - \nu((-\infty, -n]) = g(n) - g(-n),$$

por lo cual $g(n) \neq g(-n)$, así que g es no constante.

Es fácil ver que ν es igual a la medida de Lebesgue-Stieltjes inducida por g. ■

Teorema 3.9. Sea H un subgrupo universalmente no medible de $\mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$ cualquier boreliano no numerable. Para $x \in \mathbb{R}$ sea $B_x = B \cap (x + H)$. Considérese cualquier $\lambda_f \in J$ que haga que $0 < \lambda_f(B) < \infty$ [3.7]. Entonces, para toda $x \in \mathbb{R}$, $\lambda_f^*(B_x) = \lambda_f(B)$ y $B_x \notin \mathfrak{M}_f$. Esto es, para dichas λ_f, la familia $\{B_x : x \in \mathbb{R}\}$ constituye una partición de B en $\#\left(\frac{\mathbb{R}}{H}\right)$ conjuntos distintos, ninguno de los cuales es λ_f- medible.

Demostración.

Supongamos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda_f^*(B_x) < \lambda_f(B)$. Entonces existe un conjunto abierto $V \subset \mathbb{R}$ tal que $B_x \subset V$ y $\lambda_f(V) < \lambda_f(B)$. Como $B \backslash V \in \mathfrak{M}_f$ y $\lambda_f(B \backslash V) > 0$, existe $K \subset B \backslash V$ conjunto compacto tal que $\lambda_f(K) > 0$. Definimos ν como

$$\nu(E) = \lambda_f(K \cap (x + E))$$

para $E \subset \mathbb{R}$. Entonces [3.8] $\nu \in J$. Pero esto es imposible, porque K y $x + H$ son conjuntos ajenos, lo que hace que $\nu(H) = 0$ y que $H \in \mathfrak{M}_\nu$, contradiciendo la no mediblidad universal de H. Esto demuestra que $\lambda_f^*(B_x) = \lambda_f(B)$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

Supóngase ahora que $B_x \in \mathfrak{M}_f$ para alguna $x \in \mathbb{R}$. Como H es un subgrupo propio de $\mathbb{R}$ existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $B_y \cap B_x = \varnothing$. Entonces,

$$2\lambda_f(B) = \lambda_f(B_x) + \lambda_f^*(B_y) \leq \lambda_f(B_x) + \lambda_f(B \backslash B_x) = \lambda_f(B),$$

lo que contradice la hipótesis de que $0 < \lambda_f(B) < \infty$. Por lo tanto, ningún B_x es λ_f- medible. Como ningún B_x es vacío y las clases de H, son ajenas entre sí, $\{B_x : x \in \mathbb{R}\}$ constituye una partición de B en $\#\left(\frac{\mathbb{R}}{H}\right)$ conjuntos distintos, ninguno de los cuales es λ_f- medible. ■

Definición 3.10. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}$ es *de tipo Bernstein* si ni S ni su complemento S^c contienen a un conjunto compacto no numerable.

Teorema 3.11. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}$ es tipo Bernstein si y sólo si S es universalmente no medible.

Demostración.

Supongamos que $S \subset \mathbb{R}$ no es universalmente no medible. Entonces existe $\lambda_f \in J$ tal que $S \in \mathfrak{M}_f$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $\lambda_f(S) > 0$. Por regularidad de la medida, existe $K \subset S$ compacto de λ_f- medida positiva. Por lo tanto, K es no numerable, así que S no tiene la propiedad de Bernstein.

Supóngase ahora que K es un subconjunto compacto no numerable de $\mathbb{R}$. Entonces existe $\lambda_f \in J$ tal que $\lambda_f(K^c) = 0$, por lo tanto, si K está contenido en S (o en S^c) (esto es, si S no es de tipo Bernstein) entonces $\lambda_f(S^c) = 0$ $(\lambda_f(S) = 0)$, así que $S \in \mathfrak{M}_f$, por lo que S no es universalmente no medible. ■

Capítulo 4

EXTENSIONES DE LA MEDIDA EN GRUPOS TOPOLÓGICOS COMPACTOS.

En este capítulo se define el concepto de "carácter" de un grupo topológico, como una forma de apreciar el incremento en la capacidad de una medida extendida respecto de la original. El carácter de un grupo topológico es el cardinal de un subconjunto de la $\sigma-$álgebra formado tomando en cuenta propiedades de la topología y de la medida del grupo.

El propósito central de este capítulo será extender una medida de tal modo que abarque una mayor gama de conjuntos. El incremento en las posibilidades de "medición" se apreciará por medio del carácter del grupo.

Como último punto se exponen conjuntos no medibles respecto a estas extensiones tanto en grupos topológicos compactos como localmente compactos (ver apéndice B para las definiciones correspondientes). Es notable la sencillez de la construcción de estos conjuntos y la similitud de estas construcciones con las expuestas en el primer capítulo. Para construir dichos conjuntos usaremos, una vez más, al axioma de elección y sus variantes.

El resultado pertenece a KAKUTANI y OXTOBY.

NOTA: En todo este capítulo (salvo que se especifique otra cosa), G denota un grupo métrico compacto infinito [B.1], μ es la medida normalizada de Haar [B.3] en G, y $\mathfrak{M}$ es la $\sigma-$álgebra de los subconjuntos de G que son $\mu-$ medibles. Por lo que el espacio de medida $(G, \mathfrak{M}, \mu)$ resulta **completo.**

4.1. $\#(G) = \mathfrak{c}$

Demostración.

Propiedad 4.2. $\#(G) \geq \mathfrak{c}$.

Como G contiene un conjunto D denso numerable [A.12], todo elemento de G es el límite de una sucesión de elementos de D. Así, $\#(G) \leq \mathfrak{c}$, lo que junto con 4.2 demuestra nuestra afirmación. ■

Definición 4.3. Sea X un conjunto no vacío, $\mathfrak{S}$ cualquier $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X y μ cualquier medida definida en $\mathfrak{S}$. Entonces el *carácter* del espacio de medida $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ es el menor número cardinal $\mathfrak{m}$ para el que existe una subfamilia $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{S}$ tal que $\#(\mathcal{A}) = \mathfrak{m}$ que cumple que para todo $S \in \mathfrak{S}$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $A \in \mathcal{A}$ que satisface que $\mu(S \triangle A) < \varepsilon$. A cualquier subfamilia $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{S}$ que cumpla con lo anterior le llamaremos *base* de $(X, \mathfrak{S}, \mu)$.

Propiedad 4.4. El espacio de medida $(G, \mathfrak{M}, \mu)$ tiene carácter $\aleph_0$.

Demostración.

Es claro que existe una base topológica numerable para G.

Sea $\mathcal{A}$ el conjunto formado por las uniones finitas de elementos de una de estas bases. Entonces $\#(\mathcal{A}) \leq \aleph_0$.

Sean $M \in \mathfrak{M}$ y $\varepsilon > 0$. Por regularidad de μ existen F conjunto compacto y U

conjunto abierto tales que $F \subset M \subset U$ y $\mu(U \backslash F) < \varepsilon$. Por la compacidad de F, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $F \subset A \subset U$. Esto se establece como sigue:

Para $x \in F$ sea V_x un conjunto abierto contenido en U. La familia $\{V_x\}$ es una cubierta abierta cuya unión está contenida en el abierto U. Si se extrae de ella una subcubierta finita $\{V_{x_1}, ..., V_{x_n}\}$, entonces $A = \bigcup_{k=1}^{n} V_{x_k}$ es un elemento de $\mathcal{A}$, y es tal que $\mu(M \triangle A) < \varepsilon$.

Claramente, el cardinal de $\mathcal{A}$ no puede ser un número finito, así que $\#(\mathcal{A}) = \aleph_0$ para una base de $(G, \mathfrak{M}, \mu)$. ■

Definición 4.5. Dado un conjunto X y dos espacios de medida $(X, \mathfrak{M}_1, \mu_1)$ y $(X, \mathfrak{M}_2, \mu_2)$, decimos que el segundo es una *extensión* del primero si $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$ y $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ para toda $A \in \mathfrak{M}_1$.

Por medio de una serie de lemas demostraremos el siguiente resultado principal:

Teorema 4.6. Existe una extensión $(G, \mathfrak{M}^*, \mu^*)$ de $(G, \mathfrak{M}, \mu)$ tal que el carácter de $(G, \mathfrak{M}^*, \mu^*)$ es $2^{\mathfrak{c}}$ y μ^* es invariante bajo traslaciones izquierdas, traslaciones derechas e inversiones.

El procedimiento que se seguirá para llegar a este resultado involucra una primera extensión a un espacio $\left(G, \mathfrak{M}^{\dagger}, \mu^{\dagger}\right)$ en el que cualquier conjunto $A \subset G$ con $\#(A) < \mathfrak{c}$ pertenece a $\mathfrak{M}^{\dagger}$ y tiene medida cero. Este paso es el que permite demostrar el teorema 4.6 sin utilizar la hipótesis del continuo.

Definición 4.7. Sea $\mathfrak{T}$ el conjunto formado por las siguientes transformaciones de G en sí mismo: $x \mapsto x + a$, $x \mapsto a + x$ y $x \mapsto -x$.

Para verificar que una medida es invariante bajo traslaciones izquierdas y derechas y bajo inversiones, basta ver que si M es un conjunto medible, entonces cada $\tau(M)$

es medible para $\tau \in \mathfrak{T}$ y que las medidas de $\tau(M)$ y M son iguales.

Lema 4.8. El espacio de medida $(G, \mathfrak{M}, \mu)$ se puede extender a un espacio de medida $\left(G, \mathfrak{M}^\dagger, \mu^\dagger\right)$ tal que, para todo $A \subset G$ con $\#(A) < \mathfrak{c}$, $A \in \mathfrak{M}^\dagger$ y tiene $\mu^\dagger-$ medida cero. Más aún, $\mu^\dagger$ es invariante bajo traslaciones e inversiones y $\left(G, \mathfrak{M}^\dagger, \mu^\dagger\right)$ es $\mu^\dagger-$ completo. Esto es, si $N \in \mathfrak{M}^\dagger$ y $\mu^\dagger(N) = 0$, para $N_1 \subset N$, entonces $N_1 \in \mathfrak{M}^\dagger$.

Demostración.

Sea $\mathcal{P} = \{P \subset G : \#(P) < \mathfrak{c}\}$. Si se supusiera la hipótesis del continuo, sucedería que cualquier $P \in \mathcal{P}$ tendría cardinal $\aleph_0$ y $\mathcal{P}$ estaría contenido en $\mathfrak{M}$, así que este lema no aportaría elementos nuevos al álgebra, por lo que **no** se supondrá.

(a) Si $P \in \mathcal{P} \cap \mathfrak{M}$, entonces $\mu(P) = 0$. Supongamos que $\mu(P) > 0$, por la regularidad de μ, tenemos que P contiene a un conjunto compacto no numerable. De los teoremas A.5 y A.6 se tiene que P tiene cardinal $\mathfrak{c}$, por lo que no puede pertenecer a $\mathcal{P}$.

Utilizando el Lema de König [A.8] obtenemos que si $\{P_n\}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{P}$, entonces $\#\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n\right) < \prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$, por lo que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \in \mathcal{P}.$$

(b) Sea $\mathfrak{M}^\dagger = \left\{M^\dagger \subset G : M \triangle M^\dagger \in \mathcal{P} \text{ para alguna } M \in \mathfrak{M}\right\}$.

$\mathfrak{M}^\dagger$ también se puede describir como

$$\mathfrak{M}^\dagger = \left\{M^\dagger \subset G : M^\dagger = (M \cap A^c) \cup B,\ M \in \mathfrak{M} \text{ y } A, B \in \mathcal{P}\right\}.$$

$\mathfrak{M}^\dagger$ es una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de G como a continuación se muestra:

$i)$ Sea $M^\dagger \in \mathfrak{M}^\dagger$. Entonces existe $M \in \mathfrak{M}$ tal que $M \triangle M^\dagger \in \mathcal{P}$. Como

$(M)^c \triangle \left(M^\dagger\right)^c = M \triangle M^\dagger \in \mathcal{P}$ y $M^c \in \mathfrak{M}$, $\left(M^\dagger\right)^c \in \mathfrak{M}^\dagger$.

ii) Si $\left\{M_n^\dagger\right\} \subset \mathfrak{M}^\dagger$, entonces existe $\{M_n\} \subset \mathfrak{M}$ tal que $M_n \triangle M_n^\dagger \in \mathcal{P}$. Como[1]

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n^\dagger\right) \triangle \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(M_n \triangle M_n^\dagger\right) \in \mathcal{P} \cdots (1)$$

y $\mathfrak{M}$ es una σ−álgebra, $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathfrak{M}$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n^\dagger \in \mathfrak{M}^\dagger$.

Para $M^\dagger \in \mathfrak{M}^\dagger$ y alguna $M \in \mathfrak{M}$ tal que $M \triangle M^\dagger \in \mathcal{P}$, se define $\mu^\dagger\left(M^\dagger\right) = \mu(M)$. A continuación se demostrará que $\mu^\dagger$ está bien definida y que es una medida sobre $\mathfrak{M}^\dagger$ que extiende a μ.

Si existen $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}$ tales que $M_1 \triangle M^\dagger \in \mathcal{P}$ y $M_2 \triangle M^\dagger \in \mathcal{P}$, entonces[2]

$$M_1 \triangle M_2 \subset \left(M_1 \triangle M^\dagger\right) \cup \left(M_2 \triangle M^\dagger\right) \in \mathcal{P},$$

así que $\mu(M_1 \triangle M_2) = 0$ y $\mu(M_1) = \mu(M_2)$. Por lo tanto, $\mu^\dagger$ está bien definida en la σ−álgebra $\mathfrak{M}^\dagger$. Para demostrar la σ− aditividad de $\mu^\dagger$ tomaremos una sucesión ajena $\left\{M_n^\dagger\right\}$ de elementos de $\mathfrak{M}^\dagger$. Sea $\{M_n\} \subset \mathfrak{M}$ tal que $M_n \triangle M_n^\dagger \in \mathcal{P}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sea $Q_1 = M_1$ y $Q_n = M_n \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} M_k^c\right)$ para $n \in \{2, 3, \ldots\}$.

Entonces la sucesión $\{Q_n\} \subset \mathfrak{M}$ está formada por conjuntos ajenos, y para cada $n \in \mathbb{N}$,

[1] Se demostrará que

$$\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(M_n \triangle M_n^\dagger\right)\right]^c \subset \left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) \triangle \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n^\dagger\right)\right]^c.$$

Sea $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(M_n \triangle M_n^\dagger\right)$. Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ $x \notin M_n \triangle M_n^\dagger$, por lo que $\chi_{M_n}(x) = \chi_{M_n^\dagger}(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Así, $\chi_{\cup_{n=1}^{\infty} M_n}(x) = \chi_{\cup_{n=1}^{\infty} M_n^\dagger}(x)$. Por lo tanto, $x \notin \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) \triangle \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n^\dagger\right)$ ■

[2] Como antes, tomamos $x \notin \left(M_1 \triangle M^\dagger\right) \cup \left(M_2 \triangle M^\dagger\right)$. Entonces, $x \notin \left(M_1 \triangle M^\dagger\right)$ y $x \notin \left(M_2 \triangle M^\dagger\right)$, por lo que $\chi_{M_1}(x) = \chi_{M^\dagger}(x)$ y $\chi_{M_2}(x) = \chi_{M^\dagger}(x)$. Así que $\chi_{M_1}(x) = \chi_{M_2}(x)$ y $x \notin M_1 \triangle M_2$. ■

$Q_n \triangle M_n^\dagger \subset \bigcup_{k=1}^\infty \left(M_k \triangle M_k^\dagger\right) \in \mathcal{P}$[3]

Lo que, junto con (1), da que $\left(\bigcup_{n=1}^\infty Q_n\right) \triangle \left(\bigcup_{n=1}^\infty M_n^\dagger\right) \subset \bigcup_{n=1}^\infty \left(Q_n \triangle M_n^\dagger\right) \in \mathcal{P}$, $\mu^\dagger\left(\bigcup_{n=1}^\infty M_n^\dagger\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty Q_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(Q_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu^\dagger\left(M_n^\dagger\right)$,

con lo que se demuestra que $\mu^\dagger$ es una medida sobre $\mathfrak{M}^\dagger$. Es claro que coincide con μ para aquellas $M \in \mathfrak{M}$.

(c) Como siguiente punto se demostrará que $\left(G, \mathfrak{M}^\dagger, \mu^\dagger\right)$ es completo.

Sea $N \in \mathfrak{M}^\dagger$ de $\mu^\dagger-$ medida cero y sea $N_1 \subset N$. Entonces existe $M \in \mathfrak{M}$ tal que $N \triangle M \in \mathcal{P}$ y $\mu(M) = 0$. Entonces $N_1 \cap M \in \mathfrak{M}$. Como $N_1 \triangle (N_1 \cap M) \subset N \triangle M \in \mathcal{P}$, $N_1 \in \mathfrak{M}^\dagger$.

(d) Por último se verificará que $\mu^\dagger$ es invariante bajo traslaciones e inversiones en $\mathfrak{M}^\dagger$.

Es claro que $P \in \mathcal{P} \Rightarrow \tau(P) \in \mathcal{P}\ \forall \tau \in \mathfrak{T}$, así que si $M^\dagger \in \mathfrak{M}^\dagger$ y $M^\dagger \triangle M \in \mathcal{P}$ para $M \in \mathfrak{M}$, entonces $\tau(M) \triangle \tau\left(M^\dagger\right) = \tau\left(M \triangle M^\dagger\right) \in \mathcal{P}$. Por lo tanto, $\tau\left(M^\dagger\right) \in \mathfrak{M}^\dagger$ y

$$\mu^\dagger\left(\tau\left(M^\dagger\right)\right) = \mu(\tau(M)) = \mu(M) = \mu^\dagger\left(M^\dagger\right)$$

para toda $\tau \in \mathfrak{T}$. ■

Lema 4.9. (i) G contiene exactamente $\mathfrak{c}$ distintos conjuntos compactos de cardinal $\mathfrak{c}$.

Si además denotamos por $\omega_\mathfrak{c}$ al menor ordinal con exactamente $\mathfrak{c}$ predecesores y

[3] Si $x \in Q_n = M_n \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} M_k^c\right)$ y $x \notin M_n^\dagger$, entonces $x \in M_n$. Por lo tanto, $x \in M_n^\dagger \triangle M_n$, así que $x \in \bigcup_{k=1}^n \left(M_k^\dagger \triangle M_k\right)$.

Si $x \in M_n^\dagger$ y $x \in Q_n$, entonces $x \notin M_n$ implica que $x \in M_n^\dagger \triangle M_n$. Ahora, si $x \in M_n$, entonces $x \notin M_k^\dagger$, puesto que los $M_k^\dagger$ son ajenos. Pero $x \notin Q_n = M_n \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} M_k^c\right)$ quiere decir que $x \in M_n \cap M_k$ para alguna $k \in \{1, ..., n-1\}$. Por lo tanto, $x \in M_k^\dagger \triangle M_k$. De cualquier manera, $x \in \bigcup_{k=1}^n \left(M_k^\dagger \triangle M_k\right)$. ■

tomamos $\{F_\alpha : 1 \leq \alpha < \omega_\mathfrak{c}\}$ un buen orden de todos los subconjuntos compactos de G con cardinal $\mathfrak{c}$, entonces:

(ii)Para cualquier conjunto $M^\dagger \in \mathfrak{M}^\dagger$ y cualquier número ordinal $\beta < \omega_\mathfrak{c}$ existe otro número ordinal $\alpha > \beta$ tal que $F_\alpha \subset M^\dagger$.

Demostración.

(i) Como cualquier conjunto abierto $U \subset G$ es la unión de conjuntos de una base abierta numerable, tendremos a lo más $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ conjuntos abiertos diferentes. Por complementación y debido a que G es compacto, existirán a lo más $\mathfrak{c}$ conjuntos compactos distintos con cardinal $\mathfrak{c}$.

Sea $M^\dagger \in \mathfrak{M}^\dagger$ tal que $\mu^\dagger\left(M^\dagger\right) > 0$. Sea $M \in \mathfrak{M}$ tal que $M^\dagger \triangle M \in \mathcal{P}$, entonces $\mu(M) > 0$ y $\#\left(M \triangle M^\dagger\right) < \mathfrak{c}$. Claramente, existe $K \subset M$ compacto y de medida positiva. Como se vio antes, K debe contener a un conjunto P perfecto de cardinal $\mathfrak{c}$. Entonces P tiene un subconjunto C homeomorfo a $\{0,1\}^{\aleph_0}$. Así, sea $g : C \longrightarrow \{0,1\}^{\aleph_0}$ un homeomorfismo, y sea

$$f : \{0,1\}^{\aleph_0} \longrightarrow \{0,1\}^{\aleph_0} \times \{0,1\}^{\aleph_0}$$

dada por $f(x) = \{0,1\}^{\aleph_0} \times \{x\}$. Entonces f es un homeomorfismo, y los subconjuntos E_x de M definidos por $E_x = (g \circ f)^{-1}(\{0,1\}^{\aleph_0} \times \{x\})$ son $\mathfrak{c}$ conjuntos compactos ajenos de cardinal $\mathfrak{c}$.

(ii) Sea $M^\dagger \in \mathfrak{M}^\dagger$ tal que $\mu^\dagger\left(M^\dagger\right) > 0$. Sea $\beta < \omega_\mathfrak{c}$. Por el inciso anterior obtenemos $E_x \subset M^\dagger$ conjuntos compactos de cardinal $\mathfrak{c}$. Cada E_x tiene asignado un subíndice $\rho_x < \omega_\mathfrak{c}$. Si todo ρ_x fuera menor que β, entonces habría $h : \{1,...,\alpha\} \longrightarrow \left\{E_x : x \in \{0,1\}^{\aleph_0}\right\}$ función inyectiva, lo que es absurdo. ■

Definición 4.10. Para cualquier subconjunto A de G, definimos la $\mu^{\dagger}$ − *medida exterior* $\rho(A)$ de A, como sigue:

$$\rho(A) = inf \left\{ \mu^{\dagger}\left(M^{\dagger}\right) : M^{\dagger} \in \mathfrak{M}^{\dagger} \text{ y } A \subset M^{\dagger} \right\}.$$

Definición 4.11. Un conjunto $A \subset G$ se dice *absolutamente invariante* (*respecto a* $\mu^{\dagger}$ *y* $\mathfrak{T}$) si para toda $\tau \in \mathfrak{T}$, $\tau(A) \triangle A \in \mathfrak{M}^{\dagger}$ y $\mu^{\dagger}(\tau(A) \triangle A) = 0$.

Teorema 4.12.

La familia de subconjuntos de G definida como $\mathfrak{I} = \{A \subset G : A \text{ es absolutamente invariante}\}$ es una σ−álgebra.

Demostración.

Es muy sencilla y se omite. ■

Lema 4.13. Existe una familia $\{X_{\nu}\}_{\nu \in N}$ de subconjuntos X_{ν} de G con las siguientes propiedades:

(*i*) $\#(N) = \mathfrak{c}$;

(*ii*) Los conjuntos $X_{\nu}, \nu \in N$ son ajenos entre sí;

(*iii*) $\rho(X_{\nu}) = 1$ para $\nu \in N$;

(*iv*) Para cualquier subconjunto N_0 de N, la unión $\bigcup_{\nu \in N_0} X_{\nu}$ es absolutamente invariante.

Demostración.

Sea $\{F_{\alpha} : 1 \leq \alpha < \omega_{\mathfrak{c}}\}$ como se definió en 4.9. Sea $\{\tau_{\alpha} : 1 \leq \alpha < \omega_{\mathfrak{c}}\}$ un buen ordenamiento de $\mathfrak{T}$ con tipo de orden $\omega_{\mathfrak{c}}$.

Para cada $x \in G$ y cada ordinal $\alpha < \omega_{\mathfrak{c}}$ definimos $C_{\alpha}(x)$ como el conjunto de puntos de G que se pueden escribir como $\tau_{\beta_1}^{\varepsilon_1} \circ \ldots \circ \tau_{\beta_n}^{\varepsilon_n}(x)$, donde $1 \leq \beta_k \leq \alpha$ y

$\varepsilon_k \in \{-1, 1\}$, $k = 1, ..., n$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

(a) $x \in C_\alpha(x)$ (pues $x = \tau_{\beta_1} \circ \tau_{\beta_1}^{-1}(x)$).

(b) Si $1 \leq \beta \leq \alpha < \omega_\mathfrak{c}$, entonces $\tau_\beta(C_\alpha(x)) = C_\alpha(x)$.

Claramente si $y \in C_\alpha(x)$, entonces existen $n \in \mathbb{N}$, $\{\beta_k\}_{k=1}^n$, $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^n$ tales que

$$y = \tau_{\beta_1}^{\varepsilon_1} \circ ... \circ \tau_{\beta_n}^{\varepsilon_n}(x).$$

Como $1 \leq \beta \leq \alpha$, $\tau_\beta \circ \tau_{\beta_1}^{\varepsilon_1} \circ ... \circ \tau_{\beta_n}^{\varepsilon_n}(x) \in C_\alpha(x)$, así que $\forall y \in C_\alpha(x)$, $\tau_\beta(y) \in C_\alpha(x)$. Con esto queda establecida la primera contención $(\tau_\beta(C_\alpha(x)) \subset C_\alpha(x)$).

Si tomamos $y \in C_\alpha(x)$, como $\tau_\beta^{-1}(y) \in C_\alpha(x)$, escribimos $y = \tau_\beta \circ \tau_\beta^{-1}(y)$ y $y \in C_\alpha(x)$.

(c) $\#(C_\alpha(x)) \leq máx(\#\alpha, \aleph_0) < \mathfrak{c}$, por lo que $C_\alpha(x) \in \mathfrak{M}^+$.

Esto se establece con facilidad estudiando el comportamiento de $C_\alpha(x)$ para los máximos posibles.

A continuación se demostrará que existe una doble sucesión transfinita

$$\left\{x_\beta^\alpha : 1 \leq \beta \leq \alpha < \omega_\mathfrak{c}\right\}$$

de elementos de G tal que:

-$x_\beta^\alpha \in F_\alpha$ para $1 \leq \beta \leq \alpha < \omega_\mathfrak{c}$;

-los conjuntos $C_\alpha\left(x_\beta^\alpha\right)$ son ajenos siempre que $1 \leq \beta \leq \alpha < \omega_\mathfrak{c}$.

Si damos a las parejas de numeros ordinales $\{(\alpha, \beta) : 1 \leq \beta \leq \alpha < \omega_\mathfrak{c}\} = \mathfrak{W}$ un orden, de manera que $(\gamma, \delta) < (\alpha, \beta) \Leftrightarrow (\gamma < \alpha)$ ó $(\gamma = \alpha$ y $\beta < \delta)$ (llamado orden lexicográfico), entonces $\mathfrak{W}$ es un conjunto bien ordenado. Podemos definir una sucesión $\left\{x_\beta^\alpha : 1 \leq \beta \leq \alpha < \omega_\mathfrak{c}\right\}$ por inducción transfinita como sigue:

Sea $x_1^1 \in F_1$ arbitrario.

Supongamos que $1 \leq \beta \leq \alpha < \omega_\mathfrak{c}$ y que x_δ^γ ya ha sido definido para todos las parejas (γ, δ) con $(\gamma, \delta) < (\alpha, \beta)$, $1 \leq \delta \leq \gamma$. Considérese el conjunto $D(\alpha, \beta)$ formado por la unión de los conjuntos $C_\alpha(x_\delta^\gamma)$ tomada sobre las $(\gamma, \delta) \in \mathfrak{M}$ tales que $(\gamma, \delta) < (\alpha, \beta)$. Entonces

$$\#(D(\alpha, \beta)) \leq (\#\alpha)^2 \cdot máx(\#\alpha, \aleph_0) = máx(\#\alpha, \aleph_0) < \mathfrak{c}.$$

Como $\#(F_\alpha) = \mathfrak{c}$, el conjunto $F_\alpha \cap (D(\alpha, \beta))^c$ es no vacío.

Sea x_β^α un elemento arbitrario de $F_\alpha \cap (D(\alpha, \beta))^c$. Entonces $C_\alpha\left(x_\beta^\alpha\right)$ resulta ser ajeno con los $C_\alpha(x_\delta^\gamma)$ para todo $(\gamma, \delta) < (\alpha, \beta)$ con $(\gamma, \delta) \in \mathfrak{M}$, pues de lo contrario tendríamos

$$\tau_{\beta_1}^{\varepsilon_1} \circ \ldots \circ \tau_{\beta_n}^{\varepsilon_n}(x) = \tau_{\delta_1}^{\eta_1} \circ \ldots \circ \tau_{\delta_m}^{\eta_m}(x),$$

donde $\beta_k \leq \alpha$, $\delta_j \leq \gamma \leq \alpha$, ε_k es 1 o -1, $\eta_j \in \{1, -1\}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ y $j \in \{1, \ldots, m\}$. Por lo tanto,

$$x_\beta^\alpha = \tau_{\beta_1}^{-\varepsilon_1} \circ \ldots \circ \tau_{\beta_n}^{-\varepsilon_n} \circ \tau_{\delta_1}^{\eta_1} \circ \ldots \circ \tau_{\delta_m}^{\eta_m}(x) \in C_\alpha(x_\delta^\gamma) \subset D(\alpha, \beta),$$

lo que contradice nuestra elección de x_β^α.

Ahora, sea $N = \{\nu : \nu \text{ es ordinal y } 1 \leq \nu < \omega_\mathfrak{c}\}$, y sea

$$X_\nu = \{C_\alpha(x_\nu^\alpha) : \nu \leq \alpha < \omega_\mathfrak{c}\}, \nu \in N.$$

Entonces la propiedad del inciso (i) se verifica automáticamente, la del inciso (ii) se obtiene del hecho de que los conjuntos $C_\alpha\left(x_\beta^\alpha\right)$, con $1 \leq \beta \leq \alpha < \omega_\mathfrak{c}$, son ajenos por pares:

Dadas $\nu, \nu' \in N$, $\nu \neq \nu'$ y $\alpha \geq máx\{\nu, \nu'\}$ fija, los conjuntos $C_\alpha(x_\nu^\alpha)$ y $C_\alpha(x_{\nu'}^\alpha)$ son ajenos, asimismo si variamos α en alguno de los conjuntos $\left(C_{\alpha'}\left(x_{\nu'}^{\alpha'}\right)\right)$, cada conjunto obtenido resulta ajeno a $C_\alpha(x_\nu^\alpha)$, así que

$$X_\nu \cap X_{\nu'} = \Big(\biguplus_{\nu \leq \alpha < \omega_c} C_\alpha(x_\nu^\alpha)\Big) \cap \Big(\biguplus_{\nu' \leq \alpha < \omega_c} C_\alpha(x_{\nu'}^\alpha)\Big) = \varnothing.$$

Para demostrar que $\rho(X_\nu) = 1$ para $\nu \in N$ supondremos que $\rho(X_\nu) < 1$ para alguna $\nu \in N$, por lo que debe existir $X_\nu \subset M^\dagger$ tal que $\mu^\dagger\left(M^\dagger\right) < 1$. Por lo tanto podemos aplicar el **lema 4.9** al conjunto $(M^\dagger)^c$, así que existe un número ordinal α, $\nu < \alpha < \omega_c$ tal que $F_\alpha \subset (M^\dagger)^c$. Pero esto es imposible porque $x_\nu^\alpha \in F_\alpha$ y $x_\nu^\alpha \in C_\alpha(x_\nu^\alpha) \subset X_\nu \subset M^\dagger$. Esto demuestra el tercer inciso.

Para demostrar (iv) basta mostrar que el conjunto $\tau_\gamma(\biguplus_{\nu \in N_0} X_\nu) \triangle (\biguplus_{\nu \in N_0} X_\nu)$ tiene cardinal menor que $\mathfrak{c}$ para toda $\gamma < \omega_c$ y todo $N_0 \subset N$. Además, como

$$\biguplus_{\nu \in N_0} X_\nu = \biguplus\{C_\alpha(x_\nu^\alpha) : \nu \in N_o, \nu \leq \alpha < \omega_c\}$$

es una unión ajena y $\tau_\gamma(C_\alpha(x_\nu^\alpha)) = C_\alpha(x_\nu^\alpha)$ siempre que $\alpha \geq \gamma$,

$$\tau_\gamma\left(\biguplus_{\nu \in N_0} X_\nu\right) \triangle \left(\biguplus_{\nu \in N_0} X_\nu\right) \subset \bigcup\{C_\alpha(x_\nu^\alpha) \cup \tau_\gamma(C_\alpha(x_\nu^\alpha)) : \nu \in N_0,\ \nu \leq \alpha < \omega_c\}.$$

Como $\#(C_\alpha(x_\nu^\alpha) \cup \tau_\gamma(C_\alpha(x_\nu^\alpha))) \leq máx(\#\alpha, \aleph_0)$ para $\nu \leq \alpha$, y como

$$\#(\{(\alpha, \nu) : \nu \in N_0,\ \nu \leq \alpha < \omega_c\}) \leq (\#\gamma)^2,$$

el conjunto $\tau_\gamma(\biguplus_{\nu \in N_0} X_\nu) \triangle (\biguplus_{\nu \in N_0} X_\nu)$ tiene cardinal menor o igual al $máx(\#\gamma, \aleph_0) \cdot (\#\gamma)^2 = máx(\#\gamma, \aleph_0) < \mathfrak{c}$. ∎

El siguiente lema es un caso particular de un lema de A. Tarski [15]. Si bien este resultado es necesario para la construcción de nuestra nueva $\sigma-$ álgebra, no se reproduce aquí la demostración por ser estrictamente del campo de la Teoría de Conjuntos. Al lector interesado se le recomienda acudir al texto de HEWITT Y ROSS que se cita en la bibliografía.

Lema 4.14. Sea N un conjunto arbitrario de cardinal $\mathfrak{c}$. Entonces existe una familia $\{N_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ de subconjuntos distintos de N tal que:

(*i*) $\#\Theta = 2^{\mathfrak{c}}$;

(*ii*) el conjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty} N_{\theta_n}^{\varepsilon_n}$ es no vacío para cualquier sucesión $\{\theta_n\}$ de elementos de Θ distintos y para toda sucesión $\{\varepsilon_n\}$, donde ε_n es 1 ó ^{c}, $n \in \mathbf{N}$.

Esto nos permite establecer el siguiente lema, con el cual obtenemos una familia $\{E_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ de $2^{\mathfrak{c}}$ subconjuntos de G que satisfacen ciertas propiedades. Posteriormente se verá que estos E_θ son μ^*−medibles y tales que $\mu^*(E_{\theta_1} \triangle E_{\theta_2}) = \frac{1}{2}$ siempre que $\theta_1 \neq \theta_2$, lo que automáticamente implicará que el carácter de $(G, \mathfrak{M}^*, \mu^*)$ es $2^{\mathfrak{c}}$.

Lema 4.15. Existe una familia $\{E_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ de subconjuntos de G distintos tal que

(*i*) $\#\Theta = 2^{\mathfrak{c}}$;

(*ii*) $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{\theta_n}^{\varepsilon_n}$ es absolutamente invariante para toda sucesión $\{\theta_n\}$ de elementos de Θ (no necesariamente distintos) y para toda sucesión $\{\varepsilon_n\}$, donde ε_n es 1 ó 0, $n \in \mathbf{N}$ y donde $E^{\varepsilon_n} = E$ si $\varepsilon_n = 1$ y $E^{\varepsilon_n} = E^c$ si $\varepsilon_n = 0$.;

(*iii*) $\rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{\theta_n}^{\varepsilon_n}\right) = 1$ para cualquier sucesión $\{\theta_n\}$ de elementos de Θ distintos y para toda sucesión $\{\varepsilon_n\}$, donde ε_n es 1 ó 0, $n \in \mathbf{N}$.

Demostración.

Sea $\{X_\nu\}_{\nu\in N}$ la familia de subconjuntos de G obtenida en el **lema** 4.13. y sea $\{N_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ la familia de subconjuntos de N que se obtuvo en el **lema** 4.14.

Para $\theta \in \Theta$, sea $E_\theta = \biguplus_{\nu\in N_\theta} X_\nu$. Los conjuntos E_θ resultan ser diferentes por ser los X_ν ajenos. El inciso (i) es exactamente el resultado 4.14.i.

Por 4.13.iv, los conjuntos E_θ son absolutamente invariantes. La propiedad (ii) se sigue de esto y del hecho de que la familia de subconjuntos de G absolutamente invariantes es una $\sigma-$ álgebra [4.12].

Para demostrar (iii) elegimos cualquier $\nu_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} N_{\theta_n}^{\varepsilon_n}$ (que es no vacía por 4.14.ii). Como $E_\theta = \biguplus_{\nu \in N_\theta} X_\nu$ y los conjuntos X_ν son ajenos, dada ν fija, para toda $\nu' \in N$, $X_{\nu'} \subset X_\nu^c$, así que

$$\forall \nu \in N_\theta,\ X_{\nu'} \subset X_\nu^c\ \forall \nu' \in N_\theta^c,$$

de donde $E_\theta^c = \bigcap \{X_\nu^c : \nu \in N_\theta\} \supset \biguplus \{X_\nu : \nu \in N_\theta^c\}$.

Esto es, $E_\theta^\varepsilon \supset \biguplus \{X_\nu : \nu \in N_\theta^\varepsilon\}$ si ε es 1 ó ^{c}. Por tanto, tenemos las siguientes relaciones:

$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{\theta_n}^{\varepsilon_n} \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\biguplus \left\{X_\nu : \nu \in N_{\theta_n}^{\varepsilon_n}\right\}\right) \supset$ [4] $\biguplus \left\{X_\nu : \nu \in \bigcap_{n=1}^{\infty} N_{\theta_n}^{\varepsilon_n}\right\} \supset X_{\nu_0}$.

Como $\rho(X_{\nu_0}) = 1$ (por 4.13.iii) , se sigue que $\rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{\theta_n}^{\varepsilon_n}\right) = 1$. ■

Definición 4.16. Sea $\{E_\theta\}$ la familia de subconjuntos de G obtenida en 4.15. Considérese la familia $\mathfrak{E}$ de los subconjuntos E de G de la forma

$$(i)\ \ E = \biguplus_{\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}} \left(\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_{\theta_k}^{\varepsilon_k}\right) \cap M_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}^{\dagger}\right),$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ es un subconjnto finito de Θ, y para cada sucesión $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, con ε_k igual a 1 ó ^{c}, $k = 1, \dots, n$, $M_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}^{\dagger}$ es un elemento de $\mathfrak{M}^\dagger$. La unión $\bigcup_{\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}}$ está tomada sobre las 2^n sucesiones distintas $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ (la n permanece fija).

Es interesante notar que la unión de 4.16.i es una unión ajena, y esto se comprueba

[4] Sea $x \in \biguplus \{X_\nu : \nu \in \bigcap_{n=1}^{\infty} N_{\theta_n}^{\varepsilon_n}\}$, entonces existe $\nu_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} N_{\theta_n}^{\varepsilon_n}$ tal que $x \in X_{\nu_0}$. Es decir, existe ν_0 tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $\nu_0 \in N_{\theta_n}^{\varepsilon_n}$ y $x \in X_{\nu_0}$. Por lo tanto, $x \in \{X_{\nu_0} : \nu_0 \in N_{\theta_n}^{\varepsilon_n}\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Así, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup \{X_\nu : \nu \in N_{\theta_n}^{\varepsilon_n}\})$. ■

tomando dos sucesiones distintas $\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_n\}$ y $\{\varepsilon'_1,...,\varepsilon'_n\}$. En este caso. debe existir $\varepsilon_k \neq \varepsilon'_k$, por lo que E_{θ_k} aparece en una de las intersecciones y $E^c_{\theta_k}$ en la otra, de donde los conjuntos resultantes deberán ser ajenos.

Lema 4.17. La familia $\mathfrak{E}$ es un álgebra de subconjuntos de G y $\mathfrak{M}^\dagger \subset \mathfrak{E}$. Sea

$$(i)\ \ \mu^*(E) = \frac{1}{2^n}\sum_{\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_n\}} \mu^\dagger\left(M^\dagger_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}\right)$$

siempre que E tenga la forma 4.16.*i*. Entonces:

(a) μ^* está bien definida y es aditiva en $\mathfrak{E}$;

(b) $\mu^*\left(M^\dagger\right) = \mu^\dagger\left(M^\dagger\right)$ para toda $M^\dagger \in \mathfrak{M}^\dagger$;

(c) Si $E \in \mathfrak{E}$ y $\tau \in \mathfrak{T}$, entonces $\tau(E) \in \mathfrak{E}$ y $\mu^*(\tau(E)) = \mu^*(E)$.

Demostración.

Primero obsérvese que si E tiene la forma

$$E = \biguplus_{\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_n\}} \left(\left(\bigcap_{k=1}^{n} E^{\varepsilon_k}_{\theta_k}\right) \cap M^\dagger_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}\right), \cdots (1)$$

y $\{\theta_{n+1},...,\theta_m\}$ es un subconjunto finito de Θ, ajeno a $\{\theta_1,...,\theta_n\}$, entonces

$$E = \biguplus_{\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_m\}} \left(\left(\bigcap_{k=1}^{m} E^{\varepsilon_k}_{\theta_k}\right) \cap M^\dagger_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_m}\right),$$

donde tomamos $M^\dagger_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_m} = M^\dagger_{\eta_1\cdots\eta_m}$ para $\eta_1\cdots\eta_n = \varepsilon_1\cdots\varepsilon_n$. Más aún, tenemos que

$$\frac{1}{2^n}\sum_{\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_n\}} \mu^\dagger\left(M^\dagger_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}\right) = \frac{1}{2^m}\sum_{\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_n\}} 2^{m-n}\cdot\mu^\dagger\left(M^\dagger_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}\right) = \frac{1}{2^m}\sum_{\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_m\}} \mu^\dagger\left(M^\dagger_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_m}\right).$$

Estas observaciones implican que siempre que durante esta demostración aparezcan dos conjuntos E y F en $\mathfrak{E}$, podemos suponer que las uniones correspondientes toman en cuenta los mismos conjuntos de índices $\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_n\}$ y que los conjuntos que se consideran en las intersecciones están determinados por un mismo conjunto de subíndices $\{\theta_1,...,\theta_n\}$.

Si $E \in \mathfrak{E}$ es como en 4.16.i, entonces [3]

$$E^c = \biguplus_{\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}} \left(\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_{\theta_k}^{\varepsilon_k} \right) \cap \left(M^{\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} \right)^c \right) \in \mathfrak{E},$$

y si además tomamos un $F \in \mathfrak{E}$ de la forma

$$F = \biguplus_{\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}} \left(\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_{\theta_k}^{\varepsilon_k} \right) \cap M^{\dagger\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} \right), \cdots (2)$$

entonces

$$E \cup F = \biguplus_{\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}} \left(\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_{\theta_k}^{\varepsilon_k} \right) \cap \left(M^{\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} \cup M^{\dagger\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} \right) \right) \in \mathfrak{E}.$$

Por lo tanto, $\mathfrak{E}$ es un álgebra de subconjuntos de G. Claramente, $\mathfrak{M}^{\dagger} \subset \mathfrak{E}$.

(a) Supongamos que E tiene dos escrituras posibles, y que los conjuntos $\left\{ M^{\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} \right\}$ y $\left\{ M^{\dagger\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} \right\}$ son los que aparecen en cada una de ellas (recuérdese que se pueden usar los mismos $\left\{ E_{\theta_k}^{\varepsilon_k} \right\}$). Para demostrar que μ^* está bien definida, bastará demostrar que

$$\mu^* \left(M^{\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} \right) = \mu^* \left(M^{\dagger\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} \right)$$

para todas las sucesiones $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ posibles.

Puesto que la unión en E es una unión de conjuntos ajenos, tenemos la siguiente igualdad: $\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_{\theta_k}^{\varepsilon_k} \right) \cap M^{\dagger\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} = \left(\bigcap_{k=1}^{n} E_{\theta_k}^{\varepsilon_k} \right) \cap M^{\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}$. Por lo tanto[5],

$$\left(M^{\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} \triangle M^{\dagger\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} \right) \subset \left(\bigcap_{k=1}^{n} E_{\theta_k}^{\varepsilon_k} \right)^c.$$

Como $\rho \left(\bigcap_{k=1}^{n} E_{\theta_k}^{\varepsilon_k} \right) = 1$ [4.15.iii] , cualquier subconjunto $\mu^{\dagger}-$ medible de $\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_{\theta_k}^{\varepsilon_k} \right)^c$ tendrá $\mu^{\dagger}-$ medida cero. Por lo tanto,

$$\mu^{\dagger} \left(M^{\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} \triangle M^{\dagger\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} \right) = 0 \text{ y } \mu^* \left(M^{\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} \right) = \mu^* \left(M^{\dagger\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} \right).$$

[5] $B \triangle C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B) \subset (B \setminus C \cap A) \cup (C \setminus B \cap A) =$
$= (B \setminus A) \cup (C \setminus A) = (B \cap A^c) \cup (C \cap A^c) \subset A^c.$ ■

A continuación demostraremos que μ^* es aditiva en $\mathfrak{E}$. Supóngase que E y F son conjuntos ajenos (de las formas (1) y (2)). Entonces $\left(M^{\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} \cap M^{\dagger\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}\right) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n} E^{\varepsilon_k}_{\theta_k}\right) = \varnothing$ de manera que $\left(M^{\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} \cap M^{\dagger\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}\right) \subset \left(\bigcap_{k=1}^{n} E^{\varepsilon_k}_{\theta_k}\right)^c$. Por un argumento como el del párrafo anterior, tenemos que $\mu^{\dagger}\left(M^{\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} \cap M^{\dagger\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}\right) = 0$. Entonces tenemos que

$$\mu^{\dagger}\left(M^{\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} \cup M^{\dagger\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}\right) = \mu^{\dagger}\left(M^{\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}\right) + \mu^{\dagger}\left(M^{\dagger\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}\right).$$

Por la manera en que se definió $\mu^{\dagger}$, tenemos que $\mu^*(E \uplus F) = \mu^*(E) + \mu^*(F)$. (*b*) Además, resulta obvio que $\mu^*\left(M^{\dagger}\right) = \mu^{\dagger}\left(M^{\dagger}\right)$ para toda $M^{\dagger} \in \mathfrak{M}^{\dagger}$.

(*c*) Por último, sea E como en (1) y $\tau \in \mathfrak{T}$. Entonces

$$\tau(E) = \bigcup_{\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}} \left(\tau\left(\bigcap_{k=1}^{n} E^{\varepsilon_k}_{\theta_k}\right) \cap \tau\left(M^{\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}\right)\right).$$

Si tomamos

$$E_0 = \bigcup_{\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}} \left(\left(\bigcap_{k=1}^{n} E^{\varepsilon_k}_{\theta_k}\right) \cap \tau\left(M^{\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}\right)\right),$$

tendremos que

$$\tau(E) \triangle E_0 = \bigcup_{\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}} \left(\tau\left(\bigcap_{k=1}^{n} E^{\varepsilon_k}_{\theta_k}\right) \triangle \left(\bigcap_{k=1}^{n} E^{\varepsilon_k}_{\theta_k}\right)\right).$$

Cada término de esta unión pertenece a $\mathfrak{M}^{\dagger}$ y tiene $\mu^{\dagger}-$ medida cero por lo visto en 4.15.*ii*. Como $\mathfrak{M}^{\dagger}$ es completa, $\tau(E) \triangle E_0 \in \mathfrak{M}^{\dagger} \subset \mathfrak{E}$ y $\tau\left(M^{\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}\right) \in \mathfrak{M}^{\dagger}$ implica que $E_0 \in \mathfrak{E}$. Por lo tanto, $\tau(E) \in \mathfrak{E}$. Utilizando que $\mu^{\dagger}$ es invariante bajo traslaciones, se obtiene que

$$\mu^*(\tau(E)) = \mu^*(E_0) = \frac{1}{2^n} \sum_{\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}} \mu^{\dagger}\left(\tau\left(M^{\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}\right)\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}} \mu^{\dagger}\left(M^{\dagger}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}\right) = \mu^*(E).$$

A continuación se demostrará el **Teorema** 4.3 :

Sea $\mathfrak{M}^*$ la $\sigma-$ álgebra de subconjuntos de G generada por $\mathfrak{E}$. Para demostrar que μ^* se puede extender a una medida ($\sigma-$ aditiva) sobre $\mathfrak{M}^*$, basta ver [HALMOS 6.B] que si $\{E_p\}_{p=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de elementos de $\mathfrak{E}$ y $\mu^*(E_p) \geq \alpha > 0$ para $p = 1, 2, ...$, entonces $\bigcap_{p=1}^{\infty} E_p \neq \emptyset$. Por las observaciones del **lema** anterior, es claro que se puede encontrar una sucesión $\{\theta_n\}$ de distintos elementos de Θ así como una sucesión creciente $\{n_p\}_{p=1}^{\infty}$ de números naturales y de conjuntos $M^{\dagger}_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n_p}}$ en $\mathfrak{M}^{\dagger}$ para toda $\left\{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n_p}\right\}$ tales que

$$E_p = \biguplus_{\{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n_p}\}} \left(\left(\bigcap_{k=1}^{n_p} E_{\theta_k}^{\varepsilon_k} \right) \cap M^{\dagger}_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n_p}} \right).$$

Donde cada conjunto $M^{\dagger}_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n_p}}$ se puede sustituir con el conjunto $\bigcap_{q=1}^{p} M^{\dagger}_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n_q}}$ sin afectar la igualdad (recuérdese que la sucesión $\{E_p\}_{p=1}^{\infty}$ es decreciente). Por lo tanto, podemos también suponer que

$$M^{\dagger}_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n_{p+1}}} \subset M^{\dagger}_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n_p}}$$

para $p = 1, 2, ...$ y para toda sucesión $\left\{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n_{p+1}}\right\}$. Por hipótesis se tiene que $\mu^*(E_p) = \frac{1}{2^{n_p}} \sum_{\{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n_p}\}} \mu^{\dagger}\left(M^{\dagger}_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n_p}}\right) \geq \alpha$, por lo que

$$\mu^{\dagger}\left(M^{\dagger}_{\varepsilon_1^{(p)} \cdots \varepsilon_{n_p}^{(p)}}\right) \geq \alpha \cdots \quad (1)$$

para alguna sucesión $\left\{\varepsilon_1^{(p)}, ..., \varepsilon_{n_p}^{(p)}\right\}$. Existe una sucesión $\{\delta_1, ..., \delta_{n_1}\}$, con $\delta_k = 1$ ó 0 para la cual

$$Z_1 = \left\{q \in \mathbf{N} : \varepsilon_k^{(q)} = \delta_k \text{ para } k = 1, ..., n_1\right\}$$

es un conjunto infinito. Una vez que se ha definido $\left\{\delta_1, ..., \delta_{n_{p-1}}\right\}$ y el correspondiente conjunto (infinito) de enteros positivos Z_{p-1}, se elige $\left\{\delta_{n_{p-1}+1}, ..., \delta_{n_p}\right\}$ de manera tal que

$$Z_p = \left\{q \in Z_{p-1} : q \geq p \text{ y } \varepsilon_k^{(q)} = \delta_k \text{ para } k = n_{p-1}+1, ..., n_p\right\}$$

sea infinito. Para $p = 1, 2, ...$, existe $q \geq p$ tal que

$$\mu^\dagger\left(M^\dagger_{\delta_1\cdots\delta_{n_p}}\right) = \mu^\dagger\left(M^\dagger_{\varepsilon_1^{(q)}\cdots\varepsilon_{n_p}^{(q)}}\right) \geq \mu^\dagger\left(M^\dagger_{\varepsilon_1^{(q)}\cdots\varepsilon_{n_q}^{(q)}}\right) \geq \alpha > 0,$$

donde la primera desigualdad es cierta por tratarse de una sucesión decreciente, y la segunda por (1). Puesto que $\left\{M^\dagger_{\delta_1\cdots\delta_{n_p}}\right\}_{p=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de conjuntos, se tiene que

$$\mu^\dagger\left(\bigcap_{p=1}^{\infty} M^\dagger_{\delta_1\cdots\delta_{n_p}}\right) \geq \alpha > 0.$$

Como $\rho\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{\theta_k}^{\delta_k}\right) = 1$, la intersección del conjunto $\bigcap_{p=1}^{\infty} M^\dagger_{\delta_1\cdots\delta_{n_p}}$ con el conjunto $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{\theta_k}^{\delta_k}$ es no vacía. Por lo tanto, se tiene que

$$\bigcap_{p=1}^{\infty} E_p \supset \bigcap_{p=1}^{\infty}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n_p} E_{\theta_k}^{\delta_k}\right) \cap M^\dagger_{\delta_1\cdots\delta_{n_p}}\right) = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{\theta_k}^{\delta_k}\right) \cap \left(\bigcap_{p=1}^{\infty} M^\dagger_{\delta_1\cdots\delta_{n_p}}\right) \neq \varnothing,$$

y se puede demostrar que μ^* se puede extender a una medida, que también se denotará μ^*, sobre $\mathfrak{M}^*$.

A continuación se demostrará que $(G, \mathfrak{M}^*, \mu^*)$ tiene carácter $2^{\mathfrak{c}}$.

Sea $\{E_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ como en 4.15. Entonces $\{E_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ tiene cardinal $2^{\mathfrak{c}}$. Por 4.17.i, $\mu^*\left(E_{\theta_1} \cap E_{\theta_2}^c\right) = \frac{1}{4}$, por lo que $\mu^*\left(E_{\theta_1} \triangle E_{\theta_2}\right) = \frac{1}{2}$ para $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ con $\theta_1 \neq \theta_2$. Supóngase que $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}^*$ es una base para $(G, \mathfrak{M}^*, \mu^*)$. Entonces para cada $\theta \in \Theta$ debe existir un $A_\theta \in \mathcal{A}$ tal que $\mu^*\left(E_\theta \triangle A_\theta\right) < \frac{1}{4}$. Para ver que $\mathcal{A}$ necesariamente tiene $2^{\mathfrak{c}}$ elementos, sean $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ distintas. Entonces, si $A_{\theta_1} = A_{\theta_2}$ se obtendría que $\frac{1}{2} = \mu^*\left(E_{\theta_1} \triangle E_{\theta_2}\right) \leq \mu^*\left(E_{\theta_1} \triangle A_{\theta_1}\right) + \mu^*\left(E_{\theta_2} \triangle A_{\theta_2}\right) < \frac{1}{2}$, lo cual es imposible, de manera que $\{A_\theta : \theta \in \Theta\}$ está formada por distintos conjuntos y $\mathcal{A}$ tiene cardinal $2^{\mathfrak{c}}$.

Falta demostrar que si $M^* \in \mathfrak{M}^*$ entonces $\tau(M^*) \in \mathfrak{M}^*$ y $\mu^*(M^*) = \mu^*(\tau(M^*))$ para toda $\tau \in \mathfrak{T}$.

Sea $\mathfrak{D} = \{D \in \mathfrak{M}^* : \tau(D) \in \mathfrak{M}^*$ y $\mu^*(D) = \mu^*(\tau(D))$ para toda $\tau \in \mathfrak{T}.\}$. Como $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{D}$ (por lo visto en 4.17), del Lema de las Clases Monótonas se sigue que $\mathfrak{D} = \mathfrak{M}^*$ siempre y cuando $\mathfrak{D}$ sea una clase monótona. Esto es, siempre que $\mathfrak{D}$ sea una familia cerrada bajo uniones de sucesiones crecientes y bajo intersecciones de sucesiones decrecientes. Si $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de conjuntos de $\mathfrak{D}$ y $\tau \in \mathfrak{T}$, entonces
$\tau(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tau(D_n) \in \mathfrak{M}^*$ y
$\mu^*(\tau(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n)) = \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tau(D_n)) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(\tau(D_n)) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(D_n) = \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n)$,
de manera que $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathfrak{D}$. La demostración de que $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathfrak{D}$ para cualquier $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión decreciente de elementos de $\mathfrak{D}$ se hace de manera análoga. ■

Conjuntos no medibles.

Teorema 4.18. Todo grupo localmente compacto no discreto G contiene un conjunto E que no es medible bajo ninguna medida invariante bajo traslaciones izquierdas ρ que sea extensión de una medida izquierda de Haar μ.

Demostración.

Sea U una vecindad de e (el elemento neutro del grupo) tal que $\mu(U) < \infty$, y sea V una vecindad simétrica de e tal que $3V \subset U$. Entonces $\mu(V) > 0$ (si no, tendríamos $\mu(G) = 0$).

Sea D cualquier subconjunto infinito numerable de V, y H el subgrupo de G generado por D. Claramente, dicho H resulta numerable. Se denota por $\{H + x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ a las distintas clases derechas de H y se toma $A_0 = \{\alpha \in A : (H + x_\alpha) \cap V \neq \emptyset\}$.

Dada $\alpha \in A_0$, elegimos exactamente un elemento $y_\alpha \in (H + x_\alpha) \cap V$. Sea $E = \{y_\alpha : \alpha \in A_0\}$.

Supongamos que E es medible. Como $D \subset (H + x_\alpha) \cap V$, el conjunto $(H + x_\alpha) \cap V$ es infinito numerable, de manera que el conjunto

$$\biguplus \{x + E : x \in H \cap 2V\} = (H \cap 2V) + E$$

es una unión ajena[6] de una cantidad numerable de trasladados izquierdos de E. Por ello, $(H \cap 2V) + E$ debe tener, o bien $\mu-$ medida cero (si $\mu(E) = 0$), o bien $\mu-$ medida ∞ (si $\mu(E) > 0$). Como $\mu(V) > 0$ y $\mu(U) < \infty$, llegaremos a una contradicción una vez que se establezcan las siguientes contenciones:

$$V \subset (H \cap 2V) + E \subset U.$$

Si $v \in V$, entonces $v \in H + x_\alpha = H + y_\alpha$ para alguna $\alpha \in A_0$, por lo que $v = h + y_\alpha$ para alguna $h \in H$ y $y_\alpha \in (H + x_\alpha) \cap V$. Como $h = v - y_\alpha \in V - V \subset 2V$, tenemos que $h \in (H \cap 2V)$, así que $v = h + y_\alpha \in (H \cap 2V) + E$, de donde obtenemos nuestra primera contención. Por otra parte, es fácil verificar que $(H \cap 2V) + E \subset 2V + E \subset 2V + V \subset U$. ■

Teorema 4.19. Sea G un grupo, H un subgrupo de G (no necesariamente normal) tal que el espacio de las clases (izquierdas) $\frac{G}{H}$ sea numerable. Si ρ es una medida invariante bajo traslaciones izquierdas sobre un álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de G y $\mu(G) = 1$, entonces H no puede ser $\mu-$ medible.

Demostración.

[6] Supongamos que $(z+E) \cap (y+E) \neq \emptyset$, entonces existen $z_\alpha, y_\alpha \in E$ tales que $z + z_\alpha = y + y_\alpha$. Por la construcción de E, esto quiere decir que $z_\alpha - y_\alpha \in H$, así que $z_\alpha = y_\alpha$, y claramente $z = y$. ■

Podemos escribir G como unión de sus clases izquierdas, $G = \biguplus_{n=1}^{\infty} a_n + H$, donde los conjuntos $a_n + H$ son ajenos.

Supongamos que H es $\mu-$ medible. Si $\mu(H) = 0$, entonces

$$\mu(G) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(a_n + H) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(H) = 0.$$

Si $\mu(H) > 0$, entonces

$$\mu(G) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(H) = \infty.$$

Esto demuestra que es imposible que $H \in \mathcal{A}$. En particular, si G es un grupo compacto con medida de Haar normalizada μ, entonces H no es $\mu-$ medible, y no existe ninguna extensión de Haar invariante bajo traslaciones izquierdas bajo la cual H sea $\mu-$ medible. ■

Teorema 4.20. Todo grupo métrico compacto infinito G contiene $\mathfrak{c}$ conjuntos ajenos entre sí que no son medibles respecto a una medida de Haar.

Demostración.

Considérese a los $\mathfrak{c}$ conjuntos X_ν construídos en 4.13, y sea ρ la medida exterior inducida por $\mu^\dagger$ definida en 4.10. Si μ es la función conjuntista definida a partir de la integral de Haar [B.2], entonces es claro que $\mu(X_\nu) \geq \rho(X_\nu)$ para toda ν. Por lo visto en el **lema** 4.14, $\mu(X_\nu) = 1$ para toda ν. Si alguna X_{ν_0} fuera $\mu-$ medible, entonces tendríamos que $\mu(X_\nu) \leq \mu\left(X_{\nu_0}^c\right) = 0$ para toda $\nu \neq \nu_0$. ■

Se pueden obtener conjuntos no medibles relativamente simples si se trabaja con espacios producto con gran cantidad de factores:

Teorema 4.21. Sea Γ un conjunto no numerable de índices. Para cada $\gamma \in \Gamma$, sea G_γ un grupo compacto infinito, y μ_γ la medida normalizada de Haar en G_γ.

Denotamos por μ a la medida normalizada de Haar sobre $G = \prod_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$. Entonces μ es la medida producto de las medidas μ_γ. Para cada $\gamma \in \Gamma$, sea A_γ un subconjunto propio de G_γ que sea $\mu_\gamma-$ medible y tal que $\mu_\gamma(A_\gamma) = 1$. Entonces $A = \prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ es no medible.

Demostración.

Supongamos que A es medible. Sea F un subconjunto compacto de A, y para $\gamma \in \Gamma$ sea F_γ la proyección de F sobre G_γ. Entonces F_γ es un subconjunto compacto de A_γ. Como A_γ es un subconjunto propio de G_γ, $G_\gamma \backslash F_\gamma$ es un conjunto abierto no vacío, de manera que $\mu_\gamma(G_\gamma\backslash F_\gamma) > 0$ y $\mu_\gamma(F_\gamma) < 1$. Por tanto [B.14.*ii*], $\mu\left(\prod_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma\right) = 0$ y puesto que $F \subset \prod_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$, tenemos que $\mu(F) = 0$ y, por regularidad de la medida [B.9], $\mu(A) = 0$.

Puesto que [B.13] , si A es un conjunto medible, existe un conjunto de Baire [B.10] B tal que $B \supset A$ y $\mu(B) = \mu(A) = 0$. Como G es normal (en el sentido topológico), la familia de conjuntos de Baire es la menor $\sigma-$ álgebra de subconjuntos de G que contiene a todos los conjuntos abiertos que son la unión numerable de conjuntos cerrados. Ahora considérese a los subconjuntos D de G para los que existe Γ_D, subcconjunto numerable de Γ, tal que

$$\text{si } (x_\gamma) \in D, (y_\gamma) \in G \text{ y } x_\gamma = y_\gamma \text{ para toda } \gamma \in \Gamma_D, \text{ entonces } (y_\gamma) \in D.$$

Esta familia de conjuntos es una $\sigma-$ álgebra que contiene a cualquier conjunto abierto que se puede escribir como unión numerable de conjuntos cerrados, ya que dichos conjuntos son uniones de abiertos básicos. Se sigue que existe un subconjunto numerable

Γ_0 de Γ tal que

$$\text{si } (x_\gamma) \in D, (y_\gamma) \in G \text{ y } x_\gamma = y_\gamma \text{ para toda } \gamma \in \Gamma_0, \text{ entonces } (y_\gamma) \in D.$$

De esto y del hecho de que $B \supset A$ se infiere que $B \supset \prod_{\gamma\in\Gamma_0} A_\gamma \times \prod_{\gamma\in\Gamma_0} G_\gamma$. Por lo tanto [B.14.i], $\mu(B) = 1$, lo cual es absurdo. ∎

Apéndice A

TEORÍA DE CONJUNTOS

A.1. El Axioma de Elección y algunos equivalentes.

(a) Axioma de Elección. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una colección de conjuntos tal que $I \neq \emptyset$ y $A_i \neq \emptyset\ \forall i \in I$, entonces existe $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ "función de elección" tal que $f(i) \in A_i$ para toda $i \in I$.

Definición 2. Dado X conjunto no vacío, $\leq_p$ es un *orden parcial* si es una relación binaria $\leq_p \subset X \times X$ que satisface que:

(i) $x \leq_p x$ (reflexiva)

(ii) Si $x \leq_p y$ y $y \leq_p x$ entonces $x = y$ (antisimétrica)

(iii) Si $x \leq_p y$ y $y \leq_p z$, entonces $x \leq_p z$ (transitiva).

Si además $\leq_p$ satisface

(iv) Para todas $x, y \in X$ $x \leq_p y$ o bien $y \leq_p x$

entonces $\leq_p$ es un orden *lineal* (también llamado *simple*, *completo* o *total*) en X.

Definición 3. Sea X un conjunto con un orden parcial $\leq$. Un subconjunto $\mathfrak{C}$ de X es una *cadena* si $\leq|_{\mathfrak{C}}$ es un orden total para $\mathfrak{C}$.

Definición 4. Dado X un conjunto con un orden parcial $\leq$, se dice que $x \in X$ es un elemento *maximal* si $y \leq x$ para toda $y \in X$.

(b) Lema de Zorn. Todo conjunto no vacío parcialmente ordenado en el que cada cadena tiene una cota superior tiene un elemento maximal.

Definición 5. Dado X conjunto no vacío y $\leq$ un orden lineal en X, decimos que $\leq$ es un *buen orden*, o que X *está bien ordenado* si todo conjunto $N \subset X$ no vacío tiene primer elemento (esto es, si existe $n \in N$ tal que $n \leq m$ para toda $m \in N$).

(c) Principio del Buen Orden. Todo conjunto puede ser bien ordenado. Esto es, si S es un conjunto, entonces existe algún orden que sea buen orden para S.

Definición 6. Sea X es un espacio vectorial sobre un campo F. Un subconjunto A de X es *linealmente independiente* (sobre F) si para cualquier subconjunto finito $\{x_1, ..., x_n\}$ de elementos de A distintos y para cualquier subconjunto $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ de F, la igualdad $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0$ implica que $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.

Definición 7. Un conjunto linealmente independiente B tal que siempre que $B \subset E \subset X$ y $B \neq E$, entonces E no es linealmente independiente recibe el nombre de *base de Hamel* para X sobre F. Así, una base de Hamel es un conjunto maximal linealmente independiente.

(d) Teorema. Un espacio vectorial con al menos dos elementos contiene una base de Hamel.

A.8. **Lema de König.** Sea I un conjunto no vacío y sean $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ dos familias de conjuntos tales que $\#(A_i) < \#(B_i)$ para toda $i \in I$. Entonces

$$\#\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) < \#\left(\prod_{i\in I} B_i\right).$$

A.9. Sea $\mathfrak{F} = \{F \subset \mathbb{R} : F \text{ es un conjunto cerrado no numerable}\}$. Entonces $\#(\mathfrak{F}) = \mathfrak{c}$.

Demostración.

Claramente, el conjunto de intervalos $\{[0,x] : x \in \mathbb{R}^+\}$ tiene el cardinal del continuo. Como es un subconjunto de $\mathfrak{F}$, tenemos que $\#(\mathfrak{F}) \geq \mathfrak{c}$.

Asimismo, todo subconjunto abierto A de $\mathbb{R}$ se puede ver como una unión a lo más numerable de intervalos abiertos con extremos racionales. Como $\#(\{(p,q) \subset \mathbb{R} : p,q \in \mathbb{Q}\}) = \aleph_0$, hay a lo más $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ subconjuntos abiertos A de $\mathbb{R}$. Por complementación, $\#(\mathfrak{F}) \leq \mathfrak{c}$.

A partir de las dos desigualdades obtenemos el resultado buscado. ■

A.10. **Teorema.** Si X es un espacio métrico completo, y A es un subconjunto perfecto de X no vacío, entonces $\#(A) \geq \mathfrak{c}$.

Demostración.

Se construirá una función inyectiva de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ en A.

Puesto que A no es vacío, tiene un punto límite, por lo que A debe ser infinito.

Sean $x_0 \neq x_1$ elementos de A. Sea $\varepsilon_1 = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}d(x_0,x_1)\right\}$, si definimos $A(0) = \{x \in A : d(x_0,x) \leq \varepsilon_1\}$ y $A(1) = \{x \in A : d(x_1,x) \leq \varepsilon_1\}$. Entonces $A(0)$ y $A(1)$ son conjuntos cerrados, infinitos, ajenos y de diámetro menor o igual a 1.

Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y que para cada eneada $(a_1,...,a_n) \in \{0,1\}^n$ tenemos un subconjunto cerrado infinito $A(a_1,...,a_n)$ de A con diámetro $\leq \frac{2}{n}$ y tal que ninguno de estos conjuntos tienen puntos en común. Para $(a_1,...,a_n) \in \{0,1\}^n$, elegimos $x(a_1,...,a_n,0) \neq x(a_1,...,a_n,1)$ en $A(a_1,...,a_n)$, y tomamos $\varepsilon_{n+1} = \min\left\{\frac{1}{2(n+1)}, \frac{1}{3}d(x(a_1,...,a_n,0), x(a_1,...,a_n,1))\right\}$. Sea $A(a_1,...,a_n,j) = \{x \in A(a_1,...,a_n) : d(x(a_1,...,a_n,j),x) \leq \varepsilon_{n+1}\}$ para $j = 0,1$. Entonces $\left\{A(a_1,...,a_{n+1}) : (a_1,...,a_{n+1}) \in \{0,1\}^{n+1}\right\}$ es una familia de conjuntos cerrados ajenos infinitos cuyos diámetros son menores o iguales que $\frac{2}{n+1}$. Por lo tanto, para cada $\mathbf{a} = (a_n) \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ tenemos una sucesión decreciente $\{A(a_1, ..., a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos cerrados infinitos de A cuyos diámetros tienden a 0. Por el Teorema de Cantor, existe un punto $x(\mathbf{a}) \in A$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A(a_1, ..., a_n) = \{x(\mathbf{a})\}$.

Si definimos $f : \{0,1\}^{\mathbf{N}} \to A$ enviando $\mathbf{a}$ en $x(\mathbf{a})$, entonces:

Sea $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$. Entonces, para alguna n_0, $a_{n_0} \neq b_{n_0}$, de manera que $x(\mathbf{a}) \in A(a_1, ..., a_{n_0})$ y $x(\mathbf{b}) \notin A(a_1, ..., a_{n_0})$, por lo que $x(\mathbf{a}) \neq x(\mathbf{b})$, por lo que dicha f es inyectiva. Por lo tanto, $\#(A) \geq \#\left(\{0,1\}^{\mathbf{N}}\right) = c$. ■

Definición 11. Llamamos a $x \in X$ *punto de condensación de* A se $U \cap A$ es no numerable para toda vecindad U de x.

A.12. **Teorema de Cantor-Bendixson**. Sea X un espacio topológico con una base numerable $\mathfrak{B}$ para su topología, y sea A cualquier subconjunto cerrado de X. Entonces X contiene un subconjunto perfecto P y un subconjunto a lo más numerable C tales que $A = P \cup C$.

Demostración.

Sea $P = \{x \in X : x \text{ es punto de condensación de } A\}$.

Sea $C = A \cap P^c$.

Como todo punto de condensación es punto límite y A es cerrado, $P \subset A$. Claramente, $A = P \uplus C$.

(a) Primeramente se verificará que C es un conjunto a lo más numerable.

Puesto que ningún punto de C es punto de condensación de A, cada $x \in C$ tiene una vecindad $V_x \in \mathfrak{B}$ tal que $V_x \cap A$ es a lo más numerable. Pero la base topológica $\mathfrak{B}$ es numerable y $C \subset \bigcup\{A \cap V_x : x \in C\}$, por lo que C es a lo más numerable.

(b) A continuación se comprobará que P es perfecto (esto es, que todos los puntos de P son puntos límite y que P es cerrado).

Sea $x \in P$ y sea U una vecindad de x. Entonces $U \cap A$ es no numerable y $U \cap C$ es numerable. Por lo tanto, $U \cap P = (U \cap A) \setminus (U \cap C)$ necesariamente es no numerable. Como U era arbitraria, x es punto límite de P. Por lo tanto, P no tiene puntos aislados.

Sea $x \in P^c$. Entonces x no es punto de condensación de A, por lo que tiene una vecindad V tal que $V \cap A$ es a lo más numerable. Si hubiera $y \in V \cap P$, entonces V sería una vecindad de y y, al ser y punto de condensación de A, $V \cap A$ sería no numerable, lo que contradice nuestra elección de V. Por lo tanto, $V \subset P^c$, así que P^c es abierto.

Por lo tanto, P es perfecto. ■

A.13. **Corolario.**

Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto medible de medida positiva, entonces el cardinal de F es $\mathfrak{c}$.

Demostración.

Por regularidad de la medida de Lebesgue, tenemos que como $\lambda(A) > 0$ existe un conjunto compacto $K \subset A$ tal que $\lambda(K) > 0$. Claramente, dicho K es no numerable, así, tomando la descomposición de A.12, $K = C \cup P$, vemos que P debe ser no vacío (pues K es no numerable). Como $\mathbb{R}$ es espacio métrico completo y el cardinal de $\mathbb{R}$ es $\mathfrak{c}$, tenemos que $\#(P) = \mathfrak{c}$, y se sigue que A tiene el cardinal del continuo. ■

NOTA: También se puede demostrar que si X es un espacio topológico separable al que se pueda metrizar con una métrica completa (espacio "polaco"), entonces cualquier B conjunto de Borel de X que sea no numerable contiene un subconjunto $K \subset B$ homeomorfo al espacio de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Sin embargo, esto no se demostrará aquí por tratarse de una prueba algo larga y de carácter técnico. El lector interesado puede consultar el libro de COHN que aparece en la bibliografía.

A.14. **Teorema.** Si $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ es un conjunto no numerable de Borel, entonces existe $\lambda_f \in J$ medida de Lebesgue-Stieltjes tal que $0 < \lambda_f(B) < \infty$.

Demostración.

Puesto que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B \cap [-n,n]$ es no numerable, podemos suponer a B acotado. Por la afirmación de la NOTA en el punto A.6 sabemos que existe un subconjunto K de B homeomorfo al $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Si tomamos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función "escalera" de Cantor (también conocida como la *función singular de Lebesgue*) ligeramente modificada:

-constante igual a cero para $x \leq 0$,

-igual a uno para $x \geq 1$ y

- $f(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\beta_j}{2^j} + \frac{1}{2^N}$ para $x \in (0,1)$, donde $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i}$, con $\alpha_i = 0, 1$ o 2, y N es el primer índice tal que $\alpha_N = 1$ (si no hay tal, entonces $N = +\infty$).

Entonces f es continua y no constante, de manera que induce una medida de Lebesgue-Stieltjes en G. Es fácil comprobar que para dicha medida $\lambda_f(C) = 1$. Claramente, $0 < \lambda_f(B) < \infty$. ∎

A.15. **Teorema.** Si A es un conjunto infinito, la familia de subconjuntos finitos de A tiene el mismo cardinal que A.

Demostración.

Sea $\mathfrak{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{D \subset A : \#(D) = n \text{ para alguna } n \in \mathbb{N}\}$. Como $\#(\mathfrak{F}) \leq \aleph_0 \cdot \#(A) \leq \#(A)$ y $\{x\} \in \mathfrak{F}$ para toda $x \in A$, $\#(\mathfrak{F}) = \#(A)$. ∎

Apéndice B

Definición 1. Un conjunto G con propiedades de grupo y de espacio topológico que cumple que:

(i) la función $+ : G \times G \to G$ dada por $+(x,y) = x+y$ es continua y suprayectiva y

(ii) la función que manda $x \mapsto -x$ es continua y sobre

recibe el nombre de *grupo topológico*. Si además G tiene propiedades de espacio métrico, entonces un grupo que cumpla con las propiedades (i) y (ii) es un *grupo métrico*.

Definición 2. Dado un grupo G localmente compacto, llamamos *integral izquierda de Haar* a la funcional $I : \mathfrak{C}_{00}^{+} \to \mathbf{R}$ definida sobre $\mathfrak{C}_{00}^{+}$ que cumple que:

(i) $I(f)$ es real y positiva si $f \geq 0$;

(ii) $I(f+g) = I(f) + I(g)$ $\forall f, g \in \mathfrak{C}_{00}^{+}$;

(iii) $I(\alpha f) = \alpha I(f)$ $\forall f \in \mathfrak{C}_{00}^{+}$ y $\forall \alpha \leq 0$;

(iv) $I({}_a f) = I(f)$ $\forall f \in \mathfrak{C}_{00}^{+}$ y $a \in G$.

Donde $\mathfrak{C}_{00}^{+}(G) = \{f : G \to \mathbf{C} : \exists K \subset G$ compacto tal que $f(x) = 0\ \forall x \in K^c\}$ y ${}_a f$ está dada por ${}_a f(x) = f(ax)$.

Definición 3. Dada una función conjuntista ρ, no negativa, con valores reales extendidos, definida para todos los subconjuntos de G y asociada a una integral izquierda de Haar I, la restricción de ρ a la $\sigma-$ álgebra de los conjuntos $\rho-$ medibles $\mathfrak{M}$ es una medida llamada *medida izquierda de Haar*. Y cumple que:

B.4. Teorema. Todos los subconjuntos abiertos de G pertenecen a $\mathfrak{M}$.

B.5. Teorema. Para todo subconjunto abierto no vacío U de G se cumple que $0 < \rho(U)$.

B.6. Teorema. $\rho(U) < \infty$ para algún subconjunto abierto U de G.

B.7. Teorema. Para toda $a \in G$ y para todo $B \in \mathfrak{M}$ se tiene que $\rho(a + B) = \rho(B)$ (esto es, ρ es invariante bajo traslaciones izquierdas).

Definición 8. Si G es un grupo topológico y ρ es una medida izquierda de Haar en G tal que $\rho(B + a) = \rho(B)$ para toda $a \in G$ y para todo $B \in \mathfrak{M}$ (esto es, que es invariante bajo traslaciones derechas también), entonces recibe el nombre de *medida de Haar*. Cuando además se verifica que $\rho(G) = 1$ se dice que es una medida *normalizada*.

Definición 9. Una medida ρ definida sobre una $\sigma-$ álgebra $\mathfrak{M}$ que contiene a todos los subconjuntos abiertos de G se dice *regular* cuando

(*i*) para todo conjunto abierto $V \subset G$, $\rho(V) = \sup\{\rho(F) : F \text{ es compacto, } F \subset V\}$

y

(*ii*) $\forall A \in \mathfrak{M}$, $\rho(V) = \inf\{\rho(A) : V \subset A \text{ y } A \text{ es abierto}\}$

Definición 10. Sea Y un espacio topológico, y sea

$$\mathcal{A} = \{\{y \in Y : f(y) > 0\} : f : Y \to \mathbb{R} \text{ es continua}\}.$$

Llamamos *conjuntos de Baire* a los elementos de la menor $\sigma-$ álgebra que contiene a $\mathcal{A}$.

B.11. **Propiedad.** Sea G un grupo topológico, entonces la $\sigma-$ álgebra de Baire B_a es la $\sigma-$ álgebra generada por $\mathcal{A}' = \{A \subset G : A \text{ es abierto y } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n,\ C_n \text{ cerrado}\}$

Demostración.

Basta demostrar que $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$.

Como $(0,\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n},\infty\right)$, entonces $f^{-1}((0,\infty)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left[\frac{1}{n},\infty\right)\right) \in \mathcal{A}'$ para todoa f función continua, entonces $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$.

Inversamente, tomamos $A \in \mathcal{A}'$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Sea $C_0 = G - A$. Los conjuntos C_0 y C_n son cerrados ajenos no vacíos. Como G es normal, existe $\phi_n : G \longrightarrow [0,1]$ **continua** tal que $\phi_n|_{C_n} = 1$ y $\phi_n|_{C_0} = 0$.

Sea $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \phi_n$. Entonces f es continua y es inmediato verificar que $A = f^{-1}((0,\infty))$.

Por lo tanto, $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$. ■

Los siguientes resultados se enuncian sin demostración:

Definición 12. G es un grupo *generado compactamente* si contiene un conjunto F compacto para el que el subgrupo generado (por F) es G. Esto es, $G = \{e\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (F \cup F^{-1})^n$.

B.13. **Teorema.** Sea G un grupo generado compactamente, localmente compacto y U un subconjunto abierto de G tal que $0 < \mu(U) < \infty$. Entonces U contiene un conjunto D tal que

(*i*) D es conjunto de Baire;

(*ii*) $\mu(U \cap D^c) = 0$.

B.14. **Teorema.** Sean X_γ grupos topológicos compactos infinitos y μ_γ la correspondiente medida izquierda de Haar para cada grupo. Sea μ la medida producto de las medidas μ_γ. Sea $A_\gamma \subset X_\gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$. Entonces:

(*i*) Si todas excepto una cantidad numerable de A_γ son iguales a X_γ. y todas las A_γ son μ_γ—medibles, entonces $\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ es μ—medible y

$\mu(\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = \prod_{\gamma\in\Gamma} \mu_\gamma(A_\gamma) =$

$= inf\ \{\mu_{\gamma_1}(A_{\gamma_1}) \cdot \ldots \cdot \mu_{\gamma_n}(A_{\gamma_n}) : \{\gamma_1, ..., \gamma_n\}$ es subconjunto finito de $\Gamma\}$

(*ii*) Si $\mu_\gamma(A_\gamma) < 1$ para una cantidad no numerable de índices $\gamma \in \Gamma$, entonces $\mu(\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = 0$.

Bibliografía.

COHN, Donald L., Measure Theory, Ed. Birkhäuser, Boston, Estados Unidos, 1a. edición, 1980.

DUGUNDJI, James, Topology, Ed. Allyn and Bacon, Inc., Boston, Estados Unidos, 1a. edición, 1978.

FALCONER, K. J., The Geometry of Fractal Sets, Cambridge University Press, 1985.

HALMOS, Paul R., Measure Theory, Ed. D. Van Nostrand Company, Inc., Estados Unidos, 1a. edición, 1956.

HEWITT, E., Ross, K., Abstract harmonic analysis, Ed. Springer, 1963.

HEWITT, E., Stromberg, K., Real and Abstract Analysis, Ed. Springer, 1965.

KESTELMANN, H., Modern Theories of Integration, Ed. Dover, 1960.

OXTOBY, John C., Measure and Category, Ed. Springer, Colección *Graduate Texts in Mathematics*, núm. 2, Nueva York, Estados Unidos, 2a. edición, 1987.

SIERPINSKY, Waclaw, General Topology, Ed. University of Toronto Press, 1952.

Revistas.

[1]BESICOVICH, A. S., Rado, R., "A plane set of measure zero containing circumferences of every radius", *J. London Math. Soc.*, 43, 1968, pp. 717-719.

[2]BOES, D., Darst, R., Erdös, P., "Fat, symmetric, irrational Cantor sets", *American Mathematical Monthly*, pp. 340-341.

[3]BUNN, Robert, Reseña del libro "Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development and Influence", *American Mathematical Monthly*, diciembre 1984, pp. 654-662.

[4]DAVIES, R. O., "Another thin set of circles", *J. London Math. Soc.* (2) 5, 1972, pp. 191-2.

[5]FEJZIC, Hajrudin, "On thin set of circles", *American Mathematical Monthly*, agosto-septiembre 1996, pp. 582-584.

[6]KINNEY, J.R., "A thin set of circles", *American Mathemarical Monthly* 75, 1968, pp. 1077-1081.

[7]RUDIN, Walter, "Well-distributed Measurable Sets", *American Mathematical Monthly*, enero 1983, pp. 41-42.

[8]SAEKI, S., Stromberg, K. R., "Measurable subgroups and nonmeasurable characters", *Math. Scand.*, 57, 1985, pp. 359-374.

[9]SILVERMAN, Stephen, "Intervals contained in arithmetic combinations of sets", *American Mathematical Monthly*, abril 1995, pp. 351-353.

[10]SIMOSON, Andrew, "An "Archimedean" Paradox", *American Mathematical Monthly* 89, febrero 1982, pp. 114-125.

[11]SIMOSON, A., "On two halves being two wholes", *American Mathematical Monthly* 91, 1984, pp. 190-193.

[12]SOLOVAY, Robert M., "A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue-measurable" *Annals of Mathematics* (2) 92, pp. 1-56.

[13]STROMBERG, Karl R., "Universally Nonmeasurable Subgroups of $\mathbb{R}$", *American Mathematical Monthly*, marzo 1992, pp. 253-255.

[14]STROMBERG, Karl R., "An Elementary Proof of Steinhaus's Theorem", *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 36, núm. 1, noviembre 1972, pp. 308.

[15]TARSKI, Alfred, "Ideale in vollständigen Mengenkörpern I", *Fund. Math.* 32, 1939, pp. 45-63.