

8
22



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELACION NUMERICA DE UNA COLUMNA
ERUPTIVA DE TIPO PLINIANO.

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
F I S I C O
P R E S E N T A :
REMIGIO CABRAL DORADO

DIRECTOR DE TESIS: DR. JUAN MANUEL ESPINDOLA CASTRO



**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "Modelación numérica de una columna eruptiva de tipo Pliniano"

realizado por Remigio Cabral Dorado

con número de cuenta 8955373-6 . pasante de la carrera de Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DR. JUAN MANUEL ESPINDOLA CASTRO

Propietario

DR. LUIS QUINTANAR ROBLES

Propietario

DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE

Suplente

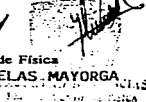
DR. DANTE JAIME MORAN ZENTENO

Suplente

DR. GERARDO CARRASCO NUÑEZ


Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA


FÍSICA
UNIVERSIDAD NACIONAL AVENIDA DE MEXICO

.....a mi madre y hermanos.

EL REZO NACE CUANDO LA ESPERANZA MUERE.

**TODOS AMAN LO QUE LES RODEA, PERO UN CORAZÓN GRANDE TIENE
CERCA HASTA LO QUE SE HAYA LEJOS.**

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO I.	
CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE EL VULCANISMO TERRESTRE.....	2
ESTILOS ERUPTIVOS.....	5
ACTIVIDAD PLINIANA.....	7
CAPÍTULO II.	
MODELO FÍSICO-MATEMÁTICO PARA UNA COLUMNA PLINIANA ESTACIONARIA...9	
INTRODUCCIÓN.....	9
CONSIDERACIÓN DE MASA Y MOMENTO.....	13
DENSIDAD EFECTIVA.....	14
EFFECTOS TÉRMICOS.....	15
CONDICIONES ATMOSFÉRICAS.....	18
ZONA DE EMPUJE O INERCIAL.....	19
ZONA CONVECTIVA.....	24
CAPÍTULO III.	
SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL MODELO DE COLUMNA.....	27
ZONA DE EMPUJE.....	29
ZONA CONVECTIVA.....	32
CAPÍTULO IV.	
RESULTADOS Y DISCUSIÓN DEL MODELO NUMÉRICO.....	34
INTRODUCCIÓN.....	34
COMPARACIÓN CON LOS RESULTADOS DE WOODS (1988).....	34
DETERMINACIÓN DE LA SENSIBILIDAD DE LA COLUMNA ERUPTIVA A LOS VALORES INICIALES DE LOS DIFERENTES PARÁMETROS.....	39
RESULTADOS DE LA VARIACIÓN DE RADIO, TEMPERATURA, DENSIDAD Y VELOCIDAD EN LA ALTURA DE LA COLUMNA.....	49
CAPÍTULO V.	
CONCLUSIONES.....	55
APÉNDICE I.....	56
APÉNDICE II.....	59
ENLISTADO DEL PROGRAMA PLINIO.....	63
BIBLIOGRAFÍA.....	72

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta un procedimiento numérico para resolver un modelo termodinámico de columna pliniana. En el modelo físico, debido a Woods (1988) se hacen las siguientes consideraciones: el material de la columna es considerado como un gas ideal, las partículas sólidas son de tamaños menores a los cinco milímetros de diámetro y, por último, todo el material permanece en la columna, hasta su alcance máximo. Los estudios realizados en columnas plinianas muestran que estas consideraciones son adecuadas para describir el comportamiento a gran escala de una columna de este tipo a la vez que simplifican el problema. Como un marco necesario para describir el modelo en el capítulo I se presenta una introducción sobre el vulcanismo en general y los mecanismos eruptivos haciendo énfasis en el estilo pliniano. Esto nos provee de un marco adecuado para el modelo de Woods (1988) que es planteado en el capítulo II.

El procedimiento numérico utilizado es el de Runge-Kutta de 4o orden. Este algoritmo fue adaptado para solución en computadora por medio de un programa en lenguaje Basic denominado Plinio. La aplicación del método de Runge-Kutta es descrito en el capítulo III y el programa Plinio en el Apéndice II.

El programa fue utilizado para realizar diferentes experimentos numéricos sobre el comportamiento de la columna como respuesta a las condiciones en la frontera inferior de la columna. Los resultados de estos experimentos se presentan en el capítulo IV y las conclusiones sobre el trabajo en el capítulo V.

CAPITULO I

1.1 CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE EL VULCANISMO TERRESTRE.

Uno de los procesos mas asombrosos de nuestro planeta, y por lo que sabemos de muchos otros cuerpos del sistema solar, es el del vulcanismo. En nuestro planeta, este fenómeno tiene un interés que sobrepasa el ámbito estrictamente científico por irrumpir en forma directa y espectacular en las actividades humanas. Son abundantes los registros históricos de verdaderas catástrofes ocasionadas por erupciones volcánicas y sus resultados constituyen un hecho determinante para el relieve de grandes áreas de nuestro planeta. Estos factores, así como el constituir un fenómeno geológico de primera importancia pues resulta ser el origen de las rocas de nuestro planeta han estimulado el estudio del vulcanismo desde numerosos puntos de vista. Como proceso geológico, el vulcanismo fue objeto natural de estudio de la geología; sin embargo un conocimiento mas completo del mismo solo puede lograrse a través de la contribución de varias disciplinas abocadas a su estudio. Como ciencia fundamental, la fisica puede contribuir significativamente a la comprensión de las diferentes fases involucradas en el vulcanismo a través de su metodología característica del empleo de modelos y su expresión en ecuaciones matemáticas, es decir a través de los modelos fisico-matemáticos que capturan los elementos esenciales de un fenómeno que puede ser en la realidad de una gran complejidad. Un ejemplo de estos procesos lo constituye la formación de una columna eruptiva que se observan durante el desarrollo de las erupciones mas explosivas que se presentan en numerosos volcanes de nuestro planeta. El estudio de estas columnas no es solo de interés volcanológico sino también atmosférico pues los meteorólogos han determinado que estas columnas tienen un gran impacto en la evolución del clima global. La consideración de un modelo fisico-matemático para este tipo de columnas y su solución por técnicas numéricas es el objetivo del presente trabajo; sin embargo, para una mejor exposición del propósito y alcance del mismo a continuación consideraremos algunos aspectos generales del vulcanismo:

En primer lugar es importante establecer que se trata de un fenómeno que desde el punto de vista geográfico dista mucho de ser aleatorio. Ciertas regiones de nuestro planeta son especialmente abundantes en volcanes, tal es el caso del llamado cinturón de fuego del Pacífico. La existencia de zonas como esta y en general la distribución global de los volcanes puede explicarse gracias a la Tectónica de Placas.

Los aspectos básicos de esta teoría son los siguientes: La capa rígida mas externa del planeta se conoce como litosfera. Tiene un espesor aproximado de 100 km. y está flotando sobre una capa mas profunda llamada astenósfera que cuando es sometida a fuerzas extremas por periodos de tiempo muy largos se comporta como un material plástico-viscoso. Además de la disposición de las capas descritas anteriormente la litosfera esta fraccionada en varias secciones llamadas placas tectónicas, que sufren movimientos relativos debidos a fuerzas que provienen del interior del planeta y que en última instancia tienen su origen en la energía interna de la Tierra. El constante movimiento de las placas es imperceptible para los sentidos humanos; sin embargo existe un flujo constante de material proveniente de la astenósfera que permite que en los márgenes llamados de expansión esté emergiendo material derivado del manto terrestre por fusión parcial (fig.1.1). Naturalmente esto requiere que ocurra un desplazamiento lateral de las placas y que en otro de los márgenes de las placas la parte mas densa del material penetre bajo la menos densa formando las llamadas zonas de subducción.

Cuando una placa tectónica se desplaza parcialmente, el material de sus márgenes experimenta un cambio en las variables termodinámicas. A las profundidades de la frontera litosfera- astenosfera tales cambios, en particular los de presión, provocan una fusión de las rocas que favorece la producción de magma. Dicho material cuya densidad es menor que la de las rocas circundantes, experimenta fuerzas de flotación que lo transportan hacia la superficie.

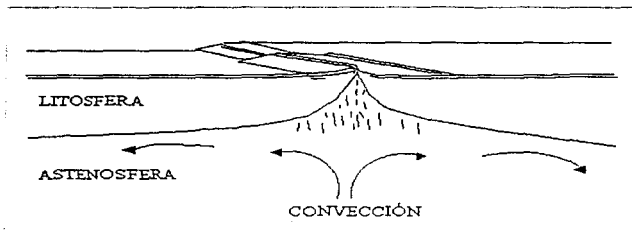


fig.1.1

En las zonas de subducción la perturbación es debida a que la placa que está penetrando acarrea material del manto mismo que es substituido por material de zonas mas profundas con la consiguiente disminución de la presión para estas parcelas de material fig.(1.2). Adicionalmente, en la placa que subduce existe una migración de agua debida a la deshidratación de las fases que se descomponen a profundidad cuando son sometidas a altas presiones. En la base de la litósfera esta agua produce una drástica disminución del punto de fusión de las rocas y una disminución de su densidad que favorece su ascenso a zonas mas someras. El resultado de ambos efectos es la fusión del material y por lo tanto de la formación de magma.

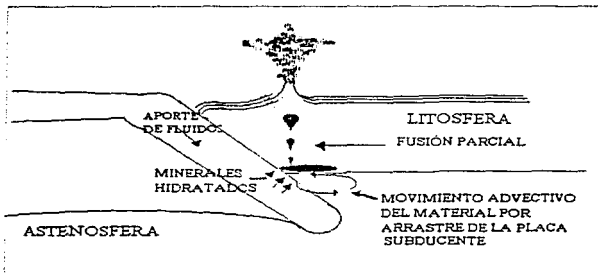


fig. 1.2.

1.2.- ESTILOS ERUPTIVOS

Si bien el fenómeno volcánico consiste esencialmente en la emisión a la superficie del magma formado en el interior de la Tierra, tal emisión adopta diferentes características que los vulcanólogos han designado como estilos eruptivos. Algunas erupciones se caracterizan por la emisión tranquila de grandes cantidades de lava. En otras por otro lado la mayor parte del material es arrojado violentamente como fragmentos sólido conocidos como piroclastos. Así, partiendo de la ocurrencia de estos dos tipos extremos de conducta pueden clasificarse las erupciones volcánicas como efusivas y explosivas; dos extremos de comportamiento entre los cuales se encuentran erupciones de tipo intermedio. Dentro de las erupciones mas explosivas se encuentran las llamadas erupciones plinianas peleanas: Dentro de las efusivas están las hawaianas e islándicas. Entre estos extremos está otra gran variedad de casos intermedios como son las vulcaneanas y estrombolianas de explosividad intermedia (ver fig. 1.4).

La variedad anteriormente descrita en estilos de erupción se debe a las diferencias en las características físicas de los distintos tipos de magma. Estos pueden tener una composición química y un contenido de gases muy variado. La composición química determina la viscosidad del magma, mientras que los gases se encuentran disueltos en el magma por la gran presión litostática que existe a profundidad. Ambos factores determinan la explosividad de una erupción por las causas que se exponen a continuación.

A medida que un magma asciende a la superficie, disminuye esta presión a que está sometido y el gas comienza a separarse formando pequeñas burbujas que tienden a expanderse y a separarse de la fase líquida conforme disminuye la presión. Puede ocurrir que el magma sea tan viscoso que dificulte el crecimiento y el movimiento de las burbujas de gas. Cuando esto ocurre y la presión sigue disminuyendo, la presión concentrada en las burbujas puede ser tan grande que en algún lugar de su ascenso produce la fragmentación del magma en un proceso explosivo.

Dado que los magmas silícicos son los mas viscosos y los que tienen el punto de fusión mas alto y por otro lado la expansión abrupta de los gases causa un descenso de la temperatura el material fragmentado se solidifica muy rápidamente, en la parte final de su ascenso el magma se habrá transformado en una mezcla de gas y fragmentos sólidos de muy variados tamaños que emerge a altas presiones y temperaturas (fig.1.3). Estas mezclas emergen violentamente a la superficie y son lanzados a grandes velocidades, en un intervalo que abarca desde velocidades subsonicas hasta supersónicas. Una vez en la superficie tales mezclas pueden tener comportamientos muy diversos formando nubes densas que se acumulan alrededor del edificio volcánico o se deslizan por sus laderas, o columnas que ascienden a gran altura. Las condiciones para la formación de estas columnas dependen de una serie de parámetros físicos que puede tener la mezcla en su salida. A continuación se expone el caso de las llamadas erupciones plinianas que es el objeto de estudio de este trabajo.

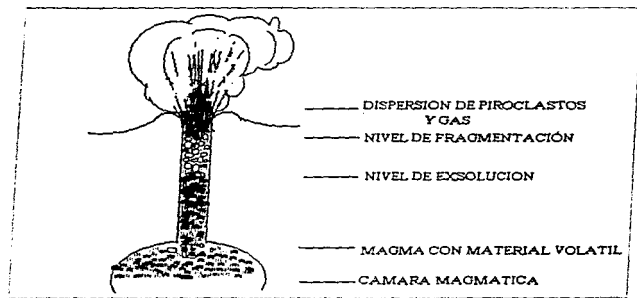


fig.1:3

1.3. LA ACTIVIDAD PLINIANA.

Las erupciones plinianas son llamadas así en honor a Plinio el joven, quien describió la erupción del volcán Vesubio en el año 79 a.C. Este tipo de erupciones se caracteriza por la formación de una columna volcánica con una altura de varias decenas de kilómetros. Naturalmente, la formación de tales columnas requiere de la emisión de ciertas cantidades mínimas de magma ya que de otra manera no podría establecerse una columna de tales dimensiones. Así mismo como veremos el material debe estar finamente fragmentado en porcentajes importantes del total pues de otra manera no podría acompañar a la fase gaseosa desacoplándose de la misma en breve tiempo. Como puede verse este tipo de condiciones solo puede lograrse en las erupciones de mayor explosividad. En estas la mezcla de gases y piroclastos abandona el cráter con velocidades de varios cientos de metros por segundo. La nube volcánica está entonces sujeta a tres tipos de fuerza:

- a) el impulso inercial que le imparte la explosión misma.
- b) la fuerza de gravedad.
- c) las fuerzas de flotación, por encontrarse en el seno de un fluido como lo es la atmósfera terrestre.

A la salida del cráter las fuerzas dominantes son las inerciales, por lo que la nube puede alcanzar cierta altura, del orden de algunos kilómetros, hasta que la fuerza de gravedad domina y la nube alcanza la máxima altura de esta fase y sus velocidades mínimas. A partir de este momento pueden dominar las fuerzas de flotación y la nube puede ser nuevamente acelerada y alcanzar alturas aun mayores formando entonces lo que se conoce como una columna pliniana.

La columna eruptiva puede experimentar fuerzas de flotación importantes por su diferencia de densidad con respecto a la atmósfera circundante. Ello se debe a dos razones: en primer lugar la mayor parte del gas contenido en la columna es vapor de agua cuya densidad del vapor es menor que la del aire. En segundo lugar la columna atrapa una substancial cantidad de aire que es calentado en su interior, hecho que disminuye su densidad con respecto al aire exterior. A los factores anteriores se agrega el hecho de que al ascender, la nube expulsa parte de los fragmentos mas pesados que se separan de ella en trayectorias balísticas.

Por estas circunstancias, la densidad efectiva de la mezcla de gases y piroclastos puede ser menor que la del aire circundante, lo que le da un empuje ascendente por flotación. Este empuje es el que logra que la columna alcance varias decenas de kilómetros. Cuando la densidad efectiva no alcanza diferencias tan importantes, la fuerza de gravedad resulta dominante y la columna se colapsa.

La cantidad de material emitido por unidad de tiempo y el periodo que dura el proceso constituyen un factor importante al modelar la explosión pliniana, este factor se denomina gasto de material en el cráter. También debe considerarse el efecto de los vientos atmosféricos. El material arrojado a la atmósfera desde la fuente, es transportado a gran altura para formar una pluma eruptiva que después es transportada lateralmente lejos del volcán por los vientos. El material cae en forma de lluvia desde la pluma eruptiva para cubrir el paisaje en estratos cuyo espesor decae exponencialmente con la distancia.

La distancia a la que pueden viajar los clastos está controlada por la altura desde la que son liberados, la velocidad media del viento entre esta altura y el suelo, y la velocidad final de caída de las partículas. Las observaciones, indican que las mayores nubes eruptivas plinianas pueden alcanzar alturas por encima de los 55 km., lo que implica una tasa de descarga superior a los 3×10^9 kg/s. La figura 1.4, ilustra las diferentes nubes o columnas volcánicas que pueden ser generadas en diferentes tipos de erupción.

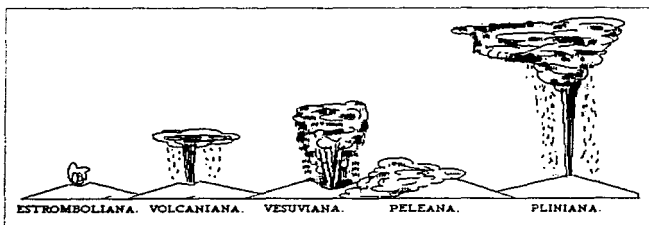


fig.1:4.

CAPITULO II.

MODELO FÍSICO-MATEMÁTICO PARA UNA COLUMNA PLINIANA ESTACIONARIA

2.1 INTRODUCCIÓN

Como hemos visto, en términos generales el nombre pliniano se usa para las erupciones con emisiones de material a velocidades y volúmenes de flujo muy altos. Estos grandes volúmenes provienen de magma que han sufrido una gran fragmentación. La mezcla de materiales magmáticos emerge a la superficie a través de la boca de emisión como un chorro turbulento dominado por las fuerzas inerciales. En esta primera etapa de la columna, la misma, interacciona con la atmósfera atrapando aire en sus bordes. La velocidad de salida de la columna disminuye rápidamente con la altura, a la vez que la masa de aire atmosférico atrapado aumenta con la altura.

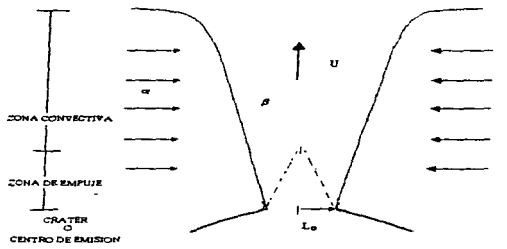


fig. 2.1 Erupción Pliniana

Aunque una erupción pliniana evoluciona en el tiempo, la duración de la etapa de plena formación de la columna es grande en comparación con la etapa inicial y final, de manera que podemos considerar un estado estacionario en dicha etapa. (fig. 2.2).

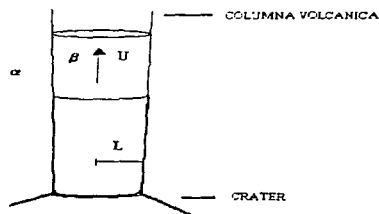


fig. 2.2 estado estacionario de la columna

Por otro lado, aunque la situación real en la columna es la de una mezcla de materiales de dos fases y posiblemente de tres por la condensación de agua en las superficies de los piroclastos, sus pequeñas dimensiones los hacen integrarse por completo a la dinámica de la fase gaseosa a la que aportan su inercia. Como resultado de este fenómeno de grupo, la mezcla puede considerarse como un fluido homogéneo cuya densidad disminuye por incorporación de aire.

De esta manera, el proceso puede tratarse dentro del marco teórico de la mecánica de fluidos y modelarse como un problema de flujo en un medio continuo. Se aplican entonces las ecuaciones fundamentales de conservación, que pueden expresarse en forma integral como (e. G. Currie, 1974).

Conservación de la masa

$$-\frac{c}{\partial t} \int \rho dV = \int \rho \vec{u} \cdot d\vec{A}$$

Conservación del momento

$$\int \left[\frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u} \bar{u}) \right] dV = \int \text{div} \bar{\sigma} dV + \int \rho \bar{F} dV$$

Conservación de la energía

$$\frac{D}{Dt} \int \left(\rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho \bar{u} \bar{u} \right) dV = \int (\bar{u} \cdot \bar{\sigma} \cdot \bar{n} - q \cdot \bar{n}) \cdot d\bar{A} + \int \bar{u} \cdot \rho \bar{F} dV$$

Woods (1988) siguió este procedimiento para formular un modelo físico-matemático, cuyas soluciones pueden obtenerse de forma numérica. En este modelo las ecuaciones anteriores (aplicadas a la geometría de la fig. 2.2) pueden expresarse como:

$$\text{Flujo de masa} \quad \int u \rho dA = \beta U L^2$$

$$\text{Flujo de momento} \quad \int u^2 \rho dA = \beta U^2 L^2$$

$$\text{Flujo de la entalpía específica} \quad \int u \rho \varepsilon dA = \beta E U L^2$$

Donde las integrales para el estado estacionario de la columna se efectúan sobre una superficie horizontal que intercepta a dicha columna. En estas ecuaciones, β es la densidad de la columna, U es la velocidad vertical promedio, ε es la energía interna, P es la presión, L es el radio efectivo de la columna, E es la entalpía específica de la columna. Para un punto dado sobre la superficie horizontal de la columna, se tiene a u como la velocidad, ρ la densidad y ε es la entalpía específica.

Ya que el aire atrapado es calentado por el gas magmático y los piroclastos, su densidad disminuye y la densidad global de la columna decrece, lo que provoca una aceleración ascendente de la mezcla en forma de una nube eruptiva convectiva (Wilson, 1976). Finalmente, la nube convierte la mayor parte de su energía cinética en energía potencial y alcanza una altura máxima a la que estará más fría que su alrededor. Entonces el material desciende hacia el nivel de densidad neutra, y la nube se expande radialmente (Sparks, 1986).(fig.2.1).

Una característica de las erupciones plinianas es que la mayoría de los piroclastos que emergen a través de la boca de emisión son arrastrados y transportados eficazmente por el gas liberado. Estas condiciones se dan en magmas ricos en gas, debido a que tales magmas tendrán velocidades de ascenso también relativamente altas a todos los niveles, desde la profundidad donde el gas empezó a nuclearse hasta la superficie (Wilson et al., 1980).

Una serie de tratamientos sobre el movimiento de las columnas eruptivas de tipo pliniano, se han basado en estas ideas (Wilson, 1976; Sparks y Wilson, 1976; Sparks y Wilson, 1982; Sparks, 1986). En un trabajo reciente, Woods (1988) compara las consideraciones hechas por los autores precedentes y propone el modelo termodinámico, de una columna eruptiva vertical, compuesta por una mezcla de piroclastos y gases calientes como se delineó en los párrafos anteriores Woods(1988), parte de las ecuaciones anteriores para obtener una serie de ecuaciones diferenciales especializadas como veremos a continuación; con este propósito dicho autor hace las siguientes consideraciones adicionales.

Se considera al material de una columna eruptiva de tipo pliniano como un gas ideal. Esto supone entre otras cosas, que los gases y los sólidos se encuentran en equilibrio térmico, lo cual solo es posible cuando las partículas sólidas son relativamente pequeñas, condición encontrada en las erupciones Plinianas. En el modelo también se considera que todo el material permanece en la columna, hasta su altura máxima, lo que implica que se ignora cualquier caída de piroclastos, durante el ascenso de la misma. Así, el modelo escogido describe las erupciones en las cuales, la mayor parte de la masa sólida son fragmentos pequeños, que pueden ser llevados mucho más alto que los fragmentos más grandes. En una revisión de los datos de campo de la distribución del tamaño de las partículas, se observa en algunas que el 90% de los sólidos son menores a los cinco milímetros de diámetro y un 60% son de un

diámetro submilimétrico, de allí que esta aproximación este justificada para identificar los procesos físicos básicos que ocurren en la columna, sin las complicaciones adicionales de una consideración explícita de un flujo multifásico.

2.2 CONSERVACIÓN DE MASA Y MOMENTO.

Para describir nuestro modelo trabajamos las ecuaciones de la conservación de masa, momento y la energía, mencionadas en la sección anterior; así para tener un sistema cerrado de ecuaciones, es necesario dar las relaciones termodinámicas entre la densidad, la presión y la temperatura, con la ayuda de las ecuaciones de estado de la columna. Por esto consideremos un pequeño volumen en la columna, formado por dos planos horizontales, en la cual se considera un volumen fijo o volumen de control. Así mismo consideremos que el material entrante es el mismo al que sale, en una forma ascendente en dicho volumen.(fig.2.2), la densidad global y la velocidad media de ascenso de la mezcla formada por gases y partículas en la columna son β y U respectivamente. El radio efectivo de la columna definido como la distancia radial desde el eje en el que la velocidad de ascenso ha disminuido a una pequeña fracción de su valor en la línea central, hasta su margen exterior es L .

Para nuestro volumen de control la ecuación de la conservación de masa lleva a la ecuación en forma diferencial.

$$(1) \quad \frac{d}{dz}(\beta UL^2) = 2U_e L \alpha$$

La conservación del momento vertical requiere que

$$(2) \quad \frac{d}{dz}(\beta U^2 L^2) = g(\alpha - \beta)L^2$$

Donde α es la densidad atmosférica y U_x es la velocidad de entrada en la parte horizontal.

2.3 DENSIDAD EFECTIVA.

El arrastre del aire atmosférico causa un incremento en la densidad de la columna, la cual varía con la altura, (siguiendo a Woods, 1988) la ecuación que gobierna esta variación es :

$$(3) \quad \frac{1}{\beta} = (1-n) \frac{1}{\sigma} + \frac{nR_g \theta}{P}$$

Donde n es la fracción de masa total de gas y está dada por:

$$(4) \quad n = 1 + (n_0 - 1) \frac{L^2 \sigma U_0 \beta_0}{L^2 U \beta}$$

El promedio de la constante del gas para los materiales de la columna en cualquier altura

$$(5) \quad R_g = R_A + (R_{g0} - R_A) \left(\frac{1-n}{n} \right) \left(\frac{n_0}{1-n_0} \right)$$

Las constantes con subíndice 0, son los valores a la salida del cráter, el significado de todas las constantes como R_v, R_s, n pueden verse en el apéndice I.

2.4 EFECTOS TÉRMICOS.

Para introducir las propiedades térmicas de la columna, consideremos en una primer aproximación, que la mezcla eruptiva es como un gas ideal, en el cual tenemos un calor específico en un volumen y presión constante C_v y C_p , así mismo tenemos:

$C_v \theta$ es la energía térmica interna por unidad de masa del material,

$C_p \theta$ es la entalpía específica del material, el cual representa la energía interna más el producto de la presión y el volumen por unidad de masa del material,

$C_v \theta \beta U L^2$ es el flujo de la energía interna

$C_p \theta \beta U L^2$ es el flujo de la entalpía a través de una sección transversal de la columna.

El mecanismo de transferencia de estos dos flujos es a través de la transformación de la masa en una sección de la horizontal.

La ecuación de flujo de energía estacionario para un volumen de control puede ser derivada de la primera ley de la termodinámica, $\Delta Q = \Delta U + \Delta W$ que puede escribirse explícitamente como:

$$(6) \quad \dot{Q} - \dot{W}_x = \sum \dot{m} e \left(\frac{U^2}{2} + E + gh \right) - \sum \dot{m} s \left(\frac{U^2}{2} + E + gh \right)$$

donde \dot{Q} es el flujo de calor dentro del volumen de control \dot{W}_x es la razón del trabajo realizado sobre la superficie del volumen, \dot{m} denota un flujo de masa, E es la entalpía específica, $\frac{U^2}{2}$ es la energía cinética por unidad de masa y gh la energía potencial por unidad de masa. Esta es la ecuación que gobierna los procesos térmicos en la columna.

Podemos adaptar la ecuación (6) para la columna volcánica, con las siguientes simplificaciones. Primero, la razón de trabajo, \dot{W}_x , que se realiza en el borde de la columna, se desprecia, porque el flujo turbulento es pequeño, comparado con la razón de cambio de la energía cinética, debido al arrastre. Segundo, el flujo de calor, \dot{Q} , que representa la transferencia de calor, entre el volumen de control, y el fluido externo (esto es el calor transferido sin la transferencia de masa), es despreciable, porque el flujo altamente turbulento, arrastra cantidades muy grandes de aire atmosférico. De esta forma la ecuación (6), indica que el flujo neto de entalpía, energía cinética y energía potencial a través de las fronteras del volumen de control es cero.

Combinando la ecuación (6) con la ecuación de la conservación de masa (1), obtenemos para el volumen de control dado.

$$(7) \quad \frac{d}{dz}(C_p \theta \beta U L^2) = \left(\frac{d}{dz}(\beta U L^2) \right) \left(\frac{U^2}{2} + gh + E_s \right) - \frac{d}{dz} \left(\beta U L^2 \left(gh + \frac{U^2}{2} \right) \right)$$

En una columna volcánica, la velocidad de arrastre horizontal es un orden de magnitud más pequeña que la velocidad vertical. por lo que el término

$$\frac{U^2}{2} \frac{d}{dz}(\beta U L^2)$$

podrá ser ignorado en comparación con $\frac{U^2}{2} \frac{d}{dz}(\beta U L^2)$

Usando la ecuación (1) y (2) con la definición de la entalpía específica dada anteriormente, la ecuación de flujo de energía estacionario (7), puede ser reducida a.

$$(8) \quad \frac{d}{dz}(c_p \rho \beta U L^2) = (c_a T) \frac{d}{dz}(\beta U L^2) + \frac{U^2}{2} \frac{d}{dz}(\beta U L^2) - \alpha U L^2 g$$

Donde c_a es el calor específico a una presión del aire circundante. La capacidad de calor específico a presión constante del material en la columna usada, en la expresión anterior, esta definida como:

$$(9) \quad c_p = \frac{m_h C_a + m_m C_m + m_s C_s}{m_h + m_m + m_s}$$

c_p cambia con la altura en la columna y utilizando una aproximación similar para obtener R_s , (Woods, 1988) puede ser expresado como:

$$(10) \quad c_p = C_a + (c_{p_s} - C_a) \frac{(1-n)}{(1-n_s)}$$

En la ecuación (8), se tiene la interacción de la energía cinética y potencial con la entalpía, además en esta ecuación, no se considera la expansión del gas.

2.5 CONDICIONES ATMOSFÉRICAS.

Como la columna se expande en la atmósfera terrestre deben considerarse los cambios de la temperatura atmosférica con la altura. El perfil de temperaturas atmosféricas puede aproximarse de forma lineal para los diferentes estratos de la atmósfera, es decir la troposfera, la tropopausa y la estratosfera. Una aproximación adecuada, es la dada por la siguiente ecuación:

$$(11) \quad T = \begin{cases} T_0 - \mu z & \text{para } z \leq H_1 \\ T_0 - \mu H_1 & \text{para } H_1 \leq z \leq H_2 \\ T_0 - \mu H_1 + \omega(z - H_2) & \text{para } z \geq H_2 \end{cases}$$

Donde H_1 es la altura de la tropopausa, H_2 es la altura de la estratosfera y μ, ω (son valores dados en el apéndice I). Por otro lado, la relación para la presión hidrostática, siguiendo a Gill. (1982) es:

$$\frac{dP}{dz} = -\alpha g$$

y la ecuación de estado para el aire seco es $P = \alpha R_s T$ Estas dos ecuaciones nos permiten obtener la siguiente relación.

$$(12) \quad \frac{1}{P} \frac{dP}{dz} = -\frac{g}{R_s T}$$

Usando la ecuación (11) y (12), puede ser determinado el perfil de la presión ambiental como *:

$$P = \begin{cases} \frac{P_0}{T_0} (T_0 - \mu z)^{\frac{\alpha}{\mu}} & \text{para } z \leq H_1 \\ \frac{P_0}{T_0} (T_0 - \mu H_1)^{\frac{\alpha}{\mu}} \exp\left(\frac{-g(z - H_1)}{R_0(T_0 - \mu H_1)}\right) & \text{para } H_1 \leq z \leq H_2 \\ \frac{P_0}{T_0} (T_0 - \mu H_1)^{\frac{\alpha}{\mu}} \exp\left(\frac{-g(H_2 - H_1)}{R_0(T_0 - \mu H_1)}\right) \frac{(T_0 - \mu H_1 + \omega(z - H_2))^{\frac{\alpha}{\mu}}}{T_0} & \text{para } z \geq H_2 \end{cases}$$

2.6 ZONA DE EMPUJE O INERCIAL.

Como se mencionó en la parte inicial del presente trabajo, la columna Pliniana puede ser dividida en dos grandes secciones, una primera de empuje y una segunda convectiva. En este párrafo trataremos a la primera, en la que las fuerzas inerciales son dominantes, las velocidades son altas y el valor de la densidad inicial de la mezcla volcánica, es mas grande que la del aire que la rodea (Sparks y Wilson, 1976). Así, en los primeros metros que se forma la

*Esta ecuación, no coincide con la que aparece en el artículo de Woods (1988), ya que en este último contiene una errata y se omitió el factor T_0 en el cociente de P_0 .

columna, esta conserva su densidad β pero conforme asciende, en los bordes de la misma, arrastra consigo parte del aire atmosférico, dando pie a que exista una zona en la cual se combinan la densidad de la columna β y la de la atmósfera α , conforme asciende la columna, la mezcla aumenta, hasta que la densidad final de la columna, es una combinación de α y β . La forma que tiene la zona de la columna con densidad β , es la de un cono invertido, también llamado núcleo interno denso, (fig.2.3). La zona de empuje se toma desde la salida inicial de la mezcla volcánica, hasta la altura final de este cono o núcleo interno denso(ver fig. 2.1).

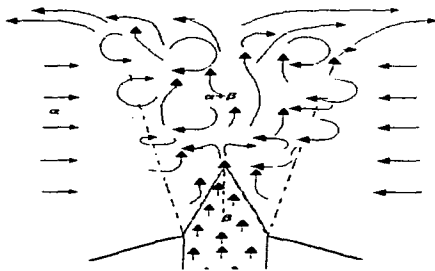


fig.2.3 zona de empuje

Como las velocidades de salida del reservorio son altas, se tiene una analogía con el chorro que emerge de una tobera que es tratado en la teoría de Plandtl (1954). En la teoría de Plandtl los efectos de flotación no se consideran,

porque el fluido del chorro es el mismo que hay en el ambiente, por lo tanto el momento del chorro es conservado al salir de la tobera.

$$\int u^2 dA = \pi (U_1 L)^2 = cte$$

Donde U_1 es la velocidad máxima en la sección transversal, L se define como el radio del chorro, esto supone que todo el tamaño del material arrastrado es $l = \lambda L$ donde λ es una constante, y la fricción actúa sobre el centro del chorro dada por

$$(13) \quad \tau = -\beta l^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 = - \left(\frac{-2U_1}{L} \right)^2 \beta l^2$$

Donde u es la velocidad local de la columna, así el movimiento del núcleo central está dado por

$$(14) \quad \beta U \frac{dU}{dz} = \frac{\partial \tau}{\partial y} = - \frac{8\beta \lambda^2 U_1^2}{L}$$

U es una velocidad promedio a través de la columna, porque la velocidad es aproximadamente uniforme en el interior del núcleo, la velocidad promedio a través de la columna U puede ser aproximada por U_1 , que es la velocidad máxima, así usando los resultados experimentales $\frac{dL}{dz} = \frac{1}{8}$ se sigue

que $\lambda = \frac{1}{8}$

por lo que

$$(15) \quad U \frac{dU}{dz} = -\frac{U^2}{8L}$$

La teoría anterior no incorpora efectos de flotación ni cambios en la eficiencia de la mezcla cuando el fluido del medio ambiente es diferente del chorro, por lo que es necesario modificarlo para poder ser aplicado en la zona de empuje.

Thring y Newbi(1952) determinaron que el chorro del fluido de densidad β saliendo de una tobera de radio pequeño L (del orden 0.5 cm), dentro de un fluido de densidad α , es igual al de un chorro con la misma densidad que la atmosférica, pero saliendo de una tobera de radio

$$L \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

Este resultado implica que al existir un cambio en la densidad, también varía el radio efectivo (ventana o abertura). Este resultado se introduce en la ecuación (14) y obtenemos

$$(16) \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = -\beta \frac{U^2}{8L} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}$$

Como se mencionó anteriormente, la diferencia de grandes temperaturas entre la columna y la atmósfera, produce un cambio en la densidad de la columna de una densidad mayor, a una densidad menor. Esto sucede porque el aire caliente se expande lo suficiente, hasta que se incrementa en el volumen de la columna aire frío. Para incorporar estos efectos en la fuerza de fricción la

expresión (16) es modificada para el cálculo de la densidad y la fricción a cualquier altura así la ecuación que modela la fricción en la zona de empuje es

$$(17) \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = -\beta \frac{U^2}{8L} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

Donde la velocidad promedio en toda la columna puede calcularse por la velocidad del núcleo interno.

En la ecuación (17) se observa, que el valor de la fricción varía, cuando se tiene la misma densidad que la de la atmósfera. De cualquier manera, al considerar a la fricción también hay una fuerza de flotación actuando sobre la columna y esto debe ser incluido, para deducir un conjunto de ecuaciones cerradas, que modelan el movimiento en la región de empuje, de lo anterior al relacionar las ecuaciones (14), (17) obtenemos:

$$(18) \quad U \frac{dU}{dz} = -\frac{U^2}{8L} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{g(\alpha - \beta)}{\beta}$$

Aquí el primer término es la consecuencia del cambio turbulento de momento entre los materiales de la columna y el aire atrapado, el segundo término representa los efectos de flotación.

Las ecuaciones que modelan la zona de empuje de la columna, son (8), (18), (2), (3), (4), (5) y (10) estas forman un nuevo conjunto de ecuaciones, que gobiernan la dinámica y la termodinámica en la región de empuje, donde la columna mantiene la estructura aproximada al de su núcleo, ya que en la columna arrastra aire del medio ambiente en todas las alturas. La fracción de masa de gas en la columna se incrementa con la altura, la ecuación (3) indica

que esto es equivalente a un incremento en el flujo de masa con la altura. De las ecuaciones (2) y (18) se obtiene la relación**:

$$(19) \quad \frac{d}{dz}(\beta UL^2) = \frac{UL}{8} \sqrt{\alpha \beta}$$

Por lo que este modelo en la región de empuje es dinámicamente consistente dado que el flujo de masa se incrementa con la altura.

2.7 ZONA CONVECTIVA.

Cuando la densidad de la columna es menor que la densidad del medio ambiente, la columna es manejada por fuerzas de flotación dentro de la atmósfera; Morton (1956) propuso que el arrastre de la velocidad horizontal en el frente de la pluma es proporcional a algunas características de la velocidad de la columna con la altura. Sparks (1986) dio la constante de proporcionalidad, k , con un valor de 0.09.

** Woods escribe erróneamente que la ecuación 19 se obtiene a partir de las ecuaciones 2 y 13; sin embargo nosotros la obtenemos de las ecuaciones. 2 y 18 ver texto.

Para esta zona se considera el desarrollo usado en las ecuaciones de (1) a (7) y usando la constante de proporcionalidad en la ecuación (1) en la cual se considera que $U_c = kU$, por la suposición de arrastre la ecuación de flujo de masa (1), se modifica como

$$\frac{d}{dz}(\beta U L^2) = 2kUL\alpha$$

Usando las ecuaciones (1) y (2) con la ecuación (7) en la que $U_c = kU$, se encuentra la ecuación

$$(20) \quad \frac{d}{dz}(C_p \theta \beta U L^2) = (C_p T) \frac{d}{dz}(\beta U L^2) + \frac{U^2}{2} \frac{d}{dz}(\beta U L^2) - \alpha U L^2 g + (kU)^2$$

Las ecuaciones (18), (2), (3), (4), (5), (10). Junto con la suposición de arrastre en la ecuación (20), nos describen el comportamiento de la columna en la zona convectiva**

** Woods menciona que al usar la suposición de arrastre, la ecuación del flujo de masa (1) vendrá a ser:

$$\frac{d}{dz}(\beta U L^2) = 2kUL\alpha$$

Esta suposición de arrastre es suficiente para completar el modelo que describe la evolución de la columna de Woods; el conjunto de relaciones, (2), (8), (3), (4), (5) y (10) forman su grupo de ecuaciones que gobiernan la zona convectiva, al cual llama, modelo B. Como se puede ver a lo largo de este capítulo tal conjunto de ecuaciones no es consistente y nosotros hemos seguido otro procedimiento, para llegar a un conjunto de ecuaciones ligeramente diferentes, pero consistentes. Probablemente, el artículo de Woods contiene errores de imprenta o redacción.

El siguiente criterio es usado para determinar donde la región de empuje de gas termina y donde comienza la región convectiva, la cual empezará cuando la columna sea de flotación, esto se cumplirá cuando

$$(21) \quad \alpha \geq \beta$$

Las ecuaciones para la zona de empuje y la convectiva, se pueden resolver por métodos numéricos para obtener las variaciones de U , L , b , q , y n , con la altura, esto se describe en el capítulo siguiente.

CAPITULO III.

3.1 SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL MODELO DE COLUMNA

El sistema de ecuaciones descritas en el capítulo anterior, que describe el comportamiento de nuestra columna, tanto para la zona de empuje como para la zona convectiva, deben resolverse simultáneamente.

En este conjunto las ecuaciones básicas son ecuaciones diferenciales cuyos parámetros no son constantes, sino funciones de otras variables que son a su vez incógnitas del problema. Por lo tanto, su solución sólo puede obtenerse por métodos numéricos.

Para este tipo de ecuaciones un método utilizado frecuentemente es el método de Runge-Kutta. Dado el empleo general de este método, no se hará una explicación del mismo y el lector puede consultarlo en alguno de los numerosos libros de Métodos Numéricos existentes en la actualidad (e.g. Carnahan, 1985). Para los propósitos de este capítulo nos referiremos en particular a la aplicación del método de Runge-Kutta (R-K) de cuarto orden.

Para un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\frac{dY_1}{dx} = F_1(X, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

$$\frac{dY_2}{dx} = F_2(X, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

$$\frac{dY_n}{dx} = F_n(X, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

El método de R-K consiste en discretizar la variable X en valores equidistantes X_i . Si se toma el valor H como intervalo de discretización,

entonces X se tomara en los puntos $X_k = kH$ ($k = 0, \dots, K$). Si X está considerada en el intervalo $[0, X]$ entonces $KH = X$, y podemos emplear la notación siguiente:

$$Y_{j,i} = Y_j(X_i)$$

El algoritmo de Runge-Kutta nos permite calcular el valor de Y_j en el punto X_i por medio de la siguiente ecuación:

$$Y_{j,i+1} = Y_{j,i} - H Q_j$$

Esto es:

$$Y_{j,i+1} = Y_{j,i} + \frac{h}{6}(K_{j,1} + 2K_{j,2} + 2K_{j,3} + K_{j,4})$$

Donde

$$K_{j,1} = f_j(x_i, y_{i1}, \dots, y_{in})$$

$$Y_{j,i}^* = Y_{j,i} + \frac{hK_{j,1}}{2}$$

$$K_{j,2} = f_j\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_{i1}^*, \dots, Y_{in}^*\right)$$

$$\bar{Y}_{j,i} = Y_{j,i} + \frac{hK_{j,2}}{2}$$

$$K_{j,3} = f_j\left(x_i + \frac{h}{2}, \bar{Y}_{i1}, \dots, \bar{Y}_{in}\right)$$

$$\bar{Y}_{j,i}^* = Y_{j,i} + \frac{hK_{j,3}}{2}$$

$$K_{j,4} = f_j\left(x_i + h, \bar{Y}_{i1}^*, \dots, \bar{Y}_{in}^*\right)$$

Este procedimiento aplicado a nuestro conjunto de ecuaciones se hace de la siguiente manera:

3.2 ZONA DE EMPUJE

Como hemos visto anteriormente, el conjunto de ecuaciones que describen la dinámica de la columna, es el siguiente:

$$2) \quad \frac{d}{dz}(\beta U^2 L^2) = g(\alpha - \beta)L^2$$

$$8) \quad \frac{d}{dz}(C_p \theta \beta U L^2) = (C_a T) \frac{d}{dz}(\beta U L^2) + \frac{U^2}{2} \frac{d}{dz}(\beta U L^2) - \alpha U L^2 g$$

$$18) \quad U \frac{dU}{dz} = -\frac{U^2}{8L} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{g(\alpha - \beta)}{\beta}$$

Para aplicar el método de R-K de cuarto orden para la zona de empuje utilizamos las siguientes variables:

$$Y_1 = U$$

$$Y_2 = BL^2U$$

$$Y_3 = CpQ$$

Los parámetros se definen como sigue:

$$f_1 = \frac{dY_1}{dx} = K_1$$

$$f_2 = \frac{dY_2}{dx} = K_2$$

$$f_3 = \frac{dY_3}{dx} = K_3$$

Nótese que se ha eliminado el índice mudo i , ya que es innecesario dado que el procedimiento permite calcular el valor de Y en un punto a partir del anterior, sin necesidad del valor, en cualquier otro punto.

Para conocer las K_1 , K_2 y K_3 , se desarrollan las ecuaciones (18), (2) y (8), usando propiedades de las derivadas de la siguiente forma:

de 18

$$K1 = \frac{dU}{dZ} = \frac{-U}{8L} \sqrt{\frac{A}{B}} + \frac{G(A-B)}{BU}$$

$$\therefore K1 = -\frac{Y1}{8} \sqrt{\frac{AY1}{Y2}} + \frac{G(A-B)}{BY1}$$

de 2

$$\frac{d}{dz}(BU^2 L^2) = G(A-B)L^2$$

$$\therefore K2 = \frac{G(A-B)Y2}{BY1^2} - \frac{Y2 K1}{Y1}$$

de 8

$$\frac{d}{dz} CPQ = \frac{\left[-CPQ \frac{d}{dz} BUL^2 + CAT \frac{d}{dz} (BUL^2) + \frac{U^2}{2} \frac{d}{dz} (BUL^2) - AUL^2 G \right]}{BUL^2}$$

$$\therefore K3 = \frac{\left[CAT + \frac{Y1^2}{2} - Y3 \right] K2 - \frac{AGY2}{B}}{Y2}$$

3.3 ZONA CONVECTIVA

En esta zona se trabaja con las mismas ecuaciones que para la zona de empuje, con excepción de la ecuación (8).

Como:

$$Y_1 = U$$

$$Y_2 = B U^2$$

$$Y_3 = C P Q$$

tenemos que

$$K_1 = -\frac{Y_1}{8} \sqrt{\frac{A Y_1}{Y_2}} + \frac{G(A-B)}{B Y_1}$$

$$K_2 = \frac{G(A-B) Y_2}{B Y_1^2} - \frac{Y_2 K_1}{Y_1}$$

Para encontrar K_3 es un procedimiento análogo al anterior en el que $U_s = kU$ (ver ecuación 20 del capítulo I).

Así

$$\frac{d}{dz} C P Q = \frac{\left[-C P Q \frac{d}{dz} B U^2 + C A T \frac{d}{dz} (B U^2) + \frac{U^2}{2} \frac{d}{dz} (B U^2) - A U L^2 G + (k U)^2 \right]}{B U^2}$$

$$\therefore K3i = \frac{\left[CA'Y + \frac{Y1^2}{2} - Y3 \right] K2 - \frac{AGY2}{B} + (kY1)^2}{Y2}$$

Los valores de otras variables, son calculados en cada paso del algoritmo, pues son variables dependientes de la altura o de variables que dependen de la altura. Tales variables se calculan a partir de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{\beta} = (1-n) \frac{1}{\sigma} + \frac{nR_s \theta}{P}$$

$$n = 1 + (n_0 - 1) \frac{L^2 \cdot U_n \beta_n}{L^2 U \beta}$$

$$R_s = R_s + (R_{s0} - R_s) \left(\frac{1-n}{n} \right) \left(\frac{n_n}{1-n_0} \right)$$

$$Cp = C_s + (Cp_0 - C_s) \frac{(1-n)}{(1-n_0)}$$

$$\alpha = \frac{P}{R_s T}$$

El algoritmo descrito anteriormente se codificó para su solución en computadora a través del lenguaje BASIC (GWBasic), el programa resultante, PLINIO, aparece listado en el apéndice II.

CAPITULO IV.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN DEL MODELO NUMÉRICO.

4.1 INTRODUCCIÓN.

La presentación de los resultados de nuestro modelo, se ha dividido en tres secciones, en la primera se realiza una comparación entre los resultados de Woods(1988), y los obtenidos a través de nuestro programa. En la siguiente sección se estudia el papel que juegan los valores iniciales de algunas variables, como son el radio, densidad, temperatura y la fracción de gas en la columna con este objeto se consideran tres valores extremos típicos de cada una de estas variables, con objeto de comparar los resultados se vera su efecto primeramente en la velocidad. En la última sección se consideran también los resultados del radio, densidad y temperatura de la columna.

4.2 COMPARACIÓN CON LOS RESULTADOS DE WOODS(1988).

Para probar la confiabilidad de los resultados que se obtienen con nuestro procedimiento numérico y el programa basado en éste, procedimos a tratar de reproducir los resultados publicados por Woods (1988).

Antes de realizar dicha comparación recordemos que hay una diferencia en cuanto a la consideración de la ecuación (20) como se expuso en el capítulo 1. Por otro lado en su artículo, Woods(1988) no especifica todos los valores de las variables empleadas en sus resultados, por lo que hemos hecho las siguientes consideraciones:

Para el caso de C_r , que se obtiene de la ecuación (9), consideramos en la parte inicial de este valor que $m_s + m_w + m_i = 1$. Otra especificación es que en la primera etapa de la columna, el gas efectivo de los materiales de la columna es similar al valor del gas volcánico, esto es que $R_s = R_w$.

Por otra parte el valor que se considera para la densidad en la atmósfera, lo obtenemos de la ecuación para aire seco $P = \alpha R_s T$. Woods no reporta que valor utiliza para α .

El valor de la densidad efectiva de la columna se obtiene de la ecuación (3), en la que se involucran otras variables ya conocidas. Con respecto al valor del paso, H , encontramos que un valor de 50 es satisfactorio ya que no se encuentran resultados muy diferentes con valores mas pequeños para este. Algunas excepciones a la elección de este valor se mencionarán más adelante.

Las figuras 3.1, 3.2 y 3.3 son la comparación de nuestros resultados con los de Woods. En la fig. 3.1 con un radio inicial de 200m., observamos un comportamiento similar de ambos modelos dentro del rango 300 a 200m/s., a partir de los 200m/s el comportamiento en las velocidades empiezan a diferenciarse, de tal forma que esta diferencia se incrementa conforme aumenta la altura.

En estas figuras se consideró únicamente las gráficas que muestran el comportamiento de la velocidad, debido a que es en éstas en las que puede hacerse una mayor comparación entre nuestros resultados y los de Woods. Cada línea de la gráfica señalada con la letra W son los resultados de Woods, de tal manera que se pueda comparar ambos resultados. Finalmente se muestra un conjunto de nuestros resultados (fig.3.4.), utilizando un formato semejante al de Woods, es decir: representado el comportamiento de los diferentes valores iniciales del radio, seleccionados por Woods en una sola gráfica.

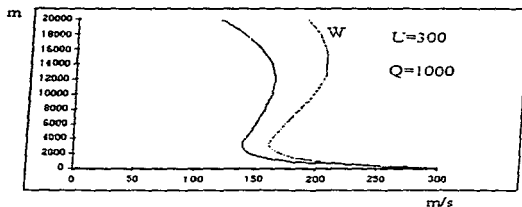


Fig. 4.1 Comparación de los resultados de Woods(W) y el programa PLINIO, para un valor de $L=200$

Para la fig. 3.2 obtenemos un comportamiento parecido entre los modelos, hasta un valor de 100-150m/s, en el que para una altura cercana a 2000m., estos muestran un comportamiento diferente.

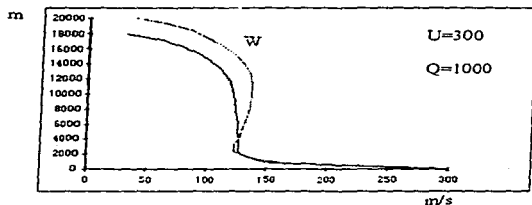


Fig.4.2 Comparación de los resultados de Woods(W) y el programa PLINIO, para un valor de $L=100$

Por último, para el valor de $L=20m.$, correspondiente a la fig. 3.3, los resultados son semejantes hasta un valor menor a los $100m/s.$, y a partir de esto, cada modelo alcanza una altura distinta.

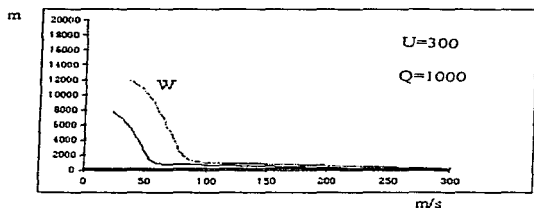


fig.4.3 Comparación de los resultados de Woods (W) y el programa PLINIO, para un valor de $L=20$

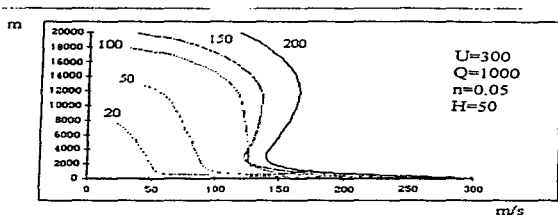


fig. 4.4. Comparación de los resultados del programa PLINIO escrito en GWBasic, para valores de $L=20, 50, 100, 150$ y 200

Si realizamos una comparación de las fig. 3.1, 3.2 y 3.4, podemos observar una diferencia significativa con respecto a la altura alcanzada por cada una. En cuanto a la estructura, ambos resultados muestran un comportamiento similar, de tal forma que si se sobre ponen las gráficas, una gran porción de estas son semejantes.

Como se mencionó con anterioridad, la fig. 3.4 representa un conjunto de resultados para diferentes valores iniciales del radio. Un punto a resaltar aquí, es que Woods no especifica claramente qué valor usa para la temperatura inicial, la cual esta entre $Q=1000$ o 1200 . Esto afecta nuestra comparación, porque como se muestra más adelante, el valor de la temperatura es uno de los parámetros que influye más en la altura alcanzada por la columna. A una mayor temperatura inicial se observa una mayor altura final.

En general nuestros resultados son consistentes con los reportados por Woods las diferencias son debidas muy probablemente a la elección de diferentes valores para las variables como el caso de Q , α , β , valores que no son reportados por dicho autor.

4.3. DETERMINACIÓN DE LA SENSIBILIDAD DE LA COLUMNA ERUPTIVA A LOS VALORES INICIALES DE LOS DIFERENTES PARÁMETROS

Para determinar la forma en la que las condiciones iniciales afectan el desarrollo del proceso, se llevaron a cabo una serie de experimentos numéricos que muestran la dependencia de las características de la columna en los valores iniciales. Con este objetivo utilizamos un rango de valores que describe el intervalo de valores típicos observados en erupciones volcánicas.

Radio,	$L= 100, 300, 500. \text{ m}$
Velocidad,	$U= 100, 300, 500. \text{ m/s}$
Temperatura	$Q= 800, 1000, 1200. \text{ k}$
Fración de gas	$n= 0.05, 0.03, 0.01.$

Los valores anteriores arrojan 81 casos diferentes. Manteniendo fijo el valor de $n=0.5$, se obtiene un grupo de resultados expresados en 27 gráficas. Manteniendo fijos los valores de L (100) y U (100), y dando valores específicos a Q se pueden reducir las variaciones a 3 gráficas que pueden compararse entre sí en una misma figura (fig. 4.5). Cambiando el valor de U y siguiendo el mismo proceso se obtienen las siguientes tres gráficas (fig. 4.6). Dando un tercer valor a U se concluye el análisis para el primer valor de L con respecto a los demás (fig. 4.7). En todos los casos solo se han presentado los resultados para la velocidad con el propósito de no congestionar las gráficas y hacer más fácil la interpretación de resultados.

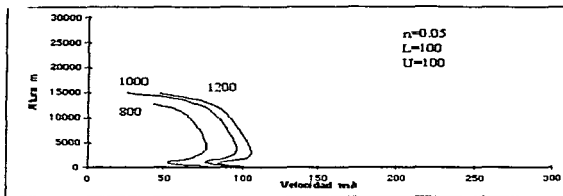


figura 4.5. Velocidad en la columna para diferentes valores iniciales de $Q=800, 100$ y 1200 , que se indican a un costado de cada curva.

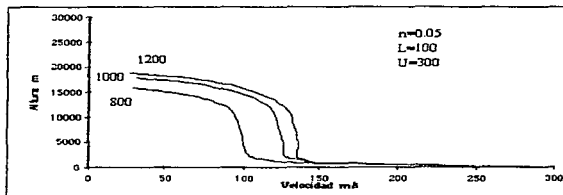


figura 4.6 . Velocidad en la columna para diferentes valores iniciales de $Q=800, 1000$ y 1200 , que se indican a un costado de cada curva..

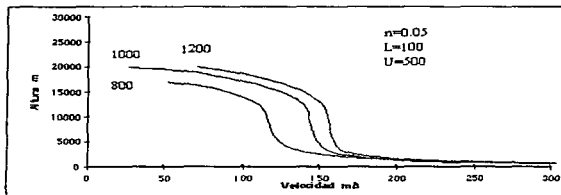
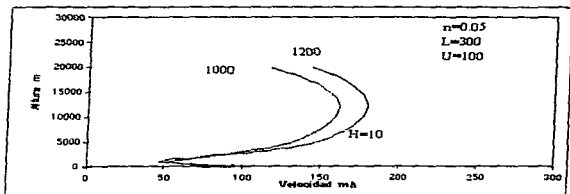


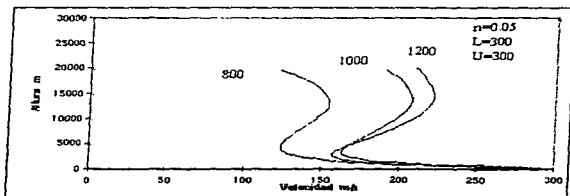
figura 4.7. Velocidad en la columna para diferentes valores iniciales de $Q=800, 1000$ y 1200 , que se indican a un costado de cada curva.

De las fig. 4.5, 4.6 y 4.7, observamos que las alturas alcanzadas por las columnas, son de 15000 a 20000 m., dentro de cada figura, la columna que alcanza una altura mayor es la correspondiente a un valor de $Q=1200$ K., por lo tanto, la de menor altura corresponde a los $Q=800$ K. iniciales.

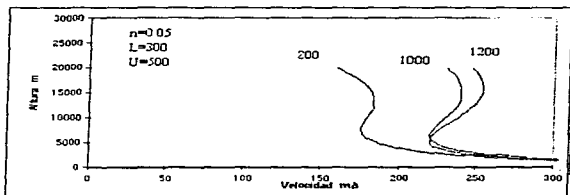
En la fig. 4.8 se puede observar que para un valor de $H=50$, se obtiene solamente una gráfica dentro de esta figura para la zona convectiva que corresponde a $Q=1000$. Sin embargo cambiando el valor del paso, a $H=10$, obtenemos la gráfica en la zona convectiva para $Q=1200$; sucede lo mismo en la fig. 4.13 cuando $Q=1000$ obtenemos la gráfica si $H=10$, con el objeto de revisar de que forma podría afectar a los resultados, estos valores en el tamaño del paso, se aplico a otros casos en los que no mostraban la formación de la zona convectiva; los valores utilizados corresponden al intervalo de $H=10-100$, de todas las figuras que presentamos; no observamos la formación de una columna de gran altura, por lo que suponemos que el problema no es de comportamiento numérico, sino posiblemente a las condiciones físicas como se verá más adelante.



figuras 4.8. Velocidad en la columna para diferentes valores de los parámetros iniciales (ver recuadro). Nótese que la gráfica de 800 no aparece, ver texto.



figuras 4.9 Velocidad en la columna para diferentes valores iniciales, de Q . Los valores iniciales de las otras variables aparecen en el recuadro interior.



figuras 4.10 Velocidad en la columna para diferentes valores iniciales, de Q . Los valores iniciales de los otras variables aparecen en el recuadro interior.

En la fig. 4.8, 4.11 y 4.12, podemos observar la formación de la columna convectiva, para los valores que se indican en cada fig., esto no significa que para los valores iniciales restantes no se obtenga algún resultado, por lo contrario si se tiene el registro para los primeros cien metros aproximadamente, que corresponden a la zona de empuje, pero después no se obtiene más "información" de dicha columna; aquí cabe señalar que en ciertas circunstancias una columna Pliniana podrá no tener suficiente flotabilidad a todas las alturas a partir de la boca de emisión como podría ser en este caso, además si se tiene una cantidad pequeña de aire atrapado a dicha altura, es poco probable que la densidad global de la columna eruptiva sea menor que la de la atmósfera circundante, las partículas sólidas y el gas, en lugar de formar la columna eruptiva, colapsan hacia la superficie en una zona circular al alrededor del chorro que asciende desde la boca de emisión (ver figs. 4.14 a 4.20). Se considera que el proceso de colapso es más probable cuando se tienen valores relativamente pequeños del contenido de gases segregados a para radios iniciales relativamente grandes (ver valores iniciales de las respectivas figuras); de forma que no dispone de mucho tiempo para que el aire atrapado se mezcle con el centro del chorro de emisión, de forma similar, si el radio de la boca de emisión es grande, la relación de la masa de aire atrapado para cada intervalo de altura es pequeña, lo que implica que se creará muy poca flotación extra. Otro caso parecido es el que se trata en la siguiente sección. {para el valor de $L=500\text{m}$ ver figs. 4.21 (b), 4.22(b), 4.23(b) y 4.24(b)}.

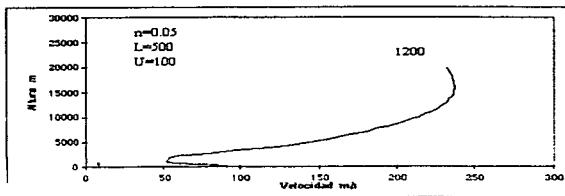


figura 4.11. Velocidad en la columna para diferentes valores iniciales, de Q . Los valores iniciales de los otras variables aparecen en el recuadro interior

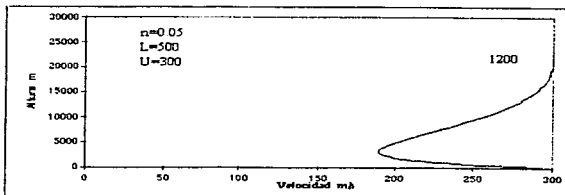


figura 4.12. Velocidad en la columna para diferentes valores iniciales, de Q . Los valores iniciales de los otras variables aparecen en el recuadro interior

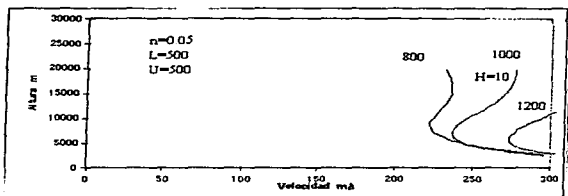


figura 4.13.. Velocidad en la columna para diferentes valores iniciales, de Q . Los valores iniciales de los otras variables aparecen en el recuadro interior

Para el caso de la fracción de gas $n=0.03$ y $n=0.01$ (ver figs. 4.14 a 4.20) se llevó a cabo un mismo procedimiento similar al descrito para el valor anterior de $n=0.05$. Como puede observarse, solamente en algunos casos se da la formación de una columna eruptiva.

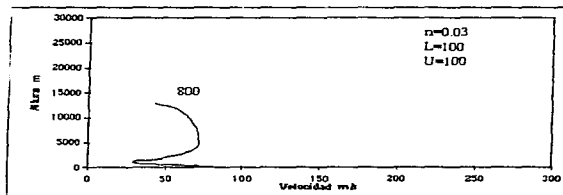


figura 4.14. Velocidad en la columna con $Q=800$

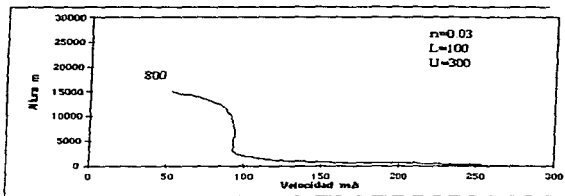


figura 4.15. Velocidad en la columna con $Q=800$

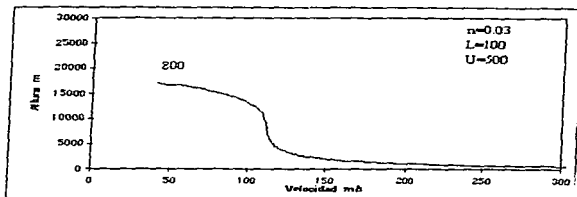


figura 4.16. Velocidad en la columna con $Q=800$

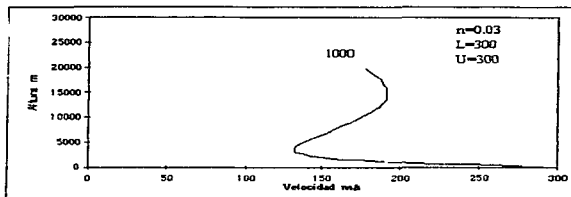


figura 4.17. Velocidad en la columna con $Q=1000$

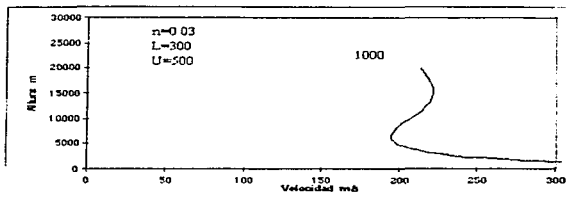


figura 4.18. Velocidad en la columna con $Q=1000$

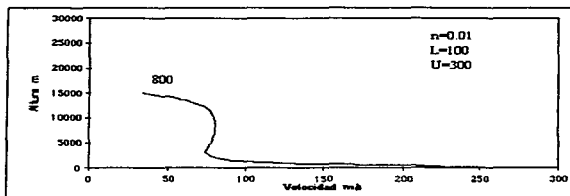


figura 4.19. Velocidad en la columna con $Q=800$

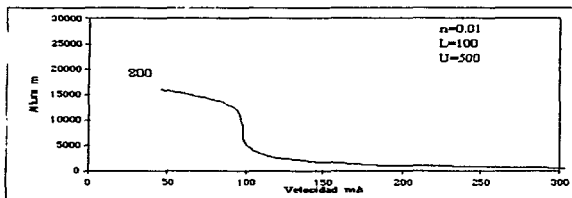


figura 4.20. Velocidad en la columna con $Q=800$

4.4. RESULTADOS DE LA VARIACIÓN DE RADIO, TEMPERATURA, DENSIDAD Y VELOCIDAD, EN LA ALTURA DE LA COLUMNA

Hasta aquí, todos los resultados que se han presentado son en base al comportamiento de la velocidad, dado que no es la única variable que se gráfica en el programa PLINIO, en esta sección se presentan los resultados de dichas variables junto con la velocidad, estos son: la temperatura, densidad y radio de la columna, los cuales corresponden desde la fig. 4.21 a la fig. 4.24.

En la fig. 4.21., se presentan los resultados de la velocidad para los valores señalados en cada fig. 4.21. (a), (b) y (c). Estos mismos valores se repiten, con el mismo orden en la fig. 4.22, en la que aparecen los resultados del radio con la altura. Para la figura 4.23.(a), (b) y (c) se muestra el comportamiento de la temperatura y por último en la fig. 4.24., se muestran los resultados de la densidad. El motivo de esta ordenación, en la que tenemos resultados (a), (b) y (c) es para realizar una comparación entre estas, las cuales dependerán de la altura porcentual alcanzada por cada una de ellas en su respectiva fig., esto se realiza de la siguiente forma:

En la fig. 4.21. (a) se tiene una mayor altura para una velocidad inicial grande, es decir 500 m/s. La siguiente velocidad graficada en esta misma fig. es de 300 m/s, lo que significa un 92% de la altura alcanzada en la velocidad anterior. Por último con el valor de 100 m/s se llega a un valor de 76% de la velocidad mayor.

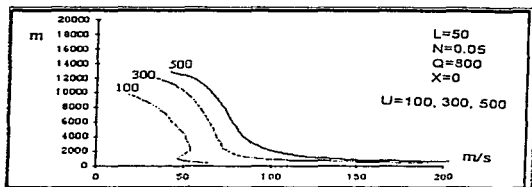
En la fig. 4.21. (b) se varía el radio. Para un valor inicial de 300 m. de radio, se obtiene una altura cercana a los 20, 000 m. Para el radio de 100 m., se obtiene una altura que representa el 75% de la anterior. Por último la gráfica que representa un radio mayor, o sea de 500 m., alcanza una altura de 1.5% de

la altura mayor. Podemos interpretar este resultado como el mencionado en la sección 4.3.

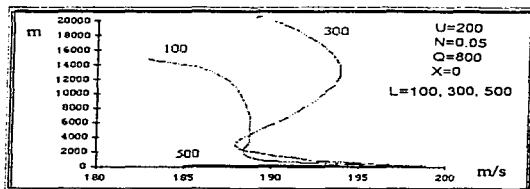
En la fig. 4.21. (c), se dará el valor inicial de la temperatura de la columna, tanto para el valor de 1000 como para el de 1200. El comportamiento que se observa entre estos dos es muy semejante, de tal forma que ambos alcanzan una altura muy similar. El comportamiento de las gráficas para velocidad, densidad, temperatura y radio muestra mucha similitud bajo estas condiciones.

Dentro de nuestro modelo no se da un valor inicial para la densidad efectiva de la columna, ya que esta se obtiene de otras condiciones o de otras variables (ver ecuación 3 del capítulo II.).

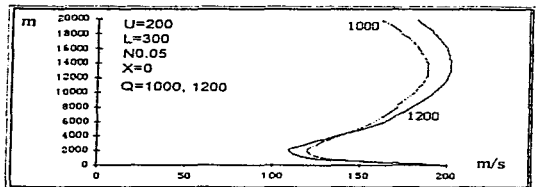
Como se puede observar en este grupo de figuras, las correspondientes a la temperatura, fig. 4.23.(a), o de la densidad fig. 4.24(a), tienen resultados muy similares para valores de $U=300, 500$ m/s, lo que no se observa en la fig. 4.21(a), correspondiente a la velocidad con la altura, es por esto que se optó en trabajar con los resultados de la velocidad en lugar de las otras variables, como se menciona en la sección 4.3.



(a)



(b)



(c)

fig. 4.21. Grafica de la velocidad con la Altura

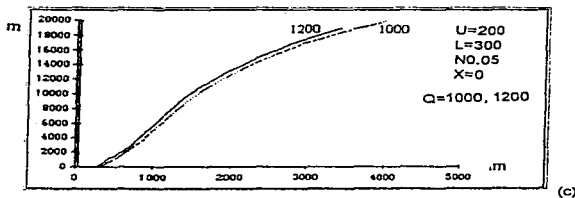
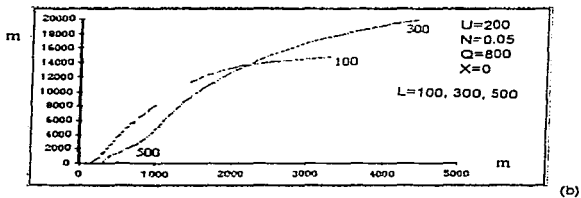
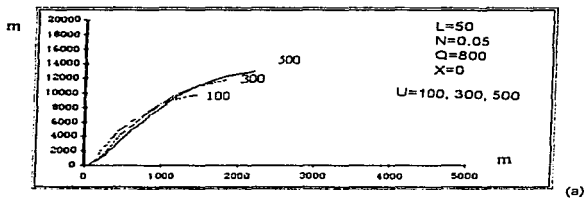


fig. 4.22. grafica del Radio con la Altura

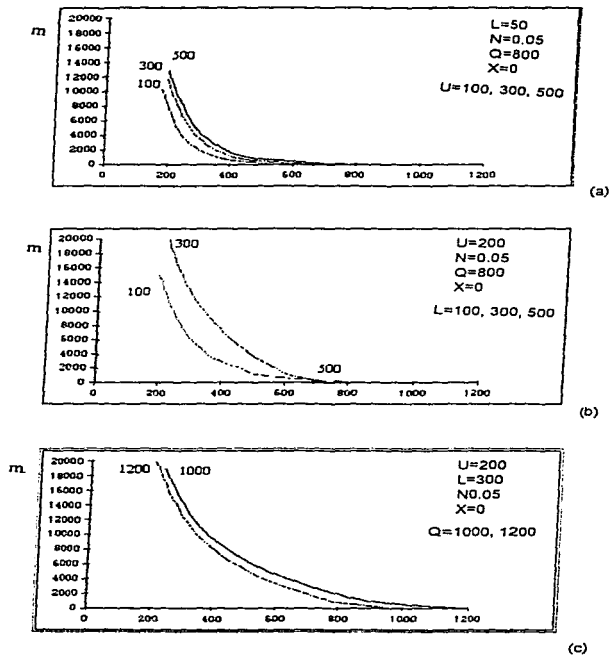


fig.4.23. grafica de la Temperatura con la Altura

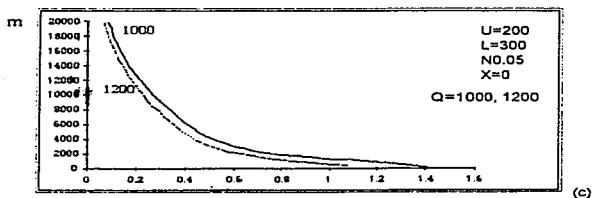
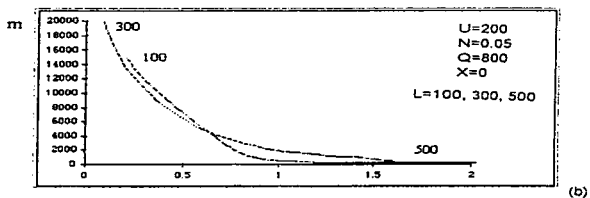
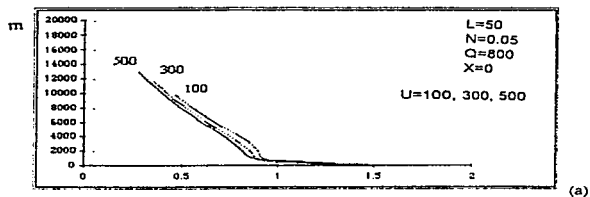


fig 4.24.grafica de la Densidad con la Altura

CAPITULO V.

CONCLUSIONES.

El modelo termodinámico de Woods (1988) captura los elementos esenciales de la formación de una columna pliniana. Las ecuaciones diferenciales a las que conduce este modelo pueden ser integradas satisfactoriamente por medio del método de Runge- Kutta de 4o. orden. Este metodo permite obtener aproximaciones satisfactorias para todas las condiciones físicas de formación de columna pliniana. El algoritmo permite obtener aproximaciones satisfactorias y estables para un amplio margen de valores de la variable de discretización (H). El procedimiento es robusto ya que permite obtener resultados para todas las condiciones físicas en las que ocurre formación de columna a la vez que conduce a resultados nulos cuando las condiciones físicas no permiten la formación de columna. Dadas las características de facilidad de programación e interactividad con el usuario se eligió el lenguaje BASIC para la codificación del algoritmo y su ejecución en computadora. El programa así obtenido, PLINIO, resulta versátil, de fácil utilización y corto tiempo de ejecución.

Se llevó a cabo una serie de pruebas para casos en que es posible conocer el comportamiento de una columna con objeto de verificar el programa, misma que resultó positiva. Posteriormente se hicieron programas de prueba para comparar las soluciones con algunos resultados de Woods (1988). Estas pruebas concuerdan cualitativamente con las de ese autor; sin embargo no reproducen cuantitativamente sus resultados. Esto se debe probablemente a la elección de algunas de las variables, mismas que no son especificadas por ese investigador.

Se procedió entonces a evaluar el papel que tienen los diferentes valores iniciales sobre la formación de la columna. Encontramos que la altura de la columna es muy sensible a la temperatura inicial ya que a una mayor temperatura, la columna alcanzara una altura mayor, en todos los casos en que las otras variables no cambien.

Otra variable importante resulta ser la fracción de gas existente en la columna, si esta fracción es pequeña, es poco probable la formación de la columna.

Para que exista la formación de la columna pliniana, no debe de existir valores iniciales grandes en el radio y pequeños para la temperatura de la columna de lo contrario solo existirá la zona de empuje ver fig. 4.21 (b).

Finalmente la altura de la columna es menos sensible a la variación en los valores de la velocidad ya que ésta depende más de la diferencia entre las densidades.

El programa PLINIO que aparece listado en el Apéndice II; es de fácil aplicación y puede resultar de ayuda para la interpretación de las condiciones en que se dieron erupciones antiguas o no presenciadas. También puede utilizarse para simular erupciones en volcanes activos y evaluar el peligro volcánico por caída de cenizas en volcanes con actividad explosiva.

APÉNDICE I.

LISTA DE VARIABLES Y CONSTANTES

- C_a Calor específico a presión constante, del aire, 998 J/(Kkg).
- C_m Calor específico a presión constante, del gas volcánico emitido en la ventana, 1617 J/(Kkg).
- C_p Calor específico a presión constante efectivo, del material en la columna.
- C_s Calor específico de los piroclastos sólidos, 1617 J/(Kkg).
- e Entalpia específica en una zona de la columna.
- E Entalpia específica efectiva en la columna.
- g Aceleración de la gravedad, 9.81 m/s.
- H_1 Altura de la tropopausa, 11 km.
- H_2 Altura de la estratosfera, 20 km.
- h Altura de la columna.
- k Constante de entrada en la zona convectiva, 0.09.
- L Radio de la columna, (5-500) m.
- \dot{m} Flujo de masa en la columna.
- m_o Masa total del aire que entra en la columna.
- m_m Masa de gas volcánica en la columna.
- m_s Masa de sólidos en la columna.

n	Fracción de gas y masa en la columna (0.05-0.005).
P	Presión atmosférica.
R_A	Constante de gas para el aire, 285 J/(Kkg).
R_g	Constante del gas efectivo para la columna.
R_m	Constante del gas volcánico, 462 J/(Kkg).*
T	Temperatura atmosférica.
T_0	Temperatura atmosférica inicial, 273 K.
u	Velocidad local vertical, en la columna.
U	Velocidad vertical efectiva, en la columna.
U_0	Velocidad inicial, (50-500) m/s.
U_E	Velocidad de entrada, horizontal.
z	Valor del eje coordenado.
α	Densidad atmosférica.
α_0	Valor inicial de la atmósfera, 1.3.
β	Densidad efectiva en la columna.
ρ	Densidad local de la columna.
θ	Temperatura efectiva en la columna (800-1200) k.
μ	Temperatura del gradiente en la troposfera, 6.5 K/km.
ω	Temperatura del gradiente en la estratosfera, 2.0 K/km.
σ	Densidad de los piroclásticos sólidos.

Notación usada para el programa PLINIO.

- A Densidad atmosférica.
- B Densidad efectiva en la columna.
- CA Calor específico a presión constante, del aire, 998 J/(Kkg).
- Cp Calor específico a presión constante efectivo, del material en la columna.
- DP Densidad de los piroclásticos sólidos.
- G Aceleración de la gravedad, 9.81 m/s.
- H Tamaño del paso
- L Radio de la columna, (5-500) m
- Q Temperatura efectiva en la columna (800-1200) k.
- U Velocidad vertical efectiva, en la columna

* Se considera que el valor de R_m en el inicio de la erupción volcánica, es muy parecido o igual al valor de R_g .

Para encontrar el valor de Cp , se considera que $m_b + m_m + m_s = 1$, en nuestro caso se considera que:

$$m_b = 0.1, m_m = 0.6, m_s = 0.3.$$

APÉNDICE II.

En el programa PLINIO se usa el método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden para resolver el sistema de ecuaciones descritas en el capítulo I.

Cuando se corre el programa Plinio, éste solicita los valores iniciales, una vez que son asignados los valores, aparece el cuadro de dialogo para seleccionar la gráfica o el tabulador. A continuación presentamos un ejemplo y el cuadro de dialogo.:

Para llamar a GWBASIC del disco "a", se da la siguiente instrucción:
a: GWBASIC

Al encontrarse en GWBASIC, la instrucción que se requiere para cargar el programa PLINIO, puede usarse la tecla de F3 y el nombre del programa o escribir
LOAD PLINIO

Para correr el programa se usa F2 o se escribe
RUN

Estando en el programa el primer mensaje que aparece es una presentación de PLINIO

"EL PRESENTE PROGRAMA USA EL MÉTODO NUMÉRICO DE RUNGE-KUTTA"

"DE CUARTO ORDEN, PARA DESCRIBIR EL COMPORTAMIENTO DEL RADIO,"

"TEMPERATURA, DENSIDAD Y VELOCIDAD; CON RESPECTO A LA ALTURA "

"DE UNA COLUMNA PLINIANA. BASADO EN EL MODELO DE AW WOODS 1988"

El mensaje que sigue es para indicarnos que PLINIO solicita los siguientes valores

"ENTRADA DE DATOS"

Con este mensaje se piden los valores iniciales de las siguientes variables:

"VALORES INICIALES DE: VELOCIDAD U [m/s]=(50,500)="

se escribe el valor para la velocidad que debe estar entre los 50a 500 m/s

El siguiente mensaje es para pedir el valor del radio, el cual debe estar entre 5 y 500 m.

"RADIO L [m]=(5,500)="

Para la temperatura se pide que el dato este entre los 800 y 1200 K.

"TEMPERATURA EN LA COLUMNA Q [K]=(800,1200)="

El ultimo valor solicitado es para la altura inicial de la columna, el cual se recomienda desde 0 a 1000 m.

"ALTURA X [m]="

El siguiente mensaje, es para preguntar de que forma se quiere la presentación de los resultados, los cuales pueden ser en una columna (opción 1) o en una gráfica (opción 2, 3, 4, 5), dependiendo de la gráfica que se requiera.

"PARA TABULAR A: Q, L, B, U. EN UNA ALTURA DADA, OPRIMA (1)
 PARA GRAFICAR A CADA UNA, CON RESPECTO A LA
 ALTURA, OPRIMA
 EL No. CORRESPONDIENTE U=2 , Q=3 , L=4 , B=5 ."

En este mensaje indica la forma de presentar los resultados
 "INDIQUE EL No."

Para introducir los valores en el programa, cuando lo requiera este, solo se escribe el numero sin escribir las unidades y se da la instrucción de ejecutar. Dentro del programa están otros valores predeterminados, los cuales no aparecen en pantalla, para conocerlos o modificar alguna instrucción del programa, se le da la siguiente orden por ejemplo
 LIST 140
y obtendremos en pantalla el renglón solicitado
 140 CPO=1617

Para nuestro ejemplo tomamos los siguientes valores:

X=0 m
 U = 300 m/s.
 L = 300 m.
 Q = 1000 k.

Los datos tabulados por PLINIO son:

TABULACIÓN:

X	U	Q	L	B
1000	207.7957	792.8606	445.061	1.056755
2000	172.8046	706.2015	655.488	.7626265
3000	163.381	638.6919	819.3192	.6332522
4000	164.4528	583.1683	954.4389	.5510959
5000	169.3709	536.221	1076.952	.4891951
6000	175.3719	495.9008	1196.937	.4379977
7000	181.3908	460.8692	1319.979	.393325
8000	187.0664	430.1101	1449.325	.3531485
9000	192.3182	402.8224	1587.15	.3164307
10000	197.1706	378.3666	1735.192	.2826266
11000	201.6809	356.2315	1895.082	.2514382
12000	205.1768	336.4076	2070.537	.222971
13000	207.0092	318.9176	2264.817	.1973753
14000	207.5216	303.3173	2478.598	.1744409
15000	206.9204	289.2574	2713.265	.1539604
16000	205.3231	276.4638	2970.825	.1357274
17000	202.7878	264.7202	3253.926	.1195396
18000	199.3294	253.8554	3565.981	.1052013
19000	194.9281	243.7328	3911.365	9.252681E-02
20000	189.5323	234.2431	4295.798	8.134188E-02

A continuación se presenta el listado de plinio con notas aclaratorias del procedimiento que realiza.

ENLISTADO DEL PROGRAMA PLINIO
LENGUAJE DE GWBASIC.

```

10 CLS
20 SCREEN 0
30 PRINT "EL PRESENTE PROGRAMA USA EL METODO NUMERICO DE RUNGE-KUTTA"
40 PRINT "DE CUARTO ORDEN. PARA DESCRIBIR EL COMPORTAMIENTO DEL RADIO."
50 PRINT "TEMPERATURA, DENSIDAD Y VELOCIDAD; CON RESPECTO A LA ALTURA."
60 PRINT "DE UNA COLUMNA PLINIANA. BASADO EN EL MODELO DE AW WOODS 1988"
70 PRINT
80 PRINT
90 REM ***** ENTRADA DE DATOS*****
100 PRINT
110 PRINT "ENTRADA DE DATOS"
120 PRINT
130 REM ***** "CALOR ESPECIFICO CP [ J/(Kkg) ]=1617=",CP0
140 CP0=1617
150 REM ***** "CONSTANTE DEL GAS EN LA COLUMNA RG [ J/(Kkg) ]=462=",RG0
160 RG0=462
170 REM *****"CONSTANTE DEL AIRE RA [ J/(Kkg) ]=285=",RA
180 RA=285
190 REM *****"ALTURA DE LA TROPOSFERA HI [ m ]=11000=",HI
200 HI=11000
210 REM *****"ALTURA DE LA ESTRATOSFERA H2 [ m ]=20000=",H2
220 H2=20000
230 REM *****"DENSIDAD DE LOS PIROCLASTOS DP [ kg/m^3 ]=2=",DP
240 DP=2
250 REM *****"ACELERACION DE LA GRAVEDAD G [ m/(s^2) ]=9.81=",G
260 G=9.810001
270 REM *****"CALOR ESPECIFICO CA [ J/(Kkg) ]=998=",CA
280 CA=998
290 REM *****"No. DEL INCREMENTO H=50=",H
300 H=50
310 INPUT "VALORES INICIALES DE: VELOCIDAD U [ m/s ]=(50-500)=",U
320 INPUT "RADIO L [ m ]=(5-500)=",L
330 N0=0.5
340 INPUT "TEMPERATURA EN LA COLUMNA Q [ K ]=(800-1200)=",Q
350 LET P0=100000!
360 REM *****"PRESION ATMOSFERICA P0 [ Pa ]=",P0
370 REM *****"DENSIDAD DE LOS PIROCLASTOS B [ kg/(m^3) ]=",B
380 B=(DP*P0)/((1-N0)*P0+(N0*RG0*Q*DP))
390 LET B0=B
400 LET U0=U
410 LET L0=L
420 LET Q0=Q
430 T0=280
440 REM *****"CONSTANTE DE LA ZONA CONVECTIVA K"
450 K=9.000001E-02

```

```

460 INPUT "ALTURA X [ m ]=500*..X
470 REM *****INSTRUCCION PARA TABULAR O GRAFICAR*****
480 A=P0/(RA*T0)
490 CLS
500 PRINT "PARA TABULAR A: Q, L, B, U, EN UNA ALTURA DADA, OPRIMA (1)
    PARA GRAFICAR A CADA UNA, CON RESPECTO A LA ALTURA, OPRIMA
    EL No. CORRESPONDIENTE U=2, Q=3, L=4, B=5 ."
510 INPUT "INDIQUE EL No.":E1
520 CLS
530 IF E1=1 THEN 680
540 IF E2=2 THEN 580
550 IF E1=3 THEN 580
560 IF E1=4 THEN 580
570 IF E1=5 THEN 580
580 SCREEN 9
590 LINE (10,30)-(10,320)
600 LINE (5,30)-(20,30)
610 LINE (5,78)-(20,78)
620 LINE (5,126)-(20,126)
630 LINE (5,174)-(20,174)
640 LINE (5,222)-(20,222)
650 LINE (5,270)-(20,270)
660 LINE (10,320)-(600,320)
670 GOTO 750
680 PRINT "X", "U", "Q", "L", "B"
690 FOR I=1 TO 20
700 IF X=I*1000 THEN 730
710 NEXT I
720 GOTO 740
730 PRINT X,U,Q,L,B
740 REM ++++++ METODO DE R-T PARA LA ZONA DE EMPUJE++++++
750 Y1=U
760 Y2=B*U*(L^2)
770 Y3=CP0*Q
780 T=T0*(.0065)*X
790 P=P0*(T/T0)^(G/(RA*(.0065)))
800 REM INPUT "Z=":Z
810 K11= (-Y1/B)*(A*Y1/Y2)^.5 + G*(A-B)/(Y1*B)
820 K21= G*(A-B)*Y2/(B*Y1^2) - Y2*K11/Y1
830 K31= ((CA*T+(Y1^2)/(2-Y3))*K21-A*G*Y2/B)*(1/Y2)
840 REM PRINT "K11", "K21", "K31"
850 REM PRINT K11,K21,K31
860 Y11= Y1+(H/2)*K11
870 Y12= Y2+(H/2)*K21
880 Y13= Y3+(H/2)*K31
890 REM PRINT "Y11", "Y12", "Y13"
900 REM PRINT Y11,Y12,Y13
910 K12= (-Y11/B)*(A*Y11/Y12)^.5 - G*(A-B)/(Y11*B)
920 K22= G*(A-B)*Y12/(B*Y11^2) - Y12*K12/Y11
930 K32= ((CA*T+(Y11^2)/(2-Y13))*K22-A*G*Y12/B)*(1/Y12)
940 REM PRINT "K12", "K22", "K32"
950 REM PRINT K12,K22,K32
960 Y21= Y1+(H/2)*K12
970 Y22= Y2+(H/2)*K22

```

```

980 Y23= Y3+(H/2)*K32
990 REM PRINT "Y21",Y22", "Y23"
1000 REM PRINT Y21, Y22, Y23
1010 K13= (-Y21/B)*(A*Y21/Y22)^.5 + G*(A-B)/(Y21*B)
1020 K33= G*(A-B)*Y22/(B*Y21^2) -Y22*K13/Y21
1030 K33= ((CA*T+(Y21^2)/2-Y23)*K23-A*G*Y22/B)/(1/Y22)
1040 REM PRINT "K13", "K23", "K33"
1050 REM PRINT K13,K23,K33
1060 Y31= Y1+(H)*K13
1070 Y32= Y2+(H)*K23
1080 Y33= Y3+(H)*K33
1090 REM PRINT "Y31", "Y32", "Y33"
1100 REM PRINT Y31, Y32, Y33
1110 K14= (-Y31/B)*(A*Y31/Y32)^.5 + G*(A-B)/(Y31*B)
1120 K24= G*(A-B)*Y32/(B*Y31^2) -Y32*K14/Y31
1130 K34= ((CA*T+(Y31^2)/2-Y33)*K24-A*G*Y32/B)/(1/Y32)
1140 REM PRINT "K14", "K24", "K34"
1150 REM PRINT K14,K24,K34
1160 Y1= Y1+(H/G)*(K11+2*K12+2*K13+K14)
1170 Y2= Y2+(H/G)*(K21+2*K22+2*K23+K24)
1180 Y3= Y3+(H/G)*(K31+2*K32+2*K33+K34)
1190 REM *****TERMINA R-T EN LA ZONA DE EMPUJE*****
1200 REM *****SISTEMA DE ECUACIONES*****
1210 U=Y1
1220 L=((Y2/(Y1*B))^.5)
1230 CP=CA+(CP0-CA)*((1-N1)/(1-N0))
1240 Q=(Y3/CP)
1250 N1=1+(N0-1)*(U0/U)*(B0/B)*((L0/L)^2)
1260 RG= RA+(RG0-RA)*((1-N1)/(1-N0))*(N0/N1)
1270 B=(DP*P)/((1-N1)*P+(N1*RG*Q*DP))
1280 A=P/(RA*T)
1290 REM *****TERMINA EL PASO H*****
1300 REM *****TABULA O GRAFICA LOS RESULTADOS*****
1310 X=X+H
1320 IF B<=A THEN 1910
1330 IF E1=1 THEN 1770
1340 IF E1=2 THEN 1380
1350 IF E1=3 THEN 1480
1360 IF E1=4 THEN 1570
1370 IF E1=5 THEN 1690
1380 XU=10+U*2
1390 YU=320-X/100
1400 LINE (108,310)-(108,325)
1410 LINE (206,310)-(206,325)
1420 LINE (304,310)-(304,325)
1430 LINE (402,310)-(402,325)
1440 LINE (500,310)-(500,325)
1450 LINE (598,310)-(598,325)
1460 PSET (XU,YU)
1470 GOTO 1830
1480 XQ=10+Q/2
1490 LINE (128,310)-(128,325)
1500 LINE (246,310)-(246,325)
1510 LINE (364,310)-(364,325)

```

```

1520 LINE (482,310)-(482,325)
1530 LINE (600,310)-(600,325)
1540 YQ=320-X/100
1550 PSET (XQ,YQ)
1560 GOTO 1830
1570 XL=10+L/40
1580 LINE (83,310)-(83,325)
1590 LINE (156,310)-(156,325)
1600 LINE (229,310)-(229,325)
1610 LINE (302,310)-(302,325)
1620 LINE (375,310)-(375,325)
1630 LINE (448,310)-(448,325)
1640 LINE (521,310)-(521,325)
1650 LINE (594,310)-(594,325)
1660 YL=320-X/100
1670 PSET (XL,YL)
1680 GOTO 1830
1690 XB=10+B*350
1700 LINE (157,310)-(157,325)
1710 LINE (304,310)-(304,325)
1720 LINE (451,310)-(451,325)
1730 LINE (598,310)-(598,325)
1740 YB=320-X/100
1750 PSET (XB,YB)
1760 GOTO 1830
1770 REM PRINT "X","U","Q","L","B"
1780 FOR BI= 1 TO 20
1790 IF X=BI*1000 THEN 1820
1800 NEXT BI
1810 GOTO 1830
1820 PRINT X,U,Q,L,B
1830 GOTO 720
1840 REM ++++++TERMINA LA ZONA DE EMPUJE+++++
1850 END
1860 IF E1=1 THEN 2080
1870 IF E1=2 THEN 1920
1880 IF E1=3 THEN 1960
1890 IF E1=4 THEN 2000
1900 IF E1=5 THEN 2040
1910 REM C,E,B
1920 XU=10+U*2
1930 YU=320-X/100
1940 REM PSET (XU,YU)
1950 GOTO 2140
1960 XQ=10+Q/2
1970 YQ=320-X/100
1980 PSET (XQ,YQ)
1990 GOTO 2140
2000 XL=10+L/40
2010 YL=320-X/100
2020 PSET (XL,YL)
2030 GOTO 2140
2040 XB=10+B*350
2050 YB=320-X/100

```

```

2060 PSET (XB,YB)
2070 GOTO 2140
2080 REM PRINT "X","U","Q","L","B"
2090 FOR MA=1 TO 20
2100 IF X=MA*1000 THEN 2130
2110 NEXT MA
2120 GOTO 2140
2130 PRINT X,U,Q,L,B
2140 REM ++++++DATOS DE LA ZONA CONVECTIVA+++++
2150 Y1=U
2160 Y2=B*U*(L^2)
2170 Y3=CP*Q
2180 REM IF B<=A THEN I760
2190 REM PRINT "Y1","Y2","Y3"
2200 REM PRINT Y1,Y2,Y3
2210 REM *****TEMPERATURA Y PRESION ATMOSFERICA*****
2220 IF X<=H1 THEN 2230
2230 IF X>H1 THEN 2280
2240 IF X>=H2 THEN 2310
2250 T=TO-(.0065)*X
2260 P=P0*((T/T0)^(G/(RA*(.0065))))
2270 GOTO 2350
2280 T=TO-(.0065)*H1
2290 P=P0*((T/T0)^(G/(RA*(.0065))))*(EXP(G*(H1-X)/(RA*T)))
2300 GOTO 2350
2310 T=TO-(.0065)*H1+.002*(X-H2)
2320 F1=(EXP(G*(H1-H2)/(RA*(TO-.0065*H1))))*((T/T0)^(G/(RA*.002)))
2330 P=P0*((TO-.0065*H1)/T0)^(G/(RA*(.0065))))*F1
2340 GOTO 2350
2350 K11=(-Y1/8)*(A*Y1/Y2)^.5 + G*(A-B)/(Y1*B)
2360 K21=G*(A-B)*Y2/(B*Y1^2)-Y2*K11/Y1
2370 K31=(CA*T+Y1^2)/2+((K*Y1)^2)/2-Y3*K21-A*G*Y2/B*(1/Y2)
2380 REM PRINT "K11","K21","K31"
2390 REM PRINT K11,K21,K31
2400 REM *****R-T EN LA ZONA CONVECTIVA*****
2410 Y11=Y1+(H2)*K11
2420 Y12=Y2+(H2)*K21
2430 Y13=Y3+(H2)*K31
2440 REM PRINT "Y11","Y12","Y13"
2450 REM PRINT Y11,Y12,Y13
2460 K12=(-Y11/8)*(A*Y11/Y12)^.5 + G*(A-B)/(Y11*B)
2470 K22=G*(A-B)*Y12/(B*Y11^2)-Y12*K12/Y11
2480 K32=(CA*T+(Y11^2)/2+((K*Y11)^2)/2-Y13)*K22-A*G*Y12/B*(1/Y2)
2490 REM PRINT "K12","K22","K32"
2500 REM PRINT K12,K22,K32
2510 Y21=Y1+(H2)*K12
2520 Y22=Y2+(H2)*K22
2530 Y23=Y3+(H2)*K32
2540 REM PRINT "Y21","Y22","Y23"
2550 REM PRINT Y21,Y22,Y23
2560 K13=(-Y21/8)*(A*Y21/Y22)^.5 + G*(A-B)/(Y21*B)
2570 K23=G*(A-B)*Y22/(B*Y21^2)-Y22*K13/Y21
2580 K33=(CA*T+(Y21^2)/2+((K*Y21)^2)/2-Y23)*K23-A*G*Y22/B*(1/Y2)
2590 REM PRINT "K13","K23","K33"

```



```

2600 REM PRINT K13,K23,K33
2610 Y31= Y1+(H)*K13
2620 Y32= Y2+H*K23
2630 Y33= Y3+H*K33
2640 REM PRINT "Y31","Y32","Y33"
2650 REM PRINT Y31,Y32,Y33
2660 K14= (-Y31/R)*(A*Y31/Y32)^.5 + G*(A-B)/(Y31*B)
2670 K24= G*(A-B)*Y32/(B*Y31^2) -Y32*K14/Y31
2680 K34= ((CA*T+(Y31^2)/2+((K*Y31)^2)/2-Y33)*K24-A*G*Y32/B*(1/Y32)
2690 REM PRINT "K14","K24","K34"
2700 REM PRINT K14,K24,K34
2710 Y1=Y1+H*(K11+2*K12+2*K13+K14)/6
2720 Y2=Y2+H*(K21+2*K22+2*K23+K24)/6
2730 Y3=Y3+H*(K31+2*K32+2*K33+K34)/6
2740 REM *****TERMINA R-T EN LA ZONA CONVECTIVA*****
2750 REM *****SISTEMA DE ECUACIONES*****
2760 U=Y1
2770 L=(Y2/(Y1*B))^.5
2780 N1=1+(N0-I)*((L0/L)^2)*(U0/U)*(B0/B)
2790 RG= RA+(RG0-RA)*((1-N1)/(1-N0))*(N0/N1)
2800 CP=CA+(CP0-CA)*((1-N1)/(1-N0))
2810 REM PRINT "P","N1","RG","CP"
2820 REM *****INSTUCCION PARA GRAFICAR O TABULAR*****
2830 Q=Y3/CP
2840 B=DP*P/((1-N1)*P+N1*RG*Q*DP)
2850 A=P/(RA*T)
2860 X=X+H
2870 IF E1=1 THEN 3080
2880 IF E1=2 THEN 2920
2890 IF E1=3 THEN 2960
2900 IF E1=4 THEN 3000
2910 IF E1=5 THEN 3040
2920 XU=10+U*2
2930 YU=320-X/100
2940 PSET (XU,YU)
2950 GOTO 3140
2960 XQ=10 +Q/2
2970 YQ=320-X/100
2980 PSET (XQ,YQ)
2990 GOTO 3140
3000 XL=10+L/40
3010 YL=320-X/100
3020 PSET (XL,YL)
3030 GOTO 3140
3040 XB=10+B*350
3050 YB=320-X/100
3060 PSET (XB,YB)
3070 GOTO 3140
3080 REM PRINT "X","U","Q","L","B"
3090 FOR BM=1 TO 20
3100 IF X=BM*1000 THEN 3130
3110 NEXT BM
3120 GOTO 3140
3130 PRINT X,U,Q,L,B

```

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

```

3140 IF U<=20 THEN 3160
3150 GOTO 2210
3160 REM C,E,B
3170 IF E1=1 THEN 3360
3180 IF E1=2 THEN 3230
3190 IF E1=3 THEN 3260
3200 IF E1=4 THEN 3290
3210 IF E1=5 THEN 3320
3220 REM ++++++INSTRUCCIONES PARA GRAFICAR ++++++
3230 PRINT " GRAFICA DE VELOCIDAD ( U,[0-300] m/s) Vs ALTURA ( X,[0-30] Km)"
3240 GOSUB 3370
3250 GOTO 3360
3260 PRINT " GRAFICA DE TEMPERATURA ( Q,[1000-0] K) Vs ALTURA ( X,[0-30] Km)"
3270 GOSUB 3660
3280 GOTO 3360
3290 PRINT " GRAFICA DE RADIO ( L,[0-20] Km) Vs ALTURA ( X,[0-30] Km)"
3300 GOSUB 3930
3310 GOTO 3360
3320 PRINT " GRAFICA DE DENSIDAD ( B,[2-0] kg/m^3) Vs ALTURA ( X,[0-30] Km)"
3330 GOSUB 4260
3340 GOTO 3360
3350 GOTO 2210
3360 END
3370 LOCATE 3,1
3380 PRINT "30"
3390 LOCATE 6,1
3400 PRINT "25"
3410 LOCATE 10,1
3420 PRINT "20"
3430 LOCATE 13,1
3440 PRINT "15"
3450 LOCATE 16,1
3460 PRINT "10"
3470 LOCATE 20,1
3480 PRINT "5"
3490 LOCATE 23,14
3500 PRINT "50"
3510 LOCATE 23,26
3520 PRINT "100"
3530 LOCATE 23,38
3540 PRINT "150"
3550 LOCATE 23,50
3560 PRINT "200"
3570 LOCATE 23,62
3580 PRINT "250"
3590 LOCATE 23,74
3600 PRINT "300"
3810 PRINT "400"
3820 LOCATE 23,45
3830 PRINT "600"
3840 LOCATE 23,60
3850 PRINT "800"
3860 LOCATE 23,73
3870 PRINT "1000"

```

3880 LOCATE 3,4
3890 PRINT "Altura[Km]"
3900 LOCATE 22,63
3910 PRINT "Temperatura[k]"
3920 RETURN
3930 LOCATE 3,1
3940 PRINT "30"
3950 LOCATE 6,1
3960 PRINT "25"
3970 LOCATE 10,1
3980 PRINT "20"
3990 LOCATE 13,1
4000 PRINT "15"
4010 LOCATE 16,1
4020 PRINT "10"
4030 LOCATE 20,1
4040 PRINT "5"
4050 LOCATE 23,11
4060 PRINT "2"
4070 LOCATE 23,20
4080 PRINT "4"
4090 LOCATE 23,29
4100 PRINT "6"
4110 LOCATE 23,38
4120 PRINT "8"
4130 LOCATE 23,47
4140 PRINT "10"
4150 LOCATE 23,56
4160 PRINT "12"
4170 LOCATE 23,65
4180 PRINT "14"
4190 LOCATE 23,74
4200 PRINT "16"
4210 LOCATE 3,4
4220 PRINT "Altura[Km]"
4230 LOCATE 22,63
4240 PRINT "Radio[Km]"
4250 RETURN
4260 LOCATE 3,1
4270 PRINT "30"
4280 LOCATE 6,1
4290 PRINT "25"
4300 LOCATE 10,1
4310 PRINT "20"
4320 LOCATE 13,1
4330 PRINT "15"
4340 LOCATE 16,1
4350 PRINT "10"
4360 LOCATE 20,1
4370 PRINT "5"
4380 LOCATE 23,19
4390 PRINT "0.5"
4400 LOCATE 23,37
4410 PRINT "1.0"

4420 LOCATE 23.56
4430 PRINT "1.5"
4440 LOCATE 23.74
4450 PRINT "2.0"
4460 LOCATE 3.4
4470 PRINT "Altura[Km]"
4480 LOCATE 22.63
4490 PRINT "Densidad[Kg/m 3]"
4500 RETURN

BIBLIOGRAFIA

- ABRAMOWITZ M., Stegun I. Handbook of Mathematical Functions, Dover.
- ABRAMS H. N. The planet we live on. Inc., Publishers, New York.
- ARTHUR G. H. (1971). Mecanica de fluidos. Buenos Aires/México Limusa wiley.
- BIRD R.B. (1982), Fenomenos De Transporte, Editorial reveré, España.
- CARNAHAN. L W.(1979). Calculo numerico. Metodos, aplicaciones.Editorial Rueda. Madrid.
- CURRIE I. G.(1974), Fundamental Mechanics of Fluids, Mc. Graw-Hill
- DERRICK W. (1985). Ecuaciones Diferenciales Con Aplicaciones, Editorial Calypso, México p. 308-332
- FYSCHER. S.(1984) Pyroclastic Rocks. Berlin Heidelberg New York Tokyo.
- GILL A. E. (1982) Atmosphere-Ocean dynamics. Academic Press, New York, p 1-1790
- GWBasic. Microsoft. Manual de GWBasic.
- JOHN W. & S.(1976). Fluid mechanics. Limusa-Wiley. S. A. P 79-210.
- LANDAU L. D.,(1991), Curso de Fisica Teórica, Mecánica de Fluidos. Reverté.
- MORTON B. R. (1956) Taylor Sir Geoffey, Turner J.S., turbulent gravitational convection from main tained and instantaneous. Proc Roy Soc A234:1-23
- PIÑA G: E.(1978). Termodinamica. Editorial limusa, Mexico. primera edición.
- PLANDTL L. (1954) Esentials of fluid mechanics. Blackie, Glasgow. P1-452.
- SPARKS S. J. (1986) The dimensions and dynamics of volcanics eruption columns. Bull Volcanol 48:3-15
- SPARKS S. J., WILSON L. (1976) Amodel for the formation of ignibrite by the gravitational column collapse. J Geol Soc London 132:441-451
- SPARKS S. J., WILSON L. (1982) Explosive volcanic eruptions V. Observations of plume dynamics during the 1979 soufrire eruption, St. Vicent Geophys J. Rastron soc 69:55-570.

TRING M. W. Newby MP (1952) 4th Symposium on Combustion Cambridge. Mass, USA. p 798.

WILIAM R. D. (1985) Ecuaciones diferenciales con aplicaciones. Editorial Calypso. México

WILSON L. (1976) Explosive volcanic eruptions-III Plinian eruption columns. Geophys JR Astron Soc 45:543-556.

WILSON L., SPARKS S. J., WALKER G. P. L. (1980) Explosive volcanic eruptions IV.-the control of magma properties and conduit geometry on eruption column behavior. Geophys JR Astron Soc 63:117-148.

WOODS AW (1988) The fluid dynamics and thermodynamics of eruption columns. Bull Volcanol 50:169-193

ZEMANSKY M. W. (1973) Calor y Temperatura. Editorial Aguilar: Madrid. 4 Edición.

ZILL D. G. (1988). Ecuaciones diferenciales. Grupo editorial Iberoamericano México D.F. segunda edición.