28
2ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TÓPICOS EN LÓGICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MATEMATICO

P R E S E N T A:

JOSÉ GABRIEL OCAMPO MÁRQUEZ

NOMBRE DEL DIRECTOR DE TESIS

M. en C. Yolanda Torres Falcon

1997

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Tópicos en Lógica

realizado por José Gabriel Ocampo Márquez

con número de cuenta 7630095-0 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. Yolanda Torres Falcón.
Propietario	M. en C. Rafael Rojas Barbachano.
Propietario	M. en C. José Alfredo Amor Montaño.
Suplente	M. en C. Carlos Torres Alcaráz.
Suplente	Mat. Guillermo Zambrana Castañeda.

Consejo Departamental de Matemáticas

Mat. César Guevara Bravo

MATEMÁTICAS

Esta tesis está dedicada a la memoria de:

Ma. Lucía Márquez Trinidad (1929-1986)

Rosalía Z. Soladrero (1896-1987)

Consuelo Z. Soladrero (1913-1989)

AGRADECIMIENTOS:

A mi directora de tesis y sinodales

A todos mis profesores, amigos y compañeros, esencialmente de quienes recibí apoyo durante la elaboración de este trabajo:

Rosalinda Benítez Bernabe

Las familias Olea y Márquez

Profa. Apolonia Pérez Sarabia

Eduardo Arellano, Luis Vázquez y Maricela Solorzano

Elsa Espinoza Jiménez

Dr. Humberto Carrillo y Dr. Javier Paez

Georgina González Rodríguez

Laura y Angeles

Especialmente a ***Antonio Carrillo Ledesma***

A todos ellos muchas gracias.

INTRODUCCIÓN

En el estudio de teorías de primer orden hay conceptos algebraicos y topológicos que han resultado ser muy útiles para la lógica y que han generado una interacción muy fructífera entre la lógica y estas disciplinas.

El objetivo de esta tesis, Tópicos en Lógica, es presentar y analizar algunos conceptos puramente lógicos, relacionarlos con los algebraicos y topológicos y mostrar cómo un enfoque así enriquecido aumenta nuestro conocimiento de ciertas estructuras matemáticas.

Dichos conceptos aquí tratados son: álgebras booleanas, filtros y ultrafiltros, espacios T_2-compactos y espacios de Stone.

En los capítulos 1, 2 y 3 se introducen y estudian estos conceptos básicos, mientras que el capítulo 4 cubre el material fundamental de la lógica de primer orden. Esta es la parte básica de la tesis.

En la segunda parte se relacionan los conceptos lógicos con los algebraicos y topológicos.

En el capítulo 5 construimos las álgebras relativas a teorías de primer orden arbitrarias (T), denotadas por $B_n T$, contruimos el espacio de Stone de una teoría T, denotado por $S_n T$ y obtenemos teoremas que relacionan estas dos construcciones.

Los ultrafiltros nos sirven, entre otros resultados, para caracterizar clases de modelos: elementales (EC) y elementales en sentido amplio (EC_Δ). Esto está en el capítulo 6.

Finalmente, en el capítulo 7 se estudian los conceptos de $\aleph_0$-categoricidad y atomicidad de una teoría T, los cuales estan caracterizados en términos de $B_n T$ y $S_n T$.

La tesis cuenta con dos apéndices: el primero está dedicado a demostrar resultados de la lógica de primer orden que no se cubrieron con todo detalle en el texto y el otro con una serie de ejemplos que ilustran cómo se utiliza la herramienta desarrollada para el caso de algunas teorías matemáticas de primer orden.

Notas:

(1) El Axioma de Elección se supone a lo largo de todo el texto.

(2) Los resultados [illegible] con un número [illegible] si la [illegible] generalmente, excede [illegible] trabajo.

(3) Por la proposición **2.3.4**, se entiende que estamos hablando de la proposición 3, inciso 4 del capítulo 2, cuando la referencia se haga fuera

de este capítulo; sin el número "2" cuando se este dentro de dicho capítulo.
(4) "$\Leftrightarrow$" significa "si y sólo si", en el metalenguaje.
(5) El final de una prueba se señala con el símbolo "$\square$".
(6) El símbolo "$\cong$" indica isomorfismo y "$\simeq$" indica homeomorfismo.
(7) El capítulo 3 depende del capítulo 2 y éste del 1. El capítulo 4 es independiente de los tres primeros. El capítulo 7 depende del 6, 5 y 3. El 5 depende del 3 y 4.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

ORDEN Y REDES

Estudiamos las propiedades básicas de orden y un caso especial de este: la red.

Orden Parcial

Definición 1. Sea X un conjunto y $\leq$ una relación binaria en X.

$\leq$ es un **orden parcial** en X $\Leftrightarrow$ $\leq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Sean X y $\leq$ como en la definición 1.
Al par $\langle X, \leq \rangle$ se le llama **conjunto parcialmente ordenado (copo)**.
Si a,b $\in$ X, "a $\leq$ b" se lee: a es menor o igual que b.
Por "a $<$ b", entendemos que: a $\leq$ b y a $\neq$ b, y se lee: "a es estrictamente menor que b". Por "a $\leq^{-1}$b" entenderemos "b $\leq$ a".
Si B $\subseteq$ X, la restricción de $\leq$ a B, denotada por " $\leq \lceil$ B", significará que a $\leq$ b y a,b $\in$ B.
Las propiedades más importantes están en la siguiente proposición.

Proposición 1. Sea $\langle X, \leq \rangle$ un copo y B $\subseteq$ X.

(1) $\leq^{-1}$ es un orden parcial en X

(2) $\leq \lceil$B es un orden parcial en B. $\square$

Para $\langle X, \leq \rangle$ copo y a,b $\in$ X , escribiremos "a $\geq$ b" en lugar de "a $\leq^{-1}$b" y se leerá: "a es mayor o igual que b". Este orden es conocido como el **orden dual** de X y lo denotaremos por X^*.

Ejemplos:

(1) Sea X cualquier conjunto.

El **conjunto potencia** de X es $P(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$ y la **diagonal** de X es $\Delta = \{\langle x,x\rangle \mid x \in X\}$. Se tiene que $\langle P(X),\subseteq\rangle$, $\langle X,\Delta\rangle$ son copos, pero $\langle X,X^2\rangle$ no es copo, pues falla la antisimetría, para cuando X tiene más de un elemento.

La expresión "$A \subset X$" se lee " A es un subconjunto propio de X" y significa: $A \subseteq X$ y $A \neq X$.

(2) $\langle \mathbb{N},\leq\rangle$, $\langle \mathbb{Z},\leq\rangle$, $\langle \mathbb{Q},\leq\rangle$, $\langle \mathbb{R},\leq\rangle$, $\langle\{1,2,...,n\},\leq\rangle$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$ y $\mathbb{R}^*$ son copos.

(3) Para $a,b \in \mathbb{Z}$, definimos: a divide a b $(a \mid b) \Leftrightarrow$ existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ac$. Entonces, $\langle \mathbb{Z},|\rangle$ no es copo, porque falla la antisimetría, pero $\langle \mathbb{N},|\rangle$ sí es copo. Si $b \in \mathbb{N}$, $D_b = \{a \in \mathbb{N} \mid a \mid b\}$, el conjunto de los divisores de b, $\langle D_b,|\rangle$ es un copo.

Dentro de un copo hay elementos especiales, las cotas.

Definición 2. Sea $\langle X,\leq\rangle$ un copo y $B \cup \{b\} \subseteq X$.

(a) b es una **cota superior** de B $\Leftrightarrow$ para todo $x \in B$, $x \leq b$.

(b) b es un **supremo** de B $\Leftrightarrow$ b es cota superior de B y para cualquier d cota superior de B, $b \leq d$.

(c) b es un **máximo** de B $\Leftrightarrow$ b es cota superior de B y $b \in B$.

(d) b es un **maximal** de X $\Leftrightarrow$ para toda $x \in X$, si $b \leq x$ entonces $x = b$.

Los conceptos de **cota inferior, ínfimo, mínimo** de B y **minimal** de X se definen análogamente.

Veamos algunas propiedades de estos conceptos.

Proposición 2. Sea $\langle X,\leq\rangle$ un copo y $A \cup B \cup \{a,b\} \subseteq X$.

(1) Si b es un supremo de B entonces b es único y se denota por
$b = \sup B$.
Lo mismo para ínfimo ($\inf B$), mínimo ($\min B$) y máximo ($\max B$).

(2) $b = \max B$ ($\min B$) $\Leftrightarrow b \in B$ y $b = \sup B$ (resp. $b = \inf B$)

(3) Si $A \subseteq B$ y ambos tienen supremos e ínfimosmos
(resp. máximos y mínimos) entonces
$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$
(resp. $\min B \leq \min A \leq \max A \leq \max B$).

(4) Son equivalentes:
(i) $a \leq b$ (ii) $\sup \{a,b\} = b$ (iii) $\inf \{a,b\} = a$.

(5) b es cota superior de B en X $\Leftrightarrow$ b es cota inferior de B en X^*.
Lo mismo sucede para los demás conceptos.

Prueba. (1) por antisimetría. (2)-(5) son para el lector.□

Ejemplos. $\langle \mathbf{N},\leq \rangle$ no tiene máximo, $\mathbf{N}^*$ no tiene mínimo, $\langle \mathbf{Z},\leq \rangle$, $\langle \mathbf{Q},\leq \rangle$ y $\langle \mathbf{R},\leq \rangle$ no tienen extremos, tampoco $\mathbf{Z}^*$, $\mathbf{Q}^*$ ni $\mathbf{R}^*$.

Tipos de orden

Definición 3. Sea $\langle X,\leq \rangle$ un copo y $\{x_n\}_{n \in N}$ una sucesión en X.

(a) $\leq$ es un **orden total** (orden lineal o cadena) $\Leftrightarrow$ para todo $a,b \in X$, $a \leq b$ o $b \leq a$.

(b) $\leq$ es un **buen orden** B $\Leftrightarrow$ para todo $B \subseteq X$, si $B \neq \emptyset$ entonces existe el $\min B$.

(c) $\leq$ es un **orden denso** $\Leftrightarrow$ para todo $a,b \in X$, si $a < b$ entonces existe $c \in X$ tal que $a < c < b$.

(d) $\langle \{x_n\}_{n \in N},\leq \rangle$ es **una cadena ascendente (descendente)** $\Leftrightarrow$ para todo $n \in \mathbf{N}$, $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_{n+1} \leq x_n$).

Si $\leq$ es un orden total en X entonces al par $\langle X,\leq \rangle$ se le llama **conjunto totalmente ordenado (coto)**. También se le conoce como orden lineal o cadena.

Morfismos de Orden

Definición 4. Sean X y Y copos y $f{:}X \to Y$.

(a) f es un **morfismo de orden** (preserva el orden) $\Leftrightarrow$ para toda $a,b \in X$, $a \leq b$ implica $f(a) \leq f(b)$.

(b) f es un **isomorfismo** $\Leftrightarrow$ f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son morfismos de orden.

(c) X es **isomorfo** a Y ($X \cong Y$) $\Leftrightarrow$ existe $f{:}X \to Y$ isomorfismo.

Ejemplo.

Sean $\langle A,P^A \rangle$ y $\langle B,P^B \rangle$ copos, donde $A = \{a,b,c,d\}$ y $P^A = \{\langle a,b \rangle, \langle a,c \rangle, \langle b,d \rangle, \langle c,d \rangle\}$ y $B = \{1,2,3,4\}$ y $P^B = \leq$.
Definimos $g{:}A \to B$, $g(a) = 1$, $g(d) = 4$, $g(b) = 2$ y $g(c) = 3$.
Es claro que g es biyectiva, es morfismo de orden y existe g^{-1}.
Pero $2 \leq 3$ y $\langle g^{-1}(2), g^{-1}(3) \rangle \notin P^B$.
Así, g no es un isomorfismo de orden.

Proposición 4. Sean $f{:}X \to Y$ y $g{:}Y \to Z$ morfismos de orden.

(1) Entonces $g \circ f : X \to Z$ es un morfismo de orden.

(2) Si f y g son isomorfismos, $g \circ f$ es isomorfismo.

(3) " $\cong$ " es una relación de equivalencia.

(4) Si $X \cong Y$ y X es coto (cobo, codo) entonces Y también lo es.□

Para más detalles ver [1], [2] y [4].

Ordinales y Cardinales

Sean X y Y dos conjuntos arbitrarios.
X es **equipotente** a Y ($X \sim Y$) $\Leftrightarrow$ existe $f{:}X \to Y$ biyectiva.
Entonces "$\sim$" es una relación de equivalencia.
Definimos:

(a) X es **transitivo** $\Leftrightarrow$ para todo $Y \subseteq X$, $Y \in X$.

(b) X es un **ordinal** $\Leftrightarrow$ X es transitivo y $\langle X,\in \rangle$ es un cobo.

Si $\langle X,\leq\rangle$ es un cobo y $X \cong \beta$ para algún ordinal β entonces tal isomorfismo es único. Definimos $A_X = \{\beta \mid X \cong \beta\}$.
Entonces $A_X \neq \emptyset$. Como A_X es un cobo entonces existe el mínimo de éste al cual denotaremos por $\mid X \mid$ y se le llama **el cardinal de X.**
Por ejemplo $\mid \emptyset \mid = 0$, $\mid \{1,..., n\} \mid = n$ y $\mid \mathbf{N} \mid = \aleph_o$.
Las propiedades más importantes de ordinales que usaremos son las siguientes:

(a) Si X es un ordinal entonces $X \cup \{X\}$ es un ordinal y $S_X \ncong X$.

(b) Si A es un conjunto de ordinales, $\cup A$ es un ordinal.

A partir de 0 tenemos los números ordinales 1, 2,..., ω, $\omega + 1$,..., $\omega + \omega$, etc. Los ordinales como ω y $\omega + \omega$ no son ordinales sucesor y son conocidos como **ordinales límite.**
Si $\langle Y,\leq'\rangle$ es otro cobo y $\langle X,\leq\rangle \cong \langle Y,\leq'\rangle$ tenemos que:
$\mid X \mid = \mid Y \mid \Leftrightarrow X \sim Y$.
Decimos que:

X es **finito** $\Leftrightarrow X = \emptyset$ o, para algún $n \in \mathbf{N}$, $X \sim \{1,...,n\}$. ($\mid X \mid < \aleph_o$)

X es **infinito numerable** $\Leftrightarrow X \sim \mathbf{N}$. ($\mid X \mid = \aleph_o$)

X es **contable** $\Leftrightarrow$ X es finito o infinito numerable. ($\mid X \mid \leq \aleph_o$)

X es **infinito no-numerable** $\Leftrightarrow \mid X \mid > \aleph_o$.

Decimos que $|X| \leq |Y| \Leftrightarrow$ existe $f{:}X \rightarrow Y$ inyectiva.
Sabemos que está bien definida, es reflexiva y transitiva.
Teorema de Schröder-Berstein.
Si $\mid X \mid \leq \mid Y \mid \leq \mid X \mid$ entonces $\mid X \mid = \mid Y \mid$.□
Por lo tanto, $\leq$ es un orden parcial. Para más detalles ver [8] y [10].
Teorema de Cantor.
Si X es un conjunto entonces $\mid X \mid < \mid P(X) \mid = 2^{\mid X \mid}$.□

El Axioma de Elección

El Axioma de Elección es fundamental para esta tesis.
Presentamos dicho axioma y algunos otros enunciados relacionados con él. Para esto primero introducimos algunos conceptos.
Sea X una familia no vacía de conjuntos no vacíos. Decimos que $f : X \rightarrow \cup X$ es una función de elección para X si para todo $B \in X$, $f(B) \in B$. Sea X un conjunto no vacío. X se puede bien ordenar si

es posible encontrar una relación binaria R en X tal que R es un buen orden. Son equivalentes:

Axioma de Elección, AE (Zermelo, 1908) Toda familia no vacía de conjuntos no vacíos tiene una función de elección.

Principio del Buen Orden, PBO (Zermelo, 1908) Todo conjunto no vacío se puede bien ordenar.

Lema de Zorn (1935) Sea $\langle X, \leq \rangle$ un copo. Si toda cadena en X tiene una cota superior entonces X tiene un maximal.

Producto. Si $I \neq \emptyset$ y para toda $i \in I$, $A_i \neq \emptyset$ entonces $\Pi_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

La última formulación se considera a veces como el axioma de elección. Usaremos los siguientes resultados (que se demuestran con el **AE**):

(1) Si $f{:}A \to B$ es suprayectiva entonces $|A| \geq |B|$.

(2) El orden entre cardinales es total.

(3) Para $|A| \geq \aleph_0$, $|A^2| = |A|$.

(4) Si X es un conjunto entonces existe único ordinal β tal que X es isomorfo a β.

Redes

Definición 5. Sea $\langle X, \leq \rangle$ un copo.

X es una **red** $\Leftrightarrow$ para toda $a,b \in X$, $\{a,b\}$ tiene supremo e ínfimo.

Ejemplos.

$\langle P(X), \subseteq \rangle$, $\langle \mathbf{N}, \leq \rangle$ y $\langle D_b, | \rangle$ son redes.

Si X es red entonces X^* también. Otro nombre de red es "lattice".

Proposición 5. Sea $\langle X, \leq \rangle$ un copo.

(1) X es una red $\Leftrightarrow$ para cualquier $B \subseteq X$, si $B \neq \emptyset$ y B es finito entonces B tiene supremo e ínfimo.

(2) $L = \langle X, \leq \rangle$ es una red; $a, b \in X$.

Definimos: $a \wedge b = \inf\{a,b\}$ y $a \vee b = \sup\{a,b\}$.

Entonces en $L^+ = \langle X, \vee, \wedge \rangle$ se cumplen, para cualesquiera $a, b, c \in X$:

L.1 $a \vee a = a$	L.1' $a \wedge a = a$
L.2 $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$	L.2' $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
L.3 $a \vee b = b \vee a$	L.3' $a \wedge b = b \wedge a$
L.4 $a \vee (a \wedge b) = a$	L.4' $a \wedge (a \vee b) = a$

(3) Sea $L = \langle X, \vee, \wedge \rangle$ que cumple con L1-L4'.

Definimos, para $a, b \in X$, $a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$.

Entonces $L^\circ = \langle X, \leq \rangle$ es una red, $\inf\{a,b\} = a \wedge b$ y $\sup\{a,b\} = a \vee b$.

(4) Se tiene el siguiente resultado:

(a) Si $L = \langle X, \leq \rangle$ es una red entonces $(L^+)^\circ = L$.

(b) Si $L = \langle X, \wedge, \vee \rangle$ cumple con L1-L4'entonces $(L^\circ)^+ = L$.

Sean $a, b, c, d, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in X$.

(5) Si $c \leq a$, $b \leq d$ entonces $c \leq a \wedge b \leq a \vee b \leq d$.

(6) Si $a \leq c$ y $b \leq d$ entonces $a \wedge b \leq c \wedge d$ y $a \vee b \leq c \vee d$.

(7) Si $c \leq a_i \leq b_i \leq d$, para $1 \leq i \leq n$ entonces $c \leq \inf\{a_1, \ldots, a_n\} \leq \sup\{b_1, \ldots, b_n\} \leq d$.

(8) Si $A, B \subseteq X$ no vacíos y finitos, $\inf(A \cup B) = \inf A \wedge \inf B$.

Prueba. (1), (2), (4), (5) y (6) son para el lector.

(3) Usar la proposición 2.4, L2 y L3.

(7) Inmediato de (5) y (6) por inducción en n.

(8) Usar la proposición 2.3.□

Si L es una red entonces no hay ambigüedad cuando usemos " $\leq$ " o " $\vee, \wedge$ " pues por la proposición 5.4, son equivalentes. Observamos que L.1 y L.1' se deducen de L.4 y L.4'.

Tipos de Redes

Definición 6. Sea L una red.

(a) L es **distributiva** (Schröder, 1890) $\Leftrightarrow$ para toda a,b,c $\in$ L:

D1. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

D2. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

(b) L es **complementada** $\Leftrightarrow$ se cumplen:

(i) existen $0 \neq 1 \in L$ tales que para todo $a \in L$, $0 \leq a \leq 1$ y

(ii) para toda $a \in L$ existe $b \in L$ tal que $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$.

(b es un complemento de a).

(c) L es **completa** (Birkhoff, 1930) $\Leftrightarrow$ para todo $B \subseteq L$, B tiene supremo e ínfimo.

(d) L es **densa** $\Leftrightarrow$ $\langle L, \leq \rangle$ es un codo.

Ejemplos y comentarios.

-$\langle P(X), \subseteq \rangle$ es una red distributiva, complementada y completa, pero no densa.

-Si L es finita, L es completa.

-Si L es completa, inf $\emptyset = 1$ y sup $\emptyset = 0$.

-Si $X = \emptyset$, tenemos que $\langle P(X), \subseteq \rangle$ es trivial.

La definición 6.b, sólo considera a las redes no triviales.

-Si $\langle X, \leq \rangle$ es coto, con $0 \neq 1$ entonces X es una red pero no puede ser complementada, porque para $a \in X$-$\{0\}$ y $b \in X$ un complemento de a, tendríamos que $a = 0$.

Proposición 6. Sea L un copo.

(1) Si L es una red y se cumple una de las leyes distributivas entonces la otra ley distributiva también se cumple, por lo que L es distributiva.

(2) Si L es una red distributiva y complementada entonces los

complementos son únicos.

(3) Si $0 \in L$ y para cualquier $B \subseteq L$ existe el sup B entonces L es una red completa.

Similarmente para el caso: $1 \in L$ y para toda $B \subseteq L$ existe el inf B.

Prueba.

(1) Sea L una red, $a,b,c \in L$ y suponemos que se cumplen D1.

P.D. D2 se cumple en L.

Entonces:

$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = ((a \wedge b) \vee a) \wedge ((a \wedge b) \vee c) =$

$a \wedge ((a \vee c) \wedge (b \vee c)) = (a \wedge (a \vee c)) \wedge (b \vee c) = a \wedge (b \vee c)$.

El otro caso es similar. De este modo, L es distributiva.

(2) Sean $a \in L$ con $b,c \in L$ complementos de a. P.D. $b = c$.

$b = b \vee 0 = b \vee (a \wedge c) = (b \vee a) \wedge (b \vee c) =$

$= 1 \wedge (b \vee c) = b \vee c \Rightarrow c \leq b$.

$c = c \vee 0 = c \vee (a \wedge b) = (c \vee a) \wedge (c \vee b) =$

$= 0 \wedge (c \vee b) = c \vee b \Rightarrow b \leq c$.

Luego, por antisimetría, $b = c$.

(3) Sea $B \subseteq L$. Definimos $H = \{x \in L \mid x \text{ es una cota inferior de } B\}$.

Es claro que $H \subseteq L$ y $0 \in H$.

Por hipótesis, H tiene supremo, digamos b. Entonces $b = \inf B$.

El otro caso es similar. Así, L es una red completa. □

Para más detalles consultar [1], [2], [4] y [6].

Aplicaciones

1._ Redes y Espacios Vectoriales.

Sea V un espacio vectorial sobre el campo F.

Sea $Sb(V) = \{W \mid W \text{ es un subespacio de } V\}$.

Entonces $L = \langle Sb(V), \subseteq \rangle$ es un copo.

Si $X \subseteq V$ entonces $\langle X \rangle$ es el espacio generado por X.
Para $U,W \in Sb(V)$, $\inf\{U,W\} = U \cap W$ y
$\sup\{U,W\} = \langle U \cup W\rangle = U + W$. Con esto, L es una red.
El cero de L es $\{\mathbf{0}\}$, donde $\mathbf{0}$ es el vector cero de V y $1 = V$.
Para el caso en que $V \neq \{0\}$, L es no trivial.
Si $B = \{W_i\}_{i \in I} \subseteq Sb(V)$ entonces $\sup B = \langle \cup_{i \in I} W_i \rangle$ y
$\inf B = \cap_{i \in I} W_i$. Así, Sb(V) es una red completa.
Sean $V = \mathbb{R}^2$, $U = \langle e_1 \rangle$, $W = \langle e_2 \rangle$ y $H = \langle z \rangle$, donde: $e_1 = (1,0)$,
$e_2 = (0,1)$ y $z = (1,1)$. Es claro que $U \cap H = W \cap H = \{0\}$,
$\langle U \cup H \rangle = \langle W \cup H \rangle = V$ y $U \neq W$. De esta manera, H tiene dos complementos. Por la proposición 6.2, L no es distributiva..

2._ Redes y Lógica Proposicional.

Sean:

$\mathbf{E} = \{p_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ el conjunto de letras proposicionales y

$\mathbf{F}$ el conjunto de fórmulas bien formadas.

Tomemos $\varphi, \psi \in \mathbf{F}$. La semántica para $\mathbf{F}$ se define por medio de asignaciones. Una **asignación** para $\mathbf{F}$ es una función $\nu: \mathbf{E} \to \{0,1\}$ y φ tiene asignado un único valor de verdad, el cual se denota por $\nu^*(\varphi)$. Decimos que φ es una tautología $(\models \varphi) \Leftrightarrow \nu^*(\varphi) = 1$, para toda asignación ν. Definimos $\varphi \leq \psi \Leftrightarrow \models \varphi \to \psi$.
Es fácil verificar que $\langle \mathbf{F}, \leq \rangle$ **no** es un copo, pues falla la antisimetría.
Para remediar esto, definimos:

φ es lógicamente equivalente a ψ $(\varphi \sim \psi) \Leftrightarrow \models \varphi \leftrightarrow \psi$.

El siguiente lema es consecuencia de resultados de la lógica proposicional.

Lema 1. Sea $\sim$ como se definió antes.

(1) " $\sim$ " es una relación de equivalencia en $\mathbf{F}$.

(2) Si $\varphi \sim \varphi'$ y $\psi \sim \psi'$ entonces $\varphi \wedge \psi \sim \varphi' \wedge \psi'$,

$\varphi \vee \psi \sim \varphi' \vee \psi'$ y $\neg\varphi \sim \neg\varphi'$.

(3) Si $\varphi \sim \varphi', \psi \sim \psi'$ y $\models \varphi \to \psi$ entonces $\models \varphi' \to \psi'$.□

Por este lema podemos definir $[\varphi] = \{\psi \in \mathbf{F} \mid \psi \sim \varphi\}$ y $\mathbf{L} = \{[\varphi] \mid \varphi \in \mathbf{F}\}$. Para $[\varphi], [\psi] \in \mathbf{L}$, definimos:

$[\varphi] \leq [\psi] \Leftrightarrow \models \varphi \to \psi$.

Por el lema 1.3, "$\leq$" está bien definido.

Por lo tanto, $\mathbf{L}$ es un copo. Si $[\varphi], [\psi] \in \mathbf{L}$, definimos:

$[\varphi] \vee [\psi] = \sup\{[\varphi], [\psi]\} = [\varphi \vee \psi]$

$[\varphi] \wedge [\psi] = \inf\{[\varphi], [\psi]\} = [\varphi \wedge \psi]$

$[\varphi]' = [\neg\varphi]$.

Entonces $\langle \mathbf{L}, \vee, \wedge \rangle$ es una red distributiva, además, $[\varphi \vee \neg\varphi] = 1$, $[\varphi \wedge \neg\varphi] = 0$, $1 \neq 0$, $[\varphi] \wedge [\varphi]' = 0$ y $[\varphi] \vee [\varphi]' = 1$.

Así, $\langle \mathbf{L}, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ es una red distributiva y complementada.

Como $\pi{:}\mathbf{F} \to \mathbf{L}$, $\pi(\varphi) = [\varphi]$, es suprayectiva, $|\mathbf{L}| \leq |\mathbf{F}| = \aleph_0$.

Por otro lado, para $p \neq q \in \mathbf{E}$, tenemos que $p \not\sim q$.

Por lo tanto, $[p] \cap [q] = \emptyset$.

Ahora bien, $\{[p]\}_{p \in \mathbf{E}} \subseteq \mathbf{L}$ y $\aleph_0 = |\{[p] \mid p \in \mathbf{E}\}| \leq |\mathbf{L}|$.

Por el Teorema de Schröder-Bernstein, $|\mathbf{L}| = \aleph_0$.

Sea $S = \{\Sigma \subseteq \mathbf{F} \mid \Sigma$ es satisfacible$\}$.

Claramente: $S \subseteq P(\mathbf{F})$ y $S \neq \emptyset$ (pues $\emptyset$ es satisfacible), $\langle S, \subseteq\rangle$ es un copo y $\inf S = \emptyset$.

Si υ es una asignación y $T_\nu = \{\varphi \in \mathbf{F} \mid \nu^*(\varphi) = 1\}$ entonces T_ν es un maximal en S. Hay $2^{\aleph_0}$ de estos maximales.

Como no hay máximo, S no es una red completa.

3._ Producto de órdenes.

Sean $\langle A, \leq\rangle$ y $\langle B, \leq'\rangle$ copos. Para $A \times B$ le podemos dar dos clases de órdenes. Sean $(a,b), (c,d) \in A \times B$. Definimos:

$(a,b) \leq'' (c,d) \Leftrightarrow a \leq c$ y $b \leq' d$.

$(a,b) \leq''' (c,d) \Leftrightarrow a \leq c$ o $a = c \Rightarrow b \leq' d$.

Entonces, $\langle A\times B, \leq''\rangle$ y $\langle A\times B, \leq'''\rangle$ son copos.
El primero se llama el orden del producto. El segundo se conoce como el orden lexicográfico.
Sabemos que $\langle \mathbb{R},\leq\rangle$ es un coto, entonces $\langle \mathbb{R}^2,\leq''\rangle$ es un copo.
Pero no es coto, pues $(1,0) \not\leq'' (0,1)$ y $(0,1) \not\leq'' (1,0)$.
Así, la propiedad de ser coto, no se preserva bajo el orden del producto.
Si A y B son cobos, $A \times B$ con el orden lexicográfico, también es cobo. Para ver esto, sea $D \subseteq A \times B$ y $D \neq \emptyset$. Nos fijamos en $e = \text{mín}\{a \in A \mid (a,b) \in D\}$, $d = \text{mín}\{b \in B \mid (a,b) \in D\}$.
Entonces $(e,d) = \text{mín } D$.

4._ Conjuntos Magros y Espacios de Baire.

Sean $\langle X,\tau\rangle$ un espacio topológico, $A \subseteq X$, $x \in X$ y $\beta \subseteq P(X)$.
Denotaremos por: A° el interior de A; por ext A el exterior de A; por $\bar{A}$ la cerradura de A y por N_x el sistema de vecindades en x.
En particular tenemos que $\langle \tau,\subseteq\rangle$ es una red distributiva, donde $\inf\{A,B\} = A \cap B$, $\sup\{A,B\} = A \cup B$, $0 = \emptyset$ y $1 = X$.
En general $\langle \tau,\subseteq\rangle$ no es una red completa ni complementada, porque en el caso de que $X = \mathbb{R}$ y τ es la topología usual, tenemos que $A_n = (-1/n,1/n) \in \tau$, para cada $n \in N^+$ y $\cap A_n = \{0\} \notin \tau$.

Definición 7. Sean $\langle X,\tau\rangle$ un espacio topológico, $\beta \subseteq P(X)$ y $A \subseteq X$.

(a) β es **base** de $\langle X,\tau\rangle \Leftrightarrow$ para todo $A \in \tau$ existe $\beta' \subseteq \beta$ tal que $A = \cup\beta'$.

(b) A es **denso** $\Leftrightarrow \bar{A} = X$

(c) A es **denso en ninguna parte (d.n.p.)** $\Leftrightarrow (\bar{A})^\circ = \emptyset$.

(d) A es **fronterizo** $\Leftrightarrow A^\circ = \emptyset$.

(e) A es **magro** $\Leftrightarrow$ A es la unión contable de densos en ninguna parte.

(f) A es de 2^a categoría $\Leftrightarrow$ A no es magro.

Observaciones.

-$\emptyset$ es d.n.p y fronterizo. X no es d.n.p., ni fronterizo.

-Si A es d.n.p., entonces $\bar{A}$ es d.n.p.

-Si $A \subseteq B$ y A es denso entonces B es denso.

-$\beta \subseteq P(X)$ es base de una única topología en X $\Leftrightarrow$ se cumplen:

(i) $X = \cup\beta$ y

(ii) para todo $V, V' \in \beta$ y para toda $x \in V \cap V'$, existe $V'' \in \beta$ tal que $x \in V'' \subseteq V \cap V'$.

En tal caso $\tau_\beta = \{\cup\beta' \mid \beta' \subseteq \beta\}$ es dicha topología.

A los conjuntos magros también se les conoce como de 1^a categoría.

Lema 2. Sean $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico, $\beta \subseteq P(X)$ y $A \subseteq X$.

(1) β es base de X. A es denso $\Leftrightarrow$ para todo $B \in \beta - \{\emptyset\}$, $B \cap A \neq \emptyset$.

(2) $A \cup (\bar{A})^c$ y $A^o \cup A^c$ son densos.

(3) Si A es denso en ninguna parte entonces A es fronterizo.

(4) Si $B \subseteq A$ y A es denso en ninguna parte (fronterizo) entonces B también lo es.

(5) A es abierto y denso $\Leftrightarrow$ A^c es cerrado y denso en ninguna parte.

(6) A y B son densos en ninguna parte implica que $A \cup B$ es denso en ninguna parte.

(7) Si A y B son abiertos y densos entonces $A \cap B$ es abierto y denso.

Prueba.

(1) ($\Rightarrow$) Sea $B \in \beta$, $B \neq \emptyset$ y $x \in X = \bar{A}$ tal que $x \in B$.

Entonces $B \in N_x$ y $B \cap A \neq \emptyset$.

($\Leftarrow$) Sea $x \in X$ y $U \in N_x$.

Ya que β es base de X, existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Por hipótesis, $B \cap A \neq \emptyset$, lo que significa que $U \cap A \neq \emptyset$.

Por lo tanto, $x \in \bar{A}$. Con esto, $X = \bar{A}$.

(2) $\mathbf{X} = \bar{\mathbf{A}} \cup (\bar{\mathbf{A}})^c \subseteq \overline{\mathbf{A} \cup ((\bar{\mathbf{A}})^c)} = \overline{\mathbf{A} \cup (\bar{\mathbf{A}})^c} \Rightarrow \overline{\mathbf{A} \cup (\bar{\mathbf{A}})^c} = \mathbf{X}$.

$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^o)^c \cup \mathbf{A}^o = \overline{\mathbf{A}^c} \cup \mathbf{A}^o \subseteq \overline{\mathbf{A}^c} \cup \overline{\mathbf{A}^o} = \overline{\mathbf{A}^c \cup \mathbf{A}^o} \subseteq \mathbf{X}$.

Entonces $\mathbf{X} = \overline{\mathbf{A}^c \cup \mathbf{A}^o}$.

(3) $\mathbf{A}^o \subseteq (\bar{\mathbf{A}})^o = \emptyset \Rightarrow \mathbf{A}^o = \emptyset$.

(4) **A es d.n.p.**

$\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} \Rightarrow \bar{\mathbf{B}}^o \subseteq \bar{\mathbf{A}}^o = \emptyset \Rightarrow \bar{\mathbf{B}}^o = \emptyset$. **Para el otro caso es similar.**

(5) ($\Rightarrow$) **$\mathbf{A}^c$ es cerrado y por tanto** $\mathbf{A}^c = \overline{\mathbf{A}^c}$.

Como $\mathbf{X} = \bar{\mathbf{A}}$, $(\overline{\mathbf{A}^c})^o = (\mathbf{A}^c)^o = (\bar{\mathbf{A}})^c = \emptyset \Rightarrow \mathbf{A}^c$ **es d.n.p.**

($\Leftarrow$) **A es abierto y** $\emptyset = (\overline{\mathbf{A}^c})^o = (\mathbf{A}^c)^o = (\bar{\mathbf{A}})^c \Rightarrow \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{X}$.

(6) **Sea** $\mathbf{E} = (\overline{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}})^o$. **Por demostrar que** $\mathbf{E} = \emptyset$.

E es abierto y $\mathbf{E} \subseteq \overline{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}} = \bar{\mathbf{A}} \cup \bar{\mathbf{B}}$, **por tanto** $\mathbf{E} \cap (\bar{\mathbf{B}})^c \subseteq \bar{\mathbf{A}}$.

Como $\mathbf{E} \cap (\bar{\mathbf{B}})^c$ **es abierto, se sigue que** $\mathbf{E} \cap (\bar{\mathbf{B}})^c \subseteq \bar{\mathbf{A}}^o = \emptyset$.

De esto, $\mathbf{E} \cap (\bar{\mathbf{B}})^c = \emptyset$, **es decir,** $\mathbf{E} \subseteq \bar{\mathbf{B}}$.

Ya que E es abierto y B es d.n.p., $\mathbf{E} \subseteq \bar{\mathbf{B}}^o = \emptyset$. **Así,** $\mathbf{E} = \emptyset$.

(7) **Inmediato de (5) y (6).**□

Ejemplos.

-El conjunto de los densos no es una red.

Sea $\mathbf{X} = \mathbb{R}$ **con la topología usual,** $\mathbf{A} = \mathbb{Q}$ **y** $\mathbf{B} = \mathbb{Q}^c$ **son densos pero** $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$ **no es denso.**

-El conjunto de los fronterizos no es red, porque $\mathbb{Q}^o = (\mathbb{Q}^c)^o = \emptyset$ **y** $(\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c)^o = \mathbb{R}$.

-El conjunto de los densos en ninguna parte sí es una red pero no es complementada, pues si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ **entonces** $\{\mathbf{x}\}$ **es d.n.p., pero** $\{\mathbf{x}\}^c$ **no es d.n.p., de hecho es denso.**

Definición 8. **Sea** $\langle \mathbf{X}, \tau \rangle$ **un espacio topológico.**

X es de Baire $\Leftrightarrow$ **para toda familia** $\{\mathbf{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **de cerrados densos en ninguna parte,** $(\cup\, \mathbf{F}_n)^o = \emptyset$.

Proposición 7. **Sea** $\langle \mathbf{X}, \tau \rangle$ **un espacio topológico**

(1) Son equivalentes (a)-(c):

(a) Para todo $A \subseteq X$, si A es magro entonces A es fronterizo.

(b) Toda $\{A_n\}_{n \in N}$ familia de abiertos densos: $\cap A_n$ es denso.

(c) X es de Baire.

(2) X es de Baire $\Leftrightarrow$ para cualquier $\{A_n\}_{n \in N}$ cadena descendente de abiertos densos, $\cap A_n$ es denso.

(3) Sea X un espacio de Baire y $A \subseteq X$.

(a) Si A es abierto y $A \neq \emptyset$ entonces A es de 2ª categoría.

(b) X es de 2ª categoría.

(c) Si $X = \bigcup E_n$ entonces para alguna $k \in N$ se tiene que $(\bar{E}_k)^\circ \neq \emptyset$.

(d) Si $\{A_n\}_{n \in N}$ es una familia de densos entonces $(\cup_{n \in N} A_n)^c \neq \emptyset$.

Prueba.

(1) (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $\{A_n\}_{n \in N}$ una familia de abiertos densos.

P.D. $\cap A_n$ es denso.

Es claro que $\{A_n^c\}_{n \in N}$ es una familia contable de cerrados densos en ninguna parte y, por el lema 2.5, $\cup A_n^c$ es un conjunto magro.

Por (a), $\emptyset = (\cup A_n^c)^\circ = ((\cap A_n)^c)^\circ = (\overline{\cap A_n})^c$.

Esto implica que $\overline{\cap A_n} = X$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sea $\{F_n\}_{n \in N}$ una familia de cerrados densos en ninguna parte. P.D. $(\cup F_n)^\circ = \emptyset$.

Por el lema 2.5 $\{F_n^c\}_{n \in N}$ familia de abiertos densos.

Por (b), $X = \overline{\cap F_n^c} = \overline{(\cup F_n)^c} = ((\cup F_n)^\circ)^c$.

Entonces $(\cup F_n)^\circ = \emptyset$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sea A magro. P.D. A es fronterizo.

$A = \cup_{k \in N} B_k \subseteq \cup_{k \in N} \bar{B}_k$, donde cada B_k es d.n.p.

Por lo tanto, $A^\circ \subseteq (\cup_{k \in N} \bar{B}_k)^\circ$.

Pero $\{\bar{B}_k\}_{k \in N}$ es una familia de cerrados nada-densos.

Como X es de Baire, $A^{\circ} = \emptyset$. Por lo tanto, A es fronterizo.

(2)($\Rightarrow$) Inmediato de (1).

($\Leftarrow$) Sea $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de cerrados densos en ninguna parte.

P.D.$(\cup F_n)^{\circ} = \emptyset$.

Sean $A_n = F_1^c \cap \ldots \cap F_n^c$. Entonces $A_{n+1} \subseteq A_n$ y A_n es abierto y denso. Así $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cadena descendente de abiertos densos.

Por lo tanto $\cap A_n$ es denso. Esto implica que $(\cup F_n)^{\circ} = \emptyset$.

Finalmente, X es un espacio de Baire.

(3) para el lector.□

Sea X es un espacio de Baire. Entonces X no está en el conjunto de los magros. Por lo tanto, el conjunto de todos los magros no es una red complementada.

El concepto de magro y la proposición 7.1.a, fueron usados por R. Baire en 1899, dentro del contexto de espacios métricos completos. Consulte [12] y [13] para más detalles.

CAPÍTULO 2

ÁLGEBRAS BOOLEANAS

En este capítulo veremos un caso muy especial de la red, el álgebra booleana y su relación con espacios topológicos T_2 y compactos. También estudiamos los filtros y los ultrafiltros que jugarán un papel muy importante en los capítulos 5, 6 y 7.

Álgebra Booleana

Definición 1. Sea $B \neq \emptyset$ y $H \subseteq B$.

(a) B es un **álgebra booleana** $\Leftrightarrow$ B es una red distributiva y complementada.

(b) H es una **subálgebra** de B $\Leftrightarrow$ $H \neq \emptyset$ y H es una red distributiva y complementada con las mismas operaciones de B.

Sea B una álgebra booleana y $x \in B$.
Como los complementos son únicos, denotaremos por x' el complemento de x. Nótese que B tiene al menos dos elementos y que B^* es una álgebra booleana.

Ejemplos.

-$\langle P(X), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, X\rangle$ es un álgebra booleana.

-$\langle L, \vee, \wedge$, ', 0, 1 es un álgebra booleana, llamada el **Álgebra Proposicional de Lindenbaum.**

-$\langle Sb(\mathbb{R}^2), \subseteq\rangle$ no es un álgebra booleana, porque no es distributiva.

-$\langle [a,b], \leq\rangle$, para $a,b \in \mathbb{R}$, no es un álgebra booleana, porque no puede ser complementada.

-$\langle \mathbb{Q}, \leq\rangle$ y $\langle \mathbb{R}, \leq\rangle$ no son un álgebras booleanas, porque no tienen supremos ni ínfimos.

Proposición 1. Sea B un álgebra booleana y $H \cup \{a,b\} \subseteq B$. Entonces:

(1) $a'' = a$, $0' = 1$ y $1' = 0$.

(2) Leyes de De Morgan:

DM1. $(a \vee b)' = a' \wedge b'$. DM2. $(a \wedge b)' = a' \vee b'$.

(3) Son equivalentes:

(i) $a \leq b$ (ii) $a \wedge b' = 0$ (iii) $a' \vee b = 1$ (iv) $b' \leq a'$.

(4) $0 < a < 1 \Leftrightarrow 0 < a' < 1$.

(5) Si $b \leq a$ entonces $a = b \vee (a \wedge b')$ y $b \wedge (a \wedge b') = 0$.

(6) H es una subálgebra de B $\Leftrightarrow$ $\{0,1\} \subseteq H$ y para todo $a,b \in H$, $a \vee b$, $a \wedge b$, $a' \in H$.□

Para B álgebra booleana y $|B| > 2$, existe $a \in B$ tal que $0 < a < 1$.
Por la proposición 1.4, $0 < a' < 1$.
Se afirma que $a \neq a'$, pues de lo contrario, $a = a \wedge a' = 0$, contradicción con que $a \neq 0$.
Entonces, $a \not\leq a'$ o $a' \not\leq a$, de hecho ambas ocurren.
Por lo tanto $\langle B, \leq \rangle$ no es un coto, ni cobo.
Si $Sb(B) = \{ H \mid H$ es una subálgebra de $B\}$ entonces B, $\{0,1\} \in Sb(B)$.
Sb(B) es una red completa, pero no un álgebra booleana.
Pues si $H \in Sb(B)$, $0,1 \in H$ y $0,1 \notin H^c$, es decir, $H^c \notin Sb(B)$.

Tipos de Álgebras Booleanas

Definición 2. Sea B un álgebra booleana y $a \in B$.

(a) a es un **átomo** en B $\Leftrightarrow$ $a \neq 0$ y no existe $b \in B$ tal que $0 < b < a$. $At(B) = \{a \in B \mid a$ es un átomo en $B\}$.

(b) B es **atómica** $\Leftrightarrow$ para toda $x \in B\text{-}\{0\}$ existe $a \in B$ tal que a es un átomo y $a \leq x$.

(c) B es **sin-átomos** (atomless) $\Leftrightarrow$ $At(B) = \emptyset$.

(d) B es **densa** $\Leftrightarrow$ $\langle B, \leq \rangle$ es un codo.

(e) B es **completa** $\Leftrightarrow$ B, como red, es completa.

Ejemplo y comentarios.

-P(X) es completa y atómica, sus átomos son de la forma $\{x\}$, para $x \in X$, pero no es densa.

-Si $a \neq b \in At(B)$ entonces $a \wedge b = 0$.

-Si B es densa entonces $|B| \geq \aleph_o$.

Proposición 2. Sea B un álgebra booleana y $a \in B\text{-}\{0\}$.

(1) Son equivalentes:

(a) a es un átomo.

(b) para toda $x \in B\text{-}\{0\}$: $a \leq x$ ó $a \leq x'$.

(c) para cualesquiera $x,y \in B$: si $a \leq x \vee y$ entonces $a \leq x$ ó $a \leq y$.

(2) B es sin-átomos $\Leftrightarrow$ B es densa.

(3) Si B es finita entonces B es atómica y completa.

Prueba.

(1) (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $x \in B$. Suponemos que $a \not\leq x$ y $a \not\leq x'$.

Por la proposición 1.3, $a \wedge x \neq 0$.

En particular como $a \not\leq x$, $a \wedge x \neq a$. Así, a no es un átomo.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sean $x, y \in B$ y $a \leq x \vee y$.

Suponemos que $a \not\leq x$ y $a \not\leq y$.

Por (b), $a \leq x'$ y $a \leq y'$, es decir, $a \leq (x \vee y)'$.

Por hipótesis y la proposición 1.2.4, $a = a \wedge (x \vee y) = 0$.

Entonces $a = 0$, contradicción.

(c) $\Rightarrow$ (a) Falta demostrar que no existe $z \in B$ tal que $0 < z < a$.

Suponemos que existe $z \in B$ tal que $0 < z < a$.

Por la proposición 1.5, $a = z \vee (a \wedge z')$.

Por (c) $a \leq z$ o $a \leq (a \wedge z')$.

Por hipótesis $z < a$, por lo tanto $a \leq a \wedge z'$.

Como $a \wedge z' \leq a$, se tiene $a \wedge z' = a$, es decir, $a \leq z'$.

Por lo tanto $z = a \wedge z = 0$, lo que contradice que $z > 0$.

Si $a \leq (a \wedge z')$ entonces $a = a \wedge z'$.

Por la proposición 1.1.3, $z \leq a$ y $z \leq a \wedge a' = 0$.

Entonces, $z = 0$. Contradicción, $z \neq 0$. Así, a es un átomo.

(2)($\Rightarrow$) B es sin-átomos. Sean $a,b \in B$ y $a < b$.

P.D. Existe $c \in B$ tal que $a < c < b$.

Suponemos lo contrario. Entonces no existe $c \in B$ tal que $a < c < b$.

Así que $0 < b \wedge a'$. Si hubiera $d \in B$ tal que $0 < d < b \wedge a'$, implicaría que $a < a \vee d < b$. Absurdo. Entonces $b \wedge a'$ es un átomo lo que contradice que B no tiene átomos. Por lo tanto B es densa.

($\Leftarrow$) Si B tuviera un átomo, claramente, B no sería densa.

(3) Si B es finita, B es completa.

Suponemos que B no es atómica.

Entonces existe $b \in B\text{-}\{0\}$ tal que no hay átomo $a \in B$ y $a \leq b$.

En particular, b no es átomo, así que existe $b_1 \in B$ tal que $0 < b_1 < b$.

Repitiendo este argumento obtenemos que B no es finita.

Lo cual es una contradicción. Así, B es atómica.□

Morfismos

Definición 3. Sean B y C álgebras booleanas y $h{:}B \rightarrow C$.

(a) h es un **homomorfismo** de B en C $\Leftrightarrow$ para todo $a,b \in B$, $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$, $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$ y $h(a') = h(a)'$.

(b) h es un **isomorfismo** $\Leftrightarrow$ h es biyectiva y tanto h como h^{-1} son homomorfismos.

(c) B **es isomorfa a** C ($B \cong C$) $\Leftrightarrow$ existe $h{:}B \rightarrow C$ isomorfismo.

Sea B un álgebra booleana, 1_B:B$\rightarrow$ B, $1_B(x) = x$, es un isomorfismo.
Si H $\in$ Sb(B), i_H:H $\rightarrow$ B, $i_H(x) = x$, es un homomorfismo inyectivo.

Proposición 3. B y C son álgebras booleanas y h:B $\rightarrow$ C. Entonces:

(1) Si h es un homomorfismo entonces h preserva el orden, $h(0_B) = 0_C$ y $h(1_B) = 1_C$.

(2) Si h es un monomorfismo, D es otra álgebra booleana y g:C $\rightarrow$ D es un homomorfismo entonces g $\circ$ h:B $\rightarrow$ D es un homomorfismo. Lo mismo sucede para el caso de isomorfismos.

(3) Si h es biyectiva entonces, h es un isomorfismo $\Leftrightarrow$ para cualesquiera a,b $\in$ B, $a \leq b \Leftrightarrow h(a) \leq h(b)$.

(4) "$\cong$" es una relación de equivalencia.

(5) Si B $\cong$ C y B es atómica, densa o completa entonces C también lo es.

Prueba. (2), (4) y (5) son para el lector.

(1) Sean a,b $\in$ B y $a \leq b$. Entonces $a \vee b = b$.
Como h es un homomorfismo, $h(a) \vee h(b) = h(b)$.
Entonces $h(a) \leq h(b)$.
$0_C = h(0_B) \wedge h(0_B)' = h\ (0_B \wedge 0_B\ ') = h(0_B)$.
$1_C = h(1_B\ ) \vee h(1_B\ )' = h(1_B \vee 1_B\ ') = h(1_B)$. .:.
(3) ($\Rightarrow$) h es un isomorfismo.
Esto implica que h y h^{-1} son homomorfismos.
Por (1), preservan el orden, es decir, $a \leq b \Leftrightarrow h(a) \leq h(b)$.
($\Leftarrow$) Sean a,b $\in$ B.
Como $h(a), h(b) \leq h(a \vee b)$. Así, $h(a) \vee h(\ b) \leq h(a \vee b)$.
Sea c una cota superior de {a, b}, $h(a) \vee h(b) \leq h(c)$.
Pero $a \vee b \leq c$, $h\ (a \vee b) \leq h(c)$.
Esto implica que $h(a) \vee h(b) = \sup\{h(a), h(b)\} = h(a \vee b)$.
Análogo para $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$. $h(1_B) \leq 1_C$.

Suponemos que $h(1_B) < 1_C$.

Como h es suprayectiva, existe $a \in B$ tal que $h(a) = 1_C$.

Por hipótesis, $1_B < a$, absurdo, pues $a \leq 1_B$.

De esta manera, $h(1_B) = 1_C$. Similarmente para $h(0_B) = 0_C$.

De esto obtenemos: $h(a) \wedge h(a') = h(a \wedge a') = h(0_B) = 0_C$

y $h(a) \vee h(a') = h(a \vee a') = h(1_B) = 1_C$,

es decir, $h(a)' = h(a')$, de donde, h es un homomorfismo.

Sean $h(a) = u$ y $h(b) = v$.

Como h es biyectiva, $h^{-1}(u) = a$ y $h^{-1}(v) = b$. Entonces:

$h^{-1}(u \vee v) = h^{-1}(h(a) \vee h(b)) = h^{-1}(h(a \vee b)) = a \vee b =$

$= h^{-1}(u) \vee h^{-1}(v)$,

$h^{-1}(u \wedge v) = h^{-1}(h(a) \wedge h(b)) = h^{-1}(h(a \wedge b)) = a \wedge b =$

$= h^{-1}(u) \wedge h^{-1}(v)$,

$h^{-1}(u') = h^{-1}(h(a)') = h^{-1}(h(a')) = a' = h^{-1}(u)'$.

De esto, finalmente se obtiene que h es un isomorfismo.□

Para B un álgebra booleana y $x \in B$, definimos:
$A(x) = \{a \in At(B) \mid a \leq x\}$.
Tenemos que $A(x) \subseteq P(At(B))$, $A(0) = \emptyset$ y $A(1) = At(B)$.
Si $x \in At(B)$ entonces $A(x) = \{x\}$.

Lema 1. Sea B un álgebra booleana y $H = \{A(x) \mid x \in B\}$

(1) $A(x \vee y) = A(x) \cup A(y)$, $A(x \wedge y) = A(x) \cap A(y)$ y $A(x') = A(x)^c$.

(2) Sea B atómica. Entonces: $x \leq y \Leftrightarrow A(x) \subseteq A(y)$.

(3) H es una subálgebra de $P(At(B))$.

Prueba.

(1) Sea $a \in At(B)$.

$a \in A(x \wedge y) \Leftrightarrow a \leq x \wedge y \Leftrightarrow a \leq x$ y $a \leq y \Leftrightarrow a \in A(x)$ y $a \in A(y)$
$\Leftrightarrow a \in A(x) \cap A(y)$

$a \in A(x \vee y) \Leftrightarrow a \leq x \vee y \Leftrightarrow a \leq x$ o $a \leq y \Leftrightarrow a \in A(x)$ o $a \in A(y)$
$\Leftrightarrow a \in A(x) \cup A(y)$
$a \in A(x') \Leftrightarrow a \leq x' \Leftrightarrow a \not\leq x \Leftrightarrow a \notin A(x) \Leftrightarrow a \in A(x)^c$.
(2) ($\Rightarrow$) $a \in A(x) \Rightarrow a \leq x$ (y como $x \leq y$) $\Rightarrow a \leq y \Rightarrow a \in A(y)$.
($\Leftarrow$) Suponemos que $A(x) \subseteq A(y)$ y $x \not\leq y$.
Como $x \not\leq y$ esto implica que $x \wedge y' \neq 0$.
Puesto que B es atómica, hay un átomo $a \in B$ tal que $a \leq x \wedge y'$.
De esto obtenemos que $a \leq x$ y que $a \not\leq y$, es decir, $A(x) \not\subseteq A(y)$.
(3) Claramente $H \subseteq P(At(B))$. Lo demás es inmediato de (1).□

Con ayuda de este lema podemos demostrar el resultado de Tarski-Lindenbaum (1935).

Proposición 4. Sea B un álgebra booleana. Entonces

B es atómica y completa $\Leftrightarrow$ existe X tal que $B \cong P(X)$.

Prueba.

($\Rightarrow$) Sea $X = At(B)$.
Definimos $h:B \rightarrow P(X)$, $h(x) = A(x)$.
Como B es atómica, por el lema1.2, h está bien definida y es inyectiva.
Por el lema1.1, h es un homomorfismo.
Sea $E \in P(X)$. Si $E = \emptyset$, $h(0) = E$.
Si $E \neq \emptyset$ y como B es completa, existe $b \in B$ tal que $b = \sup E$.
En este caso, $E \subseteq A(b)$.
Sea $a \in A(b)$. Suponemos que $a \notin E$.
Entonces $a \in E^c$, de donde para toda $x \in E$, $a \neq x$.
Así, $a \wedge x = 0$, lo que resulta (proposición 1.3), $x \leq a'$.
Así, a' es cota superior de E, entonces, $b \leq a'$.
Pero $a \leq b$, lo que implica que $a = 0$.
Esto contradice que $a \neq 0$. Por lo tanto, $a \in E$ y $A(b) \subseteq E$.
Finalmente $h(b) = A(b) = E$ y h es suprayectiva. Así h es biyectiva.

Por la proposición 3.3, h es un isomorfismo.

($\Leftarrow$) Es inmediato de la proposición 3.5 y recordando que P(X) es un álgebra atómica y completa. □

Corolario. Si B es un álgeba booleana finita, $\mid At(B) \mid < \mid B \mid = 2^{|At(B)|}$.
Prueba.

Por la proposición 2.3, B es atómica y completa.

Por la proposición 4, $B \cong P(At(B))$.

Por el teorema de Cantor: $\mid At(B) \mid < 2^{|At(B)|} = \mid B \mid$.□

Inmediato de la proposición 4 es que si $\mid B \mid = \aleph_0$ entonces B no es atómica o no es completa.

Filtros

Definición 4. Sea B un álgebra booleana y $F \subseteq B$.

(a) F es un **filtro** en B $\Leftrightarrow$ se cumplen:

(i) $F \neq \emptyset$

(ii) para todo a, b $\in$ F, $a \wedge b \in F$

(iii) para toda $a \in F$ para toda $b \in B$: si $a \leq b$ entonces $b \in F$

(b) F es un **filtro propio** $\Leftrightarrow F \neq B$.

(c) F es un **filtro principal** $\Leftrightarrow$ para algún $b \in B$, $F = \{x \in B \mid b \leq x\}$.

En este caso se dice que b es un generador de F.

Observaciones.

Sean B un álgebra booleana, F un filtro en B entonces $1 \in F$.

Si $b \in B$ y $F_b = \{x \in B \mid b \leq x\}$ entonces F_b es un filtro principal.

Si $b \in F$ entonces $F_b \subseteq F$; $a \leq b \Leftrightarrow F_b \subseteq F_a$.

Es claro que B es un filtro principal.

Si F es finito entonces F es principal.

Si B es finita entonces todos sus filtros son principales.

Proposición 5. **Sea B un álgebra booleana y F un filtro en B.**

(1) F es propio $\Leftrightarrow 0 \notin F$.

(2) F es principal $\Leftrightarrow$ existe el inf F y inf $F \in F$.

(3) Sea C un álgebra booleana y $h:B \rightarrow C$ homomorfismo.

(a) Si G es un filtro (propio) en C entonces $h^{-1}[G]$ es un filtro (propio) en B.

(b) Si h es inyectiva entonces $h[F]$ es un filtro en C.

Si F es propio, $h[F]$ es propio.

(4) Si $\{F_i\}_{i\in I}$ es una cadena de filtros propios entonces $\cup_{i\in I}F_i$ es un filtro propio.

Prueba.

(1) es para el lector.

(2) $(\Rightarrow)$ Si F es un filtro principal, hay un $b \in B$ tal que $F = F_b$.

Es claro que b es una cota inferior de F.

Sea $y \in B$ una cota inferior de F.

Como $b \in F$, $y \leq b$. Así, inf $F = b \in F$.

$(\Leftarrow)$ Sea $a =$ inf $F \in F$. Entonces $F_a \subseteq F$.

Sea $x \in F$, entonces $a \leq x$, es decir, $x \in F_a$.

Por lo tanto, $F = F_a$ y F es principal.

(3)(a) Por (1), $h(1_B) = 1_C$ entonces $1_B \in h^{-1}[G]$.

Sean $a,b \in h^{-1}[G]$. Entonces $h(a), h(b) \in G$.

Como G es un filtro, $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b) \in G$.

Es decir, $a \wedge b \in h^{-1}[G]$.

Si además, $a \leq c$, proposición 3.1, $h(a) \leq h(c)$, $h(a) \in G$ y G filtro, $h(c) \in G$. Entonces $c \in h^{-1}[G]$.

Con esto $h^{-1}[G]$ es un filtro. Si G fuera propio, $0_C \notin G$ (por (1)).

Así, $0_B \notin h^{-1}[G]$.

(b) Por (1), $h(1_B) = 1_C$ entonces $1_C \in h[F]$.

Sean u,v $\in$ h[F] entonces existen a,b $\in$ F tales que h(a) = u y h(b) = v. Como F es un filtro, a $\wedge$ b $\in$ F.
Entonces u $\wedge$ v = h(a) $\wedge$ h(b) = h(a $\wedge$ b) $\in$ h[F].
Sea z $\in$ h[B] y u $\leq$ z. Entonces existe c $\in$ B tal que h(c) = z.
Pero h(a $\vee$ c) = h(c), y como h es inyectiva, a $\vee$ c = c,
es decir, a $\leq$ c.
Ya que a $\in$ F y F es un filtro, c $\in$ F, de lo cual, z = h (c) $\in$ h[F].
Así h[F] es un filtro.
Si F es propio, $0_B \notin$ F, por lo que, $0_C \notin$ h[F].
(4) Sea $F = \cup_{i\in I} F_i$. 1$\in$ F, pues para toda i $\in$ I, 1 $\in F_i$.
Sean a,b $\in$ F, existen i, j $\in$ I tales que a $\in F_i$ y b $\in F_j$.
Por estar en una cadena a,b $\in F_k$, donde F_k= máx $\{F_i , F_j\}$.
Ya que F_k es un filtro, a $\wedge$ b $\in$ F.
Tomemos ahora a $\in$ F y a $\leq$ b. Entonces, existe i $\in$ I tal que a $\in F_i$.
Puesto que F_i es un filtro, b $\in F_i$.
Por lo tanto, b $\in$ F. Por (1), 0 $\notin$ F, F es un filtro propio.□

Es inmediato de la proposición 5.1 que: F_b es propio $\Leftrightarrow$ b $\neq$ 0

Propiedad de la Intersección Finita

Definición 5. Sea B un álgebra booleana y A $\subseteq$ B.

A tiene **la propiedad de la intersección finita** (pif) $\Leftrightarrow$ para todo $X_o \subseteq$ A, si X_o es finito entonces inf $X_o \neq 0$.

Observaciones.

-Si F es un filtro propio, F tiene la pif. $\emptyset$ tiene la pif.
-Si H es una cadena infinita de elementos no cero (ascendente o descendente) entonces H tiene la pif.
-Si M = {x,x'}$\subseteq$ A entonces M y A no tienen la pif.
-Si A tiene la pif entonces 0 $\notin$ A.

Proposición 6. Sean B un álgebra booleana y $A \subseteq B$.

(1) Son equivalentes (a)-(c):

(a) A tiene la pif.

(b) para cualquier $H \subseteq A$, H tiene la pif.

(c) para todo $H_o \subseteq A$, si H_o es finito entonces H_o tiene la pif.

(2) Si A tiene la pif entonces para cualquier $x \in B$, $A \cup \{x\}$ o $A \cup \{x'\}$ tiene la pif.

(3) Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una cadena de conjuntos con la pif entonces $\cup_{i \in I} A_i$ tiene la pif.

(4) Sea $F_A = \{ x \in B \mid$ existe $A_o \subseteq A$: A_o es finito y $\inf A_o \leq x\}$. Entonces:

(a) F_A es un filtro, $A \subseteq F_A$ y para todo F filtro, si $A \subseteq F$ entonces $F_A \subseteq F$.

(b) A tiene la pif $\Leftrightarrow$ F_A es un filtro propio.

Prueba.

(1) (a) $\Rightarrow$(b) Sea $H \subseteq A$, $G \subseteq H$ y G finito. P.D.inf $G \neq 0$.
Como $G \subseteq A$ y A tiene la pif, $\inf G \neq 0$.
(b) $\Rightarrow$(c) Obvio.
(c) $\Rightarrow$(a) Sea $X_o \subseteq A$ y X_o es finito. Por (c), $\inf X_o \neq 0$.
(2) Sea $x \in B$. Suponemos $A \cup \{x\}$ y $A \cup \{x'\}$ no tienen la pif.
Entonces hay D_0, $D_1 \subseteq A$ finitos tales que:
$\inf(D_0 \cup \{x\}) = \inf(D_1 \cup \{x'\}) = 0$.
Por la proposición 1.5.8, $\inf D_0 \wedge x = \inf D_1 \wedge x' = 0$.
Esto implica que $\inf D_0 \leq x'$ y $\inf D_1 \leq x$.
Por la proposición 1.3, $\inf D_0 \wedge \inf D_1 \leq x \wedge x' = 0$.
Esto implica que $\inf D_0 \wedge \inf D_1 = 0$.
Ya que $D_0 \cup D_1$ es finito, $\inf(D_0 \cup D_1) = \inf D_0 \wedge \inf D_1 = 0$.
De esto se obtiene que A no tiene la pif. Absurdo.

(3) Sea $D = \{d_1, \ldots, d_n\} \subseteq \cup_{i \in I} A_i$.

Para $1 \leq k \leq n$, hay un $i_k \in I$ tal que $d_k \in A_{i_k}$.

Como estos pertenecen a una cadena, existe el

máx $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}\} = A_j$. Entonces $D \subseteq A_j$.

Puesto que A_j tiene la pif, inf $D \neq 0$.

(4.a) es para el lector.

(4.b) ($\Leftarrow$) Obvio.

($\Rightarrow$) Por contrapositiva. F_A no es propio. Por (1), $0 \in F_A$.

Luego entonces hay un $D_0 \subseteq A$ tal que D_0 es finito y inf $D_0 \leq 0$.

Esto implica que inf $D_0 = 0$. Entonces A no tiene la pif.□

Ultrafiltros

Trabajaremos con filtros propios especiales.
Sea $F(B) = \{F \mid F$ es un filtro propio en $B\}$.
Entonces $F(B) \subseteq P(B)$ y $\langle F(B), \subseteq \rangle$ es un copo.

Definición 6. Sea B un álgebra booleana y $U \subseteq B$ un filtro propio.

(a) U es un **ultrafiltro** en B $\Leftrightarrow$ U es un filtro propio maximal en $\langle F(B), \subseteq \rangle$.

(b) U es **primo** $\Leftrightarrow$ para toda $a, b \in B$, si $a \vee b \in U$ entonces $a \in U$ o $b \in U$.

Ahora tenemos algunas propiedades básicas de estos filtros especiales.

Proposición 7. Sean B un álgebra booleana; U un filtro propio y $b \in B$-$\{0\}$. Entonces

(1) Son equivalentes (a)-(c):

(a) U es un ultrafiltro.

(b) para toda $x \in B$, $x \in U$ o $x' \in U$, pero no ambos.

(c) U es primo.

(2) b es un átomo en B $\Leftrightarrow$ F_b es el único ultrafiltro que lo contiene.

(3) Sea C un álgebra booleana y $h:B \to C$ un homomorfismo.

(a) Si G es un ultrafiltro en C entonces $h^{-1}[G]$ es un ultrafiltro en B.

(b) Si U es un ultrafiltro en B y h es inyectiva entonces $h[U]$ es un ultrafiltro en C.

Prueba.

(1) (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $x \in B$. Suponemos que $x \notin U$ y $x' \notin U$.
Como U es un filtro propio, U tiene la pif .
Por la proposición 6.2, $U \cup \{x\}$ o $U \cup \{x'\}$ tiene la pif.
Para el caso en que $A = U \cup \{x\}$ tiene la pif.
Por la proposición 6.4, F_A es un filtro propio.
Es claro que $U \subseteq F_A$. Como U es ultrafiltro, $U = F_A$.
Así, $x \in U$, absurdo. Para el otro caso es similar.
Es claro que no puede contener a ambos, porque U no sería propio.
(b) $\Rightarrow$ (a) Sea F un filtro propio y $U \subseteq F$. Suponemos que $U \neq F$.
Entonces hay un $x \in F$ tal que $x \notin U$. Por (b), $x' \in U$.
Así, $\{x, x'\} \subseteq F$, es decir, F no es propio. Contradicción.
(b) $\Rightarrow$ (c) Sean $a,b \in B$ y $a \vee b \in U$. Suponemos que $a \notin U$ y $b \notin U$.
Por (b), $a' \in U$ y $b' \in U$. Ya que U es un filtro, $(a \vee b)' = a' \wedge b' \in U$.
Entonces, $\{a \vee b, (a \vee b)'\} \subseteq U$, es decir, U no es propio. Absurdo.
(c) $\Rightarrow$ (b) Sea $x \in B$. Como $x \vee x' = 1 \in U$, por (c), $x \in U$ o $x' \in U$.
(2) Inmediato de la proposición 2.1
(3) (a) Sea $x \in B$. Como $h(x) \in C$ y G es un ultrafiltro.
Por (1), $h(x) \in G$ o $h(x)' \in G$, de donde, $x \in h^{-1}[G]$ o $x' \in h^{-1}[G]$.
Por (1), $h^{-1}[G]$ es un ultrafiltro en B.
(b) Sea $y \in h[U]$. Entonces hay un $x \in B$ tal que $h(x) = y$.
Por la proposición 5.3.b, $h[U]$ es un filtro propio en C.
Pero U es un ultrafitro, por lo tanto $x \in U$ o $x' \in U$.
De donde $y = h(x) \in h[U]$ o $y' = h(x') \in h[U]$.
Por (1), $h[U]$ es un ultrafiltro en C $\square$

?'Existen los ultrafiltros? Sí y el siguiente teorema, que da la respuesta, fue demostrado por Tarski en 1930.

Teorema I (Teorema del Ultrafiltro) Sea B un álgebra booleana.

Todo filtro propio en B está contenido en algún ultrafiltro.

Prueba.(**AE**)

Sean F un filtro propio en B y
$M_F = \{G \mid G$ es un filtro propio y $F \subseteq G\}$.Es claro que $F \in M_F$ y
que $M_F \subseteq P(B)$, en particular $\langle M_F, \subseteq \rangle$ es un copo.
Cualquier cadena en M_F tiene un cota superior (proposición 5.4).
Por el Lema de Zorn, M_F tiene un elemento maximal, digamos U.
Es claro que $F \subseteq U$. También, U es maximal en $\langle F(B), \subseteq \rangle$.
Porque de lo contrario, si hubiera un filtro propio G tal que $U \subset G$,
G estaría en M_F y como U es maximal, $G \subseteq U$, lo cual es absurdo.
Entonces, U es un ultrafiltro.□

Sea $S(B) = \{U \mid U$ es un ultrafiltro en $B\}$. Por el Teorema I, $S(B) \neq \emptyset$.

Proposición 8. Sea B un álgebra booleana.

(1) Si $A \subseteq B$ y A tiene la pif entonces existe $U \in S(B)$ tal que $A \subseteq U$.
(2) Si $x \neq 0$ entonces existe $U \in S(B)$ tal que $x \in U$.
(3) Si $x \neq y \in B$ entonces existe $U \in S(B)$ tal que U contiene a uno pero no al otro.

Prueba.

(1) Inmediato de la proposición 6.4.b y Teorema I.
(2) Inmediato de (1).
(3) Como $x \neq y$, por la antisimetría, $x \not\leq y$ o $y \not\leq x$.
Si $x \not\leq y$ entonces, por la proposición 1.3, $x \wedge y' \neq 0$, hay un $U \in S(B)$ tal que $x \in U$ y $y' \in U$, por (2).
Por ser U ultrafiltro, $y \notin U$. Para el otro caso es análogo.□

El siguiente resultado nos habla de la relación entre el cardinal del álgebra booleana B y la existencia de filtros y ultrafiltros no-principales.

Proposición 9. Sea $F = \{ A \mid A \subseteq B$ y $| A^c | < \aleph_o\}$. Entonces:

(1) F es un filtro en P(B).

(2) $| B | \geq \aleph_o \Leftrightarrow$ F es un filtro propio no-principal.

(3) $| B | \geq \aleph_o \Leftrightarrow$ existe $U \in S(B)$ tal que U es no-principal.

(4) Son equivalentes (a)-(c):

(a) B es finita.

(b) S(B) es finito.

(c) para todo $U \in S(B)$, U es principal.

(5) B es densa $\Leftrightarrow$ para todo $U \in S(B)$, U es no-principal.

Prueba.

(1) Usar leyes de De Morgan.

(2) ($\Rightarrow$) Como $| \emptyset^c | = | B | \geq \aleph_o$, $\emptyset \notin F$.

Por la proposición 5.1, F es propio.

Suponemos que F es principal.

Entonces existe $A \in P(B)$ tal que $F = F_A = \{G \mid A \subseteq G\}$.

Así, $A \in F$. Pero esto quiere decir que $| A^c | < \aleph_o$.

Ya que B es infinita, existe $b \in B\text{-}A^c$ tal que $| A^c \cup \{b\}| < \aleph_o$,

$(A^c \cup \{b\})^c \in F$.

Así que, $A \subseteq (A^c \cup \{b\})^c$, de donde, $A^c \cup \{b\} \subseteq A^c$.

En particular $b \in A^c$, contradicción, $b \notin A^c$.

($\Leftarrow$) Por contrapositiva.

(3) ($\Rightarrow$) Por (4), F es un filtro propio no-principal.

Por el Teorema I, existe $U \in S(P(B))$ tal que $F \subseteq U$.

Si U fuera principal, el generador del filtro debe ser un átomo de P(B), digamos $\{a\}$, el cual es finito, por la proposición 7.2.

Por la definición de F, $\{a\}^c \in F$. Así, U no es propio. Contradicción.

($\Leftarrow$) Por contrapositiva.

$\mid B \mid < \aleph_o \Rightarrow$ todos los filtros de B son principales, en particular, todos los ultrafiltros en B son principales.

(4) (a) $\Rightarrow$ (b) Como B es finita B es atómica.

Definimos $f: At(B) \rightarrow S(B)$, $f(a) = F_a$. Por la proposición 7.2 y del corolario a la proposición 4, f es una biyección.

En este caso $\mid S(B) \mid = \mid At(B) \mid < 2^{\mid At(B) \mid} = \mid B \mid$.

Po lo tanto, S(B) es finito.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sea $U \in S(B)$. Suponemos que U no es principal.

Sea $a_1 \in U$. Como U no es principal, existe $a_2 \in U$ tal que $a_1 \wedge a'_2 \neq 0$. Si esto no fuera cierto, tendríamos que $a_1 \wedge a'_2 = 0$, para toda $a_2 \in U$.

Por la proposición 1.3, $a_1 \leq a_2$, para toda $a_2 \in U$.

Por lo tanto, U es principal. Absurdo.

Por inducción en k construimos $\{a_k\}_{k \in N} \subseteq U$ tal que $a_1 \wedge \ldots \wedge a_{k-1} \wedge a'_k \neq 0$, es decir $\{a_1, \ldots, a_{k-1}, a'_k\}$ tiene la pif.

Por la proposición 8.1, para cada k, existe $U_k \in S(B)$ tal que $\{a_1, \ldots, a_{k-1}, a'_k\} \subseteq U_k$. Para $k \neq r$, $U_k \neq U_r$.

Esto implica que S(B) es infinito. Absurdo. Así U es principal.

(c) $\Rightarrow$ (a) Por contrapositiva y (3).

(5) ($\Rightarrow$) Como B es densa, $\mid B \mid \geq \aleph_o$.

Por (3), hay ultrafiltros no-principales.

Por la proposición 2.2, B sin-átomos, es decir, $At(B) = \emptyset$.

Es claro que no pude haber un ultrafiltro principal.

De lo contrario proposición 7.2, $At(B) \neq \emptyset$.

Por lo tanto, todos los ultrafiltros son no-principales.

($\Leftarrow$) Por contrapositiva. Sea $At(B) \neq \emptyset$.

Por la proposición 7.2, para este elemento, digamos $a \in At(B)$, F_a es un ultrafiltro principal.$\square$

El filtro presentado en la proposición 9 es conocido como el filtro de Frèchet.
Tarski en 1939 probó, cuando $B = P(X)$, para algún X:

Si $|B| \geq \aleph_0$ entonces $|\{U \mid U \text{ es un ultrafiltro no-principal en } B\}| = 2^{|B|}$.

Para más detalles consulte [1], [2] y [4].

Aplicaciones

1._ Álgebra finita-cofinita.

Sea $X \neq \emptyset$ y $A \subseteq X$. A es cofinito $\Leftrightarrow A^c$ es finito.

Sea $B_X = \{ A \subseteq B \mid A$ es finito o cofinito$\}$.

Se sabe que $|B_X| = |X|$ y B_X es un álgebra booleana.

Como $\{x\} \subseteq X$ es finito y es un átomo de $P(X)$, $\{x\} \in B_X$ y B_X es atómica. Si X es finito, $B_X = P(X)$.

Si X es infinito, $A = \{ x_p \mid p \in \mathbf{P} \} \subseteq X$, donde $\mathbf{P} = \{ p \in \mathbf{N} \mid p$ es primo$\}$. A no es finito ni cofinito y $B_X \neq P(X)$. Reformulando: B_X es completa $\Leftrightarrow X$ es finito.

2._ Álgebras Booleanas y Topología.

Ahora veremos relaciones entre redes, álgebras booleanas y espacios topológicos. Consultar [2], [13] y [18] para conceptos y notación topológica.

Por "F es un filtro de X" entenderemos que "F es un filtro en P(X)".

Lo mismo para "U es un ultrafiltro de X".

N_x denota el sistema de vecindades de x.

Definición 7. **Sea X un espacio topológico, F un filtro propio de X y $x \in X$. Se definen:**

(a) x es un punto de clausura de $F \Leftrightarrow x \in \cap\{\bar{A} \mid A \in F\}$.

(b) **F converge a x** ($F \to x$) $\Leftrightarrow N_x \subseteq F$.

N_x es un filtro propio de X, $N_x \to x$ y todo filtro convergente es propio.

Lema 2. Sea $\langle X,\tau\rangle$ un espacio topológico, F un filtro de X y $x \in X$. Entonces:

(1) Son equivalentes (a)-(c):

(a) x es un punto de clausura de F.

(b) para cualesquiera $A \in F$ y $V \in N_x$, $A \cap V \neq \emptyset$.

(c) hay un G filtro propio tal que $F \cup N_x \subseteq G$.

(2) Si $F \to x$ entonces x es un punto de clausura de F.

(3) Sea F un ultrafiltro. $F \to x \Leftrightarrow x$ es un punto de clausura de F.

Prueba.

(1) (a) $\Rightarrow$ (b) Por contrapositiva.

Sean $A \in F$ y $V \in N_x$ tales que $A \cap V = \emptyset$.

Entonces, $x \notin \bar{A}$ de lo que se obtiene que $x \notin \cap \{\bar{A} \mid A \in F\}$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sea $F_0 = \{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq F$ y $N_0 = \{V_1, \ldots, V_m\} \subseteq N_x$.

Por (b), $A_i \cap V_j \neq \emptyset$, para cualquier $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$.

Entonces $F_0 \cup N_0$ tiene la pif.

Por la proposición 6.1, $F \cup N_x$ tiene la pif.

Por la proposición 6.4, $G = F(F \cup N_x)$ es un filtro propio y claramente $F \cup N_x \subseteq G$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Por contrapositiva.

Suponemos que $x \notin \cap \{\bar{A} \mid A \in F\}$.

Esto implica que existe $A_0 \in F$ tal que $x \notin \bar{A}_0$.

Por lo tanto, hay una $V \in N_x$ tal que $V \cap A_0 = \emptyset$.

Así, $\{A_0, V\}$ no tiene la pif, es decir, $F \cup N_x$ no tiene la pif.

Por la proposición 6.4, no hay filtro propio que lo contenga.

(2) Como $F \to x$, $N_x \subseteq F$.

Como F es un filtro propio y $N_x \cup F \subseteq F$.

Por (1), x es un punto de clausura de F.

(3) ($\Rightarrow$) Inmediato de (2),

($\Leftarrow$) Por (1) existe G filtro propio tal que $F \cup N_x \subseteq G$.

Como $F \subseteq G$ y F es ultrafiltro, $F = G$.

Así, $N_x \subseteq F$, es decir, $F \to x$.□

Definición 8. Sea $\langle X,\tau \rangle$ un espacio topológico y $\beta \subseteq X$.

- β es una **base** de X para todo A abierto $\beta' \subseteq \beta$ existe tal que $A = \cup\beta'$.
- β es una **base local** en $x \in X \Leftrightarrow$ para toda $V \in N_x$ existe $B \in \beta$ tal que $B \subseteq V$.
- X es **1° numerable** $\Leftrightarrow$ para cada $x \in X$ existe β_x base local contable.
- X es **2° numerable** $\Leftrightarrow$ X tiene una base contable.
- X es **separable** $\Leftrightarrow$ X tiene un denso contable.
- X es $\mathbf{T_o}$ (Kolmogorov) $\Leftrightarrow$ para todo par de puntos distintos, uno de ellos tiene una vecindad que no contiene al otro.
- X es $\mathbf{T_1}$ (Frèchet) $\Leftrightarrow$ para todo par de puntos distintos, hay vecindades de cada uno de ellos que no contiene al otro.
- X es $\mathbf{T_2}$ (Hausdorff) $\Leftrightarrow$ para todo par de puntos distintos, hay vecindades ajenas de cada uno.
- X es **regular** $\Leftrightarrow$ para todo cerrado $C \subseteq X$ y todo $x \notin C$, x y C tienen vecindades ajenas.
- X es **completamente regular** $\Leftrightarrow$ para todo cerrado $C \subseteq X$ y todo $x \notin C$ existe $f:X \to [0,1]$ continua tal que $f[C] = \{0\}$ y $f(x) = 1$.
- X es **normal** $\Leftrightarrow$ para todo par de cerrados ajenos, hay vecindades ajenas de cada uno.
- X es $\mathbf{T_3} \Leftrightarrow$ X es T_1 y regular.
- X es $\mathbf{T_{3_{1/2}}}$ (Tychonoff) $\Leftrightarrow$ X es T_1 y completamente regular.

-X es T_4 ⇔ X es T_1 y normal.

-β es una **cubierta abierta** de X ⇔ β es una familia de abiertos en X y $X \subseteq \cup\beta$.

-β **tiene una subcubierta finita** de X ⇔ existe $\gamma \subseteq \beta$ finito tal que $X \subseteq \cup\gamma$.

-X es **compacto** ⇔ toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

-X es de **Lindelöf** ⇔ toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta contable.

-X es **disconexo** ⇔ existen dos abiertos no vacíos A y B tales que $X = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$.

-X es **conexo** ⇔ X no es disconexo.

La expresión "X es T_2-compacto" significará "X es compacto y T_2".

Usaremos los siguientes resultados de topología:

-$T_4 \Rightarrow T_{3_{1/2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_o$.

-Si X es T_3, $x \in X$ y $V \in N_x$ entonces existe $U \in N_x$ tal que $\bar{U} \subseteq V$.

-Si X es compacto entonces X es de Lindelöf.

-Si X es T_2 y $A \subseteq X$ es compacto entonces A es cerrado.

-Si X es compacto y $A \subseteq X$ es cerrado entonces A es compacto.

-Si X es T_2-compacto entonces X es T_4.

-Si X es 2° numerable entonces X es 1°, de Lindelöf y separable.

-Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de conexos y $\cap A_i \neq \emptyset$ entonces $\cup A_i$ es conexo.

Si $D = P(X)$ entonces D es una topología en X, llamada discreta y $\langle X,D \rangle$ es un espacio discreto. Sea X discreto. Tenemos que:

-X es compacto ⇔ X es finito.

-X es de Lindelöf ⇔ X es contable.

-Si X es discreto e infinito numerable entonces X es de Lindelöf pero no es compacto.

-Si X es no numerable entonces X no es de Lindelöf.

Sabemos que X y $\emptyset$ son tanto abiertos como cerrados (abierto-cerrados). Sea $B(X) = \{ A \subseteq X \mid A$ es abierto-cerrado en $X\}$. Entonces $B(X) \neq \emptyset$, $B(X) \subseteq P(X)$ y $\langle B(X), \subseteq \rangle$ es un copo.

En X se define la siguiente relación:

$x \sim y \Leftrightarrow$ hay un conexo A tal que $x, y \in A$.

Verifique el lector que esta relación es de equivalencia.

Las clases de equivalencia son llamadas **componentes** y se denotan por $c(x)$, el cual es el mayor conexo que contiene a x.

Decimos que X es **totalmente disconexo** $\Leftrightarrow c(x) = \{x\}$, para toda $x \in X$.

A continuación caracterizamos ciertos espacios topológicos en términos de álgebras booleanas, filtros, etc.

Proposición 10. Sea $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico.

(1) $B(X)$ es un álgebra booleana.

(2) X es $T_2 \Leftrightarrow$ todo filtro propio de X convergente, converge a un único punto de X.

(3) (Riesz) X es compacto $\Leftrightarrow$ toda familia de cerrados con la pif tiene intersección no-vacía.

(4) Son equivalentes (a)-(c):

(a) X es compacto.

(b) Todo filtro propio de X tiene un punto de clausura.

(c) Todo ultrafiltro de X converge a un punto de X.

(5) Si X es compacto, A es una subálgebra de $P(X)$ que es base de $\langle X, \tau \rangle$ entonces $A = B(X)$.

(6) Si X es T_2 y $B(X)$ es base de X entonces X es totalmente disconexo.

(7) Si X es T_2-compacto entonces X es de Baire.

(8) Si X es T_2 y 2º numerable entonces $|X| \leq 2^{\aleph_0}$.

Prueba.

(1) Para el lector.

(2) ($\Rightarrow$) Sea F un filtro propio de X, x,y $\in$ X tales que F $\to$ x,y.

P.D. x = y.

Suponemos que x $\neq$ y.

Como X es T_2, existen U ,V abiertos tales que U $\cap$ V = $\emptyset$.

Ya que F $\to$ x,y, N_x, $N_y \subseteq$ F.

Entonces $\emptyset \in$ F, con lo que F no es propio. Absurdo.

Por lo tanto, x = y.

($\Leftarrow$) Suponemos que X no es T_2.

Entonces, existen x $\neq$ y tales que para toda U $\in N_x$ y para toda V $\in N_y$, U $\cap$ V $\neq \emptyset$.

Entonces A = $N_x \cup N_y$ tiene la pif. Por la proposición 6.4, existe un filtro propio F de X tal que A $\subseteq$ F.

Esto implica que F $\to$ x,y. Por hipótesis, x = y. Absurdo.

Por lo tanto, X es T_2.

(3) ($\Rightarrow$) Sea H una familia de cerrados con la pif. P.D. $\cap$H $\neq \emptyset$.

Suponemos que $\cap$H = $\emptyset$.

Entonces, $\cup\{A^c \mid A \in H\}$= X, cubierta abierta.

Como X es compacto, existe m $\in$ N tal que

X = $A_1^c \cup ... \cup A_m^c = (\cap A_i)^c$.

Esto significa que $\cap A_i = \emptyset$, es decir, H no tiene la pif. Absurdo.

Por lo tanto, $\cap$H $\neq \emptyset$.

($\Leftarrow$) Suponemos que X no es compacto.

Entonces existe β cubierta abierta de X tal que para cualquier $\beta_o \subseteq \beta$ finito, X $\neq \cup\beta_o$.

Esto implica que $\beta^* = \{ A^c \mid A \in \beta \}$ familia de cerrados que tiene la pif.

Por hipótesis, $\cap\beta^* \neq \emptyset$, lo que significa que $X \neq \cup\beta$. Absurdo.

Por lo tanto X es compacto.

(4) (a) $\Rightarrow$ (b) Sea F un filtro propio.

$F^* = \{\bar{A} \mid A \in F\}$ es una familia de cerrados con la pif , ya que si

$A_1,\ldots, A_m \in F$ y F es un filtro propio entonces

$\cap_{i=1}^{m} A_i \subseteq \cap_{i=1}^{m} \bar{A}_i$ y $\cap_{i=1}^{m} \bar{A}_i \neq \emptyset$.

Como X es compacto, por (3), $\cap F^* \neq \emptyset$. Sea $x \in X$, tal que

$x \in \cap F^*$. Claramente x es un punto de clausura de F.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sea H una familia de cerrados con la pif.

Por la proposición 6.4, hay un filtro propio G de X tal que $H \subseteq G$.

Por (b), G tiene un punto de clausura, digamos, z.

Esto implica que $z \in \cap G$, es decir, $z \in \cap H$.

Con esto tenemos que $\cap H \neq \emptyset$.

Aplicamos (3) y tenemos que X es compacto.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sea U un ultrafiltro de X.

Por (b), U tiene un punto de clausura, digamos, x.

Por el lema 2.3, $U \rightarrow x$.

(c) $\Rightarrow$ (b) Sea F un filtro propio de X.

Por el Teorema I, existe U ultrafiltro de X tal que $F \subseteq U$.

Por hipótesis, existe $x \in X$ tal que $U \rightarrow x$.

Entonces, $F \cup N_x \subseteq U$.

Por el lema 2.1, x es un punto de clausura de F.

(5) Sea $E \in A$. Como A es subálgebra, $E^c \in A$.

Ya que A es base de X, E^c es abierto.

Por lo que E es cerrado. Así, $A \subseteq B(X)$. Sea $Z \in B(X)$.

Como Z es abierto y A es base de X, $Z = \cup A'$, para algún $A' \subseteq A$.

Pero Z es cerrado y X es compacto, entonces, Z es compacto.

Así, $Z = E_1 \cup \ldots \cup E_k \in A$ (por ser subálgebra).

Entonces $B(X) \subseteq A$ y $A = B(X)$.

(6) Sea $x \in X$ y $c(x)$ la componente de x. P.D. $c(x) = \{x\}$.
Sea $z \in c(x)$. Suponemos que $z \neq x$.
Puesto que X es T_2, existen $U \in N_z$ y $V \in N_x$ abiertos tales que $U \cap V = \emptyset$.
En este caso, $H = c(x) \cap U$ y $x \in K = c(x) \cap U^c$, son abiertos ajenos no vacíos tales que $c(x) = H \cup K$.
Por lo tanto, $c(x)$ es disconexo. Absurdo, pues $c(x)$ es conexo.
Así, $z = x$, es decir, $c(x) = \{x\}$.
(7) Consideremos $\{A_n\}_{n\in N}$ cadena descendente de abiertos y densos. Sea $B = (\overline{\cap_{n \in N} A_n})^c$.
Si demostramos que $B = \emptyset$ entonces $\cap_{n\in N} A_n$ es denso.
Como X es T_2-compacto, X es T_4, lo que implica que X es regular.
Suponemos que $B \neq \emptyset$. Sea $x \in X$ tal que $x \in B$.
Como A_1 es denso y X es regular, existe $U_1 \in N_x \cap \tau$ tal que $\bar{U}_1 \subseteq A_1 \cap B$.
Ya que A_2 es denso y X es regular, existe $U_2 \in N_x \cap \tau$ tal que $\bar{U}_2 \subseteq A_1 \cap A_2$.
Por inducción, podemos construir $\{\bar{U}_n\}_{n \in N}$ cadena descendente de cerrados con la pif.
Puesto que X es compacto, $\cap_{n \in N} \bar{U}_n \neq \emptyset$ (*). Por otro lado:
$\cap_{n \in N} \bar{U}_n \subseteq \cap_{n \in N} A_n \cap B = \emptyset$, $\cap_{n \in N} \bar{U}_n = \emptyset$ (**).
Claramente (*) y (**) se contradicen.
Por lo tanto, $B = \emptyset$, es decir, $\cap_{n \in N} A_n$ es denso.
Por la proposición 1.7.2, X es de Baire.
(8) Sea $x \in X$. Definimos $A_x = \{B \in \beta \mid x \in B\}$.
Como X es T_2, $x = y \Leftrightarrow A_x = A_y$. Entonces la función definida $f: X \rightarrow P(\beta)$, como $f(x) = A_x$, es inyectiva.
De donde se sigue que $|X| \leq 2^{\aleph_0}$.□
$B(X)$ es conocida como el **álgebra característica** de X.
Verifique el lector que: X es conexo $\Leftrightarrow B(X) = \{X, \emptyset\}$.

3. _ Abiertos Regulares.

Daremos un ejemplo de una álgebra booleana completa y densa.

Definición 9. Sean $\langle X, \tau\rangle$ un espacio topológico y $A \subseteq X$.

A es un **abierto regular** $\Leftrightarrow (\bar{A})^\circ = A$

X y $\emptyset$ son abiertos regulares.

Sea $AR(X) = \{A \subseteq X \mid A \text{ es un abierto regular}\}$.

Ejemplo.

Sea $X = \mathbb{R}$ con la topología usual, $A = (0,1)$ y $B = (1,2)$.

Entonces $A, B \in AR(\mathbb{R})$, pero $A \cup B \notin AR(\mathbb{R})$ y $A^c \notin AR(\mathbb{R})$.

Con esto, $\langle AR(\mathbb{R}), \cup, \cap, ^c, \mathbb{R}, \emptyset\rangle$ no es un álgebra booleana.

Lema 3. Sea $\langle X,\tau\rangle$ un espacio topológico y $A \subseteq X$.

(1) A es abierto. $A \in AR(X) \Leftrightarrow \bar{A}^\circ \subseteq A$.

(2) $\bar{A}^\circ \in AR(X)$.

Sean $A,B,C \in AR(X)$.

(3) $A \cap B \in AR(X)$.

(4) $(\,\overline{(A\cap B)\cup(A\cap C)}\,)^\circ = A \cap (\overline{B \cup C})^\circ$.

(5) $\text{ext } A \in AR(X)$, $(\overline{A \cup \text{ext} A})^\circ = X$ y $A \cap \text{ext } A = \emptyset$.

Prueba.

(1) para el lector.

(2) Como $\bar{A}^\circ \subseteq \bar{A} \Rightarrow \overline{(\bar{A})^\circ} \subseteq \bar{A} \Rightarrow (\,\overline{(\bar{A})^\circ})^\circ \subseteq \bar{A}^\circ \Rightarrow$ por (1),
$\bar{A}^\circ \in AR(X)$.

(3) $(\overline{A \cap B})^\circ \subseteq (\bar{A} \cap \bar{B})^\circ = \bar{A}^\circ \cap \bar{B}^\circ = A \cap B \Rightarrow$ por (1),
$A \cap B \in AR(X)$.

(4) $((\overline{A\cap B)\cup(A\cap C)}\,)^\circ = \overline{(A \cap (B \cup C))}^\circ$.

Como $(\overline{A \cap (B\cup C)})^\circ \subseteq (\bar{A} \cap \overline{B \cup C})^\circ = \bar{A}^\circ \cap (\overline{B \cup C})^\circ =$
$A \cap (\overline{B\cup C})^\circ$.

Por lo tanto, $(\overline{A \cap (B\cup C)})^\circ \subseteq A \cap (\overline{B\cup C})^\circ (*)$.

Si $A \cap (\overline{B \cup C})^\circ \subseteq \overline{A \cap (B \cup C)}$ entonces
$A \cap (\overline{B \cup C})^\circ \subseteq ((\overline{A \cap (B \cup C)})^\circ$ (**).
De (*) y (**) obtenemos la igualdad deseada.
Sólo falta demostrar que $A \cap (\overline{B \cup C})^\circ \subseteq \overline{A \cap (B \cup C)}$.
Supongamos que $A \cap (\overline{B \cup C})^\circ \not\subseteq \overline{A \cap (B \cup C)}$.
Entonces existe $x \in A \cap (\overline{B \cup C})^\circ$ tal que $x \notin \overline{A \cap (B \cup C)}$.
De esto, existe $V \in N_x$ tal que $V \cap A \cap (B \cup C) = \emptyset$.
Pero $x \in A \cap V$, de donde $V \cap (B \cup C) = \emptyset$.
Por lo tanto, $x \notin \overline{B \cup C}$, lo que implica que $x \notin (\overline{B \cup C})^\circ$.
Esto contradice que $x \in (\overline{B \cup C})^\circ$.
Entonces $A \cap (\overline{B \cup C})^\circ \subseteq (\overline{A \cap (B \cup C)})$.
Como $A \cap (\overline{B \cup C})^\circ$ es abierto, $A \cap (\overline{B \cup C})^\circ \subseteq ((\overline{A \cap (B \cup C)})^\circ$.
(5) Usaremos la siguiente igualdad $\overline{A^c} = (A^\circ)^c$.
$(\overline{\mathrm{ext} A})^\circ = ((\overline{(\bar{A})^c})^\circ = ((\bar{A})^{\circ c})^\circ = (A^c)^\circ = \mathrm{ext}\ A \Rightarrow \mathrm{ext}\ A \in AR(X)$.
Sabemos que $A \cup (\bar{A})^c$ es denso (lema 1.2.2).
Entonces, $(\overline{A \cup \mathrm{ext} A})^\circ = \overline{A \cup (\bar{A})^c} = X$.
Ya que $A \subseteq \bar{A}$, $A \cap (\bar{A})^c = \emptyset$. □
Para $A,B \in AR(X)$, definimos:
$A \wedge B = A \cap B$, $A \vee B = (\overline{A \cup B})^\circ$ y $A' = \mathrm{ext}\ A$..
Por el lema 3, estas operaciones estan bien definidas.

Proposición 11. Sea $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico.
(1) $\langle\ AR(X), \vee, \wedge\ , ', X, \emptyset\ \rangle$ es un álgebra booleana completa.
(2) $B(X)$ es una subálgebra de $AR(X)$.
Prueba.
(1) Verifique el lector que $AR(X)$ es una red.
Lo anterior determina un orden parcial: $\leq$.
Por el lema 3.4, se cumple una de las leyes distributivas y $AR(X)$ es una red distributiva.

Por el lema 3.5, AR(X) es una red complementada, es decir, es un álgebra booleana.

Sea $H \subseteq AR(X)$. Por el lema 3.2, $B = (\overline{\cup H})^{\circ} \in AR(X)$.

Si $A,B \in H$ entonces:

$A \wedge B = A \cap B = \bar{A}^{\circ} \cap (\overline{\cup H})^{\circ} = (\bar{A} \cap \overline{\cup H})^{\circ} \subseteq (\overline{A \cap \cup H})^{\circ} = \bar{A}^{\circ} = A$.

Pero $A \subseteq A \cap B$, por lo que se tiene que $A \wedge B = A \cap B = A$, es decir, $A \leq B$ y B es cota superior de H.

Sea $C \in AR(X)$ una cota superior de H. Entonces, $B \wedge C = B$, es decir, $B \leq C$.

Por lo tanto, sup H = B. Por la proposición 1.6.3, AR(X) es completa.

(2) Sean $A,B \in B(X)$.

Como A es un abierto-cerrado, es un abierto regular.

Lo mismo pasa para $A \cup B$, $A \cap B$ y A^c. Así, B(X) es cerrado bajo las operaciones de AR(X).□

Ahora sí es un álgebra boolena $\langle AR(\mathbb{R}), \vee, \wedge, ', \mathbb{R}, \emptyset \rangle$.

Como $\mathbb{R}$ es conexo, $B(\mathbb{R}) = \{\mathbb{R}, \emptyset\}$.

Se afirma que $AR(\mathbb{R})$ no es atómica.

Para ver esto observamos lo siguiente:

(1) Cualquier abierto regular es un abierto.

(2) Sabemos que $\beta = \{V_{\varepsilon}(x) \mid x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0\}$ es una base de $\mathbb{R}$, donde $V_{\varepsilon}(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

(3) $A = (a,b) \neq \emptyset$ es un abierto regular.

A no puede ser un átomo, porque para cada $n > 0$,

$\emptyset \subset A_n = (a + 1/n, b-1/n) \subset A$.

Por lo tanto ningún elemento de β es un átomo.

(4) Suponemos que A es un átomo en $AR(\mathbb{R})$. Entonces $A \neq \emptyset$.

Como β es base de $\mathbb{R}$ tiene que contener una vecindad básica,

la cual nos dice que A no es un átomo, contradicción. Así, A no puede ser un átomo

(5) Para cada $r \in \mathbb{R}^+$, $B_r = (-r,r) \in AR(\mathbb{R})$.

Es claro que si $r \neq s$ entonces $B_r \neq B_s$.

Así, $f:\mathbb{R}^+ \to AR(\mathbb{R})$, $f(r) = B_r$, es una función inyectiva.

Por lo tanto, $| AR(\mathbb{R}) | > \aleph_o$.

Entonces $AR(\mathbb{R})$ no es atómica y no tiene átomo alguno.

Lo que significa que $AR(\mathbb{R})$ es densa.

CAPÍTULO 3

EL ESPACIO DE STONE

Establecemos una relación entre álgebras booleanas, ultrafiltros y ciertos espacios topológicos T_2-compactos.

El Teorema de Representación

Sea B un álgebra booleana y $x \in B$.
Definimos: $p(x) = \{ U \in S(B) \mid x \in U\}$ y $\beta = \{p(x) \mid x \in B\}$.
Entonces, $p(x) \subseteq S(B)$, $\beta \subseteq P(S(B))$, $p(0) = \emptyset$ y $p(1) = S(B)$.

Lema 1. Sean B, p(x) y β como antes.

(1) $p(x \vee y) = p(x) \cup p(y)$, $p(x \wedge y) = p(x) \cap p(y)$ y $p(x') = p(x)^c$.

(2) $x = y \Leftrightarrow p(x) = p(y)$.

(3) β es una subálgebra de $P(S(B))$.

Prueba.

(1) Sea $U \in p(x \vee y)$. Esto implica que $x \vee y \in U$.
Como U es ultrafiltro, U es primo y $x \in U$ o $y \in U$.
Entonces $U \in p(x) \cup p(y)$. Así, $p(x \vee y) \subseteq p(x) \cup p(y)$.
Sea $V \in p(x) \cup p(y)$. Entonces $x \in V$ o $y \in V$.
En cualquier caso, $x \vee y \in V$, lo que implica que
$V \in p(x \vee y)$. Entonces $p(x) \cup p(y) \subseteq p(x \vee y)$.
Así, $p(x \vee y) = p(x) \cup p(y)$.
De manera similar para los demás.
(2) ($\Rightarrow$) Obvio.
($\Leftarrow$) Por contrapositiva. Sean $x \neq y$.

Por la proposición **2.8.3**, hay un $U \in S(B)$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$. Entonces $U \in p(x)$ y $U \notin p(y)$ y $p(x) \neq p(y)$.

(3) Es inmediato de (1). □

El siguiente resultado, demostrado por M.H. Stone en 1936, nos dice cómo podemos "ver" cualquier álgebra booleana.

Teorema II. Teorema de Representación.

Si B es un álgebra booleana entonces hay un conjunto X tal que B es isomorfa a una subálgebra de $P(X)$.

Prueba.

Sea $X = S(B)$. Definimos $f:B \to P(X)$, $f(x) = p(x)$.

Por el lema 1.2, f es una función inyectiva.

Por el lema 1.1, f es un homomorfismo y im $f = \beta$.

Por el lema 1.3, $B \cong \beta$ es una subálgebra de $P(X)$.□

Este teorema es análogo al Teorema de Cayley. Ver [9] y [11].

El espacio de Stone

Sean B, $p(x)$ y β como en el párrafo anterior.
Exploramos un poco más con estos conjuntos.
β **es una cubierta de S(B).** Se cumple que $S(B) = \cup\beta$.
β **es una base de una única topología en S(B).**

Sean $p(x), p(y) \in \beta$ y $U \in p(x) \cap p(y)$.

Entonces existe $z = x \wedge y$ se tiene que $p(z) \subseteq p(x) \cap p(y)$.

De esto β es base, $\tau_\beta = \{\cup\beta' \mid \beta' \subseteq \beta\}$ es la topología correspondiente y $\langle S(B), \tau_\beta \rangle$ es un espacio topológico.

Como β es álgebra, β **es una familia de abierto-cerrados y una cubierta abierta de S(B).**
?'S(B) es compacto? Supongamos que S(B) no lo es.

Esto significa que β no tiene ninguna subcubierta finita de S(B).

Así para cualquier $\beta_0 = \{p(x_1), ..., p(x_n)\}$,

$p(\bigvee_{i=1}^{n} x_i) = \cup_{i=1}^{n} p(x_i) \neq S(B)$.

De esto, tomando el complemento, $p(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i') = \cap_{i=1}^{n} p(x_i) \neq \emptyset$.

Por ser inyectiva la función f del Teorema II, $\bigwedge_{i=1}^{n} x_i' \neq 0$.

Por lo tanto, $A = \{ x' | x \in B\}$ tiene la pif.

Por la proposición 2.8.1, existe $U \in S(B)$ tal que $A \subseteq U$.

Como U es un ultrafiltro y $A \subseteq U$, para cualquier $x \in B$, $x \notin U$.

Lo que significa que $U \notin \cup\beta = S(B)$.

Esto contradice el hecho de que $U \in S(B)$.

Entonces existe $\beta_0 \subseteq \beta$ finito tal que β_0 es una subcubierta abierta de S(B). Con esto, **S(B) es compacto.**

?'S(B) es T_2? Sean $U \neq V \in S(B)$.

Entonces hay un $x \in B$ tal que $x \in U$ y $x \notin V$, es decir, $U \in p(x)$ y $V \in p(x')$.

Como $p(x) \cap p(x') = \emptyset$, $p(x) \in N_U$ y $p(x') \in N_V$.

Tenemos que **S(B) es T_2.**

Así, β es una subálgebra de P(S(B)) y base de S(B).
Por la proposición 2.10.5, $\beta = B(S(B))$.
Por el Teorema II, $B \cong \beta = B(S(B))$.

Teorema III. Sean B, p(x) y β como en el Teorema II.

(1) S(B) es T_2-compacto con β base de abierto-cerrados y $B \cong B(S(B))$.

(2) S(B) es totalmente disconexo, T_4, de Lindelöf y de Baire.

Prueba.

(1) Es lo que acabamos de hacer anteriormente.

(2) Por la proposición 2.10.6, S(B) es totalmente disconexo.

Por (1), S(B) es T_4, lo que implica que es $T_{3_{1/2}}$, T_3, T_1 y T_0.

Por la proposición 2.10.7, S(B) es de Baire.□

Un **Espacio de Stone** es un espacio topológico T_2-compacto con una base de abierto-cerrados.
Si B es un álgebra booleana entonces S(B) es su espacio de Stone.
El siguiente resultado establece relaciones entre los tipos de álgebras booleanas vistas en el capítulo 2 y las propiedades topológicas de su correspondiente espacio de Stone.

Definición 1. Sean $\langle X,\tau\rangle$ un espacio topológico y $A \subseteq X$.

X es **extremadamente disconexo** $\Leftrightarrow$ para todo A abierto, $\bar{A}$ es abierto.

Todo espacio discreto es extremadamente disconexo.

Proposición 1. Sea B un álgebra booleana, $H \subseteq S(B)$ y $U \in S(B)$.

(1) U es principal $\Leftrightarrow$ U es un punto aislado en S(B).

(2) B es atómica $\Leftrightarrow$ S(B) tiene un denso de puntos aislados.

(3) B es completa $\Leftrightarrow$ S(B) es extremadamente disconexo y $B \cong AR(SB)$.

(4) B es densa $\Leftrightarrow$ S(B) es perfecto.

(5) U es no-principal $\Leftrightarrow$ $\{U\}$ es fronterizo.

(6) Si H es magro entonces para todo $U \in H$, U es no-principal.

(7) Si B no es atómica entonces $|S(B)| \geq 2^{\aleph_0}$.

Prueba.

(1) Inmediato de la proposición 2.7.2.

(2) ($\Rightarrow$) B es atómica.

Por la proposición 2.7.2, para $a \in At(B)$, $F_a \in S(B)$.

Por (1), $D = \{F_a \mid a \in At(B)\}$ es un conjunto de puntos aislados.

Para $p(x) \in \beta - \{\emptyset\}$, $x \neq 0$, entonces existe un $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$, es decir, $x \in F_a$. Por lo que $F_a \in p(x)$.

Entonces $D \cap p(x) \neq \emptyset$. Así, D es denso.

($\Leftarrow$) Sea $x \neq 0$.

Por la proposición 2.8.2, existe $U \in S(B)$ tal que $x \in U$.
Entonces $U \in p(x)$.
Por hipótesis, existe un $V \in p(x)$ tal que V es aislado.
Por (1), V es principal, así que hay un $a \in At(B)$, $V = F_a$.
Por lo tanto, $x \in F_a$, es decir, $a \leq x$ y B es atómica.
(3) ($\Rightarrow$) B es completa y β es completa. Sea $A \subseteq S(B)$.
P.D. $\bar{A}$ es abierto.
Si $A = \emptyset$, claramente $\bar{A} = A \in \beta$. Sea $A \neq \emptyset$.
Como β es base de S(B), hay un $E \subseteq B$ tal que
$A = \cup \{p(x) | x \in E\}$. Ya que B es completa, existe
el sup $E = a$. Por el lema 1, $\cup\{p(x) \mid x \in E\} \subseteq p(a) \in \beta$.
Entonces, por ser cerrado p(a), $\bar{A} \subseteq p(a)$.
Veamos $p(a) \subseteq \bar{A}$. Sea $U \in p(a)$. P.D. $U \in \bar{A}$.
Supongamos que $U \notin \bar{A}$. Entonces existe $p(b) \in \beta$ tal
que $p(b) \cap A = \emptyset$.
Por lo tanto, $p(b) \cap p(x) = \emptyset$, para toda $x \in E$.
Es decir, $b \wedge x = 0$, para toda $x \in E$.
Esto implica que $x \leq b'$, para toda $x \in E$.
Como b' es cota superior de E y $a = \sup E$. Así, $a \leq b'$.
Esto significa que $a \wedge b = 0$. Así que $p(a) \cap p(b) = \emptyset$.
Por otro lado, $U \in p(a) \cap p(b)$, es decir, $p(a) \cap p(b) = \emptyset$.
Absurdo. Por lo tanto, $p(a) \subseteq \bar{A}$.
Finalmente, $\bar{A} = p(a) \in \beta \subseteq \tau_\beta$.
Así, S(B) es extremadamente disconexo.
Por la proposición 2.11, AR(SB) es extremadamente
disconexo y $B(SB) \subseteq AR(SB)$.
Sea $A \in AR(SB)$, $\bar{A}$ es abierto y $A = A^\circ = \bar{A}^\circ = \bar{A}$.
Esto es $A \in B(SB)$ y así, $AR(SB) \subseteq B(SB)$.
Por el Teorema II, $AR(SB) = B(SB) \cong B$.

($\Leftarrow$) AR(SB) es completa y la proposición 3.5.

(4) Inmediato de la proposición 2.9.5.

(5) Por contrapositiva y la proposición 2.7.2.

($\Rightarrow$) Suponemos que $\{U\}$ no es fronterizo. Entonçes $\{U\}^{\circ} \neq \emptyset$. Así existe $p(x) \in \beta$ tal que $U \in p(x) \subseteq \{U\}$.
Por lo tanto, $p(x) = \{U\}$, es decir, U es principal.

($\Leftarrow$) Si U es principal, entonces $p(x) = \{U\} = \{U\}^{\circ}$, es decir, $\{U\}$ no es fronterizo.

(6) Sea $U \in H$. P.D. U es no-principal.
Por el Teorema III, S(B) es un espacio de Baire.
Como H es magro entonces H es fronterizo, por la proposición 1.7.1. Por lo tanto $\{U\}^{\circ} \subseteq H^{\circ} = \emptyset$. Esto implica que $\{U\}^{\circ} = \emptyset$, es decir, $\{U\}$ es fronterizo.
Por (5), U es no-principal.

(7) Sea que B no es atómica.
Por la proposición 2.2.3, B es infinita. Recordemos que At(B) es el conjunto de átomos de B.
Como B no es atómica entonces existe $b \in B$ tal que $b \neq 0$ y para todo $a \in At(B)$, $a \not\leq b$.
En particular se tiene que $b \notin At(B)$, pues de lo contrario obtendríamos que $b \not\leq b$, lo que contradice que $b \leq b$.
Así, por la proposición 2.2.1, existe $x \in B\text{-}\{0\}$ tal que $b \not\leq x$ y $b \not\leq x'$.
Por la proposición 2.1.3, $b \wedge x \neq 0$, b y $b \wedge x' \neq 0$, b.
Sean $b_1 = b \wedge x$ y $b_2 = b \wedge x'$. Es claro que $b_1 \wedge b_2 = 0$.
Se afirma que $b_1 \neq b_2$. Porque de lo contrario $b_1 = 0$, lo que contradice al hecho de que $b_1 \neq 0$.
Por la cualidad de b, $b_1 \notin At(B)$ y $b_2 \notin At(B)$.
Entonces podemos repetir otra vez el argumento anterior

para b_1 y b_2. De hecho si lo repetimos $\aleph_o$ veces obtenemos un árbol con raíz en b, con $2^{\aleph_o}$ ramas, cada rama tiene la pif y ramas distintas no tiene la pif. Cada rama está contenida en algún ultrafiltro, por la proposición 2.8.1.
Esto implica que $|S(B)| \geq 2^{\aleph_o}$.□

Ejemplos.

-Como P(X) es atómica y completa, S(P(X)) tiene un conjunto denso de puntos aislados, no es perfecto y es extremadamente disconexo.
-Ya que $| B_N | = | N |$ y B_N es atómica y no es completa, $S(B_N)$ tiene un denso de puntos aislados, es totalmente disconexo pero no extremadamente disconexo.
-S(AR($\mathbb{R}$)) es perfecto y extremadamente disconexo.
-La recíproca del la proposición 1.7 es falsa, pues si B = P(N) entonces $| S(B) | \geq 2^{\aleph_o}$ y B sí es atómica.

Aplicaciones

1._ Dualidad.

Veremos qué ocurre al pasar de álgebras booleanas a espacios de Stone y al revés. Usaremos algunos resultados de topología. Sea $h:X \to Y$ continua.
(1) h es abierta (cerrada) ⇔ para todo $A \subseteq X$, si A es abierto (cerrado) entonces h [A] es abierto (cerrado).
(2) h biyectiva. h^{-1} es continua ⇔ h es cerrada ⇔ h es abierta.
(3) Si X compacto y Y es T_2 entonces h es cerrada.
(4) En (3), si además h es biyectiva, h es un homeomorfismo.
Sea X un espacio de Stone, B(X) su álgebra característica y $x \in X$.

Definimos $u(x) = \{ A \in B(X) \mid x \in A\}$.

Proposición 2. Sean X un espacio de Stone y u(x) como antes. Entonces:

(1) $u(x) \in S(B(X))$.

(2) $x = y \Leftrightarrow u(x) = u(y)$.

(3) $X \simeq S(B(X))$.

Prueba. Sea β una base de abierto-cerrados de X, por ser X un espacio de Stone.

(1) Puesto que $x \in X$ y $X \in B(X)$, $X \in u(x)$.

Para D, $E \in u(x)$, $x \in D \cap E$ y $D \cap E \in B(X)$.

O sea que $D \cap E \in u(x)$.

Sean D, $E \in B(X)$, $D \in u(x)$ y $D \subseteq E$.

Entonces, $x \in E$.

Por lo tanto $E \in u(x)$, es decir, $\emptyset \notin u(x)$.

Con esto u(x) es un filtro propio. Sea $A \in B(X)$.

Es claro que $x \in A$ o $x \in A^c$, es decir, $A \in u(x)$ o $A^c \in u(x)$. Por la proposición 2.7.1, u(x) es un ultrafiltro.

(2) ($\Leftarrow$) Por contrapositiva. Sean $x \neq y \in X$.

Como X es T_2 y β es una base de X, existen $A \in N_x \cap \beta$ y $B \in N_y \cap \beta$ tales que $A \cap B = \emptyset$.

Esto es $A \in u(x)$ y $A \notin u(y)$. Por lo tanto $u(x) \neq u(y)$.

(3) Definimos $\varphi{:}X \longrightarrow S(B(X))$, $\varphi(x) = u(x)$.

Por (2), φ es una función inyectiva.

Probaremos que φ es suprayectiva. Para esto sea $U \in S(B(X))$. Puesto que X es compacto, por la proposición 2.10.4, hay una $x \in X$ tal que $U \rightarrow x$, es decir, $N_x \subseteq U$.

Por el lema 2.2.3, x es un punto de clausura de U.

Por lo tanto, para cualquier $A \in U$, $x \in \bar{A} = A$, por ser abierto-cerrado. Por lo tanto $A \in u(x)$, es decir, $U \subseteq u(x)$.

Pero U es ultrafiltro, entonces, $U = u(x)$.

Así, hay una $x \in X$ con la propiedad de que $\varphi(x) = U$.

Por lo tanto, φ es biyectiva.

Ahora veremos que φ es continua.

Sea $A \in B(X)$, $p(A)$ es un abierto básico de $S(B(X))$ entonces:

$x \in \varphi^{-1}[p(A)] \Leftrightarrow \varphi(x) \in p(A) \Leftrightarrow u(x) \in p(A) \Leftrightarrow A \in u(x)$
$\Leftrightarrow x \in A$,

de donde resulta que: $\varphi^{-1}[p(A)] = A \in B(X)$.

Como X es compacto y $S(B(X))$ es T_2, φ es cerrada.

Esto implica que φ^{-1} es continua.

Así, φ es un homeomorfismo y $X \simeq S(B(X))$.□

Lo que hemos hecho hasta ahora es lo siguiente:

A partir de un álgebra booleana B, se construye su espacio de Stone S(B) (Teorema III) y resulta que B es isomorfa al álgebra booleana de los abierto-cerrados de S(B).

Por otro lado, a partir de un espacio de Stone X, se tiene su álgebra booleana B(X) de abierto-cerrados y resulta que X es homeomorfo al espacio de Stone de B(X).

En el primer caso "Stonizamos" el álgebra B y en el segundo caso "Booleanizamos" el espacio X.

En los siguientes dos lemas usaremos los siguientes resultados de funciones. Sean $f: X \to Y$, $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. Entonces:

(1) $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$. Si f es inyectiva entonces $A = f^{-1}[f[A]]$.

(2) $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$. Si f es suprayectiva entonces
$f[f^{-1}[B]] = B$.

Veamos qué pasa con los homomorfismos entre álgebras booleanas cuando "Stonizamos".

Lema 2. Sean B y C álgebras booleanas y $h: B \to C$ un homomorfismo. Definimos $h_\natural : S(C) \longrightarrow S(B)$,

$h_\natural(U) = h^{-1}[\,U\,]$. Entonces:

(1) $h_\natural^{-1}\,[p(x)] = p(h(x))$, $h_\natural\,[p(h(x))] = p(x) \cap h_\natural\,[S(C)]$ y $h_\natural$ es una función continua y cerrada.

(2) h es inyectiva $\Leftrightarrow$ $h_\natural$ es suprayectiva.

(3) h es suprayectiva $\Leftrightarrow$ $h_\natural$ es inyectiva.

(4) h es un isomorfismo $\Leftrightarrow$ $h_\natural$ es un homeomorfismo

(5) Si $g:C \longrightarrow D$ es un homomorfismo entonces $(g \circ f\,)_\natural = f_\natural \circ g_\natural$.

Prueba. (4) y (5) quedan para el lector.

(1) Por la proposición 2.7.3, $h^{-1}[U] \in S(B)$. Entonces:

$U \in h_\natural^{-1}[p(x)] \Leftrightarrow h_\natural(U) \in p(x) \Leftrightarrow h^{-1}[U] \in p(x) \Leftrightarrow$

$x \in h^{-1}[U] \Leftrightarrow h(x) \in U \Leftrightarrow U \in p(h(x))$.

De esto es inmediato la primera igualdad.

$V \in h_\natural[p(h(x))] \subseteq h_\natural[S(C)] \Rightarrow$ existe $U \in p(h(x))$ tal que

$h_\natural(U) = V$, $h^{-1}[U] = V$.

Como $U \in p(h(x)) = h_\natural^{-1}\,[p(x)]$ entonces $h_\natural(U) \in p(x)$.

Por lo tanto, $h^{-1}\,[U] \in p(x)$, es decir, $x \in h^{-1}[U] = V$.

Así, $V \in p(x)$. Entonces $h_\natural[p(h(x))] \subseteq p(x) \cap h_\natural[S(C)]$.

Para la otra contención, sea $V \in p(x) \cap h_\natural[S(C)]$.

Entonces hay un $U \in S(C)$ tal que $h_\natural(U) = h^{-1}[U] = V \in p(x)$.

Así $x \in h^{-1}[U]$, $U \in p(h(x))$, es decir, $V = h_\natural(U) \in h_\natural[p(h(x))]$.

De la primera igualdad se sigue que $h_\natural$ es continua.

Como $S(C)$ es compacto y $S(B)$ es T_2, $h_\natural$ es cerrada.

(2) ($\Rightarrow$) h es inyectiva. P.D. $h_\natural$ es suprayectiva.

Sea $U \in S(B)$. Por la proposición 2.7.3.b, $h[U] \in S(C)$,

$h_\natural(h[U]) = h^{-1}[h[U]] = U$.

($\Leftarrow$) $h_\natural$ es suprayectiva. P.D. h es inyectiva.

Sean $x,y \in B$ y $h(x) = h(y)$. Entonces $h_\natural[p(x)] = h_\natural[p(y)]$.

Como $h_\natural$ es suprayectiva y por medio del lema 1.2:
$p(x) = h_\natural\, h_\natural^{-1}\,[p(x)] = h_\natural\, h_\natural^{-1}\,[p(y)] = p(y)$ y $x = y$.
(3) ($\Rightarrow$) h es suprayectiva. P.D. $h_\natural$ es inyectiva.
Sean $U, V \in S(C)$ y $h_\natural(U) = h_\natural(V)$.
Entonces $h^{-1}[U] = h^{-1}[V]$. Como h es suprayectiva, $U = V$.
($\Leftarrow$) $h_\natural$ es inyectiva. P.D. h es suprayectiva.
Es claro que $h[B] \subseteq C$, falta probar que $C \subseteq h[B]$.
Para esto tomamos $d \in C$.
Por ser $h_\natural$ inyectiva, $S(C) \cong h_\natural[S(C)]$.
Por lo tanto hay un G abierto en S(B)
tal que $h_\natural[p(d)] = G \cap h_\natural[S(B)]$.
De esto, G tiene que ser de la forma $G = \cup\,\{p(b) \mid b \in A\}$,
para algún $A \subseteq B$ y $h_\natural[p(d)] \subseteq G$.
Como p(d) es cerrado, S(B) es compacto y $h_\natural$ es cerrada
entonces $h[p(d)]$ es compacto.
Así, hay un $A_0 = \{a_1,\dots,a_n\} \subseteq A$ tal que $h_\natural[p(d)] \subseteq \cup A_0$.
Sea $e = \sup A_0$ y, por (1), $h_\natural\,[p(d)] = p(e) \cap h_\natural[S(B)] = h_\natural\,[p(h(e))]$.
Como $h_\natural$ es inyectiva, $p(d) = p(h(e))$, por el lema 1.2, $d = h(e) \in h[B]$.
Finalmente $h[B] = C$, es decir, h es suprayectiva.□
Veamos ahora lo que ocurre con las funciones continuas
entre espacios de Stone cuando "Booleanizamos".

Lema 3. **Sean X,Y espacios de Stone y $\varphi: X \to Y$ continua.**
Definimos $\varphi_\flat: B(Y) \to B(X)$, $\varphi_\flat(A) = \varphi^{-1}[A]$. Entonces:
(1) $\varphi_\flat$ es un homomorfismo.
(2) φ es inyectiva $\Leftrightarrow$ $\varphi_\flat$ es suprayectiva.
(3) φ es suprayectiva $\Leftrightarrow$ $\varphi_\flat$ es inyectiva.
(4) φ es un homeomorfismo $\Leftrightarrow$ $\varphi_\flat$ es un isomorfismo.
(5) Si $\psi: Y \to Z$ continua entonces $(\psi \circ \varphi)_\flat = \varphi_\flat \circ \psi_\flat$.

Prueba. **(1) y (5) son para el lector.**

(2) ($\Rightarrow$) φ es inyectiva. P.D. φ_b es suprayectiva.
Para A$\in$ B(X), A es cerrado y φ cerrada, φ[A] es cerrado.
Por se inyectiva φ $[A]^c = \varphi[A^c]$ es cerrado, es decir,
φ [A] es abierto. Por lo tanto, φ [A] $\in$ B(Y).
Pero φ es inyectiva, $\varphi_b(\varphi[A]) = \varphi^{-1} \circ \varphi$ [A] = A.
Así, φ_b es suprayectiva.
($\Leftarrow$) φ_b es suprayectiva. P.D. φ es inyectiva.
Sean x,y $\in$B y $\varphi(x) = \varphi(y)$. Suponemos que $x \neq y$.
Como X es T_2, existen $E \in N_x \cap B(X)$ y $D \in N_y \cap B(X)$
tales que $E \cap D = \emptyset$.
Como φ_b es suprayectiva hay H,G $\in$ B(Y) tales que
$\varphi_b(H) = E$ y $\varphi_b(G) = D$.
Pero $x \in E = \varphi^{-1}[H]$, donde, $\varphi(x) \in$H. Análogamente
$\varphi(y) \in G$. Por hipótesis $\varphi(x) \in H \cap G$, lo que implica que:
$x \in \varphi^{-1}[H \cap G] = \varphi_b(H \cap G) = \varphi_b(H) \cap \varphi_b(G) = E \cap D$.
Por lo tanto, $E \cap D \neq \emptyset$. Absurdo.
(3) ($\Rightarrow$) φ es suprayectiva. P.D. φ_b es inyectiva.
φ_b (A) = φ_b (B) $\Rightarrow \varphi^{-1}[A] = \varphi^{-1}[B]$.
Como es suprayectiva, A = B.
($\Leftarrow$) φ_b es inyectiva P.D. φ es suprayectiva.
Sabemos que φ [X] $\neq \emptyset$. Si $\varphi[X]^c \in H(\varphi_b)$, φ [X] = $\emptyset$.
Absurdo. Por lo tanto φ [X] = Y, es decir, φ es suprayectiva.
(4) es inmediato de (2) y (3).□
Como consecuencia de estos dos lemas tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2. Dualidad.
Sean B,C álgebras booleanas, h:B $\rightarrow$ C un homomorfismo, X, Y espacios de Stone y φ:X $\rightarrow$ Y continua. Entonces:

(1) $B \cong B(S(B))$ y $X \simeq S(B(X))$.

(2) h_{bb}:B(S(B)) $\longrightarrow$ B(S(C)) es un homomorfismo.

(3) φ_{bb}:S(B(X)) $\longrightarrow$ S(B(Y)) es continua y cerrada.

(4) Si B $\cong$ C entonces B(S(B)) $\cong$ B(S(C)).

(5) Si X $\simeq$ Y entonces S(B(X)) $\simeq$ S(B(Y)).□

Todavía más, si **B** es la categoría de las álgebras booleanas, **S** la categoría de los espacios de Stone, F:**B** $\longrightarrow$ **S**, F(h) = h_b y G:**S** $\longrightarrow$ **B**, G(φ) = φ_b entonces, por los lemas 2 y 3, F y G son funtores contravariantes.

2. _ El caso contable.

Nos interesa ver el comportamiento de S(B) cuando B es un álgebra booleana contable.

Antes veremos algunos conceptos de puntos de acumulación, espacios compactos y métricos.

Para mayores detalles consulte las referencias [13] y [18].

Definición 2. Sean $\langle X,\tau\rangle$ un espacio topológico, $x \in X$ y $A \subseteq X$.

(a) x es un **punto aislado** de A $\Leftrightarrow$ existe $V \in N_x$ tal que $A \cap V = \{x\}$.

(b) x es un **punto de acumulación** de A $\Leftrightarrow$ para toda $V \in N_x$, V-$\{x\} \cap A \neq \emptyset$.

(c) x es un **punto de condensación** de A $\Leftrightarrow$ para toda $V \in N_x$, $|\, V \cap A \,| > \aleph_0$.

(d) A es **perfecto** $\Leftrightarrow$ A es cerrado y no tiene puntos aislados.

(e) X es un **espacio de Cantor** $\Leftrightarrow$ X es T_2-compacto perfecto con una base de abierto-cerrados contable.

Sean A' = $\{x \in X \mid$ x es un punto de acumulación de A $\}$ y $C_A = \{x \in X \mid$ x es un punto de condensación de A$\}$.

Al conjunto A' se le conoce como el conjunto derivado de A.

Observaciones.

-A-A' es el conjunto de los puntos aislados de A.

-Si A-A' $= \emptyset$ entonces A no tiene puntos aislados.

-Si A' $= \emptyset$ entonces A es un conjunto de puntos aislados.

-Todo espacio de Cantor es un espacio de Stone.

-Si $2 = \{0,1\}$, $D = P(2)$ su topología y ${}^{\omega}2 = \{f \mid f\colon N \to 2\}$ con la topología del producto entonces es ${}^{\omega}2$ un espacio de Cantor.

Lema 4. Sean $\langle X,\tau\rangle$ un espacio topológico 2° numerable, $x \in X$ y $A \subseteq X$. Entonces:

(1) $|A\text{-}A'| \leq \aleph_o$.

(2) Si para toda $x \in A$ existe $V \in N_x$ tal que $|V \cap A| \leq \aleph_o$ entonces $|A| \leq \aleph_o$.

(3) $|A| > \aleph_o \Leftrightarrow C_A \neq \emptyset$.

(4) Si $|A| > \aleph_o$ entonces $C_A \subseteq A'$, C_A es perfecto y $|C_A \cap A| > \aleph_o$.

(5) Cantor-Bendixon. Si X es 2° numerable, A es cerrado y $|A| > \aleph_o$ entonces existen $B, C \subseteq X$ tales que $A = B \cup C$, B es perfecto y C es contable.

(6) Si X un espacio de Cantor entonces $X \simeq {}^{\omega}2$.

(7) Si X es T_2 y perfecto, $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$ y finito entonces A no es abierto.

Prueba. Sea β una base contable de X, ya que X es 2° numerable.

(1) Supongamos que $|A| > \aleph_o$.

Para $x \in A$, sea $V_x \in \beta$ tal que $|A \cap V_x| \leq \aleph_o$.

En particular, $\{V_x \mid x \in A\} \subseteq \beta$, es decir,

$|\beta| \geq |A| > \aleph_o$. Por lo que β no es contable.

Absurdo. Así, $|A| \leq \aleph_o$

(2) Sea $x \in$A-A'. Entonces existe $V_x \in \beta$ tal que $V_x \cap A = \{x\}$. Esto es $|V_x \cap A| \leq \aleph_o$.

Por (a), $| A\text{-}A'| \leq \aleph_o$.□

(3) ($\Rightarrow$) Sea $| A | > \aleph_o$. Supongamos que $C_A = \emptyset$.

Entonces $| A | \leq \aleph_o$ por el lema 3.9.

Esto contradice la hipótesis. Así $C_A \neq \emptyset$.

($\Leftarrow$) Sea $C_A \neq \emptyset$.

Entonces para algún $x \in X$ y cualquier $V \in N_x$,

$| V \cap A | > \aleph_o$. Como $V \cap A \subseteq A$ entonces $| A | > \aleph_o$.

(4) Si $x \in (A')^c$, entonces x es un punto aislado de A.

Por lo tanto, para algún $V \in \beta$ se tiene que $|A \cap V| < \aleph_o$.

Esto implica que $x \in (C_A)^c$.

Así, $(A')^c \subseteq (C_A)^c$, es decir, $C_A \subseteq A'$.

Para que C_A sea cerrado, demostraremos que $C_A' \subseteq C_A$.

Sea $x \in C_A'$ y $x \notin C_A$.

Entonces existe $V \in N_x$ tal que $| V \cap A | \leq \aleph_o$.

Como $x \in C_A'$ y $V \in N_x$, $V\text{-} \{x\} \cap C_A \neq \emptyset$.

Sea $y \in V\text{-} \{x\} \cap C_A$, entonces $| V \cap A | > \aleph_o$. Absurdo.

Por lo tanto, $C_A' \subseteq C_A$, es decir, C_A es cerrado.

Ahora demostraremos que C_A no tiene puntos aislados.

Supongamos que $C_A\text{-} C_A' \neq \emptyset$.

Esto significa que hay una $x \in C_A$ tal que $x \notin C_A'$.

Entonces existen $U \in C_A$ y $V \in N_x$ tales que

$V \cap C_A = \{x\}$ y $| V \cap A | > \aleph_o$.

Si $y \in V - \{x\}$, $y \notin C_A$ y, como $V \in N_y$, $| V \cap A | \leq \aleph_o$, absurdo. Así, C_A no tiene puntos aislados. Por lo tanto, C_A es perfecto. Por el lema 3.9, $| A\text{-}C_A | \leq \aleph_o$.

Si $| C_A \cap A | \leq \aleph_o$ entonces $| A | \leq \aleph_o$. Esto contradice que $| A | > \aleph_o$. Por lo tanto, $| C_A \cap A | > \aleph_o$.

(5) Sean $B = C_A$ y $C = A\text{-}C_A$. B es perfecto y C es contable.

Como A es cerrado, $B \subseteq A$. Claramente $A = B \cup C$.

(6) Ver [2].

(7) Supongamos que A es abierto.

Entonces $M = \{n \in \mathbb{N} \mid |A| = n > 0$ y A es abierto$\} \neq \emptyset$.

Por el PBO, existe el mínimo de M.

Sean m dicho mínimo y $C = \{x_1, \ldots, x_m\}$.

$m \neq 1$, porque de lo contrario X tendría un punto aislado y X no sería perfecto. Absurdo. Entonces $m > 1$.

Como X es T_2 existe un abierto U tal que $U \cap C = \{x_1, \ldots, x_{m-1}\}$.

Pero $|\{x_1, \ldots, x_{m-1}\}| = m-1 < m$ lo que implica que m no es mínimo.□

Veamos ahora algunos conceptos compacidad.

Definición 3. Sea (x_n) una sucesión en X.

(a) (x_n) **converge** a x ($(x_n) \to x$) $\Leftrightarrow$ para todo $A \in N_x$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n \geq N$, $x_n \in A$.

(b) (y_k) es una **subsucesión** de (x_n) ($(y_k) \subseteq (x_n)$) $\Leftrightarrow$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$, $y_k = x_{n_k}$ y $n_k < n_{k+1}$.

(c) X es **Contablemente Compacto** (CC) $\Leftrightarrow$ toda cubierta abierta contable tiene una subcubierta finita.

(d) X es **Secuencialmente Compacto** (SC) $\Leftrightarrow$ toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente.

(e) X tiene la **Propiedad de Bolzano-Weierstrass** (BW) $\Leftrightarrow$ todo conjunto infinito tiene un punto de acumulación.

Observaciones:

-Si $(x_n) \to x$ y $(y_{n_k}) \subseteq (x_n)$ entonces $(y_{n_k}) \to x$.

-X es compacto $\Leftrightarrow$ X es contablemente compacto y de Lindelöf.

-Si X es compacto entonces X es contablemente compacto.

-Si X es contablemente compacto y 2° numerable entonces

X es compacto.

Lema 5. Sea $\langle$ X, τ $\rangle$ un espacio topológico.

(1) Si X es T_2 y 1° numerable. Son equivalentes (a)-(d):

(a) X es Compacto.

(b) X es Contablemente Compacto.

(c) X es Secuencialmente Compacto.

(d) X es BW.

(2) Si X es perfecto, T_2, de Baire, β es base de X y A $\subseteq$ X, entonces:

(a) para todo B $\in \beta$ - $\{\emptyset\}$, $|B| \geq \aleph_o$.

(b) para toda x $\in$ X, $\{x\}$ es denso en ninguna parte.

(c) Si A es un abierto no vacío entonces $|A| > \aleph_o$.

Prueba.

(1) ver [13].

(2) (a) Inmediato del lema 2.3.

(b) P.D. $\{x\}^{\circ} = \emptyset$.

Suponemos que $\{x\}^{\circ} \neq \emptyset$.

Entonces hay un B $\in \beta$ - $\{\emptyset\}$ tal que B $\subseteq \{x\}$.

Esto que implica que $|B| < \aleph_o$, lo que contradice a (a).

Como X es T_1, $\{x\}$ es cerrado.

Por tanto, $\{x\}$ es denso en ninguna parte.

(c) Suponemos que $|A| \leq \aleph_o$.

Por (b), A es magro y como X es de Baire, A es fronterizo.

Ya que A es abierto, A = $\emptyset$.

Esto contradice la hipótesis de que A $\neq \emptyset$.□

Veamos algunos conceptos de espacios métricos.

Definición 4. Sea X un conjunto no vacío y (x_n) una sucesión en X.

(a) d:$X^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **métrica** si cumple que, para toda x,y,z $\in$ X:

(i) $d(x,y) \geq 0$

(ii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$ y (iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Al par $\langle X,d \rangle$ se le conoce como un **espacio métrico**.

(b) Sea $\langle X,\tau \rangle$ un espacio topológico.

X es **metrizable** $\Leftrightarrow$ existe una métrica d en X tal que $\tau_d = \tau$.

(c) (x_n) es **de Cauchy** $\Leftrightarrow$ para toda $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n,m \geq N$, $d(x_n,x_m) < \epsilon$.

(d) X es **completo** $\Leftrightarrow$ cualquier sucesión de Cauchy en X es convergente.

Ejemplos y observaciones. Sea $\langle X,d \rangle$ un espacio métrico.

-Una vecindad de $x \in X$ como $V_\epsilon(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < \epsilon\}$ y $\beta = \{V_\epsilon(x) \mid x \in X \text{ y } \epsilon > 0\}$ es una base de τ_d, una topología en X.

-La **métrica discreta** es $d:X^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \neq y. \\ 0, \text{ si } x = y. \end{cases}$$

En este caso $V_\epsilon(x) = \{x\}$ y $\beta = \{\{x\} \mid x \in X\}$ base de la topología discreta.

-Si (x_n) es de Cauchy y $(y_{n_k}) \subseteq (x_n)$ entonces (y_{n_k}) es de Cauchy.

-Si (x_n) es de Cauchy, $(y_{n_k}) \subseteq (x_n)$ y $(y_{n_k}) \longrightarrow x$ entonces $(x_n) \longrightarrow x$.

Lema 6. Sea X un espacio métrico.

(1) X es un espacio topológico, T_2 y 1° numerable.

(2) X es 2° numerable $\Leftrightarrow$ X es separable $\Leftrightarrow$ X es Lindelöf.$\square$

Un espacio discreto es metrizable, según vimos en el ejemplo anterior.

Teorema (Urysohn, 1924). Si X es T_3 y 2° numerable entonces X es metrizable.□

Corolario 1. X es T_2-compacto. Entonces:

X es metrizable $\Leftrightarrow$ X es 2° numerable.

Prueba.
($\Rightarrow$) Como X es compacto, X es Lindelöf .
Por el lema 5.b, X es 2° numerable.
($\Leftarrow$) Como X es T_2-compacto, X es T_3.
Por el Teorema de Urysohn, X es metrizable.□
Corolario 2. Si X es métrico y compacto entonces X es completo.
Prueba. Inmediato del lema 5 y lema 4.4.□

Ejemplo. Si X es de Cantor entonces X es 2° numerable, 1° numerable, separable, de Lindelöf, de Stone, totalmente disconexo y metrizable. Por la proposición 2.10.7, X es de Baire y de 2ª categoría. Por el corolario 2, X es métrico y completo.
Veamos lo que ocurre con las álgebras booleanas contables y sus espacios de Stone.

Proposición 3. Sea B un álgebra booleana, $|\ B\ | \leq \aleph_o$ y $A \subseteq S(B)$. Entonces,

(1) S(B) es 2° numerable, separable, $|S(B)| \leq 2^{\aleph_o}$, métrico y completo.

(2) B es densa $\Leftrightarrow$ S(B) es de Cantor.

(3) Si B y C son densas y $|B| = |C| = \aleph_o$ entonces $B \cong C$.

(4) $|B| < \aleph_o \Leftrightarrow S(B)$ es discreto.

(5) En S(B) valen los incisos (a)-(d) del lema 5.1.

(6) $U \in A\text{-}A' \Leftrightarrow U$ es principal.

(7) Si $U \in C_A$ entonces U es no-principal.

(8) Si B es densa y $x \in B\text{-}\{0\}$ entonces $|p(x)| > \aleph_o$.

(9) Si $|S(B)| > \aleph_o$ entonces vale el teorema de Cantor-Bendixon.

Prueba.

(1) Como β es base de S(B), $\beta \cong B$ y B es contable, β es contable. Por lo tanto, S(B) es 2° numerable.

Entonces:

Como S(B) es T_2, por la proposición 2.10.8, $|S(B)| \leq 2^{\aleph_o}$.

S(B) es metrizable, 1° numerable y separable.

Del corolario 2, S(B) es métrico y completo.

(2) Inmediato de la proposición 1.

(3) Inmediato del lema 4 y Dualidad.

(4) ($\Rightarrow$) Inmediato de la proposición 2.8 y 2.4.

($\Leftarrow$) Un espacio discreto compacto debe ser finito.

Entonces S(B) es finito y, por la proposición 2.7, $|B| < \aleph_o$.

(5) Inmediato del lema 5.4.

(6) Inmediato de la proposición 1.1.

(7) Si $U \in C_A$ entonces U no es un punto aislado de A.

Así U es no-principal, por (6).

(8) Inmediato del lema 2.3.

(9) Inmediato del lema 4.4.□

Veamos algunos ejemplos:

-Como B_N es atómica y no es completa, $S(B_N)$ es 2°

numerable, separable con un denso de puntos aislados, no es extremadamente disconexo, no es de Cantor.
Como $S(B_N)' = \emptyset$, $S(B_N)$-$S(B_N)'$ es denso y $S(B_N)$ es un conjunto de puntos aislados.
-Ya que $\mathbb{L}$ es densa y no es completa, $S(\mathbb{L})$ es de Cantor pero no es extremadamente disconexo, tiene puntos de condensación los cuales no son principales, $C_{S(\mathbb{L})} \neq \emptyset$, $S(\mathbb{L})$-$S(\mathbb{L})' = \emptyset$.
-Si B es finita entonces S(B) es discreto y metrizable y la métrica es la discreta. S(B) no tiene puntos de condensación y tiene un conjunto denso de puntos aislados.
-Si B es contable y no es atómica entonces $|S(B)| = 2^{\aleph_0}$, por las proposiciones 1.7 y 3.1. Por el lema 4.3, $C_{S(B)} \neq \emptyset$.

Con la hipótesis de la proposición 3 en S(B) vale el Teorema de Heine-Borel.

CAPÍTULO 4

LÓGICA DE PRIMER ORDEN

Presentamos las nociones básicas de la lógica de predicados sin necesidad de un cálculo deductivo. El material presentado aquí será usado en todos los capítulos siguientes.

Lenguaje formal y estructuras

Definición 1. Un lenguaje formal de primer orden L es un conjunto de símbolos, los cuales son:

(a) **Símbolos Lógicos:**

$\neg$ (negación), $\wedge$ (conjunción) , $\exists$ (cuantificador existencial), $\approx$ (igualdad) y un conjunto de variables $\{ x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$.

(b) **Símbolos de Agrupación:**), (.

(c) **Símbolos No-lógicos.**

Es la unión de tres conjuntos ajenos dos a dos:

- símbolos de predicado $P = \{ P_i \mid i \in I\}$, donde a cada $i \in I$ le corresponde $a(i) \in \mathbf{N}$, llamado la aridad de P_i.

- símbolos funcionales $F = \{ f_j \mid j \in J\}$, donde a cada $j \in J$ le corresponde $a(j) \in \mathbf{N}$ llamado la aridad de f_j.

- símbolos constantes $C = \{c_k \mid k \in K\}$.

I, J o K pueden ser vacíos.

En la práctica todos los lenguajes que usaremos tienen símbolos lógicos y de agrupación. Al conjunto de los símbolos no-lógicos, $P \cup F \cup C$, se le conoce como: **tipo de semejanza.**
Nos referiremos al "lenguaje formal de primer orden" simplemente como "lenguaje formal".
Denotamos el lenguaje formal por $L = SL \cup P \cup F \cup C$, donde:

$SL = \{\neg, \wedge, \exists, \approx,), (\} \cup \{ x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$

La cardinalidad de L es: $| L | = \aleph_0 + | P | + | F | + | C |$.

Definición 2. Sea L un lenguaje formal.

(a) **Expresiones.** Cualquier sucesión finita de símbolos de L.
Exp denota al conjunto de todas las expresiones en el lenguaje L.

(b) **Término.** Un término se construye con las siguientes reglas:
-Toda variable y toda constante es un término,
-Si $a(j) = n$ y $t_1,\ldots,t_n$ son términos entonces $f_j(t_1 \ldots t_n)$ es un término.
-Son todos.

(c) **Término constante.** Es un término sin variables.

(d) **Fórmula Atómica.** Una fórmula atómica se obtiene como sigue:
-Si t_1, t_2 son términos entonces $(t_1 \approx t_2)$ es una fórmula atómica,
-Si $a(i) = n$ y $t_1,\ldots,t_n$ son términos entonces $P_i(t_1,\ldots,t_n)$ es una fórmula atómica.
-Son todas.

(e) **Fórmula Bien Formada.** Una fórmula bien formada se obtiene como sigue:
-Cualquier fórmula atómica es una fórmula bien formada,
-Si φ, ψ son fórmulas bien formadas y x_i es una variable entonces $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\exists x_i \varphi$ son fórmulas bien formadas.
(omitimos escribir los paréntesis, siempre que no exista ambigüedad y por "fórmula" entenderemos "fórmula bien formada").
-Son todas.

Sea φ una fórmula.

(f) **El alcance del cuantificador** "$\exists x_i$" en $\ldots\exists x_i\varphi\ldots$ es φ.

(g) x_i **ocurre ligada** en $\varphi \Leftrightarrow x_i$ es la variable de algún cuantificador "$\exists x_i$" o x_i está dentro del alcance de algún cuantificador de la forma

"$\exists x_i$" que ocurra en φ.

(h) x_i **ocurre libre** en $\varphi \Leftrightarrow x_i$ no ocurre ligada en φ.

(i) Un **enunciado** es una fórmula bien formada sin variables libres.

Cuando decimos "son todos" queremos expresar lo siguiente: cualquier expresión obtenida por las reglas anteriores en un número finto de pasos es un término.
Similarmente para las fórmulas atómicas y fórmula bien formadas.
Verifíquese que los términos y las fórmulas son expresiones.
Sean φ y ψ fórmulas, definimos:

$\varphi \vee \psi = \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$, disyunción,

$\varphi \rightarrow \psi = \neg\varphi \vee \psi$, implicación material,

$\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi)\wedge(\varphi \rightarrow \psi)$, bicondicional,

$\forall x_i\varphi = \neg\exists x_i\neg\varphi$, cuantificador universal.

Ejemplo. Sea L = {P,f,g,c,d} donde la aridad de P, f y g es dos.

Son términos: $f(c,d)$, x_3, $g(x_5,d)$, c, d, $f(g(c,d), x_{11})$, etc.

Son términos constantes: c, d, $f(c,c)$, $g(d,c)$, etc.

Son fórmulas atómicas: $c \approx d$, $f(c,d) \approx g(x_{51},x_{23})$, $P(c,g(d,x_7))$, etc.

Son fórmulas: $\neg P(c,g(d,x_7))$, $\exists x_2 P(x_2,x_9) \rightarrow f(c,d) \approx g(x_{51},x_{23})$, etc.

Son enunciados: $c \approx d$, $P(c,d)$, $\exists x_2 P(x_2,x_2)$, $\neg\forall x_1 \exists x_2 P x_1 x_2$,
$\forall x_1 \exists x_2 (g(x_1,x_2) \approx d)$, etc.

Si $\varphi = \exists x_1 P(x_1,x_2) \rightarrow (g(x_1,x_3) \approx c)$ entonces x_2 y x_3 ocurren libres en φ y x_1 ocurre libre (las dos primeras ocurrencias de x_1) y ligada (la tercera ocurrencia) en φ, porque el alcance del cuantificador existencial es $P(x_1,x_2)$.

En estos lenguajes formales tenemos la ventaja de poseer un método de prueba y una forma de definir conceptos, llamado **por recursión**. Esto significa que si P es una propiedad que debe valer para todos los términos entonces procedemos como sigue: primero se verifica que las variables y las constantes tienen la propiedad P y luego verificamos que si $t_1,\ldots,t_n$ son términos que tienen la propiedad P y

f es un símbolo funcional de aridad n entonces $f(t_1 \ldots t_n)$ también, tiene la propiedad P.
A esto se le llama inducción en la formación de términos.
Similaramente, la inducción en la formación de fórmulas.
La complejidad de una fórmula es el número de conectivos que interviene en la escritura de dicha fórmula. Así, una fórmula atómica tiene complejidad 0. Para demostrar alguna propiedad sobre todas la fórmulas lo haremos por inducción en la complejidad, lo que equivale a la inducción en fórmulas.
Los lenguajes formales se utilizan para hablar de estructuras matemáticas. Las variables y constantes representan elementos de un conjunto dado no vacío. Los símbolos de predicado y funcionales hablarán de operaciones y relaciones en este conjunto. El conjunto junto con sus relaciones y operaciones forman dicha estructura y sólo estos símbolos del lenguaje formal. A esto decimos que la estructura es adecuada al lenguaje, es decir, una L-estructura. Definimos esto formalmente.

Definición 3. Sea L un lenguaje formal.
Una **L-estructura** es $\langle A, \{P_i^{\mathbf{A}}\}_{i \in I}, \{f_j^{\mathbf{A}}\}_{j \in J}, \{c_k^{\mathbf{A}}\}_{k \in K} \rangle$, donde:

(a) Un conjunto no vacío A, llamado el dominio o universo de la estructura.

(b) para cada $i \in I$, $P_i^{\mathbf{A}}$ es una relación a(i)-aria en A, $P_i^{\mathbf{A}} \subseteq A^{a(i)}$.

(c) para cada $j \in I$, $f_j^{\mathbf{A}}$ es una operación a(j)-aria en A, $f_j^{\mathbf{A}}: A^{a(j)} \to A$.

(d) para cada $k \in K$, $c_k^{\mathbf{A}} \in A$.

La estructura se denotará por:
$\mathbf{A} = \langle A, \{P_i^{\mathbf{A}}\}_{i \in I}, \{f_j^{\mathbf{A}}\}_{j \in J}, \{c_k^{\mathbf{A}}\}_{k \in K} \rangle$.
La cardinalidad de $\mathbf{A}$ es $|A|$.
Si $P \cup F \cup C = \{s_1, \ldots, s_n\}$ entonces escribiremos la estructura como $\mathbf{A} = \langle A, s_1^{\mathbf{A}}, \ldots, s_n^{\mathbf{A}} \rangle$.
${}^{\omega}A$ denota al conjunto de todas las sucesiones en A.
Sea $s \in {}^{\omega}A$, definimos:
$s(j / b)(i) = s(i)$, si $i \neq j$ y $s(j / b)(j) = b$, si $i = j$.

Entonces s(i / d, j / e) = s(j / e, i / d).

Ejemplo. Sea L = {P,f,g,c,d} donde la aridad de P, f y g es dos.

Entonces: $\mathbf{A} = \langle \mathbb{Z}, \leq, +, \cdot, 0,1 \rangle$, $\mathbf{B} = \langle \mathbb{Q}, \leq, +, \cdot, 0,1 \rangle$, $\mathbf{C} = \langle \mathbb{R}, \leq, +, \cdot, 0,1 \rangle$ **y** $\mathbf{D} = \langle P(X), \subseteq, \cup, \cap, \emptyset, X \rangle$ **son L-estructuras.**

Semántica

Sean L un lenguaje formal y una L-estructura A.
Necesitamos saber el significado de los términos y de las fórmulas en dicha estructura. Esto lo definiremos recursivamente.
Primero veremos qué elemento de A es nombrado por cada término de L, por medio de las sucesiones de elementos de la L-estructura.

Definición 4. La interpretación de t en A respecto a s ($t^{\mathbf{A}}[s]$)**.**
Sean t un término, $x_1,\ldots,x_n$ **variables, A una L-estructura y** $s \in {}^{\omega}A$**.**

(a) Si $t = x_i$ entonces $x_i^{\mathbf{A}}[s] = s_i$.
(b) Si $t = c$ entonces $c^{\mathbf{A}}[s] = c^{\mathbf{A}}$.
(c) Si $t = f(t_1,\ldots,t_n)$ entonces $f(t_1,\ldots,t_n)^{\mathbf{A}}[s] = f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[s],\ldots,t_n^{\mathbf{A}}[s])$.

Verifique el lector que:

$t^{\mathbf{A}}[s] \in A$, **para todo término t y** $t^{\mathbf{A}}[s] = t^{\mathbf{A}}$, **para todo término constante.**

Ahora veremos cómo encontrar el significado de las fórmulas de L en la estructura A, utilizando para esto las sucesiones de elementos en A.

Definición 5. φ **es satisfacible (realizable) en A respecto a s.**
($\mathbf{A} \models \varphi\ [s]$). **Sea** φ **una fórmula, A una L-estructura y** $s \in {}^{\omega}A$**.**

(a) Si $\varphi = (t_1 \approx t_2)$ entonces $\mathbf{A} \models \varphi[s] \Leftrightarrow t_1^{\mathbf{A}}[s] = t_2^{\mathbf{A}}[s]$.
(b) Si $\varphi = P(t_1 \ldots t_n)$ entonces $\mathbf{A} \models \varphi[s] \Leftrightarrow P^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[s],\ldots,t_n^{\mathbf{A}}[s])$.
(c) Si $\varphi = \neg\psi$ entonces $\mathbf{A} \models \varphi[s] \Leftrightarrow \mathbf{A} \not\models \psi[s]$.
(d) Si $\varphi = \psi \wedge \chi$ entonces $\mathbf{A} \models \varphi[s] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \psi[s]$ y $\mathbf{A} \models \chi[s]$.
(e) Si $\varphi = \exists x_i \psi$ entonces $\mathbf{A} \models \varphi[s] \Leftrightarrow$ existe $d \in A$ tal que $\mathbf{A} \models \psi[s(\ i\ /\ d)]$.

Una vez que sabemos el significado de una fórmula podemos saber su valor de verdad. Éste puede cambiar con las sucesiones o ser constante dentro de la estrucutra.

Definición 6. Sean φ una fórmula y $\mathbf{A}$ una L-estructura.

(a) φ **es satisfacible (realizable) en A** $\Leftrightarrow$ hay una $s \in {}^{\omega}A$ tal que $\mathbf{A} \models \varphi\ [s]$.

(b) φ **es verdadera en A** $(\mathbf{A} \models \varphi)$ $\Leftrightarrow$ para toda $s \in {}^{\omega}A$, $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$.

(c) φ **es falsa en A** $\Leftrightarrow$ para toda $s \in {}^{\omega}A$, $\mathbf{A} \not\models \varphi[\bar{a}]$.

(d) φ **es universalmente válida** $\Leftrightarrow$ para toda $\mathbf{A}$, φ es verdadera en $\mathbf{A}$.

(e) φ **es una contradicción** $\Leftrightarrow$ para toda $\mathbf{A}$, φ es falsa en $\mathbf{A}$.

Ejemplo. Sean φ,ψ,χ fórmulas..
Las siguientes son fórmulas universalmente válidas:
$\forall x(x \approx x)$, $\forall x \forall y\ (x \approx y \rightarrow y \approx x)$ y
$\forall x \forall y \forall z\ (x \approx y \wedge y \approx z \rightarrow x \approx z)$.
En el apéndice 1 hay una lista de otras universalmente válidas.

Proposición 1. Sean t un término; ψ,χ fórmulas; φ un enunciado; $\mathbf{A}$ una L-estructura y $s,s' \in {}^{\omega}A$.

(1) Si para toda x_i que ocurre en t, $x_i^{\mathbf{A}}\ [s] = x_i^{\mathbf{A}}\ [s']$. Entonces $t^{\mathbf{A}}[s] = t^{\mathbf{A}}[s']$.

(2) Si $s = s'$ entonces, $\mathbf{A} \models \psi[s] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \psi[s']$.

(3) $\mathbf{A} \models \psi[s]$ o $\mathbf{A} \models \neg\psi[s]$, pero no a ambas.

(4) $\mathbf{A} \models \varphi[s] \Leftrightarrow$ para toda $s' \in {}^{\omega}A$, $\mathbf{A} \models \varphi[s']$. En tal caso escribiremos $\mathbf{A} \models \varphi$.

(5) Satisfacción con los conectivos $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ y $\forall$.

(a) $\mathbf{A} \models \psi \vee \chi[s] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \psi[s]$ o $\mathbf{A} \models \chi[s]$.

(b) $\mathbf{A} \models \psi \rightarrow \chi[s] \Leftrightarrow \mathbf{A} \not\models \psi[s]$ o $\mathbf{A} \models \chi[s]$.

(c) $\mathbf{A} \models \psi \leftrightarrow \chi[s] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \psi \rightarrow \chi[s]$ y $\mathbf{A} \models \chi \rightarrow \psi[s]$.

(d) $\mathbf{A} \models \forall x_i \psi[s] \Leftrightarrow$ para todo $b \in A$, $\mathbf{A} \models \psi[s(i/b)]$.

(6) Modus Ponens.

(a) Si $\mathbf{A} \models \psi \to \chi[s]$ y $\mathbf{A} \models \psi[s]$ entonces $\mathbf{A} \models \chi[s]$.

(b) Si $\mathbf{A} \models \psi \to \chi$ y $\mathbf{A} \models \psi$ entonces $\mathbf{A} \models \chi$.

(c) Si $\models \psi \to \chi$ y $\models \psi$ entonces $\models \chi$.

(7) Si φ es un enunciado entonces $\mathbf{A} \models \varphi$ o $\mathbf{A} \models \neg\varphi$, pero no ambos.

Prueba. Ver apéndice 1.□

Nótese que:

-Si φ es un enunciado y $\mathbf{A}$ es una L-estructura entonces φ es satisfacible en $\mathbf{A} \Leftrightarrow \varphi$ es verdadero en $\mathbf{A}$.

- Universalmente válida $\Rightarrow$ verdadera (en una estructura) $\Rightarrow$ satisfacible.

-φ es falsa en $\mathbf{A} \Leftrightarrow \neg\varphi$ es verdadera en $\mathbf{A}$.

-φ es universalmente válida $\Leftrightarrow \neg\varphi$ es una contradicción.

Ejemplo. Sean $L = \{P, f, g, c, d\}$, donde la aridad de P, f y g es dos.

Si $\mathbf{A} = \langle \mathbf{Z}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ entonces $P^{\mathbf{A}} = \leq$, $f^{\mathbf{A}} = +$, $g^{\mathbf{A}} = \cdot$, $c^{\mathbf{A}} = 0$, $d^{\mathbf{A}} = 1$, $s_1(n) = 2n$, $s_2(n) = 2n+1$ y $s_3(n) = 5$, para toda $n \in \mathbf{Z}$ entonces:

$f(c,d)^{\mathbf{A}}[s_1] = f(c,d)^{\mathbf{A}}[s_2] = 1$, $f(x_1,x_2)^{\mathbf{A}}[s_1] = 2 + 4 = 6$, $f(x_1,x_2)^{\mathbf{A}}[s_2] = 3 + 5$, $\mathbf{A} \not\models x_1 \approx x_2[s_1]$, $\mathbf{A} \not\models P(x_3, x_1)[s_1]$, $\mathbf{A} \models x_1 \approx x_2[s_3]$, $\mathbf{A} \models P(x_1, x_2)[s_3]$, $\mathbf{A} \models (c \not\approx d)$, $\mathbf{A} \models \exists x_1(f(g(x_1,x_1),c)) \approx c)$ y $\mathbf{A} \not\models \exists x_1(f(g(x_1,x_1),f(d,d)) \approx c)$.

Como el lector notará, la escritura y la lectura de fórmulas es muy difícil. En la práctica se acostumbra lo siguiente:

$L = \{\leq , +, \cdot , 0, 1\}$, "$f(c,d)$" es "$0 + 1$" y "$\exists x_1(f(g(x_1,x_1),f(d,d)) \approx c)$" es "$\exists x_1(x_1^2 + 2 \approx 0)$".

Esto es un abuso de notación pero más fácil de entender, siempre que no exista ambigüedad o algún otro problema.

Modelos y Consecuencia Lógica

En lo que sigue trabajaremos con enunciados.

Definición 7. Sean $\Sigma \cup \{\varphi\}$ un conjunto de enunciados y $\mathbf{A}$ una L-estructura. Definimos:

(a) **$\mathbf{A}$ es modelo de Σ ($\mathbf{A} \models \Sigma$) $\Leftrightarrow$ para todo $\varphi \in \Sigma$, $\mathbf{A} \models \varphi$.**

(b) **Σ tiene modelo (Σ es satisfacible)** $\Leftrightarrow$ existe una $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A}$ es modelo de Σ.

(c) φ **es consecuencia lógica de Σ ($\Sigma \models \varphi$) $\Leftrightarrow$ para** todo $\mathbf{A}$, si $\mathbf{A} \models \Sigma$ entonces $\mathbf{A} \models \varphi$.

(d) Σ **es completo $\Leftrightarrow$ para** todo φ enunciado, $\Sigma \models \varphi$ o $\Sigma \models \neg\varphi$.

(e) φ **es independiente de Σ $\Leftrightarrow$ $\Sigma \not\models \varphi$ y $\Sigma \not\models \neg\varphi$.**

Observaciones:

-Si $\Sigma = \emptyset$ entonces escribiremos " $\models \varphi$ " en lugar de "$\emptyset \models \varphi$ ".

-Si $\Sigma = \emptyset$ entonces $\emptyset$ tiene modelo.

-Si φ es un enunciado entonces $\models \varphi \Leftrightarrow \varphi$ es universalmente válida.

-Σ tiene modelo $\Leftrightarrow$ para todo $\Delta \subseteq \Sigma$, Δ tiene modelo.

-Si $\{\varphi,\neg\varphi\} \subseteq \Delta$ entonces ambos conjuntos no tienen modelo.

Proposición 2. Sean Σ y Δ conjuntos de enunciados y $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, ψ son enunciados. Entonces:

(1) Si $\varphi \in \Sigma$ entonces $\Sigma \models \varphi$.

(2) Si $\Sigma \models \varphi$ y $\Sigma \subseteq \Delta$ entonces $\Delta \models \varphi$.

(3) $\Sigma \models \varphi_i$, para $1 \leq i \leq n \Leftrightarrow \Sigma \models \bigwedge_{i=1}^{k} \varphi_i$.

(4) Σ no tiene modelo $\Leftrightarrow$ existe φ un enunciado tal que

$\Sigma \models \varphi \wedge \neg\varphi$.

(5) $\Sigma \not\models \varphi \Leftrightarrow \Sigma + \neg\varphi$ tiene modelo.

(6) Teorema de la Deducción, TD.

Si $\Sigma \models \varphi \rightarrow \psi$ y $\Sigma \models \varphi$ entonces $\Sigma \models \psi$.

(7) $\Sigma + \varphi \models \psi \Leftrightarrow \Sigma \models \varphi \rightarrow \psi$.

(8) Σ es un conjunto satisfacible.

Σ es completo $\Leftrightarrow$ para todo par de enunciados φ y ψ,

si $\Sigma \models \varphi \vee \psi$ entonces $\Sigma \models \varphi$ o $\Sigma \models \psi$.□

Ejemplo. Sean $L = \{P\}$, donde la aridad de P es dos y

$\Sigma = \{\forall x(Pxx), \forall x\forall y(Pxy \rightarrow Pyx)\}$.

Entonces $\Sigma \models \forall x(Pxx) \wedge \forall x\forall y(Pxy \rightarrow Pyx)$.

Sea $\varphi = \forall x\forall y\forall z(Pxy \wedge Pyz \rightarrow Pxz)$.

$A = \{a, b, c,\}$ y $P^{\mathbf{A}} = \Delta \cup \{(a,b), (b,c),(b,a), (c,b)\}$ y $\mathbf{A} = \langle A, P^{\mathbf{A}}\rangle$.

Donde Δ es la diagonal de A.

Si $\mathbf{B} = \langle \mathbb{Z}, P^{\mathbf{B}}\rangle$, donde $P^{\mathbf{B}} = \{(a,b) \mid$ a y b son congruentes módulo 4$\}$.

Entonces $\mathbf{A} \models \Sigma + \neg\varphi$ y $\mathbf{B} \models \Sigma + \varphi$, es decir, $\Sigma \not\models \varphi$ y $\Sigma \not\models \neg\varphi$.

Por lo tanto, φ es independiente de Σ y Σ es incompleto.

Si $\mathbf{A}$ es una L-estructura entonces definimos:
$Th(\mathbf{A}) = \{\varphi \mid \varphi$ es un anunciado y $\mathbf{A} \models \varphi\}$.
Entonces $\mathbf{A} \models Th(\mathbf{A})$ y $Th(\mathbf{A})$ es completo.
Si Δ tiene modelo y $Th(\mathbf{A}) \subseteq \Delta$ entonces $Th(\mathbf{A}) = \Delta$.
Éste es un ejemplo de un conjunto **maximalmente satisfacible**.

Proposición 3. Sea Σ un conjunto satisfacible de enunciados.

(1) Σ es maximal satisfacible. $\Sigma \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Sigma$.

(2) Si Σ es completo entonces Σ es maximal satisfacible.

(3) Son equivalentes (a)-(c):

(a) Σ es maximal satisfacible.

(b) para todo enunciado φ, $\varphi \in \Sigma$ o $\neg\varphi \in \Sigma$.

(c) Para cualesquiera enunciados φ,ψ, si $\varphi \vee \psi \in \Sigma$ entonces $\varphi \in \Sigma$ o $\psi \in \Sigma$.

(4) Σ es maximal satisfacible $\Leftrightarrow$ existe una L-estrucutra $\mathbf{A}$ tal que $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathbf{A})$.

Prueba. Ver el apéndice 1.□

Conjuntos finitamente satisfacibles

Trabajaremos con la satisfacción de conjuntos finitos de enunciados.

Definición 8. Sean Σ un conjunto de enunciados y φ un enunciado.

(a) Σ **es finitamente satisfacible** $\Leftrightarrow$ para todo $\Sigma_o \subseteq \Sigma$ finito, Σ_o tiene modelo.

(b) φ **es consecuencia lógica finita de** Σ ($\Sigma \models_o \varphi$) $\Leftrightarrow$ hay un $\Sigma_o \subseteq \Sigma$ finito tal que $\Sigma_o \models \varphi$.

Observaciones.
-Si Σ tiene modelo entonces Σ es finitamente satisfacible.
-$\emptyset$ es finitamente satisfacible.
-Si es un enunciado entonces $\models \varphi \Leftrightarrow \models_o \varphi$.
-Si $\Sigma \models_o \varphi$ entonces $\Sigma \models \varphi$. Si $\varphi \in \Sigma$ entonces $\Sigma \models_o \varphi$.
-Σ es completo $\Leftrightarrow$ para todo enunciado φ, $\Sigma \models_o \varphi$ o $\Sigma \models_o \neg\varphi$.

Proposición 4. Sea Σ un conjunto de enunciados.

(1) Son equivalentes:

(a) Σ es finitamente satisfacible.

(b) para todo $\Delta \subseteq \Sigma$, Δ es finitamente satisfacible.

(2) Si Σ es finitamente satisfacible entonces para cualquier enunciado φ, $\Sigma + \varphi$ o $\Sigma + \neg\varphi$ es finitamente satisfacible.

(3) Si $\{\Sigma_i\}_{i \in I}$ es una cadena de finitamente satisfacibles entonces $\cup_{i \in I}\Sigma_i$ es finitamente satisfacible.

(4) $\Sigma \not\models_o \varphi \Leftrightarrow \Sigma + \neg\varphi$ es finitamente satisfacible.

(5) Si Σ es maximal finitamente satisfacible entonces Σ es completo.

(6) Si Σ es finitamente satisfacible y $\Sigma \models_o \varphi$ entonces $\Sigma \not\models_o \neg\varphi$.

Prueba. (4), y (6) para el lector.

(1) (a) $\Rightarrow$(b) Sean $\Delta \subseteq \Sigma$ y $\Delta_o \subseteq \Delta$ finito.
Entonces $\Delta_o \subseteq \Sigma$ y Σ es finitamente satisfacible, Δ_o tiene modelo.
Así Δ es finitamente satisfacible.
(b) $\Rightarrow$(a) Obvio.
(2) Sea φ un enunciado. Por contrapositiva.
Si $\Sigma + \varphi$ y $\Sigma + \neg\varphi$ no son finitamente satisfacibles.
Entonces existen $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq \Sigma$ finitos tales que $\Sigma_1 + \varphi$ y $\Sigma_2 + \neg\varphi$ no tienen modelo.
Por la proposición 2.5, $\Sigma_1 \models \neg\varphi$ y $\Sigma_2 \models \varphi$.
Es claro que $\Sigma_o = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ es finito.
Por la proposición 2.2, $\Sigma_o \models \varphi \wedge \neg\varphi$.
Por la proposición 2.4, Σ_o no tiene modelo y Σ no es finitamente satisfacible.
Compare este resultado con la proposición 2.6.
(3) Sea $\Delta = \{\varphi_1,...,\varphi_n\} \subseteq \cup_{i \in I}\Sigma_i$.
Para $1 \leq k \leq n$, hay un $i_k \in I$ tal que $\varphi_{i_k} \in \Sigma_{i_k}$.
Como estos pertenecen a una cadena existe el $\text{máx}\{\Sigma_{i_1},..., \Sigma_{i_n}\} = \Sigma_j$. Pero $\Delta \subseteq \Sigma_j$ y es finitamente satisfacible, Δ tiene modelo.
(5) Por reducción al absurdo y (4).
(6) De lo contrario Σ no sería finitamente satisfacible.$\square$

Consideremos el siguiente conjunto:

$$S = \{\Sigma \mid \Sigma \text{ es un conjunto de enunciados finitamente satisfacible}\}.$$

Entonces $\langle S, \subseteq \rangle$ es un copo. ?'Hay maximales aquí?
Veamos que sí y que un conjunto finitamente satisfacible siempre está contenido en uno de estos.

Teorema IV. Teorema de Extensión de Lindenbaum.

Sea Σ un conjunto de enunciados.
Si Σ es finitamente satisfacible entonces existe un conjunto de enunciados Γ tal que $\Sigma \subseteq \Gamma$ y Γ es finitamente satisfacible y completo.

Prueba.(**AE**)

Sea $M_\Sigma = \{ \Psi \mid \Psi$ es un conjunto finitamente satisfacible y $\Sigma \subseteq \Psi\}$.
Es claro que $\Sigma \in M_\Sigma$ y $M_\Sigma \subseteq S$.
Entonces $M_\Sigma \neq \emptyset$ y $\langle M_\Sigma, \subseteq \rangle$ es un copo.
Por la proposición 4.3, cualquier cadena aquí tiene una cota superior. Por el lema de Zorn, hay un $\Gamma \in M_\Sigma$ tal que Γ es maximal. Γ también es maximal en $\langle S, \subseteq \rangle$.
Si Γ no es completo, existe un enunciado φ tal que $\Gamma \not\models \varphi$ y $\Gamma \not\models \neg\varphi$. Entonces, $\Gamma + \neg\varphi$ y $\Gamma + \varphi$ tienen modelo.
En particular, son finitamente satisfacibles y ambos contienen a Σ. De esto obtenemos, por ejemplo, que $\Gamma + \varphi \in M_\Sigma$ y $\Gamma \subseteq \Gamma + \varphi$. Como Γ es maximal, $\varphi \in \Gamma$, es decir, $\Gamma \models \varphi$.
Contradicción. Para el otro caso es análogo.
Por la proposición 4.5, Γ es completo.$\square$

Estructuras y Modelos Canónicos

Sea L un lenguaje formal y C el conjunto de constantes en L.
A continuación veremos una técnica muy usada en lógica que es la construcción de modelos por medio de constantes.
Primero necesitamos el concepto de sustitución en términos y en fórmulas. Por ejemplo, si u es un término, x una variable que ocurre en u y t es otro término entonces sustituimos la variable x, por el

término t en u. La sustitución posiblemente no sea en todas las ocurrencias de x.
Definimos recursivamente esta sustitución como sigue.

Definición 9. Definimos la sustitución en términos y fórmulas.

(a) **Sustitución de x por t en u (u_t^x).**

Sean u,t términos, φ una fórmula y x una variable libre de φ.

-Si $u = x_j$ entonces $x_{jt}^x = \begin{cases} t, \text{ si } x = x_j. \\ x_j, \text{ si } x \neq x_j \end{cases}$

-Si $u = c$ entonces $c_t^x = c$.

-Si $u = f(t_1 \ldots t_n)$ entonces $f(t_1 \ldots t_n)_t^x = f(t_{1t}^x \ldots t_{nt}^x)$.

(b) **Sustitución de x por t en φ (φ_t^x).**

-Si $\varphi = (t_1 \approx t_2)$ entonces $(t_1 \approx t_2)_t^x = t_{1t}^x \approx t_{2t}^x$.

-Si $\varphi = P(t_1 \ldots t_n)$ entonces $P(t_1 \ldots t_n)_t^x = P(t_{1t}^x \ldots t_{nt}^x)$.

-Si $\varphi = (\neg\psi)$ entonces $(\neg\psi)_t^x = \neg(\psi_t^x)$.

-Si $\varphi = (\psi \wedge \chi)$ entonces $(\psi \wedge \chi)_t^x = \psi_t^x \wedge \chi_t^x$.

-Si $\varphi = (\exists y\psi)$ entonces $(\exists y\psi)_t^x = \begin{cases} \exists y\psi & , \text{si } y = x \\ \exists y(\psi)_t^x & , \text{si } y \neq x \end{cases}$

(c) **t es libre para x en** $\varphi \Leftrightarrow$ todas las variables de t son libres en φ_t^x.

Sea x libre en φ. Cualquier constante "c" o variable "z" que no ocurra en φ, es un término libre para x en φ.

Lema 1. Sean u,t términos; x,y,z variables y φ,ψ fórmulas.
Las variables y, z no ocurren en u. Entonces:

(1) $(u_y^x)_z^y = u_z^x$ y $u_z^y = u$.

(2) $(\varphi \star \psi)_t^x = \varphi_t^x \star \psi_t^x$, para $\star \in \{\wedge\ ,\ \vee\ ,\ \rightarrow\ ,\ \leftrightarrow\}$.

(3) $(\forall y\psi)_t^x = \begin{cases} \forall y\ \psi & , \text{si } y = x. \\ \forall y(\psi)_t^x & , \text{si } y \neq x. \end{cases}$

Prueba. Ver apéndice 1.□

En adelante usaremos la notación de "$\varphi(t)$" en lugar de "φ^x_t".

Ejemplo. Sea $L = \{P,f,g,c,d\}$, donde la aridad de P, f y g es dos.

$f(x_1,c)^{x_1}_d = f(d,c)$, $f(x_1,c)^{x_3}_d = f(x_1,c)$,

$(\exists x_4 P(x_4,x_7))^{x_7}_c = \exists x_4 P(x_4,c)$,

$(\exists x_4 P(x_4,x_7))^{x_4}_c = \exists x_4 P(x_4,x_7)$.

Sea $\varphi = \exists x_4 P(x_4,x_7)$. Entonces:

x_7 ocurre libre en φ y x_4 ocurre ligada,

$\varphi^{x_7}_{f(x_1,x_3)} = \exists x_4 P(x_4,f(x_1, x_3))$ y las variables x_1, x_3 están libres aquí,

$\varphi^{x_7}_{g(x_7,x_4)} = \exists x_4 P(x_4, g(x_7, x_4))$ y la variable x_4 no está libre aquí.

Por lo tanto, $f(x_1, x_3)$ es libre para x_7 en φ, pero no $g(x_7, x_4)$.

Lema de Sustitución. Sean φ una fórmula; u, t términos, x_i ocurre libre en φ, $\mathbf{A}$ una L-estructura, $s \in {}^\omega A$ y $d = t^{\mathbf{A}}[s]$. Entonces:

(1) $(u^{x_i}_t)^{\mathbf{A}}[s] = u^{\mathbf{A}}[s(i\ /\ d)]$.

(2) $\mathbf{A} \models \varphi(t)[s] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi(x_i)[s(i\ /\ d)]$.

(3) Si t es libre para x_i en φ entonces $\models \forall x_i \varphi \rightarrow \varphi(t)$ y $\models \varphi(t) \rightarrow \exists x_i \varphi$.

(4) Si x_j es libre para x_i en φ entonces $\models \forall x_i \varphi(x) \leftrightarrow \forall x_j \varphi(x_j)$ y $\models \exists x_i \varphi(x) \leftrightarrow \exists x_j \varphi(x_j)$.

Prueba. Ver apéndice 1.□

Ejemplo. Sean $L = \{\leq, +, \cdot, 0, 1\}$, $\mathbf{A} = \langle \mathbf{Z}, \leq, +, \cdot, 0, 1\rangle$,

$s \in {}^\omega\mathbf{Z}$ tal que $s(i) = 2i$, $t = f(d,d)$ y $\varphi = x_1^2 - 4 \approx 0$. Entonces:

$t^{\mathbf{A}}[s] = 2$ y $\mathbf{A} \models \varphi(t)[s] \Leftrightarrow 2^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi\,[s(1/t^{\mathbf{A}}[s])]$.

$(f(x_1,d)^{x_1}_{g(d,d)})^{\mathbf{A}}\,[s] = f(g(d,d),d)^{\mathbf{A}}_{g(d,d)}\,[s] =$

$f^{\mathbf{A}}(g(d,d)^{\mathbf{A}}_{g(d,d)}\,[s], d^{\mathbf{A}}_{g(d,d)}\,[s]) = 2$ y

$f(x_1,d)^{\mathbf{A}}_{g(d,d)}\,[s(1/g(d,d)^{\mathbf{A}}[s])] = f^{\mathbf{A}}(g(d,d)^{\mathbf{A}}_{g(d,d)}\,[s], d^{\mathbf{A}}_{g(d,d)}\,[s]) = 2.$

Lema de Constantes. Sean $\varphi = \varphi(x_1)$ una fórmula con una variable libre, Σ un conjunto de enunciados, ψ un enunciado y c una constante en L que no ocurre en Σ ni en ψ ni en φ. Entonces:

(1) **Generalización Universal, GU.**

Si $\Sigma \models_o \varphi(c)$ entonces, para alguna variable x_i que no ocurre en φ, $\Sigma \models_o \forall x_i \varphi$.

(2) **Generalización Existencial, GE.**

Si $\Sigma \models_o \varphi(c)$ entonces $\Sigma \models_o \exists x_1 \varphi$.

(3) $\Sigma + \varphi(c) \models_o \psi \Leftrightarrow \Sigma + \exists x_1 \varphi \models_o \psi$.

(4) Si $\Sigma + \exists x_1 \varphi \rightarrow \varphi(c) \models_o \psi$ entonces $\Sigma \models_o \psi$.

(5) Si Σ es finitamente satisfacible entonces

$\Sigma + \exists x_1 \varphi \rightarrow \varphi(c)$ es finitamente satisfacible.

Prueba. Ver apéndice 1.□

Definición 10. Sean L, L' lenguajes formales y Σ un conjunto de L-enunciados. Entonces:

(a) **C es un conjunto de testigos para Σ en L** $\Leftrightarrow$ C es un conjunto de constantes en L y para toda $\varphi = \varphi(x)$ fórmula con una variable libre hay una $c \in C$ tal que $\Sigma \models_o \exists x \varphi \rightarrow \varphi(c)$.

(b) **Σ tiene testigos en L** $\Leftrightarrow$ hay un conjunto C de testigos para Σ en L tal que $C \subseteq L$.

(c) **L' es una extensión de L** $\Leftrightarrow L \subseteq L'$.

(d) Sean $L \subseteq L'$ lenguajes formales, Σ' un conjunto de L'-enunciados.

Σ' es una extensión conservativa de Σ $\Leftrightarrow \Sigma \subseteq \Sigma'$ y para todo ψ L-enunciado, si $\Sigma' \models \psi$ entonces $\Sigma \models \psi$.

El Lema de Constantes, (4), afirma que $\Sigma + \exists x_1 \varphi \rightarrow \varphi(c)$ es una extensión conservativa de Σ.
Cuando L es contable podemos numerar cualquier conjunto de expresiones. De esto nos habla el siguiente lema.

Lema 2. Si $| L | \leq \aleph_o$ y $g{:}L \rightarrow \mathbf{N}$ inyectiva entonces $| Exp | = \aleph_o$.□
Para g, basta tomar la que da [14], por ejemplo.
El siguiente resultado nos provee de suficientes testigos y se debe a L. Henkin,1949.

Teorema V. Teorema de Extensión de Henkin.

Sea Σ un conjunto de enunciados.
Si Σ es finitamente satisfacible entonces existe L_+ una extensión por constantes de L y existe Δ un conjunto de enunciados finitamente satisfacible con testigos en L_+ tal que $| L_+ | = | L |$ y $\Sigma \subseteq \Delta$.

Prueba. Ver apéndice 1.□

Ahora veamos cómo construir L-estructuras por medio de constantes.
En lo siguiente Σ será un conjunto de enunciados finitamente satisfacible y C es el conjunto de constantes de L no vacío.
Sean c,d $\in$ C . Definimos: $c \sim d \Leftrightarrow \Sigma \models_o (c \approx d)$.
Tal relación es de equivalencia en C.
Sea **X** el conjunto de todos los términos constantes en L.
Entonces $C \subseteq \mathbf{X}$ y $| \mathbf{X} | = | C | + | F | \cdot \aleph_o \leq | L |$.

Lema 3. Sean Σ un conjunto de enunciados finitamente satisfacible, C, **X** y $\sim$ como se definieron antes. Entonces:

(1) Si $t_1,...,t_n,s_1,...,s_n \in \mathbf{X}$ entonces son universalmente válidas:
$(\bigwedge_{i=1}^{n} (t_i \approx s_i) \rightarrow f(t_1...t_n) \approx f(s_1...s_n))$ y
$(\bigwedge_{i=1}^{n} (t_i \approx s_i) \rightarrow (P(t_1...t_n) \leftrightarrow P(s_1...s_n)))$.
(2) "$\sim$" es una relación de equivalencia en **X**.
(3) Si $t_1,...,t_n,s_1,...,s_n \in \mathbf{X}$ y para toda $i = 1,..,n$, $t_i \sim s_i$, entonces:
(a) $f(t_1...t_n) \sim f(s_1...s_n)$.

(b) $\Sigma \models_o P(t_1 \dots t_n) \Leftrightarrow \Sigma \models_o P(s_1 \dots s_n)$.

Prueba. Ver apéndice 1.□

Del lema 3.2 podemos definir lo siguiente:

$A = X / \sim = \{[t] \mid t \in X\}$, donde $[t] = \{ s \in X \mid t \sim s\}$,
$c^A = [c]$,
$f^A([c_1] \dots [c_n]) = [c] \Leftrightarrow \Sigma \models_o (f(c_1 \dots c_n) \approx c)$,
$P^A([c_1] \dots [c_n]) \Leftrightarrow \Sigma \models_o P(c_1 \dots c_n)$.

Por el lema 2.3, estas operaciones y relaciones estan bien definidas. Tenemos así una L-estrucutra conocida como la: **Estructura Canónica Asociada a Σ**:
$\mathbf{A}_\Sigma = \langle A, \{P_i^A\}_{i \in I}, \{f_j^A\}_{j \in J}, \{c_k^A\}_{k \in K} \rangle$.
Veamos qué propiedades tiene.

Lema 4. Sean Σ un conjunto de enunciados finitamente satisfacible, C el conjunto de constantes no vacío, $\mathbf{X}$ el conjunto de los términos constantes, $t \in \mathbf{X}$ y φ un enunciado. Entonces:

(1) Para todo $t \in \mathbf{X}$, $t^{\mathbf{A}_\Sigma} = [t]$.

(2) Para toda $a \in A$ existe $t \in \mathbf{X}$ tal que $t^{\mathbf{A}_\Sigma} = a$

(3) Si φ no tiene negación ni cuantificadores entonces $\mathbf{A}_\Sigma \models \varphi \Leftrightarrow \Sigma \models_o \varphi$.

(4) Si $\varphi = \neg\psi$, φ no tiene cuantificadores y $\Sigma \models_o \varphi$ entonces $\mathbf{A}_\Sigma \models \varphi$.

(5) Si $\varphi = \exists x_i \psi$, φ no tiene el símbolo de negación y $\mathbf{A}_\Sigma \models \varphi$ entonces $\Sigma \models_o \varphi$.

(6) $|\mathbf{A}_\Sigma| \leq |\mathbf{X}| \leq |\mathbf{L}|$.

Prueba. Ver apéndice 1.□
En el lema 4, no podemos asegurar los regresos de (4) y (5), porque en el primer caso Σ puede no ser completo y en el segundo caso Σ puede no tener testigos en L. De esto, $\mathbf{A}_\Sigma$ no necesariamente es un modelo de Σ.

El siguiente resultado nos garantiza que la propiedad de tener testigos se preserva bajo extensiones completas.

Lema 5. Sean Δ, Γ conjuntos de enunciados finitamente satisfacibles tales que $\Delta \subseteq \Gamma$, Δ tiene testigos en L y Γ es completo. Entonces Γ tiene testigos en L.
Prueba. Ver apéndice 1.□
El siguiente resultado, debido a Henkin (1949), asegura cuándo la estructura canónica sí es un modelo de Σ.

Teorema VI. Teorema de Existencia de Modelo.
Si Σ es un conjunto de enunciados finitamente satisfacible, completo y con testigos en L entonces existe una L-estructura $\mathbf{A}$ tal que:

(1) para toda $a \in A$ hay una $c \in L$ tal que $c^{\mathbf{A}} = a$.
(2) $|\mathbf{A}| \leq |L|$.
(3) $\mathbf{A} \models \Sigma$.

Prueba.

Sean $\mathbf{A} = \mathbf{A}_\Sigma$, $a \in A$ y X el conjunto de todos los términos constantes.
Como Σ tiene testigos en L, existe una $c \in C$ tal que $a = [c] = c^{\mathbf{A}}$.
Por el lema 3.6, $|A| = |\mathbf{A}_\Sigma| \leq |X| \leq |L|$.
Sólo falta verificar los regresos de (4) y (5) del lema 3.
Primero veamos el regreso de (4):
$\mathbf{A} \models \neg\psi \Rightarrow \mathbf{A} \not\models \psi \Rightarrow \Sigma \not\models_o \psi \Rightarrow \Sigma \models_o \neg\psi$, porque Σ es completo.
Veamos ahora el regreso de (5) y supongamos que $\Sigma \models \exists x_i\psi$. Como Σ tiene testigos en L, hay una $c \in C$ tal que $\Sigma \models_o \exists x_i\psi \rightarrow \psi(c)$. Así, $\Sigma \models_o \psi(c)$.
Entonces $\mathbf{A} \models \psi(c)$. Sea $s \in {}^\omega A$ cualquiera tal que $\mathbf{A} \models \psi(c)[s]$. Por el Lema de Sustitución, $\mathbf{A} \models \psi[s(\, i \,/\, c^{\mathbf{A}})]$,

$\mathbf{A} \models \exists x_i \psi[s]$. Pero $\exists x_i \psi$ es un enunciado.
De esto se sigue que $\mathbf{A} \models \exists x_i \psi$. Si $\varphi \in \Sigma$ entonces $\Sigma \models_o \varphi$ y por tanto $\mathbf{A} \models \varphi$, es decir, $\mathbf{A} \models \Sigma$. □

Aplicaciones

1._ Expansiones y Reductos.

Ahora veremos cómo pasar entre extensiones de lenguajes y expasiones de estructuras.

Definición 11. Sean L y L' dos lenguajes formales tales que $L \subseteq L'$, $\mathbf{A}$ una L-estructura y $\mathbf{B}$ una L'-estructura.

(a) **$\mathbf{A}$ es un reducto de $\mathbf{B}$** ($\mathbf{A} = \mathbf{B} \upharpoonright L$) $\Leftrightarrow$ se cumplen:

  (i) $A = B$.

  (ii) para cualquier $s \in L$, $s^{\mathbf{A}} = s^{\mathbf{B}}$.

(b) **$\mathbf{B}$ es una expansión de $\mathbf{A}$** $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ es un reducto de $\mathbf{B}$.

Ejemplo.
Para una L-estructura $\mathbf{A}$ y $X \subseteq A$, se tiene la expansión $\mathbf{A}_X = \langle \mathbf{A}, a\rangle_{a \in X}$ y la extensión $L_X = L \cup \{c_a\}_{a \in X}$ y $c_a^{\mathbf{A}} = a$, para toda $a \in X$. En tal caso, $\mathrm{Th}(\mathbf{A}) \subseteq \mathrm{Th}(\mathbf{A}_X)$.
Un "L-enunciado" es un enunciado en el lenguaje L.
Lo mismo para otras expresiones de L, conjuntos de ellas o estructuras.

Proposición 5. Sean $L \subseteq L'$, $\mathbf{A}$ una L-estructura, $\mathbf{B}$ una L'-estructura, $\mathbf{A} = \mathbf{B} \upharpoonright L$ y $s \in {}^{\omega}A$. Entonces:

(1) Si t es un L-término entonces $t^{\mathbf{A}}[s] = t^{\mathbf{B}}[s]$.

(2) Si φ es una L-fórmula entonces $\mathbf{A} \models \varphi[s] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi[s]$.

(3) Si Σ es un conjunto de L-enunciados y φ es un L-enunciado entonces:

(a) $\mathbf{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi$. (b) $\mathbf{A} \models \Sigma \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \Sigma$.

Prueba.

(1) y (2) por inducción en términos y fórmulas.

(3) Inmediato de (2) y de la proposición 1.4.□

2._ El Teorema de Compacidad.

El siguiente resultado es de capital importancia en Lógica. Se debe a Gödel (1930) y a Maltsev (1936), principalmente.

Teorema VII. Teorema de Compacidad.

Sea Σ un conjunto de enunciados.

Si Σ es finitamente satisfacible entonces Σ tiene modelo.

Prueba.

Por el Teorema IV, existen L_+ y Δ un conjunto de enunciados en L_+ tales que: $| L_+| = | L |$, $\Sigma \subseteq \Delta$ y Δ es finitamente satisfacible y con testigos en L_+.

Por el Teorema V, hay un $\Gamma \subseteq L_+$ conjunto de enunciados tal que $\Delta \subseteq \Gamma$ y Γ es finitamente satisfacible y completo.

Ya que Δ tiene testigos en L y Γ es completo entonces, por el lema 4, Γ también tiene testigos en L.

Así, Γ es finitamente satisfacible, completo y con testigos en L_+. Por el Teorema VI, existe una L_+-estructura $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{B} \models \Gamma$. Sea $\mathbf{A} = \mathbf{B} \lceil L$ y $\Sigma \subseteq \Gamma$.

Por la proposición 5.3, $\mathbf{A} \models \Sigma$.□

Los siguiente resultados son corolarios de los Teoremas VI y VII.

Proposición 6. Sean Σ un conjunto de enunciados y φ un enunciado. Entonces,

(1) Si Σ tiene modelo entonces existe una L-estructura $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A} \models \Sigma$ y $| \mathbf{A} | \leq | L |$.

(2) El Teorema VII implica al Teorema IV.

(3) Si $\{\Sigma_i\}_{i \in I}$ es una cadena de conjuntos de enunciados, cada uno con un modelo entonces $\cup_{i \in I}\Sigma_i$ tiene modelo.

(4) Son equivalentes:

(a) **Teorema de Compacidad.**

(b) **Lema de Finitud.** Si $\Sigma \models \varphi$ entonces $\Sigma \models_o \varphi$

Prueba.

(1) Inmediato de la prueba del Teorema VI.

(2) Σ es finitamente satisfacible $\Rightarrow$ (Teorema VII) Σ tiene modelo $\Rightarrow$ existe una L-estructura $\mathbf{A}$ tal que $\Sigma \subseteq \mathrm{Th}(\mathbf{A})$, el cual es finitamente satisfacible y completo.

(3) Verifíquese que $\cup_{i \in I}\Sigma_i$ es finitamente satisfacible.

(4) Por contrapositiva.

(a) $\Rightarrow$(b) $\Sigma \not\models_o \varphi \Rightarrow \Sigma + \neg\varphi$ es finitamente satisfacible $\Rightarrow$ $\Sigma + \neg\varphi$ tiene modelo $\Rightarrow \Sigma \not\models \varphi$, por la proposición 2.5.

(b) $\Rightarrow$(a) Σ no tiene modelo $\Rightarrow$ (proposición 2.4) existe φ un enunciados tal que: $\Sigma \models \varphi \wedge \neg\varphi \Rightarrow \Sigma \models_o \varphi \wedge \neg\varphi \Rightarrow$ Σ no es finitamente satisfacible.□

3._ Löwenheim-Skolem-Tarski.

El siguiente resultado se debe a Löwenheim (1915), Skolem (1919) y Tarski (1928).

Lo que nos dice es que si un conjunto de enunciados tiene un modelo infinito entonces tiene un modelo de cualquier cardinal infinito.

Teorema VIII. Sean L un lenguaje formal, Σ un conjunto de enunciados y κ, λ cardinales arbitrarios tales que $\aleph_o \leq |\mathrm{L}| \leq \kappa < \lambda$. Entonces:

(1) (Löwenheim-Skolem-Tarski ascendente, LST $\uparrow$)

Si $\mathbf{A} \models \Sigma$ y $|\mathbf{A}| = \kappa$ entonces existe $\mathbf{B} \models \Sigma$ tal que

$|\mathbf{B}| = \lambda$.

(2) (Löwenheim-Skolem-Tarski descendente, LST $\downarrow$)

Si $\mathbf{A} \models \Sigma$ y $|\mathbf{A}| = \lambda$ entonces existe $\mathbf{B} \models \Sigma$ tal que $|\mathbf{B}| = \kappa$.

Prueba.

(1) Sea $C = \{ c_i \mid i \in I\}$ un conjunto de nuevas constantes donde $|I| = \lambda$, $L_+ = L \cup C$.

Sea $\Delta = \Sigma + \{c_i \not\approx c_j \mid i \neq j \in I\}$ enunciados en L_+.

Entonces $|L_+| = \lambda$, Δ es finitamente satisfacible y Δ tiene modelo. Por la proposición 6.1, hay una L_+-estructura $\mathbf{D}$ tal que $\mathbf{D} \models \Sigma$ y $|\mathbf{D}| \leq \lambda$. Como $\mathbf{D} \models \Delta$, $|\mathbf{D}| \geq \lambda$, es decir, $|\mathbf{D}| = \lambda$. Si $\mathbf{B} = \mathbf{D} \lceil L$ entonces por la proposición 5.3, $\mathbf{B} \models \Sigma$ y $|\mathbf{B}| = \lambda$.

(2) Sea $C = \{ c_i \mid i \in I \}$ conjunto de nuevas constantes y $|I| = \kappa$. Así, $L_+ = L \cup C$ y $|L_+| = \kappa$.

Sea $\Delta = \Sigma \cup \{ c_i \not\approx c_j \mid i \neq j \in I\}$. Entonces Δ es finitamente satisfacible, porque $\mathbf{B} \models \Sigma$ y $|\mathbf{B}| = \lambda$.

Porque $\mathbf{A} \models \Sigma$ y $|\mathbf{A}| = \lambda \geq \kappa$. El resto es como en (1).$\Box$

4._ Teorías Finitamente Axiomatizables.

Veamos ahora qué son las teorías y cómo algunas de ellas se pueden "generar" por conjuntos (finitos algunas veces) de enunciados.

Definición 12. Sean L un lenguaje formal y T un conjunto de enunciados en L.

T es una teoría $\Leftrightarrow$ para todo φ enunciado, si $T \models \varphi$ entonces $\varphi \in T$.

T es una teoría finitamente axiomatizable $\Leftrightarrow$ T es una teoría y existe un conjunto finito de enunciados

Δ tal que para todo φ enunciado, $\varphi \in \mathrm{T} \Leftrightarrow \Delta \models \varphi$.
Una teoría T, dicho en otras palabras, es un conjunto de enunciados cerrado bajo consecuencia lógica.
Sea Σ un conjunto de enunciados en el lenguaje formal L.
El conjunto de las consecuencias lógicas de Σ se define:
$\mathrm{Cn}(\Sigma) = \{ \varphi \mid \varphi$ es un enunciado y $\Sigma \models \varphi\}$. Entonces:

- $\Sigma \subseteq \mathrm{Cn}(\Sigma)$.
- Si $\Sigma \subseteq \Delta$ entonces $\mathrm{Cn}(\Sigma) \subseteq \mathrm{Cn}(\Delta)$.
- $\mathrm{Cn}(\mathrm{Cn}(\Sigma)) = \mathrm{Cn}(\Sigma)$.
- $\mathrm{Cn}(\Sigma)$ es una teoría.
- $\mid \mathrm{Cn}\ (\emptyset) \mid \geq \aleph_0$. Esto es cierto porque para cada enunciado φ obtenemos que $\models \varphi \rightarrow \varphi$. De éstas hay tantas como enunciados tenemos. Por lo tanto, para todo Σ conjunto de enunciados, $\mid \mathrm{Cn}\ (\Sigma) \mid \geq \aleph_0$.
  Así, toda teoría T tiene cardinalidad infinita.
- Si Σ es maximal satisfacible entonces Σ es una teoría completa. Por lo tanto, $\mathrm{Th}(\mathbf{A})$ es una teoría, llamada la teoría de $\mathbf{A}$.
- $\mathrm{Cn}(\varphi, \neg\varphi)$ es una teoría finitamente axiomatizable, completa y sin modelos.

Veamos las propiedades básicas de estas teorías.

Proposición 7. Sean $\Delta = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, Σ, T, T_1 conjuntos de enunciados y T, T_1 teorías. Entonces:

(1) Si $\mathrm{T} \subseteq \mathrm{T}_1$, T es completa y T_1 tiene modelo entonces $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1$.

(2) Hay un enunciado φ tal que:

(a) $\mathbf{A} \models \Delta \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi$, para toda L-estructura $\mathbf{A}$.

(b) $\mathrm{Cn}\ (\Delta) = \mathrm{Cn}\ (\varphi)$.

(3) T es finitamente axiomatizable $\Leftrightarrow$ hay un enunciado

φ tal que Cn $(\varphi) = T$.

(4) Cn (Σ) es finitamente axiomatizable $\Leftrightarrow$ existe un subconjunto finito de enunciados Σ_o tal que Cn $(\Sigma_o) =$ Cn (Σ).

(5) Si $\{T_n\}_{n \in N}$ es una familia de conjuntos de enunciados tal que para toda $n \in \mathbf{N}$, $T_n \subset T_{n+1}$ y T_n es una teoría con modelo entonces $\cup_{n \in N} T_n$ es una teoría satisfacible y no es finitamente axiomatizable..

Prueba.

(1) Si $T \neq T_1$ entonces hay un enunciado $\varphi \in T_1$ tal que $\varphi \notin T$. Como T es completa $\neg\varphi \in T$. Pero $T \subseteq T_1$. Por lo tanto $\neg\varphi \in T_1$. Así T_1 no tiene modelo. Absurdo.

(2) Considere $\varphi = (\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i)$ y use la proposición 2.3.

(3) Inmediato de (2).

(4) Por (3), hay un φ un enunciado tal que $Cn(\varphi) = Cn(\Sigma)$. Suponemos que para todo $\Sigma_o \subseteq \Sigma$ finito, $Cn(\Sigma_o) \neq Cn(\varphi)$. Entonces para todo $\Sigma_o \subseteq \Sigma$ finito, $\Sigma_o + \neg\varphi$ es finitamente satisfacible.

De lo contrario, para algún $\Sigma_o \subseteq \Sigma$ finito, $\Sigma_o + \neg\varphi$ no es finitamente satisfacible.

Esto implica que $\Sigma_o \models \varphi$, es decir, $Cn(\Sigma_o) = Cn(\varphi)$. Absurdo. Por Compacidad, $\Sigma + \neg\varphi$ tiene modelo, de donde, $\Sigma \not\models \varphi$, lo que contradice que $\Sigma \models \varphi$.

(5) Sea $T = \cup_{n \in N} T_n$ y supongamos que $T \models \varphi$. Por el Lema de Finitud, existe $\Sigma_o \subseteq T$ finito tal que $\Sigma_o \models \varphi$. Entonces hay un $r \in \mathbf{N}$ tal que $\Sigma_o \subseteq T_r$. Como $T_r \models \varphi$ y T_r es teoría, $\varphi \in T_r \subseteq T$. Así, T es una teoría. Suponemos que T no tiene modelo.

Por Compacidad, hay un $\Sigma_o \subseteq T$ finito tal que Σ_o no tiene modelo. Entonces hay una $r \in \mathbf{N}$ tal que $\Sigma_o \subseteq T_r$ y T_r no tiene modelo. Absurdo. Por lo tanto, T tiene modelo.
Si T fuera finitamente axiomatizable, por (2), existiría un enunciado φ en L tal que $T = Cn\ (\varphi)$.
Entonces $\varphi \in T$, es decir, hay un $n \in \mathbf{N}$ tal que $\varphi \in T_n$.
De este modo, $T = Cn\ (\varphi) \subseteq T_n \subseteq T$, lo que implica que $T_n = T$. Más aún, para toda $m > n$, $T_m = T = T_n$, lo que contradice que $T_n \subset T_m$, si $m > n$.□
Si Σ es un conjunto de enunciados y $\mathbf{A}$ es una L-estructura tal que $\mathbf{A} \models \Sigma$ entonces $Cn(\Sigma) \subseteq Th(\mathbf{A})$.
Si además, Σ es completo entonces $Cn(\Sigma) = Th(\mathbf{A})$.
Si T es una teoría completa y $\mathbf{A} \models T$ entonces $T = Th(\mathbf{A})$.

5._ Teorías en el lenguaje puro de la igualdad.

Sea L un lenguaje sin símbolos no-lógicos.
Entonces las L-estructuras son de la forma $\mathbf{A} = \langle A \rangle$.
Para $n > 0$, consideremos los siguientes enunciados:

$\sigma_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n (\bigwedge_{i<j} x_i \not\approx x_j)$.

$\delta_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n\ (\bigwedge_{i<j} x_i \not\approx x_j \wedge \forall x_{n+1}(\bigvee_{i=1}^{n} x_i \approx x_{n+1}))$

σ_n afirma que hay, al menos, n elementos y δ_n afirma que hay exactamente n elementos.
Sea $\Sigma_\omega = \{\sigma_n |\ n \in \mathbf{N}^+\}$. Verifique el lector:

(1) $\mathbf{A} \models \sigma_n \Leftrightarrow |\ \mathbf{A}\ | \geq n$.

(2) $n \geq m \Leftrightarrow\ \models \sigma_n \rightarrow \sigma_m$. En tal caso $\not\models \sigma_m \rightarrow \sigma_n$, si $n > m$.

(3) $\mathbf{A} \models \delta_n \Leftrightarrow |\ \mathbf{A}\ | = n$.

(4) $\models \delta_n \rightarrow \sigma_n$, $\not\models \sigma_n \rightarrow \delta_n$ y $\models \delta_n \leftrightarrow \sigma_n \wedge \neg\sigma_{n+1}$.

(5) $\mathbf{A} \models \Sigma_\omega \Leftrightarrow |\ \mathbf{A}\ | \geq \aleph_o$.

(6) Si $n \neq m$ entonces $\{\delta_n, \delta_m\}$ y $\Phi_\omega = \{\delta_n \mid n \in \mathbf{N}^+\}$

no tienen modelo.

(7) Si $T_\omega = Cn(\Sigma_\omega)$ entonces T_ω no es finitamente axiomatizable y no tiene modelos finitos.

Sea T una teoría cualquiera en L.

(8) Si T tiene modelos finitos distintos entonces T es incompleta.

(9) Si $\Sigma_\omega \subseteq T$ entonces T no tiene modelos finitos.

σ_n, δ_n y Σ_ω podemos "escribirlos" en cualquier lenguaje.
$T = Cn(\delta_n)$ sólo tiene modelos de cardinal $n > 0$.
$T = Cn(\sigma_n)$ tiene modelos de cualquier cardinal $\geq n$, pero no tiene ningún modelo de cardinal $< n$.
Como T tiene modelos finitos distintos, T es incompleta.
En el apéndice 2 hay más ejemplos de teorías.

6._ Propiedades de Primer Orden.

Veamos ahora algunos límites de los lenguajes formales de primer orden.

Proposición 8. Sea Σ un conjunto de enunciados.
Si para toda $n \in \mathbb{N}^+$ existe una L-estructura $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A} \models \Sigma$ y $|A| = n$ entonces existe una L-estructura $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{B} \models \Sigma$ y $|B| \geq \aleph_0$.

Prueba.
Sea $C = \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto de nuevas constantes y $L_+ = L \cup C$.
$\Sigma' = \Sigma + \{ c_n \not\approx c_m \mid n \neq m\}$ es un conjunto de enunciados en L_+. Verifique el lector que Σ' es finitamente satisfacible.
Entonces, por el Teorema de Compacidad, tiene un modelo, digamos $\mathbf{B}$. Como $\mathbf{B} \models \Sigma'$, $|\mathbf{B}| \geq \aleph_0$. Sea $\mathbf{A} = \mathbf{B} \restriction L$.
Por la proposición 5.3, $\mathbf{A} \models \Sigma$.$\square$

El Σ de la proposición 8 es incompleto, por tener modelos finitos distintos.

Definición 13. P es una propiedad de primer orden $\Leftrightarrow$ existe un lenguaje formal L y existe un conjunto de enunciados Σ en L tal que para toda L-estructura $\mathbf{A}$,

$\mathbf{A}$ tiene la propiedad P $\Leftrightarrow \mathbf{A} \models \Sigma$.

Ejemplos. Son propiedades de primer orden:

$\mathbf{A}$ tiene al menos n elementos (σ_n).

$\mathbf{A}$ tiene exactamente n elementos (δ_n).
$\mathbf{A}$ tiene un número infinito de elementos (Σ_ω).
$\mathbf{A}$ es un orden parcial.
$\mathbf{A}$ es un orden total.

Ahora veamos algunos conceptos que **no son de primer orden.**

"Ser finito".
De lo contrario, existiría Σ tal que para toda L-estructura $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} \models \Sigma \Leftrightarrow \mathbf{A}$ es finito. Por la proposición 8, tendría un modelo infinito que debe ser finito. Absurdo.

"Ser un grupo cíclico infinito".
Pues de lo contrario, existiríaa Σ tal que para toda L-estructura $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} \models \Sigma \Leftrightarrow \mathbf{A}$ es un grupo cíclico infinito. Por LST $\uparrow$, tendría grupos cíclicos de cualquier cardinal. En particular uno de cardinal $2^{\aleph_0}$. Por otro lado $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ es el único grupo cíclico infinito, bajo isomorfismo. Por la unicidad, $\aleph_0 = 2^{\aleph_0}$. Contradicción.

"Ser un buen orden".
Para ver esto suponemos que sí es de primer orden. Sean L un lenguaje formal y Σ un conjunto de enunciados

tales que para toda L-estructura **A**, **A** es un buen orden $\Leftrightarrow$ **A** $\models \Sigma$.

Sea $C = \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto de nuevas constantes, $L_+ = L \cup C$ y $\Sigma' = \Sigma + \{ c_{n+1} < c_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ un conjunto de enunciados en L_+.

Entonces Σ' es finitamente satisfacible y tiene un modelo, por Compacidad. Digamos que **B** es tal modelo.

Como **B** $\models \Sigma'$, **B** tiene una cadena infinita descendente.

Por la proposición **1.3.d**, **B** no es un buen orden, de donde **B** $\not\models \Sigma$.

"Ser un campo arquimediano".

Sea $\mathbf{R} = \langle \mathbb{R}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ que es un campo totalmente ordenado. La Propiedad Arquimediana para $\mathbb{R}$ es:

para toda $x \in \mathbb{R}$ hay una $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$.

Suponemos que ésta es una propiedad de primer orden.

Sea $L_+ = L + \{c_r \mid r \in \mathbb{R}\} + \{c\}$.

Consideremos el conjunto de enunciados:

$\Sigma = Th(\mathbf{R}) + \{c_r < c \mid r \in \mathbb{R}\}$, el cual es finitamente satisfacible. Por Compacidad, Σ tiene un modelo, digamos **A**. Claramente **A** es un campo no arquimediano. Absurdo.

"Ser un espacio discreto y compacto".

Ya que de lo contrario, por la proposición 8, tendríamos un modelo infinito. Éste espacio no puede ser compacto.

"Ser un espacio discreto y de Lindelöf ".

De lo contrario existe un modelo infinito. Por LST$\uparrow$, podemos escogerlo no numerable.

Éste último no puede ser de Lindelöf.

7. _ Generalización a fórmulas con variables libres.

Extendemos algunos resultados para enunciados a fórmulas con variables libres. Esto lo haremos por medio del Lema de Sustitución, Teorema VII y el lema 3.

Sea L un lenguaje formal. Si t es un término entonces el número de variables que ocurren en él es finito, digamos $x_1,\dots,x_n$. Sea $\bar{x} = (x_1,\dots,x_n)$ entonces "$t = t(\bar{x}) = t(x_1,\dots,x_n)$" significa que todas las variables de t están en $\{x_1,\dots,x_n\}$.

Lo mismo sucede para φ una L-fórmula, $\varphi(\bar{x}) = \varphi(x_1,\dots,x_n)$, indica que sus únicas variables libres están entre $x_1,\dots,x_n$.

Definimos:

F_o es el conjunto de todos los enunciados y para $n > 0$,

F_n es

$\{\varphi |\ \varphi$ es una fórmula y las variables libres de φ estan entre $x_1,\dots, x_n\}$

Es claro que: $F_n \subseteq F_{n+1}$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Si $\varphi \in F_n$ entonces escribiremos: "$\exists\bar{x}\varphi$" en lugar de "$\exists x_1 \dots \exists x_n \varphi$".

Si $c_1,\dots, c_n$ son nuevas constantes, que no ocurren en L, $L_+ = L \cup \{c_1,\dots,c_n\}$ y sustituimos x_i, libre en φ, por c_i para $1 \leq i \leq n$ entonces obtenemos que $\varphi(\bar{c}) = \varphi(c_1,\dots,c_n)$ es un enunciado en L_+, donde $\bar{c} = (c_1,\dots,c_n)$.

Si $\Sigma \subseteq F_n$ entonces $\Sigma(\bar{c}) = \{\varphi(\bar{c}) \mid \varphi \in \Sigma\}$ es un conjunto de enunciados en L_+.

Sea **A** es una L-estructura y $\bar{a} = (a_1,\dots,a_n) \in A^n$, $1 \leq i \leq n$ y $d \in A$, $\bar{a}[i\ /d] = (a_1,\dots,a_{i-1},d,a_{i+1},\dots,a_n)$.

Definición 14. Sean $\Sigma \cup \{\ \varphi\ \} \subseteq F_n$; T un conjunto de enunciados y **A** una L-estructura. Entonces:

(a) **A realiza a** $\Sigma \Leftrightarrow$ hay un $\bar{a} \in A^n$ tal que para todo $\varphi \in \Sigma$, $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$.

(b) **A omite a** $\Sigma \Leftrightarrow$ **A** no realiza a Σ.

(c) **Σ es consistente con T** $\Leftrightarrow$ existe una L-estructura **A** tal que **A** $\models$ T y **A** realiza a Σ.

(d) **Σ es omitido por T** $\Leftrightarrow$ Σ no es consistente con T.

Ejemplos y comentarios.

-Escribiremos "**A** realiza a Σ respecto a $\bar{a}$ " como "**A** $\models \Sigma[\bar{a}]$".

-Usamos $\bar{a} \in A^n$ para interpretar a $\varphi \in F_n$

-Si T es una teoría con modelo entonces $\emptyset$ es consistente con T.

-Si $\{\varphi, \neg\varphi\} \subseteq \Sigma$ entonces ambos conjuntos son omitidos por T, para toda T satisfacible.

-Sean L $= \{\leq, +, \cdot, 0, 1\}$ y **A** $= \langle \mathbf{Q}, \leq, +, \cdot, 0,1\rangle$.

Si $\varphi = x^2 - 4 \approx 0$ y $\psi = x^2 - 2 \approx 0$ entonces:

A $\models \varphi[2]$, **A** realiza a φ; como $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$, **A** omite a ψ.

Lema 6. Sean $\varphi = \varphi(x_1) \in F_1$, $L_+ = L \cup \{c\}$, donde c es $c^{\mathbf{A}} = a \in A$. Entonces:

(1) $\varphi(c)$ es un enunciado en L_+-L y $|L_+| = |L|$.

(2) **A** $\models \varphi[a] \Leftrightarrow \langle \mathbf{A}, a\rangle \models \varphi(c)$

Prueba.

(1) para el lector.

(2) ($\Rightarrow$) Esto es otra consecuencia del Lema de Sustitución. Supongamos que **A** $\models \varphi[a]$ y sea $\bar{b} \in A^n$ cualquiera tal que $\bar{b}(1 / a) = (a, b_2, \ldots, b_n)$. Entonces **A** $\models \varphi[\bar{b}(1 / a)]$. Pero **A** es un reducto de $\langle \mathbf{A}, a\rangle$.

Por el lema 3, $\langle \mathbf{A}, a\rangle \models \varphi[\bar{b}(1 / a)]$.

Por el Lema de Sustitución: $\langle \mathbf{A}, a\rangle \models \varphi(c)[\bar{b}]$.

Pero como $\varphi(c)$ es un enunciado en L_+, $\langle \mathbf{A}, a\rangle \models \varphi(c)$.

($\Leftarrow$) Análogo.□

Por medio del lema 6.2 se obtiene que: **A** $\models \exists x_1 \varphi \Leftrightarrow$ para alguna a $\in$ A, $\langle \mathbf{A},a\rangle \models \varphi(c)$.

Proposición 9. Sea T un conjunto de enunciados con modelo, $n > 0$, $\Sigma \subseteq F_n$, $\varphi, \psi \in F_n$, $L_+ = L \cup \{c_1,\ldots,c_n\}$, $c_i \notin L$, para $1 \leq i \leq n$ y $\mathbf{A}$ una L-estructura. Entonces:

(1) $\varphi(\bar{c})$ es un enunciado en L_+-L y $|L_+| = |L|$.

(2) Sean $1 \leq i \leq n$, $c_i^{\mathbf{A}} = a_i \in A$. Entonces:

$\mathbf{A} \models \varphi\,[\bar{a}] \Leftrightarrow \langle \mathbf{A},\bar{a}\rangle \models \varphi(\bar{c})$.

(3) Son equivalentes (a)-(c):

(a) Σ es consistente con T.

(b) para todo $\Sigma_o \subseteq \Sigma$ finito, Σ_o es consistente con T.

(c) $T + \{\exists\bar{x} \bigwedge_{i=1}^{k} \varphi_i \mid k \in \mathbf{N}$ y $\varphi_i \in \Sigma$, para $1 \leq i \leq k\}$ tiene modelo.

(4) Σ es consistente con T $\Leftrightarrow$ T + $\Sigma(\bar{c})$ tiene modelo.

(5) Si Σ es consistente con T entonces existe $\mathbf{A} \models T$ tal que $|\mathbf{A}| \leq |L|$ y $\mathbf{A}$ realiza a Σ.

Prueba.

(1) y (2) son inmediatos por inducción en n y del lema 6.

(3) Esto es una consecuencia del Teorema de Compacidad.

(a) $\Rightarrow$ (b) Inmediato.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sean

$\Delta = \{\exists\bar{x} \bigwedge_{i=1}^{k} \varphi_i \mid k \in \mathbf{N}$ y, para $1 \leq i \leq k$, $\varphi_i \in \Sigma\}$ y

$\Delta_o = \{\psi_1,\ldots,\psi_r\}$ un subconjunto finito de Δ.

Entonces para cada $j = 1,\ldots, r$, $\psi_j = \exists\bar{x} \bigwedge_{i=1}^{k_j} \varphi_i^j$, donde $\varphi_i^j \in \Sigma$. Por lo tanto, obtenemos que $\Sigma_o = \{\varphi_1^1,\ldots,\varphi_{k_r}^r\}$ es un subconjunto finito de Σ.

Por (b), Σ_o es consistente con T, esto es, que hay un $\mathbf{A}$ una L-estructura tal que $\mathbf{A} \models \psi_j$, por lo que, Δ_o tiene modelo.

Así, T + Δ es finitamente satisfacible.

Por el Teorema de Compacidad, $T + \Delta$ tiene modelo.

(c) $\Rightarrow$ (a) Consideremos

$T + \{\exists\bar{x} \bigwedge_{i=1}^{k} \varphi_i | \ k \in \mathbb{N} \text{ y } \varphi_i \in \Sigma, \text{ para } 1 \leq i \leq k\}$

tiene modelo. Entonces existe una L-estructura **A** tal que:

$\mathbf{A} \models T + \{\exists\bar{x} \bigwedge_{i=1}^{k} \varphi_i \ | \ k \in \mathbb{N} \text{ y } \varphi_i \in \Sigma, \text{ para } 1 \leq i \leq k\}$.

Si $\varphi \in \Sigma$ entonces $\mathbf{A} \models \exists\bar{x}\varphi$.

Esto es, existe $\bar{a} = (a_1,\ldots,a_n) \in A^n$ tal que $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$.

Por lo tanto, $\mathbf{A} \models T$ y existe $\bar{a} \in A^n$ tal que $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$, para toda $\varphi \in \Sigma$. Así, Σ es consistente con T.

(4) ($\Rightarrow$) Σ es consistente con T.

Entonces existe una L-estructura **A** y existe $\bar{a} \in A^n$ tales que $\mathbf{A} \models T$ y $\mathbf{A} \models \Sigma[\bar{a}]$.

Sean $c_1,\ldots,c_n$ nuevas constantes tales que $c_i^{\mathbf{A}} = a_i$, para $i = 1,\ldots, n$. Entonces $L_+ = L \cup \{c_1,\ldots,c_n\}$ es una extensión de L y $\langle \mathbf{A},\bar{a}\rangle$ es una L_+-estructura.

Por el lema 4, $\langle \mathbf{A},\bar{a}\rangle \models T$, porque T es un conjunto de L-enunciados. Si $\varphi(\bar{c}) \in \Sigma(\bar{c})$ entonces $\varphi \in \Sigma$ y, en particular, $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$. Por (2), $\langle \mathbf{A},\bar{a}\rangle \models \varphi(\bar{c})$.

Así, $\langle \mathbf{A},\bar{a}\rangle \models \Sigma(\bar{c})$. Por lo tanto, $\langle \mathbf{A},\bar{a}\rangle \models T + \Sigma(\bar{c})$.

($\Leftarrow$) Sea $\varphi \in \Sigma$. Entonces $\varphi(\bar{c}) \in T + \Sigma(\bar{c})$.

Por hipótesis, existe una L_+-estructura $\langle \mathbf{B},\bar{b}\rangle$ tal que $\langle \mathbf{B},\bar{b}\rangle \models \varphi(\bar{c})$. Por (2), $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$ y $\mathbf{B} \models T$.

Se concluye que Σ es consistente con T.

(5) Sea $C = \{c_1,\ldots,c_n\}$ un conjunto de nuevas constantes. Sea $L_+ = L \cup C$.

Consideremos: $\Sigma' = T + \Sigma(\bar{c})$ un conjunto de enunciados en L_+. Entonces Σ' es finitamente satisfacible y por Compacidad, Σ' tiene modelo.

Así existe una L_+-estructura **B** tal que $\mathbf{B} \models \Sigma'$ y

$|\mathbf{B}| \leq |L_+| = |L|$. Si $\mathbf{A} = \mathbf{B}\lceil L$ entonces $\mathbf{A}$ es la estructura buscada.□

Por medio de la proposición 9.2 se obtiene que:

$\mathbf{A} \models \exists\bar{x}\varphi \Leftrightarrow$ para algún $\bar{a} \in A^n$, $(\mathbf{A},\bar{a}) \models \varphi(\bar{c})$.

8._ n-tipos.

Generalizamos los conjuntos maximalmente satisfacibles.
Como $\langle P(F_n),\subseteq\rangle$ es un copo entonces los conjuntos satisfacibles que sean maximales serán objeto de estudio en esta sección.

Definición 15. Sean T un conjunto de enunciados y $p \subseteq F_n$.

p **es un n-tipo en T** $\Leftrightarrow$ se cumplen las dos condiciones siguientes:

(a) p es consistente con T.

(b) para todo $\Delta \subseteq F_n$, si Δ es consistente con T y $p \subseteq \Delta$ entonces $p = \Delta$.

A esto se le llama ser maximal consistente con T.

Sea $\mathbf{A} \models$ T. Entonces Th($\mathbf{A}$) es un 0-tipo en T.

Si $\bar{a} \in A^n$ entonces el conjunto de todas las fórmulas con a lo más n variables libres satisfechas por $\bar{a}$ en $\mathbf{A}$, es un n-tipo en Th($\mathbf{A}$). Dicho conjunto lo denotamos por:

$p_n(\mathbf{A},\bar{a}) = \{ \varphi \in F_n \mid \mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]\}$,

Sea $S_nT = \{p \subseteq F_n \mid p$ es un n-tipo en T $\}$.

Es claro que $|S_nT| \leq 2^{|F_n|} = 2^{|L|}$.

Veamos algunas propiedades de los n-tipos.

Proposición 10. Sean T un conjunto de enunciados y p, $\Sigma \subseteq F_n$. Entonces,

(1) Si p es consistente con T entonces son equivalentes:

(a) $p \in S_nT$.

(b) para toda $\varphi \in F_n$, $\varphi \in p$ o $\neg\varphi \in p$.

(c) para toda $\varphi,\psi \in F_n$, si $\varphi \vee \psi \in p$ entonces $\varphi \in p$ o $\psi \in p$.

(d) Existen $\mathbf{A} \models T$ y $\bar{a} \in A^n$ tales que $p = p_n(\mathbf{A},\bar{a})$.

(2) $p \in S_nT \Leftrightarrow$ existen $\mathbf{A} \models T$ y $\bar{a} \in A^n$ tales que $p(\bar{c}) = Th(\mathbf{A},\bar{a})$.

(3) Si Σ es consistente con T entonces existe $p \in S_nT$ tal que $\Sigma \subseteq p$.

(4) Si $p \in S_nT$ entonces $T \subseteq p$.

(5) Si $p \in S_nT$ entonces existe una L-estructura $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A} \models T$, $\mid \mathbf{A} \mid \leq \mid L \mid$ y $\mathbf{A}$ realiza a p.

Prueba.

(1) Por la definición de n-tipo.

(2) De (1), Lema de Sustitución y proposición 9.6.

(3) $\mathbf{A} \models T$ y $\bar{a} \in A^n$ tales que $\mathbf{A} \models \Sigma[\bar{a}]$.

Esto implica que $\Sigma \subseteq p_n(\mathbf{A},\bar{a}) \in S_nT$.

(4) Por reducción al absurdo y (1).

(5) Inmediato de la proposición 9.6.

Este resultado extiende la proposición 4.1 a n-tipos.□

Ejemplos y comentarios.

-Sean $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$, $\mathbf{A} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1\rangle$, $\varphi_r = x_1^2 - r^2 \approx 0$, donde r es un número primo positivo y $T = Th(\mathbf{A})$. Entonces: $\mathbf{A} \models \varphi_r[r]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_r[-r]$ lo que implica que $\varphi_r \in p_1(\mathbf{A},r) \cap p_1(\mathbf{A},-r)$. Si $r \neq s$, ambos números primos entonces $p_1(\mathbf{A},r) \neq p_1(\mathbf{A},s)$.

Sea $\{r_1, r_2, ..\}$ el conjunto de los números primos positivos en orden creciente.

Definimos: $\mathbf{A}_o = \mathbf{A}$ y $\mathbf{A}_n = \langle \mathbb{Q}(\sqrt{a_n}), +, \cdot, 0, 1\rangle$, donde $a_n = \Pi^n_{i=1} r_i$ y $\varphi_n = x_1^2 - a_n \approx 0$.

Entonces para $1 \leq i < n$, $\mathbf{A}_n \models \varphi_n[\sqrt{a_n}]$ y $\mathbf{A}_i \not\models \varphi_n[\sqrt{a_i}]$

lo que implica que $\mathbf{A}_n$ realiza a $p_1(\mathbf{A}_n, \sqrt{a_n})$ y $\mathbf{A}_i$ omite a $p_1(\mathbf{A}_n, \sqrt{a_n})$, así que $p_1(\mathbf{A}_n, \sqrt{a_n}) \neq p_1(\mathbf{A}_i, \sqrt{a_i}) \in S_1T$.
Por lo tanto, $\{p_1(\mathbf{A}_n, \sqrt{a_n})\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S_1T$ y $|S_1T| \geq \aleph_0$.
-$p \in S_nT \Leftrightarrow$ existen una L-estructura $\mathbf{A}$ y $\bar{a} \in A^n$ tales que $\mathbf{A} \models T$ y $p(\bar{c}) = p_n(\mathbf{A},\bar{a})$.
- Sea $p \in S_nT$. En particular, $p \subseteq F_{n+1}$ y p es consistente con T. Por la proposición 10.3, existe $q \in F_{n+1}$ tal que $p \subseteq q$.

Para más detalles ver [1], [5] y [16].

CAPÍTULO 5

ÁLGEBRAS DE LINDENBAUM

Presentamos una relación entre álgebras booleanas, lógica de predicados, ultrafiltros y n-tipos.

Construcción de las Álgebras de Lindenbaum

En lo que sigue L es un lenguaje formal. Construimos las Álgebras de Lindenbaum a partir de una relación de equivalencia, la Σ-equivalencia lógica, donde es un conjunto de L-enunciados.

Definición 1. Sean Σ un conjunto de enunciados y φ,ψ enunciados.
φ **es Σ-lógicamente equivalente a** ψ ($\varphi \sim_\Sigma \psi$) $\Leftrightarrow \Sigma \models \varphi \leftrightarrow \psi$.

Es fácil ver que " $\sim_\Sigma$" es una relación de equivalencia usando Equivalencia Material, Reflexividad y Transitividad de "$\leftrightarrow$".
Así, obtenemos que la clase de equivalencia de φ es $[\varphi]$ y el conjunto cociente es $B_o\Sigma = \{[\varphi] \mid \varphi$ es un enunciado$\}$.
Cuando $\Sigma = \emptyset$ obtenemos la equivalencia lógica usual:

φ es lógicamente equivalente a ψ ($\varphi \sim \psi$) $\Leftrightarrow\ \models \varphi \leftrightarrow \psi$.

El siguiente resultado nos habla de las propiedades básicas de "$\sim$".

Lema 1. Sean Σ un conjunto de enunciados y φ,ψ enunciados.

(1) Si $\varphi \sim \psi$ entonces, $\Sigma \models \varphi \Leftrightarrow \Sigma \models \psi$.
(2) Si $\varphi \sim_\Sigma \varphi'$ y $\psi \sim_\Sigma \psi'$ entonces $\neg\varphi \sim_\Sigma \neg\varphi'$,
$\varphi\wedge \psi \sim_\Sigma \varphi'\wedge \psi'$ y $\varphi\vee \psi \sim_\Sigma \varphi'\vee \psi'$.
(3) Si $\Sigma \models \varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \sim_\Sigma \varphi'$ y $\psi \sim_\Sigma \psi'$ entonces
$\Sigma \models \varphi' \rightarrow \psi'$.
(4) $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow Cn(\varphi) = Cn(\psi)$.□

Sean $[\varphi]$, $[\psi] \in B_o\Sigma$ entonces definimos: $[\varphi] \leq [\psi] \Leftrightarrow \Sigma \models \varphi \rightarrow \psi$.
Entonces, por el lema 1.3, "$\leq$" está bien definida.
Veamos qué sucede en $B_o\Sigma$.

Proposición 1. Sea Σ un conjunto de enunciados. Entonces:

(1) $\langle B_o\Sigma, \leq \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado.

(2) $\langle B_o\Sigma, \leq \rangle$ es una red distributiva.

(3) $\Sigma \models \varphi \Leftrightarrow [\varphi] = 1$ y $\Sigma \models \neg\varphi \Leftrightarrow [\varphi] = 0$.

(4) Σ tiene modelo $\Leftrightarrow 1 \neq 0$.

(5) Sea $[\varphi] \in B_o\Sigma$. Definimos $[\varphi]' = [\neg\varphi]$.
Entonces $[\varphi]'$ es un complemento de $[\varphi]$.

(6) $\langle B_o\Sigma, \vee, \wedge, ', 1, 0 \rangle$ es un álgebra booleana y
$| B_o\Sigma | \leq | L |$.

Prueba. Consultar el apéndice 1 para las fórmulas universalmente válidas que se mencionan en la prueba.

(1) Debido a la Reflexividad y Transitividad de "$\rightarrow$" así como a la Equivalencia Material, "$\leq$" es un orden parcial y $\langle B_o\Sigma, \leq \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado.

(2) Sea $A = \{[\varphi], [\psi]\}$.
Por Adición, $[\varphi \vee \psi]$ es una cota superior de A.
Sea $[\chi]$ una cota superior de A lo que implica que
$\Sigma \models \varphi \rightarrow \chi$ y $\Sigma \models \psi \rightarrow \chi$.
Entonces $\Sigma \models \varphi \vee \psi \rightarrow \chi$, es decir, $[\varphi \vee \psi] \leq [\chi]$.
Por lo tanto, $[\varphi] \vee [\psi] = \sup A = [\varphi \vee \psi]$.
Similaramente $[\varphi] \wedge [\psi] = \inf A = [\varphi \wedge \psi]$.
Por Idempotencia, Conmutatividad, Asociatividad, Absorción y Distributividad, $\langle B_o\Sigma, \vee, \wedge \rangle$ es una red distributiva.

(3) ($\Rightarrow$) Sea $[\psi] \in B_o\Sigma$ y suponemos que $\Sigma \models \varphi$.
Como $\models \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$, por Modus Ponens, obtenemos que
$\Sigma \models \psi \rightarrow \varphi$. Esto es, $[\psi] \leq [\varphi]$.

Por lo tanto, $[\varphi]$ es una cota superior de $B_o\Sigma$.

Sea $[\psi] \in B_o\Sigma$ una cota superior cualquiera.

Entonces $[\varphi] \leq [\psi]$ y así $[\varphi] = 1$.

($\Leftarrow$) Sea $[\varphi] = 1$. Entonces para todo enunciado ψ,

$\Sigma \models \psi \rightarrow \varphi$. En particular, esto vale para un enunciado

ψ tal que $\Sigma \models \psi$. Por Modus Ponens, $\Sigma \models \varphi$.

Similarmente para el otro caso.

(4) Por contrapositiva.

($\Rightarrow$) Si $1 = 0$ entonces $\Sigma \models \varphi \wedge \neg\varphi$.

Por la proposición 4.2.4, Σ no tiene modelo.

($\Leftarrow$) Si Σ no tiene modelo entonces existe un enunciado φ

tal que $\Sigma \models \varphi \wedge \neg\varphi$. Por lo tanto, $\Sigma \models \varphi$ y $\Sigma \models \neg\varphi$.

Por (4), $1 = 0$.

(5) Como $\models \varphi \vee \neg\varphi$. Entonces $\Sigma \models \varphi \vee \neg\varphi$.

Por (4), $[\varphi \vee \neg\varphi] = 1$, es decir, $[\varphi] \vee [\varphi]' = 1$.

Por el lema 1.2 y como $\varphi \vee \neg\varphi \sim \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$, $\Sigma \models \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.

Por (4), $[\varphi \wedge \neg\varphi] = 0$, es decir, $[\varphi] \wedge [\varphi]' = 0$.

(6) Inmediato de (1)-(5).

Sea **X** el conjunto de todos los L-enunciados.

Como π:X$\rightarrow B_o\Sigma$, $\pi(\varphi) = [\varphi]$ es suprayectiva.

Por el **AE**, $| B_o\Sigma | \leq | X | \leq | L |$.$\square$

En el caso de que $\Sigma = \emptyset$ tenemos que $B_o = B_o(\emptyset)$ es un álgebra booleana. Ya vimos cómo construir álgebras booleanas en lógica:

-el Álgebra Proposicional de Lindenbaum,

-$B_o(\emptyset) = B_o$ y $B_o(\Sigma)$ en el conjunto de enunciados, como fue construida en la proposición 1.

Extendemos estas construcciones a fórmulas con variables libres.

Definición 2. Sean $\Sigma \subseteq F_n$, $\varphi,\psi \in F_n$ y T un conjunto de enunciados. Se define:

(a) φ es **consecuencia lógica** de Σ ($\Sigma \models \varphi$) $\Leftrightarrow$ para toda L-estructura $\mathbf{A}$ y toda $\bar{a} \in A^n$, si $\mathbf{A} \models \Sigma[\bar{a}]$ entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$.

(b) Σ es **cerrado bajo consecuencia lógica** $\Leftrightarrow$ para toda $\varphi \in F_n$, si $\Sigma \models \varphi$ entonces $\varphi \in \Sigma$.

(c) φ **es T-equivalente con** ψ ($\varphi \sim_T \psi$) $\Leftrightarrow$ $T \models \varphi \leftrightarrow \psi$.

(d) Σ **es principal en T** $\Leftrightarrow$ existe $\varphi \in F_n$ tal que φ es consistente con T y para todo $\psi \in \Sigma$, $T \models \varphi \rightarrow \psi$.

Observaciones.

-Sean Σ, $\Delta \subseteq F_n$, $\varphi,\psi \in F_n$ y T un conjunto de enunciados.

-Si $\Sigma \models \varphi$ y $\Sigma \subseteq \Delta$ entonces $\Delta \models \varphi$.

-Sea Σ consistente con T y $\Sigma \models \varphi$, entonces para todo $\Delta \subseteq \Sigma$, Δ es consistente con T y φ es consistente con T.

-$T \models \varphi \Leftrightarrow T \models \forall\bar{x}\varphi$.

-$T \not\models \neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$ es consistente con T.

-Si $p \in S_nT$ entonces p es cerrado bajo consecuencia lógica.

-Si $\varphi \sim_T \psi$ y $p \in S_nT$ entonces $\varphi \in p \Leftrightarrow \psi \in p$.

Veamos qué propiedades tiene " $\sim_T$" .

Lema 2. Sea T un conjunto de enunciados en el lenguaje L.

(1) "$\sim_T$" es una relación de equivalencia en F_n.

(2) Si $\varphi \sim_T \varphi'$ y $\psi \sim_T \psi'$ entonces $\neg\varphi \sim_T \neg\varphi'$ y $\varphi \star \psi \sim_T \varphi' \star \psi'$, con $\star \in \{\vee, \wedge\}$.

(3) Si $\varphi \sim_T \varphi'$, $\psi \sim_T \psi'$ y $T \models \varphi \rightarrow \psi$ entonces $T \models \varphi' \rightarrow \psi'$.$\square$

A partir del lema 2 obtenemos que $B_nT = \{[\varphi] \mid \varphi \in F_n\}$ y $[\varphi] = \{\psi \in F_n \mid \varphi \sim_T \psi\}$.
Sean $[\varphi]$, $[\psi] \in B_nT$, definimos $[\varphi] \leq [\psi] \Leftrightarrow T \models \varphi \rightarrow \psi$.
Entonces, por el lema 2.3, "$\leq$" está bien definida.

Tenemos un resultado similar a la proposición 1.

Proposición 2. Sean T un conjunto de enunciados y $\varphi, \psi \in F_n$. Entonces:

(1) $\langle B_nT, \leq \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado.

(2) $\langle B_nT, \leq \rangle$ es una red distributiva y $| B_nT | \leq | L |$.

(3) Se tiene que:

(a) $T \models \varphi \Leftrightarrow [\varphi] = 1$.

(b) $T \models \neg\varphi \Leftrightarrow [\varphi] = 0$.

(4) φ es consistente con T $\Leftrightarrow [\varphi] \neq 0$.

(5) T tiene modelo $\Leftrightarrow 0 \neq 1$.

(6) $[\varphi] \wedge [\varphi]' = 0$ y $[\varphi] \vee [\varphi]' = 1$. Así, B_nT es complementada.

(7) Si T tiene modelo entonces $\langle B_nT, \vee, \wedge, ', 0,1 \rangle$ es un álgebra booleana no-trivial.

Prueba.

(1), (2) y (3) similares a la proposición 1.

(4) y (5) como en la proposición 1.

(6) ($\Rightarrow$) Suponemos que $[\varphi] = 0$. Por (3.b), $T \models \neg\varphi$.

Pero φ es consistente con T.

Entonces existe una L-estructura $\mathbf{A}$ y existe $\bar{a} \in A^n$ tales que $\mathbf{A} \models T$ y $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$.

Como $T \models \neg\varphi$, $\mathbf{A} \models \neg\varphi[\bar{a}]$ es decir, $\mathbf{A} \not\models \varphi[\bar{a}]$. Absurdo.

Por lo tanto, $[\varphi] \neq 0$.

($\Leftarrow$) Suponemos que φ no es consistente con T.

Entonces $T \models \neg\varphi$. Por (3.b), $[\varphi] = 0$. Absurdo. Por lo tanto, φ es consistente con T.

(7) Inmediato de (2)-(6).$\square$

El álgebra booleana dada en la proposición 2.7 es conocida como:
la n-álgebra de Lindenbaum, relativa a T.
El siguiente lema nos habla de algunas propiedades de los conjuntos principales en T.

Lema 3. Si $\Sigma_\varphi = \{\psi \in F_n \mid T \models \varphi \to \psi\}$, entonces:

(1) φ es consistente con T $\Leftrightarrow$ Σ_φ es consistente con T.

(2) Si $\psi, \chi \in \Sigma_\varphi$ entonces $\psi \wedge \chi \in \Sigma_\varphi$.

(3) Si $\psi \in \Sigma_\varphi$ y $T \models \psi \to \chi$ entonces $\chi \in \Sigma_\varphi$.

(4) Σ es principal en T $\Leftrightarrow$ existe $\varphi \in F_n$ tal que $\Sigma = \Sigma_\varphi$.

(5) Sea $\Sigma \subseteq F_n$. Entonces $\varphi \in \Sigma \Leftrightarrow \Sigma_\varphi \subseteq \Sigma$.

(6) Sea $\mathbf{A} \models T$.

$\mathbf{A}$ realiza (omite) a Σ_φ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ realiza (omite) a φ.□

Veamos cómo relacionar F_n con B_nT. Sean $\Sigma \subseteq F_n$ y $U \subseteq B_nT$.
Definimos: $U_\Sigma = \{\ [\varphi] \mid \varphi \in \Sigma\ \}$ y $\Sigma_U = \{\ \varphi \in F_n \mid [\varphi] \in F\ \}$.
Es claro que: $U_\Sigma \subseteq B_nT$ y $\Sigma_U \subseteq F_n$.
Observación:

Σ es consistente con T $\Leftrightarrow$ U_Σ tiene la propiedad de la intersección finita.

Veamos las propiedades de U_Σ y Σ_U.

Proposición 3. Sean Σ cerrado bajo consecuencia lógica, U_Σ, U y Σ_U como se definieron antes. Entonces:

(1) Σ es consistente con T $\Leftrightarrow$ U_Σ es un filtro propio en B_nT.

(2) $\Sigma \in S_nT \Leftrightarrow U_\Sigma \in SB_nT$.

(3) Σ es principal en T $\Leftrightarrow$ U_Σ es un filtro principal en B_nT.

(4) U es un filtro propio en B_nT $\Leftrightarrow$ Σ_U es consistente con T.

(5) $U \in SB_nT \Leftrightarrow \Sigma_U \in S_nT$.

(6) U es un filtro principal en B_nT $\Leftrightarrow$ Σ_U es principal en T.

(7) Se tiene que:

(a) Si $\Sigma \subseteq \Delta$ entonces $U_\Sigma \subseteq U_\Delta$

(b) Si $U \subseteq G$ entonces $\Sigma_U \subseteq \Sigma_G$,

(c) $\Sigma \subseteq \Sigma_{U_\Sigma}$. La igualdad se da cuando Σ es un n-tipo.

(d) $U \subseteq U_{\Sigma_U}$. La igualdad se da cuando U es un ultrafiltro.

Prueba.

(1) En este caso $U_\Sigma = \{ [\varphi] \mid \varphi \in \Sigma\}$ (*)

($\Rightarrow$) Sabemos que $\varphi \vee \neg\varphi$ es universalmente válida y pertenece a Σ, porque Σ es cerrado bajo consecuencia lógica.

Entonces $1 = [\varphi \vee \neg\varphi] \in U_\Sigma$.

Por lo tanto $U_\Sigma \neq \emptyset$. Para $[\varphi]$, $[\psi] \in U_\Sigma$, $\varphi,\psi \in \Sigma$.

Por ser Σ cerrado bajo consecuencia lógica, $\varphi \wedge \psi \in \Sigma$.

Esto que implica que $[\varphi] \wedge [\psi] = [\varphi \wedge \psi] \in U_\Sigma$.

Si además $[\varphi] \leq [\chi]$, $T \models \varphi \rightarrow \chi$. Pero $T \subseteq \Sigma$ y $\varphi \in \Sigma$.

Así, $\chi \in \Sigma$ y $[\chi] \in U_\Sigma$. Entonces, por (1), U_Σ es un filtro.

Como Σ es consistente con T, U_Σ es un filtro propio, porque $0 \notin U_\Sigma$, ya que Σ es consistente con T.

($\Leftarrow$) Inmediato de (1), porque U_Σ es un filtro propio.

(2) Inmediato de (1) y de las proposiciones 4.10.1 y 2.7.1.

(3) ($\Rightarrow$) Σ es principal. Entonces existe $\varphi \in F_n$ tal que $\Sigma = \Sigma_\varphi = \{\psi \in F_n \mid T \models \varphi \rightarrow \psi\}$. Así, $U_{[\varphi]} \subseteq U_\Sigma$.

Para $[\psi] \in U_\Sigma$, $\psi \in \Sigma$, lo que implica que $T \models \varphi \rightarrow \psi$.

Esto es que $[\varphi] \leq [\psi]$, por lo que $[\psi] \in U_{[\varphi]}$.

Finalmente $U_\Sigma = U_{[\varphi]} = \{ [\psi] \mid [\varphi] \leq [\psi] \}$ es un filtro principal.

($\Leftarrow$) Inmediato de la hipótesis y la igualdad (*).

(4)-(7) son para el lector.$\square$

Sea Σ un conjunto de enunciados. Entonces $B_n Cn(\Sigma) = B_n\Sigma$. En tal caso, si $T = Cn(\Sigma)$ entonces $B_nT = B_n\Sigma$.

Aplicaciones

1._ El Álgebra Proposicional de Lindenbaum.

Sea L el álgebra de Lindenbaum definida en el capítulo **1**.

Sabemos que $|\mathbf{L}| = \aleph_o$.

Por la proposición **2.4**, **L** no es atómica o no es completa.

Si $\Sigma \subseteq \mathbf{F}$ entonces $U_\Sigma = \{[\varphi] \mid \varphi \in \Sigma\}$. Verifique el lector que:

Σ es finitamente satisfacible $\Leftrightarrow$ U_Σ tiene la propiedad de la intersección finita.

En la lógica proposicional tenemos el siguiente resultado.

Lema 4. Sea $\varphi \in \mathbf{F}$ y $T \subseteq \mathbf{F}$ es una teoría.

(1) Si φ es satisfacible entonces φ es incompleto.

(2) T es completa, satisfacible y finitamente axiomatizable $\Leftrightarrow U_T \subseteq \mathbf{L}$ es un ultrafiltro principal.

Prueba.

(1) Como φ es una fórmula entonces el número de letras proposicionales de φ es finito.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que éstas son $p_1,\ldots,p_n$.

Ya que φ es satisfacible, existe una asignación ν tal que $\nu^*(\varphi) = 1$.

Sea p_k una letra proposicional, donde $k \neq 1,\ldots, n$.

Definimos dos nuevas asignaciones μ_1 y μ_2 como sigue:

$$\mu_1(p) = \begin{cases} \nu(p), \text{ si } p \in \{p_1,\ldots,p_n\} \\ 1, \text{ si } p \notin \{p_1,\ldots,p_n\} \end{cases}$$

Entonces $\mu^*_1(\varphi) = \nu^*(\varphi) = 1$ y $\mu^*_1(\neg p_k) = 0$.

Esto implica que $\varphi \not\models \neg p_k$.

$$\mu_2(p) = \begin{cases} \nu(p), \text{ si } p \in \{p_1,\ldots,p_n\} \\ 0, \text{ si } p \notin \{p_1,\ldots,p_n\} \end{cases}$$

Entonces $\mu_2^*(\varphi) = \nu^*(\varphi) = 1$, $\mu_2^*(p_k) = 0$.

Por lo tanto, $\varphi \not\models p_k$. Así, φ es incompleto.

(2)($\Rightarrow$) Sea T una teoría completa, satisfacible y finitamente axiomatizable.

Ya que $\models \chi \vee \neg\chi$ entonces $1 = [\chi \vee \neg\chi] \in U_T$.

Sean $[\varphi], [\psi] \in U_T$. Entonces $T \models \varphi, \psi$.

Por la proposición 4.2.3, $T \models \varphi \wedge \psi$.

Esto implica que $[\varphi \wedge \psi] \in U_T$, es decir, $[\varphi] \wedge [\psi] \in U_T$.

Sean $[\varphi] \leq [\psi]$ y $[\varphi] \in U_T$. Entonces $T \models \varphi \rightarrow \psi$ y $T \models \varphi$.

Por Modus Ponens, $T \models \psi$, es decir, $[\psi] \in U_T$.

Con esto queda probado que U_T es un filtro.

Como T es satisfacible, U_T es propio.

Como T es finitamente axiomatizable, existe un enunciado φ tal que $T = Cn(\varphi)$. Entonces $\Sigma_{[\varphi]} \subseteq U_T$.

Sea $[\psi] \in U_T$. Entonces $T \models \psi$, es decir, $\varphi \models \psi$.

Por lo tanto, $[\psi] \in \Sigma_{[\varphi]}$ y así $U_T = \Sigma_{[\varphi]}$, es decir, U_T es principal.

($\Leftarrow$) Para el lector.□

Inmediato del lema 4 es la siguiente proposición.

Proposición 4. Sea $T \subseteq \mathbf{F}$.

(1) No existen teorías completas satisfacibles y finitamente axiomatizables en la lógica proposicional.

(2) $\mathbf{L}$ es una red densa.

Prueba.

(1) En caso contrario, tendríamos un enunciado satisfacible y completo. Esto contradice al lema 3.2.

(2) Si $\mathbf{L}$ tuviera un átomo, habría un ultrafiltro principal U.

Entonces Σ_U sería una teoría satisfacible, completa y finitamente axiomatizable.. Contradicción a (1).

Por lo tanto, $\mathbf{L}$ es sin-átomos, es decir, $\mathbf{L}$ es densa.□

Como $\mathbf{L}$ es densa y contable, se tiene que:

$S(\mathbf{L})$ es perfecto (de Cantor), 2° numerable, $| S(\mathbf{L}) | = 2^{\aleph_0}$ y $C_{S(\mathbf{L})} \neq \emptyset$. Por lo que existe $U \in S(\mathbf{L})$ tal que U es

no-principal y es un punto de condensación de S(**L**).
De aquí que **L** no es atómica. **L** es un modelo de la teoría del orden parcial denso y con extremos, pero que no es total. Así ser un orden denso no implica ser un orden total. Tampoco **L** es completa, ya que $\{ [p] \mid p \in \mathbf{E} \}$ no tiene supremo. De lo contrario se contradice a la proposición 4.1.
S(**L**) no es extremadamente disconexo, pero sí es totalmente disconexo, métrico y completo.
El siguiente cuadro resume los resultados que hemos obtenido de álgebras booleanas:

B	**atómica**	**completa**	**densa**	**S(B) es perfecto**	**S(B) es e.d.**
P(X)	Sí	Sí	No	No	Sí
B_N	Sí	No	No	No	No
AR($\mathbb{R}$)	No	Sí	Sí	Sí	Sí
L	No	No	Sí	Sí	No

2._ La relación entre tres teoremas importantes.

Veamos como se relacionan el Teorema I, el Teorema IV y el Teorema VII. Para el siguiente resultado trabajaremos en B_o, el álgebra de Lindenbaum para enunciados.

Teorema IX. Son equivalentes:

(1) Teorema del Ultrafiltro. (Teorema I)

(2) Teorema de Extensión de Lindenbaum. (Teorema IV)

(3) Teorema de Compacidad. (Teorema VII)

Prueba.

-Teorema del Ultrafiltro $\Leftrightarrow$ Teorema de Extensión de Lindenbaum.

($\Rightarrow$) Sea Σ finitamente satisfacible.

Por la proposición 2, U_Σ es un filtro propio.

Por el Teorema del Ultrafiltro, hay un $U \in S(B_o)$ tal que $U_\Sigma \subseteq U$.

Por la proposición 2, $\Sigma = \Sigma_{U_\Sigma} \subseteq \Sigma_U$ y Σ_U finitamente satisfacible y completo.

($\Leftarrow$) Sea U un filtro propio.

Por la proposición 2, Σ_U es finitamente satisfacible.

Por el Teorema de Extensión de Lindenbaum, existe Σ finitamente satisfacible y completo tal que $\Sigma_U \subseteq \Sigma$.

Por la proposición 2, $U = U_{\Sigma_U} \subseteq U_\Sigma$ y U_Σ es un ultrafiltro en B_o.

-Teorema del Ultrafiltro $\Leftrightarrow$ Teorema de Compacidad.

($\Rightarrow$) Sea Σ finitamente satisfacible.

Por la proposición 2, U_Σ es un filtro propio.

Por el Teorema del Ultrafiltro, hay un $U \in S(B_o)$ tal que $U_\Sigma \subseteq U$.

Por la proposición 2, $\Sigma = \Sigma_{U_\Sigma} \subseteq \Sigma_U$ y Σ_U tiene modelo.

En particular, Σ tiene modelo.

($\Leftarrow$) Sea U un filtro propio en B_o.

Por la proposición 2, Σ_U es finitamente satisfacible.

Por el Teorema de Compacidad, Σ_U tiene modelo, digamos $\mathbf{A}$. Entonces $\Sigma_U \subseteq Th(\mathbf{A})$.

Por la proposición 2.7, $U = U_{\Sigma_U} \subseteq U_{Th(\mathbf{A})}$ el cual es un ultrafiltro en B_o.□

3._ Otro espacio de Stone.

Ya que B_nT es un álgebra booleana, podemos construir su espacio de Stone SB_nT.

?'Qué relación puede haber entre S_nT y SB_nT?

Antes de empezar se recomienda al lector ver la construcción del Espacio de Stone (Teorema III), porque los argumentos empleados ahí son similares a los empleados a continuación.

Sea T una teoría satisfacible y F_n es el conjunto de fórmulas cuyas variables libres estan entre $x_1,\ldots,x_n$, para $n \geq 0$.

Recordemos que $S_nT = \{p \subseteq F_n \mid p \text{ es un n-tipo en } T\}$

Sea $\varphi \in F_n$. Definimos:

$(\varphi) = \{ p \in S_nT \mid \varphi \in p\}$ y $\gamma_n = \{ (\varphi) \mid \varphi \in F_n\}$.

Veamos las propiedades de estos conjuntos.

γ_n es una subálgebra de $P(S_nT)$.

Es claro que $\gamma_n \subseteq P(S_nT)$. Sean (φ), $(\psi) \in \gamma_n$ entonces $(\varphi) \cap (\psi) = (\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi) \cup (\psi) = (\varphi \vee \psi)$, $(\varphi)^c = (\neg\varphi)$, $(\varphi) \cap (\neg\varphi) = \emptyset$ y $(\varphi) \cup (\neg\varphi) = S_nT$.

γ_n es base de una topología en S_nT.

Es suficiente verificar que $\cup\gamma_n = S_nT$ y que si para cualesquiera (φ), $(\psi) \in \gamma_n$ y $p \in (\varphi) \cap (\psi)$ entonces existe $(\chi) \in \gamma_n$ tal que $p \in (\chi)$ y $(\chi) \subseteq (\varphi) \cap (\psi)$.

En este caso $(\chi) = (\varphi \wedge \psi)$.

La topología generada por γ_n es $\tau_{\gamma_n} = \{\cup\gamma \mid \gamma \subseteq \gamma_n\}$.

S_nT es Hausdorff.

Sean $p \neq q \in S_nT$. Entonces existe una fórmula $\varphi \in F_n$ tal que, por ejemplo, $\varphi \in p$ y $\varphi \notin q$, lo que implica que $p \in (\varphi)$, $q \in (\varphi)^c$ y $(\varphi) \cap (\varphi)^c = \emptyset$.

S_nT es compacto.

Basta verificar que γ_n tiene una subcubierta finita de S_nT, porque γ_n es base de S_nT, por ser base de la topología de S_nT.

De lo contrario, $\gamma^*{}_n = \{(\varphi)^c \mid \varphi \in F_n\}$ tiene la pif.

Afirmamos que $H = \{[\varphi]^c \mid \varphi \in F_n\} \subseteq B_nT$, también, tiene la pif. Para ver esto consideremos que $[\varphi_i]^c \in H$, con $i = 1,\ldots, r$. Entonces $(\varphi_i)^c \in \gamma^*{}_n$, para $i = 1,\ldots, r$.

Como $\gamma^*{}_n$ tiene la pif, entonces se tiene que

$(\bigvee^r_{i=1} \varphi_i)^c = (\varphi_1)^c \cap \ldots \cap (\varphi_r)^c \neq \emptyset$.

Sea $p \in (\bigvee \varphi_i)^c$. Entonces $\neg \bigvee \varphi_i \in p$.
Por la definición de U_p y la proposición 3.3,
$[\neg \bigvee_{i=1}^{r} \varphi_i] \in U_p$ y U_p es un ultrafiltro en SB_nT, el cual tiene la pif. Así, $\bigwedge_{i=1}^{r} [\varphi_i]^c \neq 0$.
Por la proposición 2.8, existe $U \in SB_nT$ tal que $\{[\varphi]^c \mid \varphi \in F_n\} \subseteq U$.
De esta manera, $[\varphi] \notin U$, para toda $\varphi \in F_n$.
Por lo tanto, $U \notin p([\varphi])$, para toda $\varphi \in F_n$. Esto implica que $U \notin \cup \{p([\varphi]) \mid [\varphi] \in B_nT\} = SB_nT$.
Absurdo. Por lo tanto, **S_nT es un espacio de Stone.**

Para el álgebra booleana B_nT, SB_nT es su espacio de Stone y $\beta_n = \{p([\varphi]) \mid [\varphi] \in B_nT\}$ es la base de SB_nT, donde $p([\varphi]) = \{U \in SB_nT \mid [\varphi] \in U\}$.
Veamos la relación que hay entre S_nT y SB_nT.

Proposición 5. Sea T una teoría satisfacible.

(1) S_nT es un espacio de Stone, $S_nT \simeq SB_nT$ y $BS_nT \cong B_nT$.

(2) Para $p \in S_nT$ son equivalentes (a)-(d):
- (a) p es principal.
- (b) p es un punto aislado en S_nT.
- (c) U_p es un punto aislado en $S(B_nT)$.
- (d) U_p es principal.

(3) Todo punto de condensación de S_nT es no-principal.

Prueba.

(1) S_nT es un espacio de Stone, por lo anterior.
Para $p \in S_nT$, por la proposición 3.2, $U_p \in SB_nT$.
Sean $p,q \in S_nT$. Demostraremos que: $p = q \Leftrightarrow U_p = U_q$.(*)
($\Rightarrow$) Tomemos $[\varphi] \in B_nT$.
$[\varphi] \in U_p \Leftrightarrow \varphi \in p \Leftrightarrow \varphi \in q \Leftrightarrow [\varphi] \in U_q$.

($\Leftarrow$) Sea $\varphi \in F_n$.

$\varphi \in p \Leftrightarrow [\varphi] \in U_p \Leftrightarrow [\varphi] \in U_q \Leftrightarrow \varphi \in q$.

Ahora podemos definir la siguiente función $f: S_nT \rightarrow SB_nT$,

$f(p) = U_p$. Por (*), f es una función inyectiva.

Sea $U \in SB_nT$. Por la proposición 3.5, $\Sigma_U \in S_nT$.

Por la proposición 3.7, $f(\Sigma_U) = U_{\Sigma_U} = U$. Así, f es biyectiva.

Vamos a demostrar que f es continua. Para esto tomamos

$\varphi \in F_n$ y verificamos que $f^{-1}[p([\varphi])] = (\varphi)$.

$p \in f^{-1}[p([\varphi])] \Leftrightarrow U_p \in p([\varphi]) \Leftrightarrow [\varphi] \in U_p \Leftrightarrow \varphi \in p$

$\Leftrightarrow p \in (\varphi)$.

Por lo tanto, imagen inversa de abiertos es abierto.

Entonces f es continua.

Como S_nT es compacto y SB_nT es T_2, f es cerrada.

Por lo tanto, existe f^{-1} y f^{-1} es continua

Entonces f es un homeomorfismo y $S_nT \simeq SB_nT$.

Por Dualidad, $BS_nT \cong B_nT$.

(2) (a) $\Rightarrow$ (b) p es principal.

Entonces existe $\varphi \in F_n$ tal que $p = \Sigma_\varphi$. De esto, $p \in (\varphi)$.

Si $\Delta \in S_nT$ y $\varphi \in \Delta$, $p \subseteq \Delta$, por lo tanto, $p = \Delta$.

Así que $(\varphi) = \{ p \}$ y p es un punto aislado en S_nT.

(b) $\Rightarrow$(c) Como $f^{-1}[p([\varphi])] = (\varphi) = \{ p \}$,

$p([\varphi]) = \{ U_p \}$. Por lo tanto, U es un punto aislado

en SB_nT.

(c) $\Rightarrow$(a) U_p es un punto aislado en SB_nT.

Como f es biyectiva, $(\varphi) = \{ p \}$.

Esto implica que p es principal.

(c) $\Leftrightarrow$ (d) Inmediato de la proposición 3.1.1.

(3) Por las proposiciones 3.3.7 y 3.3.$\square$

4._ Tipos principales y no-principales.

De lo que trata esta sección es que un tipo principal siempre se puede realizar en cualquier modelo de la teoría, pero un no-principal se puede omitir, por un modelo contable de la teoría.

Proposición 6. Sean T una teoría completa y satisfacible, $\varphi \in F_n$ consistente con T y $p \in S_n T$. Entonces:

(1) $T \models \exists\bar{x}\varphi$.

(2) Si p es principal entonces para todo $\mathbf{A} \models T$, $\mathbf{A}$ realiza a p.

Prueba.

(1) Como φ es consistente con T, existen $\mathbf{A} \models T$ y $\bar{a} \in A^n$ tales que $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$. Entonces $\mathbf{A} \models \exists\bar{x}\varphi$, por lo que $\exists\bar{x}\varphi \in Th(\mathbf{A})$. Como T es completa, $T = Th(\mathbf{A})$ y, por lo tanto, $T \models \exists\bar{x}\varphi$.

(2) Tenemos que p es principal.

Entonces existe una $\varphi \in F_n$ tal que $p = \Sigma_\varphi$ consistente con T.

Como p es consistente con T, en particular φ es consistente con T y por (1), $T \models \exists\bar{x}\varphi$.

Sea $\mathbf{A}$ una L-estructura cualquiera, tal que $\mathbf{A} \models T$.

Entonces, $\mathbf{A} \models \exists\bar{x}\varphi$.

Por lo que para algún $\bar{a} \in A^n$ se tiene que $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$.

Sea $\psi \in p$, $T \models \varphi \rightarrow \psi$, de donde, $\mathbf{A} \models \varphi \rightarrow \psi\ [\bar{a}]$.

Por lo tanto, $\mathbf{A} \models \psi\ [\bar{a}]$. Esto significa que $\mathbf{A}$ realiza a p.□

Veamos qué ocurre cuando un tipo es no-principal.

En lo que sigue **L es un lenguaje formal contable.**

El próximo lema nos dice qué sucede con un conjunto consistente que no es principal.

Lema de Ehrenfeucht, 1958.

Sean T una teoría satisfacible, $n > 0$ y $\Sigma \subseteq F_n$ consistente con T. Si Σ no es principal en T entonces existe una L-estructura $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A} \models T$, $| A | \leq \aleph_o$ y $\mathbf{A}$ omite a Σ.

Prueba. Lo resolveremos en los siguientes pasos.

(1) Sea $C = \{c_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ un conjunto de nuevas constantes y $L' = L \cup C$. Entonces $| L'| = | L | \leq \aleph_o$.

(2) Por el lema 4.2, podemos numerar varios conjuntos en L'. En particular nos interesa tener numerados a los siguientes conjuntos: C^n, los enunciados, todas las fórmulas con una y n variables libres en L'.

Sea $C^n = \{\bar{c}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ una enumeración fija de todas las n-adas de C y $\bar{c}_k = (c_1^k,\ldots,c_n^k)$ es la k-ésima n-ada de C^n.

(3) De la prueba del Teorema de Extensión de Henkin tenemos que existe un conjunto de enunciados T' finitamente satisfacible y con testigos en L' tal que $T \subseteq T'$.

En este caso C es un conjunto de testigos para T' y $T' = \cup_{r \in \mathbb{N}} T_r$, donde $T_o = T$ y $T_{r+1} = T_r + \exists x \varphi_r(x) \rightarrow \varphi_r(c_r)$, para alguna $c_r \in C$, la cual no ocurre en T_r.

(4) Construimos una familia de conjuntos finitamente satisfacibles de enunciados en L' $\{\Delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tales que $\Delta_k \subseteq \Delta_{k+1}$ y $\Delta_{k+1} = \Delta_k + \neg\sigma_{k+1}(\bar{c}_{k+1})$, para alguna fórmula $\sigma_{k+1} \in \Sigma$ y $\bar{c}_{k+1} \in C^n$.

Definimos $\Delta_o = T'$, el cual es finitamente satisfacible, por (3).

Hipótesis de Inducción: Suponemos que Δ_k ha sido construido y que es finitamente satisfacible.

Vamos a construir Δ_{k+1}. Lo haremos en dos etapas: I y II.

(I) Sea $\bar{c}_{k+1} \in C^n$ fijo. Demostraremos lo siguiente:

$$(*) \left\{ \begin{array}{c} \text{existe una L'-fórmula } \psi \text{ tal que:} \\ \Delta_k \models \psi \text{ y} \\ \text{para toda } \varphi \in F_n,\ \Delta_k \models \varphi(\bar{c}_{k+1}) \Leftrightarrow T \models \psi \rightarrow \varphi(\bar{c}_{k+1}). \end{array} \right.$$

Para la primera afirmación de (*) consideremos que
$\Delta_k \models \varphi(\bar{c}_{k+1})$. Por H.I., observamos que
$\Delta_k = T' + \{ \neg\sigma_1(\bar{c}_1), ..., \neg\sigma_k(\bar{c}_k) \}$ es una extensión finita de T'.
Por el Teorema de la Deducción (TD) y exportación-importación:
$T' \models \bigwedge_{i=1}^{k} \neg\sigma_i(\bar{c}_i) \rightarrow \varphi(\bar{c}_{k+1})$.
Por el Lema de Finitud y la construcción de T', existe
$r \in \mathbb{N}$ tal que: $T_r \models \bigwedge_{i=1}^{k} \neg\sigma_i(\bar{c}_i) \rightarrow \varphi(\bar{c}_{k+1})$.
Pero T_r es una extensión finita de T. Esta r no depende de φ, sino más bien depende de $\neg\sigma_1(\bar{c}_1),..., \neg\sigma_k(\bar{c}_k)$ y de $\bar{c}_{k+1}$ los cuales estan fijos, por hipótesis de inducción y la hipótesis de $\bar{c}_{k+1}$.
Por el TD y exportación-importación:
(**) $T \models (\bigwedge_{j=1}^{r} (\exists x\varphi_j \rightarrow \varphi_j(c_j)) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} \neg\sigma_i(\bar{c}_i)) \rightarrow \varphi(\bar{c}_{k+1})$
El número de constantes nuevas que ocurren en el antecedente de la implicación (**) es finito y, posiblemente, incluyen a las constantes de $\bar{c}_{k+1}$. Sean $c_1,...,c_m$, con $m \geq n$. En esta lista se incluyen las constantes que ocurren en $\bar{c}_1,...,\bar{c}_k,\bar{c}_{k+1}$ y todos los testigos que ocurren en (**).
Consideremos la siguiente fórmula:
$\chi(c_1,...,c_m) = \bigwedge_{j=1}^{r} (\exists x\varphi_j \rightarrow \varphi_j(c_j)) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} \neg\sigma_i(\bar{c}_i)$.
Reescribimos (**) como: $T \models \chi(c_1,...,c_m) \rightarrow \varphi(\bar{c}_{k+1})$.
Por el TD y Lema de Constantes, GE:
$T \models \exists x_{n+1}...\exists x_m\ \chi(c_1,...,c_n,x_{n+1},...,x_m) \rightarrow \varphi(\bar{c}_{k+1})$;
considerando que $c_{n+1},...,c_m$ no ocurren en $\bar{c}_{k+1}$.
Sea $\psi = \exists x_{n+1}...\exists x_m\ \chi(c_1,...,c_n,x_{n+1},...,x_m)$ en la implicación anterior. Es claro que ψ es una L'-fórmula y obtenemos que
(***) $T \models \psi \rightarrow \varphi(\bar{c}_{k+1})$.
Como $\Delta_k \models \bigwedge_{j=1}^{r} (\exists x\varphi_j \rightarrow \varphi_j(c_j)) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} \neg\sigma_i(\bar{c}_i)$.
Entonces, $\Delta_k \models \chi(c_1,...,c_m)$.
Por GE resulta que $\Delta_k \models \exists x_{n+1}...\exists x_m\ \chi(c_1,...,c_n,x_{n+1},...,x_m)$,

es decir, $\Delta_k \models \psi$.

Ahora verificamos la segunda afirmación de (*)

($\Rightarrow$) Por construcción de ψ.

($\Leftarrow$) Por (***), $T \models \psi \rightarrow \varphi(\bar{c}_{k+1})$.

Pero $T \subseteq \Delta_k$ entonces $\Delta_k \models \psi \rightarrow \varphi(\bar{c}_{k+1})$.

Por la primera afirmación de (*), $\Delta_k \models \psi$ y por Modus Ponens obtenemos $\Delta_k \models \varphi(\bar{c}_{k+1})$.

(II) De (*) sabemos que $\Delta_k \models \psi$.

Por Hipótesis de Inducción, Δ_k es finitamente satisfacible.

Por lo tanto, $\Delta_k \not\models \neg\psi$, lo que implica que $T \not\models \neg\psi$.

Esto significa que ψ es consistente con T.

Como Σ no es principal, existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $T \not\models \psi \rightarrow \sigma(\bar{c}_{k+1})$. Por (*), $\Delta_k \not\models \sigma(\bar{c}_{k+1})$.

Entonces $\Delta_k + \neg\sigma(\bar{c}_{k+1})$ es finitamente satisfacible.

Sean $\sigma_{k+1} = \sigma$ y $\Delta_{k+1} = \Delta_k + \neg\sigma_{k+1}(\bar{c}_{k+1})$. Es claro que Δ_{k+1} es finitamente satisfacible y que $\Delta_k \subseteq \Delta_{k+1}$.

(5) Si $\Delta = \cup_{k \in N}\Delta_k$ entonces Δ es finitamente satisfacible, por la proposición 4.4.3.

(6) Por el Teorema de Extensión de Lindenbaum, existe un conjunto de enunciados Γ tal que Γ es finitamente satisfacible, completo y $\Delta \subseteq \Gamma$. Por el lema 4.4, Γ tiene testigos en L'.

(7) Por el Teorema VI, existe una L'-estructura $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{B} \models \Gamma$, $|B| \leq \aleph_0$ y para cualquier $b \in B$ existe $c \in C$ tal que $c^{\mathbf{B}} = b$.

(8) Sea $\mathbf{A} = \mathbf{B} \lceil L$.

Entonces, por la proposición 4.5.3, $\mathbf{A} \models T$ y $|A| \leq \aleph_0$.

(9) Afirmamos que $\mathbf{A}$ omite a Σ.

Sea $\bar{a} \in A^n$. Entonces, por (7), existe $\bar{c} \in C^n$ tal que $c_i^{\mathbf{A}} = a_i$, para $i = 1,2,\ldots,n$.

conjunto de tipos principales $\Leftrightarrow$ para todo $\mathbf{A} \models T$, $\mathbf{A}$ realiza a p_k, para toda $k \in \mathbf{N}$.

Prueba.

($\Rightarrow$) Inmediato de las proposición 2.

($\Leftarrow$) Por reducción al absurdo y el Teorema X.□

Corolario 3. Sean T una teoría satisfacible y completa. Entonces, $\{ p_k \mid p_k \in S_{n_k}T$, para toda $k \in \mathbf{N} \}$ es una familia de tipos no-principales en T $\Leftrightarrow$ existe una L-estructura $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A} \models T$, $|A| \leq \aleph_0$ y $\mathbf{A}$ omite a p_k, para toda $k \in \mathbf{N}$.

Prueba.

($\Rightarrow$) Inmediato del corolario 1.

($\Leftarrow$) Inmediato del Teorema X.□

Corolario 4. Sea T una teoría satisfacible y completa. Entonces, $\{ p_k \mid p_k \in S_{n_k}T$, para toda $k \in \mathbf{N} \}$ es un conjunto puntos aislados en el espacio de Stone de T $\Leftrightarrow$ para todo $\mathbf{A} \models T$, $\mathbf{A}$ realiza a p_k, para toda $k \in \mathbf{N}$.

Prueba. Inmediato de las proposiciones 5.2, 6.2 y del corolario 2.□

Corolario 5. Sea T una teoría satisfacible y completa. Si $\{ p_k \mid p_k \in S_{n_k}T$, para toda $k \in \mathbf{N} \}$ es un conjunto de puntos de condensación en el espacio de Stone de T entonces se cumplen:

(a) para toda $k \in \mathbf{N}$, p_k es no-principal.

(b) existe una L-estructura $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A} \models T$, $|A| \leq \aleph_0$ y $\mathbf{A}$ omite a p_k, para toda $k \in \mathbf{N}$.

Prueba.

(a) es inmediato de la proposición 3.3.8.

(b) se sigue de (a) y del corolario 3.□

Corolario 6. Sea T una teoría satisfacible y completa. Si $\{ p_k \mid p_k \in S_{n_k}T$, para toda $k \in \mathbf{N} \}$ es un conjunto magro en el espacio de Stone de T entonces existe una L-estructura

A tal que $\mathbf{A} \models T$, $|\mathbf{A}| \leq \aleph_0$ y A omite a p_k, para toda $k \in \mathbf{N}$.

Prueba. Inmediato de la proposición 3.1.6 y el corolario 3.□

CAPÍTULO 6

TEORÍA DE MODELOS

Veremos la manera en que se pueden relacionar los modelos de una teoría dada, obtendremos un modelo a partir de otros, en especial veremos la construcción del ultraproducto y caracterizamos la clase de modelos de una teoría y de una teoría finitamente axiomatizable por medio de ultraproductos y ultrapotencias. Con ultraproductos probamos un teorema debido a A. Robinson.

Relaciones entre Estructuras

Definición 1. Sean L un lenguaje formal y $\mathbf{A},\mathbf{B}$ unas L-estructuras.

(a) $\mathbf{A}$ es una subestructura de $\mathbf{B}$ ($\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$) $\Leftrightarrow$ se cumplen:

(i) $A \subseteq B$,

(ii) $c^{\mathbf{A}} = c^{\mathbf{B}}$, para toda constante c de L,

(iii) $P^{\mathbf{A}} = P^{\mathbf{B}} \lceil A^n$, para todo predicado P de aridad n de L y

(iv) $f^{\mathbf{A}} = f^{\mathbf{B}} \lceil A^n$, para todo símbolo funcional de aridad n de L.

(b) $\mathbf{A}$ es una subestructura elemental de $\mathbf{B}$ ($\mathbf{A} \precsim \mathbf{B}$) $\Leftrightarrow$ se cumplen:

(i) $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ y

(ii) Para cualesquiera L-fórmula φ y $s \in {}^{\omega}A$ se tiene que:

$\mathbf{A} \models \varphi[s] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi\,[s]$.

(c) $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son elementalmente equivalentes ($\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$) $\Leftrightarrow$ para todo enunciado φ, $\mathbf{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi$.

(d) h es un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ ($h{:}\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$) $\Leftrightarrow$ se cumplen:

(i) $h{:}A \longrightarrow B$,

(ii) $h(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{B}}$, para toda constante c de L,

(iii) $h(f^{\mathbf{A}}(a_1 \ldots a_n)) = f^{\mathbf{B}}(\, h(a_1) \ldots h(a_n))$ para todo símbolo funcional de aridad n de L y

(iv) $P^{\mathbf{A}}(a_1...a_n) \Rightarrow P^{\mathbf{B}}(h(a_1)...h(a_n))$, para todo predicado P de aridad n de L.

(e) h es una inmersión elemental de A en B ($h:\mathbf{A} \propto \mathbf{B}$) $\Leftrightarrow$ se cumplen:

(i) h es un homomorfismo.

(ii) Para cualesquiera φ fórmula y $s \in {}^{\omega}A$,

$\mathbf{A} \models \varphi[s] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi[h \circ s]$.

(f) A se puede sumergir en B ($\mathbf{A} \propto \mathbf{B}$) $\Leftrightarrow$ existe $h:\mathbf{A} \propto \mathbf{B}$ y h es una inmersión elemental.

(g) h es un isomorfismo de A en B $\Leftrightarrow$ h es biyectiva y h, h^{-1} son homomorfismos.

(h) A es isomorfo a B ($\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$) $\Leftrightarrow$ existe un isomorfismo $h:\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$.

Ejemplos.

-La función $1_{\mathbf{A}}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$, definida por $1_{\mathbf{A}}(x) = x$, es un isomorfismo y, por tanto, $\mathbf{A} \cong \mathbf{A}$.

-Para $\mathbf{A} = \langle \mathbf{N}, \leq \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle \mathbf{Z}, \leq \rangle$, se tiene que $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$.

Pero si $\varphi = \exists x \forall y\ Pxy$ (hay mínimo) entonces $\mathbf{A} \models \varphi[s]$ y $\mathbf{B} \not\models \varphi[s]$, donde $s(i) = 0$, para toda $i \in \mathbf{N}$.

Así, $\mathbf{A} \not\preceq \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \not\equiv \mathbf{B}$ y $i_{\mathbf{A}}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ (la inclusión) es inyectiva, pero no es una inmersión elemental.

Sean **A, B** L-estructuras, $h:\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ y $s \in {}^{\omega}A$. Entonces $h \circ s \in {}^{\omega}B$.
La demostración de las proposiciones 1,2 y 5 son básicamente técnicas y quedan a cargo del lector.

Proposición 1. Sean L un lenguaje formal, **A**, **B** unas L-estructuras, $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, ψ una L-fórmula sin cuantificadores y $s \in {}^{\omega}A$. Entonces:

(1) Si $t = t(\bar{x})$ es un término entonces $t^{\mathbf{A}}[s] = t^{\mathbf{B}}[s]$.

(2) $\mathbf{A} \models \psi[s] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \psi[s]$.

(3) Si $\mathbf{A} \models \exists\bar{x}\psi$ entonces $\mathbf{B} \models \exists\bar{x}\psi$.

(4) Si $\mathbf{B} \models \forall\bar{x}\psi$ entonces $\mathbf{A} \models \forall\bar{x}\psi$.□

Proposición 2. Sean L un lenguaje formal y **A**, **B** unas L-estructuras.

(1) Si $\mathbf{A} \precsim \mathbf{B}$ entonces $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

(2) $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathrm{Th}(\mathbf{A}) = \mathrm{Th}(\mathbf{B})$.

(3) "$\equiv$" es una relación de equivalencia.□

Proposición 3. Sea T una teoría.

T es completa $\Leftrightarrow$ para cualesquiera L-estructuras **A**,**B**,
si $\mathbf{A}, \mathbf{B} \models \mathrm{T}$ entonces $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

Prueba. Por contrapositiva.

(1) ($\Rightarrow$) Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \models \mathrm{T}$. Supongamos que $\mathbf{A} \not\equiv \mathbf{B}$.
Entonces hay un enunciado φ tal que $\mathbf{A} \models \mathrm{T} + \varphi$ y $\mathbf{B} \models \mathrm{T} + \neg\varphi$.
Por lo tanto, T es incompleta.
($\Leftarrow$) Sea T incompleta.
Entonces existe un enunciado φ tal que $\mathrm{T} \not\models \varphi$ y $\mathrm{T} \not\models \neg\varphi$.
Esto significa que existen L-estructuras **A**,**B** tales que $\mathbf{A} \models \mathrm{T} + \varphi$ y
$\mathbf{B} \models \mathrm{T} + \neg\varphi$. Lo que implica que $\mathbf{A} \not\equiv \mathbf{B}$.□

Proposición 4. Sean **A**, **B** unas L-estructuras, $h{:}\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y $s \in {}^{\omega}A$.
Entonces:

(1) Si h es un homomorfismo y t es un término entonces
$t^{\mathbf{A}}[s] = t^{\mathbf{B}}[h \circ s]$.

(2) Si h es un homomorfismo $h[\mathbf{A}] \subseteq \mathbf{B}$ y $h^{-1}[\mathbf{B}] \subseteq \mathbf{A}$.

(3) Si h es una inmersión entonces h es inyectiva, $h[\mathbf{A}] \precsim \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

(4) Si h y $g{:}\mathbf{B} \to \mathbf{C}$ son homomorfismos entonces $g \circ f : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ es un homomorfismo. Lo mismo sucede para inmersiones e isomorfismos.

(5) Si h es biyectiva entonces, h es un isomorfismo $\Leftrightarrow$ se cumplen (i), (ii), (iii) de la definición 1.d y además,
(iv') $P^{\mathbf{A}}(a_1,\ldots,a_m) \Leftrightarrow P^{\mathbf{B}}(h(a_1),\ldots,h(a_m))$.

(6) "$\cong$" es una relación de equivalencia.

Prueba. (1),(2) y (4) son para el lector.

(3) Por (2), $h[\mathbf{A}] \subseteq \mathbf{B}$. Sean φ una fórmula, $s \in {}^{\omega}A$ y $h \circ s \in {}^{\omega}h[A]$. Entonces existen $a_1,\ldots,a_m \in A$ tales que $h(a_i) = b_i$, para $1 \leq i \leq m$ y se tiene: $h[\mathbf{A}] \models \varphi\ [h \circ s] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi\ [s] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi\ [h \circ s]$.

Sea $h(a) = h(b)$. Entonces $\mathbf{B} \models (x \approx y)[h(a),h(b)]$.

Como h es inmersión elemental, $\mathbf{A} \models (x \approx y)[a,b]$, es decir, $a = b$.

Con esto h es inyectiva.

(5) (Recuerde la proposición 2.3.3)

($\Rightarrow$) Como h^{-1} es homomorfismo, el regreso de (iv') se cumple.

($\Leftarrow$) Ya que h es biyectiva, existe h^{-1}.

Falta verificar que h^{-1} es un homomorfismo.

Para $a \in A$ y $b \in B$, se tiene que: $h^{-1}(b) = a \Leftrightarrow h(a) = b$.

$h^{-1}(c^{\mathbf{B}}) = h^{-1}(h(c^{\mathbf{A}})) = c^{\mathbf{A}}$.

$h^{-1}(f^{\mathbf{B}}(b_1,\ldots,b_m)) = h^{-1}(f^{\mathbf{B}}(h(a_1),\ldots,h(a_m))) = h^{-1}(h(f^{\mathbf{A}}(a_1,\ldots,a_m))) =$

$f^{\mathbf{A}}(a_1,\ldots a_m) = f^{\mathbf{A}}(h^{-1}(b_1),\ldots,h^{-1}(b_m))$.

Por (iv'): $P^{\mathbf{B}}(b_1,\ldots,b_m) \Rightarrow P^{\mathbf{A}}(a_1,\ldots,a_m)$.

Es decir, $P^{\mathbf{A}}(h^{-1}(b_1),\ldots,h^{-1}(b_m))$. Esto prueba que h^{-1} es un homomorfismo y por tanto, h es un isomorfismo.□

Veamos el concepto de satisfacción a través de homomorfismos.

Proposición 5. (Satisfacción a través de homomorfismos)
Sean **A**, **B** L-estructuras, $h:\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorfismo, $s \in {}^{\omega}A$ y φ una fórmula. Entonces:

(1) Si φ no tiene cuantificadores, ni los símbolos $\approx$ y $\neg$ entonces
($*$) $\mathbf{A} \models \varphi\ [s] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi\ [h \circ s]$.

(2) Si h es inyectiva y φ no tiene a los símbolos "$\neg$" y "$\exists$ " entonces ($*$) se cumple.

(3) Si h es suprayectiva y φ no tiene a los símbolos"$\approx$" y "$\neg$" entonces ($*$) se cumple.

(4) Si h es biyectiva entonces ($*$) se cumple.□

En la siguiente proposición veremos cómo se relacionan los modelos de una teoría y sus n-tipos con subestructuras elementales, inmersiones elementales y homomorfismos.

Proposición 6. Sean L un lenguaje formal, T una teoría, $\Sigma \subseteq F_n$, $p \in S_n T$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ L-estructuras. Entonces:

(1) Si $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$ entonces $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} \propto \mathbf{B}$.

(2) Si $\mathbf{A} \models T$ y $\mathbf{A} \precsim \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \propto \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ o $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$ entonces $\mathbf{B} \models T$.

(3) Supongamos que $\mathbf{A}$ realiza a Σ.
Si $\mathbf{A} \precsim \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \propto \mathbf{B}$ o $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$ entonces $\mathbf{B}$ realiza a Σ.

(4) Sea $\mathbf{A} \models T$ y supongamos que $\mathbf{A}$ realiza a $p \in S_n T$.
Si $\mathbf{A} \precsim \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \propto \mathbf{B}$ o $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$ entonces $\mathbf{B}$ realiza a p.

(5) Si $\mathbf{A}, \mathbf{B} \models T$, $\mathbf{A}$ realiza a Σ, $\mathbf{B}$ omite a Σ y Σ es principal entonces T es incompleta y $\mathbf{A} \not\cong \mathbf{B}$.

Prueba.

(1) Como $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$, existe $h{:}\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ isomorfismo.
Sean φ un L-enunciado y $s \in {}^{\omega}\mathbf{A}$. Por la proposición 5.4, se tiene:
$\mathbf{A} \models \varphi\, [s] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi\, [h \circ s]$.
Pero φ es un L-enunciado. Entonces, $\mathbf{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi$.
Por la proposición 5.4, h es un inmersión elemental. Así $\mathbf{A} \propto \mathbf{B}$.

(2) Inmediato de las definiciones y (1).

(3) Como $\mathbf{A}$ realiza a Σ, existe $\bar{a} \in A^n$ tal que para toda $\varphi \in \Sigma$, $\mathbf{A} \models \varphi\, [\bar{a}]$.
Si $\mathbf{A} \precsim \mathbf{B}$ entonces $\mathbf{B} \models \varphi\, [\bar{a}]$.
Si $\mathbf{A} \propto \mathbf{B}$ entonces existe $h{:}\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ elemental y, por lo tanto, $\mathbf{B} \models \varphi\, [h(\bar{a})]$.
Si $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$ entonces $h{:}\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ isomorfismo y, por lo tanto, $\mathbf{B} \models \varphi\, [h(\bar{a})]$.
En cualquier caso $\mathbf{B}$ realiza a Σ.

(4) Inmediato de (3).

(5) Como Σ es principal entonces, para alguna $\varphi \in F_n$, $\Sigma = \Sigma_\varphi$.

Como **B** omite a Σ, **B** omite a φ. Entonces $\mathbf{B} \not\models \exists\bar{x}\varphi(\bar{x})$.

Ya que **A** realiza a Σ, **A** realiza a φ. Entonces $\mathbf{A} \models \exists\bar{x}\varphi(\bar{x})$.

Claramente $\mathbf{A} \not\equiv \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} \not\cong \mathbf{B}$. Por la proposición 3, T es incompleta.□

En la proposición 6.5, la hipótesis de que Σ no es principal es importante. En el apéndice 2, hay un contraejemplo a este resultado, si tal hipótesis falta. Para más detalles ver [1], [2], [3] y [5].

Ultraproductos

Veremos la construcción del ultraproducto y algunas de sus propiedades. Tal construcción fue hecha por el matemático polaco Jerzy Loš.
Lo haremos en los siguientes pasos.
Paso 1. Sean $I \neq \emptyset$ y $\{\mathbf{A}_i\}_{i \in I}$ una familia de L-estructuras.
Por el **AE**, $A = \Pi_{i \in I} A_i = \{g \mid g : I \to \cup_{i \in I} A_i,\ g(i) \in A_i\} \neq \emptyset$.
Tenemos que, para cada $j \in I$, las funciones proyección definidas como $pr_j : \Pi_{i \in I} A_i \to A_j$, $pr_j(f) = f(j)$ es suprayectiva.
Paso 2. Como $I \neq \emptyset$, por **AE**, hay un ultrafiltro U de I.
Paso 3. Para $g,h \in A$, definimos **el igualador de g y h** como: $[g,h] = \{i \in I \mid g(i) = h(i)\}$. Es claro que $[g,h] \subseteq I$.
Paso 4. Sean $g,h \in A$ y U el ultrafiltro de I, dado en el paso 2.
Definimos: g es **U-equivalente** a h ($g \sim_U h$) $\Leftrightarrow$ $[g,h] \in U$.

Lema 1. $\sim_U$ es una relación de equivalencia en **A**.
Prueba. Inmediato de: $[g,g] = I$, $[g,h] = [h,g]$ y $[g,h] \cap [h,k] \subseteq [g,k]$.□

Paso 5. $A / U = \{[g] \mid g \in A\}$ es el conjunto cociente, donde $[g]$ es la clase de equivalencia de $g \in A$.
Definimos en A / U las siguientes relaciones y operaciones:

$c^{A/U} = [g^c]$, donde $g^c(i) = c^{A_i}$, para toda $i \in I$.

$f^{A/U}([g_1],\ldots,[g_m]) = [h] \Leftrightarrow \{i \in I \mid f^{A_i}(g_1(i),\ldots,g_m(i)) = h(i)\} \in U$.

$P^{A/U}([g_1],\ldots,[g_m]) \Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathbf{A}_i \models P(x_1,\ldots,x_m)[g_1(i),\ldots,g_m(i)]\} \in U$.

Veamos que estas relaciones y operaciones en A / U estan bien definidas.

Lema 2. Para cada $k \in \{1,...,m\}$, sean $g_k, g_k' \in A$ tales que $g_k \sim_U g_k'$. Entonces:

(1) $f^{A/U}([g_1],...,[g_m]) = f^{A/U}([g_1'],...,[g_m'])$.
(2) $P^{A/U}([g_1],...,[g_m]) \Leftrightarrow P^{A/U}([g_1'],...,[g_m'])$.

Prueba.

Como $g_k \sim_U g_k'$, $[g_k, g_k'] \in U$, para $1 \leq k \leq m$.
Entonces, $H = \cap_{k=1}^{m} [g_k, g_k'] \in U$.
(1) Sea $i \in H \Rightarrow g_k(i) = g_k'(i)$, para $1 \leq k \leq m$.
Entonces, $f^{\mathbf{A}_i}(g_1(i),...,g_m(i)) = f^{\mathbf{A}_i}(g_1'(i),..., g_m'(i))$,
y así, $i \in \{i \in I \mid f^{\mathbf{A}_i}(g_1(i),...,g_m(i)) = f^{\mathbf{A}_i}(g_1'(i),..., g_m'(i))\} =$
$[f^{\mathbf{A}_i}(g_1(i),...,g_m(i)), f^{\mathbf{A}_i}(g_1'(i),..., g_m'(i))]$,
esto es, $H \subseteq [f^{\mathbf{A}_i}(g_1(i),...,g_m(i)), f^{\mathbf{A}_i}(g_1'(i),..., g_m'(i))]$,
por lo tanto, tenemos que:
$[f^{\mathbf{A}_i}(g_1(i),...,g_m(i)), f^{\mathbf{A}_i}(g_1'(i),..., g_m'(i))] \in U$,
es decir, $[f^{\mathbf{A}_i}(g_1(i),...,g_m(i))] = [f^{\mathbf{A}_i}(g_1'(i),..., g_m'(i))]$.
Así, obtenemos: $f^{A/U}([g_1],...,[g_k]) = f^{A/U}([g_1'],...,[g_m'])$.
(2) Sea $i \in H$. Entonces $g_k(i) = g_k'(i)$, para $1 \leq k \leq m$. Así,
$\{ i \in I \mid \mathbf{A}_i \models P(x_1,...,x_m)[g_1(i),...,g_m(i)]\} =$
$= \{ i \in I \mid \mathbf{A}_i \models P(x_1,...,x_m)[g_1'(i),...,g_m'(i)]\}$.
Así que, si $P^{A/U}([g_1],...,[g_m])$ entonces
$\{ i \in I \mid \mathbf{A}_i \models P(x_1,...,x_m)[g_1'(i),...,g_m'(i)]\} \in U$.
Por lo tanto, $P^{A/U}([g_1'],...,[g_m'])$ y recíprocamente.□

Paso 6. Por el lema 2, tenemos una nueva L-estructura, llamada el **Ultraproducto**, denotado por $\Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i \,/\, U$.
Notamos que π: $\Pi_{i\in I}A_i \rightarrow \Pi_{i\in I} A_i/ U$, es suprayectiva, lo que implica que, por el **AE**, $| \Pi_{i\in I} A_i/ U | \leq | \Pi_{i\in I} A_i |$.
En el caso de que $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}$, para toda $i \in I$, se tiene la **Ultrapotencia** de **A** ($\mathbf{A}^I/ U$).

Ahora veamos para qué sirve el ultraproducto.

Sean $s = ([g_i]_{i \in \mathbf{N}}) \in {}^{\omega}(\Pi_{i \in I} A_i / U)$; $[h] \in \Pi_{i \in I} A_i / U$; $j \in I$, $k \in \mathbf{N}$ y φ una L-fórmula.
$s(k/[h]) = ([g_1],\ldots,[g_{k-1}],[h],[g_{k+1}],\ldots) \in {}^{\omega}(\Pi_{i \in I} A_i / U)$, es la sucesión obtenida de s al sustituir $[g_k]$ por $[h]$.
Definimos $s(j) = ([g_i(j)])_{i \in \mathbf{N}} = ([g_1(j)],[g_2(j)],\ldots) \in {}^{\omega}(\Pi_{i \in I} A_i)$.
Verifique el lector que $s(k/[h])(j) = s(j)(k/h(j))$.
Definimos $A_\varphi = \{j \in I \mid \mathbf{A}_j \models \varphi[s(j)]\}$. Es claro que $A_\varphi \subseteq I$.
El siguiente lema ayudará en la prueba del Teorema XI y su demostración es meramente técnica lo que significa que queda para el lector.

Lema 3. Sea $A_\varphi = \{i \in I \mid \mathbf{A}_i \models \varphi\ [s(i)]\}$. Entonces:

(a) $A_{\psi \wedge \chi} = A_\psi \cap A_\chi$.

(b) $A_{\neg\psi} = A_\psi^c$.

(c) Sea $\varphi = \exists x_k \psi$. Entonces,

$A_\varphi = \{j \in I \mid$ existe $[h] \in \Pi_{i \in I} A_i/U$ tal que $\mathbf{A}_i \models \varphi\ [s(k / [h])(j)]\}$.□

El siguiente resultado se debe a Loš, 1955.

Teorema XI. Teorema de Loš o del Ultraproducto.
Sean $I \neq \emptyset$, U un ultrafiltro de I, $\{\mathbf{A}_i\}_{i \in I}$ una familia de L-estructuras, φ una fórmula y $s \in {}^{\omega}(\Pi_{i \in I} \mathbf{A}_i / U)$. Entonces:

(1) $\Pi_{i \in I} \mathbf{A}_i / U \models \varphi[s] \Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathbf{A}_i \models \varphi\ [s(i)]\} \in U$.

(2) Si φ es un enunciado entonces

$\Pi_{i \in I} \mathbf{A}_i / U \models \varphi \Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathbf{A}_i \models \varphi\} \in U$.

Prueba.

(1) La prueba se hará por inducción en fórmulas.

Sea $\mathbf{B} = \Pi_{i \in I} \mathbf{A}_i / U$ y $s = ([g_i]) \in {}^{\omega}(\Pi_{i \in I} \mathbf{A}_i / U)$

Lo que demostraremos es que: $\mathbf{B} \models \varphi[s] \Leftrightarrow A_\varphi \in U$. (*)

Veamos el caso cuando φ es atómica. (*) es cierto para φ por la construcción del ultraproducto

Hipótesis de Inducción (HI), (*) se cumple para ψ y χ L-fórmulas.

Supongamos que $\varphi = \psi \wedge \chi$.

$\mathbf{B} \models \psi \wedge \chi\ [s] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \psi\ [s]$ y $\mathbf{B} \models \chi\ [s] \Leftrightarrow$

por HI y por el lema 3.a, $A_\psi \cap A_\chi \in U$. Por lo tanto, $A_{\psi\wedge\chi} \in U$

Ahora el caso de que $\varphi = \neg\psi$.

$\mathbf{B} \models \neg\psi\ [s] \Leftrightarrow \mathbf{B} \not\models \psi\ [s] \Leftrightarrow A_\psi \notin U$, por H.I.$\Leftrightarrow$

por ser U ultrafiltro y por el lema 3.b, $A_{\neg\psi} \in U$.

Finalmente el caso cuando $\varphi = \exists x_k \psi$.

$\mathbf{B} \models \exists x_k \psi\ [s] \Leftrightarrow$ existe $[h] \in \mathbf{B}$

tal que $\mathbf{B} \models \psi\ [s(k\ /\ [h]] \Leftrightarrow$ por H.I., $A_\psi \in U$.

Es decir, por el lema 3.c, $A_{\exists x_k \psi} \in U$.

(2) Inmediato de (1).□

Cuando $\mathbf{A} = \mathbf{A}_i$, para toda $i \in I$, tenemos la siguiente función diagonal $d{:}A \rightarrow A^I$, $d(a) = g^a$, donde $g^a(i) = a$, para toda $i \in I$.
Veamos algunas propiedades de estos conceptos.

Proposición 7. Sean L un lenguaje formal, $I \neq \emptyset$, $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$ una familia de L-estructuras y U un ultrafiltro de I. Entonces:

(1) Si Σ es un conjunto de enunciados y $\mathbf{A}_i \models \Sigma$, para toda $i \in I$ entonces $\Pi_{i\in I}\, \mathbf{A}_i\ /\ U \models \Sigma$.

(2) Si U es principal entonces existe $j \in I$ tal que $\Pi_{i\in I}\, \mathbf{A}_i\ /\ U \cong \mathbf{A}_j$

(3) Si $\mathbf{A} = \mathbf{A}_i$, para toda $i \in I$ y $\hat{d}{:}\ \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^I\ /\ U$, $\hat{d}(a) = \pi \circ d\ (a) = [g^a]$. Entonces, $\hat{d}$ es una inmersión elemental y $\mathbf{A}^I\ /\ U \equiv \mathbf{A}$.

(4) El Teorema de Loš implica al Teorema de Compacidad.

Prueba.

(1) Inmediato del Teorema XI.2.

(2) Como U es principal, existe $j \in I$ tal que $U = \{J \subseteq I \mid j \in J\}$.

Entonces, $f \sim_U g \Leftrightarrow \{i\ \in\ I\ \mid\ f(i) = g(i)\} \in U \Leftrightarrow f(j) = g(j)$, es decir,

$f \sim_U g \Leftrightarrow f(j) = g(j)$ (*)

Definimos $F{:}\Pi_{i\in I} \mathbf{A}_i\ /\ U \rightarrow \mathbf{A}_j$, $F([f]) = f(j)$.

Por (*), F es una función inyectiva. Es claro que F es suprayectiva.

Veamos que F es una homomorfismo.

$f^{\Pi A_i / U}([g_1],...,[g_n]) = [h] \Leftrightarrow f^{A_j}(g_1(j),...,g_n(j)) = h(j)$. Por lo tanto, $F(f^{\Pi A_i / U}([g_1],...,[g_n])) = F([h]) = h(j) = f^{A_j}(g_1(j),...,g_n(j)) =$ $f^{A_j}(F([g_1]),...,F([g_n]))$.

$P^{\Pi A_i / U}([g_1],...,[g_n]) \Leftrightarrow P^{A_j}(g_1(j),...,g_n(j)) \Leftrightarrow$ $P^{A_j}(F([g_1]),...,F([g_n]))$.

$F(c^{\Pi A_i / U}) = F([g^c]) = g^c(j) = c^{A_j}$, por el paso 5 de la construcción del ultraproducto.

Así F es un isomorfismo y $\Pi_{i \in I}\mathbf{A}_i / U \cong \mathbf{A}_j$. De hecho $\pi \circ F = pr_j$.

(3) Sea $s \in {}^{\omega}(\mathbf{A}^I / U)$ y φ un enunciado.

$\mathbf{A} \models \varphi[s] \Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathbf{A} \models \varphi[s]\} \in U \Leftrightarrow$

$\mathbf{A}^I / U \models \varphi[s] \Leftrightarrow \mathbf{A}^I / U \models \varphi[d \circ s]$, por el lema 3.3.

(4) (Morel, Scott y Tarski, 1958)

Sean Σ un conjunto de enunciados finitamente satisfacible.

P.D. Σ tiene modelo.

Consideremos a $J = \{ \Sigma_o \subseteq \Sigma \mid \Sigma_o$ es finito$\}$ como un conjunto de índices. Formamos $\Omega^* = \{ \Delta \in J \mid \Omega \subseteq \Delta\}$, para $\Omega \in J$.

Entonces $\Omega^* \subseteq I$, $\Omega^* \neq \emptyset$, pues $\Omega \in \Omega^*$.

Sea $H = \{\Omega^* \mid \Omega \in J\} \subseteq P(J)$. Afirmamos que H tiene la pif.

Por hipótesis, para cada $\Omega \in J$, existe $\mathbf{B}_\Omega \models \Omega$.

Sean $\Omega_1,...,\Omega_r \in H$. Para $1 \leq j \leq r$: $\Omega_j \subseteq \cup_{i=1}^r \Omega_i$, es decir, $\cup_{i=1}^r \Omega_i \in \Omega_j^*$. Esto implica que: $\cup_{i=1}^r \Omega_i \in \cap_{i=1}^r \Omega_i^*$ y por lo tanto, $\cap_{i=1}^r \Omega_i^* \neq \emptyset$. Así, H tiene la pif.

Entonces existe U ultrafiltro de J tal que $H \subseteq U$.

Consideremos el ultraproducto $\mathbf{A} = \Pi_{\Delta \in I} \mathbf{B}_\Delta / U$.

Afirmamos que $\mathbf{A} \models \Sigma$. En efecto, sea $\sigma \in \Sigma$.

Para cualquier $\Delta \in \sigma^*$, $\mathbf{B}_\Delta \models \sigma$, por lo que $\sigma^* \subseteq \{\Delta \in J \mid \mathbf{B}_\Delta \models \sigma\}$.

Pero $\sigma^* \in U$, entonces, $\{\Delta \in J \mid \mathbf{B}_\Delta \models \sigma\} \in U$.

Por el Teorema XI, $\mathbf{A} \models \sigma$. Finalmente $\mathbf{A} \models \Sigma$.□

Consulte [2], [4], [5] y [14] para más información.

Aplicaciones

1._ Definibilidad.

Dada una estructura podemos definir subconjuntos de ésta por medio de fórmulas.

Definición 2. Sean $\mathbf{A}$ una L-estructura y $B \subseteq A^n$.

B es **definible** en $\mathbf{A}$ $\Leftrightarrow$ existe $\varphi \in F_n$ tal que:

$B = \{\bar{b} \in A^n \mid \mathbf{A} \models \varphi[\bar{b}]\}$.

Si B es definible en $\mathbf{A}$ por medio de φ entonces lo denotaremos por $^{\mathbf{A}}\varphi = B$.

Ejemplos y comentarios.

$\emptyset$ es definible por medio de $\varphi(x_1,...x_n) = x_1 \not\approx x_1$.

A^n es definible por $\psi(x_1,...,x_n) = x_1 \approx x_1 \vee ... \vee x_n \approx x_n$.

Si $^{\mathbf{A}}\varphi = {}^{\mathbf{A}}\psi$ entonces $\mathbf{A} \models \varphi \leftrightarrow \psi\ [\bar{a}]$, para toda $\bar{a} \in A^n$, es decir, $\mathbf{A} \models \forall\bar{x}(\varphi \leftrightarrow \psi)$ y $\forall\bar{x}(\varphi \leftrightarrow \psi) \in Th(\mathbf{A})$.

Sea $D_n(\mathbf{A}) = \{B \subseteq A^n \mid B \text{ es definible en } \mathbf{A}\} \subseteq P(A^n)$.

Proposición 8. Sea $\mathbf{A}$ una L-estructura y $T = Th(\mathbf{A})$.

(1) $^{\mathbf{A}}\varphi = {}^{\mathbf{A}}\psi \Leftrightarrow \varphi \sim_T \psi$.

(2) $D_n(\mathbf{A})$ es un álgebra booleana, $\mid D_n(\mathbf{A}) \mid \leq \mid F_n \mid$ y $\mid D_n(\mathbf{A}) \mid \leq 2^{|\mathbf{A}|^n}$.

(3) $B_nT \cong D_n(\mathbf{A})$ y $S_nT \simeq SD_n\mathbf{A}$.

Prueba.

(1) ($\Rightarrow$) Por contrapositiva.

Si $\varphi \not\sim_T \psi$ entonces existe $\bar{a} \in A^n$ tal que $\mathbf{A} \not\models \varphi \leftrightarrow \psi\ [\bar{a}]$.

Así $^{\mathbf{A}}\varphi \neq {}^{\mathbf{A}}\psi$.

($\Leftarrow$) Como $\varphi \sim_T \psi$ entonces para toda $\bar{a} \in A^n$, $\mathbf{A} \models \varphi \leftrightarrow \psi\ [\bar{a}]$.

Entonces, $\bar{a} \in {}^{\mathbf{A}}\varphi \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi\ [\bar{a}] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \psi\ [\bar{a}] \Leftrightarrow \bar{a} \in^{\mathbf{A}} \psi$.

Así, $^{\mathbf{A}}\varphi = {}^{\mathbf{A}}\psi$.

(2) Para $\varphi,\psi \in F_n$ verifíquese:

$^{\wedge}(\varphi \vee \psi) = {}^{\wedge}\varphi \cup {}^{\wedge}\psi$, $^{\wedge}(\varphi \wedge \psi) = {}^{\wedge}\varphi \cap {}^{\wedge}\psi$, $^{\wedge}(\neg\varphi) = ({}^{\wedge}\varphi)^c$,
$^{\wedge}(\varphi \wedge \neg\varphi) = \emptyset$ y $^{\wedge}(\varphi \vee \neg\varphi) = A^n$
(3) Sea $h{:}B_nT \rightarrow D_n(\mathbf{A})$, $h([\varphi]) = {}^{\wedge}\varphi$.
Por (1), h es una función inyectiva. Por definición, h es suprayectiva.
Por la demostración de (2), h es un homomorfismo.
Así h es un isomorfismo entre álgebras booleanas.
Como $D_n(\mathbf{A})$ es un álgebra booleana.
Recordemos que:

$SD_n(\mathbf{A}) = \{ U \subseteq D_n(\mathbf{A}) \mid U \text{ es un ultrafiltro en } D_n(\mathbf{A})\}$

Por el Teorema I, $SD_n(\mathbf{A}) \neq \emptyset$. Para $\varphi \in F_n$, definimos:
$({}^{\wedge}\varphi) = \{U \in SD_n(\mathbf{A}) \mid {}^{\wedge}\varphi \in U\}$ y $\beta_n = \{({}^{\wedge}\varphi) \mid \varphi \in F_n\}$.
Entonces $SD_n\mathbf{A}$ es un espacio de Stone, como en el Teorema III.
Por la proposición 5.5, $S_nT \simeq SB_nT$ y por Dualidad $SB_nT \simeq SD_n\mathbf{A}$.
Por lo tanto, $S_nT \simeq SD_n\mathbf{A}$.□

2._ Clases Elementales.

Por un par $\langle I,U \rangle$ se entiende que U es un ultrafiltro de $I \neq \emptyset$.
Sea L un lenguaje formal.
Designamos con $\mathbb{K}$ a la clase de todas las L-estructuras..

Definición 3. Sean $K \subseteq \mathbb{K}$ y Σ un conjunto de enunciados.

(a) $Mod(\Sigma) = \{ \mathbf{A} \in \mathbb{K} \mid \mathbf{A} \models \Sigma\}$

(b) $Th(K) = \{\varphi \mid \varphi \text{ es un enunciado y para toda } \mathbf{A} \in K,\ \mathbf{A} \models \varphi \}$.

Tenemos las siguientes propiedades de estos objetos. Es importante advertir que las "clases" de las que estamos hablando no son conjuntos, pero que se comportan como tales, por lo pronto en lo que veremos.

Lema 4. Sean H, $K \subseteq \mathbb{K}$ y Σ, Δ conjuntos de enunciados.

(1) Si $\Sigma \subseteq \Delta$ entonces $Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Sigma)$.

(2) Si $H \subseteq K$ entonces $Th(K) \subseteq Th(H)$.

(3) $K \subseteq Mod(\Sigma) \Leftrightarrow \Sigma \subseteq Th(K)$.

(4) $K \subseteq Mod\ Th(K)$ y $\Sigma \subseteq Th\ Mod(\Sigma)$.

(5) $Mod(H \cup K) = Mod(H) \cap Mod(K)$ y
$Th(\Sigma \cup \Delta) = Th(\Sigma) \cap Th(\Delta)$.

(6) $Mod(H) \cup Mod(K) \subseteq Mod(H \cap K)$ y
$Th(\Sigma) \cup Th(\Delta) \subseteq Th(\Sigma \cap \Delta)$.

(7) $Mod\ Th\ Mod(\Sigma) = Mod(\Sigma)$ y $Th\ Mod\ Th(K) = Th(K)$.

(8) $Cn(\Sigma) = Th\ Mod(\Sigma)$ y $Mod(Cn(\Sigma)) = Mod(\Sigma)$.□

Dada una teoría, queremos saber si la clase de todos sus modelos se puede caracterizar de alguna forma. Los siguientes conceptos de clase elemental y clase elemental en sentido amplio se deben a Tarski, 1950.

Definición 4. Sean $K \subseteq \mathbb{K}$ y Σ un conjunto de enunciados.

(a) K es una **clase elemental** (EC) $\Leftrightarrow$ existe un conjunto finito de enunciados Σ tal que $K = Mod(\Sigma)$.

(b) K es una **clase elemental en sentido amplio** (EC_Δ) $\Leftrightarrow$ existe un conjunto de enunciados Σ tal que $Mod(\Sigma) = K$.

(c) K es **cerrado bajo equivalencia elemental** ($\equiv$) $\Leftrightarrow$ para toda $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbb{K}$, si $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} \in K$ entonces $\mathbf{B} \in K$.

(d) K es **cerrado bajo isomorfismo** ($\cong$) $\Leftrightarrow$ para toda $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbb{K}$, si $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} \in K$ entonces $\mathbf{B} \in K$.

(e) K es **cerrado bajo ultraproductos** $\Leftrightarrow$ para cualesquiera $\langle I,U \rangle$ y $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I} \subseteq K$, $\Pi \mathbf{A}_{i \in I}/ U \in K$.

(f) K es **cerrado bajo ultrapotencias** $\Leftrightarrow$ para todos $\langle I,U \rangle$ y $\mathbf{A} \in K$, $\mathbf{A}^I/ U \in K$.

Observaciones. Sea $K \subseteq \mathbb{K}$. El complemento de K es $K^c = \mathbb{K}\text{-}K$. Escribiremos: "$K\in EC$", si K es una clase elemental; "$K \in EC_\Delta$", si K es una clase elemental en sentido amplio.

Lema 5. Sean $K \subseteq \mathbb{K}$ y Σ un conjunto de enunciados.

(1) K$\in$ EC$_\Delta$ $\Leftrightarrow$ K $=$ Mod Th(K).

(2) Si K $\in$ EC entonces K $\in$ EC$_\Delta$.

(3) K $\in$ EC $\Leftrightarrow$ existe un enunciado φ tal que K $=$ Mod(φ).

(4) K $\in$ EC $\Leftrightarrow$ K^c $\in$ EC.

(5) Si K es cerrado bajo $\equiv$ entonces K es cerrado bajo $\cong$.

(6) K es cerrado bajo $\equiv$ ($\cong$) $\Leftrightarrow$ K^c es cerrado bajo $\equiv$ ($\cong$).

(7) Si K es cerrado bajo ultraproductos entonces K es cerrado bajo ultrapotencias.

(8) Si K es cerrado bajo $\equiv$ y ultrapotencias entonces K^c también.

Prueba.

(1) ($\Rightarrow$) Inmediato del lema 4.7.

($\Leftarrow$) Sea Σ $=$ Th(K).

(2) Inmediato de la definición 4.b.

(3) Si $\Sigma = \{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ entonces basta tomar $\varphi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$, por la proposición 4.2.3.

(4) Verifíquese que Mod($\neg\varphi$) $=$ Mod(φ)^c.

(5) Sean **A**,**B** L-estructuras tales que **A** $\cong$ **B** y **A** $\in$ K.

Por la proposición 5.1, **A** $\equiv$ **B**. Como K es cerrada bajo $\equiv$, **B** $\in$ K.

(6) ($\Leftarrow$) Sean **A**,**B** L-estructuras tales que **A** $\cong$ **B** y **A** $\in$ K^c.

Supongamos que **B** $\notin$ K^c. Entonces **B** $\in$ K.

Como K es cerrada bajo $\equiv$, **A** $\in$ K.

Por lo tanto, K $\cap$ K^c $\neq \emptyset$, absurdo.

($\Leftarrow$) Similarmente.

(7) Obvio.

(8) Esto se sigue de (6) y la proposición 7.5, **A** $\equiv$ **A**^{I} / U.$\square$

Usaremos el siguiente resultado, demostrado por J. Keisler (1961), con la HGC y por S. Shelah (1971), en su versión general.

La demostración del siguiente teorema esta fuera de los límites de esta tesis.

Teorema (Keisler-Shelah) Sean $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ L-estructuras.

$\mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \Leftrightarrow$ existe un par $\langle I,U\rangle$ tal que $\mathbf{A}^I / U \cong \mathbf{B}^I / U$.□

Caracterizaremos cuándo una clase de L-estructuras es cerrada bajo isomorfismo, ultraproductos, etc.

Proposición 9. Sean K, $J \subseteq \mathbb{K}$ y Σ,Δ conjuntos de enunciados.

(1) $K \in EC \Leftrightarrow K,K^c \in EC_\Delta$.

(2) Si $K \in EC_\Delta$ entonces K es cerrado bajo $\equiv$.

(3) K es cerrado bajo $\equiv \Leftrightarrow$ K y K^c son cerrados bajo $\cong$ y ultrapotencias.

(4) $K \in EC_\Delta \Leftrightarrow$ K es cerrado bajo $\equiv$ y ultraproductos.

(5) $K \in EC \Leftrightarrow$ K y K^c son cerradas bajo $\cong$ y ultraproductos.

Prueba.

(1) ($\Rightarrow$) $K \in EC$.

Entonces existe un enunciado φ tal que $K = Mod(\varphi)$.

Se tiene que $K^c = Mod(\neg\varphi)$. Por lo tanto $K^c \in EC$.

Así $K,K^c \in EC_\Delta$.

($\Leftarrow$) $K,K^c \in EC_\Delta$.

Entonces existen conjuntos de enunciados Σ,Γ tales que $K = Mod(\Sigma)$ y $K^c = Mod(\Gamma)$. Por el lema 4.5,

$Mod(\Sigma \cup \Gamma) = Mod(\Sigma) \cap Mod(\Gamma) = K \cap K^c = \emptyset$.

Lo que significa que $\Sigma \cup \Gamma$ no tiene modelo.

Por el Teorema de Compacidad, existe $\Delta \subseteq \Sigma \cup \Gamma$ tal que Δ es finito y Δ no tiene modelo. Sean $\Delta_1 = \Delta \cap \Sigma$ y $\Delta_2 = \Delta \cap \Gamma$.

Es claro que Δ_i es finito, para $i = 1,2$ y que $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$.

Entonces y $\Delta_1 \subseteq \Gamma$ y, por el lema 4.1, $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\Delta_1)$.

Ahora demostraremos que $Mod(\Delta_1) \subseteq Mod(\Gamma)$.

Suponemos que $Mod(\Delta_1) \not\subseteq Mod(\Gamma)$.

Esto implica que existe $\mathbf{A} \in Mod(\Delta_1)$ tal que $\mathbf{A} \notin Mod(\Gamma) = K$.

Entonces $\mathbf{A} \in K^c$. Por lo tanto $\mathbf{A} \models \Delta_1$ y $\mathbf{A} \models \Delta_2$, es decir, $\mathbf{A} \models \Delta$.

Por lo tanto, Δ tiene modelo. Absurdo.

Así, $K = Mod(\Gamma) = Mod(\Delta_1)$ y $K \in EC$.

(2) Sean $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \in \mathbb{K}$ y $\mathbf{A} \in K$.

P.D. $\mathbf{B} \in K$

Si $K \in EC_\Delta$ entonces existe un conjunto de enunciados Σ tal que $K = Mod(\Sigma)$.

Como $\mathbf{A} \models \Sigma$ y $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ esto implica que $\mathbf{B} \models \Sigma$ es decir, $\mathbf{B} \in K$.

(3) ($\Rightarrow$) K es cerrado bajo $\equiv$.

Por el lema 5.5, K es cerrado bajo $\cong$.

Por el lema 5.6, K^c es cerrado bajo $\cong$.

Sean $\mathbf{A} \in K$ y $\langle I,U \rangle$ un par. Por la proposición 7.5, $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}^I / U$.

Como K es cerrado bajo $\equiv$, $\mathbf{A}^I / U \in K$.

Así, K es cerrado bajo ultrapotencias. Similarmente para K^c.

($\Leftarrow$) Sean $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ L-estrucutras tales que $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} \in K$.

P.D. $\mathbf{B} \in K$

Por el Teorema de Keisler-Shelah, hay un par $\langle I,U \rangle$ tal que $\mathbf{A}^I / U \cong \mathbf{B}^I / U$.

Como K es cerrado bajo ultrapotencias, $\mathbf{A}^I / U \in K$.

K es cerrado bajo $\cong$ entonces $\mathbf{B}^I / U \in K$.

Suponemos que $\mathbf{B} \notin K$. Entonces $\mathbf{B} \in K^c$.

Como K^c es cerrado bajo $\cong$ y ultrapotencias, $\mathbf{A}^I / U \in K^c$.

Por lo que $K \cap K^c \neq \emptyset$. Contradicción.. Por lo tanto $\mathbf{B} \in K$.

Así K es cerrado bajo $\equiv$.

(4) ($\Rightarrow$) K$\in EC_\Delta$.

Entonces existe un conjunto de enunciados Σ tal que $K = Mod(\Sigma)$.

Sean $I \neq \emptyset$, U un ultrafiltro de I y $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I} \subseteq K$.

Por la proposición 3.2, $\Pi\mathbf{A}_{i\in I} / U \models \Sigma$, es decir, $\Pi\mathbf{A}_{i\in I} / U \in K$.

Por lo tanto, K es cerrado bajo ultraproductos.

Por hipótesis y (2), K es cerrado bajo $\equiv$.

($\Leftarrow$) Para demostrar que K $\in$ EC$_\Delta$, demostraremos que
K= ModTh(K), por el lema 5.1
El lema 4.4 nos dice que K $\subseteq$ Mod Th(K).
Sólo falta demostrar la otra contención.
Sean $\mathbf{A} \in$ Mod Th (K) e I = Th($\mathbf{A}$). P.D. $\mathbf{A} \in$ K.
(*) Si $\varphi \in$ I entonces existe $\mathbf{B}_\varphi \in$ K tal que $\mathbf{B}_\varphi \models \varphi$.
En caso contrario, $\mathbf{A} \not\models \varphi$ lo que implica que $\varphi \notin$ I. Absurdo.
De (*) obtenemos que M = $\{\mathbf{B}_\varphi \mid \varphi \in \mathrm{I}\} \subseteq$ K.
Además, si $\mathrm{J}_\varphi = \{\psi \in \mathrm{I} \mid \mathbf{B}_\psi \models \varphi\}$ entonces $\mathrm{J}_\varphi \subseteq$ I y
H = $\{\mathrm{J}_\varphi \mid \varphi \in \mathrm{I}\}$ tiene la pif.
Para demostrar esto último, tomamos $\mathrm{J}_{\varphi_i} \in$ A, para $1 \leq i \leq n$.
Demostraremos que $\bigcap \mathrm{J}_{\varphi_i} \neq \emptyset$.
Si $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \in$I entonces para $1 \leq i \leq n$, $\mathbf{B}_{\varphi_i} \in$ M y $\mathbf{A} \models \bigwedge \varphi_i$.
Sea $\psi = \bigwedge \varphi_i$. Entonces, por (*), existe $\mathbf{B}_\psi \in$ K tal que $\mathbf{B}_\psi \models \psi$.
Pero, para $1 \leq i \leq n$, $\mathbf{B}_\psi \models \varphi_i$, así que $\psi \in \mathrm{J}_{\varphi_i}$, es decir, $\psi \in \bigcap \mathrm{J}_{\varphi_i}$.
Por lo tanto, existe U un ultrafiltro de I tal que H $\subseteq$ U.
Definimos $\mathbf{B} = \Pi_{\varphi\in \mathrm{I}}\, \mathbf{B}_\varphi$ / U el ultraproducto de la familia M.
Como K es cerrado bajo ultraproductos, $\mathbf{B} \in$ K.
Pero $\mathbf{B} \models$ Th($\mathbf{A}$), por el Teorema XI. Esto implica que $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.
Como K es cerrado bajo $\equiv$, entonces $\mathbf{A} \in$ K.
Por lo que Mod Th($\mathbf{A}$) $\subseteq$ K. Entonces K = Mod Th(K).
(5) ($\Rightarrow$) Sea K $\in$ EC.
Por (1), K $\in$ EC$_\Delta$ y K^c $\in$ EC$_\Delta$.
Por (3), K y K^c son cerrados bajo $\cong$.
Por (4), K y K^c son cerrados bajo ultraproductos.
($\Leftarrow$) Sean K y K^c son cerrados bajo $\cong$ y ultraproductos.
Por el lema 5.7, K y K^c son cerrados bajo ultrapotencias.
Por (3), K es cerrado bajo $\equiv$.
Por el lema 5.6, K^c es cerrado bajo $\equiv$.

Por lo tanto, K y K^c son cerrados bajo $\equiv$ y ultrapotencias.

Por (4), K, $K^c \in EC_\Delta$. Por (1), $K \in EC$.□

3._ Clases Elementales y Teorías Finitamente Axiomatizables.

Veamos la relación que hay entre una teoría finitamente axiomatizable T y la clase de sus modelos Mod(T).

Proposición 10. Sea T una teoría. Son equivalentes (1)-(3):

(1) T es una teoría finitamenente axiomatizable.

(2) Mod(T) $\in$ EC.

(3) Mod(T)^c es cerrada bajo ultraproductos.

Prueba.

(1) $\Rightarrow$(2) Existe un enunciado φ tal que $T = Cn(\varphi)$.

Por el lema 4.8 y la proposición 4.7.3, $Mod(T) = Mod(\varphi) \in EC$.

(2) $\Rightarrow$(3) Por (2), $Mod(T) \in EC$. Entonces $Mod(T)^c \in EC$.

Por la proposición 9.6, $Mod(T)^c$ es cerrado bajo ultraproductos.

(3) $\Rightarrow$(1) Si Mod(T) es cerrado bajo ultraproductos y $\equiv$ entonces $Mod(T) \in EC_\Delta$, por la proposición 9.4.

Entonces $Mod(T)^c$ es cerrado bajo $\equiv$, por el lema 5.6.

Por hipótesis $Mod(T)^c$ es cerrado bajo ultraproductos.

Por la proposición 9.5, $Mod(T)^c \in EC_\Delta$.

Por la proposición 9.2, $Mod(T) \in EC$.

Por el lema 4.8, $T = Cn(\varphi)$ para algún enunciado φ, lo que significa que T es finitamente axiomatizable, por la proposición 4.7.3.□

La teoría de campos de característica cero no es finitamente axiomatizable, entonces el complemento de la clase de sus modelos no es cerrada bajo ultraproductos. La teoría de las relaciones de equivalencia es finitamente axiomatizable entonces el complemento de la clase de sus modelos es cerrada bajo ultraproductos. Ver el apéndice 2.

4. _ Un resultado de consistencia.

El siguiente resultado se debe a A. Robinson, 1956.

Proposición 11. Teorema de Consistencia.

Para $i = 0,1,2$, L_i es un lenguaje formal, T_i es una L_i-teoría; T_1, T_2 son satisfacibles y $T_o = T_1 \cap T_2$.

Si T_o es completa entonces $T_1 \cup T_2$ tiene modelo.

Prueba.

Sean $\mathbf{A} \models T_1$ y $\mathbf{B} \models T_2$. Entonces $\mathbf{A}\lceil L$, $\mathbf{B}\lceil L \models T_o$.

Como T_o es completa, por la proposición 3, $\mathbf{A}\lceil L \equiv \mathbf{B}\lceil L$.

Por el Teorema de Keisler-Shelah, hay un par $\langle I,U\rangle$ tal que

$(\mathbf{A}\lceil L)^I / U \cong (\mathbf{B}\lceil L)^I / U$.

De donde existe $h:| A^I / U | \to | B^I / U |$, biyección.

h es parcialmente un isomorfismo (en la restricción a L).

Para $P, f \in L_2\text{-}L_1$ y $Q,g \in L_1\text{-}L_2$ definimos:

$h\ (f^{\mathbf{A}^I/U}([g_1],\ldots,[g_n])) = f^{\mathbf{B}^I/U}(h([g_1]),\ldots, h([g_n]))$,

$P^{\mathbf{A}^I/U}\ ([g_1],\ldots,[g_n])) \Leftrightarrow P^{\mathbf{B}^I/U}(h([g_1]),\ldots, h([g_n]))$,

$h\ (g^{\mathbf{A}^I/U}([g_1],\ldots,[g_n])) = g^{\mathbf{B}^I/U}(h([g_1]),\ldots, h([g_n]))$,

$Q^{\mathbf{A}^I/U}\ ([g_1],\ldots,[g_n])) \Leftrightarrow Q^{\mathbf{B}^I/U}(h([g_1]),\ldots, h([g_n]))$.

Así, h es un isomorfismo, por lo que se obtiene: $\mathbf{A}^I / U \cong \mathbf{B}^I / U$.

Por lo tanto, $\mathbf{A}^I / U \models T_1 \cup T_2$.□

CAPÍTULO 7

CATEGORICIDAD CONTABLE

Presentamos en este capítulo la categoricidad contable en relación con las álgebras de Lindenbaum, n-tipos y teorías completas en un lenguaje contable.

Categoricidad

En lo que sigue T será una teoría satisfacible en un lenguaje formal L.

Definición 1. Sea λ un cardinal.

(a) **T es categórica** $\Leftrightarrow$ todos los modelos de T son isomorfos.

(b) **T es λ-categórica** $\Leftrightarrow$ T tiene un modelo de cardinal λ y para cualquier par de modelos de cardinal λ, ambos son isomorfos.

Oswald Veblen presenta el concepto de categoricidad en 1904.
La noción de "T es λ-categórica" o "T es categórica en potencia λ" se debe a Łoš (1954).
Ejemplo.

En el capítulo 4 vimos que para el lenguaje formal L que no tiene símbolos no lógicos, σ_n es el enunciado que dice "hay al menos n elementos". Entonces σ_n es λ-categórica, para todo $\lambda \geq n$, pues si $\mathbf{A},\mathbf{B} \models \sigma_n$ y $\mid A \mid = \mid B \mid \geq n$ entonces $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$, pues ser isomorfo es equivalente con ser equipotente, en este lenguaje.

Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1. Sean T una teoría, κ y λ cardinales infinitos.

(1) Si T es categórica entonces T es completa.

(2) Si T tiene un modelo infinito entonces T no es categórica.

(3) (Loš-Vaught, 1954) Sea $| L | = \lambda \geq \aleph_o$.

Si T no tiene modelos finitos y hay un $\kappa \geq \lambda$ tal que T es κ-categórica entonces T es completa.

Prueba.

(1) Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \models$ T, cualesquiera. Como T es categórica, $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$.
Por la proposición 6.6.1, $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$. Por la proposición 6.3, T es completa.

(2) Por el Teorema VIII (LST $\uparrow$), podemos encontrar dos modelos de cardinalidades infinitas distintas.
Así estos dos modelos no pueden ser isomorfos.

(3) Suponemos que T es incompleta.
Entonces existe un enunciado φ tal que T $\not\models \varphi$ y T $\not\models \neg\varphi$.
Así existen modelos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de T tales que $\mathbf{A} \models \varphi$ y $\mathbf{B} \models \neg\varphi$.
Claramente $\mathbf{A} \not\equiv \mathbf{B}$.
Como T no tiene modelos finitos, $| A |, | B | \geq \aleph_o$.
Puesto que $\kappa \geq \aleph_o$, por LST $\uparrow$ y LST $\downarrow$, hay modelos $\mathbf{A'}$, $\mathbf{B'}$ de T tales que $| A' | = | B' | = \kappa$ y $\mathbf{A'} \not\equiv \mathbf{B'}$. Por lo tanto, $\mathbf{A'} \ncong \mathbf{B'}$.
Así, T no es κ-categórica, lo cual es una contradicción.□

La Teoría del Orden Total Denso sin Extremos no tiene modelos finitos y $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ es un modelo, pero ?'cuántos modelos de cardinal $\aleph_o$ no-isomorfos tiene esta teoría? Para contestar a esta pregunta usaremos la técnica llamada **back-and-forth**.
El siguiente resultado se debe a Cantor, 1895.

Proposición 2. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ordenes totales, densos y sin extremos. Si $| A | = | B | = \aleph_o$ entonces $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$.
Prueba. Por back-and-forth.

Sean $A = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ y $B = \{d_m \mid m \in \mathbb{N}^+\}$ dos enumeraciones arbitrarias. Por inducción definiremos dos nuevas enumeraciones de A y B tales que:

(*) para cada $i,j \in \mathbb{N}^+$, $a_i < a_j \Leftrightarrow b_i < b_j$.

Paso 1. Sea $a_1 = e_n \in A$ y $b_1 = d_m \in B$.

Hipótesis de inducción: se han construido $a_1,\dots,a_{k-1} \in A$ y $b_1,\dots, b_{k-1} \in B$ tales que se cumplen (*).

Caso 1. k es impar. Como A es infinito, $A\text{-}\{a_1,\dots,a_{k-1}\} \neq \emptyset$.
Por el PBO, existe el $\min\{n \in \mathbb{N} \mid e_n \in A\text{-}\{a_1,\dots,a_{k-1}\}\} = q$.
Sea $a_k = e_q$. Escogemos b_k en relación de orden con $\{b_1,\dots,b_{k-1}\}$ según como a_k este en relación de orden con $\{a_1,\dots,a_{k-1}\}$.
Esto se puede hacer porque B es un orden total denso sin extremos.
De este modo tenemos que $a_1,\dots,a_k \in A$ y $b_1,\dots,b_k \in B$ cumplen con (*). Esto nos asegura que A esta ordenando correctamente, sin faltar ninguno de sus elementos.

Caso 2. k es par. Como B es infinito, $B\text{-}\{b_1,\dots,b_{k-1}\} \neq \emptyset$.
Por el PBO, existe el $\min\{n \in \mathbb{N} \mid d_n \in B\text{-}\{b_1,\dots,b_{k-1}\}\} = r$.
Sea $b_k = d_r$. Escogemos a_k en relación de orden con $\{a_1,\dots,a_{k-1}\}$ según como b_k este en relación de orden con $\{b_1,\dots,b_{k-1}\}$.
Esto es cierto porque A es un orden total denso sin extremos.
Por lo tanto, tenemos que $a_1,\dots,a_k \in A$ y $b_1,\dots,b_k \in B$ cumplen (*).
Así, B está ordenando correctamente, sin faltar ninguno de estos.
Definimos $h:A \to B$, $h(a_n) = b_n$ y h es un isomorfismo y $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$.□

Ejemplo.

Así, la Teoría del Orden Total Denso sin Extremos tiene, esencialmente, un sólo modelo infinito numerable, es decir, es $\aleph_0$-categórica. Por Łoš-Vaught, ésta teoría es completa.
Por la proposición 1.1, $\langle \mathbb{Q},\leq\rangle \equiv \langle \mathbb{R},\leq\rangle$. Por razones de cardinalidad $\langle \mathbb{Q},\leq\rangle \ncong \langle \mathbb{R},\leq\rangle$.
Esto prueba que: $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ no implica que $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$, en general.

Categoricidad finita

En lo que sigue **el lenguaje formal L es contable.**
Recordemos que, dados $\mathbf{A}$ una L-estructura y $\bar{a} \in A^n$, el n-tipo correspondiente a $\bar{a}$ es: $p_n(\mathbf{A},\bar{a}) = \{\varphi \in F_n \mid \mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]\}$, donde F_n es el conjunto de L-fórmulas con a lo más n variables libres.

Lema 1. Sean $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ unas L-estructuras, $\bar{a} \in A^n$ y $\bar{b} \in B^n$.
Si $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ entonces, $p_n(\mathbf{A},\bar{a}) = p_n(\mathbf{B},\bar{b}) \Leftrightarrow \langle \mathbf{A},\bar{a}\rangle \equiv \langle \mathbf{B},\bar{b}\rangle$.
Prueba.

($\Rightarrow$) Sean $L_+ = L \cup \{c_1,\ldots,c_n\}$, donde c_i es una nueva constante, para $1 \le i \le n$ y $\varphi(\bar{c})$ un enunciado en L_+.
Por el Lema Sustitución, tenemos: $\langle \mathbf{A},\bar{a}\rangle \models \varphi(\bar{c}) \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$
$\Leftrightarrow \varphi \in p_n(\mathbf{A},\bar{a}) \Leftrightarrow \varphi \in p_n(\mathbf{B},\bar{b}) \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}] \Leftrightarrow \langle \mathbf{B},\bar{b}\rangle \models \varphi(\bar{c})$.
($\Leftarrow$) Sea $\varphi \in F_n$, en el lenguaje L.
$\varphi \in p_n(\mathbf{A},\bar{a}) \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \langle \mathbf{A},\bar{a}\rangle \models \varphi(\bar{c}) \Leftrightarrow \langle \mathbf{B},\bar{b}\rangle \models \varphi(\bar{c})$
$\Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}] \Leftrightarrow \varphi \in p_n(\mathbf{B},\bar{b})$.□

El siguiente lema nos dice bajo qué circunstancias equivalencia elemental implica isomorfismo.

Lema 2. Sean $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ unas L-estructuras tales que $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ y $m \in \mathbf{N}$.
Si $|\mathbf{A}| = m > 0$ entonces se cumplen:

(1) $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$.
(2) Si $p \in S_n Th(\mathbf{A})$ entonces $\mathbf{A}$ realiza a p y $| S_n Th(\mathbf{A}) | \le m^n$.
(3) Si $\mathbf{B} \models Th(\mathbf{A})$ entonces $\mathbf{A} \propto \mathbf{B}$.

Prueba.

(1) Como $|A| = m$. Entonces, $\mathbf{A} \models \delta_m$, donde δ_m es el enunciado que afirma "hay exactamente m elementos".
Como $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \models \delta_m$ y $|B| = m$.
Demostraremos por inducción en k, para $k \le m$, que:

$$(\clubsuit)\begin{cases} \text{para toda } a_1,\ldots,a_k \in A \text{ existen } b_1,\ldots,b_k \in B \\ \quad \text{tales que } \langle \mathbf{A},a_1,\ldots,a_k\rangle \equiv \langle \mathbf{B},b_1,\ldots,b_k\rangle \end{cases}$$

Sea $L_k = L \cup \{c_1,...,c_k\}$, donde c_i es una nueva constante, con $1 \leq i \leq k$. Para $k = 0$, esto es cierto, por hipótesis.

Hipótesis de Inducción (H.I.): (♣) es cierto para k-1, para $k > 1$.

Sea $a_k \in A-\{a_1, ..., a_{k-1}\}$.

Suponemos que para toda $b \in B^* = B-\{b_1, ..., b_{k-1}\}$,

$\langle \mathbf{A},a_1, ...,a_{k-1},a_k\rangle \not\equiv \langle \mathbf{B},b_1, ..., b_{k-1},b\rangle$.

De esto, sabemos que hay un enunciado $\varphi_b(\bar{c},c_k)$ en L_k tal que:

$\langle \mathbf{A},a_1,...,a_{k-1},a_k\rangle \models \varphi_b(\bar{c},c_k)$ y $\langle \mathbf{B},b_1,..., b_{k-1},b\rangle \not\models \varphi_b(\bar{c},c_k)$.

Como B^* es finito, obtenemos que:

$\psi(\bar{c},c_k) = \bigwedge_{b \in B^*} \varphi_b(\bar{c},c_k) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k-1}(c_i \not\approx c_k)$

es un enunciado en L_k. Así que:

$\langle \mathbf{A},a_1, ..., a_{k-1},a_k\rangle \models \psi(\bar{c},c_k)$ y $\langle \mathbf{B},b_1, ..., b_{k-1},b\rangle \not\models \psi(\bar{c},c_k)$,

esto es:

$\langle \mathbf{A},a_1,...,a_{k-1}\rangle \models \exists x_k\psi(\bar{c},x_k)$ y $\langle \mathbf{B},b_1,...,b_{k-1}\rangle \not\models \exists x_k\psi(\bar{c},x_k)$,

donde $\exists x_k\psi(\bar{c},x_k)$ es un enunciado en L_{k-1}.

De este modo, $\langle \mathbf{A},a_1, ..., a_{k-1}\rangle \not\equiv \langle \mathbf{B},b_1, ...,b_{k-1}\rangle$.

Pero esto contradice la H.I.

Entonces, hay una $b \in B^* = B-\{b_1, ..., b_{k-1}\}$ tal que:

$\langle \mathbf{A},a_1,...,a_k\rangle \equiv \langle \mathbf{B},b_1,...,b_{k-1},b\rangle$.

Sean b_k el primer elemento de B^* que cumple con lo anterior, $a_1,...,a_k \in A$, $b_1,...,b_{k-1},b_k \in B$. Definimos $h:A \longrightarrow B$, $h(a_i) = b_i$, con $1 \leq i \leq k$, es biyectiva y $\langle \mathbf{A},a_1,...,a_m\rangle \equiv \langle \mathbf{B},b_1,...,b_m\rangle$.

Veamos que h es un homomorfismo.

$c^{\mathbf{A}} = a_i \Leftrightarrow \mathbf{A} \models c \approx x_i\ [a_i] \Leftrightarrow \langle \mathbf{A},a_i\rangle \models c \approx c_i \Leftrightarrow$

$\langle \mathbf{B},b_i\rangle \models c \approx c_i \Leftrightarrow \mathbf{B} \models c \approx x_i\ [b_i] \Leftrightarrow c^{\mathbf{B}} = b_i$.

De este modo tenemos que $h(c^{\mathbf{A}}) = h(a_i) = b_i = c^{\mathbf{B}}$.

$P^{\mathbf{A}}(a_1,...,a_m) \Leftrightarrow \mathbf{A} \models P\bar{x}[\bar{a}] \Leftrightarrow \langle \mathbf{A},\bar{a}\rangle \models P\bar{c} \Leftrightarrow \langle \mathbf{B},\bar{b}\rangle \models P\bar{c}$

$\Leftrightarrow \mathbf{B} \models P\bar{x}[\bar{b}] \Leftrightarrow P^{\mathbf{B}}(b_1,...,b_m) \Leftrightarrow P^{\mathbf{B}}(h(a_1),...,h(a_m))$.

Además: $f^{\mathbf{A}}(a_1,\dots,a_m) = a_{m+1} \Leftrightarrow \mathbf{A} \models (f(\bar{x}) \approx x_{m+1})[\bar{a}] \Leftrightarrow$
$\langle \mathbf{A},\bar{a}\rangle \models (f(\bar{c}) \approx c_{m+1}) \Leftrightarrow \langle \mathbf{B},\bar{b}\rangle \models (f(\bar{c}) \approx c_{m+1}) \Leftrightarrow$
$\mathbf{B} \models (f(\bar{x}) \approx x_{m+1})[\bar{b}] \Leftrightarrow f^{\mathbf{B}}(b_1,\dots,b_m) = b_{m+1} \Leftrightarrow$
$f^{\mathbf{B}}(h(a_1),\dots,h(a_m)) = h(a_{m+1}) = h\ (f^{\mathbf{A}}(a_1,\dots,a_m))$.

Por la proposición **6**.3,5, h es un isomorfismo.

(2) Sea $p \in S_n Th(\mathbf{A})$.

Entonces existe una L-estructura $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{B} \models Th(\mathbf{A})$ y $\mathbf{B}$ realiza a p. Como $Th(\mathbf{A})$ es completa, por la proposición **6**.3, $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

Por (1), $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$. Por la proposición **6**.6.3, $\mathbf{A}$ realiza a p.

Por la proposición 4.10.d, para algún $\bar{a} \in A^n$, $p = p_n(\mathbf{A},\bar{a})$.

Definimos, $h: A^n \rightarrow S_n Th(\mathbf{A})$, $h(\bar{a}) = p_n(\mathbf{A},\bar{a})$.

Por lo anterior h es suprayectiva y $|\ S_n Th(\mathbf{A})\ | \leq A^n = m^n$.

(3) Inmediato de (1) y la proposición **5**.6.□

El siguiente resultado es importante para la proposición 3 y el Teorema XII.

Lema 3. Sea $\mathbf{A}$ una L-estructura contable.
Son equivalentes (1)-(3):

(1) Para toda $n \in \mathbb{N}$, $B_n Th(\mathbf{A})$ es finita.

(2) Para toda $n \in \mathbb{N}$, $S_n Th(\mathbf{A})$ es finito.

(3) Para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $p \in S_n Th(\mathbf{A})$, p es principal.

Prueba. Esto es consecuencia de las proposiciones **2**.9.4, **5**.3 y **5**.5.□
Veamos cómo se relaciona la categoricidad finita con que una teoría sea completa.

Proposición 3. Sea T una teoría completa con un modelo finito de cardinal $m > 0$. Entonces son equivalentes:

(1) T es m-categórica.

(2) Para toda $n \in \mathbf{N}$, B_nT es finita.

(3) Para toda $n \in \mathbf{N}$, S_nT es finito.

(4) Para cualesquiera $n \in \mathbf{N}$ y $p \in S_nT$, p es principal en T.

Prueba.

Sea $\mathbf{A}$ un modelo de T tal que $| \mathbf{A} | = m$.
Entonces $T = Th(\mathbf{A})$, por ser T una teoría completa.
Las equivalencias de (2), (3) y (4) se siguen del lema 3.
Demostraremos la equivalencia de (1) con (4).
(1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que para cierta $n \in \mathbf{N}$, B_nT no es finita. Por la proposición **2**.9, existe $U \in SB_nT$ tal que U no es principal. Por la proposición **5**.3.5, $p = \Sigma_U \in S_nT$ es un tipo no principal. Por el Teorema **X**, existe $\mathbf{B} \models T$ tal que $| \mathbf{B} | \leq \aleph_o$ y $\mathbf{B}$ omite a p. Como $\mathbf{B} \models T$, por el lema 2.1, $| \mathbf{B} | = m$. Pero por el lema 2.2, $\mathbf{A}$ realiza a p. Por la proposición **6**.5, $\mathbf{A} \ncong \mathbf{B}$, es decir, T no es m-categórica.
(2) $\Rightarrow$(1) Inmediato del lema 2.1.□

Observamos que si T es categórica entonces T es λ-categórica, para todo λ cardinal.

Proposición 4. Sean T una teoría satisfacible y $\mathbf{A}$ una L-estructura. Entonces:

(1) Si T es completa y con un modelo finito de cardinal $m > 0$ entonces, T es categórica $\Leftrightarrow$ T es m-categórica

(2) $| \mathbf{A} | < \aleph_o \Leftrightarrow Th(\mathbf{A})$ es categórica.

(3) $| \mathbf{A} | \geq \aleph_o \Leftrightarrow Th(\mathbf{A})$ no tiene modelo finitos.

Prueba.

(1) ($\Rightarrow$) Cierto, por la observación anterior.

($\Leftarrow$) Inmediato del lema 2.1.

(2) Inmediato de (1).

(3) Por contrapositiva y (2).□

Ejemplos.

-T = $Cn(\delta_n)$ es una teoría completa y categórica, porque sólo tiene modelos de cardinal n.

-Th($\mathbf{Z}_n$,+) es una teoría completa y categórica, pues tiene modelos de cardinal n, únicamente.

Categoricidad Infinita Numerable

Ahora veremos qué sucede con la $\aleph_o$-categoricidad.
El siguiente resultado muestra la conexión que hay entre una teoría T que es completa y $\aleph_o$-categórica con sus respectivas álgebras de Lindenbaum y n-tipos.
Sorprendentemente el resultado se expresa como en la proposición 3, con la salvedad de que T no tiene modelos finitos.
Los autores del siguiente teorema son, principalmente:
Ryll-Nardzewski (1955), Engeler y Svenonius (1959).

Teorema XII. Teorema de $\aleph_o$-categoricidad.

Sea $|L| \leq \aleph_o$ y T una teoría satisfacible, completa y sin modelos finitos. Entonces son equivalentes (1)-(4):

(1) T es $\aleph_o$-categórica.

(2) para toda $n \in \mathbf{N}$, B_nT es finita.

(3) para toda $n \in \mathbf{N}$, S_nT es finito.

(4) para cualesquiera $n \in \mathbf{N}$ y $p \in S_nT$, p es principal.

Prueba.

(1) $\Rightarrow$ (4) Por contrapositiva.

Sea $n \in \mathbf{N}$ y $p \in S_nT$. Suponemos que p no es principal.

Por la proposición 4.10.5, hay un $\mathbf{A} \models T$ tal que $|\mathbf{A}| \leq \aleph_o$ y $\mathbf{A}$ realiza a p. Por el Teorema X, hay un $\mathbf{B} \models T$ tal que $|\mathbf{B}| \leq \aleph_o$ y $\mathbf{B}$ omite a p. Como T no tiene modelo finitos, $|A| = |B| = \aleph_o$. Por la proposición 6.6.4, $\mathbf{A} \not\cong \mathbf{B}$.

Así, T no es $\aleph_o$-categórica.

(4) $\Rightarrow$ (1) Como T es satisfacible, por la proposición 4.6.1, existe una L-estructura $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A} \models T$ y $|A| \leq \aleph_o$.

Ya que T no tiene modelos finitos, $|A| = \aleph_o$.

Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \models T$ tales que $|A| = |B| = \aleph_o$. P.D. $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$.

Consideremos $A = \{e_n \mid n \in \mathbf{N}^+\}$ y $B = \{d_m \mid m \in \mathbf{N}^+\}$ dos enumeraciones arbitrarias. Usaremos un argumento de back-and-forth. Por inducción definiremos dos nuevas enumeraciones de A y B y una función $h: A \longrightarrow B$ tales que:

(*) para toda $k \in \mathbf{N}^+$, $\langle \mathbf{A}, a_1, \ldots, a_k \rangle \equiv \langle \mathbf{B}, b_1, \ldots, b_k \rangle$ y $h(a_i) = b_i$, para $i = 1, \ldots, k$.

Paso 1. Sea $a_1 = e_1 \in A$.

Entonces $p_1(\mathbf{A}, a_1) \in S_1T$ es principal. Por lo tanto, existe $\varphi_1 \in F_1$ tal que φ_1 genera a $p_1(\mathbf{A}, a_1)$.

En particular tenemos que $\mathbf{A} \models \varphi_1 [a_1]$, lo que implica que $\mathbf{A} \models \exists x_1 \varphi_1$.

Puesto que T es completa y $\mathbf{A}, \mathbf{B} \models T$ entonces $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

Así, $\mathbf{B} \models \exists x_1 \varphi_1$, lo que implica que para algún $d_m \in B$, $\mathbf{B} \models \varphi_1 [d_m]$. Sea $r = \text{mín}\,\{m \mid \mathbf{B} \models \varphi_1 [d_m]\}$, por el PBO y $b_1 = d_r$. Entonces $\mathbf{B} \models \varphi_1 [b_1]$, $\varphi_1 \in p_1(\mathbf{B}, b_1)$ y se sigue que $p_1(\mathbf{A}, a_1) \subseteq p_1(\mathbf{B}, b_1)$.

Por ser 1-tipos, $p_1(\mathbf{A}, a_1) = p_1(\mathbf{B}, b_1)$. Por el lema 1 se tiene que $\langle \mathbf{A}, a_1 \rangle \equiv \langle \mathbf{B}, b_1 \rangle$. Definimos, $h(a_1) = b_1$.

Paso 2. Como B es infinito, $B\text{-}\{b_1\} \neq \emptyset$.
Por el PBO, existe $b_2 \in B$, que es el primer elemento de B que difiere de b_1. Entonces $p_2(B,b_1,b_2) \in S_2T$ es principal, por lo que existe $\varphi_2 = \varphi_2(x_1,x_2) \in F_2$ tal que φ_2 genera a $p_2(\mathbf{B},b_1,b_2)$. Así, $\mathbf{B} \models (\varphi_2 \wedge x_1 \not\approx x_2)[b_1,b_2]$.
Por consiguiente $\mathbf{B} \models \exists x_2(\varphi_2 \wedge x_1 \not\approx x_2)[b_1]$, es decir, $\langle \mathbf{B},b_1\rangle \models \exists x_2(\varphi_2 \wedge c_1 \not\approx x_2)$.
Como $\langle \mathbf{A},a_1\rangle \equiv \langle \mathbf{B},b_1\rangle$ entonces $\langle \mathbf{A},a_1\rangle \models \exists x_2(\varphi_2 \wedge c_1 \not\approx x_2)$.
Por lo tanto, $\mathbf{A} \models \exists x_2(\varphi_2 \wedge x_1 \not\approx x_2)[a_1]$.
Como A es infinito, para algún $e_n \in A$ se tiene que $\mathbf{A} \models (\varphi_2 \wedge x_1 \not\approx x_2)[a_1,e_n]$. Sea a_2 el primer elemento, por el PBO, de A en diferir de a_1. Entonces $\mathbf{A} \models \varphi_2\ [a_1,a_2]$.
Por lo tanto, $\varphi_2 \in p_2(\mathbf{A},a_1,a_2)$.
Esto implica que $p_2(\mathbf{A},a_1,a_2) = p_2(\mathbf{A},a_1,a_2)$.
Por el lema 2.1, $\langle \mathbf{A},a_1,a_2\rangle \equiv \langle \mathbf{B},b_1,b_2\rangle$. definimos $h(a_2) = b_2$.
Hipótesis de Inducción: Se tienen $a_1,\ldots,a_{k\text{-}1} \in \mathbf{A}$ y $b_1,\ldots,b_{k\text{-}1} \in B$ tales que cumplen con (*).
De la hipótesis de inducción y el lema 1,
$p(\mathbf{A},a_1,\ldots,a_{k\text{-}1}) = p(\mathbf{B},b_1,\ldots,b_{k\text{-}1})$.
Caso 1. k es impar.
Como A es infinito, $A\text{-}\{a_1,\ldots,a_{k\text{-}1}\} \neq \emptyset$.
Por el PBO, existe el $\min\{n \in \mathbb{N} \mid e_n \in A\text{-}\{a_1,\ldots,a_{k\text{-}1}\}\} = q$.
Sea $a_k = e_q$. Es claro que $a_k \neq a_i$ para $i = 1,\ldots,k\text{-}1$.
P.D. existe $b_k \in B$ tal que $p(\mathbf{A},a_1,\ldots,a_k) = p(\mathbf{B},b_1,\ldots,b_k)$.
Para demostrar esto, tomemos $\varphi_k \in p_k(\mathbf{A},a_1,\ldots,a_k)$, la cual es un generador de él. Ésta existe porque el tipo es principal.
Entonces $\langle \mathbf{A},a_1,\ldots,a_k\rangle \models \varphi_k \wedge \bigwedge_{i<j}^{k}(x_i \not\approx x_j)[a_1,\ldots,a_k]$, es decir, $\langle \mathbf{A},a_1,\ldots,a_{k\text{-}1}\rangle \models \exists x_k(\varphi_k \wedge \bigwedge_{i<j}^{k}(x_i \not\approx x_j))[a_1,\ldots,a_{k\text{-}1}]$.
Por lo tanto, $\exists x_k(\varphi_k \wedge \bigwedge_{i<j}^{k}(x_i \not\approx x_j)) \in p(\mathbf{A},a_1,\ldots,a_{k\text{-}1}) =$

$p(\mathbf{B}, b_1, \ldots, b_{k-1})$.

Entonces $\langle \mathbf{B}, b_1, \ldots, b_{k-1} \rangle \models \exists x_k(\varphi_k \wedge \bigwedge_{i<j}^{k}(x_i \not\approx x_j))[b_1, \ldots, b_{k-1}]$.

Como B es infinito, existe $d_m \in B\text{-}\{b_1, \ldots, b_{k-1}\}$ tal que $\langle \mathbf{B}, b_1, \ldots, b_{k-1}, d_m \rangle \models \varphi_k [b_1, \ldots, b_{k-1}, d_m]$ y $d \neq b_i$, para $i = 1, \ldots, k\text{-}1$.

Sea H el siguiente conjunto:

$$\left\{ m \mid \langle \mathbf{B}, b_1, \ldots, b_{k-1}, d_m \rangle \models \varphi_k [b_1, \ldots, b_{k-1}, d_m] \text{ y } d \neq b_i, \text{ para } i = 1, \ldots, k\text{-}1 \right\}$$

Escogemos $b_k = d_r$, donde $r = \text{mín } H$, por el PBO.

Así, $\langle \mathbf{B}, b_1, \ldots, b_{k-1} \rangle \models \varphi_k [b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k]$ y $\varphi_k \in p_k(\mathbf{B}, b_1, \ldots, b_k)$.

Esto implica que $p_k(\mathbf{A}, a_1, \ldots, a_k) \subseteq p_k(\mathbf{B}, b_1, \ldots, b_k)$.

Por ser k-tipos, $p_k(\mathbf{A}, a_1, \ldots, a_k) = p_k(\mathbf{B}, b_1, \ldots, b_k)$.

Por el lema 1, $\langle \mathbf{A}, a_1, \ldots, a_k \rangle \equiv \langle \mathbf{B}, b_1, \ldots, b_k \rangle$. Esto nos asegura que A está enumerado correctamente, sin faltar ninguno de sus elementos.

Caso 2. k es par.

Como B es infinito, $B\text{-}\{b_1, \ldots, b_{k-1}\} \neq \emptyset$.

Por el PBO, existe el $\text{mín}\{n \in \mathbb{N} \mid d_n \in B\text{-}\{b_1, \ldots, b_{k-1}\}\} = r$.

Sea $b_k = d_r$. Como en el caso anterior se demuestra que $p_k(\mathbf{B}, b_1, \ldots, b_k) \subseteq p_k(\mathbf{A}, a_1, \ldots, a_k)$, para algún $a_k \in A$.

Por ser k-tipos, $p_k(\mathbf{B}, b_1, \ldots, b_k) = p_k(\mathbf{A}, a_1, \ldots, a_k)$.

Por el lema 1, $\langle \mathbf{A}, a_1, \ldots, a_k \rangle \equiv \langle \mathbf{B}, b_1, \ldots, b_k \rangle$. Por lo tanto, B está enumerado correctamente, sin faltar ningún elemento de A. Definimos $h: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $h(a_i) = b_i$, h es biyectiva.

Entonces, por (*), h es un homomorfismo, como en el lema 2.1.

Por el lema 6.3,5, h es isomorfismo y $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$.

(2), (3) y (4) son equivalentes, por el lema 3.□

Ejemplos y comentarios.

-Th($\mathbf{Z}_n$,+) es categórica en potencia n.

-La teoría del orden denso sin extremos es $\aleph_0$-categórica.

-Sean $\mathbf{A} = \langle \mathbb{R}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \rangle$, u < v y $\varphi = \exists y Pxy$.

Por la densidad de $\mathbb{Q}$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que u < r < v.

Entonces $\mathbf{A} \models \varphi[u]$ y $\mathbf{A} \not\models \varphi[v]$ por lo que u y v tienen diferentes tipos. Así, $|S_1 Th(\mathbf{A})| \geq \aleph_0$.

Por el teorema XII, Th(**A**) no es $\aleph_0$-categórica.

Aplicaciones

1._ Estructuras localmente finitas y definibilidad.

Veremos que los modelos de teorías $\aleph_0$-categóricas sólo generan subestrucuras finitas, a partir de subconjuntos finitos.

Lema 4. Sean **A** una L-estructura, $X \subseteq A$ y $X \neq \emptyset$.

Entonces existe única $\langle X \rangle$ subestructura de **A** tal que:

(1) X está contenido en el dominio de $\langle X \rangle$.

(2) Para cualquier $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$, si $X \subseteq B$ entonces $\langle X \rangle \subseteq \mathbf{B}$.

(3) El dominio de $\langle X \rangle$ es X^* donde

$X^* = \{ t^{\mathbf{A}}[\bar{a}] \mid n \in \mathbb{N}, \bar{a} \in X^n$ y t un término$\}$.

Prueba. Sea Y cualquier subconjunto de A.

Definimos los siguientes conjuntos:

Y^+ es la unión de Y con el siguiente conjunto:

$\{b \mid$ existen $f \in F_n$ y $a_1,\ldots, a_n \in Y$ tales que $b = f^{\mathbf{A}}(a_1,\ldots,a_n)\}$.

$X_o = X \cup \{c_k^{\mathbf{A}} \mid k \in K\}$, $X_{n+1} = X_n^+$ y $X^* = \cup_{n\in N} X_n$,

$f^{X*} = f^{\mathbf{A}} \lceil X^*$ y $P^{X*} = P^{\mathbf{A}} \lceil X^*$.

Entonces $Y \subseteq Y^+$ y $\langle X \rangle = \langle X^*, \{ P^{X*} \}, \{f^{X*}\}, \{c_k^{\mathbf{A}} \mid k \in K\} \rangle$ cumple con (1) y (2).

Tomamos $B = \{ t^{\mathbf{A}}[\bar{a}] \mid n \in \mathbb{N}\ \bar{a} \in X^n$ y t es un término$\}$.

Verificaremos: $X^* = B$. Veamos primero que: $B \subseteq X^*$.

Esto lo haremos por inducción en términos.

Sean $c \in C$ y $\bar{a} \in X^n$.

Entonces $c^{\mathbf{A}}[\bar{a}] = c^{\mathbf{A}} \in \{c_k^{\mathbf{A}} \mid k \in K\} \subseteq X_o \subseteq X^*$.

Para $1 \leq k \leq n$, $x_k^{\mathbf{A}}[\bar{a}] = a_k \in X \subseteq X_o \subseteq X^*$.

Hipótesis de inducción, $t_i^{\mathbf{A}}[\bar{a}] \in X^*$, para $1 \leq i \leq m$.

Sea f un símbolo funcional de aridad m.

P.D. $f(t_1,\ldots,t_m)^{\mathbf{A}}[\bar{a}] \in X^*$.

Como X^* es una cadena, existe el $\max\{n_1, \ldots, n_m\} = r$.

Entonces, $t_i^{\mathbf{A}}[\bar{a}] \in X_r$, para $1 \leq i \leq m$.

Por lo tanto, $f(t_1,\ldots,t_m)^{\mathbf{A}}[\bar{a}] = f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[\bar{a}],\ldots, t_m^{\mathbf{A}}[\bar{a}]) \in X_{r+1} \subseteq X^*$.

Esto prueba la primera contención.

Para probar $X^* \subseteq B$, demostraremos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $X_n \subseteq B$.

En el caso $n = 0$, sea $a_i \in X$. Entonces, $a_i = x_i^{\mathbf{A}}[\bar{a}] \in B$.

$c^{\mathbf{A}} = c^{\mathbf{A}}[\bar{a}] \in B$. Así, $X_o \subseteq B$.

Hipótesis de Inducción. $X_n \subseteq B$.

Sea $b \in X_{n+1}$. Si $b \in X_n$ entonces $b \in B$.

Si $b \notin X_n$ entonces $b = f^{\mathbf{A}}(a_1,\ldots,a_m) = f(x_1,\ldots,x_m)^{\mathbf{A}}[\bar{a}] \in B$.

Por lo tanto, $X_{n+1} \subseteq B$. Entonces $X^* = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n \subseteq B$.

Finalmente $X^* = B$.$\square$

Ejemplos.

-Si $\langle \mathbb{N},S,0\rangle$, donde S es la función sucesor y $X = \{0\}$ entonces $\langle X \rangle = \mathbb{N}$.

-Si $\langle \mathbb{Z},+\rangle$ y $X = \{1\}$ entonces $\langle X \rangle = \mathbb{Z}$.

-Si $\langle \mathbb{Z},+,\cdot\rangle$ y $X = \{2\}$ entonces $\langle X \rangle = 2\mathbb{Z}$.

-Si $\langle \mathbb{C},\cdot,1\rangle$ y $X = \{i\}$ entonces $\langle X \rangle = \{1, i, -1, -i\}$.

Definición 2. Sea **A** una L-estructura.

A es localmente finita $\Leftrightarrow$ para todo $X \subseteq A$, si X es finito y no vacío entonces $\langle X \rangle$ es finita.

Recordemos que $D_n(\mathbf{A})$ es el conjunto de los definibles en

A, si **A** es una L-estructura.

Proposición 6. Sea T una teoría completa y sin modelos finitos.
Si T es $\aleph_o$-categórica entonces y **A** es una L-estructura tal que $\mathbf{A} \models T$ entonces
(1) **A** es localmente finita.
(2) $|D_n(\mathbf{A})| < \aleph_o$, para toda $n \in \mathbf{N}$.

Prueba.
(1) Sea $\mathbf{A} \models T$, $|\mathbf{A}| = \aleph_o$, $n \in \mathbf{N}^+$ y $\bar{a} \in A^n$.
P.D. $|\langle \bar{a} \rangle| < \aleph_o$.
Sean $b, d \in \langle \bar{a} \rangle$. Entonces, por el lema 4, $b = t^{\mathbf{A}}[\bar{a}]$ y $d = s^{\mathbf{A}}[\bar{a}]$. Demostraremos que:
(♣) $b = d \Leftrightarrow p(\bar{a}b) = p(\bar{a}d) \in S_{n+1}T$.
($\Leftarrow$) Por contrapositiva. Si $b \neq d$, $\mathbf{A} \models (t \approx x)[\bar{a}b]$ y $\mathbf{A} \not\models (t \approx x)[\bar{a}d]$.
Esto que implica que $(t \approx x) \in p(\bar{a}b)$ y $(t \approx x) \notin p(\bar{a}d)$.
Por lo tanto, $p(\bar{a}b) \neq p(\bar{a}d)$. La otra implicación es obvia.
Definimos $f: \langle \bar{a} \rangle \longrightarrow S_{n+1}T$, $f(b) = p(\bar{a}b)$.
Por (♣), f es una función inyectiva.
Puesto que T es $\aleph_o$-categórica, por el Teorema XII, obtenemos: $|\langle \bar{a} \rangle| \leq |S_{n+1}T| < \aleph_o$.
(2) Inmediato de la proposición 6.8.3.□

Ejemplos.
-$\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ es localmente finita.
-Si **A** es finita entonces **A** localmente finita.
-$\mathbf{Q} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 1, 0 \rangle$ es un campo que no es localmente finito, porque para $\mathbf{X} = \{1\}$ se tiene que $\langle \mathbf{X} \rangle = \mathbb{Q}$ y $Th(\mathbf{Q})$ no es $\aleph_o$-categórica.
-$\mathbf{N} = \langle \mathbb{N}, S, 0 \rangle$ no es localmente finita, porque para $\mathbf{X} = \{0\}$, $\langle \mathbf{X} \rangle = \mathbb{N}$. Como $\{n\}$ es definible en **N**, por medio de la fórmula

$\varphi_n(x) = (S^n 0 \approx x)$ y en consecuencia, $|D_1(\mathbf{N})| \geq \aleph_0$.
En cualquier caso, $Th(\mathbf{N})$ no es $\aleph_0$-categórica.

2._ Teorías y Modelos Atómicos.

Iniciamos con las teorías atómicas (Svenonius, 1959).

Definición 3. Sean $\varphi, \psi \in F_n$, $\Sigma \subseteq F_n$ y T una teoría completa.

(a) **φ es completa en T** $\Leftrightarrow$ para toda $\psi \in F_n$,
$T \models \varphi \rightarrow \psi$ o $T \models \varphi \rightarrow \neg\psi$.

(b) **ψ es completable en T** $\Leftrightarrow$ existe $\varphi \in F_n$ tal que φ es completa en T y $T \models \varphi \rightarrow \psi$.

(c) **T es atómica** $\Leftrightarrow$ para toda $n \in \mathbf{N}$ y $\psi \in F_n$, si ψ es consistente con T entonces ψ es completable en T.

Es claro que si $\varphi \in F_n$ es inconsistente con T, φ es completa en T.
Recordemos del capítulo 5 que, si $\varphi \in F_n$ y $\Sigma \subseteq F_n$:

$\Sigma_\varphi = \{\psi \in F_n \mid T \models \varphi \rightarrow \psi\}$ y

$U_\Sigma = \{[\psi] \mid \Sigma \models \psi\} \subseteq B_n T$.

Veamos la relación que hay entre átomos del álgebra de Lindenbaum y n-tipos principales en T, cuando T es completa.

Proposición 7. Sean T una teoría completa y $\varphi \in F_n$. Entonces:

(1) Para toda $n \in \mathbf{N}$ existe $\varphi \in F_n$ tal que φ es consistente y completa en T.

(2) Sea φ consistente con T. Son equivalentes (a)-(d):

(a) φ es completa en T.

(b) $\Sigma_\varphi \in S_n T$ y es un punto aislado.

(c) $U_{\Sigma_\varphi} \in SB_n T$ y es principal.

(d) $[\varphi]$ es un átomo en $B_n T$.

(3) T es atómica $\Leftrightarrow$ para toda $n \in \mathbf{N}$, $B_n T$ es atómica.

Prueba.

(1) Por reducción al absurdo. Sea $n \in \mathbf{N}$ y supongamos que para toda $\varphi \in F_n$, φ es inconsistente o incompleta en T. Sea $\varphi \in F_n$ consistente con T. Entonces φ es incompleta. Así existe $\psi \in F_n$ tal que $T \not\models \varphi \rightarrow \psi$ y $T \not\models \varphi \rightarrow \neg\psi$. Por lo tanto, existen modelos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de T tales que $\mathbf{A}$ realiza a $(\varphi \wedge \neg\psi)$ y $\mathbf{B}$ realiza a $(\varphi \wedge \psi)$. Claramente $\mathbf{A} \not\equiv \mathbf{B}$, lo que implica que T no es completa. Esto prueba que no puede existir una fórmula incompleta en T, como claramente es imposible que todas sean inconsistentes, queda probada la afirmación.

(2) (a) $\Rightarrow$(b) Sean $n \in \mathbf{N}$ φ $\psi \in F_n$ y φ completa en T. Si ψ es consistente con T entonces $T \models \varphi \rightarrow \psi$ o $T \models \varphi \rightarrow \neg\psi$. Entonces $\psi \in \Sigma_\varphi$ o $\neg\psi \in \Sigma_\varphi$, es decir, $\Sigma_\varphi \in S_nT$. Por lo tanto, Σ_φ es un punto aislado en S_nT, por la proposición 5.3.

(b) $\Rightarrow$(c) Como $\Sigma_\varphi \in S_nT$, por la proposición 5.7, $U_{\Sigma_\varphi} \in SB_nT$ y es un punto aislado. Por lo tanto, U_{Σ_φ} es principal.

(c) $\Rightarrow$(d) Por la proposición 2.7.2, $[\varphi]$ es un átomo en B_nT.

(d) $\Rightarrow$(a) Sea $\psi \in F_n$. Entonces $[\psi] \in B_nT$ y, como $[\varphi]$ es un átomo, $[\varphi] \leq [\psi]$ o $[\varphi] \leq [\psi]'$. Entonces $T \models \varphi \rightarrow \psi$ o $T \models \varphi \rightarrow \neg\psi$. Por lo tanto, φ es completa en T.

(3) ($\Rightarrow$) Sea $n \in \mathbf{N}$ y $[\psi] \neq 0$. Por la proposición 5.3, ψ es consistente con T. Por hipótesis, hay una $\varphi \in F_n$ tal que φ es completa en T y $T \models \varphi \rightarrow \psi$. Esto implica que, por (1), $[\varphi] \leq [\psi]$ y $[\varphi]$ es un átomo. Así, B_nT es atómica.

($\Leftarrow$) Sea $n \in \mathbf{N}$ y $\psi \in F_n$ consistente con T.

Por la proposición **5.3**, $[\psi] \neq 0$. Puesto que $B_n T$ es atómica, hay un $[\varphi] \in B_n T$ átomo tal que $[\varphi] \leq [\psi]$.
Por (1), $T \models \varphi \rightarrow \psi$ y φ es completa en T.$\Box$
Ahora trabajaremos con modelos atómicos (Svenonius) y primos.

Definición 4. Sea $\mathbf{A}$ una L-estructura.

(a) **A es atómico** $\Leftrightarrow$ para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $\bar{a} \in A^n$ hay una $\varphi \in F_n$ completa en $Th(\mathbf{A})$ tal que $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$.

(b) **A es primo** $\Leftrightarrow$ para todo $\mathbf{B} \models Th(\mathbf{A})$, $\mathbf{A} \propto \mathbf{B}$.

El modelo primo de una teoría T es un modelo tan pequeño que "cabe" en cualquier otro modelo de T.
El siguiente resultado se debe a Vaught, 1961.

Proposición 8. Sea T una teoría satisfacible y completa.

(1) Existencia de Modelos Atómicos Contables.
T es atómica $\Leftrightarrow$ T tiene un modelo atómico contable.

(2) Unicidad de Modelos Atómicos Contables.
Si $\mathbf{A}, \mathbf{B} \models T$ atómicos y $|A| = |B| = \aleph_0$ entonces $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$.

Prueba.
(1) ($\Rightarrow$) Supongamos que T es una teoría atómica.
Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\Sigma_n = \{\neg\varphi \mid \varphi \in F_n \text{ es completa en } T\}$.
P.D. Σ_n no es principal en T.
Para ver esto consideremos a $\psi \in F_n$ consistente con T.
Por ser T atómica, ψ es completable en T, es decir, hay una $\varphi \in F_n$ completa en T tal que $T \models \varphi \rightarrow \psi$.
Entonces, por ser T satisfacible, $T \not\models \varphi \rightarrow \neg\psi$ y por ser T completa, $T \models \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$, esto es $T \models \varphi \wedge \psi$.
Es decir, $\neg(\neg\varphi) \wedge \psi$ es consistente con T, para alguna $\neg\varphi \in \Sigma_n$. Esto implica que Σ_n no es principal en T.

Σ_n puede o no ser consistente con T. En el primer caso, por el lema de Ehrenfeucht, hay un modelo contable que lo omite. En el segundo caso, cualquier modelo (contable) lo omite. Así $\{\Sigma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de conjuntos consistentes con T, pero ninguno de ellos es principal en T. Por el corolario 1 al Teorema X, existe una L-estructura $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A} \models T$, $\mid \mathbf{A} \mid \leq \aleph_0$ y $\mathbf{A}$ omite a Σ_n, para toda $n \in \mathbb{N}$. Como T es completa y $\mathbf{A} \models T$, $T = Th(\mathbf{A})$.

Sea $\bar{a} \in A^n$. Entonces hay una $\neg\varphi \in \Sigma_n$ tal que $\mathbf{A} \not\models \neg\varphi[\bar{a}]$. Esto es, $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$ y φ completa en T. Así $\mathbf{A}$ es atómico.

($\Leftarrow$) Sean $n \in \mathbb{N}$, $\psi \in F_n$ consistente con T, $\mathbf{A} \models T$ y $\mathbf{A}$ atómico contable.

Por ser T completa, $T \models \exists\bar{x}\psi$ (proposición 5.6.2)

En particular, $\mathbf{A} \models \exists\bar{x}\psi$, por lo que para algún $\bar{a} \in A^n$, $\mathbf{A} \models \psi[\bar{a}]$. Como $\bar{a} \in A^n$ y $\mathbf{A}$ es atómico, sabemos que hay una $\varphi \in F_n$ completa en T tal que $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$.

Se afirma que $T \models \varphi \rightarrow \psi$.

Pues en caso contrario, por ser φ completa en T, se tendría que $T \models \varphi \rightarrow \neg\psi$, es decir, $\mathbf{A} \models \varphi \rightarrow \neg\psi\ [\bar{a}]$ y $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$, $\mathbf{A} \not\models \psi[\bar{a}]$. Contradicción.

Por lo tanto ψ es completable en T y así T es atómica.

(2) Procederemos como en el Teorema XII utilizando un argumento de back-and-forth.

Sean $A = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}^+ \}$ y $B = \{d_m \mid m \in \mathbb{N}^+ \}$ dos enumeraciones arbitrarias.

Por inducción en k y usando las fórmulas completas en T se demuestra que: (*) $\langle A, a_1, \ldots, a_k\rangle \equiv \langle B, b_1, \ldots, b_k\rangle$, para $i = 1, \ldots, k$. Definimos $h{:}A \rightarrow B$, $h(a_k) = b_k$.

Así h es un isomorfismo, como en el lema 2.1 y $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$.□

Veamos algunas consecuencias de la proposición anterior.
Sea $S(T) = \cup S_n T$.

Proposición 9. Sean T una teoría satisfacible, completa y **A** es una L-estructura tal que $|\ \mathbf{A}\ | \leq \aleph_o$. Entonces:

(1) **A** es atómico $\Leftrightarrow$ **A** es primo.

(2) **A** es primo $\Leftrightarrow$ todo tipo realizado en **A** es principal

(3) T es $\aleph_o$-categórica $\Leftrightarrow$ todos los modelos de T son atómicos.

(4) Si T no es atómica entonces $|\ S(T)\ | \geq 2^{\aleph_o}$.

(5) Si $|\ S(T)\ | \leq \aleph_o$ entonces T tiene un modelo atómico contable.

(6) T tiene un modelo atómico contable $\Leftrightarrow$ $S_n T$ tiene un conjunto denso de puntos aislados, para toda $n \in \mathbf{N}$.

Prueba.

(1) ($\Rightarrow$) Usaremos una parte del back-and-forth.
Sea $\mathbf{A} = \{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$, $\mathbf{B} \models T$ y $a_1 \in A$.
Como **A** es atómico, hay una $\varphi_1 \in F_1$ completa en T tal que $\mathbf{A} \models \varphi_1[a_1]$.
Es decir, $T \models \exists x \varphi_1$ (por la proposición 5.4.a).
Así, $\mathbf{B} \models \exists x \varphi_1$. Sea $b_1 \in B$ tal que $\mathbf{B} \models \varphi_1[b_1]$ y definimos $h(a_1) = b_1$.
Si $a_2 \neq a_1 \in \mathbf{A}$ entonces hay una $\varphi_2 = \varphi_2(x_1,x_2) \in F_2$ completa en T tal que $\mathbf{A} \models \varphi_2 \wedge (x_1 \not\approx x_2)\ [a_1,a_2]$.
Así, $\mathbf{A} \models \psi[a_1]$, donde $\psi = \exists x_2(\varphi_2 \wedge x_1 \not\approx x_2)$.
De este modo, ψ es consistente con T.
Se afirma que $T \models \varphi_1 \rightarrow \psi$, pues de lo contrario $T \models \varphi \rightarrow \neg\psi$ y $\mathbf{A} \not\models \psi[a_1]$. Absurdo.
Así que $\mathbf{B} \models \psi[b_1]$ y por definición de satisfacción, hay una $b_2 \in B$ tal que $\mathbf{B} \models \varphi_2[b_1,b_2]$, $b_1 \neq b_2$.

Definimos $h(a_2) = b_2$.

Hipótesis de inducción: para $1 \leq i \leq n\text{-}1$ existe $\varphi_i \in F_i$ completa en T tal que $\mathbf{A} \models \varphi_i[a_1,\ldots,a_i]$ y existen $b_1,\ldots, b_i \in B$ tales que $\mathbf{B} \models \varphi_i[b_1,\ldots,b_i]$, con $h(a_i) = b_i$, para $i = 1,\ldots, n\text{-}1$.

Sea $a_n \in A\text{-}\{a_1,\ldots,a_{n-1}\}$. Como $\mathbf{A}$ es atómico y $\bar{a} \in A^n$,
existe $\varphi_n \in F_n$ completa en T tal que
$\mathbf{A} \models \varphi_n \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1}(x_i \not\approx x_n)\ [\bar{a}]$.
Sea $\psi = \exists x_n(\varphi_n \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} x_i \not\approx x_n)$. Entonces $\mathbf{A} \models \psi[a_1,\ldots,a_{n-1}]$.
Como en el caso de $n = 2$, se afirma que $T \models \varphi_{n-1} \rightarrow \psi$.
Ya que $\mathbf{B} \models T$, $\mathbf{B} \models \psi[b_1,\ldots,b_{n-1}]$.
Así, se tiene que hay una $b_n \in B$ tal que $\mathbf{B} \models \varphi_n[b_1,\ldots,b_n]$
y $b_n \neq b_i$, para $1 \leq i \leq n$. Definimos $h(a_n) = b_n$.
Ahora tenemos que $h:A \rightarrow B$, $h(a_k) = b_k$, es una inmersión elemental. Por lo tanto, $\mathbf{A} \propto \mathbf{B}$.

- ($\Leftarrow$) Sean $n \in \mathbf{N}$ y $\bar{a} \in A^n$.

Como T es una teoría completa, $T = Th(\mathbf{A})$.
P.D. existe $\varphi \in F_n$ completa en T tal que $\mathbf{A}$ realiza a φ.
Sean $p = p_n(\mathbf{A}, \bar{a}) \in S_nT$, $\mathbf{B} \models T$ y $|\ B\ | \leq \aleph_o$.
Ya que $\mathbf{A}$ es primo, $\mathbf{A} \propto \mathbf{B}$ y $\mathbf{B}$ realiza a p.
Por lo tanto, cualquier modelo contable de T realiza a p.
Por el Teorema X, p es principal, es decir, hay una $\varphi \in F_n$ tal que $p = \Sigma_\varphi$. En particular tenemos que φ es completa en T y que $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$.
Esto nos dice que $\mathbf{A}$ es atómico y, por (1), primo.
(2) ($\Rightarrow$) Sea $n \in \mathbf{N}$ y $p \in S_nT$ tal que p es realizado en A.
Suponemos que p no es principal. Por el Teorema X existe un L-estructura $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{B} \models T$, $|\ B\ | \leq \aleph_o$ y $\mathbf{B}$ omite a p.
Como es atómico, $\mathbf{A} \propto \mathbf{B}$ y $\mathbf{B}$ realiza a p. Absurdo.

($\Leftarrow$) T tiene un modelo de cardinal $\aleph_o$, como se hizo en el Teorema XII. Sean **A** y **B** dos modelos contables de T. Por hipótesis, **A** y **B** son atómicos. Como T es completa, $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$. Por la proposición 8.2, $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$, es decir, T es $\aleph_o$-categórica.

(3) Inmediato del Teorema XII y del corolario 2 al Teorema X.

(4) Como T no es atómica, por la proposición 7.2, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que B_nT no es atómica. Por la proposición 3.1.7, $|S(T)| \geq |S_nT| = |SB_nT| \geq 2^{\aleph_o}$.

(5) Para toda $n \in \mathbb{N}$, $|\, S_nT \,| \leq \aleph_o < 2^{\aleph_o}$.

Por la contrapositiva de (5), para toda $n \in \mathbb{N}$, B_nT es atómica. Por la proposición 6.2, T es atómica.

Por la proposición 7.1, T tiene un modelo atómico contable.

(6) Inmediato del las proposiciones 8.1 y 3.1.2.□

Ejemplos y comentarios.

-$\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ es un modelo atómico contable del la teoría del orden denso y sin extremos.

-$\langle \mathbb{Q},+,\cdot,0,1 \rangle$ es un campo primo pero no un modelo primo de la teoría de campos de característica 0 (ver los axiomas en el apéndice 2), porque la fórmula $\varphi = x^2 - 2 \approx 0$, es satisfacible en $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, que es otro modelo de la teoría y omitida en $\mathbb{Q}$. Así que $\mathbb{Q} \not\propto \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Esto marca una diferencia entre ser un campo primo, el cual es un concepto algebraico que se refiere a las operaciones únicamente y modelo primo, concepto lógico de la Teoría de Modelos, que exige además, el cumplimiento de cuantificadores de fórmulas.

-Si **A** es finito entonces **A** es primo, por el lema 2.3, para la teoría de δ_n, que afirma "hay exactamente n elementos".

-Observamos que si $\mathbf{A} \models T$ y $|\mathbf{A}| \leq \aleph_o$ entonces $\mathbf{A}$ omite a todos los tipos no-principales en $T \Leftrightarrow \mathbf{A}$ es atómico, por la proposición 8.3.

-Si T es una teoría completa y $\aleph_o$-categórica entonces T es atómica.

-Como L es un lenguaje contable y T es una teoría en L entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, B_nT es contable y S_nT, como espacio topológico, es 2° numerable y metrizable.

Además, si T es completa, sin modelos finitos y $\aleph_o$-categórica entonces S_nT es discreto, con un conjunto denso de puntos aislados, para toda $n \in \mathbb{N}$.

?'Existe una teoría T completa y satisfacible tal que S_nT es perfecto, para algún $n \in \mathbb{N}$? La respuesta es no.

Por la proposición 7.1,2, siempre hay un átomo en B_nT y, por tanto, S_nT tiene un punto aislado, es decir, S_nT no puede ser perfecto, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Para terminar, ?qué sucede con la categoricidad en potencia $> \aleph_o$? Aunque el desarrollo de este tema queda totalmente fuera de los límites de este trabajo y será contado en otra tesis, citamos el memorable resultado siguiente debido a Morley (1963) y a Shelah (1970).

Teorema. Sea L un lenguaje contable y T una teoría completa y sin modelos finitos. Si T es λ-categórica, para algún $\lambda > \aleph_o$ entonces T es λ-categórica, para todo $\lambda > \aleph_o$.□

Consulte el apéndice 2 para aplicaciones de estos resultados.

APÉNDICE 1. LÓGICA

Proposición 1. Sean t un término; ψ,χ fórmulas; φ un enunciado; **A** una L-estructura y s,s' $\in {}^{\omega}A$.

(1) Si para toda x_i que ocurre en t, $x_i^{\mathbf{A}}[s] = x_i^{\mathbf{A}}[s']$.
Entonces $t^{\mathbf{A}}[s] = t^{\mathbf{A}}[s']$.

(2) Si s y s' coinciden en todas las variables libres que ocurren en ψ entonces $\mathbf{A} \models \psi[s] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \psi[s']$.

(3) $\mathbf{A} \models \psi[s]$ o $\mathbf{A} \models \neg\psi[s]$, pero no ambas.

(4) $\mathbf{A} \models \varphi[s] \Leftrightarrow$ para toda s' $\in {}^{\omega}A$, $\mathbf{A} \models \varphi[s']$.

En tal caso escribiremos $\mathbf{A} \models \varphi$.

(5) Satisfacción con los conectivos $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ y $\forall$.

(a) $\mathbf{A} \models \psi \vee \chi[s] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \psi[s]$ o $\mathbf{A} \models \chi[s]$.

(b) $\mathbf{A} \models \psi \rightarrow \chi[s] \Leftrightarrow \mathbf{A} \not\models \psi[s]$ o $\mathbf{A} \models \chi[s]$.

(c) $\mathbf{A} \models \psi \leftrightarrow \chi[s] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \psi \rightarrow \chi[s]$ y $\mathbf{A} \models \chi \rightarrow \psi[s]$.

(d) $\mathbf{A} \models \forall x_i \psi[s] \Leftrightarrow$ para todo b $\in$ A, $\mathbf{A} \models \psi[s(i/b)]$.

(6) Modus Ponens.

(a) Si $\mathbf{A} \models \psi \rightarrow \chi[s]$ y $\mathbf{A} \models \psi[s]$ entonces $\mathbf{A} \models \chi[s]$.

(b) Si $\mathbf{A} \models \psi \rightarrow \chi$ y $\mathbf{A} \models \psi$ entonces $\mathbf{A} \models \chi$.

(c) Si $\models \psi \rightarrow \chi$ y $\models \psi$ entonces $\models \chi$.

(7) Si φ es un enunciado entonces $\mathbf{A} \models \varphi$ o $\mathbf{A} \models \neg\varphi$, pero no ambos.

Prueba.

(1) Por inducción en términos.

Si $t = x_i$ entonces, por hipótesis, $x_i^{\mathbf{A}}[s] = x_i^{\mathbf{A}}[s']$.

El caso "$t = c$" no se puede dar porque x_i debe de ocurrir en t.

Hipótesis de inducción $t_j^{\mathbf{A}}[s] = t_j^{\mathbf{A}}[s']$, para j = 1,..., m.

Sea f un símbolo funcional de aridad m.

P.D. $f(t_1,\ldots,t_m)^{\mathbf{A}}[s] = f(t_1,\ldots,t_m)^{\mathbf{A}}[s']$.

Como $f^{\mathbf{A}}$ es una función en A entonces a partir de la hipótesis de inducción se tiene que $f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[s],\ldots,t_m^{\mathbf{A}}[s]) = f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[s'],\ldots,t_m^{\mathbf{A}}[s'])$.

Por lo tanto, $f(t_1,...,t_m)^{\mathbf{A}}[s] = f(t_1,...,t_m)^{\mathbf{A}}[s']$.

(2) El lector puede hacer esto por inducción en la formación de fórmulas.

(3) Por reducción al absurdo.

Suponemos que hay una fórmula ψ tal que $\mathbf{A} \not\models \psi[s]$ y $\mathbf{A} \not\models \neg\psi[s]$.

Por definición 5.c, obtenemos que $\mathbf{A} \models \neg\psi[s]$ y $\mathbf{A} \not\models \neg\psi[s]$. Absurdo.

Por lo tanto, $\mathbf{A} \models \psi[s]$ o $\mathbf{A} \models \neg\psi[s]$.

Ahora suponemos que $\mathbf{A} \models \psi[s]$ y $\mathbf{A} \models \neg\psi[s]$.

Por lo tanto, $\mathbf{A} \models \psi[s]$ y $\mathbf{A} \not\models \psi[s]$. Absurdo.

(4) Como φ es un enunciado, el conjunto de variables libres en φ es vacío. Así que cualquier par de sucesiones s,s'en $\mathbf{A}$, coinciden en las variables libres de φ, por vacuidad.

Por (2), si una la satisface, la otra, también.

(5) (a) De la definición del conectivo "$\vee$", obtenemos que

$\psi \vee \chi = \neg(\neg\psi \wedge \neg\chi)$.

Entonces $\mathbf{A} \models \psi \vee \chi[s] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \neg(\neg\psi \wedge \neg\chi)[s]$.

Por la definición 5.c, $\mathbf{A} \not\models (\neg\psi \wedge \neg\chi)[s]$.

Por la definición 5.d, $\mathbf{A} \not\models \neg\psi[s]$ o $\mathbf{A} \not\models \neg\chi[s]$.

Por la definición 5.c, $\mathbf{A} \models \psi[s]$ o $\mathbf{A} \models \chi[s]$ y recíprocamente.

(b), (c) y (d) es análogo y el lector puede hacerlo.

(6) (a) Sean $\mathbf{A} \models \psi \to \chi[s]$ y $\mathbf{A} \models \psi[s]$. Supongamos que $\mathbf{A} \not\models \chi[s]$.

Entonces, $\mathbf{A} \models \psi[s]$ y $\mathbf{A} \not\models \chi[s]$.

Por por (5.b), $\mathbf{A} \not\models (\psi \to \chi)[s]$ lo que contradice que $\mathbf{A} \models \psi \to \chi[s]$.

Por lo tanto, $\mathbf{A} \not\models \psi \to \chi$ lo que contradice que $\mathbf{A} \models \psi \to \chi[s]$.

Por lo tanto, $\mathbf{A} \models \chi[s]$.

(b) y (c) son fáciles a partir de (a) por lo que queda a cargo del lector.

(7) Inmediato de (3) y (4).□

Fórmulas universalmente válidas. Sean φ,ψ,χ son fómulas. Las siguientes fórmulas son univeralmente válidas:

Idempotencia. $\varphi \vee \varphi \leftrightarrow \varphi$, $\varphi \wedge \varphi \leftrightarrow \varphi$.

Conmutatividad. $\varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \varphi$, $\varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi$

Asiciatividad. $\varphi \vee (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \vee \chi$, $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$.

Distributividad. $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$,

$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$.

Absorción. $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi$ y $\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \varphi$.

Doble Negación. $\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$

De Morgan. $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$, $\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

Implicación Material. $(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$

Contrapositiva. $(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$.

Modus Ponens. $\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$.

Reflexividad de "$\rightarrow$". $\varphi \rightarrow \varphi$

Transitividad de "$\rightarrow$". $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$.

Equivalencia Material. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.

Reflexividad de "$\leftrightarrow$". $\varphi \leftrightarrow \varphi$.

Simetría de "$\leftrightarrow$". $(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\psi \leftrightarrow \varphi)$

Transitividad de "$\leftrightarrow$". $(\varphi \leftrightarrow \psi) \wedge (\psi \leftrightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \leftrightarrow \chi)$.

Simplificación. $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$.

Adición. $\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$.

Importación-exportación. $((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))$.

Axiomas de la Igualdad. $\forall x (x \approx x)$, $\forall x \forall y\, (x \approx y \rightarrow y \approx x)$ y

$\forall x \forall y \forall z\, (x \approx y \wedge y \approx z \rightarrow x \approx z)$, $t \approx t$, $(t \approx s \rightarrow s \approx t)$,

$(t \approx s \wedge s \approx u \rightarrow t \approx u)$, para cualesquiera t,s,u términos.

Negación de cuantificadores. $\neg\forall x_i \varphi \leftrightarrow \exists x_i \neg\varphi$ y $\neg\exists x_i \varphi \leftrightarrow \forall x_i \neg\varphi$.

Si x_i no ocurre libre en φ entonces $\forall x_i (\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\exists x_i \psi \rightarrow \varphi)$.

Proposición 2. Sean Σ y Δ conjuntos de enunciados, $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ y ψ enunciados. Entonces:

(1) Si $\varphi \in \Sigma$ entonces $\Sigma \models \varphi$.

(2) Si $\Sigma \models \varphi$ y $\Sigma \subseteq \Delta$ entonces $\Delta \models \varphi$.

(3) $\Sigma \models \varphi_i$, para $1 \leq i \leq n \Leftrightarrow \Sigma \models \bigwedge_{i=1}^{k} \varphi_i$.

(4) Σ no tiene modelo $\Leftrightarrow$ existe φ un enunciado tal que $\Sigma \models \varphi \wedge \neg\varphi$.

(5) $\Sigma \not\models \varphi \Leftrightarrow \Sigma + \neg\varphi$ tiene modelo.

(6) Si $\Sigma \models \varphi \rightarrow \psi$ y $\Sigma \models \varphi$ entonces $\Sigma \models \psi$.

(7) Teorema de la Deducción, TD. $\Sigma + \varphi \models \psi \Leftrightarrow \Sigma \models \varphi \rightarrow \psi$.

(8) Σ es un conjunto satisfacible.

Σ es completo $\Leftrightarrow$ para todo par de enunciados φ y ψ,

si $\Sigma \models \varphi \vee \psi$ entonces $\Sigma \models \varphi$ o $\Sigma \models \psi$.

Prueba.

(1) Sea $\mathbf{A}$ una L-estructura tal que $\mathbf{A} \models \Sigma$.

Como $\varphi \in \Sigma$ entonces $\mathbf{A} \models \varphi$.

(2) Sea $\mathbf{A}$ una L-estructura cualquiera tal que $\mathbf{A} \models \Delta$.

P.D. $\mathbf{A} \models \varphi$.

Como $\Sigma \subseteq \Delta$ entonces $\mathbf{A} \models \Sigma$. Pero $\Sigma \models \varphi$, así que, $\mathbf{A} \models \varphi$.

(3) Por inducción en n.

(4)($\Rightarrow$) Por contrapositiva. Sea φ un enunciado.

Suponemos que $\Sigma \not\models \varphi \wedge \neg\varphi$.

Entonces existe una L-estructura $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A} \models \Sigma$ y

$\mathbf{A} \not\models \varphi \wedge \neg\varphi$.

En particular, $\mathbf{A} \models \Sigma$. Por lo tanto, Σ tiene modelo.

($\Leftarrow$) Por reducción al absurdo.

Suponemos que Σ tiene modelo, digamos, $\mathbf{A}$.

Por hipótesis, existe un enunciado φ tal que $\Sigma \models \varphi \wedge \neg\varphi$.

Por lo tanto, $\mathbf{A} \models \varphi \wedge \neg\varphi$, es decir, $\mathbf{A} \models \varphi$ y $\mathbf{A} \not\models \varphi$. Absurdo.

(5) $\Sigma \not\models \varphi \Leftrightarrow$ hay una L-estructura $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A} \models \Sigma$ y $\mathbf{A} \not\models \varphi$.

Entonces, $\mathbf{A} \models \neg\varphi$, es decir, $\mathbf{A} \models \Sigma + \neg\varphi$ y recíprocamente.

(6) Sea $\mathbf{A}$ una L-estructura cualquiera tal que $\mathbf{A} \models \Sigma$. P.D. $\mathbf{A} \models \psi$.

Como $\Sigma \models \varphi \rightarrow \psi$ y $\Sigma \models \varphi$ entonces $\mathbf{A} \models \varphi \rightarrow \psi$ y $\mathbf{A} \models \varphi$.
Por definición de "$\rightarrow$" se tiene que $\mathbf{A} \not\models \varphi$ o $\mathbf{A} \models \psi$.
Pero $\mathbf{A} \models \varphi$. Entonces $\mathbf{A} \models \psi$.
(7) ($\Rightarrow$) Sea $\mathbf{A}$ una L-estructura cualquiera tal que $\mathbf{A} \models \Sigma$.
P.D. $\mathbf{A} \models \varphi \rightarrow \psi$. Suponemos que $\mathbf{A} \not\models \varphi \rightarrow \psi$.
Entonces, negando la definición de "$\rightarrow$", obtenemos que $\mathbf{A} \models \varphi$ y $\mathbf{A} \not\models \psi$. Esto implica que $\mathbf{A} \models \Sigma + \varphi$ y $\mathbf{A} \not\models \psi$, es decir, $\Sigma + \varphi \not\models \psi$.
Absurdo.
($\Leftarrow$) Inmediato de (1), (2), $\Sigma \subseteq \Sigma + \varphi$ y (6).
(8) ($\Rightarrow$) Sea Σ un conjunto satisfacible y completo tal que $\Sigma \models \varphi \vee \psi$. Supongamos que $\Sigma \not\models \varphi$ y $\Sigma \not\models \psi$.
Como Σ es completo, $\Sigma \models \neg\varphi$ y $\Sigma \models \neg\psi$. Por (2), $\Sigma \models \neg\varphi \wedge \neg\psi$.
Por las leyes de De Morgan, $\Sigma \models \neg(\varphi \vee \psi)$. Pero $\Sigma \models \varphi \vee \psi$.
Por lo tanto, Σ no es satisfacible. Absurdo.
($\Leftarrow$) Supongamos que Σ es incompleto.
Entonces existe un enunciado φ tal que $\Sigma \not\models \varphi$ y $\Sigma \not\models \neg\varphi$.
Por la contrapositiva de la hipótesis, $\Sigma \not\models \varphi \vee \neg\varphi$.
Pero $\models \varphi \vee \neg\varphi$, entonces $\Sigma \models \varphi \vee \neg\varphi$. Absurdo.$\square$

Conjuntos maximalmente satisfacibles.
Proposición 3. Sea Σ un conjunto satisfacible de enunciados.

(1) Si Σ es maximal satisfacible entonces $\Sigma \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Sigma$.
(2) Si Σ es maximal satisfacible entonces Σ es completo.
(3) Son equivalentes (a)-(c):
  (a) Σ es maximal satisfacible.
  (b) para todo enunciado φ, $\varphi \in \Sigma$ o $\neg\varphi \in \Sigma$.
  (c) Para cualesquiera enunciados φ,ψ, si $\varphi \vee \psi \in \Sigma$ entonces $\varphi \in \Sigma$ o $\psi \in \Sigma$.
(4) Σ es maximal satifacible $\Leftrightarrow$ existe una L-estrucutra $\mathbf{A}$ tal que $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathbf{A})$.

Prueba.

(1) Sea Σ un conjunto de enunciados maximal satisfacible

($\Rightarrow$) Suponemos que $\Sigma \models \varphi$.

Como Σ es satisfacible entonces existe una L-estructura $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A} \models \Sigma$. Entonces $\mathbf{A} \models \varphi$. Por lo tanto $\Sigma + \varphi$ es satifacible.

Es claro que $\Sigma \subseteq \Sigma + \varphi$. Como Σ es maximal satifacible entonces $\Sigma = \Sigma + \varphi$, es decir, $\varphi \in \Sigma$.

($\Leftarrow$) Inmediato de la proposición 2.1.

(2) Supongamos que Σ es incompleto.

Entonces existe un enunciado φ tal que $\Sigma + \varphi$ y $\Sigma + \neg\varphi$ son satisfacibles.

Como Σ es maximal satifacible, por (1), $\varphi \in \Sigma$ y $\neg\varphi \in \Sigma$.

Por lo tanto, Σ no es satisfacible. Absurdo.

(3) (a) $\Rightarrow$(b) Supongamos que existe un enunciado φ tal que $\varphi \notin \Sigma$ y $\neg\varphi \notin \Sigma$. Ya que $\varphi \notin \Sigma$, por (1), $\Sigma \not\models \varphi$ entonces $\Sigma + \neg\varphi$ es satisfacible.

Como Σ es maximal satifacible y $\Sigma \subseteq \Sigma + \neg\varphi$ entonces $\Sigma = \Sigma + \neg\varphi$.

Por lo tanto, $\neg\varphi \in \Sigma$, lo que contradice nuestra supocición.

(b) $\Rightarrow$(c) Sean φ y ψ enunciados tales que $\Sigma \models \varphi \vee \psi$.

Supongamos que $\Sigma \not\models \varphi$ y $\Sigma \not\models \psi$. Por (1), $\varphi \notin \Sigma$ y $\psi \notin \Sigma$.

Por (b), $\neg\varphi \in \Sigma$ y $\neg\psi \in \Sigma$, es decir, $\Sigma \models \neg(\varphi \wedge \psi)$.

Esto implica que Σ no es satisfacible. Absurdo.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sea Δ un conjunto satifacible de enunciados y $\Sigma \subseteq \Delta$.

P.D. $\Sigma = \Delta$. Suponemos que $\Sigma \neq \Delta$.

Entonces hay un $\varphi \in \Delta$ tal que $\varphi \notin \Sigma$.

Por (c), $\neg\varphi \in \Sigma$ y Δ no tiene modelo. Contradicción.

(4)($\Rightarrow$) Σ es maximal satifacible.

Como Σ es satisfacible, existe una L-estructura $\mathbf{A}$ tal que $\Sigma \subseteq \mathrm{Th}(\mathbf{A})$.

Por la maximalidad de Σ se tiene que $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathbf{A})$.

($\Leftarrow$) Inmediato de la proposición 1.3.$\square$

Lema 1. Sean u,t términos; x,y,z variables y φ,ψ fórmulas. Supongamos que las variables y, z no ocurren en u. Entonces:

(1) $(u^x_y)^y_z = u^x_z$ y $u^y_z = u$.

(2) $(\varphi \star \psi)^x_t = \varphi^x_t \star \psi^x_t$, para $\star \in \{\wedge\ ,\ \vee\ ,\ \rightarrow\ ,\ \leftrightarrow\}$.

(3) $(\forall y\psi)^x_t = \begin{cases} \forall y\ \psi & ,\text{si } y = x. \\ \forall y(\psi)^x_t & ,\text{si } y \neq x. \end{cases}$

Prueba.

(1) Por inducción en términos.

Si u = x entonces $(x^x_y)^y_z = (y)^y_z = z = (x)^x_z$.

Si u = v variable diferente de x entonces $(v^x_y)^y_z = (v)^y_z = v = (v)^y_z$.

Si u = c entonces $(c^x_y)^y_z = c^y_z = c = c^x_z$.

Hipótesis de inducción, $(u^x_{iy})^y_z = u^x_{iz}$, para i = 1,..., m.

Sea f un símbolo de aridad m. P.D. $(f(u_1,...,u_m)^x_y)^y_z = f(u_1,...,u_m)^x_z$.

$(f(u_1,...,u_m)^x_y)^y_z = f((u^x_{1y})^y_z,...,(u^x_{my})^y_z) = f(u^x_{1z},...,u^x_{miz}) = f(u_1,...,u_m)^x_z$.

Para $u^y_z = u$ se procede similarmente.

(2) Para el caso "$\wedge$" esto es cierto por la definición 9.b.

Recordemos que $\varphi \vee \psi = \neg(\neg\psi \wedge \neg\chi)$. Por la definición 9.b, se tiene que: $(\varphi \vee \psi)^x_t = (\neg(\neg\psi \wedge \neg\chi))^x_t = \neg(\neg\psi^x_t \wedge \neg\chi^x_t) = \varphi^x_t \vee \psi^x_t$.

Para los demás casos es similar.

(3) Se procede como en (2).□

Lema de Sustitución. Sean φ una fórmula; u, t términos, x_i ocurre libre en φ, **A** una L-estructura, $s \in {}^\omega A$ y $d = t^{\mathbf{A}}[s]$. Entonces:

(1) $(u^{x_i}_t)^{\mathbf{A}}[s] = u^{\mathbf{A}}[s(\ i\ /\ d)]$.

(2) $\mathbf{A} \models \varphi(t)[s] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi(x_i)[s(\ i\ /\ d)]$.

(3) Si t es libre para x_i en φ entonces $\models \forall x_i\varphi \rightarrow \varphi(t)$ y $\models \varphi(t) \rightarrow \exists x_i\varphi$.

(4) Si x_j es libre para x_i en φ entonces $\models \forall x_i\varphi(x_i) \leftrightarrow \forall x_j\varphi(x_j)$ y $\models \exists x_i\varphi(x) \leftrightarrow \exists x_j\varphi(x_j)$.

Prueba.

(1) Por el lema 1 e inducción en la formación de términos.

Si $u = x_i$ entonces $(x_{it}^{x_i})^{\mathbf{A}}[s] = t^{\mathbf{A}}[s] = d = x_i^{\mathbf{A}}[s(i/d)]$.

Si $u = x_j$, con $j \neq i$ entonces $(x_{jt}^{x_i})^{\mathbf{A}}[s] = x_j^{\mathbf{A}}[s] = s_j = x_j^{\mathbf{A}}[s(i/d)]$.

Si $u = c$ entonces $(c_t^{x_i})^{\mathbf{A}}[s] = c^{\mathbf{A}}[s] = c^{\mathbf{A}}[s(i/d)]$.

Hipótesis de inducción, $(u_{jt}^{x_i})^{\mathbf{A}}[s] = u^{\mathbf{A}}[s(\ i\ /\ d)]$, para $j = 1,\dots, m$.

Sea f un ſmbolo de aridad m.

P.D. $(f(u_1,\dots,u_m)_t^{x_i})^{\mathbf{A}}[s] = f(u_1,\dots,u_m)^{\mathbf{A}}[s(i/d)]$.

Como $f^{\mathbf{A}}$ es una función en A entonces, a partir de la hipótesis de inducción tenemos que:

$f^{\mathbf{A}}((u_{1t}^{x_i})^{\mathbf{A}}[s],\dots,(u_{mt}^{x_i})^{\mathbf{A}}[s]) = f^{\mathbf{A}}(u_1^{\mathbf{A}}[s(\ i\ /\ d)],\dots,u_m^{\mathbf{A}}[s(\ i\ /\ d)])$,

es decir, $(f(u_1,\dots,u_m)_t^{x_i})^{\mathbf{A}}[s] = f(u_1,\dots,u_m)^{\mathbf{A}}[s(i/d)]$.

(2) Por (1) e inducción en la formación de fórmulas.

Si $\varphi = (t_1 \approx t_2)$ entonces,

$\mathbf{A} \models \varphi(t)[s] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi_t^{x_i}[s] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models (t_{1t}^{x_i} \approx t_{2t}^{x_i})[s] \Leftrightarrow t_{1t}^{x_i\mathbf{A}}[s] = t_{2t}^{x_i\mathbf{A}}[s]$

$\Leftrightarrow t^{\mathbf{A}}[s(i/d)] = {}^{\mathbf{A}}[s(i/d)] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models (t_1 \approx t_2)[s(i/d)] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi[s(i/d)]$.

Si $\varphi = P(t_1,\dots,t_n)$ entonces,

$\mathbf{A} \models \varphi(t)[s] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models P(t_1,\dots,t_n)_t^{x_i}[s] \Leftrightarrow (t_{1t}^{x_i\mathbf{A}}[s],\dots,t_{nt}^{x_i\mathbf{A}}[s]) \in P^{\mathbf{A}} \Leftrightarrow$

$(t_1^{\mathbf{A}}[s(\ i\ /\ d)],\dots,t_n^{\mathbf{A}}[s(\ i\ /\ d)]) \in P^{\mathbf{A}} \Leftrightarrow \mathbf{A} \models P(t_1,\dots,t_n)[s(\ i\ /\ d)] \Leftrightarrow$

$\mathbf{A} \models \varphi[s(i/d)]$.

Hipótesis de inducción, $\mathbf{A} \models \psi(t)[s]$ y $\mathbf{A} \models \chi(t)[s] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \psi[s(\ i\ /\ d)]$ y $\mathbf{A} \models \chi[s(i/d)]$.

Si $\varphi = \neg\psi$ entonces,

$\mathbf{A} \models \varphi(t)[s] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models (\neg\psi)_t^{x_i}[s] \Leftrightarrow \mathbf{A} \not\models \psi_t^{x_i}[s] \Leftrightarrow \mathbf{A} \not\models \psi[s(\ i\ /\ d)] \Leftrightarrow$

$\mathbf{A} \models (\neg\psi)[s(i/d)]$.

Si $\varphi = \psi \wedge \chi$ entonces,

$\mathbf{A} \models \varphi(t)[s] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models (\psi \wedge \chi)_t^{x_i}[s] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \psi(t)[s]$ y $\mathbf{A} \models \chi(t)[s] \Leftrightarrow$

$\mathbf{A} \models \psi[s(\ i\ /\ d)]$ y $\mathbf{A} \models \chi[s(i/d)] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \psi \wedge \chi[s(i/d)]$.

Si $\varphi = \exists x_j\psi$ y como x_i ocurre libre en φ entonces $i \neq j$ y

$\varphi_t^{x_i} = (\exists x_j\psi)_t^{x_i} = \exists x_j\psi_t^{x_i}$. Por lo tanto,

$\mathbf{A} \models \varphi(t)[s] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \exists x_j\psi_t^{x_i}[s] \Leftrightarrow$ para algún $b \in A$, $\mathbf{A} \models \psi_t^{x_i}[s(j/d)]$

$\Leftrightarrow$ para algún $b \in A$, $\mathbf{A} \models \psi[s(j/d,i/d)] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \exists x_j \psi[s(i/d)]$.

(3) Sea $\mathbf{A}$ una L-estructura cualquiera.

Supongamos que $\mathbf{A} \not\models \forall x_i \varphi \rightarrow \varphi(t)$.

Entonces, para alguna $s \in {}^{\omega}A$, $\mathbf{A} \models \forall x_i \varphi[s]$ y $\mathbf{A} \not\models \varphi(t)[s]$.

Por (2), $\mathbf{A} \not\models \varphi[s(i/d)]$ y así, $\mathbf{A} \not\models \forall x_i \varphi[s]$ lo que contradice a que $\mathbf{A} \models \forall x_i \varphi[s]$. Por lo tanto, $\mathbf{A} \models \forall x_i \varphi \rightarrow \varphi(t)$.

Como $\models \forall x_i \neg\varphi \rightarrow \neg\varphi(t)$ entonces por contrapositiva, $\models \varphi(t) \rightarrow \neg\forall x_i \neg\varphi$, es decir, $\models \varphi(t) \rightarrow \exists x_i \varphi$.

(4) Suponemos que $\forall x_i \varphi(x) \not\models \forall x_j \varphi(x_j)$.

Entonces existe una L-estructura $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A} \models \forall x_i \varphi(x_i)$ y $\mathbf{A} \not\models \forall x_j \varphi(x_j)$.

Como $\mathbf{A} \not\models \forall x_j \varphi(x_j)$ entonces existe $s \in {}^{\omega}A$ tal que $\mathbf{A} \not\models \forall x_j \varphi(x_j)[s]$.

Entonces para algún $b \in A$, $\mathbf{A} \not\models \varphi(x_j)[s(j/b)]$.

Pero $\mathbf{A} \models \forall x_i \varphi(x)$ entonces, en particular, $\mathbf{A} \models \varphi(x_i)[s(j/b)]$.

Por (3) y para $s(j/b) \in {}^{\omega}A$, $\mathbf{A} \models \forall x_i \varphi \rightarrow \varphi(x_j)[s(j/b)]$.

Por Modus Ponens, $\mathbf{A} \models \varphi(x_j)[s(j/b)]$.

Esto contradice al heco de que $\mathbf{A} \not\models \forall x_j \varphi(x_j)[s]$.

Por lo tanto, $\forall x_i \varphi(x) \models \forall x_j \varphi(x_j)$.

Por el Teorema de la Deducción, $\models \forall x_i \varphi(x_i) \rightarrow \forall x_j \varphi(x_j)$.

Para el otro caso $\models \forall x_j \varphi(x_j) \rightarrow \forall x_i \varphi(x_i)$ se procede similarmente.

Por conjunción y la definición de "$\leftrightarrow$" obtenemos que $\models \forall x_i \varphi(x) \leftrightarrow \forall x_j \varphi(x_j)$. La otra afirmación se demuestra analogamente.$\square$

Lema de Constantes. Sean $\varphi = \varphi(x_1)$ una fórmula con una variable libre, Σ un conjunto de enunciados, ψ un enunciado y c una constante en L que no ocurre en Σ ni en ψ ni en φ. Entonces:

(1) **Generalización Universal, GU.**
Si $\Sigma \models_o \varphi(c)$ entonces, para alguna variable x_i que no ocurre en φ, $\Sigma \models_o \forall x_i \varphi$.

(2) **Generalización Existencial, GE.**

Si $\Sigma \models_o \varphi(c)$ entonces $\Sigma \models_o \exists x_1 \varphi$.

(3) $\Sigma + \varphi(c) \models_o \psi \Leftrightarrow \Sigma + \exists x_1 \varphi \models_o \psi$.

(4) Si $\Sigma + \exists x_1 \varphi \to \varphi(c) \models_o \psi$ entonces $\Sigma \models_o \psi$.

(5) Si Σ es finitamente satisfacible entonces $\Sigma + \exists x_1 \varphi \to \varphi(c)$ es finitamente satisfacible.

Prueba.
(1) El número de variables que ocurren en φ es finito.
Sea x_i la primera variable que no ocurren en φ.
Por hipótesis $\Sigma \models_o \varphi(c)$. Supongamos que $\Sigma \not\models_o \forall x_i \varphi$.
Entonces existe una L-estructura $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A} \models \Sigma$ y $\mathbf{A} \not\models \forall x_i \varphi$.
Ya que $\mathbf{A} \not\models \forall x_i \varphi$, existe $s \in {}^{\omega}A$ tal que $\mathbf{A} \not\models \forall x_i \varphi\,[s]$.
Por lo tanto, para alguna $b \in A$ ocurre que $\mathbf{A} \not\models \varphi\,[s(i / b)]$.
Por otro lado, como $\mathbf{A} \models \Sigma$ y $\Sigma \models_o \varphi(c)$ entonces $\mathbf{A} \models \varphi(c)[s]$.
Por el Lema de Sustitución, $\mathbf{A} \models \varphi\,[s(i / c^{\mathbf{A}}\,[s])]$.
Pero $s(i / b) = s(i / c^{\mathbf{A}}\,[s])$ lo que implica que $b = c^{\mathbf{A}}\,[s]$, $\mathbf{A} \not\models \varphi\,[s(i / b)]$ y $\mathbf{A} \models \varphi\,[s(i / b)]$, lo cual es un absurdo. Así $\Sigma \models_o \forall x_i \varphi$.
(2) Inmediato de (1), $\models \forall x_1 \varphi \to \exists x_1 \varphi$ y Modus Ponens.
(3) ($\Rightarrow$) Supongamos que $\Sigma + \varphi(c) \models_o \psi$.
Por contrapositiva, $\Sigma + \neg\psi \models_o \neg\varphi(c)$.
Por (1), $\Sigma + \neg\psi \models_o \forall x_1 \neg\varphi(x_1)$, es decir, $\Sigma + \neg\psi \models_o \neg\exists x_1 \varphi(x_1)$.
Por contrapositiva, $\Sigma + \exists x_1 \varphi \models_o \psi$.
($\Leftarrow$) supongamos que $\Sigma + \exists x_1 \varphi \models_o \psi$.
Por contrapositiva, $\Sigma + \neg\psi \models_o \neg\exists x_1 \varphi(x_1)$.
Por lo tanto, $\Sigma + \neg\psi \models_o \forall x_1 \neg\varphi(x_1)$.
Por el Lema de Sustitución (3), $\models \forall x_1 \neg\varphi(x_1) \to \neg\varphi(c)$.
Por Modus Ponenes, $\Sigma + \neg\psi \models_o \neg\varphi(c)$.
Por contrapositiva, $\Sigma + \varphi(c) \models_o \psi$.
(4) Supongamos que $\Sigma + \exists x_1 \varphi \to \varphi(c) \models_o \psi$.
Por el Teorema de la Deducción, $\Sigma \models (\exists x_1 \varphi \to \varphi(c)) \to \psi$.
Por (1), $\Sigma \models \forall x_2((\exists x_1 \varphi \to \varphi(x_2)) \to \psi)$.
Por algunas universalmente válidas obtenemos que
$\Sigma \models \exists x_2(\exists x_1 \varphi \to \varphi(x_2)) \to \psi$.
Es decir, $\Sigma \models (\exists x_1 \varphi \to \exists x_2 \varphi(x_2)) \to \psi$.
Por el Lema de Sustitución (4), $\models \exists x_1 \varphi(x) \to \exists x_2 \varphi(x_2)$.
Por lo tanto, por Modus Ponens, $\Sigma \models \psi$.
(5) Por contrapositiva. Si $\Sigma + \exists x_1 \varphi \to \varphi(c)$ no es finitamente satisfacible

entonces, por (4), Σ no es finitamente satisfacible.$\square$

Definición 10. Sea Σ un conjunto de enunciados.

(a) C **es un conjunto de testigos para Σ en L** $\Leftrightarrow$ C es un conjunto de constantes en L y para toda $\varphi = \varphi(x)$ fórmula con una variable libre hay una $c \in C$ tal que $\Sigma \models_o \exists x\varphi \rightarrow \varphi(c)$.

(b) **Σ tiene testigos en L** $\Leftrightarrow$ hay un conjunto C de testigos para Σ en L tal que $C \subseteq L$.

(c) **L' es una extensión de L** $\Leftrightarrow$ $L \subseteq L'$.

(d) Sean $L \subseteq L'$ lenguajes formales, Σ' un conjunto de L'-enunciados. **Σ' es una extensión conservativa de Σ** $\Leftrightarrow$ $\Sigma \subseteq \Sigma'$ y para todo ψ L-enunciado, si $\Sigma' \models \psi$ entonces $\Sigma \models \psi$.

Teorema V. Teorema de Extensión de Henkin.

Sea Σ un conjunto de enunciados.
Si Σ es finitamente satisfacible entonces existe L_+ una extención por constantes de L y existe Δ un conjunto de enunciados finitamente satisfacible con testigos en L_+ tales que $| L_+ | = | L |$ y $\Sigma \subseteq \Delta$.

Prueba.
Caso 1. L es contable. Sean $C = \{c_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ y $L_+ = L \cup C$. Entonces $| L_+ | = | L | = | \{\varphi_k(x_1) \mid x_1$ es la única variable libre en φ y $k \in \mathbb{N}\} |$.
Definimos: $\Delta_o = \Sigma$.
$\Delta_k = \Delta_{k-1} + \exists x_1\varphi_k \rightarrow \varphi_k(c_k)$, donde c es la primera constante de C que no ocurre en Δ_{k-1}.
Por inducción en k demostraremos que Δ_k es finitamente satisfacible.
Para $k = 0$, $\Delta_o = \Sigma$ es finitamente satisfacible, por hipótesis.
Hipótesis de inducción, Δ_{k-1} es finitamente satisfacible, para $k > 0$.
Por el lema de Constantes (3), $\Delta_k = \Delta_{k-1} + \exists x_1\varphi_k \rightarrow \varphi_k(c_k)$ es finitamente satisfacible.
Sea $\Delta = \cup \Delta_k$. Entonces Δ es finitamente satisfacible y $\Sigma \subseteq \Delta$.
Si $\varphi(x_1)$ es una fórmula con una variable libre entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(x_1) = \varphi_k(x_1)$. Entonces $\Delta_k = \Delta_{k-1} + \exists x_1\varphi_k \rightarrow \varphi_k(c_k)$, es decir,

$\Delta \models \exists x_1 \varphi_k \rightarrow \varphi_k(c_k)$. Así, Δ tiene testigos en L_+.
Caso 2. L no es contable. Por el PBO, L es isomorfo a un ordinal α.
Consideremos un conjunto nuevo de constantes $C = \{c_\beta \mid \beta < \alpha\}$.
Por el PBO, podemos bien ordenar al conjunto:
$\{\varphi_\beta(x_1) \mid x_1$ es la única variable libre en φ y $\beta < \alpha\}$.
Definimos Definimos: $\Delta_o = \Sigma$.
$\Delta_\beta = \Delta_{\beta\text{-}1} + \exists x_1 \varphi_\beta \rightarrow \varphi_\beta(c_k)$, donde c es la primera constante de C que no ocurre en $\Delta_{\beta\text{-}1}$, si β es un ordinal sucesor.
$\Delta_\beta = \cup_{\gamma \leq \beta} \Delta_\gamma$, si β es un ordinal límite. El resto es similar al caso1.
En ambos casos, Δ es una extensión conservativa de Σ, por el Lema de Constantes,(4).□

Sea **X** el conjunto de todos los términos constantes en L.
Entonces $C \subseteq X$ y $\mid X \mid = \mid C \mid + \mid F \mid \cdot \aleph_o \leq |L|$.

Lema 3. Sean Σ un conjunto de enunciados finitamente satisfacible, C, **X** y $\sim$ como se definieron antes. Entonces:

(1) Si $t_1,\ldots,t_n,s_1,\ldots,s_n \in X$ entonces son universalmente válidas:
$(\bigwedge_{i=1}^{n} (t_i \approx s_i) \rightarrow f(t_1 \ldots t_n) \approx f(s_1 \ldots s_n))$ y
$(\bigwedge_{i=1}^{n} (t_i \approx s_i) \rightarrow (P(t_1 \ldots t_n) \leftrightarrow P(s_1 \ldots s_n)))$.

(2) "$\sim$" es una relación de equivalencia en **X**.

(3) Si $t_1,\ldots,t_n,s_1,\ldots,s_n \in X$ y para toda $i = 1,..,n$, $t_i \sim s_i$, entonces:
(a) $f(t_1 \ldots t_n) \sim f(s_1 \ldots s_n)$.
(b) $\Sigma \models_o P(t_1 \ldots t_n) \Leftrightarrow \Sigma \models_o P(s_1 \ldots s_n)$.

Prueba.

(1) Se deduce de los axiomas de la igualdad e inducción en n.

(2) Sean $t,u,v \in X$.
Como $\models (t \approx t)$ entonces, para todo $t \in X$, $\Sigma \models_o (t \approx t)$, es decir, $t \sim t$.
Si $t \sim u$ entonces $\Sigma \models_o (t \approx u)$. Pero como $\models (t \approx u) \rightarrow (u \approx t)$ entonces por Modus Ponens, $\Sigma \models_o (u \approx t)$. Por lo tanto, $u \sim t$.
Si $t \sim u$ y $u \sim v$ entonces $\Sigma \models_o (t \approx u)$ y $\Sigma \models_o (u \approx v)$.
Como $\models (t \approx u) \wedge (u \approx v) \rightarrow (t \approx v)$ entonces $\Sigma \models_o (t \approx v)$ y $t \sim v$.

(3) Inmediato de (1) y (2).□

Del lema 3.2 podemos definir lo siguiente:

$A = X / \sim = \{[t] \mid t \in X\}$, donde $[t] = \{ s \in X \mid t \sim s\}$,
$c^{A} = [c]$,
$f^{A}([c_1]\ldots[c_n]) = [c] \Leftrightarrow \Sigma \models_o f(c_1\ldots c_n) \approx c$,
$P^{A}([c_1]\ldots[c_n]) \Leftrightarrow \Sigma \models_o P(c_1\ldots c_n)$.

Lema 4. Sean Σ un conjunto de enunciados finitamente satisfacible, C el conjunto de constantes no vacío, X el conjunto de los términos constantes, $t \in X$ y φ un enunciado. Entonces:

(1) Para todo $t \in X$, $t^{A_\Sigma} = [t]$.
(2) Para toda $a \in A$ existe $t \in X$ tal que $t^{A_\Sigma} = a$
(3) Si φ no tiene negación ni cuantificadores entonces
$\mathbf{A}_\Sigma \models \varphi \Leftrightarrow \Sigma \models_o \varphi$.
(4) Si $\varphi = \neg\psi$, φ no tiene cuantificadores y $\Sigma \models_o \varphi$ entonces $\mathbf{A}_\Sigma \models \varphi$.
(5) Si $\varphi = \exists x_i \psi$, φ no tiene el símbolo de negación y $\mathbf{A}_\Sigma \models \varphi$ entonces $\Sigma \models_o \varphi$.
(6) $\mid \mathbf{A}_\Sigma \mid \leq \mid X \mid \leq \mid L \mid$.

Prueba.

(1) Sea $t \in X$. Entonces $t^{A_\Sigma}[s] = t^{A_\Sigma} = [t]$..
(2) Sea $a \in A$. Entonces existe $t \in X$ tal que $a = [t]$. Por(1), $t^{A_\Sigma} = a$.
(3) Si $\varphi = (t_1 \approx t_2)$ y φ es un enunciado entonces $t_1, t_2 \in X$. Así,
$\mathbf{A}_\Sigma \models \varphi \Leftrightarrow \mathbf{A}_\Sigma \models (t_1 \approx t_2) \Leftrightarrow t_1^{A_\Sigma} = t_2^{A_\Sigma} \Leftrightarrow \Sigma \models_o (t_1 \approx t_2) \Leftrightarrow \Sigma \models_o \varphi$.
Si $\varphi = P(t_1,\ldots,t_n)$ entonces, $\mathbf{A}_\Sigma \models \varphi \Leftrightarrow \mathbf{A}_\Sigma \models P(t_1,\ldots,t_n) \Leftrightarrow$
$P^{A_\Sigma}(t_1^{A_\Sigma},\ldots,t_n^{A_\Sigma}) \Leftrightarrow \Sigma \models_o P(t_1,\ldots,t_n) \Leftrightarrow \Sigma \models_o \varphi$.
Hipótesis de inducción, $\mathbf{A}_\Sigma \models \psi$ y $\mathbf{A}_\Sigma \models \chi \Leftrightarrow \Sigma \models_o \psi$ y $\Sigma \models_o \chi$.
Si $\varphi = \psi \wedge \chi$ entonces $\mathbf{A}_\Sigma \models \varphi \Leftrightarrow \mathbf{A}_\Sigma \models \psi \wedge \chi \Leftrightarrow \mathbf{A}_\Sigma \models \psi$ y
$\mathbf{A}_\Sigma \models \chi \Leftrightarrow \Sigma \models_o \psi$ y $\Sigma \models_o \chi \Leftrightarrow \Sigma \models_o \psi \wedge \chi \Leftrightarrow \Sigma \models_o \varphi$.
(4) Sean $\varphi = \neg\psi$, φ no tiene cuantificadores y $\Sigma \models_o \varphi$.
Entonces, como Σ es finitamente satisfacible, $\Sigma \not\models_o \psi$.

Por lo tanto $\mathbf{A}_\Sigma \not\models_o \psi$. Así, $\mathbf{A}_\Sigma \models \neg\psi$.

(5) Supongamos que $\varphi = \exists x_i \psi$, φ no tiene el símbolo de negación y $\mathbf{A}_\Sigma \models \varphi$. Sea $s \in {}^\omega A$ tal que $\mathbf{A}_\Sigma \models \exists x_i \psi[s]$.

Entonces para alguna $b \in A$, $\mathbf{A}_\Sigma \models \psi[s(i/b)]$.

Por (2), $b = t^{\mathbf{A}_\Sigma} = t^{\mathbf{A}_\Sigma}[s]$ y por el Lema de Sustitución (2), $\mathbf{A}_\Sigma \models \psi(t)[s]$.

Por lo tanto, ya que $\psi(t)$ es un enunciado, $\mathbf{A}_\Sigma \models \psi(t)$.

Por el Lema de Sustitución (3), $\models \psi(t) \rightarrow \exists x_i \psi$.

Por Modus Ponens, $\mathbf{A}_\Sigma \models \exists x_i \psi$.

(6) Sabemos que $\pi : X \rightarrow A = X / \sim$, $\pi(t) = [t]$ es suprayectiva.

Por el AE, $| \mathbf{A}_\Sigma | \leq | X |$.□

Lema 5. Sean Δ, Γ conjuntos de enunciados finitamente satisfacibles tales que $\Delta \subseteq \Gamma$, Δ tiene testigos en L y Γ es completo. Entonces Γ tiene testigos en L.

Prueba.

Sea $\varphi = \varphi(x_1) \in F_1$. Como Δ tiene testigos en L, existe $c \in C$ tal que $\Delta \models \exists x_1 \varphi \rightarrow \varphi(c)$. P.D. $\Gamma \models \exists x_1 \varphi \rightarrow \varphi(c)$.

Supongamos que $\Gamma \not\models \exists x_1 \varphi \rightarrow \varphi(c)$. Ya que Γ es completo, $\Gamma \models \neg(\exists x_1 \varphi \rightarrow \varphi(c))$, es decir, $\Gamma \models \exists x_1 \varphi \wedge \neg\varphi(c)$.

Por GU, $\Gamma \models \forall y(\exists x_1 \varphi \wedge \neg\varphi(y))$.

Como y no ocurre libre en "$\exists x_1 \varphi$", se tiene que: $\Gamma \models \exists x_1 \varphi \wedge \forall y \neg\varphi(y)$.

Por el Lema de Sustitución, $\Gamma \models \exists x_1 \varphi \wedge \neg\exists x_1 \varphi(x_1)$.

Por lo tanto, Γ no tiene modelo, es decir, Γ no es finitamente satisfacible.

Esto contracide a la hipótesis de que Γ es finitamente satisfacible.

Así Γ tiene testigos en L.□

Lema de Sustitución. Sean φ una fórmula; u, t términos, x_i ocurre libre en φ, $\mathbf{A}$ una L-estructura, $s \in {}^\omega A$ y $d = t^{\mathbf{A}}[s]$. Entonces:

(1) $(u_t^{x_i})^{\mathbf{A}}[s] = u^{\mathbf{A}}[s(i / d)]$.

(2) $\mathbf{A} \models \varphi(t)[s] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi(x_i)[s(i / d)]$.

(3) Si t es libre para x_i en φ entonces $\models \forall x_i \varphi \rightarrow \varphi(t)$ y $\models \varphi(t) \rightarrow \exists x_i \varphi$.

(4) Si x_j es libre para x_i en φ entonces $\models \forall x_i \varphi(x) \leftrightarrow \forall x_j \varphi(x_j)$ y $\models \exists x_i \varphi(x) \leftrightarrow \exists x_j \varphi(x_j)$.

APÉNDICE 2. TEORÍAS

A continuación damos algunos ejemplos de teorías de primer orden a la luz de los conceptos tratados en esta tesis. No se dan demostraciones formales, porque el objetivo es ilustrar.

1._ La Teoría del "Infinito".

En el capítulo 4 presentamos un lenguaje L sin predicados, sin símbolos funcionales y sin constantes.

Las L-estructuras correspondientes son de la forma $\mathbf{A} = \langle A \rangle$.

Sea $n \in \mathbf{N}^+$. Tenemos el siguiente enunciado $\sigma_n = \exists \bar{x} \varphi_n$, donde $\varphi_n = (\bigwedge_{i<j} x_i \not\approx x_j) \in F_n$, y lo que afirma es que "hay al menos n elementos". Se tiene que:

$\mathbf{A} \models \sigma_n \Leftrightarrow |\, A \,| \geq n.$

Sea $\Sigma_\omega = \{\sigma_n \mid n \in \mathbf{N}^+\}$ y $T_\omega = Cn(\Sigma_\omega)$.

Entonces, $\mathbf{A} \models \Sigma_\omega \Leftrightarrow |\, A \,| \geq \aleph_0$.

T_ω no tiene modelos finitos y no es finitamente axiomatizable y Mod $(T_\omega) \in EC_\Delta$-EC.

Pero Mod $(T_\omega)^c$ no es cerrado bajo ultraproductos.

En este caso $\cong$ es equivalente a $\sim$ (equipotencia).

Por la proposición 6.9, Mod (T_ω) es cerrado bajo $\equiv$, $\cong$ y ultraproductos.

Para cualquier par de L-estructuras **A** y **B**, si $|\, A \,| = |\, B \,| = \lambda \geq \aleph_0$ entonces $\mathbf{A}, \mathbf{B} \models \Sigma_\omega$ y $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, es decir, $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$. De esto, T_ω es λ-categórica, para todo $\lambda \geq \aleph_0$. Por el teorema de Łoś-Vaught, T_ω es completa.

Todos sus modelos contables son atómicos y localmente finitos.

2._ La Teoría del Orden Total Denso sin Extremos.

Sea L = SL ∪ {P}, donde la aridad de P es 2.

Las estructuras adecuadas para L son de la forma

$\mathbf{A} = \langle A, P^{\mathbf{A}} \rangle$, donde A es un conjunto no vacío y $P^{\mathbf{A}}$ es una relación binaria en A.

Sea $T = Cn(\varphi_1 + ... + \varphi_6 + \neg\varphi_7 + \neg\varphi_8)$, donde:

$\varphi_1 = \forall x(Pxx)$ (reflexividad)

$\varphi_2 = \forall x \forall y \forall z(Pxy \wedge Pyz \rightarrow Pxz)$ (transistividad)

$\varphi_3 = \forall x \forall y(Pxy \wedge Pyx \rightarrow (x \approx y))$ (antisimetría).

$\varphi_4 = \forall x \forall y(x \not\approx y \rightarrow Pxy \vee Pyx)$ (dicotomía)

$\varphi_5 = \forall x \forall y(Pxy \wedge x \not\approx y \rightarrow \exists z(Pxz \wedge Pzy \wedge z \not\approx x \wedge z \not\approx y)$ (densidad)

$\varphi_6 = \exists x \forall y(Pxy)$ (existencia del mínimo)

$\varphi_7 = \exists x \forall y(Pyx)$ (existencia del máximo).

T es la teoría del orden total denso y sin extremos.

Verifique el lector que $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ y $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ son modelos de T, no tiene modelos finitos, es $\aleph_0$-categórica, completa y finitamente axiomatizable, lo que contrasta fuertemente con la lógica proposicional ya que esto no es posible, por la proposición 5.4.1.

Para $\lambda > \aleph_0$, sean $\langle A, \leq \rangle \models T$, $| A | = \lambda$, $B = A\text{-}\{a\}$, $\langle B, \leq \rangle \models T$ y $| B | = \lambda$. Si $\langle A, \leq \rangle \cong \langle B, \leq \rangle$, hay un $h:\langle A, \leq \rangle \rightarrow \langle B, \leq \rangle$ isomorfismo.

Entonces $h(a) \neq a$, por lo que $h(a) < a$ o $h(a) > a$.

Para el caso de $h(a) < a$, por la densidad de B, hay una $b \in B$ tal que $h(a) < b < a$.

Como h es un isomorfismo, existe $c \in A$ tal que $h(c) = b$ y

$a < c$. Ya que $h(c) = b < a$ y h es un isomorfismo, $c < a$, lo que contradice a que $a < c$. Por lo tanto, $\langle A,\leq\rangle \not\cong \langle B,\leq\rangle$, T no es λ-categórica, para todo $\lambda > \aleph_o$.

Este ejemplo muestra que $\aleph_o$-categoricidad no implica λ-categoricidad, para ningún $\lambda > \aleph_o$.

Ya que T es finitamente axiomatizable, Mod(T) y Mod(T)^c son cerradas bajo $\equiv$, $\cong$ y ultraproductos.

Por ser $\aleph_o$-categórica, por el Teorema XII, para todo $n \in \mathbb{N}$, $B_n T$ es finita. Así, $B_n T$ es atómica y completa, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, $S_n T$ es un espacio discreto, con un conjunto denso de puntos aislados total y extremadamente disconexo.

Como T es completa, se tiene que $\mathbf{A} = \langle \mathbb{Q},\leq\rangle \equiv \langle \mathbb{R},\leq\rangle = \mathbf{B}$.

Por el teorema de Keisler-Shelah, hay un $\langle I,U\rangle$ tal que $\mathbf{A}^I / U \cong \mathbf{B}^I / U$.

3._ El sistema Q.

El siguiente sistema se debe a Rafael Robinson y fue propuesto en 1950. Sea $L = SL \cup \{S, \cdot, +, 0\}$ un lenguaje de primer orden, donde la aridad de S es 1 y la aridad de $\cdot$, $+$ es 2. **Q** es el siguiente conjuto de enunciados:

$\forall x \forall y(Sx \approx Sy \rightarrow x \approx y)$

$\forall x(Sx \not\approx 0)$

$\forall x(x \not\approx 0 \rightarrow \exists y(Sy \approx x))$

$\forall x(x + 0 \approx x)$

$\forall x \forall y(x + Sy \approx S(x + y))$

$\forall x(x \cdot 0 \approx 0)$

$\forall x \forall y(x \cdot Sy \approx x \cdot y + x)$

Si $T = Cn(\mathbf{Q})$ entonces T es una teoría finitamente axiomatizable. Así, $Mod(T) \in EC$ y $Mod(T)^c$ es cerrado bajo ultraproductos. T no tiene modelos finitos y $\mathbf{N} \models T$,

donde $\mathbf{N} = \langle \mathrm{N}, \mathrm{S}, +, \cdot, 0\rangle$.
Sea $\mathbf{N}^* = \langle \mathrm{N} \cup \{a,b\}, \mathrm{S}, +, \cdot, 0\rangle$, donde $a \neq b \notin \mathrm{N}$, las operaciones restrigidas a N son las usuales; $S(a) = a$, $S(b) = b$ y se tiene las siguientes tablas que definen a las operaciones $+$ y $\cdot$ en $\mathbf{N}^*$. Sean $i,j \in \mathrm{N}$.

$+$	a	b	j
a	b	a	a
b	a	a	b
i	b	a	$i+j$

$\cdot$	0	a	b	$j \neq 0$
0	0	a	b	0
a	0	b	b	b
b	0	a	a	a
$i \neq 0$	0	a	b	$i \cdot j$

Cada uno de los siguientes enunciados es verdadero en $\mathbf{N}$ y falso en $\mathbf{N}^*$:

$\forall x(Sx \not\approx x)$, $\forall x(0 \cdot x \approx 0)$, $\forall x(0 + x \approx x)$,
$\forall x\forall y(x + y \approx y + x)$, $\forall x\forall y(x \cdot y \approx y \cdot x)$,
$\forall x\forall y\forall z(x \cdot (y + z) \approx xy + xz)$, $\forall x(S^n x \not\approx x)$.

Entonces T es incompleta. Por el teorema de Loš-Vaught, T no es λ-categórica, para ningún $\lambda \geq \aleph_o$. También se obtiene que $\mathbf{N} \not\equiv \mathbf{N}^*$, lo que implica que $\mathbf{N} \not\cong \mathbf{N}^*$. Así T no es $\aleph_o$-categórica.
Sea $T_1 = \mathrm{Th}(\mathbf{N})$. Claramente es una teoría satisfacible, completa y sin modelos finitos. Tampoco es $\aleph_o$-categórica, porque $\mathbf{N}$ no es localmente finito. Es claro que $T \subset T_1$.
Observamos que para $\varphi \in F_1$, $\mathbf{N} \models \varphi[n] \Leftrightarrow \mathbf{N} \models \varphi(S^n 0)$.
Sea $\mathbf{B} \models T_1$. Definimos $h\colon \to B$, $h(n) = S^{\mathbf{B}n}0^{\mathbf{B}}$.
Entonces h es una inmersión elemental y $\mathbf{N}$ es atómico.
Sean $\bar{a} \in \mathrm{N}^n$, $p = p_n(\mathbf{N},\bar{a}) \in S_n T_1$ y $\varphi_{\bar{a}} = \bigwedge(x_i \approx S^{a_i}0) \in F_n$.
Como $\mathbf{N}$ es atómico y p es realizado en $\mathbf{N}$, p es principal.
Sea $\psi \in F_n$ un generador de p. Es claro que $\varphi_{\bar{a}} \in p$.
Entonces $T_1 \models \psi \to \varphi_{\bar{a}}$. Se puede ver que $T_1 \models \varphi_{\bar{a}} \to \psi$.
Así, $T_1 \models \psi \leftrightarrow \varphi_{\bar{a}}$ y $\varphi_{\bar{a}}$ es completa en T_1.
Como T_1 no es $\aleph_o$-categórica, existen $n \in \mathrm{N}$ y $p \in S_n T_1$ tales que p no es principal. Por el Teorema de Omisión de Tipos, existe

$\mathbf{A} \models T_1$ tal que $|A| = \aleph_o$ y $\mathbf{A}$ omite a p. Por otro lado existe $\mathbf{B} \models T_1$ tal que $|B| = \aleph_o$ y $\mathbf{B}$ realiza a p. Es claro que $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.
Este es un contraejemplo al la proposición 6.6.5, si p no es principal.

4._ La Teoría del Sucesor.

Consideremos un lenguaje formal $L = SL \cup \{S, 0\}$, donde $a(S) = 1$, $S^{n+1}x = S(S^n x)$ y los siguientes enunciados:

S.1.$\forall x(Sx \not\approx 0)$.

S.2.$\forall x \forall y (Sx \approx Sy \rightarrow x \approx y)$.

S.3.$\forall x(x \not\approx 0 \rightarrow \exists y(Sy \approx x))$.

S.4.n.$\forall x(S^n x \not\approx x)$, $n \geq 1$

$\Sigma = \{ S.1, S.2, S.3\} \cup \{S.4.n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$.

$T_S = Cn(\Sigma)$, la teoría del sucesor, la cual es λ-categórica, para todo $\lambda > \aleph_o$, pero no es $\aleph_o$-categórica ni finitamente axiomatizable. Consulte [7] para más detalles.

5._ Redes y Álgebras Booleanas.

Sean $L = SL \cup \{\vee, \wedge, ', 0, 1\}$ y Σ es el siguiente conjunto de enunciados:

L.1. $\forall x(x \vee x \approx x)$
L.2. $\forall x \forall y \forall z(x \vee (y \vee z) \approx (x \vee y) \vee z)$
L.3. $\forall x \forall y(x \vee y \approx y \vee x)$
L.4. $\forall x \forall y(x \vee (x \wedge y) \approx x)$
L.1'. $\forall x(x \wedge x \approx x)$
L.2' $\forall x \forall y \forall z(x \wedge (y \wedge z) \approx (x \wedge y) \wedge z)$
L.3' $\forall x \forall y(x \wedge y \approx y \wedge x)$
L.4' $\forall x \forall y(x \wedge (x \vee y) \approx x)$

D.$\forall x \forall y \forall z(x \vee (y \wedge z) \approx (x \vee y) \wedge (x \vee z))$

C. $\forall x \exists y(x \wedge y \approx 0 \wedge x \vee y \approx 1)$

$T_{AB} = Cn(\Sigma)$ es la **Teoría de las Álgebras Booleanas.**
T_{AB} es incompleta, porque tiene modelos fintos distintos.
Entonces ésta teoría no es categórica en ningún cardinal.
Definimos:

para átomo: $\varphi(x) = x \not\approx 0 \wedge \neg\exists y(0 < y < x)$.

B es atómica $\Leftrightarrow \Sigma + \forall y(y \not\approx 0 \rightarrow \exists x(\varphi(x) \wedge x \leq y))$

B es sin-átomos $\Leftrightarrow \Sigma + \forall y \neg\exists x(\varphi(x) \wedge x \leq y)$.

$T_{ABA} = Cn(\Sigma + \forall y(y \not\approx 0 \rightarrow \exists x(\varphi(x) \wedge x \leq y)))$ es la **Teoría de las Álgebras Booleanas Atómicas.**
T_{ABA} tiene modelos de cualquier cardinalidad, lo que implica que es incompleta.
$T_{ABD} = Cn(B + \forall y \neg\exists x(\varphi(x) \wedge x \leq y))$ es la **Teoría de las Álgebras Booleanas Densas (atomless).**
T_{ABD} no tiene modelos finitos, **L** es uno de sus modelos y es $\aleph_o$-categórica. Así, para toda $n \in \mathbb{N}$, B_nT es finita, atómica y completa y S_nT es un espacio de Stone con un conjunto denso de puntos aislados total y extremadamente disconexo, sin puntos de condensación, métrico y completo.
L es un modelo atómico contable y localmente finito.
Como T es finitamente axiomatizable, Mod(T) y $\text{Mod}(T)^c$ son cerradas bajo $\equiv$, $\cong$ y ultraproductos.
Si $B \models \Sigma$, $|B| = \aleph_o$, $|\text{At } B| \geq \aleph_o$ entonces $|\text{At } B| = \aleph_o$.
Sea $C = \{ c_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ un conjunto de nuevas constantes y $D \subseteq \mathbb{N}$, definimos:

$$\Sigma_D = \Sigma + \{\varphi(c_n) \mid n \in D\} + \{ \neg\varphi(c_n) \mid n \notin D \}.$$

Un modelo de Σ_D es: $B_D = \langle B, a \rangle_{a \in D}$ y $|B_D| = \aleph_o$.
Verifique el lector: $D = E \Leftrightarrow B_D \equiv B_E$
Entonces, para $D \neq E$, $B_D \not\cong B_E$ y $|S_o\Sigma| \geq 2^{\aleph_o}$.
Entonces Σ no es $\aleph_o$-categórica. Así que:
Si $B \models \Sigma$, $|B| = \aleph_o$ y Th(B) es $\aleph_o$-categórica entonces $|\text{At } B| < \aleph_o$.

6._ Teoría de Campos.

Consideremos $L = SL \cup \{+, \cdot, 0, 1\}$ y los siguientes enunciados:

A.1. $\forall x\forall y\forall z(x + (y + z) \approx (x + y) + z)$
A.2. $\forall x\forall y(x + 0 \approx x)$
A.3. $\forall x\exists y(x + y \approx 0)$
A.4. $\forall x\forall y(x + y \approx y + x)$

M.1. $\forall x\forall y\forall z((x \cdot y) \cdot z \approx x \cdot (y \cdot z))$
M.2. $\forall x\forall y(x \cdot 1 \approx x)$
M.3. $\forall x(x \not\approx 0 \rightarrow \exists y(x \cdot y) \approx 1)$
M.4. $\forall x\forall y(x \cdot y \approx y \cdot x)$
D_1. $\forall x\forall y\forall z(x \cdot (y + z) \approx x \cdot y + x \cdot z)$
D_2. $\forall x\forall y\forall z((y + z) \cdot x \approx y \cdot x + z \cdot x)$
Sea $\Delta = \{A.1, A.2, A.3, A.4, M.1, M.2, M.3, M.4, D_1, D_2, 0 \not\approx 1\}$.
Entonces $T_C = Cn(\Delta)$ es la **Teoría de Campos.**
Sean F un campo, $b \in F$ y $n \in \mathbb{N}$. Definimos
$n \cdot b = b + ... + b$, n-veces. La **característica de F** es
car F $= \text{mín}\{ n \in \mathbb{N} \mid \forall x(n \cdot x = 0)\}$. Sabemos que
car F = p (primo) o car F = 0.
En cualquiera de los dos casos, respectivamentes, $\mathbb{Z}_p$ y $\mathbb{Q}$
son campos primos, pero no son modelos primos de la teoría.
Sean $\psi_p = \forall x(p \cdot x \approx 0)$ (p primo). Entonces:

$\Delta_p = \Delta + \psi_p$, $\Delta_\omega = \Delta + \{ \neg\psi_p \mid p \in \mathbb{P} \}$,

$T_{Cp} = Cn(\Delta_p)$ y $T_{Co} = Cn(\Delta_\omega)$.

T_{Cp} es la **Teoría de Campos de Característica p.**

T_{Co} es la **Teoría de Campos de Característica 0.**

En adelante omitiremos escribir toda la estructura, como en
$\mathbb{Z}_p$ (p primo), $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \models \Delta$.
Claramente Δ_p tiene 11 enunciados y $\mathbb{Z}_p$ es uno de sus modelos.
T_C y T_{Cp} son teorías finitamente axiomatizables y si $T = T_C, T_{Cp}$
entonces Mod (T) $\in$ EC, Mod(T) y $\text{Mod}(T)^c$ son cerradas bajo
$\equiv$, $\cong$ y ultraproductos.
T_C tiene distintos modelos finitos, por lo que T_C es incompleta.
$Th(\mathbb{Z}_p)$ es una teoría categórica.
La Teoría de Campos de Característica 0, T_{Co} es una teoría
satisfacible, no tiene modelos finitos, no es finitamente axiomatizable,
es incompleta, no es λ-categórica, para ningún $\lambda \geq \aleph_0$ y tiene,
al menos, $2^{\aleph_0}$ modelos contables no-isomorfos.
En efecto $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son modelos de T_{Co}.
Supongamos que T_{Co} no tiene modelos finitos. Entonces tendría que
ser de característica finita, lo que contradice que sea de característica 0.
Suponemos que T_{Co} es finitamente axiomatizable. Entonces existe un
enunciado φ tal que $Cn(\varphi) = Cn(\Delta_\omega)$. Sabemos que $\mathbb{Z}_p \models \Delta_p$, para
todo $p \in \mathbb{P}$. Como $\mathbb{P}$ es infinito, existe U ultrafitro no-principal de $\mathbb{P}$ tal

que $K = \Pi\, \mathbb{Z}_q \,/\, U \models \Delta$. Pero $\{\, q \in \mid \mathbb{Z}_q \models \psi_p\} = \{p\} \notin U$, por ser no-principal. Por lo que el Teorema XI nos dice que $K \not\models \psi_p$, para todo $p \in \mathbb{P}$. Esto implica que $K \models \varphi$. Pero para toda $p \in \mathbb{P}$, $\mathbb{Z}_p \not\models \varphi$, $\mathbb{P} = \{\, p \in \mathbb{P} \mid \mathbb{Z}_p \not\models \varphi\} \notin U$, $\emptyset \notin U$. Por el Teorema XI, $K \not\models \varphi$. Contradicción. Por lo tanto T_{C_o} no es finitamente axiomatizable.
Otros modelos de T_{C_o}.

Tenemos que $\mathbb{Q}(\sqrt{p}) = \{\, a + b\sqrt{p} \mid a,b \in \mathbb{Q}\,\}$ es un campo
y que $|\,\mathbb{Q}\,| = |\,\mathbb{Q}(\sqrt{p})\,| = \aleph_o$.
Si $\varphi = \exists x(x^2 - 2 \approx 0)$ y $\psi = \exists x(x^2 + 1 \approx 0\,)$, $\mathbb{Q} \not\models \varphi$ y
$\mathbb{Q}(\sqrt{p}) \models \varphi$. Es decir, $\mathbb{Q} \not\equiv \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, $\mathbb{Q} \not\cong \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, $\mathbb{Q} \not\preceq \mathbb{Q}(\sqrt{p})$
y φ es independiente de T_{C_o}, por lo que T_{C_o} es incompleta.
-También $\mathbb{R} \not\models \psi$ y $\mathbb{C} \models \psi$, $\mathbb{R} \not\equiv \mathbb{C}$, $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{C}$ y $\mathbb{R} \not\preceq \mathbb{C}$.
Similarmente, $\mathbb{Q} \not\preceq \mathbb{R}$.
Por lo tanto, T_{C_o} no es $\aleph_o$-categórica y no es $2^{\aleph_o}$-categórica.
-Por LST $\uparrow$, tampoco es λ-categórica, para $\lambda > \aleph_o$.
-$\mathbb{P} = \{\, p \in \mathbb{N} \mid p$ es primo$\}$, $C = \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$un conjunto
de nuevas constantes. Entonces $L_+ = L \cup C$. Para $D \subseteq \mathbb{P}$,
tenemos el siguiente conjunto de enunciados:
$\Delta_D = \Delta + \{\, \exists x(x^2 - p \approx 0) \mid p \in D\} + \{\, \forall x(x^2 - p \not\approx 0) \mid p \notin D\}$.
Uno de los modelos de Δ_D es $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ el cual se define como:
$\{\, b \mid$ existen $n \in \mathbb{N}$, $a_o,\ldots,a_m \in \mathbb{Q}$, $p_1,\ldots,p_n \in D$: $b = \Sigma a_i \sqrt{\Pi p_{ik_j}}\,\}$.
Como D es contable, $|\,\mathbb{Q}(\sqrt{D})\,| = \aleph_o$.
Además, para $D,E \subseteq \mathbb{P}$: $E = D \Leftrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{D}) \equiv \mathbb{Q}(\sqrt{E})$.
Por lo tanto, si $E \neq D$, $Th(\,\mathbb{Q}(\sqrt{D})\,) \neq Th\,(\mathbb{Q}(\sqrt{E})\,) \in S_o\Delta$.
Así $\{Th(\,\mathbb{Q}(\sqrt{D}) \mid D \in P\,(\mathbb{P})\} \subseteq S_o\Delta$, es decir, $|\,S_o\Delta\,| \geq 2^{\aleph_o}$.
Δ tiene, al menos, $2^{\aleph_o}$ modelos contables no-isomorfos.□

Otro ejemplo. Sean $T = Th(\mathbb{Q})$ y $\Sigma(x_1) = \{x_1^2 - r \approx 0 \mid r \in \mathbb{P}\,\}$.
Entonces $\Sigma(x_1)$ consistente con T y omitido por $\mathbb{Q}$.
Por el lema de Ehrenfeucht, $\Sigma(x_1)$ no es principal.

Por ser consistente con T, existe $p \in S_1T$ tal que $\Sigma(x_1) \subseteq p$.
Se afirma que p no es principal. Si p fuera principal entonces p sería realizado en cualquier modelo contable de T. En particular en $\mathbf{Q}$, de lo que se sigue que $\mathbf{Q}$ realiza a $\Sigma(x_1)$. Absurdo.
Por lo tanto, p no es principal.Sabemos que $\mathbf{Q}$ no es atómico.
?'T es una teoría atómica? Si T fuera atómica existiría una L-estructura $\mathbf{B}$ tal que $|B| = \aleph_o$ $\mathbf{B} \models T$ y $\mathbf{B}$ es atómico.
Como $\mathbf{Q}$ no es atómico, existe $p \in S_nT$ tal que p es principal y es omitido por $\mathbf{Q}$, pero realizado por $\mathbf{B}$. Esto implica que $\mathbf{B} \not\equiv \mathbf{Q}$ y por tanto T no es completa. Absurdo. Así, T no es atómica. Esto implica que existe una $n \in \mathbf{N}$ tal que $|B_nT| = \aleph_o$ y $|S_nT| = 2^{\aleph_o}$.

La **Teoría de Campos Algebraicamente Cerrados**, es $T_{CAC} = Cn(\Delta + \{\varphi_n \mid n \in \mathbf{N}^+\})$, donde para $n > 0$, tenemos:

$$\varphi_n = \forall x_o \ldots \forall x_n(\, x_n \not\approx 0 \rightarrow \exists y(\, x_o + x_1 y + \ldots + x_n y^n \approx 0)).$$

Se puede verificar, que esta teoría no es completa, no tiene modelos finitos y no es finitamente axiomatizable; la existencia de campos algebraicamente cerrados se establece por medio de ultraproductos o de Löwenheim-Skolem-Tarski.
La Teoría de Campos Algebraicamente Cerrados de Característica 0, es $T_{CAC_o} = Cn(\Delta_\omega + \Delta_{AC})$.
El siguiente teorema se debe a Steinitz, 1910.

Teorema. Sean K y L campos algebraicamente cerrados.

Si car K = car L y $|\, K \,| = |\, L \,| = \lambda > \aleph_o$, entonces $K \cong L$.□

$T = T_{CAC_o}$ tiene las siguientes propiedades: T no es finitamente axiomatizable, no tiene modelos finitos, T es λ-categórica, para todo $\lambda > \aleph_o$, T es completa y T no es $\aleph_o$-categórica.
Prueba.

Suponemos que T es finitamentes axiomática.
Entonces, existe un L-enunciado φ tal que $T = Cn(\varphi)$.
Ahora, del lema, existen $\{K^n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ y U es un ultrafiltro no-principal de $\mathbb{N}^+$, donde K^n no es algebraicamente cerrado.
Como $K^n \not\models T$, por el Teorema XI, $\Pi K^n / U \not\models \varphi$.
Por otro lado $K^{n+1} \models \varphi_n$, para toda $n \geq 1$ y U es no-principal.
Por el Teorema XI, $\Pi K^n / U \models T$, es decir, $\Pi K^n / U \models \varphi$. Absurdo.
Por lo tanto, T no es finitamente axiomatizable.
T no tiene modelos finitos, porque T_{C_o} no los tiene y $T_{C_o} \subseteq T$.
Por el Teorema de Steinitz, T es λ-categórica, para todo $\lambda > \aleph_o$.
Por el teorema de Łoš-Vaught, T es completa.
Para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\varphi_n = x \approx 1 + 1 + \ldots + 1$ (n-veces).
Así, φ_n define a $\{n\}$ en $\mathbb{Q}^*$, $\{n\} \in D_1(\mathbb{Q}^*)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.
Pero, $B_1T \cong D_1(\mathbb{Q}^*)$, $|B_1T| \geq \aleph_o$. Por el Teorema XII, T no es $\aleph_o$-categórica.

Esto muestra que λ-categoricidad no implica que $\aleph_o$-categoricidad, para ningún $\lambda > \aleph_o$.

7._ Comentarios finales.

Veamos algunas cuestiones que se derivan de los ejemplos anteriores.
Sea $\lambda \geq \aleph_o$. ?Existe alguna relación entre teorías finitamente axiomatizables y λ-categoricidad? Ninguna. Veamos el por qué de esto.
La teoría del orden total denso sin extremos es finitamente axiomatizable y $\aleph_o$-categórica, no es λ-categórica, para ningún $\lambda \geq \aleph_o$.
$T = Cn(Q)$ es finitamente axiomatizable y no es λ-categórica, para ningún $\lambda \geq \aleph_o$.
$T = Cn(\sigma_n)$ es finitamente axiomatizable y es λ-categórica, para todo $\lambda \geq \aleph_o$.
Existen teorías que son finitamente axiomatizables y son λ-categóricas, para todo $\lambda > \aleph_o$, pero no son $\aleph_o$-categóricas.
$T = Cn(\Sigma_\omega)$ no es finitamente axiomatizable y es λ-categórica, para todo $\lambda \geq \aleph_o$.
T_{CAC_o} no es finitamente axiomatizable y no es $\aleph_o$-categórica pero

es λ-categórica, para todo $\lambda > \aleph_o$.
Hay teorías que no son finitamente axiomatizables y no son λ-categóricas, para todo $\lambda \geq \aleph_o$.
De este modo, no hay relación entre finitamente axiomatizable y λ-categoricidad.

A manera de información adicional tenemos el siguiente resultado que enlaza cierto tipo de categoricidad con la propiedad de ser finitamente axiomatizable.

Definición. Sean L un lenguaje formal y contable y T una teoría en él.

T es totalmente categórica $\Leftrightarrow$ para todo $\kappa \geq \aleph_o$, T es κ-categórica.

Un ejemplo de una teoría totalmente categórica es Σ_ω, el conjunto de enunciados $\sigma_n = \exists \bar{x}(\bigwedge_{i<j} x_i \not\approx x_j)$.
El siguiente resultado se debe a Zil'ber, 1980.

Teorema. Sean L un lenguaje formal y contable y T una teoría en él.
Si T es totalmente categórica entonces T no es finitamente axiomatizable. $\square$

Así que si T es finitamentes axiomatizable entonces existe un cardinal infinito en el cual no es categórica. Si tal cardinal infinito es no-numerable entonces la teoría T no es categórica en ningún cardial infinito no-numerable, por el Teorema de Morley-Shelah.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Bell, J.L. y M. Machover.
A course in mathematical logic. Noth-Holland, 1977.
[2] Bell, J.L. y A.B. Slomson. **Models and ultraproducts: an introduction**. Noth-Holland, 1969.
[3] Bridge, J. **Introduction to model theory**.
Oxford University Press, 1978.
[4] Burris, S.N. y H.P. Sankappanavar.
A course in universal algebra. Springer-Verlag, 1981.
[5] Chang, C.C. y H.J. Keisler. **Model theory**.
Springer-Verlag, 1977.
[6] Donallen, T. **Lattice theory**. Pergamon Press, 1968.
[7] Enderton, H. **Introducción matemática a la lógica**.
Filosofía Contemporánea, UNAM, 1972.
[8] Halmos, P. **Teoría intuitiva de conjuntos**. CECSA, 1980.
[9] Herstein, I.N. **Álgebra moderna**. Trillas, 1988.
[10] Hrbacek, K. y T. Jech. **Introduction to set theory**.
Marcel Dekker, Inc., 1978.
[11] Hungerford, T.W. **Algebra**. Springer-Verlag.
[12] Kamke, E. **Theory of sets**. Dover Publications, 1950.
[13] Iribarren, I. L. **Topología de espacios métricos**. Limusa
[14] Mendelson, E. **Introduction to mathematical logic**.
Van Nostrand Rechold, 1979.
[15] Ryll-Nardzewski, C. **On the categoricity in power $\leq \aleph_0$**.
Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., 7, No.9, 545-8.
[16] Sacks, G. **Satured model theory**.
W, A. Benjamin, Inc., 1972.
[17] Shoenfield, J. **Mathematical logic**. Adisson-Wesley, 1967.
[18] Sims, B.T. **Fundamentals of Topology**.
MacMillian Publishing Co., Inc., 1976.