



01161 6
29.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

TESIS

**"SIMULACIÓN NUMÉRICA Y COMPORTAMIENTO NO LINEAL
Y AGRIETAMIENTO DE ELEMENTOS DE CONCRETO REFORZADO"**

**PRESENTADA POR:
VÍCTOR PASTOR ESCALANTE CERVERA**

**PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA
(ESTRUCTURAS)**

**DIRIGIDA POR:
DR. A. GUSTAVO AYALA MILIÁN**

Ciudad Universitaria

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1997



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

A Dios nuestro Señor, por sobre todas las cosas.

A mis padres, por todo su amor y su apoyo, mi gratitud y amor por siempre.

A mi adorada familia, lo único que puedo decirles es "misión cumplida".

A mi Lucía, con todo mi amor.

Contenido

1. Introducción.	1
2. Comportamiento esfuerzo-deformación del concreto y del acero de refuerzo ante estados simples de esfuerzos.	3
2.1. Introducción.	3
2.2. Comportamiento esfuerzo - deformación del concreto.	4
2.2.1. Comportamiento ante Esfuerzos de Compresión.	
2.2.2.1. Concreto simple.	
2.2.2.2. Concreto confinado.	
2.2.2. Comportamiento ante Esfuerzos de Tensión.	
2.3. Comportamiento esfuerzo - deformación en el acero de refuerzo.	11
3. Formulación de Elementos Finitos en el problema de la fractura en el concreto.	15
3.1. Introducción al método de los elementos finitos.	15
3.2. Introducción a la mecánica de fractura.	16
3.3. Modelos de Fisura en Elementos de Concreto.	26
3.3.1. Generalidades.	
3.3.2. Modelo de fisura discreta.	
3.3.3. Modelo de fisura distribuida.	
3.3.3.1. Introducción.	
3.3.3.2. Concepto tradicional de fisura fija.	
3.3.3.3. Concepto de fisura distribuida fija con descomposición de la deformación.	
3.3.3.4. Concepto de fisura distribuida fija multidireccional.	
3.3.3.5. Concepto de fisura distribuida girada.	

4. Modelo de elementos finitos del programa de análisis no lineal.	45
4.1. Introducción.	45
4.2. Modelos constitutivos empleados.	46
4.2.1. Relación esfuerzo-deformación uniaxial equivalente para el concreto.	
4.2.2. Fractura del concreto.	
4.2.3. Modelos de fisura distribuida.	
4.2.3.1. Modelo de fisura distribuida fija.	
4.2.3.2. Modelo de fisura distribuida girada.	
4.2.4. Rigidez en cortante en el concreto fisurado.	
4.2.5. Resistencia a la compresión del concreto fisurado.	
4.2.6. Rigidez en tensión del concreto fisurado.	
4.2.7. Relación esfuerzo deformación del acero de refuerzo.	
4.2.8. Matrices de propiedades de los materiales.	
4.2.9. Deformación uniaxial equivalente.	
4.2.10. Análisis de esfuerzos.	
4.2.11. Parámetros del modelo constitutivo.	
4.3. Elementos Finitos.	70
4.3.1. Elemento finito cuadrilátero.	
4.3.2. Elemento finito barra para el acero de refuerzo.	
4.4. Técnicas de Solución.	75
4.4.1. Método de Newton Raphson.	
4.4.2. Método de Longitud de Arco.	
5. Modelos Estudiados y Presentación de Resultados.	80
5.1. Introducción.	80
5.2. Modelos de Elementos Viga.	80
5.3. Modelo de Elementos Viga Columna.	84
5.4. Modelo en Elementos Finitos.	86
5.5. Presentación de resultados.	88

5.5.1. Análisis de resultados. Elemento viga.

5.5.2. Análisis de resultados. Elemento viga columna.

6. Conclusiones. 99

Referencias. 103

Reconocimientos

Capítulo 1

Introducción

Día con día se hace más común la realización de análisis sísmicos no lineales, ya que este es el medio más adecuado para conocer el comportamiento y la respuesta real de las estructuras sujetas a sismos intensos. Los programas de análisis no lineal disponibles, utilizan modelos constitutivos de los materiales y modelos de comportamiento de los elementos estructurales que no han sido suficientemente calibrados con resultados experimentales: con el fin de usarse en aplicaciones reales. Los altos costos y las dificultades encontradas en los estudios experimentales, han propiciado que cada día los esfuerzos de investigación dedicados a esta actividad disminuyan.

Investigaciones recientes han desarrollado modelos constitutivos para el comportamiento de los concretos simples, reforzados y/o presforzados (*Schnobrich et al. 1972; Lin y Scordelis, 1975; Bazant et al. 1982, 1983; Cedolin y Dei Poli, 1977 e Inoue y Noguchi, 1985*), así como al desarrollo de técnicas numéricas de solución y su implementación en programas de computadora (*Cervenka, 1985; de Borst, Nauta, Rots, y de Witte, 1983*). Estos avances han hecho posible la aplicación de este tipo de análisis no lineal (e.g. Elementos Finitos, Elementos de Frontera) para estudiar el comportamiento de elementos estructurales de concreto sometidos a acciones como a las que se verían sometidos durante la acción de un sismo. Los modelos no lineales de los materiales y los códigos disponibles comercialmente para el análisis de estructuras completas, o de elementos estructurales, con un comportamiento del material realista y la simulación del comportamiento estructural bajo condiciones reales de carga, hacen atractivos el empleo de estos programas de análisis no lineal.

Este trabajo tiene como fin evaluar el potencial de estos modelos de análisis no lineal, mediante el empleo de un programa de análisis no lineal comercial (SBETA), como una herramienta de apoyo en la investigación experimental.

En el capítulo 2 se presenta una revisión del comportamiento esfuerzo deformación del concreto y del acero de refuerzo ante un estado uniaxial de esfuerzos.

En el capítulo 3 se realiza una introducción al problema de la fractura y se presentan los modelos de fisuramiento discreto y fisuramiento distribuido, empleados en los programas de análisis no lineal disponibles.

En el capítulo 4 se presenta el modelo constitutivo del programa de análisis no lineal SBETA (Peebl Instruments, 1994) empleado en este trabajo.

El capítulo 5 está dedicado a la presentación de los modelos experimentales empleados para la evaluación del potencial del programa de análisis no lineal. Para el estudio paramétrico, se emplearon modelos experimentales de vigas (Ninyuki, et al 1989) y modelos experimentales de vigas-columna (Chyou y Noguchi, 1990). Se presentan y se comparan los resultados obtenidos experimentalmente y con el análisis numérico.

Por último, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones sobre este trabajo, del programa de análisis no lineal empleado y sobre los resultados obtenidos, así como algunas recomendaciones al respecto.

Capítulo 2

Comportamiento esfuerzo - deformación del concreto y del acero de refuerzo ante estados simples de esfuerzos

2.1 Introducción

Al concreto se le puede definir como un material pétreo, producto de una mezcla proporcionada de cemento, agregados pétreos (arena, grava) y agua. El concreto se forma cuando el cemento y el agua interactúan químicamente para unir los agregados dentro de una masa sólida; así, es posible obtener un amplio rango de resistencias en el concreto mediante modificaciones en las proporciones de los materiales que lo conforman, (e.g. agregados especiales, aditivos y métodos de curado) y de las condiciones externas (e.g. humedad, temperatura) en las cuales se mantiene a la mezcla hasta lograr la dureza requerida.

Bajo un estado de esfuerzos de compresión, el concreto es un material muy resistente, aunque bajo un estado de esfuerzos de tensión es relativamente frágil, lo que limita su utilización como material estructural. Para corregir esta limitante, el concreto se refuerza con varillas de acero que resisten los esfuerzos a tensión a la que esté sometido. Esta combinación de materiales da como resultado el *concreto reforzado*.

2.2 Comportamiento esfuerzo-deformación del concreto

2.2.1. Comportamiento ante Esfuerzos de Compresión

2.2.1.1 Concreto simple

El comportamiento esfuerzo-deformación de los materiales empleados para la construcción de estructuras es importante, ya que la distribución de esfuerzos y deformaciones, así como las fuerzas internas y otras reacciones de los elementos estructurales están relacionados con el nivel de deformación que se alcance ante un estado de cargas cualquiera. El concreto, al ser un material heterogéneo formado por materiales de comportamiento no lineal, no puede considerarse como un material elástico; sin embargo, para fines de análisis y diseño se considera que su diagrama esfuerzo - deformación tiene una parte elástica. El concreto, bajo esfuerzos de compresión uniaxiales (a corto plazo) para cualquier tipo de carga, tiene una porción elástica lineal y una porción plástica no lineal (Fig. 2.1). La curva esfuerzo - deformación de un espécimen de concreto sujeto a este estado de esfuerzos, presenta las siguientes características: partiendo de una pequeña parte elástica, en la que los esfuerzos se consideran proporcionales a las deformaciones; la curva, que se asemeja a una parábola de segundo grado, tiene un comportamiento ascendente hasta alcanzar el punto de resistencia máxima. A partir de este punto, la curva decrece hasta alcanzar la deformación máxima o última y de ahí llegar a la ruptura del espécimen. Un valor aceptado de la deformación unitaria máxima para concreto simple, sujeto a esfuerzos uniaxiales de compresión, es de 0.003.

Una de las maneras más usadas para obtener la resistencia del concreto a compresión uniaxial, es la prueba de cilindros de concreto con 28 días de edad. Se han propuesto algunas expresiones empíricas para representar la curva esfuerzo-deformación, con el fin de emplearse en análisis de manera simplificada.



Fig. 2.1 Curva típica esfuerzo - deformación del concreto ante esfuerzos de compresión uniaxiales

Existen aproximaciones en la literatura para estimar de la curva de esfuerzo-deformación del concreto sin considerar el confinamiento por el acero de refuerzo longitudinal y transversal (Hognestad 1951, Rüsçh 1955 y 1960, etc.). Como ejemplo, en la Fig. 2.2 se ilustra el modelo propuesto por Hognestad (1951).

Las ecuaciones correspondientes a este modelo son:

$$f_c = f''_c \left[\frac{2\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad \text{para } \varepsilon_c \leq \varepsilon_0 \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_0 = 2.0 \frac{f''_c}{E_c} \quad (2.2)$$

$$f''_c = 0.85f'_c \quad (2.3)$$

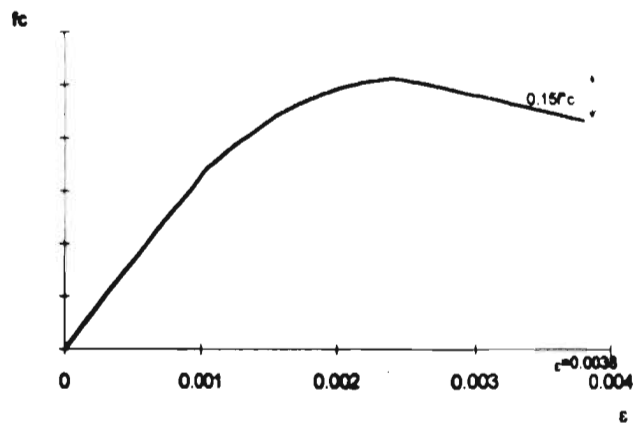


Fig. 2.2 Modelo de Hognestad (1951)

donde el $f'c$ es el esfuerzo máximo alcanzado por el concreto sujeto a una carga uniaxial; ϵ_0 es la deformación unitaria inicial del concreto al alcanzar la resistencia máxima (algunos autores consideran $\epsilon_0 = 0.002$); ϵ_c es la deformación del concreto en el punto donde se estima su esfuerzo; $f'c$ es el esfuerzo de compresión equivalente, sustituyendo la distribución real de esfuerzos de compresión por una distribución geométrica más simple, con la cual se obtengan resultados similares. Por tal motivo, se reduce en un 15% la resistencia a compresión de cilindros estándar. El grado de comportamiento de la rama descendente, depende de la deformación límite o última supuesta del concreto. Por lo general, estas expresiones consideran que la deformación última del concreto oscila alrededor de $\epsilon_{cu} = 0.004$.

El módulo de elasticidad secante, E_c , se puede definir como la pendiente de la línea que une los puntos de la curva esfuerzo - deformación en el intervalo elástico (bajo una carga a compresión aplicada lentamente) a un 40% de la resistencia máxima a compresión. El valor de E_c , puede obtenerse a partir de expresiones estadístico-experimentales con muy buena aproximación. El Reglamento de Construcciones del Distrito Federal (RCDF-93) en sus Normas Técnicas

Complementarias (NTC) para diseño de estructuras de concreto, propone expresiones para evaluar el modulo de elasticidad E_c como:

$$E_c = 14000\sqrt{f'_c} \quad \text{para concretos clase 1} \quad (2.4)$$

$$E_c = 8000\sqrt{f'_c} \quad \text{para concretos clase 2} \quad (2.5)$$

En estas expresiones, f'_c y E_c están en kg/cm^2

Según el Reglamento de Construcciones del Departamento del Distrito Federal (RCDF-93) en sus Normas Técnicas Complementarias (NTC), las clases del concreto se definen a partir del peso volumétrico y del tipo de agregado que se emplee para su elaboración.

2.2.1.2 Concreto confinado

El confinamiento en elementos de concreto, proporciona incrementos tanto en su resistencia como en su capacidad de deformación.

Para fines de diseño de elementos de concreto reforzado sujetos a flexión, se considera, por lo general, que su deformación última, en la fibra extrema a compresión, es 0.003; sin embargo, bajo la acción de fuerzas sísmicas, los elementos demandan grandes ductilidades y es necesario que desarrollen una deformación a compresión mucho mayor que 0.003, particularmente para el caso de columnas sometidas a grandes niveles de carga axial, donde la ductilidad disponible de la sección depende de la relación esfuerzo-deformación del concreto en niveles de deformación por compresión muy grandes. Por esto, es necesario proporcionar un buen confinamiento con el fin de que los elementos estructurales tengan la capacidad de desarrollar grandes deformaciones.

Al igual que para el concreto simple, existen expresiones en la literatura para aproximar el comportamiento del concreto reforzado bajo cargas axiales de compresión, tomando en cuenta el efecto del confinamiento en elementos prismáticos y cilíndricos (Scott et al. 1982, Sheikh y Uzumeri, 1982, Mander et al, 1988, etc.). Como ejemplo, en la Fig. 2.3 se presenta el modelo de Scott et al, 1982:

Las ecuaciones correspondientes a este modelo son:

$$f_c = Kf'_c \left[\frac{2\varepsilon_c}{0.002K} - \left(\frac{\varepsilon_c}{0.002K} \right)^2 \right] \quad \text{para } \varepsilon_c \leq 0.002K \quad (2.6)$$

$$f_c = Kf'_c [1 - Z(\varepsilon_c - 0.002K)] \quad \text{para } 0.002K < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu} \quad (2.7)$$

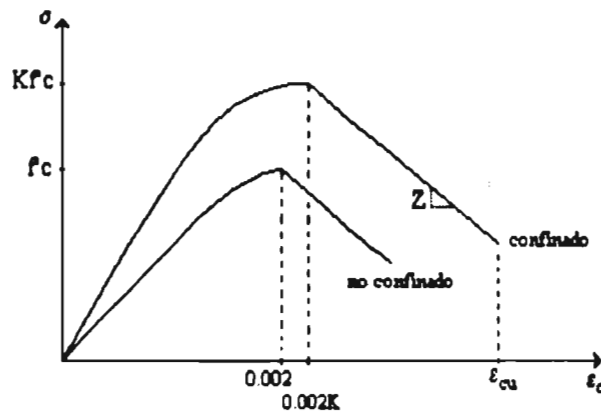


Fig. 2.3 Modelo de Scott et al, 1982 para el concreto confinado

$$K = 1 + \frac{\rho_s f_{ys}}{f'_c} \quad (2.8)$$

$$Z = \frac{0.5}{\frac{3+0.0284f_c}{14.22f_c-1000} + \frac{3}{4}\rho_s \sqrt{\frac{B-2R}{s}} - 0.002K} \quad (2.9)$$

$$\epsilon_{cu} = 0.004 + 0.9\rho_s \left(\frac{f_{ys}}{3059} \right) \quad (2.10)$$

donde K y Z son factores que dependen del nivel de confinamiento; ρ_s es la relación entre el volumen de acero de confinamiento y el volumen de concreto confinado del elemento; ϵ_{cu} es la deformación última del concreto confinado; B , R y s son las dimensiones del ancho de la sección, del recubrimiento y de la separación de estribos respectivamente. Las unidades de las ecuaciones anteriores están en kg/cm^2 .

En la Fig. 2.3 se puede observar que al existir confinamiento, la resistencia y la capacidad de deformación del elemento aumentan.

2.2.2. Comportamiento ante Esfuerzos de Tensión

La resistencia del concreto a tensión no es mayor, por lo general, que un 20% de su resistencia a compresión. La resistencia a tensión del concreto se puede medir de manera indirecta en función del esfuerzo al que se rompe un espécimen de concreto colocado horizontalmente y cargado a lo largo de un diámetro, esta prueba se le conoce como la prueba brasileña. El esfuerzo de ruptura a tensión puede estimarse como

$$f_t = \frac{2P}{\pi h d} \quad (2.11)$$

donde P es la carga aplicada en compresión, d es el diámetro y h la longitud del cilindro.

Otra manera de evaluar la resistencia a tensión del concreto, es por medio de pruebas de flexión realizadas en vigas de concreto simple cargadas en los extremos del tercio medio del claro, siendo éste igual a tres veces el peralte. Generalmente, las vigas tienen una sección transversal cuadrada de 15 cm por lado. El esfuerzo máximo en tensión, conocido como módulo de ruptura se calcula a partir de

$$f_r = \frac{M}{Z} \quad (2.12)$$

donde M es el momento flexionante en el instante de la falla y Z es el módulo de sección de la sección transversal. Este esfuerzo sobrestima la resistencia a la tensión del concreto por varias razones; primero, el cálculo del módulo de ruptura se basa en que la distribución de esfuerzos es lineal, sin embargo, en la realidad el bloque de esfuerzos es parabólico; segundo, la propagación de las grietas a partir de la fibra extrema a tensión está detenida por las fibras adyacentes sujetas a esfuerzos menores, por lo que, antes del colapso del espécimen pueden alcanzarse esfuerzos mayores de los que ocurrirían en tensión axial; tercero, ya que solamente la fibra extrema en tensión está sujeta al esfuerzo máximo, los elementos débiles (material pétreo o mortero de cemento) que no queden en esta fibra, no producen falla prematura en el espécimen y se pueden alcanzar esfuerzos mayores en esta zona (Neville 1995).

Una expresión aproximada para evaluar el módulo de ruptura es

$$f_r = K\sqrt{f'_c} \quad (2.13)$$

donde K es un parámetro que varía en función del tipo de agregado del concreto.

El RCDF-93 en sus NTC propone expresiones para el esfuerzo de tensión último del concreto :

Prueba brasileña:

$$f_t = 1.5\sqrt{f'_c} \text{ para concretos clase 1} \quad (2.14)$$

$$f_t = 1.2\sqrt{f'_c} \text{ para concretos clase 2} \quad (2.15)$$

Prueba a flexión:

$$f_t = 2.0\sqrt{f'_c} \text{ para concretos clase 1} \quad (2.16)$$

$$f_t = 1.4\sqrt{f'_c} \text{ para concretos clase 2} \quad (2.17)$$

En estas expresiones, f'_c y f_t están en kg/cm^2

Para fines de diseño, el RCDF-93 propone usar un valor nominal del esfuerzo de tensión del 75 % del esfuerzo estimado con las expresiones anteriores, es decir, $f^*t = 0.75f_t$.

2.3. Comportamiento esfuerzo-deformación en el acero de refuerzo

Debido a que el concreto tiene un comportamiento frágil cuando se le somete a esfuerzos de tensión, es común reforzar la zona de tensión con acero estructural, por lo general por medio de varillas corrugadas.

Dos propiedades importantes en el acero de refuerzo son el módulo de elasticidad E_s y el esfuerzo de fluencia f_y . Estas propiedades se obtienen a partir de las curvas esfuerzo-deformación de ensayos de tensión de probetas estándar. Los tipos de acero que se emplean para reforzar al concreto se pueden dividir en los aceros que tienen un límite de fluencia definido y los que no lo tienen. Esta clasificación se basa en el tipo de laminado con el que se fabriquen las barras de acero. Al primer grupo pertenecen los aceros laminados en caliente y al segundo los trabajados en frío. Una curva

típica de esfuerzo deformación de una prueba a tensión de un acero laminado en caliente es la que se indica en la Fig. 2.4.

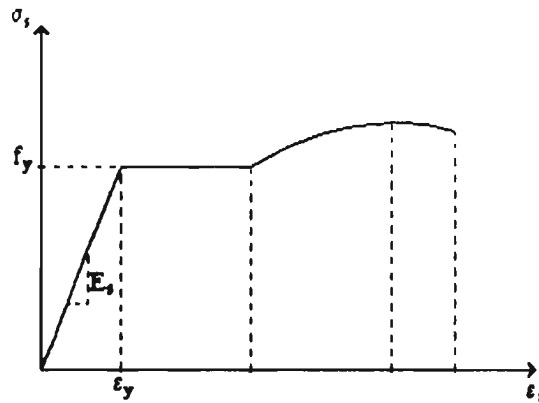


Fig. 2.4. Curva esfuerzo - deformación del acero de refuerzo a tensión.

En la Fig. 2.4 se distinguen 4 regiones: zona elástica, zona plástica, zona de endurecimiento por la deformación y zona de ruptura. Los aceros trabajados en frío no presentan una zona de fluencia horizontal definida como en el otro tipo de acero. La forma de definir el límite de fluencia es distinta según la clase de acero; en los aceros trabajados en caliente la zona de fluencia está definida claramente, mientras que en los aceros laminados en frío no tienen un límite de fluencia convencional que se aprecie en la curva esfuerzo deformación donde cambia la pendiente en forma apreciable. Una *recomendación* típica se basa en la rigidez tangente inicial y el valor de la deformación unitaria $\epsilon_y = 0.002$ (Fig. 2.5).

En la actualidad, existen modelos propuestos para evaluar el diagrama esfuerzo deformación de aceros de refuerzo, basados principalmente en el modelo propuesto por Ramberg y Osgood (1943), obtenido del estudio del comportamiento de barras de refuerzo cortas sometidas a cargas cíclicas

reversibles (Botero, 1996). Tal son los casos de los modelos propuestos por Park y Paulay (1986), Mander et al (1984) (Fig. 2.6) y Rodriguez y Botero (1994).

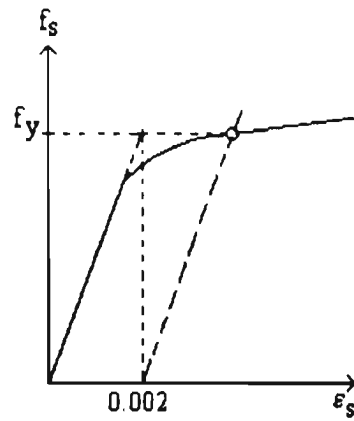


Fig. 2.5 Obtención del esfuerzo de fluencia en aceros de refuerzo laminados en frío y sujetos a tensión.

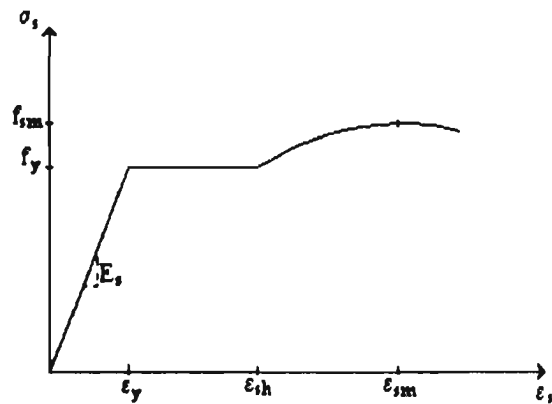


Fig. 2.6 Modelo de Mander et al, 1984.

Las ecuaciones correspondientes a este modelo son:

$$f_s = E_s \varepsilon_s \quad \text{para } 0 < \varepsilon_s \leq \varepsilon_y \quad (2.18)$$

$$f_s = f_y \quad \text{para } \varepsilon_y < \varepsilon_s \leq \varepsilon_{sh} \quad (2.19)$$

$$f_s = f_{sm} + (f_y - f_{sm}) \left[\frac{\varepsilon_{sm} - \varepsilon_s}{\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{sh}} \right]^P \quad \text{para } \varepsilon_{sh} < \varepsilon_s < \varepsilon_{sm} \quad (2.20)$$

donde E_s es el módulo de elasticidad del acero; f_y es el esfuerzo de fluencia del acero (4200 kg/cm^2); f_{sm} es el esfuerzo máximo del acero en la zona de endurecimiento por deformación con un valor de 6000 kg/cm^2 ; ε_y es la deformación del acero en la etapa de fluencia; ε_{sh} es la deformación del acero al inicio del endurecimiento por deformación, teniendo un valor aproximado de 0.008; ε_{sm} es la deformación del acero en el instante en que se alcanza el esfuerzo máximo (0.10) y P es un parámetro de ajuste estadístico con un valor de 3.5.

El módulo de elasticidad E_s de la curva esfuerzo deformación puede definirse como la relación entre el esfuerzo de fluencia f_y y la deformación unitaria de fluencia ε_y , es decir, $E_s = f_y / \varepsilon_y$ y varía entre 2.0×10^6 y $2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$. El grado de acero estructural más empleado en México es el grado 42 con un esfuerzo de fluencia nominal f_y aproximadamente de 4200 kg/cm^2 .

Los modelos anteriores definen el comportamiento del acero sometido a cargas de tensión; sin embargo, mediante un procedimiento analítico, es posible obtener el diagrama esfuerzo-deformación de una barra corta de acero sometida a carga de compresión, a partir de la curva esfuerzo-deformación para carga de tensión (Dodd y Restrepo-Posada, 1995). Este procedimiento pretende establecer una equivalencia entre los esfuerzos y las deformaciones de barras de acero, sometidas a cargas de tensión y de compresión, mediante la hipótesis de que no se presentan pérdidas de volumen de la barra de acero ensayada, implicando que las dimensiones longitudinales y transversales de dicha barra, sólo varían según el efecto de Poisson (Botero, 1996).

Capítulo 3

Formulación de Elementos Finitos en el problema de la fractura en el concreto.

3.1. Introducción al método de los elementos finitos

El Método de los Elementos Finitos (MEF), representa la herramienta de análisis más general y prácticamente empleada en todos los campos de la ingeniería, en donde se requiere la solución de problemas de valores en la frontera.

El análisis de desplazamientos de elementos finitos de un sólido continuo y elástico, parte con la subdivisión del sistema original en un ensamble discreto de elementos unidos entre sí en los nudos; asumiendo la existencia de compatibilidad en sus fronteras, las características de rigidez de éstos pueden obtenerse empleando el principio de los trabajos virtuales o el principio de la energía potencial mínima. Acorde con lo anterior, para un modelo dado, se puede obtener la siguiente expresión que relaciona al vector de fuerzas F en los nudos con el vector de los desplazamientos nodales D :

$$F = K^0 D \quad (3.1)$$

donde K^0 es la matriz de rigidez global del sólido continuo y está dada por

$$K^0 = \sum k \quad (3.2)$$

donde Σ representa la suma ordenada sobre todos los elementos y k es la matriz de rigidez local de cada elemento y está dada por:

$$k = \int_V B^T C B dV \quad (3.3)$$

donde B es la matriz que relaciona las deformaciones con los desplazamientos nodales locales D y C es la matriz constitutiva del elemento. El superíndice T significa la transpuesta de la matriz y la operación es sobre todo el volumen del elemento.

El desarrollo detallado de cada matriz involucrada en la ec. 3.3 no se encuentra dentro de los objetivos de esta tesis, por lo que se sugiere al lector consultar las referencias (Bathe 1982, Zienkiewicz y Taylor 1994), en las que se tratan con mayor detalle estos tópicos.

3.2. Introducción a la mecánica de fractura

Las tendencias actuales en el comportamiento, durabilidad y seguridad de estructuras especiales (plantas nucleares, estructuras fuera de costa y turbinas aéreas, entre otras), han propiciado la necesidad de emplear materiales de mejor calidad y de un mejor entendimiento de sus comportamientos bajo condiciones de cargas extremas. Las actuales sollicitaciones a las que se ven sometidas este tipo de estructuras especiales, son cada día, más severas y es importante que los ingenieros diseñadores, sean capaces de comprender los diferentes modos posibles de falla que podrían presentarse en los tipos de materiales, actualmente empleados, bajo diferentes condiciones de cargas. En general, los principales modos de falla son:

- deformación general en zonas de fluencia y/o plastificación.
- inestabilidad plástica
- colapso por pandeo
- fatiga
- fisuramientos por corrosión
- flujo plástico
- falla frágil

El fenómeno de fractura consiste en la separación o fragmentación, en dos o más partes, de un sólido bajo la acción de un estado de cargas. El área de la mecánica estructural que estudia el comportamiento de cuerpos fisurados es conocida como *mecánica de fractura*. Esta tiene el propósito de obtener el estado de esfuerzos en la zona contigua a la fisura para diferentes materiales y geometría, y es esencialmente de naturaleza matemática, empleándose como herramienta de diseño.

En el fenómeno de fractura, puede ocurrir un aumento en la presencia de fisuras produciendo intensificaciones locales, aun cuando los esfuerzos en un sólido puedan estar por debajo del límite de fluencia. Los esfuerzos adyacentes a una de estas fisuras pueden ser lo suficientemente grandes, causando que éstas se propaguen de una manera incontrolable e incluso, propicien la falla en el elemento. Un *criterio de fractura* provee una forma de predecir la carga que puede causar la presencia de fisuras o su propagación en un elemento. Los esfuerzos en la proximidad de una punta de una fisura, serán lo suficientemente grandes para propiciar la fluencia del material y el desarrollo de una zona plástica. Además, si sólo ocurren fluencias en pequeña escala adyacentes a la punta de la fisura, se pueden emplear parámetros de fractura que caractericen los patrones de la propagación de una grieta. Estos parámetros forman la base del *mecanismo elástico lineal de fractura* (LEFM, por sus siglas en Inglés) (Kaliharoo, 1995).

Entre los primeros trabajos que estudian la fractura de sólidos, está el realizado por Inglis (1913), en el que se presenta la solución al problema de localización de los esfuerzos en una placa debidos a la presencia de un agujero elíptico. Varios trabajos similares a éste, trataron de resolver el problema de fractura pero, antes de 1920, todas éstas investigaciones, no formaron un cuerpo teórico estructurado sobre fractura de sólidos.

El estudio sistemático de la fractura de sólidos, desde un punto de vista de la mecánica del medio continuo, fue iniciado por Griffith (1920), quien propone una explicación del fenómeno de fractura en términos de la energía requerida para la propagación del fisuramiento.

La relación en la cual la energía potencial Π de un sólido elástico lineal que contiene una fisura en una superficie de área A , decrece proporcionalmente con la propagación de la fisura, es:

$$G_I = -\frac{d\Pi}{dA} = -\frac{d}{dA}(U - W) \quad (3.4)$$

donde G_I es la relación de energía dispada en el modo de fractura I y puede definirse como la cantidad de energía disponible para un incremento en la propagación de la fisura; U es la energía de deformación en el sólido y $W=2U$ es el trabajo realizado por las fuerzas externas F . Si las cargas permanecen constantes durante la propagación de una fisura, entonces:

$$G_I = \left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)_F = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial A}\right)_F \quad (3.5)$$

La propagación de una fisura ocurrirá cuando G_I alcance un valor crítico, es decir:

$$G_I = \frac{dW_s}{dA} = G_{IC} \quad (3.6)$$

donde G_{IC} es el valor crítico de G_I y es una medida de la dureza a la fractura del material; dW_s/dA es la relación en la cual la energía se disipa en un elemento durante el proceso de fractura y W_s es la energía superficial necesaria para la formación de una fisura.

En general, hay tres posibles modos de carga que pueden aplicarse a una fisura (Fig. 3.1). En el modo I (Fig. 3.1 a), la carga es aplicada normal al plano de la fisura, tendiendo a abrir la fisura. El modo II (Fig. 3.1 b) corresponde a una carga de cortante en el plano y provoca el deslizamiento de las caras de la fisura. El modo III (Fig. 3.1 c) se refiere al cortante fuera del plano. Un sólido agrietado puede ser cargada en uno de estos modos o en una o más combinaciones de ellos (Anderson, 1991).

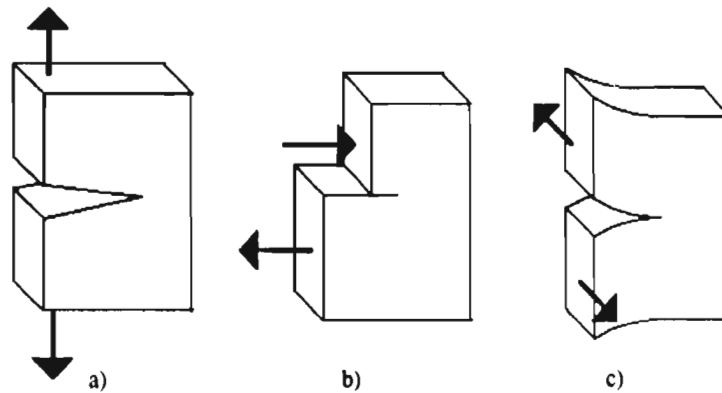


Fig. 3.1. Los tres modos de carga que pueden ser aplicados a una fisura.

Por ejemplo, para una placa infinita de espesor unitario, que contiene una fisura de longitud $2a$ y sujeta a un estado uniaxial de esfuerzos de tensión que produce un estado de esfuerzo plano, tal como se muestra en la Fig. 3.2, la energía de deformación de la placa es:

$$U = \frac{\pi\sigma^2 a^2}{E} \quad (3.7)$$

donde E es el módulo de elasticidad; σ es el esfuerzo aplicado remotamente y a es la semilongitud de la fisura.

De la ec. 3.5 se tiene que,

$$G_1 = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (3.8)$$

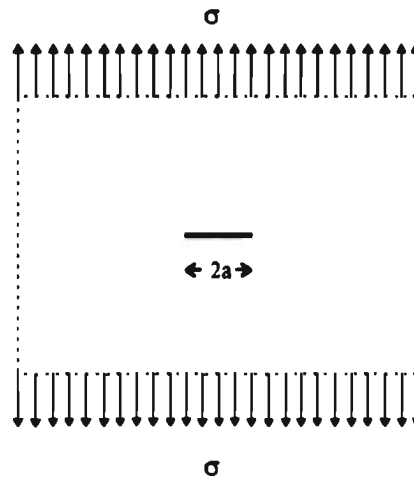


Fig. 3.2. Placa infinita fisurada sujeta a esfuerzos uniaxiales de tensión.

Para este ejemplo, cada extremo de la fisura crece una cantidad diferencial da , la energía fluye dentro de la punta de la fisura donde se disipa durante el proceso de fractura. Si la grieta crece de manera estable, entonces,

$$G_{IC} = dW_s \quad (3.9)$$

donde $W_s = 4a\gamma_s$ es la energía superficial de la fisura y γ_s es la energía superficial del material requerida para crear una superficie de fisura unitaria. Esto se debe a que, al existir simetría en el crecimiento de la fisura en una cantidad diferencial da en cada extremo de ésta, el área de la superficie de la fisura creada es $4da$. Así de las ecs. (3.6) y (3.9), se tiene

$$G_{IC} = 2\gamma_s \quad (3.9')$$

Así, el esfuerzo de fractura $\sigma_f = \sigma$ se obtiene de las ecs. (3.8) y (3.9')

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{a\pi}} \quad (3.10)$$

Una aproximación equivalente al problema de la fractura en LEFM, emplea un análisis de esfuerzos en la zona cercana a la punta de la fisura en vez de un balance de energías para todo el elemento. Para poder aplicar la ec. 3.10, debe conocerse la energía superficial y en este ejemplo se predefinieron las características de la grieta. Las dificultades que se presentan para conocer el valor de γ_s y de U en situaciones prácticas fueron superadas por Irwin (1957) quien demostró que los esfuerzos en la vecindad de la fisura tiene la forma mostrada en la Fig. 3.3.

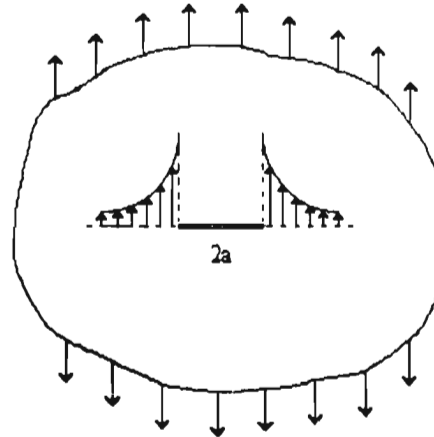


Fig. 3.3. Esfuerzos en la vecindad de la fisura.

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{r}} f_{ij}(\theta) \quad (3.11)$$

donde i, j se refieren a las coordenadas cartesianas y r, θ a las coordenadas polares; f_{ij} es una función adimensional de θ (Fig. 3.4) y K es el factor de intensidad de esfuerzos y mide la magnitud del esfuerzo elástico cercano a la punta de la fisura donde la singularidad del esfuerzo, $\frac{1}{\sqrt{r}}$, es dominante.

Para el ejemplo, el factor de intensidad de esfuerzos, está dado por

$$K_I = \sigma \sqrt{a\pi} = \sqrt{2E\gamma} \quad (3.12)$$

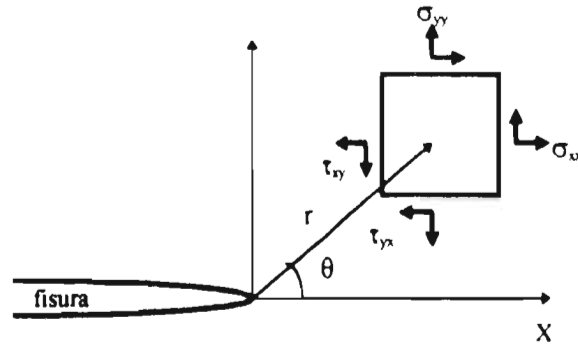


Fig. 3.4. Definición de los ejes coordenados en la punta de la fisura.

Se acepta que la fractura ocurre cuando se alcanza el valor crítico de

$$K_I = K_{IC} \quad (3.13)$$

donde K_{IC} es la resistencia del material a la fractura.

Así, para este ejemplo, el valor del esfuerzo de fractura es

$$\sigma_f = \frac{K_{IC}}{\sqrt{a\pi}} \quad (3.14)$$

Dos parámetros que describen el comportamiento de la fisura son la relación de energía liberada G y el factor de intensidad de esfuerzos K . El primer parámetro cuantifica el cambio neto de la energía potencial que involucra un incremento en la propagación de la fisura; el último parámetro caracteriza los esfuerzos, las deformaciones y los desplazamientos cercanos en la punta de la fisura. La relación de energía liberada describe un comportamiento global, mientras que el factor de

intensidad de esfuerzos en un parámetro local. Para materiales elástico lineales, K y G se pueden relacionar. Irwin (1957), calculando la energía requerida para cerrar una pequeña porción de una fisura, demostró que las ecs. (3.10) y (3.14) son equivalentes, derivando así una relación entre los parámetros de fractura; esta relación está dada por

$$G_I = \frac{K_I^2}{E} \quad (3.15)$$

y para el estado crítico

$$G_{Ic} = \frac{K_{Ic}^2}{E} \quad (3.15')$$

Se puede observar, de la ec. 3.15, que los esfuerzos de fractura σ_f (ecs. 3.10 y 3.14) son iguales para ambas aproximaciones.

El concreto al no ser un material homogéneo e isotrópico, no sigue consistentemente la definición de K_I , ya que se presenta un crecimiento subcrítico de fisuras con un subsecuente ablandamiento (Reinhardt, 1989). Esto puede demostrarse en un espécimen prismático en una prueba de desplazamientos controlados. Cuando se aplica el esfuerzo $\sigma = P / A$, este alcanza un valor máximo a la tensión f_t ; a partir de este punto se presenta un descenso en los esfuerzos con un incremento en los desplazamientos. Esto puede interpretarse de dos maneras :

1. Una fisura discreta se presenta con una transferencia de esfuerzos de una cara a la otra de la fisura (Fig. 3.5).
2. Una distribución de fisuras se desarrolla en una banda de fisura con el decremento en la rigidez y la resistencia del material del elemento (Fig. 3.6).

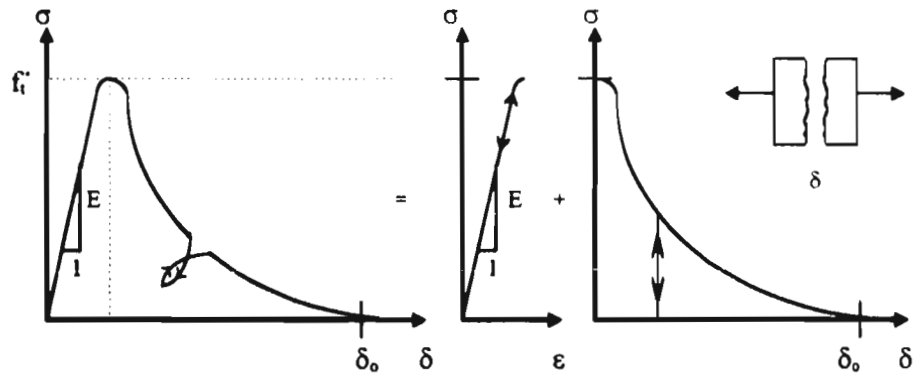


Fig. 3.5. Modelo de fisura discreta (Reinhardt, 1989)

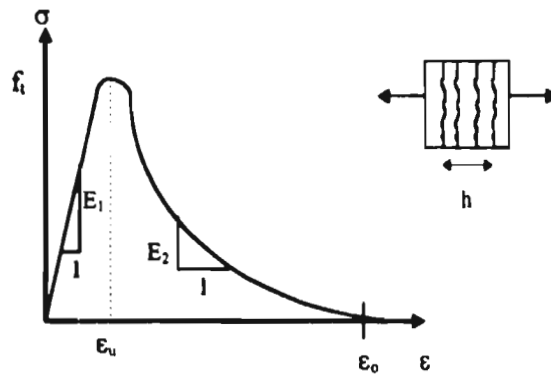


Fig. 3.6. Modelo de banda de fisura (Reinhardt, 1989).

En las Figs. 3.5 y 3.6, δ es el desplazamiento en la apertura de la grieta, ϵ es la deformación unitaria, E_1 es el módulo de Young en la rama ascendente y E_2 es el módulo tangente en la rama descendente. La banda de fisura es un artificio de análisis donde en un elemento finito, la

representación de la fisura es más realista considerando una banda de micro fisuras. El ancho de esta banda puede ocurrir en la punta de una fisura y algunos autores la consideran como una propiedad del material (Bazant 1983).

La energía de fractura específica disipada durante el proceso de la formación de la fisura, está dada por:

$$G_f = \int_0^{\delta_0} \sigma d\delta \quad (3.16)$$

o bien,

$$G_f = h \int_0^{\epsilon_0} \sigma d\epsilon \quad (3.16')$$

donde h es el ancho de banda de la fisura y G_f es la energía de fractura y es el área bajo la curva de las gráficas $\sigma - \delta$ o $\sigma - \epsilon$ en un estado de esfuerzos de tensión pura.

3.3. Modelos de Fisura en Elementos de Concreto

3.3.1. Generalidades

Uno de los campos de aplicación del MEF es el estudio de las estructuras de concreto, ya sea simple, reforzado y/o presforzado. En el capítulo anterior, se trató sobre el comportamiento del

concreto simple y el acero de refuerzo bajo un estado de esfuerzos simple. Una característica importante de la interacción entre el agregado grueso y la matriz cementante en el concreto, es el contenido de grietas muy finas que aparecen aún antes de que se le haya aplicado carga al concreto (Hsu et al, 1963). Cuando el esfuerzo de compresión es menor del 30% de la resistencia a la compresión, no se produce la propagación de grietas por la adherencia entre el agregado y la matriz; sin embargo, si los esfuerzos son mayores, aumentarán la longitud, el ancho y el número de grietas en el concreto. Su propagación continúa lentamente hasta el instante en que el esfuerzo de compresión es aproximadamente un 80% de la resistencia, el ancho de las grietas aumenta en el mortero cruzando las grietas existentes por adherencia y formando un mosaico continuo de fisuras, en esta etapa las grietas se propagan con rapidez (Neville, 1995). Como se comentó previamente, la presencia de pequeñas grietas iniciadas se puede demostrar tomando como base los requisitos de la energía potencial mínima en equilibrio y la propagación se produce cuando la energía liberada debida a las cargas externas es igual a la energía requerida en las superficies fisuradas.

Dentro de la modelación matemática, una fisura puede idealizarse como una discontinuidad geométrica en un sólido continuo; en el instante en que se produce la fisura, las ecuaciones y planteamientos de la mecánica de los medios continuos dejan de ser aplicables. En un principio, las aproximaciones modelaban a una fisura como una discontinuidad geométrica; recientemente, se tiene una aproximación que idealiza un sólido agrietado como uno continuo con algunas modificaciones en las propiedades del material en la zona fisurada. Estas dos maneras de idealizar al problema de fractura en el concreto han dado lugar a dos líneas de investigación distintas de los modelos numéricos que pretenden analizar a la fisura:

- Modelo de fisura discreta.
- Modelo de fisura distribuida.

3.3.2. Modelo de fisura discreta

En el modelado de fisuras discretas, éstas se representan *explícitamente* y se extienden *discretamente*. Es decir, se mantiene siempre una representación explícita de la geometría de la fisura (o fisuras). Al extenderse la fisura dentro del sólido, las superficies creadas se incorporan de manera explícita en el modelo; al extenderse las grietas de manera discreta, este incremento tendrá una longitud finita y representa sólo una parte de la evolución de la fisura (Wawrzynek e Ingraffea, 1994). En la modelación discreta, además de las suposiciones usuales en la idealización de las propiedades del modelo (geometría, materiales, condiciones de frontera), existen dos factores que afectan a la aproximación numérica: la técnica con la que se realiza el análisis de esfuerzos (elementos finitos o elementos de frontera) y la teoría con que se modela que la propagación de la fisura se extiende de manera discreta (Fig. 3.7). La modelación discreta convergerá asintóticamente en una solución si ambos factores se reducen, es decir, para una mejor aproximación se debe tener un modelo más fino, una malla de elementos más fina y el número de las iteraciones sean mayores.

La modelación discreta es un proceso iterativo, en el que sobresalen cuatro tareas principales:

1. **Análisis de esfuerzos.** Esta etapa tiene como finalidad el calcular las respuestas del elemento (esfuerzos, deformaciones, desplazamientos) a las condiciones impuestas (cargas, restricciones).
2. **Análisis de fractura.** Se evalúan los parámetros que rigen el proceso de agrietamiento.
3. **Se establece la condición de falla o de detención que ha ocurrido.** La noción de *detención* es un artificio numérico en la propagación inestable de la fisura, es decir, se define como el punto en el cual la velocidad de propagación en la punta de la fisura tiende a cero. La definición de la falla varía de acuerdo con el tipo de simulación que se realice y es el objetivo principal en el proceso de análisis. En muchos casos, una vez que se ha logrado la condición de falla o la de detención, el proceso se termina.

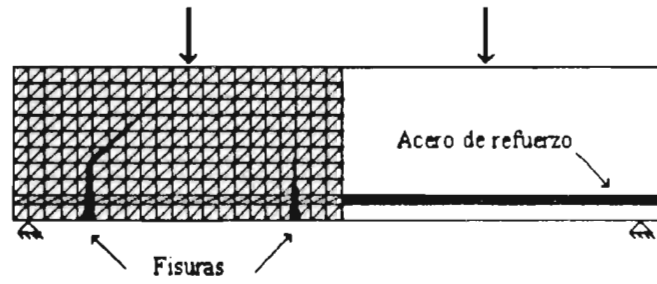


Fig. 3.7. Modelo de fisuramiento discreto.

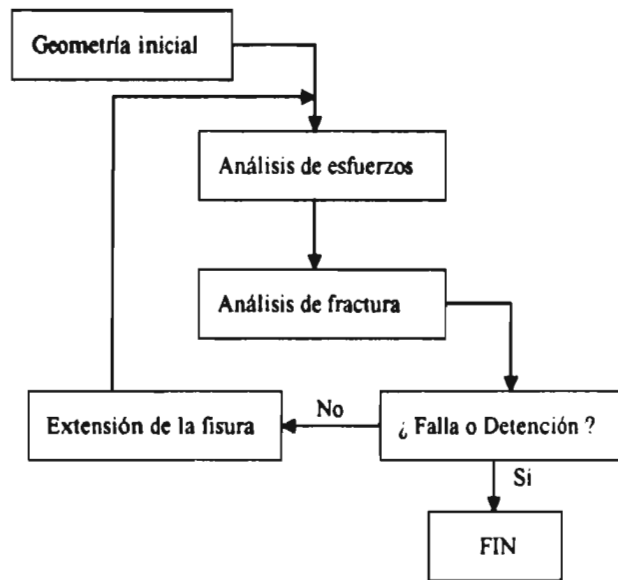


Fig. 3.8. Diagrama de flujo del proceso iterativo para la modelación discreta de propagación de fisura.

4. Si la meta anterior no se alcanza, entonces, se realiza la extensión o propagación finita de la fisura o fisuras. Esto implica tres pasos a realizar:

- a) Los índices de fractura, evaluados en el paso 2, son empleados para predecir la nueva dirección y longitud de la fisura.
- b) La geometría del sólido se modifica explícitamente para reflejar la nueva configuración de la fisura.
- c) De ser necesario, se realizan nuevas mallas del elemento cuantas veces se genere un nuevo análisis de esfuerzos.

Dentro del contexto de la fisura discreta por medio de MEF, existen dos modelos de análisis: el modelo de fisura ficticia y el modelo de banda fisurada (Fig. 3.9).

La Fig. 3.9a corresponde al modelo de fisura ficticia, donde se indica la separación de los elementos con la introducción de esfuerzos de cierre, los cuales dependen de la apertura de la fisura w en la zona de fractura, que es igual a la distancia de separación de los nudos. La Fig. 3.9b corresponde al modelo de banda de fisura (Bazant y Oh 1983) e indica un cambio de rigidez de la banda de elementos. El modelo de banda de fisura puede considerarse dentro de la aproximación discreta siempre y cuando la fisura se propague a lo largo de una banda de elementos finitos, donde los elementos de frontera son paralelos a la fisura; de no ser así, el modelo es una aproximación de fisura distribuida.

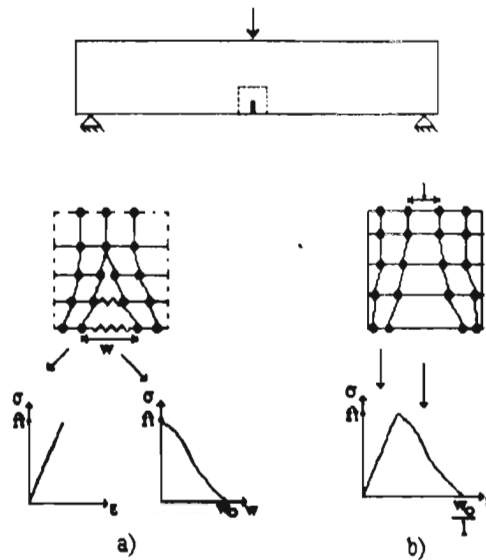


Fig. 3.9 Modelos de análisis de fisuramiento discreto.

En la modelación discreta existe una aproximación basada en la mecánica de fractura elástica lineal (LEFM), dentro de este contexto en la punta de la fisura se presentará una singularidad en los esfuerzos. La propagación de las fisuras dependen del factor de intensidad de esfuerzos K_I . La fisura se propaga cuando K_I alcanza un valor crítico K_{Ic} . Sin embargo, el LEFM es una regla no aplicable en estructuras de concreto de tamaño moderado a pequeño (Hilleborg y Rots 1989); para lograr su aplicabilidad, se modifica suponiendo que la fisura se propaga a través de una *longitud efectiva de fisura*. Así como esta modificación existen otros análisis por medio del LEFM, sin embargo, todos estos análisis tienen la desventaja que en principio solo son aplicables para estructuras que contengan una fisura preestablecida. Como se dijo, la fisura se propaga siempre que el factor de intensidad de esfuerzos o bien, la energía liberada alcance un valor crítico. Este tipo de criterios se emplean en modelos modificados del LEFM ya sea con la introducción de esfuerzos de cierre en la zona de fractura o donde se calcule la longitud efectiva de fisura (Hilleborg y Rots 1989).

En los modelos de fisura ficticia y de la banda de fisura, se asume que la dirección de la propagación de la fisura será perpendicular a la dirección principal del esfuerzo máximo en tensión cercano a la punta de la fisura.

3.3.3. Modelo de fisura distribuida

3.3.3.1. Introducción

Como contraparte del modelo de fisura discreta, en el modelo de fisura distribuida se considera que el sólido agrietado permanece continuo. La aproximación parte de las nociones de esfuerzos y deformaciones y permite una descripción del problema con base a las relaciones de esfuerzos y deformaciones. Por tanto, el comportamiento del concreto fisurado puede describirse en términos de relaciones de esfuerzo-deformación y con esto es posible cambiar de un estado inicial isotrópico de esfuerzos y deformaciones a un estado ortotrópico una vez presentada la fisura. Como una consecuencia de esto, la topología de la malla de elementos finitos original se preserva y desde el punto de vista computacional es muy conveniente (Fig. 3.10).

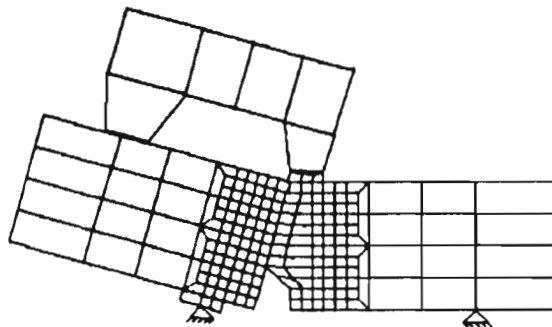


Fig. 3.10. Modelo distribuido de fisuramiento.

La modelación de la fisura distribuida en el concreto puede catalogarse principalmente en

1. *Concepto de fisura distribuida fija.*
2. *Concepto de fisura distribuida girada.*

Con el concepto de fisura distribuida fija, la orientación de la fisura se mantiene fija durante todo el proceso de cálculo, mientras que en el concepto de fisura distribuida girada, se acepta que la orientación de la fisura girará de acuerdo con los ejes principales de deformación. Además de estos dos conceptos, se introduce una opción intermedia, el concepto de *fisura distribuida fija multidireccional* (Rots et al 1985).

3.3.3.2. Concepto tradicional de fisura fija

Antes de iniciarse el proceso de fisuramiento, el concreto se modela con suficiente precisión como un material isótropo y elástico lineal. Una vez que el esfuerzo principal de tensión sobrepasa la resistencia a tensión del elemento, una fisura fija puede iniciarse perpendicular a la dirección del esfuerzo principal. Tradicionalmente, la ley de esfuerzos y deformaciones isotrópica se cambia por una ley esfuerzos y deformaciones ortotrópica con respecto a los ejes fijos de ortotropía n, t (para esfuerzo plano), donde n se refiere a la dirección normal a la fisura (modo I) y t se refiere a la dirección tangencial (modo II) puesto que un material heterogéneo puede ser capaz de transmitir esfuerzos por tensión y por cortante debido a la adherencia y a la interacción entre el agregado y la matriz cementante; la relación ortotrópica para el estado de esfuerzo plano está dada por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{nn} \\ \Delta\sigma_{tt} \\ \Delta\sigma_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{nn} \\ \Delta\varepsilon_{tt} \\ \Delta\varepsilon_{nt} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

Lo que indica que las rigideces normales y la rigidez por cortante a través de la fisura se igualan a cero una vez formada la fisura.

El cambio súbito de un estado isotrópico elástico lineal a un estado ortotrópico con las rigideces nulas, producían en ocasiones dificultades numéricas y patrones distorsionados de fisura (Schnobrich 1972, Suidan y Schnobrich 1973, Hand et al 1973), por esta razón se introdujo el modulo de cortante con el factor de reducción β , así:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{nn} \\ \Delta\sigma_{tt} \\ \Delta\sigma_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{nn} \\ \Delta\varepsilon_{tt} \\ \Delta\varepsilon_{nt} \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

El uso del factor de retención de cortante β reduce las dificultades numéricas, además de que mejora el "realismo" de la aproximación del modelo de fisura fija, ya que se tiene la idea de que toma en cuenta el efecto de la interacción del agregado con el mortero cementante. Algunos investigadores han adoptado que el factor β sea una constante entre cero y uno ($0 < \beta < 1$) (Hand et al 1973). Sin embargo, se ha empleado un factor que depende de la deformación de la fisura (Cedolin y Dei Poli 1977), el cual es mas realista, ya que la capacidad de la fisura para transferir esfuerzos de cortante en el modo II se reduce con el incremento de la deformación por la apertura de la fisura.

La función de retención de cortante controla la cantidad de esfuerzos girados con respecto a los esfuerzos principales y de los esfuerzos principales "reconstruidos" después del agrietamiento,

produciendo una excesiva transferencia de cortante, lo que implica que los resultados con el modelo de fisura fija tiendan a ser demasiado rígidos (Rots y de Borts 1987, Rots 1988).

El hecho de que la rigidez perpendicular a la fisura en la ec. 3.18 sea nula, produce de manera súbita que, al iniciarse el proceso de fisuramiento, los esfuerzos de tensión sean nulos cuando se alcanza el esfuerzo máximo de tensión f_{ct} , lo que ocasiona problemas numéricos. Además, esa súbita pérdida de la resistencia es irreal, ya que la curva de esfuerzos y deformaciones en tensión revela un ablandamiento gradual, tal como se ilustra en la Fig.3.11 (Leibengood et al 1986).

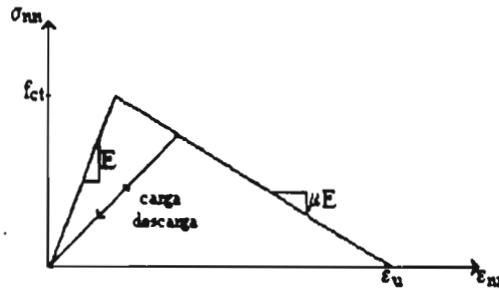


Fig. 3.11. Ablandamiento por esfuerzos de tensión en el modelo de fisura distribuida fija.

En este modelo, se introduce un factor de retención normal negativo, μ (Leibengood et al 1986).

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{nn} \\ \Delta\sigma_{tt} \\ \Delta\sigma_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\epsilon_{nn} \\ \Delta\epsilon_{tt} \\ \Delta\epsilon_{nt} \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

Un refinamiento final se obtiene cuando se toma en cuenta el módulo de Poisson ν después de la formación de la fisura, llegando a la formulación de la banda de fisura en el modo I de Bazant y Oh 1983, tomando en cuenta el efecto de la retención de cortante en modo II (Rots et al 1985, Rots 1988).

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{nn} \\ \Delta\sigma_{tt} \\ \Delta\sigma_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu E}{1-\nu^2\mu} & \frac{\nu\mu E}{1-\nu^2\mu} & 0 \\ \frac{\nu\mu E}{1-\nu^2\mu} & \frac{E}{1-\nu^2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{nn} \\ \Delta\varepsilon_{tt} \\ \Delta\varepsilon_{nt} \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

El incluir el concepto de ablandamiento por tensión incremental, en gran medida, las posibilidades de uso de los modelos de fisura distribuida en el análisis numérico de elementos estructurales de concreto (Leibengood et al 1986, Rots et al 1985, Rots 1988).

Las leyes ortotrópicas de la ec. 3.20, no sólo han sido aplicadas en la localización de la fisura en concreto sin refuerzo, sino también se ha empleado para distribuir la fractura en concreto reforzado (Lin y Scordelis 1975). En estos casos, la consideración de la rama descendente en la curva esfuerzo deformación en tensión permite representar el efecto de la rigidez por tensión debido a la adherencia, en vez del efecto de ablandamiento por tensión.

3.3.3.3. Concepto de fisura distribuida fija con descomposición de la deformación

El vector de deformación en las ecs. 3.17 a 3.20 representa el incremento de deformación total del sólido fisurado. Un modelo menos complejo se obtiene al descomponer el incremento de deformación total $\Delta\varepsilon$ en una parte fisurada $\Delta\varepsilon^{cr}$ y una parte del concreto entre las fisuras $\Delta\varepsilon^{co}$ (Bazant y Gambarova 1980, Rots et al 1985)

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^{co} + \Delta\varepsilon^{cr} \quad (3.21)$$

El vector de deformación en la ec. 3.21, está relacionado a los ejes coordenados globales x, y . Por tanto, un sistema de ejes locales n,t puede implementarse, el cual esta alineado con la fisura. En este sistema local se puede definir un vector de deformación fisurado Δe^{cr} como

$$\Delta e^{cr} = \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{nn}^{cr} \\ \Delta \gamma_{nt}^{cr} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

donde $\Delta \varepsilon_{nn}^{cr}$ es la fisura normal en modo I, $\Delta \gamma_{nt}^{cr}$ es la fisura por deformación al cortante en modo II. La relación de las deformaciones locales y globales está dada por:

$$\Delta \varepsilon^{cr} = N \Delta e^{cr} \quad (3.23)$$

Siendo N una matriz de transformación de 3×2 para esfuerzo plano (4×2 para deformación plana), que toma en cuenta la orientación de la fisura. La matriz N se supone fija una vez iniciada la fisura, siendo compatible con el concepto de fisura fija. En el sistema local, se puede definir un vector Δt^{cr} de incrementos de la tracción a través de la fisura:

$$\Delta t^{cr} = \begin{Bmatrix} \Delta t_n^{cr} \\ \Delta t_t^{cr} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

donde Δt_n^{cr} es la tracción normal en modo I y Δt_t^{cr} es el incremento de tracción por cortante.

De manera análoga, la relación entre los incrementos de esfuerzo global y las tracciones locales esta dada por:

$$\Delta t^{cr} = N^T \Delta \sigma \quad (3.25)$$

Para completar el sistema de ecuaciones, es necesario el modelo constitutivo del concreto y el modelo de fisura distribuida. El modelo para el concreto puede asumirse como (Rots et al 1985):

$$\Delta\sigma = D^{co} \Delta\varepsilon^{co} \quad (3.26)$$

Siendo D^{co} la matriz que contiene los módulos instantáneos del concreto. Para la fisura, una relación de esfuerzo deformación local puede emplearse:

$$\Delta t^{cr} = D^{cr} \Delta e^{cr} \quad (3.27)$$

Siendo D^{cr} una matriz de 2×2 que incorpora a los modos I y II y, eventualmente, un modo de propiedades mixtas de la fisura. Así, combinando las ecuaciones anteriores, se obtiene una relación de esfuerzo -deformación total para el concreto fisurado (Rots et al 1985):

$$\Delta\sigma = \left[D^{co} - D^{co} N \left[D^{cr} + N^T D^{co} N \right]^{-1} N^T D^{co} \right] \Delta\varepsilon \quad (3.28)$$

Hasta ahora, las aplicaciones de estos modelos matemáticos han sido restringidos al caso simplificado de que los términos fuera de la diagonal principal son cero, es decir:

$$D^{cr} = \begin{bmatrix} D^I & 0 \\ 0 & D^{II} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Siendo D^I el modulo de ablandamiento de tensión en modo I y D^{II} es el modulo de cortante en modo II, el cual puede relacionarse a los modos I y II de las propiedades de fractura del concreto. La

relación entre el factor μ y el factor β del modelo ortotrópico de 3.20 y los parámetros D^I y D^{II} están dado por:

$$\frac{1}{E} + \frac{1}{D^I} = \frac{1}{\mu E} \quad (3.30)$$

$$\frac{1}{G} + \frac{1}{D^{II}} = \frac{1}{\beta G} \quad (3.31)$$

donde E es el modulo de Young y G el modulo elástico de cortante. Las ecs. 3.30 y 3.31 se obtienen a partir de que la descomposición de deformaciones considera que el concreto y la fisura se comportan como resortes conectados en serie.

3.3.3.4. Concepto de fisura distribuida fija multidireccional

Una tercera ventaja de la descomposición de deformación es que permite una sub-descomposición de la deformación de la fisura en contribuciones separadas para un numero de fisuras multidireccionales que ocurren simultáneamente en un punto específico (Rots et al, 1985), es decir:

$$\Delta \epsilon^{cr} = \sum_{i=1}^n \Delta \epsilon_i^{cr} \quad (3.32)$$

donde $i = 1, \dots, n$ se refiere al incremento de deformación de la primera fisura, de la segunda fisura, etc.

Así, se le asignan a cada una de estas fisuras fijas su propio vector local de deformación ϵ_i^{σ} , su propio vector de tracciones t_i^{σ} , su propia matriz de transformaciones N_i y su propia matriz tracción deformación D_i^{σ} . Se realiza el ensamble, de estos vectores y matrices individuales, obteniendo la relación de esfuerzo-deformación total para el sólido con múltiples fisuras. Además, puede implementarse análogamente para un solo sólido fisurado (Rots et al, 1985).

La importancia del concepto de fisura multidireccional es obvia para las condiciones de esfuerzos de tensión biaxiales y triaxiales, ya que se esperarían dos o tres fisuras ortogonales. Esta opción es particularmente relevante en el análisis de deformación plana y axisimétrica, donde numerosos puntos podrían fisurarse longitudinal y transversalmente. Un segundo campo de aplicación, está en el caso donde la fisura inicia en tensión y subsecuentemente se comporta en esfuerzos de tensión y de cortante. Este comportamiento implica, generalmente, que los ejes principales de esfuerzo roten después de la formación de la fisura. Para este caso, el empleo de una fisura fija tiende a provocar una discrepancia creciente entre los ejes principales de esfuerzo y los ejes de la fisura fija. El concepto de fisura fija multidireccional provee una alternativa; cuando el ángulo de inclinación entre la fisura existente y la dirección del esfuerzo principal en curso sobrepasa el valor de cierto *ángulo límite*, α , una nueva fisura puede iniciarse. De esta manera, puede finalizarse el proceso con un sistema de fisuras no ortogonales.

3.3.3.5. Concepto de fisura distribuida girada

Una característica principal de los conceptos de fisura distribuida fija y fisura distribuida fija multidireccional es la inclusión "explícita" del término de cortante (factor β) para el plano o planos fijos de fisura. Sin embargo, con este parámetro de cortante no se puede conocer el

comportamiento de los elementos estructurales. Tanto los diseñadores como los investigadores prefieren pensar en términos de esfuerzos principales, donde los ejes continuamente giran después del fisuramiento. Esto implica la necesidad de monitorear las relaciones esfuerzo deformación en el sistema coordinado principal de rotación en vez del sistema fijo de fisura. El uso consistente de las relaciones esfuerzo deformación principal giradas, requiere que los esfuerzos y las deformaciones principales sean coaxiales. Considerando una configuración de coaxialidad inicial en el plano, con las direcciones principales de esfuerzos 1,2, se alinean con éstas las deformaciones y la ortotropía del material. Por medio del círculo de Mohr para deformaciones, un incremento diferencial de deformación por cortante provoca que la dirección principal de deformación gire un ángulo diferencial $\Delta\theta_\epsilon$, es decir:

$$\tan 2\Delta\theta_\epsilon = \frac{\Delta\gamma_{12}}{2(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})} \quad (3.33)$$

donde $\Delta\gamma_{12}$ es el incremento diferencial de deformación por cortante en el marco de referencia 1,2; ϵ_{11} y ϵ_{22} son las deformaciones iniciales principales. La ec. 3.33 es válida si $|\Delta\gamma_{12}| \ll |\epsilon_{11} - \epsilon_{22}|$.

Análogamente, empleando el círculo de Mohr para esfuerzos:

$$\tan 2\Delta\theta_\sigma = \frac{\Delta\sigma_{12}}{(\sigma_{11} - \sigma_{22})} \quad (3.34)$$

donde $\Delta\sigma_{12}$ es el incremento diferencial de esfuerzos por cortante; σ_{11} y σ_{22} son los esfuerzos principales iniciales. La ec. 3.34 es válida si $|\Delta\sigma_{12}| \ll |\sigma_{11} - \sigma_{22}|$.

Para mantener la coaxialidad entre los esfuerzos y las deformaciones principales, se requiere que $\Delta\theta\epsilon = \Delta\theta\sigma$. Empleando la relación ortotrópica de la ec. 3.17, se observa que la condición anterior solo se cumple si

$$G_{12} = \frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})}{2(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})} \quad (3.35)$$

La matriz de rigidez tangencial debe incluir este término y así, la implementación de la relación de esfuerzo deformación principal girada es consistente (Bazant,1983). El concepto de fisura distribuida girada puede considerarse como un caso límite del modelo de fisur fija multidireccional para ángulos límite iguales a cero (Rots 1988).

Una ventaja de este concepto es que se evita tener que escoger un valor específico del factor de retención de cortante β . Así, no tiene que reconstruirse el esfuerzo principal en una dirección inclinada a la primera fisura.

La diferencia fundamental de estos tres conceptos reside en la orientación de la fisura, la cual puede mantenerse constante (fija solamente) o bien actualizarse en una parte siguiendo un ángulo límite (fijo multidireccional) o actualizarse continuamente (girada). Por consiguiente, el concepto de fisura fija mantiene en memoria la orientación dañada, mientras que el concepto de fisura girada no. Además, se ha observado que el modelo fijo produce una respuesta rígida, aunque el factor de retención por cortante decrezca con el incremento de la deformación normal a la fisura. Los modelos de fisura fija multidireccional y de fisura girada producen respuestas flexibles y mantienen bajo control el máximo esfuerzo de tensión; el modelo de fisura girada provee, de manera implícita, un ablandamiento por cortante a través del plano de la fisura inicial. Hasta

ahora, se ha visto que los mejores resultados se obtienen con el modelo de fisura girada o con el modelo de fisura fija siempre que el factor de retención de cortante β sea cero (Rots, 1988).

Un parámetro importante en el problema de la simulación de fisuras por el modelo distribuido es el ancho de banda h . Se ha visto que el ancho de banda no se define con exactitud cuando la fractura zigzaguea a través de los elementos (Rots, 1988). Por tanto, una de las consecuencias de esto último es el hecho que el ablandamiento por deformación puede manifestarse como un fenómeno total para un grupo de puntos de integración en uno o varios elementos finitos y no una propiedad local de un punto de integración aislado en un elemento finito. Además, se ha tratado de solucionar este problema incorporando la ocurrencia de la fisura en zigzag hacia una determinación automática del ancho de banda (Ottosen y Dahblom, 1986). Sin embargo, esas técnicas no solo tienden hacia una sobre sofisticación del problema considerando factores dudosos en los parámetros de ablandamiento. No obstante, se vuelve impráctico, el cálculo del ancho de banda, cuando estos parámetros de ablandamiento requieren de un cambio de información entre la vecindad de los elementos, lo cual no concuerda con la forma de los programas basados en el MEF.

Rots 1988 demostró que el ancho de banda tiene la misma importancia que la energía de fractura en el problema de fisuramiento. De igual forma. Demostró que el papel de la energía de fractura es menos importante que el esfuerzo de tensión del concreto y de la forma del diagrama de ablandamiento del concreto en tensión.

En este capítulo, se presenta brevemente la formulación matemática de los modelos de fisura discreta y de fisura distribuida. Desde que la fisura se logró modelar matemáticamente, la "aplicabilidad" del modelo distribuido contra el modelo discreto ha estado sujeto a mucha controversia. Inicialmente, se pensó que la aproximación distribuida era mejor ubicada para el análisis de fractura distribuida, mientras que el modelo discreto ha sido empleado con mayor

frecuencia en el análisis de fractura localizada. El modelo discreto tiene como desventajas el tener que preestablecer necesariamente a la fisura, el continuo cambio en la conectividad de los nudos no concuerda con el método de desplazamientos en los elementos finitos, así como el costo computacional que implica el continuo remallado, la fisura se fuerza a seguir un patrón preestablecido a través del elemento, poniendo en duda la fidelidad de la aproximación. Por otra parte, el modelo distribuido tiene como desventajas el que los esfuerzos se "atoren" en las zonas donde debieran ser cero. Esto se debe a la incompatibilidad que existe entre la continuidad en los desplazamientos y el realismo de la discontinuidad geométrica (Rots 1988). Una segunda desventaja que se presenta en el modelo distribuido es el peligro de los mecanismos falsos o ficticios que ocurren, debido principalmente a que la localización de la fisura es solo un artificio matemático.

Capítulo 4

Modelo de elementos finitos para el programa de análisis no lineal

4.1. Introducción

El desarrollo de nuevos modelos y herramientas de análisis no lineal para elementos estructurales de concreto reforzado que mejoren a los existentes, involucra actividades complejas que requieren para realizarse de estudios que están fuera del alcance de esta tesis. Por esto, en este trabajo sólo se evalúa el potencial de los modelos de comportamiento existentes y de la formulación de fractura distribuida de elementos finitos en la determinación de la respuesta de elementos de concreto reforzado.

En esta tesis, se decidió alcanzar estos objetivos estudiando el comportamiento de los modelos de elementos de concreto, empleando un programa de análisis no lineal de elemento finito comercial, SBETA (Peekl Instruments, 1994), por encontrarse que éste cubre las características importantes del comportamiento tanto del concreto como del acero de refuerzo.

En el análisis no lineal de elementos de concreto reforzado, el programa los idealiza por modelos en un estado de esfuerzo plano válida para elementos estructurales con acciones solo en un plano. Para estudiar el comportamiento no lineal y el fracturamiento del concreto, el programa emplea el modelo de aproximación distribuida para simular la formación y propagación de fisuras en el concreto, en el cual, la fractura se idealiza como un fenómeno de comportamiento. para el acero de refuerzo, se emplean modelos no lineales o distribuidos sobre los elementos finitos. En esta última idealización las propiedades del material que se definen en un punto de un elemento finito con refuerzo

distribuido representan la participación de todas las barras de acero de refuerzo contenido en dicho elemento.

4.2. Modelos constitutivos empleados.

El modelo constitutivo para el concreto implementado en el programa de análisis no lineal, SBETA, se basa en la formulación del método de rigideces en la que la relación esfuerzo deformación para un elemento finito se describe por:

$$s = De \quad (4.1 a)$$

donde:

$$s = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.1 b)$$

es el "vector de esfuerzos",

$$e = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.1 c)$$

es el "vector de deformaciones" y D es la matriz que relaciona los esfuerzos y las deformaciones del material. Las componentes de esfuerzos y de deformaciones en un estado plano de esfuerzo se ilustran en la Fig. 4.1.

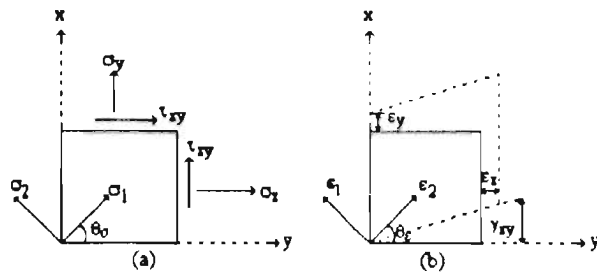


Fig. 4.1. Componentes de esfuerzos y de deformaciones en el estado plano de esfuerzos.

Para un elemento de concreto reforzado, el vector de esfuerzos s y la matriz D para cada elemento finito se descomponen en las componentes correspondientes al concreto y al acero de refuerzo:

$$s = s_c + s_s \quad (4.2 a)$$

$$D = D_c + D_s \quad (4.2 b)$$

El vector de esfuerzos s y sus componentes s_c y s_s están relacionados al área total de la sección transversal del elemento, es decir, los esfuerzos del concreto s_c actúan en el área de concreto del elemento A_c .

El vector de esfuerzos del acero de refuerzo, s_s , es la suma de los esfuerzos de todos los elementos con refuerzo distribuido:

$$s_s = \sum_{i=1}^n s_{s_i} \quad (4.2 c)$$

donde n es el número de elementos con refuerzo distribuido. Para el i -ésimo refuerzo, el esfuerzo de la componente de refuerzo global, se relaciona con el esfuerzo de refuerzo local, σ'_{s_i} , por la transformación:

$$s_{s_i} = T_{\sigma} \rho_i \sigma'_{s_i} \quad (4.2 d)$$

donde ρ_s es la cuantía de acero de refuerzo. $\rho_s = A_s/A_c$, donde A_s es el área de acero de la sección transversal y A_c es el área de concreto de la sección transversal. El esfuerzo del refuerzo local, σ'_s , actúa en el área de refuerzo A_s .

Los ejes u y v , se obtienen de los ejes x y y al girarse un ángulo α , el cual es positivo en el sentido antihorario (Fig. 4.2)

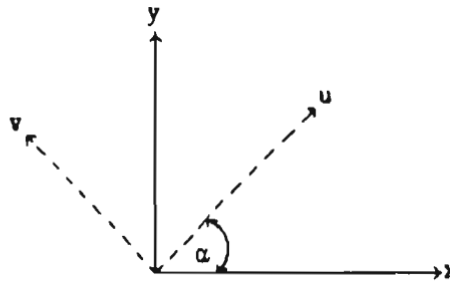


Fig. 4.2. Rotación de los ejes coordenados de referencia.

Los vectores de esfuerzos y de deformaciones en un estado de esfuerzo plano se transforman, de un sistema global a un sistema local, por medio de las siguientes expresiones:

Transformación de esfuerzos:

$$s(u) = T_\sigma s(x) \quad (4.3)$$

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)^2 & \text{sen}(\alpha)^2 & 2 \cos(\alpha) \text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha)^2 & \cos(\alpha)^2 & -2 \cos(\alpha) \text{sen}(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha)^2 - \text{sen}(\alpha)^2 \end{bmatrix} \quad (4.3 a)$$

Transformación de deformaciones:

$$e(u) = T_\epsilon e(x) \quad (4.3 b)$$

$$T_{\epsilon} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)^2 & \sin(\alpha)^2 & \cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha)^2 & \cos(\alpha)^2 & -\cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ -2\cos(\alpha)\sin(\alpha) & 2\cos(\alpha)\sin(\alpha) & \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 \end{bmatrix} \quad (4.3 c)$$

donde α es el ángulo formado por el eje del sistema global x y el primer eje local del material, el cual es normal a la fisura.

Los ángulos del eje principal I (Fig. 4.1) se obtienen de las ecuaciones:

$$\tan(2\theta_{\sigma}) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (4.4 a)$$

$$\tan(2\theta_{\epsilon}) = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \quad (4.4 b)$$

donde θ_{σ} es el ángulo del eje del esfuerzo principal y θ_{ϵ} es el ángulo del eje de la deformación principal.

El modelo de comportamiento del concreto empleado en SBETA incluye las siguientes características:

- Comportamiento no lineal en compresión, incluyendo ablandamiento por deformación.
- Fractura del concreto en tensión basado en la mecánica de fractura no lineal con un modelo de fractura distribuida.
- Criterio de falla correspondiente en un estado biaxial de esfuerzos.
- Reducción de la resistencia a compresión después del fisuramiento.
- Efecto de la rigidez en tensión.
- Reducción de la rigidez de cortante después del fisuramiento.
- Se emplean dos modelos de fisura distribuida: fisura de dirección fija y fisura de dirección girada.

Se asume adherencia perfecta entre el concreto y el acero de refuerzo dentro del concepto de modelo distribuido. No se modela directamente el deslizamiento por adherencia, excepto uno que se incluye inherentemente en el efecto de rigidez en tensión (más adelante se explica el efecto de rigidez en tensión). Sin embargo, puede existir un desplazamiento relativo del deslizamiento entre la varilla de acero y el concreto sobre cierta distancia, provocando que el concreto se fisure o se aplaste. Esto corresponde a un mecanismo real de falla por adherencia en el caso de varillas de acero corrugadas. El reforzamiento, en los modelos discreto y distribuido, se idealiza en un estado uniaxial de esfuerzos con una relación esfuerzo deformación bilineal.

La matriz D en la ec. 4.2 b se obtiene usando una aproximación elástica no lineal. En esta aproximación, las constantes elásticas se obtienen a partir de una relación uniaxial equivalente de esfuerzo-deformación del concreto.

4.2.1. Relación uniaxial equivalente esfuerzo-deformación para el concreto.

El comportamiento no lineal del concreto en un estado uniaxial de esfuerzos se describe por medio del esfuerzo efectivo σ_e^{ef} , el cual es un esfuerzo principal, y la deformación unitaria uniaxial equivalente ϵ^{eq} . El esfuerzo efectivo está en función de la deformación uniaxial equivalente. El diagrama de esta función (Fig. 4.3) consiste de cuatro partes:

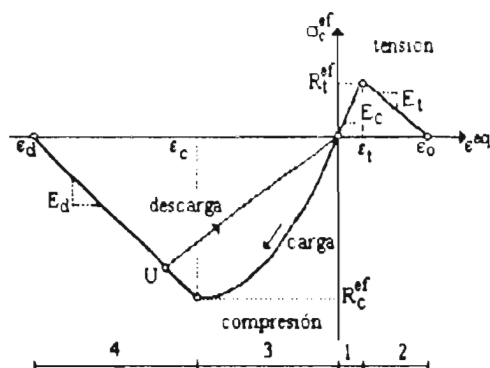


Fig. 4.3. Diagrama esfuerzo-deformación uniaxial del concreto.

1. Tensión elástica lineal antes del fisuramiento:

$$\sigma_c^{ef} = E_c \varepsilon_c^{eq}, \quad \text{para } 0 < \sigma_c < R_t^{ef} \quad (4.5 a)$$

donde E_c es el módulo elástico inicial del concreto y R_t^{ef} es su resistencia efectiva a tensión.

2. Ablandamiento lineal por tensión después de la fractura:

$$\sigma_c^{ef} = E_t \varepsilon_c^{eq} + R_t^{ef} \left(1 - \frac{E_t}{E_c} \right), \quad \text{para } \varepsilon_t < \varepsilon_c^{eq} < \varepsilon_o \quad (4.5 b)$$

donde E_t es el módulo de ablandamiento ($E_t < 0$) y ε_t , ε_o son las deformaciones máxima y última respectivamente. El módulo de ablandamiento se describe como la dureza del concreto a la fractura; puede calcularse en función de la energía de fractura y del tamaño del elemento.

3. Comportamiento en compresión definido por una parábola de segundo grado.

$$\sigma_c^{ef} = R_c^{ef} \left(2 \left(\frac{\varepsilon_c^{eq} E_c}{2R_c^{ef}} \right) - \left(\frac{\varepsilon_c^{eq} E_c}{2R_c^{ef}} \right)^2 \right), \quad \text{para } R_c^{ef} < \sigma_c < 0 \quad (4.5 c)$$

donde R_c^{ef} es el esfuerzo en el punto máximo del diagrama esfuerzo-deformación (resistencia del concreto a la compresión).

4. Ablandamiento lineal en compresión (rama descendente).

$$\sigma_c^{ef} = E_d \left(\epsilon^{eq} - \frac{R_c^{ef}}{E_c} \left(2 - \frac{E_c}{E_d} \right) \right), \quad \text{para} \quad \epsilon_d < \epsilon^{eq} < \epsilon_c = \frac{2R_c^{ef}}{E_c} \quad (4.5 d)$$

donde E_d es el módulo de ablandamiento en compresión ($E_d < 0$) y ϵ_c , ϵ_d son las deformaciones en el punto donde el esfuerzo en compresión es máximo y última respectivamente.

La descarga es una función lineal al origen. Por ejemplo, en la Fig. 4.3 el punto (1) es donde varía la descarga. Por esto, la relación entre el esfuerzo σ_c^{ef} y la deformación equivalente ϵ^{eq} no es única y depende de la historia de cargas. El cambio de carga a descarga ocurre cuando el incremento de la deformación efectiva cambia de signo. Si una subsecuente recarga ocurre, la trayectoria lineal de descarga continúa hasta que se alcanza de nuevo el último punto de carga, y entonces, continúa por la curva que define la envolvente.

Los valores máximos de los esfuerzos en compresión R_c^{ef} y en tensión R_t^{ef} se calculan de acuerdo con la función de falla bajo un estado biaxial de esfuerzos de Kupfer et al, (1969), (Fig. 4.4). En esta gráfica se distinguen tres condiciones de esfuerzos del concreto.

En el estado de *compresión-compresión*, la función de falla es,

$$R_c^{ef} = \frac{1 + 3.65a}{(1 + a)^2} R_c, \quad a = \frac{\sigma_{c1}}{\sigma_{c2}} \quad (4.6)$$

donde σ_{c1} , σ_{c2} son los esfuerzos principales del concreto y R_c es la resistencia a compresión uniaxial del cilindro de concreto. La resistencia del concreto en un estado biaxial de esfuerzos se predice con la suposición de esfuerzos proporcionales, basado en los resultados obtenidos por Kupfer et al, 1969.

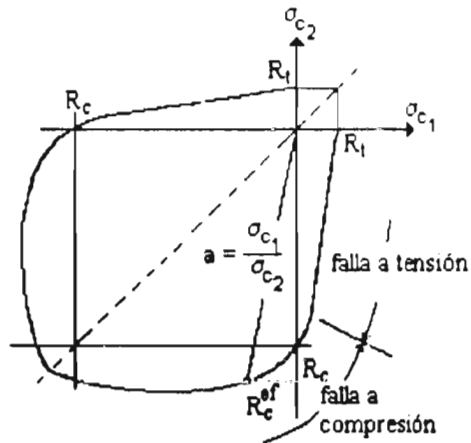


Fig. 4.4. Función de falla biaxial del concreto de Kupfer (1969).

En el estado de *tensión-compresión*, la función de falla continúa linealmente del punto $\sigma_{c1} = 0, \sigma_{c2} = R_c$ en la región tensión-compresión.

$$R_c^{ef} = R_c r_{cc}, \quad r_{cc} = \left(1 + 5.3278 \frac{\sigma_{c1}}{R_c} \right), \quad r_{cc} \geq 0.9 \quad (4.7)$$

donde r_{cc} es el factor de reducción de la resistencia a compresión en la dirección principal 2 debida al esfuerzo principal a tensión en la dirección 1.

En el estado de *tensión-tensión*, la resistencia a tensión es constante e igual a la resistencia a tensión uniaxial R_t . En el estado de tensión-compresión, la resistencia a tensión se reduce por la relación

$$R_t^{ef} = R_t r_{ct} \quad (4.8 a)$$

donde r_{ct} es el factor de reducción de la resistencia a tensión en la dirección 1 debido al esfuerzo de compresión en la dirección 2. La función de reducción (Fig. 4.5) puede obtenerse de las siguientes expresiones:

$$r_{ct} = 1 - 0.8 \frac{\sigma_{c2}}{R_c} \quad (4.8 b)$$

$$r_{et} = \frac{A + (A - 1)B}{AB}, \quad B = Kx + A, \quad x = \frac{\sigma_{12}}{R_c} \quad (4.8 c)$$

donde la función de reducción en la ec. 4.8 c es una hipérbola que pasa por los puntos $r_{et} = 1.0$, $x = 0$ y $r_{et} = 0.2$, $x = 1.0$. Las constantes K y A definen la forma de dicha hipérbola y el valor de la función de reducción. Se tienen dos formas predeterminadas de la hipérbola (a y b), a partir de la posición de un punto intermedio para cada forma y con ello la manera de calcular r_{et} . Los valores de las constantes para las dos posiciones del punto intermedio están en la tabla 4.1.

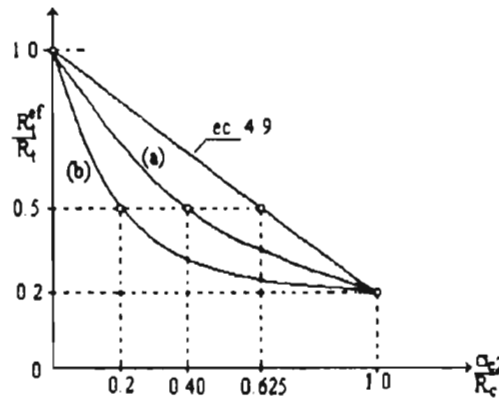


Fig. 4.5. Función de falla en el estado de tensión-compresión del concreto.

Tabla 4.1. Valores de las constantes r , x , A y K .

Tipo	punto		Parámetros	
	r	x	A	K
(a)	0.5	0.4	0.75	1.125
(b)	0.5	0.2	1.0625	6.0208

4.2.2. Fractura del concreto.

Ya que se ha visto que el modelo de fisura distribuida es de utilidad para el problema de localización de fisura (Rots, 1988), se emplea en el programa de análisis no lineal para simular el inicio y la propagación de una fisura o fisuras en el concreto. El inicio de una fisura está gobernada por el criterio de esfuerzos, i.e. $\sigma_c > R_1^{ef}$ y la apertura de esta fisura está regida por el modelo de banda de fisura (Bazant y Oh, 1983). Así, el módulo de ablandamiento del concreto en tensión se ajusta para cada elemento de acuerdo con

$$\frac{1}{E_t} = \frac{1}{E_c} \left(1 - \frac{2\lambda}{L_t} \right), \quad \lambda = \frac{E_c G_f}{(R_1^{ef})^2} \quad (4.9)$$

donde G_f es la energía de fractura específica y se define para una fisura discreta ficticia, y L_t es el ancho de banda, que a su vez en un modelo de elementos finitos se hace función del tamaño del elemento y se considera igual a \sqrt{A} para todas las orientaciones de la fisura (A es el área del elemento finito cuadrilátero) y λ es una medida de la dureza del material (Hillerborg, 1991).

Para simular la formación y propagación de una fisura, el modelo de SBETA emplea la relación de apertura de fisura de Hordijk (1991) y el ancho de la apertura de fisura, w_c , se calcula de la energía de fractura y de la resistencia a tensión del concreto R_1 . (Fig. 4.6). Por ejemplo, para un concreto con una resistencia a la compresión $R_c = 30$ MPa (306 kg/cm²), tiene una energía de fractura $G_f = 100$ N/m (Cervenka y Pukl, 1992), el ancho de apertura de fisura es igual a

$$w_c = \frac{G_f}{R_1} = 5.14 \times 10^{-5} \quad (\text{m}) \quad (4.10 \text{ a})$$

En la formulación del ancho de banda de fisura, la deformación límite del concreto ϵ_c se relaciona con el ancho de apertura de fisura w_c como:

$$\epsilon_c = w_c L_t \quad (4.10 \text{ b})$$

donde L_t es el ancho de banda en tensión, descrito previamente. L_t se define como una proyección del tamaño del elemento paralela a la dirección de la fisura (Fig. 4.7). Similarmente, se define el ancho de banda de aplastamiento para la falla a compresión, L_d . Se consideran que las bandas de fisura L_t y L_d tienen las dimensiones del elemento finito (Fig. 4.7).

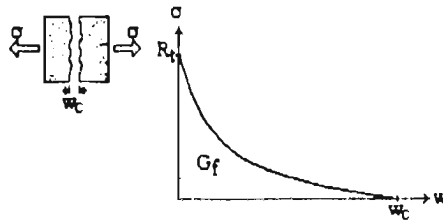


Fig. 4.6. Relación de apertura de fisura en tensión.

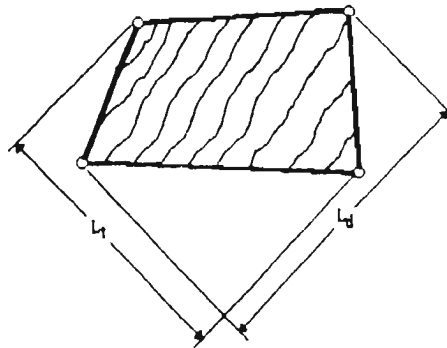


Fig. 4.7. Bandas de fisuramiento y de aplastamiento.

El ablandamiento en compresión, se obtiene a partir del desplazamiento límite en compresión, w_d en la zona de aplastamiento (Fig. 4.8). La deformación límite en compresión, ϵ_d se relaciona con el desplazamiento límite en compresión como

$$\epsilon_d = w_d L_d$$

(4.11)

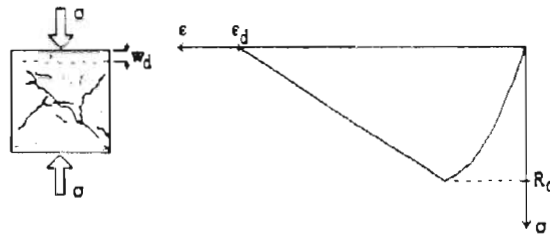


Fig. 4.8. Relación de formación de fisuras en compresión.

El proceso de formación de una fisura, se divide en tres etapas (Fig. 4.9). En la primera etapa, el material no alcanza aún la resistencia máxima a tensión y se considera que tiene un comportamiento elástico lineal. En la segunda etapa, considerada como etapa de fisuramiento, ya se alcanzó la resistencia máxima a tensión, pero el esfuerzo normal a la fisura no se libera completamente. En la última etapa, el material está fisurado y el esfuerzo normal a la fisura se ha liberado por completo. La fisura (o fisuras), en esta etapa, forman una zona de proceso de fisuramiento (Cervenka y Pukl, 1992), donde se presenta la localización o concentración de la deformación. Después de la tercera etapa, la fisura está formada, por lo general, en una franja angosta de elementos en la zona de proceso. En concreto reforzado, el acero de refuerzo juega un papel importante en la localización de la deformación, ya que puede retardar o evitar que esta ocurra.

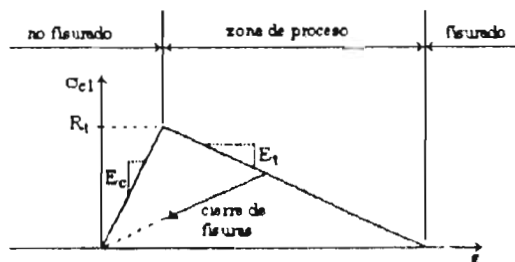


Fig. 4.9. Etapas de la formación de la fisura.

El modelo distribuido de fisuras no es idéntico a las fisuras discretas reales que ocurren en el plano del concreto que se analiza. Sin embargo, en muchas situaciones el comportamiento real presenta bandas de fisuramiento finamente espaciadas (e.g. en muros con mallas de acero de refuerzo) las cuales son muy similares al modelo distribuido (Peckl Instruments, 1994).

4.2.3. Modelos de fisura distribuida.

En el programa de análisis no lineal, se adopta la modelación de fisura distribuida para la simulación del fisuramiento del concreto. Dentro de este concepto, se tiene la opción de elegir entre el modelo de fisura distribuida fija y el modelo fisura distribuida girada. En ambos modelos, una fisura se forma cuando el esfuerzo principal sobrepasa la resistencia a tensión del concreto. En el concepto de fisura distribuida, la aparición de una fisura en un elemento finito significa que el modelo del material se cambia de isotrópico a ortotrópico.

4.2.3.1. Modelo de fisura distribuida fija.

La dirección de una fisura se rige por la dirección del esfuerzo principal en el momento de su iniciación. Durante el proceso de carga, esta dirección se fija y representa los ejes de ortotropía del material.

Las direcciones principales de esfuerzo y de deformación, debido a la isotropía en el la matriz de materiales del concreto, coinciden en su estado no fisurado. Una vez iniciado el proceso de

fisuramiento, el concepto de ortotropía se introduce en la matriz de materiales del concreto. El eje débil de ortotropía, m_1 , es perpendicular a la dirección de la fisura, mientras que el eje fuerte, m_2 , es paralelo a la fisura (Fig. 4.10). En general, los ejes de la deformación principal, ϵ_1, ϵ_2 , pueden rotar y no necesariamente coinciden con los ejes de ortotropía m_1, m_2 . Esto produce la aparición en el concreto fisurado de las tres componentes de esfuerzo, σ_{c1} , σ_{c2} y τ . Los esfuerzos σ_{c1} y σ_{c2} son normales a los planos de fisura y no son necesariamente, los esfuerzos principales.

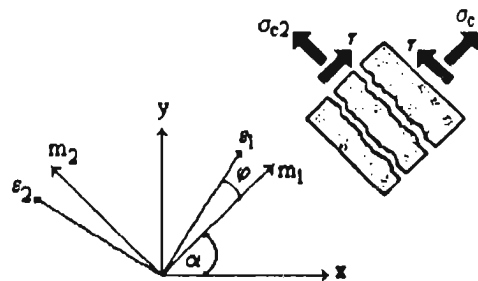


Fig. 4.10. Modelo de fisura fija, estado de esfuerzos y deformaciones.

4.2.3.2. Modelo de fisura distribuida girada.

La dirección principal de esfuerzo coincide con la dirección principal de deformación. Por esto, no se presentan deformaciones de cortante en el plano de fisura y solo se definen las componentes del esfuerzo normal a la fisura (Fig. 4.11).

Si los ejes principales de deformación giran durante el proceso de carga, la dirección de las fisuras girarán también. Para asegurar la coaxialidad de los ejes principales de deformación con los ejes del material, el módulo tangente de cortante G' se calcula como (Crisfield, M. A. y Wills, J., 1989)

$$G' = \frac{\sigma_{c1} - \sigma_{c2}}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \quad (4.12)$$

4.2.4. Rigidez en cortante en el concreto fisurado

Para el modelo de fisura distribuida fija, el módulo de cortante se reduce después de haberse iniciado el proceso de fisuramiento, de acuerdo con una relación obtenida por Kolmar (1985). El módulo de cortante disminuye con el aumento de la deformación normal a la fisura (Fig. 4.12). Esto conduce a la reducción de la rigidez de cortante debido a la apertura de la fisura, es decir

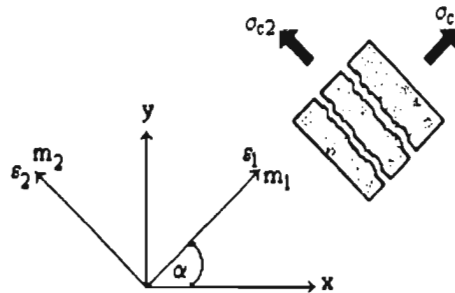


Fig. 4.11. Modelo de fisura girada, estado de esfuerzos y deformaciones.

$$G = r_g G_c \quad (4.13 a)$$

donde G_c es el módulo de cortante inicial del concreto antes del agrietamiento ($G_c = E_c / 2(1 + \nu)$). G es el módulo de cortante reducido y r_g es el factor de reducción por cortante dado por

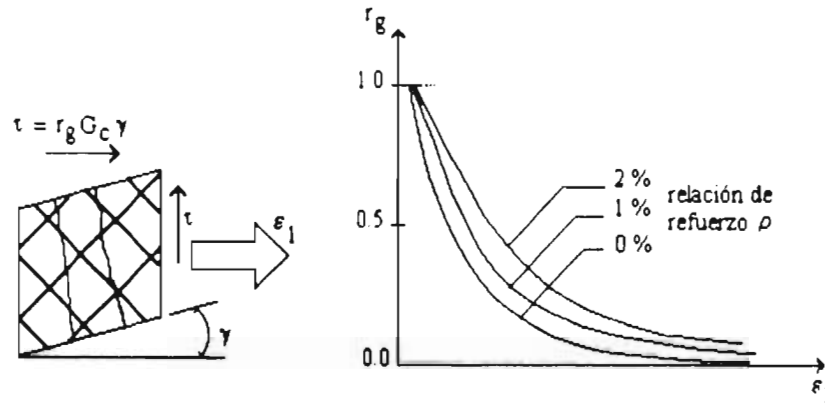


Fig. 4.12. Reducción del módulo de cortante.

$$r_g = \frac{\ln\left(\frac{\epsilon_u}{c_1}\right)}{c_2} \quad (4.13 \text{ b})$$

$$c_1 = 7 + 333(\rho - 0.005) \quad (4.13 \text{ c})$$

$$c_2 = 10 - 167(\rho - 0.005) \quad (4.13 \text{ d})$$

donde ϵ_u es la deformación normal a la dirección de la fisura, c_1 y c_2 son constantes que dependen de la cuantía de acero (Kolmar, 1985) y ρ es la cuantía de acero transversal. Las ecs. 4.13 c y 4.13 d, son válidas para $0 < \rho < 0.02$.

4.2.5. Resistencia a la compresión del concreto fisurado.

La reducción de la resistencia a compresión del concreto fisurado, en la dirección paralela a las fisuras, se realiza de acuerdo a las relaciones propuestas por Vecchio y Collins (1986). Para la

reducción de la resistencia a la compresión, se emplea una función en la que el usuario tiene mayor control en el análisis de los elementos estructurales.

La ec. 4.14 tiene la forma de una función exponencial (Fig. 4.13), en la que se miden el nivel de deformación del concreto fisurado. Los parámetros de esta expresión, empleadas en el modelo del programa de análisis no lineal, se obtuvieron de pruebas realizadas por Kollegger y Mehlhorn (1988), siendo estas:

$$R_c^{ef} = r_c R_c, \quad r_c = c + (1 - c) \exp(-128 \epsilon_u)^2 \quad (4.14)$$

donde ϵ_u es la deformación normal a la fisura. En esta ecuación, cuando ϵ_u es igual a cero, la resistencia no se reduce y para grandes deformaciones se aproxima asintóticamente a un valor mínimo.

La constante c (ec. 4.14), representa la reducción máxima y el producto cR_c es la resistencia mínima bajo grandes deformaciones transversales. Si $c=1.0$, entonces no se reduce la resistencia a compresión del concreto fisurado.

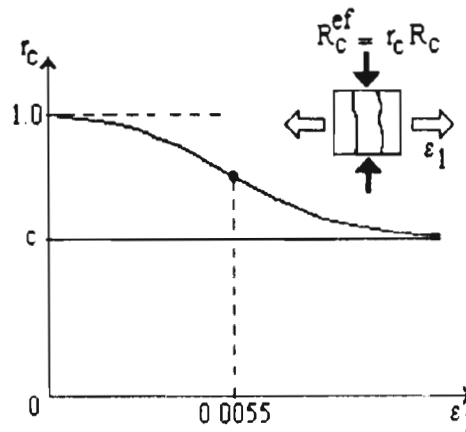


Fig. 4.13. Reducción de la resistencia a compresión del concreto fisurado.

4 2.6. Rigidez en tensión del concreto fisurado.

La rigidez en tensión en el modelo distribuido de concreto reforzado es un artificio propuesto por Cervenka y Pukl (1992) para introducir las características de la fisuración discreta dentro del modelo distribuido de fisuramiento, es decir, en la fisuración discreta las fisuras se separan en distancias fijas y el concreto, entre éstas, interactúa con las varillas de acero embebidas. Los esfuerzos se transmiten del acero de refuerzo al concreto por medio de los esfuerzos de adherencia, que se supone no presentan falla. El esfuerzo en una varilla es más alto en las fisuras, donde se transmite la fuerza total en tensión y se reduce en la dirección de la cara de la fisura. La distribución de esfuerzos en la varilla embebida en el concreto, con fisuras espaciadas de manera regular, se parece a una función periódica con picos máximos en las fisuras y mínimos entre las fisuras. El comportamiento descrito anteriormente se emplea para construir el modelo de rigidez en tensión en el modelo de fisura distribuida, donde las fisuras son finamente espaciadas y no se puede distinguir entre el concreto fisurado y no fisurado.

Partiendo de asumir que el esfuerzo de la rigidez en tensión, σ_{cs} , es el promedio del esfuerzo de tensión del concreto, el cual interactúa con el esfuerzo de tensión del acero de refuerzo sin tomar en cuenta la orientación de la fisura. El esfuerzo σ_{cs} actúa solamente en presencia del acero de refuerzo y en la misma dirección que los esfuerzos de éste. El esfuerzo de tensión σ_{ct} , debido al ablandamiento por deformación, actúa paralelo al plano de las fisuras.

La función para la rigidez a tensión, se basa en la propuesta del código europeo de construcción para concreto reforzado, CEB Model Code 90 (1990). Esta función tiene una forma tetralineal (Fig. 4.14). Cuando se abren las fisuras y el comportamiento del acero es elástico, el esfuerzo σ_{cs} es constante y en las partes de transición, durante la formación y cierre de fisuras y la fluencia del

acero de refuerzo, la función se considera lineal. Los puntos de transición se controlan con las deformaciones, el punto de inicio, ϵ_{u1} está dado por el inicio del fisuramiento del elemento. En el punto en que termina la primera parte lineal, $\epsilon_{u2} = \epsilon_0$, se libera completamente el esfuerzo de tensión del concreto. En el punto donde la parte de rigidez constante termina, ϵ_{u3} , se alcanza el esfuerzo de fluencia y el efecto del esfuerzo de rigidez en tensión desaparece en ϵ_{u4} , cuando se alcanza la deformación a la fluencia del acero de refuerzo.

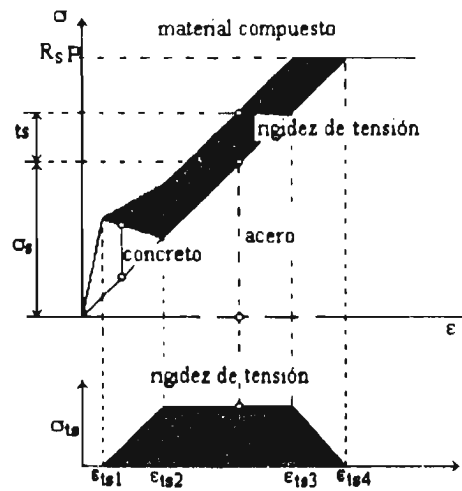


Fig. 4.14. Efecto de la rigidez en tensión.

El efecto de la rigidez en tensión se incluye en la rigidez del refuerzo. El módulo de rigidez en tensión E_{ui} se calcula como

$$E_{ui} = \frac{\sigma_{ui}}{\rho_i \epsilon_i} \quad (4.15)$$

donde i significa que es para el i -ésimo refuerzo distribuido, ϵ_i es la deformación en el refuerzo y ρ_i es la cuantía de acero de refuerzo. El módulo de rigidez en tensión representa la contribución del concreto en la rigidez del i -ésimo refuerzo y se adiciona al módulo de refuerzo elástico.

La rigidez en tensión se asocia solo con el refuerzo distribuido. Cada elemento con este tipo de refuerzo tiene su propio esfuerzo de rigidez en tensión. En el caso de refuerzo por medio de varillas (barras discretas), no se toma en cuenta dicho efecto.

4.2.7. Relación esfuerzo deformación del acero de refuerzo.

Como se mencionó previamente, la relación esfuerzo-deformación del acero en SBETA se considera bilineal (Fig. 4.15). En este modelo, en la parte inicial elástica se tiene el módulo de elasticidad del acero, E_s . La segunda línea representa la plasticidad del acero con endurecimiento a la deformación y esta rama tiene un módulo de endurecimiento, E_{sh} . En caso de plasticidad perfecta, se considera $E_{sh} = 0$.

El modelo de distribución de esfuerzos, para el refuerzo distribuido en el modelo de fisura distribuida, se obtiene de un modelo de fisura simplificado (Fig. 4.16a). Esto permite que se definan los esfuerzos del refuerzo entre las fisuras y en la fisura. Se define para el modelo de refuerzo distribuido, la separación de las varillas de refuerzo, s , la cual se considera muy pequeña (Cervenka y Pukl, 1992) (Fig. 4.16b).

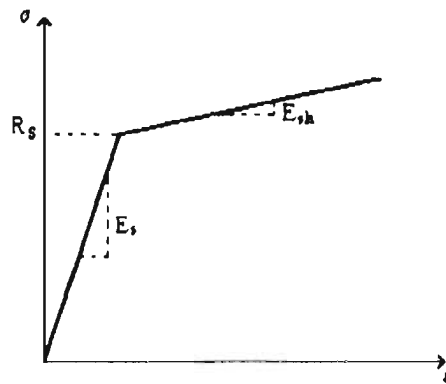


Fig. 4.15. Diagrama esfuerzo-deformación del acero.

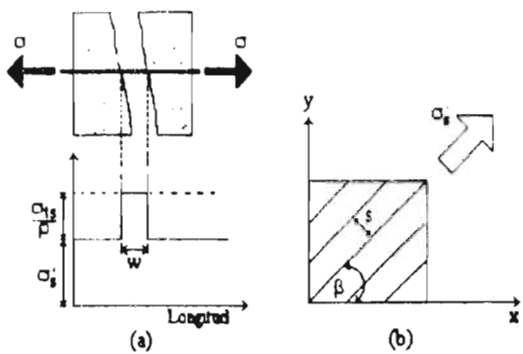


Fig. 4.16. Modelos del refuerzo distribuido.

4.2.8. Matrices de propiedades de los materiales.

La matriz del material para el concreto no agrietado, en un estado de esfuerzo plano, tiene la forma de una matriz elástica de un material isotrópico. Es decir, en coordenadas globales:

$$D_c = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

donde E es el módulo de elasticidad del concreto, obtenido de una relación uniaxial equivalente de esfuerzo-deformación. La relación de Poisson se considera constante y la especifica el usuario del programa de análisis.

Para el concreto fisurado, la matriz de rigideces tiene la forma de una matriz para un material elástico y ortotrópico. Esta matriz esta formulada con base en las coordenadas del sistema local, m_1 y m_2 (Figs. 4.10 y 4.11), en la cual coincide con la dirección de la fisura. La dirección 1 es

perpendicular a la fisura y la dirección 2 es paralela con la dirección de la fisura. La definición de las constantes elásticas para un material ortotrópico en estado de esfuerzo plano, se obtiene de la siguiente relación de flexibilidades:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau \end{Bmatrix} \quad (4.17 \text{ a})$$

La matriz de flexibilidades de la ec. 4.17, es la inversa de la matriz de rigideces local D_c^L . De la ec. 4.17, solo hay tres constantes independientes, E_1 , E_2 y ν_{21} . Se asume que $\nu_{21} = \nu$, donde ν es el módulo de Poisson para el concreto no fisurado. Así, de una relación de simetría se obtiene:

$$\nu_{12} = \frac{E_1}{E_2} \nu \quad (4.17 \text{ b})$$

La matriz de rigideces del material, D_c^L en las coordenadas locales de la dirección de la fisura, para un material ortotrópico, se escribe como:

$$D_c^L = E_1 \left(1 - \frac{E_1}{E_2} \nu^2 \right) \begin{bmatrix} \frac{E_1}{E_2} & \nu \frac{E_1}{E_2} & 0 \\ \nu \frac{E_1}{E_2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (4.18 \text{ a})$$

donde E_2 debe ser diferente de cero.

La matriz D_c^L se transforma a un sistema de coordenadas globales, empleando la matriz de transformación T_c (ec. 4.3c).

$$D_c = T_c^T D_c^L T_c \quad (4.18 \text{ b})$$

La matriz de propiedades del acero para el i -ésimo refuerzo distribuido, D_{si} , esta dada por:

$$D_s = \sum_{i=1}^n D_{s,i} \quad (4.18 c)$$

$$D_{s,i} = \rho_i E_{s,i} \begin{bmatrix} \cos(\beta_i)^4 & \cos(\beta_i)^2 \sin(\beta_i)^2 & \cos(\beta_i)^3 \sin(\beta_i) \\ \cos(\beta_i)^2 \sin(\beta_i)^2 & \sin(\beta_i)^4 & \cos(\beta_i) \sin(\beta_i)^3 \\ \cos(\beta_i)^3 \sin(\beta_i) & \cos(\beta_i) \sin(\beta_i)^3 & \cos(\beta_i)^2 \sin(\beta_i)^2 \end{bmatrix} \quad (4.18 d)$$

donde β_i es el ángulo formado por el eje global x y la i -ésima dirección de refuerzo (Fig. 4.16 b), $E_{s,i}$ es el módulo de elasticidad del i -ésimo refuerzo y D_s representa el refuerzo distribuido total del elemento.

4.2.9. Deformación uniaxial equivalente.

El comportamiento no lineal del concreto, esta regido por los esfuerzos, en las direcciones principales, σ_{c1} y σ_{c2} . Para la elasticidad no lineal, se emplea el concepto de deformación uniaxial equivalente, ϵ_{eq} . Esto representa la deformación debida a la componente de esfuerzo en consideración sin tomar en cuenta el efecto de Poisson de los otros esfuerzos. La deformación uniaxial equivalente se define como:

$$\epsilon_{eq} = \frac{\sigma_{c1}}{E_c^s} \quad (4.19)$$

donde σ_{c1} es el esfuerzo en la dirección principal i , E_c^s es el módulo secante del material en el eje principal (el módulo secante se emplea en la matriz de rigideces secante para calcular los esfuerzos a partir de deformaciones), e $i = 1, 2$ es el número de dirección principal de esfuerzos. Para el concreto fisurado y el modelo de fisura distribuida fija, i denota los ejes locales del material y no los ejes principales.

4.2.10. Análisis de esfuerzos.

Los esfuerzos en el concreto se obtienen empleando la matriz de rigidez secante como:

$$s_c = D_c^s e \quad (4.20)$$

donde D_c^s es la matriz de secante del material para el concreto fisurado o no fisurado, dependiendo del estado del material y e es el vector de deformaciones. Las componentes de esfuerzo se calculan, ya sea en coordenadas globales o en coordenadas locales, es decir, se calculan los esfuerzos principales en el concreto no fisurado y los esfuerzos en los planos de fisura.

El esfuerzo del acero de refuerzo y el esfuerzo de la rigidez en tensión asociado (para el caso de refuerzo distribuido) se calculan directamente de la deformación en la dirección del refuerzo.

4.2.11. Parámetros del modelo constitutivo.

Los parámetros de los materiales deben ser identificados previamente por el usuario. Para el concreto, en el caso de parámetros no conocidos, el programa SBETA los genera automáticamente en función de la resistencia del concreto R_{cu} . Las fórmulas empleadas en estos parámetros se tomaron del código europeo CEB-FIP Model Code 90 (1990) y se presentan en la tabla 4.2.

Tabla 4.2. Parámetros involucrados en el modelo constitutivo de SBETA.

Parámetro	Ecuación
Resistencia del cilindro de concreto a compresión	$R_c = -0.85R_{cu}$
Resistencia a tensión	$R_t = 0.24R_{cu}^{\frac{2}{3}}$
Módulo elástico inicial	$E_c = (6000 - 15.5R_{cu})\sqrt{R_{cu}}$
Módulo de Poisson	$\nu = 0.2$
Módulo de ablandamiento en compresión	$E_d = -0.125E_c$
Módulo de ablandamiento en tensión	$E_t = -0.25E_c$
Coefficiente de reducción de la resistencia a compresión en el concreto fisurado	$c = 0.2$
Esfuerzo de rigidez a tensión	$\sigma_u = 0.4R_t$

4.3. Elementos Finitos.

4.3.1. Elemento finito cuadrilátero.

El elemento finito cuadrilátero empleado en este programa de análisis no lineal, se obtiene a partir de un elemento finito triangular de 6 nudos. La posición de cualquier punto interno P en este elemento triangular, se define a partir de las coordenadas naturales triangulares L_i , empleando subáreas A_i , comprendidas en el punto P y dos puntos de esquina y el área total A del triángulo (Fig. 4.17).

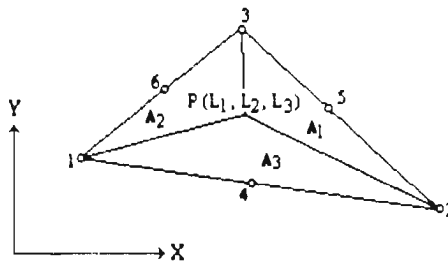


Fig. 4.17. Elemento finito triangular de seis nudos.

$$L_1 = \frac{A_1}{A}, \quad L_2 = \frac{A_2}{A}, \quad L_3 = \frac{A_3}{A} \quad (4.21 \text{ a})$$

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (4.21 \text{ b})$$

Las componentes de desplazamiento $u(L_i)$ y $v(L_i)$, se escriben en términos de las coordenadas naturales L_i y del vector de desplazamientos nodales:

$$u(L_i) = N_i u \quad (4.21 \text{ c})$$

$$v(L_i) = N_i v \quad (4.21 \text{ d})$$

Los vectores de desplazamiento u y v contienen seis componentes de desplazamientos nodales y N_i contiene las funciones de forma de un elemento triangular de seis nudos (Zienkiewicz y Taylor, 1994). Las funciones de forma del elemento triangular de 6 nudos están dadas por:

Para nudos de extremo:

$$N_1 = (2L_1 - 1)L_1, \quad N_2 = (2L_2 - 1)L_2, \quad N_3 = (2L_3 - 1)L_3 \quad (4.21 \text{ e})$$

Para nudos internos:

$$N_4 = 4L_1L_2, \quad N_5 = 4L_2L_3, \quad N_6 = 4L_1L_3 \quad (4.21 \text{ f})$$

Para construir la matriz de rigideces del elemento, se sigue el procedimiento general de elementos finitos y se obtiene la siguiente expresión:

$$K = \int_V B^T D B dV \quad (4.21 g)$$

donde **B** es la matriz que relaciona las deformaciones con los desplazamientos locales. **D** es la matriz de propiedades del material y dV indica que la integral es en todo el volumen del material.

El elemento finito cuadrilátero que se emplea en el programa de análisis no lineal, se compone de dos elementos triangulares de cuatro nudos (Fig. 4.18). Los grados de libertad en un nudo son los desplazamientos vertical y horizontal (Fig. 4.18 b). El elemento triangular de 4 nudos se obtiene del elemento triangular de 6 nudos, imponiendo restricciones cinemáticas en dos nudos internos y sus grados de libertad se condensan hacia los nudos extremos.

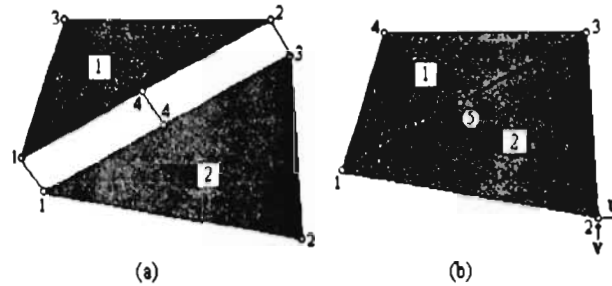


Fig. 4.18. Elemento finito cuadrilátero que se emplea en el programa SBETA.

La subdivisión de los elementos cuadrilátero en elementos triangulares se hace de manera óptima y su adecuación se realiza de manera automática dentro del programa de análisis. Los ejemplos de la subdivisión se ilustran en la Fig. 4.19. Debido a esta técnica de subdivisión, se aceptan formas cóncavas del elemento cuadrilátero (Fig. 4.19 c).

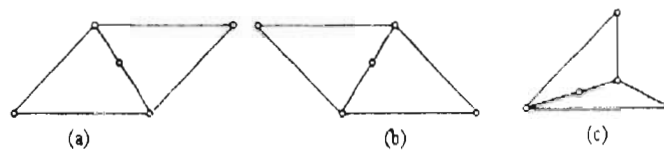


Fig. 4.19. Subdivisión del elemento cuadrilátero.

4.3.2. Elemento finito barra para el acero de refuerzo.

El elemento barra representa la varilla de acero de refuerzo que pasa a través del elemento cuadrilátero (Fig. 4.20). El elemento barra tiene solo rigidez axial y esta en un estado uniaxial de esfuerzos. Los desplazamientos de extremo de la barra son compatibles con los desplazamientos en la frontera del elemento cuadrilátero, por considerar adherencia perfecta.

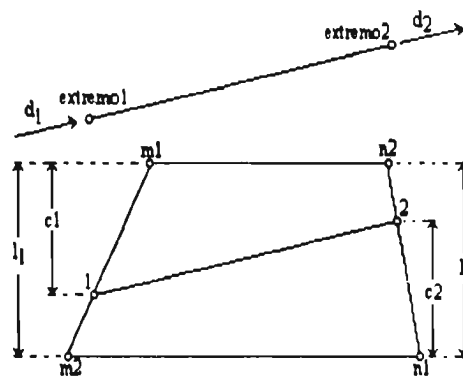


Fig. 4.20. Elemento finito barra.

La ecuación de rigidez del elemento barra en términos de su rigidez axial y de sus desplazamientos en el extremo es:

$$P = K_b^t d \quad (4.22 a)$$

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \quad (4.22 b)$$

donde E es el módulo de elasticidad de la varilla de acero, A es el área de la sección transversal, L es la longitud de la varilla, p_1 y p_2 son las fuerzas en los extremos de la varilla y d_1 y d_2 son los

desplazamientos axiales en los extremos K_b^L es la matriz de rigideces de la varilla cargada axialmente. Esta matriz puede transformarse en los desplazamientos nodales del cuadrilátero como:

$$K_b = T_b^T T_a^T K_b^L T_a T_b \quad (4.22 c)$$

Las filas impares de K_b corresponden a los desplazamientos horizontales y las filas pares a los desplazamientos verticales. La matriz de transformación para la descomposición de desplazamientos de coordenadas locales a coordenadas globales es:

$$T_a = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad (4.23 a)$$

donde α es la inclinación de la varilla con respecto del eje global x.

La matriz de transformación entre los desplazamientos nodales del elemento barra y el elemento cuadrilátero es:

$$T_b = \begin{matrix} & m_2 & & n_1 & & n_2 & & m_1 \\ \begin{bmatrix} 1 - \frac{c_1}{l_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_1}{l_1} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{c_1}{l_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_1}{l_1} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{c_2}{l_2} & 0 & \frac{c_2}{l_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{c_2}{l_2} & 0 & \frac{c_2}{l_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{extremo1} \\ \\ \text{extremo2} \end{matrix} \end{matrix} \quad (4.23 b)$$

La posición de los términos diferentes de cero en esta matriz depende de la localización de los puntos extremo de la varilla en la frontera del elemento cuadrilátero. El extremo 1 de la varilla se localiza en el lado m_1, m_2 y el extremo 2 esta en el lado n_1, n_2 (Fig. 4.20).

Para calcular las fuerzas internas en el elemento barra, los desplazamientos en los extremos se calculan como:

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = T_a T_b u \quad (4.24)$$

donde u es el vector de desplazamientos del elemento cuadrilátero. Como la varilla se comporta en un estado uniaxial de esfuerzos, los esfuerzos σ_b y las fuerzas internas R_b se calculan como:

$$\sigma_b = E_s^* \frac{d_2 - d_1}{L}, \quad R_b = A \sigma_b \quad (4.25 a)$$

donde E_s^* es el módulo secante del refuerzo y A es el área de la varilla. Para la evaluación del equilibrio de las fuerzas resistentes en los nudos de la barra, estas se transforman a las fuerzas nodales del elemento cuadrilátero como:

$$R_b = T_b^T T_a^T \begin{Bmatrix} -R_b \\ R_b \end{Bmatrix} \quad (4.25 b)$$

Las fuerzas resistentes en la barra R_b se adicionan a las fuerzas resistentes del elemento cuadrilátero y se calcula el equilibrio en el elemento.

4.4. Técnicas de Solución.

Las técnicas de solución no lineal de las ecuaciones de equilibrio empleadas en SBETA son el método de Newton Raphson y el método de Longitud de Arco.

4.4.1. Método de Newton Raphson.

En la solución de un problema no lineal, la carga se aplica en pequeños pasos. El vector de carga X_j en el j -ésimo paso de carga está dado por

$$X_j = X_{j-1} + \Delta X_j \quad (4.26)$$

donde ΔX_j es el incremento de carga aplicado en el j -ésimo paso. La solución no lineal se aproxima por el equilibrio lineal basado en la matriz de rigidez tangente. Debido a la no linealidad, las fuerzas de desbalanceo se detectan y se aplican para corregir la respuesta de desplazamiento. La solución iterativa basada en el método de Newton Raphson se ilustra en la Fig. 4.21.

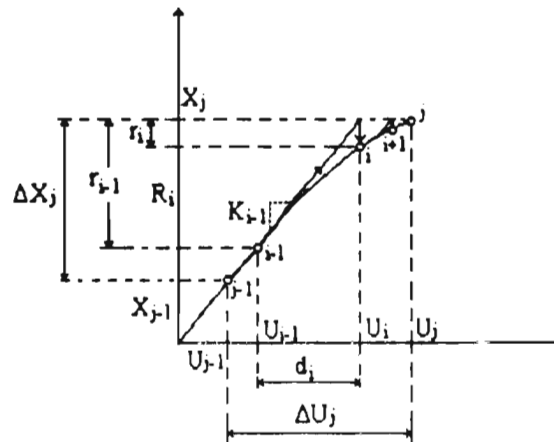


Fig. 4.21. Esquema de la iteración por el método de Newton Raphson

De la Fig. 4.21, se pueden describir las siguientes ecuaciones:

$$X_j - R_i = r_i \quad (4.27 a)$$

$$K_{i-1} d_i = r_{i-1} \quad (4.27 b)$$

$$U_i = U_{i-1} + d_i \quad (4.27 c)$$

En la primera iteración del paso de carga, r_i (ec. 4.27 a) es el incremento de carga ΔX_j . En las ecuaciones, i se refiere a la i -ésima iteración. De las ecs. 4.27 a, 4.27 b y 4.27 c:

R_i es el vector de fuerzas resistentes, r_i es el vector de fuerzas de desbalanceo. K_{i-1} es la matriz de rigidez tangente de la iteración anterior. d_i es el vector de incremento de desplazamientos. U_i es el vector de desplazamientos total.

El incremento de carga se aplica en el primer ciclo de iteración y el vector X_j no cambia durante toda la iteración. El incremento de desplazamiento ΔU_j en el paso de carga j correspondiente al incremento de carga ΔX_j es la suma de todos los incrementos de desplazamientos d_i de las iteraciones en el paso de carga j :

$$\Delta U_j = \sum_{i=1}^n d_i \quad (4.27 d)$$

donde n es el número de iteraciones en el paso de carga. La iteración se repite hasta que las fuerzas de desbalanceo r_i , son suficientemente pequeñas. Este método permite también obtener respuestas por desplazamientos prescritos; sin embargo, el prescribir más de una componente de desplazamiento puede imponer restricciones cinemáticas no deseadas o difíciles de satisfacer.

4.4.2. Método de Longitud de Arco.

Este método permite la iteración tanto para cargas como para desplazamientos y provee soluciones para la respuesta de ablandamiento en las ramas descendentes del diagrama carga desplazamiento. El ajuste de carga en este método se logra imponiendo condiciones adicionales en los vectores de carga y desplazamiento. Se impone una restricción en algún desplazamiento nodal y se restringe la norma del vector de desplazamientos. El procedimiento se ilustra en la Fig. 4.22.

De la Fig. 4.22, se resumen las siguientes relaciones:

$$\mathbf{K}_{i-1} \mathbf{d}_q = \mathbf{q} \quad (4.28 \text{ a})$$

$$\mathbf{K}_{i-1} \mathbf{d}_r = \mathbf{r}_{i-1} \quad (4.28 \text{ b})$$

$$\|\mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{d}_r - \lambda_i \mathbf{d}_q\| = L \quad (4.28 \text{ c})$$

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{d}_r - \lambda_i \mathbf{d}_q \quad (4.28 \text{ d})$$

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{d}_i \quad (4.28 \text{ e})$$

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_{i-1} - \lambda_i \mathbf{q} \quad (4.28 \text{ f})$$

donde i se refiere a la iteración en turno; j al paso de carga en turno, de la ec. 4.28 c. L es la longitud de arco y el término de la izquierda es la norma del vector de incremento de desplazamientos en el paso de carga en turno. El vector de carga total se corrige durante las iteraciones para obtener la restricción de longitud de arco. De la ec. 4.28 a hasta la ec. 4.28 f: \mathbf{q} es el incremento de carga de referencia; \mathbf{r}_{i-1} es el vector de fuerzas de desbalanceo de la iteración previa; \mathbf{r}_i es el vector de fuerzas de desbalanceo de la iteración en turno; \mathbf{K}_{i-1} es la matriz de rigidez tangente de la iteración previa; \mathbf{d}_q

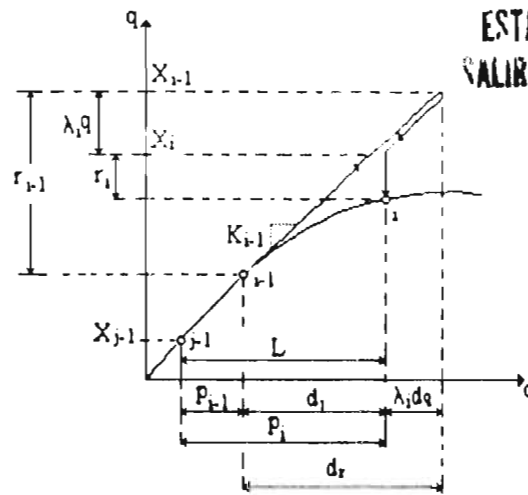


Fig. 4.27. Esquema del proceso iterativo por el método de Longitud de Arco

es el vector de desplazamiento debido a la carga de referencia; d_i es el vector de desplazamiento debido a las fuerzas de desbalanceo r_{i-1} ; d_i es el vector de desplazamiento ajustado de acuerdo con la longitud de arco; p_i es el vector de desplazamiento incremental acumulado con respecto al paso de carga de origen. En este procedimiento, los vectores de desplazamiento d_q y d_i se obtienen de la matriz K_{i-1} (ecs. 4.28 b y 4.28 c). El factor de escala λ_i se obtiene de una ecuación cuadrática y se emplea para ajustar los vectores de carga y de desplazamiento. La solución se corrige con λ_i para que al final de la iteración se obtenga nuevos vectores de carga X_i y de desplazamiento p_i . La norma del vector de desplazamiento p_i converge para la longitud L prescrita, mientras que la carga se ajusta y se restaura el equilibrio. Si la solución converge, el escalar λ_i y los vectores r_i, d_i convergen a cero.

Capítulo 5

Modelos Estudiados y Presentación de Resultados

5.1. Introducción.

Con la finalidad de evaluar el potencial de aplicación de los modelos de análisis no lineal en el comportamiento de elementos de concreto reforzado, para emplearse como herramientas de apoyo en la actividad experimental, haciendo estudios paramétricos analíticos, se eligieron modelos de elementos viga sometidos a fuerzas elevadas de cortante (Ninyuki et al, 1989) y modelos de elementos viga-columna sujetos a fuerzas elevadas de cortante y de carga axial (Chyou y Noguchi, 1990).

Cabe señalar que no fue común hallar en la literatura pruebas de especímenes de concreto reforzado sometidos a cargas monotónicas crecientes, siendo este uno de los problemas enfrentados en este trabajo, ya que estos modelos de análisis y en particular el programa de análisis no lineal, sólo puede simular los efectos de especímenes sometidos a cargas cuasi estáticas.

5.2. Modelos de Elementos Viga.

En este modelo se revisa la resistencia a cortante de trabes de concreto reforzado en función de la cuantía y de la resistencia del refuerzo transversal. Con el fin de calibrar el programa en estudio, se eligieron 7 modelos distintos. En la tabla 5.1 se presenta un resumen con las características de

los modelos estudiados. En la Fig. 5.1 se ilustra las dimensiones y distribución del acero longitudinal del modelo general.

El tipo de acero de refuerzo longitudinal para todos los modelos fue el mismo, reforzado con barras de acero corrugadas con un diámetro de 23 mm, teniendo una resistencia a la fluencia de 9500 kg/cm^2 . La relación a/D para todos los modelos fue de 2.0, donde a es el claro de cortante y D el peralte de la viga.

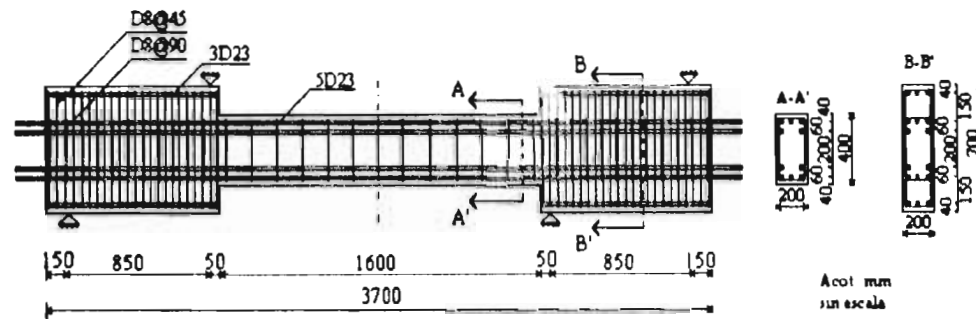


Fig. 5.1. Distribución del acero de refuerzo del modelo.

Tabla 5.1. Características del acero de refuerzo transversal

Identificación del modelo	Resistencia a la fluencia del acero transversal (kg/cm^2)	Módulo de Young ($\times 10^6 \text{ kg/cm}^2$)	Cuántía de acero (%)	Diámetro de estribos (mm)	Separación de estribos (cm)
B30-046	3560	1.91	0.455	8.0	11.0
B30-121	2910	1.79	1.208	10.0	6.5
B60-030	5020	1.93	0.295	6.0	9.5
B60-059	5650	2.03	0.588	8.0	8.5
B80-019	8830	1.91	0.193	6	14.5
B80-046	9190	1.90	0.455	8.0	11.0
B80-059	9190	1.92	0.588	8.0	8.5

Los modelos fueron sometidos a cargas monotónicas crecientes mediante un aparato de carga con capacidad de 200 ton, hasta alcanzar la ruptura del espécimen. Este modelo se ilustra en la Fig 5.2.

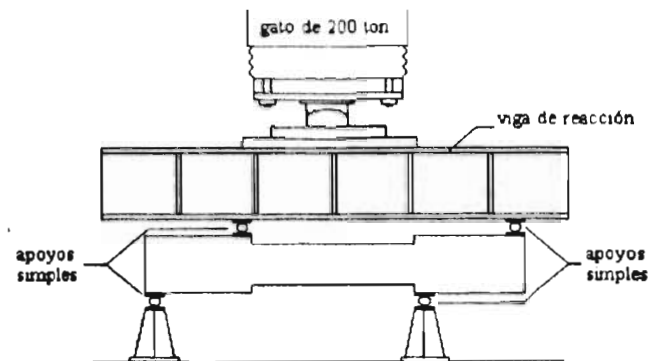


Fig. 5.2. Aparato de carga.

La resistencia del concreto a compresión para cada modelo estudiado se presenta en la tabla 5.2.

Los resultados experimentales obtenidos por Ninyuki et al, 1989 se resumen en la tabla 5.3. y se ilustran en la Fig. 5.3.

Tabla 5.2. Propiedades del concreto de cada modelo

Identificación	Resistencia a compresión (kg/cm ²)
B30-046	335
B30-121	329
B60-030	333
B60-059	336
B80-019	340
B80-046	343
B80-059	344

RESULTADOS EXPERIMENTALES
(NINYUKI ET AL. 1989)

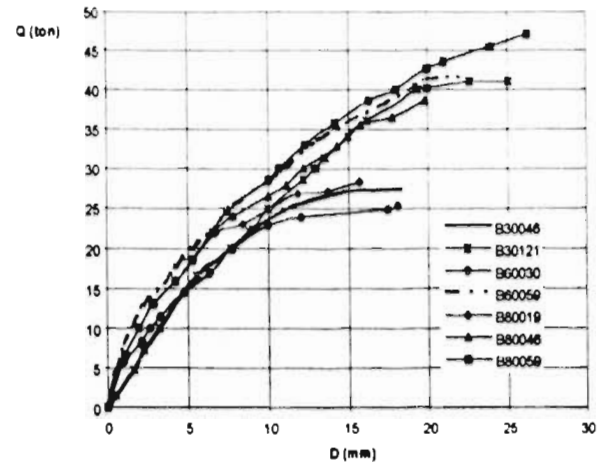


Fig. 5.3. Resultados experimentales en Vigas

Tabla 5.3. Resultados experimentales, resistencias máximas.

Identificación del modelo	Q máx (ton)	τ máx (kg/cm ²)	Modo de falla
B30-046	27.39	46.58	compresión por cortante
B30-121	41.10	69.90	compresión por cortante
B60-030	25.42	43.23	compresión por cortante
B60-059	41.85	71.17	compresión por cortante
B80-019	28.29	48.11	tensión por cortante
B80-046	38.50	65.48	tensión por cortante
B80-059	47.13	80.15	aplastamiento por cortante directo

5.3. Modelo de Elementos Viga Columna

En este modelo, se estudia el efecto de la carga axial en la resistencia por cortante de columnas. Se eligieron cuatro modelos, variando el nivel de carga axial y el nivel de carga por cortante actuantes sobre los especímenes. El acero de refuerzo longitudinal y transversal se mantiene constante para todos los casos (Fig. 5.4). Las características del concreto fue diferente para cada modelo. En la tablas 5.4 y 5.5 se presentan un resumen con las propiedades para cada modelo en estudio.

Los modelos fueron cargados de manera monotónica hasta alcanzar la falla de estos mediante el aparato de carga que se ilustra en la Fig. 5.5

El tipo de acero de refuerzo longitudinal para todos los modelos de columna fue el mismo, reforzado con barras de acero corrugadas con un diámetro de 13 mm, de alta resistencia con un esfuerzo de fluencia de 8790 kg/cm² (tabla 5.5). La relación a / D de todos los modelos fue de 1.5 (siendo, para este caso, $a = L / 2$, el claro de cortante, y D el peralte de la sección).

Los resultados experimentales obtenidos por Chyou y Noguchi, 1990, se resumen en la tabla 5.6. y se ilustran en la Fig. 5.6.

Tabla 5.4. Características del concreto de los modelos en estudio.

Identificación del modelo	Resistencia a la compresión, f'_c (kg/cm ²)	Módulo de elasticidad inicial, E_c (kg/cm ²)	Resistencia a la tensión, f_t (kg/cm ²)
C0032N	331	198000	29.3
C0232N	352	217000	33.7
C0432N	366	220000	28.3
C0632N	295	196000	24.5

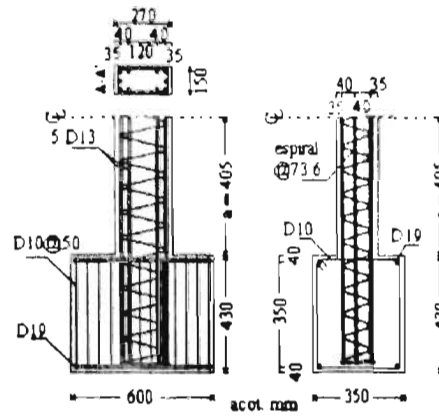


Fig. 5.4 Distribución del acero de refuerzo del modelo

Tabla 5.5. Características del acero de refuerzo de los modelos en estudio.

Tipo de acero	Módulo de elasticidad, E_s (kg/cm ²)	Resistencia a la fluencia, f_y (kg/cm ²)
D13 (acero corrugado)	1940000	8790
3.2 ϕ (estribos espiral)	2000000	6370

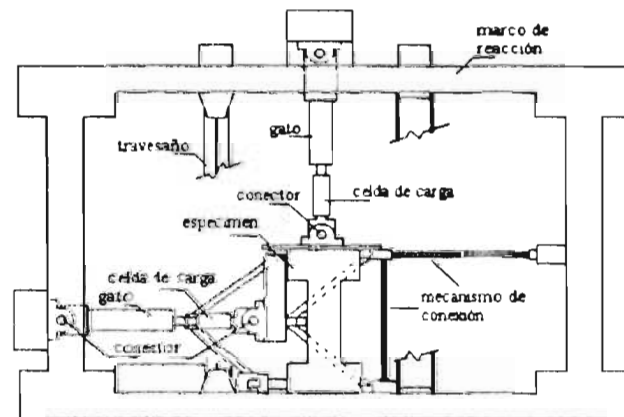


Fig. 5.5. Modelo del aparato de carga.

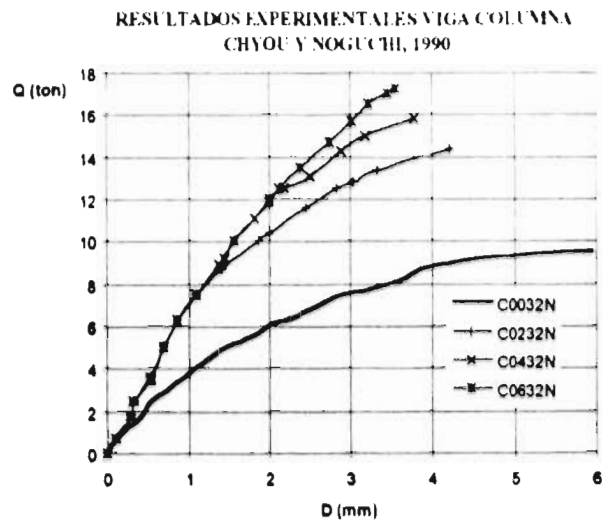


Fig. 5.6 Resultados experimentales en Viga Columna

Tabla 5.6 Resultados experimentales, resistencias máximas

Identificación del modelo	Carga axial (ton)	Q máx (ton)	τ máx (kg/cm ²)
C0032N	1.1	9.5	33
C0232N	29.2	14.3	50
C0432N	58.3	15.8	55
C0632N	87.5	17.2	60

5.4. Modelo en Elementos Finitos.

La malla de elementos finitos para los casos de vigas y de viga-columnas en estudio, consiste de 608 elementos cuadrilátero. Los nudos y los elementos cuadrilátero se enumeran de izquierda a

de derecha y de abajo hacia arriba, tal como lo recomienda el manual del usuario del programa de análisis no lineal. El acero de refuerzo por flexión se idealizó con elementos discretos barra y el acero de refuerzo transversal se simuló con el concepto de refuerzo distribuido sobre los modelos en estudio (Figs. 5.7 y 5.8). Con el fin de representar, lo más exacto posible, las condiciones de apoyos y de cargas que se presentan en los modelos experimentales (Figs. 5.2 y 5.5), se restringió cada modelo analítico y se aplicaron las cargas tal y como se ilustran en las Figs. 5.7 y 5.8. Para optimizar el ancho de banda en la solución del análisis no lineal, en el caso de elementos viga-columna, fue necesario el simular el modelo de elementos finitos de manera horizontal.

La simulación de la carga actuante sobre el modelo (Figs. 5.7 y 5.8), se aplicó de manera monótonica creciente, con incrementos del 10% en cada paso de carga, hasta alcanzar los valores máximos de fuerza de cortante y de fuerza normal (para el caso de viga-columna), sin llegar a la carga de falla para cada caso.

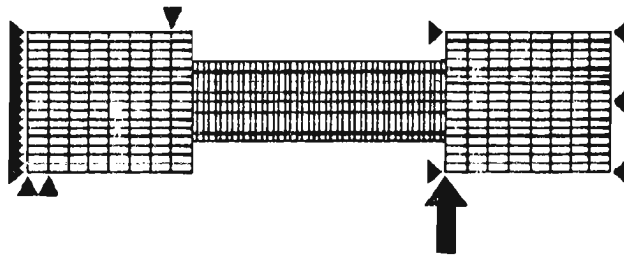


Fig. 5.7. Modelo de Elementos Finitos para el elemento viga.

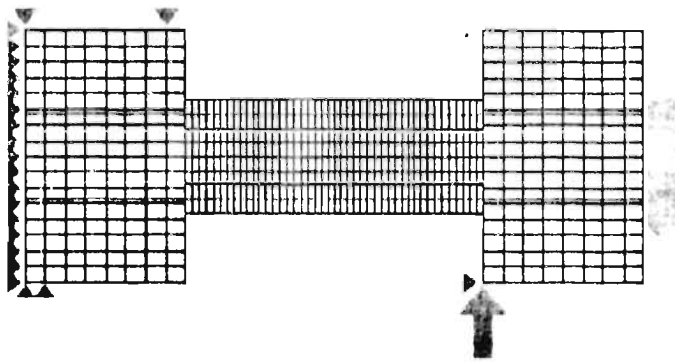


Fig. 5.8. Modelo de Elementos Finitos para el elemento viga-columna.

5.5. Presentación de resultados.

Se realizaron simulaciones numéricas para cada modelo estudiado con el fin de calibrar el modelo de análisis no lineal y los modelos de elementos finitos planteados para cada caso. El concreto se modeló, para cada análisis, como sigue:

- Las propiedades del concreto se tomaron de las pruebas experimentales.
- Para el comportamiento no lineal del concreto se emplearon los modelos de fisura distribuida fija y de fisura distribuida girada.
- El valor del módulo de Poisson fue de 0.2.
- Los factores que emplea el programa de análisis para la simulación numérica se tomaron de acuerdo con las recomendaciones que proporciona el manual del usuario del programa de análisis no lineal.

En la tabla 5.7, se presenta un resumen con los factores considerados en los análisis.

Tabla 5.7. Factores empleados por el programa de análisis no lineal, SBETA.

Factor de ablandamiento en compresión	c_d	-0.125
Factor de ablandamiento en tensión	c_t	-0.25
Factor de reducción de la resistencia en compresión	c	0.60
Factor de rigidez de tensión	c_{α}	0.40
Factor de retención de cortante	c_{β}	-1.0
Factor de interacción tensión-compresión	c_s	0.40
Energía de Fractura (se desconoce este valor)	G_f	1.0×10^{-6}

5.5.1. Análisis de resultados. Elemento viga.

En esta sección se presentan los resultados de las simulaciones numéricas obtenidos de los análisis con el programa de análisis no lineal, realizando un estudio comparativo y paramétrico con los resultados experimentales reales obtenidos por Ninyuki et al, 1989.

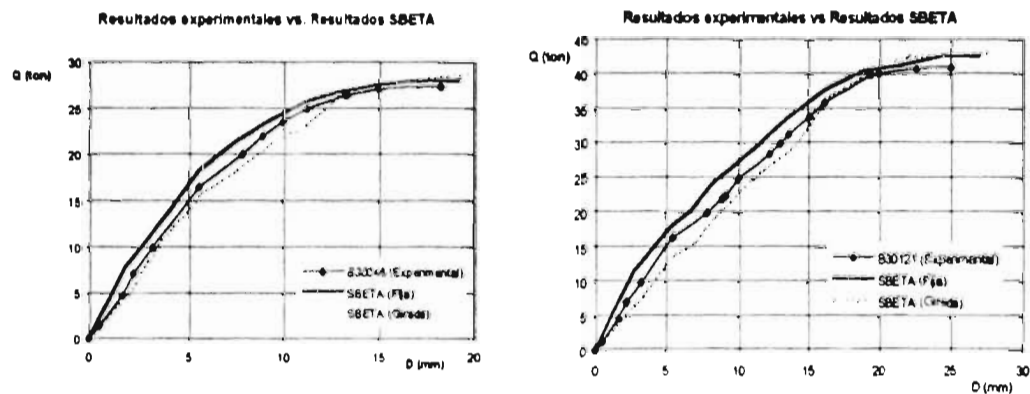


Fig. 5.9. Resultados experimentales vs. Resultados SBETA. Modelos B30046 y B30121.

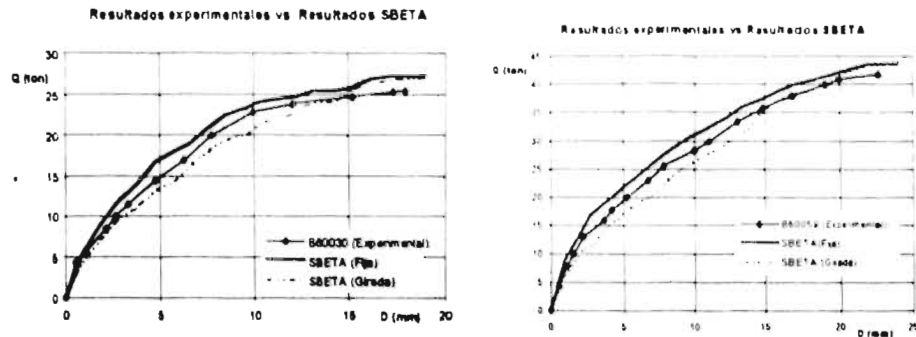


Fig. 5.10. Resultados experimentales vs. Resultados SBETA. Modelos B60030 y B60059.

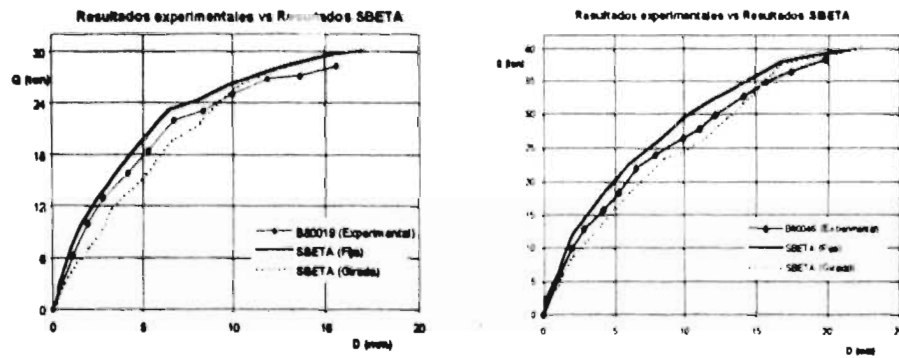


Fig. 5.11. Resultados experimentales vs. Resultados SBETA. Modelos B80019 y B80046.

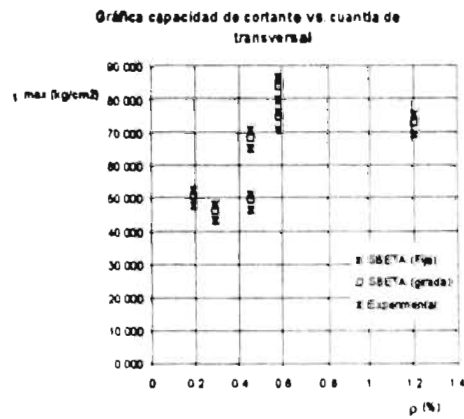


Fig. 5.12. Esfuerzos de cortante máximos vs. Cuantía de acero transversal (vigas).

En las Figs. 5.9 a 5.12, se aprecia que los resultados de las simulaciones con respecto a los resultados experimentales tienen un error, en promedio, de un 2.68%, lo cual es aceptable. Por otra parte, se encontró que los resultados obtenidos con el modelo de fisura distribuida fija presentan comportamientos más rígidos y resistentes que los del modelo de fisura distribuida girada. Esto se debe, como se dijo, al factor de retención de cortante que interviene en el modelo fijo. Con los resultados obtenidos con el modelo de fisura distribuida girada, se tiene una mejor aproximación a los resultados experimentales, para el modelo de fisura distribuida fija, se tiene un error promedio de 2.93%, para el modelo de fisura distribuida girada, se tiene un error promedio de 2.47%. Cuando se incrementa la cuantía y la resistencia en el acero transversal, se observa un incremento en la resistencia y la capacidad de deformación del elemento estructural. En la Fig. 5.12, se muestra la capacidad de resistencia a cortante en función de la cuantía de acero transversal, con los resultados experimentales y con los resultados de la simulación numérica, de la Fig. 5.3, se observa que al incrementar la cuantía de acero existe un incremento en la resistencia por cortante, sin embargo, el efecto de la resistencia a la fluencia del acero transversal es significativo, ya que cuando se tiene una resistencia mayor, la capacidad que tiene el elemento estructural es mayor, aún teniendo una cuantía de acero menor.

5.5.2. Análisis de resultados. Elemento viga columna.

Los modelos de elementos viga-columna (Chyou y Noguchi, 1990), se emplearon de igual manera para la calibración del modelo de análisis no lineal. Se comparan los resultados obtenidos de las simulaciones numéricas con los resultados experimentales reales, se presentan a continuación.

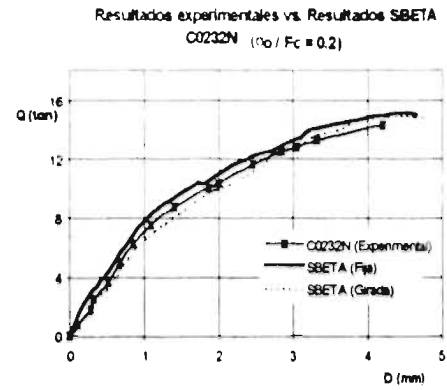
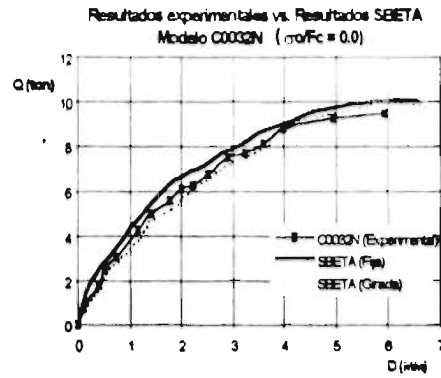


Fig. 5.13. Resultados experimentales vs. Resultados SBETA, modelos C0032N y C0232N.

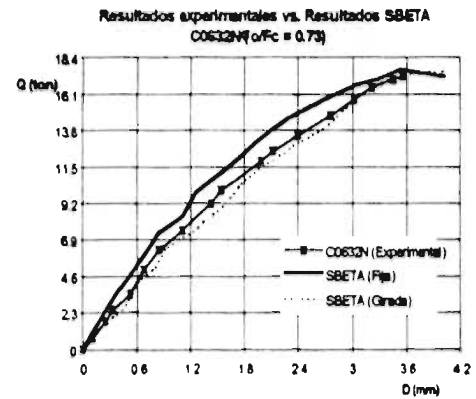
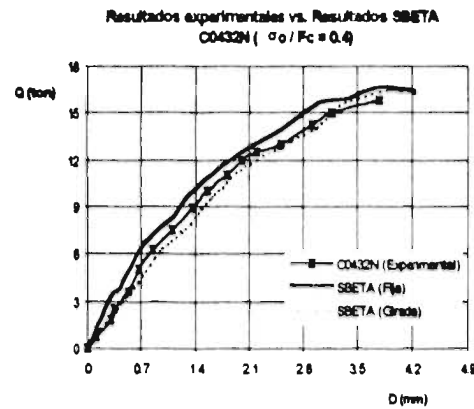


Fig. 5.14. Resultados experimentales vs. Resultados SBETA, modelos C0432N y C0632N.

En las figuras anteriores, y realizando un estudio estadístico de errores, se tiene que el porcentaje medio de error para el modelo de fisura distribuida fija, fue 3.18% y para el modelo de fisura distribuida girada, se tiene un error promedio del 2.52%, con respecto a los resultados experimentales reales.

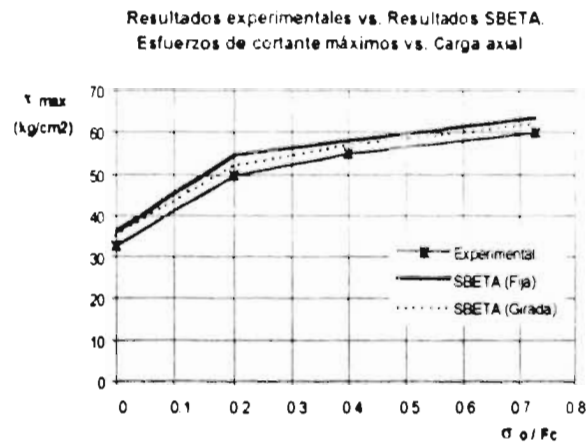


Fig. 5.15. Esfuerzos de cortante máximos vs. carga axial.

De las Figs. 5.13 y 5.14, al incrementarse el nivel de carga axial, se presenta un incremento en la resistencia del espécimen, pero se reduce la capacidad de deformación. Esto último se puede deber a que, cuando los niveles de carga axial superan a la carga de falla balanceada, la ductilidad es despreciable y sólo se debe a la deformación inelástica del concreto (Park y Paulay, 1986). En la Fig. 5.15 se presenta el efecto de la carga axial con la capacidad de resistencia a cortante. Se encuentra que al incrementarse la carga axial sobre el espécimen, se presenta un incremento en la resistencia a cortante de éste, ya que la carga axial evita que las fisuras por cortante se desarrollen con mayor rapidez, incrementando su resistencia a cortante (Nilson y Winter, 1991).

Una vez calibrado el modelo de análisis no lineal, se realizaron simulaciones numéricas para varios modelos de viga y de viga columna, variando algunos de los parámetros involucrados en el análisis. En las tablas 5.8 y 5.9, se presentan las características de los modelos analizados con el programa de análisis no lineal. El parámetro que se estudió, fue el efecto de la reducción de resistencia a compresión en los resultados analíticos. Se modificó dicho factor, tomando valores de $c = 0.4$, $c = 0.8$ y $c = 1.0$. En la tabla 5.10, se presentan los valores de fuerzas cortantes máximas (en toneladas) obtenidos, para vigas y para columnas, con el programa de análisis no

lineal. Se aprecia que para valores extremos de c , $c = 0.4$ y $c = 1.0$, presentan diferencias considerables en sus resultados, en promedio se tiene un error del 13.07%. esto se debe a que, en el primer caso, se redujo un 60% la resistencia a compresión del concreto, mientras que para $c = 1.0$ no se reduce la resistencia a compresión, lo cual no presenta un comportamiento real, ya que al iniciarse el proceso de fisuramiento, se presenta una degradación en la resistencia del concreto (Cervenka, 1985). Por otra parte, los resultados con $c = 0.6$ y $c = 0.8$, presentaron diferencias en promedio del 1.85% en los valores máximos obtenidos.

Tabla 5.8. Modelos de vigas analizados con el programa de análisis no lineal.

Elemento	ρ_w (%)	f_{rw} (kg/cm ²)	E_{rw} (kg/cm ²)	f_c concreto (kg/cm ²)	E_c (kg/cm ²)
VSS-1	1.100	8190	1940000	345	205000
VSS-2	1.208	9160	1920000	345	205000
VSS-3	0.295	10830	1920000	355	212000
VSS-4	0.588	10820	1870000	354	210600
VSS-5	1.208	10870	1930000	355	212500

Tabla 5.9. Modelos de columnas analizados con el programa de análisis no lineal.

Elemento	N / BDF_c	F_c (kg/cm ²)	E_c (kg/cm ²)	ρ_w (%)
CSS-1	0.8	352	217000	0.146
CSS-2	1.0	352	198000	0.146

Tabla 5.10. Efecto de la reducción de la resistencia a compresión en el modelo de fisura distribuida fija.

c/elemento	VSS1	VSS2	VSS3	VSS4	VSS5	CSS1	CSS2
0.4	52.43	50.89	38.72	47.97	55.35	24.02	18.79
0.6	55.84	53.99	41.07	49.87	57.73	24.89	19.82
0.8	56.74	55.19	42.18	50.36	58.28	25.47	20.74
1.0	59.5	57.95	44.89	53.62	60.68	28.17	23.39

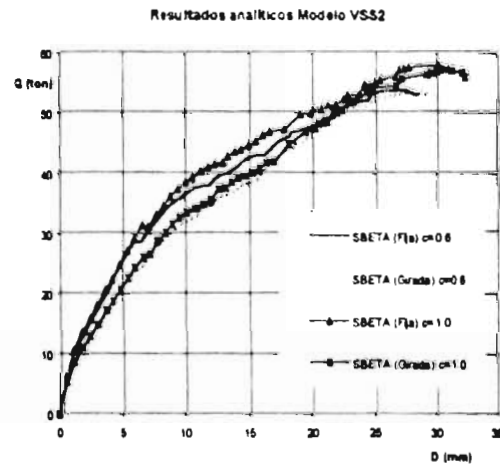
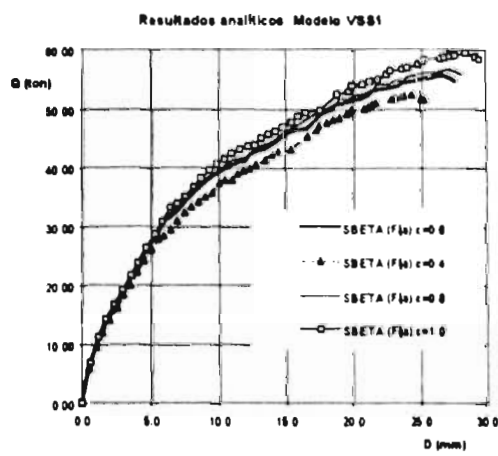


Fig. 5.16. Resultados analíticos en vigas. Modelos VSS1 y VSS2.

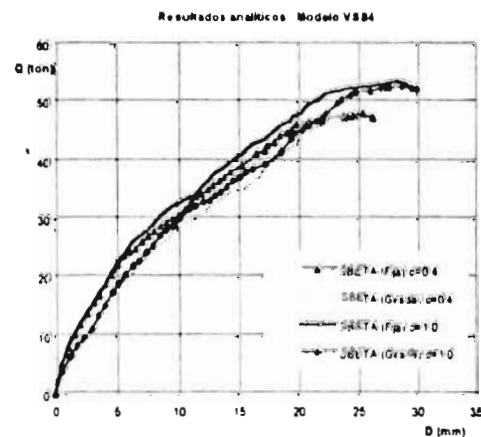
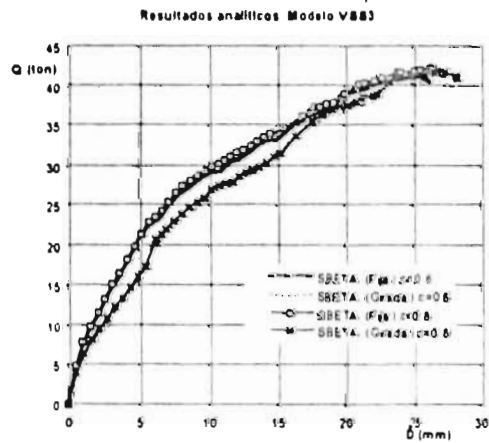


Fig. 5.17. Resultados analíticos en vigas. Modelos VSS3 y VSS4.

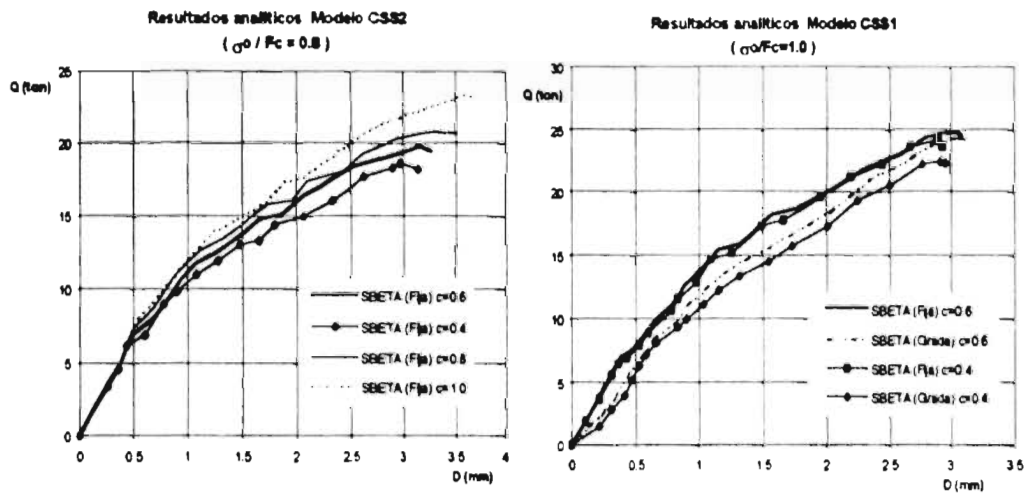
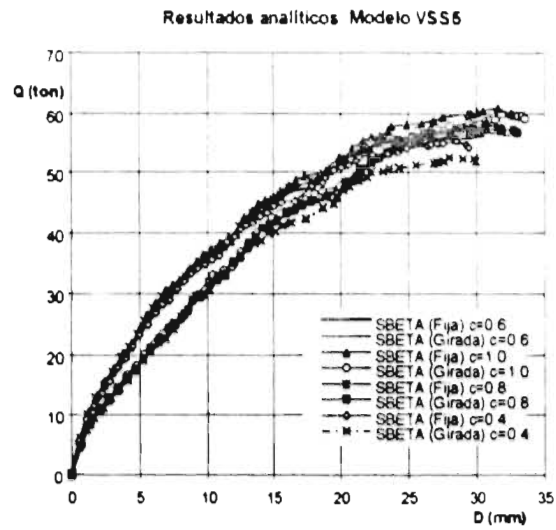


Fig. 5.19. Resultados analíticos en columnas. Modelos CSS1 y CSS2.

El efecto de la reducción de la resistencia a compresión del concreto (factor c) se refleja en una disminución en las fuerzas cortantes y en la capacidad de deformación del elemento, tal y como se aprecia en las figuras 5.16 a 5.19. Del estudio comparativo realizado, se tiene que los mejores

resultados se presentan cuando se toma un valor de c entre 0.6 y 0.8, presentando un error promedio del 2.29%

De las Figs. 5.16 a 5.19, los resultados con el modelo de fisura fija presentan una mayor rigidez en comparación con los resultados con el modelo de fisura girada. Esto se debe al efecto de retención de cortante que se presenta en el modelo de fisura fija produciendo una sobre rigidez en los modelos.

Una de las ventajas del modelo distribuido de fisuramiento sobre el modelo discreto de fisuramiento es el artificio de localización de fisuras, que aunque es un ardid matemático, permite tener una mayor aproximación al patrón de agrietamiento que pudiera tener el modelo en un estudio experimental bajo las sollicitaciones impactas. En la tabla 5.11, se presenta el tipo de falla que tuvo cada modelo analizado. En la Fig. 5.20, se presenta el patrón de agrietamiento que se tuvo para el modelo B60059 con el programa de análisis no lineal.

Tabla 5.11. Tipo de falla de los modelos estudiados

elemento	VSS1	VSS2	VSS3	VSS4	VSS5	CSS1	CSS2
Tipo de falla	aplastamiento por cortante directo	aplastamiento por cortante directo	tensión por cortante	compresión por cortante	aplastamiento por cortante directo	aplastamiento por cortante directo	aplastamiento por cortante directo

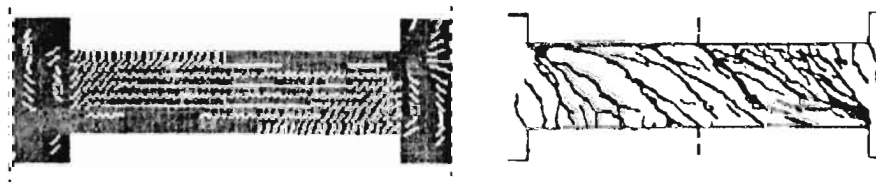


Fig. 5.20. Patrones de agrietamiento. Modelos SBETA y experimental (Modelo B60059).

5.6. Conclusiones.

De acuerdo con los resultados obtenidos, como era de suponerse, el modelo de fisura girada proporciona mejores resultados que el modelo de fisura distribuida fija. Esto se debe principalmente a que la función de retención de cortante controla la cantidad de esfuerzos girados con respecto a los esfuerzos principales y de los esfuerzos principales "reconstruidos" después del agrietamiento, produciendo una excesiva transferencia de cortante, lo que implica que los resultados con el modelo de fisura fija tiendan a ser más rígidos y resistentes.

Las simulaciones numéricas proveen una idea del comportamiento del elemento estructural bajo diferentes solicitaciones impuestas, que en la experimentación serían costosas en reproducir. Las tendencias experimentales, se predicen con buena aproximación, es decir, con un error promedio del 2.68%, lo cual es aceptable.

Se estudió la influencia de un parámetro del material en la respuesta estructural. En este caso, el factor de reducción de la resistencia a compresión c , debido a deformaciones transversales de tensión. Se observó que para valores de c que tienden a 1 (sin considerar reducción alguna) se obtuvieron mayores resistencias de cortante. Para evitar una tendencia de sobre resistencia ficticia de los elementos estructurales y de acuerdo con los resultados estadísticos calculados, se recomienda utilizar valores de c entre 0.5 y 0.8.

Capítulo 6

Conclusiones y Recomendaciones

En este trabajo se evaluó el potencial de los modelos de análisis no lineal del concreto, con el fin de emplearse como herramientas de apoyo en la investigación experimental. Debido a que el desarrollo de un programa de esta naturaleza se sale de los objetivos de esta tesis, se empleó el programa de análisis no lineal comercial SBETA (Cervenka et al, 1994) para el estudio del comportamiento de elementos de concreto reforzado analizados en pruebas experimentales.

Del trabajo se tienen las siguientes conclusiones:

1. De la evaluación de las formulaciones matemáticas de los modelos de fisura discreta y de fisura distribuida para simular el comportamiento no lineal del concreto, se encontró que los modelos de fisura discreta se basan en la idea de trabajar en todo momento con la parte del sólido que es continua. En el momento en que se detecta la aparición o la propagación de una fisura, esta se incorpora al contorno del sólido analizado (Fig. 3.7). En el contexto de un análisis por el MEF, esto obliga a un continuo remallado siguiendo la propagación de la fisura. Estos métodos han sido utilizados con éxito en el campo de estudio de la Mecánica de Fractura no lineal en el que generalmente se estudia la progresión de una o un número reducido de fisuras. El alto costo computacional que implica la regeneración continua de la malla, así como conocer anticipadamente la localización de la trayectoria de la fisura, lo cual se torna en un proceso dependiente de la discretización seleccionada, hacen poco práctica el uso de éste modelo en estructuras complejas.

Los modelos de fisura distribuida incluyen a la fisura en el medio continuo manteniendo la consideración de campos de desplazamiento continuos para modelarla. Con estas condiciones, una malla de elementos finitos permanece inalterada durante todo el proceso de análisis, teniendo un costo computacional menor e introduciendo en el análisis el efecto de la fisura solo como un cambio en el modelo de comportamiento del material. Este modelo ha sido cuestionado por la contradicción que plantea el modelar una discontinuidad, como lo es una fisura, con un campo de desplazamientos continuo, justificada en las siguientes hipótesis:

a) La fisura se modela por una franja o banda de elementos a través de los cuales se considera que, dentro de esta banda se propaga de una forma más o menos difusa o *distribuida* sin que pueda apreciarse su estricta localización de la banda de fisuras (Fig. 3.10).

b) Se establecen mecanismos artificiales de comportamiento del material dentro de la banda cuyos efectos fuera de la misma son los mismos que produce la fisura en el sólido real (o al menos tienden a ellos cuando se refina la malla de acuerdo con las características de aproximación propias del MEF).

c) Este tipo de análisis no lineal, no va dirigido a simular con precisión el comportamiento de la fisura o de la banda de fisuración, (una fisura es una singularidad de tamaño infinitesimal, que por lo tanto, no puede ser modelada exactamente con un método de solución discreto como es el MEF) sino a determinar eficientemente el estado esfuerzo-deformación de los puntos en la parte del sólido que permanece continua. El objetivo de los modelos anteriormente mencionados es que la simulación de los efectos de la fisura *sobre su exterior* sea lo suficientemente aproximada, o tan aproximada como se desee con el adecuado refinamiento de la malla.

2. La aplicabilidad del modelo distribuido de fisura en el problema de localización de fractura es un artificio numérico y por tanto, presenta incompatibilidades cinemáticas introducidas inadvertidamente por el ablandamiento del material en el modelo de fisura distribuida cuando la

dirección de la propagación no es paralela a los bordes de los elementos. En este caso, se presentan esfuerzos significantes en algunos elementos a través de las caras de la fisura (donde los esfuerzos debieran ser muy pequeños) Rots (1988) llamó a este fenómeno como "atoramiento de esfuerzos". Los desplazamientos totales en el modelo tienden a ser exactos, sin embargo, los esfuerzos y las energías de deformación calculadas en los elementos finitos no serían exactos en la región de la fisura. Una manera de evitar este fenómeno es realizando análisis de fisura discreta predefinida una vez que con el modelo distribuido de fisura se predijo la trayectoria de la fisura, teniendo así un análisis corrector de fisura discreta.

3. El modelo constitutivo del programa SBETA, cubre las características importantes del comportamiento del concreto y del acero de refuerzo. Basándose en el MEF y en modelos establecidos para el comportamiento no lineal del concreto, proporcionando una buena aproximación de sus resultados con respecto a los resultados experimentales obtenidos, tal como se indica en este trabajo.

El elemento finito empleado en este modelo, al estar formado por dos elementos triangulares permite que se presenten discontinuidades a través del elemento, así como la reducción de la solución numérica del elemento.

La solución presentada para el problema de la interacción del acero de refuerzo representado por un elemento barra embebido en el elemento finito con las propiedades del concreto, es útil desde el punto de vista aplicativo ya que con el empleo de matrices de transformación se logra la compatibilidad de los desplazamientos de la barra con los bordes del elemento finito, así como el transformar la solución del sistema local de los elementos finitos cuadrilátero al sistema global de todo el elemento estructural. Esta solución es útil, pues permite incluir barras en direcciones que no necesariamente coincidan con las fronteras de los elementos finitos planos.

4. El análisis no lineal del comportamiento de estructuras de concreto reforzado puede ser una herramienta de gran utilidad en el diseño y en la experimentación de estructuras de concreto, tal como lo demuestran los resultados obtenidos de los análisis realizados en este trabajo. La utilización de este tipo de herramientas como complemento a los ensayos experimentales puede ser de gran ayuda, minimizando costo y tiempo en la realización de investigaciones de este tipo.

5. Es recomendable realizar estudios paramétricos con diferentes programas de análisis no lineal con el fin de tener herramientas de apoyo más confiables en los campos del diseño y de la experimentación y poder emplearse para la formulación y mejoramiento de reglas para el diseño, y de mejores y más racionales modelos de diseño.

Referencias

- Anderson, T.L., "Fracture Mechanics, Fundamentals and Applications" CRC press, Estados Unidos 1991
- Bathe, K.J., "Finite Element Procedures in Engineering Analysis" Prentice Hall, Estados Unidos 1982
- Bazant, Z. "Comment on Orthotropic Models for Concrete and Geomaterials" ASCE Journal Eng. Mechs. Vol 109, No. 3, junio 1983
- Bazant, Z. y Cedolin, L. "Blunt Crack Band Propagation in Finite Element Analysis" ASCE Journal Eng. Mechs. Division, Vol 105, EM2, abril 1979
- Bazant, Z. y Cedolin, L. "Finite Element Modeling of Crack Band Propagation" ASCE Journal Structural Engineering, Vol 109, No. 1, enero 1983
- Bazant, Z. y Gambarova, P. "Rough cracks in reinforced concrete" ASCE Journal Structural Division, Vol 106, ST4, abril 1980
- Bazant, Z. y Oh, B. "Crack Band Theory for Fracture of Concrete" Mater. Struct. RILEM, No. 16, Paris, Francia 1983
- Botero, J.C. "Pandeo en Barras de Refuerzo Sometidas a Cargas Monotónicas y Cíclicas Reversibles", Tesis de Maestría, División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM, México, 1996
- CEB-FIP Model Code 1990, First Draft, Comité Euro International du Beton, Buletin d'information No. 195,196, marzo 1990.
- Cedolin, L. y Dei Poli, S. "Finite Element Studies of shear-Critical R.C. Beams" ASCE Journal of Eng. Mechs. Division. Vol 103, EM3, junio 1977
- Cervenka, V. "Constitutive Model for Cracked Reinforced Concrete", ACI Journal, nov-dic, 1985
- Cervenka, V. y Pukl, R. "Computer Models of Concrete Structures". Structural Engineering International. Vol2, No. 2, mayo, pp. 103-107, Suiza, 1992.
- Chyou, A. y Noguchi, H., "Estudio Analítico del Efecto de Carga Axial en la Resistencia a Cortante en Columnas" Memorias del Instituto de Concreto del Japón (en Japonés), Vol 12, No. 2, 1990.

- Crisfield, M.A. y Wills, J. "The Analysis of R.C. Panels Using Different Concrete Models" ASCE Journal of Engineering Mechanics. Vol 115, No. 3, marzo 1989
- Darwin, D. y Pecknold, D. "Nonlinear Biaxial Stress-Strain Law for Concrete" ASCE Journal Eng Mechs. Division. Vol 103, EM2, abril 1977
- Dodd, L.L. y Restrepo-Posada, J.I. "Model for Predicting Cyclic Behavior of Reinforcing Steel", ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 121, No. 3, marzo 1995.
- Griffith, A. A., "The Phenomena of Rupture and Flow in Solids", Philosophical Transactions (Royal Society) Ser. A, Vol 221, pp. 163-198, Londres, Inglaterra, 1920.
- Hand, F., Pechnold, D y Schnobrich, W.C. "Nonlinear Layered Analysis of R.C. Plates and Shells" ASCE Journal of the Structural Division. Vol. 99, ST7, julio 1972
- Hillerborg, A. Rots, J.G. "Crack concepts and numerical modelling" RILEM report: Fracture Mechanics of concrete structures" Edited by L. Elfgren. Chapman and Hall, Inglaterra 1989
- Hognestad, E. "A Study of Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Members". University of Illinois Engineering Experimental Station, Boletín No. 399, noviembre 1951.
- Hordijk, D. y Reinhardt, H., "A constitutive Model for Crack Cyclic Behaviour of Plain Concrete" Proc. Fracture Behaviour and Design of Materials and Structures. EMAS, Torino, Italia 1990
- Inglis, C.E., "Stresses in a Plate due to the Presence of Cracks and Sharp Corners", Transactions of the Institute of Naval Architects, Vol. 55, 1913
- Irwin, G.R. "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate", ASME, Journal of Applied Mechanics, No. 24, 1957
- Karahaloo, B.L. "Fracture Mechanics an Structural Concrete" Logman Group LTD, Inglaterra 1995
- Kupfer, H., Hilsdorf, H.K. y Rüschi, H. "Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses" ACI Journal, Vol. 66, agosto 1969
- Lin, C.S. y Scordelis, A.C. "Nonlinear analysis of RC Shells of General Form" ASCE Journal of the Structural Division, Vol. 101, ST3, marzo 1975
- Mander, J.B. " Seismic Design of Bridge Piers", Report 84-2, Dept. Of Civil Engineering, University of Canterbury, Nueva Zelandia 1984

- Mander, J.B., Priestley, M.J.N. y Park, R., "Theoretical stress-strain model for confined concrete" *Journal of Structural Engineering ASCE* Vol. 114 No. 8 Ago 1988 pp 1804-1825
- Mosalam, K., "Integrated modular computer program for the plane nonlinear analysis of reinforced and prestressed concrete structures" Tesis de Maestría. Cairo University, Egipto 1990
- Neville, A.M. "Properties of Concrete" 4th Edition Longman Group Ltd, Inglaterra 1995
- Nilson, A. y Winter, G., "Design of Concrete Structures" 11th Edition McGraw Hill, Estados Unidos 1991
- Ninyuki, T., Kuboto, O. y Shinta, T., "Resistencia a Cortante de Trabes en Función de la Resistencia del Refuerzo Lateral" *Memorias del Instituto de Concreto del Japón (en Japonés)*, Vol. 11, No. 2, 1989.
- Noguchi, H. e Inoue, N. "Analytical Techniques of Shear in Reinforced Concrete Structures by Finite Element Method" *Proc. of ACI Colloquium on Shear Analysis of R.C. Structures*, junio 1982
- Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto del Reglamento de Construcciones del Distrito Federal, RCDF93. Gaceta Oficial del Departamento del Distrito Federal, México 1993.
- Oliver, J., "Modelado de la Fisuración en Estructuras de Hormigón" CIMNE, Monografía No. 15, España, 1993.
- Park, R. y Paulay, T., "Estructuras de Concreto Reforzado" Limusa, México 1986
- Peckel Instruments, "SBETA Program Documentation" . Rotterdam, Holanda, 1994.
- Ramberg, W. y Osgood, W.R. "Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters" Technical Note 902, National Advisory Committee for Aeronautics, julio 1943.
- Reinhardt, H., "Basic Types of Failure" RILEM Report. *Fracture Mechanics of Concrete Structures*" Edited by L. Elfgren. Chapman and Hall, Inglaterra, 1989.
- Rodríguez, M. y Botero, J., "Aspectos del comportamiento sísmico considerando las propiedades mecánicas de aceros de refuerzo producidos en México" *Memorias IX Congreso Nacional de Ingeniería Estructural*. Zacatecas, México, octubre 1994.
- Rots, J.G. y de Borst, R. "Analysis of mixed-mode fracture in concrete" *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, vol. 113, No. 11, nov 1987 pp. 1739-1758

- Rots, J.G., "Computational Modeling of Concrete Fracture" Tesis Doctoral, University of Technology, Delft, Holanda, 1988.
- Rots, J.G., Nauta, P., Kuster, G.M.A. y Blaauwendraad, J., "Smearred crack approach and fracture localization in concrete" HERON Vol. 30, Delft, Holanda., 1985
- Rüsck, H., "Versuche zur Festigkeit der Biegedruckzone" Deutscher Ausschuss für Stahlbetonbau, Boletín No. 120, Berlin, Alemania, 1955
- Rüsck, H., "Researches Toward a General Flexural Theory for Structural Concrete", ACI Journal, Vol 32, No. 1, 1960
- Schnobrich, W.C., Salem, M.H., Pecknold, D. y Mohraz, B., "Nonlinear Stress Analysis of Reinforced Concrete" ASCE Journal of the Structural Division Vol. 99 No. 10, octubre 1972
- Scott, B.D., Park, R. y Priestley, M.J.N., "Stress-strain behavior of concrete confined by overlapping hoops at low and high strain rates" ACI Journal, ene-feb 1982, 13-27
- Sheikh, S. y Uzumeri, S.M., "Analytical model for concrete confinement in tied columns" Journal of the Structural Division ASCE Vol. 108, No. ST12, diciembre 1982, pp 2703-2721
- Suidan, M y Schnobrich, W.C. "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete" ASCE Journal of the Structural Division, Vol 99 ST10, octubre 1972
- Vecchio, F.J. y Collins, M.P., "Compression Response of Cracked Concrete", ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 119, No. 12, pp 3590-3610, 1993.
- Wawrzynek, P., Ingraffea, A., "Discrete Modeling of Crack propagation: theoretical Aspects and implementation issues in two and three dimensions" Report 91-5 Cornell University, Ithaca, N.Y. 1991
- Zienckewicz, O.C. y Taylor R.L., "El Método del Elemento Finito" 4a. Edición, McGraw Hill-CIMNE, España 1994

Reconocimientos

La vida me ha enseñado a ser agradecido y sobre todo, a reconocer a las personas más por lo que son que por lo que tienen o poseen.

Mi más sincera gratitud al *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología* (CONACyT), por el apoyo otorgado para la realización de mis estudios de Maestría en Ingeniería.

Agradezco a la *Dirección General de Asuntos del Personal Académico* (DGAPA) de esta Universidad, por el apoyo brindado para la culminación de esta tesis.

Un agradecimiento muy especial al *Dr. A. Gustavo Ayala Milián*, maestro y amigo, por su orientación y consejos y, sobre todo, por la oportunidad brindada, y al *Dr. Oscar López Báltiz*, por sus valiosos comentarios que enriquecieron este trabajo.

A mis profesores de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México, mi gratitud y aprecio por siempre; a mis compañeros y amigos que, de alguna manera, formaron parte en mi formación y preparación.

A los profesores, *Ings. Mario Gómez Mejía, Julio Baeza Balám y Jorge Vivas Pereira*, de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Yucatán, quienes con su orientación y apoyo, me motivaron a superarme y prepararme mejor, como persona y como profesionista.

Al *Instituto de Ingeniería* de esta gran Universidad, centro generador de conocimiento, en el que no sólo realicé este trabajo de tesis, si no también mis estudios de posgrado, muchas gracias por todo.

Y a todas aquellas personas que, de manera directa o indirecta, hicieron posible llevar a buen término este objetivo en mi vida, mil gracias.

Ing. Víctor P. Escalante Cervera

México, D.F., 1997