





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**PAGINACION VARIA**

**COMPLETA LA INFORMACION**

**ESTE TRABAJO ESTÁ DEDICADO A MI ESPOSA ODETTE Y A MI  
HIJO JOSÉ ÁNGEL, POR SER LAS PERSONAS MÁS  
IMPORTANTES EN MI VIDA Y EN AGRADECIMIENTO A LA  
PACIENCIA Y AYUDA QUE SIEMPRE ME HAN CONCEDIDO.**

---

## **AGRADECIMIENTOS**

**A DIOS, por todas las gracias que me ha concedido a lo largo de la vida.**

**A MIS PADRES, Mireya y Angel, por todo el cariño que me han dado siempre y muy especialmente, por sus esfuerzos para facilitarme el camino.**

**A MI HERMANA, Ana Mireya, a mi tía Olga y a mis primas Olga y María Ana, por el apoyo recibido.**

**Al Centro Nacional de Metrología y en especial, al Dr. Salvador Echeverría y al M. en C. Javier Sánchez, por todo el apoyo que me han brindado.**

**Al Dr. Heriberto Márquez, por todos los conocimientos, consejos y apoyo que me ha proporcionado y en general, a todo el Departamento de Óptica del Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.**

**A la UNIVERSIDAD, por todos los conocimientos, experiencias y oportunidades que me ha otorgado.**

**A mis MAESTROS y AMIGOS, particularmente el Ing. Francisco Rodríguez Ramírez, por la dedicación y amistad incondicional que me han brindado.**

**A todas las personas que directa o indirectamente, contribuyeron en el desarrollo de este trabajo.**

---

---

# CONTENIDO

## **INTRODUCCIÓN**

i

## **CAPÍTULO 1**

### **CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE ÓPTICA**

1-1

1.1 La Luz como un Campo Electromagnético	1-1
1.2 La Luz en los Materiales	1-2
1.3 Óptica de Rayos	1-3
1.4 Postulados de la Óptica de Rayos	1-4
1.5 Propagación en un Medio Homogéneo	1-5
1.6 Imágenes Formadas por Refracción	1-8
1.7 Teoría de las Lentes	1-12
1.8 Lentes Delgadas	1-16
1.9 Sistemas de Lentes Delgadas	1-26
1.10 Lentes Gruesas	1-27
1.11 Sistemas de Lentes Gruesas	1-37
1.12 Aberraciones Monocromáticas	1-41
1.13 Otros Parámetros Importantes de las Lentes	1-54
1.14 Óptica de Gradiente de Índice de Refracción	1-56
1.15 Componentes Ópticos de Índice Gradual	1-58

## **CAPÍTULO 2**

### **ÓPTICA GAUSSIANA**

2-1

2.1 Antecedentes	2-1
2.2 Postulados de la Teoría Electromagnética de la Luz	2-2
2.3 Naturaleza y Propiedades de un Medio Dieléctrico	2-6
2.4 Medio Lineal, No Dispersivo, Homogéneo e Isotrópico	2-7
2.5 Postulados de la Óptica de Ondas	2-9
2.6 Ondas Monocromáticas	2-11
2.7 Representación Compleja y la Ecuación de Helmholtz	2-11
2.8 Ondas Elementales	2-14
2.9 Ondas Paraxiales	2-18
2.10 Amplitud Compleja del Haz Gaussiano	2-20
2.11 Propiedades del Haz Gaussiano	2-22
2.12 Transmisión a través de Componentes Ópticos	2-30
2.13 Ondas Electromagnéticas Monocromáticas	2-38
2.14 Ondas Electromagnéticas Elementales en un Medio Lineal, Homogéneo e Isotrópico	2-41
2.15 Relación entre la Óptica Electromagnética y la Óptica de Onda Escalar	2-46
2.16 Transformación y Magnificación Mediante Lentes Simples; Las Ecuaciones de Self para el Haz Gaussiano	2-47

---

---

2.17 Óptica Matricial	2-53
2.18 Transmisión de Haces Gaussianos a Través de Sistemas Ópticos Arbitrarios	2-58

### **CAPÍTULO 3**

#### **ÓPTICA DE FOURIER Y DIFRACCIÓN 3-1**

3.1 Transformada de Fourier Unidimensional	3-1
3.2 Propiedades de la Transformada de Fourier	3-2
3.3 Transformada de Fourier en Dos Dimensiones	3-3
3.4 Propiedades de la Transformada de Fourier Bidimensional	3-4
3.5 Sistemas Lineales de una Dimensión	3-5
3.6 Sistemas Lineales de Dos Dimensiones	3-7
3.7 Modos de los Sistemas Lineales	3-9
3.8 Introducción a la Óptica de Fourier	3-10
3.9 Propagación de la Luz en el Espacio Libre	3-12
3.10 La Difracción de la Luz	3-21
3.11 Formación de Imágenes	3-28
3.12 Sistema Formador de Imágenes de una Sola Lente	3-30

### **CAPÍTULO 4**

#### **INTRODUCCIÓN A LA TECNOLOGÍA DE FIBRAS ÓPTICAS 4-1**

4.1 Historia de la Fibras Ópticas	4-1
4.2 La Luz en las Fibras Ópticas	4-4
4.3 Campos Ondulatorios en una Fibra Óptica	4-11
4.4 Haces Bessel	4-15
4.5 Ondas Guiadas en la Fibra Óptica	4-17
4.6 Generalidades sobre el Acoplamiento de Fuentes Láser a Fibras Ópticas Monomodo	4-20

### **CAPÍTULO 5**

#### **FÍSICA DE LOS DISPOSITIVOS SEMICONDUCTORES 5-1**

5.1 Partículas Cargadas	5-1
5.2 Intensidad de Campo, Potencial y Energía	5-2
5.3 La Unidad eV de Energía	5-4
5.4 La Naturaleza del Átomo	5-5
5.5 Niveles Atómicos de Energía	5-7
5.6 Estructura Electrónica de los Elementos	5-11

---

5.7 La teoría de las Bandas de Energía en los Cristales	5-13
5.8 Aislantes, Semiconductores y Metales	5-15
5.9 Fenómeno de Transporte en los Semiconductores. Movilidad y Conductividad	5-17
5.10 Electrones y Huecos en un Semiconductor Intrínseco	5-20
5.11 Impurezas Donadoras y Receptoras	5-22
5.12 Densidades de Carga en un Semiconductor	5-25
5.13 Distribución de la Energía de Electrones en un Metal	5-26
5.14 La Función de Fermi-Dirac	5-28
5.15 Concentraciones de Portadores en un Semiconductor Intrínseco	5-30
5.16 Nivel de Fermi en un Semiconductor Extrínseco	5-34
5.17 La Unión <i>p-n</i> a Circuito Abierto	5-35
5.18 Estructura de Bandas de una Unión <i>p-n</i> a Circuito Abierto	5-37

**CAPÍTULO 6**

**PRINCIPIOS DE OPERACIÓN DEL DIODO LÁSER,  
UN DISPOSITIVO FOTÓNICO** **6-1**

6.1 Transiciones Radiantes	6-1
6.2 Emisión Estimulada vs. Absorción	6-3
6.3 Algunos Láseres Semiconductores y sus Estructuras	6-7
6.4 Operación del Láser Semiconductor	6-13
6.5 Algunas Características Optoelectrónicas del Láser Semiconductor	6-20

**CAPÍTULO 7**

**PROCESO DE SIMULACIÓN Y PRESENTACIÓN  
DE RESULTADOS** **7-1**

7.1 Parámetros del Diodo Láser	7-1
7.2 Parámetros de la Fibra Óptica Monomodo	7-7
7.3 Caso 1: Esfera de Acoplamiento	7-9
7.4 Caso 2: Lente <i>GRIN</i> de Caras Planas Paralelas	7-31
7.5 Caso 3: Lente <i>GRIN</i> Plano-Convexa (PC)	7-55
7.6 Caso 4: Lente Asférica	7-72

**CONCLUSIONES**

**8-1**

---

**BIBLIOGRAFÍA**

**9-1**

**ANEXO A**  
**ESPECIFICACIONES DEL DIODO LÁSER**

**ANEXO B**  
**ESPECIFICACIONES DE LA FIBRA ÓPTICA**

**ANEXO C**  
**ESPECIFICACIONES DE LA ESFERA DE ACOPLAMIENTO**

**ANEXO D**  
**ESPECIFICACIONES DE LALENTE GRIN PLANO-PLANO**

**ANEXO E**  
**ESPECIFICACIONES DE LALENTE GRIN PLANO-CONVEXA**

**ANEXO F**  
**ESPECIFICACIONES DE LALENTE ASFÉRICA**

---

---

# INTRODUCCIÓN

---

---

## INTRODUCCIÓN

La óptica es una materia de estudio realmente antigua, ya que algunas evidencias nos permiten suponer, que ha sido manejada por el hombre desde hace aproximadamente tres mil años. Si bien en forma intuitiva y no con el rigor científico de nuestros días, los antiguos romanos, egipcios, hebreos y griegos, ya incursionaban en lo que se puede llamar una tecnología óptica. Estos pueblos, contaban con algunos espejos y vidrios de aumento que se utilizaban para muy diversas aplicaciones, las cuales podían ser religiosas, científicas, artesanales o simplemente ornamentales. No obstante que la óptica ha gozado de la atención de muchos de los grandes filósofos y científicos de la humanidad, su historia ha sufrido constantes altas y bajas, situación propiciada por eventos de diversa índole y que han dado origen, tanto a avances vertiginosos, como a largos períodos de letargo.

Antes de abordar los puntos que soportan la estructura de este trabajo, será necesario tratar algunos aspectos básicos, relacionados principalmente con la definición y situación actual de la óptica. Lo anterior, nos obliga igualmente a analizar la interacción de ésta con nuevas disciplinas, surgidas del avance científico y tecnológico y muy especialmente, con la electrónica.

Desde un punto de vista formal, la óptica es la rama de la física que se encarga del estudio de la generación, propagación y detección de la luz. En cuanto a su desarrollo reciente, podemos distinguir tres acontecimientos de fundamental relevancia, sucedidos en los últimos treinta años y que son los responsables del rejuvenecimiento de la óptica y de su creciente importancia dentro de la tecnología moderna. Estos acontecimientos son: la invención del láser, la fabricación de fibras ópticas de baja pérdida y la introducción de dispositivos ópticos semiconductores. Como resultado de estos desarrollos, han emergido nuevas disciplinas y se han comenzado a utilizar una serie de términos nuevos para describirlas; como por ejemplo: electro-óptica, optoelectrónica, electrónica cuántica, óptica cuántica y tecnología de onda de luz. No obstante que existe una gran discrepancia, respecto a la utilización precisa de estos términos, se cuenta con un consenso general en lo que se refiere a sus significados.

### I. LA FOTÓNICA

- La **electro-óptica**, está reservada generalmente para los dispositivos ópticos en los que los efectos eléctricos juegan un papel muy importante. Como ejemplo de ello, tenemos a los láseres y los moduladores e interruptores electro-ópticos.
- Por otro lado, la **optoelectrónica** se refiere típicamente a dispositivos y sistemas que en su naturaleza son esencialmente electrónicos, pero que involucran a la luz. A manera de ejemplo, se tienen: diodos emisores de luz, diodos láser, pantallas de cristal líquido y arreglos de fotodetectores.
- El término **electrónica cuántica**, se emplea en relación a dispositivos y sistemas que se basan principalmente, en la interacción de la luz con la materia. En este caso, tenemos nuevamente como ejemplo a los láseres y se anexan, los dispositivos ópticos no lineales utilizados para amplificación óptica y mezcla de ondas.

- 
- Dentro de la **óptica cuántica**, están contenidos los estudios referentes a las propiedades cuánticas y de coherencia de la luz.
  - Finalmente, el término **tecnología de onda de luz**, se ha utilizado para describir los dispositivos y sistemas usados en comunicaciones ópticas y procesamiento óptico de señales.

En los últimos años, el término **fotónica** se ha generalizado en enormes proporciones a nivel mundial. Éste, fue acuñado en analogía a la electrónica y refleja el creciente lazo de unión entre la óptica y la electrónica, el cual ha sido forjado por el papel cada vez más importante, que los materiales y dispositivos semiconductores juegan en los sistemas ópticos. Por su parte, la **electrónica** involucra el control del flujo de carga eléctrica en el vacío o en la materia (semiconductores) y la **fotónica**, se refiere al control de los fotones en el espacio libre o en la materia. Las dos disciplinas se traslapan claramente, ya que los electrones muchas veces controlan el flujo de fotones e inversamente, los fotones controlan el flujo de electrones. El término **fotónica**, también refleja la importancia de considerar la naturaleza de la luz en términos del fotón, para poder describir adecuadamente la operación de muchos dispositivos ópticos.

Este término, se utiliza ampliamente para contener a las áreas o disciplinas mencionadas anteriormente, sin embargo, también podemos incluir a las siguientes:

- La **generación** de luz coherente mediante láseres y de luz incoherente mediante fuentes luminosas como los diodos emisores de luz.
- La **transmisión** de luz en el espacio libre, a través de componentes ópticos convencionales como lentes, aperturas y sistemas formadores de imágenes y a través de guías de onda como las fibras ópticas.
- La **modulación, obturación (switcheo) y muestreo** de la luz, mediante el uso de dispositivos controlados eléctrica, acústica u ópticamente.
- La **amplificación y conversión de frecuencia** de la luz, basadas en la interacción de ondas en materiales no lineales.
- La **detección** de la luz.

Estas áreas han encontrado una creciente y continua aplicación en las comunicaciones ópticas, procesamiento de señales, computación, sensores, dispositivos para despliegue de información (pantallas) e impresión y transporte de energía.

En base a lo anterior, sería justificable clasificar este trabajo dentro de la fotónica, sin embargo, no es de ninguna manera deseable que se pierda el contexto en el cual está desarrollado. Como consecuencia, es preferible mantenerlo bajo la consideración de la electrónica y las comunicaciones, tomando en cuenta el fin que se persigue mediante su presentación.

## II. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA Y OBJETIVO

Una vez que se ha revisado brevemente, la relación que existe entre la electrónica y la óptica, es posible dar un giro y hacer ahora un análisis introductorio desde el punto de vista de la ingeniería electrónica.

Es evidente, que todas las ramas de la electrónica están interrelacionadas en mayor o menor grado y en cuanto a la importancia de cada una de ellas, los sistemas digitales y especialmente las comunicaciones, están inmersas en una carrera de desarrollo tecnológico de gran relevancia. Básicamente, esta situación se debe a la creciente necesidad de manejar mayores volúmenes de información, apoyada por el empleo masivo de las computadoras. Muchos conceptos, como el de las "supercarreteras de la información", que hace algunos años se consideraban prácticamente de ciencia ficción, ahora son una realidad cotidiana o se espera que lo sean en el corto y mediano plazos. Debido al nivel de desarrollo tecnológico que han alcanzado las comunicaciones, al ofrecer una gran capacidad de transmisión de información con una alta confiabilidad y a un costo accesible, ésta se coloca como una herramienta fundamental de soporte de muchas actividades cotidianas. Lo anterior se puede comprobar fácilmente, observando el impacto que las redes de comunicación como *internet*, han tenido en todos los ámbitos, desde el hogar hasta los grandes centros de investigación y desarrollo.

Desde un punto de vista más particular y retomando lo mencionado en la sección anterior, es posible decir que este desarrollo tecnológico se debe principalmente a dos factores: el desarrollo práctico de las fibras ópticas para comunicaciones y la fabricación masiva de dispositivos láser de semiconductores (diodos láser). Ya en el ámbito de las comunicaciones de larga distancia, no sería posible concebir los niveles que se han alcanzado, si cualquiera de estos dos elementos faltara. No obstante este auge, no se debe perder de vista la importancia de los sistemas de comunicación vía satélite, ya que éstos vienen a cubrir el hueco que las comunicaciones ópticas han dejado, por su carácter "alámbrico" que implica una dependencia física de conexión.

Esencialmente, en la tecnología de las comunicaciones por fibra óptica, lo que se está haciendo es transmitir pulsos de luz por cables de vidrio, en lugar de transmitir pulsos eléctricos por cables de cobre; tal y como sería el caso de las comunicaciones alámbricas tradicionales. En el caso que nos compete, las fuentes luminosas que generan los pulsos de luz son los diodos láser. Lo anterior resulta crítico para entender el alcance del problema que se plantea y el objetivo que se persigue, puesto que es obvio que para que el pulso de luz viaje a través del filamento de vidrio, primero debemos encontrar la mejor manera de inyectarlo dentro de él. En consecuencia surge la siguiente pregunta: ¿Cuál es el procedimiento para inyectar la luz dentro de la fibra óptica?

Realmente, existe una gran diversidad de procedimientos o arreglos para llevar a cabo esta tarea (típicamente llamada **acoplamiento**), sin embargo, todos ellos pueden ser clasificados en tres grandes grupos:

- **Acoplamiento directo (*Butt coupling*)**: Este método es el más sencillo de todos y también el menos eficiente. Básicamente, consiste en acercar el diodo láser lo más posible a la fibra óptica (preferentemente que entren en contacto) y dejar que la inyección de luz ocurra como un proceso determinado por la capacidad de recolección de luz de la fibra, conocido como apertura numérica y sin la ayuda de ningún otro elemento.

- 
- **Acoplamiento mediante elementos ópticos (*Optical coupling*):** Este método es el más utilizado actualmente y consiste en utilizar una micro óptica de acoplamiento, para transformar las características del haz emitido por el diodo láser, de tal forma que se adecúen a las características del haz que será propagado por la fibra óptica. Como su nombre lo indica, este trabajo está enfocado hacia el estudio del proceso de acoplamiento mediante este método.
  - **Fibras adelgazadas (*Tapered Fiber*):** Esta técnica, está derivada en parte de la anterior, ya que también se vale de una micro óptica de acoplamiento, pero con la variante de que la parte inicial de la fibra ha sido adelgazada (como la punta de un lápiz), para modificar sus características de entrada (básicamente incrementar la apertura numérica). Mediante este adelgazamiento, la transformación requerida del haz del diodo láser se hace menos drástica y es posible alcanzar mayores eficiencias de acoplamiento. No obstante lo anterior, presenta dos desventajas principales: en primer lugar, el manejo de una fibra de estas características es más delicado y en segundo lugar, su costo es más elevado, dado que el proceso de fabricación se complica.

En este momento, podemos ya identificar los tres elementos básicos que están involucrados dentro del proceso de acoplamiento: el diodo láser, la óptica de acoplamiento y la fibra óptica. Anteriormente, mencionábamos que para llevar a cabo de manera eficiente este proceso, es necesario realizar una transformación o adecuación del haz láser emitido por el diodo. Esto se debe, a que tanto él como la fibra óptica, presentan características propias de emisión y propagación, respectivamente, las cuales deberán ser adaptadas de alguna manera. Es en este punto, donde entra en juego el sistema óptico de acoplamiento. Es necesario hacer hincapié, en que las características de propagación de la fibra no se pueden modificar, ya que dependen de sus características físicas y no obstante que la características físicas del diodo láser tampoco se pueden alterar, si es posible manejar las propiedades del haz que emite.

Es claro, que para poder adaptar las características del haz emitido, es indispensable analizarlas, al igual que las de la fibra óptica. Es por esto, que los Capítulos 4, 5 y 6 del trabajo, están dedicados al estudio de estos dos elementos y en el caso del diodo láser, haciendo mayor énfasis en sus características ópticas (prácticamente los consideraremos como cajas negras, de las que nos interesan únicamente su salida, en el caso del diodo y su entrada, en el caso de la fibra). Por lo que respecta a la óptica de acoplamiento, primeramente es necesario definir qué es un sistema óptico y cuáles son sus propiedades; esto se puede hacer, previamente a la definición de las características de los otros elementos y precisamente, el Capítulo 1 está dedicado a ello.

Sin embargo, podemos decir que el problema de fondo dentro del proceso de acoplamiento, no son las características de la fuente luminosa, de la fibra o del sistema óptico, sino de la naturaleza misma de la luz; es decir, la luz presenta ciertas propiedades, que inevitablemente decrementan el desempeño del sistema de acoplamiento. Es por esto, que parte del Capítulo 1 y los Capítulos 2 y 3, están dedicados a realizar un estudio introductorio de las diferentes teorías que abordan el problema de la naturaleza de la luz, de su propagación a través del espacio libre y de su interacción con los elementos ópticos.

Como es bien sabido, uno de los objetivos fundamentales que se persiguen en cualquier rama de la ingeniería y en general en cualquier actividad que realizamos, es que los procesos o sistemas trabajen con la mayor eficiencia posible. Lo anterior permitirá optimizar los recursos con los que se cuenta, ya sean financieros, humanos, tecnológicos, naturales, energéticos, etc. En el caso de nuestro trabajo, la eficiencia de acoplamiento puede entenderse desde dos puntos de vista distintos. En primer término, la podemos definir como el grado de compatibilidad que se logre entre el modo u onda electromagnética que será propagado por la fibra y el modo o haz emitido por el diodo láser, después de que este último ha sufrido ciertas transformaciones, algunas benéficas y otras perjudiciales, a su paso a través del espacio libre y del sistema de acoplamiento. Estas transformaciones perjudiciales, se deben básicamente a las características del sistema de acoplamiento y a la naturaleza de la luz y no obstante que las primeras son susceptibles de ser minimizadas, en mayor o menor grado, ambas son inevitables, puesto que no podemos prescindir del sistema óptico y no podemos modificar la naturaleza de la luz.

En segundo término, podemos interpretar a la eficiencia de acoplamiento como una medida de la capacidad de una configuración o sistema óptico, para transferir la energía óptica desde la fuente (diodo láser), hasta el receptor (fibra óptica). Esta interpretación es la que nos permite ver, desde un punto de vista más claro, la importancia de buscar la mayor eficiencia de acoplamiento posible, siendo un hecho, el que la mayor parte de la potencia eléctrica que el diodo láser convierte en potencia óptica, no se logra inyectar a la fibra. En otras palabras, conforme se incrementa la eficiencia del proceso de acoplamiento, estaremos en la posibilidad de utilizar fuentes ópticas de menor potencia. Lo anterior trae como consecuencia, un menor consumo de energía de alimentación, menor disipación de energía en forma de calor, mayor tiempo de vida y sobre todo un menor costo de los productos comerciales y de las actividades de instalación y mantenimiento de sistemas de comunicación por fibra óptica.

Con todo lo que se ha explicado hasta este punto, podría pensarse de primera instancia, que el lograr una alta eficiencia de acoplamiento es el objetivo de este trabajo; sin embargo, ésta debe entenderse como una consecuencia del que realmente es el objetivo específico que se persigue. Este objetivo, es el de encontrar las posiciones óptimas de cada uno de los elementos involucrados (diodo, sistema óptico y fibra); es decir, las distancias y orientaciones entre ellos y con respecto a un eje común.

Al comparar las eficiencias de acoplamiento y tolerancias de posicionamiento, que presenten las diferentes configuraciones ópticas, se podrá determinar cuál es el esquema óptimo y la influencia de algunas de sus características específicas (conocidas como aberraciones), en el deterioro de los parámetros de interés.

De la misma manera en que es necesario establecer y definir los objetivos que se persiguen, también es muy importante delimitar los alcances de este trabajo. Ciertamente, no se pretende diseñar un sistema óptico y tampoco se hará una propuesta de optimización para reducir el efecto de las aberraciones sobre la eficiencia de acoplamiento o las tolerancias de posicionamiento. Lo que se pretende, es establecer una metodología sencilla y confiable, para evaluar elementos comercialmente disponibles y que se han identificado como los más comúnmente utilizados por la industria, para llevar a cabo la tarea de acoplamiento.

---

### III. SELECCIÓN Y APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA

Como se mencionaba anteriormente, el optimizar el acoplamiento de un láser de semiconductor a una fibra óptica, es un aspecto muy importante dentro del diseño y fabricación de diversos dispositivos para comunicaciones ópticas; especialmente, en el caso de las cabezas ópticas transmisoras. Sin embargo, el modelado realista del proceso de acoplamiento no es una tarea fácil y en consecuencia, algunas aproximaciones se limitan a evaluar por separado los diferentes parámetros involucrados y otras tratan solamente casos particulares. Ya sea en un caso o en el otro, un factor común es el hecho de que no se considere el efecto de las aberraciones sobre la deformación del frente de onda, o de la difracción sobre la densidad de energía en el haz (esta última es una característica ineludible de la luz, ya que es parte de su naturaleza y se trata en el Capítulo 3).

Existe un gran número de publicaciones y estudios referentes a la eficiencia de acoplamiento, diseño de elementos ópticos (lentes) especiales para esta aplicación, determinación de tolerancias de posicionamiento, etc.. Sin embargo, no es posible decir que exista un consenso respecto a la metodología a seguir e inclusive, nos atreveríamos a decir que en realidad no existe una metodología que contenga los pasos generales, para atacar el problema de acoplamiento y determinar el posicionamiento óptimo de los tres elementos básicos involucrados. En consecuencia, cada autor propone una aproximación distinta, basada en su punto de vista particular o en una necesidad práctica muy específica, lo que en la mayoría de las ocasiones, dificulta el análisis de los pasos que se siguieron o la posibilidad de aplicarla a otros casos similares.

Como resultado de lo anterior, este trabajo pretende establecer una metodología general para resolver el problema de acoplamiento, considerando cuatro elementos ópticos de los más comúnmente utilizados para este fin y que son: la Lente Esférica (*ball lens*) o Esfera de Acoplamiento, la Lente de Índice de Gradiente (*GRIN*) de caras planas paralelas, la lente *GRIN* Plano-Convexa y la lente Asférica. A pesar de que el planteamiento se hace, para casos específicos de estos cuatro tipos de elementos, es posible considerar que la metodología utilizada podría aplicar, en términos generales, para otros componentes o combinaciones de ellos. A este respecto, los esquemas de acoplamiento propuestos son los siguientes:

**Diodo Láser → Esfera de Acoplamiento → Fibra Óptica**

**Diodo Láser → Lente *GRIN* Plano-Plano → Fibra Óptica**

**Diodo Láser → Lente *GRIN* Plano-Convexa → Fibra Óptica**

**Diodo Láser → Lente Asférica → Fibra Óptica**

En donde la esfera de acoplamiento es, como su nombre lo indica, una micro esfera de vidrio de índice de refracción constante, con ciertas propiedades ópticas y características de formación de imagen. Por otro lado, la lente *GRIN* (acrónimo de *GRaded INdex*) es un cilindro de vidrio que cumple con ciertas propiedades ópticas y cuya principal característica es, que su índice de refracción presenta una variación radial de perfil parabólico, siendo mayor en el eje longitudinal de la lente.

Esta característica provoca un efecto conocido como refracción continua y se le llama Plano-Plano, porque sus dos caras de entrada/salida son planas, paralelas y perpendiculares a su eje longitudinal. La lente *GRIN* Plano-Convexa es muy similar a la anterior y su principal diferencia, radica en el hecho de que sus caras de entrada/salida no son planas y paralelas entre sí, sino que una es plana y la otra es convexa. Finalmente, la lente *Asférica* es la que más recientemente ha salido al mercado comercial y la característica más importante que presenta, es que la curvatura de sus caras no es de tipo esférica, siendo distinta en cada una de ellas.

La metodología propuesta pretende ser sencilla, de tal forma que se entienda el cómo y el por qué de cada uno de sus pasos. Como se mencionó anteriormente, la solución al problema de acoplamiento requiere de una clara comprensión de las características de los elementos involucrados y de la propagación de la luz; sin embargo, ya que el objetivo general consiste en inyectar en la fibra óptica, la luz láser emitida por el diodo, el primer paso debe ser el analizar las características de emisión de la fuente y las características de entrada del receptor. Este análisis, se hace en base a los datos proporcionados por los respectivos fabricantes de dichos elementos y nos permitirán determinar las transformaciones que se requieren para adecuar el haz de luz.

Una vez que se han determinado las características del diodo láser y de la fibra óptica y que en el desarrollo del trabajo se les considerará, respectivamente, como el objeto y la imagen, será necesario hacer una primera aproximación de las distancias axiales de separación entre cada uno de estos elementos y el sistema óptico. Tomando en cuenta que el haz láser tiene características particulares de propagación, por lo que se le considera un haz Gaussiano, no es conveniente aplicar las ecuaciones tradicionales de la óptica de rayos. En su lugar, se ha escogido la ecuación desarrollada por *Sidney A. Self* de la Universidad de Stanford y que constituye una variante de la ecuación de las lentes delgadas, fundamentada en un parámetro muy importante de los haces Gaussianos: el intervalo de Rayleigh. Aquí es muy importante aclarar, que esta ecuación solamente se aplica al caso de la esfera de acoplamiento y bajo ciertas consideraciones, al caso de la lente esférica, ya que los otros componentes ópticos no se rigen bajo las ecuaciones de las lentes convencionales y en su caso, se aplican las ecuaciones proporcionadas por el fabricante de cada uno de ellos.

En este punto, se podría pensar que la generalidad de la metodología se rompe y es por eso que no se ha llegado a un consenso generalizado. Sin embargo, los fabricantes de las lentes *GRIN* y de la lente *Asférica*, proporcionan los parámetros y las ecuaciones que rigen su comportamiento, por lo que conociéndolos y aplicándolos adecuadamente, se alterará la forma del método, pero el fondo (la filosofía del procedimiento) se mantendrá en un carácter general.

Como se mencionaba al inicio de esta sección, el modelado del proceso de acoplamiento no es sencillo, ya que los factores causantes de las pérdidas que se registran son muy diversos (amplificación del sistema óptico, obstrucciones, elipticidad del haz emitido por el diodo láser, aberraciones, etc.). Es por esto, que una herramienta fundamental empleada en el trabajo, es el software de análisis fotónico "SOLSTIS" (versión 1.0), desarrollado por la compañía francesa *OPTIS*. Cabe mencionar que este software, es utilizado por diversas instituciones de reconocido prestigio a nivel mundial, como son: Aerospatiale, Alcatel, Corning, Renault, Osrsm, Telefunken Microelectronic, Bosch, Universidad de Cambridge, Hewlett-Packard, Rolls-Royce, Universidad de Liverpool, AMP, AT&T, Eastman Kodak, Hughes Technology, Lockheed, Lucent Technologies, NASA, Texas Instruments, FUJI, Agencia Japonesa de Defensa, JVC, Matsushita, NEC, NIKON, OLYMPUS, RICOH, SANYO, SONY, Agencia Espacial Europea, Goldstar, Samsung, VOLVO, entre otros; lo que de alguna manera, constituye un respaldo de su efectividad.

---

Esta herramienta, nos permite realizar una simulación de la generación, propagación y recepción del haz láser a través de los sistemas propuestos, así como una evaluación de la eficiencia de acoplamiento y datos referentes al posicionamiento óptimo de los elementos. Dado que se trata de un paquete muy sofisticado, sería fácil proporcionarle datos iniciales arbitrarios, a partir de los cuales realizara la simulación y optimización; sin embargo, esto no es conveniente dado que nos limita a simples manipuladores de una herramienta, ajenos a la comprensión de lo que ésta realiza. Es por eso que los primeros capítulos del trabajo, están dedicados al planteamiento teórico que sustenta las características de los elementos involucrados y en consecuencia, la operación del software.

El primer paso del proceso de evaluación (ecuación de Self y ecuaciones de los fabricantes de las lentes *GRIN* y *Asférica*), consiste entonces en encontrar una primera aproximación de los valores correspondientes a las distancias objeto e imagen, que le serán proporcionados al software para que inicie la primera simulación. Este paquete, cuenta con dos niveles de complejidad o módulos en lo que respecta al análisis, lo cual es muy conveniente ya que nos permitirá observar los resultados que se obtienen, cuando se consideran algunas aproximaciones que simplifican el problema y cuando se toman en cuenta todos los factores de influencia.

El primero de estos módulos, consiste en una simulación de la propagación del haz Gaussiano sin considerar las aberraciones que deforman el frente de onda, ni las obstrucciones que dispersan el patrón de difracción (conocido también como patrón de irradiancia o densidad de energía). La simulación inicial, planteada en el párrafo anterior, está realizada bajo este esquema y al concluirse, el software nos proporcionará las correcciones necesarias respecto a la ubicación axial de la imagen, para una distancia objeto fija (la calculada inicialmente con la ecuación de *Self* o de la lente *GRIN*). Adicionalmente, se generan los resultados correspondientes a la dependencia de la eficiencia de acoplamiento, con respecto a los desalineamientos angulares y ortogonales del plano de entrada de la fibra óptica. Esta primera simulación, se basa en la teoría de matrices de transformación de rayos, aplicada a haces Gaussianos.

En este punto, se cuenta ya con dos juegos de datos: los calculados inicialmente y los calculados por el software y la diferencia entre estos valores, de alguna manera refleja las diferencias entre la teoría de rayos modificada y la teoría matricial de propagación, que es un poco más rigurosa.

El tercer paso, consiste en recalcular la posición axial del plano de entrada de la fibra óptica (imagen), considerando todos los factores de influencia que decrementan la eficiencia de acoplamiento; es decir, se introducen las aberraciones y la difracción mediante el segundo nivel de complejidad (los fundamentos teóricos se explican, respectivamente, en los Capítulos 1 y 3). Los resultados obtenidos en esta etapa, nos darán una clara idea de las diferencias que existen entre cada una de las teorías empleadas para simular las deformaciones que sufre un haz, cuando éste se propaga a través de nuestro sistema óptico (espacio libre + elementos ópticos). Además, al igual que en el paso anterior, se obtendrán las curvas de la eficiencia de acoplamiento en función de los desalineamientos angulares y ortogonales del plano de entrada de la fibra y que representan las tolerancias de posicionamiento.

Las ventajas que ofrece una herramienta de este tipo, son realmente muy atractivas, ya que para ciertos casos, sería posible prescindir de la necesidad de realizar experimentos complejos de alta exactitud, que requieren de equipo muy sofisticado y costoso, con la consecuente inversión de tiempo. A este respecto y para complementar este trabajo, hubiera sido conveniente verificar mediante una etapa experimental, los resultados obtenidos con el software. Sin embargo, a pesar de que se contaba con la mayoría de los componentes requeridos (lentes, monturas, fibra óptica, sistema automático de nanoposicionamiento, etc.), no fue posible conseguir el diodo láser que se utilizó para la simulación. Lo anterior, se debió principalmente a dos razones:

1. Hasta donde se sabe, la información técnica y económica concerniente a este tipo de dispositivos, no se consigue en nuestro país; por tal motivo, es necesario contactar a diferentes proveedores en el extranjero e inclusive, directamente al fabricante. Por diferentes medios, se sabe que estos tienen un tiempo de respuesta muy lento, tanto para proporcionar esta información, como para surtir un pedido y en consecuencia, esta situación habría atrazado significativamente la conclusión del trabajo.
2. El costo de este tipo de dispositivos, es sumamente elevado y por la información que se pudo obtener, se sabe que oscila entre los 6 000 y los 9 000 Dólares Americanos.

---

**CAPÍTULO 1**

**CONCEPTOS  
FUNDAMENTALES DE ÓPTICA**

---

## CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE ÓPTICA

En muchas de las áreas de la ciencia y la ingeniería, la comprensión de los conceptos y fenómenos involucrados en cada una de ellas resulta difícil, ya que sus resultados no pueden ser visualizados directamente. En el campo de la óptica, en la mayoría de las ocasiones, se puede observar exactamente que es lo que está ocurriendo y consecuentemente, al variar las condiciones, es posible observar inmediatamente los cambios en los resultados. Lo anterior hace que la óptica sea considerada por muchos como un campo fascinante de estudio.

### 1.1 LA LUZ COMO UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

La luz mediante la cual podemos ver el mundo que nos rodea, es solamente una parte del intervalo o espectro de ondas electromagnéticas, que van desde las frecuencias de radio hasta la radiación gama de alta potencia (ver Figura 1.1). Estas ondas, que son una combinación de campos eléctricos y magnéticos que pueden propagarse en el vacío, tienen como sus características más distintivas a la longitud de onda y la frecuencia de oscilación. El intervalo de longitudes de onda para la luz visible, inicia aproximadamente en los 400 nm (nanómetros) y se extiende hasta aproximadamente los 700 nm (un nanómetro es una billonésima de metro). Dado que el presente trabajo está relacionado con las comunicaciones por fibra óptica, es conveniente mencionar que en la mayoría de los trabajos que se realizan en este campo, las fuentes de radiación electromagnética más usuales emiten justamente fuera de la región visible del espectro. Esta región se conoce como cercano infrarrojo y contiene las longitudes de onda que van desde los 800 nm hasta los 1500 nm.

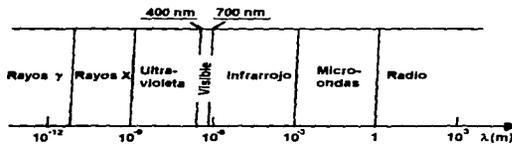


Figura 1.1 El Espectro de Energía Electromagnética.

Puede ser difícil el entender que sucede en un sistema de fibras ópticas o en cualquier otro sistema óptico, si la propagación de la luz a través de dicho sistema es explicado en términos del movimiento ondulatorio de la luz. Para simplificar el estudio, es más sencillo pensar que la luz viaja como una serie de rayos que se propagan a través del espacio.

---

Al respecto, la experiencia que se tiene al observar el paso de la luz a través de las nubes o a través de las hojas de los árboles en un ambiente con neblina, provee un ejemplo muy familiar del concepto de la luz como un conjunto de rayos.

En el vacío, la luz viaja aproximadamente a  $3 \times 10^8$  metros por segundo y en un medio material como el aire, el agua o el vidrio, esta velocidad se reduce. Para el aire, esta reducción es muy pequeña (prácticamente despreciable), pero en el caso del agua puede alcanzar un 25% aproximadamente y en el caso del vidrio varía desde 30% hasta cerca del 50%.

## 1.2 LA LUZ EN LOS MATERIALES

En la mayoría de los casos, los resultados de la interacción entre una onda electromagnética y el medio pueden ser expresados en términos de un solo parámetro, el índice de refracción del medio. El **índice de refracción**,  $n$ , es la razón entre la velocidad de la luz en el vacío ( $c$ ), a la velocidad de la luz en el medio ( $v$ ).

$$n = \frac{c}{v} \quad \text{--- (1.1)}$$

Ya que la velocidad de la luz en un medio es siempre menor que en el vacío, el índice de refracción siempre es mayor a uno. Para el aire el valor es muy cercano a la unidad, en el agua es aproximadamente  $4/3$  ( $n=1,33$ ) y en los vidrios puede variar desde 1,44 hasta 1,9.

Existen otras condiciones que se deben tomar en cuenta en la aproximación que hemos comentado. Primeramente, el índice de refracción varía con la longitud de onda; este efecto se conoce como **dispersión de longitud de onda** y debe entenderse como la tasa de variación del índice de refracción, con respecto a la longitud de onda. En segundo lugar, el medio no solamente puede reducir la velocidad de la luz, sino que también puede absorber parte de ella, conforme va avanzando a través de él.

En un medio homogéneo, que es aquél en el cual el índice de refracción es constante en el espacio, la luz viaja en línea recta y solamente cuando ésta encuentra una variación o discontinuidad en dicho índice, los rayos de luz serán desviados de su dirección original.

En el caso de una variación en el índice de refracción dentro de un material, el comportamiento de la luz será gobernado por la forma en que el índice cambie en el espacio. Por ejemplo, el aire que se encuentra sobre un camino que está siendo calentado por el sol, será menos denso que el aire que se encuentre a una distancia mayor de la superficie del camino; debido a que el índice de refracción se incrementa con la densidad, el índice del aire se incrementará con la altura. Esta condición es conocida como **gradiente del índice de refracción** y es, en este caso, equivalente a tener un prisma extendido sobre el camino con el vértice apuntando hacia abajo (ver Figura 1.2). Para un observador que se encuentre en el camino, la luz proveniente de un objeto delante de él no solamente viajará directamente a sus ojos, ya que parte de la luz proveniente del objeto y que normalmente sería absorbida por el camino, es desviada hacia el observador.

El resultado de este fenómeno es que alguien que mire hacia adelante del camino verá el reflejo, comúnmente llamado espejismo, de un objeto distante que también se encuentre sobre el camino, tal y como si se estuviera reflejando en la superficie de una alberca.

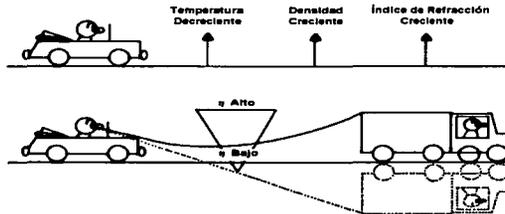


Figura 1.2 Desvío de los rayos de luz por un Gradiente de Índice de Refracción, utilizando como ejemplo el espejismo que se forma en un camino a alta temperatura.

El desvío gradual de la luz mediante un gradiente de índice de refracción, se utiliza en el campo de las fibras ópticas para incrementar la capacidad de transmisión de información de las fibras y para fabricar lentes muy compactas para aplicaciones en los sistemas de comunicación. Esta condición de gradiente de índice de refracción será retomada más adelante, ya que constituye la base del funcionamiento de las lentes de índice de gradiente o *GRIN* (acrónimo de *Graded Index*) y que son parte del estudio de este trabajo, por su aplicación en el acoplamiento de diodos láser a fibras ópticas.

### 1.3 ÓPTICA DE RAYOS

Como se mencionó anteriormente, la luz es un fenómeno de onda electromagnética, descrito por los mismos principios teóricos que rigen todas las formas de radiación electromagnética. La radiación electromagnética se propaga en forma de dos ondas vectoriales mutuamente acopladas, la onda de campo eléctrico y la onda de campo magnético. Sin embargo, es posible describir muchos de los fenómenos ópticos utilizando una teoría de onda escalar, en la que la luz es descrita por una función escalar simple. Esta forma aproximada de tratar a la luz es conocida como óptica de onda escalar o simplemente **óptica de ondas**.

Cuando las ondas de luz se propagan a través y alrededor de objetos cuyas dimensiones son mucho mayores que la longitud de onda, la naturaleza ondulatoria de la luz aún no es totalmente comprendida, por lo que su comportamiento puede ser descrito adecuadamente por rayos que obedecen una serie de reglas geométricas. Este modelo de la luz es llamado **óptica de rayos**. Hablando de una forma más estricta, la óptica de rayos es el límite de la óptica de ondas, cuando la longitud de onda es infinitesimalmente pequeña.

En base a lo anterior, podemos decir que la óptica de rayos es la teoría más simple de la luz y constituye una aproximación que la describe como rayos que viajan en diferentes medios ópticos, de acuerdo con una serie de reglas geométricas; es por esto que la óptica de rayos también se conoce como **óptica geométrica**. No obstante que esta aproximación describe adecuadamente la mayoría de nuestras experiencias cotidianas con la luz, existen muchos fenómenos que la óptica de rayos no puede explicar satisfactoriamente.

A la óptica de rayos le concierne la localización y dirección de los rayos de luz, por lo tanto es muy útil en el estudio de la formación de imágenes. Esta última, consiste en la recolección de rayos de cada punto de un objeto y su redireccionamiento por un componente óptico hacia un punto correspondiente de una imagen. La óptica de rayos, nos permite determinar las condiciones bajo las cuales la luz es guiada dentro de un medio dado, como en el caso de una fibra de vidrio. En un medio isotrópico (medio en el cual el índice de refracción no varía con la dirección), los rayos ópticos apuntan en la dirección del flujo de la energía óptica y en consecuencia, se pueden construir haces en los que la densidad de rayos es proporcional a la densidad de la energía luminosa. Por ejemplo, cuando la luz es generada uniformemente desde una fuente puntual, la energía asociada con los rayos en un cono dado es proporcional al ángulo sólido del cono. Asociado a esto, los rayos pueden ser trazados a través de un sistema óptico para determinar la energía óptica que está cruzando un área dada. Estos últimos conceptos nos serán de gran utilidad para interpretar correctamente algunas de las imágenes generadas por el software de análisis que se utiliza en la etapa de simulación (Capítulo 7).

## 1.4 POSTULADOS DE LA ÓPTICA DE RAYOS

- La luz viaja en forma de rayos. Dichos rayos son emitidos por fuentes de luz y pueden ser observados cuando alcanzan la superficie de un detector.
- Un medio óptico está caracterizado por una cantidad  $\eta \geq 1$ , llamada **índice de refracción**. El índice de refracción es la razón de la velocidad de la luz en el espacio libre,  $c_0$  ó simplemente  $c$ , a la velocidad en un medio dado  $c$  ó  $v$ . Por lo tanto, el tiempo que tarda la luz en viajar una distancia  $d$  es igual a  $d/c = \eta d/c_0$ . El tiempo, es en consecuencia proporcional al producto  $\eta d$ , conocido como la **longitud de la trayectoria óptica**.
- En un medio no homogéneo, el índice de refracción  $\eta(\mathbf{r})$  es una función de la posición  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . La longitud de la trayectoria óptica a lo largo de una trayectoria dada entre dos puntos  $A$  y  $B$  es, por lo tanto:



$$\text{Longitud de Trayectoria Óptica} = \int_A^B \eta(\mathbf{r}) ds \quad \text{--- (1.2)}$$

donde  $ds$  es el elemento diferencial de longitud a lo largo de la trayectoria. El tiempo que le tomará a la luz el viajar de  $A$  hasta  $B$ , es proporcional a la longitud de la trayectoria óptica.

- **Principio de Fermat.** Los rayos ópticos viajando entre dos puntos,  $A$  y  $B$ , siguen una trayectoria tal que, el tiempo de recorrido (o la longitud de la trayectoria óptica) entre los dos puntos es un extremo relativo a las trayectorias adyacentes. La condición de extremo significa que la tasa de cambio es cero:

$$\delta \int_A^B n(\mathbf{r}) ds = 0 \quad \text{--- (1.3)}$$

El extremo puede ser un mínimo, un máximo o un punto de inflexión. Sin embargo, usualmente es un mínimo y en cuyo caso:

**Los rayos de luz viajan a lo largo de la trayectoria de menor tiempo de recorrido**

En algunas ocasiones, el menor tiempo de recorrido es compartido por más de una trayectoria y en consecuencia, todas ellas son seguidas por los rayos en forma simultánea.

A lo largo de este capítulo, utilizaremos los postulados de la óptica de rayos para determinar las reglas que gobiernan la propagación de los rayos de luz, su reflexión y refracción en las fronteras entre medios diferentes y su transmisión a través de diversos componentes ópticos. No obstante las limitaciones de la óptica de rayos, podemos afirmar que una gran cantidad de resultados aplicables a numerosos sistemas ópticos, son obtenidos sin la necesidad de realizar otras consideraciones o aplicar otras reglas respecto a la naturaleza de la luz.

## 1.5 PROPAGACIÓN EN UN MEDIO HOMOGÉNEO

En un medio homogéneo, el índice de refracción es el mismo en cualquier punto y consecuentemente, lo mismo se cumple para la velocidad de la luz; por otro lado, la trayectoria de menor tiempo de recorrido, requerida por el Principio de Fermat, será también la trayectoria de menor distancia. El principio de la trayectoria de menor distancia es conocido como **Principio de Hero**. La trayectoria de menor distancia entre dos puntos es una línea recta, por lo que en un medio homogéneo, los rayos de luz viajan en líneas rectas (ver Figura 1.3).

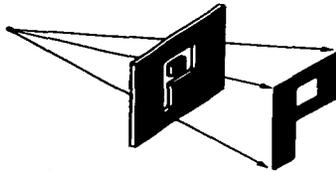


Figura 1.3 Los rayos de luz viajan en líneas rectas, por lo que las sombras son proyecciones perfectas de los obstáculos que las generan.

Como se mencionó en los párrafos anteriores, la idea de que los rayos de luz viajan en línea recta a través del espacio es correcta siempre y cuando, la longitud de onda de la radiación óptica (luz) sea mucho menor que las dimensiones de las ventanas, pasajes o aperturas que puedan restringir su trayectoria. Cuando esta condición no se cumple, el fenómeno de la difracción debe ser considerado y su efecto sobre la dirección y patrón de la radiación debe ser calculado (esto se analizará con más detalle en el Capítulo 3).

Sin embargo, para una primera aproximación y cuando la difracción puede ser ignorada, es posible considerar que el paso de la luz a través de un sistema óptico, puede ser trazado siguiendo las trayectorias rectilíneas o rayos de luz a través del sistema. Lo anterior constituye, como se dijo anteriormente, el dominio de la óptica geométrica.

A manera de comparación, uno de los atractivos del campo de la óptica es que al igual que en un buen juego, las reglas son muy simples y las consecuencias pueden ser tan variadas y en ocasiones tan elaboradas, que uno no se cansa de jugar. A continuación, se presentan las tres leyes fundamentales en base a las cuales se puede expresar la óptica geométrica:

#### 1. Ley de la Transmisión

En una región de índice de refracción constante, la luz viaja en línea recta

#### 2. Ley de la Reflexión

La luz incidente en una superficie plana a un ángulo  $\theta_i$ , con respecto a la normal a esa superficie, es reflejada en un ángulo  $\theta_r$ , igual al ángulo de incidencia (ver Figura 1.4).

$$\theta_i = \theta_r \quad \text{--- (1.4)}$$

### 3. Ley de la Refracción (Ley de Snell)

La luz en un medio de índice de refracción  $\eta_i$ , incidente sobre una superficie plana a un ángulo  $\theta_i$ , con respecto a la normal a esa superficie, es refractada a un ángulo  $\theta_r$ , en un medio de índice de refracción  $\eta_r$ , de acuerdo con la siguiente ecuación (ver Figura 1.4):

$$\eta_i \text{sen} \theta_i = \eta_r \text{sen} \theta_r \quad \text{--- (1.5)}$$

Un corolario para estas tres reglas, es que los rayos incidentes, reflejados, transmitidos (refractados) y la normal a la interfase entre los dos medios están contenidos en el mismo plano, llamado **plano de incidencia** y que se define como el plano que contiene la normal a la superficie y la dirección del rayo incidente.

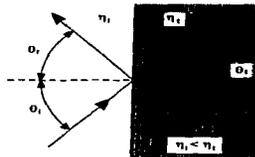


Figura 1.4 Reflexión y Refracción de la luz en una interfase.

Nótese que la segunda de estas ecuaciones (1.5), no está expresada como una razón de senos tal y como puede ser encontrada en alguna literatura, sino como un producto de  $\eta \text{sen} \theta$ . De la forma anterior, la ecuación no resulta ambigua respecto a qué índice de refracción corresponde a cuál ángulo y se facilitará el recordar la forma correcta de asociar las variables al utilizar dicha ecuación.

Un caso especial se debe considerar si el índice de refracción del medio incidente es mayor que el del medio de refracción ( $\eta_i > \eta_r$ ). En tal caso y resolviendo para  $\theta_r$ , tenemos que:

$$\text{sen} \theta_r = \left( \frac{\eta_i}{\eta_r} \right) \text{sen} \theta_i \quad \text{--- (1.6)}$$

En este caso,  $(\eta_i / \eta_r) > 1$  y  $\text{sen} \theta_r$  puede variar de 0 a 1; en consecuencia, para ángulos muy grandes de  $\theta_i$  parecería que se obtendrían valores de  $\text{sen} \theta_r > 1$ . Pero sabemos que esta condición no es posible y por lo tanto, existe un **ángulo crítico**  $\theta_c = \theta_{i,c}$ , donde  $\text{sen} \theta_c = (\eta_r / \eta_i)$  y  $\text{sen} \theta_c = 1$ .

Lo anterior significa que el rayo transmitido está viajando perpendicular a la normal o lo que es lo mismo, paralelo a la interfase tal y como es mostrado por el rayo #2 en la Figura 1.5. Consecuentemente, para ángulos de incidencia  $\theta$ , mayores que  $\theta_c$ , la luz no es transmitida y por el contrario, es reflejada totalmente de regreso hacia el medio incidente (ver el rayo #3, Figura 1.5). Este efecto es conocido como **reflexión interna total** y será analizado nuevamente en el Capítulo 4, ya que constituye la base para explicar la transmisión de la luz a través de una fibra óptica.

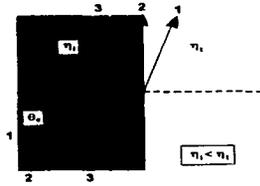


Figura 1.5 Tres rayos incidentes a ángulos cercanos o iguales al ángulo crítico.

## 1.6 IMÁGENES FORMADAS POR REFRACCIÓN

En esta sección, describiremos como las imágenes son formadas por la refracción de rayos en la superficie esférica de un material transparente. Considérense dos medios transparentes, con índices de refracción  $n_1$  y  $n_2$ , donde la frontera entre los dos medios es una superficie esférica de radio  $R$  (ver Figura 1.6). Para el desarrollo, se asumirá que el objeto en el punto  $O$ , se encuentra ubicado en el medio cuyo índice de refracción es  $n_1$  y además, consideremos un conjunto de rayos que parten de  $O$  (llamados **rayos paraxiales**; más adelante se explica este término), formando ángulos muy pequeños entre sí y con respecto al eje (línea trazada entre  $O$  e  $I$ ). Como veremos más adelante, todos esos rayos que se originan en el punto objeto, serán refractados en la superficie esférica y enfocados en un solo punto  $I$ , conocido como punto imagen.

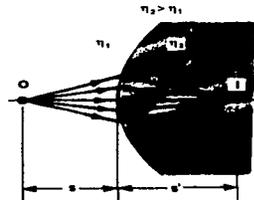


Figura 1.6 Imagen formada por refracción en una superficie esférica. Los rayos que forman ángulos pequeños con respecto al eje, divergen desde un punto objeto en  $O$  y pasan a través del punto imagen,  $I$ .

Procedamos ahora considerando la construcción geométrica de la Figura 1.7, la cual muestra un solo rayo partiendo del punto  $O$  y enfocándose en el punto  $I$ . La ley de Snell, aplicada a este rayo refractado nos origina la siguiente expresión:

$$\eta_1 \text{sen} \theta_1 = \eta_2 \text{sen} \theta_2 \quad \text{--- (1.7)}$$

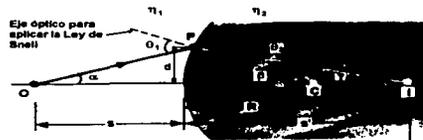


Figura 1.7 Geometría utilizada para derivar la ecuación 1.13

Debido a que se asume que los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son muy pequeños, podemos utilizar las aproximaciones  $\text{sen} \theta_1 \approx \theta_1$  y  $\text{sen} \theta_2 \approx \theta_2$  (ángulos en radianes). Por lo tanto, la ley de Snell queda de la siguiente forma:

$$\eta_1 \theta_1 = \eta_2 \theta_2 \quad \text{--- (1.8)}$$

Ahora, emplearemos la relación trigonométrica que nos indica que el ángulo exterior de cualquier triángulo, es igual a la suma de los dos ángulos opuestos internos. Aplicando esta relación a los triángulos  $OPC$  y  $PCI$  de la Figura 1.7, obtenemos que:

---

$$\theta_1 = \alpha + \beta \quad \text{--- (1.9)}$$

$$\beta = \theta_2 + \gamma \quad \text{--- (1.10)}$$

Si combinamos las últimas tres ecuaciones y eliminamos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , encontramos:

$$\eta_1 \alpha + \eta_2 \gamma = (\eta_2 - \eta_1) \beta \quad \text{--- (1.11)}$$

Nuevamente, en la aproximación de ángulo pequeño,  $\tan \theta = \theta$ , por lo que podemos escribir las relaciones aproximadas siguientes:

$$\alpha = \frac{d}{s}, \quad \beta = \frac{d}{R}, \quad \gamma = \frac{d}{s'} \quad \text{--- (1.12)}$$

donde  $d$  es la distancia que une perpendicularmente al punto  $P$  con la línea que pasa a través de  $O$ ,  $C$  e  $I$  (ver Figura 1.7). Substituyendo estas relaciones en la ecuación 1.11 y dividiendo por  $d$ , obtenemos:

$$\frac{\eta_1}{s} + \frac{\eta_2}{s'} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{R} \quad \text{--- (1.13)}$$

que es la ecuación que define la ubicación de los puntos conjugados  $O$  e  $I$ , para la refracción en una superficie esférica y se conoce como **ecuación de Gauss**. Nótese que para una distancia objeto fija  $s$ , la distancia imagen  $s'$  es independiente del ángulo que el rayo forme con el eje. Lo anterior nos dice que todos los rayos paraxiales se enfocan en el mismo punto  $I$ .

Si deseamos aplicar esta ecuación a una variedad de circunstancias, será necesario que generemos una convención de signos para las variables del sistema; la convención para superficies esféricas refractantes, se muestra en la Tabla 1.1. La misma convención de signos será aplicada al caso de las lentes delgadas, las cuales se discutirán en las siguientes secciones y para aplicarla, asumiremos que el frente de la superficie refractante es el lado por el cual se aproxima la luz a dicha superficie (es general, se considerará que la luz viaja de izquierda a derecha).

$s$	$s'$	$R$
$s$	+	si el objeto se encuentra delante de la superficie (objeto real)
$s$	-	si el objeto se encuentra detrás de la superficie (objeto virtual)
$s'$	+	si la imagen se encuentra detrás de la superficie (imagen real)
$s'$	-	si la imagen se encuentra delante de la superficie (imagen virtual)
$R$	+	si el centro de curvatura se encuentra detrás de la superficie
$R$	-	si el centro de curvatura se encuentra delante de la superficie

Tabla 1.1 Convención de signos para superficies refractantes.

En el caso de que la superficie refractante sea un plano, entonces  $R$  se aproxima a un valor infinito y la ecuación 1.13 se reduce a:

$$\frac{\eta_1}{s} = -\frac{\eta_2}{s'} \quad \text{--- (1.14)}$$

ó, de otra forma:

$$s' = -\frac{\eta_2}{\eta_1} s \quad \text{--- (1.15)}$$

La razón  $\eta_2 / \eta_1$ , representa el índice de refracción del medio 2 relativo al del medio 1. De la ecuación 1.15, podemos observar que el signo de  $s'$  es opuesto al de  $s$ ; por lo tanto, la imagen formada por una superficie refractante plana, se encuentra del mismo lado de la superficie que el objeto. Lo anterior se encuentra ilustrado en la Figura 1.8, para la situación en la cual  $\eta_1$  es mayor que  $\eta_2$  y donde una imagen virtual, se forma entre el objeto y la superficie. Si  $\eta_1$  fuera menor a  $\eta_2$ , la imagen aún sería virtual pero se formaría a la izquierda del objeto.

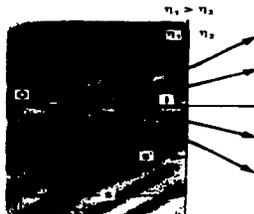


Figura 1.8 La imagen formada por una superficie refractante plana es virtual, esto es, se forma a la izquierda de la superficie refractante.

Como consecuencia de lo planteado en los párrafos anteriores, se puede decir que en términos generales, existen tres casos en lo que respecta a la relación de ubicación entre el objeto y la imagen, cuando se está tratando con una superficie esférica refractante. Pero antes de definir estos casos, asignemos los subíndices  $o$  (por objeto) e  $i$  (por imagen) a los parámetros correspondientes,  $s$  y  $s'$  en la ecuación 1.13:

$$\frac{\eta_1}{s_o} + \frac{\eta_2}{s_i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{R} \quad \text{--- (1.15a)}$$

despejando  $s_i$  de la ecuación anterior:

$$s_i = \frac{\eta_2}{\left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{R}\right) - \frac{\eta_1}{s_o}} \quad \text{--- (1.15b)}$$

Para un valor fijo de  $(\eta_2 - \eta_1)/R$ , tenemos que:

**Caso 1:** De la ecuación 1.15b, podemos observar que cuando el valor de  $s_o$  aumenta (sin llegar al infinito), el valor de  $s_i$  disminuye haciéndose relativamente pequeño.

**Caso 2:** Nuevamente, de la ecuación 1.15b, se ve que cuando la magnitud de  $s_o$  disminuye, la de  $s_i$  crece. En la figura 1.7, esto significa que  $\theta_1$  y  $\theta_2$  crecen hasta que  $s_o = f_o$  y  $s_i = \infty$ ; es decir, de la ecuación 1.15a cuando  $s_o \rightarrow \infty$ :

$$\frac{\eta_1}{s_o} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{R} = \frac{\eta_1}{f_o} \quad \text{--- (1.15c)}$$

**Caso 3:** A partir de la condición del punto anterior y analizando la ecuación 1.15b, si  $s_o \rightarrow 0$ , el valor de  $s_i$  tiende a ser negativo.

## 1.7 TEORÍA DE LAS LENTES

En el sentido tradicional, una lente es un sistema óptico formado por dos o más superficies refractantes, donde al menos una de éstas está curvada; estas superficies son muy a menudo segmentos esféricos y frecuentemente están recubiertas con películas dieléctricas delgadas, que permiten controlar sus propiedades de transmisión.

En la mayoría de los diseños ópticos, estos componentes formadores de imágenes son simétricos respecto a una línea, llamada el **eje óptico**; además, cada una de las superficies curvas de una lente tiene un centro de curvatura. Una línea dibujada entre los centros de curvatura de las dos superficies de la lente, establece el eje óptico de la lente, tal y como se muestra en la Figura 1.9. En la mayoría de los casos, se asume que el eje óptico de todos los componentes es el mismo, ya que esta situación permite considerarlo como una línea de referencia para el sistema.

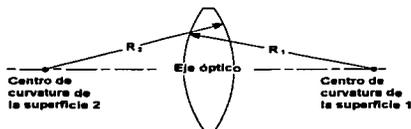


Figura 1.9 Eje óptico de una lente.

Al dibujar varios rayos a través de una serie de lentes, uno puede determinar cómo y dónde ocurre la imagen. Existen convenciones para el trazo de rayos, similares a la mostrada en la Tabla 1.1 y a pesar de que no son universalmente aceptadas, estas convenciones son lo suficientemente conocidas y utilizadas, como para considerar conveniente el adoptarlas en la realización de esquemas y cálculos.

1. Un objeto es colocado a la izquierda del sistema óptico y la luz es trazada a través del sistema, de izquierda a derecha, hasta que un componente refractante altere su dirección general de propagación.

No obstante que uno podría dibujar algún objeto reconocible, para que el sistema formara una imagen de él, el objeto más simple es una flecha vertical (la flecha transformada por el sistema óptico, indicará si las subsiguientes imágenes están erguidas o invertidas con respecto al objeto original y a otras imágenes). Si asumimos que la luz proveniente del objeto es enviada en todas direcciones, es posible dibujar un conjunto de rayos desde cualquier punto de la flecha. Una imagen se formará donde todos los rayos de dicho punto, que son redireccionados por el sistema óptico, converjan nuevamente en un punto.

Una lente positiva es uno de los dispositivos generadores de imágenes más simples. Si el objeto es colocado muy lejos (típicamente se dice que está en el "infinito"), los rayos provenientes del objeto serán paralelos al eje óptico y producirán una imagen en el punto focal de la lente, a una distancia  $f$  de ella (la distancia  $f$  es la **distancia focal** de la lente), tal y como es mostrado en la Figura 1.10(a). Una lente negativa también posee un punto focal, como se muestra en la Figura 1.10(b); sin embargo, en este caso los rayos paralelos no convergen en un punto y por el contrario, aparentan diverger desde un punto a una distancia  $f$  en el frente de la lente.

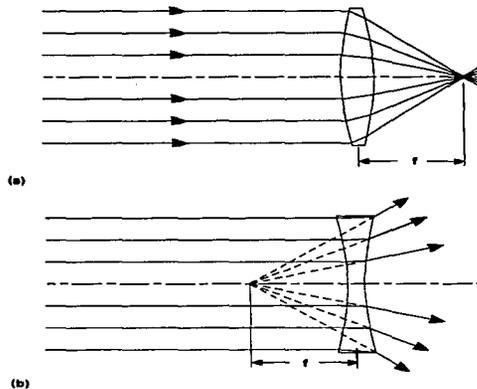


Figura 1.10 Enfocamiento de luz paralela mediante una lente positiva (a) y una lente negativa (b).

2. Un rayo de luz paralelo al eje óptico de una lente, pasará después de ser refractado, a través del punto focal a una distancia  $f$  del vértice de la lente.
3. Los rayos de luz que pasan a través del punto focal de la lente, serán refractados en forma paralela al eje óptico.
4. Un rayo de luz que sea dirigido a través del centro de la lente no es desviado.

La formación de una imagen, mediante una lente positiva, se muestra en la Figura 1.11. Nótese que los rayos se cruzan en un punto en el espacio y si una pantalla fuera colocada en dicho punto, la imagen se vería en foco. Dado que la imagen puede ser encontrada en un plano accesible en el espacio, es llamada **imagen real**.

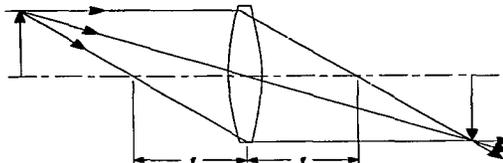


Figura 1.11 Formación de la imagen de un punto objeto, mediante una lente positiva. Una imagen real invertida es formada por la lente.

En el caso de una lente negativa, los rayos provenientes de un objeto no se cruzan después de ser transmitidos, como es mostrado en la Figura 1.12; por el contrario, aparentan venir de algún punto en el frente de la lente. Esta imagen, que no puede ser observada en una pantalla en algún punto en el espacio, es llamada **imagen virtual**. Otro ejemplo de una imagen virtual, es aquella formada por algunos espejos "amplificadores" utilizados en el cuarto de baño. Uno puede producir también una imagen virtual con una lente positiva, si el objeto es colocado entre el vértice y el punto focal. La clasificación de "real" y "virtual", no implica que un tipo de imagen sea útil y la otra no lo sea, simplemente nos indica si los rayos redirigidos por el sistema óptico realmente se cruzan o no.

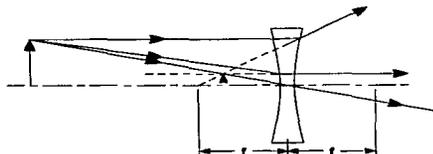


Figura 1.12 Formación de la imagen de un punto objeto, mediante una lente negativa. Una imagen virtual erguida con respecto al objeto, es formada por la lente.

La mayoría de los sistemas ópticos contienen más de un componente (lente o espejo), por lo que la combinación de elementos no es difícil de manejar, de acuerdo con la siguiente regla:

5. La imagen del objeto original, producida por el primer elemento, se convierte en el objeto para el segundo elemento. El objeto de cada elemento adicional, es la imagen del elemento previo.

---

Utilizando la regla anterior, sistemas mucho más elaborados pueden ser manejados en forma similar. En muchos casos, los sistemas muy complejos pueden ser descompuestos en sistemas más simples, que inicialmente puedan ser manejados en forma separada y posteriormente ser unidos nuevamente.

## 1.8 LENTES DELGADAS

Hasta ahora, no hemos utilizado números en los ejemplos mostrados, ya que los métodos utilizados para tratar al sistema óptico son gráficos y el trazo de rayos solamente es utilizado como un apoyo en el diseño. Por lo tanto, podemos afirmar que es a través de los cálculos, como podremos determinar si el sistema hará lo que deseamos que haga y únicamente mediante ellos, podremos especificar los componentes necesarios, modificar los valores iniciales y entender las limitaciones del diseño.

Como se mencionó anteriormente, los rayos que viajan muy cerca del eje óptico de un sistema, es decir, que forman un ángulo muy pequeño con respecto a dicho eje, son más fáciles de manejar debido a las simplificaciones que se pueden realizar en esta región. Esta aproximación es conocida como **aproximación paraxial** y los rayos contenidos en esta región son llamados **rayos paraxiales**.

Antes de proceder, resumiremos en cuatro puntos la convención de signos mostrada en la Tabla 1.1, los cuales están referidos a un sistema coordinado de mano derecha y en el que la luz se propaga a lo largo del eje z.

1. La luz inicialmente viaja de izquierda a derecha en una dirección positiva.
2. Las distancias focales de los elementos convergentes son positivas, los elementos divergentes tienen distancias focales negativas.
3. Las distancias objeto son positivas si el objeto es colocado a la izquierda de la lente y es negativa si se le coloca a la derecha de la lente.
4. Las distancias imagen son positivas si la imagen se encuentra a la derecha de la lente y son negativas si se localizan a la izquierda de ella.

Es posible derivar una relación objeto-imagen para una lente. En referencia a la Figura 1.13, utilicemos dos rayos provenientes de un punto objeto fuera del eje, uno de ellos paralelo al eje y el otro a través del punto focal anterior (también llamado "frontal").

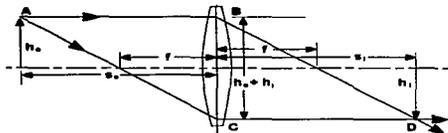


Figura 1.13 Geometría para derivar la ecuación de las lentes delgadas.

Cuando los rayos son trazados, forman un juego de triángulos similares,  $ABC$  y  $BCD$ . Resolviendo para  $ABC$ :

$$\frac{h_0 + h_i}{s_0} = \frac{h_i}{f} \quad \text{--- (1.16)}$$

y en el caso de  $BCD$ :

$$\frac{h_0 + h_i}{s_i} = \frac{h_0}{f} \quad \text{--- (1.17)}$$

Sumando estas dos ecuaciones y dividiendo por  $h_0 + h_i$ , obtenemos la bien conocida **ecuación de la lente delgada o ecuación Gaussiana para las lentes**:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s_i} + \frac{1}{s_0} \quad \text{--- (1.18)}$$

La relación entre una imagen y un objeto, para una lente con distancia focal positiva, es la misma para todas las lentes. Si iniciamos con un objeto en el infinito, encontraremos con la ecuación 1.18 que para una lente positiva, una imagen real se localiza en el punto focal de la lente ( $1/s_0=0$ , por lo tanto  $s_i=f$ ) y conforme el objeto se aproxima a la lente, la distancia imagen se incrementa hasta alcanzar el punto  $2f$ , en el otro lado de la lente. En este punto, el objeto y la imagen son del mismo tamaño y se encuentran a la misma distancia de la lente. Conforme el objeto se mueve de  $2f$  a  $f$ , la imagen se mueve de  $2f$  al infinito. Por otro lado, un objeto que se coloque entre una lente positiva y su punto focal, genera una imagen virtual magnificada que decrece en tamaño conforme el objeto se aproxima a la lente. Para el caso de una lente negativa, la situación es más sencilla: iniciando con un objeto en el infinito, una imagen virtual demagnificada aparenta estar en el punto focal, del mismo lado de la lente que el objeto. Conforme el objeto se mueve hacia la lente, la imagen también lo hace, hasta que ambos alcanzan el mismo tamaño en la lente.

Dado que los conceptos que se manejan en este capítulo, constituyen la base teórica del trabajo desarrollado, a continuación presentaremos otro camino para obtener la ecuación de las lentes delgadas. La idea esencial para localizar la imagen final formada por una lente, es el usar la imagen formada por una superficie refractante como el objeto para la segunda superficie (recordemos que una lente simple está formada por dos superficies refractantes).

Considérese una lente con un índice de refracción  $\eta$  y dos superficies esféricas con radios de curvatura  $R_1$  y  $R_2$ , tal y como se muestra en la Figura 1.14. Un objeto es colocado en el punto  $O$ , a una distancia  $s$  enfrente de la primera superficie refractante. Para nuestro propósito,  $s$  se ha seleccionado de tal forma que se produzca una imagen virtual  $I_1$ , localizada a la izquierda de la lente. Esta imagen es utilizada como el objeto para la segunda superficie, de radio  $R_2$  y que resulta en una imagen real  $I_2$ .

Utilizando la ecuación 1.13 y asumiendo que  $\eta_1=1$ , encontraremos que la imagen formada por la primera superficie satisface la ecuación:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{\eta}{s'_1} = \frac{\eta - 1}{R_1} \quad \text{--- (1.19)}$$

Aplicando ahora la ecuación 1.13 a la segunda superficie y considerando que  $\eta_1=\eta$  y  $\eta_2=1$ ; esto es, el objeto para la segunda superficie (que es la imagen en  $I_1$ ) es tratado como si estuviera dentro de la lente. Tomando  $s_2$  como la distancia objeto y  $s'_2$  como la distancia imagen para la segunda superficie, obtenemos que:

$$\frac{\eta}{s_2} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1 - \eta}{R_2} \quad \text{--- (1.20)}$$

Pero  $s_2 = -s'_1 + t$ , donde  $t$  es el espesor de la lente (recordemos que, de acuerdo a la convención de signos,  $s'_1$  es un número negativo y  $s_2$  debe ser positivo). Tomando en cuenta que estamos considerando lentes delgadas, es posible despreciar el parámetro  $t$ . En esta aproximación y de la Figura 1.14, se puede observar que  $s_2 = -s'_1$ ; por lo tanto, la ecuación 1.20 se transforma a:

$$-\frac{\eta}{s'_1} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1 - \eta}{R_2} \quad \text{--- (1.21)}$$

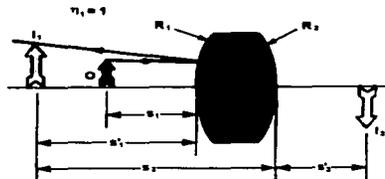


Figura 1.14 Para localizar la imagen de una lente, la imagen en  $I_1$  formada por la primera superficie, es utilizada como el objeto para la segunda superficie. La imagen final se encuentra en  $I_2$ .

Sumando las ecuaciones 1.19 y 1.21, encontramos que:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2'} = (\eta - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{--- (1.22)}$$

Para la lente delgada, podemos omitir los subíndices de  $s_1$  y  $s_2'$  en la ecuación 1.22, llamando a la distancia objeto  $s$  y a la distancia imagen  $s'$ ; tal y como aparece en la Figura 1.15. En base a lo anterior, podemos escribir la ecuación 1.22 de la siguiente forma:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = (\eta - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{--- (1.23)}$$

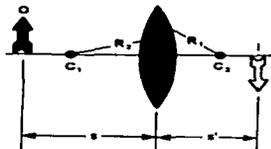


Figura 1.15 La lente biconvexa.

Esta expresión relaciona la distancia imagen  $s'$ , de una lente delgada, con la distancia objeto  $s$  y con las características propias de la lente (Índice de refracción y radio de curvatura). Debemos enfatizar que esta expresión es válida solamente para rayos paraxiales o cuasi paraxiales y cuando el espesor de la lente es pequeño en relación a los radios de curvatura  $R_1$  y  $R_2$ .

---

Ahora definamos la distancia focal  $f$  de una lente delgada, como la distancia imagen que corresponde a una distancia objeto infinita. De acuerdo con esta definición y de la ecuación 1.23, podemos ver que para  $s \rightarrow \infty$ ,  $f = s'$ ; por lo tanto, el inverso de la distancia focal para una lente delgada, está dado por:

$$\frac{1}{f} = (\eta - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{--- (1.24)}$$

Utilizando este resultado, podemos escribir la ecuación 1.23 en una forma alterna:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad \text{--- (1.25)}$$

Tomando en cuenta la diferencia en las nomenclaturas empleadas (referirse a las figuras correspondientes), la ecuación 1.25 resulta idéntica a la ecuación 1.18 (ecuación de la lente delgada) y que comúnmente se conoce también como **ecuación del fabricante de lentes**, ya que permite calcular  $f$  en base a las características de la lente. Esta expresión, también puede ser utilizada para determinar los valores de  $R_1$  y  $R_2$ , requeridos para un índice de refracción dado y una distancia focal deseada. Una lente delgada tiene dos puntos focales, correspondientes a la luz incidente paralela viajando de la derecha o la izquierda. Lo anterior se ilustra en la Figura 1.16 para una lente biconvexa (convergente,  $f$  positiva) y una lente biconcava (divergente,  $f$  negativa). En algunas ocasiones, el punto focal  $F_1$  es llamado **punto focal primario** y  $F_2$  **punto focal secundario**.

Recordando que la convención de signos mostrada en la Tabla 1.1, es válida tanto para el estudio de las superficies refractantes, como para el caso de las lentes delgadas y aplicándola a una lente convergente, podemos observar que cuando  $s > f$ , las cantidades  $s$ ,  $s'$  y  $R_1$  son positivas y  $R_2$  es negativa. Por lo tanto, en el caso de una lente convergente, donde un objeto real forma una imagen real,  $s$ ,  $s'$  y  $f$  son todas positivas. Asimismo, para una lente divergente,  $s$  y  $R_2$  son positivas y  $s'$  y  $R_1$  son negativas; en consecuencia,  $f$  es negativa para este tipo de lentes.

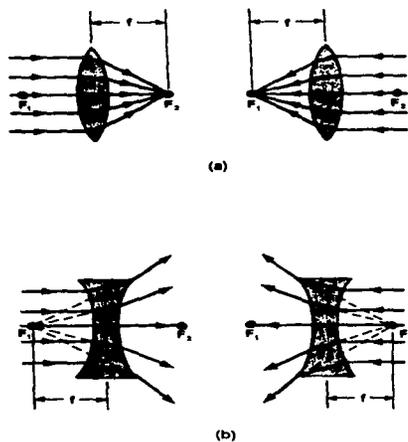


Figura 1.16 Los puntos focales principales de (a) lente biconvexa y (b) lente biconcava.

Los esquemas de diversas formas o perfiles de lentes, se muestran en la Figura 1.17 y en general, se puede notar que una lente convergente ( $f$  positiva) es más gruesa en el centro que en las orillas; mientras que una lente divergente ( $f$  negativa), es más delgada al centro que en sus extremos.

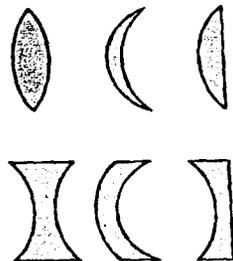


Figura 1.17 Diversos perfiles de lentes: (a) Las lentes convergentes tienen una distancia focal positiva y son más gruesas en el centro. (b) Las lentes divergentes tienen una distancia focal negativa y son más gruesas en los extremos.

Retomando la consideración de que en una lente delgada, su espesor es despreciable, cualquier procedimiento gráfico para resolver un sistema óptico se puede simplificar aún más, si reemplazamos la lente delgada por un plano que pase a través de su centro (ver Figura 1.18).

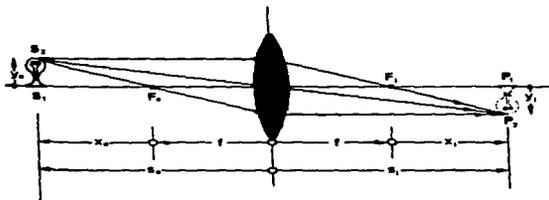


Figura 1.18 Ubicación del objeto y la imagen para una lente delgada, substituyendo esta última por un plano.

Presumiblemente, si extendiéramos cada rayo incidente un poco hacia adelante y cada rayo emergente un poco hacia atrás, cada par se encontraría en este plano. Entonces, la desviación total de cada rayo se puede visualizar como si ocurriera en su totalidad en dicho plano. Esto es equivalente al proceso real, formado por dos desplazamientos angulares separados, uno en cada interfase (como se verá en la siguiente sección, lo anterior equivale a decir que los dos planos principales de una lente delgada coinciden).

Ampliando nuestra convención de signos, las distancias transversales arriba del eje óptico se toman como cantidades positivas, mientras que las de abajo del eje, arrojan valores numéricos negativos. Por consiguiente, en la Figura 1.18,  $y_o > 0$  y  $y_i < 0$ . Aquí la imagen se dice que está invertida, mientras que si  $y_o > 0$  cuando  $y_o > 0$ , se dice que está erguida. Obsérvese que los triángulos  $AOF_i$  y  $P_2P_1F_i$  son similares, por lo tanto:

$$\frac{y_o}{f} = \frac{|y_i|}{x_i} = \frac{|y_i|}{(s_i - f)} \Rightarrow \frac{y_o}{|y_i|} = \frac{f}{(s_i - f)} \quad \text{--- (1.26)}$$

En la misma forma, los triángulos  $S_2S_1O$  y  $P_2P_1O$ , también son similares, lo que origina:

$$\frac{y_o}{s_o} = \frac{|y_i|}{s_i} \Rightarrow \frac{y_o}{|y_i|} = \frac{s_o}{s_i} \quad \text{--- (1.27)}$$

donde todas las cantidades, con excepción de  $y_i$  son positivas. Por lo tanto:

$$\frac{s_o}{s_i} = \frac{f}{(s_i - f)} \quad \text{--- (1.28)}$$

Por otro lado, los triángulos  $S_2S_1F_o$  y  $BOF_o$  también son similares y de acuerdo con ello:

$$\frac{y_o}{x_o} = \frac{|y_i|}{f} = \frac{f}{(s_o - f)} = \frac{|y_i|}{y_o} \quad \text{--- (1.29)}$$

Utilizando las distancias medidas desde los puntos focales y combinándolas con las ecuaciones 1.26 y 1.29, tenemos:

$$\frac{|y_i|}{y_o} = \frac{f}{(s_o - f)} \Rightarrow \frac{y_o}{|y_i|} = \frac{(s_o - f)}{f}$$

$$\frac{f}{(s_i - f)} = \frac{(s_o - f)}{f} \Rightarrow \frac{f}{x_i} = \frac{x_o}{f}$$

$$x_o x_i = f^2 \quad \text{--- (1.30)}$$

La expresión anterior constituye la **forma Newtoniana** de la ecuación de las lentes, cuya primera afirmación apareció en el *Opticks* de Newton en 1704. Los signos de  $x_o$  y  $x_i$  se toman en relación a su foco respectivo; es decir, de acuerdo a la convención de signos establecida,  $x_o$  se toma como positiva a la izquierda de  $F_o$ , mientras que  $x_i$  es positiva a la derecha de  $F_i$ . Para reafirmar lo anterior, es evidente de la ecuación 1.30 que  $x_o$  y  $x_i$  tienen signos iguales y eso significa que el objeto y la imagen deben estar en lados opuestos de sus respectivos puntos focales. Esta es una buena regla para recordarse, sobre todo cuando se está realizando un trazo aproximado de rayos, de tal forma que no se confundan los signos.

La razón de las dimensiones transversales de la imagen final, formada por cualquier sistema óptico, a la de la dimensión correspondiente del objeto se define como **amplificación lateral o transversal** y se denota por  $M_T$ , es decir:

$$M_T = \frac{y_i}{y_o} \quad \text{--- (1.31)}$$

o de la ecuación 1.27:

$$M_T = -\frac{s_i}{s_o} \quad \text{--- (1.32)}$$

Entonces, una  $M_T$  positiva denota una imagen erguida, mientras que un valor negativo significa que la imagen está invertida; sin embargo, el signo de este parámetro se deberá considerar siempre en forma independiente al signo de  $s$  ó  $s'$ . Téngase en mente que  $s_i$  y  $s_o$  son ambas positivas, tanto para objetos como imágenes reales; en consecuencia, todas las imágenes de ese tipo formadas por una lente delgada simple, son invertidas. La expresión Newtoniana para el aumento, se deduce de las ecuaciones 1.26 y 1.29 y de la Figura 1.18, donde:

$$M_T = -\frac{x_i}{f} = -\frac{f}{x_o} \quad \text{--- (1.33)}$$

El término aumento o amplificación puede causar confusiones, ya que la magnitud de  $M_T$  puede ser ciertamente menor que uno, en cuyo caso la imagen es más pequeña que el objeto. Aún más, tendremos que  $M_T = -1$  cuando las distancias objeto e imagen sean positivas e iguales, lo que ocurrirá solamente cuando  $s_o = s_i = 2f$ . Lo anterior resulta ser, la configuración donde el objeto y la imagen están tan cerca uno del otro como es posible (una distancia de separación  $4f$ ).

Presumiblemente, la imagen de un objeto tridimensional ocuparía una región tridimensional del espacio. El sistema óptico puede afectar aparentemente, tanto las dimensiones longitudinales como las transversales de una imagen.

El **aumento longitudinal**,  $M_L$ , que se relaciona con la dirección axial, está definido como:

$$M_L = \frac{dx_i}{dx_o} \quad \text{--- (1.34)}$$

Esta es la razón de una longitud axial infinitesimal en la región de la imagen, a la longitud correspondiente en la región del objeto. Diferenciando la ecuación 1.30, obtenemos:

$$M_L = -\frac{f^2}{x_o^2} = -M_T^2 \quad \text{--- (1.35)}$$

que es la expresión para una lente delgada en un medio único. Evidentemente,  $M_L < 0$ , lo que implica que una  $dx_o$  positiva corresponde a una  $dx_i$  negativa y viceversa. En otras palabras, un dedo apuntando hacia la lente, forma su imagen apuntando en dirección opuesta a ella (ver Figura 1.19).

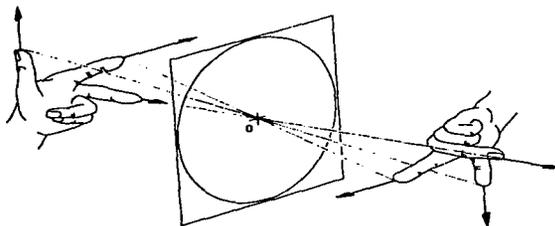


Figura 1.19 Orientación de la imagen para una lente delgada.

Igualmente, la expresión para la amplificación transversal, puede ser obtenida al resolver las ecuaciones 1.16 y 1.17 para  $h_o + h_i$ . Recordando que por definición, el parámetro de amplificación transversal no es más que la razón de la altura de la imagen  $h_i$  a la altura del objeto  $h_o$ , también será la razón de la distancia imagen entre la distancia objeto:

$$M_T = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{s_i}{s_o} \quad \text{--- (1.36)}$$

Finalmente, supongamos que un rayo paraxial fuera de eje sale de la lente paralelo a su dirección de incidencia, tal y como es mostrado en la Figura 1.20. Podemos afirmar que todos esos rayos pasan a través del punto definido como **centro óptico**,  $O$ , de la lente. Para ver esto, dibujemos dos planos paralelos, uno a cada lado de la tangente a la lente en cualquier par de puntos  $A$  y  $B$ . Lo anterior se puede hacer fácilmente seleccionando  $A$  y  $B$ , tal que los radios  $AC_1$  y  $BC_2$  son en sí mismos paralelos y podremos demostrar que el rayo paraxial que pasa por  $AB$ , entra y sale de la lente en la misma dirección.

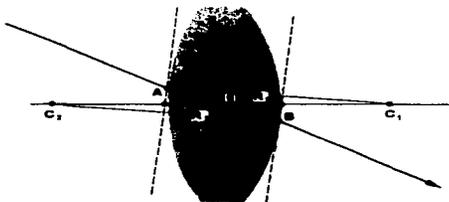


Figura 1.20 El centro óptico de una lente.

Del diagrama, se puede observar que los triángulos  $AOC_1$  y  $BOC_2$ , son similares en el sentido geométrico y por consiguiente sus lados son proporcionales. Como consecuencia:

$$|R_1|(\overline{OC_2}) = |R_2|(\overline{OC_1}) \quad \text{--- (1.37)}$$

y como los radios son constantes, la ubicación de  $O$  también es constante, independientemente de  $A$  y  $B$ . Aplicando las leyes de reflexión y refracción, podemos decir que un rayo que atraviesa un medio limitado por dos planos paralelos, será desplazado lateralmente pero no sufrirá desviación angular. Este desplazamiento es proporcional al espesor, el cual consideráramos despreciable para una lente delgada y en ese caso, los rayos que pasan a través de  $O$  pueden por lo tanto, ser trazados como líneas rectas. Lo anterior, en el caso de las lentes delgadas, conduce a la costumbre de colocar  $O$  entre los vértices.

## 1.9 SISTEMAS DE LENTES DELGADAS

Los cálculos involucrados en la combinación de lentes delgadas, no son más complicados que los requeridos para una sola lente. Como se indicó anteriormente, la clave del análisis está en considerar que la imagen formada por una lente, constituye el objeto para la siguiente lente y así sucesivamente hasta completar el sistema.

A manera de ejemplo, una situación particular se presenta en la Figura 1.21, donde una imagen virtual creada por una lente negativa de distancia focal desconocida,  $f_1$ , es re proyectada por una lente positiva de distancia focal conocida,  $f_2$ . Determinando cuál debe ser la distancia objeto  $s_2$ , para esta longitud focal y distancia imagen, la localización del punto imagen para la lente negativa puede conocerse, basándonos nuevamente en la regla de que la imagen de una lente sirve como objeto para la lente que le sigue. La distancia imagen  $s_1$  para la lente negativa, es la separación entre las lentes,  $t_1$ , menos la distancia objeto  $s_2$ , de la lente positiva. Debido a que la distancia objeto original,  $s_0$  y la distancia imagen  $s_1$  se han encontrado, la longitud focal de la lente negativa puede calcularse mediante la ecuación de la lente delgada.

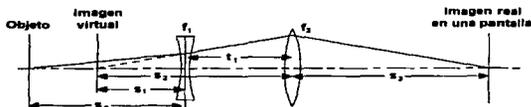


Figura 1.21 Determinación de la distancia focal de una lente negativa, mediante el uso de una lente positiva de distancia focal conocida.

En muchos diseños ópticos, se utilizan diversas lentes en forma conjunta para generar una imagen mejorada. La distancia focal efectiva de una combinación de lentes, puede ser encontrada mediante el método de trazo de rayos; analíticamente y para el caso de dos lentes delgadas en contacto, la distancia focal efectiva está dada por:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad \text{--- (1.38)}$$

## 1.10 LENTES GUESAS

La sección anterior, estuvo relacionada con la teoría paraxial aplicada a sistemas de lentes delgadas esféricas y en donde las dos aproximaciones predominantes fueron, obviamente, el despreciar el espesor de la lente y que la teoría de primer orden (óptica paraxial) era suficiente para explicarlas. Ninguna de estas dos suposiciones puede ser sustentada en el diseño exacto de un sistema óptico, pero ambas reunidas, constituyen la base para una solución bastante aproximada. En esta sección, el análisis de las lentes será tratado desde un punto de vista más avanzado, al examinar el caso de las lentes gruesas.

La Figura 1.22 describe una lente gruesa, es decir, una cuyo espesor en ningún caso es despreciable. Como se verá, también puede enfocarse en forma más general como un sistema óptico, permitiendo con ello la posibilidad de que esté formada por varias lentes simples y no solamente por una. Los puntos focales primero y segundo, o si se desea, los focos objeto e imagen,  $F_o$  y  $F_i$ , pueden ser medidos convenientemente desde los dos vértices externos. En este caso, tendremos las longitudes focales frontal y posterior ya conocidas, denotadas por **DFF** y **DPI**.

Quando se prolongan los rayos de entrada y salida, éstos se cruzarán en algunos puntos y sus intersecciones formarán una superficie curva que puede estar dentro o fuera de la lente. Esta superficie, que es aproximadamente un plano en la región paraxial, se llama **plano principal**. Los puntos donde los planos principales primario y secundario (mostrados también en la Figura 1.22) cruzan el eje óptico, son conocidos como el **primero y segundo punto principal**,  $H_1$  y  $H_2$  respectivamente. Ellos constituyen un conjunto de referencia muy útil, a partir del cual se pueden medir varios parámetros.

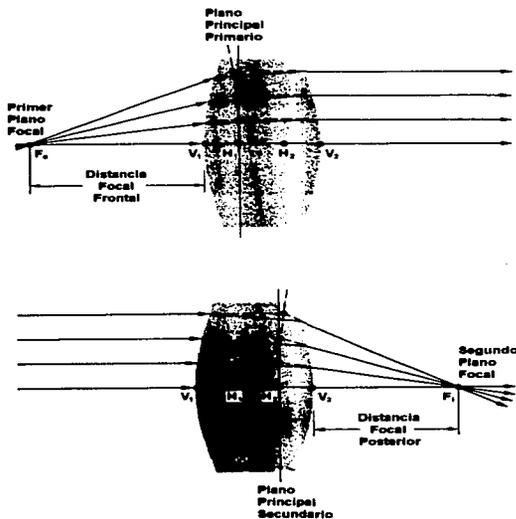


Figura 1.22 Una lente gruesa.

En la sección correspondiente a las lentes delgadas, se observó que un rayo atravesando una lente por su centro óptico, sale paralelo a su dirección de incidencia y se le conoce como **rayo principal**. Extendiendo ambos rayos de entrada y salida, hasta cruzar el eje óptico, se localizan los llamados **puntos nodales**,  $N_1$  y  $N_2$  de la Figura 1.23.

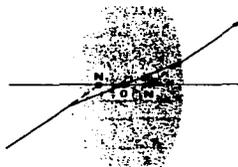


Figura 1.23 Puntos nodales.

Cuando la lente está rodeada por el mismo medio, generalmente aire, los puntos nodales y principales coinciden. Los seis puntos, dos focales, dos principales y dos nodales, constituyen los **puntos cardinales** del sistema. Como se muestra en la Figura 1.24, los planos principales puede caer completamente fuera del sistema de lentes. Obsérvese que en la lente simétrica, los planos principales están simétricamente localizados, de manera razonable. En el caso de lentes, ya sea plano-cóncavas o plano-convexas, un plano principal es tangente a la superficie curva, tal y como era de esperarse por la definición (aplicada a la zona paraxial). Como un ejemplo de contraste, para una lente menisco los puntos principales ciertamente estarán fuera de ella. Frecuentemente, se habla de esta sucesión de formas como un ejemplo de "doblamiento de lentes". Una regla de oro para lentes de vidrios ordinarios en aire, es que la separación  $H_1H_2$  iguala aproximadamente, una tercera parte del grueso de la lente  $V_1V_2$ .



Figura 1.24 Doblamiento de una lente.

La lente gruesa puede ser considerada entonces, como formada por dos superficies refractoras esféricas, separadas por una distancia  $d$  entre sus vértices y en las que un mismo rayo de luz incide a alturas distintas en cada una de ellas; tal y como procedimos en el caso de una lente delgada. Continuemos ahora con la deducción de las ecuaciones que rigen el comportamiento de las lentes gruesas, apoyándonos en la Figura 1.25.

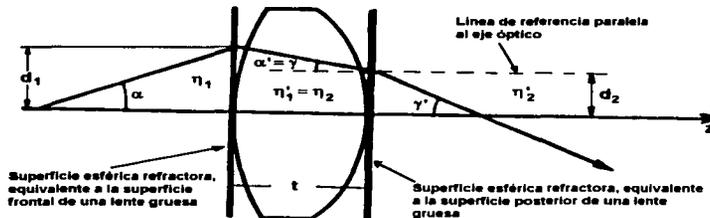


Figura 1.25 Diagrama para trazo paraxial a través de un sistema de superficies esféricas. En esta geometría, utilizada para derivar la ecuación de la lente gruesa, las distancias objeto e imagen ( $s$  y  $s'$ ) se expresan en términos del ángulo y altura de incidencia del rayo, despreciando la variación por la curvatura de la superficie de la lente.

Como primer paso, retomemos las relaciones aproximadas que se obtuvieron para la Figura 1.7 (ecuación 1.12) y combinándolas con la ecuación 1.13, obtenemos lo siguiente:

$$\alpha = \frac{d}{s}, \quad \gamma = \frac{d}{s'} \Rightarrow \frac{\eta_1 \alpha}{d} + \frac{\eta_2 \gamma}{d} = \frac{(\eta_2 - \eta_1)}{R}$$

$$\eta_1 \alpha + \eta_2 \gamma = \frac{d(\eta_2 - \eta_1)}{R} \quad \text{--- (1.39)}$$

Combinando los parámetros de la Figura 1.25 con la ecuación anterior y ampliando nuestra convención de signos al establecer que, todo ángulo será positivo cuando el rayo que lo forma con la horizontal, tenga que girarse en el sentido de las manecillas del reloj para alcanzar al eje óptico; en caso contrario, el ángulo será negativo. De lo anterior, tenemos:

$$\eta_1' = \eta_2, \quad \alpha' = \gamma \Rightarrow \eta_1' \alpha' = \eta_2 \gamma \quad \text{--- (1.40)}$$

$$\eta_1 \alpha - \eta_1' \alpha' = \frac{d_1(\eta_1' - \eta_1)}{R_1} \quad \text{--- (1.41)}$$

Obteniendo una ecuación para la segunda superficie, equivalente a la ecuación 1.41:

$$-\eta_2 \gamma - \eta_2' \gamma' = \frac{d_2(\eta_2' - \eta_2)}{R_2} \quad \text{--- (1.42)}$$

$$\eta_2 \gamma + \eta_2' \gamma' = \frac{d_2 (\eta_2 - \eta_2')}{R_2} \quad \text{--- (1.43)}$$

substituyendo la ecuación 1.40 en la 1.43:

$$\begin{aligned} \eta_1' \alpha' + \eta_2' \gamma' &= \frac{d_2 (\eta_2 - \eta_2')}{R_2} \\ \eta_1' \alpha' &= \frac{d_2 (\eta_2 - \eta_2')}{R_2} - \eta_2' \gamma' \quad \text{--- (1.44)} \end{aligned}$$

Desde el punto de vista paraxial y considerando nuevamente la Figura 1.25, se tiene que:

$$\begin{aligned} \tan \alpha' &= \alpha' \Rightarrow \alpha' = \frac{d_1 - d_2}{t} \\ d_2 &= d_1 - \alpha' t \quad \text{--- (1.45)} \end{aligned}$$

De la ecuación 1.40 sabemos que:

$$\alpha' = \frac{\eta_2 \gamma}{\eta_1'} = \frac{\eta_1' \alpha'}{\eta_1'} \quad \text{--- (1.46)}$$

Substituyendo la ecuación 1.46 en la 1.45, se obtiene:

$$d_2 = d_1 - \left( \frac{\eta_1' \alpha'}{\eta_1'} \right) t \quad \text{--- (1.47)}$$

Cuando el espesor de una lente no se puede considerar despreciable, su distancia focal se da en términos de dos cantidades: la **distancia focal efectiva (DFE)** y la **distancia focal posterior (DFP)**. Considerando que el objeto se encuentra en el infinito y sobre el eje óptico, se tiene que la imagen se forma sobre el foco. Analizando ahora la Figura 1.26, se puede observar que en el caso de luz colimada (paralela al eje óptico) que incide por el lado izquierdo, la lente delgada equivalente estaría colocada en el plano principal posterior, asociado al foco posterior ( $f_2$ ).

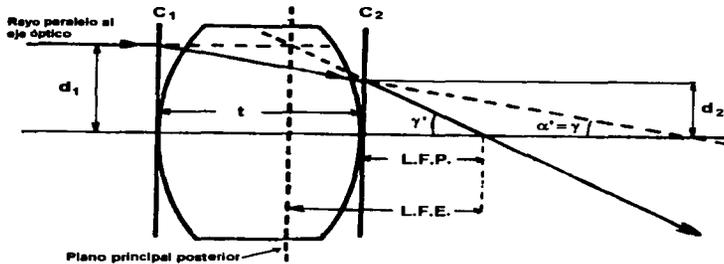


Figura 1.26 Definición de la distancia focal posterior y la distancia efectiva en una lente gruesa. La lente equivalente delgada se debe considerar, para efectos reales, como si estuviera colocada en el plano principal, ya sea el posterior o el anterior, dependiendo del lado por el que incide el rayo de luz colimado (paralelo al eje óptico).

Igualmente, de la figura anterior y considerando rayos paraxiales para los que  $\tan \gamma' = \gamma'$ :

$$DFE = \frac{d_1}{\gamma'} \quad y \quad DFP = \frac{d_2}{\gamma'}$$

De la Figura 1.25 y para una lente con índice de refracción  $\eta$  y rodeada de aire, tenemos que:

$$\eta_1 = \eta_2' = 1 \quad y \quad \eta_1' = \eta_2 = \eta$$

Substituyendo estas igualdades en la ecuación 1.41 y tomando en cuenta condiciones paraxiales para la Figura 1.25:

$$\alpha - \eta \alpha' = \frac{d_1 (\eta - 1)}{R_1}$$

$$\eta \alpha' = \alpha - \frac{d_1 (\eta - 1)}{R_1}$$

$$\eta \alpha' = \frac{d_1 (1 - \eta)}{R_1} \quad \text{--- (1.48)}$$

Substituyendo ahora la ecuación anterior, en la ecuación 1.47 para encontrar el valor de  $d_2$ :

$$d_2 = d_1 - \left( \frac{\eta \alpha'}{\eta} \right) f = d_1 - \left( \frac{d_1 (1 - \eta)}{R_1 \eta} \right) f$$

$$d_2 = d_1 \left[ 1 - \frac{(1 - \eta) f}{R_1 \eta} \right] \quad \text{--- (1.49)}$$

Realizando el mismo proceso para la ecuación 1.44, correspondiente a la segunda superficie refractora:

$$\eta_2' \gamma' = \frac{d_2 (\eta_2 - \eta_2')}{R_2} - \eta_1' \alpha'$$

$$\gamma' = \frac{d_2 (\eta - 1)}{R_2} - \eta \alpha' \quad \text{--- (1.50)}$$

Substituyendo ahora, la ecuación 1.48 en la ecuación anterior, se tiene lo siguiente:

$$\gamma' = \frac{d_2 (\eta - 1)}{R_2} - \frac{d_1 (1 - \eta)}{R_1} \quad \text{--- (1.51)}$$

Finalmente, substituyendo la ecuación 1.49 en la 1.51 y considerando que  $\gamma'/d_1 = 1/DFE = 1/f$ :

$$\gamma' = d_1 \left[ 1 - \frac{(1 - \eta) f}{R_1 \eta} \right] \left[ \frac{(\eta - 1)}{R_2} \right] - \frac{d_1 (1 - \eta)}{R_1}$$

$$\frac{\gamma'}{d_1} = (\eta - 1) \left[ \frac{1}{R_2} + \frac{(\eta - 1) f}{R_1 R_2 \eta} + \frac{1}{R_1} \right]$$

$$\frac{1}{f} = (\eta - 1) \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{(\eta - 1) f}{R_1 R_2 \eta} \right] \quad \text{--- (1.52)}$$

donde  $1/DFE = \phi$  y se conoce como la **potencia de la lente**.

La ecuación anterior nos permite relacionar la distancia focal efectiva o simplemente  $f$ , con las características de la lente gruesa (radios de curvatura e índice de refracción). Además, la expresión para los puntos conjugados puede nuevamente, ser puesta en la forma Gaussiana:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f}$$

siempre y cuando las distancias del objeto y la imagen, estén medidas desde el primero y segundo planos principales, respectivamente.

Dado que para una lente gruesa (la cual puede considerarse más generalmente como un sistema óptico), los principales puntos de referencia son los vértices de cada superficie refractora y los puntos principales, es de vital importancia definir las ecuaciones que permitan calcular la distancia entre ellos. Recordemos que los planos principales, se definen nuevamente bajo la convención de que la luz viaja de izquierda a derecha. Dichos planos (que en realidad se hacen curvos conforme se alejan del eje óptico), se encuentran al proyectar la trayectoria original de un rayo que es refractado por la primera superficie de la lente gruesa y la trayectoria del rayo de salida, que se da como resultado de la refracción que produce la segunda superficie. Cada punto que se origina en el cruce de las dos proyecciones, pertenece al plano principal. En consecuencia, el plano principal equivale a una sola superficie refractora, que produce el mismo efecto que generan las dos superficies refractoras esféricas de la lente gruesa (ver Figura 1.22).

Para poder deducir las ecuaciones que permiten calcular la distancia entre los puntos principales y los vértices de la lente, consideremos que el caso de la Figura 1.26 se invierte, es decir, la luz colimada sale por el lado derecho de la lente y recordando los ángulos de entrada de la Figura 1.25, tenemos que:

$$h_1 = V_1 H_1 = DFE - DFA$$

$$DFA = \frac{d_1}{\alpha} \quad \text{--- (1.53)}$$

$$DFE = \frac{d_2}{\alpha} \quad \text{--- (1.54)}$$

Substituyendo las ecuaciones 1.45 y 1.54 en la ecuación 1.53 y recordando que  $DFE=f$ , se tiene:

$$DFA = \left( \frac{DFE}{d_2} \right) d_1 = f \frac{d_1}{d_2}$$

$$DFA = f \left( \frac{d_2 - \alpha' t}{d_2} \right)$$

$$DFA = f \left( 1 - \frac{\alpha' t}{d_2} \right) \quad \text{--- (1.55)}$$

De la ecuación 1.44 y considerando que la lente está rodeada por aire ( $\eta'_1 = \eta_2 = 1$ ), que  $\alpha' = \gamma$  son positivos y que  $\gamma' = 0$ , se obtiene la siguiente expresión:

$$\eta \alpha' = \frac{d_2(1 - \eta)}{R_2} \Rightarrow \alpha' = \frac{d_2(1 - \eta)}{\eta R_2} \quad \text{--- (1.56)}$$

Finalmente, substituyendo 1.56 en 1.55, se llega al siguiente resultado:

$$DFA = f - \frac{ft}{d_2} \left[ \frac{d_2(1 - \eta)}{\eta R_2} \right]$$

$$h_1 = f - f + \frac{ft(1 - \eta)}{\eta R_2}$$

$$h_1 = - \frac{ft(\eta - 1)}{\eta R_2} \quad \text{--- (1.57)}$$

Igualmente, considerando la Figura 1.26 (no invertida) para calcular  $h_2$ :

$$h_2 = V_2 H_2 = DFE - DFP$$

$$h_2 = f - DFP$$

$$h_2 = f - \frac{d_2}{\gamma'}$$

$$\gamma' = \frac{d_1}{DFE} \quad \text{y} \quad d_2 = d_1 - \alpha' t$$

$$\Rightarrow h_2 = f - f \left( 1 - \frac{\alpha' t}{d_1} \right) \quad \text{--- (1.58)}$$

Haciendo una analogía con respecto a la ecuación 1.56, podemos decir que:

$$\alpha' = \frac{d_1(1-\eta)}{\eta R_1} \quad \text{--- (1.59)}$$

Finalmente, substituyendo la ecuación 1.59 en la ecuación 1.58:

$$h_2 = f \left[ \frac{d_1(1-\eta)}{d_1 \eta R_1} \right]$$

$$h_2 = - \frac{f(\eta-1)}{\eta R_1} \quad \text{--- (1.60)}$$

De las ecuaciones 1.57 y 1.60, podemos observar que las distancias  $h_1$  y  $h_2$  serán positivas, cuando los planos principales se ubiquen a la derecha de sus respectivos vértices.

En forma similar, la ecuación Newtoniana para lentes es cierta, como puede observarse en los triángulos semejantes de la Figura 1.27. En consecuencia  $x_p x_o = f_2^2$ , siempre y cuando  $f$  mantenga la interpretación que se le ha dado. De los mismos triángulos semejantes, podemos observar que:

$$M_T = \frac{y_i}{y_o} = - \frac{x_i}{f} = - \frac{f}{x_o} \quad \text{--- (1.61)}$$

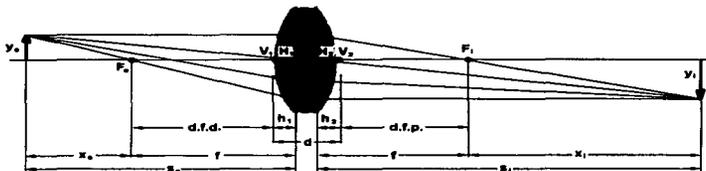


Figura 1.27 Geometría de una lente gruesa.

De la figura anterior y con el desarrollo que hemos realizado hasta este punto, podemos afirmar que si  $d \rightarrow 0$ , las ecuaciones deducidas para la lente gruesa se transformarán en las expresiones para la lente delgada.

Por otro lado, se dice que los puntos principales son conjugados uno con respecto al otro; en otras palabras, cuando  $s_o$  y  $s_i$  están medidas desde los puntos  $H_1$  y  $H_2$ :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} \Rightarrow f = \frac{s_o s_i}{s_o + s_i} \quad \text{--- (1.62)}$$

En la ecuación anterior, cuando  $s_o=0$ ,  $s_i$  debe ser cero porque  $f$  es finita y en consecuencia, un punto en  $H_1$  tendrá su imagen en  $H_2$ . Además, un objeto en el primer plano principal (de la Figura 1.27:  $s_o=0 \Rightarrow x_o+f=0 \Rightarrow x_o=-f$ ) tiene su imagen en el segundo plano principal (también de la Figura 1.27:  $s_i=0 \Rightarrow x_i+f=0 \Rightarrow x_i=-f$ ), con aumento unitario,  $M_T=1$  (esto último se puede deducir de la ecuación 1.61). Lo anteriormente expuesto, constituye el motivo por el cual, en algunas ocasiones, los planos principales son llamados **planos unitarios**. Consecuentemente, cualquier rayo dirigido hacia un punto sobre el primer plano principal, saldrá de la lente como si fuese originado en su punto correspondiente (a la misma distancia sobre el eje o debajo de él) sobre el segundo plano principal.

### 1.11 SISTEMAS DE LENTES GRUESAS

Supongamos ahora, que tenemos una lente compuesta o sistema de lentes, que consta de dos lentes gruesas  $L_1$  y  $L_2$ , tal y como se muestra en la Figura 1.28.

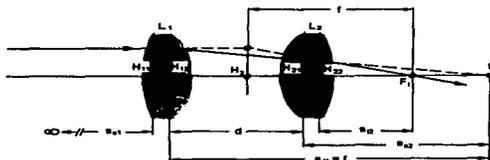


Figura 1.28 Sistema óptico compuesto por dos lentes gruesas,  $L_1$  y  $L_2$ .

Sean  $(s_{o1}, s_{i1}, f_1)$  y  $(s_{o2}, s_{i2}, f_2)$ , las posiciones del objeto e imagen y las distancias focales de las dos lentes, todas ellas medidas con respecto a sus propios planos principales. En este punto podemos introducir el concepto de que el aumento transversal de un sistema de lentes, será igual al producto de los aumentos transversales de cada una de las lentes que lo componen; esto es, aplicado al caso de la Figura 1.28:

$$M_T = \left( -\frac{s_{i1}}{s_{o1}} \right) \left( -\frac{s_{i2}}{s_{o2}} \right) = -\frac{s_i}{s_o} \quad \text{--- (1.63)}$$

donde  $s_o$  y  $s_i$  son las distancias objeto e imagen para la combinación de lentes. Por otro lado, cuando  $s_o = \infty$ , se pueden establecer las siguientes igualdades:  $s_o = s_{o1}$ ,  $s_{i1} = f_1$ ,  $s_{o2} = -(s_{i1} - d)$  y  $s_i = f$ . Substituyendo éstas en la ecuación 1.63, se tendrá lo siguiente:

$$-s_{i1} \left( -\frac{s_{i2}}{s_{o2}} \right) = -s_i \quad \text{--- (1.64)}$$

$$-f_1 \left( -\frac{s_{i2}}{s_{o2}} \right) = -f$$

$$f = -\frac{f_1 s_{i2}}{s_{o2}} \quad \text{--- (1.65)}$$

Paralelamente, se puede escribir la siguiente expresión para la segunda lente:

$$\frac{1}{s_{o2}} + \frac{1}{s_{i2}} = \frac{1}{f_2}$$

$$s_{i2} = \frac{f_2 s_{o2}}{s_{o2} - f_2} \quad \text{--- (1.66)}$$

Aplicando el resultado anterior (ecuación 1.66) a la ecuación 1.64, se obtiene que:

$$s_i = s_{i1} \left( -\frac{s_{i2}}{s_{o2}} \right) \quad \text{--- (1.67)}$$

$$f = -\frac{f_1}{s_{o2}} \left( \frac{f_2 s_{o2}}{s_{o2} - f_2} \right)$$

$$f = -\frac{f_1 f_2}{s_{o2} - f_2} = \frac{f_1 f_2}{s_{i1} - d + f_2}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{f_1 - d + f_2}{f_1 f_2}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad \text{--- (1.68)}$$

La ecuación anterior, representa la distancia focal efectiva de la combinación de las dos lentes gruesas, donde todas las distancias están medidas con respecto a los planos principales. Los planos principales resultantes del sistema, están localizados de acuerdo a las siguientes expresiones y con respecto al plano principal primario de la primera lente y al plano principal secundario de la segunda lente. Por definición, es posible escribir la siguiente ecuación:

$$\overline{H_{22}H_2} = f - s_{i2} \quad \text{--- (1.69)}$$

De la ecuación 1.67, sabemos que:

$$s_{i2} = -s_{o2} \left( \frac{s_l}{s_{l1}} \right)$$

Substituyendo esta expresión en la ecuación 1.69, resulta:

$$\overline{H_{22}H_2} = f + s_{o2} \left( \frac{s_l}{s_{l1}} \right)$$

$$\overline{H_{22}H_2} = f + \left[ -(s_{l1} - d) \left( \frac{f}{s_{l1}} \right) \right] = f - \left[ (s_{l1} - d) \left( \frac{f}{s_{l1}} \right) \right]$$

$$\overline{H_{22}H_2} = f - \left( \frac{fs_{l1}}{s_{l1}} - \frac{fd}{s_{l1}} \right) = f - f + \frac{fd}{s_{l1}}$$

$$\overline{H_{22}H_2} = -\frac{fd}{f_1} \quad \text{--- (1.70)}$$

Considerando que la lente resultante es un elemento ópticamente simétrico, e invirtiendo la trayectoria de incidencia de la luz en la Figura 1.28 (ahora saldrá colimada por el lado derecho de  $L_2$ ), se tendrá lo siguiente:  $s_{i2} = s_l = \infty$ ,  $s_{o2} = f_2$ ,  $s_{l1} = -(s_{o2} - d)$  y  $s_o = f$ .

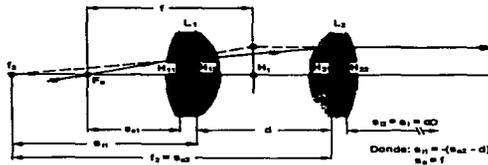


Figura 1.29 Sistema óptico compuesto, en el que la trayectoria de la luz se ha invertido con respecto al caso mostrado en la Figura 1.28.

Nuevamente, por definición:

$$\overline{H_{11}H_1} = f - s_{o1}$$

Aplicando las igualdades obtenidas para este caso, a la ecuación 1.63, se tiene que:

$$\left(-\frac{s_{i1}}{s_{o1}}\right)\left(-\frac{s_o}{s_{o2}}\right) = -1 \Rightarrow s_{o1} = -s_{i1}\left(\frac{s_o}{s_{o2}}\right)$$

Aplicando esta última expresión a la definición del plano principal primario resultante:

$$\overline{H_{11}H_1} = f + s_{i1}\left(\frac{s_o}{s_{o2}}\right)$$

$$\overline{H_{11}H_1} = f + \left[-(s_{o2} - d)\left(\frac{f}{s_{o2}}\right)\right] = f + \left[(d - f_2)\left(\frac{f}{f_2}\right)\right]$$

$$\overline{H_{11}H_1} = f + \left(\frac{fd}{f_2} - \frac{ff_2}{f_2}\right) = f + \frac{fd}{f_2} - f$$

$$\overline{H_{11}H_1} = \frac{fd}{f_2} \quad \text{--- (1.71)}$$

Con la deducción de las ecuaciones 1.68, 1.70 y 1.71, se ha encontrado una representación equivalente a una lente gruesa de la lente compuesta.

Obsérvese, que si las lentes que componen el sistema fueran delgadas, los pares de puntos  $H_{11}$ ,  $H_{12}$  y  $H_{21}$ ,  $H_{22}$  se unen y  $d$  se convierte en la separación entre los centros de cada una de las lentes, tal y como sería de esperarse. Este mismo método puede ser aplicado a tres, cuatro o más lentes. En consecuencia:

$$f = f_1 \left( -\frac{s_{12}}{s_{o2}} \right) \left( -\frac{s_{13}}{s_{o3}} \right) \dots$$

En forma equivalente, las dos primeras lentes pueden ser tratadas formando una sola lente gruesa, cuyos puntos principales y distancia focal son calculados. El resultado obtenido, se combinará a su vez, con la tercera lente y así sucesivamente con el resto de los elementos.

## 1.12 ABERRACIONES MONOCROMÁTICAS

A manera de confirmación, sabemos que la teoría de primer orden no es más que una buena aproximación, ya que un trazado exacto de rayos o cualquier otro tipo de mediciones que puedan ser efectuadas sobre un sistema óptico, ciertamente mostrarán algunas inconsistencias con la descripción originada de la teoría paraxial. Tales diferencias respecto de las condiciones ideales de la óptica paraxial, son conocidas como **aberraciones**. Éstas son básicamente diferencias entre el objeto y la imagen formada por el sistema óptico, constituyéndose como una medida de cómo la imagen difiere de la predicción paraxial.

Existen dos clasificaciones principales de ellas, las llamadas **aberraciones cromáticas** (las cuales surgen del hecho de que el índice de refracción es realmente una función de la longitud de onda o color) y las **aberraciones monocromáticas**. Estas últimas, a su vez, ocurren aún cuando la luz sea altamente monocromática y están divididas en dos subgrupos. Hay aberraciones monocromáticas que deterioran la imagen haciéndola confusa, tal es el caso de la **aberración esférica, coma y astigmatismo**. Por otro lado existen aberraciones que deforman la imagen, como son la **curvatura de campo de Petzval** y la **distorsión**.

Sabemos que las superficies esféricas dan imágenes perfectas únicamente en la región paraxial. Lo que ahora debe determinarse es el tipo y extensión de las desviaciones resultantes, cuando dichas superficies se usan con aberturas finitas (la lente por sí misma constituye una apertura). Por medio de un manejo adecuado de los parámetros físicos del sistema óptico (por ejemplo, las potencias, formas, espesores, tipos de vidrio y separación entre las lentes, así como la localización de otros elementos como son los diafragmas), estas aberraciones pueden ser minimizadas.

Uno puede estar en la capacidad de anular totalmente la falla más indeseable, cambiando ligeramente la forma de una lente o recorriendo la posición de un diafragma (lo anterior es muy semejante a ajustar un circuito electrónico con bobinas, capacitores y resistencias variables). Cuando los ajustes están terminados, las deformaciones indeseables en el frente de onda, producidas cuando éste pasa a través de una superficie, probablemente serán contrarrestadas al cruzar otras superficies posteriores.

También podemos estar seguros, de que no todas las aberraciones pueden hacerse igual a cero, en cualquier sistema real compuesto de superficies esféricas; además, no existe un camino conocido para encontrar que tan cerca de cero se puede llegar.

El tratamiento paraxial de las secciones anteriores, se basó en la suposición de que el  $\text{sen } \theta$  puede representarse satisfactoriamente solo por  $\theta$ . Es decir, el sistema se restringió hasta el punto de operar en una región extremadamente angosta, alrededor del eje óptico. Obviamente, si los rayos de la periferia de una lente se incluyen en la formación de una imagen, la afirmación de que  $\text{sen } \theta \approx \theta$ , no es satisfactoria. Recordemos que ocasionalmente la Ley de Snell se escribe simplemente como  $n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$ , lo cual de nuevo no sería apropiado. En cualquier circunstancia, si los dos primeros términos en el desarrollo

$$\text{sen } \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

se conservan como una mejor aproximación, tendremos la llamada **teoría de tercer orden**. Las diferencias que resultan con respecto a la teoría de primer orden están incluidas en las **cinco aberraciones primarias** (aberración esférica, coma, astigmatismo, curvatura de campo y distorsión). Éstas fueron estudiadas en detalle por primera vez por *Ludwig von Seidel* (1821-1896), alrededor del año 1850. De ahí que frecuentemente se conozcan como **aberraciones de Seidel**. Además de las dos primeras contribuciones, la serie contiene otros términos más pequeños, pero que aún pueden ser tomados en cuenta. En consecuencia, existen ciertamente aberraciones de mayor orden. Las diferencias entre el resultado del trazado exacto de rayos y los de las aberraciones primarias calculadas, pueden considerarse como la suma de las contribuciones de todas las aberraciones de mayor orden. Esta sección final, se restringirá exclusivamente al estudio de las aberraciones primarias, considerándolas en términos de luz monocromática; lo anterior debido a que la fuente de luz que se emplea en este trabajo (diodo láser), es una fuente de radiación óptica altamente monocromática.

### 1.12.1 ABERRACIÓN ESFÉRICA

Recordando la sección 1.6, donde calculamos los puntos conjugados para una superficie esférica refractora. Para la región paraxial, encontramos que:

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Si la aproximación para  $\beta$  (Figura 1.7) se mejora un poco, es posible obtener la siguiente expresión de tercer orden:

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R} + d^2 \left[ \frac{n_1}{2s_o} \left( \frac{1}{s_o} + \frac{1}{R} \right)^2 + \frac{n_2}{2s_i} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{s_i} \right)^2 \right] \quad \text{--- (1.72)}$$

El término adicional, el cual varía aproximadamente como  $d^2$ , es una medida de las desviaciones respecto a la teoría de primer orden. Como se muestra en la Figura 1.30, los rayos que inciden en la superficie a mayores alturas sobre el eje óptico, son enfocados más cerca del vértice. En otras palabras, tendremos que la aberración esférica o **AE**, corresponde a la dependencia de la distancia focal con la abertura para rayos no paraxiales.

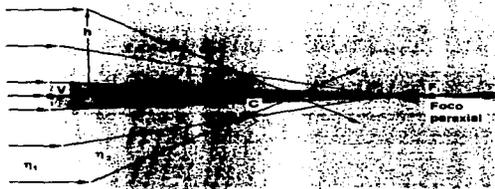


Figura 1.30 Aberración esférica resultante de la refracción en una sola superficie.

Igualmente, para una lente convergente como la de la Figura 1.31, los **rayos marginales** se desviarán en su refracción, de tal forma que serán enfocados antes del punto focal de los rayos paraxiales. La distancia comprendida entre la intersección con el eje, de un rayo cualquiera y el foco paraxial  $F_1$ , es conocida como la **aberración esférica longitudinal**, o **AEL** de dicho rayo. En este caso, la **AE** es positiva. Por el contrario, los rayos marginales para una lente divergente, intersectan el eje más allá del foco paraxial y entonces se dice que la aberración esférica es negativa.

Si una pantalla se coloca en el punto  $F_1$  de la Figura 1.31, la imagen de una estrella aparecería como un punto central brillante sobre el eje, rodeado por un halo simétrico delineado por el cono de los rayos marginales. Para una imagen extendida, la **AE** reducirá el contraste y degradará los detalles. Complementariamente, la altura arriba del eje óptico, donde un rayo cruza esa pantalla se llama **aberración esférica transversal** o **lateral** y se abrevia **AET**. Podemos decir que la **AE** puede reducirse diafragmando (limitando) la abertura, pero eso también reduce la cantidad de luz que entra al sistema. Observemos que si la pantalla es movida a la posición designada como  $\Sigma_{LC}$ , la imagen borrosa tendrá su diámetro más pequeño. Esta última condición es conocida como el **círculo de menor confusión** y  $\Sigma_{LC}$  es generalmente, el mejor lugar para observar la imagen. Si una lente presenta una **AE** considerable, tendrá que ser reenfocada si se diafragma, ya que la posición de  $\Sigma_{LC}$  se aproximará a  $F_1$ , conforme la abertura disminuya.

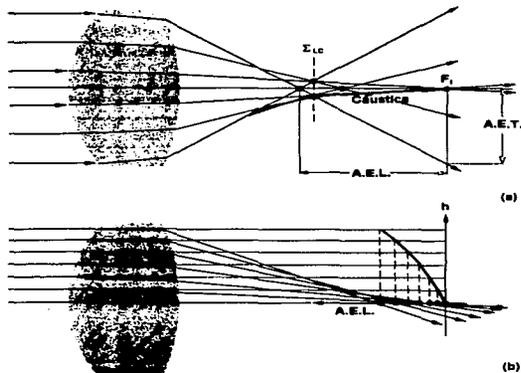


Figura 1.31 Aberración esférica para una sola lente. La envolvente de los rayos refractados es llamada la cústica. La intersección entre los rayos marginales y la cústica, proporciona la localización del plano  $\Sigma_{Lc}$ .

La cantidad de aberración esférica, cuando la abertura y distancia focal están fijas, varía en función de la distancia del objeto y forma de la lente. Para una lente convergente, los rayos no paraxiales son desviados fuertemente. Imaginándose la lente como dos prismas unidos en sus bases, es lógico asumir que el rayo incidente sufrirá una desviación mínima cuando haga, aproximadamente, el mismo ángulo formado por el rayo emergente. Un ejemplo muy claro de lo anterior, se muestra en la Figura 1.32, donde una lente se ha girado  $180^\circ$  y la  $AE$  es disminuída notablemente. Cuando el objeto se encuentra en el infinito, una lente simple cóncava o convexa cuya cara posterior es prácticamente plana, sufrirá una aberración esférica muy pequeña. En forma semejante, si las distancias del objeto e imagen son casi iguales ( $s_o \approx s_i \approx 2f$ ), la lente tendrá que ser equiconvexa para reducir la  $AE$ . La combinación de una lente convergente con otra lente divergente, puede ser empleada también para disminuir la aberración esférica.

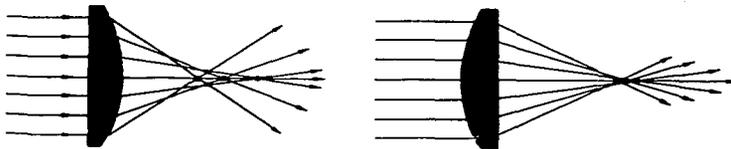


Figura 1.32 Aberración esférica para una lente plano-convexa.

## 1.12.2 COMA

La coma o **aberración comática**, es un deterioro en la imagen, asociada como aberración primaria monocromática, para un objeto puntual fuera del eje y aún cuando la distancia de separación sea pequeña. Su origen está en el hecho de que los planos principales pueden ser tratados como tales, únicamente en la región paraxial. Estos son realmente **superficies curvas principales**. En la ausencia de  $AE$ , un haz de rayos paralelos será enfocado en el punto axial  $F'$ , a una distancia  $DFP$  a partir del vértice posterior. Pero las distancias focales efectivas y en consecuencia los aumentos transversales, variarán para rayos que cruzan la lente fuera del eje. Cuando el punto imagen está sobre el eje óptico, esta situación no tiene mayor trascendencia; pero cuando el haz es oblicuo y los puntos de la imagen están fuera del eje, el efecto comático será evidente. La dependencia de  $M_T$  con  $d$ , siendo esta última la altura del rayo en la lente, puede observarse en la Figura 1.33(a).

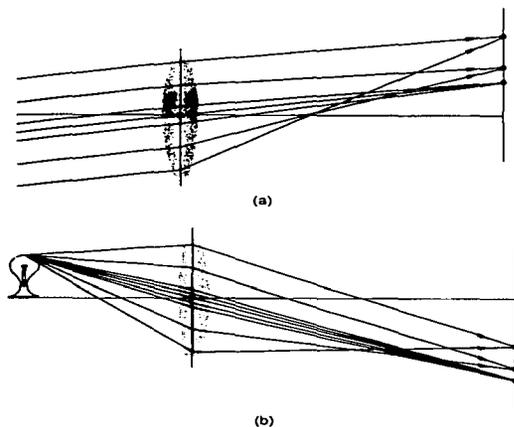


Figura 1.33 Diagrama de trazo de rayos que muestra un ejemplo de (a) Coma positiva y (b) Coma negativa.

En este caso, los rayos meridionales que cruzan las orillas de la lente, llegarán al plano imagen más cerca del eje que los rayos cercanos al rayo principal (es decir, al rayo que pasa por los puntos principales). Bajo estas circunstancias, la amplificación más pequeña es asociada con los rayos marginales, los cuales formarán la imagen más pequeña y entonces se dice que la coma es negativa. Por comparación, la coma mostrada en la Figura 1.33(b) es positiva, porque los rayos marginales estarán en foco a una distancia más alejada del eje. En la Figura 1.34 se muestran varios rayos oblicuos, a partir de un punto objeto  $S$  fuera del eje, para ilustrar la formación de la imagen comática de un punto.

Obsérvese que cada cono circular de rayos, cuyos puntos terminales (1-2-3-4-1-2-3-4) forman un anillo sobre la lente, tendrán una imagen sobre  $\Sigma_1$  que fue denominada por *H. Dennis Taylor* como **círculo comático**. Esta situación corresponde a una coma positiva y por lo tanto, mientras más grande sea el anillo sobre la lente, el círculo comático estará más alejado del eje. Cuando el anillo más externo coincide con los rayos marginales, la distancia de 0 a 1 en la imagen es la **coma tangencial**, mientras que la longitud de 0 a 3 sobre  $\Sigma_1$  es llamada **coma sagital**. A este respecto, un poco más de la mitad de la energía en la imagen, está aproximadamente en la región triangular 0 y 3. La forma de coma, que debe su nombre al parecido que tiene con la cola de un cometa, frecuentemente se considera la peor de todas las aberraciones, principalmente por su configuración asimétrica.

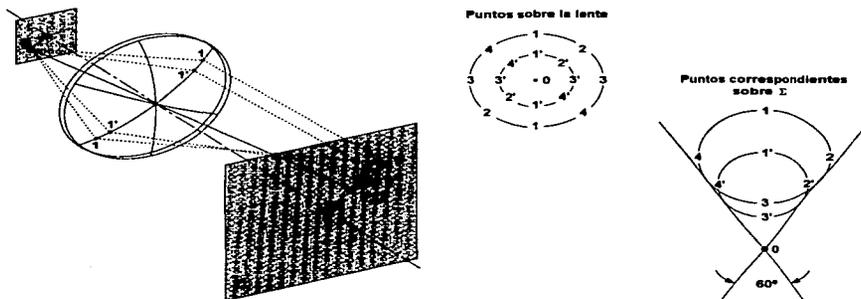


Figura 1.34 Imagen geométrica con coma para un punto. La región central de la lente, forma un punto imagen en el vértice del cono.

La coma también puede ser eliminada utilizando un diafragma en la posición adecuada, hecho que fue descubierto en 1812 por *W. Hyde Wollaston* (1766-1828). El orden en la lista de las aberraciones primarias es importante porque cualquiera de ellas, excepto la *AE* y la curvatura de campo, se verán afectadas por la posición del diafragma, pero únicamente si una de las aberraciones anteriores se encuentra presente en el sistema. Por lo tanto, mientras que la *AE* es independiente de la localización del diafragma a lo largo del eje óptico, la coma no lo será, siempre y cuando haya *AE*. Esto puede apreciarse mejor si se examina la representación en la Figura 1.35. Con el diafragma ubicado en  $\Sigma_1$ , el rayo 3 es el rayo principal y existe *AE* pero coma no; es decir, los pares de rayos se intersectan a lo largo del rayo 3. Si el diafragma se mueve a la posición  $\Sigma_2$ , la simetría se rompe y el rayo 4 se convierte en el rayo principal; donde los rayos adyacentes, como 3 y 5, se intersectarán fuera y arriba del rayo 4. Lo anterior implica que haya coma positiva. Con el diafragma en  $\Sigma_3$ , los rayos 1 y 3 se intersectan abajo del rayo principal, 2 y entonces tenemos coma negativa. En esta forma, pueden introducirse dentro de una lente compuesta cantidades controladas de aberraciones, para poder anular la coma en el sistema completo.

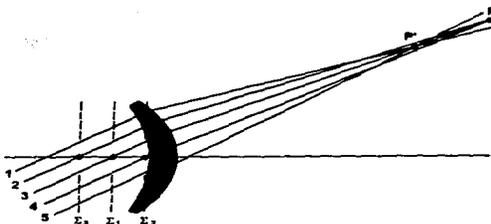


Figura 1.35 El efecto de la localización del diafragma en la aberración comática.

### 1.12.3 ASTIGMATISMO

Cuando un punto objeto está situado a una distancia apreciable fuera del eje óptico, el cono de rayos incidentes sobre la lente será asimétrico, dando origen a la tercera aberración primaria conocida como **astigmatismo**. Para facilitar su descripción, imaginemos el **plano meridional** (también llamado **plano tangencial**) conteniendo tanto el punto objeto o el rayo principal (es decir, el que sale del punto objeto y pasa por el centro de la apertura del sistema de lentes) como el eje óptico; todos los rayos contenidos en este plano se llaman **rayos tangenciales** y los que no lo están, se denominan **rayos oblicuos**. Por otro lado, el **plano sagital** o **radial** se define como el plano que contiene el rayo principal y además, es perpendicular al plano meridional (ver Figura 1.36). Al contrario del plano tangencial, que siempre es el mismo desde el inicio hasta el final de cualquier sistema y por complicado que éste sea, el plano sagital cambia generalmente de pendiente, conforme el rayo principal es desviado en los diferentes elementos. En consecuencia y para ser exactos, debemos decir que existen varios planos sagitales, cada uno para las diferentes regiones dentro del sistema. Sin embargo, todos los rayos oblicuos que parten del punto objeto y están contenidos en el plano sagital, se llaman **rayos sagitales**.

En el caso de un punto objeto axial, el cono de rayos es simétrico respecto a las superficies esféricas de una lente y no hay necesidad de diferenciar entre planos sagitales y meridionales. En consecuencia, las configuraciones de los rayos en todos los planos que contienen al eje óptico son idénticas. En ausencia de aberración esférica, todas las distancias focales son iguales y por lo tanto, todos los rayos llegarán a un foco común. Por el contrario, la configuración de un haz oblicuo de rayos paralelos, será diferente en los planos meridionales y sagitales. Como resultado de esto, las distancias focales en esos planos también serán diferentes. En efecto, en este caso, los rayos meridionales se inclinan más con respecto a la lente que los rayos sagitales y presentan distancias focales más cortas; esta diferencia en longitudes focales, depende de la potencia de la lente y del ángulo de inclinación de los rayos.

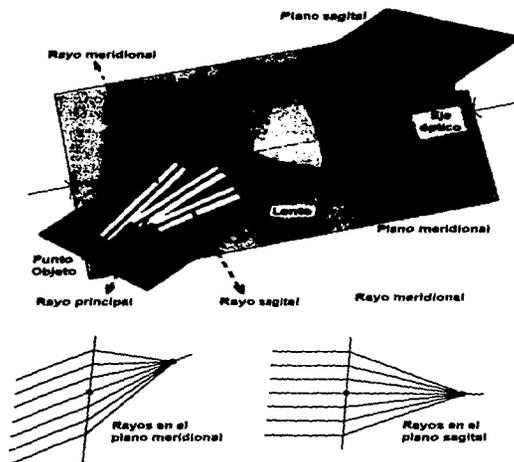


Figura 1.36 Planos meridionales y sagitales.

La **diferencia astigmática**, como es frecuentemente llamada, aumenta rápidamente conforme los rayos se hacen más oblicuos; es decir, a medida que el punto objeto se va alejando del eje óptico. Ciertamente esta aberración se anula cuando el objeto está ubicado sobre dicho eje.

Teniendo dos distancias focales diferentes, el haz cónico de rayos incidente sufre una deformación considerable después de refractarse (ver Figura 1.37). La sección transversal del haz, inicialmente sale de la lente con forma circular, pero gradualmente se va haciendo elíptica con el eje mayor en el plano sagital, hasta que en el **foco tangencial o meridional** ( $F_T$ ) la elipse degenera en una línea (por lo menos en la teoría de tercer orden). Todos los rayos provenientes del punto objeto cruzan esta línea, la cual se conoce como **imagen primaria**. Más allá de este punto, la sección recta del haz se abre rápidamente, hasta hacerse circular de nuevo. En esta posición, la imagen es una mancha circular llamada el **círculo de mínima confusión**. Separándose más de la lente, la sección recta se deforma nuevamente en una línea denominada **imagen secundaria**. Ahora, ésta se encuentra en el plano meridional, en el punto  $F_S$  denominado **foco sagital**. Recordemos que todo esto es efectivo suponiendo que no hay  $AE$  ni coma.

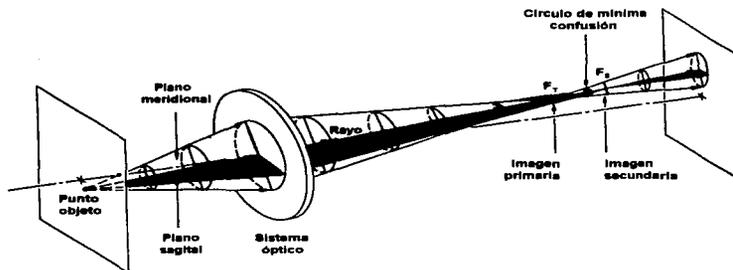


Figura 1.37 Diagrama que ilustra la condición de diferencia astigmática.

Puesto que el círculo de mínima confusión aumenta de diámetro con el aumento de la diferencia astigmática, es decir, conforme el objeto se aleja del eje óptico, la imagen se deteriora perdiendo definición a lo largo de los bordes. Obsérvese que la línea imagen secundaria, cambiará de orientación al modificarse la posición del objeto, pero siempre estará apuntando hacia el eje óptico. Igualmente, la línea imagen primaria variará en orientación, pero siempre será perpendicular a la línea imagen secundaria. Este fenómeno es el causante del efecto que se muestra en la Figura 1.38, donde el objeto está hecho de líneas tangenciales y radiales. Las imágenes primaria y secundaria están formadas, en efecto, de trazos transversales y radiales que aumentan de tamaño conforme a la distancia a la que se encuentran del eje. En el último caso, los trazos apuntan como flechas hacia el centro de la imagen y de ahí el nombre de *sagita*.

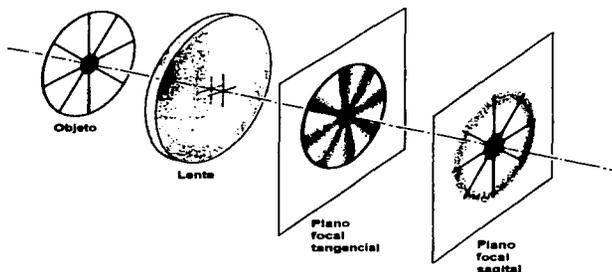


Figura 1.38 Imágenes formadas en los planos focales, tangencial y sagital.

### 1.12.4 CURVATURA DE CAMPO

Supongamos que se tiene un sistema óptico libre de todas las aberraciones que se han mencionado hasta ahora. Entonces, existirá una correspondencia de uno a uno entre los puntos de las superficies objeto e imagen (llamadas **imágenes anastigmáticas**). Tomando en cuenta las consideraciones establecidas en las secciones 1.6 y 1.7, podemos decir que un objeto plano normal al eje, tendrá como imagen aproximada un plano, solamente en la región paraxial. Para aperturas finitas, la curvatura resultante en las imágenes anastigmáticas es una manifestación de la aberración primaria conocida como curvatura de campo de Petzval, en honor del matemático húngaro *Josef Petzval* (1807-1891). El efecto puede apreciarse, al examinar la Figura 1.39.

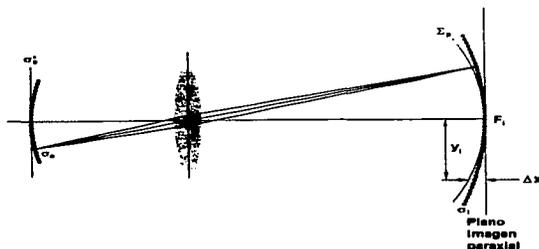


Figura 1.39 Efecto de la curvatura de campo.

El segmento de un objeto esférico  $\sigma_o$ , tiene como imagen un segmento esférico  $\sigma_i$ , producido por una lente dada y estando ambos centrados en  $O$ . Si se aplanan  $\sigma_o$  en el plano  $\sigma_o'$ , cada punto objeto se moverá hacia la lente a lo largo del correspondiente rayo principal, formando por lo tanto una **superficie parabólica de Petzval**,  $\Sigma_p$ . Mientras que para una lente positiva, la superficie de Petzval se curva hacia adentro (hacia el objeto plano), para una lente negativa se curva hacia afuera (alejándose del plano). De lo anterior podemos asumir que un arreglo adecuado de lentes positiva y negativa, dará origen a una curvatura de campo igual a cero. El desplazamiento  $\Delta x$  de un punto imagen de altura  $y_i$ , sobre la superficie de Petzval, está dado a partir del plano imagen paraxial por la siguiente expresión:

$$\Delta x = \frac{y_i^2}{2} \sum_{j=1}^m \frac{1}{\eta_j f_j} \quad \text{--- (1.73)}$$

donde  $\eta_j$  y  $f_j$  son los índices de refracción y distancias focales de las  $m$  lentes delgadas que forman el sistema.

Esto implica que la superficie de Petzval es inalterable a cambios de posiciones, formas de las lentes y/o localización de diafragmas, siempre y cuando los valores de  $\eta_j$  y  $f_j$  estén fijos. Obsérvese que para el caso de dos lentes delgadas ( $m=2$ ), teniendo cualquier separación,  $\Delta x$  puede ser igual a cero si se satisface:

$$\frac{1}{\eta_1 f_1} + \frac{1}{\eta_2 f_2} = 0 \quad \text{--- (1.74)}$$

o equivalentemente:

$$\eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 = 0 \quad \text{--- (1.75)}$$

Lo establecido por las expresiones anteriores, constituye la llamada **condición de Petzval**. Como ejemplo de su aplicación, supongamos que se tienen dos lentes delgadas, una positiva y la otra negativa, tal que  $f_1 = -f_2$  y  $\eta_1 = \eta_2$ . En consecuencia, podemos deducir que:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

$$f = \frac{f_1^2}{d} \quad \text{--- (1.76)}$$

luego entonces, el sistema puede satisfacer la condición de Petzval, tiene un campo plano y además, tiene una distancia focal positiva finita.

El astigmatismo está íntimamente ligado a la curvatura de campo, ya que en la presencia de la primera, existirán dos superficies imagen paraboloidales, conocidas como la **tangencial**,  $\Sigma_T$  y la **sagital**,  $\Sigma_S$  (tal y como se muestra en la Figura 1.40a). Ellas son el lugar geométrico de todas las imágenes primarias y secundarias, respectivamente, en tanto el punto objeto se mueva sobre el plano objeto. A una altura dada  $y_o$ , un punto sobre  $\Sigma_T$  siempre estará tres veces más alejado de  $\Sigma_p$  que el punto correspondiente sobre  $\Sigma_S$  y ambos estarán en el mismo lado de la superficie de Petzval. Cuando no está presente el astigmatismo,  $\Sigma_S$  y  $\Sigma_T$  coinciden sobre  $\Sigma_p$  y también es posible alterar las formas de  $\Sigma_S$  y  $\Sigma_T$ , doblando o relocalizando las lentes, o desplazando el diafragma. La configuración de la Figura 1.40(b) es conocida como un **campo aplanado artificial** y frecuentemente se utiliza un diafragma para producir este efecto. La superficie de mínima confusión,  $\Sigma_{LC}$ , es plana y en ese punto la imagen es tolerable, pero debido al astigmatismo va perdiendo definición en el borde. Es decir, aunque sus localizaciones formen a  $\Sigma_{LC}$ , los círculos de mínima confusión aumentan de diámetro con la distancia fuera de eje.

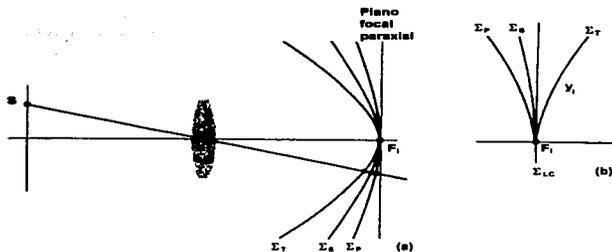


Figura 1.40 Superficies imagen tangencial, sagital y de Petzval.

### 1.12.5 DISTORSIÓN

La última de las cinco aberraciones monocromáticas primarias, es la distorsión y su origen reside en el hecho de que el aumento transversal,  $M_T$ , puede ser una función de la distancia de la imagen al eje,  $y_i$ . Entonces, esa distancia puede diferir de la que predice la teoría paraxial, en la cual  $M_T$  es constante. En ausencia de cualquiera de las otras, esta aberración se manifiesta como una deformación de la imagen en su conjunto, aunque cada punto está nítidamente enfocado. Como consecuencia, cuando la imagen ha sido generada por un sistema óptico que sufre **distorsión positiva** o de **corona**, un arreglo cuadrado se deforma tal y como es mostrado en la Figura 1.41(b). En ese caso, cada punto imagen se desplaza radialmente hacia afuera del centro, con los puntos más distantes moviéndose una distancia mayor; es decir,  $M_T$  aumenta con  $y_i$ . De manera similar, la **distorsión negativa** o de **barril** corresponde a la situación donde  $M_T$  disminuye con la distancia al eje  $y$ , en efecto, cada punto en la imagen se mueve radialmente hacia adentro acercándose al centro (ver Figura 1.41c). Las lentes muy delgadas no muestran distorsión, mientras que las lentes simples gruesas comunes, ya sean positivas o negativas, generalmente sufrirán distorsión positiva o negativa, respectivamente.

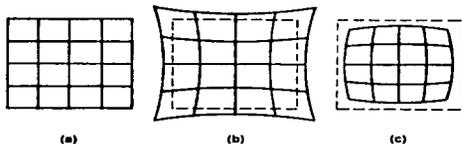


Figura 1.41 Considerando una malla cuadrículada como objeto (a), se puede observar el resultado de la distorsión positiva (b) y de la distorsión negativa (c).

La introducción de un diafragma en un sistema de lentes delgadas está invariablemente acompañada de distorsión, como se indica en la Figura 1.42. Una excepción a esto se produce cuando el diafragma de abertura está en la lente, de manera que el rayo principal también pasa por los puntos principales, además del centro del diafragma (aquí todos coinciden en  $O$ ). Si el diafragma está enfrente de una lente positiva, como en la Figura 1.42(b), la distancia objeto medida a lo largo del rayo principal, será mayor que cuando el diafragma estaba en la lente ( $S_2A > S_2O$ ). Por lo tanto,  $x_o$  será más grande y  $M_T$  será más pequeña (ver ecuación 1.33), dando como resultado distorsión de barril. En otras palabras, para un punto fuera de eje,  $M_T$  será menor con un diafragma frontal que sin él. La diferencia es una medida de la aberración, que por cierto, existe sin importar el tamaño de la apertura. En la misma forma, un diafragma posterior (Figura 1.42c) decrece  $x_o$  a lo largo del rayo principal (es decir,  $S_2O > S_2B$ ), aumentando por lo tanto  $M_T$  e introduciendo distorsión de corsé. En consecuencia, intercambiando el objeto y la imagen se tiene un cambio de signo en la distorsión, para una lente y un diafragma dados. Las posiciones del diafragma antes mencionadas, producirán el efecto contrario cuando la lente sea negativa. Todo lo anterior sugiere el empleo de un diafragma, situado en medio de dos elementos ópticos idénticos y para los cuales la distorsión de la primera lente sería anulada por la contribución de la segunda.

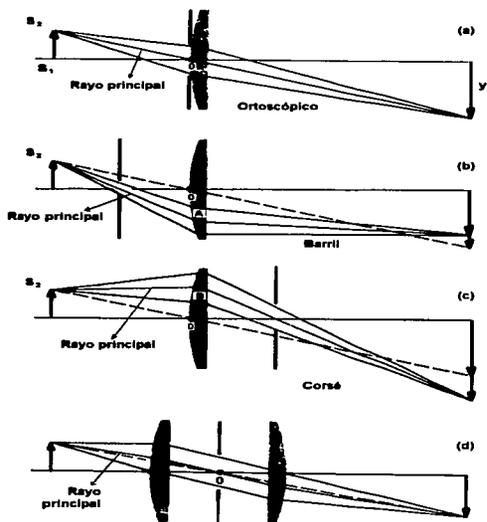


Figura 1.42 Efecto de localización del diafragma en la distorsión.

---

Supóngase que un rayo principal entra y sale de un sistema óptico con la misma dirección, como se muestra en la Figura 1.42(d). El punto en el cual los rayos cruzan el eje es el centro óptico del sistema; pero al mismo tiempo, puesto que el rayo es principal, es también el centro del diafragma de apertura. Esta es la situación que se muestra en la Figura 1.42(a), con el diafragma puesto contra la lente delgada. En ambas circunstancias, los segmentos del rayo principal que entran y salen son paralelos, habiendo distorsión cero; es decir, el sistema es **ortoscópico**. Debemos tomar en cuenta que el rayo principal es ahora un rayo que pasa por el punto principal y en consecuencia, un sistema de lentes delgadas tendrá distorsión cero, si su centro óptico coincide con el centro del diafragma de apertura.

## 1.13 OTROS PARÁMETROS IMPORTANTES DE LAS LENTES

Hasta ahora, hemos tratado con cierto detalle los conceptos teóricos más importantes que se requieren para el correcto desarrollo del trabajo. Sin embargo, abordaremos en forma breve otros conceptos relevantes, los cuales permitirán complementar lo ya visto y apoyarán los capítulos subsecuentes.

### 1.13.1 NÚMERO-F Y APERTURA NUMÉRICA

Además de la distancia focal, otro parámetro importante de la lente que debe ser determinado es el **diámetro o claro de apertura**. Una lente muy grande puede representar dimensiones y costos innecesarios; por el contrario, una lente muy chica puede proveer un resultado inadecuado.

Los cálculos paraxiales empleados para determinar el diámetro necesario en el elemento, están basados en los conceptos de **razón focal (número-f, apertura relativa, velocidad o  $f/\#$ )** y **apertura numérica (NA)**. El número- $f$  es la razón de la distancia focal de la lente a su claro de apertura, este último conocido también como **diámetro efectivo**.

$$\text{número-} f = \frac{f}{\phi} \quad \text{--- (1.77)}$$

Para visualizar el concepto del número- $f$ , consideremos una lente de longitud focal positiva e iluminada uniformemente con luz colimada, donde este parámetro define el ángulo del cono de luz que deja la lente para formar la imagen. Obviamente, este es un concepto muy importante cuando la transmisión de potencia o la capacidad de recolección de luz de un sistema óptico es crítica, tal y como lo es para el caso que nos ocupa.

El otro término comúnmente utilizado para definir este ángulo cónico plano, es la **apertura numérica o simplemente NA**. Por definición, este parámetro es el seno del ángulo que el rayo marginal hace con el eje óptico; refiriéndonos a la Figura 1.43 y utilizando trigonometría simple, se puede observar que:

$$NA = \text{sen}\theta = \frac{\phi}{2f} \quad \text{--- (1.78)}$$

o de otra forma:

$$NA = \frac{1}{2(\text{numero} - f)} \quad \text{--- (1.79)}$$

Nótese que se puede definir un número- $f$  para cualquier rayo arbitrario, conociendo su distancia conjugada y la altura a la cual interseca el plano principal del sistema óptico.

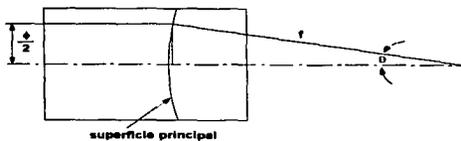


Figura 1.43 Definición de la razón focal y apertura numérica de una lente.

### 1.13.2 EL INVARIANTE ÓPTICO

Para entender la importancia de la apertura numérica, veamos ahora como se relaciona con la magnificación. Refiriéndonos a la Figura 1.44, tenemos que:

$$NA \text{ (lado objeto)} = \text{sen}\theta = \frac{\phi}{2s} \quad \text{--- (1.80)}$$

$$NA' \text{ (lado imagen)} = \text{sen}\theta' = \frac{\phi}{2s'} \quad \text{--- (1.81)}$$

las expresiones anteriores pueden ser puestas de la siguiente forma:

$$\phi = 2s \text{ sen}\theta$$

$$\phi = 2s' \text{ sen}\theta'$$

$$\Rightarrow \frac{s'}{s} = \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}\theta'} = \frac{NA}{NA'}$$

Dado que  $s'/s$  es simplemente la amplificación del sistema, podemos decir que:

$$m = \frac{NA}{NA'} \quad \text{--- (1.82)}$$

La amplificación del sistema es, por lo tanto, igual a la razón de las aperturas numéricas de los espacios objeto e imagen del sistema. Este es un resultado muy útil dada su generalidad, ya que es independiente de las especificaciones del sistema.

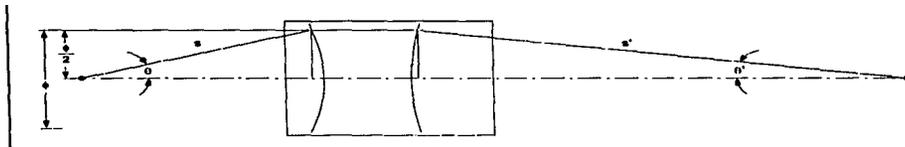


Figura 1.44 Geometría asociada a la deducción del invariante óptico.

No obstante, hasta ahora no hemos definido como utilizar esta relación para seleccionar el diámetro de una lente. Cuando se emplea una lente o sistema óptico para crear la imagen de una fuente, es natural asumir que el incrementar el diámetro ( $\phi$ ) de la lente nos permitirá coleccionar más luz y en consecuencia producir una imagen más brillante. Sin embargo, debido a la relación entre la magnificación y las aperturas numéricas, existe a veces un límite teórico para esto. El incrementar la  $NA$  más allá de un cierto valor, en algunas situaciones no tiene mayor efecto sobre la eficiencia de recolección de luz; es decir, existe una brillantez máxima para la imagen.

Ahora, ya que la  $NA$  está dada por  $\phi/2s$ , una vez que la longitud focal y la amplificación se han seleccionado, el valor de  $NA$  establece el valor de  $\phi$ . Por lo tanto, si estamos manejando un sistema en el que la  $NA$  del espacio objeto o del espacio imagen está restringida, el hecho de incrementar el diámetro de la lente por encima del valor calculado, también incrementará las dimensiones y costo del sistema, sin que se genere una ganancia en el desempeño (transmisión de potencia o brillantez de imagen). Este concepto es referido en algunas ocasiones como el invariante óptico.

## 1.14 ÓPTICA DE GRADIENTE DE ÍNDICE DE REFRACCIÓN

Un material de gradiente de índice de refracción (también llamado de índice gradual o *GRIN*), tiene un índice de refracción que varía con la posición de acuerdo con una función continua  $n(r)$ . Generalmente, estos materiales se fabrican agregando impurezas (dopantes) de concentraciones controladas a la estructura básica del vidrio.

En un medio *GRIN*, los rayos ópticos siguen trayectorias curvadas, en lugar de líneas rectas y mediante una apropiada selección de  $\eta(\mathbf{r})$ , un material de este tipo puede presentar el mismo efecto sobre los rayos de luz que un componente óptico convencional, como una lente o un prisma.

### 1.14.1 LA ECUACIÓN DE RAYO

Para determinar las trayectorias de los rayos de luz en un medio no homogéneo, con índice de refracción  $\eta(\mathbf{r})$ , nos valdremos del Principio de Fermat:

$$\delta \int_A^B \eta(\mathbf{r}) ds = 0$$

donde  $ds$  es una longitud diferencial a lo largo de la trayectoria del rayo, entre  $A$  y  $B$ . Si la trayectoria es descrita por las funciones  $x(s)$ ,  $y(s)$  y  $z(s)$ , donde  $s$  es la longitud de la trayectoria (ver Figura 1.45), mediante el cálculo de variaciones se puede observar que estas funciones deben satisfacer tres ecuaciones diferenciales parciales:

$$\frac{d}{ds} \left( \eta \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{d}{ds} \left( \eta \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{d}{ds} \left( \eta \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad \text{--- (1.83)}$$

Definiendo el vector  $\mathbf{r}(s)$ , cuyas componentes son  $x(s)$ ,  $y(s)$  y  $z(s)$ , las expresiones anteriores se pueden escribir en la forma vectorial compacta:

$$\frac{d}{ds} \left( \eta \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla \eta \quad \text{--- (1.84)}$$

donde  $\nabla \eta$ , que es el gradiente de  $\eta$ , es un vector con componentes Cartésianas  $\partial \eta / \partial x$ ,  $\partial \eta / \partial y$  y  $\partial \eta / \partial z$ . La ecuación 1.84 se conoce como la **ecuación de rayo**.

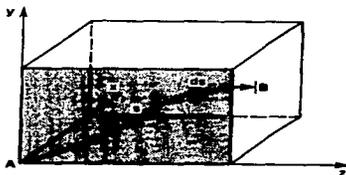


Figura 1.45 La trayectoria del rayo es descrita paramétricamente por tres funciones  $x(s)$ ,  $y(s)$  y  $z(s)$ , o por dos funciones  $x(z)$  y  $y(z)$ .

Una aproximación para resolver la ecuación de rayo, es describir la trayectoria mediante dos funciones  $x(z)$  y  $y(z)$ , escribir

$$ds = dz \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} \quad \text{--- (1.85)}$$

y substituiría en la ecuación 1.84, para obtener dos ecuaciones diferenciales parciales para  $x(z)$  y  $y(z)$ .

### 1.14.2 LA ECUACIÓN DE RAYO PARAXIAL

En la aproximación paraxial, la trayectoria es casi paralela al eje  $z$ , de tal forma que  $ds \approx dz$  (ver Figura 1.46). Bajo este esquema, las ecuaciones de rayo (1.83) se simplifican a:

$$\frac{d}{dz} \left( \eta \frac{dx}{dz} \right) \approx \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{d}{dz} \left( \eta \frac{dy}{dz} \right) \approx \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \text{--- (1.86)}$$

Dado  $\eta = \eta(x, y, z)$ , estas dos ecuaciones diferenciales parciales pueden ser resueltas para la trayectoria  $x(z)$  y  $y(z)$ .



Figura 1.46 Trayectoria de un rayo paraxial en un medio de índice gradual.

En el caso límite de un medio homogéneo, para el que  $\eta$  es independiente de  $x$ ,  $y$  y  $z$ , en la ecuación 1.86 se observaría que  $d^2x/dz^2 = 0$  y  $d^2y/dz^2 = 0$ , lo que significa que  $x$  y  $y$  son funciones lineales de  $z$  y en consecuencia las trayectorias son líneas rectas.

## 1.15 COMPONENTES ÓPTICOS DE ÍNDICE GRADUAL

### 1.15.1 CILINDRO DE ÍNDICE GRADUAL

Consideremos un cilindro de material cuyo índice de refracción  $\eta = \eta(y)$ , es uniforme en las direcciones  $x$  y  $z$ , pero varía en forma continua en la dirección  $y$  (ver Figura 1.47). Las trayectorias de los rayos paraxiales en el plano  $y$ - $z$ , están descritas por la ecuación de rayo paraxial:

$$\frac{d}{dz} \left( \eta \frac{dy}{dz} \right) = \frac{d\eta}{dy} \quad \text{--- (1.87)}$$

de donde

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{dy} \quad \text{--- (1.88)}$$

Dado  $\eta(y)$  y las condiciones iniciales ( $y$  y  $dy/dz$  en  $z=0$ ), la ecuación anterior puede resolverse para la función  $y(z)$  que describe las trayectorias del rayo.



Figura 1.47 Refracción en un cilindro de índice gradual.

### 1.15.2 OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DE RAYO PARAXIAL EN UN CILINDRO DE ÍNDICE GRADUAL UTILIZANDO LA LEY DE SNELL

La ecuación 1.88, también puede ser derivada mediante la aplicación directa de la Ley de Snell (ver Figura 1.47). Consideremos que  $\theta(y) \approx dy/dz$ , es el ángulo que el rayo forma con el eje  $z$  en la posición  $(y, z)$  y después de haber viajado a través de una capa de espesor  $\Delta y$ , el rayo cambia su ángulo a  $\theta(y + \Delta y)$ . Los dos ángulos están relacionados por la Ley de Snell:

$$\eta(y) \cos \theta(y) = \eta(y + \Delta y) \cos \theta(y + \Delta y) = \left[ \eta(y) + \frac{d\eta}{dy} \Delta y \right] \left[ \cos \theta(y) - \frac{d\theta}{dy} \Delta y \sin \theta(y) \right] \quad \text{--- (1.89)}$$

donde se ha aplicado la expansión  $f(y + \Delta y) \approx f(y) + (df/dy)\Delta y$ , a la función  $f(y) = \cos \theta(y)$ . En el límite cuando  $\Delta y \rightarrow 0$ , se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d\eta}{dy} = \eta \tan \theta \frac{d\theta}{dy} \quad \text{--- (1.90)}$$

Para rayos paraxiales  $\theta$  es muy pequeño, de tal forma que  $\tan\theta \approx \theta$ . Substituyendo  $\theta = dy/dz$  en la ecuación anterior, obtendremos la ecuación 1.88.

### 1.15.3 CILINDRO CON ÍNDICE DE PERFIL PARABÓLICO

Una distribución particular importante, para el Índice de refracción gradual es la siguiente:

$$\eta^2(y) = \eta_0^2 (1 - \alpha^2 y^2) \quad \text{--- (1.91)}$$

Esta es una función simétrica de  $y$ , que tiene su valor máximo en  $y=0$  (ver Figura 1.48). Un cilindro de vidrio con este perfil, se conoce con el nombre comercial de **SELFOC**<sup>®</sup>. Usualmente,  $\alpha$  se escoge lo suficientemente pequeña de manera que  $\alpha^2 y^2 \ll 1$ , para todas las  $y$  de interés y bajo esta condición:

$$\eta(y) = \eta_0 \sqrt{1 - \alpha^2 y^2} \approx \eta_0 \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 y^2\right) \quad \text{--- (1.92)}$$

es decir,  $\eta(y)$  es una distribución parabólica. También, debido a que  $\eta(y) - \eta_0 \ll \eta_0$ , el cambio fraccional del índice de refracción es muy pequeño.

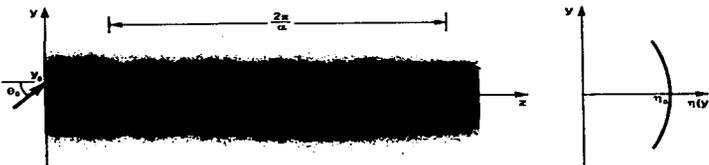


Figura 1.48 Trayectoria de un rayo dentro de un cilindro GRIN con perfil de índice parabólico (SELFOC<sup>®</sup>).

**NOTA:** SELFOC es una marca registrada de Nippon Sheet Glass Co. (NSG).

Tomando la derivada de la ecuación 1.91, el miembro derecho de la ecuación 1.88 se iguala a:

$$\frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{dy} = - \left( \frac{\eta_0}{\eta} \right)^2 \alpha^2 y = -\alpha^2 y \quad \text{--- (1.93)}$$

de tal forma, que la ecuación 1.88 se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = -\alpha^2 y \quad \text{--- (1.94)}$$

Las soluciones de esta ecuación, son funciones armónicas de período  $2\pi/\alpha$ . Asumiendo una posición inicial  $y(0)=y_0$  y una pendiente inicial  $dy/dz=\theta_0$ , en  $z=0$ , tenemos que:

$$y(z) = y_0 \cos \alpha z + \frac{\theta_0}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha z \quad \text{--- (1.95)}$$

y de la que se tiene una pendiente para la trayectoria, dada por la siguiente ecuación:

$$\theta(z) = \frac{dy}{dz} = -y_0 \alpha \operatorname{sen} \alpha z + \theta_0 \cos \alpha z \quad \text{--- (1.96)}$$

De lo anterior podemos decir que el rayo oscilará alrededor del centro del cilindro, con un período  $2\pi/\alpha$ , conocido como *PITCH* o grado de oscilación; tal y como se muestra en la Figura 1.48. Igualmente, la excursión máxima del rayo será:

$$y_{\max} = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\theta_0}{\alpha}\right)^2} \quad \text{--- (1.97)}$$

y el máximo ángulo estará dado por:

$$\theta_{\max} = \alpha y_{\max} \quad \text{--- (1.98)}$$

Es importante aclarar, que la validez de este análisis aproximado se asegura si  $\theta_{\max} \ll 1$ . Por otro lado, si  $2y_{\max}$  es menor que el espesor del cilindro, el rayo permanece confinado y dicho cilindro sirve como una guía de luz. La Figura 1.49, muestra las trayectorias de diversos rayos transmitidos a través de un cilindro SELFOC; nótese que todos los rayos tienen el mismo *pitch* y en consecuencia este cilindro *GRIN* puede ser utilizado como una lente.

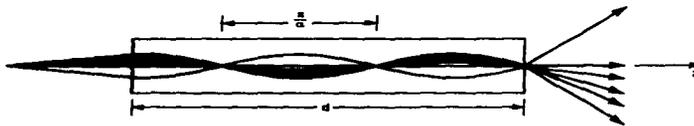


Figura 1.49 Diversas trayectorias de rayos dentro de un cilindro SELFOC®.

Esta última sección es fundamental para el trabajo que se presenta, ya que una de las lentes propuestas en el esquema de acoplamiento, es precisamente un cilindro GRIN hecho de material SELFOC®. Esto se retomará con mayor detalle en el Capítulo 7.

**ÓPTICA GAUSSIANA**

---

**ÓPTICA GAUSSIANA**

En la mayoría de las aplicaciones de los láseres, es necesario enfocar, modificar o arreglar el haz láser, utilizando lentes u otros elementos ópticos. Los haces Gaussianos coherentes, presentan propiedades de transformación muy peculiares que requieren una especial consideración. De tal forma que se puedan seleccionar los componentes ópticos más adecuados, para una aplicación láser en particular, es importante comprender las propiedades básicas de los haces Gaussianos. En este capítulo se discutirán algunas de estas propiedades, comenzando con el estudio de la óptica electromagnética y la óptica de ondas, las cuales nos permitirán establecer las bases teóricas necesarias para fundamentar la óptica Gaussiana.

**2.1 ANTECEDENTES**

Como se mencionó al inicio del capítulo anterior, la luz se propaga en forma de ondas. En el espacio libre, las ondas de luz viajan a una velocidad constante,  $c_0=3 \times 10^8$  m/s. El intervalo de longitudes de onda ópticas, contiene básicamente tres bandas: el ultravioleta (10 a 390 nm), el visible (390 a 760 nm) y el infrarrojo (760 nm a 1mm). El intervalo correspondiente de frecuencia ópticas, abarca de  $3 \times 10^{16}$  Hz hasta  $3 \times 10^{11}$  Hz.

La teoría ondulatoria de la luz contiene a la teoría de rayos; sin embargo, como ya se mencionó anteriormente, la óptica de rayos es el límite de la óptica de ondas, cuando la longitud de onda es infinitesimalmente pequeña. No obstante, la longitud de onda no necesariamente tiene que ser igual a cero para que la teoría de la óptica de rayos sea útil. Siempre que la luz se propague a través y alrededor de objetos, cuyas dimensiones sean mucho mayores que la longitud de onda, la teoría de rayos será suficiente para describir la mayoría de los fenómenos. Debido a que la longitud de onda de la luz visible, es mucho menor que las dimensiones de los objetos visibles que encontramos en nuestra vida diaria, las manifestaciones de la naturaleza ondulatoria de la luz no son aparentes, sino hasta que se realiza una observación cuidadosa.

En la parte inicial de este capítulo, describiremos a la luz mediante una función escalar llamada la **función de onda**, la cual obedece a la **ecuación de onda**. De una manera muy sencilla, podemos decir que la función de onda puede representar cualquiera de las componentes de los campos eléctrico o magnético. Lo anterior, junto con la relación entre la densidad de potencia óptica y la función de onda, constituyen los postulados del modelo escalar ondulatorio de la luz, llamado en consecuencia, **óptica de ondas**. Las consecuencias de estos postulados simples son muy variadas y forman una base para poder describir muchos de los fenómenos ópticos que quedan fuera del alcance de la óptica de rayos, incluyendo a la difracción, la cual será analizada en el siguiente capítulo. A pesar del avance que se tiene al proponer este modelo, la óptica de ondas tiene sus limitaciones, ya que no es capaz de proveer una explicación completa de fenómenos tales como la reflexión y refracción de la luz en las fronteras entre materiales dieléctricos, o describir aquellos que requieren de una formulación vectorial, como son los efectos de la polarización.

---

Surge ahora la pregunta sobre si la luz puede ser confinada espacialmente y transportada en el espacio libre sin sufrir dispersión angular. A pesar de que la naturaleza ondulatoria de la luz, excluye la existencia de una idealización de este tipo, la luz puede tomar la forma de haces que se asemejan, tanto como es posible, a ondas espacialmente localizadas y no divergentes.

Una onda plana y una onda esférica, representan los dos extremos opuestos del confinamiento espacial y angular. Las normales del frente de onda (rayos) en una onda plana, son paralelas a la dirección de la misma, de tal forma que no existe dispersión angular pero la energía se extiende espacialmente sobre todo el espacio. Por el otro lado, la onda esférica se origina de un solo punto, pero las normales al frente de onda (rayos) divergen en todas direcciones.

Las ondas cuyas normales formen un ángulo pequeño con el eje  $z$ , son llamadas ondas paraxiales y como veremos más adelante, deben satisfacer la ecuación paraxial de Helmholtz. Una solución muy importante de esta ecuación y que exhibe las características de un haz óptico, es la onda conocida como **haz Gaussiano**. La potencia del haz está concentrada principalmente, dentro de un cilindro pequeño que rodea el eje del haz. La distribución de intensidad en cualquier plano transversal, es una función Gaussiana circular simétrica, igualmente centrada alrededor del eje del haz. El ancho de esta función es mínimo en el nivel conocido como **cintura del haz** y crece gradualmente en ambas direcciones ( $x$  y  $y$ ). Los frentes de onda son aproximadamente planos cerca de la cintura, pero se curvan gradualmente llegando a ser aproximadamente esféricos en las regiones lejanas a la cintura. La divergencia angular de las normales al frente de onda, es la mínima permitida por la ecuación de onda para un ancho de haz dado. Las normales al frente de onda son, por lo tanto, muy parecidas a un paquete delgado de rayos. Bajo condiciones ideales, la luz emitida por un dispositivo láser toma la forma de un haz Gaussiano.

## 2.2 POSTULADOS DE LA TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA DE LA LUZ

La radiación electromagnética se propaga en forma de dos ondas vectoriales mutuamente acopladas, la onda de campo eléctrico y la onda de campo magnético. La teoría de la óptica de ondas es una aproximación de la teoría electromagnética, en la que la luz es descrita mediante una función escalar simple del tiempo y la posición (conocida como función de onda). Esta aproximación es adecuada para ondas paraxiales, bajo ciertas condiciones y como se mencionó en el capítulo anterior, la aproximación de la óptica de rayos provee una simplificación mayor, que es válida en el límite de las longitudes de onda pequeñas. En consecuencia, la óptica electromagnética contiene a la óptica de ondas y ésta, a su vez, contiene a la óptica de rayos.

### 2.2.1 LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN EL ESPACIO LIBRE

Un campo electromagnético, está descrito por dos campos vectoriales relacionados: el **campo eléctrico**,  $E(r, t)$  y el **campo magnético**,  $H(r, t)$ ; donde ambos son funciones vectoriales de la posición y del tiempo. En general, seis funciones escalares de posición y tiempo se requieren, en consecuencia, para describir a la luz en el espacio libre.

Afortunadamente, estas funciones están relacionadas, dado que deben satisfacer un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales acopladas, conocidas como las **ecuaciones de Maxwell** y que se presentan a continuación:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{--- (2.1)}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad \text{--- (2.2)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{--- (2.3)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad \text{--- (2.4)}$$

donde las constantes  $\epsilon_0 = 8,8542 \times 10^{-12}$  F/m y  $\mu_0 = 1,2566 \times 10^{-6}$  H/m son, respectivamente, la **permitividad eléctrica** y la **permeabilidad magnética** del espacio libre. Por otro lado,  $\nabla \cdot$  y  $\nabla \times$  son las operaciones **divergencia** y **rotacional**; recordando que en un sistema de coordenadas Cartesianas:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad \text{--- (2.5)}$$

y  $\nabla \times \mathbf{E}$  es un vector con las siguientes componentes Cartesianas:

$$\left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right), \quad \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right), \quad \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \quad \text{--- (2.6)}$$

### 2.2.2 LA ECUACIÓN DE ONDA

Una condición necesaria para que  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  satisfagan las ecuaciones de Maxwell, es que cada una de sus componentes satisfagan la **ecuación de onda**:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{--- (2.7)}$$

donde

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \times 10^8 \frac{m}{s} \quad \text{--- (2.8)}$$

es la velocidad de la luz y la función escalar,  $u$ , representa cualquiera de las tres componentes,  $(E_x, E_y, E_z)$ , de  $E$  ó las tres componentes,  $(H_x, H_y, H_z)$ , de  $H$ . La ecuación de onda, puede ser derivada de las ecuaciones de Maxwell al aplicar el operador rotacional ( $\nabla \times$ ) a la ecuación 2.2, utilizando la identidad vectorial siguiente:

$$\nabla \times (\nabla \times E) = \nabla (\nabla \cdot E) - \nabla^2 E \quad \text{--- (2.9)}$$

y posteriormente, utilizando las ecuaciones 2.1 y 2.3 para mostrar que cada componente de  $E$  satisface la ecuación de onda. Un proceso similar se sigue para  $H$ .

Como las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de onda son lineales, es posible aplicar el principio de superposición, de tal forma que si dos juegos de campos eléctricos y magnéticos son soluciones de estas ecuaciones, la suma de éstos también será una solución.

De esta forma, es como se establece la relación entre la óptica electromagnética y la óptica de ondas, ya que la ecuación de onda, que es la base de la óptica de ondas, está inmersa en la estructura de la teoría electromagnética y la velocidad de la luz está relacionada con las constantes electromagnéticas  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$  (ecuación 2.8).

### 2.2.3 LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN UN MEDIO

En un medio en el que no hay cargas eléctricas libres o corrientes (medio libre de fuentes), otros dos campos vectoriales requieren ser definidos: la **densidad de flujo eléctrico** (también llamada **desplazamiento eléctrico**),  $D(r, t)$  y la **densidad de flujo magnético**,  $B(r, t)$ . Las ecuaciones de Maxwell relacionan los cuatro campos,  $E$ ,  $H$ ,  $D$  y  $B$ , de la siguiente manera:

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} \quad \text{--- (2.10)}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \text{--- (2.11)}$$

$$\nabla \cdot D = 0 \quad \text{--- (2.12)}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad \text{--- (2.13)}$$

La relación entre la densidad de flujo eléctrico,  $D$  y el campo eléctrico,  $E$ , depende de las propiedades eléctricas del medio. En forma similar, la relación entre la densidad de flujo magnético,  $B$  y el campo magnético,  $H$ , depende de las propiedades magnéticas del medio.

Existen dos ecuaciones que ayudan a definir estas relaciones:

$$D = \epsilon_0 E + P \quad \text{--- (2.14)}$$

$$B = \mu_0 H + \mu_0 M \quad \text{--- (2.15)}$$

en las que  $P$ , es la **densidad de polarización** y  $M$ , es la **densidad de magnetización**. En un medio dieléctrico, la densidad de polarización es la suma macroscópica de los momentos de dipolo eléctrico, inducidos por el campo eléctrico. La densidad de magnetización se define en forma similar.

Los campos vectoriales  $P$  y  $M$  están, en consecuencia, relacionados con los campos eléctrico y magnético,  $E$  y  $H$ , de una forma que depende de las propiedades eléctricas y magnéticas del medio, respectivamente, tal y como se verá más adelante. Una vez que el medio se conoce, es posible establecer una ecuación que relacione a  $P$  con  $E$  y otra que relacione a  $M$  y  $H$ . Cuando estas últimas se substituyen en las ecuaciones de Maxwell, obtenemos las ecuaciones que rigen solamente los dos campos vectoriales,  $E$  y  $H$ .

En el espacio libre,  $P=M=0$ , por lo que  $D=\epsilon_0 E$  y  $B=\mu_0 H$ ; de esta forma, se recuperan las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre (ecuaciones 2.1 a 2.4). En un medio no magnético,  $M=0$  y a lo largo de este trabajo se asume que el medio es de este tipo, con lo que la ecuación 2.15 es reemplazada por:

$$B = \mu_0 H \quad \text{--- (2.16)}$$

### 2.2.4 CONDICIONES DE FRONTERA

En un medio homogéneo, todas las componentes de los campos  $E$ ,  $H$ ,  $D$  y  $B$  son funciones continuas de la posición. En la frontera entre dos medios dieléctricos y en la ausencia de cargas eléctricas libres o corrientes, las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético ( $E$  y  $H$ ) y las componentes normales de las densidades de flujo eléctrico y magnético ( $D$  y  $B$ ), deben ser continuas (ver Figura 2.1).

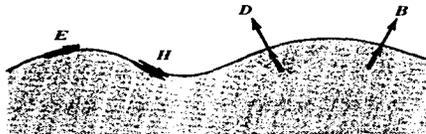


Figura 2.1 Las componentes tangenciales de  $E$  y  $H$ , y las componentes normales de  $D$  y  $B$ , son continuas en las interfaces o fronteras entre diferentes medios, siempre que éstos no presenten corrientes o cargas eléctricas libres.

---

## 2.2.5 INTENSIDAD Y POTENCIA

El flujo de potencia electromagnética, está gobernado por el siguiente vector:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad \text{--- (2.17)}$$

conocido como el **vector de Poynting**. La dirección del flujo de potencia es a lo largo de la dirección del vector de Poynting, es decir, es ortogonal tanto a  $\mathbf{E}$  como a  $\mathbf{H}$ . La intensidad óptica  $I$  (flujo de potencia a través de un área unitaria normal al vector  $\mathbf{S}$ ), es la magnitud del vector de Poynting promediada en el tiempo,  $\langle S \rangle$ . El promedio se toma sobre tiempos que sean mayores en comparación con el ciclo óptico, pero menores en relación a otros intervalos de tiempo de interés.

## 2.3 NATURALEZA Y PROPIEDADES DE UN MEDIO DIELECTRICO

La naturaleza de un medio dieléctrico, está contenida en la relación entre la densidad de polarización,  $\mathbf{P}$  y el campo eléctrico,  $\mathbf{E}$ , llamada **ecuación del medio** (ver Figura 2.2). Es de utilidad del concebir la relación  $\mathbf{P}$ - $\mathbf{E}$  como un sistema, en el que  $\mathbf{E}$  es referido como una entrada aplicada y  $\mathbf{P}$  como la salida o respuesta. Nótese que  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ , son funciones de la posición y del tiempo.

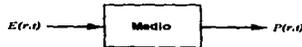


Figura 2.2 El medio dieléctrico responde a un campo eléctrico ( $\mathbf{E}$ ) aplicado y crea una densidad de polarización ( $\mathbf{P}$ ).

### 2.3.1 DEFINICIONES

- Se dice que un medio dieléctrico es **lineal**, si el campo vectorial  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  está relacionado linealmente con el campo vectorial  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ . El principio de superposición es, entonces, aplicable.
- El medio se considera **no dispersivo**, si su respuesta es instantánea; es decir,  $\mathbf{P}$  en el tiempo  $t$ , está determinado por  $\mathbf{E}$  en el mismo tiempo  $t$  y no por valores previos de  $\mathbf{E}$ . La no dispersividad es claramente una idealización, ya que cualquier sistema físico, sin importar lo rápido que éste sea, tiene un tiempo de respuesta finito.
- El medio será **homogéneo**, si la relación entre  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{E}$  es independiente de la posición,  $\mathbf{r}$ .

- Se considera un medio **isotrópico**, aquél en el que la relación entre los vectores  $P$  y  $E$  es independiente de la dirección de este último, de tal forma que el medio parece el mismo desde cualquier dirección. Entonces, los vectores  $P$  y  $E$  deben ser paralelos.
- Se dice que el medio es **no dispersivo espacialmente**, si la relación entre  $P$  y  $E$  es local; es decir,  $P$  en cada posición  $r$ , es influenciado únicamente por  $E$  en la misma posición.

## 2.4 MEDIO LINEAL, NO DISPERSIVO, HOMOGÉNEO E ISOTRÓPICO

Consideremos el caso más simple, en el que un medio es lineal, no dispersivo, homogéneo e isotrópico. Los vectores  $P$  y  $E$  en cualquier posición y tiempo, son paralelos y proporcionales, de tal forma que:

$$P = \epsilon_0 \chi E \quad \text{--- (2.18)}$$

donde  $\chi$  es un escalar constante, denominado **susceptibilidad eléctrica** (ver Figura 2.3).

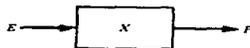


Figura 2.3 Un medio lineal, no dispersivo, homogéneo e isotrópico, está caracterizado completamente por una constante, la susceptibilidad eléctrica,  $\chi$ .

Substituyendo la ecuación 2.18 en la 2.14, se obtiene que  $D$  y  $E$  también son paralelos y proporcionales:

$$D = \epsilon E \quad \text{--- (2.19)}$$

donde

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi) \quad \text{--- (2.20)}$$

es otro escalar constante conocido como la **permitividad eléctrica** del medio. La razón  $\epsilon/\epsilon_0$  es la **permitividad relativa o constante dieléctrica**.

---

Bajo estas condiciones, las ecuaciones de Maxwell se simplifican de la siguiente forma:

$$\nabla \times H = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \quad \text{--- (2.21)}$$

$$\nabla \times E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} \quad \text{--- (2.22)}$$

$$\nabla \cdot E = 0 \quad \text{--- (2.23)}$$

$$\nabla \cdot H = 0 \quad \text{--- (2.24)}$$

Quedamos ahora con dos campos vectoriales relacionados,  $E(r, t)$  y  $H(r, t)$ , que satisfacen un conjunto de ecuaciones idénticas a las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre, con  $\epsilon_0$  reemplazado por  $\epsilon$ . En consecuencia, cada una de las componentes de  $E$  y  $H$  satisfacen la ecuación de onda:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{--- (2.25)}$$

donde

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu_0}} \quad \text{--- (2.26)}$$

Las diferentes componentes de los campos eléctrico y magnético se propagan en forma de ondas con una velocidad:

$$c = \frac{c_0}{\eta} \quad \text{--- (2.27)}$$

donde

$$\eta = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{1 + \chi} \quad \text{--- (2.28)}$$

y  $c_0$  es la velocidad de la luz en el espacio libre (ver ecuación 2.8).

---

Recordemos que  $\eta$  es la razón entre la velocidad de la luz en el espacio libre y su correspondiente velocidad en un medio; en consecuencia, representa el índice de refracción de dicho medio.

**El índice de refracción es la raíz cuadrada de la constante dieléctrica**

Como se puede ver, este es otro punto de conexión entre la óptica de onda escalar y la óptica electromagnética.

## 2.5 POSTULADOS DE LA ÓPTICA DE ONDAS

### 2.5.1 LA ECUACIÓN DE ONDA EN ÓPTICA

Como ya se mencionó en la sección anterior, la luz se propaga en forma de ondas que en el espacio libre, viajan a una velocidad  $c_0$ . Un medio transparente homogéneo, como lo es el vidrio, está caracterizado por una sola constante: el índice de refracción  $\eta$  ( $\geq 1$ ). En un medio de índice de refracción  $\eta$ , las ondas de luz viajan a una velocidad reducida:

$$c = \frac{c_0}{\eta} \quad \text{--- (2.29)}$$

Una onda óptica, está descrita matemáticamente por una función real de la posición  $\mathbf{r}=(x, y, z)$  y del tiempo,  $t$ , denotada  $u(\mathbf{r}, t)$  y que llamamos anteriormente **función de onda**. Esta última, satisface la ecuación de onda siguiente:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{--- (2.30)}$$

donde  $\nabla^2$  es el operador Laplaciano:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{--- (2.31)}$$

En consecuencia, cualquier función que satisfaga la ecuación 2.30 representa una posible onda óptica.

Dado que la ecuación de onda es lineal, es posible aplicar el **principio de superposición**; es decir, si  $u_1(\mathbf{r}, t)$  y  $u_2(\mathbf{r}, t)$  representan a dos ondas ópticas, entonces  $u(\mathbf{r}, t) = u_1(\mathbf{r}, t) + u_2(\mathbf{r}, t)$  también representa una posible onda óptica.

---

En la interfase o frontera entre dos medios distintos, la función de onda cambia en una forma que depende de los índices de refracción. Sin embargo, las leyes que gobiernan este cambio dependen del significado físico asignado a la función de onda (es decir, la componente del campo electromagnético al cual representa).

La ecuación de onda se puede aplicar en forma aproximada a medios que presentan índices de refracción dependientes de la posición, siempre y cuando esta variación sea insignificante en distancias dentro del intervalo de una longitud de onda; bajo esta condición, se dice que el medio es localmente homogéneo. Para tales medios,  $\eta$  en la ecuación 2.29 y  $c$  en la ecuación 2.30, se reemplazarán simplemente las funciones dependientes de la posición  $\eta(r)$  y  $c(r)$ , respectivamente.

### 2.5.2 INTENSIDAD, POTENCIA Y ENERGÍA

La **intensidad óptica**,  $I(r, t)$ , definida como la potencia óptica por unidad de área (expresada generalmente en unidades de Watts/cm<sup>2</sup> y llamada también **irradiancia**), es proporcional al promedio del cuadrado de la función de onda:

$$I(r, t) = 2 \langle u^2(r, t) \rangle \quad \text{--- (2.32)}$$

La operación  $\langle \cdot \rangle$ , denota la promediación en un intervalo de tiempo mucho mayor al de un ciclo óptico, pero mucho menor a cualquier otro intervalo temporal de interés (la duración de un pulso de luz, por ejemplo). La duración de un ciclo óptico es extremadamente corta; a manera de ejemplo se tiene que para la luz con una longitud de onda de 600 nm, el ciclo tendrá una duración de  $2 \times 10^{-15}$  s = 2 fs.

No obstante que el significado físico de la función de onda  $u(r, t)$ , no ha sido especificado, la ecuación 2.32 representa su conexión con una cantidad física medible, la intensidad óptica. Existe cierta arbitrariedad en la definición de la función de onda y su relación con la intensidad. La ecuación 2.32 podría haber sido escrita, por ejemplo, sin el factor 2 y la función de onda haber sido escalada por un factor de  $\sqrt{2}$ , de tal manera que la intensidad se mantuviera sin cambios. Sin embargo, podemos decir que el factor de 2 nos será de gran utilidad más adelante.

La **potencia óptica** en Watts,  $P(t)$ , fluyendo dentro de un área  $A$ , normal a la dirección de propagación de la luz, se define como la integral de la intensidad:

$$P(t) = \int_A I(r, t) dA \quad \text{--- (2.33)}$$

Finalmente, la **energía óptica** (en joules) colectada en un intervalo de tiempo dado, es la integral en el tiempo de la potencia óptica sobre el intervalo de tiempo dado.

## 2.6 ONDAS MONOCROMÁTICAS

Una onda monocromática está representada por una función de onda que presenta una dependencia armónica del tiempo:

$$u(r, t) = a(r) \cos[2\pi\nu t + \varphi(r)] \quad \text{--- (2.34)}$$

tal y como se muestra en la Figura 2.4, donde:

- $a(r)$  = amplitud
- $\varphi(r)$  = fase
- $\nu$  = frecuencia (ciclos/s ó Hertz)
- $\omega = 2\pi\nu$  = frecuencia angular (radianes/s)

Generalmente, tanto la amplitud como la fase son dependientes de la posición, pero la función de onda es una función armónica del tiempo, con frecuencia  $\nu$  en cualquier posición.

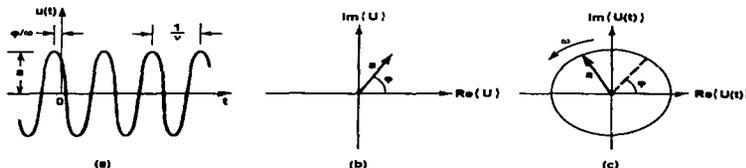


Figura 2.4 Representaciones de una onda monocromática en una posición fija  $r$ : (a) La función de onda  $u(t)$ , es una función armónica del tiempo; (b) La amplitud compleja  $U = a \exp(j\varphi)$ , es un fasor fijo y (c) La función de onda compleja  $U(t) = U \exp(j2\pi\nu t)$ , es un fasor que está rotando a una velocidad angular  $\omega = 2\pi\nu$  radianes/s.

## 2.7 REPRESENTACIÓN COMPLEJA Y LA ECUACIÓN DE HELMHOLTZ

### 2.7.1 FUNCIÓN DE ONDA COMPLEJA

Es conveniente representar la función de onda real  $u(r, t)$  de la ecuación 2.34, en términos de una función compleja:

$$U(r, t) = a(r) \exp[j\varphi(r)] \exp(j2\pi\nu t) \quad \text{--- (2.35)}$$

---

de tal forma que:

$$u(r, t) = \text{Re}\{U(r, t)\} = \frac{1}{2} [U(r, t) + U^*(r, t)] \quad \text{--- (2.36)}$$

La función  $U(r, t)$ , conocida como la **función de onda compleja**, describe a la onda completamente y la función  $u(r, t)$  simplemente es su parte real. Al igual que la función de onda  $u(r, t)$ , la función de onda compleja  $U(r, t)$  también debe satisfacer a la ecuación de onda, de tal forma que:

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad \text{--- (2.37)}$$

y las dos funciones satisfacen las mismas condiciones de frontera.

### 2.7.2 AMPLITUD COMPLEJA

Ahora, la ecuación 2.35 puede ser escrita de la siguiente forma:

$$U(r, t) = U(r) \exp(j2\pi vt) \quad \text{--- (2.38)}$$

donde el factor independiente del tiempo  $U(r) = a(r) \exp[j\varphi(r)]$ , es conocido como la **amplitud compleja**. En consecuencia, la función de onda  $u(r, t)$  está relacionada con la amplitud compleja por la siguiente expresión:

$$u(r, t) = \text{Re}\{U(r) \exp(j2\pi vt)\} = \frac{1}{2} [U(r) \exp(j2\pi vt) + U^*(r) \exp(-j2\pi vt)] \quad \text{--- (2.39)}$$

En una posición dada  $r$ , la amplitud compleja  $U(r)$  es una variable compleja (mostrada en la Figura 2.4b) cuya magnitud  $|U(r)| = a(r)$ , es la amplitud de la onda y cuyo argumento  $\arg(U(r)) = \varphi(r)$ , es la fase. La función de onda compleja  $U(r, t)$  es representada gráficamente por un fasor, rotando con una velocidad angular  $\omega = 2\pi v$  radianes/s (Figura 2.4c) y con un valor inicial en  $t=0$  que es la amplitud compleja  $U(r)$ .

### 2.7.3 LA ECUACIÓN DE HELMHOLTZ

Substituyendo  $U(r, t) = U(r) \exp(j2\pi vt)$  en la ecuación de onda 2.37, obtenemos la ecuación diferencial siguiente:

$$(\nabla^2 + k^2)U(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{--- (2.40)}$$

que es una expresión conocida como la **ecuación de Helmholtz** y donde:

$$k = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\omega}{c} \quad \text{--- (2.41)}$$

es conocido como el **número de onda** ( $k$ ).

#### 2.7.4 INTENSIDAD ÓPTICA

La intensidad óptica se determina utilizando la ecuación 2.32 y substituyendo el valor de  $u(\mathbf{r}, t)$ , tenemos que:

$$2u^2(\mathbf{r}, t) = 2a^2(\mathbf{r}) \cos^2[2\pi\nu t + \varphi(\mathbf{r})]$$

$$2u^2(\mathbf{r}, t) = |U(\mathbf{r})|^2 \{1 + \cos(2[2\pi\nu t + \varphi(\mathbf{r})])\} \quad \text{--- (2.42)}$$

Cuando la ecuación anterior es promediada sobre un tiempo mayor que un período óptico,  $1/\nu$ , el segundo término de la expresión se elimina y en consecuencia, podemos escribir lo siguiente:

$$I(\mathbf{r}) = |U(\mathbf{r})|^2 \quad \text{--- (2.43)}$$

Por lo tanto, la intensidad óptica de una onda monocromática es el cuadrado absoluto de su amplitud compleja y no varía con el tiempo.

#### 2.7.5 FRENTE DE ONDA

Los frentes de onda, son las superficies de igual fase; es decir,  $\varphi(\mathbf{r}) = \text{constante}$ . Las constantes comúnmente se consideran como múltiplos de  $2\pi$ , dando  $\varphi(\mathbf{r}) = 2\pi q$ , donde  $q$  es un entero. La normal al frente de onda en la posición  $\mathbf{r}$ , es paralela al vector de gradiente  $\nabla\varphi(\mathbf{r})$ , que tiene las componentes  $\partial\varphi/\partial x$ ,  $\partial\varphi/\partial y$  y  $\partial\varphi/\partial z$  en un sistema Cartesiano de coordenadas y representa la dirección para la cual la tasa de cambio de la fase es máxima.

Para finalizar esta sección, podemos decir que se han tocado tres puntos importantes:

- Una onda monocromática de frecuencia  $\nu$ , está descrita por una función de onda compleja  $U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}) \exp(j2\pi\nu t)$ , que satisface la ecuación de onda.

- La amplitud compleja  $U(\mathbf{r})$  satisface la ecuación de Helmholtz; su magnitud  $|U(\mathbf{r})|$  y argumento  $\arg\{U(\mathbf{r})\}$ , son la amplitud y fase de la onda, respectivamente. La intensidad óptica es  $I(\mathbf{r}) = |U(\mathbf{r})|^2$ . Los frentes de onda son las superficies de fase constante,  $\varphi(\mathbf{r}) = \arg\{U(\mathbf{r})\} = 2\pi q$  ( $q = \text{entero}$ ).
- La función de onda  $u(\mathbf{r}, t)$  es la parte real de la función de onda compleja,  $u(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{U(\mathbf{r}, t)\}$ . La función de onda también satisface la ecuación de onda.

## 2.8 ONDAS ELEMENTALES

Las soluciones más simples de la ecuación de Helmholtz en un medio homogéneo, son la onda plana y la onda esférica.

### 2.8.1 LA ONDA PLANA

La onda plana presenta una amplitud compleja expresada mediante la siguiente ecuación:

$$U(\mathbf{r}) = A \exp(-j\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) = a \exp[-j(k_x x + k_y y + k_z z)] \quad \text{--- (2.44)}$$

donde  $A$  es una constante compleja denominada **envolvente compleja** y  $\mathbf{K} = (k_x, k_y, k_z)$  es llamado el **vector de onda**. Para que la ecuación anterior satisfaga la ecuación de Helmholtz (ecuación 2.40), se debe cumplir que  $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$ , de tal forma que la magnitud del vector de onda  $\mathbf{K}$ , es el número de onda  $k$ .

Ya que la fase  $\arg\{U(\mathbf{r})\} = \arg\{A\} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}$ , los frentes de onda obedecen la siguiente ecuación:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z = 2\pi q + \arg\{A\}$$

donde  $q$  es un entero. Esta es la ecuación que describe planos paralelos perpendiculares al vector de onda  $\mathbf{K}$  y de ahí el nombre de onda plana. Estos planos están separados por una distancia  $\lambda = 2\pi/k$ , de tal forma que:

$$\lambda = \frac{c}{v} \quad \text{--- (2.45)}$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda.

La onda plana tiene una intensidad constante,  $I(r) = |A|^2$ , en cualquier punto en el espacio de tal forma que porta una potencia infinita. Esta onda es claramente una idealización, ya que existe en cualquier lugar y en todo tiempo.

Si se toma al eje  $z$  en la dirección del vector de onda  $K$ , entonces  $U(r) = A \exp(-jkz)$  y la correspondiente función de onda obtenida de la ecuación 2.39 será:

$$u(r, t) = |A| \cos[2\pi\nu t - kz + \arg\{A\}] = |A| \cos\left[2\pi\nu\left(t - \frac{z}{c}\right) + \arg\{A\}\right] \quad \text{--- (2.46)}$$

La función de onda es por lo tanto periódica en el tiempo, con período  $1/\nu$  y periódica en el espacio, con período  $2\pi/k$ , que es igual a la longitud de onda  $\lambda$  (ver Figura 2.5). Debido a que la fase de la función de onda compleja,  $\arg\{U(r, t)\} = 2\pi\nu(t - z/c) + \arg\{A\}$ , varía con el tiempo y la posición como una función de la variable  $t - z/c$  (ver Figura 2.5),  $c$  es llamada la **velocidad de fase** de la onda.



Figura 2.5 Una onda plana viajando en la dirección de  $z$ , es una función periódica de  $z$  con período espacial  $\lambda$  y también es una función periódica de  $t$ , con período temporal  $1/\nu$ .

En un medio de índice de refracción  $\eta$ , la velocidad de fase  $c = c_0/\eta$  y la longitud de onda  $\lambda = c/\nu = c_0/\eta\nu$ , de tal forma que  $\lambda = \lambda_0/\eta$  y donde  $\lambda_0 = c_0/\nu$  es la longitud de onda en el espacio libre. Para una frecuencia dada  $\nu$ , la longitud de onda en el medio se reduce por un factor  $\eta$ , en relación a la que se tendría en el espacio libre. Como consecuencia, el número de onda  $k = 2\pi/\lambda$  se incrementa también por un factor de  $\eta$  en relación al que se tendría en el espacio libre ( $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ ). En resumen, conforme una onda monocromática se propaga a través de medios con diferentes índices de refracción, su frecuencia permanece constante, pero su velocidad, longitud de onda y número de onda son alterados:

$$c = \frac{c_0}{\eta}, \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{\eta}, \quad k = \eta k_0 \quad \text{--- (2.47)}$$

### 2.8.2 LA ONDA ESFÉRICA

La otra solución simple para la ecuación de Helmholtz es la onda esférica:

$$U(r) = \frac{A}{r} \exp(-jkr) \quad \text{--- (2.48)}$$

donde  $r$  es la distancia desde el origen y  $k=2\pi\nu/c=\omega/c$ , es el número de onda; en este caso, la intensidad  $I(r)=|A|^2/r^2$  es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Tomando  $\arg(A)=0$  por simplicidad, los frentes de onda son las superficies  $kr=2\pi q$  ó  $r=q\lambda$ , donde  $q$  sigue siendo un entero. Estas son las esferas concéntricas separadas por una distancia radial  $\lambda=2\pi/k$ , que avanzan radialmente a una velocidad de fase  $c$  (ver Figura 2.6).

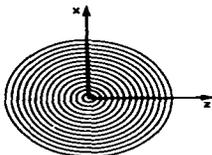


Figura 2.6 Sección transversal de los frentes de onda de una onda esférica.

Una onda esférica que se origina en la posición  $r_0$ , tiene una amplitud compleja definida por la siguiente ecuación:

$$U(r) = \left( \frac{A}{|r-r_0|} \right) \exp(-jk|r-r_0|) \quad \text{--- (2.49)}$$

y sus frentes de onda son esferas centradas alrededor de  $r_0$ . Una onda de amplitud compleja  $U(r)=(A/r)\exp(+jkr)$ , será una onda esférica viajando hacia el origen, en lugar de alejarse de él.

### 2.8.3 APROXIMACIÓN DE FRESNEL DE LA ONDA ESFÉRICA: LA ONDA PARABOLOIDAL

Supongamos ahora una onda esférica originándose en  $r=0$  y examinémosla en los puntos  $r=(x, y, z)$ , ubicados lo suficientemente cerca del eje  $z$  pero alejados del origen, de tal forma que  $(x^2+y^2)^{1/2} \ll z$ . La aproximación paraxial de la óptica de rayos será aplicable en este caso y donde los puntos bajo análisis, son los puntos finales de los rayos que parten del origen.

Denotando  $\theta^2 = (x^2 + y^2)/z^2 \ll 1$ , se utiliza una aproximación basada en la expansión de series de Taylor:

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} = z\sqrt{1 + \theta^2} = z\left(1 + \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{8} + \dots\right)$$

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} \approx z\left(1 + \frac{\theta^2}{2}\right) = z + \frac{x^2 + y^2}{2z}$$

Substituyendo la expresión anterior en la fase y  $r=z$  en la magnitud de  $U(r)$ , de la ecuación 2.48, se obtiene lo siguiente:

$$U(r) \approx \frac{A}{z} \exp(-jkz) \exp\left[-jk \frac{x^2 + y^2}{2z}\right] \quad \text{--- (2.50)}$$

En este caso se utilizó un valor más exacto de  $r$  para la fase, por ser la que presenta mayor sensibilidad a los errores. Esta última expresión se conoce como la **aproximación de Fresnel** y juega un papel muy importante en algunas aplicaciones, como la simplificación de la teoría de transmisión de ondas ópticas a través de aperturas (difracción).

La amplitud compleja en la ecuación 2.50 puede ser vista como representando una onda plana  $A \exp(-jkz)$ , modulada por el factor  $(1/z) \exp[-jk(x^2 + y^2)/2z]$  y que involucra una fase  $k(x^2 + y^2)/2z$ . Este factor de fase sirve para doblar los frentes de onda planos de la onda plana y convertirlos en superficies paraboloidales (ver Figura 2.7), ya que la ecuación de un paraboloide de revolución es  $(x^2 + y^2)/z = \text{constante}$ . En consecuencia, la onda esférica es aproximada por una **onda paraboloidal**. Cuando  $z$  se hace muy grande, la fase en la ecuación 2.50 se aproxima al valor  $kz$  y la magnitud varía lentamente con  $z$ , de tal forma que la onda esférica eventualmente se asemeja a la onda plana  $\exp(-jkz)$ , tal y como se muestra en la Figura 2.7.



Figura 2.7 Una onda esférica puede ser aproximada por una onda paraboloidal, en puntos cercanos al eje  $z$  y lo suficientemente alejados del origen. Para puntos muy alejados, la onda esférica se aproxima a la onda plana.

La condición de validez para la aproximación de Fresnel no es simplemente  $\theta^2 \ll 1$ . No obstante que el tercer término de la expansión de series,  $\theta^4/8$ , puede ser muy pequeño en comparación con el primero y segundo términos, cuando es multiplicado por  $kz$  puede llegar a ser comparable con  $\pi$ . Por lo tanto, la aproximación es válida cuando  $kz\theta^4/8 \ll \pi$  ó de otra forma,  $(x^2+y^2)^2 \ll 4z^3\lambda$ . Para los puntos  $(x, y)$ , dentro de un círculo de radio  $a$  centrado alrededor del eje  $z$ , la condición de validez es  $a^4 \ll 4z^3\lambda$ , ó en otros términos:

$$\frac{N_F \theta_m^2}{4} \ll 1 \quad \text{--- (2.51)}$$

donde  $\theta_m = a/z$  es el ángulo máximo y  $N_F$  se conoce como el **número de Fresnel**:

$$N_F = \frac{a^2}{\lambda z} \quad \text{--- (2.52)}$$

## 2.9 ONDAS PARAXIALES

Se dice que una onda es paraxial, si las normales a su frente de onda son rayos paraxiales. Un camino para construir una onda paraxial, es comenzar con una onda plana  $A \exp(-jkz)$  que llamaremos onda "portadora" y modificar o "modular" su envolvente compleja  $A$ , haciéndola una función de variación lenta de la posición  $A(r)$ ; de esta forma, la amplitud compleja de la onda modulada se convierte en:

$$U(r) = A(r) \exp(-jkz) \quad \text{--- (2.53)}$$

La variación de  $A(r)$  con la posición debe ser lenta, dentro de una distancia igual a una longitud de onda  $\lambda = 2\pi/k$ , de tal forma que la onda mantenga aproximadamente su naturaleza plana.

La función de onda  $u(r, t) = |A(r)| \cos[2\pi\nu t - kz + \arg\{A(r)\}]$  de una onda paraxial, se esquematiza en la Figura 2.8(a) como una función de  $z$  en  $r=0$  y  $x=y=0$ . Esta es una función sinusoidal de  $z$ , con amplitud  $|A(0,0,z)|$  y fase  $\arg\{A(0,0,z)\}$ , la cual varía lentamente con  $z$ . Debido a que el cambio de fase  $\arg\{A(x,y,z)\}$  es pequeño dentro de una distancia de una longitud de onda, los frentes de onda planos,  $kz = 2\pi q$ , de la onda plana portadora se doblan ligeramente, permitiendo que sus normales sean rayos paraxiales (ver Figura 2.8b).

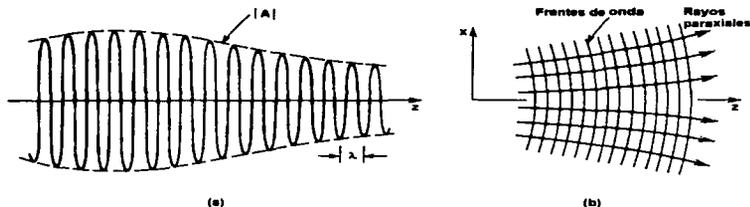


Figura 2.8 (a) La magnitud de una onda paraxial como una función de la distancia axial  $z$ . (b) Los frentes de onda y sus correspondientes normales en una onda paraxial.

### 2.9.1 LA ECUACIÓN PARAXIAL DE HELMHOLTZ

Para que la onda paraxial de la ecuación 2.53 satisfaga la ecuación de Helmholtz (2.40), la envolvente compleja  $A(\mathbf{r})$  debe satisfacer otra ecuación diferencial parcial, obtenida al substituir la ecuación 2.53 en la ecuación 2.40. La suposición de que  $A(\mathbf{r})$  varía lentamente con respecto a  $z$ , significa que dentro de una distancia  $\Delta z = \lambda$ , el cambio  $\Delta A$  es mucho menor que  $A$  misma; es decir,  $\Delta A \ll A$ . Esta inequidad de las variables complejas, aplica a las magnitudes de las partes real e imaginaria por separado. Dado que  $\Delta A = (\partial A / \partial z) \Delta z = (\partial A / \partial z) \lambda$ , esto implica que  $\partial A / \partial z \ll A / \lambda = A / 2\pi$  y por lo tanto:

$$\frac{\partial A}{\partial z} \ll kA \quad \text{--- (2.54)}$$

En forma similar, la derivada parcial  $\partial A / \partial z$  varía lentamente con la distancia  $\lambda$ , de forma que  $\partial^2 A / \partial z^2 \ll k \partial A / \partial z$  y en consecuencia:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll k^2 A \quad \text{--- (2.55)}$$

Substituyendo la ecuación 2.53 en la ecuación 2.40 y despreciando  $\partial^2 A / \partial z^2$  en comparación con  $k \partial A / \partial z$  ó  $k^2 A$ , se obtiene que:

$$\nabla_{\perp}^2 A - j2k \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \quad \text{--- (2.56)}$$

---

donde  $\nabla^2_r = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  es el operador Laplaciano transverso.

La ecuación 2.56, es la **aproximación de envolvente de variación lenta** de la ecuación de Helmholtz o de una manera más simple, la **ecuación paraxial de Helmholtz**. La solución más simple de la ecuación paraxial de Helmholtz es la onda paraboloidal, que es la aproximación paraxial de la onda esférica. Sin embargo, la solución más útil e interesante es el **haz Gaussiano**.

## 2.10 AMPLITUD COMPLEJA DEL HAZ GAUSSIANO

Como se vió en la sección anterior, una solución simple para la ecuación paraxial de Helmholtz es la onda paraboloidal y para la cual:

$$A(r) = \frac{A_1}{z} \exp\left[-jk \frac{\rho^2}{2z}\right], \quad \rho^2 = x^2 + y^2 \quad \text{--- (2.57)}$$

donde  $A_1$  es una constante. La onda paraboloidal es la aproximación paraxial de la onda esférica  $U(r) = (A_1/r) \exp(-jkr)$ , cuando  $x$  y  $y$  son mucho más pequeñas que  $z$ .

Otra solución para la ecuación paraxial de Helmholtz es el haz Gaussiano, la cual es obtenida de la onda paraboloidal mediante una transformación simple. Dado que la amplitud compleja de la onda paraboloidal (ecuación 2.57), es una solución de la ecuación paraxial de Helmholtz (ecuación 2.56), se puede obtener una versión "corrida" de la primera y que también sea una solución, al reemplazar a  $z$  por  $z-\xi$ ; donde  $\xi$  es una constante:

$$A(r) = \frac{A_1}{q(z)} \exp\left[-jk \frac{\rho^2}{2q(z)}\right], \quad q(z) = z - \xi \quad \text{--- (2.58)}$$

La ecuación anterior, representa a una onda paraboloidal centrada alrededor del punto  $z=\xi$ , en lugar de  $z=0$ . Cuando  $\xi$  es compleja, la ecuación 2.58 permanece como una solución de la ecuación paraxial de Helmholtz, pero adquiere propiedades que son significativamente diferentes. En particular, cuando  $\xi$  es puramente imaginaria, digamos  $\xi = -jz_0$  donde  $z_0$  es real, la ecuación 2.58 da origen a la envolvente compleja del haz Gaussiano:

$$A(r) = \frac{A_1}{q(z)} \exp\left[-jk \frac{\rho^2}{2q(z)}\right], \quad q(z) = z + jz_0 \quad \text{--- (2.59)}$$

donde el parámetro  $z_0$  se conoce como **intervalo de Rayleigh**.

Para separar la amplitud y fase de esta envolvente compleja, escribimos la función compleja  $1/q(z) = 1/(z+z_0)$  en términos de sus partes real e imaginaria, definiendo dos nuevas funciones reales,  $R(z)$  y  $W(z)$ , tales que:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - j \frac{\lambda}{\pi W^2(z)} \quad \text{--- (2.60)}$$

Se mostrará más adelante que  $W(z)$  y  $R(z)$  son, respectivamente, las medidas del ancho del haz y del radio de curvatura del frente de onda. Las expresiones correspondientes, en función de  $z$  y  $z_0$ , se muestran en las ecuaciones 2.62 y 2.63. Al substituir la ecuación 2.60 en la 2.59 y haciendo uso de la ecuación 2.53, obtenemos una expresión para la amplitud compleja,  $U(r)$ , del haz Gaussiano:

$$U(r) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp\left[-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right] \exp\left[-jkz - jk \frac{\rho^2}{2R(z)} + j\zeta(z)\right] \quad \text{--- (2.61)}$$

donde por cuestiones de conveniencia, se ha definido una nueva variable  $A_0 = A_1/jz_0$ . Por otro lado se tiene que los llamados parámetros del haz, están definidos por las siguientes expresiones:

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \quad \text{--- (2.62)}$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right] \quad \text{--- (2.63)}$$

$$\zeta(z) = \tan^{-1} \frac{z}{z_0} \quad \text{--- (2.64)}$$

$$W_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} \quad \text{--- (2.65)}$$

La expresión para la amplitud compleja del haz Gaussiano, contiene dos parámetros,  $A_0$  y  $z_0$ , que se determinan de las condiciones de frontera y todos los otros parámetros, están relacionados con el intervalo de Rayleigh ( $z_0$ ) y la longitud de onda ( $\lambda$ ) mediante las ecuaciones 2.62 a 2.65.

## 2.11 PROPIEDADES DEL HAZ GAUSSIANO

### 2.11.1 INTENSIDAD

La intensidad óptica  $I(r) = |U(r)|^2$ , es una función de las distancias axial y radial,  $z$  y  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ :

$$I(\rho, z) = I_0 \left[ \frac{W_0}{W(z)} \right]^2 \exp \left[ -\frac{2\rho^2}{W^2(z)} \right] \quad \text{--- (2.66)}$$

donde  $I_0 = |A_0|^2$ . Para cada valor de  $z$ , la intensidad es una función Gaussiana de la distancia radial  $\rho$  y es por esto que la onda es llamada haz Gaussiano. La función Gaussiana tiene su pico en  $\rho=0$  (en el eje) y decae monótonamente conforme  $\rho$  se incrementa. El ancho,  $W(z)$ , de la distribución Gaussiana se incrementa con la distancia axial  $z$ , tal y como se ilustra en la Figura 2.9.

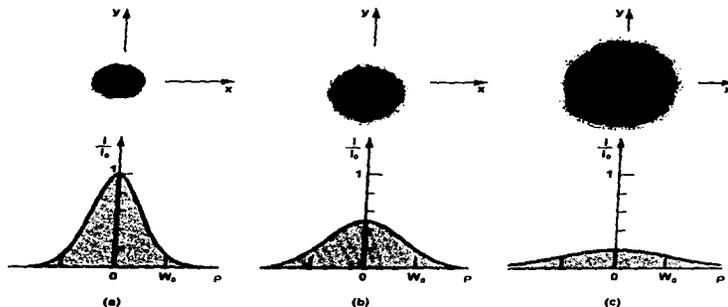


Figura 2.9 La intensidad del haz normalizada,  $I/I_0$ , como una función de la distancia radial  $\rho$  para diferentes distancias axiales: (a)  $z=0$ ; (b)  $z=z_0$  y (c)  $z=2z_0$ .

En el eje del haz ( $\rho=0$ ), la intensidad:

$$I(0, z) = I_0 \left[ \frac{W_0}{W(z)} \right]^2 = \frac{I_0}{1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2} \quad \text{--- (2.67)}$$

tiene su máximo valor  $I_0$  en  $z=0$  y decrece gradualmente conforme  $z$  se incrementa, alcanzando la mitad de su valor pico en  $z=\pm z_0$  (ver Figura 2.10). Cuando  $|z| \gg z_0$ ,  $I(0, z) = I_0 z_0^2 / z^2$ , de tal forma que la intensidad decrece con el inverso del cuadrado de la distancia, al igual que en el caso de las ondas esféricas y paraboloidales. La intensidad pico total,  $I(0, 0) = I_0$ , ocurre precisamente en el centro del haz ( $z=0$ ,  $\rho=0$ ).

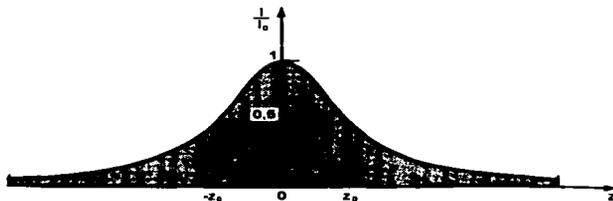


Figura 2.10 La intensidad normalizada del haz,  $I/I_0$ , en puntos sobre el eje del mismo ( $\rho=0$ ) y como función de  $z$ .

### 2.11.2 POTENCIA

La potencia óptica total transportada por el haz, es la integral de la potencia óptica sobre un plano transversal (digamos a una distancia  $z$ ):

$$P = \int_0^{\infty} I(\rho, z) 2\pi\rho \, d\rho \quad \text{--- (2.68)}$$

la cual da origen a la siguiente expresión:

$$P = \frac{1}{2} I_0 (\pi W_0^2) \quad \text{--- (2.69)}$$

donde se puede apreciar que el resultado obtenido es independiente de  $z$ . Por lo tanto, la potencia del haz es un medio de la intensidad pico por el área del haz. Ya que los haces son descritos comúnmente por su potencia, es conveniente expresar  $I_0$  en términos de  $P$  mediante la ecuación 2.69 y reescribiendo la ecuación 2.66 de la siguiente forma:

$$I(\rho, z) = \frac{2P}{\pi W^2(z)} \exp\left[-\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right] \quad \text{--- (2.70)}$$

La razón de la potencia transportada dentro de un círculo de radio  $\rho_0$ , en el plano transversal en la posición  $z$ , a la potencia total es:

$$\frac{1}{P} \int_0^{\rho_0} I(\rho, z) 2\pi\rho d\rho = 1 - \exp\left[-\frac{2\rho_0^2}{W^2(z)}\right] \quad \text{--- (2.71)}$$

La potencia contenida dentro de un círculo de radio  $\rho_0 = W(z)$ , es aproximadamente el 86% de la potencia total y cerca del 99%, está contenida dentro de un círculo de radio  $1.5W(z)$ .

### 2.11.3 RADIO DEL HAZ

Dentro de cualquier plano transversal, la intensidad del haz adquiere su valor pico en el eje del mismo y decae por el factor  $1/e^2 \approx 0.135$  en la distancia radial  $\rho = W(z)$ . Debido a que el 86% de la potencia, es transportada dentro de un círculo de radio  $W(z)$ , nos referiremos a este último como el radio del haz (también llamado el ancho del haz).

La dependencia del radio del haz con respecto a  $z$ , está descrita por la ecuación 2.62, la cual adquiere su valor mínimo ( $W_0$ ) en el plano  $z=0$ , conocido como la **cintura del haz**. En consecuencia, a  $W_0$  se le llama **radio de la cintura** y el diámetro de la cintura,  $2W_0$ , se designa con el nombre de **tamaño de mancha (spot size)**. El radio del haz se incrementa gradualmente con  $z$ , alcanzando el valor de  $\sqrt{2}W_0$  en el plano  $z=z_0$  y continúa creciendo monótonamente con  $z$  (ver Figura 2.11). Para  $z \gg z_0$ , el primer término de la ecuación 2.62 se puede despreciar, dando origen a la siguiente expresión lineal:

$$W(z) \approx \frac{W_0}{z_0} z = \theta_0 z \quad \text{--- (2.72)}$$

donde  $\theta_0 = W_0/z_0$ . Utilizando la ecuación 2.65, también se puede escribir la siguiente expresión:

$$\theta_0 = \frac{\lambda}{\pi W_0} \quad \text{--- (2.73)}$$

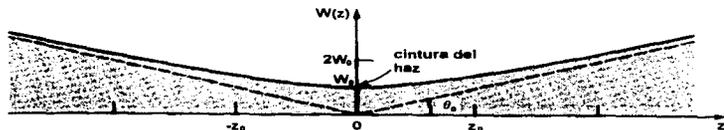


Figura 2.11 El radio del haz,  $W(z)$ , tiene su mínimo valor ( $W_0$ ) en la cintura ( $z=0$ ), alcanza el valor  $\sqrt{2}(W_0)$  en  $z=\pm z_0$  y se incrementa linealmente con  $z$ , para valores grandes de ésta.

#### 2.11.4 DIVERGENCIA DEL HAZ

Lejos del centro del haz, cuando  $z \gg z_0$ , el radio del haz se incrementa aproximadamente en forma lineal con respecto a  $z$ , definiendo un cono con un medio ángulo  $\theta_0$ . Cerca del 86% de la potencia del haz está confinada dentro de este cono. Por lo tanto, la divergencia angular del haz está definida por el ángulo:

$$\theta_0 = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{2W_0} \quad \text{--- (2.74)}$$

La divergencia del haz es directamente proporcional a la razón entre la longitud de onda ( $\lambda$ ) y el diámetro de la cintura del haz,  $2W_0$ . Si la cintura se comprime, el haz se hace más divergente en la forma que establece la ecuación anterior; en consecuencia, para obtener un haz altamente direccional, se requiere una longitud de onda pequeña y una gran cintura de haz.

#### 2.11.5 PROFUNDIDAD DE FOCO

Como el haz presenta su ancho mínimo en  $z=0$ , tal y como es mostrado en la Figura 2.11, se logra el mejor foco también en el plano  $z=0$ . En cualquier dirección, el haz crece gradualmente "saliéndose de foco". La distancia axial, dentro de la cual el radio del haz se mantiene dentro de un factor de  $\sqrt{2}$  de su valor mínimo (es decir, su área cae dentro de un factor igual al doble de su valor mínimo), es conocida como la **profundidad de foco** o **parámetro confocal** (ver Figura 2.12). Se puede observar de la ecuación 2.62, que la profundidad de foco es el doble del intervalo de Rayleigh:

$$2z_0 = \frac{2\pi W_0^2}{\lambda} \quad \text{--- (2.75)}$$

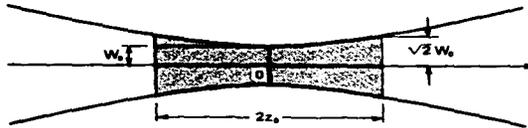


Figura 2.12 La profundidad de foco de un haz Gaussiano.

La profundidad de foco, es directamente proporcional al área del haz en su cintura, e inversamente proporcional a la longitud de onda. En consecuencia, cuando un haz es enfocado a un tamaño de mancha pequeño, la profundidad de foco es corta y el plano de enfocamiento debe ser colocado con gran exactitud. Paralelamente, también podemos afirmar que un tamaño de mancha pequeño y una gran profundidad de foco no pueden ser obtenidas simultáneamente, a menos que la longitud de onda de la luz sea corta.

#### 2.11.6 FASE

De la ecuación 2.61, podemos obtener la fase del haz Gaussiano:

$$\varphi(\rho, z) = kz - \zeta(z) + \frac{k\rho^2}{2R(z)} \quad \text{--- (2.76)}$$

y en el eje del haz ( $\rho=0$ ), la fase solamente tendrá dos componentes:

$$\varphi(0, z) = kz - \zeta(z) \quad \text{--- (2.77)}$$

El primer término,  $kz$ , es la fase de una onda plana y el segundo término representa un retardo de fase,  $\zeta(z)$ , dado por la ecuación 2.64 y que abarca el intervalo desde  $-\pi/2$ , en  $z=-\infty$  hasta  $+\pi/2$  en  $z=\infty$ ; lo anterior se ilustra en la Figura 2.13. Este retardo de fase, corresponde a un excesivo atraso del frente de onda, en comparación con una onda plana o una onda esférica (ver también Figura 2.16). El retardo excesivo, acumulado en forma total conforme la onda viaja de  $z=-\infty$  a  $z=\infty$ , es igual a  $\pi$  y este fenómeno es conocido como **efecto Guoy**.

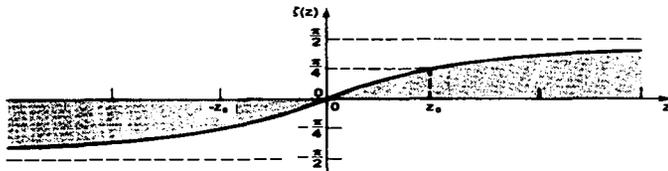


Figura 2.13  $\zeta(z)$  es el retardo de fase del haz Gaussiano, relativo a una onda plana uniforme en diferentes puntos del eje del haz.

### 2.11.7 FRENTES DE ONDA

El tercer término en la ecuación 2.76, es el responsable del "doblamiento" del frente de onda, ya que representa la desviación de la fase para puntos que están fuera del eje, en un plano transversal dado, con respecto a la del punto axial. Las superficies de fase constante, satisfacen la siguiente expresión:

$$k \left[ z + \frac{\rho^2}{2R(z)} \right] - \zeta(z) = 2\pi q \quad \text{--- (2.78)}$$

Debido a que la variación de  $\zeta(z)$  y  $R(z)$  es relativamente lenta, se consideran aproximadamente constantes en puntos dentro del radio del haz para cada frente de onda. En consecuencia, podemos escribir:

$$z + \frac{\rho^2}{2R} = q\lambda + \frac{\zeta\lambda}{2\pi} \quad \text{--- (2.79)}$$

donde  $R=R(z)$  y  $\zeta=\zeta(z)$ . Esta es precisamente la ecuación de una superficie paraboloidal con radio de curvatura  $R$ . Por lo tanto,  $R(z)$  es el radio de curvatura del frente de onda en la posición  $z$ , sobre el eje del haz; lo anterior se presenta en la Figura 2.14.

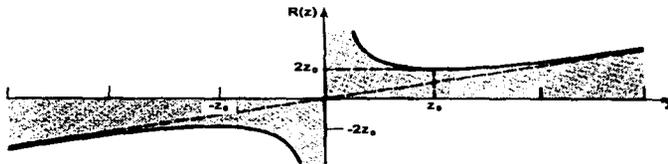


Figura 2.14 El radio de curvatura,  $R(z)$ , del frente de onda de un haz Gaussiano. La línea punteada, representa el radio de curvatura de una onda esférica.

Como se puede ver en la Figura 2.14, el radio de curvatura  $R(z)$  es infinito en  $z=0$ , lo que corresponde a frentes de onda planos y posteriormente decrece a un valor mínimo de  $2z_0$  en  $z=z_0$ . Este es el punto en el cual el frente de onda tiene la mayor curvatura (ver Figura 2.15) y subsecuentemente, el radio de curvatura se incrementa conforme  $z$  crece, hasta que  $R(z) \approx z$  para  $z \gg z_0$ . El frente de onda es entonces aproximadamente igual al de una onda esférica. Para valores negativos de  $z$ , los frentes de onda siguen un patrón de comportamiento idéntico, con excepción del cambio de signo; al respecto, se adopta la convención de que un frente de onda divergente tiene un radio de curvatura positivo y una onda convergente tiene un radio negativo.



Figura 2.15 Frentes de onda de un haz Gaussiano.

Con lo visto en las secciones anteriores, se puede decir que el haz Gaussiano presenta tres puntos o zonas de especial interés y que definen su comportamiento característico. En forma resumida, se describen dichas zonas y sus características asociadas:

- **En el plano  $z=z_0$ .** A una distancia axial  $z_0$ , desde la cintura del haz, la onda presenta las siguientes propiedades:
  - ◊ El radio de haz es  $\sqrt{2}$  veces más grande que el radio en la cintura del haz y el área es mayor por un factor de 2.
  - ◊ La intensidad en el eje del haz es  $\frac{1}{2}$  de la intensidad pico.
  - ◊ La fase en el eje del haz está retardada por un ángulo de  $\pi/4$  relativo a la fase de una onda plana.
  - ◊ El radio de curvatura del frente de onda es mínimo, de tal forma que su curvatura es máxima ( $R=2z_0$ ).

• **Cerca del centro del haz**

- ◊ Para los puntos en que  $|z| \ll z_0$  y  $\rho \ll W_0$ , se observa lo siguiente:  $\exp[-\rho^2/W^2(z)] \approx \exp(-\rho^2/W_0^2) \approx 1$ ; de tal forma que la intensidad del haz es aproximadamente constante.
- ◊ También se observa que  $R(z) \approx z_0^2/z$  y  $\zeta(z) \approx 0$ , por lo que la fase  $k[z + \rho^2/2R(z)] \approx kz(1 + \rho^2/2z^2) \approx kz$ . Como resultado, los frentes de onda son aproximadamente planos. El haz Gaussiano puede, en consecuencia, ser aproximado cerca de su centro a una onda plana.

• **Lejos de la cintura del haz**

- ◊ Para los puntos dentro del radio de la cintura del haz ( $\rho < W_0$ ), pero alejados de ella ( $z \gg z_0$ ), la onda es similar a una onda esférica.
- ◊ Dado que  $W(z) \approx W_0 z/z_0 \gg W_0$  y  $\rho < W_0$ , se observa que:  $\exp[-\rho^2/W^2(z)] \approx 1$ ; de tal forma que la intensidad del haz es aproximadamente uniforme.
- ◊ Como  $R(z) \approx z$ , los frentes de onda son aproximadamente esféricos. Por lo tanto, con excepción de la sobrefase  $\zeta(z) \approx \pi/2$ , la amplitud compleja del haz Gaussiano se aproxima a la de una onda paraboloidal, la que a su vez se asemeja a la de una onda esférica en la aproximación paraxial (ver Figura 2.16).

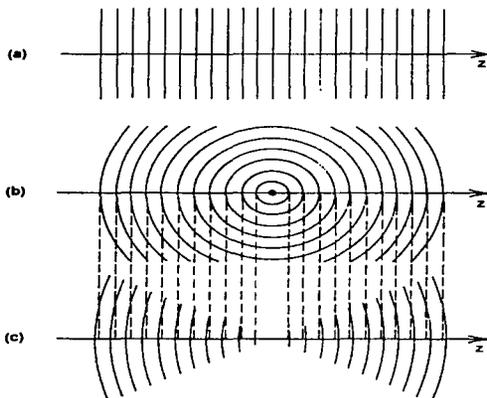


Figura 2.16 Frentes de onda de (a) una onda plana uniforme; (b) una onda esférica y (c) un haz Gaussiano. En puntos ubicados cerca del centro del haz, el haz Gaussiano se asemeja a una onda plana. Para valores de  $z$  grandes, el haz se comporta como una onda esférica con la excepción de que la fase está retardada  $90^\circ$  (es este diagrama, se muestra como un cuarto de la distancia entre dos frentes de onda adyacentes).

---

## 2.12 TRANSMISIÓN A TRAVÉS DE COMPONENTES ÓPTICOS

Procederemos ahora, examinando la transmisión de ondas ópticas a través de componentes ópticos transparentes, como lo son las lentes. El efecto de la reflexión en las superficies de estos componentes será ignorado, ya que el modelo de la luz provisto por la óptica de onda escalar, no lo puede describir adecuadamente. El efecto de absorción en el material también se ignora, por lo que el mayor énfasis se dará al corrimiento de fase introducido por estos componentes y al doblamiento asociado del frente de onda.

Otra de las características más importantes del haz Gaussiano y que también se analizará, es que cuando éste es transmitido a través de una serie de componentes ópticos con simetría radial y alineados con el eje del haz, el haz Gaussiano permanecerá como tal, tanto como el sistema en su conjunto mantenga la naturaleza paraxial de la onda. Solamente la cintura del haz y la curvatura se ven alteradas, con lo que decimos que el haz es "arreglado".

### 2.12.1 TRANSMISIÓN A TRAVÉS DE UN MEDIO TRANSPARENTE

Para iniciar este análisis, consideremos la transmisión de una onda plana, a través de un medio transparente de índice de refracción  $\eta$  y espesor  $d$ , rodeado por el espacio libre. Las superficies limitadoras del medio transparente son los planos  $z=0$  y  $z=d$  y la onda incidente viaja en la dirección  $z$  (ver Figura 2.17). Paralelamente, sea  $U(x, y, z)$ , la amplitud compleja de esta onda plana. Dado que las reflexiones internas y externas serán ignoradas, se asume que  $U(x, y, z)$  es continua en las fronteras. La razón:

$$t(x, y) = \frac{U(x, y, d)}{U(x, y, 0)} \quad \text{--- (2.80)}$$

representa, en consecuencia, la **transmitancia de amplitud compleja** del medio transparente. La onda plana incidente continúa propagándose dentro del medio transparente, como una onda plana con número de onda  $\eta k_0$ , de tal forma que  $U(x, y, z)$  es proporcional a  $\exp(-j\eta k_0 z)$ . Como resultado, se tiene que:

$$\frac{U(x, y, d)}{U(x, y, 0)} = \exp(-j\eta k_0 d) \quad \text{--- (2.81)}$$

de tal forma que:

$$t(x, y) = \exp(-j\eta k_0 d) \quad \text{--- (2.82)}$$

La ecuación anterior, nos indica que el medio transparente introduce un corrimiento de fase,  $\eta k_0 d = 2\pi(d/\lambda)$ .

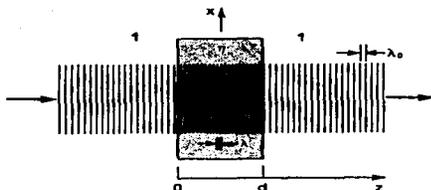


Figura 2.17 Transmisión de una onda plana, a través de un medio transparente.

Si la onda plana incidente, forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $z$  y tiene un vector de onda  $K$  (ver Figura 2.18), las ondas refractada y transmitida también serán planas, con vectores de onda  $K_1$  y  $K$ , y ángulos  $\theta_1$  y  $\theta$ , respectivamente. Estos dos últimos parámetros, están relacionados por la Ley de Snell ( $\text{sen}\theta = \eta \text{sen}\theta_1$ ). La amplitud compleja  $U(x, y, z)$ , dentro del medio transparente, es ahora proporcional a:

$$\exp(-jK_1 \cdot r) = \exp[-j\eta k_0 (z \cos \theta_1 + x \text{sen} \theta_1)] \quad \text{--- (2.83)}$$

de tal forma, que la transmitancia de amplitud compleja del medio transparente es:

$$t(x, y) = \frac{U(x, y, d)}{U(x, y, 0)} = \exp[-j\eta k_0 (d \cos \theta_1 + x \text{sen} \theta_1)] \quad \text{--- (2.84)}$$

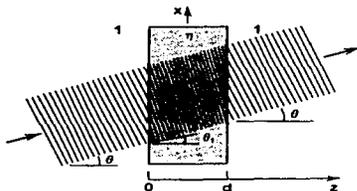


Figura 2.18 Transmisión de una onda plana oblicua, a través de un medio transparente delgado.

Si el ángulo de incidencia,  $\theta$ , es pequeño (es decir, la onda incidente es paraxial), entonces  $\theta_1 \approx \theta/\eta$  también es pequeño y las aproximaciones  $\text{sen}\theta \approx \theta$  y  $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ , originan que:

$$r(x, y) \approx \exp(-j\eta k_0 d) \exp\left(\frac{jk_0 \theta^2 d}{2\eta} - jk_0 \theta x\right) \quad \text{--- (2.85)}$$

Si el medio es lo suficientemente delgado y el ángulo  $\theta$  es lo suficientemente pequeño, de tal forma que:

$$\frac{k_0 \theta^2 d}{2\eta} \ll 2\pi \quad \text{o} \quad \frac{\left(\frac{d}{\lambda_0}\right) \theta^2}{2\eta} \ll 1 \quad \text{--- (2.86)}$$

y además,  $(x/\lambda)\theta \ll 1$  para todos los valores de  $x$  de interés, entonces la transmitancia del medio transparente puede ser aproximada por la ecuación 2.82. Bajo estas condiciones, la transmitancia del medio transparente es aproximadamente independiente del ángulo  $\theta$ .

### 2.12.2 MEDIO TRANSPARENTE DELGADO DE ESPESOR VARIABLE

Determinemos ahora, la transmitancia de amplitud de un medio transparente delgado, cuyo espesor  $d(x, y)$ , varía ligeramente en función de  $x$  y  $y$ . Asumiremos que la onda incidente, es una onda paraxial arbitraria. El medio transparente está dentro de los planos  $z=0$  y  $z=d_0$ , que son referidos como los límites o fronteras del componente óptico (ver Figura 2.19).

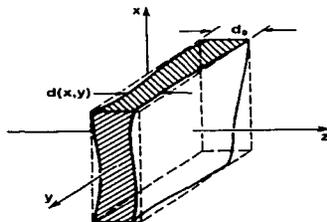


Figura 2.19 Un medio transparente de espesor variable.

En la vecindad de la posición  $(x, y, 0)$ , la onda paraxial incidente puede ser considerada localmente como una onda plana, viajando a lo largo de una dirección que forma un ángulo pequeño con el eje  $z$ . Esta onda cruza un medio transparente delgado, de espesor  $d(x, y)$ , rodeado por capas delgadas de aire de espesor total  $d_0 - d(x, y)$ .

De acuerdo con la relación aproximada 2.82, la transmitancia local es el producto de las transmitancias de una capa delgada de aire, de espesor  $d_0 d(x, y)$  y de una capa delgada de material transparente, de espesor  $d(x, y)$ ; de tal forma que:

$$t(x, y) \approx \exp[-j\eta k_0 d(x, y)] \exp\left\{-jk_0 [d_0 - d(x, y)]\right\} \quad \text{--- (2.87)}$$

y de la cual se obtiene lo siguiente:

$$t(x, y) \approx h_0 \exp[-j(\eta - 1)k_0 d(x, y)] \quad \text{--- (2.88)}$$

donde  $h_0 = \exp(-jk_0 d_0)$ , es un factor de fase constante. Esta expresión es válida en la aproximación paraxial (todos los ángulos  $\theta$  son pequeños) y cuando el espesor  $d_0$  es lo suficientemente pequeño, de tal forma que  $(d_0/\lambda)\theta^2/2\eta \ll 1$  en todos los puntos  $(x, y)$  para los cuales  $(x/\lambda)\theta \ll 1$  y  $(y/\lambda)\theta \ll 1$ .

### 2.12.3 TRANSMISIÓN A TRAVÉS DE UNALENTE DELGADA

La expresión general dada por la ecuación 2.88, para la transmitancia de amplitud compleja de un medio transparente delgado de espesor variable, será aplicada ahora a la lente delgada plano-convexa, mostrada en la Figura 2.20. Dado que la lente es una sección de una esfera de radio  $R$ , el espesor en el punto  $(x, y)$  es:

$$d(x, y) = d_0 - \overline{PQ} = d_0 - (R - \overline{QC}) \quad \text{--- (2.89)}$$

o de otra forma:

$$d(x, y) = d_0 - \left[ R - \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} \right] \quad \text{--- (2.90)}$$

Esta expresión puede ser simplificada, considerando solamente puntos para los que  $x$  y  $y$  sean lo suficientemente pequeños en comparación con  $R$ , de tal forma que  $x^2 + y^2 \ll R^2$ . En este caso:

$$\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} = R \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2}} \approx R \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{2R^2} \right) \quad \text{--- (2.91)}$$

Substituyendo la ecuación anterior en la ecuación 2.90, se obtiene que:

$$d(x, y) \approx d_0 - \frac{x^2 + y^2}{2R} \quad \text{--- (2.92)}$$

Finalmente, al substituir la ecuación 2.92 en la expresión general (ecuación 2.88):

$$t(x, y) \approx h_0 \exp \left[ jk_0 \frac{x^2 + y^2}{2f} \right] \quad \text{--- (2.93)}$$

donde:

$$f = \frac{R}{\eta - 1} \quad \text{--- (2.94)}$$

es la distancia focal de la lente y  $h_0 = \exp(-j\eta k_0 d_0)$ , es un factor de fase constante que generalmente no tiene mayor significancia.

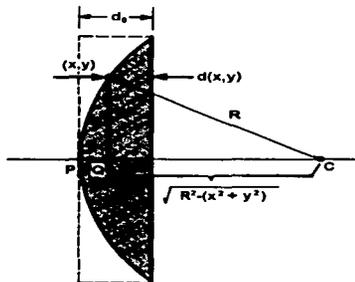


Figura 2.20 Una lente plano-convexa.

Ya que la lente le impone a la onda incidente una fase proporcional a  $x^2 + y^2$ , esta dobla los frentes de onda planos transformando a la onda plana en una onda paraboloïdal, centrada a una distancia  $f$  de la lente.

En el caso de una lente bi-convexa (ver Figura 2.21), la transmitancia de amplitud compleja también está dada por la ecuación 2.93, pero debemos recordar que para este caso:

$$\frac{1}{f} = (\eta - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{--- (2.95)}$$

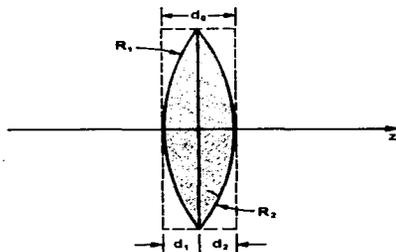


Figura 2.21 Una lente bi-convexa.

Como se vió al inicio de esta sección, la transmitancia de amplitud compleja de una lente delgada de distancia focal  $f$ , es proporcional a  $\exp(jk\rho^2/2f)$ . Cuando un haz Gaussiano atraviesa la lente, su amplitud compleja, dada por la ecuación 2.61, es multiplicada por este factor de fase. Como resultado, el frente de onda es doblado, pero el radio del haz no se altera.

Un haz Gaussiano centrado en  $z=0$  y con radio de cintura  $W_0$ , es transmitido a través de una lente delgada localizada a una distancia  $z$ ; tal y como es mostrado en la Figura 2.22. La fase en el plano de la lente es:

$$kz + \frac{k\rho^2}{2R} - \zeta$$

donde  $R=R(z)$  y  $\zeta=\zeta(z)$ , están dados por las ecuaciones 2.63 y 2.64, respectivamente. La fase de la onda transmitida se altera a :

$$kz + k \frac{\rho^2}{2R} - \zeta - k \frac{\rho^2}{2f} = kz + k \frac{\rho^2}{2R'} - \zeta \quad \text{--- (2.96)}$$

donde

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} - \frac{1}{f} \quad \text{--- (2.97)}$$

Con lo anterior, es posible concluir que la onda transmitida es en sí misma un haz Gaussiano, con ancho  $W' = W$  y radio de curvatura  $R'$ , donde  $R'$  satisface la ecuación 2.97. Nótese que  $R$  es positiva, dado que el frente de onda del haz incidente es divergente y  $R'$  es negativa puesto que el frente de onda del haz transmitido es convergente.

Los parámetros del haz emergente pueden ser determinados en base a su ancho y curvatura en un punto dado, que en este caso es el plano de la lente. En base a esta consideración, el radio de la cintura del nuevo haz es:

$$W'_0 = \frac{W}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi W^2}{\lambda R'}\right)^2}} \quad \text{--- (2.98)}$$

y el centro está localizado a una distancia desde la lente, dada por:

$$-z' = \frac{R'}{1 + \left(\frac{\lambda R'}{\pi W^2}\right)^2} \quad \text{--- (2.99)}$$

El signo negativo es utilizado en esta última ecuación, dado que la cintura queda a la derecha de la lente. Considerando que  $R = R(z)$  y  $W = W(z)$  para las ecuaciones 2.62 y 2.63 y substituyéndolas en las ecuaciones 2.97 a 2.99, se obtienen las siguientes expresiones, las cuales relacionan los parámetros de los dos haces (ver Figura 2.22):

$$\text{Radio de la cintura} \quad W'_0 = MW_0 \quad \text{--- (2.100)}$$

$$\text{Ubicación de la cintura} \quad (z' - f) = M^2(z - f) \quad \text{--- (2.101)}$$

$$\text{Profundidad de foco} \quad 2z'_0 = M^2(2z_0) \quad \text{--- (2.102)}$$

$$\text{Divergencia} \quad 2\theta'_0 = \frac{2\theta_0}{M} \quad \text{--- (2.103)}$$

$$\text{Magnificación} \quad M = \frac{M_r}{\sqrt{1+r^2}} \quad \text{--- (2.104)}$$

donde

$$r = \frac{z_0}{z-f}, \quad M_r = \left| \frac{f}{z-f} \right| \quad \text{--- (2.105)}$$

El factor de magnificación,  $M$ , juega un papel muy importante ya que la cintura del haz es amplificada por  $M$ , la profundidad de foco lo es por  $M^2$  y la divergencia angular es demagnificada por  $M$ .

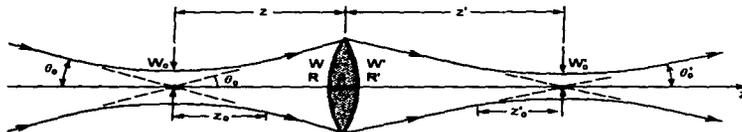


Figura 2.22 Transmisión de un haz Gaussiano a través de una lente delgada.

#### 2.12.4 LÍMITE DE LA ÓPTICA DE RAYOS

Considérese el caso límite en el que  $(z-f) \gg z_0$ , de tal forma que la lente está completamente fuera de la profundidad de foco del haz incidente (ver Figura 2.23). En este caso, el haz puede ser aproximado por una onda esférica y el parámetro  $r \ll 1$ , por lo que  $M \approx M_r$ . Como consecuencia, las ecuaciones 2.100 a 2.105 se reducen a:

$$W'_0 \approx M W_0 \quad \text{--- (2.106)}$$

$$\frac{1}{z'} + \frac{1}{z} \approx \frac{1}{f} \quad \text{--- (2.107)}$$

$$M \approx M_r = \left| \frac{f}{z-f} \right| \quad \text{--- (2.108)}$$

Las ecuaciones 2.106 y 2.107 son precisamente las relaciones arrojadas por la óptica geométrica para la ubicación y tamaño de una mancha de luz, de diámetro  $2W'_0$  y localizada a una distancia  $z'$  a la izquierda de la lente delgada.

---

El factor de amplificación  $M_r$ , es el que está basado en la óptica de rayos y en vista de que la ecuación 2.104 nos dice que  $M < M_r$ , la máxima amplificación obtenible es la amplificación de la óptica de rayos,  $M_r$ . Conforme  $r^2$  se incrementa, la desviación de la óptica de rayos crece y la amplificación decrece.

### 2.12.5 TRANSMITANCIA DE COMPONENTES ÓPTICOS CON GRADIENTE DE ÍNDICE DE REFRACCIÓN

Como ya hemos visto, el efecto de una lente recae en el corrimiento de fase que le impone a la onda incidente y que sirve para doblar el frente de onda de una forma preestablecida. Este corrimiento de fase está controlado por la variación del espesor del material con la distancia transversal desde el eje óptico (lineal en el caso de una lente). Por otro lado, el mismo corrimiento de fase puede ser introducido por un medio plano transparente de espesor fijo, pero con índice de refracción variante.

La transmitancia de amplitud compleja de un medio plano, transparente y delgado, de espesor  $d_0$  e índice de refracción gradual,  $\eta(x, y)$ , es:

$$t(x, y) = \exp[-j\eta(x, y)k_0 d_0] \quad \text{--- (2.109)}$$

Seleccionando apropiadamente la variación de  $\eta(x, y)$ , con  $x$  y  $y$ , el efecto de cualquier componente óptico delgado de índice constante puede ser reproducido.

### 2.13 ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS MONOCROMÁTICAS

Cuando la onda electromagnética es monocromática, todas las componentes de los campos eléctrico y magnético son funciones armónicas del tiempo de la misma frecuencia. Estas componentes están expresadas en términos de sus amplitudes complejas, tal y como se hizo en la sección 2.7.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{Re}\{\mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t)\} \quad \text{--- (2.110)}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{Re}\{\mathbf{H}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t)\}$$

donde  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  y  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ , son las amplitudes complejas de los campos eléctrico y magnético, respectivamente,  $\omega = 2\pi\nu$  es la frecuencia angular y  $\nu$  es la frecuencia. Las amplitudes complejas  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{B}$  de las funciones reales  $P$ ,  $D$  y  $B$  se definen de manera similar. Las relaciones entre estas amplitudes complejas, se originan de las ecuaciones de Maxwell y de las ecuaciones del medio.

### 2.13.1 ECUACIONES DE MAXWELL PARA UN MEDIO LIBRE DE FUENTES Y LUZ MONOCROMÁTICA

Substituyendo  $\partial/\partial t = j\omega$ , en las ecuaciones de Maxwell 2.10 a 2.13, obtenemos las siguientes expresiones:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} \quad \text{--- (2.111)}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad \text{--- (2.112)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad \text{--- (2.113)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{--- (2.114)}$$

De igual forma, las ecuaciones 2.14 y 2.16 arrojan las siguientes expresiones:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{--- (2.115)}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad \text{--- (2.116)}$$

### 2.13.2 INTENSIDAD ÓPTICA Y POTENCIA. ENFOQUE DE LA TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA

El flujo de potencia electromagnética, se rige por la promediación en el tiempo del vector de Poynting,  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ . En términos de las amplitudes complejas, se tiene que:

$$\mathbf{S} = \text{Re} \left\{ \mathbf{E} e^{j\omega t} \right\} \times \text{Re} \left\{ \mathbf{H} e^{j\omega t} \right\} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} e^{j\omega t} + \mathbf{E}^* e^{-j\omega t}) \times \frac{1}{2} (\mathbf{H} e^{j\omega t} + \mathbf{H}^* e^{-j\omega t})$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \mathbf{H} e^{j2\omega t} + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}^* e^{-j2\omega t})$$

Los términos que contienen a  $e^{j2\omega t}$  y  $e^{-j2\omega t}$ , son eliminados por el proceso de promediación, dando como consecuencia:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{4} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) = \frac{1}{2} (\mathbf{S} + \mathbf{S}^*) = \text{Re} \{ \mathbf{S} \} \quad \text{--- (2.117)}$$

donde:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \quad \text{--- (2.118)}$$

es conocido como el **vector complejo de Poynting**. La intensidad óptica será entonces, la magnitud del vector  $\text{Re}\{\mathbf{S}\}$ .

### 2.13.3 MEDIO LINEAL, NO DISPERSIVO, HOMOGÉNEO E ISOTRÓPICO. ENFOQUE DE LA TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA

Considerando las ecuaciones del medio:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad \text{--- (2.119)}$$

las ecuaciones de Maxwell (2.111 a 2.114), se transforman nuevamente y dan origen a las siguientes expresiones:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \epsilon \mathbf{E} \quad \text{--- (2.120)}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu_0 \mathbf{H} \quad \text{--- (2.121)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{--- (2.122)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad \text{--- (2.123)}$$

Dado que las componentes de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  satisfacen la ecuación de onda (con  $c = c_0/\eta$  y  $\eta = (\epsilon/\epsilon_0)^{1/2}$ ), las componentes de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  deben satisfacer la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \mathbf{U} + \mathbf{k}^2 \mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{k} = \omega \sqrt{\epsilon \mu_0} = \eta \mathbf{k}_0 \quad \text{--- (2.124)}$$

donde la función escalar  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{r})$ , representa cualquiera de las seis componentes de los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ , y  $k_0 = \omega/c_0$ .

## 2.14 ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS ELEMENTALES EN UN MEDIO LINEAL, HOMOGÉNEO E ISOTRÓPICO

### 2.14.1 LA ONDA PLANA ELECTROMAGNÉTICA TRANSVERSAL (TEM)

Consideremos una onda electromagnética monocromática, cuyas componentes de los campos eléctrico y magnético son ondas planas de vector de onda  $\mathbf{K}$ , de tal forma que:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(-j\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \quad \text{--- (2.125)}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 \exp(-j\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \quad \text{--- (2.126)}$$

donde  $\mathbf{E}_0$  y  $\mathbf{H}_0$  son vectores constantes. Cada una de estas componentes, satisface la ecuación de Helmholtz si la magnitud de  $\mathbf{K}$  es  $k = \eta k_0$ , donde  $\eta$  es el índice de refracción del medio.

Ahora debemos examinar las condiciones que  $\mathbf{E}_0$  y  $\mathbf{H}_0$  deben cumplir para satisfacer las ecuaciones de Maxwell. Substituyendo las ecuaciones 2.125 y 2.126 en las ecuaciones de Maxwell, 2.120 y 2.121, se obtiene:

$$\mathbf{K} \times \mathbf{H}_0 = -\omega \epsilon \mathbf{E}_0 \quad \text{--- (2.127)}$$

$$\mathbf{K} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mu_0 \mathbf{H}_0 \quad \text{--- (2.128)}$$

Las otras dos ecuaciones de Maxwell se satisfacen de forma idéntica, dado que la divergencia de una onda plana uniforme es cero.

De la ecuación 2.127, se puede observar que  $\mathbf{E}$  es normal tanto a  $\mathbf{K}$  como a  $\mathbf{H}$ . De forma equivalente, la ecuación 2.128 implica que  $\mathbf{H}$  es normal a  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{E}$ ; por lo tanto,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{K}$  deben ser mutuamente ortogonales (ver Figura 2.23). Ya que  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  están contenidos en un plano normal a la dirección de propagación  $\mathbf{K}$ , la onda es llamada **transversal electromagnética (TEM)**.

De acuerdo con la ecuación 2.127, las magnitudes  $\mathbf{H}_0$  y  $\mathbf{E}_0$  están relacionadas por  $\mathbf{H}_0 = (\omega \epsilon / k) \mathbf{E}_0$  y paralelamente, de la ecuación 2.128 obtenemos que  $\mathbf{H}_0 = (k / \omega \mu_0) \mathbf{E}_0$ . Para que estas dos ecuaciones sean consistentes, se debe cumplir que:

$$\frac{\omega \epsilon}{k} = \frac{k}{\omega \mu_0} \quad \text{ó} \quad k = \omega \sqrt{\epsilon \mu_0} = \frac{\omega}{c} = \frac{\eta \omega}{c_0} = \eta k_0$$

Esta es, de hecho, la condición para que la onda satisfaga la ecuación de Helmholtz. La razón entre las amplitudes de los campos eléctrico y magnético es, en consecuencia:

$$\frac{E_0}{H_0} = \frac{\omega \mu_0}{k} = \frac{\mu_0 c_0}{\eta} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad \text{ó} \quad \frac{E_0}{H_0} = n \quad \text{--- (2.129)}$$

donde

$$n = \frac{n_0}{\eta} \quad \text{--- (2.130)}$$

es conocida como la **impedancia** del medio y en consecuencia:

$$n_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 120\pi \approx 377 \, \Omega \quad \text{--- (2.131)}$$

es la impedancia del espacio libre.

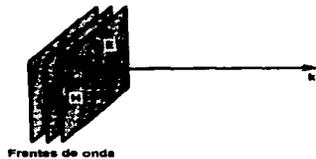


Figura 2.23 La onda plana TEM. Los vectores E, H y K son mutuamente ortogonales. Los frentes de onda (superficies de fase constante) son normales a K.

El vector complejo de Poynting,  $S = \frac{1}{2} E \times H^*$ , es paralelo al vector de onda K, de tal forma que la potencia fluye a lo largo de la dirección normal a los frentes de onda. La magnitud del vector de Poynting, S, es  $\frac{1}{2} E_0 H_0^* = |E_0|^2 / 2n$ , dando como consecuencia que la intensidad sea:

$$I = \frac{|E_0|^2}{2n} \quad \text{--- (2.132)}$$

La intensidad de la onda TEM, es entonces, proporcional al cuadrado del valor absoluto de la envolvente compleja del campo eléctrico.

Por ejemplo, una intensidad de  $10 \text{ W/cm}^2$  en el espacio libre, corresponde a un campo eléctrico de  $\approx 87 \text{ V/cm}$ . Nótese la similitud entre la ecuación 2.131 y la expresión  $I = |U|^2$ , que es aplicable a ondas escalares.

### 2.14.2 LA ONDA ESFÉRICA

Un ejemplo de una onda electromagnética, con características que se asemejan a las de la onda esférica escalar analizada anteriormente, es el campo radiado por un dipolo eléctrico oscilante. Esta onda se construye con la ayuda de un campo vectorial auxiliar:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_0 U(\mathbf{r}) \mathbf{x}^\wedge \quad \text{--- (2.133)}$$

donde

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \exp(-jkr) \quad \text{--- (2.134)}$$

representa una onda esférica escalar originándose en  $r=0$ ,  $\mathbf{x}^\wedge$  es un vector unitario en la dirección  $\mathbf{x}$  y  $A_0$  es una constante. Como  $U(\mathbf{r})$  satisface la ecuación de Helmholtz (como se vió en la sección de óptica de onda escalar),  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  también satisface dicha ecuación,  $\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0$ .

Definamos ahora el campo magnético:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{--- (2.135)}$$

y determinemos el campo eléctrico correspondiente, mediante la ecuación de Maxwell 2.120:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \mathbf{H} \quad \text{--- (2.136)}$$

Estos campos satisfacen las otras tres ecuaciones de Maxwell. La forma de las dos ecuaciones anteriores, asegura que  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$  y  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , dado que la divergencia del rotacional de cualquier campo vectorial se anula. Ya que  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  satisface la ecuación de Helmholtz, puede mostrarse que la ecuación de Maxwell restante ( $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}$ ), también se satisface y por lo tanto, las ecuaciones 2.133 a 2.136 definen una onda electromagnética válida. El vector  $\mathbf{A}$  se conoce en la teoría electromagnética, como el **vector potencial** y su uso a menudo facilita la solución de la ecuación de Maxwell.

Para obtener expresiones explícitas de  $E$  y  $H$ , los rotacionales de las ecuaciones 2.135 y 2.136 deben ser evaluados. Esto se puede llevar a cabo, mediante el uso de las coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  definidas en la Figura 2.24(a). Para los puntos que se encuentren a una distancia, desde el origen, mucho mayor que una longitud de onda ( $r \gg \lambda$ , ó  $kr \gg 2\pi$ ), estas expresiones se aproximan a:

$$E(r) \approx E_0 \text{sen}\theta U(r) \theta^\wedge \quad \text{--- (2.137)}$$

$$H(r) \approx H_0 \text{sen}\theta U(r) \phi^\wedge \quad \text{--- (2.138)}$$

donde  $E_0 = jkI\mu_0 A_0$ ,  $H_0 = E_0/n$ ,  $\theta = \cos^{-1}(x/r)$  y,  $\theta^\wedge$  y  $\phi^\wedge$  son vectores unitarios en coordenadas esféricas. Por lo tanto, los frentes de onda son esféricos y los campos eléctrico y magnético son ortogonales entre sí y a la dirección radial  $r^\wedge$ ; tal y como es ilustrado por la Figura 2.24(b). Sin embargo, a diferencia de la onda esférica escalar, la magnitud de esta onda vectorial varía como  $\text{sen}\theta$ . Para puntos cercanos al eje  $z$  y alejados del origen,  $\theta \approx \pi/2$  y  $\phi \approx \pi/2$ , de tal forma que las normales al frente de onda son prácticamente paralelas al eje  $z$  (correspondiendo a rayos paraxiales) y  $\text{sen}\theta \approx 1$ .

En un sistema de coordenadas Cartesianas:

$$\theta^\wedge = -\text{sen}\theta x^\wedge + \cos\theta \cos\phi y^\wedge + \cos\theta \text{sen}\phi z^\wedge \approx -x^\wedge + \left(\frac{x}{z}\right)\left(\frac{y}{z}\right) y^\wedge + \left(\frac{x}{z}\right) z^\wedge \approx -x^\wedge + \left(\frac{x}{z}\right) z^\wedge$$

de tal forma que:

$$E(r) \approx E_0 \left( -x^\wedge + \frac{x}{z} z^\wedge \right) U(r) \quad \text{--- (2.139)}$$

donde  $U(r)$  es la aproximación paraxial de la onda esférica (la onda paraboloidal que se analizó en la sección 2.8). Para valores muy grandes de  $z$ , el término  $(x/z)$  en la ecuación anterior se puede despreciar, obteniéndose que:

$$E(r) = -E_0 U(r) x^\wedge \quad \text{--- (2.140)}$$

$$H(r) = H_0 U(r) y^\wedge \quad \text{--- (2.141)}$$

Bajo esta aproximación,  $U(r)$  se aproxima a una onda plana  $(1/z)e^{jkz}$ , con lo que esencialmente obtenemos una onda plana TEM.

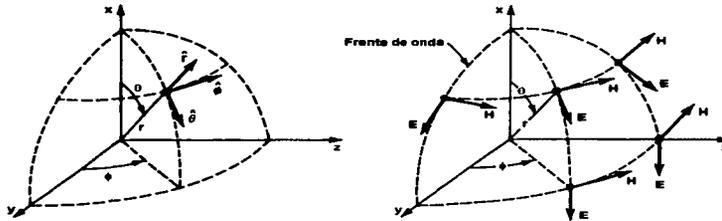


Figura 2.24 (a) Sistema de coordenadas esféricas; (b) Vectores de campo eléctrico y magnético y frentes de onda del campo electromagnético radiado por un dipolo eléctrico oscilante a distancias  $r \gg \lambda$ .

### 2.14.3 EL HAZ GAUSSIANO. ENFOQUE DE LA TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA

Como se analizó en la sección 2.10, un haz Gaussiano escalar se obtiene de una onda paraboloidal (la aproximación paraxial de la onda esférica) al reemplazar la coordenada  $z$  con  $z + jz_0$ , donde  $z_0$  es una constante real. La misma transformación puede ser aplicada a la onda esférica electromagnética, reemplazando  $z$  en la ecuación 2.139 con  $z + jz_0$ , para obtener lo siguiente:

$$E(\mathbf{r}) = E_0 \left( -x^\wedge + \frac{x}{z + jz_0} z^\wedge \right) U(\mathbf{r}) \quad \text{--- (2.142)}$$

donde  $U(\mathbf{r})$  representa ahora, la amplitud compleja escalar del haz Gaussiano (dada por la ecuación 2.61). La Figura 2.25 ilustra los frentes de onda de un haz Gaussiano y las líneas de campo  $E$ , determinadas de la ecuación 2.142.

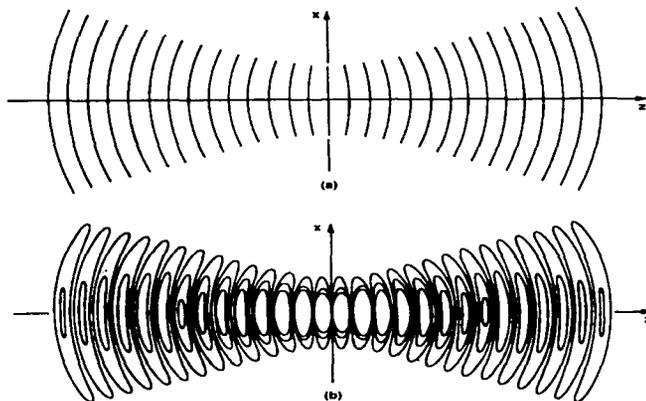


Figura 2.25 (a) Frentes de onda del haz Gaussiano escalar  $U(r)$ , en el plano  $x-z$ ; (b) Líneas de campo eléctrico del haz Gaussiano electromagnético, en el plano  $x-z$ .

## 2.15 RELACIÓN ENTRE LA ÓPTICA ELECTROMAGNÉTICA Y LA ÓPTICA DE ONDA ESCALAR

Una onda escalar paraxial, es aquella cuyas normales al frente de onda forman ángulos pequeños con el eje óptico. La onda se comporta localmente como una onda plana, con la envolvente compleja y la dirección de propagación, variando lentamente con respecto a la posición.

La misma idea es aplicable a las ondas electromagnéticas en un medio isotrópico, ya que una onda electromagnética paraxial es aproximada, en forma local, por una onda plana TEM. En cada punto, los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  quedan en un plano tangencial a la superficie del frente de onda; es decir, normales al vector  $\mathbf{K}$  (ver Figura 2.26). La potencia óptica fluye a lo largo de la dirección  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ , que es paralela a  $\mathbf{K}$  y aproximadamente paralela al eje óptico; por su parte, la intensidad  $I = |\mathbf{E}|^2/2\eta$ .

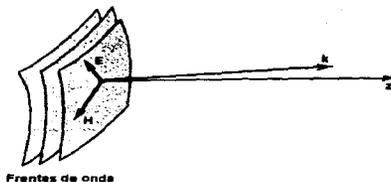


Figura 2.26 Onda electromagnética paraxial.

Una onda escalar de amplitud compleja  $U = E/(2\eta)^{1/2}$ , puede ser asociada con la onda electromagnética paraxial de tal forma que las dos ondas tengan la misma intensidad  $I = |U|^2 = |E|^2/2\eta$  y los mismos frentes de onda. La descripción escalar de la luz, es una aproximación adecuada para resolver problemas de interferencia, difracción y propagación de ondas paraxiales, cuando la polarización no es un factor a tomar en cuenta.

Nótese, sin embargo, que  $U$  y  $E$  no satisfacen las mismas condiciones de frontera. Por ejemplo, si el campo eléctrico es tangencial a la frontera entre dos medios dieléctricos,  $E$  es continuo, pero  $U = E/(2\eta)^{1/2}$  es discontinuo dado que  $\eta = \eta_0 \eta$  cambia en la frontera.

## 2.16 TRANSFORMACIÓN Y MAGNIFICACIÓN MEDIANTE LENTES SIMPLES; LAS ECUACIONES DE SELF PARA EL HAZ GAUSSIANO

De lo analizado en las secciones anteriores, es claro que los haces Gaussianos se transforman de una manera poco ortodoxa. El científico *A. E. Siegman*, trata el problema general de la propagación de un haz Gaussiano a través de lentes y espejos, utilizando matrices de transformación (esto se analizará en la siguiente sección). Sin embargo, una aproximación menos rigurosa, pero de alguna manera más ilustrativa para atacar este problema, ha sido desarrollada por otro científico: *Sidney A. Self*.

Esta propuesta alternativa, muestra una manera de modelar las transformaciones de un haz láser a través de elementos ópticos simples, bajo condiciones paraxiales, calculando el intervalo de Rayleigh y la ubicación de la cintura del haz después de cada uno de los elementos del sistema óptico, en forma individual. Estos parámetros, se calculan utilizando una ecuación análoga a la bien conocida ecuación del fabricante de lentes o ecuación de la lente delgada, la cual fue deducida y discutida en el capítulo anterior. Es importante mencionar, que los grupos de ingeniería óptica de algunas instituciones de prestigio (como Melles-Griot y la Universidad de Stanford en California), han encontrado este método particularmente útil.

La ecuación de la lente delgada, puede escribirse adimensionalmente de la siguiente forma y en la Figura 2.27 se muestra una gráfica de ella:

$$\frac{f}{s} + \frac{f}{s'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f} = 1 \quad \text{--- (2.143)}$$

Además, tomando la amplificación de la óptica geométrica como positiva, tenemos que:

$$M = \left| \frac{s'}{s} \right| = \frac{1}{\left| 1 - \frac{s}{f} \right|} \quad \text{--- (2.144)}$$

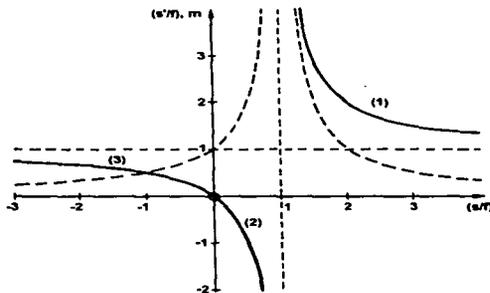


Figura 2.27 Gráfica Cartesiana de la ecuación de la lente dada por la óptica geométrica. Las hipérbolas con línea sólida, representan la distancia imagen normalizada vs. la distancia objeto normalizada y las hipérbolas con línea punteada, representan la amplificación. Las líneas punteadas ortogonales, muestran las asintotas en  $(s/f)=1$  y  $(s'/f)=1$ . La rama (1) es la de mayor interés, ya que corresponde al caso de una lente positiva ( $f>0$ ) con un objeto real y una imagen real.

Para comprender mejor los alcances del método que se propone en esta sección, es necesario introducir los conceptos de **campo cercano** y **campo lejano**, que están definidos, respectivamente, por las siguientes condiciones:  $z < z_0$  y  $z > z_0$ . Analizando la ecuación 2.63 en el campo cercano, para  $z \ll z_0$ , tenemos que:  $R \approx z_0^2/z \rightarrow \infty$  cuando  $z \rightarrow 0$ . Por el contrario, en el campo lejano cuando  $z \gg z_0$ , obtenemos:  $R \approx z$  y las ondas se aproximan a aquellas que fueran generadas desde una fuente puntual, centrada en la cintura. Además, como ya se mencionó, el radio de curvatura presenta un valor mínimo  $R_{min} = 2z_0$  en  $z = z_0$ . Como consecuencia, las ecuaciones 2.72 y 2.73 corresponden al radio del haz y medio ángulo de divergencia en el campo lejano, respectivamente.

Considerando el caso de una lente delgada, cuando un haz Gaussiano pasa a través de ella su radio no se ve alterado, mientras que el radio de curvatura del frente de onda es modificado por el factor  $(1/f)$ , como en el caso de la óptica geométrica.

Para los haces Gaussianos y aplicando las ecuaciones 2.62, 2.63 y 2.75, Self ha derivado una ecuación, asumiendo que la cintura del haz de entrada representa el objeto y la cintura del haz de salida representa la imagen. Dicha ecuación, está expresada en términos del intervalo de Rayleigh del haz de entrada y en forma regular queda de la siguiente manera:

$$\frac{1}{s + \frac{z_0^2}{s-f}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad \text{--- (2.145)}$$

o en forma adimensional:

$$\frac{1}{\frac{s}{f} + \left(\frac{z_0}{f}\right)^2} + \left(\frac{s'}{f}\right) = 1 \quad \text{--- (2.146)}$$

la cual puede ser comparada con la ecuación 2.143. Considerando  $(s'/f)$  como una función de  $(s/f)$ , la ecuación 2.146 puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\left(\frac{s'}{f}\right) = 1 + \frac{\frac{s}{f} - 1}{\left(\frac{s}{f} - 1\right)^2 + \left(\frac{z_0}{f}\right)^2} \quad \text{--- (2.147)}$$

mientras que la forma equivalente de la ecuación de la lente delgada es:

$$\left(\frac{s'}{f}\right) = 1 + \frac{1}{\frac{s}{f} - 1} \quad \text{--- (2.148)}$$

En la ecuación 2.147, se puede apreciar que la aparición del término  $(z_0/f)^2$  en el denominador, remueve el polo en  $(s/f)=1$  que aparece en la ecuación 2.148.

En la Figura 2.28 se muestra una gráfica de la ecuación de la lente para haces Gaussianos; es decir, de  $(s/f)$  contra  $(s'/f)$ , para diversos valores de  $(z_0/f)$ . En ella, podemos notar tres regiones de interés y que en el caso de una lente delgada positiva corresponden a: objeto real-imagen real, objeto real-imagen virtual y objeto virtual-imagen real.

Se debe hacer notar, que en esta gráfica el límite  $(z_0/f) \rightarrow 0$ , corresponde al caso de la óptica geométrica. Paralelamente, es particularmente notable el hecho de que para valores de  $(z_0/f)$  diferentes de cero, todas las curvas presentan una sola rama continua, que pasa a través del punto  $(s/f) = (s'/f) = 1$  y que además es un punto de inflexión. La asíntota en  $(s'/f) = 1$  ha sido removida, lo que significa que la distancia imagen no puede volverse infinita, como en el caso de la óptica geométrica, cuando el objeto está en un punto focal. Lo anterior significa, que si la cintura del haz incidente está en el punto focal frontal, el haz emergente tendrá su cintura en el punto focal posterior. Más aún, esta situación es independiente de la razón  $(z_0/f)$ .

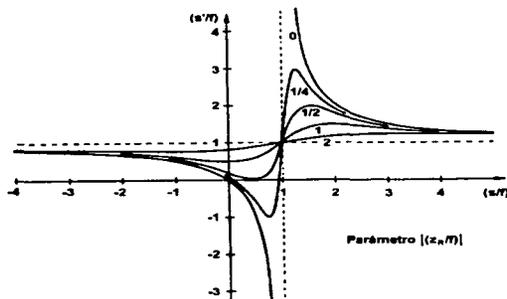


Figura 2.28 Gráfica de la ecuación de la lente para haces Gaussianos, mostrando la distancia imagen normalizada vs. la distancia objeto normalizada y utilizando como parámetro, el intervalo de Rayleigh normalizado del haz de entrada.

Los puntos máximos y mínimos de las curvas también son de interés, diferenciando la ecuación 2.147 obtenemos las expresiones:

$$\left(\frac{s'}{f}\right)_{\max} = 1 + \frac{f}{2z_0} \quad \text{en} \quad \left(\frac{s}{f}\right) = 1 + \frac{z_0}{f} \quad \text{--- (2.149)}$$

$$\left(\frac{s'}{f}\right)_{\min} = 1 - \frac{f}{2z_0} \quad \text{en} \quad \left(\frac{s}{f}\right) = 1 - \frac{z_0}{f} \quad \text{--- (2.150)}$$

Para el caso común de una lente positiva, con un objeto y una imagen reales, la ecuación 2.149 nos dice que la distancia imagen máxima es  $s'_{\max} = f + (f^2/2z_0)$  y esto ocurre para una distancia objeto  $s = f + z_0$ . Las principales diferencias entre la óptica de haces Gaussianos y la óptica geométrica, representadas en la gráfica anterior, se pueden resumir de la siguiente forma:

- Para los haces Gaussianos, existe una distancia imagen mínima y una máxima.
- La máxima distancia imagen ocurre en  $s=f+z_0$  y no en  $s=f$ .
- Existe un punto común en la expresión del haz Gaussiano, cuando  $(s/f)=(s'/f)=1$ . Para una lente positiva simple, este es el punto en el cual el haz incidente tiene su cintura en el foco frontal de la lente y el haz emergente presenta la cintura en el punto focal posterior.
- A diferencia del caso de la óptica geométrica, en la que para un objeto e imagen reales existe una distancia objeto-imagen mínima,  $s+s'=4f$  (cuando  $s=s'=2f$  y la amplificación es unitaria), no existe ninguna separación mínima correspondiente, entre las cinturas de los haces Gaussianos incidente y emergente.
- Una lente aparenta tener una distancia focal menor, conforme  $z_0/f$  se incrementa desde cero; en otras palabras, existe un corrimiento del foco Gaussiano con respecto a la predicción de la óptica geométrica.

Self recomienda calcular  $z_0$ ,  $W_0$  y la posición de  $W_0$  para cada elemento óptico en el sistema, de manera que la transformación total del haz pueda ser obtenida. Para llevar esto a cabo, también es necesario considerar la amplificación,  $W_0'/W_0$ . La ecuación para la amplificación, se obtiene al substituir las ecuaciones 2.105 en la 2.104:

$$M = \frac{W_0'}{W_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{s}{f}\right)^2 + \left(\frac{z_0}{f}\right)^2}} \quad \text{--- (2.151)}$$

la cual se reduce a la ecuación dada por la óptica geométrica (2.144), cuando  $z_0^2 \ll (s-f)^2$ . La presencia del término  $(z_0/f)^2$ , remueve el polo para la amplificación cuando  $s=f$  en la ecuación 2.144. Para la condición en la que la cintura objeto está en el foco frontal, la amplificación tiene un máximo de  $(f/z_0)$ , mientras que la amplificación unitaria solamente ocurre cuando  $f=z_0$ , para este caso. La amplificación como una función de  $(s/f)$  se grafica en la Figura 2.29, con  $(z_0/f)$  como parámetro. El límite  $(z_0/f) \rightarrow 0$  corresponde al caso de la óptica geométrica, mostrado en la Figura 2.27. Nótese que en las ecuaciones anteriores, debemos asociar  $s=z$  y  $s'=z'$ .

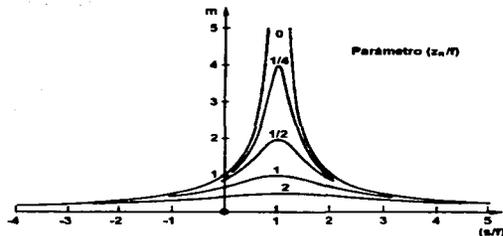


Figura 2.29 Gráfica de la amplificación para un haz Gaussiano vs. la distancia objeto normalizada y tomando como parámetro, el intervalo de Rayleigh normalizado del haz de entrada.

Como ya vimos anteriormente, el intervalo de Rayleigh del haz de salida depende de  $M^2$  y está dado por:

$$z'_0 = M^2 z_0 \quad \text{--- (2.152)}$$

Las ecuaciones que se han derivado, están escritas en términos del intervalo de Rayleigh del haz de entrada; sin embargo, a diferencia de la óptica geométrica, éstas no son simétricas con respecto a los parámetros del haz de entrada y salida. Para realizar un análisis en sentido inverso; es decir, en base al haz de salida, es conveniente considerar la ecuación para el haz Gaussiano en términos del intervalo de Rayleigh de este haz:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s' + \frac{(z'_0)^2}{s' - f}} = \frac{1}{f} \quad \text{--- (2.153)}$$

Una vez que se han establecido las consideraciones de Self, respecto al análisis de la propagación y enfocamiento de un haz Gaussiano mediante una aproximación simple, es importante aclarar que esta sección es una de las más importantes para el desarrollo del trabajo. Como se verá en el Capítulo 7, esta metodología constituye el punto de partida en el proceso de evaluación de los sistemas ópticos de acoplamiento.

## 2.17 ÓPTICA MATRICIAL

La óptica matricial u óptica de matrices, es una técnica para trazar rayos paraxiales y en ella se asume que los rayos viajan solamente dentro de un plano, de tal manera que el formalismo es aplicable a sistemas con geometría plana y a rayos meridianales en sistemas de simetría circular.

Un rayo es descrito por su posición y su ángulo con respecto al eje óptico y estas variables se van alterando conforme el rayo viaja a través del sistema. En la aproximación paraxial, la posición y ángulo en los planos de entrada y salida de un sistema óptico, están relacionados por dos ecuaciones algebraicas lineales. Como resultado, el sistema óptico se describe mediante una matriz de  $2 \times 2$ , llamada la **matriz de transferencia de rayos**.

La conveniencia de utilizar el método de matrices, recae en el hecho de que la matriz de transferencia de rayos, de un conjunto de elementos ópticos (o sistemas) colocados en cascada, es el producto de las matrices de transferencia de los componentes individuales (o sistemas). Por lo tanto, la óptica de matrices provee un mecanismo formal para describir sistemas ópticos complejos, en la aproximación paraxial.

### 2.17.1 LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA DE RAYOS

Considérese un sistema óptico de simetría circular, formado por una sucesión de superficies refractantes y reflectantes, todas ellas centradas alrededor del mismo eje (eje óptico). El eje  $z$  queda a lo largo del eje óptico y apunta en la dirección general en la cual viaja el rayo. Considérense además, los rayos en un plano que contiene al eje óptico, digamos el plano  $y$ - $z$ . Procederemos a trazar un rayo conforme viaja a través del sistema; es decir, conforme cruza los planos transversales a diferentes distancias axiales. Un rayo cruzando el plano transversal en  $z$ , es caracterizado completamente mediante la coordenada  $y$  de su punto de cruce y el ángulo  $\theta$  (ver Figura 2.30).



Figura 2.30 Un rayo es caracterizado por su coordenada  $y$  y el ángulo  $\theta$ .

Un sistema óptico se considera como un conjunto de componentes ópticos, colocados entre dos planos transversales en  $z_1$  y  $z_2$ , los cuales son conocidos como planos de entrada y salida, respectivamente. El sistema es caracterizado completamente por su efecto sobre un rayo incidente, de posición y dirección arbitrarias  $(y_1, \theta_1)$ . El sistema altera las variables del rayo, confiriéndole una nueva posición y dirección  $(y_2, \theta_2)$ , en el plano de salida. En la aproximación paraxial, podemos decir que  $\sin \theta \approx \theta$  y que la relación entre  $(y_2, \theta_2)$  y  $(y_1, \theta_1)$  es lineal.

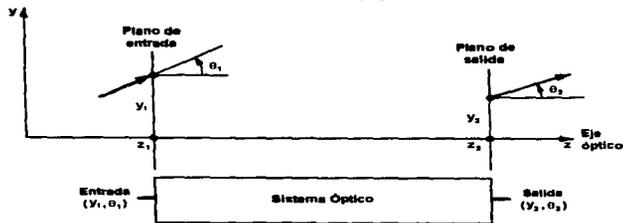


Figura 2.31 Un rayo entra en un sistema óptico en la posición  $y_1$  y ángulo  $\theta_1$  y sale en la posición  $y_2$  y ángulo  $\theta_2$ .

Consideremos la situación de la Figura 2.32(a), en la que un rayo de luz está viajando aproximadamente en la dirección  $z$ , pero en una trayectoria que tiene un desplazamiento transversal pequeño,  $r(z)$ , fuera del eje  $z$  y también una ligera pendiente,  $\theta(z) = dr/dz$ , con respecto al mismo eje  $z$ . El desplazamiento  $r$ , bien podría ser considerado en el eje  $x$  ó en el eje  $y$ .

Ahora, analicemos la propagación de este rayo bajo ciertas situaciones simples. Primeramente, cuando este rayo viaja sin ser desviado desde  $z=z_1$ , hasta  $z=z_2=z_1+L$ ; tal y como se muestra en la Figura 2.32(b), el desplazamiento y pendiente del rayo en el plano de salida,  $z_2$ , están relacionados con el desplazamiento y pendiente de entrada en  $z_1$ , por las siguientes ecuaciones:

$$r_2 = r_1 + L\theta_1 \quad \text{--- (2.154)}$$

$$\theta_2 = \theta_1 \quad \text{--- (2.155)}$$

De manera similar, la Figura 2.32(c) nos muestra que si el rayo pasa a través de una lente delgada convergente, de distancia focal  $f$ , las cantidades de entrada y salida (justamente antes y justamente después de la lente delgada), están relacionadas mediante las siguientes expresiones:

$$r_2 = r_1 \quad \text{--- (2.156)}$$

$$\theta_2 = \theta_1 - \frac{r_1}{f} \quad \text{--- (2.157)}$$

Las dos últimas ecuaciones pueden ser verificadas, observando que si el rayo pasa a través del centro de la lente ( $r_1=0$ ), su pendiente no será alterada ( $\theta_2=\theta_1$ ); mientras que un rayo que entre a la lente en forma paralela al eje ( $\theta_1=0$ ), con cualquier desplazamiento transversal finito,  $r_1$ , deberá ser desviado hacia adentro lo suficiente para que pase a través del punto focal de la lente ( $\theta_2=-r_1/f$ ).

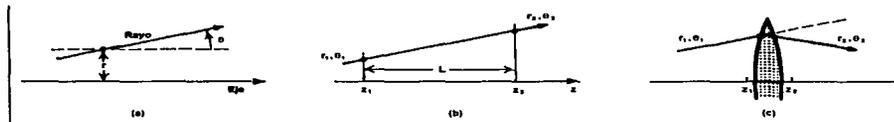


Figura 2.32 (a) Trayectoria general de un rayo y su comportamiento al pasar a través de (b) el espacio libre y (c) una lente delgada.

Los cambios en el desplazamiento  $r$  y la pendiente  $\theta$ , que sufre un rayo conforme pasa a través de un elemento óptico, pueden ser resumidos de la siguiente forma:

$$r_2 = Ar_1 + B\theta_1 \quad \text{--- (2.158)}$$

$$\theta_2 = Cr_1 + D\theta_1 \quad \text{--- (2.159)}$$

donde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son números reales. Expresando las dos ecuaciones anteriores en forma de matriz, tenemos que:

$$r = \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad r_2 = Mr_1$$

$$\begin{bmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad \text{--- (2.160)}$$

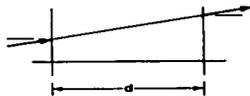
donde la cantidad vectorial  $r$ , contiene los dos parámetros del rayo  $r=(r, \theta)$  y la matriz de rayos,  $M=(A, B, C, D)$ , resume las propiedades de transformación de rayos del elemento óptico, puesto que permite determinar  $(r_2, \theta_2)$  para cualquier  $(r_1, \theta_1)$ . Es por esta razón que se le conoce como la matriz de transferencia de rayos.

### 2.17.2 MATRICES DE COMPONENTES ÓPTICOS SIMPLES

A continuación, se muestran las matrices de rayos del espacio libre y otras situaciones o elementos ópticos simples. En cada caso, la matriz está basada en la aproximación paraxial; es decir, el ángulo entre la trayectoria y el eje es siempre lo suficientemente pequeño, para caer dentro de la aproximación:  $\text{sen}\theta \approx \tan\theta \approx \theta$ . Además, los desplazamientos desde el eje son en todos los casos pequeños, comparados con el radio de curvatura de las superficies refractantes y reflectantes.

- **Propagación en el Espacio Libre**

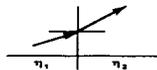
Ya que los rayos viajan en el espacio a lo largo de líneas rectas, un rayo viajando una distancia  $d$  es alterado de acuerdo con:  $r_2 = r_1 + \theta_1 d$  y  $\theta_2 = \theta_1$ . Por lo tanto, la matriz de transferencia de rayos es:



$$M = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{--- (2.161)}$$

- **Refracción en una interfase plana**

En una interfase plana entre dos medios de índices de refracción  $n_1$  y  $n_2$ , el ángulo del rayo cambia de acuerdo con la Ley de Snell  $n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2$ . En la aproximación paraxial,  $n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$  y la posición del rayo no se altera,  $r_2 = r_1$ . La matriz de transferencia de rayos es:



$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \quad \text{--- (2.162)}$$

- **Refracción en una interfase esférica**

La relación entre  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , para rayos paraxiales refractados en la frontera esférica entre dos medios, se puede derivar de la Figura 1.7:

$$\gamma \approx \frac{n_1}{n_2} \alpha - \frac{(n_2 - n_1)d}{n_2 R} \quad \text{--- (2.163)}$$

donde  $\alpha = \theta_1$ ,  $\gamma = \theta_2$ ,  $R > 0 \Rightarrow$  superficie convexa y  $R < 0 \Rightarrow$  superficie cóncava. En consecuencia, la matriz de transferencia de rayos queda de la siguiente forma:



$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(n_2 - n_1)}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \quad \text{--- (2.164)}$$

• **Transmisión a través de una lente delgada**

La relación entre  $\theta_1$  y  $\theta_2$  para rayos paraxiales transmitidos a través de una lente delgada, está dada por:

$$\theta_2 = \theta_1 - \frac{r}{f} \quad \text{--- (2.165)}$$

donde  $r_1 = r_2 = r$ ,  $f > 0 \Rightarrow$  lente convexa y  $f < 0 \Rightarrow$  lente cóncava. De tal forma, que la expresión matricial de transformación de rayos es la siguiente:



$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{--- (2.166)}$$

### 2.17.3 MÁTRICES DE COMPONENTES ÓPTICOS EN CASCADA

Una cascada de componentes ópticos, cuyas matrices de transformación de rayos son  $M_1, M_2, \dots, M_N$ , es equivalente a un solo elemento óptico con una matriz dada por:

$$M = M_N \cdots M_2 M_1 \quad \text{--- (2.167)}$$

Nótese el orden de la multiplicación de matrices: la matriz del sistema que es cruzado por el rayo en primer lugar, se coloca a la extrema derecha; de tal forma que opere, sobre la matriz columna del rayo incidente, también en primer lugar.

## 2.18 TRANSMISIÓN DE HACES GAUSSIANOS A TRAVÉS DE SISTEMAS ÓPTICOS ARBITRARIOS

En la aproximación paraxial, un sistema óptico está completamente caracterizado por la matriz de transformación de rayos ( $2 \times 2$ ), que relaciona la posición e inclinación de un rayo transmitido, con las mismas variables del rayo incidente. Ahora analizaremos como un sistema óptico paraxial arbitrario, caracterizado por una matriz  $M$  de elementos  $(A, B, C, D)$ , modifica un haz Gaussiano (ver Figura 2.33).

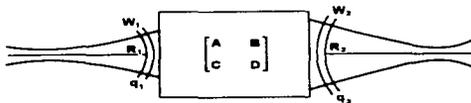


Figura 2.33 Modificación de un haz Gaussiano mediante un sistema paraxial arbitrario, descrito por una matriz  $ABCD$ .

### 2.18.1 LA LEY $ABCD$

Los parámetros  $q_1$  y  $q_2$ , de los haces Gaussianos incidente y transmitido respectivamente, en los planos de entrada y salida de un sistema óptico paraxial descrito por la matriz  $(A, B, C, D)$ , están relacionados por la siguiente ecuación:

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad \text{--- (2.168)}$$

Debido a que el parámetro  $q$  identifica el ancho,  $W$  y la curvatura,  $R$ , de un haz Gaussiano (ver ecuación 2.60), esta simple regla, llamada la **Ley  $ABCD$** , rige el efecto de un sistema paraxial arbitrario sobre un haz Gaussiano.

### 2.18.2 TRANSMISIÓN A TRAVÉS DEL ESPACIO LIBRE

Cuando el sistema óptico, está constituido simplemente por una distancia  $d$  en el espacio libre (o en cualquier medio homogéneo), los elementos de la matriz de transferencia de rayos,  $M$ , son:  $A=1$ ,  $B=d$ ,  $C=0$  y  $D=1$ . Dado que para el espacio libre  $q=z+jz_0$  o de otra forma  $q(z)=q_1+z$ , el parámetro  $q$  es modificado por el sistema óptico de acuerdo con la siguiente expresión:

$$q_2 = q_1 + d = \frac{(1 \cdot q_1) + d}{(0 \cdot q_1) + 1} \quad \text{--- (2.169)}$$

de manera que la Ley  $ABCD$  se cumple.

### 2.18.3 TRANSMISIÓN A TRAVÉS DE UN COMPONENTE ÓPTICO DELGADO

Un componente óptico delgado no afecta la posición del rayo, de tal forma que  $r_2=r_1$ , pero sí altera el ángulo, de acuerdo con:  $\theta_2=C r_1+D\theta_1$ ; tal y como se ilustra en la Figura 2.34. Como consecuencia,  $A=1$  y  $B=0$ , pero  $C$  y  $D$  son arbitrarios; sin embargo, de lo visto en la sección 2.17.2, sabemos que  $D=\eta_1/\eta_2$ . Además, dado que el componente óptico se considera delgado, el ancho del haz no cambia; es decir:

$$W_2 = W_1 \quad \text{--- (2.170)}$$

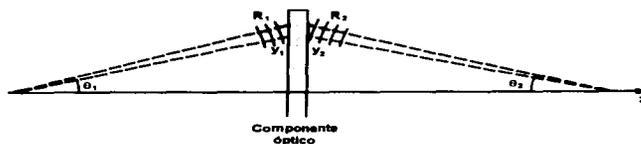


Figura 2.34 Modificación de un haz Gaussiano por un elemento óptico delgado.

Si los haces de entrada y salida, son aproximados por ondas esféricas de radios  $R_1$  y  $R_2$  en los planos de entrada y salida del componente, respectivamente, entonces en la aproximación paraxial ( $\theta_1$  y  $\theta_2$  pequeños),  $\theta_1=r_1/R_1$  y  $\theta_2=r_2/R_2$ . Sustituyendo lo anterior en la ecuación 2.159 y utilizando la 2.156, obtenemos:

$$\frac{1}{R_2} = C + \frac{D}{R_1} \quad \text{--- (2.171)}$$

Utilizando la ecuación 2.60 y notando que  $D=\eta_1/\eta_2=\lambda_2/\lambda_1$ , las ecuaciones 2.170 y 2.171 se pueden combinar en una sola expresión:

$$\frac{1}{q_2} = C + \frac{D}{q_1} \quad \text{--- (2.172)}$$

de la que obtenemos la transformación efectuada por el componente óptico delgado:

$$q_2 = \frac{(1 \cdot q_1) + 0}{Cq_1 + D} \quad \text{--- (2.173)}$$

Manipulemos ahora la ecuación 2.168, de tal forma que quede en el mismo formato de la ecuación 2.60:

$$\frac{1}{q_2} = \frac{C + D\left(\frac{1}{q_1}\right)}{A + B\left(\frac{1}{q_1}\right)} \quad \text{--- (2.174)}$$

Asumamos ahora que un haz Gaussiano con un frente de onda plano y radio de cintura  $W_0$ , incide sobre una lente delgada con distancia focal  $f$ , tal y como es mostrado en la Figura 2.35. Insertando en la ecuación 2.174, los parámetros de transformación ( $ABCD$ ) de una lente delgada, obtendremos la expresión para el parámetro  $q_2$ :

$$\frac{1}{q_2} = \frac{-\frac{1}{f} + 1 \cdot \left(\frac{1}{q_1}\right)}{1 + 0 \cdot \left(\frac{1}{q_1}\right)} = -\frac{1}{f} + \frac{1}{q_1} \quad \text{--- (2.175)}$$

Pero a la izquierda de la lente, el parámetro  $q_1$  de haz incidente es:

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{\infty} - j \frac{\lambda}{\pi W_0^2} \quad \text{--- (2.176)}$$

Como resultado, al combinar las ecuaciones 2.175 y 2.176:

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{R_2} - j \frac{\lambda}{\pi W_0'^2} = -\frac{1}{f} - j \frac{\lambda}{\pi W_0^2} \quad \text{--- (2.177)}$$

La ecuación anterior nos indica que el diámetro del haz justo después de la lente, es igual al diámetro de incidencia, justo antes de ella y el haz converge hacia el punto focal de la lente.

### 2.16.4 INVARIANCIA DE LA LEY $ABCD$ PARA ELEMENTOS DISPUESTOS EN CASCADA

Si la Ley  $ABCD$  es aplicable a dos sistemas ópticos con matrices  $M_i = (A_i, B_i, C_i, D_i)$ , con  $i=1,2$ , también deberá aplicar para su combinación en cascada (es decir, un sistema de matriz  $M = M_2 M_1$ ).

### 2.16.5 GENERALIDAD DE LA LEY $ABCD$

Dado que la Ley  $ABCD$  aplica para componentes ópticos delgados y propagación en un medio homogéneo, también aplicará para cualquier combinación de ellos. Todos los sistemas ópticos paraxiales de interés, son combinaciones de propagación en medios homogéneos y componentes ópticos como lentes delgadas y por lo tanto, podemos concluir que la Ley  $ABCD$  es válida para todos estos sistemas. Por otro lado, como un medio no homogéneo de variación continua, puede ser considerado como una cascada de elementos delgados diferenciales, seguidos de distancias diferenciales, se concluye que la Ley  $ABCD$  también aplica para estos sistemas, siempre y cuando, todos los rayos (normales del frente de onda) permanezcan paraxiales.

Al igual que en la sección 2.16, debemos hacer notar que esta sección también es fundamental para el desarrollo de este trabajo, ya que constituye el fundamento teórico del segundo paso en el proceso de evaluación de los sistemas ópticos y el primer paso en el proceso de simulación, dentro del software de análisis fotónico.

---

**CAPÍTULO 3**

**ÓPTICA DE FOURIER Y  
DIFRACCIÓN**

---

## ÓPTICA DE FOURIER Y DIFRACCIÓN

No obstante que en los capítulos anteriores, se han expuesto los puntos básicos referentes a la naturaleza y propagación de la luz, es necesario adicionar ciertos conceptos que se requieren para explicar algunas de las limitaciones de la óptica de rayos y para describir algunas de las técnicas que nos permiten analizar las imágenes formadas por un sistema óptico, o controlar la amplitud y dirección de la luz. Este capítulo, está dedicado a realizar un breve análisis del fenómeno conocido como **difracción**, el cual, puede llegar a representar el límite final del desempeño de un sistema óptico, cuando éste ha sido corregido en aberraciones. La difracción es un característica propia de la naturaleza de la luz y por lo tanto, sus efectos son ineludibles, hecho que respalda la necesidad de considerarla en el estudio de la eficiencia de sistemas ópticos de acoplamiento. Sin embargo, antes de abordar la parte de difracción, será necesario hacer una introducción respecto a la teoría del análisis armónico de Fourier, la cual nos permitirá comprender más fácilmente el concepto central antes mencionado.

### 3.1 TRANSFORMADA DE FOURIER UNIDIMENSIONAL

La función armónica  $F \exp(j2\pi vt)$ , juega un papel muy importante en cualquiera de las ramas de la ciencia y la ingeniería. Ésta, tiene una frecuencia  $v$  y amplitud compleja  $F$  y su parte real,  $|F| \cos(2\pi vt + \arg(F))$ , es una función coseno de amplitud  $|F|$  y fase  $\arg(F)$ . La variable  $t$ , usualmente representa el tiempo y la frecuencia,  $v$ , tiene unidades de ciclos/s ó Hz. La función armónica, es considerada como la pieza fundamental, a partir de la cual se pueden obtener otras funciones mediante una superposición.

En cumplimiento del Teorema de Fourier, una función valuada compleja  $f(t)$ , puede ser descompuesta como una integral de superposición de funciones armónicas, de diferentes frecuencias y amplitudes complejas; es decir:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(v) \exp(j2\pi vt) dv \quad \text{--- (3.1)}$$

La componente de frecuencia  $v$ , tiene una amplitud compleja  $F(v)$  dada por:

$$F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j2\pi vt) dt \quad \text{--- (3.2)}$$

donde  $F(v)$  es llamada la **transformada de Fourier** de  $f(t)$  y  $f(t)$ , es la **transformada inversa de Fourier** de  $F(v)$ . Las funciones  $f(t)$  y  $F(v)$  forman un par unívoco y en consecuencia, si una es conocida, la otra se puede determinar.

---

Para abordar esta teoría, adoptaremos la convención de que  $\exp(j2\pi vt)$  representa una frecuencia positiva, mientras que  $\exp(-j2\pi vt)$  es una función armónica representando frecuencia negativa.

En la teoría de comunicaciones (análisis de señales), las funciones  $f(t)$  y  $F(v)$  constituyen una señal, siendo  $f(t)$  su representación en el dominio del tiempo y  $F(v)$  su representación en el dominio de la frecuencia.

### 3.2 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

- **Linealidad.** La transformada de Fourier de la suma de dos funciones, es la suma de sus transformadas de Fourier.
- **Escalamiento.** Si  $f(t)$  tiene una transformada de Fourier  $F(v)$  y  $\tau$  es un factor de escalamiento real, entonces  $f(t/\tau)$  tiene una transformada de Fourier  $|\tau| F(\tau v)$ . Esto significa que si  $f(t)$  es escalada por un factor  $\tau$ , su transformada de Fourier será escalada por un factor  $1/\tau$ . Por ejemplo, si  $\tau > 1$ , entonces  $f(t/\tau)$  es una versión dilatada de  $f(t)$ , mientras que  $F(\tau v)$  es una versión comprimida de  $F(v)$ . La transformada de Fourier de  $f(-t)$  es  $F(-v)$ .
- **Traslación en el Tiempo.** Si  $f(t)$  tiene una transformada de Fourier  $F(v)$ , la transformada de Fourier de  $f(t-\tau)$  es  $\exp(-j2\pi v\tau)F(v)$ . Por lo tanto, un retardo de tiempo  $\tau$ , es equivalente a multiplicar la transformada de Fourier por un factor de Fase  $\exp(-j2\pi v\tau)$ .
- **Traslación en Frecuencia.** Si  $F(v)$  es la transformada de Fourier de  $f(t)$ , la transformada de Fourier de  $f(t)\exp(j2\pi v_0 t)$  será  $F(v-v_0)$ . En consecuencia, la multiplicación por una función armónica de frecuencia  $v_0$ , es equivalente a desplazar la transformada de Fourier hacia una frecuencia mayor,  $v_0$ .
- **Simetría.** Si  $f(t)$  es real, entonces  $F(v)$  tiene simetría Hermitiana; es decir,  $F(-v) = F^*(v)$ . Si  $f(t)$  es real y simétrica, entonces  $F(v)$  también es real y simétrica.
- **Teorema de Convolución.** Si las transformadas de Fourier de  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  son  $F_1(v)$  y  $F_2(v)$ , respectivamente, la transformada inversa de Fourier del producto:

$$F(v) = F_1(v)F_2(v) \quad \text{--- (3.3)}$$

está determinada por la siguiente expresión:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \quad \text{--- (3.4)}$$

La operación definida por la ecuación 3.4, se conoce como la convolución de  $f_1(t)$  con  $f_2(t)$ . La convolución en el dominio del tiempo, es por lo tanto, equivalente a la multiplicación en el dominio de Fourier.

---

- **Teorema de Correlación.** La correlación entre dos funciones complejas está definida como:

$$f(t) = \int f_1^*(\tau) f_2(t + \tau) d\tau \quad \text{--- (3.5)}$$

Las transformadas de Fourier de  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  y  $f(t)$  están relacionadas por:

$$F(v) = F_1^*(v) F_2(v) \quad \text{--- (3.6)}$$

### 3.3 TRANSFORMADA DE FOURIER EN DOS DIMENSIONES

Consideremos ahora una función de dos variables,  $f(x, y)$ . Si  $x$  y  $y$ , representan las coordenadas de un punto en un espacio de dos dimensiones, entonces  $f(x, y)$  representa un patrón espacial (por ejemplo, el campo óptico en un plano dado). La función armónica  $F \exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)]$ , es considerada ahora, como la pieza fundamental a partir de la cual se pueden generar otras funciones por superposición. Las variables  $v_x$  y  $v_y$ , representan las frecuencias espaciales en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente. Dado que  $x$  y  $y$  tienen unidades de longitud (generalmente mm),  $v_x$  y  $v_y$  tienen unidades de ciclos/mm o líneas/mm. Los ejemplos de dos funciones armónicas bidimensionales, se ilustran en la Figura 3.1.

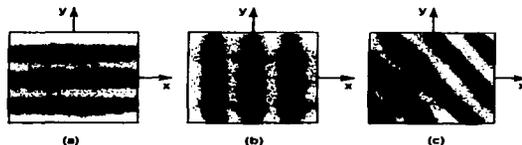


Figura 3.1 La parte real  $|F| \cos[2\pi v_x x + 2\pi v_y y + \arg(F)]$  de una función armónica bidimensional: (a)  $v_y=0$ ; (b)  $v_x=0$ ; (c) caso arbitrario. Para esta ilustración se ha asumido que  $\arg(F)=0$ , de tal forma que los puntos oscuros y claros representan valores positivos y negativos de la función, respectivamente.

El teorema de Fourier puede ser generalizado a funciones de dos variables. Una función  $f(x, y)$  puede ser descompuesta como una integral de superposición de funciones armónicas de  $x$  y  $y$ .

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(v_x, v_y) \exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)] dv_x dv_y \quad \text{--- (3.7)}$$

donde los coeficientes  $F(v_x, v_y)$ , son determinados mediante el uso de la transformada de Fourier bidimensional:

$$F(v_x, v_y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[j2\pi(v_x x + v_y y)] dx dy \quad \text{--- (3.8)}$$

Las definiciones de las transformadas de Fourier unidimensional y bidimensional, representadas por las ecuaciones 3.2 y 3.8, respectivamente, difieren en el signo del exponente. La selección de este signo es arbitraria, siempre y cuando se utilicen signos opuestos en la transformada de Fourier y en la transformada inversa de Fourier. En este trabajo, hemos adoptado la convención de que  $\exp(j2\pi vt)$  tiene una frecuencia temporal positiva,  $v$ , mientras que  $\exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)]$ , tiene frecuencias espaciales positivas,  $v_x$  y  $v_y$ . Se ha elegido el utilizar diferentes signos en los casos para el desarrollo de la teoría básica de la óptica de Fourier, en la que la onda viajera  $\exp(+j2\pi vt)\exp[-j(k_x x + k_y y + k_z z)]$ , presenta dependencia temporal y espacial de signos opuestos.

### 3.4 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER BIDIMENSIONAL

La transformada de Fourier bidimensional, tiene muchas propiedades que son generalizaciones de aquellas de la transformada de Fourier unidimensional y otras que son únicas del caso bidimensional:

- **Teorema de Convolución.** Si  $f(x, y)$ , es la convolución en dos dimensiones de dos funciones  $f_1(x, y)$  y  $f_2(x, y)$ , con transformadas de Fourier  $F_1(v_x, v_y)$  y  $F_2(v_x, v_y)$ , respectivamente, de tal forma que:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x', y') f_2(x - x', y - y') dx' dy' \quad \text{--- (3.9)}$$

entonces, la transformada de Fourier de  $f(x, y)$  es:

$$F(v_x, v_y) = F_1(v_x, v_y) F_2(v_x, v_y) \quad \text{--- (3.10)}$$

En consecuencia, al igual que el caso de una dimensión, la convolución en el dominio del espacio es equivalente a la multiplicación en el dominio de Fourier.

- **Funciones Separables.** Si  $f(x, y) = f_x(x) f_y(y)$ , es el producto de una función de  $x$  y otra de  $y$  entonces, su transformada de Fourier bidimensional es el producto de una función de  $v_x$  y otra de  $v_y$ . La transformada de Fourier bidimensional de  $f(x, y)$ , está entonces relacionada al producto de las transformadas de Fourier en una dimensión de  $f_x(x)$  y  $f_y(y)$ , por  $F(v_x, v_y) = F_x(-v_x) F_y(-v_y)$ .

Por ejemplo, la transformada de Fourier de  $\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$ , que representa un impulso localizado en  $(x_0, y_0)$ , es la función armónica  $\exp[j2\pi(v_x x_0 + v_y y_0)]$ ; la transformada de Fourier de la función Gaussiana  $\exp[-\pi(x^2 + y^2)]$ , es la función Gaussiana  $\exp[-\pi(v_x^2 + v_y^2)]$  y así sucesivamente.

- **Funciones de Simetría Circular.** La transformada de Fourier de una función con simetría circular también es circularmente simétrica. Por ejemplo, la transformada de Fourier de:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \\ 0, & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (3.11)$$

denotada por el símbolo  $\text{circ}(x, y)$  y conocida como la *función circ*, es:

$$F(v_x, v_y) = \frac{J_1(2\pi v_p)}{v_p}, \quad v_p = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (3.12)$$

donde  $J_1$  es la función Bessel de orden 1. Estas funciones se ilustran en la Figura 3.2.

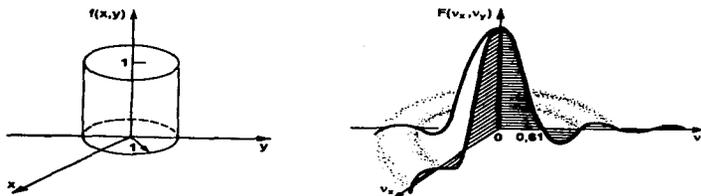


Figura 3.2 La función *circ* y su transformada de Fourier bidimensional.

### 3.5 SISTEMAS LINEALES DE UNA DIMENSIÓN

Considérese un sistema cuya entrada y salida son las funciones  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$ , respectivamente. El sistema está caracterizado por una regla que relaciona la salida con la entrada y en general, esta regla puede tomar la forma de una ecuación diferencial, una operación matemática más simple, como  $f_2(t) = \log f_1(t)$ , o algún otro tipo de expresión matemática.

### 3.5.1 SISTEMAS LINEALES

Se dice que un sistema es lineal, si satisface el principio de superposición; es decir, si su respuesta a la suma de dos entradas cualquiera, es la suma de sus respuestas a cada una de las entradas por separado. La salida en el tiempo  $t$  es, en general, una superposición evaluada de las contribuciones de la entrada en diferentes tiempos  $\tau$ :

$$f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t;\tau) f_1(\tau) d\tau \quad \text{--- (3.13)}$$

donde  $h(t;\tau)$  es una función de evaluación, que representa la contribución de la entrada en el tiempo  $\tau$ , a la salida en el tiempo  $t$ . Si la entrada es un impulso en  $\tau$ , de tal forma que  $f_1(\tau) = \delta(\tau - \tau)$ , entonces la ecuación 3.13 arroja  $f_2(t) = h(t;\tau)$ . Por lo tanto,  $h(t;\tau)$  es la **función de respuesta a impulso** del sistema, también conocida como la **función de Green**.

### 3.5.2 SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO

Se dice que un sistema lineal es **invariante en el tiempo** o **invariante al corrimiento** si, cuando su entrada es desplazada en el tiempo, su salida se desplaza un tiempo igual, pero de lo contrario permanece igual. La función de respuesta a impulso, es entonces una función de la diferencia de tiempo,  $h(t;\tau) = h(t - \tau)$ . Bajo estas condiciones, la ecuación 3.13 se convierte en:

$$f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) f_1(\tau) d\tau \quad \text{--- (3.14)}$$

Por lo tanto, la salida  $f_2(t)$ , es la convolución de la entrada  $f_1(t)$  con la función de respuesta a impulso  $h(t)$ . Si  $f_1(t) = \delta(t)$ , entonces  $f_2(t) = h(t)$  y cuando  $f_1(t) = \delta(t - \tau)$ , entonces  $f_2(t) = h(t - \tau)$ ; tal y como se ilustra en la Figura 3.3.



Figura 3.3 Respuesta a impulsos de un sistema lineal invariante en el tiempo.

### 3.5.3 LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

En cumplimiento del Teorema de Convolución, que se presentó en las secciones anteriores, las transformadas de Fourier  $F_1(v)$ ,  $F_2(v)$  y  $H(v)$ , de  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  y  $h(t)$ , respectivamente, están relacionadas de la siguiente manera:

$$F_2(\nu) = H(\nu)F_1(\nu) \quad \text{--- (3.15)}$$

Si la entrada  $f_1(t)$ , es una función armónica  $F_1(\nu)\exp(j2\pi\nu t)$ , la salida  $f_2(t)=H(\nu)F_1(\nu)\exp(j2\pi\nu t)$ , es también una función armónica de la misma frecuencia, pero con una amplitud compleja modificada,  $F_2(\nu)=F_1(\nu)H(\nu)$ ; tal y como se ilustra en la Figura 3.4. El factor multiplicativo,  $H(\nu)$ , es conocido como la **función de transferencia** del sistema. La función de transferencia es la transformada de Fourier de la función de respuesta a impulso y es por esto, que la ecuación 3.15 es la clave para la utilidad de los métodos de Fourier en el análisis de sistemas lineales invariantes en el tiempo. Para determinar la salida de un sistema, cuando se aplica una entrada arbitraria, simplemente se descompone la entrada en sus componentes armónicas, se multiplica la amplitud compleja de cada función armónica por la función de transferencia, a la frecuencia apropiada y se hace la superposición de las funciones armónicas resultantes.



Figura 3.4 Respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo, a una función armónica.

### 3.5.4 SISTEMAS LINEALES, CAUSALES E INVARIANTES EN EL TIEMPO

La función de respuesta a impulso,  $h(t)$ , de un sistema lineal, **causal**, e invariante en el tiempo, debe desaparecer para  $t < 0$ , dado que la respuesta del sistema no puede iniciar antes de que se aplique la entrada. La función  $h(t)$  es, por lo tanto, no simétrica y su transformada de Fourier, la función de transferencia  $H(\nu)$ , debe ser compleja.

### 3.6 SISTEMAS LINEALES DE DOS DIMENSIONES

Un sistema de dos dimensiones, relaciona a dos funciones bidimensionales  $f_1(x,y)$  y  $f_2(x,y)$ , llamadas las funciones de entrada y salida. Estas funciones pueden, por ejemplo, representar campos ópticos en dos planos paralelos, donde  $(x,y)$  corresponden a variables de posición; entonces, el sistema comprenderá el espacio libre y los componentes ópticos que estén ubicados entre los dos planos.

Los conceptos de linealidad e invariancia en el tiempo, definidos para el caso de los sistemas unidimensionales, se pueden generalizar al caso de dos dimensiones. La salida  $f_2(x,y)$  de un sistema lineal, está relacionada con la entrada  $f_1(x,y)$  mediante una integral de superposición:

$$f_2(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x,y;x',y')f_1(x',y')dx'dy' \quad \text{--- (3.16)}$$

donde  $h(x,y;x',y')$  es una función de evaluación, que representa el efecto de la entrada en el punto  $(x',y')$ , sobre la salida en el punto  $(x,y)$ . La función  $h(x,y;x',y')$  es la **función de respuesta a impulso** del sistema, también conocida como la **función de dispersión de punto**.

Por otro lado, se dice que el sistema es **invariante al corrimiento** o **isoplanático**, si al desplazar su entrada en alguna dirección, la salida se desplaza la misma distancia y en la misma dirección, sin que ésta se altere de otra manera (ver Figura 3.5). La función de respuesta a impulso es entonces, una función de diferencias de posición,  $h(x,y;x',y')=h(x-x',y-y')$ . La ecuación 3.16 se convierte en una convolución de  $h(x,y)$  con  $f_1(x,y)$ :

$$f_2(x,y) = \iint h(x-x',y-y')f_1(x',y')dx'dy' \quad \text{--- (3.17)}$$

Aplicando el teorema de la convolución bidimensional, visto en las secciones anteriores, obtenemos que:

$$F_2(v_x, v_y) = H(v_x, v_y)F_1(v_x, v_y) \quad \text{--- (3.18)}$$

donde  $F_2(v_x, v_y)$ ,  $H(v_x, v_y)$  y  $F_1(v_x, v_y)$  son las transformadas de Fourier de  $f_2(x,y)$ ,  $h(x,y)$  y  $f_1(x,y)$ , respectivamente.



Figura 3.5 Respuesta a las funciones armónicas de un sistema bidimensional, lineal e invariante al corrimiento.

Una entrada armónica de amplitud compleja  $F_1(v_x, v_y)$  produce entonces una salida armónica de la misma frecuencia espacial, pero con amplitud compleja  $F_2(v_x, v_y)=H(v_x, v_y)F_1(v_x, v_y)$ ; tal y como se ilustra en la misma Figura 3.5. El factor multiplicativo  $H(v_x, v_y)$  es la **función de transferencia del sistema**. La función de transferencia es la transformada de Fourier de la función de respuesta a impulso. Cualquiera de estas funciones, caracteriza al sistema completamente y permite determinar la salida correspondiente a una entrada arbitraria.

En conclusión, un sistema bidimensional, lineal e invariante al corrimiento, está caracterizado por su función de respuesta a impulso,  $h(x,y)$ , o su función de transferencia,  $H(v_x, v_y)$ . Por ejemplo, un sistema con  $h(x,y)=circ(x/\rho_x, y/\rho_y)$ , degenera cada punto de la entrada en una mancha en forma de círculo, de radio  $\rho_r$ . Además, tiene una función de transferencia  $H(v_x, v_y)=\rho_r J_1(2\pi\rho_r v_r)/v_r$ , donde  $v_r=(v_x^2+v_y^2)^{1/2}$  y que tiene la forma ilustrada en la Figura 3.2. Como se puede observar en esta figura, el sistema atenúa severamente las frecuencias espaciales mayores a  $0,61/\rho_r$  líneas/mm.

### 3.7 MODOS DE LOS SISTEMAS LINEALES

Cada sistema lineal está caracterizado por ciertas entradas especiales que son invariantes al sistema; es decir, entradas que no se alteran (excepto por una constante multiplicativa) conforme pasan a través del sistema. Estas entradas se conocen como los modos o las eigenfunciones del sistema. Por otro lado, las constantes multiplicativas son los eigenvalores, o en otras palabras, son los factores de atenuación o amplificación de los modos.

Un sistema lineal está completamente caracterizado por sus eigenfunciones y sus eigenvalores. Una función arbitraria de entrada puede ser expandida como una combinación de las eigenfunciones, cada una de las cuales está multiplicada por el correspondiente eigenvalor durante la transmisión a través del sistema y la salida, es la suma de las componentes resultantes. Los modos son transmitidos a través del sistema, sin que ocurra una mezcla entre ellos.

El sistema lineal que opera en la función bidimensional  $f(x,y)$  de acuerdo con la ecuación 3.16, por ejemplo, está caracterizado por un número de modos que satisfacen la ecuación integral:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} h(x, y; x', y') f_q(x', y') dx' dy' = \lambda_q f_q(x, y), \quad q = 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

Las funciones  $f_q(x,y)$  y las constantes  $\lambda_q$  son, respectivamente, las eigenfunciones y los eigenvalores del sistema. Cuando  $f_q(x,y)$  es la entrada aplicada al sistema, la salida es  $\lambda_q f_q(x,y)$ , que es idéntica a la entrada excepto por el factor multiplicativo,  $\lambda_q$ .

Un ejemplo de esto, es el que se refiere a la luz viajando en una guía de onda óptica, la cual puede ser una fibra óptica. Los modos de la guía de onda, son aquellas distribuciones en el plano transversal (plano  $x-y$ ), que no se alteran conforme la luz viaja a lo largo del eje de la guía de onda (la dirección  $z$ ). Los eigenvalores serán los factores de fase  $\exp(-j\beta_q z)$ , donde  $\beta_q$  es la constante de propagación del modo  $q$ .

El concepto de los modos, aplica también a los sistemas lineales de una dimensión operando sobre funciones  $f(t)$ . Los modos de un sistema lineal e invariante en el tiempo, son las funciones armónicas  $\exp(j2\pi\nu t)$ , dado que estas funciones mantienen su naturaleza armónica (incluyendo la frecuencia) cuando son transmitidas a través del sistema. El eigenvalor asociado con la función armónica de frecuencia  $\nu$ , es la función de transferencia del sistema  $H(\nu)$ . En este caso, existe un continuo de modos indexados por la frecuencia  $\nu$ .

Los conceptos que se han tocado en esta última sección, nos serán de gran utilidad para entender mejor el principio de operación de las fibras monomodales, el cual se revisará brevemente en el siguiente capítulo.

### 3.8 INTRODUCCIÓN A LA ÓPTICA DE FOURIER

La óptica de Fourier provee una descripción de la propagación de las ondas de luz, basada en el análisis armónico (la transformada de Fourier) y los sistemas lineales. Como ya mencionamos, los métodos del análisis armónico, han probado ser muy útiles en la descripción de señales y sistemas en muchas disciplinas.

El análisis armónico, está basado en la expansión de una función arbitraria del tiempo,  $f(t)$ , como una superposición (suma o integral) de funciones armónicas del tiempo y de diferentes frecuencias. La función armónica  $F(v)\exp(j2\pi vt)$ , que tiene una frecuencia  $v$  y amplitud compleja  $F(v)$ , es la pieza fundamental de la teoría. Muchas de estas funciones, cada una con su propio valor de  $F(v)$ , son adicionadas para construir la función  $f(t)$ ; tal y como se ilustra en la Figura 3.6. La amplitud compleja  $F(v)$ , como un función de la frecuencia, es llamada la transformada de Fourier de  $f(t)$  y que como ya vimos, es muy útil para describir los sistemas lineales. Si la respuesta del sistema para cada función armónica es conocida, la respuesta para una función arbitraria de entrada es fácilmente determinable, mediante el uso del análisis armónico en la entrada y la superposición en la salida.

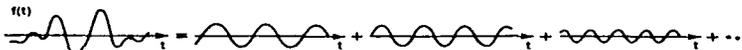


Figura 3.6 Una función arbitraria  $f(t)$ , puede ser analizada como una suma de funciones armónicas de diferentes frecuencias y amplitudes complejas.

Una función arbitraria,  $f(x, y)$ , de las dos variables,  $x$  y  $y$ , representando las coordenadas espaciales en un plano, puede ser escrita en forma similar como una superposición de funciones armónicas de  $x$  y  $y$  de la forma  $F(v_x, v_y)\exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)]$ , donde  $F(v_x, v_y)$  es la amplitud compleja y  $v_x$  y  $v_y$  son las frecuencias espaciales (ciclos por unidad de longitud, típicamente ciclos/mm) en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente. Recordemos que por convención, la función armónica espacial se define con un signo negativo en el exponente, en contraste con el signo positivo utilizado en la definición de la función armónica temporal. Estos signos corresponden a los de una onda plana que viaja hacia adelante. La función armónica  $F(v_x, v_y)\exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)]$ , es el bloque bidimensional que sustenta la teoría y puede ser utilizada para generar una función arbitraria de dos variables,  $f(x, y)$ ; tal y como se ilustra en la Figura 3.7.

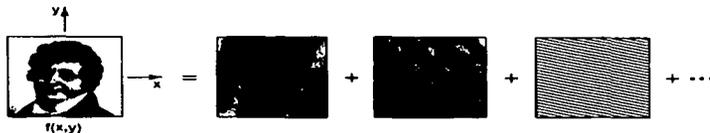


Figura 3.7 Una función arbitraria  $f(x, y)$ , puede ser analizada como la suma de funciones armónicas de diferentes frecuencias espaciales y amplitudes complejas.

La onda plana  $U(x, y, z) = A \exp[-j(k_x x + k_y y + k_z z)]$ , juega un papel muy importante en la óptica de ondas. Los coeficientes  $(k_x, k_y, k_z)$  son componentes del vector de onda  $\mathbf{k}$  y  $A$  es una constante compleja. En los puntos de un plano arbitrario,  $U(x, y, z)$  es una función espacial armónica. En el plano  $z=0$ , por ejemplo,  $U(x, y, 0)$  es la función armónica  $f(x, y) = A \exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)]$ , donde  $v_x = k_x/2\pi$  y  $v_y = k_y/2\pi$  son las frecuencias espaciales (ciclos/mm) y  $k_x$  y  $k_y$  son las frecuencias angulares espaciales (radianes/mm). Existe una correspondencia uno a uno entre la onda plana  $U(x, y, z)$  y la función armónica espacial  $f(x, y) = U(x, y, 0)$ , siempre y cuando la frecuencia espacial no exceda el inverso de la longitud de onda,  $1/\lambda$ . Dado que una función arbitraria,  $f(x, y)$ , puede ser analizada como una superposición de funciones armónicas, una onda arbitraria viajera,  $U(x, y, z)$ , puede ser analizada como la suma de ondas planas (ver Figura 3.8). La onda plana es entonces, el bloque de construcción utilizado para generar una onda de complejidad arbitraria. Más aún, si se conoce la manera en la que un sistema óptico lineal modifica las ondas planas, el principio de superposición puede ser utilizado para determinar el efecto del sistema sobre una onda arbitraria.

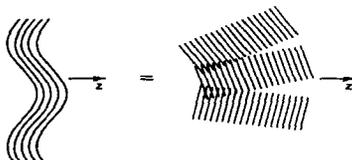


Figura 3.8 El principio de la óptica de Fourier: una onda arbitraria en el espacio libre, puede ser analizada como una superposición de ondas planas.

Dada la importancia del análisis de Fourier en la descripción de sistemas lineales, es muy conveniente describir la propagación de la luz a través de componentes ópticos lineales, incluyendo al espacio libre, utilizando las consideraciones de los sistemas lineales. Las amplitudes complejas en dos planos normales al eje óptico ( $z$ ), son considerados como la entrada y la salida del sistema (ver Figura 3.9). Recordemos que un sistema lineal, puede ser caracterizado ya sea por su función de respuesta a impulso (la respuesta del sistema a un impulso o a un punto en la entrada), o por su función de transferencia (la respuesta a funciones armónicas espaciales).

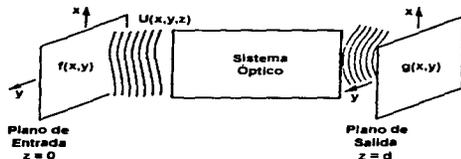


Figura 3.9 La transmisión de una onda óptica,  $U(x, y, z)$ , a través de un sistema óptico ubicado entre el plano de entrada,  $z=0$  y el plano de salida,  $z=d$ . Este se considera como un sistema lineal, cuya entrada y salida son las funciones  $f(x, y) = U(x, y, 0)$  y  $g(x, y) = U(x, y, d)$ .

### 3.9 PROPAGACIÓN DE LA LUZ EN EL ESPACIO LIBRE

#### 3.9.1 CORRESPONDENCIA ENTRE LA FUNCIÓN ARMÓNICA ESPACIAL Y LA ONDA PLANA

Considérese una onda plana de amplitud compleja  $U(x, y, z) = A \exp[-j(k_x x + k_y y + k_z z)]$ , con un vector  $K = (k_x, k_y, k_z)$ , longitud de onda  $\lambda$ , número de onda  $k = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} = 2\pi/\lambda$  y envolvente compleja  $A$ . El vector  $K$ , forma los ángulos  $\theta_x = \text{sen}^{-1}(k_x/k)$  y  $\theta_y = \text{sen}^{-1}(k_y/k)$  con los planos  $y$ - $z$  y  $x$ - $z$ , respectivamente; tal y como se ilustra en la Figura 3.10. La amplitud compleja en el plano  $z=0$ ,  $U(x, y, 0)$ , es una función espacial armónica  $f(x, y) = A \exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)]$ , con frecuencias espaciales  $v_x = k_x/2\pi$  y  $v_y = k_y/2\pi$  (ciclos/mm). Los ángulos del vector de onda están, por lo tanto, relacionados con las frecuencias espaciales de la función armónica de la siguiente forma:

$$\theta_x = \text{sen}^{-1} \lambda v_x \quad \text{--- (3.20)}$$

$$\theta_y = \text{sen}^{-1} \lambda v_y$$

Reconociendo a  $\Lambda_x = 1/v_x$  y  $\Lambda_y = 1/v_y$ , como los periodos de la función armónica en las direcciones  $x$  y  $y$ , podemos observar que los ángulos  $\theta_x = \text{sen}^{-1}(\lambda/\Lambda_x)$  y  $\theta_y = \text{sen}^{-1}(\lambda/\Lambda_y)$ , están gobernados por las razones de la longitud de onda de la luz al período de la función armónica en cada dirección. Estas relaciones geométricas, se obtienen como consecuencia de acoplar los frentes de onda de la onda, con el patrón periódico de la función armónica en el plano  $z=0$ , lo que también se ilustra en la Figura 3.10.

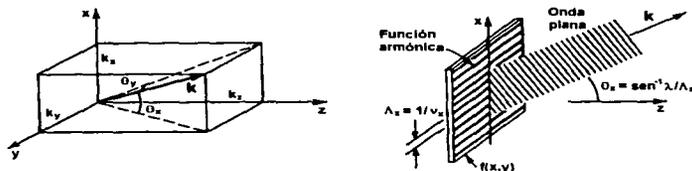


Figura 3.10 Una función armónica de frecuencias espaciales  $v_x$  y  $v_y$ , en el plano  $z=0$ , es consistente con una onda plana que viaja con ángulos  $\theta_x = \text{sen}^{-1} \lambda v_x$  y  $\theta_y = \text{sen}^{-1} \lambda v_y$ .

Si  $k_x \ll k$  y  $k_y \ll k$ , de tal forma que el vector de onda  $K$  es paraxial, los ángulos  $\theta_x$  y  $\theta_y$  son pequeños ( $\text{sen} \theta_x \approx \theta_x$  y  $\text{sen} \theta_y \approx \theta_y$ ) y:

$$\theta_x \approx \lambda v_x \quad \text{--- (3.21)}$$

$$\theta_y \approx \lambda v_y$$

Por lo tanto, los ángulos de inclinación del vector de onda, son directamente proporcionales a las frecuencias espaciales de la función armónica correspondiente.

Aparentemente, existe una correspondencia uno a uno entre la onda plana,  $U(x,y,z)$  y la función armónica  $f(x,y)$ . Teniendo una de ellas, la otra puede determinarse fácilmente si se conoce la longitud de onda. Dada la onda  $U(x,y,z)$ , la función armónica  $f(x,y)$  se obtiene al muestrear en el plano  $z=0$ ,  $f(x,y)=U(x,y,0)$ . En el caso contrario, si contamos con la función armónica la onda se construye utilizando la relación  $U(x,y,z)=f(x,y)\exp(-jk_z z)$ , con:

$$k_z = \pm \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{--- (3.22)}$$

Una condición para la validez de esta correspondencia, es que  $k_x^2 + k_y^2 < k^2$ , de tal forma que  $k_z$  sea real. Esta condición implica que  $\lambda v_x$  y  $\lambda v_y$ , por lo que los ángulos  $\theta_x$  y  $\theta_y$ , definidos por las ecuaciones 3.20, existen. Los signos + y - en la ecuación anterior, representan las ondas que viajan hacia adelante y hacia atrás, respectivamente; sin embargo, nos enfocaremos únicamente en las ondas que viajan hacia adelante.

### 3.9.2 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DEL ESPACIO LIBRE

Ahora examinaremos la propagación de una onda óptica monocromática, de longitud de onda  $\lambda$  y amplitud compleja  $U(x,y,z)$ , en el espacio libre entre los planos  $z=0$  y  $z=d$ , llamados planos de entrada y salida, respectivamente (ver Figura 3.11). Dada la amplitud compleja de la onda en el plano de entrada,  $f(x,y)=U(x,y,0)$ , determinaremos la amplitud compleja en el plano de salida,  $g(x,y)=U(x,y,d)$ .

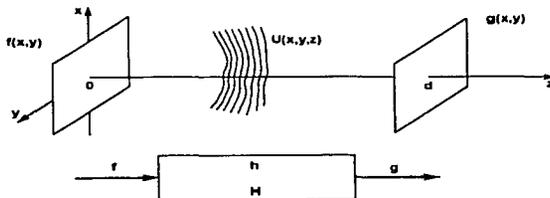


Figura 3.11 La propagación de la luz entre dos planos es considerada como un sistema lineal, cuya entrada y salida son las amplitudes complejas de la onda, en los dos planos.

Consideraremos a  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$  como la entrada y salida de un sistema lineal. Dicho sistema se considera lineal, dado que la ecuación de Helmholtz, la cual debe ser cumplida por  $U(x, y, z)$ , es lineal y también es invariante al corrimiento, por la invariancia del espacio libre al desplazamiento del sistema coordinado. Un sistema lineal invariante al corrimiento, está caracterizado por su función de respuesta a impulso,  $h(x, y)$  o por su función de transferencia  $H(v_x, v_y)$ , tal y como fue explicado en las primeras secciones de este capítulo. Lo que procede ahora, es determinar las expresiones para estas funciones.

La función de transferencia,  $H(v_x, v_y)$ , es el factor mediante el que una función armónica espacial de entrada, con frecuencias  $v_x$  y  $v_y$ , es multiplicada para dar origen a la función armónica de salida; en nuestro caso, consideraremos una función armónica de entrada  $f(x, y) = A \exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)]$ . Como explicamos anteriormente, ésta corresponde a una onda plana  $U(x, y, z) = A \exp[-j(k_x x + k_y y + k_z z)]$ , donde  $k_x = 2\pi v_x$ ,  $k_y = 2\pi v_y$ , y:

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - v_x^2 - v_y^2} \quad \text{--- (3.23)}$$

La salida será  $g(x, y) = A \exp[-j(k_x x + k_y y + k_z d)]$ , de tal forma que podamos escribir  $H(v_x, v_y) = g(x, y)/f(x, y) = \exp(-jk_z d)$  y de la que:

$$H(v_x, v_y) = \exp\left(-j2\pi d \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - v_x^2 - v_y^2}\right) \quad \text{--- (3.24)}$$

La función de transferencia  $H(v_x, v_y)$  es, por lo tanto, una función compleja circularmente simétrica y con frecuencias espaciales  $v_x$  y  $v_y$ . La magnitud y la fase de esta función se esquematizan en la Figura 3.12.

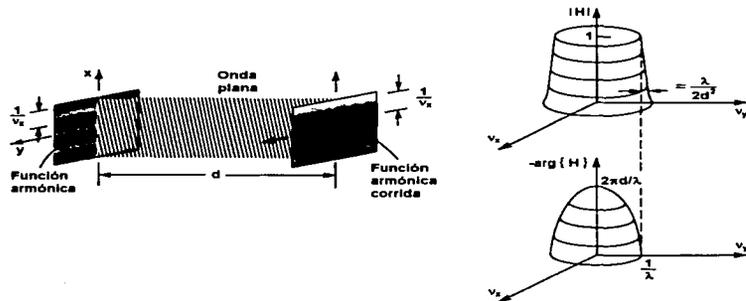


Figura 3.12 Magnitud y fase de la función de transferencia,  $H(v_x, v_y)$ , para la propagación en el espacio libre entre dos planos separados por una distancia  $d$ .

Para las frecuencias espaciales en las que  $v_x^2 + v_y^2 \leq 1/\lambda^2$  (es decir, las frecuencias contenidas dentro de un círculo de radio  $1/\lambda$ ), la magnitud  $|H(v_x, v_y)| = 1$  y la fase  $\arg\{H(v_x, v_y)\}$ , es una función de  $v_x$  y  $v_y$ . En consecuencia, una función armónica de tales frecuencias, experimenta un corrimiento de fase espacial conforme se propaga, pero su magnitud no se altera.

A mayores frecuencias espaciales,  $v_x^2 + v_y^2 > 1/\lambda^2$ , la cantidad que aparece dentro de la raíz cuadrada en la ecuación 3.24 es negativa, de tal forma que el exponente es real y la función de transferencia,  $\exp[-2\pi(v_x^2 + v_y^2 - 1/\lambda^2)^{1/2}d]$ , representa un factor de atenuación; en consecuencia a esta onda se le llama **onda evanescente** (en este caso se utilizó el signo negativo de la ecuación 3.22, ya que el signo positivo hubiera resultado en una función exponencial creciente, lo que es físicamente inaceptable). Cuando  $v_p = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}$ , excede ligeramente a  $1/\lambda$ , es decir,  $v_p \approx 1/\lambda$ , el factor de atenuación es:

$$\exp\left(-2\pi d \sqrt{v_p^2 - \frac{1}{\lambda^2}}\right) = \exp\left(-2\pi d \sqrt{v_p - \frac{1}{\lambda}} \sqrt{v_p + \frac{1}{\lambda}}\right) \approx \exp\left(-2\pi \sqrt{v_p - \frac{1}{\lambda}} \sqrt{\frac{2d^2}{\lambda}}\right) \quad \text{--- (3.25)}$$

y que es igual a  $\exp(-2\pi)$ , cuando:

$$\left(v_p - \frac{1}{\lambda}\right) \approx \frac{\lambda}{2d^2} \quad \text{o} \quad \frac{\left(v_p - \frac{1}{\lambda}\right)}{\frac{1}{\lambda}} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \quad \text{--- (3.26)}$$

Para  $d \gg \lambda$ , el factor de atenuación decae bruscamente cuando la frecuencia espacial excede ligeramente a  $1/\lambda$ , tal y como se ilustra en la misma Figura 3.12. En consecuencia, podemos considerar a  $1/\lambda$  cómo la frecuencia espacial de corte (ancho de banda espacial) del sistema. Por lo tanto:

**El ancho de banda espacial de la propagación de la luz en el espacio libre es aproximadamente  $1/\lambda$  ciclos/mm**

Los rasgos o características, contenidos en frecuencias espaciales mayores a  $1/\lambda$  (correspondientes a los detalles de un tamaño más fino que  $\lambda$ ), no pueden ser transmitidos por la onda óptica de longitud de onda  $\lambda$  a distancias mucho mayores que  $\lambda$ .

### 3.9.3 APROXIMACIÓN DE FRESNEL

La expresión para la función de transferencia, dada por la ecuación 3.24, puede ser simplificada si la función de entrada,  $f(x, y)$ , contiene solamente frecuencias espaciales que sean mucho menores que la frecuencia de corte,  $1/\lambda$ , de tal forma que  $v_x^2 + v_y^2 \ll 1/\lambda^2$ .

Entonces, las componentes de la onda plana de la luz que se está propagando, forman pequeños ángulos  $\theta_x \approx \lambda v_x$  y  $\theta_y \approx \lambda v_y$ , correspondientes a rayos paraxiales.

Denotando  $\theta^2 = \theta_x^2 + \theta_y^2 \approx \lambda^2 (v_x^2 + v_y^2)$ , donde  $\theta$  es el ángulo formado con el eje óptico, el factor de fase de la ecuación 3.24 es:

$$2\pi d \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - v_x^2 - v_y^2} = \frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{1 - \theta^2} = \frac{2\pi d}{\lambda} \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{8} - \dots \right) \quad \text{--- (3.27)}$$

Despreciando del tercer término en adelante, en esta expansión, la ecuación 3.24 puede ser aproximada a:

$$H(v_x, v_y) \approx H_0 \exp \left[ j\pi\lambda d (v_x^2 + v_y^2) \right] \quad \text{--- (3.28)}$$

donde  $H_0 = \exp(-jkd)$ . En esta aproximación, la fase es una función cuadrática de  $v_x$  y  $v_y$ , tal y como se ilustra en la Figura 3.13. Esta aproximación se conoce como la **aproximación de Fresnel**.

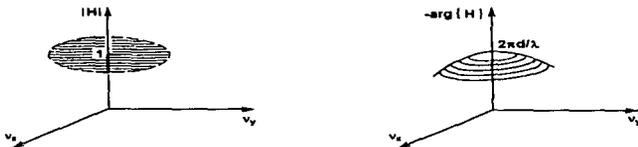


Figura 3.13 La función de transferencia de la propagación en el espacio libre, para frecuencias espaciales bajas (mucho menores que  $1/\lambda$  ciclos/mm), presenta una magnitud constante y una fase cuadrática.

La condición de validez de la aproximación de Fresnel, es que el tercer término en la ecuación 3.27 sea mucho menor que  $\pi$  para todo  $\theta$ . Esto es equivalente a:

$$\frac{\theta^4 d}{4\lambda} \ll 1 \quad \text{--- (3.29)}$$

Si  $a$  es la mayor distancia radial en el plano de salida, el mayor ángulo será  $\theta_m \approx a/d$  y la expresión anterior puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{N_F \theta_m^2}{4} \ll 1 \quad \text{--- (3.30)}$$

donde  $N_F = a^2 / \lambda d$ , es el número de Fresnel. Por ejemplo, si  $a=1$  cm,  $d=100$  cm y  $\lambda=0,5$   $\mu\text{m}$ , entonces  $\theta_m=10^{-2}$  radianes,  $N_F=200$  y  $N_F \theta_m^2 / 4 = 5 \times 10^{-3}$ . En este caso la aproximación de Fresnel sí es aplicable.

### 3.9.4 RELACIÓN DE ENTRADA-SALIDA

Dada la función de entrada  $f(x, y)$ , la función de salida  $g(x, y)$  puede ser determinada como sigue:

- 1. Se determina la transformada de Fourier

$$F(v_x, v_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp [j2\pi(v_x x + v_y y)] dx dy \quad \text{--- (3.31)}$$

que representa las envolventes complejas de las componentes de la onda plana, en el plano de entrada.

- 2. El producto  $H(v_x, v_y)F(v_x, v_y)$ , proporciona las envolventes complejas de las componentes de la onda plana en el plano de salida.
- 3. La amplitud compleja en el plano de salida es la suma de las contribuciones de estas ondas planas

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} H(v_x, v_y) F(v_x, v_y) \exp [-j2\pi(v_x x + v_y y)] dv_x dv_y \quad \text{--- (3.32)}$$

Utilizando la aproximación de Fresnel para  $H(v_x, v_y)$ , que está dada por la ecuación 3.28, obtenemos lo siguiente:

$$g(x, y) = H_0 \iint_{-\infty}^{\infty} F(v_x, v_y) \exp [j\pi\lambda d(v_x^2 + v_y^2)] \exp [-j2\pi(v_x x + v_y y)] dv_x dv_y \quad \text{--- (3.33)}$$

De esta forma, las ecuaciones 3.31 y 3.33 nos sirven para relacionar la función de salida  $g(x, y)$ , con la función de entrada,  $f(x, y)$ .

### 3.9.5 FUNCIÓN DE RESPUESTA A IMPULSO DEL ESPACIO LIBRE

La función de respuesta a impulso,  $h(x, y)$ , del sistema de propagación en el espacio libre, es la respuesta  $g(x, y)$  cuando la entrada  $f(x, y)$  es un punto en el origen,  $(0, 0)$  y que como ya vimos, se obtiene de la transformada inversa de Fourier de la función de transferencia,  $H(v_x, v_y)$ . Utilizando los conceptos vistos en las primeras secciones de este capítulo, las tablas de transformadas de Fourier de funciones usuales y tomando en cuenta que  $k=2\pi/\lambda$ , la transformada inversa de Fourier de la ecuación 3.28 es:

$$h(x, y) \approx h_0 \exp\left(-jk \frac{x^2 + y^2}{2d}\right) \quad \text{--- (3.34)}$$

donde  $h_0 = (j/\lambda d) \exp(-jkd)$ . Esta función, es proporcional a la amplitud compleja en el plano  $z=d$  de una onda paraboloidal centrada alrededor del origen,  $(0, 0)$  (ver Capítulo 2). Por lo tanto, cada punto en el plano de entrada genera una onda paraboloidal y todas estas ondas se superponen en el plano de salida.

### 3.9.6 LA PROPAGACIÓN EN EL ESPACIO LIBRE COMO UNA CONVOLUCIÓN

Un procedimiento alternativo para relacionar las amplitudes complejas de  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$ , es considerar a la primera como una superposición de diferentes puntos (funciones delta o funciones impulso), donde cada uno de ellos produce una onda paraboloidal. La onda que se origina en el punto  $(x', y')$ , tiene una amplitud  $f(x', y')$  y está centrada alrededor de  $(x', y')$ , de tal forma que genera una onda de amplitud  $f(x', y')h(x-x', y-y')$  en el punto  $(x, y)$  del plano de salida. La suma de estas contribuciones es la convolución bidimensional:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') h(x-x', y-y') dx' dy'$$

que en la aproximación de Fresnel, se convierte en la siguiente expresión:

$$g(x, y) = h_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \exp\left[-j\pi \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{\lambda d}\right] dx' dy' \quad \text{--- (3.35)}$$

donde  $h_0 = (j/\lambda d) \exp(-jkd)$ .

En conclusión, dentro de la aproximación de Fresnel y dada la amplitud compleja  $f(x, y)$  en el plano de entrada, existen dos métodos para determinar la amplitud compleja  $g(x, y)$ :

- La ecuación 3.35 está basada en un método del dominio del espacio, en la que la onda de entrada es expandida en términos de ondas paraboloidales elementales.

- La ecuación 3.33 es un método en el dominio de la frecuencia, en la que la onda de entrada es expandida como una suma de ondas planas.

### 3.9.7 PRINCIPIO DE HUYGENS-FRESNEL

El **principio de Huygens-Fresnel** establece, que cada punto en un frente de onda genera una onda esférica (ver Figura 3.14). La envolvente de estas ondas secundarias, constituye un nuevo frente de onda y su superposición constituye la onda en otro plano. La función de respuesta a impulso del sistema, para la propagación entre los planos  $z=0$  y  $z=d$ , es:

$$h(x, y) \propto \frac{1}{r} \exp(-jkr), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + d^2} \quad \text{--- (3.36)}$$

En la aproximación paraxial, la onda esférica dada por la ecuación 3.36 es aproximada por la onda paraboloïdal en la ecuación 3.34. En consecuencia, la obtención de la función de respuesta a impulso es consistente con el principio de Huygens-Fresnel.

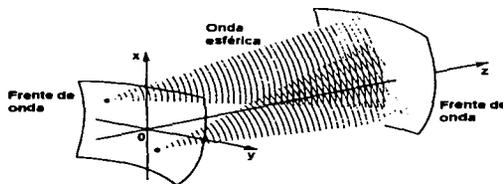


Figura 3.14 El principio de Huygens-Fresnel. Cada punto en un frente de onda genera una onda esférica.

### 3.9.8 TRANSFORMADA DE FOURIER EN EL CAMPO LEJANO

Cuando la distancia de propagación,  $d$ , es lo suficientemente grande, la única onda plana que contribuye a la amplitud compleja en el punto  $(x, y)$  en el plano de salida, es la onda cuya dirección forma los ángulos  $\theta_x \approx x/d$  y  $\theta_y \approx y/d$  con el eje óptico (ver Figura 3.15). Esta es la onda con las componentes del vector de onda,  $k_x \approx (x/d)k$  y  $k_y \approx (y/d)k$  y amplitud  $F(v_x, v_y)$ , donde  $v_x \approx x/\lambda d$  y  $v_y \approx y/\lambda d$ . Las amplitudes complejas  $g(x, y)$  y  $f(x, y)$  de la onda, en los planos  $z=d$  y  $z=0$ , están relacionadas por la siguiente expresión:

$$g(x, y) \approx h_0 F\left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d}\right) \quad \text{--- (3.37)}$$

donde  $F(v_x, v_y)$  es la transformada de Fourier de  $f(x, y)$  y  $h_0 = (j/\lambda d) \exp(-jk d)$  y las contribuciones de todas las demás ondas se cancelan, como resultado de la interferencia destructiva. Esta aproximación es conocida como la **aproximación de Fraunhofer**.

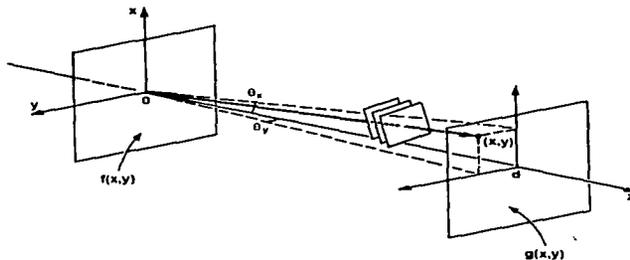


Figura 3.15 Cuando la distancia  $d$  es lo suficientemente grande, la amplitud compleja en el punto  $(x, y)$  contenido en el plano  $z=d$ , es proporcional a la amplitud compleja de la onda plana componente con ángulos  $\theta_x = x/d = \lambda v_x$  y  $\theta_y = y/d = \lambda v_y$ . Es decir, a la transformada de Fourier  $F(v_x, v_y)$  de  $f(x, y)$ , con  $v_x = x/\lambda d$  y  $v_y = y/\lambda d$ .

Bajo la aproximación de Fraunhofer, es posible sostener la validez de la ecuación 3.37 de la siguiente forma: Partiendo de la relación entre  $g(x, y)$  y  $f(x, y)$ , dada por la ecuación 3.35, la fase en el argumento del exponente es:

$$\left(\frac{\pi}{\lambda d}\right) \left[ (x-x')^2 + (y-y')^2 \right] = \left(\frac{\pi}{\lambda d}\right) \left[ (x^2 + y^2) + (x'^2 + y'^2) - 2(xx' + yy') \right] \quad \text{--- (3.38)}$$

Si  $f(x, y)$ , es confinada a un área pequeña de radio  $b$  y si la distancia  $d$  es lo suficientemente grande, de tal forma que el número de Fresnel  $N_F = b^2/\lambda d$  sea pequeño, tenemos que:

$$N_F \ll 1 \quad \text{--- (3.39)}$$

entonces el factor de fase

$$\left(\frac{\pi}{\lambda d}\right) (x'^2 + y'^2) \leq \frac{\pi b^2}{\lambda d} \quad \text{--- (3.40)}$$

es despreciable y la ecuación 3.35 puede ser aproximada por:

$$g(x, y) = h_0 \exp\left(-j\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda d}\right) \iint_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \exp\left(j2\pi \frac{xx' + yy'}{\lambda d}\right) dx' dy' \quad \text{--- (3.41)}$$

Los factores  $x/\lambda d$  y  $y/\lambda d$ , pueden ser considerados como las frecuencias  $v_x = x/\lambda d$  y  $v_y = y/\lambda d$ , de tal forma que:

$$g(x, y) = h_0 \exp\left(-j\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda d}\right) F\left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d}\right) \quad \text{--- (3.42)}$$

donde  $F(v_x, v_y)$ , es la transformada de Fourier de  $f(x, y)$ . El factor de fase dado por  $\exp[-j\pi(x^2 + y^2)/\lambda d]$  en la ecuación 3.42, también puede ser despreciado y la ecuación 3.37 puede ser obtenida, si además limitamos nuestro interés a los puntos contenidos en el plano de salida dentro de un círculo de radio  $a$ , centrado alrededor del eje  $z$  de tal forma que:  $\pi(x^2 + y^2)/\lambda d \leq \pi a^2/\lambda d \ll \pi$ . Esto es aplicable cuando el número de Fresnel,  $N_F = a^2/\lambda d \ll 1$ .

La aproximación de Fraunhofer es, por lo tanto, válida siempre que los números de Fresnel  $N_F$  y  $N_F'$  sean pequeños y además, es más difícil de satisfacer que la aproximación de Fresnel, la cual requiere que  $N_F \theta_m^2/4 \ll 1$ . Dado que  $\theta_m \ll 1$  en la aproximación paraxial, es posible satisfacer la condición de Fresnel,  $N_F \theta_m^2/4 \ll 1$ , para números de Fresnel que no necesariamente sean mucho menores que la unidad,  $N_F \ll 1$ .

En resumen, bajo la aproximación de Fraunhofer, la amplitud compleja  $g(x, y)$  de una onda de longitud de onda  $\lambda$  en el plano  $z=d$ , es proporcional a la transformada de Fourier  $F(v_x, v_y)$ , de la amplitud compleja  $f(x, y)$  en el plano  $z=0$ , evaluada en las frecuencias espaciales  $v_x = x/\lambda d$  y  $v_y = y/\lambda d$ . La aproximación es válida si  $f(x, y)$  se confina a un círculo de radio  $b$ , satisfaciendo  $b^2/\lambda d \ll 1$  y para puntos en el plano de salida contenidos dentro de un círculo de radio  $a$ , satisfaciendo  $a^2/\lambda d \ll 1$ .

## 3.10 LA DIFRACCIÓN DE LA LUZ

### 3.10.1 ANTECEDENTES

La difracción, surge de los efectos de aperturas e interfases limitantes en la propagación de la luz. En su forma más simple, las orillas de las lentes, las aperturas y otros componentes ópticos, provocan que la luz que está pasando a través del sistema óptico sea desviada de las trayectorias que predice la óptica de rayos. No obstante que algunos efectos de difracción resultan útiles, esencialmente todo el desempeño óptico está limitado por la difracción; es decir, este fenómeno constituye la única limitante de un elemento o sistema óptico, cuando otros efectos nocivos han sido eliminados (por ejemplo, las aberraciones).

El punto de partida para el estudio de la difracción, es el **principio de Huygens** y que en términos de una descripción gráfica se conoce como la **construcción de Huygens** (ver Figura 3.16). Ésta nos dice, que dado un frente de onda de forma arbitraria, se localice un arreglo de fuentes puntuales en el frente de onda, de tal forma que la fuerza de cada una de ellas sea proporcional a la amplitud de la onda en ese punto. Posteriormente, se deja que las fuentes puntuales se propaguen durante un tiempo  $t$ , de tal forma que sus radios igualen a  $ct$  (donde  $c$  es la velocidad de la luz) y se suman las fuentes resultantes. La envolvente resultante de las fuentes puntuales, es el frente de onda en un tiempo  $t$ , posterior al frente de onda inicial. Es importante mencionar que el principio de Huygens fue retomado y ampliado por Fresnel, para dar origen al principio de Huygens-Fresnel que abordamos en la sección 3.9.7.

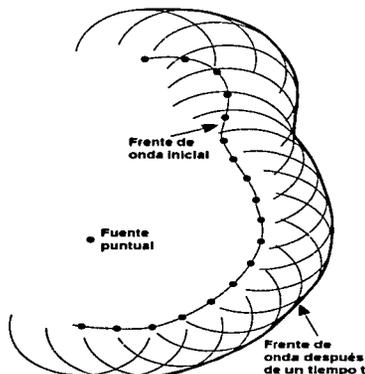


Figura 3.16 Construcción de Huygens de un frente de onda de forma arbitraria en propagación.

Cuando una onda plana ilumina una ranura, el patrón de onda resultante que pasa a través de ella puede ser construido utilizando el principio de Huygens, al representar el frente de onda en la ranura como una colección de fuentes puntuales, todas ellas emitiendo en fase. La forma del patrón de irradiancia que se observa, depende de la distancia desde la apertura de difracción, del tamaño de ésta y de la longitud de onda de la iluminación. Si la luz difractada es examinada cerca de la apertura, el patrón se asemejará a la apertura pero con algunas variaciones; esta forma de difracción es llamada **difracción de Fresnel** y de alguna manera es difícil de calcular.

A una cierta distancia de la apertura, el patrón cambia al correspondiente a la **difracción de Fraunhofer**; este tipo de difracción es más fácil de calcular y en la mayoría de los casos, determina las limitaciones ópticas de los mejores sistemas ópticos.

El patrón de difracción más simple es el originado por una ranura, en la que el efecto más fuerte es causado por su ancho dada la relación de sus dimensiones (el ancho es mucho menor a su altura). El patrón de difracción resultante en una pantalla distante, contiene regiones de máximos y mínimos, donde se observa que la luz es fuertemente difractada en la dirección perpendicular a las orillas de la ranura; tal y como se muestra en la Figura 3.17(a). Una medida de la cantidad de difracción, es el espaciamiento existente entre la región central máxima y la primer franja oscura en el patrón de difracción.

En un plano de observación a una distancia alejada de la ranura, el patrón de difracción de Fraunhofer no cambia de forma, únicamente cambia de tamaño. La separación entre franjas es expresada en términos del seno de la separación angular entre el máximo central y el centro de la primer franja oscura:

$$\text{sen}\theta = \frac{\lambda}{\omega} \quad \text{--- (3.43)}$$

donde  $\omega$  es el ancho de la ranura y  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz que la ilumina. Nótese que si el ancho de la ranura se hace más pequeño, el ángulo de difracción se hace mayor y cuando el ancho de la ranura no es muy pequeño, el seno puede ser reemplazado por su argumento:

$$\theta = \frac{\lambda}{\omega} \quad \text{--- (3.44)}$$

Si la longitud de onda de la luz que ilumina la ranura es conocida, el ángulo de difracción puede ser medido y en consecuencia se puede determinar el ancho de la ranura difractante.

En el caso de aperturas circulares, el patrón de difracción también es circular, tal y como se indica en la Figura 3.17(b). En este caso, la separación angular entre el máximo central y el primer anillo oscuro está dada por:

$$\text{sen}\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad \text{--- (3.45)}$$

y que para valores de  $D$  muy grandes, se convierte en:

$$\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad \text{--- (3.46)}$$

donde  $D$  es el diámetro de la apertura y al igual que en el caso de la ranura, para valores muy pequeños de  $\lambda/D$ , el seno puede ser reemplazado por su argumento.

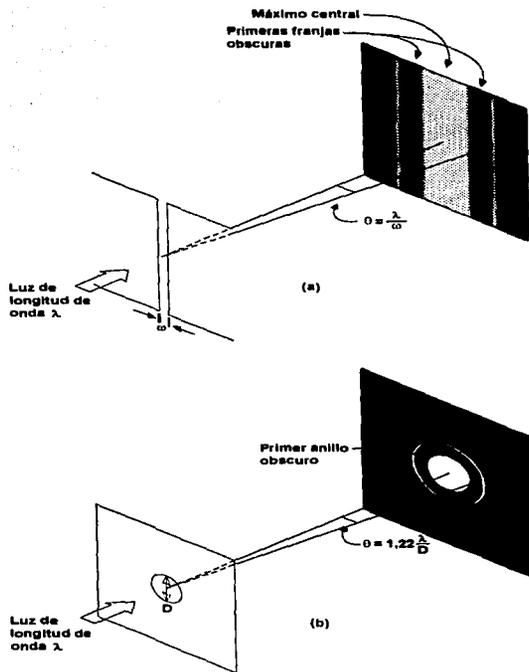


Figura 3.17 Difracción de la luz mediante aperturas: (a) Ranura sencilla; (b) Apertura circular.

### 3.10.2 TEORÍA DE LA DIFRACCIÓN

Como se dijo anteriormente, cuando una onda óptica es transmitida a través de una apertura (generalmente en una pantalla opaca) y viaja cierta distancia en el espacio libre, su distribución de intensidad es conocido como el patrón de difracción.

Si la luz fuera tratada como rayos, el patrón de difracción sería una sombra de la apertura; sin embargo, debido a la naturaleza ondulatoria de la luz, el patrón de difracción se puede desviar ligera o substancialmente de la sombra de la apertura, dependiendo de las dimensiones de esta última y de su separación al plano de observación, así como de la longitud de onda de la luz. Es difícil determinar la manera exacta en que el elemento difractante modifica la onda incidente, pero la propagación en el espacio libre más allá de dicho elemento, está gobernada siempre por las leyes descritas anteriormente en este capítulo (óptica de Fourier).

La teoría más simple de la difracción, está basada en la consideración de que la onda incidente es transmitida sin cambio en los puntos dentro de la apertura, pero es reducida a cero en los puntos ubicados en la parte posterior de la parte opaca de la pantalla o elemento difractante. Si  $U(x, y)$  y  $f(x, y)$  son las amplitudes complejas de la onda, inmediatamente a la izquierda y a la derecha de la pantalla (ver Figura 3.18), entonces, de acuerdo con lo asumido:

$$f(x, y) = U(x, y)p(x, y) \quad \text{--- (3.47)}$$

donde

$$p(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{dentro de la apertura} \\ 0, & \text{fuera de la apertura} \end{cases} \quad \text{--- (3.48)}$$

es llamada la **función de la apertura**.

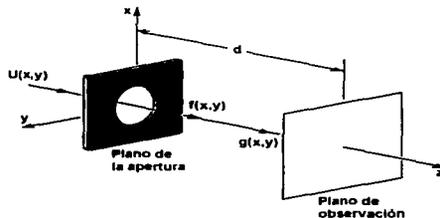


Figura 3.18 Una onda  $U(x, y)$  es transmitida a través de una apertura cuya transmitancia de amplitud es  $p(x, y)$ , generando una onda de amplitud compleja  $f(x, y) = U(x, y)p(x, y)$ . Después de propagarse una distancia  $d$  en el espacio libre, la amplitud compleja es  $g(x, y)$  y el patrón de difracción es la intensidad,  $I(x, y) = |g(x, y)|^2$ .

Dada  $f(x, y)$ , la amplitud compleja  $g(x, y)$  en un plano de observación colocado a una distancia  $d$  de la pantalla, puede ser determinada utilizando los métodos descritos en la sección 3.9.

El patrón de difracción  $I(x, y) = |g(x, y)|^2$ , es conocido como la difracción de Fraunhofer o difracción de Fresnel, dependiendo de si la propagación en el espacio libre se describe utilizando la aproximación de Fraunhofer o la aproximación de Fresnel, respectivamente.

No obstante que en la mayoría de los casos, este método proporciona resultados de una exactitud razonable, no es totalmente correcto. La validez y la auto consistencia de la consideración, respecto a que la amplitud compleja  $f(x, y)$  se desvanece en los puntos fuera de la apertura en la parte posterior de la pantalla, son cuestionables, ya que la onda transmitida se propaga en todas direcciones y alcanza dichos puntos. Una teoría de difracción, basada en la solución exacta de la ecuación de Helmholtz bajo las condiciones de frontera impuestas por la apertura, es matemáticamente muy complicada y solamente unas cuantas estructuras geométricas dan origen a soluciones exactas. Sin embargo, diferentes teorías de difracción se han desarrollado utilizando una variedad de consideraciones, lo que ha conducido a resultados de exactitud variada. Es importante aclarar que la teoría rigurosa de la difracción está fuera del objetivo de este trabajo, tanto por los antecedentes que se requieren, como por el hecho de que el software de análisis fotónico se basa en la teoría que se desarrolla a lo largo de este capítulo.

### 3.10.3 DIFRACCIÓN DE FRAUNHOFER

La difracción de Fraunhofer, es la teoría de la transmisión de la luz a través de aperturas bajo la consideración de que la onda incidente es multiplicada por la función de apertura y utilizando la aproximación de Fraunhofer para determinar la propagación de la luz en el espacio libre, más allá de la apertura. La aproximación de Fraunhofer es válida, si la distancia de propagación,  $d$ , entre la apertura y los planos de observación es lo suficientemente grande, de manera que el número de Fresnel  $N_F = b^2/\lambda d \ll 1$ , donde  $b$  es la mayor distancia radial dentro de la apertura.

Asumiendo que la onda incidente es una onda plana de intensidad  $I_i$ , viajando en la dirección  $z$  de manera que  $U(x, y) = I_i^{1/2}$ , entonces  $f(x, y) = I_i^{1/2} p(x, y)$ . En la aproximación de Fraunhofer (ver ecuación 3.37):

$$g(x, y) \approx \sqrt{I_i} h_0 P\left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d}\right) \quad \text{--- (3.49)}$$

donde se tiene que:

$$P(v_x, v_y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) \exp\left[j2\pi(v_x x + v_y y)\right] dx dy \quad \text{--- (3.50)}$$

es la transformada de Fourier de  $p(x, y)$  y  $h_0 = (j/\lambda d) \exp(-jk d)$ . El patrón de difracción es, por lo tanto:

$$I(x, y) = \frac{I_0}{(\lambda d)^2} \left| p\left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d}\right) \right|^2 \quad \text{--- (3.51)}$$

En resumen, el patrón de difracción de Fraunhofer en el punto  $(x, y)$ , es proporcional al cuadrado de la magnitud de la transformada de Fourier de la función de apertura,  $p(x, y)$ , evaluada en las frecuencias espaciales  $v_x = x/\lambda d$  y  $v_y = y/\lambda d$ .

La aproximación de Fraunhofer, es válida para distancias  $d$  que usualmente son extremadamente grandes, como en el caso de las comunicaciones ópticas de larga distancia por el espacio libre y dentro de las cuales, tenemos el ejemplo del radar láser (*lidar*) y las comunicaciones vía satélite. Sin embargo, si una lente con distancia focal  $f$  se utiliza para enfocar la luz difractada, el patrón de intensidad en el plano focal es proporcional al cuadrado de la magnitud de la transformada de Fourier de  $p(x, y)$ , evaluada en  $v_x = x/\lambda f$  y  $v_y = y/\lambda f$ . Por lo tanto, el patrón observado es idéntico al que se obtiene de la ecuación 3.51, con la distancia  $d$  reemplazada por la distancia focal  $f$ .

### 3.10.4 DIFRACCIÓN DE FRESNEL

La teoría de la difracción de Fresnel, está basada en la consideración de que la onda incidente es multiplicada por la función de apertura,  $p(x, y)$  y se propaga en el espacio libre de acuerdo con la aproximación de Fresnel. Si la onda incidente es una onda plana, viajando en la dirección  $z$  con intensidad  $I_0$ , la amplitud compleja inmediatamente después de la apertura es  $f(x, y) = I_0^{1/2} p(x, y)$ . Utilizando la ecuación 3.35, el patrón de difracción  $I(x, y) = |g(x, y)|^2$ , a una distancia  $d$  es:

$$I(x, y) = \frac{I_0}{(\lambda d)^2} \left| \iint_{-\infty}^{\infty} p(x', y') \exp\left[-j\pi \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{\lambda d}\right] dx' dy' \right|^2 \quad \text{--- (3.52)}$$

Es conveniente normalizar todas las distancias, utilizando a  $(\lambda d)^{1/2}$  como una unidad de distancia, de tal forma que  $X = x/(\lambda d)^{1/2}$  y  $X' = x'/(\lambda d)^{1/2}$  son las distancias normalizadas (de manera similar para  $y$  y  $y'$ ). Entonces, la ecuación 3.52 nos da lo siguiente:

$$I(X, Y) = I_0 \left| \iint_{-\infty}^{\infty} p(X', Y') \exp\left\{-j\pi \left[ (X - X')^2 + (Y - Y')^2 \right]\right\} dX' dY' \right|^2 \quad \text{--- (3.53)}$$

La integral en la ecuación anterior, es la convolución de  $p(X, Y)$  y  $\exp[-j\pi(\lambda^2 + Y^2)]$ . Las gráficas de las partes real e imaginaria de  $\exp(-j\pi\lambda^2)$ ,  $\cos\pi\lambda^2$  y  $\sin\pi\lambda^2$ , se muestran en la Figura 3.19 y en ella, podemos observar que oscilan a una frecuencia creciente y sus primeros lóbulos se encuentran en los intervalos  $|X| < 1/\sqrt{2}$  y  $|X| < 1$ , respectivamente. El área total bajo la función  $\exp(-j\pi\lambda^2)$  es 1, con la principal contribución al área viniendo de los primeros lóbulos, dado que los lóbulos subsecuentes se cancelan.

Si  $a$  es el radio de la apertura, el radio de la función normalizada  $p(x, y)$  es  $a(\lambda d)^{1/2}$ . El resultado de la convolución, que depende del tamaño relativo de las dos funciones es, por lo tanto, gobernado por el número de Fresnel  $N_F = a^2/\lambda d$ .

Si el número de Fresnel es grande, el ancho normalizado de la apertura,  $a(\lambda d)^{1/2}$ , es mucho mayor que el ancho del lóbulo principal y la convolución origina de forma aproximada, la función ensanchada  $p(x, y)$ . Bajo esta condición, el patrón de difracción de Fresnel es una sombra de la apertura, tal y como se hubiera esperado de la óptica de rayos. Nótese que la óptica de rayos es aplicable en el límite  $\lambda \rightarrow 0$ , que corresponde al límite  $N_F \rightarrow \infty$ ; mientras que en el límite opuesto, cuando  $N_F$  es pequeño, la aproximación de Fraunhofer se vuelve aplicable y el patrón de difracción de Fraunhofer es obtenido.

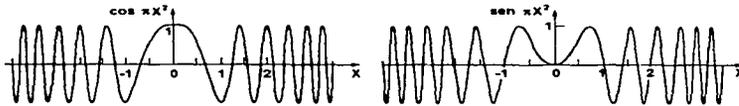


Figura 3.19 Las partes real e imaginaria de  $e^{j\pi x^2}$ .

### 3.11 FORMACIÓN DE IMÁGENES

Un sistema ideal de formación de imágenes, es un sistema que reproduce la distribución de luz del plano objeto, en el plano imagen y como el proceso de transmisión óptica nunca es perfecto, la imagen nunca es una réplica exacta del objeto. Aparte de la magnificación de la imagen, también existe una confusión o mancha resultante del enfocamiento imperfecto y de la difracción de las ondas ópticas. En consecuencia, para el objetivo de nuestro trabajo es muy importante realizar una descripción de los sistemas formadores de imágenes y de su fidelidad, utilizando los métodos de los sistemas lineales (función de respuesta a impulso y función de transferencia) para caracterizar la formación de la imagen.

#### 3.11.1 DESCRIPCIÓN DE LA ÓPTICA DE RAYOS DE LA FORMACIÓN DE LA IMAGEN

Considérese un sistema formador de imágenes, utilizando una lente de distancia focal  $f$  a distancias  $d_1$  y  $d_2$  de los planos objeto e imagen, respectivamente; tal y como se muestra en la Figura 3.20. Cuando  $1/d_1 + 1/d_2 = 1/f$ , el sistema está enfocado, de manera que los rayos paraxiales emitidos desde cada punto en el plano objeto, llegan a un solo punto correspondiente en el plano imagen. Dentro de la teoría de rayos de la luz, la formación de la imagen es ideal, con cada punto del objeto produciendo un solo punto en la imagen y en consecuencia, la función de respuesta a impulso del sistema es una función impulso.

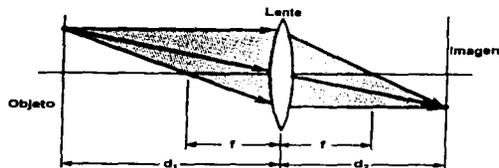


Figura 3.20 Rayos en un sistema formador de imágenes enfocado.

Supongamos ahora que el sistema no se encuentra en foco, como se ilustra en la Figura 3.21 y asumamos que el error de enfocamiento es:

$$\epsilon = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f} \quad (3.54)$$

Un punto en el plano objeto, genera una mancha de luz en el plano imagen que es una sombra de la apertura de la lente y la distribución de esta mancha, es la función de respuesta a impulso del sistema. Por simplicidad, consideraremos un punto objeto colocado en el eje óptico para determinar la distribución de luz,  $h(x, y)$ , que se genera en el plano imagen.

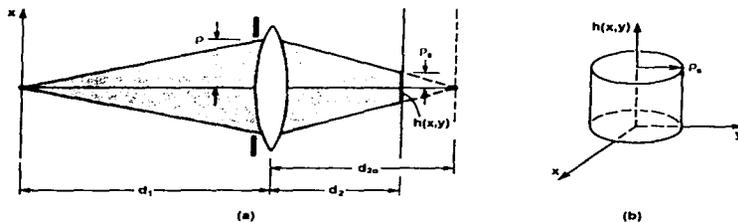


Figura 3.21 (a) Rayos en un sistema formador de imágenes desenfocado. (b) La función de respuesta a impulso, de un sistema formador de imágenes con una apertura circular de diámetro  $D$ , es un círculo de radio  $\rho_s = \epsilon d_2 D/2$ ; donde  $\epsilon$  es el error de enfocamiento.

Asumamos que el plano de la imagen enfocada, está ubicado a una distancia  $d_{2o}$  satisfaciendo la ecuación de formación de imágenes,  $1/d_{2o} + 1/d_1 = 1/f$ . La sombra de un punto en la orilla de la apertura, a una distancia radial  $\rho$ , es un punto en el plano imagen con distancia radial  $\rho_s$  y donde:

$$\frac{\rho_s}{\rho} = \frac{d_{2o} - d_2}{d_{2o}} = 1 - \frac{d_2}{d_{2o}} = 1 - d_2 \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{d_1} \right) = 1 - d_2 \left( \frac{1}{d_2} - \epsilon \right) = \epsilon d_2 \quad \text{--- (3.55)}$$

Si  $p(x, y)$  es la función de apertura, también llamada la **función de pupila** [donde  $p(x, y)=1$  para los puntos dentro de la apertura y  $0$  en cualquier otra parte], entonces  $h(x, y)$  es una versión escalada de  $p(x, y)$ , magnificada por un factor  $\rho, \rho=\epsilon d_2$ ; de manera que:

$$h(x, y) \propto p\left(\frac{x}{\epsilon d_2}, \frac{y}{\epsilon d_2}\right) \quad \text{--- (3.56)}$$

Como un ejemplo, una apertura circular de diámetro  $D$ , corresponde a una función de respuesta a impulso confinada a un círculo de radio:

$$\rho_s = \frac{\epsilon d_2 D}{2} \quad \text{--- (3.57)}$$

como se ilustra en la misma Figura 3.21. El radio  $\rho_s$  de esta "mancha de confusión", es una medida inversa de la capacidad de resolución y calidad de la imagen. Un valor pequeño de  $\rho_s$ , significa que el sistema es capaz de resolver detalles finos y dado que  $\rho_s$  es proporcional al diámetro de la apertura,  $D$ , la calidad de la imagen puede ser mejorada mediante el uso de una apertura pequeña. Por otro lado, una apertura pequeña corresponde a una sensibilidad reducida del sistema a los errores de enfocamiento, de manera que también corresponde a una mayor profundidad de foco.

### 3.12 SISTEMA FORMADOR DE IMÁGENES DE UNA SOLALENTE

Consideremos ahora, la formación de una imagen en el sistema de una sola lente mostrado en la Figura 3.22, mediante la metodología de la óptica de ondas.

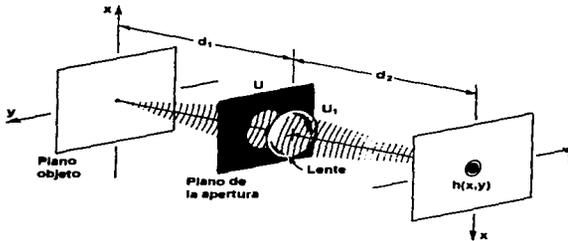


Figura 3.22 Sistema formador de imágenes compuesto por una sola lente.

### 3.12.1 FUNCIÓN DE RESPUESTA A IMPULSO

Para determinar la función de respuesta a impulso, consideraremos un objeto compuesto de un solo punto (un impulso) en el eje óptico, en las coordenadas  $(0,0)$  y seguiremos la onda óptica emitida conforme viaja al plano imagen. La amplitud compleja resultante, es la función de respuesta a impulso  $h(x, y)$ .

Un impulso en el plano objeto, produce en el plano de la apertura una onda esférica aproximada por (ver ecuación 3.34):

$$U(x, y) = h_1 \exp\left(-jk \frac{x^2 + y^2}{2d_1}\right) \quad \text{--- (3.58)}$$

donde  $h_1 = (j/\lambda d_1) \exp(-jk\Delta)$ . Al cruzar la apertura y la lente,  $U(x, y)$  es multiplicada por la función de pupila,  $p(x, y)$  y el factor de fase cuadrático de la lente (ver ecuación 2.93),  $\exp[jk(x^2 + y^2)/2f]$  (se ignora el factor de fase  $\exp(-jk\Delta)$ , donde  $\Delta$  es el ancho de la lente), convirtiéndose en:

$$U_1(x, y) = U(x, y) \exp\left(jk \frac{x^2 + y^2}{2f}\right) p(x, y) \quad \text{--- (3.59)}$$

El campo resultante  $U_1(x, y)$ , se propaga entonces en el espacio libre a una distancia  $d_2$  y de acuerdo con la ecuación 3.35, produce la amplitud:

$$h(x, y) = h_2 \int \int_{-\infty}^{\infty} U_1(x', y') \exp\left[-j\pi \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{\lambda d_2}\right] dx' dy' \quad \text{--- (3.60)}$$

donde  $h_2 = (1/\lambda d_2) \exp(-jk d_2)$ . Substituyendo las ecuaciones 3.58 y 3.59 en la 3.60 y presentando las integrales como una transformada de Fourier, tenemos que:

$$h(x, y) = h_1 h_2 \exp\left(-j\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda d_2}\right) P_1\left(\frac{x}{\lambda d_2}, \frac{y}{\lambda d_2}\right) \quad \text{--- (3.61)}$$

donde  $P_1(v_x, v_y)$ , es la transformada de Fourier de la función:

$$p_1(x, y) = p(x, y) \exp\left(-j\pi \varepsilon \frac{x^2 + y^2}{\lambda}\right) \quad \text{--- (3.62)}$$

conocida como la **función generalizada de pupila**. El factor  $\varepsilon$  es el error de enfocamiento dado por la ecuación 3.54.

Para obtener un sistema formador de imágenes de alta calidad, la función de respuesta a impulso debe ser una función angosta, extendiéndose únicamente sobre un pequeño intervalo de valores de  $x$  y  $y$ . Si el factor de fase  $\pi(x^2 + y^2)/\lambda d_2$  de la ecuación 3.61, es mucho menor que la unidad para todas las  $x$  y  $y$  dentro de este intervalo, puede ser despreciado, de manera que:

$$h(x, y) = h_0 P_1\left(\frac{x}{\lambda d_2}, \frac{y}{\lambda d_2}\right) \quad \text{--- (3.63)}$$

donde  $h_0 = h_1 h_2$ , es una constante de magnitud  $(1/\lambda d_1)(1/\lambda d_2)$ . En consecuencia, la función de respuesta a impulso del sistema, es proporcional a la transformada de Fourier de la función generalizada de pupila,  $p_1(x, y)$ , evaluada en  $v_x = x/\lambda d_2$  y  $v_y = y/\lambda d_2$ . Si el sistema está enfocado ( $\varepsilon = 0$ ), entonces  $p_1(x, y) = p(x, y)$  y:

$$h(x, y) = h_0 P\left(\frac{x}{\lambda d_2}, \frac{y}{\lambda d_2}\right) \quad \text{--- (3.64)}$$

donde  $P(v_x, v_y)$  es la transformada de Fourier de  $p(x, y)$ .

### 3.12.2 FUNCIÓN DE RESPUESTA A IMPULSO DE UN SISTEMA GENERADOR DE IMÁGENES ENFOCADO Y CON UNA APERTURA CIRCULAR

Si la apertura es un círculo de diámetro  $D$ , de manera que  $p(x, y)=1$  si  $\rho=(x^2+y^2)^{1/2} \leq D/2$  y cero bajo cualquier otra condición, entonces la función de respuesta a impulso es:

$$h(x, y) = h(0, 0) \frac{2J_1\left(\frac{\pi D \rho}{\lambda d_2}\right)}{\frac{\pi D \rho}{\lambda d_2}}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{--- (3.65)}$$

y además:

$$|h(0, 0)| = \frac{\pi D^2}{4\lambda^2 d_1 d_2} \quad \text{--- (3.66)}$$

Ésta es una función circular simétrica, cuya sección transversal se muestra en la Figura 3.23 y en donde se puede observar que cae a cero en un radio  $1,22\lambda d_2/D$  y oscila ligeramente antes de desvanecerse. El radio  $\rho_c$  es, por lo tanto, una medida del tamaño del círculo de confusión. Si el sistema está enfocado al  $\infty$ ,  $d_1 = \infty$ ,  $d_2 = f$  y  $\rho_c = 1,22\lambda F_\#$ , donde  $F_\# = f/D$  es el número- $f$  de la lente y en consecuencia, se puede decir que los sistemas de menor  $F_\#$  (grandes aperturas) presentan una mejor calidad de imagen. Lo anterior asume, que una lente más grande no introduce aberraciones geométricas.

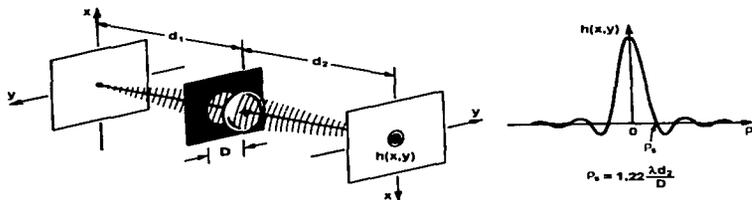


Figura 3.23 Función de respuesta a impulso de un sistema formador de imágenes con una apertura circular.

Nótese que en este caso, la función de simetría circular ( $J_1$ ) se forma cuando la distribución de intensidades en el frente de onda, es de cualquier forma menos Gaussiana. Como se mencionaba en el capítulo anterior, una de las propiedades del haz Gaussiano es que mantiene su perfil de irradiancia a lo largo de su propagación e inclusive después de haber sido difractado por una apertura.

**INTRODUCCIÓN A LA  
TECNOLOGÍA DE FIBRAS  
ÓPTICAS**

---

## INTRODUCCIÓN A LA TECNOLOGÍA DE FIBRAS ÓPTICAS

Los instrumentos ópticos convencionales, hacen uso de luz que es transmitida entre diferentes puntos en forma de haces, los cuales pueden ser colimados, enfocados o muestreados por diversos elementos, como lentes, espejos y prismas. Durante este proceso, los haces ópticos se difractan y ensanchan, pero pueden ser reenfocados mediante el uso de los elementos ópticos. No obstante que estos haces son fácilmente obstruidos y dispersados por diferentes objetos, esta forma de transmisión de la luz en el espacio libre es la base de la mayoría de los sistemas ópticos. Existe, sin embargo, una tecnología relativamente nueva para transmitir a la luz a través de conductos dieléctricos, la cual se conoce como **óptica de ondas guiadas** y que básicamente ha sido desarrollada para soportar la transmisión de luz a muy largas distancias, sin la necesidad de lentes relevadoras (o lentes en serie). La óptica de ondas guiadas, tiene implicaciones muy importantes en el direccionamiento de la luz hacia lugares de difícil acceso, en el establecimiento de comunicaciones seguras y en la fabricación de dispositivos ópticos y optoelectrónicos miniaturizados, que requieren del confinamiento de la luz.

### 4.1 HISTORIA DE LAS FIBRAS ÓPTICAS

El concepto básico del confinamiento óptico es realmente muy sencillo. Un medio de cierto índice de refracción, inmerso dentro de un medio de índice de refracción menor, actúa como una "trampa" de luz dentro de la que los rayos ópticos permanecen confinados, por múltiples reflexiones internas totales en las fronteras entre los dos medios. En consecuencia, este efecto puede ser utilizado para hacer conductos o guías de luz, que la transporten de un punto a otro. Una **guía de onda óptica**, es un conducto de luz que puede consistir de una placa, banda o cilindro de material dieléctrico, rodeado por otro material dieléctrico de menor índice de refracción (ver Figura 4.1). Como resultado, la luz es transportada a través del medio interno, sin que la radiación óptica pase al medio envolvente. De estas guías de onda, la más extensamente utilizada es la fibra óptica, la cual está hecha de dos cilindros concéntricos de material dieléctrico de baja pérdida, como el vidrio de Cuarzo.

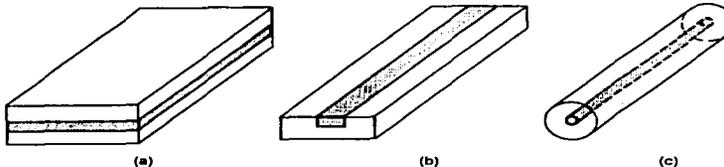


Figura 4.1 Guías de onda ópticas: (a) placa; (b) banda; (c) fibra.

No obstante que esta tecnología se considera como relativamente nueva, el concepto de las comunicaciones ópticas se remonta muchos años atrás en la historia. El envío de mensajes mediante el uso de la luz, es ciertamente tan antiguo como las primeras señales de fuego o humo y ha continuado, en la historia reciente, en el uso de lámparas de señalización para comunicación entre barcos. Sin embargo, las primeras patentes para un sistema de comunicaciones ópticas, fueron requisitadas en 1880. En ese tiempo, Alejandro Graham Bell obtuvo las patentes sobre el **fototeléfono** o **fotófono** y demostró la comunicación mediante un haz de luz a una distancia de 200 m. El fototeléfono, mostrado en la Figura 4.2, utilizaba una celda de Selenio fotosensible para detectar las variaciones en la intensidad de un haz de luz. Sin embargo y como es de esperarse, todos estos métodos que se han mencionado, dependen de un medio de propagación inestable como lo es la atmósfera.

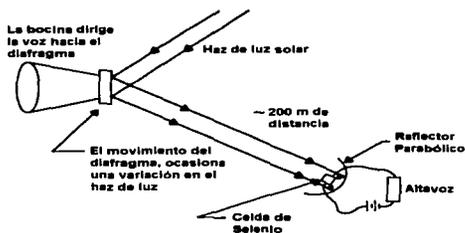


Figura 4.2 Diagrama esquemático del fototeléfono de Alejandro Graham Bell.

Una guía de onda hecha de un material no conductor que transmite la luz (dieléctrico), como el vidrio o el plástico, proveería un medio de transmisión mucho más confiable, ya que no está sujeto a las condiciones atmosféricas. Por otro lado, el guiado de la luz por un medio dieléctrico, tampoco es una idea nueva. En 1870, *John Tyndall* mostró que la luz puede ser guiada dentro de una corriente de agua (este experimento se muestra en la Figura 4.3) y ya para 1910, *Hondros* y *Debye* habían desarrollado una teoría sobre guías de onda dieléctricas.

El avance que ha hecho de la guía de onda de fibra óptica, el principal contendiente como medio de transmisión para los sistemas de comunicación presentes y futuros, fue disparado principalmente por dos eventos. El primero, fue la demostración del primer láser operacional en 1960 y el segundo, fue un cálculo hecho en 1966 por los científicos *Charles Kao* y *George A. Hockham*. Ellos especularon, que las guías de onda de fibra óptica podrían competir con los cables coaxiales existentes, utilizados para comunicaciones, si las fibras se hicieran de tal forma que pudieran transmitir el 1% de la luz dentro de ellas, a una distancia de 1 kilómetro. Es importante hacer notar, que en ese entonces la energía luminosa que era transmitida, caía a menos del 1% de su valor inicial después de haber recorrido tan solo 20 metros, en las mejores fibras existentes y además, ningún experto en materiales podía predecir que la transmisión de alta calidad requerida, pudiera lograrse.



Figura 4.3 El experimento de Tyndall mostrando que una corriente de agua puede guiar un haz de luz.

No obstante lo anterior, muchos grupos de investigación comenzaron activamente a perseguir este objetivo. En 1970 la compañía *Corning Glass Works*, investigó la aplicación de vidrios con alto contenido de sílice para la fabricación de fibras y fue la primera en reportar una transmisión mayor al 1% a una distancia de 1 km. Posteriormente, este mismo grupo incrementó la transmisión a más del 40% en la misma distancia y actualmente, se pueden alcanzar fácilmente transmisiones del orden de 95-96% en 1 km. A manera de comparación y para entender la magnitud del reto que enfrentaban, podemos decir que si el agua de mar tuviera una transmitancia óptica de alrededor del 79% por cada kilómetro de profundidad (es decir, el 79% de la energía luminosa lograra pasar por cada km), seríamos capaces de ver a simple vista, el fondo de los océanos más profundos del mundo. En la Figura 4.4, se muestra una gráfica aproximada del avance que se ha experimentado en cuanto a la capacidad de transmisión de las fibras.

El logro de una transmisión de baja pérdida, junto con las ventajas adicionales de una gran capacidad de transporte de información, inmunidad a la interferencia electromagnética y tamaño y peso reducidos, han dado pie a que esta nueva tecnología pasara de la fase experimental a la fase comercial. La fibra óptica, ha llegado a convertirse en el medio de transmisión elegido para la aplicación en comunicaciones. Por ejemplo, el sistema TAT-8 (*Trans Atlantic Telephone #8*) concluido en 1988, es un enlace de fibra óptica de 6 500 km de longitud que dio a la telefonía transatlántica, una capacidad equivalente a 20 000 canales de voz; comparemos esto con el sistema TAT-1, completado en 1955, que transportaba 50 canales de voz a través de cable coaxial. Aún más, algunas compañías como Pacific Bell en los Estados Unidos de Norteamérica, tienen planeado substituir todos sus cables de cobre por fibra óptica, esperando que para el año 2005 todos los enlaces de larga distancia estén bajo esta tecnología y para el año 2025 hayan concluido la conversión de todo su sistema. Por otro lado, la fibra óptica también se ha estado utilizando en forma extensiva en las Redes de Área Local (LAN), las cuales son utilizadas para comunicación de voz o datos dentro o entre edificios. Muchos de los llamados "edificios inteligentes", son construidos con una red de fibra óptica dentro de su estructura, tanto para administrar los sistemas de soporte del edificio como para aplicaciones LAN.

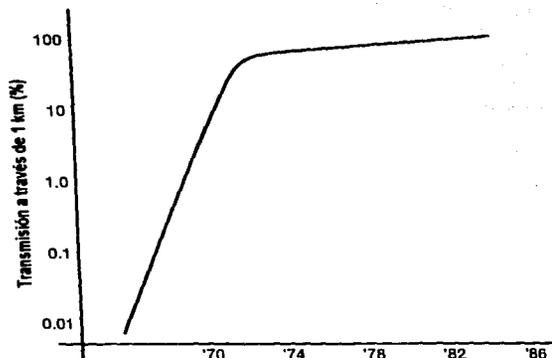


Figura 4.4 Progreso en la transmisión a través de fibras ópticas. Los últimos puntos representan los resultados cercanos al límite teórico en 850 nm y 1 550 nm de longitud de onda.

Es conveniente mencionar, que el uso de las fibras ópticas no está restringido a las comunicaciones, puesto que también están siendo aplicadas en la fabricación de sensores, donde se explota principalmente su alta sensibilidad, baja pérdida e inmunidad electromagnética. Las fibras ópticas son muy versátiles y es posible diseñar sensores para medir muchos parámetros físicos, como la temperatura, presión, tensión, aceleración, distancia, nivel de líquido, campos eléctricos y magnéticos, etc., utilizando las propiedades de transmisión de potencia de un tipo de fibras, o la sensibilidad de fase de otras. Otra aplicación que está creciendo rápidamente, es el transporte de haces de luz (principalmente láser) para uso en medicina, ya que las dimensiones físicas de la fibra permiten introducirla al cuerpo humano con relativa facilidad.

## 4.2 LA LUZ EN LAS FIBRAS ÓPTICAS

### 4.2.1 GENERALIDADES

Recordando las primeras secciones del Capítulo 1, podemos decir que bajo el esquema de la óptica de rayos, el concepto de la reflexión interna total puede hacer que la interfase entre dos medios parezca un espejo perfecto. Si este proceso es examinado en términos de la propagación de ondas, la teoría predice y la experimentación confirma que en el medio de menor densidad óptica (menor índice de refracción), realmente existe un campo electromagnético débil, el cual decae rápidamente con la distancia desde la interfase y en consecuencia, la luz no es transmitida hacia este medio.

Este campo débil es llamado **campo evanescente**. Sin embargo, si otro material ópticamente denso se colocara muy cerca del material en el que la reflexión interna total está ocurriendo (aproximadamente una distancia de una longitud de onda), parte de la energía luminosa podría ser acoplada para salir del primer medio, a través de la pequeña separación y así, entrar al segundo medio de alta densidad. Este último proceso es conocido como **reflexión interna total frustrada**, ya que la reflexión usual es frustrada por la colocación del material cerca de la interfase. No obstante lo anterior, este proceso es de utilidad práctica, ya que es la base de operación de un componente muy importante de los sistemas de fibra óptica, conocido como acoplador bidireccional.

Una vez que hemos retomado el concepto de la reflexión interna total, es más fácil entender el experimento de *Tyndall* de la corriente de agua iluminada (Figura 4.3). En este proceso, la luz que viaja a través del agua es reflectada de la interfase agua-aire, quedando atrapada dentro de la corriente. Este mismo proceso ocurriría con un cilindro de vidrio, sin embargo, las fibras ópticas son un poco más complicadas que esto.

Si uno utilizara una fibra que consistiera de un solo filamento de vidrio o plástico, la luz se podría perder o escapar en cualquier punto en el que dicha fibra tocara una superficie de soporte y en consecuencia, la cantidad de luz que se podría transmitir dependería del método usado para sostener a la fibra. Paralelamente, la señal de salida de la fibra también sería afectada por cualquier movimiento que el filamento experimentara durante su uso. Para eliminar estos problemas, la parte central portadora de la luz en la fibra, llamada **núcleo**, está rodeada por una región cilíndrica denominada **revestimiento** (ver Figura 4.5) y a su vez, el revestimiento está cubierto con una camisa protectora de plástico.

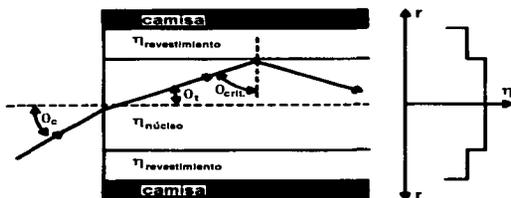


Figura 4.5 Fibra de índice escalonado. El perfil del índice de refracción se muestra a la derecha y también se proporciona la geometría necesaria para derivar la apertura numérica.

#### 4.2.2 APERTURA NUMÉRICA Y FIBRAS DE ÍNDICE ESCALONADO

Una fibra de índice escalonado, es una guía de onda dieléctrica cilíndrica especificada por los índices de refracción de su núcleo y su revestimiento,  $n_N$  y  $n_R$ , respectivamente y por los radios  $a$  y  $b$  (ver Figura 4.6). Algunos ejemplos de los diámetros que comúnmente se manejan para el núcleo y el revestimiento son:  $2a/2b = 8/125$ ,  $50/125$ ,  $62.5/125$ ,  $85/125$  y  $100/140$  (todos en  $\mu\text{m}$ ).

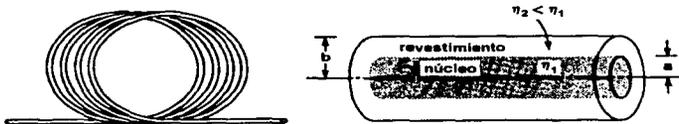


Figura 4.6 Una fibra óptica es una guía de onda dieléctrica cilíndrica.

Debido a que la diferencia de índices de refracción entre el núcleo y el revestimiento es menor que en el caso de un núcleo rodeado por aire, el ángulo crítico es mucho mayor en el caso de la fibra con revestimiento. Aún así, el índice de refracción del revestimiento,  $n_R$ , es menor que el del núcleo,  $n_N$ , dado que la reflexión interna total ocurrirá solamente cuando  $n_N > n_R$ . Analizando el corte longitudinal de la fibra, mostrado en la Figura 4.5, es posible ver que el cono de rayos que será aceptado por la fibra está determinado por la diferencia entre los índices de refracción del núcleo y del revestimiento. La **diferencia de índice de refracción fraccional**, está dada por:

$$\Delta = \frac{n_N - n_R}{n_N} \quad \text{--- (4.1)}$$

Prácticamente todas las fibras, que actualmente se están utilizando en los sistemas de comunicación, están hechas de vidrio de sílice fundido ( $SiO_2$ ) de una pureza química muy elevada y los cambios ligeros en los índices de refracción, se hacen mediante la adición de pequeñas concentraciones de materiales dopantes (como por ejemplo, titanio, germanio o boro). El índice de refracción del núcleo, generalmente varía entre 1,44 y 1,46, dependiendo de la longitud de onda y  $\Delta$  típicamente está entre 0,001 y 0,02.

Como el índice de refracción del núcleo y del revestimiento son constantes en la dirección radial y cambian abruptamente en la interfase entre ellos, el tipo de fibra mostrado en la Figura 4.5 es conocido como **fibra de índice escalonado**.

La definición del ángulo crítico, puede ser utilizada para encontrar el tamaño del cono de luz que será aceptado por una fibra óptica, con una diferencia de índice fraccional  $\Delta$ . En la Figura 4.5, se muestra un rayo que incide en la interfase núcleo-revestimiento formando el ángulo crítico. Si el ángulo del cono es  $\theta_c$ , de la Ley de Snell se obtiene que:

$$n_i \sin \theta_c = n_N \sin \theta_i = n_N \sin(90^\circ - \theta_{crit}) \quad \text{--- (4.2)}$$

$$n_i \sin \theta_c = n_N \cos \theta_{crit} = n_N \sqrt{1 - \sin^2 \theta_{crit}} \quad \text{--- (4.3)}$$

De la Ley de la Refracción (sección 1.5), sabemos que:

$$\text{sen}\theta_{\text{crit}} = \frac{\eta_t}{\eta_i} = \frac{\eta_R}{\eta_N} \quad \text{--- (4.4)}$$

de tal forma que:

$$\eta_i \text{sen}\theta_c = \sqrt{\eta_N^2 - \eta_R^2} \quad \text{--- (4.5)}$$

La **apertura numérica**,  $NA$ , es una medida de la cantidad de luz que puede ser colectada por un sistema óptico, ya sea éste una fibra óptica, un objetivo de microscopio o una lente fotográfica. De las ecuaciones anteriores, podemos decir que es igual al producto del índice de refracción del medio incidente y el seno del ángulo de rayo máximo (el rayo más oblicuo aceptado por el sistema óptico):

$$NA = \eta_i \text{sen}\theta_{\text{max}} \quad \text{--- (4.6)}$$

En la mayoría de los casos, la luz incide desde el aire, por lo que  $\eta_i=1$  y para esta condición, al combinar las ecuaciones 4.5 y 4.6:

$$NA = \sqrt{\eta_N^2 - \eta_R^2} \quad \text{--- (4.7)}$$

Por otro lado, cuando  $\Delta \ll 1$ , la ecuación anterior puede aproximarse por la siguiente expresión:

$$NA = \sqrt{(\eta_N + \eta_R)(\eta_N - \eta_R)} = \sqrt{(2\eta_N)(\eta_N \Delta)} = \eta_N \sqrt{2\Delta} \quad \text{--- (4.8)}$$

La condición para la cual  $\Delta \ll 1$ , es conocida como **aproximación de guiado débil (weakly-guiding approximation)**. En consecuencia, el ángulo  $\theta_c$  (también llamado  $\theta_a$ ) es el ángulo de aceptación de la fibra y determina el cono de rayos externos que son guiados por la fibra. Los rayos que incidan en el plano de entrada de la fibra, formando ángulos mayores que  $\theta_c$ , son refractados hacia la fibra pero son guiados únicamente en una distancia corta. Nótese que cuando los rayos guiados arriban al otro extremo de la fibra, son refractados en un cono de ángulo  $\theta_c$ , lo que hace del ángulo de aceptación un parámetro crucial para el diseño de sistemas de acoplamiento de luz, hacia o desde la fibra (ver Figura 4.7).

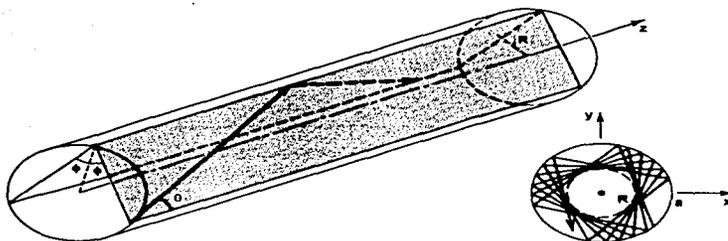


Figura 4.7 (a) El ángulo de aceptación  $\theta$ , de una fibra. Los rayos contenidos en el cono de aceptación son guiados por el efecto de la reflexión interna total y la apertura numérica, está definida como  $NA = \text{sen } \theta_c$ . (b) La capacidad de recolección de luz de una fibra con una NA grande, es mayor que el de una fibra con NA pequeña. Los ángulos  $\theta_c$  y  $\theta$ , típicamente son muy pequeños, pero en el dibujo se exageran para hacer más clara la diferencia.

### 4.2.3 RAYOS GUIADOS AXIALES Y MERIDIONALES

Como ya vimos, un rayo es guiado mediante reflexiones internas totales dentro del núcleo de la fibra, si su ángulo de incidencia en la frontera núcleo-revestimiento es mayor que el ángulo crítico  $\theta'_{crit} = \text{sen}^{-1}(\eta_N/\eta_K)$  y permanece así conforme el rayo va "rebotando". La condición de guiado es fácil de observar en el caso de los rayos meridionales, que son aquellos rayos que están contenidos en los planos que pasan a través del eje de la fibra; tal y como se muestra en la Figura 4.8. Estos rayos intersectan el eje de la fibra y se reflejan en el mismo plano sin alterar su ángulo de incidencia, como si viajaran en una guía de onda plana. Los rayos meridionales son guiados, si el ángulo  $\theta$  que forman con el eje de la fibra es menor que el complemento del ángulo crítico  $\theta'_{crit} = (\pi/2) - \theta_{crit} = \text{cos}^{-1}(\eta_N/\eta_K)$ . Dado que  $\eta_N < \eta_K$ , el ángulo  $\theta'_{crit}$  usualmente es pequeño y los rayos guiados son aproximadamente paraxiales.

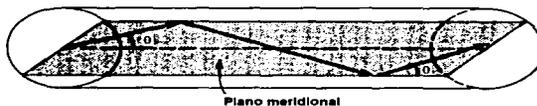


Figura 4.8 La trayectoria de un rayo meridional está contenida en un plano que pasa a través del eje de la fibra. El rayo será guiado si  $\theta < \theta'_{crit} = \text{cos}^{-1}(\eta_N/\eta_K)$ .

En la Figura 4.9, se muestran dos rayos: el **rayo axial**, que viaja a lo largo del eje de la fibra y el **rayo meridional** o **marginal**, que viaja a lo largo de una trayectoria cercana al ángulo crítico para la interfase núcleo-revestimiento y que es el máximo ángulo de rayo que será propagado por la fibra.

En el punto en el que el rayo marginal alcanza la interfase, ha viajado una distancia  $L_2$ , mientras que el rayo axial ha viajado una distancia  $L_1$ . De la geometría que se muestra en la figura, se puede observar que:

$$\text{sen } \theta = \frac{\eta_R}{\eta_N} = \frac{L_1}{L_2} \quad \text{--- (4.9)}$$

En consecuencia, para el caso mostrado, la longitud  $L_2$  es mayor a  $L_1$  por un factor  $\eta_R/\eta_N$ . De lo anterior, se desprende que para cualquier longitud de fibra  $L$ , la distancia adicional recorrida por un rayo marginal será:

$$\delta L = \frac{L(\eta_N - \eta_R)}{\eta_R} \quad \text{--- (4.10)}$$

donde esta expresión puede ser simplificada de la siguiente forma:

$$\delta L = L\Delta \quad \text{--- (4.11)}$$

Como consecuencia de las trayectorias más largas, el tiempo que le toma a la luz el viajar a lo largo de este rayo marginal, estará dado por:

$$\delta t = \frac{\delta L}{v} = \frac{L\Delta\eta_N}{c} \quad \text{--- (4.12)}$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz. Por lo tanto, un pulso con una longitud  $r$ , representando un bit de información, será alargado a  $r + \delta r$ .

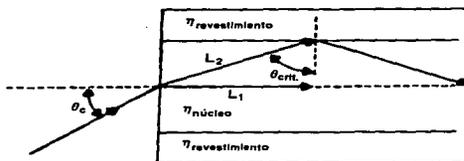


Figura 4.9 Geometría utilizada para derivar el retardo diferencial de una fibra de índice escalonado.

Este tiempo diferencial entre los rayos axiales y marginales, es el causante de que el pulso se disperse, limitando en consecuencia, el número de pulsos por segundo que pueden ser enviados a través de la fibra y ser distinguidos por el receptor en el otro extremo. En tal caso, el sistema estará limitado no por qué tan rápido se pueda encender y apagar la fuente o por la velocidad de respuesta del detector, sino por el retardo de tiempo diferencial de la fibra. No obstante que la dispersión de los pulsos puede ser remediada mediante el uso de fibras de índice gradual o fibras monomodales, nuestro estudio se concentrará en estas últimas, dado que éste es el tipo de fibra óptica a la que se pretende acoplar el haz emitido por el diodo láser.

#### 4.2.4 RAYOS GUIADOS OBLICUOS

Un rayo arbitrario se identifica por su plano de incidencia, que es un plano paralelo al eje de la fibra y que pasa a través del rayo y por el ángulo que forma con dicho eje; tal y como se ilustra en la Figura 4.10. El plano de incidencia intersecta la interfase cilíndrica núcleo-revestimiento, formando un ángulo  $\phi$  con la normal a la interfase y está a una distancia  $R$  del eje de la fibra. El rayo es identificado por el ángulo  $\theta$  formado con el eje de la fibra y por el ángulo  $\phi$  de su plano. En consecuencia, cuando  $\phi \neq 0$  ( $R \neq 0$ ) se dice que el rayo está sesgado u oblicuo; contrariamente, en el caso de los rayos meridionales,  $\phi = 0$  y  $R = 0$ .

Un rayo sesgado, se refleja repetidamente en planos que forman el mismo ángulo  $\phi$  con la interfase núcleo-revestimiento y sigue una trayectoria helicoidal confinada dentro de una región cilíndrica de radios  $R$  y  $a$ ; tal y como es ilustrado por la Figura 4.10. La proyección de la trayectoria en el plano transversal ( $x-y$ ) es un polígono regular, que no es necesariamente cerrado. En base a lo anterior, se puede decir que la condición para que un rayo sesgado siempre experimente la reflexión interna total, es que el ángulo  $\theta$  que forma con el eje  $z$  sea menor que  $\theta'_{crit}$ .

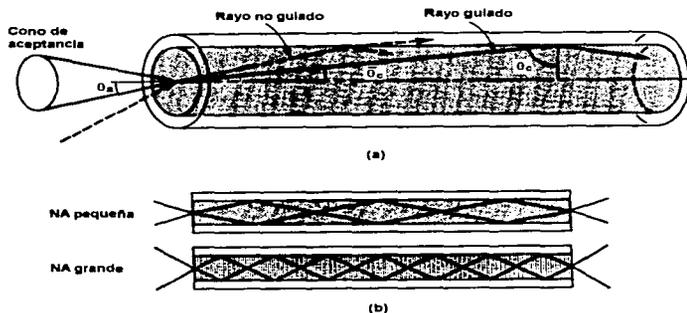


Figura 4.10 Un rayo sesgado está contenido en un plano que tiene un desplazamiento  $R$ , desde el eje de la fibra y está identificado por los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ . Este rayo seguirá una trayectoria helicoidal confinada dentro de una región cilíndrica de radios  $R$  y  $a$ . La proyección del rayo en el plano transversal, es un polígono regular no necesariamente cerrado.

### 4.3 CAMPOS ONDULATORIOS EN UNA FIBRA ÓPTICA

A pesar de que el esquema de rayos, utilizado para mostrar la propagación de luz a través de una fibra es fácil de comprender, no revela algunas de las propiedades que la luz presenta dentro de este sistema óptico cilíndrico y que son de mucho interés, particularmente en aquellas fibras en las que el tamaño del núcleo es del orden de la longitud de onda de la luz.

Las leyes que gobiernan la propagación de la luz en las fibras ópticas, son las Ecuaciones de Maxwell y que como ya vimos, son las mismas leyes que describen la propagación de la luz en el vacío o en cualquier medio. Cuando la información referente a las constantes del material, como los índices de refracción y las condiciones de frontera para la geometría cilíndrica del núcleo y del revestimiento, es incorporada en dichas ecuaciones, éstas pueden ser combinadas para obtener una ecuación de onda, que puede ser resuelta para aquellas distribuciones del campo electromagnético que se propagarán a través de la fibra. Estas distribuciones permitidas del campo electromagnético a través de la fibra, son denominadas **modos** de la fibra. Cuando el número de modos permitidos se hace grande, como en el caso de las fibras con un núcleo de gran tamaño, la aproximación de rayos que hemos utilizado proporciona una descripción adecuada de la propagación de la luz dentro de las fibras; sin embargo, éste no es el caso para las fibras en las que las dimensiones del núcleo son muy pequeñas.

La descripción de los modos que se propagan en una fibra, se encuentra al resolver la ecuación de onda en coordenadas cilíndricas para el campo eléctrico de la luz en la fibra. El sistema coordenado cilíndrico para una fibra, se ilustra en la Figura 4.11.

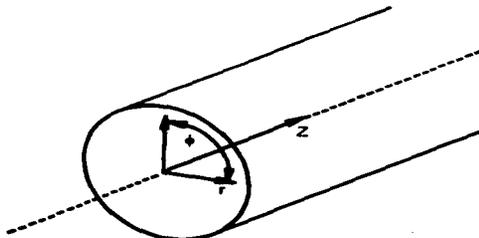


Figura 4.11 Sistema de coordenadas para los modos en una fibra óptica.

Las soluciones para la ecuación de onda y que son funciones armónicas en el tiempo y en el espacio (formadas por funciones seno y coseno), presentan la siguiente forma:

$$E(r, \phi, z) = f(r) \cos(\omega t - \beta z + \gamma) \cos(q\phi) \quad \text{--- (4.13)}$$

---

donde  $\omega$  es la frecuencia de la luz en radianes/s ( $\omega=2\pi\nu$ ) y  $\nu$  es la frecuencia lineal en Hz o ciclos/s),  $\beta$  es la **constante de propagación**, expresada en radianes por unidad de distancia, y es una constante de fase para proporcionar la amplitud correcta en el tiempo  $t=0$  y la posición  $z=0$  y  $q$  es un entero.

El parámetro  $\beta$  es muy importante para especificar como se propaga la luz en la fibra. En la descripción de la óptica de rayos,  $\beta$  es la proyección del vector de propagación en el eje  $z$ , donde la magnitud del vector de propagación es  $k=2\pi/\lambda_0$  y  $\lambda_0$  es la longitud de onda de la luz en el vacío. Para evitar posibles confusiones, es muy importante hacer la distinción entre la magnitud del vector de propagación,  $k$  y la constante de propagación,  $\beta$ , que es la componente en  $z$  del vector de propagación.

Las soluciones para  $\beta$ ,  $f(r)$  y  $q$ , se obtienen al substituir la ecuación 4.13 en la ecuación de onda. Estas soluciones dependerán de la geometría particular de cada fibra y del perfil del índice de refracción, tanto del núcleo como del revestimiento, que estén bajo consideración. Es importante mencionar, que el perfil de índice escalonado es uno de los pocos perfiles de índice de refracción para el que se pueden obtener soluciones exactas y en cuyo caso las soluciones para  $f(r)$  son funciones Bessel. Generalmente, estamos más familiarizados con las funciones trigonométricas e inclusive las hiperbólicas, sin embargo, es difícil encontrar una onda senoidal en nuestra experiencia cotidiana. Por el contrario, podemos encontrar una función Bessel fácilmente, todo lo que se requiere es una superficie que se pueda mover libremente y una frontera cilíndrica para esa superficie. A manera de ejemplo, consideremos una taza conteniendo algún líquido como agua o café, si golpeamos un lado de la taza las ondas circulares que se generan en la superficie del líquido son funciones Bessel.

Una cantidad muy importante, para determinar cuales modos de un campo electromagnético serán soportados por la fibra, es un parámetro llamado el **parámetro característico de la guía de onda**, o **número de onda normalizado** o simplemente el **número- $V$**  de la fibra y que es expresado de la siguiente forma:

$$V = k_f \cdot a \cdot NA \quad \text{--- (4.14)}$$

donde  $k_f$  es el número de onda en el espacio libre,  $2\pi/\lambda_0$ ,  $a$  es el radio del núcleo de la fibra y  $NA$  es su apertura numérica.

Cuando las constantes de propagación ( $\beta$ 's) de los modos de la fibra se grafican en función del número- $V$  (recordemos que cada número- $V$ , representa un producto específico de número de onda-radio del núcleo-apertura numérica), es fácil determinar el número de modos que se pueden propagar en una fibra en particular. En la Figura 4.12, se muestra una gráfica de este tipo para algunos de los modos de orden más bajo. En este caso, el número de modos que se van a propagar, está determinado por el número de curvas que crucen una línea vertical dibujada en el número- $V$  de la fibra. Nótese que para las fibras en las que  $V < 2.405$ , solamente se propagará un modo y en consecuencia, esta región de la gráfica se conoce como **región monomodo**.

Por esta razón, la longitud de onda a la cual  $V \approx 2,405$  es conocida como **longitud de onda de corte** y se denota por  $\lambda_c$ , ya que para un producto específico del radio del núcleo y la apertura numérica, conforme la longitud de onda de la radiación se incrementa, ésta será la longitud de onda a la cual todos los modos de alto orden son suprimidos y solamente un modo se propagará en la fibra. Por lo tanto, una fibra que propague solamente el modo  $HE_{11}$ , es llamada **fibra monomodo**. Recordemos nuevamente que para este trabajo se está considerando utilizar una fibra monomodo, ya que es el tipo utilizado en las comunicaciones ópticas terrestres y submarinas de larga distancia.

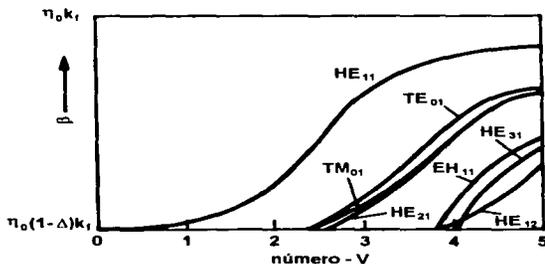


Figura 4.12 Los modos de orden más bajo en una fibra óptica. En esta figura, se presenta una gráfica de la constante de propagación ( $\beta$ ) en una fibra, como una función del número- $V$  de la misma. Cada número- $V$  representa una configuración de fibra diferente o una longitud de onda de la luz distinta, para una configuración de fibra dada.

En la aproximación de guiado débil ( $\Delta \ll 1$ ), las soluciones exactas de la teoría de guías de onda,  $HE_{mn}$ , pueden ser reemplazadas por un conjunto de modos que están polarizados linealmente y que son llamados **modos LP** (es importante aclarar, que para el desarrollo de este trabajo no se tocarán los detalles de la polarización de ondas electromagnéticas). Los modos LP, son combinaciones de los modos encontrados de la teoría exacta de la guía de onda y pueden ser caracterizados por dos subíndices,  $m$  y  $n$ . El primer subíndice,  $m$ , proporciona el número de nodos (ceros) azimutales o angulares que ocurren en la distribución del campo eléctrico del modo; el segundo subíndice,  $n$ , proporciona el número de nodos radiales que ocurren.

Estos modos pueden ser identificados, por el patrón que presente la salida de la fibra al iluminar una pantalla. Los patrones que se generan, son simétricos con respecto al centro del haz y presentan regiones brillantes separadas por regiones oscuras (los nodos que determinan los números de orden,  $m$  y  $n$ ). Algunos de estos patrones se muestran en la Figura 4.13 y en ellos, se asume que el campo nulo presente en el límite exterior de la distribución del campo se cuenta como un nodo, de tal forma que  $n \geq 1$ ; por otro lado, para los nodos azimutales,  $m \geq 0$ . En consecuencia, el modo de más bajo orden,  $HE_{11}$ , consiste de dos modos LP<sub>01</sub> con polarizaciones perpendiculares uno con respecto al otro. En la Figura 4.14 se muestran las constantes de propagación de estos modos, en función del número- $V$  (comparemos esta gráfica con las soluciones exactas de la Figura 4.12).

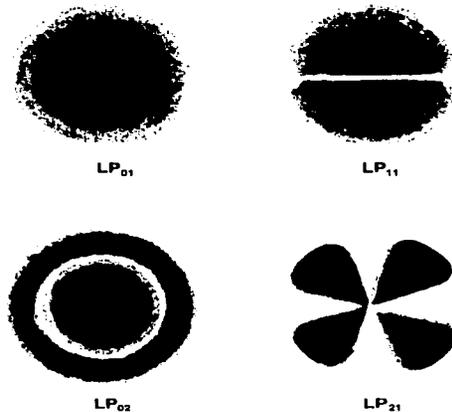


Figura 4.13 Patrones de irradiancia para algunos de los modos de bajo orden, linealmente polarizados.

Cuando el número- $V$  es mayor a 2,405 (que es el valor al cual ocurre el primer cero de la función Bessel de orden cero), el siguiente modo linealmente polarizado,  $LP_{11}$ , puede ser soportado por la fibra, de tal forma que tanto éste como el modo  $LP_{01}$  se propagarán. Para una fibra con un número- $V$  de 3,832 (correspondiente al primer cero de la función Bessel de primer orden), otros dos modos linealmente polarizados se pueden propagar: el  $LP_{21}$  y el  $LP_{02}$ .

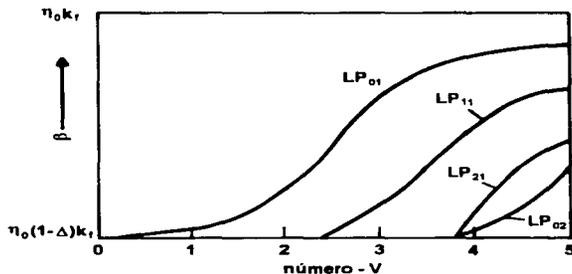


Figura 4.14 Modos linealmente polarizados de bajo orden en una fibra óptica.

#### 4.4 HACES BESSEL

Cuando se están buscando ondas que asemejen haces, es natural examinar la posibilidad de la existencia de ondas con frentes de onda planos pero con distribuciones de intensidad no uniformes, en el plano transversal. Consideremos una onda con la siguiente amplitud compleja:

$$U(r) = A(x, y)e^{-j\beta z} \quad \text{--- (4.15)}$$

Para que esta onda satisfaga la ecuación de Helmholtz,  $\nabla^2 U + k^2 U = 0$ ,  $A(x, y)$  debe satisfacer la siguiente expresión:

$$\nabla_T^2 A + k_T^2 A = 0 \quad \text{--- (4.16)}$$

donde

$$k_T^2 + \beta^2 = k^2 \quad \text{--- (4.17)}$$

y

$$\nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{--- (4.18)}$$

es el operador Laplaciano transversal. La ecuación 4.16, conocida como la ecuación de Helmholtz bidimensional, puede ser resuelta utilizando el método de separación de variables. Usando coordenadas polares ( $x = \rho \cos \phi$ ,  $y = \rho \sin \phi$ ), el resultado es:

$$A(x, y) = A_m J_m(k_T \rho) e^{jm\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \text{--- (4.19)}$$

donde  $J_m(\cdot)$  es la función Bessel de primer género y  $m$ -ésimo orden y  $A_m$  es una constante. Para  $m=0$ , la onda tiene la siguiente amplitud compleja:

$$U(r) = A_0 J_0(k_T \rho) e^{-j\beta z} \quad \text{--- (4.20)}$$

y por lo tanto, tiene frentes de onda planos, por lo que las normales al frente de onda (rayos), son todas paralelas al eje  $z$ . La distribución de intensidad,  $I(\rho, \phi, z) = |A_0|^2 J_0^2(k_T \rho)$ , es circularmente simétrica, varía con  $\rho$  como se muestra en la Figura 4.15 y es independiente de  $z$ ; de tal forma que no hay dispersión de la potencia óptica. Esta onda es llamada **haz Bessel**.

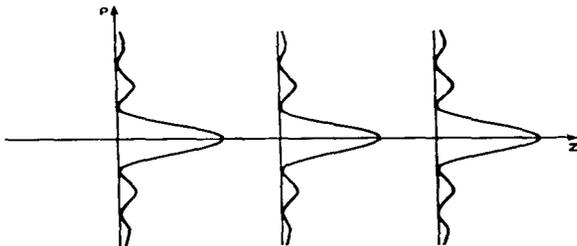


Figura 4.15 La distribución de intensidad del haz Bessel, en el plano transversal, es independiente de  $z$ ; es decir, el haz no diverge.

En base a lo anterior, resulta de gran interés el comparar el haz Bessel con el haz Gaussiano. Mientras que la amplitud compleja del haz Bessel es una solución exacta de la ecuación de Helmholtz, la amplitud compleja del haz Gaussiano es solamente una solución aproximada; sin embargo, su envolvente compleja sí es una solución exacta de la ecuación paraxial de Helmholtz. La distribución de intensidad de estos dos haces, se compara en la Figura 4.16 y se puede apreciar que el comportamiento asintótico de estas distribuciones, en el límite para grandes distancias radiales, es significativamente distinto. Por otra parte, mientras que la intensidad del haz Gaussiano decrece exponencialmente, en proporción a  $\exp[-2\rho^2/W^2(z)]$ , la intensidad del haz Bessel es proporcional a  $J_0^2(k_T \rho) = (2/\pi k_T \rho) \cos^2(k_T \rho - \pi/4)$ , que es una función oscilatoria con una magnitud que decae lentamente.

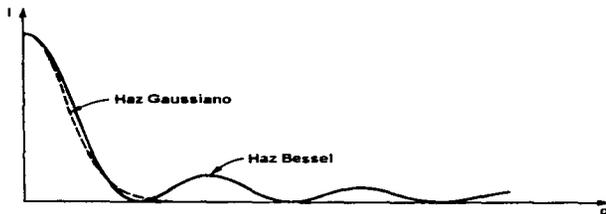


Figura 4.16 Comparación de la distribución radial de intensidad de un haz Gaussiano y un haz Bessel. Los parámetros se seleccionaron de tal forma que las intensidades pico y el ancho en  $1/e^2$  sean idénticos en ambos casos.

## 4.5 ONDAS GUIADAS EN LA FIBRA ÓPTICA

En esta sección, examinaremos brevemente la propagación de la luz monocromática en las fibras de índice escalonado, utilizando la teoría electromagnética.

### 4.5.1 DISTRIBUCIONES ESPACIALES

Cada una de las componentes de los campos eléctrico y magnético, deben satisfacer la ecuación de Helmholtz,  $\nabla^2 U + n^2 k_0^2 U = 0$ , donde  $n = n_N$  en el núcleo ( $r < a$ ),  $n = n_R$  en el revestimiento ( $r > a$ ) y  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ . Para nuestro análisis, asumiremos que el radio  $b$  del revestimiento, es lo suficientemente grande como para ser considerado infinito, sin que esto cause dificultades, cuando examinemos la luz guiada en el núcleo y cerca de la interfase núcleo-revestimiento. En un sistema de coordenadas cilíndricas (ver Figura 4.17), la ecuación de Helmholtz es:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \eta^2 k_0^2 U = 0 \quad \text{--- (4.21)}$$

donde la amplitud compleja  $U = U(r, \phi, z)$ , representa cualquiera de las componentes Cartesianas de los campos eléctrico o magnético, o las componentes axiales  $E_z$  y  $H_z$  en coordenadas cilíndricas.

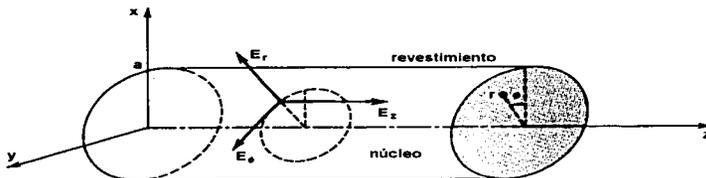


Figura 4.17 Sistema de coordenadas cilíndricas.

Nuestro interés está, en las soluciones que toman la forma de ondas viajando en la dirección  $z$  con una constante de propagación  $\beta$ , de tal forma que la dependencia en  $z$  de  $U$  es de la forma  $e^{j\beta z}$ . Dado que  $U$  debe ser una función periódica del ángulo  $\phi$ , con período  $2\pi$ , asumiremos que la dependencia en  $\phi$  es armónica,  $e^{jl\phi}$ , donde  $l$  es un entero. Substituyendo la siguiente expresión:

$$U(r, \phi, z) = u(r)e^{-jl\phi} e^{-j\beta z}, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \text{--- (4.22)}$$

en la ecuación 4.21, obtenemos una ecuación diferencial ordinaria para  $u(r)$ :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left( \eta^2 k_0^2 - \beta^2 - \frac{l^2}{r^2} \right) u = 0 \quad \text{--- (4.23)}$$

Ahora, se establece que la onda será guiada por la fibra, si la constante de propagación es menor que el número de onda en el núcleo ( $\beta < \eta_N k_0$ ) y mayor que el número de onda en el revestimiento ( $\beta > \eta_M k_0$ ). Por lo tanto, es conveniente definir lo siguiente:

$$k_T^2 = \eta_N^2 k_0^2 - \beta^2 \quad \text{--- (4.24)}$$

y

$$\gamma^2 = \beta^2 - \eta_M^2 k_0^2 \quad \text{--- (4.25)}$$

de tal forma que para las ondas guiadas,  $k_T^2$  y  $\gamma^2$  son positivas y  $k_T$  y  $\gamma$  son reales. En consecuencia, la ecuación 4.23 puede ser escrita para el núcleo y para el revestimiento por separado:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left( k_T^2 - \frac{l^2}{r^2} \right) u = 0, \quad r < a \text{ (núcleo)} \quad \text{--- (4.26)}$$

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \left( \gamma^2 + \frac{l^2}{r^2} \right) u = 0, \quad r > a \text{ (revestimiento)} \quad \text{--- (4.27)}$$

Las dos ecuaciones anteriores, son ecuaciones diferenciales cuyas soluciones son la familia de funciones Bessel. Excluyendo las funciones que se aproximan a  $\infty$ , en  $r=0$  en el núcleo ó en  $r \rightarrow \infty$  en el revestimiento, obtenemos las soluciones confinadas o guiadas:

$$u(r) \propto \begin{cases} J_l(k_T r), & r < a \text{ (núcleo)} \\ K_l(\gamma r), & r > a \text{ (revestimiento)} \end{cases} \quad \text{--- (4.28)}$$

donde  $J_l(x)$  es la función Bessel de primer género y orden  $l$  y  $K_l(x)$  es la función Bessel modificada de segundo género y orden  $l$ . La función  $J_l(x)$ , oscila como las funciones seno ó coseno, pero con una amplitud decreciente.

En el límite, cuando  $x \gg 1$ :

$$J_l(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[ x - \left( l + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right], \quad x \gg 1 \quad \text{--- (4.29)}$$

En el mismo límite,  $K_l(x)$  decrece a una tasa exponencial, conforme  $x$  se incrementa:

$$K_l(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left( 1 + \frac{4l^2 - 1}{8x} \right) \exp(-x), \quad x \gg 1 \quad \text{--- (4.30)}$$

En la Figura 4.18, se muestran dos ejemplos de la distribución radial  $u(r)$ . Los parámetros  $k_T$  y  $\gamma$ , determinan la tasa de cambio de  $u(r)$  en el núcleo y en el revestimiento, respectivamente. Un valor grande de  $k_T$ , significará una mayor oscilación de la distribución radial en el núcleo; mientras que un valor grande de  $\gamma$ , significa un decaimiento más rápido y una menor penetración de la onda hacia el revestimiento.

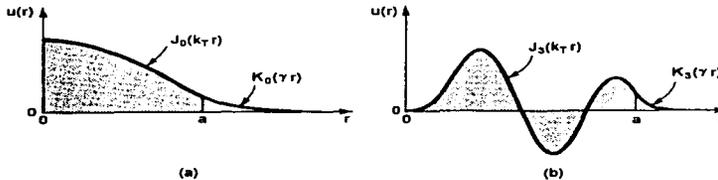


Figura 4.18 Ejemplos de la distribución radial  $u(r)$ , dados por la ecuación 4.28 para (a)  $l=0$  y (b)  $l=3$ . Las áreas sombreadas representan el núcleo de la fibra y las áreas no sombreadas representan el revestimiento. Los parámetros  $k_T$ ,  $\gamma$  y las dos constantes de proporcionalidad en la ecuación 4.28, han sido seleccionados de tal forma que  $u(r)$  es continua y tiene una derivada continua en  $r=a$ . Valores más grandes para  $k_T$  y  $\gamma$ , conducen a un mayor número de oscilaciones en  $u(r)$ .

Como puede observarse de las ecuaciones 4.24 y 4.25, la suma de los cuadrados de  $k_T$  y  $\gamma$  es una constante:

$$k_T^2 + \gamma^2 = (\eta_N^2 - \eta_K^2) k_0^2 = NA^2 \cdot k_0^2 \quad \text{--- (4.31)}$$

de tal forma que, cuando  $k_T$  se incrementa,  $\gamma$  decrece y el campo penetra más profundamente en el revestimiento. Conforme  $k_T$  excede el valor de  $NA \cdot k_0$ ,  $\gamma$  se vuelve imaginaria y la onda deja de estar confinada en el núcleo.

---

El análisis anterior nos permite entender un poco mejor, las características del modo que se propagará por una fibra óptica, lo cual es muy importante para el desarrollo de este trabajo puesto que éste es el modo al que hay que acoplar el haz emitido por el diodo láser. Sin embargo, la conclusión fundamental, es la que se refiere al hecho de que efectivamente, el diámetro del modo guiado es mayor que el diámetro del núcleo de la fibra. Esto implica que el diámetro del haz del láser, se deberá adecuar no al diámetro del núcleo, sino al diámetro del modo que será propagado por la fibra monomodo ( $l=1$ ).

#### 4.5.2 EL PARÁMETRO $V$

Para retomar el concepto del número- $V$ , desde el punto de vista de la teoría electromagnética, es conveniente normalizar  $k_T$  y  $\gamma$ , definiendo las siguientes expresiones:

$$X = k_T a, \quad Y = \gamma a \quad \text{--- (4.32)}$$

En términos de la ecuación 4.31, tenemos que:

$$X^2 + Y^2 = V^2 \quad \text{--- (4.33)}$$

donde  $V = NA \cdot k_0 a$ , por lo que:

$$V = 2\pi \frac{a}{\lambda_0} NA \quad \text{--- (4.34)}$$

Como vemos en las secciones anteriores,  $V$  es un parámetro muy importante ya que gobierna el número de modos de la fibra y sus constantes de propagación. Es importante recordar que para que una onda sea guiada,  $X$  debe ser menor que  $V$ .

### 4.6 GENERALIDADES SOBRE EL ACOPLAMIENTO DE FUENTES LÁSER A FIBRAS ÓPTICAS MONOMODO

#### 4.6.1 APROXIMACIÓN GAUSSIANA

En guías de onda, en las que el diámetro del núcleo es extremadamente grande en comparación con la longitud de onda de la luz, el modo de menor orden presenta un patrón de irradiancia Gaussiano. Es decir, la irradiancia como función de la distancia radial desde el eje del haz, tiene la siguiente forma:

$$I(r) = I(0)e^{-(r/r_0)^2} \quad \text{--- (4.35)}$$

donde  $I(0)$  es la irradiancia en el centro del haz y  $r_0$  es una medida del radio del haz, el radio en el que la irradiancia es  $1/e^2$  del valor al centro del haz. La Figura 4.19 muestra la irradiancia de un haz Gaussiano.

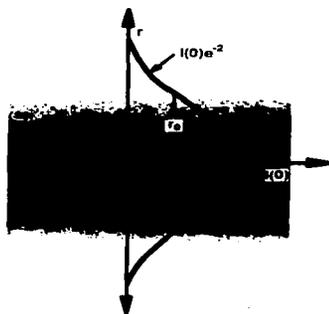


Figura 4.19 Irradiancia de un haz Gaussiano.

El modo  $HE_{11}$  de una fibra, se asemeja mucho a un modo Gaussiano cuando la longitud de onda de la luz está cerca de la longitud de onda de corte. La Figura 4.20, nos muestra el perfil del modo fundamental  $HE_{11}$ , cerca del corte del siguiente modo de orden superior (es decir, cuando  $V$  es ligeramente menor a 2,405), en función de  $r/a$ ; donde  $r$  es la posición radial y  $a$  es el radio del núcleo.

Mientras que la línea negra de esta figura, representa la distribución real del modo, la línea gris es una Gaussiana. Las dos curvas, son realmente muy similares y la solución exacta cerca de la longitud de onda de corte, generalmente es aproximada por una Gaussiana.

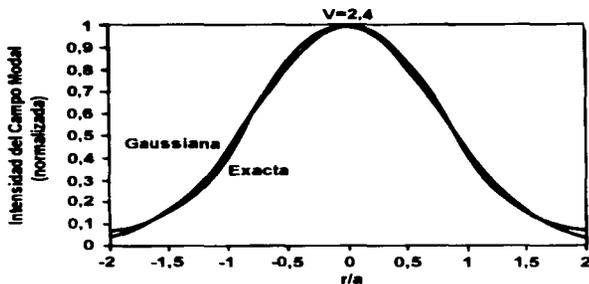


Figura 4.20 Comparación entre la distribución real de intensidad del campo modal y su aproximación Gaussiana, cerca de la longitud de onda de corte ( $V=2,4$ ).

La Figura 4.21, muestra la distribución modal real junto con la aproximación Gaussiana, para una longitud de onda mayor, alejada del corte. Se puede observar, que la aproximación Gaussiana no es tan buena conforme nos alejamos de la longitud de onda de corte. Sin embargo, la distribución cualitativa de la curva para la solución exacta, no está muy alejada de la Gaussiana.

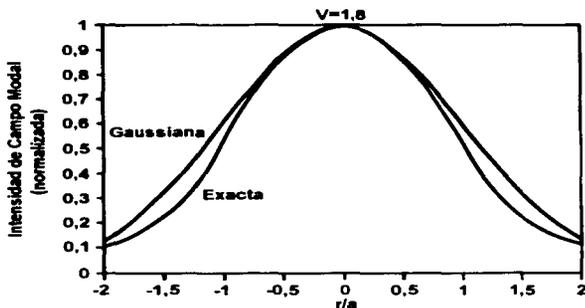


Figura 4.21 Comparación entre la distribución exacta del campo modal y su aproximación Gaussiana, lejos de la longitud de onda de corte ( $V=1,8$ ).

### 4.6.2 ACOPLAMIENTO A UNA FIBRA MONOMODO

El proceso de acoplamiento de luz a una fibra multimodo, es relativamente sencillo; sin embargo, maximizar el acoplamiento a una fibra monomodo es una tarea mucho más difícil. Como ya hemos mencionado, además de requerirse un alineamiento de alta exactitud y repetibilidad, entre la fibra y el haz incidente, es necesario igualar la distribución del campo electromagnético incidente con el del modo que será propagado por la fibra. El perfil modal del modo  $HE_{11}$  de una fibra monomodo, puede ser aproximado por una distribución Gaussiana con un radio espacial en  $1/e^2$ , dado por la siguiente expresión:

$$w_0 = a \left( 0,65 + \frac{1,619}{V^{1,5}} + \frac{2,879}{V^6} \right) \quad \text{--- (4.36)}$$

donde  $a$  y  $V$  son, respectivamente, el radio del núcleo y el parámetro característico de la fibra. Por ejemplo, cuando  $V=2,405$ , el tamaño de la mancha Gaussiana es aproximadamente 10% mayor que el diámetro del núcleo; por lo tanto, en este caso, la luz incidente debe ser enfocada a un tamaño de mancha que sea 1,1 veces el diámetro del núcleo de la fibra en su plano de entrada. La Figura 4.22, nos muestra una gráfica del radio normalizado de la distribución Gaussiana en función del número- $V$ . Se puede observar que, para una fibra de radio dado, conforme  $V$  se hace pequeño (al incrementarse  $\lambda$ ) el tamaño de mancha se incrementa, ya que cuando la longitud de onda crece, el campo electromagnético del modo está menos confinado dentro de la guía de onda. Por esta razón, las fibras monomodo son diseñadas de tal forma que la longitud de onda de corte, no esté muy alejada de la longitud de onda de la luz que se transmitirá a través de la fibra. Típicamente, el valor de  $\lambda_c$  será alrededor del 80-90% de la longitud de onda de diseño de la fibra.

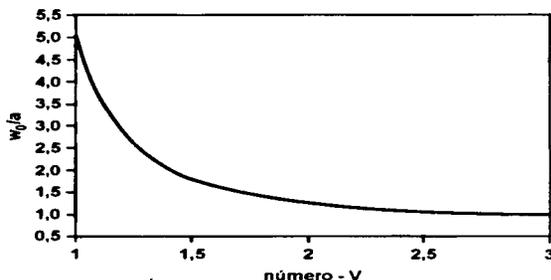


Figura 4.22 Radio del campo modal en función del número- $V$ .

---

En el desarrollo del trabajo, emplearemos la ecuación 4.36 únicamente para efectos de comparación con el valor proporcionado por el fabricante de la fibra, ya que ésta es una ecuación ajustada a una curva obtenida experimentalmente. Por el contrario, el dato proporcionado por el fabricante, es un promedio de las mediciones efectuadas a los lotes de fibra óptica de las mismas características y este es el valor que utilizaremos en el proceso de simulación.

---

**CAPÍTULO 5**

**FÍSICA DE LOS DISPOSITIVOS  
SEMICONDUCTORES**

---

---

## FÍSICA DE LOS DISPOSITIVOS SEMICONDUCTORES

En este capítulo, se hará una revisión de las propiedades atómicas básicas de la materia, que conducen al concepto de los niveles discretos de energía electrónica y posteriormente, se explicará como en un cristal, estos niveles de energía están distribuidos en bandas de energía. Esta estructura de bandas, nos permitirá distinguir entre un material aislante, un semiconductor y un metal, sentando las bases para poder comprender el funcionamiento de los diodos láser (Capítulo 6).

### 5.1 PARTÍCULAS CARGADAS

La carga, o cantidad de electricidad negativa y la masa del electrón se han determinado en  $1,6 \times 10^{-19}$  C (coulomb) y  $9,11 \times 10^{-31}$  kg, respectivamente; con estos datos, es posible obtener una idea del número de electrones por segundo, que representan una corriente de un orden de magnitud usual. Por ejemplo, ya que la carga del electrón es de  $1,6 \times 10^{-19}$  C, el número de electrones por coulomb será el recíproco de este valor, o aproximadamente  $6 \times 10^{18}$ . Aún más, considerando que una corriente de 1 A (ampere) es el flujo de 1 C/s, por lo tanto una corriente de solo 1 pA (1 pico-ampere ó  $10^{-12}$  A) representa el movimiento de aproximadamente 6 millones de electrones por segundo. No obstante, una corriente de 1 pA es tan pequeña, que se puede experimentar una considerable dificultad al intentar medirla.

La carga de un ión positivo, es un múltiplo entero de la carga del electrón, aunque es del signo opuesto. Para el caso de partículas ionizadas sencillas, la carga es igual a la del electrón y en el caso de partículas ionizadas dobles, la carga iónica es el doble de la del electrón.

La masa de un átomo, se expresa como un número que está basado en la selección del peso atómico del oxígeno, igual a 16. La masa de un átomo hipotético de peso atómico unitario es, por esta definición, un dieciseisavo de la masa del oxígeno monoatómico y ha sido calculada como  $1,66 \times 10^{-27}$  kg. Por lo tanto, para calcular la masa en kilogramos de cualquier átomo, solamente es necesario multiplicar el peso atómico del átomo por  $1,66 \times 10^{-27}$  kg. Por otro lado, el radio del electrón se ha estimado en  $10^{-15}$  m y el de un átomo como  $10^{-10}$  m. Estos valores son tan pequeños, que para efectos prácticos todas las cargas se consideran como masas puntuales.

En un cristal semiconductor como el silicio, dos electrones son compartidos por cada par de "vecinos" iónicos y este tipo de configuración se denomina **enlace covalente**. Bajo ciertas circunstancias, un electrón puede perderse de esta estructura dejando un **hueco** en el enlace; estas vacantes en los enlaces covalentes pueden moverse de un ión a otro en el cristal, constituyendo de esta forma una corriente equivalente de aquella resultante del movimiento de cargas positivas libres. En consecuencia, la magnitud de la carga asociada con el hueco es la de un electrón libre. Esta breve introducción al concepto del hueco como un portador de carga efectiva, será desarrollada con detalle más adelante en este capítulo.

---

## 5.2 INTENSIDAD DE CAMPO, POTENCIAL Y ENERGÍA

Por definición, la fuerza  $f$  (newtons) sobre una carga positiva unitaria en un campo eléctrico, es la intensidad de campo eléctrico  $\epsilon$  en ese punto. La segunda ley de Newton determina el movimiento de una partícula de carga  $q$  (coulombs) y masa  $m$  (kilogramos), moviéndose con una velocidad  $v$  (metros por segundo) en un campo  $\epsilon$  (volts por metro):

$$f = q\epsilon = m \frac{dv}{dt} \quad \text{--- (5.1)}$$

### 5.2.1 POTENCIAL

Por definición, el potencial  $V$  (volts) del punto  $B$  con respecto al punto  $A$ , es el trabajo hecho en contra del campo para llevar una carga positiva unitaria desde  $A$  hasta  $B$ ; esta definición es válida para un campo tridimensional. Para una situación unidimensional, con  $A$  en  $x_0$  y  $B$  a una distancia arbitraria  $x$ , se cumple que:

$$V = -\int_{x_0}^x \epsilon \, dx \quad \text{--- (5.2)}$$

donde ahora,  $\epsilon$  representa la componente  $X$  del campo. Diferenciando la ecuación 5.2, obtenemos:

$$\epsilon = -\frac{dV}{dx} \quad \text{--- (5.3)}$$

El signo negativo, muestra que el campo eléctrico es dirigido de la región de mayor potencial a la región de menor potencial, por lo que en el caso de tres dimensiones, el campo eléctrico será igual al gradiente negativo del potencial.

Por definición, la energía potencial  $U$  (joules), es igual al potencial multiplicado por la carga  $q$  bajo consideración; es decir:

$$U = qV \quad \text{--- (5.4)}$$

Si la carga considerada es un electrón,  $q$  es reemplazada por  $-q$  (donde  $q$  es la magnitud de la carga electrónica) y  $U$  tiene la misma forma que  $V$  pero invertida.

La ley de la conservación de la energía, establece que la energía total  $W$ , que es igual a la suma de la energía potencial  $U$  y la energía cinética  $\frac{1}{2}mv^2$ , permanece constante. Por lo tanto, en cualquier punto en el espacio:

$$W = U + \frac{1}{2}mv^2 = \text{constante} \quad \text{--- (5.5)}$$

Como una ilustración de esta ley, considérense dos electrodos paralelos (**A** y **B** de la figura 5.1a) separados una distancia  $d$ , con **B** en un potencial negativo,  $V_d$ , con respecto a **A** y un electrón que deja la superficie de **A** con una velocidad  $v_0$ , en dirección hacia **B**. En este caso, sería interesante determinar la velocidad  $v$  que alcanzará el electrón si llega a **B**.

De la definición dada por la ecuación 5.2, es claro que solamente tienen significado las diferencias de potencial, por lo que de forma arbitraria aterrizaremos el electrodo **A**; es decir, consideremos que se encuentra a un potencial cero. Entonces, el potencial en **B** es  $V = -V_d$  y la energía potencial es  $U = -qV = qV_d$ . Poniendo en forma de ecuación la energía total en **A**, con respecto a la de **B**, obtenemos que:

$$W = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + qV_d \quad \text{--- (5.6)}$$

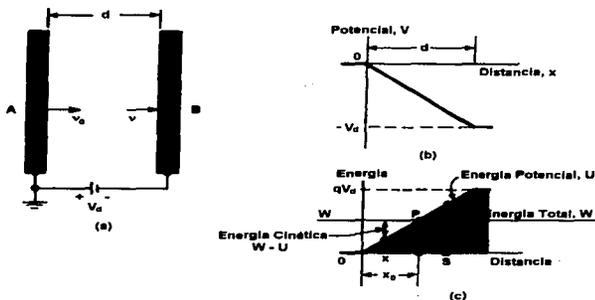


Figura 5.1 (a) Un electrón deja el electrodo A con una velocidad inicial  $v_0$  y se mueve hacia el plato B en un campo retardador. (b) El potencial. (c) La barrera de energía potencial entre los electrodos.

La ecuación 5.6, indica que  $v$  debe ser menor a  $v_0$ , lo cual obviamente es correcto ya que el electrón se está moviendo en un campo repelente. Nótese que la velocidad final  $v$ , alcanzada por el electrón en este sistema conservativo, es independiente de la forma de variación de la distribución del campo entre los electrodos y depende únicamente de la magnitud de la diferencia de potencial  $V_d$ . Por otro lado, si el electrón va a llegar al electrodo **B**, su velocidad inicial debe ser lo suficientemente grande de tal forma que  $\frac{1}{2}mv_0^2 > qV_d$ , ya que de lo contrario, la ecuación 5.6 conduciría al resultado imposible de que  $v$  es imaginaria.

---

### 5.2.2 EL CONCEPTO DE BARRERA DE ENERGÍA POTENCIAL

Para la configuración de la Figura 5.1(a), en donde los electrodos son mayores en comparación con la distancia de separación  $d$ , es posible dibujar (Figura 5.1b) una gráfica lineal del potencial  $V$ , contra la distancia  $x$  en el espacio interelectrodos y la correspondiente energía potencial  $U$ , versus  $x$ , se indica en la figura 5.1(c). Dado que el potencial es la energía potencial por unidad de carga, la curva (c) se obtiene de la curva (b), al multiplicar cada ordenada por la carga en el electrón (número negativo) y como la energía total,  $W$ , del electrón permanece constante, es representada por una línea recta. La energía cinética en cualquier distancia  $x$ , iguala la diferencia entre la energía total  $W$  y la energía potencial,  $U$ , en ese punto. Esta diferencia es mayor en  $O$ , indicando que la energía cinética es máxima cuando el electrón deja el electrodo  $A$ , mientras que en el punto  $P$ , esta diferencia es cero, lo que significa que no existe energía cinética y en ese punto, la partícula se encuentra en reposo. Por otro lado,  $x_0$  es la máxima distancia que el electrón puede viajar desde  $A$  y en el punto  $P$  (donde  $x=x_0$ ), llega momentáneamente al reposo para revertir su movimiento y regresar a  $A$ .

Ahora, consideremos el punto  $S$ , que se encuentra a una distancia mayor a  $x_0$  desde el electrodo  $A$ . En este caso, la energía total  $QS$  es menor que la energía potencial  $RS$ , de manera que la diferencia, que representa la energía cinética, es negativa. Por supuesto, ésta es una condición físicamente imposible, ya que una energía cinética negativa ( $\frac{1}{2}mv^2 < 0$ ) implica una velocidad imaginaria.

El análisis anterior, conduce a la muy importante conclusión de que la región sombreada de la Figura 5.1(c) nunca podrá ser penetrada por el electrón. En consecuencia, en el punto  $P$ , la partícula actúa como si hubiera chocado con una pared o barrera y la dirección de su movimiento se hubiera alterado. Las **barreras de energía potencial** de este tipo, juegan un papel muy importante en el funcionamiento de los dispositivos semiconductores, tal y como se verá en el siguiente capítulo.

Es muy importante enfatizar, que se utilizan los términos "colisión" o "rebote" desde una "barrera" de potencial de forma descriptiva, ya que realmente no existe un encuentro entre dos cuerpos materiales.

### 5.3 LA UNIDAD eV DE ENERGÍA

El joule ( $J$ ) es una unidad de energía ampliamente utilizada, sin embargo, en algunos problemas de ingeniería relacionados con potencia, resulta muy pequeña y se debe introducir un factor de  $10^3$  o  $10^6$  para convertirla de watts ( $1 W = 1 J/s$ ) a kilowatts o megawatts, respectivamente. No obstante, en algunos otros problemas, el joule resulta una unidad muy grande y se introduce un factor de  $10^{-7}$  para convertirla a ergs. Para analizar las energías involucradas en los dispositivos electrónicos, aún el erg resulta impráctico, ya que sigue siendo muy grande; lo anterior, no se debe malinterpretar en el sentido de que solamente se puedan obtener diminutas cantidades de energía de los dispositivos electrónicos. Es cierto que cada electrón posee una cantidad de energía muy pequeña, pero como mencionábamos en la primera sección de este capítulo, una enorme cantidad de electrones se encuentra involucrada en una corriente pequeña, de tal forma que se puede representar una potencia considerable.

Una unidad de trabajo o energía, llamada el **electrón volt (eV)**, se define de la siguiente forma:

$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J} \quad \text{--- (5.7)}$$

y por supuesto, cualquier tipo de energía, ya sea eléctrica, mecánica, térmica, etc., puede ser expresada en electrón volts.

El nombre electrón volt, surge del hecho de que si un electrón cae a través de un potencial de un volt, su energía cinética se incrementará con la disminución en la energía potencial, o por:

$$qV = (1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ V}) = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J} = 1 \text{ eV} \quad \text{--- (5.8)}$$

Sin embargo, como se mencionó anteriormente, la unidad electrón volt puede ser utilizada para cualquier tipo de energía y no está restringida a problemas que involucren electrones.

Una barrera de energía potencial de  $E$  (electrón volts), es equivalente a una "colina" de potencial de  $V$  (volts), si estas cantidades están relacionadas por:

$$qV = 1,6 \times 10^{-19} E \quad \text{--- (5.9)}$$

Nótese que  $V$  y  $E$  son numéricamente idénticos, pero dimensionalmente diferentes.

## 5.4 LA NATURALEZA DEL ÁTOMO

En 1911, *Rutherford* encontró que el átomo consiste de un núcleo de carga positiva, el cual contiene la mayor parte de la masa del átomo y rodeando este núcleo positivo, se encuentran los electrones cargados negativamente. Como una ilustración específica de este modelo atómico, consideremos el átomo de hidrógeno, el cual está constituido por un núcleo cargado positivamente (un protón) y un solo electrón. La carga en el protón, es positiva e igual en magnitud a la carga del electrón, por lo que el átomo en su conjunto es eléctricamente neutro. Dado que el protón porta casi toda la masa del átomo, permanece substancialmente inmóvil, mientras que el electrón se mueve alrededor de él en una órbita cerrada y la fuerza de atracción entre ambos, está regida por la Ley de Coulomb.

Asumamos por lo tanto, que la órbita del electrón es un círculo, donde el núcleo se supone fijo en el espacio y su radio se puede calcular en términos de la energía total,  $W$ , del electrón. La fuerza de atracción, entre el núcleo y el electrón del átomo de Hidrógeno es  $q^2/4\pi\epsilon_0 r^2$ , donde la carga electrónica  $q$  está expresada en coulombs, la separación  $r$  entre las dos partículas está en metros, la fuerza está en newtons y  $\epsilon_0$  es la permitividad del espacio libre.

---

Mediante la segunda ley del movimiento de Newton, ésta se debe igualar al producto de la masa electrónica  $m$ , en kilogramos y la aceleración  $v^2/r$  hacia el núcleo, donde  $v$  es la velocidad del núcleo en metros por segundo en su trayectoria circular. En consecuencia:

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \text{--- (5.10)}$$

Aún más, la energía potencial del electrón a una distancia  $r$  del núcleo, es  $-q^2/4\pi\epsilon_0 r$  y su energía cinética es  $\frac{1}{2}mv^2$ . Entonces, de acuerdo con la conservación de la energía:

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{--- (5.11)}$$

donde la energía está expresada en joules. Combinando esta expresión con la ecuación 5.10, tenemos que:

$$W = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad \text{--- (5.12)}$$

que nos proporciona la relación deseada entre el radio de la órbita y la energía del electrón y además, muestra que la energía total del electrón es siempre negativa. El signo negativo se da porque la energía potencial se ha escogido como cero, cuando  $r$  es infinita. Esta expresión también nos muestra que la energía del electrón se hace pequeña (es decir, más negativa), conforme éste se aproxime al núcleo.

El análisis anterior del átomo "planetario", se ha basado en el punto de vista de la mecánica clásica, sin embargo, en cumplimiento de las leyes del electromagnetismo, una carga acelerada debe radiar energía. Si la carga está realizando oscilaciones de una frecuencia  $f$ , la energía radiada también será de esta frecuencia y por lo tanto, se puede concluir que esta última, iguala la frecuencia con la que el electrón está rotando en su órbita circular.

No obstante lo anterior, existe una característica de esta esquematización que no corresponde con los resultados obtenidos experimentalmente, ya que si el electrón está radiando energía, su energía total debe decrecer proporcionalmente a ésta y también el radio  $r$  de la órbita debe disminuir, de acuerdo con la ecuación 5.12. Consecuentemente, conforme el átomo radia energía, el electrón se debe mover en órbitas cada vez más pequeñas y eventualmente caer al núcleo. Dado que la frecuencia de oscilación depende del tamaño de la órbita circular, la energía radiada sería de una frecuencia de variación gradual; sin embargo, esta conclusión es incompatible con las frecuencias claramente definidas de las líneas espectrales.

---

Esta dificultad fue resuelta por *Bohr* en 1913, al postular las siguientes leyes fundamentales:

- 1. El átomo, solamente puede poseer ciertas energías discretas. Mientras el electrón se encuentra en uno de los estados correspondientes a estas energías discretas, no emite radiación y se dice que se encuentra en un estado estacionario o no radiante.
- 2. En una transición desde un estado estacionario, correspondiente a una energía definida  $W_2$ , a otro estado estacionario con una energía asociada  $W_1$ , existirá radiación emitida. La frecuencia de esta energía radiante está dada por:

$$f = \frac{W_2 - W_1}{h} \quad \text{--- (5.13)}$$

donde  $h$  es la constante de *Planck* en joule-s, las energías están expresadas en joules y  $f$  está en ciclos/segundo ó Hz.

- 3. Un estado estacionario, está determinado por la condición de que en ese estado, el momento angular del electrón está cuantizado y debe ser un múltiplo entero de  $h/2\pi$ . Por lo tanto:

$$mvr = \frac{nh}{2\pi} \quad \text{--- (5.14)}$$

donde  $n$  es un entero.

Combinando las ecuaciones 5.10 y 5.14, podemos obtener los radios de los estados estacionarios y de la ecuación 5.12, se encuentra que el nivel de energía en joules de cada estado es:

$$W_n = -\frac{mq^4}{8h^2\epsilon_0^2} \frac{1}{n^2} \quad \text{--- (5.15)}$$

## 5.5 NIVELES ATÓMICOS DE ENERGÍA

Para cada valor entero de  $n$  en la ecuación 5.15, se puede dibujar una línea horizontal y estas líneas, se van acomodando verticalmente, en relación al valor numérico calculado de la ecuación 5.15. Una representación gráfica de este tipo es muy conveniente y se conoce como **diagrama de niveles de energía**, tal y como se muestra en la Figura 5.2 para el Hidrógeno.

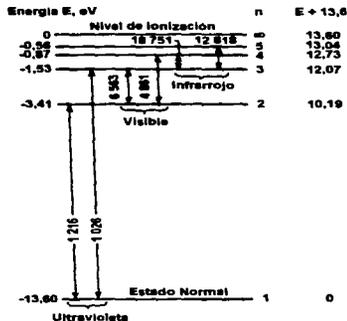


Figura 5.2 Los cinco niveles más bajos de energía, así como el nivel de ionización del Hidrógeno. Las líneas espectrales están en nm.

El número a la izquierda de cada línea, representa la energía de ese nivel en eV y el número inmediatamente a la derecha de cada una de ellas, es el valor de  $n$ . Teóricamente, un número infinito de niveles existen para cada átomo, pero solamente los primeros cinco y el nivel para  $n=\infty$  se indican en la Figura 5.2. En este caso, el eje horizontal no tiene ningún significado, pero extendiendo el uso de los diagramas de niveles de energía a los sólidos, el eje  $X$  se utilizaría para representar la separación entre los átomos dentro de un cristal (ver Figura 5.3), o la distancia dentro de un sólido. En esos casos, los niveles de energía no son constantes, sino funciones de  $x$ .

Es muy frecuente, expresar el valor de energía de los estados estacionarios en electrón volts,  $E$ , y no en joules,  $W$  y también es más usual, especificar la radiación emitida por su longitud de onda en nanómetros,  $\lambda$ , en lugar de su frecuencia en hertz,  $f$ . En estas unidades, la ecuación 5.13 puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$\lambda = \frac{1\,239,8}{E_2 - E_1} \quad \text{--- (5.16)}$$

Dado que solamente diferencias de energía se pueden introducir a esta expresión, el estado cero se puede seleccionar libremente, no obstante, es común seleccionar el nivel más bajo como el nivel cero. Una escala normalizada de este tipo, se indica a la extrema derecha de la Figura 5.2. El estado más bajo de energía, se denomina como nivel **normal** o de **tierra** y los otros estados estacionarios del átomo son llamados niveles **excitados**, **radiantes**, **críticos** o de **resonancia**.

Conforme se le proporciona al electrón más energía, éste se mueve hacia estados estacionarios que se encuentran más alejados del núcleo y cuando su energía es lo suficientemente grande, como para salirse completamente del campo de influencia del ión, se desprende de él. La energía requerida para que ocurra este proceso, es llamada **potencial de ionización** y se representa como el estado más alto en el diagrama de niveles de energía; 13,6 eV en el caso del Hidrógeno.

### 5.5.1 COLISIONES ENTRE ELECTRONES Y ÁTOMOS

De la sección anterior se puede observar, que es necesario encontrar alguna manera de suministrar energía al átomo, para que éste se excite o se ionice y una de las formas más importantes de realizar este suministro, es mediante el impacto de electrones. Supongamos que un electrón es acelerado por un potencial aplicado a un tubo de descarga; la energía adquirida del campo, puede ser entonces transferida a un átomo, cuando el electrón choca con él. Si el electrón de bombardeo, ha adquirido de la descarga más energía de la requerida para elevar al átomo desde su estado normal a un nivel particular de resonancia, la cantidad de energía excedente de la necesaria para la excitación, será retenida por el electrón incidente después de la colisión en forma de energía cinética.

Por otro lado, si el electrón de impacto posee una cantidad de energía al menos igual al potencial de ionización del gas, puede entregar esta energía a un electrón del átomo y removerlo por completo de éste. En consecuencia, tres partículas cargadas resultan de esta colisión ionizante: dos electrones y un ión positivo.

### 5.5.2 LA NATURALEZA FOTÓNICA DE LA LUZ

Asumamos que un átomo ha sido elevado de su estado base, a un nivel excitado por bombardeo de electrones. La vida media de un estado excitado, varía entre  $10^{-7}$  y  $10^{-10}$  s, donde el electrón excitado regresa a su estado previo después de este lapso de tiempo. En esta transición, el átomo debe perder una cantidad de energía igual a la diferencia en energía entre los dos estados que ha ocupado sucesivamente y esta energía se presenta en forma de radiación. De acuerdo con los postulados de *Bohr*, esta energía es emitida en forma de un fotón de luz, cuya frecuencia está dada por la ecuación 5.13 o la longitud de onda por la ecuación 5.16. El término **fotón**, denota una cantidad de energía radiante igual a la constante  $h$  veces la frecuencia. Esta naturaleza cuantizada de una onda electromagnética, fue introducida por primera vez en 1901 por *Max Planck*, con el objeto de verificar teóricamente la ecuación de radiación del cuerpo negro, la cual había sido obtenida experimentalmente.

Clásicamente, se creía que los átomos eran sistemas que emitían radiación continuamente en todas direcciones; sin embargo, de acuerdo con la teoría establecida en las subsecciones anteriores, esto no es cierto y la emisión de luz por un átomo es un proceso discontinuo. Esto es, el átomo radia solamente cuando realiza una transición de un cierto nivel de energía a un estado inferior y en esta transición, emite una cantidad definida de energía de una frecuencia particular, llamada un fotón  $hf$  de luz. Ciertamente, cuando observamos una descarga luminosa, esta naturaleza discontinua de la radiación no se puede apreciar, dada la enorme cantidad de átomos que están radiando energía y correspondientemente, por el inmenso número de fotones que son emitidos por unidad de tiempo.

---

### 5.5.3 LÍNEAS ESPECTRALES

Las flechas que aparecen en la Figura 5.2, representan seis posibles transiciones entre estados estacionarios y los números asociados, representan la longitud de onda de la radiación emitida. Por ejemplo, la línea ultravioleta a 1 216 nm, es radiada cuando el átomo de Hidrógeno cae desde su primer estado excitado,  $n=2$ , hasta su estado normal,  $n=1$ .

Otro método importante, llamado **fotoexcitación**, mediante el cual un átomo puede ser elevado hacia un estado excitado de energía, consiste en aplicar radiación de ciertas características. Un átomo puede absorber un fotón de frecuencia  $f$  y en consecuencia, moverse del nivel de energía  $W_1$ , al nivel de alta energía  $W_2$ , donde  $W_2=W_1+h f$ . Una característica extremadamente importante de la excitación por captura de fotones, es que el fotón no será absorbido, a menos que su energía corresponda exactamente a la diferencia de energía entre dos niveles estacionarios del átomo con el cual choca. Por ejemplo, si un átomo normal de Hidrógeno va a ser elevado a su primer estado excitado mediante radiación, la longitud de onda de ésta deberá ser igual a 1 216 nm (la cual se encuentra en la región ultravioleta del espectro).

Cuando un fotón es absorbido por un átomo, el átomo excitado puede regresar a su estado normal de un brinco, o lo puede hacer en varios pasos. Si el átomo cae en uno o más niveles de excitación, antes de alcanzar finalmente el estado normal, emitirá varios fotones y estos corresponderán a las diferencias de energía entre los niveles excitados sucesivos, por los cuales fue pasando el átomo. En consecuencia, ninguno de los fotones emitidos tendrá la frecuencia de la radiación absorbida; esta **fluorescencia** no puede ser explicada por la teoría clásica, pero se puede entender a través de los postulados de *Bohr*.

### 5.5.4 FOTOIONIZACIÓN

Si la frecuencia del fotón incidente es lo suficientemente alta, puede tener suficiente energía para ionizar el átomo, con lo que el fotón se desvanecerá con la aparición de un electrón y un ión positivo. Contrariamente al caso de la fotoexcitación, el fotón no necesita poseer la energía que corresponda exactamente a la energía de ionización del átomo; es decir, simplemente requiere poseer al menos esta cantidad de energía y en caso de que tenga una cantidad mayor, el exceso aparecerá como la energía cinética del electrón emitido y del ión positivo.

### 5.5.5 MECÁNICA DE ONDAS

Dado que un fotón es absorbido por un solo átomo, el fotón actúa como si estuviera concentrado en un volumen muy pequeño de espacio, en contradicción al concepto de una onda asociada con radiación. En 1924, *De Broglie* postuló que el carácter dual de onda y partícula no está limitado a la radiación, sino que también es exhibido por partículas como los electrones, átomos, o masas macroscópicas. Él postuló que una partícula de momento  $p=mv$ , tiene una longitud de onda,  $\lambda$ , asociada a ella de la siguiente forma:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad \text{--- (5.17)}$$

donde  $h$  es la constante de *Planck*. Podemos hacer uso de las propiedades ondulatorias de un electrón en movimiento, para establecer el postulado de *Bohr* respecto a que un estado estacionario, está determinado por la condición de que el momento angular debe ser un múltiplo entero de  $h/2\pi$ . Es razonable asumir que una órbita de radio  $r$ , corresponderá a un estado estacionario si contiene un patrón de onda estacionaria; en otras palabras, una órbita estable es aquella cuya circunferencia es exactamente igual a la longitud de onda electrónica  $\lambda$ , o a  $n\lambda$ , donde  $n$  es un entero pero no cero. En consecuencia:

$$2\pi r = n\lambda = \frac{nh}{mv} \quad \text{--- (5.18)}$$

donde podemos observar, que la ecuación anterior es idéntica a la condición de *Bohr* dada por la ecuación 5.14.

El científico *Schrödinger*, llevó la implicación de la naturaleza ondulatoria de la materia más lejos y desarrolló una ecuación de onda para describir el comportamiento del electrón en un campo potencial  $U(x, y, z)$ . La solución de esta ecuación diferencial es llamada la función de onda y determina la densidad de probabilidad para cada punto en el espacio, de encontrar un electrón con energía total  $W$ . Si la energía potencial,  $U = -q^2/4\pi\epsilon_0 r$ , para el electrón en el átomo de Hidrógeno es substituída en la ecuación de *Schrödinger*, se encuentra que una solución con significado físico solamente es posible, si  $W$  está dada precisamente por los niveles de energía de la ecuación 5.15, los cuales se obtuvieron de la esquematización atómica más simple hecha por *Bohr*.

## 5.6 ESTRUCTURA ELECTRÓNICA DE LOS ELEMENTOS

La solución de la ecuación de *Schrödinger* para el Hidrógeno, o cualquier átomo multielectrónico, requiere tres parámetros llamados **números cuánticos**. Estos están designados por  $n$ ,  $l$  y  $m_l$  y están restringidos a los siguientes valores enteros:

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

Para especificar por completo una función de onda, es necesario introducir un cuarto número cuántico. Este número cuántico del *spin*,  $m_s$ , solamente puede asumir dos valores,  $+\frac{1}{2}$  ó  $-\frac{1}{2}$ , correspondientes a la misma energía.

### 5.6.1 EL PRINCIPIO DE EXCLUSIÓN

La tabla periódica de los elementos químicos, puede ser explicada haciendo uso de la ley enunciada por Pauli en 1925 y en la que establece que dos electrones en un sistema electrónico, no pueden tener el mismo juego de cuatro números cuánticos. Este enunciado de que dos electrones no pueden ocupar el mismo estado cuántico, es conocido como el **Principio de Exclusión de Pauli**.

### 5.6.2 CAPAS ELECTRÓNICAS

Todos los electrones en un átomo, que tengan el mismo valor de  $n$ , se dice que pertenecen a la misma capa electrónica; estas últimas, están identificadas por las letras **K, L, M, N, ...**, correspondiendo a  $n=1, 2, 3, 4, \dots$ , respectivamente. A su vez, cada capa está dividida en subcapas, las cuales corresponden a los diferentes valores de  $l$  y están identificadas por **s, p, d, f, ...**, correspondiendo a  $l=0, 1, 2, 3, \dots$ , respectivamente. Tomando en cuenta el Principio de Exclusión, la distribución de electrones en un átomo, entre las capas y subcapas, se indica en la Tabla 5.1. Realmente se requieren siete capas para poder describir todos los elementos químicos, pero en dicha tabla solamente se indican las primeras cuatro.

Capa	K		L			M			N			
$n$	1	2	3		4		5					
$l$	0	0	1	1	2	2	0	1	2	3		
Subcapa	s	s	p	s	p	d	s	p	d	f		
$m_l$	0	0, $\pm 1$	0, $\pm 1$	0	0, $\pm 1$	0, $\pm 1, \pm 2$	0	0, $\pm 1$	0, $\pm 1, \pm 2$	0, ..., $\pm 3$		
Número de electrones	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14		
	2	8		18			32					

Tabla 5.1 Capas y subcapas de electrones.

Existen dos estados para  $n=1$ , correspondientes a  $l=0$ ,  $m_l=0$  y  $m_s=\pm 1/2$ , los cuales son llamados estados **1s**. Por otro lado, existen dos estados que corresponden a  $n=2$ ,  $l=0$ ,  $m_l=0$  y  $m_s=\pm 1/2$ , los cuales constituyen la subcapa **2s**. Adicionalmente, se tienen seis niveles de energía que corresponden a  $n=2$ ,  $l=1$ ,  $m_l=-1, 0$  ó  $+1$  y  $m_s=\pm 1/2$ , que se designan como la subcapa **2p**. De esta forma, tal y como se indica en la Tabla 5.1, el número total de electrones en la capa **L** es  $2+6=8$ . En forma similar, se puede verificar que una subcapa **d** contiene un máximo de 10 electrones, una subcapa **f** un máximo de 14 electrones, etc.

El número atómico **Z**, proporciona la cantidad de electrones que giran alrededor del núcleo y se utilizan superíndices para designar el número de electrones contenidos en una subcapa en particular. Tomemos como ejemplo el Sodio, **Na**, para el que  $Z=11$  y que tiene una configuración electrónica designada por  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$ ; nótese que este elemento tiene un solo electrón en la subcapa más exterior y en consecuencia, se dice que es monovalente. Esta misma propiedad, es característica de todos los metales alcalinos (**Li, Na, K, Rb** y **Cs**), lo que justifica el hecho de que todos estos elementos, que están en el mismo grupo de la Tabla Periódica, presenten propiedades químicas similares.

Los electrones de las capas internas, están fuertemente unidos al átomo y no pueden ser removidos fácilmente; esto es, los electrones que se encuentran más cerca del núcleo tienen la menor energía. También, los átomos para los que los electrones existen en capas cerradas, forman configuraciones muy estables; por ejemplo, los gases inertes *He*, *Ne*, *Ar*, *Kr* y *Xe*, presentan capas completamente llenas ó al menos, subcapas totalmente ocupadas.

El Carbono, el Silicio, el Germanio y el Estaño, presentan las configuraciones electrónicas que se muestran en la Tabla 5.2. Nótese que cada uno de estos elementos, tiene subcapas completamente llenas a excepción de la capa *p* más externa, la que contiene solamente dos de los seis posibles electrones. A pesar de esta similitud, el Carbono en forma cristalina (diamante) es un aislante, el Silicio y el Germanio sólidos son semiconductores y el Estaño es un metal.

Elemento	Número Atómico	Configuración
C	6	$1s^2 2s^2 2p^2$
Si	14	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$
Ge	32	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^2$
Sn	50	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^4 4d^{10} 5s^2 5p^2$

Table 5.2 Configuración electrónica de los elementos del Grupo IV A de la Tabla Periódica.

## 5.7 LA TEORÍA DE LAS BANDAS DE ENERGÍA EN LOS CRISTALES

Los Rayos-X y otros estudios, revelan que la mayoría de los metales y los semiconductores tienen una estructura cristalina. Un cristal consiste de un arreglo espacial de átomos o moléculas (más estrictamente iones), acomodados por repetición regular en tres dimensiones de alguna unidad estructural fundamental. Los niveles electrónicos de energía, que se mencionaron anteriormente para el caso de un solo átomo libre (como en un gas, donde los átomos están lo suficientemente apartados para que no se inflencien unos a otros), no aplican para el mismo átomo en un cristal. Esto se debe, a que el potencial que caracteriza a la estructura cristalina, es ahora una función periódica en el espacio cuyo valor en cualquier punto, es el resultado de las contribuciones de todos los átomos.

Cuando los átomos forman cristales, se observa que los niveles de energía de los electrones de la capa interna, no son afectados en forma apreciable debido a la presencia de los átomos circundantes. Sin embargo, los niveles de los electrones de la capa externa son alterados considerablemente, ya que estos electrones son compartidos por más de un átomo en el cristal. Los niveles de energía de los electrones exteriores, pueden ser determinados por medio de la mecánica cuántica y se encuentra que el acoplamiento entre los electrones de la capa externa de los átomos, resulta en una **banda** de estados de energía estrechamente espaciados, en lugar de los niveles de energía ampliamente espaciados del átomo aislado (Figura 5.3).

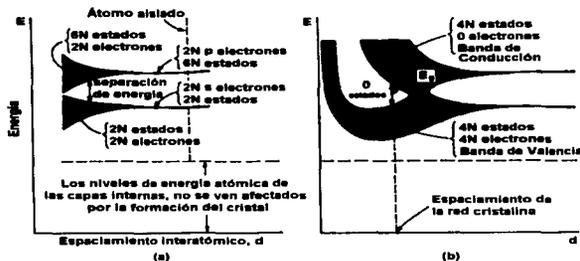


Figura 5.3 Ilustración de cómo los niveles de energía de átomos aislados, son separados en bandas de energía, cuando estos átomos son colocados muy cerca uno del otro para formar un cristal.

Considérese un cristal, consistiendo de  $N$  átomos de alguno de los elementos de la tabla 5.2 e imaginemos que es posible variar el espaciado entre los átomos, sin alterar el tipo de la estructura fundamental del cristal. Si los átomos están tan alejados, que la interacción entre ellos es despreciable, los niveles de energía coincidirán con los del átomo aislado. Las dos subcapas externas para cada elemento de la tabla, contienen dos electrones  $s$  y dos electrones  $p$ . Por lo tanto, si ignoramos los niveles de la capa interna, entonces, tal y como se indica en el extremo derecho de la Figura 5.3(a), existen  $2N$  electrones llenando completamente los  $2N$  posibles niveles  $s$ , todos en la misma energía. Dado que la subcapa atómica  $p$ , tiene seis posibles estados, nuestro cristal imaginario de átomos ampliamente espaciados tiene  $2N$  electrones, que cubren solamente una tercera parte de los  $6N$  posibles estados  $p$ , todos en el mismo nivel.

Si ahora decrementamos el espacio interatómico de nuestro cristal imaginario (moviéndonos de derecha a izquierda en la Figura 5.3a), un átomo ejercerá una fuerza eléctrica sobre sus vecinos. Debido a este acoplamiento entre átomos, las funciones de la onda atómica se traslapan y el cristal se convierte en un sistema electrónico que debe obedecer el Principio de Exclusión de Pauli. De aquí, que los  $2N$  estados  $s$  degenerados, deben dispersarse en energía. La separación entre niveles es pequeña, pero ya que  $N$  es muy grande ( $\sim 10^{23} \text{ cm}^{-3}$ ), la dispersión total entre la mínima y la máxima energías puede ser de varios electrón-volts, si la distancia interatómica se decrecienta lo suficiente. Este gran número de niveles de energía discretos, pero estrechamente espaciados, es llamado una **banda de energía** y se indica esquemáticamente por la región sombreada inferior de la Figura 5.3(a). Los estados  $2N$  en esta banda, están completamente llenos con  $2N$  electrones y similarmente, la región sombreada superior en la misma figura, es una banda de  $6N$  estados que tiene solamente  $2N$  de sus niveles, ocupados por electrones.

Nótese que existe un espacio de energía (**banda prohibida**) entre las dos bandas mencionadas anteriormente, el cual decrece conforme el espaciado atómico disminuye y para distancias lo suficientemente pequeñas (ver Figura 5.3b), estas bandas se traslapan.

Bajo estas circunstancias, los  $6N$  estados superiores se mezclan con los  $2N$  estados inferiores, dando un total de  $8N$  niveles, la mitad de los cuales están ocupados por los  $2N+2N=4N$  electrones disponibles. A este nivel de espaciamiento, cada átomo ha cedido cuatro electrones a la banda, por lo que no podemos seguir diciendo que estos últimos orbiten en las subcapas  $s$  ó  $p$  de un átomo aislado, sino que más bien pertenecen al cristal como un todo. En este sentido, los elementos mostrados en la Tabla 5.2 son tetravalentes, ya que cada uno de ellos contribuye con cuatro electrones al cristal. La banda que ocupan estos electrones es llamada **banda de valencia**.

Si el espaciamiento entre los átomos, es decrementado por debajo de la distancia a la que las bandas se traslapan, la interacción entre los átomos se vuelve realmente grande. La estructura de bandas de energía depende entonces de la orientación de los átomos relativa a uno y otro en espacio (la estructura del cristal) y del número atómico, que determina la constitución eléctrica de cada átomo. Las soluciones para la ecuación de Schrödinger son complicadas y han sido obtenidas aproximadamente, para relativamente pocos cristales; estas soluciones nos conducen a esperar un diagrama de bandas de energía, similar al que se muestra en la Figura 5.3(b). En el espaciamiento propio de la red cristalina (línea vertical punteada de la Figura 5.3b), encontramos que la banda de valencia está ocupada con  $4N$  electrones, separados por una banda prohibida (estados de energía no permitidos) de extensión  $E_g$ , de una banda vacía que consiste de  $4N$  estados adicionales. Esta banda superior vacante es llamada la **banda de conducción**, por las razones que se mencionarán en la siguiente sección.

## 5.8 AISLANTES, SEMICONDUCTORES Y METALES

Básicamente, un muy pobre conductor de electricidad es llamado **aislante**, un excelente conductor es un **metal** y una sustancia cuya conductividad está entre estos extremos, es un **semiconductor**. Un material puede ser clasificado en cualquiera de estas tres clases, dependiendo de su estructura de bandas de energía.

### 5.8.1 AISLANTE

La estructura de bandas de energía de la Figura 5.3(b), para un espaciamiento normal de la red cristalina, se indica esquemáticamente en la Figura 5.4(a) y en un cristal de diamante (Carbono), la región que no contiene ningún estado cuántico es de varios electrón-volts ( $E_g \approx 6$  eV). Esta gran banda prohibida, separa la región ocupada de valencia de la banda de conducción vacía; en consecuencia, la energía que puede ser suministrada a un electrón desde un campo aplicado, es muy pequeña para llevar a la partícula de la banda ocupada a la banda vacante. Dado que el electrón no puede adquirir una cantidad suficiente de la energía aplicada, la conducción es imposible y por esta razón el diamante es un aislante.

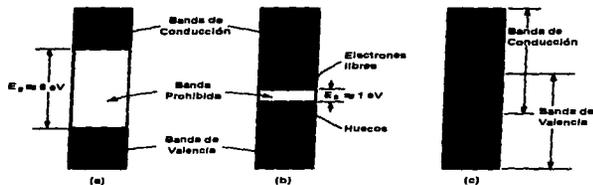


Figura 5.4 Estructura de bandas de energía de (a) un aislante; (b) un semiconductor y (c) un metal.

### 5.8.2 SEMICONDUCTOR

Una sustancia, para la que el espesor de la región de energía prohibida es relativamente pequeña ( $\sim 1 \text{ eV}$ ), es llamado semiconductor. El grafito, una forma cristalina del Carbono que tiene una simetría cristalina diferente a la del diamante, presenta un valor relativamente pequeño de  $E_g$  y en consecuencia es un semiconductor. Los materiales semiconductores prácticos más importantes, son el Germanio y el Silicio, que tienen valores de  $E_g$  de 0,785 y 1,21 eV, respectivamente, a 0 K. Normalmente, energías de esta magnitud no pueden ser adquiridas de un campo aplicado, de aquí que la banda de valencia permanezca llena, la banda de conducción vacía y estos materiales sean aislantes a bajas temperaturas. Sin embargo, la conductividad se incrementa con la temperatura, tal y como se explicará más adelante; estas sustancias se conocen como **semiconductores intrínsecos (puros)**.

Conforme la temperatura se incrementa, algunos de estos electrones de valencia adquieren energía térmica mayor a  $E_g$  y en consecuencia se mueven a la banda de conducción. Estos son ahora electrones libres, en el sentido de que se pueden mover alrededor, bajo la influencia de un campo aplicado aún pequeño; estos electrones libres o de conducción, se indican esquemáticamente en la Figura 5.4(b) mediante puntos. El aislante se ha vuelto ahora ligeramente conductor, por lo que se le considera un semiconductor. En la misma figura, la ausencia de un electrón en la banda de valencia es representada por un círculo pequeño y se denomina **hueco**. La frase "huecos en un semiconductor", se refiere entonces a los niveles de energía vacíos en una banda de valencia, que de otra forma estaría llena.

La importancia del hueco, es que puede servir como un portador de electricidad, comparable en efectividad con el electrón libre y el mecanismo mediante el cual un hueco contribuye a la conductividad, se explicará más adelante. Por otro lado, si ciertos átomos de impurezas son introducidos en el cristal, estos resultan en estados de energía permitidos, que caen dentro de la separación de energía prohibida y encontramos que estos niveles de impurezas también contribuyen a la conducción. Un material semiconductor en el que este mecanismo de conducción predomina, es conocido como un **semiconductor extrínseco (impuro)**.

Dado que la energía de la separación de bandas en un cristal, es una función del espacio interatómico (ver Figura 5.3), no es inesperado que  $E_g$  dependa en cierta forma de la temperatura y se ha determinado experimentalmente que decrece con ésta.

### 5.8.3 METAL

Un sólido que contiene una estructura de bandas parcialmente llenas, es denominado un metal. Bajo la influencia de un campo eléctrico aplicado, los electrones pueden adquirir una energía adicional y moverse a estados superiores; ya que estos electrones móviles constituyen una corriente, esta substancia es un conductor y la región parcialmente ocupada es la banda de conducción. Un ejemplo de la estructura de bandas de un metal, se da en la Figura 5.4(c), la cual muestra bandas de conducción y de valencia traslapadas.

## 5.9 FENÓMENO DE TRANSPORTE EN LOS SEMICONDUCTORES. MOVILIDAD Y CONDUCTIVIDAD

La corriente en un metal, es debida al flujo de cargas negativas (electrones), mientras que la corriente en un semiconductor, resulta del movimiento tanto de electrones como de cargas positivas (huecos). Un semiconductor puede ser dopado con átomos de impurezas, de tal forma que la corriente se deba predominantemente a los electrones o a los huecos. El transporte de cargas en un cristal, bajo la influencia de un campo eléctrico, se denomina **corriente de deriva** y la resultante de un gradiente de concentración no uniforme, es llamada **corriente de difusión**.

En un metal, los electrones exteriores o de valencia de un átomo, están asociados tanto a un ión como a otro, de manera que la ligadura de un electrón con un átomo individual es prácticamente cero. En términos de la discusión que elaboramos en las secciones anteriores, esto significa que la banda ocupada por los electrones de valencia, puede no estar completamente llena y que no hay niveles prohibidos a una mayor energía. Dependiendo del metal, al menos uno y a veces dos o tres electrones por átomo, son libres para moverse dentro del interior del mismo, bajo la acción de campos aplicados.

La Figura 5.5, es una representación esquemática bidimensional de la distribución de carga dentro de un metal. Las regiones sombreadas, representan la carga positiva neta del núcleo y los electrones interiores que están fuertemente confinados; mientras que los puntos negros, representan los electrones exteriores o de valencia en el átomo. Son estos electrones, los que no se puede decir que pertenezcan a un átomo en particular y por el contrario, han perdido completamente su asociación, por lo que pueden viajar libremente de átomo en átomo en el metal. Por lo tanto, un metal es visualizado como una región conteniendo un arreglo periódico tridimensional de iones pesados, fuertemente ligados y permeados con un "enjambre" de electrones que se pueden mover libremente alrededor. Esta esquematización es conocida como la descripción **electrón-gas** de un metal.

De acuerdo con la teoría electrón-gas de un metal, los electrones están en constante movimiento y su dirección es cambiada en cada colisión con los iones pesados (prácticamente estacionarios). La distancia promedio entre colisiones, es denominada la **trayectoria media promedio**. Dado que el movimiento es aleatorio, entonces, en promedio, habrá tantos electrones pasando por unidad de área en el metal, en cualquier dirección como en la dirección opuesta en un tiempo dado. En consecuencia, la corriente promedio es cero.

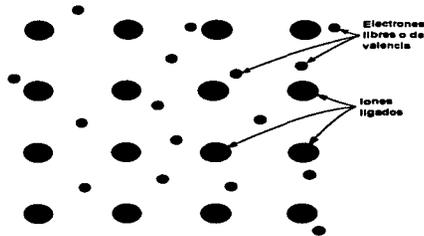


Figura 5.5 Arreglo esquemático en un plano, de los átomos en un metal y para el caso monovalente. los puntos negros representan el electrón-gas, en donde cada átomo ha contribuido con un electrón a este "gas".

Analícemos ahora, como cambia esta situación cuando un campo eléctrico constante de  $\epsilon$  volts por metro, es aplicado al metal. Como resultado de esta fuerza electrostática, los electrones serán acelerados y la velocidad se incrementaría indefinidamente con el tiempo, de no ser por las colisiones con los iones; sin embargo, en cada colisión el electrón pierde energía y se alcanza una condición de estado estable, donde se obtiene un valor finito de la **velocidad de deriva**,  $v$ . Esta velocidad de deriva, se dá en la dirección opuesta al campo eléctrico y en un tiempo  $t$  entre colisiones es  $at$ , donde  $a=q\epsilon/m$  es la aceleración. Dado que la velocidad promedio,  $v$ , es proporcional a  $\epsilon$ , en consecuencia:

$$v = \mu\epsilon \quad \text{--- (5.19)}$$

donde  $\mu$  (metros cuadrados por volt-segundo), es la movilidad de los electrones. En cumplimiento de la teoría anterior, una velocidad de deriva de estado estable se ha impuesto sobre el movimiento térmico aleatorio de los electrones; este flujo dirigido de electrones, constituye una corriente.

### 5.9.1 DENSIDAD DE CORRIENTE

Si  $N$  electrones están contenidos en una longitud  $L$  de conductor (ver Figura 5.6) y si a un electrón, le toma un tiempo  $T$  (s) el viajar una distancia  $L$  (m) en dicho conductor, el número total de electrones pasando a través de cualquier sección transversal de éste, por unidad de tiempo, es  $N/T$ . Por lo tanto, la carga total por segundo pasando a través de cualquier área y que por definición es la corriente en amperes, es:

$$I = \frac{Nq}{T} = \frac{Nqv}{L} \quad \text{--- (5.20)}$$

porque  $LIT$ , es la velocidad  $v$  (m/s) promedio o de deriva de los electrones. Por definición, la densidad de corriente, denotada por el símbolo  $J$ , es la corriente por unidad de área del medio conductor. Esto es, asumiendo una distribución uniforme de corriente:

$$J = \frac{I}{A} \quad \text{--- (5.21)}$$

donde  $J$  está en amperes por metro cuadrado y  $A$ , es el área de la sección transversal ( en metros) del conductor. Esto se convierte, mediante la ecuación 5.20, en:

$$J = \frac{Nqv}{LA} \quad \text{--- (5.22)}$$

De la Figura 5.6, es evidente que  $LA$  es simplemente el volumen conteniendo los  $N$  electrones y entonces,  $N/LA$  es la concentración de electrones,  $n$ , en electrones por metro cúbico. Por lo tanto:

$$n = \frac{N}{LA} \quad \text{--- (5.23)}$$

y la ecuación 5.22 se reduce a:

$$J = nqv = \rho v \quad \text{--- (5.24)}$$

donde  $\rho = nq$  es la densidad de carga, en coulombs por metro cúbico y  $v$  está en metros por segundo.

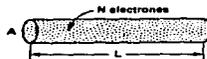


Figura 5.6 Esquema para el cálculo de la densidad de corriente.

Nótese que esta deducción es independiente de la forma del medio conductor y la figura anterior, no necesariamente representa un cable conductor y bien puede tratarse de una porción de un tubo de descarga gaseosa o un elemento de volumen de un semiconductor. Aún más,  $\rho$  y  $v$  no necesariamente necesitan ser constantes y pueden variar de un punto a otro en el espacio o pueden variar en el tiempo.

---

### 5.9.2 CONDUCTIVIDAD

De las ecuaciones 5.19 y 5.24:

$$J = nq\upsilon = nq\mu\varepsilon = \sigma\varepsilon \quad \text{--- (5.25)}$$

donde

$$\sigma = nq\mu \quad \text{--- (5.26)}$$

es la **conductividad** del metal en (ohm-metro)<sup>-1</sup>. La ecuación 5.25 es reconocida como la Ley de *Ohm*, es decir, la corriente de conducción es proporcional al voltaje aplicado. Como ya se mencionó, la energía que los electrones adquieren del campo aplicado es, como resultado de las colisiones, dada a los iones de la red. En consecuencia, cierta potencia es disipada por los electrones dentro del metal y la densidad de potencia (calentamiento *Joule*), está dada por  $J\varepsilon = \sigma\varepsilon^2$  en watts por metro cúbico.

### 5.10 ELECTRONES Y HUECOS EN UN SEMICONDUCTOR INTRINSECO

De la ecuación 5.26 podemos observar que la conductividad es proporcional a la concentración  $n$  de electrones libres. Para un buen conductor,  $n$  es muy grande ( $\sim 10^{28}$  electrones/m<sup>3</sup>); para un aislante,  $n$  es muy pequeña ( $\sim 10^7$ ) y para un semiconductor,  $n$  cae entre estos dos valores. Los electrones de valencia en un semiconductor, no son libres de moverse alrededor como en el caso del metal y por el contrario, están atrapados en un enlace entre dos iones adyacentes.

#### 5.10.1 EL ENLACE COVALENTE

Como el Germanio y el Silicio (especialmente este último), son los dos semiconductores más importantes empleados en la construcción de dispositivos electrónicos, es conveniente referirse a cualquiera de ellos para desarrollar la teoría de operación correspondiente. La estructura cristalina de estos materiales, consiste de una repetición regular en tres dimensiones de una celda unitaria que tiene forma tetraédrica, con un átomo en cada vértice; esta estructura se muestra simbólicamente, en dos dimensiones, en la Figura 5.7. El Germanio tiene un total de 32 electrones en su estructura atómica, distribuidos en celdas como se indicó en la Tabla 5.2 y como se explicó en la sección 5.7, cada átomo en un cristal de este elemento contribuye con cuatro electrones de valencia, de tal forma que es tetravalente. El núcleo iónico inerte del átomo de Germanio, porta una carga positiva de +4, medida en unidades de carga electrónica. Las fuerzas de unión entre átomos vecinos, resulta del hecho de que cada uno de los electrones de valencia de un átomo de Germanio, es compartido por uno de sus cuatro vecinos más cercanos. Este **par electrónico** o **enlace covalente**, también se representa en la Figura 5.7 mediante las dos líneas punteadas que unen cada átomo a cada uno de sus vecinos.

---

El hecho de que los electrones de valencia sirvan para unir un átomo con el siguiente, también resulta en que estos electrones estén fuertemente atados al núcleo; en consecuencia, a pesar de la disponibilidad de los cuatro electrones de valencia, el cristal tiene una baja conductividad.

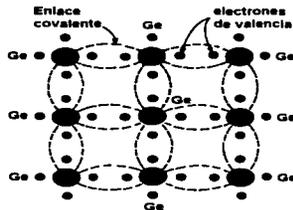


Figura 5.7 Estructura cristalina del Germanio, ilustrada simbólicamente en dos dimensiones.

### 5.10.2 EL HUECO

A una muy baja temperatura, digamos 0 K, la estructura ideal de la Figura 5.7 es alcanzada y el cristal se comporta como un aislante, ya que no están disponibles los portadores libres de electricidad. Sin embargo, a temperatura ambiente, algunos de los enlaces covalentes se romperán, debido a la energía térmica proporcionada al cristal y la conducción se hace posible; esta situación se ilustra en la Figura 5.8. Aquí, un electrón que en la mayor parte del tiempo forma parte de un enlace covalente, se muestra separado y por lo tanto libre para moverse en una forma aleatoria a través del cristal. La energía  $E_g$  requerida para romper el enlace covalente es, a temperatura ambiente, de aproximadamente 0,72 eV para el Germanio y 1,1 eV para el Silicio. La ausencia del electrón en el enlace covalente, es representada por el círculo pequeño en la Figura 5.8 y este enlace covalente incompleto es llamado **hueco**. La importancia del hueco es que puede servir como un portador de electricidad, comparable en efectividad con el electrón libre.

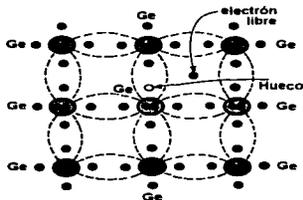


Figura 5.8 Cristal de Germanio con un enlace covalente roto.

El mecanismo mediante el cual un hueco contribuye a la conductividad es, cualitativamente, como sigue: Cuando un enlace está incompleto, de forma que existe un hueco, es relativamente fácil para un electrón de valencia en un átomo vecino, dejar su enlace covalente para llenar este hueco. Un electrón moviéndose de un enlace para llenar un hueco, deja un hueco en su posición inicial; por lo tanto, el hueco efectivamente se mueve en la dirección opuesta a la del electrón. Este hueco, en su nueva posición, puede ahora ser llenado por un electrón de otro enlace covalente y correspondientemente, el hueco se moverá otro paso en la dirección opuesta al movimiento del electrón. Bajo este esquema, se tiene un mecanismo para la conducción de electricidad que no involucra electrones libres. Este fenómeno, se ilustra esquemáticamente en la Figura 5.9, donde el círculo con un punto dentro, representa un enlace completo y un círculo vacío designa a un hueco. La Figura 5.9(a), muestra una fila de 10 iones con un enlace roto o hueco en el ión 6; ahora, imaginemos que un electrón del ión 7 se mueve al hueco en el ión 6, de tal forma que resulta la configuración de la Figura 5.9(b). Si comparamos estas dos figuras, se ve como si el hueco en (a) se hubiera desplazado a la derecha en (b), del ión 6 al 7 y esto indica que el movimiento del hueco en una dirección, realmente significa el transporte de una carga negativa en una distancia igual, pero en la dirección opuesta. De esta forma, siempre que nos refiramos al flujo de corriente eléctrica, el hueco se comporta como una carga positiva de la misma magnitud de la carga electrónica y podemos considerar que los huecos son entidades físicas, cuyo movimiento constituye un flujo de corriente.

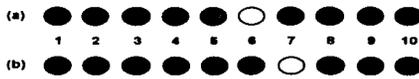


Figura 5.9 Mecanismo mediante el cual, un hueco contribuye a la conductividad.

En un semiconductor puro (intrínseco), el número de huecos es igual al número de electrones libres. La agitación térmica, continúa produciendo nuevos pares hueco-electrón, mientras que otros pares del mismo tipo desaparecen como resultado de la recombinación. La concentración de huecos,  $p$ , debe ser igual a la concentración de electrones  $n$ , de tal forma que:

$$n = p = n_i \quad \text{--- (5.27)}$$

donde  $n_i$  es llamada la **concentración intrínseca**.

### 5.11 IMPUREZAS DONADORAS Y RECEPTORAS

Si al Germanio o al Silicio intrínsecos, se les agrega un pequeño porcentaje de átomos trivalentes o pentavalentes, se forma un semiconductor **impuro, dopado o extrínseco**.

### 5.11.1 DONADORES

Si el elemento dopante tiene cinco electrones de valencia, se obtiene la estructura cristalina que se muestra en la Figura 5.10, donde los átomos de impureza, desplazarán algunos de los átomos de Germanio en la red. Cuatro de los cinco electrones de valencia, ocuparán enlaces covalentes y el quinto estará nominalmente libre, por lo que será un portador de corriente disponible. La energía requerida para separar del átomo este quinto electrón, es del orden de 0,01 eV para el Ge y 0,05 eV para el Si; algunas de las impurezas pentavalentes adecuadas, son: Antimonio, Fósforo y Arsénico. Estas impurezas donan el exceso de portadores electrónicos (negativos) y en consecuencia son denominadas como impurezas **donadoras** o **tipo-n**.

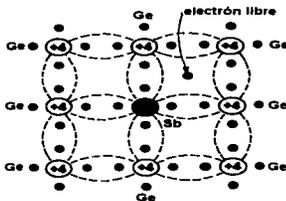


Figura 5.10 Red cristalina con un átomo de Germanio desplazado por un átomo de impureza pentavalente.

Cuando las impurezas donadoras son agregadas a un semiconductor, se introducen niveles de energía permitidos, a una muy pequeña distancia por debajo de la banda de conducción; tal y como se muestra en la Figura 5.11. Estos nuevos niveles permitidos, son esencialmente un nivel discreto, porque los átomos de la impureza agregada están muy separados entre ellos en la estructura del cristal y la interacción es pequeña. En el caso del Germanio, la distancia de los nuevos niveles discretos de energía permitidos, es de 0,01 eV (0,05 eV en el caso del Si) por debajo de la banda de conducción y por lo tanto, a temperatura ambiente, casi todos los "quintos" electrones del material donador son elevados a la banda de conducción.

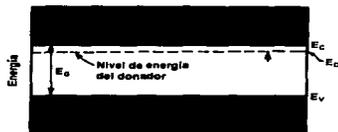


Figura 5.11 Diagrama de bandas de energía de un semiconductor tipo-n.

Si un material semiconductor intrínseco es dopado con impurezas tipo-*n*, no solamente se incrementa el número de electrones, sino que el número de huecos disminuye por debajo del nivel que se tendría disponible en el semiconductor intrínseco. La razón para el decremento en el número de huecos, es que el mayor número de electrones presentes, incrementa la tasa de recombinación de electrones con huecos.

### 5.11.2 RECEPTORES

Si una impureza trivalente (Boro, Galio o Indio) es agregada a un semiconductor intrínseco, solamente tres de los enlaces covalentes pueden ser llenados y la vacante que existe en el cuarto enlace constituye un hueco; esta situación se ilustra en la Figura 5.12. Tales impurezas hacen portadores positivos disponibles, porque crean huecos que pueden aceptar electrones; consecuentemente, estas impurezas son conocidas como **receptoras** o **tipo-*p***. La cantidad de impureza, que debe ser agregada para tener un efecto apreciable en la conductividad, es muy pequeña; por ejemplo, si una impureza tipo donadora es agregada a razón de 1 parte en  $10^8$ , la conductividad del Germanio a 30 °C es multiplicada por un factor de 12.

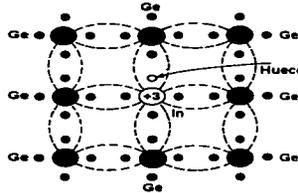


Figura 5.12 Red cristalina, en donde un átomo de Germanio ha sido desplazado por un átomo de una impureza trivalente.

Cuando impurezas receptoras o tipo-*p* son agregadas al semiconductor intrínseco, producen un nivel discreto de energía permitido, que está justo por encima de la banda de valencia; tal y como se muestra en la Figura 5.13. Dado que una muy pequeña cantidad de energía, se requiere para que un electrón abandone la banda de valencia y ocupe el nivel de energía del receptor, se tiene que los huecos generados en la banda de valencia por estos electrones, constituyen el mayor número de portadores en el material semiconductor.



Figura 5.13 Diagrama de bandas de energía de un semiconductor tipo-*p*.

## 5.12 DENSIDADES DE CARGA EN UN SEMICONDUCTOR

Anteriormente, mencionamos que el agregar impurezas tipo-*n* decrementa el número de huecos. Similarmente, el dopar con impurezas tipo-*p*, disminuye la concentración de electrones libres por debajo de la que se tendría en el semiconductor intrínseco. Bajo condiciones de equilibrio térmico, el producto de las concentraciones libres negativas y positivas es constante, independientemente de la cantidad de impurezas donadoras o receptoras. Esta relación es llamada la **Ley de masa-acción** y está dada por:

$$np = n_i^2 \quad \text{--- (5.28)}$$

la concentración intrínseca  $n_i$ , es una función de la temperatura.

Con esto, obtenemos el resultado de que el dopado de un semiconductor intrínseco no solamente incrementa la conductividad, sino que también sirve para producir un conductor en el que los portadores eléctricos son, ya sea predominantemente huecos o predominantemente electrones. En un semiconductor tipo-*n*, los electrones son llamados los **portadores mayoritarios** y los huecos son llamados **portadores minoritarios**; en un semiconductor tipo-*p*, las designaciones son inversas.

Una diferencia fundamental entre un metal y un semiconductor, es que el primero es **unipolar**, es decir, conduce la corriente por medio de cargas (electrones) de un solo signo, mientras que el semiconductor es **bipolar**; esto es, contiene dos partículas portadoras de carga de signo opuesto.

Un portador es negativo (el electrón libre), de movilidad  $\mu_n$  y el otro es positivo (el hueco), de movilidad  $\mu_p$ . Estas partículas se mueven en direcciones opuestas en un campo eléctrico  $\epsilon$ , pero como son de signo opuesto, la corriente de cada una de ellas es en la misma dirección. Por lo tanto, la densidad de corriente,  $J$ , está dada por:

$$J = (n\mu_n + p\mu_p)q\epsilon = \sigma\epsilon \quad \text{--- (5.29)}$$

donde  $n$  es la magnitud de la concentración de electrones libres,  $p$  es la magnitud de la concentración de huecos y  $\sigma$  es la conductividad. En consecuencia:

$$\sigma = (n\mu_n + p\mu_p)q \quad \text{--- (5.30)}$$

Para el semiconductor puro,  $n=p=n_i$ , donde  $n_i$  es la concentración intrínseca.

## 5.13 DISTRIBUCIÓN DE LA ENERGÍA DE ELECTRONES EN UN METAL

### 5.13.1 ESQUEMA SIMPLIFICADO DE LA ENERGÍA POTENCIAL EN UN METAL

La región en la que se encuentran los electrones libres, es esencialmente una altiplanicie de potencial o región equipotencial y es solamente para distancias cercanas a un ión, que existe una variación apreciable en el potencial. Dado que las regiones de rápida variación de potencial, representan solamente una muy pequeña porción del volumen total del metal, en consecuencia, asumimos que la distribución de campo dentro del metal es equipotencial y los electrones libres no están sujetos a ninguna fuerza.

En la Figura 5.14, todas las variaciones de energía potencial dentro del metal han sido omitidas y solamente se incluye la barrera de potencial en la superficie. Un electrón de conducción puede moverse libremente dentro del interior del metal, pero no puede escapar a través de la superficie, a menos que tenga una energía en forma mínima igual a  $E_B$ . Si un electrón trata de escapar del metal, inducirá una carga positiva en la superficie, porque el metal era originalmente neutro y consecuentemente, existirá una fuerza de atracción entre esta carga inducida y el electrón. A menos que el electrón posea la suficiente energía, para escapar de la región de influencia de esta fuerza, será forzado a regresar al metal; claramente existe una barrera de energía potencial en la superficie. Ahora, nuestro interés es conocer si existen electrones en el interior, con la suficiente energía  $E_B$  para escapar; en otras palabras, necesitamos conocer la distribución de energía de los electrones libres dentro del metal.

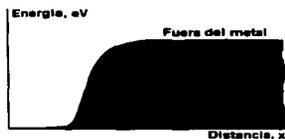


Figura 5.14 Para los electrones libres, el interior de un metal puede considerarse como un volumen equipotencial, pero existe una barrera de potencial en la superficie.

### 5.13.2 DENSIDAD DE ENERGÍA

Supongamos, que estamos interesados en la distribución de edades en la población de un país. Una forma sensible para indicar esta relación, se muestra en la Figura 5.15, donde la abcisa es la edad y la ordenada es  $\rho_A$ , la densidad de la población en edad. Esta densidad, proporciona el número  $dn_A$  de personas cuyas edades están contenidas en el intervalo entre  $A$  y  $A+dA$ ; es decir:

$$dn_A = \rho_A dA \quad \text{--- (5.31)}$$

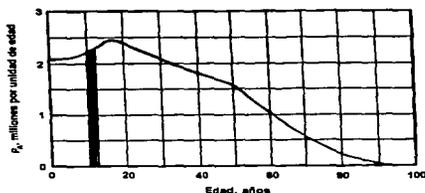


Figura 5.15 La función de distribución de población por edad.

Podemos observar, por ejemplo, que el número de personas de edades entre los 10 y 12 años está representado por  $dn_A$ , con  $p_A=2,25$  millones por año, escogida como la ordenada media entre 10 y 12 años y  $dA$  se toma como  $12-10=2$  años. En consecuencia,  $dn_A=p_A dA=4,5$  millones; geoméricamente, esta es el área sombreada de la Figura 5.15. Evidentemente, la población total  $n$ , está dada por:

$$n = \int dn_A = \int p_A dA \quad \text{--- (5.32)}$$

o simplemente, el área total bajo la curva.

Ahora, abordaremos la distribución en energía de los electrones libres en un metal. Por analogía con la ecuación 5.32, podemos escribir:

$$dn_E = \rho_E dE \quad \text{--- (5.33)}$$

donde  $dn_E$  representa el número de electrones libres por metro cúbico, cuyas energías caen en el intervalo de energía  $dE$  y  $\rho_E$ , proporciona la densidad de electrones en este intervalo. Ya que nuestro interés está confinado únicamente a los electrones libres, se asume que no existen variaciones de potencial dentro del metal y en consecuencia, a priori, debe haber el mismo número de electrones en cada metro cúbico del metal. Esto es, la densidad en espacio (electrones por metro cúbico) es una constante; sin embargo, dentro de cada unidad de volumen del metal, habrá electrones que tengan todas las posibles energías. Es la distribución en energía, la que es expresada por  $\rho_E$  (número de electrones por electrón-volt por metro cúbico de metal). La función  $\rho_E$ , puede ser expresada como el producto:

$$\rho_E = f(E)N(E) \quad \text{--- (5.34)}$$

donde  $N(E)$  es la densidad de estados (número de estados por electrón-volt por metro cúbico) en la banda de conducción y  $f(E)$  es la probabilidad de que un estado cuántico con energía  $E$ , sea ocupado por un electrón. La expresión para  $N(E)$  está dada por:

$$N(E) = \gamma \sqrt{E} \quad \text{--- (5.35)}$$

donde  $\gamma$  es una constante definida por:

$$\gamma = \frac{4\pi}{h^3} \sqrt{(2m)^3 (1,6 \times 10^{-19})^3} = 6,82 \times 10^{27} \quad \text{--- (5.36)}$$

Las dimensiones de  $\gamma$  son  $(m^{-3})(eV)^{-3/2}$ ,  $m$  es la masa del electrón en kilogramos y  $h$  es la constante de Planck en joule-segundos.

## 5.14 LA FUNCIÓN DE FERMI-DIRAC

La ecuación para  $f(E)$  es llamada la función de probabilidad de *Fermi-Dirac* y especifica la fracción de todos los estados, a la energía  $E$  (electrón-volts), ocupados bajo condiciones de equilibrio térmico y está dada por:

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}}} \quad \text{--- (5.37)}$$

donde  $k$  es la constante de Boltzmann en eV/K,  $T$  es la temperatura en K y  $E_F$  es el **Nivel de Fermi** o **energía característica** del cristal en eV. El nivel de *Fermi*, representa el estado de energía con 50% de probabilidad de ser llenado si no existe banda prohibida. La razón para este último enunciado, es que si  $E=E_F$ , entonces  $f(E)=1/2$  para cualquier valor de temperatura. Una gráfica de  $f(E)$  versus  $E-E_F$  se da en la Figura 5.16(a) y de  $E-E_F$  versus  $f(E)$  en la Figura 5.16(b), ambas para  $T=0$  K y para mayores valores de temperatura. Cuando  $T=0$  K, existen dos posibles condiciones:

- 1. Si  $E > E_F$ , el término exponencial se vuelve infinito y  $f(E)=0$ . En consecuencia, no existe probabilidad de encontrar ocupado un estado cuántico de energía mayor que  $E_F$ , a cero absoluto.
- 2. Si  $E < E_F$ , la exponencial en la ecuación 5.37 se vuelve cero y  $f(E)=1$ . Todos los niveles cuánticos con energías menores a  $E_F$ , serán ocupados a  $T=0$  K.

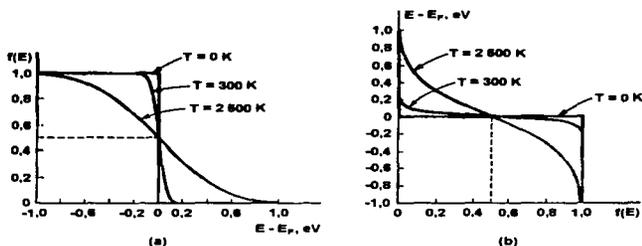


Figura 5.16 La función de Fermi-Dirac,  $f(E)$ , proporciona la probabilidad de que un estado de energía  $E$ , sea ocupado.

De las ecuaciones 5.34, 5.35 y 5.37, obtenemos a temperatura de cero absoluto:

$$\rho_E \begin{cases} \gamma \sqrt{E} & \text{para } E < E_F \\ 0 & \text{para } E > E_F \end{cases} \quad (5.38)$$

Claramente, no hay electrones a 0 K que tengan energías mayores a  $E_F$ ; esto es, la energía de Fermi, es la máxima energía que cualquier electrón puede poseer a cero absoluto. La relación representada por la ecuación 5.38, es llamada la función de distribución de energía completamente degenerada; clásicamente, todas las partículas tendrán cero energía a 0 K. El hecho de que los electrones realmente tienen energías que van de 0 a  $E_F$ , a cero absoluto, es una consecuencia del Principio de Exclusión de Pauli, que establece que dos electrones no pueden tener el mismo juego de números cuánticos. En consecuencia, no todos los electrones pueden tener la misma energía, aún a 0 K.

En la Figura 5.17, se muestra una gráfica de la distribución de energía dada por la ecuaciones 5.34 y 5.38, para un metal a  $T=0\text{ K}$  y  $T=2500\text{ K}$ . El área bajo cada curva, es simplemente el número total de electrones libres por metro cúbico del metal, de aquí que las dos áreas deban ser iguales. También, las curvas para todas las temperaturas deben pasar por la misma ordenada ( $\rho_E = \gamma E_F^{3/2} / 2$ ) en el punto  $E=E_F$ , ya que de la ecuación 5.37,  $f(E) = 1/2$  para  $E=E_F$ .

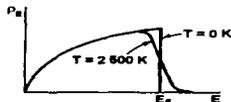


Figura 5.17 Distribución de energía en un metal a 0 K y 2500 K.

---

Debemos hacer notar una característica muy importante, la función de distribución cambia muy ligeramente con la temperatura, aún cuando el cambio de ésta sea tan grande como 2 500 K. El efecto de la temperatura alta, es simplemente el dar a esos electrones que tienen altas energías a cero absoluto (aquellos en la vecindad de  $E_p$ ), mayores energías; mientras que aquellos con menores energías, se mantienen prácticamente sin alteración. Como la curva para  $T=2\ 500\text{ K}$ , se aproxima asintóticamente al eje de la energía, algunos electrones tendrán grandes valores de energía.

## 5.15 CONCENTRACIONES DE PORTADORES EN UN SEMICONDUCTOR INTRÍNSECO

Para calcular la conductividad de un semiconductor de la ecuación 5.30, es necesario conocer la concentración de electrones libres,  $n$  y la concentración de huecos,  $p$ . De las ecuaciones 5.33 y 5.34, con  $E$  en electrón-volts:

$$dn = N(E)f(E)dE \quad \text{--- (5.39)}$$

donde  $dn$  representa el número de electrones de conducción por metro cúbico, cuyas energías estén entre  $E$  y  $E+dE$ . La densidad de estados,  $N(E)$ , se deriva bajo la suposición de que el fondo de la banda de conducción está a potencial cero. En un semiconductor, la menor energía en la banda de conducción es  $E_c$  y por lo tanto, la ecuación 5.35 se debe generalizar de la siguiente forma:

$$N(E) = \gamma\sqrt{E - E_c} \quad \text{para } E > E_c \quad \text{--- (5.40)}$$

y la función de *Fermi* está dada por la ecuación 5.37, donde a temperatura ambiente,  $kT \approx 0,03\text{ eV}$ , por lo que  $f(E)=0$  si  $E-E_p > 0,03$  y  $f(E)=1$  si  $E-E_p < 0,03$  (ver Figura 5.16). Como se indica en la Figura 5.18(a), el nivel de *Fermi* cae en la región de la separación de energía, a la mitad entre las bandas de conducción y de valencia. Este diagrama, muestra la distribución de *Fermi-Dirac* de la ecuación 5.37, superimpuesta en el diagrama de bandas de energía de un semiconductor; a cero absoluto ( $T=0\text{ K}$ ), la función es tal como se muestra en la Figura 5.18(a). La probabilidad de encontrar un electrón en la banda de conducción es cero ( $f(E)=0$ ) y la probabilidad de encontrar un hueco en la banda de valencia también es cero ( $1-f(E)=0$ ). A temperatura ambiente, algunos electrones son excitados a mayores energías y algunos estados cerca del fondo de la banda de conducción,  $E_c$ , serán llenados; tal y como se indica en la misma figura mediante la curva marcada  $T=300\text{ K}$ . De forma similar, cerca de la parte superior de la banda de valencia,  $E_v$ , la probabilidad de ocupación es decremada de la unidad, ya que algunos electrones han escapado de su enlace covalente y están ahora en la banda de conducción.

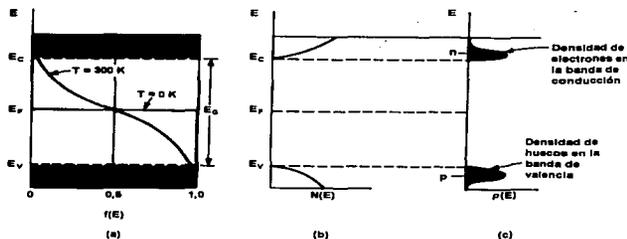


Figura 5.18 (a) Diagrama de bandas de energía para un semiconductor intrínseco. La función de probabilidad de Fermi-Dirac,  $f(E)$ , se muestra para 0 K y temperatura ambiente. (b) La densidad de estados,  $N(E)$ , en cada banda. (c) La densidad de portadores  $p(E)=N(E)f(E)$  para los electrones y  $N(E)[1-f(E)]$  para los huecos, a temperatura ambiente.

La densidad de estados (ecuaciones 5.39 y 5.40), se muestra en la Figura 5.18(b) y la densidad de electrones,  $N(E)f(E)$ , se indica en la Figura 5.18(c). La concentración de electrones en la banda de conducción es el área bajo esta curva y está dada por:

$$n = \int_{E_c}^{\infty} N(E)f(E)dE \quad \text{--- (5.41)}$$

Para  $E \geq E_c$ ,  $E - E_f \gg kT$  y la ecuación 5.37 se reduce a:

$$f(E) = e^{\frac{-(E-E_f)}{kT}} \quad \text{--- (5.42)}$$

y

$$n = \int_{E_c}^{\infty} \gamma \sqrt{E - E_c} e^{\frac{-(E-E_f)}{kT}} dE \quad \text{--- (5.43)}$$

Esta integral se evalúa a:

$$n = N_c e^{\frac{-(E_c - E_f)}{kT}} \quad \text{--- (5.44)}$$

donde

$$N_c = 2\sqrt{\left(\frac{2\pi m_n kT}{h^2}\right)^3 (1,6 \times 10^{-19})^3} = 2\sqrt{\left(\frac{2\pi m_n kT}{h^2}\right)^3} \quad \text{--- (5.45)}$$

Para derivar esta ecuación, se utiliza el valor de  $\gamma$  dado por la 5.36,  $k$  está dado en electrón-volts por grado Kelvin y  $k$  está expresada en joules por grado Kelvin. Por otro lado, la masa  $m$  ha sido reemplazada por el símbolo  $m_n$ , que representa la masa efectiva del electrón.

### 5.15.1 EL NÚMERO DE HUECOS EN LA BANDA DE VALENCIA

Dado que la parte superior de la banda de valencia (la máxima energía) es  $E_v$ , la densidad de estados (análogamente a la ecuación 5.40) está dada por:

$$N(E) = \gamma \sqrt{E_v - E} \quad \text{para } E < E_v \quad \text{--- (5.46)}$$

Como un hueco significa un nivel de energía vacío, la función de *Fermi* para un hueco es  $1-f(E)$ , donde  $f(E)$  es la probabilidad de que el nivel sea ocupado por un electrón. Por ejemplo, la probabilidad de que un nivel particular de energía sea ocupado por un electrón es 0,2 y la probabilidad de que esté vacío (ocupado por un hueco) es 0,8. Utilizando la ecuación 5.37 para  $f(E)$ , obtenemos:

$$1 - f(E) = \frac{e^{\frac{E - E_F}{kT}}}{1 + e^{\frac{E - E_F}{kT}}} \approx e^{\frac{-(E_F - E)}{kT}} \quad \text{--- (5.47)}$$

en este caso se ha aplicado el hecho de que  $E_F - E \gg kT$  para  $E \leq E_v$  (Figura 5.18). Por lo tanto, el número de huecos por metro cúbico en la banda de valencia es:

$$p = \int_{-\infty}^{E_v} \gamma \sqrt{E_v - E} e^{\frac{-(E_F - E)}{kT}} dE \quad \text{--- (5.48)}$$

Esta integral, que representa el área bajo la curva inferior de la Figura 5.18(c), se evalúa a:

$$p = N_v e^{\frac{-(E_F - E_v)}{kT}} \quad \text{--- (5.49)}$$

donde  $N_v$  está dada por la ecuación 5.45, con  $m_n$  reemplazada por  $m_p$ , que es la masa efectiva del hueco.

### 5.15.2 EL NIVEL DE FERMÍ EN UN SEMICONDUCTOR INTRÍNSECO

Es importante hacer notar que las ecuaciones 5.44 y 5.49 aplican tanto a semiconductores intrínsecos como a impuros ó extrínsecos. En el caso de material intrínseco, el subíndice  $i$  será añadido a  $n$  y  $p$ ; dado que el cristal debe ser eléctricamente neutro:

$$n_i = p_i \quad \text{--- (5.50)}$$

y de las ecuaciones 5.44 y 5.49, tenemos que:

$$N_c e^{\frac{-(E_c - E_F)}{kT}} = N_v e^{\frac{-(E_F - E_v)}{kT}} \quad \text{--- (5.51)}$$

Tomando el logaritmo en ambos lados, obtenemos que:

$$\ln \frac{N_c}{N_v} = \frac{E_c + E_v - 2E_F}{kT} \quad \text{--- (5.52)}$$

y en consecuencia:

$$E_F = \frac{E_c + E_v}{2} - \frac{kT}{2} \ln \frac{N_c}{N_v} \quad \text{--- (5.53)}$$

Si las masas efectivas de un hueco y un electrón libre son las mismas,  $N_c = N_v$ , y la ecuación anterior da origen a:

$$E_F = \frac{E_c + E_v}{2} \quad \text{--- (5.54)}$$

Por lo tanto, el nivel de *Fermi* queda en el centro de la banda prohibida de energía, tal y como se mostró en la Figura 5.18.

## 5.16 NIVEL DE FERMÍ EN UN SEMICONDUCTOR EXTRÍNSECO

De las ecuaciones 5.29 y 5.30, se observa que las características eléctricas de un material semiconductor dependen de la concentración de electrones libres y huecos. Las expresiones para  $n$  y  $p$ , están dadas por las ecuaciones 5.44 y 5.49, respectivamente y son válidas tanto para semiconductores puros como para semiconductores con impurezas. De estas dos ecuaciones, el único parámetro que cambia con la cantidad de impurezas es el nivel de *Fermi*,  $E_F$ . De tal forma que se pueda observar como  $E_F$  depende de la temperatura y de la concentración de impurezas, recordemos que, en el caso de un semiconductor intrínseco,  $E_F$  queda a la mitad de la separación de energía, indicando que las concentraciones de electrones libres y de huecos son iguales.

Si una impureza de tipo donadora es agregada al cristal, entonces, a una temperatura dada y asumiendo que todos los átomos donadores están ionizados, los primeros estados  $N_D$  en la banda de conducción serán llenados. En consecuencia, será más difícil para los electrones de la banda de valencia, el puentear la separación de energía mediante agitación térmica; consecuentemente, el número de pares electrón-hueco generados térmicamente para esa temperatura, serán reducidos. Ya que el nivel de *Fermi*, es una medida de la probabilidad de ocupación de los estados de energía permitidos, es claro que  $E_F$  se debe mover más cerca de la banda de conducción para indicar que muchos de los estados de energía en esa banda, están llenados por los electrones donadores y que muy pocos huecos existen en la banda de valencia. Esta situación se muestra en la Figura 5.19(a), para un material tipo- $n$  y el mismo tipo de argumento nos lleva a la conclusión de que  $E_F$  se debe mover del centro de la separación prohibida hacia la banda de valencia, para un material tipo- $p$ ; tal y como se indica en la Figura 5.19(b).

Si para una concentración de impurezas dada, la temperatura del material tipo- $n$  se incrementa, se formarán más pares electrón-hueco y dado que todos los átomos donadores están ionizados, es posible que la concentración de los electrones generados térmicamente en la banda de conducción, se pueda volver más grande que la concentración de electrones donadores. Bajo estas condiciones, las concentraciones de huecos y electrones se vuelven prácticamente iguales y el cristal se hace esencialmente intrínseco. Podemos concluir que, conforme la temperatura del material tipo- $n$  o tipo- $p$  se incrementa, el nivel de *Fermi* se mueve hacia el centro de la separación de energía.

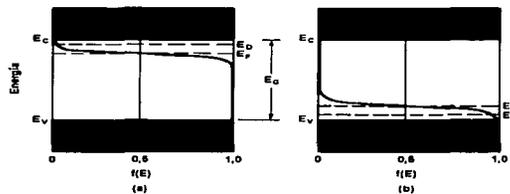


Figura 5.19 Posición del nivel de Fermi en (a) semiconductor tipo- $n$  y (b) semiconductor tipo- $p$ .

Un cálculo de la posición exacta del nivel de *Fermi* en un material tipo-*n*, puede realizarse si sustituimos  $n=N_D$  en la ecuación 5.44 y se obtiene que:

$$N_D = N_c e^{\frac{-(E_c - E_F)}{kT}} \quad \text{--- (5.55)}$$

o resolviendo para  $E_F$ , se tiene que:

$$E_F = E_c - kT \ln \frac{N_c}{N_D} \quad \text{--- (5.56)}$$

En forma similar, para un material tipo-*p* y de la ecuación 5.49, obtenemos que:

$$E_F = E_v + kT \ln \frac{N_v}{N_A} \quad \text{--- (5.57)}$$

Nótese que si  $N_A=N_D$ , al sumar las ecuaciones 5.56 y 5.57 y dividir las entre 2, obtenemos la ecuación 5.53.

## 5.17 LA UNIÓN *p-n* A CIRCUITO ABIERTO

Si impurezas donadoras son introducidas en un lado, e impurezas receptoras en el otro lado de un solo cristal de un semiconductor, se forma una unión *p-n*; un sistema de este tipo se ilustra en la Figura 5.20(a). El ión donador, está representado por un signo positivo porque, después de que este átomo de impureza "cede" un electrón, se vuelve un ión positivo. El ión receptor, se indica mediante un signo negativo porque, después de que este átomo "acepta" un electrón, se convierte en un ión negativo. Inicialmente, existen nominalmente solo portadores tipo-*p* a la izquierda de la unión y solamente portadores tipo-*n* a la derecha.

### 5.17.1 REGIÓN DE CARGA ESPACIAL

Ya que existe un gradiente de densidad a través de la unión, los huecos se difunden inicialmente a la derecha a través de la unión y los electrones a la izquierda. Podemos observar, que los huecos positivos que neutralizaron los iones receptores, cerca de la unión en el Silicio tipo-*p*, han desaparecido como resultado de la combinación con electrones que se han difundido a través de la unión. De forma similar, los electrones neutralizantes en el Silicio tipo-*n*, se han combinado con los huecos que cruzaron la unión desde el material *p*. Los iones no neutralizados en la vecindad de la unión, están referidos como **cargas no cubiertas**. La forma general de la densidad de carga,  $\rho$  (Figura 5.20b), depende de como se dopa el dispositivo (diodo).

Dado que la región de la unión, es vaciada de cargas móviles, se conoce como la **región de vaciado** (*depletion region* o *región de depleción*), la **región de carga espacial** o **región de transición**. El espesor de esta región, es del orden de la longitud de onda de la luz visible (0,5 micras) y dentro de esta capa muy delgada de carga espacial, no existen portadores móviles. A la izquierda de esta región, la concentración de portadores es  $p \approx N_A$  y a la derecha es  $n \approx N_D$ .

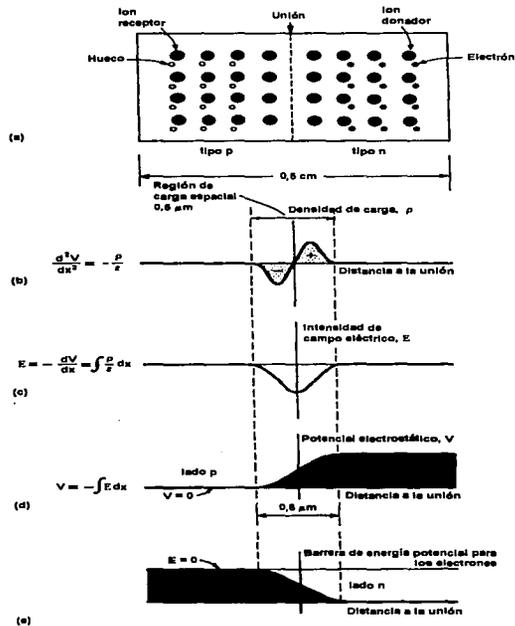


Figura 5.20 Diagrama esquemático de una unión p-n, incluyendo la densidad de carga, la intensidad de campo eléctrico y las barreras de energía potencial en la unión. Dado que la energía potencial = potencial x carga, la curva en (d) es proporcional a la energía potencial para un hueco (carga positiva) y la curva en (e), es proporcional a la negativa en (d), ya que el electrón es una carga negativa.

### 5.16 ESTRUCTURA DE BANDAS DE UNA UNIÓN $p-n$ A CIRCUITO ABIERTO

Consideremos que una unión  $p-n$ , es formada al colocar materiales tipo- $p$  y tipo- $n$  en contacto íntimo a nivel atómico; bajo estas condiciones, el nivel de *Fermi* debe ser constante a lo largo de la muestra en equilibrio. Si esto no fuera así, los electrones en un lado de la unión tendrían una energía promedio mayor que los del otro lado y se daría una transferencia de electrones y de energía, hasta que los niveles de Fermi en ambos lados se alinearan.

En la sección 5.16, se verificó que el nivel de *Fermi*,  $E_F$ , está cerca del límite de la banda de conducción,  $E_{cn}$ , en el material tipo- $n$  y cerca del límite de la banda de valencia,  $E_{vp}$ , en el lado  $p$ . Entonces, el límite de la banda de conducción,  $E_{cp}$ , en el material  $p$ , no puede estar al mismo nivel que  $E_{cn}$  e igualmente, el límite de la banda de valencia,  $E_{vn}$ , en el lado  $n$  no se puede alinear con  $E_{vp}$ . Por lo tanto, el diagrama de bandas de energía para una unión  $p-n$  aparece tal y como se muestra en la Figura 5.21, donde se indica un corrimiento  $E_0$  en los niveles de energía. Nótese que:

$$E_0 = E_{cp} - E_{cn} = E_{vp} - E_{vn} = E_1 + E_2 \quad \text{--- (5.58)}$$

La energía  $E_0$ , representa la energía potencial de los electrones en la unión, como se indicó en la Figura 5.20(e).

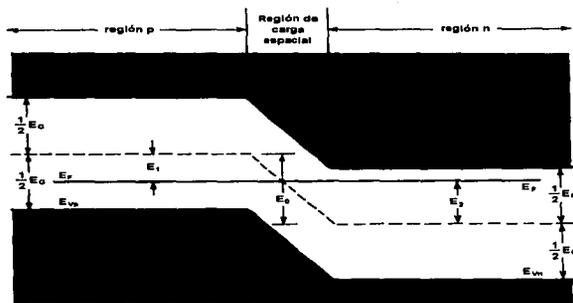


Figura 5.21 Diagrama de bandas de una unión  $p-n$  bajo condiciones de circuito abierto. Este esquema corresponde a la Figura 5.20(e) y representa la energía potencial para los electrones. El ancho de la separación prohibida es  $E_G$  en electrón-volts.

**PRINCIPIOS DE OPERACIÓN  
DEL DIODO LÁSER, UN  
DISPOSITIVO FOTÓNICO**

---

## PRINCIPIOS DE OPERACIÓN DEL DIODO LÁSER, UN DISPOSITIVO FOTÓNICO

Los dispositivos fotónicos son aquéllos en los que la partícula básica de luz, el fotón, juega un papel fundamental. Existen básicamente cuatro grupos de dispositivos fotónicos: **diodos emisores de luz** (LED's) y **diodos láser**, que convierten la energía eléctrica en energía óptica; los **fotodetectores**, que electrónicamente detectan señales ópticas y las **celdas solares**, que convierten la energía óptica en energía eléctrica. Para efectos de este trabajo, como ya se ha mencionado anteriormente, únicamente consideraremos el estudio de los diodos láser.

\* La palabra LÁSER es el acrónimo en idioma inglés de Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation, que significa amplificación de luz por emisión estimulada de radiación.

### 6.1 TRANSICIONES RADIANTES

La Figura 6.1 nos muestra el espectro electromagnético de la región óptica y en él podemos ver que el intervalo de luz detectable por el ojo humano se extiende únicamente desde aproximadamente 0,4  $\mu\text{m}$  hasta 0,7  $\mu\text{m}$ . Esta figura también muestra, en la escala expandida, las principales bandas de color desde el violeta hasta el rojo. La región ultravioleta incluye las longitudes de onda desde 0,01  $\mu\text{m}$  (es decir 100  $\text{\AA}$  ó 10 nm) hasta 0,4  $\mu\text{m}$  y la región infrarroja se extiende desde 0,7  $\mu\text{m}$  hasta 1000  $\mu\text{m}$ . En este capítulo, para realizar el estudio de los diodos láser, nos interesa principalmente la frontera entre los intervalos de longitud de onda del infrarrojo cercano y el infrarrojo medio, la cual se encuentra definida aproximadamente en 1,5  $\mu\text{m}$ . Esto se debe a que el dispositivo emisor que se desea acoplar a la fibra óptica monomodo emite un haz láser precisamente a 1,55  $\mu\text{m}$ , que es una de las longitudes de onda (ventana de transmisión) más utilizadas en la actualidad dentro de los sistemas de comunicación de larga distancia por fibra óptica.

En concordancia con las reglas de la mecánica cuántica, todas las partículas, ya sean pequeñas o grandes, tienen estados discretos de energía (niveles) que se relacionan con diferentes movimientos periódicos de los núcleos y electrones que las constituyen. El nivel de menor energía posible se denomina el **estado base** y los otros estados son llamados **estados excitados**. En cualquier instante de tiempo la partícula ocupará uno de estos estados de energía.

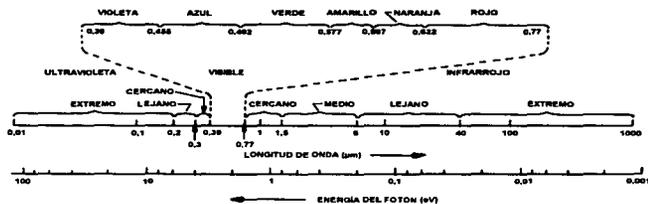


Figura 6.1 El espectro electromagnético desde la región ultravioleta hasta la región infrarroja.

En un medio denso como un sólido, líquido o gas a alta presión, los átomos o moléculas están en constante colisión entre ellos provocando frecuentemente que salten de un nivel de energía a otro; en muchos casos un átomo o molécula también puede cambiar su nivel de energía mediante una transición permitida ópticamente. Ésta es una transición entre niveles de energía que involucra la absorción o emisión de un fotón de acuerdo a la condición de resonancia  $\Delta E = h\nu$  donde  $\Delta E$  es la diferencia entre los niveles de energía inicial y final,  $h$  es la constante de Planck y  $\nu$  es la frecuencia del fotón.

En la parte inferior de la Figura 6.1, en una escala horizontal separada, se muestra también el nivel de energía de fotón. Para convertir la longitud de onda a energía de fotón, debemos utilizar la siguiente ecuación:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{h\nu} = \frac{1,2398}{h\nu} \quad \text{--- (6.1)}$$

Donde:  $\lambda$  = longitud de onda de la luz medida en  $\mu\text{m}$   
 $c$  = velocidad de la luz en el vacío ( $2,998 \times 10^8 \text{ m/s}$ )  
 $h$  = constante de Planck ( $6,625 \times 10^{-34} \text{ Joule}\cdot\text{s}$  ó  $4,135 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}$ )  
 $\nu$  = frecuencia de la luz (fotón)  
 $h\nu$  = energía del fotón medida en electrón-volts (eV)

Por ejemplo, a la luz verde cuya longitud de onda es de  $0,5 \mu\text{m}$  le corresponde una energía de fotón de 2,48 eV.

## 6.2 EMISIÓN ESTIMULADA VS. ABSORCIÓN

Existen básicamente tres procesos para la interacción entre un fotón y un electrón dentro de un sólido: absorción, emisión espontánea y emisión estimulada; utilizaremos un sistema muy simple para mostrar estos procesos.

Consideremos dos niveles de energía  $E_1$  y  $E_2$  en un átomo, donde  $E_1$  corresponde al estado de base y  $E_2$  corresponde a un estado excitado (Fig. 6.2). Cualquier transición entre estos estados involucra la emisión o absorción de un fotón con una frecuencia  $\nu_{12}$  dada por  $h\nu_{12} = E_2 - E_1$ , por lo que la ecuación (6.1) se puede reescribir de la forma:

$$\lambda = \frac{1,2398}{|E_2 - E_1|} \quad \text{--- (6.1a)}$$

Donde:  $\lambda$  = longitud de onda de la luz medida en  $\mu\text{m}$

$E_1$  = nivel de energía antes de la transición

$E_2$  = nivel de energía después de la transición

A temperatura ambiente la mayoría de los átomos en un sólido se encuentran en el estado base, situación que se ve modificada cuando un fotón con una energía exactamente igual a  $h\nu_{12}$  es introducido en el sistema y absorbido por un átomo que se encuentre en el estado  $E_1$ , dando como resultado su transición al estado excitado  $E_2$ . Este cambio en el estado energético es llamado proceso de **absorción** y se muestra en la Figura 6.2(a).

El estado excitado del átomo se caracteriza por ser inestable y después de un corto tiempo, sin necesidad de ningún estímulo externo, se realiza una transición nuevamente al estado base que produce un fotón de energía  $h\nu_{12}$  en resonancia, dando como consecuencia la conservación total de la energía; este proceso se conoce como **emisión espontánea** (Figura 6.2b). Por otro lado, cuando un fotón de energía  $h\nu_{12}$  incide sobre un átomo que se encuentra en el estado excitado (Fig. 6.2c), dicho átomo puede ser estimulado para realizar una transición hacia el estado base, emitiendo un fotón de energía  $h\nu_{12}$  que estará en fase con la radiación incidente; este proceso se denomina **emisión estimulada**. La radiación producida mediante el proceso de emisión estimulada es monocromática (lo que significa que tiene una sola longitud de onda) porque cada fotón tiene precisamente una energía  $h\nu_{12}$ , es coherente (es decir, viaja en una sola dirección) porque todos los fotones emitidos se encuentran en fase y conserva la misma polarización del fotón de excitación.

Basados en lo anterior podemos deducir que el proceso de operación dominante en el diodo emisor de luz (LED) es la emisión espontánea, para el fotodetector y la celda solar es la absorción y finalmente la emisión estimulada es la base para la amplificación de fotones y constituye el mecanismo fundamental que sustenta toda actividad láser. La teoría de la mecánica cuántica nos muestra que la emisión estimulada es análoga a la absorción, por lo que es tratada de forma similar como veremos a continuación.

Para entender el equilibrio crítico existente entre la absorción, la emisión estimulada y la emisión espontánea y que esencialmente define el criterio de la actividad láser, debemos examinar las tasas relativas de estos procesos de acuerdo con los coeficientes  $A$  y  $B$  definidos por *Einstein*, los cuales son parámetros únicos de una transición particular y de un material en particular. El coeficiente  $A$  se refiere a la probabilidad de la emisión espontánea mientras que el coeficiente  $B$  se refiere a las probabilidades de la absorción y de la emisión estimulada.

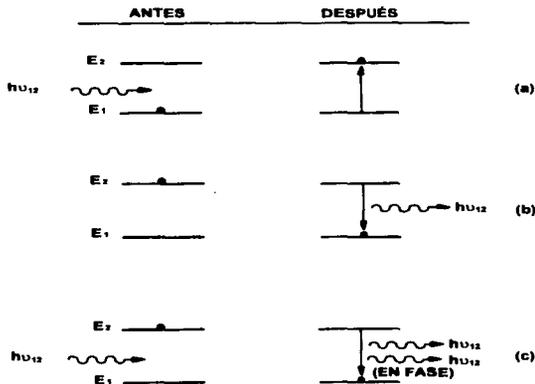


Figura 6.2 Los tres procesos básicos de transición entre dos niveles de energía; los puntos negros indican el estado del átomo. El estado inicial se encuentra a la izquierda y el estado final, después de la transición, es el de la derecha. (a) Absorción. (b) Emisión espontánea. (c) Emisión estimulada.

Considerando el caso simple, similar al de la Figura 6.2, de un sistema de dos niveles donde al nivel inferior lo llamamos  $E_1$  y al nivel superior lo designamos como  $E_2$ , las tasas de transición relativas pueden ser expresadas en términos de las poblaciones instantáneas de  $E_1$  y  $E_2$  que asumiremos como  $N_1$  y  $N_2$ , respectivamente y de los coeficientes de *Einstein*  $A_{21}$  y  $B_{21}=B_{12}$  (Los subíndices de los coeficientes indican la dirección de la transición; por ejemplo, el coeficiente  $B_{12}$  se refiere a la transición  $E_1 \rightarrow E_2$ ). Bajo una condición de equilibrio térmico y para  $(E_2 - E_1) > 3kT$ , la población está dada por la distribución de termodinámica estadística de Boltzmann:

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\left(\frac{E_2 - E_1}{kT}\right)} = e^{-\left(\frac{h\nu_{12}}{kT}\right)} \quad \text{--- (6.2)}$$

El exponente negativo indica que  $N_2$  es menor que  $N_1$  en la condición de equilibrio térmico; esto es, una cantidad mayor de electrones se encuentran en el nivel inferior de energía.

Conforme un fotón resonante ( $\Delta E = h\nu$ ) pasa a través de un volumen de estas partículas de dos niveles, este puede interactuar con una partícula del nivel  $E_1$  y ser aniquilado en un proceso de absorción; la probabilidad de que esto ocurra es proporcional a  $B_{12} \cdot N_1$ . Alternativamente, este fotón podría interactuar con una partícula que se encontrara en el nivel excitado  $E_2$  y generar un segundo fotón con características idénticas; la probabilidad de este proceso de emisión estimulada es  $B_{21} \cdot N_2$ .

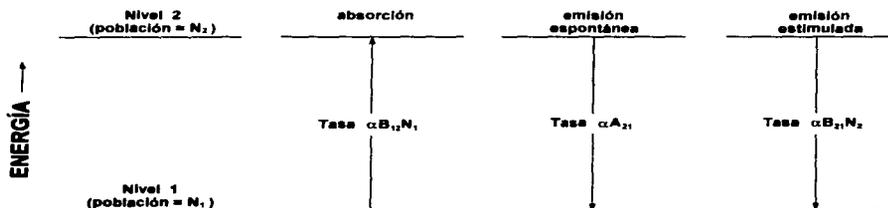


Figura 6.3 Tasas relativas de los procesos de ABSORCIÓN y EMISIÓN.

En otras palabras, en el estado estable la tasa de emisión estimulada (es decir, el número de transiciones de emisión estimulada por unidad de tiempo) y la tasa de emisión espontánea deben ser balanceadas por la tasa de absorción, de tal forma que las poblaciones  $N_1$  y  $N_2$  se mantengan constantes. La tasa de emisión estimulada es proporcional a la densidad de energía en el campo de fotones  $\rho(h\nu_{12})$ , que es la energía total en el campo de radiación por unidad de volumen por unidad de frecuencia; en consecuencia, esta tasa puede ser escrita como  $B_{21}N_2\rho(h\nu_{12})$ , donde  $N_2$  es el número de electrones en el nivel superior y  $B_{21}$  es la constante de proporcionalidad.

Por otro lado, la tasa de emisión espontánea solamente es proporcional a la población del nivel superior y puede ser escrita como  $A_{21}N_2$ , donde  $A_{21}$  es una constante; a su vez la tasa de absorción es proporcional a la población de electrones en el nivel inferior y a  $\rho(h\nu_{12})$ , pudiéndose escribir de la forma  $B_{12}N_1\rho(h\nu_{12})$ , donde  $B_{12}$  es también la constante de proporcionalidad. Por lo tanto, en el estado estable tenemos la siguiente condición:

$$\text{Tasa de emisión estimulada} + \text{Tasa de emisión espontánea} = \text{tasa de absorción}$$

de otra forma:

$$B_{21}N_2\rho(h\nu_{12}) + A_{21}N_2 = B_{12}N_1\rho(h\nu_{12}) \quad \text{--- (6.3)}$$

De la ecuación anterior podemos observar que:

$$\frac{TEEs}{TEE} = \frac{B_{21}}{A_{21}}\rho(h\nu_{12}) \quad \text{--- (6.4)}$$

Donde:  $TEEs$  = Tasa de emisión estimulada  
 $TEE$  = Tasa de emisión espontánea

Para incrementar la emisión estimulada sobre la emisión espontánea, se deberá obtener una gran densidad de energía en el campo fotónico  $\rho(h\nu_{12})$  y a su vez, para lograr esta densidad, es necesario utilizar una cavidad resonante óptica de tal forma que se incremente el campo fotónico. De la ecuación (6.3) también podemos observar que:

$$\frac{TEEs}{TA} = \frac{B_{21}}{B_{12}} \left[ \frac{N_2}{N_1} \right] \quad \text{--- (6.5)}$$

Donde:  $TEEs$  = Tasa de emisión estimulada  
 $TA$  = Tasa de absorción

Si deseamos que la emisión estimulada de fotones domine sobre la absorción, debemos tener una mayor densidad de electrones en el nivel superior que en el nivel inferior, es decir, si  $N_2 > N_1$  existe la posibilidad de promediar la amplificación en su totalidad para un arreglo de fotones pasando a través de un volumen de partículas de dos niveles energéticos. Esta condición es conocida como **inversión de población** ya que bajo un estado de equilibrio la situación que se presenta es la inversa.

En base a lo anterior, es conveniente considerar varias formas para lograr una gran densidad de energía en el campo fotónico así como una condición de inversión de población, de tal forma que la emisión estimulada se vuelva dominante sobre la emisión espontánea y sobre la absorción.

La emisión espontánea decrementa  $N_2$  a una tasa proporcional a  $A_{21}$ , produciendo fotones indeseables con características aleatorias de fase, dirección de propagación y polarización. Por esta razón y otras pérdidas asociadas con el diseño de la cavidad láser, cada láser tiene un valor mínimo de  $(N_2 - N_1)$  que puede dar origen a la actividad láser; esta condición es conocida como **umbral de inversión**.

## 6.3 ALGUNOS LÁSERES SEMICONDUCTORES Y SUS ESTRUCTURAS

### 6.3.1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS

El principio de la actividad láser en un diodo fue demostrado por primera vez en 1962, pero no ha sido sino hasta la última década que esta tecnología ha sido utilizada comúnmente. La mayoría de los diodos láser son fabricados con compuestos III-V, tales como: arseniuro de galio, fosfato de indio, arseniuro de indio y compuestos mucho más complejos; sin embargo, los materiales más importantes son el arseniuro de galio y sus derivados y compuestos basados en fosfato de indio, con longitudes de onda de emisión de 630 nm a 980 nm y 1300 nm a 1550 nm respectivamente. Algunos otros láseres son fabricados utilizando sales de plomo, pero no serán considerados dentro de nuestro estudio.

Durante la década de los 80's, impulsados por la demanda de reproductores de audio de disco compacto, los fabricantes de diodos tuvieron éxito en la tarea de sacar esta tecnología de los laboratorios de investigación y llevarla al mercado de los consumidores comunes; desde ese momento, ha existido una presión continua de los fabricantes de dispositivos hacia una mayor potencia, diversas longitudes de onda y mejor confiabilidad. A longitudes de onda menores a 850 nm, esta presión ha sido producida principalmente por el advenimiento de la era de la información y el entretenimiento, ya que las longitudes de onda cortas se requieren para almacenar en disco una película de dos horas o el acervo de una biblioteca, mientras que las altas potencias son deseables para acelerar el proceso de escritura en un disco. A longitudes de onda mayores (950 nm a 1600 nm), la presión por dispositivos mejorados está soportada primordialmente por el incremento en los requerimientos de la industria de las telecomunicaciones. Algunas otras industrias han tomado ventaja de la tecnología de los diodos láser pero la demanda agregada de todas estas otras aplicaciones es menor al 10% del total.

---

Los láseres semiconductores son similares al láser de rubí de estado sólido y al láser de gas de Helio-Neón, en el sentido de que la radiación emitida es altamente monocromática (el ancho de banda espectral es muy angosto) y que producen un haz de luz altamente direccional (altamente coherente), además de contar con todas las ventajas generales y conveniencias de los semiconductores y dispositivos de estado sólido. Son compactos (con una longitud del orden de 0,1 mm), eficientes, costeables y en muchas formas superiores a los láseres que no son de estado sólido, ya que un encapsulado de 500 mm<sup>3</sup> puede contener un láser monomodal de 150 mW de potencia con una vida útil que puede exceder las 50 000 hrs. Además, su eficiencia global del 20% y los bajos voltajes de operación convierten a los diodos láser en una clara opción para las aplicaciones operadas mediante baterías. Finalmente, la pequeña geometría y la naturaleza de la cavidad que sostiene la actividad láser simplifican la modulación de la emisión, al requerir simplemente la modulación de la corriente de alimentación a frecuencias que llegan hasta 1 GHz y mayores.

El diodo láser se ha abierto camino hacia muy diversas aplicaciones, más allá de su uso primario en el campo de las telecomunicaciones, discos compactos, impresión láser, etc., convirtiéndose en un elemento primordial de otros mercados. Aplicaciones tales como el alineamiento y señalamiento (apuntadores) se pueden encontrar en la manufactura de diversos productos, medicina, construcción y armamento, siendo el rastreo de código de barras, la metrología, medición de distancia y de partículas y visión de maquinaria algunas otras de las aplicaciones industriales más significativas. Por otro lado el diodo láser es una fuente sintonizable ideal para aplicaciones de espectroscopía en diagnósticos industriales y médicos (p.ej. espectroscopía de gases en alta resolución). Mirando hacia el futuro, se espera que el diodo láser juegue un papel protagónico en el monitoreo ambiental (monitoreo de la contaminación atmosférica) y en el mercado de los sensores basados en fibra óptica.

### 6.3.2 ACTIVIDAD LÁSER EN UNIONES SEMICONDUCTORAS SIMPLES

Tal y como hemos visto anteriormente, en la unión entre un semiconductor tipo *p* y un semiconductor tipo *n*, existen condiciones electrónicas muy peculiares. Estas condiciones constituyen el fundamento para la operación de los transistores y todos los circuitos integrados y por supuesto, también son la base para la operación de los diodos láser.

Los niveles de energía de una unión *p-n* simple, se muestran en la Figura 6.4. Cuando se aplica un voltaje a la unión, el nivel de *Fermi* en cada lado de la unión se mueve y la corriente fluye a través de ella; los electrones fluyen hacia la región de tipo *p* y los huecos se mueven hacia la región tipo *n*.

Este sistema, se relaja nuevamente hacia la distribución equilibrada de electrones (*Boltzmann*), mediante la *de-excitación* de éstos por el proceso de emisión espontánea y produciendo cada uno de ellos, la emisión de un solo fotón del tamaño de la separación entre bandas; este es el mecanismo que sustenta la operación de un diodo emisor de luz (LED). Este proceso puede ser considerado también como la recombinación de electrones y huecos en la región de la unión, con la energía resultante siendo liberada en forma de luz.

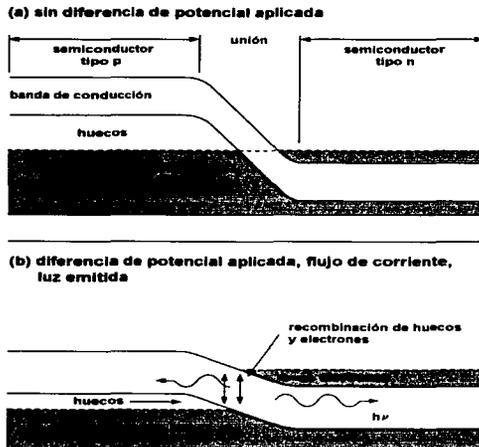


Figura 6.4 Estructura idealizada de bandas de una unión  $p-n$  formada por semiconductores altamente dopados. Cuando la corriente fluye a través de la unión, los electrones y los huecos se recombinan, esto significa que los electrones se relajan de la banda de conducción a la banda de valencia. La energía generada durante el proceso de relajamiento es liberada como fotones (uno por electrón), cuya frecuencia es igual a  $\Delta E/h$ , siendo  $\Delta E$  la separación efectiva entre bandas y  $h$  la constante de Planck.

Si los semiconductores tipo  $p$  y tipo  $n$  presentes en una unión están lo suficientemente dopados y se les aplica una corriente elevada, se puede inducir una inversión de población de electrones y huecos en la región de la unión; paralelamente, al contener esta unión en una cavidad óptica alineada a lo largo de la unión y no a través de ella, es posible producir un láser.

Por otro lado, el índice de refracción de los semiconductores es bastante elevado a las longitudes de onda de emisión, por lo que existe la suficiente reflexión en una interfase aire/semiconductor como para sostener la actividad láser. En muchos diodos láser de baja potencia ni siquiera es necesario pulir o tratar con un recubrimiento especial las caras de emisión de su estructura ya que los cortes que se hacen ocurren a lo largo de los planos atómicos, dando como resultado superficies muy suaves.

### 6.3.3 LÁSERES DE HOMOUNIÓN Y HETEROUNIÓN

En la Figura 6.5 se muestran tres variantes de la estructura de un láser semiconductor. La Primera estructura, Figura 6.5(a), es un láser de unión básica  $p-n$  denominado láser de **Homounión** porque tiene el mismo material semiconductor (p.ej. Arseniuro de Galio) en ambos lados de la unión. Un par de planos paralelos o caras se cortan y pulen perpendicularmente al eje  $z$  (conocido también como eje óptico o eje de propagación) originando que, bajo condiciones adecuadas de energización, el haz láser sea emitido desde estos planos (en la Figura 6.5 solamente se muestra la emisión frontal) y los dos lados restantes del diodo se hacen ásperos para eliminar la emisión láser (*lasing*) en cualquiera otra dirección que no sea la principal. Esta estructura es llamada cavidad *Fabry-Perot* y tiene una longitud típica  $L$  de aproximadamente 300  $\mu\text{m}$ . Es importante mencionar que la configuración de cavidad *Fabry-Perot* es una de las que más extensamente se utilizan en los láseres semiconductores modernos.

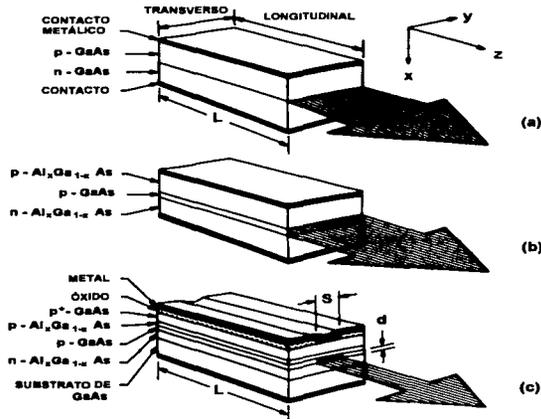


Figura 6.5 Estructuras de un diodo láser en la configuración de cavidad *Fabry-Perot*. (a) Láser de Homounión. (b) Láser de Doble Heterounión (DH). Láser DH de geometría en banda.

Desde que aparecieron los primeros láseres semiconductores, han ocurrido muchos avances en lo que respecta a la eficiencia, así como un incremento en la vida útil y en el intervalo espectral cubierto. Específicamente, el uso de heterouniones ha disminuído considerablemente la corriente de umbral de la actividad láser y al mismo tiempo ha incrementado la potencia de salida.

Una **Heterounión**, es una unión semiconductor formada por dos materiales diferentes; una de ellas, utilizada en los diodos láser, es la que se forma entre el Arseniuro de Galio (GaAs) y el Arseniuro de Aluminio Galio (AlGaAs) siendo ésta, la más común en la actualidad para la fabricación de diodos láser, ya que puede ser preparada para emitir en cualquier punto del intervalo entre 700 nm y 850 nm.

La Figura 6.5(b) muestra un láser de **Doble-Heteroestructura (DH)**, en el que una capa delgada de material semiconductor (p.ej. GaAs) es colocada entre capas de un material semiconductor diferente (p.ej.  $Al_xGa_{1-x}As$ , donde x es la fracción molar compuesta por AlAs; en otras palabras, es la proporción de aluminio dentro del compuesto). Este láser puede ser fabricado utilizando técnicas epitaxiales de crecimiento de cristales y presenta la ventaja de que requiere una cantidad mucho menor de corriente para operar, en comparación con un láser de homounión de geometría idéntica.

Las estructuras láser mostradas en las Figuras 6.5(a) y 6.5(b) son láseres de "área amplia" porque toda el área a lo largo del plano de la unión puede emitir radiación láser. En contraste, la Figura 6.5(c) muestra un láser DH de geometría en banda en el que una capa de óxido aísla toda la superficie excepto la banda de contacto; consecuentemente el área activa (área de emisión láser) queda restringida a una región angosta debajo del contacto. El ancho  $\delta$  de la banda, típicamente oscila entre 5 y 30  $\mu\text{m}$  y aporta ventajas significativas a esta geometría, tales como: corriente de operación reducida, eliminación de áreas de emisión múltiple a lo largo de la unión y confiabilidad mejorada como resultado de la remoción de la mayor parte del perímetro de la unión.

### 6.3.4 LÁSERES GUIADOS POR GANANCIA Y LÁSERES GUIADOS POR ÍNDICE

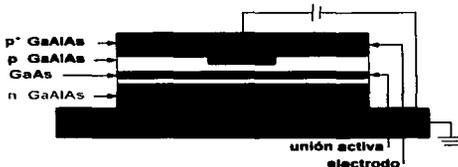
El confinamiento de la acción láser a la región de la unión es asegurado por las propiedades naturales de la misma, tal y como se discutió anteriormente. Sin embargo, el confinar la actividad láser dentro de una banda localizada de la unión (es decir, confinamiento en el plano de la unión) es un problema distinto. Existen dos mecanismos básicos mediante los cuales se puede lograr esto: **guiado por ganancia** y **guiado por índice** (ver Figura 6.6).

Los primeros diodos láser fueron guiados por ganancia y en ellos la actividad láser es confinada por el flujo de portadores de carga en la unión, el cual está definido por la forma de banda del electrodo. La radiación láser dentro de la cavidad presenta un perfil Gaussiano, en el que la cola del haz se extiende fuera de la región de flujo de corriente.

En el caso de los láseres guiados por índice, la radiación es confinada a un canal de guía de onda formado junto a la región activa. Este canal es creado mediante un procedimiento relativamente simple de enmascarado, durante el proceso de deposición de la oblea. Como consecuencia, la radiación queda confinada por los cuatro lados debido a discontinuidades en el índice de refracción y se obtiene como principal ventaja la reducción en el astigmatismo del haz emitido, situación que se explicará más adelante en este mismo capítulo.

Las variaciones que se han desarrollado sobre las geometrías básicas de los diodos láser que se han descrito previamente son muy numerosas para ser listadas y quedan fuera del objetivo de este trabajo. No obstante, podemos mencionar que se han diseñado para una operación en alta potencia y/o ancho de banda angosto e incluyen uniones de listón, configuraciones de tipo meseta, uniones de canal y estructuras de espejo no absorbente; solo por mencionar algunas.

#### GUIADO POR GANANCIA



#### GUIADO POR ÍNDICE

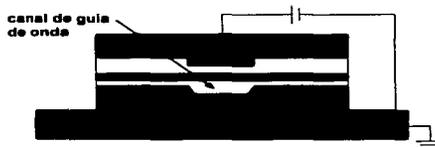


Figura 6.6 Vista de la cara frontal de dos de los tipos más comunes de diodos láser comerciales. En el láser guiado por ganancia, el confinamiento lateral del haz está determinado por la forma de la región de ganancia, que a su vez es definida por la corriente. En el diodo láser guiado por índice, el haz se confina a un canal de guía de onda que corre en forma adyacente a la capa activa.

## 6.4 OPERACION DEL LÁSER SEMICONDUCTOR

### 6.4.1 INVERSIÓN DE POBLACIÓN

Como se discutió en las secciones 6.2 y 6.3.2, para incrementar la emisión estimulada de tal forma que se produzca la operación láser, requerimos de la condición de inversión de población. Para lograr la inversión de población en un láser semiconductor debemos considerar una unión  $p$ - $n$  formada por semiconductores degenerados, esto es, una en la que los niveles de *Fermi* ( $E_F$ ) estén por debajo del límite de la banda de valencia ( $E_V$ ) en el lado  $p$  y por arriba del límite de la banda de conducción ( $E_C$ ) en el lado  $n$ . La Figura 6.7(a) muestra el diagrama de banda de un dispositivo de este tipo en estado de equilibrio térmico.

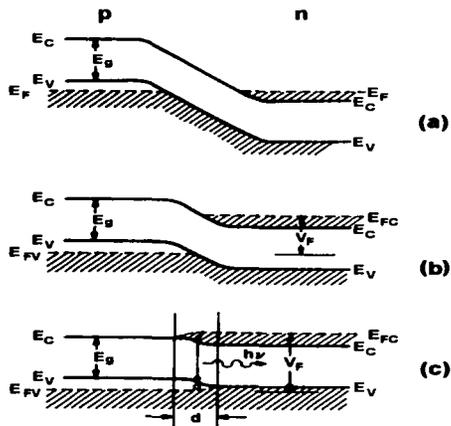


Figura 6.7 Diagramas de banda de energía en una unión  $p$ - $n$  degenerada. (a) En equilibrio térmico. (b) Bajo condición de corriente de umbral aplicada en sentido directo. (c) Bajo condición de alta inyección.

---

Quando aplicamos al diodo una corriente de alimentación en sentido directo (Figura 6.7b), los electrones son inyectados desde el lado *n* y los huecos son inyectados desde el lado *p* hacia la región de transición. Cuando se aplica una corriente de alimentación lo suficientemente grande (Figura 6.7c) ocurre la condición denominada de alta inyección, lo que significa que grandes concentraciones de electrones y huecos son inyectados hacia la región de transición; como resultado, la región *d* (Figura 6.7c) contendrá una gran concentración de electrones en la banda de conducción y una gran concentración de huecos en la banda de valencia; esta es la condición de inversión de población.

Para la transición banda-a-banda, la energía mínima requerida es la energía de separación de banda  $E_g$ ; por lo tanto, de la Figura 6.7(c), podemos deducir que la condición necesaria para que se presente la inversión de población es:

$$(E_{FC} - E_{FV}) > E_g \quad \text{--- (6.6)}$$

#### 6.4.2 CONFINAMIENTO DE PORTADORES Y CONFINAMIENTO ÓPTICO

Existen ventajas en la estructura de una heterounión que conducen a una actividad láser mejorada. Una de ellas, que se refiere al confinamiento electrónico producido por la diferencia en la separación entre bandas, ayuda a confinar uno de los portadores (huecos o electrones) dentro de la región de la unión y consecuentemente, la ganancia óptica teórica por unidad de volumen se incrementa en la región de la unión.

Por otro lado, un diodo láser es susceptible a las pérdidas internas por la dispersión de la radiación fuera de la pequeña unión de alta ganancia. Por esta razón la heterounión cuenta con una ventaja adicional: la discontinuidad en los índices de refracción en la interfase de los materiales semiconductores ayuda a confinar la radiación láser dentro de la región de ganancia, particularmente cuando el ángulo de incidencia sobre dicha interfase es muy oblicuo.

Posteriormente, el desarrollo del diodo láser de doble heterounión (DH) dió como resultado mayores ventajas ya que como se puede ver en la Figura 6.8, en esta estructura **ambos** tipos de portadores son reflejados hacia adentro de la unión por barreras de potencial del signo adecuado; en consecuencia, una doble heterounión puede ser hasta 20 veces más eficiente que un láser de homounión simple.

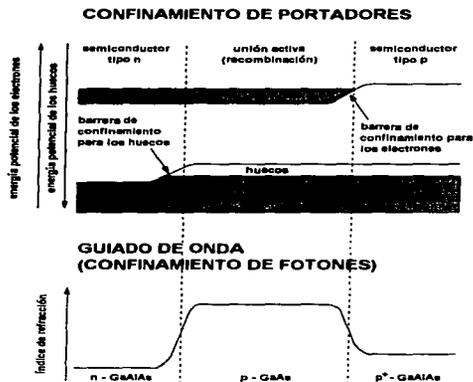


Figura 6.8 En un diodo láser de doble heterounión, los portadores son confinados a la región activa por barreras de potencial y la radiación láser es confinada por el efecto de guía de onda debido a los gradientes en los índices de refracción.

La Figura 6.9 muestra representaciones esquemáticas del diagrama de bandas bajo la condición de corriente de alimentación aplicada en sentido directo, el perfil de índice de refracción y la distribución del campo óptico de la luz generada en la unión de un láser de homounión (Figura 6.9a) y en un láser DH (Figura 6.9b). Como se puede observar en el caso del láser DH, los portadores están confinados en ambos lados de la región activa por efecto de las barreras de la heterounión, mientras que en el láser de homounión los portadores pueden desplazarse fuera de la región activa donde ocurre la recombinación radiante.

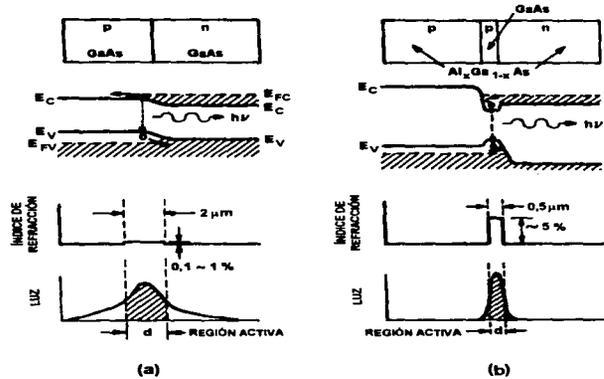


Figura 6.9 Comparación entre algunas de las características del (a) láser de homounión y del (b) láser de doble-heterounión (DH); en el segundo renglón de arriba hacia abajo se muestran los diagramas de la banda energética bajo la condición de corriente de umbral aplicada en sentido directo. El cambio en el Índice de refracción para un láser de homounión es menor al 1%, mientras que en el láser DH se encuentra alrededor del 5%. El confinamiento de la luz se muestra en los diagramas del último renglón.

El campo óptico también se encuentra confinado dentro de la región activa por la abrupta reducción en el índice de refracción fuera de ella; este confinamiento puede ser explicado mediante la Figura 6.10, en la que se muestra una guía de onda dieléctrica de tres capas con índices de refracción  $n_1$ ,  $n_2$  y  $n_3$ , siendo la capa intermedia una capa activa colocada entre dos capas confinantes (Fig. 6.10a). Bajo la condición  $n_2 > n_1 \geq n_3$ , el ángulo de rayo  $\theta_{12}$  en la interfase de las capas 1 y 2 (Fig. 6.10b) excede el ángulo crítico dado por la ecuación:

$$\text{seno } \theta_c = \frac{n_1}{n_2} \cong \frac{n_3}{n_2} \quad \text{--- (6.7)}$$

Una situación similar ocurre para  $\theta_{23}$  en la interfase de las capas 2 y 3.

Por lo tanto, cuando el índice de refracción en la capa activa es mayor que el índice de las capas que la rodean, la propagación de la radiación electromagnética es guiada (confinada) en una dirección paralela a las interfaces de las capas.

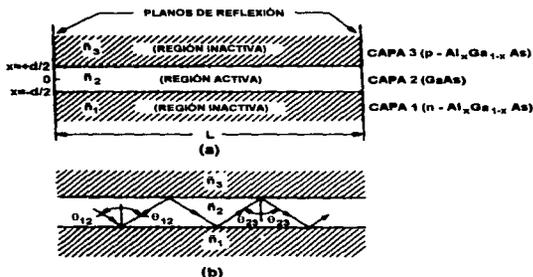


Figura 6.10 (a) Representación de una guía de onda dieléctrica de tres capas. (b) Trayectoria de un rayo de la onda guiada.

Podemos definir un factor de confinamiento  $\Gamma$ , que es la razón entre la intensidad de la luz dentro de la capa activa y la suma de las intensidades de luz dentro y fuera de dicha capa. El factor de confinamiento está dado por:

$$\Gamma \equiv 1 - e^{-(C\Delta n d)} \quad \text{--- (6.8)}$$

donde  $C$  es una constante,  $\Delta n$  es la diferencia entre los índices de refracción y  $d$  es el espesor de la capa activa. Es claro que mientras más grandes sean  $\Delta n$  y  $d$ , el factor de confinamiento  $\Gamma$  también será mayor.

### 6.4.3 DENSIDAD DE CORRIENTE DE UMBRAL

Uno de los parámetros más importantes para la operación del láser semiconductor es la densidad de corriente de umbral  $J_{th}$ , que es la densidad de corriente mínima requerida para que se presente la actividad láser (*lasing*). En la Figura 6.11 se presenta la comparación de  $J_{th}$  versus la temperatura de operación tanto en un láser de homounión como en un láser DH; nótese que conforme la temperatura se incrementa,  $J_{th}$  crece mucho más lentamente para el diodo DH que para el diodo de homounión. Debido a los pequeños valores de  $J_{th}$  para el diodo DH a 300 K, estos láseres pueden ser operados en forma continua a temperatura ambiente; característica que ha conducido a su utilización, en forma cada vez mayor, especialmente para sistemas de comunicación por fibra óptica.

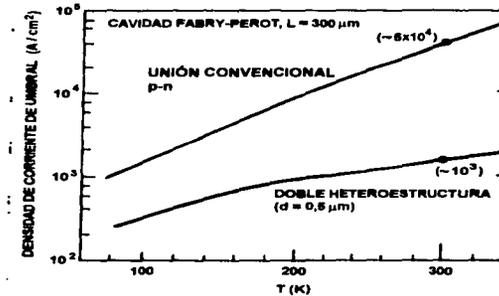


Figura 6.11 Densidad de corriente de umbral versus temperatura para las dos estructuras láser mostradas en la Figura 6.8.

En un láser semiconductor, la ganancia  $g$ , que es el flujo incremental de energía óptica por unidad de longitud, depende de la densidad de corriente. Dicha ganancia puede ser expresada como función de una densidad de corriente nominal  $J_{nom}$ , que es definida para una eficiencia cuántica unitaria (es decir, número de portadores generados por fotón,  $\eta = 1$ ) como la densidad de corriente requerida para excitar uniformemente una capa activa de  $1 \mu m$  de espesor.

La densidad de corriente real está dada por:

$$J \left( \frac{A}{cm^2} \right) = \frac{J_{nom} d}{\eta} \quad \text{--- (6.9)}$$

donde  $d$ , es el espesor de la capa activa en  $\mu m$  y  $\eta$ , es la eficiencia cuántica.

La Figura 6.12 muestra la ganancia calculada para un láser DH típico de Arseniuro de Galio; esta ganancia se incrementa linealmente con  $J_{nom}$  para  $50 \leq g \leq 400 \text{ cm}^{-1}$  y la línea punteada puede describirse como:

$$g = \left( \frac{g_0}{J_0} \right) (J_{nom} - J_0) \quad \text{--- (6.10)}$$

donde  $g_0/J_0 = 5 \times 10^{-2} \text{ (cm}^{-1}\text{-}\mu\text{m)}/A$  y  $J_0 = 4,5 \times 10^3 \text{ A}/(\text{cm}^2\text{-}\mu\text{m})$ .

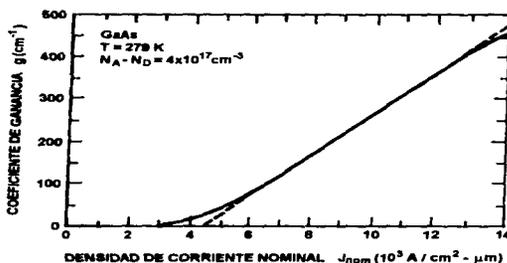


Figura 6.12 Variación del coeficiente de ganancia versus la densidad de corriente nominal. La línea punteada representa una dependencia lineal.

Como se discutió previamente, para bajas corrientes existe una emisión espontánea en todas direcciones y conforme la corriente se incrementa, la ganancia también crece (Figura 6.12) hasta que el umbral de la actividad láser es alcanzado; esto es, hasta que la ganancia satisface la condición de que una onda de luz realice un recorrido completo por la cavidad sin sufrir atenuación.

---

En forma de ecuación:

$$R \left[ e^{(\Gamma g - \alpha)L} \right] = 1 \quad \text{--- (6.11)}$$

ó

$$\Gamma g (\text{ganancia de umbral}) = \alpha + \frac{1}{L} \ln \left( \frac{1}{R} \right) \quad \text{--- (6.12)}$$

donde  $\Gamma$  es el factor de confinamiento,  $\alpha$  es la pérdida por unidad de longitud debida a la absorción y otros mecanismos de dispersión,  $L$  es la longitud de la cavidad (mostrada en las Figuras 6.5 y 6.10) y  $R$  es la reflectancia de los extremos de la cavidad (asumiendo que  $R$  es igual para ambos extremos). Las ecuaciones (6.9), (6.10) y (6.12) pueden ser combinadas para obtener la densidad de corriente de umbral como:

$$J_{th} \left( \frac{A}{cm^2} \right) = \frac{J_0 d}{\eta} + J_0 \frac{d}{g_0 \eta \Gamma} \left[ \alpha + \frac{1}{L} \ln \left( \frac{1}{R} \right) \right] \quad \text{--- (6.13)}$$

De la ecuación anterior se puede observar que para reducir  $J_{th}$ , podemos incrementar  $\eta$ ,  $\Gamma$ ,  $L$  y  $R$  y reducir el valor de  $d$  y  $\alpha$ .

## 6.5 ALGUNAS CARACTERÍSTICAS OPTOELECTRÓNICAS DEL LÁSER SEMICONDUCTOR

### 6.5.1 COMPORTAMIENTO TEMPORAL

En principio, cualquier diodo láser puede ser manejado en onda continua o en onda pulsada. Algunos dispositivos de alta potencia están diseñados específicamente para una operación pulsada y no pueden trabajar de forma continua por problemas de disipación de calor. Estos láseres están diseñados para generar una gran inversión de población la cual puede ser sostenida únicamente de forma pulsada y en la contraparte, la mayoría de los diodos láser de baja potencia ( $\leq 100$  mW) están diseñados para trabajar de forma continua o ser modulados rápidamente. Esto proporciona a los diodos láser una de sus propiedades más importantes, su habilidad para responder a modulaciones directas de alta velocidad.

### 6.5.2 CARACTERÍSTICAS P-I E I-V

La potencia de salida de un diodo láser es una función de la corriente que fluye a través de la unión activa. La Figura 6.13 muestra una gráfica típica de la potencia óptica de salida versus la corriente de entrada y en ella se puede apreciar que por arriba del umbral de la actividad láser, existe una región lineal de operación. Esta linealidad es una de las propiedades que hacen al diodo láser una solución ideal para la industria de las telecomunicaciones ya que la salida puede ser modulada a muy altas frecuencias y la potencia de salida seguirá linealmente la modulación de la corriente de alimentación.

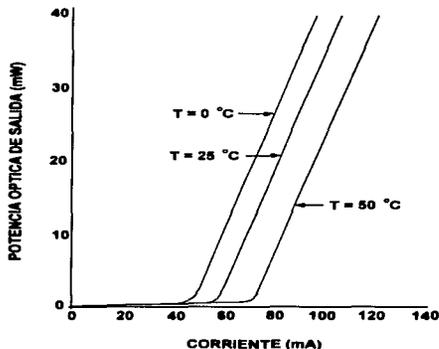


Figura 6.13 Curvas P-I para un diodo láser de Arseniuro de Aluminio Galio típico de la clase 3-50 mW.

En la Figura 6.14, se puede apreciar como los diodos láser de Arseniuro de Aluminio Galio, presentan curvas de corriente-voltaje (I-V) que son muy similares en forma a las de otros diodos. En ellas, la curvatura inicial corresponde al umbral de la actividad láser, que también corresponde al inicio de la región lineal de potencia.

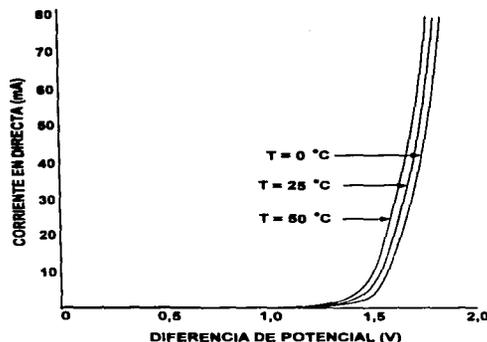


Figura 6.14 Curvas I-V para un diodo láser de Arseniuro de Aluminio Galio típico de la clase 3-50 mW.

Es necesario mencionar que los diodos láser se pueden operar más fácilmente si se manejan por corriente, aunque de primera instancia pueden ser controlados por voltaje. Sin embargo, como puede observarse en las figuras anteriores, una pequeña fluctuación en el voltaje resultaría en una gran fluctuación de corriente y en consecuencia un nivel controlado y estable de salida será muy difícil de alcanzar.

En la Figura 6.15 se presenta una comparación entre la corriente  $J_{th}$  calculada con la ecuación (6.13) y los resultados experimentales obtenidos de láseres DH ( $Al_xGa_{1-x}As-GaAs$ ); en ella se puede observar que la densidad de corriente de umbral decrece al incrementar  $d$ , alcanza un valor mínimo y nuevamente se incrementa. El incremento de  $J_{th}$  en capas activas de espesor muy delgado es causado por un confinamiento óptico pobre.

La Figura 6.16 muestra la dependencia de  $J_{th}$  con respecto a la temperatura para un láser DH ( $Al_xGa_{1-x}As-GaAs$ ) de geometría en banda y onda continua ( $cw=continuous\ wave$ ). En la Figura 6.16a se muestran diferentes curvas que representan la emisión de luz en onda continua en función de la corriente de inyección para diversas temperaturas entre 25° y 115° Celsius, en ellas se puede apreciar la excelente linealidad que se obtiene en la función luz-corriente. La corriente de umbral a una temperatura dada es el valor extrapolado para una potencia de salida nula.

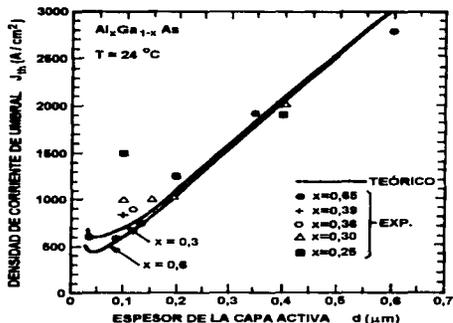


Figura 6.15 Comparación entre la densidad de corriente de umbral calculada y la obtenida experimentalmente.

En la Figura 6.16(b) se presenta la gráfica de diversas corrientes de umbral en función de la temperatura. La corriente de umbral se incrementa exponencialmente con la temperatura y este incremento está dado por:

$$I_{th} \approx e^{\left(\frac{T}{T_0}\right)} \quad \text{--- (6.14)}$$

dónde  $T$  es la temperatura en grados Celsius y  $T_0$  es 110 °C para el láser utilizado en la obtención de estas gráficas.

Para la aplicación en comunicaciones por fibra óptica, la fuente óptica debe ser capaz de soportar una modulación a altas frecuencias de tal forma que se pueda transmitir una gran cantidad de información. De forma contraria al caso del LED cuya potencia de salida decrece con el incremento en el ancho de banda de modulación, la potencia de salida de un láser típico de GaAs o GaInAsP permanece a un nivel constante (por ejemplo, 10mW en cada extremo de salida) en forma aceptable hasta el intervalo de los Ghz.

En la Figura 6.17 se muestra el espectro de emisión de un láser típico. Para bajas corrientes, la emisión espontánea presenta una distribución espectral amplia con un ancho total a la mitad de la intensidad máxima ( $FWHM = Full\ Width\ Half\ Maximum$ ) que varía entre 10 y 50 nm y conforme la corriente se aproxima al umbral, la distribución espectral se vuelve más angosta. Por arriba de la corriente de umbral, el láser puede alcanzar una emisión monocromática casi perfecta con un ancho espectral del orden de 0,1 a 1 nm.

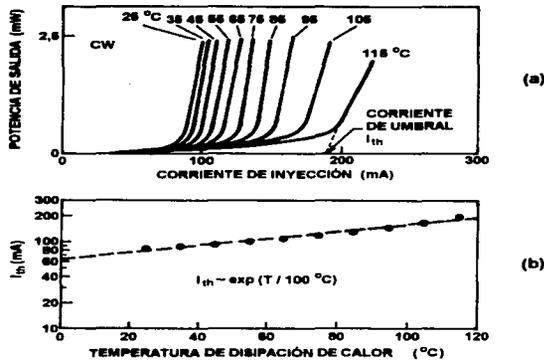


Figura 6.16 (a) Luz emitida versus la corriente del diodo para un láser de heteroestructura GaAs-Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As. (b) Dependencia con respecto a la temperatura de la corriente de umbral para operación en onda continua.

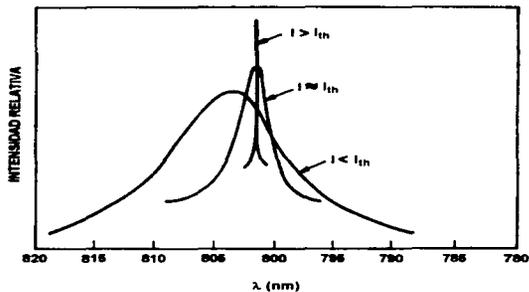


Figura 6.17 Espectro de emisión de un diodo láser bajo tres condiciones distintas de corriente de umbral: por debajo de ésta, justo en el valor y por arriba. Claramente se puede observar cómo la distribución espectral se hace angosta cuando la actividad láser se inicia.

La Figura 6.18 presenta, con una gran resolución, el espectro de emisión de un diodo láser de Doble Heteroestructura (DH)  $\text{InP-Ga}_x\text{In}_{1-x}\text{As}_y\text{P}_{1-y}$  con geometría en banda; dicha banda se forma por bombardeo de protones del área adyacente a ella, de manera que se produzcan regiones de alta resistividad y de esta forma el área activa que soportará la actividad láser quede restringida a la porción central que no es bombardeada (diagrama insertado en la Figura 6.18). Bajo una condición de corriente mayor al umbral, existen muchas líneas de emisión que están espaciadas en forma aproximadamente regular con una separación de  $\Delta\lambda \approx 0,75 \text{ nm}$ . Estas líneas de emisión pertenecen a los modos longitudinales, los cuales serán explicados a continuación.

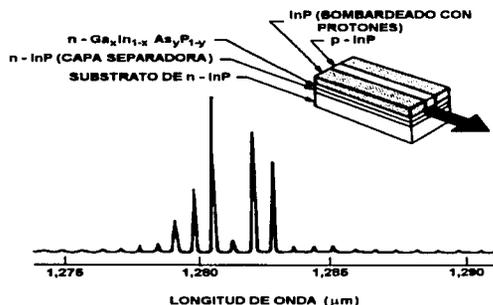


Figura 6.18 Espectro de emisión de alta resolución para un láser DH  $\text{InP-Ga}_x\text{In}_{1-x}\text{As}_y\text{P}_{1-y}$ .

### 6.5.3 MODOS LONGITUDINALES O AXIALES DE UN LÁSER

La amplificación, es solamente el comienzo del proceso en la mayoría de los láseres, dado que el incremento de luz conforme ésta pasa a través del volumen de amplificación (medio activo), es muy modesto. Si la radiación fuera amplificada solamente, durante un solo recorrido de dicho volumen, el dispositivo sería marginalmente útil; sin embargo, cuando las superficies reflejantes (espejos) son colocadas en los extremos del medio de amplificación, la luz es regresada a éste para experimentar una amplificación adicional. Pero las superficies reflejantes hacen más que confinar la mayor parte de la luz que se genera, también determinan la distribución de longitudes de onda que pueden soportar la amplificación dentro del láser.

En realidad, las caras reflejantes de la cavidad láser forman una estructura resonante, que guarda o soporta solamente ciertas frecuencias. Un buen ejemplo para comparación, es el caso de las resonancias de una cuerda de guitarra, en la cual, la nota que se produce cuando la cuerda es excitada mecánicamente, está determinada por la longitud física de la misma. De esta forma, al cambiar la posición de un dedo sobre la cuerda, la nota que se genera es diferente. Esta nota (que en realidad es más de una), está definida básicamente por dos parámetros: la tensión que el guitarrista haya aplicado a la cuerda y la longitud de ésta.

De lo anterior se desprende, que las condiciones impuestas a la cuerda de longitud  $L$ , producirán una nota cuya longitud de onda es tal, que un número entero de medias longitudes de onda será igual a  $L$ ; en otras palabras:

$$q \frac{\lambda}{2} = L \quad \text{--- (6.15)}$$

En la Figura 6.19, se muestra una **onda estacionaria** con tres medias longitudes de onda. En la mayoría de los dispositivos láser, a menos que se tomen ciertas precauciones especiales, diferentes longitudes de onda pueden satisfacer esta condición, llamada **condición de resonancia**. Estas longitudes de onda, son conocidas como los **modos axiales** del láser. Dado que  $L=q(\lambda/2)$ , donde  $q$  es un entero, las longitudes de onda soportadas por el láser serán:

$$\lambda_q = \frac{2L}{q} \quad \text{--- (6.16)}$$



Figura 6.19 Esquema representativo de una onda estacionaria.

Las frecuencias de estos modos, están dadas por  $\nu=c/\lambda$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz. Insertando la expresión para las longitudes de onda, las frecuencias de los modos resonantes están dadas por:

$$\nu_q = q \left( \frac{c}{2L} \right) \quad \text{--- (6.17)}$$

donde  $q$  se mantiene como un entero. En consecuencia, la separación en frecuencia, entre estos modos axiales, es igual a la diferencia entre los modos cuyos enteros correspondientes difieren por la unidad; es decir:

$$\Delta \nu = \nu_{q+1} - \nu_q = (q+1) \left( \frac{c}{2L} \right) - \frac{qc}{2L} = \frac{c}{2L} \quad \text{--- (6.18)}$$

de tal forma, que la separación entre modos adyacentes en un láser, es constante y depende de la distancia entre las superficies reflejantes; tal y como se muestra en la Figura 6.20.

Sin embargo, no debemos perder de vista que la banda de longitudes de onda que pueden mantener una emisión estimulada, está determinada por la estructura atómica del medio activo.

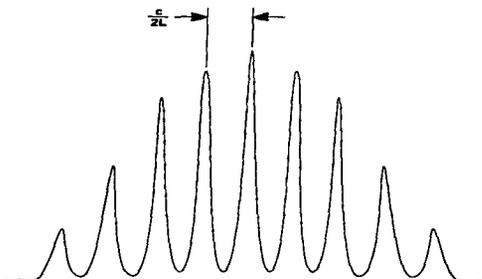


Figura 6.20 Distribución de los modos de un láser. En este esquema se presenta la distribución de potencia de salida en función de la frecuencia.

En una cavidad Fabry-Perot (Figuras 6.5 y 6.10a), si un número entero de medias longitudes de onda caben entre las dos caras reflejantes de los extremos (límites longitudinales de la cavidad), entonces una luz reforzada y coherente será reflejada hacia adelante y hacia atrás dentro de la cavidad. Por lo tanto, para la emisión estimulada, la longitud  $L$  de la cavidad debe satisfacer la condición dada por:

$$L = m \left( \frac{\lambda}{2n} \right) \quad \text{--- (6.19)}$$

ó

$$m\lambda = 2nL \quad \text{--- (6.19a)}$$

donde  $m$  es un número entero y  $n$  es el índice de refracción en el semiconductor, correspondiente a la longitud de onda  $\lambda$  (generalmente  $n$  es una función de  $\lambda$ ). La separación  $\Delta\lambda$  existente entre los modos permitidos en la dirección longitudinal es la diferencia entre las longitudes de onda correspondientes a  $m$  y  $m + 1$ .

---

Diferenciando la ecuación (6.19a) con respecto a  $\lambda$ , obtenemos:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2 \Delta m}{2\bar{n}L \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{\bar{n}} \right) \left( \frac{d\bar{n}}{d\lambda} \right) \right]} \quad \text{--- (6.20)}$$

Debido a estos modos longitudinales, el láser de geometría en banda no es una fuente de luz espectralmente pura y como se puede observar en la Figura 6.18 puede emitir luz en un intervalo cercano a los 5 nm. Para los sistemas de comunicación por fibra óptica, una fuente ideal de luz es aquella que tiene una sola frecuencia; esto se debe a que los pulsos de luz de diferentes frecuencias viajan a través de la fibra óptica a diferentes velocidades, causando el efecto conocido como dispersión de pulso. Por este motivo el láser básico de geometría en banda ha sido modificado de varias maneras, de tal forma que se logre la operación a una sola frecuencia.

Una primera aproximación para resolver este problema es la cavidad láser cortada-acoplada ( $C^3$ ), como la que se muestra en la Figura 6.21(a). El láser  $C^3$  consiste de dos diodos láser de cavidad Fabry-Perot que están alineados entre sí y acoplados muy cerca uno del otro para formar un resonador de dos cavidades. La banda activa de cada láser está alineada con gran exactitud con respecto a la otra formando una línea recta, con una separación entre ellas de aproximadamente 5  $\mu\text{m}$ ; debido a que la luz láser tiene que viajar a través de una cavidad adicional (modulador), la única radiación que es reforzada es la que se encuentra a una longitud de onda que es resonante tanto en la cavidad láser como en la cavidad adicional (modulador) y cualquier otra longitud de onda será suprimida. Por este motivo, los láseres de una sola frecuencia permiten a un sistema de comunicación por fibra óptica el transportar grandes cantidades de información a distancias muy considerables.

Las estructuras láser descritas anteriormente utilizan cavidades con caras o extremos que son formados por corte o pulido, para obtener la retroalimentación necesaria para sostener la actividad láser. Dicha retroalimentación también puede ser obtenida mediante una variación periódica del índice de refracción dentro de la guía de onda, la cual se produce al corrugar la interfase entre dos capas dieléctricas; la Figura 6.21(b) nos muestra un ejemplo de este tipo de cavidad, en la cual la variación periódica de  $n$  puede dar origen a una interferencia constructiva. Los láseres que utilizan estas estructuras corrugadas se denominan láseres de retroalimentación distribuida (DFB) y en ellos, debido a la débil dependencia a la temperatura que presenta el índice de refracción, la longitud de onda de la actividad láser mantiene un coeficiente de temperatura muy pequeño ( $\sim 0,05 \text{ nm}/^\circ\text{C}$ ); mientras que el coeficiente de temperatura para un láser Fabry-Perot similar es substancialmente mayor ( $\sim 0,3 \text{ nm}/^\circ\text{C}$ ) debido a que está ligado a la dependencia a la temperatura de la separación entre bandas. Los láseres DFB son particularmente útiles como fuentes ópticas en aplicaciones de óptica integrada que utiliza componentes de guía de onda óptica miniaturizados y circuitos hechos mediante tecnología plana en sustratos rígidos.

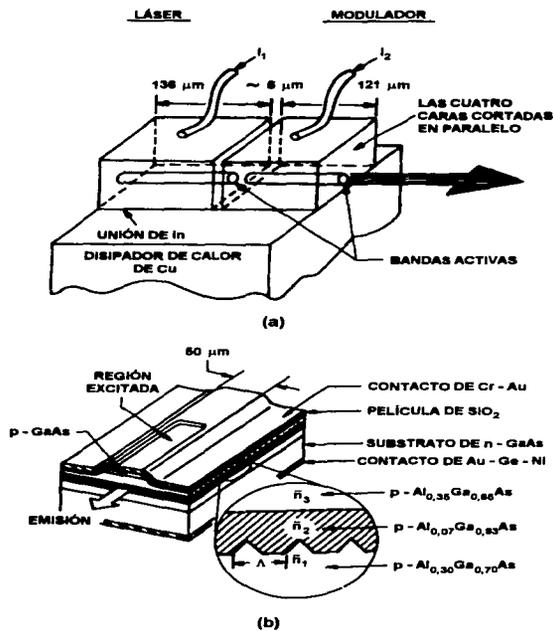


Figura 6.21 (a) Diagrama esquemático de una cavidad de tipo cortada-acopiada, perteneciente a un láser  $\text{Ga}_{1-x}\text{In}_x\text{As}_y\text{P}_{1-y}$  que emite a una longitud de onda de  $1,3 \mu\text{m}$ . (b) Diagrama esquemático de un láser de retroalimentación distribuida ( $\lambda \cong 0,9 \mu\text{m}$ ).

---

#### **6.5.4 TIEMPO DE VIDA DEL DIODO LÁSER**

Los tiempos de vida de los diodos láser comúnmente exceden las 50 000 horas y en general, se ha encontrado que la vida de operación se duplica por cada 10 °C de reducción en la temperatura y por el contrario, se reduce a la mitad con cada 10 °C en el incremento de la misma. Sin embargo, los picos de corriente repentinos causados por la circuitería y las descargas electrostáticas (ESD) pueden ser de consecuencias fatales para los diodos láser.

Las fallas en estos dispositivos pueden ser repentinas y catastróficas o presentarse como una reducción gradual del desempeño. Actualmente se ha determinado que el proceso de degradación gradual se debe a la acumulación de imperfecciones cristalinas en la región de la unión activa, éstas pueden ser pequeñas o grandes pero todas tienen como origen los átomos perdidos o átomos sobrantes (intersticiales) en la red cristalina. En estos puntos llamados defectos de la red, existe una discontinuidad en la estructura de bandas que permite una filtración de los electrones desde la banda de conducción hacia la banda de valencia sin que se presente la emisión de un fotón, dando como resultado que esta energía sobrante sea liberada como energía vibratoria de la red. Consecuentemente, el manejar continuamente un diodo láser cerca de su umbral de daño, picos repentinos en la corriente de alimentación y falla en el mantenimiento de una temperatura razonable de la unión, pueden conducir a un incremento en el número y tamaño de los defectos de la red en la unión.

La temperatura de un diodo láser se incrementa por arriba de la temperatura ambiente durante condiciones normales de operación por dos razones: primeramente, el semiconductor se calienta por simples condiciones de resistividad y en segundo término, el flujo interno de fotones puede ser reabsorbido particularmente por las impurezas presentes. Claramente se puede apreciar que para prolongar la vida de un diodo láser es ventajoso el enfriarlo de alguna manera.

La falla de un dispositivo también puede resultar de la degradación de la cara de salida, proceso que también puede ser repentino o gradual. Esta falla es causada por efectos térmicos que algunas veces se conjuntan con oxidación térmica. Por otro lado, los picos grandes en la corriente de alimentación pueden producir ráfagas de calor que excedan la capacidad de disipación de calor del dispositivo, causando un daño fatal e inclusive fracturas en la superficie de emisión.

Por lo tanto, es muy importante que un diodo láser sea controlado por una fuente de corriente diseñada para eliminar los picos de corriente, ya que inclusive los picos producidos cuando una fuente normal de cd se enciende o apaga son suficientes para dañar muchos de estos dispositivos. Finalmente, los procedimientos de manejo del ESD deben ser observados todo el tiempo.

### 6.5.5 CARACTERÍSTICAS ÓPTICAS DE LOS DIODOS LÁSER

El diodo láser es un dispositivo emisor de borde con una cavidad Fabry-Perot que sostiene la actividad láser, la cual está insertada a lo largo del semiconductor, tal y como se muestra en la Figura 6.22. Las dimensiones de la cavidad, están definidas por la longitud del chip y la naturaleza del proceso y en el caso de las dimensiones transversales, éstas se definen por un proceso de guiado por índice o guiado por ganancia, el cual determina la región de confinamiento lateral para los fotones emitidos. Históricamente, los láseres guiados por ganancia han sido más fáciles de fabricar, pero los dispositivos guiados por índice presentan características ópticas superiores, como se explicará subsecuentemente. Nominalmente, las dimensiones de la cavidad de un láser monomodal son (Ancho x Alto x Largo) =  $3 \times 0,6 \times 300 \mu\text{m}$ .

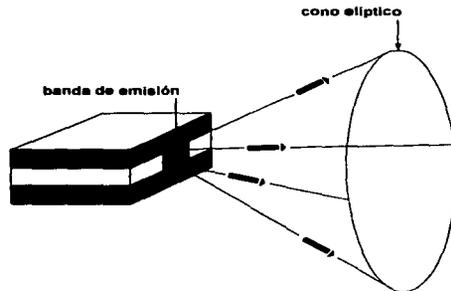


Figura 6.22 Haz elíptico de salida de un diodo láser típico.

### 6.5.6 ESTRUCTURA DE MODO TRANSVERSAL, ANGULOS DE EMISIÓN (DIVERGENCIA) Y ASIMETRÍA

En muchas aplicaciones es deseable, si no esencial, que el perfil espacial del láser consista de un solo modo transversal (tal es el caso de las comunicaciones por fibra óptica). La mayoría de los diodos láser de baja potencia ( $< 100 \text{ mW}$ ) tienen un perfil transversal de intensidad pseudo-Gaussiano que es análogo al modo  $\text{TEM}_{00}$  de muchos láseres de gas. Este perfil se muestra en la Figura 6.23.

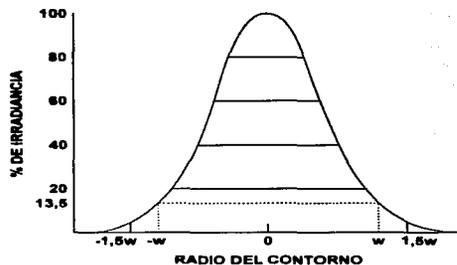


Figura 6.23 Perfil de irradiancia de un modo Gaussiano  $TEM_{00}$ . El radio del haz ( $w$ ) se define como el punto para el cual la irradiancia (intensidad) ha decrecido hasta  $1/e^2$  del valor axial.

Un haz Gaussiano coherente, como el emitido por un diodo láser mono-modo, representa un excelente ejemplo de la teoría de difracción en óptica y su divergencia es en forma aproximada, inversamente proporcional al radio de la cintura del haz de la cual está divergiendo; contrariamente, el ángulo de convergencia es en una primera aproximación, proporcional al tamaño de la cintura de haz a la cual está siendo enfocado. Por otro lado, la mayoría de los láseres tienen una cintura de haz dentro de la cavidad y emiten un haz divergente. El radio de la cintura del haz es definido como el radio del haz en su punto de enfocamiento y el radio de un haz Gaussiano se define como la distancia desde la máxima intensidad (es decir, desde el centro del haz) al punto en el cual la intensidad ha decrecido a  $1/e^2$  (13,5 %) del valor máximo.

La región activa de la unión de un diodo láser no solo es pequeña sino altamente asimétrica y en la mayoría de los casos sus dimensiones laterales definen la cintura del haz emitido. Típicamente, la unión de un diodo láser de Arseniuro de Galio tiene un espesor efectivo de tan solo  $0,1 \mu\text{m}$  pero la región activa puede ser de hasta  $5 \mu\text{m}$  de ancho, lo cual conduce a una cintura de haz muy pequeña y asimétrica que ocasiona que la divergencia del haz sea severa y también asimétrica. La mitad del ángulo de divergencia del haz en la dirección perpendicular a la capa activa (unión) se encuentra comúnmente entre los 12 y los 40 grados, pudiéndose encontrar dispositivos con divergencias de hasta 90 grados; por otro lado, la divergencia en el plano paralelo a esta capa es menor por un factor de 2 a 6 veces.

Una falla en la corrección de la elipticidad del haz algunas veces no es importante, pero si el haz es colimado para una aplicación en particular, la divergencia de campo lejano será diferente en las dos direcciones. Cuando se corrige, usualmente expandiendo el eje menor de la salida, la divergencia de campo lejano es simétrica y puede ser minimizada.

### 6.5.7 ASTIGMATISMO

La propiedad del haz, que usualmente tiene el impacto más dramático sobre qué tan bien se puede colimar o enfocar la salida de un diodo láser es el astigmatismo. Esta característica es causada por la separación longitudinal entre los puntos de emisión paralelo y perpendicular a la unión del diodo láser. La cantidad de astigmatismo presente varía no solo con el tipo de diodo láser sino también entre láseres del mismo tipo, donde la separación de los puntos de emisión se debe a la dependencia direccional en el índice de refracción de la cavidad resonante.

Como ya se mencionó anteriormente, los dos métodos más populares para generar el confinamiento de fotones son el guiado por ganancia y el guiado por índice. Los dispositivos guiados por ganancia emiten un haz particularmente astigmático que parece diverger desde una fuente puntual localizada entre 5 y 50  $\mu\text{m}$  por detrás de la superficie de la cara frontal del diodo. Esto se debe a que el confinamiento fotónico en la dirección perpendicular a la unión es generado por fronteras de índice de refracción, mientras que el confinamiento paralelo a la unión se logra por el cambio en el índice de refracción como resultado de la densidad de portadores (ganancia); en otras palabras, el astigmatismo es causado por el hecho de que en el plano de la unión la dimensión del haz está determinada por el perfil de la corriente eléctrica (causante de la inversión de población) y en el plano perpendicular a la unión la dimensión del haz se define por guiado de onda (reflexiones por fronteras de índice de refracción). Un astigmatismo de 50  $\mu\text{m}$  podría parecer despreciable, pero debemos recordar que ésta es una distancia que se presenta en un punto donde el área total del haz es de solo unas cuantas micras cuadradas.

Los láseres guiados por índice son más populares porque presentan un astigmatismo muy pequeño e inclusive nulo y esto se debe a que en este tipo de dispositivos se utilizan fronteras de índice de refracción en ambas direcciones como un medio para definir la región activa, por lo que el haz parece originarse en la cara frontal del diodo. En la práctica muchos diodos láser presentan un astigmatismo residual de hasta 5  $\mu\text{m}$  debido a la forma sutil y difícil de detectar, en que la corriente y la radiación láser afectan los índices de refracción involucrados en el proceso. El astigmatismo residual es difícil de controlar durante la manufactura de los diodos láser por lo que, dentro de un mismo lote, puede variar entre 0 y 5  $\mu\text{m}$ .

A manera de regla general, los diodos láser guiados por ganancia presentan entre 20 y 50  $\mu\text{m}$  de astigmatismo, cantidad que prohíbe su utilización en aplicaciones que requieran inclusive un modesto desempeño óptico. Sin embargo, donde esta característica no tendrá una influencia negativa sobre el desempeño óptico es en sistemas tales como los proyectores de línea óptica o los sistemas de rastreo unidireccional. Por las razones anteriores, los diodos láser que están diseñados bajo el esquema de guiado por índice son preferidos en la mayoría de las aplicaciones y particularmente los que operan en la región espectral del infrarrojo cercano (NIR) se pueden encontrar disponibles con un astigmatismo prácticamente nulo. Actualmente, los diodos láser más comunes que trabajan en la región visible del espectro son en cierto grado astigmáticos, con valores típicos que varían en el intervalo de 5  $\mu\text{m}$  a 15  $\mu\text{m}$ .

Se debe hacer notar que el astigmatismo es una característica que puede ser corregida para mejorar el desempeño óptico, esto se hace comúnmente insertando en el haz lentes cilíndricas débiles o ventanas ópticas delgadas a un ángulo apropiado.

---

Aún cuando se utilice una óptica de corrección, algún astigmatismo residual del orden de unas cuantas micras puede persistir debido a la variación estadística en el astigmatismo entre un láser y otro. El fenómeno astigmático descrito anteriormente puede apreciarse claramente en la Figura 6.24.

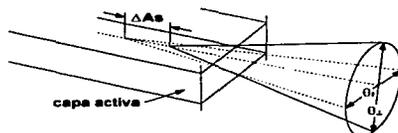


Figura 6.24 Distancia astigmática en un diodo láser. El punto de emisión en la dirección paralela a la unión está localizado a una cierta distancia por detrás del punto de emisión para la dirección perpendicular a la unión.

### 6.5.8 POLARIZACIÓN

La salida de los diodos láser de baja potencia y cavidad simple está polarizada linealmente con el vector eléctrico paralelo a la unión. La razón de polarización (componente paralelo/componente perpendicular) generalmente es mayor a 100:1, pero esta cifra es menor cerca del umbral de la actividad láser donde existe una contribución significativa a la intensidad debida a luz emitida en forma espontánea que está polarizada aleatoriamente.

### 6.5.9 LONGITUD DE ONDA Y POTENCIA ÓPTICA DE SALIDA

El comportamiento de la longitud de onda y potencia de salida de un diodo láser debe ser comprendido en forma suficiente para poder determinar la mejor forma de utilizarlo.

#### Comportamiento del Modo Longitudinal

Los diodos láser pueden tener un solo modo longitudinal o múltiples modos longitudinales aún cuando presenten características de Modo Eléctrico Transversal (TEM) único. Los láseres monomodales se realizan al sintonizar de forma bien definida, la curva de ganancia de la cavidad con longitudes de cavidad más pequeñas y aplicando, generalmente, mejores técnicas de procesamiento. Algunas aplicaciones en realidad se benefician del comportamiento multimodal debido a la ausencia de "saltos modales", los cuales son característicos de los láseres monomodales.

Los saltos modales pueden ocasionar cambios pequeños, pero en cierto grado problemáticos, en la potencia y dirección del haz, ya que pueden ser perjudiciales para el desempeño de un sistema. El comportamiento modal de un diodo láser se muestra en la Figura 6.25.

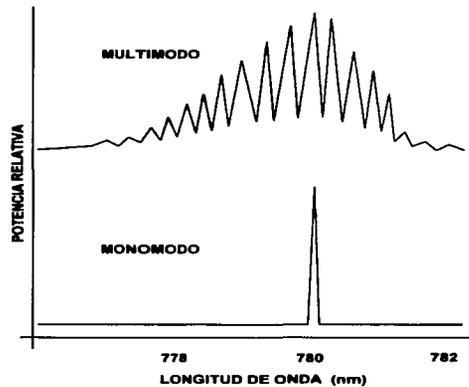


Figura 6.25 Comportamiento longitudinal multimodo y mono-modo típico en un diodo láser.

### Dependencia de la Longitud de Onda a la Temperatura

La longitud de onda emitida por un diodo láser, se incrementará conforme se eleve la temperatura de la unión, lo cual es causado por cambios en la longitud de la cavidad, índice de refracción y energía de la separación entre bandas. El cambio en la longitud de onda se caracteriza por "regiones de buen comportamiento", localizadas entre dislocaciones distintas en la curva longitud de onda vs. temperatura. Estas dislocaciones, son saltos modales que se originan cuando la longitud efectiva de la cavidad, discretamente realiza una transición de un modo al siguiente. Como se muestra en la Figura 6.26, existe un grado de histéresis en la relación; en las regiones de inicio la longitud de onda puede cambiar a una tasa de  $0,05 \text{ nm}/^\circ\text{C}$ , pero el cambio total, incluyendo los saltos modales, se promedia en  $0,4 \text{ nm}/^\circ\text{C}$ . Si la estabilidad de la longitud de onda es un factor a considerar, un enfriador termoeléctrico y la circuitería de control, se deben utilizar para estabilizar la temperatura del encapsulado.

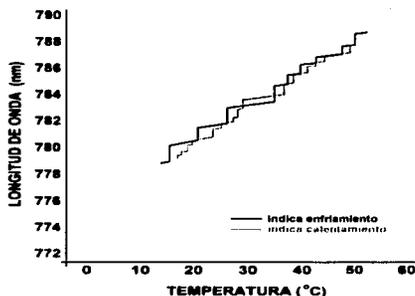


Figura 6.26 Relación de la variación de longitud de onda con respecto a la temperatura en un diodo láser típico de GaAlAs. Los saltos modales le dan a esta relación una apariencia de escalera.

### Dependencia de la Longitud de Onda a la Corriente de Alimentación

El flujo de corriente a través de un diodo láser, altera la longitud de onda emitida en dos formas. El calentamiento resultante por efecto joule, modifica la temperatura de la unión, generando la dependencia descrita en el punto anterior. Por otro lado, el flujo de corriente también perturba la población de electrones en las bandas de conducción y valencia, dando como consecuencia una alteración en la energía de separación. Ambos efectos tienen magnitudes comparables y en los láseres de GaAlAs, la longitud de onda típicamente cambia 0,025 nm/mA.

### Dependencia de la Potencia de Salida a la Temperatura

La ganancia de cualquier medio que sostenga actividad láser, es una función de la razón de inversión de población, que en realidad es una razón de la distribución de población perturbada, a la distribución equilibrada (*Boltzmann*). Conforme la temperatura de la unión de un diodo láser se incrementa, la distribución natural de Boltzmann de la población de electrones cambia y más electrones son requeridos en la banda de conducción, para lograr la misma inversión de población efectiva. Por lo tanto, para una corriente de alimentación fija, el incrementar la temperatura del diodo láser decrementará su potencia de salida, tal y como se mostró en las curvas típicas P-I (Potencia-Corriente).

**PROCESO DE SIMULACIÓN Y  
PRESENTACIÓN DE  
RESULTADOS**

---

## PROCESO DE SIMULACIÓN Y PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

En este capítulo, se presenta el desarrollo de la evaluación de acoplamiento entre el diodo láser y la fibra monomodal, utilizando los cuatro tipos de micro lentes que se mencionaron en la introducción. Además, para cada uno de los casos analizados, se muestran los resultados obtenidos en cada paso del proceso de simulación, así como las gráficas generadas por el software de evaluación fotónica y al final, una tabla general de resultados. Es importante aclarar que el término "micro", se aplica a estas lentes dadas sus pequeñas dimensiones (algunos milímetros), en comparación con las dimensiones de las lentes que comúnmente se utilizan en otras aplicaciones. Antes de entrar al proceso de evaluación, será necesario definir algunos parámetros del diodo láser y de la fibra óptica, que son fundamentales para llevar a cabo el análisis.

### 7.1 PARÁMETROS DEL DIODO LÁSER

Como se ha mencionado en los capítulos anteriores, el análisis está dirigido hacia las comunicaciones ópticas de larga distancia y es por esta razón, que se seleccionó un diodo láser diseñado especialmente para esta aplicación. De acuerdo con la literatura, las tres longitudes de onda que se utilizan en los sistemas de comunicación por fibra óptica (conocidas también como **ventanas de transmisión**), son: 850, 1 300 y 1 500 nm; sin embargo, nos enfocaremos hacia esta última, ya que es la que se utiliza con las fibras monomodales en los sistemas de comunicación transoceánicos y transcontinentales de gran capacidad.

En base a una investigación bibliográfica, se determinó que existe un buen número de fabricantes de diodos láser, sin embargo, solamente dos de ellos cuentan con dispositivos aplicables a este tipo de sistemas; estos son: NEC y MITSUBISHI. En ambos casos, se solicitó directamente al fabricante la información técnica correspondiente; no obstante, solamente en el caso de la segunda fue posible obtener un ejemplar del catálogo. En este punto es importante mencionar, que en nuestro país se sigue teniendo una gran dificultad para poder obtener información técnica de primera línea.

El catálogo de MITSUBISHI cuenta con guías de selección, por lo que no se tuvo ninguna dificultad para seleccionar un dispositivo adecuado para nuestra aplicación. El diodo láser en cuestión, fue el ML9922 y tiene las siguientes características ópticas:

SÍMBOLO	PARÁMETRO	CONDICIONES DE PRUEBA	LÍMITES			UNIDAD
			MIN.	TIP.	MAX.	
$\lambda_p$	Longitud de onda pico	CW, Po=5 mW	-----	1 550	-----	nm
$\theta_{//}$	Ángulo de divergencia del haz (plano paralelo a la unión)	CW, Po=5 mW	-----	30	-----	grados
$\theta_{\perp}$	Ángulo de divergencia del haz (plano perpendicular a la unión)	CW, Po=5 mW	-----	35	-----	grados

Tabla 7.1 Características ópticas más importantes del diodo láser seleccionado.

Estas especificaciones fueron tomadas directamente del catálogo del fabricante y tienen el significado que a continuación se describe:

TERMINO	SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN
Longitud de onda pico	$\lambda_p$	Longitud de onda del modo longitudinal pico en el espectro de emisión
Ángulo de divergencia del haz Paralelo Perpendicular	$\theta_{//}$ $\theta_{\perp}$	El haz emitido por el láser semiconductor, se esparce tal y como se muestra en la Figura 7.1. Este ángulo se refiere al ancho (ángulo completo) en el punto que es 0,5 de la intensidad pico, en las distribuciones de intensidad paralela y perpendicular a la unión. La dirección paralela (horizontal) se expresa en $\theta_{//}$ y la dirección perpendicular (vertical) en $\theta_{\perp}$ . La distribución de intensidad a la que nos referimos es conocida como <i>Patrón de Campo Lejano</i> (FFP).

Tabla 7.2 Descripción de las características ópticas más importantes del diodo láser.

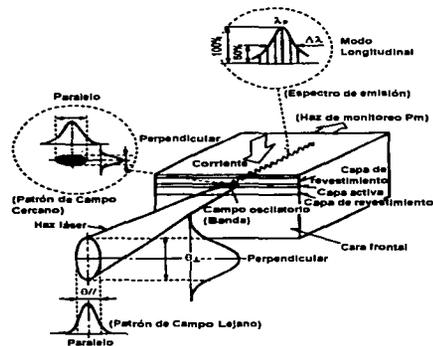


Figura 7.1 Características ópticas de un diodo láser.

En el Anexo 1, se presenta una copia fotostática del catálogo de Dispositivos Ópticos Semiconductores y Componentes de Fibra Óptica de MITSUBISHI Optoelectronics, en la sección que corresponde al dispositivo seleccionado.

### 7.1.1 CÁLCULO DE LAS DIMENSIONES DE LA VENTANA DE EMISIÓN DEL DIODO LÁSER (TAMAÑO DEL OBJETO)

Como se ha mencionado desde el inicio de este trabajo, el "objeto" a considerarse dentro del sistema óptico, es el punto donde se origina el haz láser, justo en el plano de la unión activa. Esta "ventana" de emisión, deberá ser redimensionada por el sistema de acoplamiento, para igualar el tamaño del modo de propagación de la fibra óptica, en el plano de entrada de ésta. De acuerdo con la información del catálogo, las dimensiones de este punto son  $1,0 \mu\text{m}$  en el plano perpendicular a la unión y  $1,25 \mu\text{m}$  en el plano paralelo. En la región del plano de emisión, la distribución de intensidad involucrada es conocida como *Patrón de Campo Cercano (NFP)* y es importante recordar, que al lado de menor tamaño le corresponderá el mayor ángulo de divergencia.

No obstante lo anterior, no se especifica claramente a que nivel de intensidad fueron tomadas las dimensiones de esta ventana (los datos corresponden al promedio de los lotes fabricados) y este dato es crítico para el desarrollo de la simulación. Dado que la cintura de un haz Gaussiano se define al nivel de intensidad  $1/e^2$ , las ecuaciones de la óptica Gaussiana y de la Óptica de Fourier (Difracción) consideran este nivel de intensidad, por lo que es necesario conocerlo para poder introducirlo en los datos requeridos por el software "SOLSTIS". En base a lo anterior, será necesario asegurarse de cuál es el tamaño de este punto al nivel de intensidad requerido ( $1/e^2$ ) y esto solamente podrá realizarse, a partir de los únicos datos sobre los cuales no hay duda, que son los ángulos de divergencia FWHM del *Patrón de Campo Lejano (FFP)*.

Como se mencionó en la descripción de la Tabla 7.2, los ángulos de divergencia que proporciona el fabricante para el haz emitido por el diodo láser, se obtuvieron en el nivel FWHM (*Full Width Half Maximum*). Es decir, ángulos completos en el punto donde el nivel de intensidad es la mitad de la intensidad máxima. Esta situación se debe básicamente, a que en condiciones prácticas es más fácil medir la intensidad al 50 % de la intensidad pico, que al nivel  $1/e^2$  (13,53 %) ó al nivel  $1/e$  (36,79 %).

Para poder calcular los datos requeridos, en base a la información proporcionada por el fabricante, primeramente es necesario determinar la relación de proporcionalidad que existe entre el nivel al 50 % de la intensidad pico y el nivel en  $1/e^2$ . De las ecuaciones 2.69 y 2.70, se tiene que:

$$I(\rho) = I_0 e^{-\frac{2\rho^2}{w^2}} \quad \text{--- (7.1)}$$

donde  $I_0$  es la intensidad pico e  $I(\rho)$ , es la intensidad en una sección de radio  $\rho$ . Para el punto en el que:

$$I(\rho) = \frac{I_0}{2} \quad \text{--- (7.2)}$$

se tiene que:

$$\frac{I_0}{2} = I_0 e^{-\frac{2\rho^2}{W^2}} \quad \text{--- (7.3)}$$

$$e^{-\frac{2\rho^2}{W^2}} = 0,5$$

$$\left(\frac{\rho}{W}\right)^2 = -\frac{\ln 0,5}{2}$$

$$W = \frac{\rho}{\sqrt{-\frac{\ln 0,5}{2}}}$$

$$W = 1,7(\rho) \quad \text{--- (7.4)}$$

Como una propiedad del haz Gaussiano, es que su perfil de distribución de intensidad se mantiene Gaussiano a lo largo de toda la propagación en el espacio libre, la relación entre  $W$  y  $\rho$  se mantendrá constante para cualquier frente de onda y en cualquier punto del eje óptico hasta antes de la lente. Es decir, el radio del haz al nivel  $1/e^2$ , siempre será 1,7 veces mayor al radio del nivel cuya intensidad sea el 50% de la intensidad máxima.

$$W_{1/e^2} = 1,7 W_{FWHM} \quad \text{--- (7.5)}$$

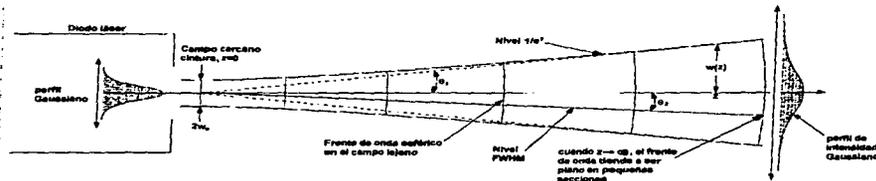


Figura 7.2 Divergencia y propagación del haz Gaussiano a lo largo del eje óptico.

En base al desarrollo anterior y a la Figura 7.2, se tiene lo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \tan \theta_1 &= \frac{W_{1/e^2}}{z} \\ \tan \theta_2 &= \frac{W_{FWHM}}{z} \end{aligned} \right\} \begin{cases} z = \frac{W_{1/e^2}}{\tan \theta_1} \\ z = \frac{W_{FWHM}}{\tan \theta_2} \end{cases} \quad \text{--- (7.6)}$$

Debemos recordar que cuando  $z \rightarrow \infty$ , el frente de onda tiende a ser plano y en consecuencia, todos sus puntos están a la misma distancia de la fuente de origen; por lo tanto:

$$\frac{W_{1/e^2}}{\tan \theta_1} = \frac{W_{FWHM}}{\tan \theta_2} \quad \text{--- (7.7)}$$

$$\frac{W_{1/e^2}}{\tan \theta_1} = \frac{W_{1/e^2}}{1,7 \tan \theta_2} \quad \text{--- (7.8)}$$

$$\tan \theta_1 = 1,7 \tan \theta_2 \quad \text{--- (7.9)}$$

Considerando los medios ángulos en radianes, se tiene que:

$$\theta_{\perp} = 17,5^{\circ} = 0,3054$$

$$\theta_{11} = 15^{\circ} = 0,2618$$

Por lo tanto:

$$\theta_{1/e^2} = \theta_1 = \tan^{-1}(1,7 \tan \theta_2) \quad \text{--- (7.10)}$$

$$\theta_{1/e^2 \perp} = \tan^{-1}[1,7 \tan(0,3054)]$$

$$\theta_{1/e^2 \perp} = 0,4920 \text{ rad} = 28,19^{\circ} \Rightarrow \theta_{1/e^2 \perp} (\text{ÁNGULO COMPLETO}) = 0,984 \text{ rad} = 56,38^{\circ}$$

Con el resultado anterior y utilizando las ecuaciones de la óptica Gaussiana, es posible calcular las dimensiones al nivel  $1/e^2$  del punto desde el cual está divergiendo el haz:

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi W_0} \Rightarrow W_0 = \frac{\lambda}{\pi \theta} \quad (7.11)$$

$$W_0 (l/e^2)_\perp = \frac{1\,550 \times 10^{-9}}{\pi(0,4920)}$$

$$W_0 (l/e^2)_\perp = 1,0028 \mu\text{m} \Rightarrow 2W_0 (l/e^2)_\perp = 2,0056 \mu\text{m}$$

Haciendo el mismo desarrollo para el plano paralelo a la unión:

$$\theta_{l/e^2 \parallel} = \tan^{-1} [1,7 \tan(0,2618)]$$

$$\theta_{l/e^2 \parallel} = 0,4274 \text{ rad} = 24,49^\circ \Rightarrow \theta_{l/e^2 \parallel} (\text{ANGULO COMPLETO}) = 0,8548 \text{ rad} = 48,98^\circ$$

Al igual que en el caso anterior:

$$W_0 (l/e^2)_{\parallel} = \frac{1\,550 \times 10^{-9}}{\pi(0,4274)}$$

$$W_0 (l/e^2)_{\parallel} = 1,1544 \mu\text{m} \Rightarrow 2W_0 (l/e^2)_{\parallel} = 2,31 \mu\text{m}$$

### 7.1.2 CÁLCULO DE LOS LÍMITES DEL INTERVALO DE RAYLEIGH PARA EL HAZ EMITIDO

Otro parámetro óptico de interés, en lo que respecta al haz emitido, es el intervalo de Rayleigh. Este nos permitirá determinar la región dentro de la cual estamos ubicados, ya sea campo lejano o campo cercano, al momento de obtener la distancia objeto. En vista de que el objeto en cuestión no es equilátero, podremos considerar la existencia de un intervalo de Rayleigh mínimo y otro máximo, asociados al lado menor y al lado mayor de la ventana de emisión, respectivamente.

$$z_{R_{MIN}} = \frac{\pi W_0^2 (l/e^2)_\perp}{\lambda}$$

$$z_{R_{MIN}} = \frac{\pi (1,0028 \times 10^{-6})^2}{1\,550 \times 10^{-9}}$$

$$z_{R_{MIN}} = 2,027 \mu\text{m}$$

Es importante recalcar, que para el cálculo anterior se utilizó el dato correspondiente al radio de la ventana de emisión en el plano perpendicular a la unión. Esto se debe a que por ser el lado menor, produce la mayor divergencia y en consecuencia, el intervalo de Rayleigh más pequeño.

$$z_{RMAX} = \frac{\pi W_0^2 (1/e^2)}{\lambda}$$

$$z_{RMAX} = \frac{\pi (1,1544 \times 10^{-6})^2}{1.550 \times 10^{-9}}$$

$$z_{RMAX} = 2,7010 \mu m$$

Para este caso, se utilizó el valor del radio de la ventana de emisión en el plano paralelo a la unión, el cual está asociado a una menor divergencia y a un intervalo de Rayleigh mayor.

En resumen, a partir de los ángulos FWHM del campo lejano, hemos determinado las dimensiones del objeto al nivel de intensidad requerido y podemos observar, que son mayores a las proporcionadas por el fabricante. Se asume que este resultado es correcto, ya que la información complementaria que aparece en el catálogo, referente al método de evaluación de este parámetro, hace suponer que el dato proporcionado corresponde al 50 % de la intensidad pico.

## 7.2 PARÁMETROS DE LA FIBRA ÓPTICA MONOMODO

En el caso de la fibra óptica, fue más sencillo acceder a la información técnica y se seleccionó una fibra óptica monomodo de laboratorio, que cumple con las mismas especificaciones técnicas básicas que las de una fibra para comunicaciones de larga distancia. La razón por la que se seleccionó este tipo de fibra monomodal, se discutirá en las conclusiones finales del trabajo.

Al igual que en el caso del diodo láser, son diversas las compañías que, sin ser fabricantes de fibra óptica, pueden proporcionar este tipo de componentes para aplicaciones de laboratorio (básicamente por las cantidades y presentaciones que se manejan). En particular, se seleccionó el catálogo de NEWPORT Co., que es una de las compañías más reconocidas a nivel mundial en la fabricación de componentes mecánicos para aplicación en óptica y que además, cuenta con un representante autorizado en México. Estas características permiten consultar dicho catálogo con facilidad y en caso de ser necesario, ampliar la información técnica.

El modelo de la fibra seleccionada es F-SS y sus especificaciones ópticas y físicas más importantes, se muestran en la Tabla 7.3. Adicionalmente, en el Anexo 2 se presenta una copia fotostática de la edición 1994 del catálogo general de NEWPORT.

ÍNDICE	PARÁMETRO	VALOR	UNIDAD	OBSERVACIONES
$\lambda$	Longitud de onda de trabajo	1 300 / 1 550	nm	Longitudes de onda de operación, para las cuales ha sido diseñada
$\varnothing_{MFD}$	Diámetro del campo modal	9,3 / 10,5	$\mu\text{m}$	Valor medido que representa el promedio de los lotes fabricados. Está asociado directamente a la longitud de onda de trabajo
$\varnothing_{clad}$	Diámetro del revestimiento	125 / 250	$\mu\text{m}$	Diámetro del revestimiento de vidrio (cladding) / diámetro de la cubierta protectora de acrílico
$\varnothing_{core}$	Diámetro nominal del núcleo	8,0	$\mu\text{m}$	Valor nominal del diseño de la fibra
$\eta_{clad}$	Índice de refracción del revestimiento	1,4469	-----	Valor promedio de los lotes fabricados
$\eta_{core}$	Índice de refracción del núcleo	1,4514	-----	Valor promedio de los lotes fabricados
NA	Apertura Numérica	0,11	-----	Valor medido que representa el promedio de los lotes fabricados

Tabla 7.3 Especificaciones ópticas y físicas más importantes de la fibra óptica monomodal seleccionada (modelo F-SS de NEWPORT).

### 7.2.1 CÁLCULO DE LA AMPLIFICACIÓN REQUERIDA EN EL SISTEMA

Uno de los puntos sobre los que se ha hecho un mayor énfasis desde el inicio del trabajo, es el que se refiere a la amplificación que debe proporcionar el sistema óptico de acoplamiento. Como sabemos, el diámetro modal de la fibra óptica representa el tamaño de la imagen, en consecuencia, la amplificación resulta de la relación de proporción entre el diámetro de la ventana de emisión del diodo láser y el del campo modal de la fibra. En base a lo anterior:

$$m = \frac{\varnothing_{MFD}}{2W_0 (1/c^2)_L} = \frac{10,5}{2,0056} \approx 5,25$$

Como se puede observar en la ecuación anterior, el tamaño del objeto corresponde al diámetro de la ventana de emisión en el plano perpendicular a la unión. Lo anterior se debe a que este plano, es el que determina las condiciones más críticas de amplificación y divergencia del haz (por ser el de menor tamaño, requiere de una amplificación mayor y genera una divergencia más grande).

### 7.2.2 CÁLCULO DE LA TRANSMITANCIA EN LA INTERFASE AIRE-FIBRA

Este dato forma parte de la información requerida por el software "SOLSTIS", cuando la eficiencia de acoplamiento se está calculando bajo la modalidad "with transmission". Es decir, cuando se desea tomar en cuenta la pérdida de potencia óptica (pérdidas de Fresnel) que se origina en el plano de entrada de la fibra, por efectos de reflexión debidos a la diferencia entre los índices de refracción del aire y el núcleo de vidrio de la fibra. La transmitancia,  $r$ , se define como la proporción de radiación óptica que logra transmitirse entre dos medios de índices de refracción diferentes y asumiendo una incidencia normal al plano de entrada de la fibra, se calcula a partir de la reflectancia,  $r$ , como:

$$r = \left( \frac{\eta - 1}{\eta + 1} \right)^2 \quad \text{--- (7.12)}$$

donde  $\eta$ , representa el índice de refracción del medio inmerso en aire y que en este caso, es el del núcleo de la fibra. En consecuencia:

$$r = \left( \frac{1,4514 - 1}{1,4514 + 1} \right)^2 = 0,034$$

Sin embargo, el dato requerido es el de la transmitancia  $t$ , donde se sabe que:

$$\text{transmitancia} = t = 1 - r \quad \text{--- (7.13)}$$

$$t = 0,96609$$

### 7.3 CASO 1: ESFERA DE ACOPLAMIENTO

La esfera de acoplamiento es, como su nombre lo indica, una esfera de vidrio de muy pequeñas dimensiones y que ha sido diseñada especialmente para la aplicación que nos ocupa. Su utilización es muy generalizada, ya que fue uno de los primeros tipos de micro-lentes que se tuvieron disponibles en el mercado comercial, para aplicarse en el proceso de acoplamiento diodo láser→fibra, fibra→fibra y fibra→detector. Por otro lado y a pesar de su tamaño, son de manejo relativamente fácil y su costo no es tan elevado (oscila entre los 11 y los 14 Dólares Americanos).

#### 7.3.1 SELECCIÓN DE LALENTE

La micro esfera de acoplamiento, fue seleccionada utilizando la guía de láseres e instrumentos de MELLES-GRIOT, que es otra de las compañías mundialmente reconocidas en lo que respecta a la fabricación de componentes para aplicación en óptica. Para este caso, existen tres esferas de acoplamiento con recubrimiento antirreflejante optimizado para  $\lambda=1\ 550\ \text{nm}$ , el cual, tiene la función de reducir las pérdidas por reflexión en las interfaces aire-vidrio y vidrio-aire. En la tabla 7.4, se presentan las especificaciones más importantes de estos componentes ópticos y en la Figura 7.3, se muestra un diagrama general.

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

$\varnothing$ (mm)	$f_{1\ 550}$ (mm)	$f_b$ (mm)	$f_{1\ 550} / D$	$D$ (mm)	$\eta_{1\ 550}$	$r_{1\ 550}$ (%)	NUMERO DE PRODUCTO
2,0	1,11	0,11	0,69	1,60	1,81337	< 0,25	06LMS402
3,0	1,67	0,17	0,69	2,40	1,81337	< 0,25	06LMS403
5,0	2,79	0,29	0,69	4,00	1,81337	< 0,25	06LMS405

Tabla 7.4 Características generales de las micro-esferas de acoplamiento.

donde  $\varnothing$  = Diámetro nominal de la lente  
 $f_{1\ 550}$  = Distancia focal efectiva a la longitud de onda especificada  
 $f_b$  = Distancia focal posterior (que en este caso es igual a la distancia focal anterior)  
 $f_{1\ 550} / D$  = número- $f$   
 $D$  = Diámetro efectivo de la lente  
 $\eta_{1\ 550}$  = Índice de refracción a la longitud de onda especificada  
 $r_{1\ 550}$  = Reflectancia a la longitud de onda especificada

De los valores correspondientes a  $f_{1\ 550}$  y  $f_b$ , se puede observar que por la forma de estas lentes, los planos principales coinciden al centro de la esfera y las distancias focales son simétricas.

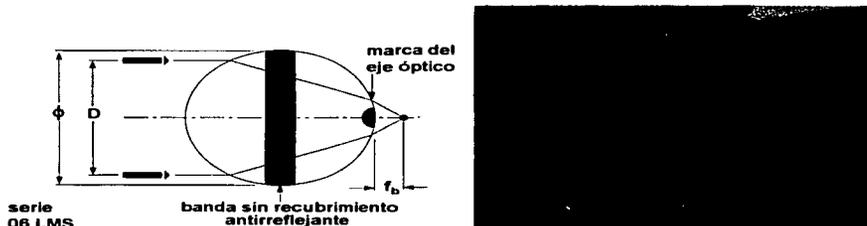


Figura 7.3 Diagrama de las esferas de acoplamiento de la serie 06LMS.

Antes de iniciar los cálculos y la presentación de las imágenes generadas por el software, es necesario plantear el procedimiento mediante el cual se seleccionó el diámetro de la lente esférica utilizada. A este respecto, tenemos que para cada valor de  $z$ , incluyendo  $\infty$ , un contorno de irradiancia de radio 1,5 veces mayor que  $W(z)$  es, para una excelente aproximación, el contorno del 99 % del haz; es decir, 99 % de la potencia del haz pasa a través de él. A menos que una pérdida en la energía del haz, del orden del 1 % o mayor (junto con otros efectos indeseables) no sea aceptable, todos los elementos ópticos por los que el haz deba pasar deben ser lo suficientemente grandes como para aceptar este radio mayor. En consecuencia, es el valor de  $1,5W$  o mayor y no simplemente el de  $W$ , el que debe ser identificado con los requerimientos de número- $f$  de estos elementos.

Para este cálculo, nuevamente carecemos de información directa del fabricante del diodo láser, por lo que tendremos que basarnos en los ángulos FWHM. Considerando que:

$$W_0 (99\%) = 1,5 W_0 (1/e^2) \quad \text{--- (7.14)}$$

y retomando el planteamiento que dió origen a la ecuación 7.6, tenemos que:

$$\frac{W_0 (1/e^2)}{\tan \theta_1} = \frac{W_0 (99\%) }{\tan \theta_2} \quad \text{--- (7.15)}$$

donde:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_{1/e^2} \\ \theta_2 &= \theta_{99\%} \end{aligned} \quad \text{--- (7.16)}$$

En base a lo anterior, se tiene que:

$$\frac{W_0 (99\%) }{1,5 \tan \theta_1} = \frac{W_0 (99\%) }{\tan \theta_2} \Rightarrow \tan \theta_2 = 1,5 \tan \theta_1$$

$$\theta_2 = \theta_{99\%} = \tan^{-1}(1,5 \tan \theta_1)$$

$$\theta_{99\%} = \tan^{-1}[1,5 \tan(0,4920)]$$

$$\theta_{99\%} = 0,6771 \text{ rad} = 38,8^\circ$$

Para el desarrollo anterior, se ha considerado una vez más el ángulo al nivel  $1/e^2$ , asociado al plano perpendicular a la unión activa del diodo láser; esto se debe, a que un mayor ángulo de divergencia da como consecuencia un diámetro de haz mayor. El resultado que hemos obtenido, corresponde al ángulo de divergencia al nivel cuya intensidad es el 1 % de la intensidad pico. Ahora, utilizando este ángulo, aplicaremos el concepto de apertura numérica al haz emitido por el diodo:

$$NA_{LD} = \text{sen} \theta_{99\%} = 0,627$$

Aplicando este mismo concepto a la lente esférica, se obtiene lo siguiente:

$$NA_{LENTE} = \frac{1}{2(nú\ mero - f)} \quad \text{--- (7.17)}$$

$$NA_{LENTE} = \frac{1}{2(0,69)} = 0,7246$$

Del resultado anterior, se puede observar que  $NA_{LENTE} > NA_{LID(99\%)}$ , por lo que cualquiera de las lentes planteadas puede ser utilizada en el proceso de acoplamiento bajo análisis. No obstante, por cuestiones de espacio, se ha seleccionado la de menor diámetro (OGLMS402), ya que el problema que nos ocupa considera que el diodo láser, la lente y la sección inicial de la fibra, estarán contenidos dentro de un mismo encapsulado, para formar un módulo transmisor.

### 7.3.2 DESARROLLO

Retomando la ecuación 2.151 para calcular la distancia objeto,  $s$  y considerando que  $z_0 = z_{R\ MIN}$ , se tiene lo siguiente:

$$m = \frac{W'_0}{W_0} = \frac{\varnothing_{MFD}}{2W_0 (1/e^2)^{\perp}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{s}{f}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{z_{R\ MIN}}{f}\right)^2}}$$

$$1 - \frac{s}{f} = \pm \sqrt{\frac{1}{m^2} - \left(\frac{z_{R\ MIN}}{f}\right)^2} \quad \text{--- (7.18)}$$

$$1 - \frac{s}{f} = \pm \sqrt{\frac{1}{(5,25)^2} - \left(\frac{2,027 \times 10^{-6}}{1,11 \times 10^{-3}}\right)^2} = \pm 0,19047$$

$$\Rightarrow -\frac{s_1}{f} = 0,19047 - 1$$

$$\frac{s_1}{f} = 0,80953$$

$$s_1 = (0,80953)(1,11 \times 10^{-3}) = 0,898 \times 10^{-3} = 0,898 \text{ mm}$$

A pesar de que la ecuación 2.151 aplica para lentes delgadas, se utiliza el valor de la distancia focal efectiva, debido a que los planos principales coinciden al centro del componente óptico. En base a esta consideración, el resultado anterior nos indica que el diodo láser tendría que quedar dentro de la lente. Utilizando el resultado negativo de la ecuación 7.18:

$$\Rightarrow -\frac{s_2}{f} = -0,19047 - 1$$

$$\frac{s_2}{f} = 1,19047$$

$$s_2 = (1,19047)(1,11 \times 10^{-3})$$

$$s_2 = s = 1,3214 \times 10^{-3} \text{ m}$$

El resultado anterior es congruente, ya que al restarle el valor nominal del radio de la lente (1,0 mm), se obtiene un valor positivo que corresponde a la distancia entre la ventana de emisión del diodo láser y el perímetro de la lente. Además, considerando el valor de  $Z_{RMÁX}$ , se observa que la lente queda ubicada en el campo lejano. Substituyendo el valor de  $s_2$  en la ecuación 2.145 y despejando para  $s'$ , se obtiene que:

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{1,11 \times 10^{-3}} - \frac{1}{1,3214 \times 10^{-3} + \frac{(2,027 \times 10^{-6})^2}{(1,3214 \times 10^{-3} - 1,11 \times 10^{-3})}}$$

$$s' = 6,9378 \times 10^{-3} \text{ m}$$

El valor obtenido para  $s'$ , corresponde a la distancia imagen desde el centro de la lente, hasta el plano de entrada de la fibra óptica; en consecuencia, al restar a  $s'$  el valor nominal del radio de la lente, se obtiene la distancia entre el perímetro de la lente y el plano de entrada de la fibra. En los desarrollos anteriores, en los que se han obtenido los valores correspondientes a las distancias objeto e imagen, se ha hecho hincapié en las distancias medidas desde el perímetro de la lente hacia los otros elementos, ya que éstas son las distancias que maneja el software de simulación.

El proceso de simulación, requiere de un conjunto de datos asociados a los tres elementos involucrados; no obstante, los cálculos que se han hecho hasta este punto, son los únicos que se deben determinar previamente, ya que son característicos de cada caso. Los parámetros restantes, de carácter general, se encuentran contenidos en las librerías del software de análisis. Enseguida, se presenta la tabla general de los resultados obtenidos para este caso.

	TEORIA GAUSSIANA		TEORIA DE DIFRACCIÓN Y ABERRACIONES		
	CON DATOS INICIALES	DATOS CORREGIDOS	CON DATOS INICIALES	DATOS GAUSSIANOS	DATOS CORREGIDOS
DISTANCIA IMAGEN (mm)	5,9378	6,1381	5,9378	6,1381	5,38
EFICIENCIA DE ACOPLAMIENTO (%)	30,101	97,21	21,0	14,7	40,11
Ø DE LA CINTURA DEL HAZ EN EL PLANO DE ENTRADA DE LA FIBRA (µm)	-----	12,4 (eje X) 10,8 (eje Y)	48,0	53,8	42,4

Tabla 7.5 Resultados de la simulación para el caso de la micro-esfera de acoplamiento.

De la tabla anterior, se puede observar lo siguiente:

1. Las distancias imagen, corresponden a las distancias entre el perímetro de la lente y el plano de entrada de la fibra.
2. La diferencia entre los resultados correspondientes a la distancia imagen, obtenidos en base a los datos calculados en la sección 7.3.2 y los datos corregidos con la Teoría Gaussiana y la Teoría de Difracción, no es tan significativa en comparación de la diferencia entre las eficiencias de acoplamiento. Es decir, la *TOLERANCIA* de posicionamiento sobre el eje óptico es muy cerrada.
3. En lo que respecta al diámetro de la cintura del haz, el Módulo Gaussiano no proporciona los valores derivados de los datos iniciales; sin embargo, arroja dos resultados asociados a los datos corregidos. Esto se debe a que la elipticidad del haz emitido, genera una relación inversa de las magnitudes de la cintura en la imagen y en el objeto. Es decir, por la rapidez de divergencia que se presenta en cada plano de la unión activa, la elipse del plano objeto, cuyo eje mayor está en el plano paralelo a la unión, aparece con un giro de 90° en el plano imagen (ver Figura 7.1 para referencia).
4. Bajo las consideraciones de la Teoría de Difracción y las aberraciones, los datos calculados inicialmente arrojan una eficiencia de acoplamiento mayor a la que se obtendría con los datos derivados de la Óptica Gaussiana. Lo anterior nos indica, que las ecuaciones derivadas por Self son apropiadas en una primera aproximación. Sin embargo, los resultados de las dos primeras consideraciones, siguen siendo menores a los que se obtienen en base a la Teoría de Difracción. Con el objeto de simplificar la presentación de los resultados, los valores asociados al diámetro de la cintura del haz en el plano imagen, obtenidos al aplicar los efectos de la difracción y aberraciones, corresponden únicamente al eje X.
5. Los datos correspondientes a la eficiencia de acoplamiento, son congruentes con los valores del diámetro de la cintura del haz, ya que mientras más se asemeje ésta al modo de propagación de la fibra, mayor será la eficiencia de acoplamiento.

En los siguientes puntos se describe la secuencia de simulación, así como las gráficas más importantes generadas durante este proceso, a partir de las cuales se obtuvieron los resultados de la Tabla 7.5.

1. En el editor principal del software, se definen en formato de tabla los parámetros ópticos y físicos más importantes del sistema bajo evaluación (ver Figura 7.4), donde:

**Lambda** = Longitud de onda en nm, de la luz que pasará a través del sistema óptico bajo evaluación.

**n°** = Número de superficie refractante. La primera superficie representa el objeto (**OB**) y las siguientes, se numeran en el orden en el que son impactadas por los rayos que emanan del objeto; en consecuencia, la última superficie representa a la imagen (**IM**). El medio n° i es el que le sigue a la superficie refractante n° i, de tal forma que el medio n° 0, se encuentra entre el objeto y la primera superficie refractante. En relación a lo anterior, cualquier función o parámetro está necesariamente relacionado a un número de superficie refractante o medio.

**Radius** = Radio de curvatura de cada superficie refractante. Representa el valor en mm, del radio de curvatura de la esfera formada por la superficie refractante y como consecuencia, una superficie plana tiene un radio de curvatura infinito.

**Aperture** = Representa la apertura disponible, en mm, de cada superficie refractante.

**Conic.** = La constante cónica es igual a cero para una superficie refractante esférica; -1 para una parábola; < -1 para una hipérbola y > -1 pero < 0 para una elipse.

**Glass** = En esta columna, se coloca el nombre del vidrio o material que constituye el medio que se está considerando. Al definir un nombre, el software busca automáticamente si el material se encuentra definido dentro de las librerías y si este es el caso, el programa le asocia, en función de la longitud de onda, un valor para los parámetros de índice de refracción y dispersión.

**Index** = Índice de refracción del vidrio o material que constituye el medio en cuestión.

**Disper.** = Valor de dispersión (Número de Abbe), del vidrio o material que constituye el medio en cuestión. Recordemos que la dispersión se define como la tasa de cambio del índice de refracción con respecto a la longitud de onda.

**Thickness** = Este parámetro representa el valor de la distancia en mm, entre los vértices de las superficies refractantes que delimitan el medio en cuestión.

En relación a las distancias objeto e imagen, éstas son las que se calcularon inicialmente mediante la ecuación de Self (ver sección 7.3.2).

2. Se genera un diagrama de trazo de rayos, que permite obtener un panorama general del sistema, bajo las consideraciones de la óptica geométrica (ver Figura 7.5).

- 
3. Dentro del editor del Módulo de Haz Gaussiano, se definen los parámetros Gaussianos más importantes del objeto (diodo láser) y a su vez, el software proporciona una serie de datos que permiten corregir la distancia imagen bajo las consideraciones de la Óptica Gaussiana (ver Figuras 7.6 y 7.7). Dentro de este editor, se encuentran las siguientes columnas:

**n°** = Al igual que en el editor principal, este parámetro define el número de la superficie refractante.

**Focal** = En esta columna, se proporciona la distancia focal (mm) de la superficie, en el material especificado por su respectivo número.

**Dist. X / Dist. Y** = Este parámetro define el espesor de cada material o medio, en los planos paralelo y perpendicular a la unión activa del diodo láser, respectivamente. En este caso se definió la misma distancia objeto para ambos planos, dado que el fabricante del diodo no proporciona el valor correspondiente a la distancia astigmática.

**Waist X / Waist Y** = Los datos de esta columna, representan el valor en mm del diámetro de la cintura del haz, al nivel  $1/e^2$  y en los planos paralelo y perpendicular a la unión activa del diodo láser, respectivamente.

**Position** = Este parámetro representa la posición de la cintura del haz, en el material definido después de la superficie correspondiente (el dato se da en mm). La dirección definida como positiva, es la dirección de propagación de la luz (izquierda a derecha).

**Absolute** = En esta columna se muestra la posición absoluta de la cintura del haz, en el material definido después de la superficie correspondiente (el dato se da en mm). En otras palabras, es la distancia entre el plano objeto y la cintura intermedia.

**Diverge.** = Este parámetro representa la divergencia total del haz en radianes, en el material definido después de la superficie correspondiente.

**Irra. W/cm<sup>2</sup>** = En esta columna se encuentra el valor correspondiente a la irradiancia, en el material intermedio después de la superficie correspondiente. Es decir, es la densidad de potencia en la cintura, asumiendo una fuente con una potencia de 1 Watt.

4. Se genera un diagrama de haz, que permite observar bajo las consideraciones de la Teoría Gaussiana, las diferencias entre la distancia imagen calculada inicialmente (ecuación de Self) y el plano de mejor enfocamiento determinado por el software (ver Figura 7.8).

5. Dentro del Editor de Movimientos del Módulo Gaussiano (Figuras 7.9 y 7.10), se analiza la relación que existe entre la distancia imagen (*Fiber distance*), el diámetro de la cintura del haz en el plano de mejor enfocamiento ( $\phi$  *waist*) y la eficiencia de acoplamiento (*Coupling efficiency*), con el propósito de corregir la ubicación del plano de observación y obtener un acoplamiento óptimo.
6. Se genera nuevamente un diagrama de haz, en el que se observa la coincidencia del plano de observación y el plano de mejor enfocamiento, una vez que se ha corregido la distancia imagen.
7. Una vez que se han realizado las correcciones en la distancia imagen, se obtienen las curvas que muestran la dependencia de la eficiencia de acoplamiento (eje vertical), con respecto a los desalineamientos angular (*tilt*) y ortogonal (*misalignment*) en el eje X y posición del plano de entrada de la fibra óptica sobre el eje óptico (ver Figuras 7.12, 7.13 y 7.14). En los tres casos, el ancho de la campana a un nivel determinado de eficiencia de acoplamiento, representa la tolerancia de posicionamiento para ese nivel. Estas gráficas son generadas en forma automática por el software, utilizando las consideraciones de la Óptica Gaussiana (las curvas correspondientes al eje Y, se omitieron por ser muy similares).
8. Se procede a realizar la simulación dentro del Módulo Láser-Pro (Láser Propagation), aplicando los efectos de la Difracción y las Aberraciones, para lo cual es necesario definir algunos parámetros ópticos del diodo láser (ver Figura 7.15). Estos parámetros son: a) Divergencia del haz en los planos paralelo y perpendicular a la unión; b) Diámetro de la cintura del haz en el plano de emisión, tanto en el eje X como en el eje Y; c) Flujo radiante de la fuente óptica y d) Distancia objeto, que es la misma que se definió en el editor principal del software.
9. Ya que se ha ampliado la información referente al objeto, es necesario establecer los valores correspondientes a la transmitancia de cada una de las superficies involucradas en el sistema óptico (ver Figura 7.16). Es decir, se define la transmitancia de la fuente (que es máxima), la de cada una de las superficies de la lente y la del plano de entrada de la fibra óptica. Lo anterior, con el objeto de estimar las pérdidas de potencia óptica, asociadas con el paso de la luz a través de cada uno de los elementos del sistema.
10. En este punto se determina el mapa de irradiancia del haz, en el plano de mejor enfocamiento definido mediante la Teoría Gaussiana (ver Figura 7.18) y para efectos comparativos se genera otro mapa, en el plano de observación calculado inicialmente mediante la ecuación de Self (ver Figura 7.17). Recordemos que la irradiancia se define, como el flujo radiante incidente sobre una superficie de área conocida o simplemente, como la densidad de potencia óptica y en consecuencia, sus unidades son Watts/mm<sup>2</sup>.
11. Al igual que en el caso del Módulo Gaussiano, es posible obtener las curvas que muestran la dependencia de la eficiencia de acoplamiento (eje vertical), con respecto al desalineamiento angular en los ejes X y Y (Figuras 7.20 y 7.21 respectivamente) y al desalineamiento ortogonal en el eje X (Figura 7.22). Nuevamente el ancho de la campana a un nivel dado, representa la tolerancia de posicionamiento para una eficiencia específica (el posicionamiento se muestra en el eje horizontal).

Estas gráficas fueron obtenidas, considerando los efectos negativos de la difracción y las aberraciones (la gráfica correspondiente al desalineamiento ortogonal en el eje Y, fue omitida por ser muy similar a la del eje X).

12. Para obtener el plano de mejor enfocamiento, bajo las consideraciones de la Óptica de Fourier (difracción) y aberraciones, se genera la gráfica que se muestra en la Figura 7.23 y que representa la dependencia de la eficiencia de acoplamiento (eje vertical), con respecto a la ubicación del plano de observación (eje horizontal). En consecuencia, el punto máximo en la curva representa la posición del plano imagen, para la máxima eficiencia de acoplamiento.
13. Una vez que se ha determinado la posición óptima, para el plano de entrada de la fibra óptica, se genera un mapa de irradiancia para esta posición (ver Figura 7.19) y al igual que en los puntos anteriores, se determina el diámetro aproximado de la cintura del haz, al nivel  $1/e^2$ .
14. Conociendo el punto de máxima eficiencia, es conveniente generar nuevamente las gráficas correspondientes a la eficiencia de acoplamiento, en función de los desalineamientos angular y ortogonal en el eje X, con el propósito de verificar la tolerancia de posicionamiento. Por similitud, las gráficas correspondientes al eje Y fueron omitidas (ver Figuras 7.24 y 7.25).
15. Adicionalmente, el Módulo Láser-Pro cuenta con una herramienta de cálculo, que permite obtener la eficiencia de acoplamiento en función del posicionamiento (angular, ortogonal y/o sobre el eje óptico), sin necesidad de generar una gráfica. Estas imágenes, se muestran en las Figuras 7.26 a 7.28 y corresponden a las distancias imagen, obtenidas en las diferentes etapas del proceso de evaluación.

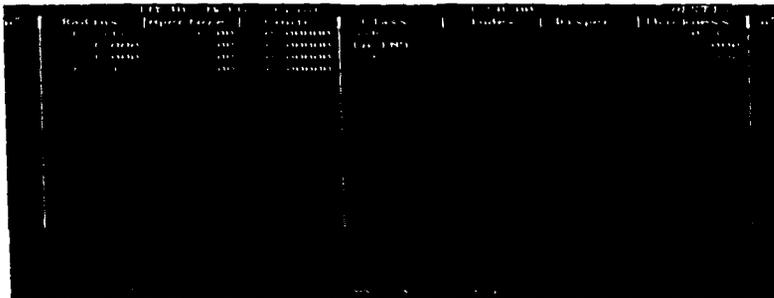


Figura 7.4 Pantalla del editor principal del "SOLSTIS", en donde se definen los parámetros ópticos y físicos más importantes del sistema bajo evaluación. En relación a la información que aparece en esta tabla, se puede comentar lo siguiente: a) Dado que el objeto y la imagen se consideran planos, sus radios de curvatura son infinitos; b) Para una lente esférica, la constante cónica es cero; c) El código "LASFN9", se refiere al tipo de vidrio con el que está hecha la lente y d) La dispersión, que es la tasa de cambio del índice de refracción con respecto a la longitud de onda, se define únicamente para los medios distintos del aire o el espacio libre.



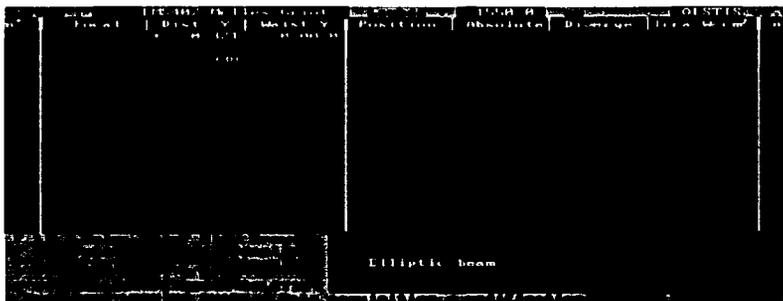


Figura 7.7 Editor del Módulo Gaussiano para el eje Y. Nótese que la diferencia entre las posiciones del plano de observación y de la cintura del haz enfocado, es la misma que para el eje X. Esto se debe principalmente a dos razones: a) Se definió la misma distancia objeto en ambos planos, dado que el fabricante del diodo láser, no proporciona el valor de la distancia astigmática para el dispositivo seleccionado; b) La diferencia entre los diámetros de la cintura del haz en el plano de emisión (eje X=2,3  $\mu\text{m}$ , eje Y=2,0  $\mu\text{m}$ ), es muy pequeña. Por otra parte y al igual que en el caso anterior, el último dato de la columna denominada *Waist Y*, corresponde al diámetro de la cintura del haz en el eje Y del plano de mejor enfocamiento.

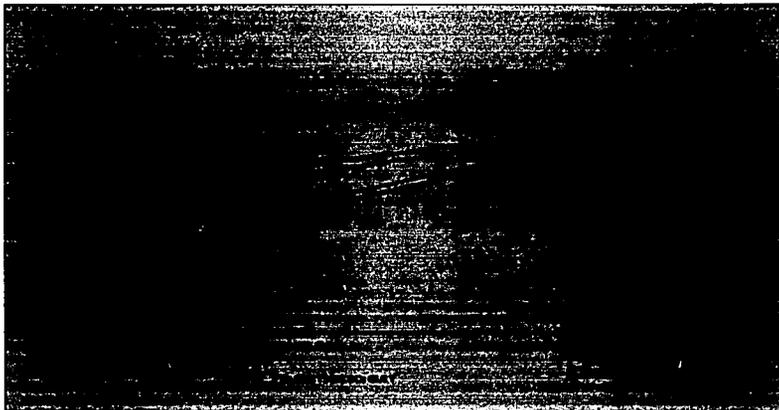


Figura 7.8 Diagrama de haz, obtenido en base a las consideraciones de la Óptica Gaussiana. La línea oscura, representa el nivel de intensidad  $1/e^2$  del haz láser en el plano XZ, mientras que la línea clara, representa el mismo nivel en el plano YZ. La cruz delimitada parcialmente por un círculo, indica el plano de observación definido en el editor principal; mientras que la cruz que se encuentra más alejada de la lente, nos indica la posición de la cintura del haz enfocado o plano de mejor enfocamiento.



Figura 7.9 Editor de movimientos y eficiencia de acoplamiento del Módulo Gaussiano. Obsérvese que no se ha definido ningún desalineamiento angular u ortogonal, para la lente y/o el plano de entrada de la fibra. Dentro del recuadro denominado *Position Fibre/Waist*, el dato correspondiente al error de enfocamiento (*Defocus error*) tiene un signo negativo, que indica que la fibra se debe alejar de la lente para alcanzar la máxima eficiencia de acoplamiento. Por otra parte y dentro de este mismo recuadro, el dato correspondiente a  $\phi$  *waist* indica el diámetro de la cintura del haz, en el plano de mejor enfocamiento y representa el promedio de los diámetros mostrados en las tablas de las Figuras 7.6 y 7.7.

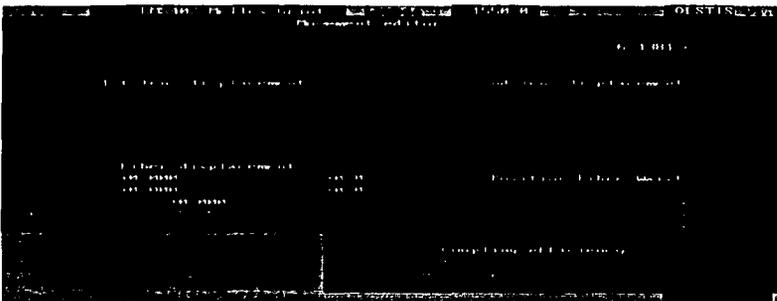


Figura 7.10 En este editor de movimientos, la distancia imagen se ha corregido en base a los datos de las figuras anteriores. Es importante hacer notar, que la magnitud del error de enfocamiento ha disminuido considerablemente y ahora presenta un signo positivo, que indica que el plano de entrada de la fibra se debe acercar a la lente. Sin embargo ya no es posible corregirlo, por la limitante de decimales en el campo *Fiber distance*, además de que en una situación real, resultaría impráctico el tratar de controlar una distancia tan pequeña.

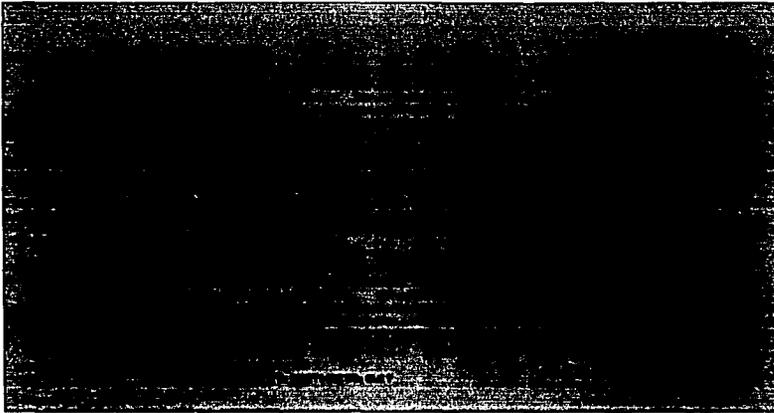


Figura 7.11 Diagrama de haz corregido, en donde se observa que aparece solamente una cruz en el espacio imagen. Esta condición nos indica, que el plano de observación coincide con el plano de mejor enfocamiento

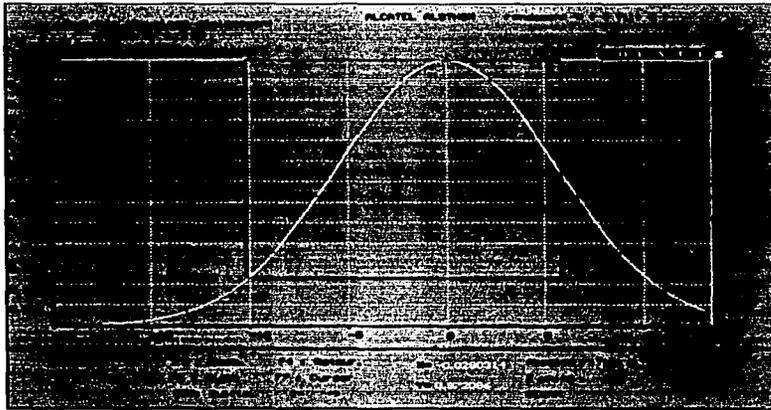


Figura 7.12 Gráfica que muestra la curva de la eficiencia de acoplamiento, en función del desalineamiento angular (*tilt*) en el eje X (en grados) y en la que el ancho de la campana, representa la tolerancia de posicionamiento para una eficiencia dada. Es muy importante aclarar, que en la parte superior de estas gráficas aparece el nombre de *Alcatel Alsthom*, dado que el módulo Gaussiano fue desarrollado en colaboración con ellos

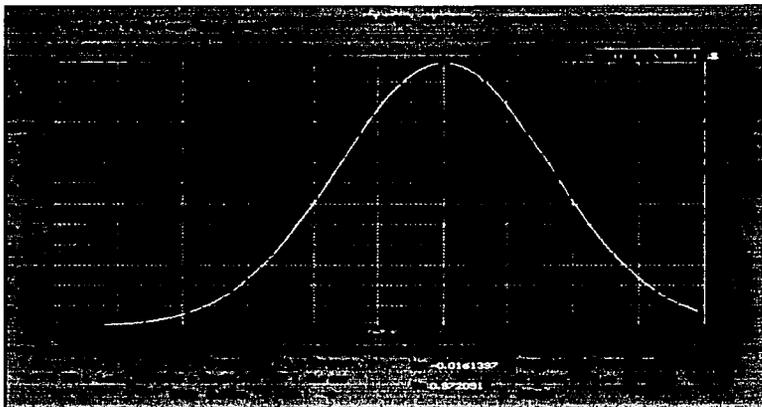


Figura 7.13 Gráfica que muestra la curva de la eficiencia de acoplamiento, en función del desalineamiento ortogonal (*misalignment*) en el eje X (en micras).

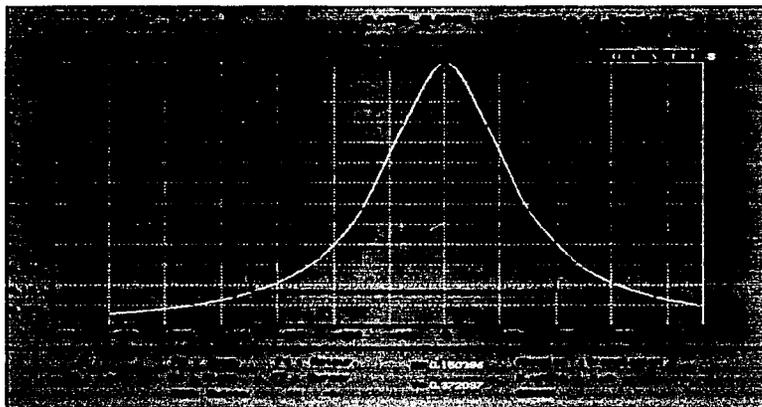


Figura 7.14 Gráfica que muestra la curva de la eficiencia de acoplamiento, en función de la distancia imagen o posicionamiento sobre el eje óptico Z (en micras). Al igual que en las gráficas anteriores, el ancho de la campana representa la tolerancia de posicionamiento, para un nivel de eficiencia determinado.



Figura 7.15 Editor del módulo Láser-Pro, en donde se definen los parámetros más importantes del diodo láser, previamente a la evaluación que considera los efectos de las aberraciones y la difracción. Este editor permanece igual, para los cuatro casos que se analizan.



Figura 7.16 Editor de coeficientes de transmitancia, para cada uno de los elementos involucrados en el sistema. Con respecto a los valores que aparecen en esta pantalla, es posible comentar lo siguiente: a) Dado que el objeto es la fuente de radiación óptica, su transmitancia es máxima (1,0); b) El valor de la transmitancia de cada superficie refractante de la lente, es el complemento de la reflectancia que se definió en la Tabla 7.4 y c) La transmitancia del plano de entrada de la fibra óptica, se determinó en la sección 7.7.2.



Figura 7 17 Mapa de irradiancia, que muestra el perfil Gaussiano del haz enfocado, en el plano de observación calculado inicialmente (distancia imagen inicial). La flecha en color blanco que apunta hacia abajo, está ubicada aproximadamente al nivel  $1/e^2$  (13.53% del valor máximo) y su posición se indica justamente abajo de la línea del eje X ( $X = -0.0240$  mm). en base a este dato, se calcula el diámetro de la cintura del haz que aparece en la tabla 7.5. El signo negativo asociado a este valor, indica solamente que la flecha se colocó del lado izquierdo del perfil de irradiancia



Figura 7 18 Mapa de irradiancia, que muestra el perfil Gaussiano del haz enfocado, en el plano de observación calculado mediante la Teoría Gaussiana (distancia imagen corregida en el Módulo Gaussiano)



Figura 7.19 Mapa de irradiancia, que muestra el perfil Gaussiano del haz enfocado, en el plano de observación calculado mediante la Teoria de Difracción y Aberraciones (distancia imagen corregida en el Módulo Láser-Pro). Nótese que las dimensiones del haz, son menores en comparación con las que se presentan en las dos graficas anteriores

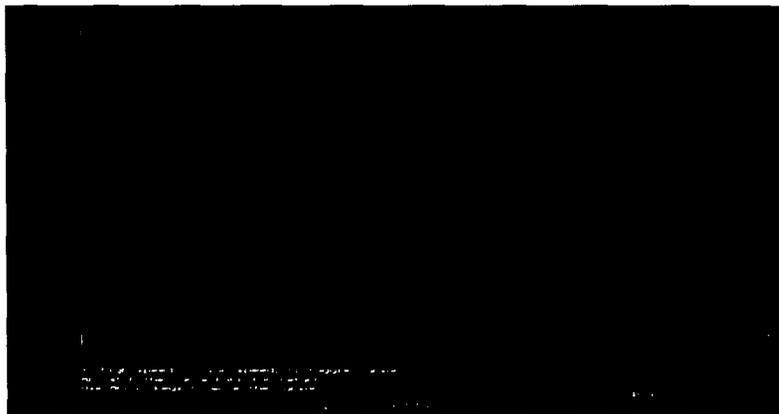


Figura 7.20 Grafica que muestra la curva de eficiencia de acoplamiento, en función del desalineamiento angular en el eje X. Para obtener este resultado, se utilizó la Teoria de Difracción y Aberraciones aplicando la distancia imagen corregida mediante la Teoria Gaussiana (6.1381 mm). No obstante que no se muestra la grafica complementaria, la tolerancia de posicionamiento para una eficiencia maxima (zona superior de la campana) es de 0.09 grados



Figura 7.21 Gráfica que muestra la curva de eficiencia de acoplamiento, en función del desalineamiento angular en el eje Y, aplicando la distancia imagen de 6.1381 mm. La tolerancia de posicionamiento, es igual a la del eje X

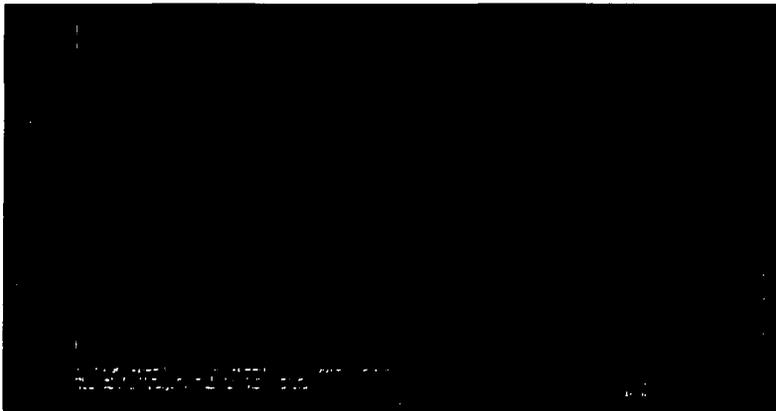


Figura 7.22 Gráfica que muestra la curva de eficiencia de acoplamiento, en función del desalineamiento ortogonal en el eje X, aplicando la misma distancia imagen que en la grafica anterior. Al igual que en las dos graficas anteriores y con el objeto de simplificar la presentación de los resultados, se omitió la parte complementaria. sin embargo, la tolerancia de posicionamiento obtenida es de  $0.45 \mu\text{m}$



Figura 7 23 Gráfica que muestra la curva de la eficiencia de acoplamiento, en función de la distancia imagen. Dado que la resolución del eje horizontal es menor en esta gráfica, no fue posible obtener una tolerancia de posicionamiento



Figura 7 24 Gráfica que muestra la curva de eficiencia de acoplamiento, en función del desalineamiento angular en el eje X, aplicando la distancia imagen obtenida en la grafica anterior (5.36 mm). La tolerancia de posicionamiento, fue de 0.072 grados



Figura 7.25 Gráfica que muestra la curva de eficiencia de acoplamiento, en función del desalineamiento ortogonal en el eje X, aplicando la misma distancia imagen que en la gráfica anterior. La tolerancia de posicionamiento, fue de  $0,18 \mu\text{m}$ .



Figura 7.26 Pantalla de cálculo del Módulo Laser-Pro (esta es otra opción para determinar la distancia imagen óptima, aplicando también la Teoría de Difracción y Aberraciones). En el campo denominado *Fiber defocus*, se define la distancia imagen y en el campo *efficiency*, el software proporciona el valor de la eficiencia de acoplamiento, correspondiente a esa distancia imagen. Nótese que no se ha establecido ningún tipo de desalineamiento, o ángulo de corte (*Cleavage angle*) distinto del perpendicular, para el plano de entrada de la fibra óptica. En este caso, se ha utilizado la distancia imagen calculada inicialmente.



Figura 7.27 En esta pantalla se observa, que la distancia imagen considerada es la que se obtuvo al aplicar la Óptica Gaussiana, durante la segunda etapa del análisis.



Figura 7.28 En esta pantalla, se observa una pequeña diferencia en lo que respecta a la eficiencia de acoplamiento, con respecto al valor obtenido anteriormente en forma gráfica (Figura 7.23).

## 7.4 CASO 2: LENTE GRIN DE CARAS PLANAS PARALELAS

Al igual que en el caso anterior, esta es otra de las micro-lentes que más se han utilizado para realizar la función de acoplamiento, entre un diodo láser y una fibra óptica; sin embargo, dadas sus características, también han sido utilizadas para otro tipo de aplicaciones (formación de imágenes en copiadoras e impresoras láser). A diferencia del caso anterior y dependiendo de la aplicación, el precio de estas lentes no es tan accesible, ya que puede oscilar entre los 22 y los 310 Dólares Americanos.

### 7.4.1 ¿POR QUÉ UTILIZAR EL ÍNDICE DE GRADIENTE?

En las lentes convencionales, la formación de una imagen es el resultado de refracciones discretas, que ocurren en las fronteras entre medios homogéneos de índices de refracción diferentes. Al utilizar materiales en los que el índice de refracción varía de una forma controlada, es posible formar imágenes mediante refracción continua.

Combinando la refracción de superficie con la refracción continua, es posible obtener una serie de ventajas sobre los sistemas de lentes convencionales. Las ventajas más significativas son las siguientes:

- Corrección de aberraciones sin la necesidad de utilizar sistemas múltiples de alta complejidad o elementos esféricos.
- Simplificación de la geometría de las lentes.
- Formación de imágenes reales en la superficie de la lente.

La variación del índice de refracción puede ser axial, radial o una combinación de ambas; sin embargo, hasta ahora la tecnología de las lentes de gradiente ha sido gobernada enteramente por la factibilidad de fabricación del material. No obstante, avances recientes en las técnicas de difusión de iones, han permitido contar con una variedad de materiales de índice de gradiente.

Recordando lo visto en la sección 1.15.3, la lente GRIN es un cilindro de material **SELFOC**<sup>®</sup>, cuyo índice de refracción tiene un perfil parabólico en el sentido radial y se dice que es de caras planas paralelas, porque las superficies de entrada/salida de la lente son planas y paralelas entre sí. Estas lentes cilíndricas, combinan la refracción en las superficies planas terminales con la refracción continua dentro de ellas, lo que las hace extremadamente fáciles de utilizar y son muy adecuadas para acoplar la salida de un diodo láser a una fibra óptica, además de muchas otras aplicaciones.

### 7.4.2 TEORÍA DE FORMACIÓN DE IMÁGENES EN UNA LENTE CILÍNDRICA DE ÍNDICE DE GRADIENTE

Como ya se mencionó, en el material **SELFOC**<sup>®</sup> el índice de refracción varía parabólicamente en función del radio. Esta variación de índice, puede ser expresada como:

$$\eta_r = \eta_0 \left( 1 - \frac{A}{2} r^2 \right) \quad \text{--- (7.19)}$$

donde:  $\eta_r$  = Índice de refracción a una distancia  $r$  del eje óptico  
 $\eta_0$  = Índice de refracción en el eje óptico de la lente  
 $A$  = Constante positiva  
 $\sqrt{A}$  = Constante cuadrática de la función parabólica ( $\text{mm}^{-1}$ )

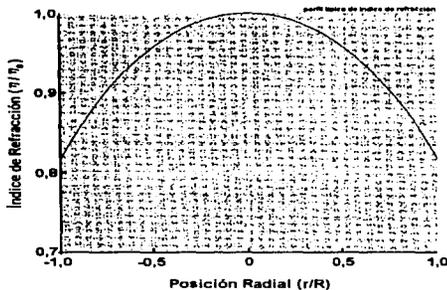


Figura 7.29 Perfil típico del índice de refracción en el material *SELFOC*<sup>®</sup> y fotografía comparativa con las micro esferas de acoplamiento.

Como resultado de esta variación parabólica del índice de refracción, un rayo incidente en la superficie de entrada sigue una trayectoria senoidal a lo largo de la lente cilíndrica. El período de esta trayectoria senoidal, es conocido como el *PITCH* de la lente y constituye un parámetro muy importante en la formación de imágenes por índice de gradiente. Dicho período, está dado por la siguiente ecuación:

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{A}} \quad \text{--- (7.20)}$$

Otro parámetro importante, es el ángulo máximo de aceptación:

$$\theta = \text{sen}^{-1}(\eta_0 r_0 \sqrt{A}) \quad \text{--- (7.21)}$$

donde:

$$r_0 = \frac{\varnothing}{2} \quad \text{--- (7.22)}$$



Figura 7.30 Trayectoria de rayo en una lente cilíndrica de índice de gradiente.

### 7.4.3 TIPOS DE LENTES DE ÍNDICE DE GRADIENTE

Un *pitch* describe la longitud de un cilindro *GRIN*, requerida por la luz de una cierta longitud de onda, para ejecutar un ciclo de la onda senoidal. La mayoría de las lentes *SELFOC*<sup>®</sup>, se especifican de acuerdo con su *pitch*, el cual representa la longitud de la lente como una función de la longitud de onda de operación. Lentes con diferente *pitch fraccional*, se fabrican para diversas aplicaciones.

En base a lo anterior, la longitud real de la lente, *L*, se calcula a partir del *pitch*, *P*, y al valor medido de *A*:

$$L = \frac{2\pi P}{\sqrt{A}} \quad \text{--- (7.23)}$$

Como resultado de lo anterior, conociendo el *pitch* de un material cilíndrico de índice de gradiente, es posible lograr diversas características de formación de imagen, simplemente variando la longitud de la lente. Las propiedades de formación de imagen, de varios tipos comunes de lentes con *pitch fraccional*, se muestran en la Figura 7.31.

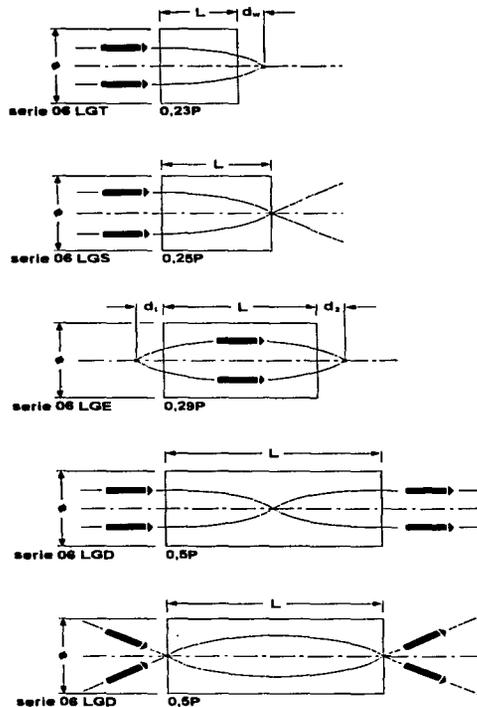


Figura 7.31 Formación de imágenes mediante lentes GRIN con diferente *pitch* fraccional.

#### 7.4.4 APERTURA NUMÉRICA

Adicionalmente al *pitch*, el tipo de gradiente es otro parámetro fundamental en las lentes de material **SELFOC**<sup>®</sup>. Existen tres tipos básicos de lentes *GRIN* (**S**, **W** y **H**), cada uno con un perfil de gradiente diferente (siempre parabólico) y en consecuencia, diferente ángulo de aceptación de luz.

Como se mencionó en los capítulos anteriores, la apertura numérica es igual a  $\text{sen } \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo vertical del cono de aceptación; tal y como se muestra en la Figura 7.32.

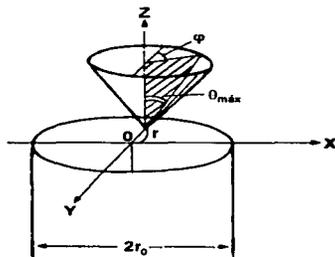


Figura 7.32 Apertura numérica de una lente SELFOC®.

La apertura numérica de una lente de índice de gradiente, es máxima al centro de ésta (caso particular dado por la ecuación 7.21) y decrece con la distancia al eje óptico. Por esta razón, se recomienda considerar un diámetro efectivo del 60 ó 70%, para obtener el mejor desempeño óptico. El cálculo general de la apertura numérica, se realiza en base a la siguiente ecuación:

$$(NA)^2 = \text{sen}^2 \theta_{\text{máx}} = \frac{A \left[ \eta_0 \left( 1 - \frac{A}{2} r^2 \right) \right]^2 r_0^2 (1 - R^2)}{1 - R^2 \text{sen} \varphi} \quad \text{--- (7.24)}$$

- donde:  $r_0$  = radio de la lente (mm)  
 $r$  = Distancia desde el eje de la lente (mm)  
 $R = r/r_0$  = Distancia normalizada desde el eje de la lente  
 $\theta$  = Ángulo vertical del cono de máxima aceptación  
 $\sqrt{A}$  = Constante cuadrática o constante del gradiente de índice de refracción ( $\text{mm}^{-1}$ )  
 $\varphi$  = Distancia angular desde el eje  $Y$

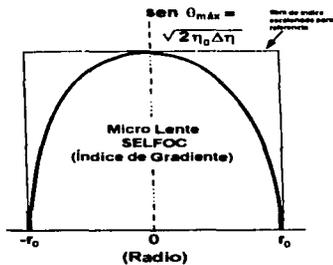


Figura 7.33 Apertura numérica vs. Distancia radial desde el eje de la lente.

Dado que muchas de las variables involucradas en la ecuación 7.24, son dependientes de la longitud de onda, la **NA** general varía ligeramente con ella. La Figura 7.34, nos muestra esta relación para cada uno de los tipos básicos de lentes.

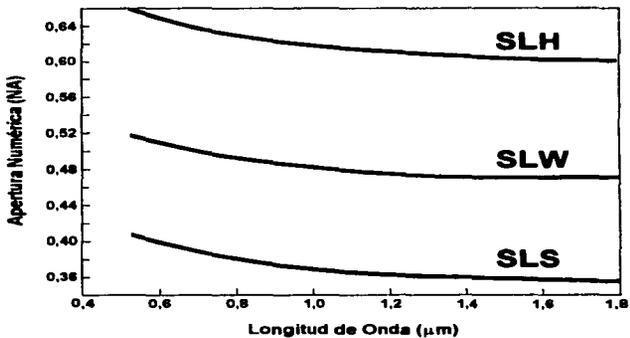


Figura 7.34 Apertura numérica vs. Longitud de onda, para los tres tipos básicos de lentes.

## 7.4.5 TRAZO DE RAYOS

Con un conocimiento básico, de los perfiles de apertura numérica e índice de refracción de la lente **SELFOC**<sup>®</sup>, se puede comprender más fácilmente la naturaleza del viaje de un rayo a través de la lente. En teoría, un rayo meridional (es decir, un rayo en el mismo plano que el eje óptico) entrando a la lente **GRIN**, debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = -\frac{\eta_0^2 r \sqrt{A}}{[\eta(r)]^2 \cos \phi} \quad \text{--- (7.25)}$$

Esta ecuación representa la tasa de cambio de la pendiente de un rayo, siendo esta última, el cambio en la posición radial con respecto al cambio en la posición axial y  $\phi$  es el ángulo que el rayo forma con el eje de la lente. La siguiente matriz de rayos, puede ser utilizada para calcular las condiciones de frontera y es la que utiliza el software "SOLSTIS", para evaluar la propagación del haz láser a través de la lente **GRIN**, bajo las consideraciones de la óptica Gaussiana:

$$\begin{bmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(L\sqrt{A}) & \frac{\sin(L\sqrt{A})}{\eta_0 \sqrt{A}} \\ -\eta_0 \sqrt{A} \sin(L\sqrt{A}) & \cos(L\sqrt{A}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad \text{--- (7.26)}$$

donde:  $r_1$  = Distancia entre el punto de incidencia y el eje óptico (mm)  
 $\theta_1$  = Ángulo de incidencia (radianes)  
 $r_2$  = Distancia entre el punto de salida y el eje óptico (mm)  
 $\theta_2$  = Ángulo de salida (radianes)  
 $L$  = Longitud de la lente (mm)

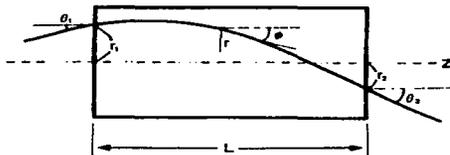


Figura 7.35 Trayectoria óptica en un medio **GRIN**.

#### 7.4.6 LONGITUD FOCAL Y DISTANCIA DE TRABAJO

La longitud focal, es utilizada comúnmente para especificar lentes convencionales y es un parámetro que resulta fácil de comprender, ya que establece la distancia entre la lente y el punto focal. Teóricamente, la distancia focal efectiva es medida desde el plano principal hasta el punto focal, donde el plano principal está ubicado dentro de la lente y no exactamente en la superficie de ésta. En los casos en los que el diámetro de la lente es mucho mayor a su espesor, este es un problema menor, ya que su longitud focal puede ser estimada como la de una lente delgada perfecta (con espesor cero).

Las lentes *GRIN* son indiscutiblemente lentes gruesas y en consecuencia, el concepto de longitud focal se vuelve más complicado, ya que resulta muy complicado determinar la ubicación de los planos principales y por lo tanto, medir la distancia focal real de la lente. Como resultado de lo anterior, se utiliza un parámetro más práctico, conocido como distancia de trabajo de la lente.

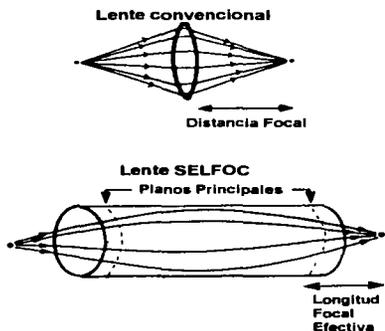


Figura 7.36 Comparación de la distancia focal de una lente delgada y la de una lente *GRIN*.

La distancia de trabajo, se define como la distancia física que existe entre la superficie de la lente y el punto focal. Este concepto es exclusivo de las lentes *GRIN*, ya que el usuario estará en la libertad de manipular la posición de la lente, para satisfacer requerimientos ópticos y mecánicos particulares. La ecuación 7.27, nos permite seleccionar el valor de  $d_1$  (que en nuestro caso es la distancia del diodo láser a la lente) y junto con los valores de  $\sqrt{A}$  y  $n_0$  de la lente, calcular el valor de  $d_2$  ó distancia de trabajo (distancia lente-fibra para nuestro caso).

$$d_2 = \frac{1}{\eta_0 \sqrt{A}} \cdot \frac{\eta_0 d_1 \sqrt{A} \cos(L\sqrt{A}) + \operatorname{sen}(L\sqrt{A})}{\eta_0 d_1 \sqrt{A} \operatorname{sen}(L\sqrt{A}) - \cos(L\sqrt{A})} \quad (7.27)$$

Si el valor de  $d_2 > 0$ , entonces se formará una imagen real; en caso contrario, será una imagen virtual ( $d_2 < 0$ ). Por otro lado, si  $d_2 = 0$ , entonces la imagen aparecerá en la superficie de la lente. La Figura 7.37, nos muestra la localización de las distancias  $d_1$  y  $d_2$ , en donde la suma de  $d_1 + L + d_2$  se conoce como el **Conjugado Total (TC)**.

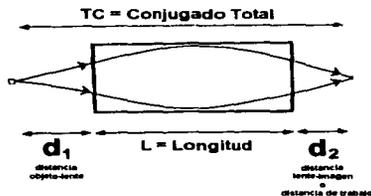


Figura 7.37 Definición gráfica de la distancia de trabajo.

#### 7.4.7 FACTORES QUE AFECTAN LA EFICIENCIA DE ACOPLAMIENTO

El problema general de acoplamiento, involucra dos factores principales: la apertura numérica y la amplificación. Idealmente, se debería seleccionar una lente que igualara o excediera la apertura numérica de la fuente, con el objeto de alcanzar la máxima eficiencia de acoplamiento. Sin embargo, la luz que emerge del sistema óptico debe ser acoplada a una fibra, cuyo ángulo de aceptación o apertura numérica es menor a la de la lente; en consecuencia, existirá una pérdida intrínseca en el esquema de acoplamiento. La Figura 7.38, muestra las condiciones de *overfill* que contribuyen a la pérdida de acoplamiento.

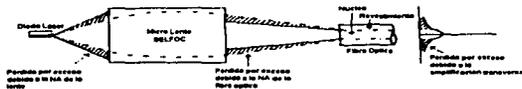


Figura 7.38 Condiciones de *overfill* que reducen la eficiencia de acoplamiento.

Como se ha visto anteriormente, la amplificación o magnificación es la razón existente entre el tamaño de la imagen y el tamaño del objeto. La magnificación ( $m > 1$ ) ocurre, cuando la distancia de la lente a la imagen ( $d_2$ ), es mayor que la distancia del objeto a la lente ( $d_1$ ). Por otra parte, la demagnificación ( $m < 1$ ) se presenta, cuando  $d_1$  excede a  $d_2$ . La magnificación de la imagen, a través de una lente *GRIN* de material *SELFOC*<sup>®</sup>, se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$m = \pm \sqrt{\frac{\eta_0^2 A d_2^2 + 1}{\eta_0^2 A d_1^2 + 1}} = \frac{-1}{\eta_0 \sqrt{A} \operatorname{sen}(L\sqrt{A})} \left[ d_1 - \frac{\operatorname{cot}(L\sqrt{A})}{\eta_0 \sqrt{A}} \right] \quad \text{--- (7.28)}$$

Con respecto a la ecuación anterior, es muy importante aclarar que el signo negativo está asociado al sentido de la imagen y no al valor de la amplificación.

#### 7.4.8 SELECCIÓN DE LALENTE Y DESARROLLO

Para la selección de esta lente, se han utilizado los catálogos de MELLES-GRIOT y de NSG America, Inc., considerando como parámetros principales, la longitud de onda de trabajo y el *pitch* fraccional. Es importante señalar, que *NSG=Nippon Sheet Glass* es la compañía que fabrica el material *SELFOC*<sup>®</sup> y es la propietaria de la patente de este producto.

En base a los conceptos analizados en la sección 7.4.3 y de la Figura 7.31, podemos concluir que la lente requerida para el esquema de acoplamiento diodo láser-fibra monomodo, deberá tener un *pitch* fraccional de 0,29. Considerando los catálogos antes mencionados, se determinó que existe solo una lente *GRIN* que satisface las características requeridas y pertenece al grupo general SLW. En la siguiente tabla, se muestran las especificaciones generales de la lente seleccionada:

Pitch SUPERFICIE (%)	Pitch Fraccional	NA	$\varnothing$ (mm)	L (mm)	Angulo máximo de aceptación, $2\theta$ (grados)	$\eta_0$	Constante cuadrática	NÚMERO DE PRODUCTO
1.5	0.29	0.46	1.8	5.5	55	1.590	0.326	06LGE414

Tabla 7.6 Especificaciones generales de la lente *GRIN* seleccionada.

Por el manejo que se hace de las distancias  $d_1$  y  $d_2$ , en cuanto a su interdependencia y la relación que tienen con la amplificación, podemos decir que una lente con *pitch* fraccional de 0,29, es un caso particular de los elementos *GRIN*. Por tal motivo, el fabricante de estos componentes ópticos proporciona una gráfica, en la que se muestran las curvas que relacionan a  $d_1$ ,  $d_2$  y  $m$ , para diferentes longitudes de onda.

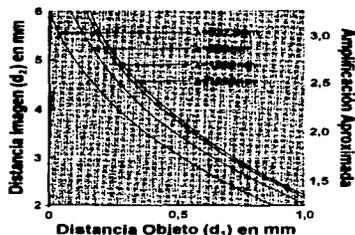


Figura 7.39 Distancias objeto e imagen, para lentes con *pitch* fraccional de 0,29.

De la gráfica anterior, se puede observar que las lentes *GRIN* están severamente limitadas en cuanto a su capacidad de amplificación y para nuestro caso, en el que la longitud de onda de trabajo es de 1 550 nm y la amplificación requerida es de 5,25, es posible anticipar que la distancia objeto será muy pequeña y la distancia imagen muy grande.

Al igual que en el caso de la lente esférica, la amplificación es el factor a partir del cual, deberán ser calculadas las posiciones del diodo láser y del plano de entrada de la fibra óptica. Lo anterior, se realiza despejando  $d_1$  en la ecuación 7.28 y substituyendo los valores conocidos (distancias en mm y ángulos en radianes), sin tomar en cuenta el signo asociado al sentido de la imagen; tal y como se muestra a continuación:

$$m = \frac{1}{\eta_0 \sqrt{A} \operatorname{sen}(L\sqrt{A})} \left[ d_1 - \frac{1}{\eta_0 \sqrt{A} \tan(L\sqrt{A})} \right]$$

$$d_1 = \frac{1}{m\eta_0 \sqrt{A} \operatorname{sen}(L\sqrt{A})} + \frac{1}{\eta_0 \sqrt{A} \tan(L\sqrt{A})}$$

$$d_1 = \frac{1}{(5,25)(0,326)(5,5) \operatorname{sen}[(5,5)(0,326)]} + \frac{1}{(5,25)(0,326) \tan[(5,5)(0,326)]}$$

$$d_1 = -0,059 \text{ mm}$$

Como resultado de la amplificación requerida, se obtiene una distancia objeto negativa, lo que por supuesto es físicamente imposible, ya que implica que el diodo láser tendría que estar dentro de la lente.

Para efectos de poder realizar nuestro análisis por simulación y con el propósito de obtener la máxima amplificación posible, consideraremos una distancia objeto de 1,0  $\mu\text{m}$ , que es la mínima distancia que puede manejar el editor del "SOLSTIS".

Una vez que hemos fijado la distancia objeto, utilizaremos la ecuación 7.27 para calcular la distancia imagen:

$$d_2 = \left[ \frac{1}{(1,59)(0,326)} \right] \cdot \left[ \frac{(1,59)(1 \times 10^{-3})(0,326) \cos[(5,5)(0,326)] + \text{sen}[(5,5)(0,326)]}{(1,59)(1 \times 10^{-3})(0,326) \text{sen}[(5,5)(0,326)] - \cos[(5,5)(0,326)]} \right]$$

$$d_2 = 8,5184 \text{ mm}$$

El resultado anterior, es congruente con lo que se había anticipado y con la gráfica de la Figura 7.39. Al igual que en el caso de la esfera de acoplamiento, el proceso de simulación requiere de un conjunto de datos, asociados a los tres elementos involucrados; no obstante, los cálculos que se han hecho hasta este punto, son los únicos que se deben determinar previamente, ya que son característicos de este caso. Los parámetros restantes, de carácter general, se encuentran contenidos en las librerías del software de análisis. Enseguida, se presenta la tabla general de los resultados obtenidos, utilizando el esquema de acoplamiento de la lente GR/N:

	TEORÍA GAUSSIANA		TEORÍA DE DIFRACCIÓN Y ABERRACIONES		
	CON DATOS INICIALES	DATOS CORREGIDOS	CON DATOS INICIALES	DATOS GAUSSIANOS	DATOS CORREGIDOS
DISTANCIA IMAGEN (mm)	8,5184	8,5181	8,5184	8,5181	7,932
EFICIENCIA DE ACOPLAMIENTO (%)	99,992	99,993	13,9	13,9	40,67
Ø DE LA CINTURA DEL HAZ EN EL PLANO DE ENTRADA DE LA FIBRA ( $\mu\text{m}$ )	-----	10,4 (eje X) 9,05 (eje Y)	51,6	51,6	37,8

Tabla 7.7 Resultados de la simulación para el caso de la lente GR/N Plano-Plano.

De la tabla anterior, se pueden hacer las siguientes observaciones:

1. Las distancias imagen, corresponden a las distancias entre el plano de salida de la lente y el plano de entrada de la fibra.
2. Bajo las consideraciones de la óptica Gaussiana, las ecuaciones proporcionadas por el fabricante de la lente *GRIN* conducen a un resultado óptimo, ya que el ajuste requerido es mínimo. En lo que respecta al diámetro de la cintura del haz, no se observa ninguna diferencia entre los resultados derivados de los datos iniciales y los de la Teoría Gaussiana.
3. De manera similar al caso anterior, para el diámetro de la cintura del haz en el plano imagen, el Módulo Gaussiano no proporciona los resultados asociados a las condiciones iniciales. Sin embargo, los valores que se muestran en la columna de datos corregidos, son consecuencia de la relación elipticidad-divergencia que se explicó en el caso de la micro-esfera.
4. Cuando se realiza el análisis, considerando los efectos de aberraciones y difracción, se nota un decremento considerable de la eficiencia de acoplamiento, tanto para las condiciones determinadas por las ecuaciones del fabricante de la lente, como para las de la óptica Gaussiana. En lo que respecta a las dimensiones de la cintura del haz en el plano imagen, con el propósito de simplificar la presentación de resultados, se muestran únicamente los valores correspondientes al eje X.
5. Al igual que en el caso anterior, se presenta una tolerancia de posicionamiento muy cerrada, ya que una pequeña variación en la posición del plano de entrada de la fibra, da como consecuencia un cambio significativo en la eficiencia de acoplamiento.
6. Como en el caso de la micro-esfera, una menor cintura de haz en el plano de entrada de la fibra óptica, da como resultado una mayor eficiencia de acoplamiento.
7. No obstante que la apertura numérica de esta lente, es menor que la apertura numérica de la fuente al 99% de la energía, la eficiencia de acoplamiento estimada bajo las consideraciones de la teoría difractiva, es muy semejante a la del caso anterior, en el que la apertura numérica de la lente si es mayor a la de la fuente.

En los siguientes puntos se describe la secuencia de simulación, así como las gráficas más importantes generadas durante este proceso, a partir de las cuales se obtuvieron los resultados de la Tabla 7.7.

1. Al igual que en el caso anterior, el primer paso consiste en definir dentro del editor principal, los parámetros ópticos y físicos más importantes del sistema (ver Figura 7.40).
2. Como segundo paso, se genera un trazo de rayos basado en las consideraciones de la Óptica Geométrica, que permite obtener una visión general del sistema (ver Figura 7.41).
3. Dentro del editor del módulo de Haz Gaussiano (ver Figuras 7.42 y 7.43), se definen los parámetros Gaussianos más relevantes del diodo láser, de tal forma que el software genere una serie de datos, que nos permitan analizar la situación inicial del sistema, bajo las consideraciones de la Óptica Gaussiana. Es importante recordar, que como se ha definido un haz láser elíptico, los parámetros se definen tanto para el eje X como para el eje Y.

- 
4. Una vez que se han definido los parámetros Gaussianos, se genera un diagrama de haz que permita observar las diferencias entre la distancia imagen calculada inicialmente y el plano de mejor enfocamiento, determinado por el software (ver Figuras 7.44 y 7.45). En este caso, se generaron dos vistas diferentes del mismo diagrama y se observa que la diferencia entre la posición de los planos antes mencionados, es prácticamente imperceptible.
  5. Dentro del Editor de Movimientos del Módulo Gaussiano (Figuras 7.46 y 7.47), se analizan los parámetros más importantes de sistema óptico (eficiencia de acoplamiento, distancia imagen y diámetro de la cintura del haz en el plano óptimo) y se corrige la ubicación del plano de observación, para obtener la mejor eficiencia de acoplamiento.
  6. En este caso, dado que no se detectó una diferencia significativa entre la distancia imagen calculada inicialmente y la corregida por el software, no se generó un segundo diagrama de haz.
  7. Una vez que se han realizado las correcciones en la distancia imagen, se generan las curvas que muestran la dependencia de la eficiencia de acoplamiento, con respecto al desalineamiento angular y ortogonal en el eje X y la distancia de observación (eje Z). De manera semejante al caso anterior, se omitieron las gráficas correspondientes al eje Y, dado que resultan muy similares (ver Figuras 7.48, 7.49 y 7.50).
  8. Los parámetros ópticos del diodo láser, que se definieron en la Figura 7.15, permanecen constantes para todos los casos.
  9. Como se está utilizando otro elemento óptico, es necesario definir nuevamente los coeficientes de transmitancia para los planos de entrada y salida de la lente. Sin embargo, los coeficientes de la fuente y de la fibra, permanecen constantes para todos los casos (ver Figura 7.51).
  10. En este punto, ya dentro del Módulo Láser-Pro, se genera el mapa de irradiancia para el plano de observación determinado mediante la Óptica Gaussiana (Figura 7.52). Dado que no se observó una diferencia significativa, entre las distancias imagen Gaussiana e inicial, no se generó un mapa de irradiancia para el plano de observación ubicado en esta última posición.
  11. Antes de proceder con la determinación del punto de máxima eficiencia, es necesario definir algunos parámetros de la fibra óptica, de tal forma que el Módulo Láser-Pro pueda comparar el modo que será propagado por la fibra, contra el modo emitido por el diodo láser y que llega al plano de entrada de ésta. Lo anterior se observa en la Figura 7.54 (este editor se aplica en todos los casos).
  12. A diferencia del caso anterior y con el fin de optimizar la secuencia de resultados, se omitió la presentación de las curvas correspondientes a la eficiencia de acoplamiento vs. el alineamiento ortogonal y angular, para el plano de observación calculado en el Módulo Gaussiano. En consecuencia, se generaron directamente las curvas de la eficiencia vs. la distancia imagen y los desalineamientos angular y ortogonal en el eje X (ver Figuras 7.55, 7.56 y 7.67 respectivamente). Una vez conocido el punto de mejor enfocamiento, se generó el mapa de irradiancia para esa posición (ver Figura 7.53) y se determinó el diámetro aproximado de la cintura del haz, comparándolo con el de la Figura 7.52.
  13. Al igual que en el caso anterior, se calculó por medios no gráficos, la eficiencia de acoplamiento considerando las distancias imagen Gaussiana y Final, con desalineamientos nulos (ver Figuras 7.58 y 7.59).
-

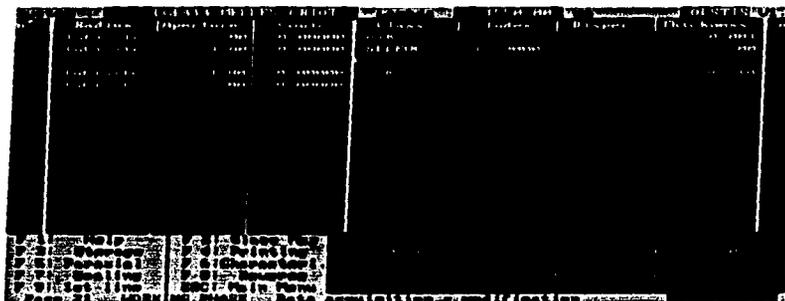


Figura 7.40 Pantalla del editor principal del "SOLSTIS" para la lente GRIN de caras planas paralelas. Obsérvese que en la columna denominada *Glass*, se define el material SELFOC como un medio GRIN. En este caso, el valor de la dispersión no es conocido para el material con gradiente de índice de refracción. Al igual que en el caso de la microesfera de acoplamiento, esta tabla contiene los datos calculados inicialmente

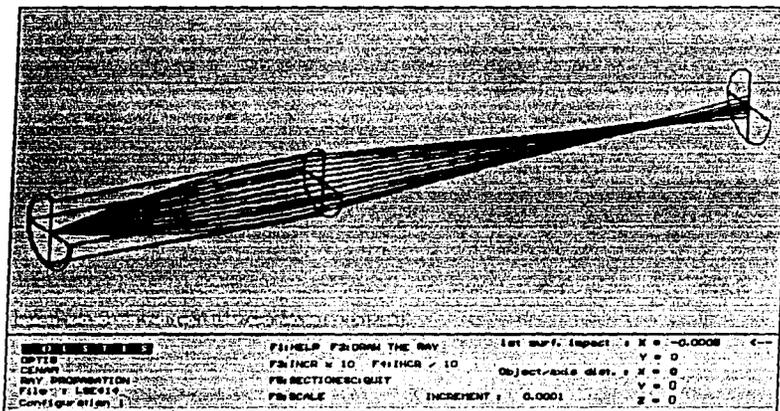


Figura 7.41 Diagrama de trazo de rayos que representa las consideraciones de la Óptica Geométrica, en base a los datos asentados en la tabla del editor principal. Note que existe un cierto grado de aberración esférica, aunque menor que en el caso anterior. Los semicírculos que aparecen en el extremo izquierdo de la lente, representan la apertura del plano objeto y el perímetro de la lente.

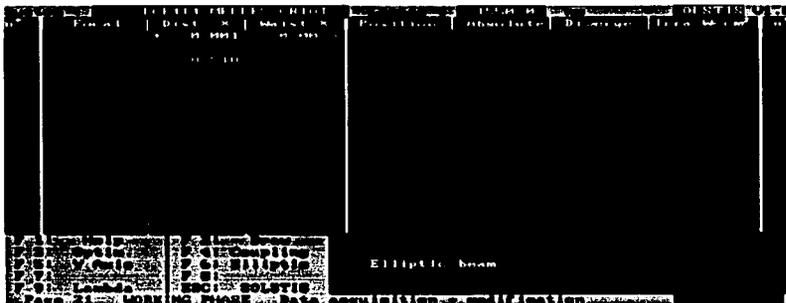


Figura 7.42 Editor del Módulo Gaussiano para el eje X. Nótese que no existe diferencia, entre la posición final de la cintura del haz calculada inicialmente y la calculada por el software (8.518 mm).

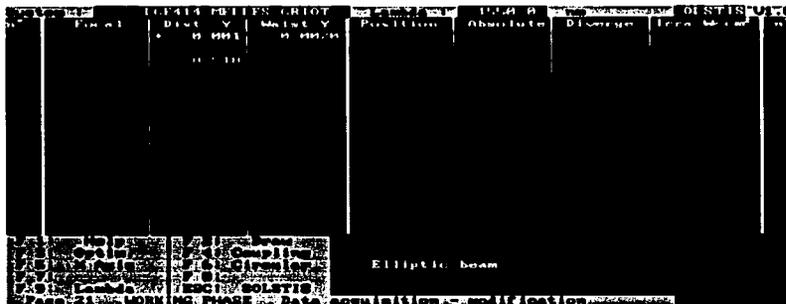


Figura 7.43 Editor del Módulo Gaussiano para el eje Y, con las mismas condiciones que en la imagen anterior.

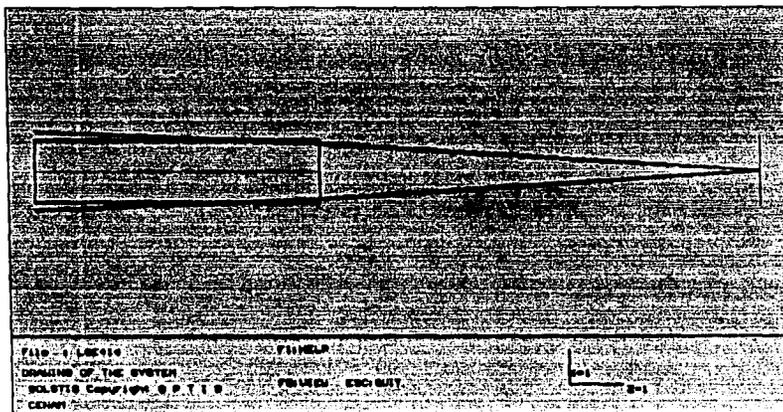


Figura 7.44 Diagrama de haz, obtenido en base a las consideraciones de la Óptica Gaussiana. Al igual que en el caso de la micro-esfera, la línea oscura representa el nivel  $1/e^2$  en el plano XZ y la línea clara, representa el mismo nivel en el plano YZ.

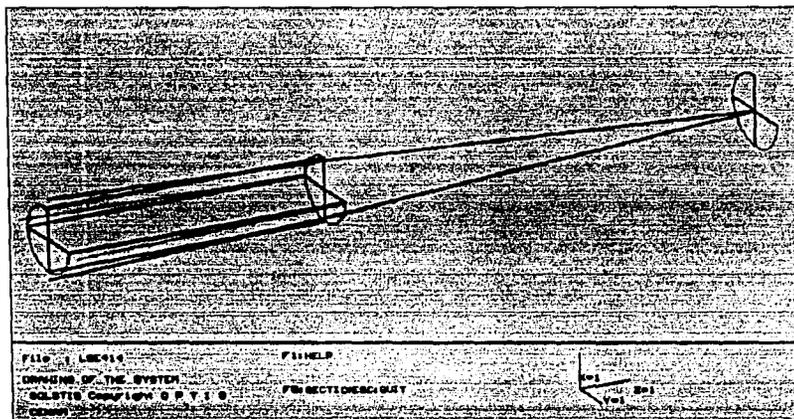


Figura 7.45 El mismo digrama de haz de la figura anterior, visto en perspectiva

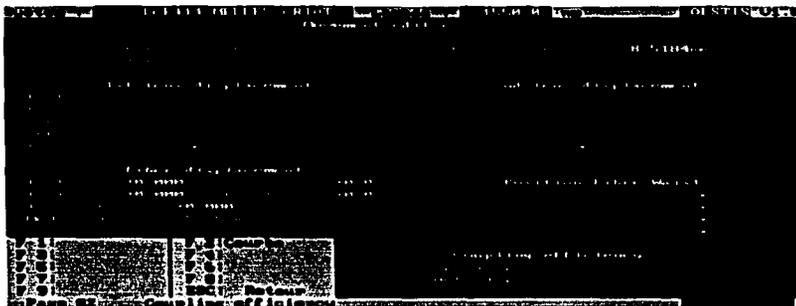


Figura 7.46 Editor de movimientos y eficiencia de acoplamiento del Módulo Gaussiano. En base al dato que aparece en el campo denominado *Defocus error*, es posible hacer una ligera corrección en la ubicación sobre el eje óptico, del plano de entrada de la fibra óptica.



Figura 7.47 En esta figura, se observa como la distancia imagen ha cambiado de 8,5184 mm a 8,5181 mm y la eficiencia de acoplamiento, también aumenta ligeramente.

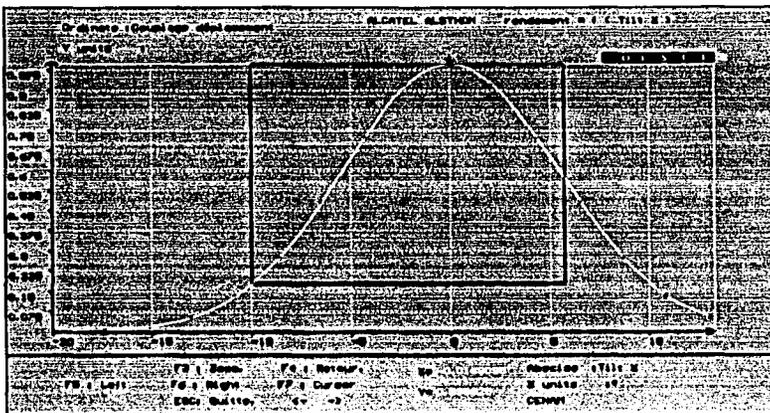


Figura 7.48 Gráfica que muestra, bajo las consideraciones de la Óptica Gaussiana, la curva de la eficiencia de acoplamiento en función del desalineamiento angular en el eje X. La flecha ubicada en la parte superior de la campana, indica el punto de máxima eficiencia y sus coordenadas se muestran en la parte inferior de la figura

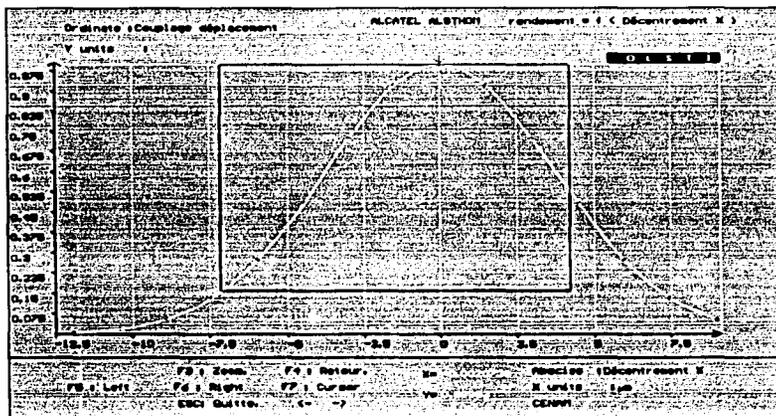


Figura 7.49 Gráfica que muestra la curva de la eficiencia de acoplamiento, en función del desalineamiento ortogonal en el eje X. Las graficas correspondientes al eje Y, se omitieron por ser muy semejantes

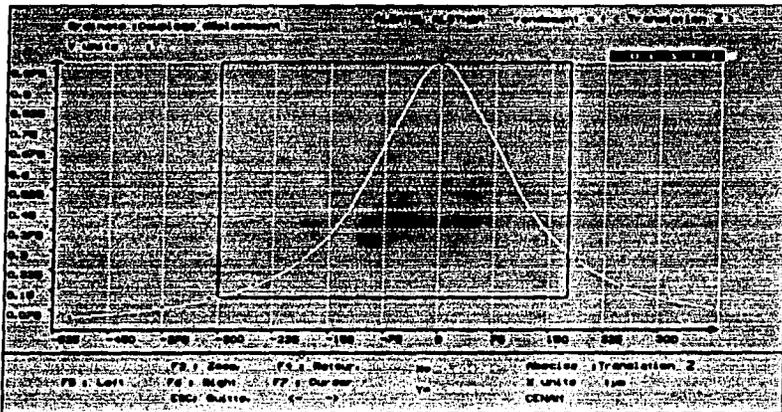


Figura 7.50 Gráfica que muestra la curva de la eficiencia de acoplamiento, en función de la distancia imagen. Al igual que en las gráficas anteriores, el ancho de la campana representa la tolerancia de posicionamiento, para un nivel de eficiencia determinado.

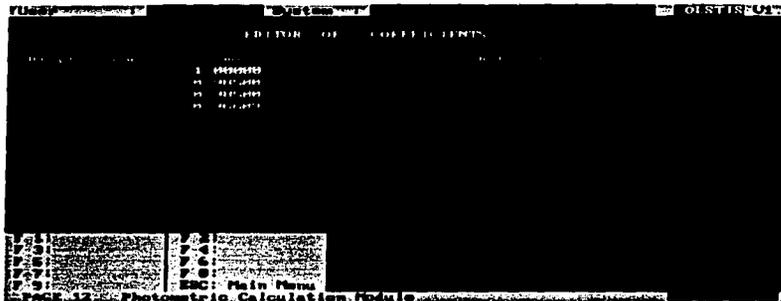


Figura 7.51 Editor de coeficientes de transmisión, para cada uno de los elementos involucrados en el sistema. El valor de la transmisión de cada una de las caras de la lente, es el complemento de la reflectancia que se definió en la Tabla 7.6. Los otros coeficientes, permanecen igual que en el caso de la micro-esfera de acoplamiento.



Figura 7 52 Mapa de irradiancia, que muestra el perfil Gaussiano del haz enfocado, en el plano de observacion corregido en el Módulo Gaussiano. El mapa que corresponde a la distancia imagen calculada inicialmente se ha omitido, dado que la diferencia encontrada no es significativa



Figura 7 53 Mapa de irradiancia, que muestra el perfil Gaussiano del haz enfocado, en el plano de observacion calculado mediante la Teoría de Difracción y Aberraciones. Notese que las dimensiones del haz, son menores en comparación con las que se presentan en la grafica anterior

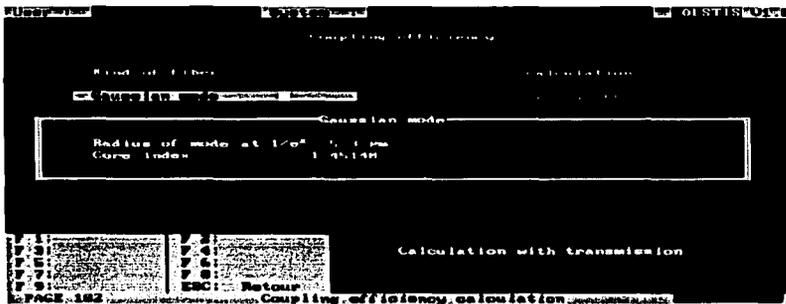


Figura 7.54 Editor de coeficientes de la fibra óptica. Estos datos se deben proporcionar al software en el Módulo Laser-Pro, antes de que se calcule la eficiencia de acoplamiento y corresponden a la información definida en la Tabla 7.3 (este editor es el mismo para los cuatro casos analizados)



Figura 7.55 Gráfica que muestra la curva de la eficiencia de acoplamiento, en función de la distancia imagen

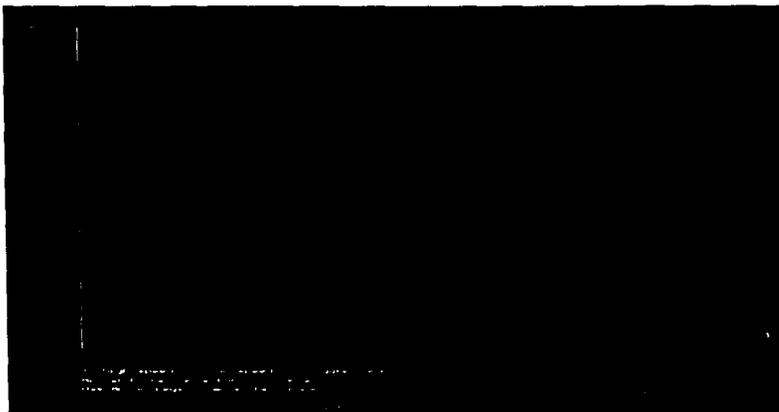


Figura 7 56 Gráfica que muestra la curva de la eficiencia de acoplamiento, en función del desalineamiento angular en el eje X, considerando la distancia imagen obtenida en la gráfica anterior (7.932 mm). Por la resolución de movimiento del cursor, no fue posible obtener una tolerancia de posicionamiento



Figura 7 57 Gráfica que muestra la curva de la eficiencia de acoplamiento, en función del desalineamiento ortogonal en el eje X, aplicando la misma distancia imagen que en la gráfica anterior (las gráficas obtenidas para el eje Y se omitieron por ser muy semejantes). La tolerancia de posicionamiento para una eficiencia máxima es de 0.18  $\mu\text{m}$



### 7.5 CASO 3: LENTE GRIN PLANO-CONVEXA (PC)

En lo general, la lente *GRIN* plano-convexa cumple con las mismas propiedades que la lente *GRIN* de caras planas paralelas; sin embargo, presenta como principal característica, el que la superficie de entrada es convexa y no plana como en el caso anterior. Este diseño, está pensado para mejorar la eficiencia de acoplamiento, ya que la superficie convexa sirve para reducir los efectos de la aberración esférica en la lente. El resultado que se obtiene, es un mayor ángulo de aceptación, que le permite a la lente capturar una mayor cantidad de luz y lograr enfocar la imagen en un punto más pequeño.

Como consecuencia de lo anterior, la aplicación más común para este tipo de lentes es el acoplamiento de una fuente de luz, como un diodo láser o un LED, a una fibra óptica. Existen tres tipos de lentes PC: PCW, PCH y PCT, todas ellas con un diámetro de 1,8 mm. Las lentes del tipo PCT, proporcionan la mayor eficiencia de acoplamiento, debido a que presentan un mejor control de los coeficientes de alto orden, en la ecuación de distribución del índice de refracción. No obstante esta situación, este tipo de lentes no fue considerado dentro de nuestro análisis, ya que no fue posible obtener la suficiente información técnica (ecuaciones características).

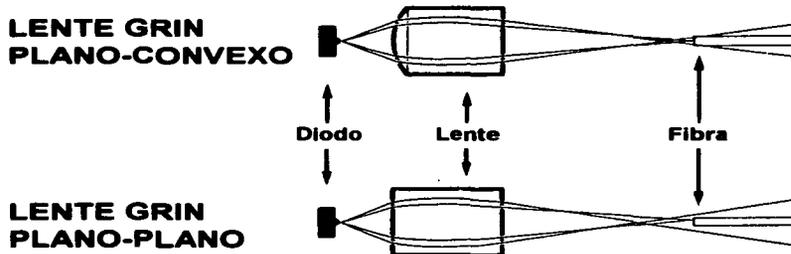


Figura 7.60 Comparación gráfica del desempeño de una lente Plano-Convexa y una lente Plano-Plano, para la aplicación de acoplamiento Diodo/Fibra.

#### 7.5.1 FORMACIÓN DE IMÁGENES Y MATRIZ DE RAYOS

Al igual que en el caso de la lente Plano-Plano, la lente *GRIN* PC cuenta con ecuaciones propias para determinar la amplificación y las distancias objeto e imagen. La ecuación de trazo de rayos, puede ser utilizada para determinar las tolerancias de la posición de la imagen, así como para determinar esquemas de acoplamiento alternativos. A continuación, se presentan las ecuaciones que relacionan las distancias objeto e imagen, con la amplificación transversal:

$$d_2 = \frac{\left(\frac{-\eta_2 \eta_1}{\sqrt{A}}\right) \text{sen}(L\sqrt{A}) - \eta_2 \eta_0 d_1 \left[ \cos(L\sqrt{A}) - \left(\frac{C}{\sqrt{A}}\right) \text{sen}(L\sqrt{A}) \right]}{\eta_1 \eta_0 \cos(L\sqrt{A}) - \eta_0^2 d_1 \left[ \sqrt{A} \text{sen}(L\sqrt{A}) + C \cos(L\sqrt{A}) \right]} \quad \text{--- (7.29)}$$

$$m_T = \frac{\eta_1}{\eta_1 \cos(L\sqrt{A}) - \eta_0^2 d_1 \left[ \sqrt{A} \text{sen}(L\sqrt{A}) + C \cos(L\sqrt{A}) \right]} \quad \text{--- (7.30)}$$

donde:  $\eta_1$  = Índice de refracción del medio, antes de la superficie de entrada a la lente  
 $\eta_2$  = Índice de refracción del medio, después de la superficie de salida de la lente  
 $\eta_0$  = Índice de refracción en el eje óptico de la lente  
 $d_1$  = Distancia Objeto  
 $d_2$  = Distancia imagen  
 $C$  = Curvatura =  $(\eta_0 - \eta_1) / (\eta_0 R)$   
 $R$  = Radio de curvatura de la superficie convexa (mm)



Figura 7.61 Trazo de un rayo a través de una lente GRINPC.

Para entender mejor el comportamiento de un arreglo óptico en particular, es posible alcanzar límites teóricos realistas mediante el empleo del trazado de rayos asistido por computadora, que no es otra cosa que un método de diseño-análisis de lentes que incorpora desarrollos geométricos. El diagrama de matriz de rayos (ver Figura 7.61), indica tanto el ángulo como la distancia al eje óptico a los que un rayo emergerá de la micro-lente, donde el ángulo de entrada del rayo y su posición son datos conocidos. La ecuación matricial es utilizada por el software "SOLSTIS", para calcular dentro de las consideraciones de la óptica Gaussiana, la apertura numérica, la posición de la imagen y la eficiencia de acoplamiento esperada para una lente o un sistema de lentes. La siguiente ecuación, proporciona las aproximaciones del trazado de rayos, considerando diferentes posiciones radiales,  $r_0$  y ángulos de entrada,  $\theta_0$ , en la primera superficie de la lente PC:

$$\begin{bmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(L\sqrt{A}) - \frac{C \operatorname{sen}(L\sqrt{A})}{\sqrt{A}} & \frac{\eta_1 \operatorname{sen}(L\sqrt{A})}{\eta_0 \sqrt{A}} \\ -\frac{\eta_0}{\eta_2} [\sqrt{A} \operatorname{sen}(L\sqrt{A}) + C \cos(L\sqrt{A})] & \frac{\eta_1 \cos(L\sqrt{A})}{\eta_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad (7.31)$$

Como es de suponerse, la exactitud del análisis se incrementa con el número de rayos trazados por superficie (es decir, un muestreo mayor de los valores de  $r_0$  y  $\theta_0$ ). Por lo tanto, la información asociada a una lente o un sistema de lentes es dibujada estadísticamente y de esta manera, las aberraciones, la resolución óptica y muchos otros efectos pueden ser estimados y posteriormente, confirmados mediante la experimentación.

### 7.5.2 SELECCIÓN DE LALENTE Y DESARROLLO

Como se mencionó en la sección anterior, las lentes que consideraremos para el análisis son las del tipo PCW y PCH; sin embargo, existen tres lentes distintas clasificadas dentro de estos tipos y será necesario seleccionar la que mejor se adecúe a nuestras necesidades. A continuación se presenta una tabla, que contiene las especificaciones más importantes de estos componentes ópticos:

	$r_{\text{cur}}$ (mm)	Pitch	NA	$2\theta$ (grados)	$\eta_0$	$\sqrt{A}$ (mm <sup>-1</sup> )	$L$ (mm)	$R$ (mm)	$d_1$ (mm)	$d_2$ (mm)	TC (mm)
PCW	0,25	0,25	0,46	55	1,590	0,326	4,81	2,0	0,7	4,25	9,76
PCH	0,25	0,22	0,60	72	1,634	0,417	3,31	2,0	0,7	3,91	7,92
PCH	0,25	0,20	0,60	72	1,634	0,417	3,01	2,0	0,7	6,12	9,83

Tabla 7.8 Especificaciones de las lentes PCW y PCH para la longitud de onda de trabajo (1 550 nm).

De la tabla anterior es importante hacer las siguientes observaciones:

- La reflectancia por superficie, se especifica de acuerdo a un recubrimiento Grado-A y se considera como el máximo valor esperado.
- El *pitch* fraccional en ningún caso es 0,29 y esta es una de las razones, por las que tendremos que seleccionar la lente que mejor se adecúe a nuestro caso.
- La diferencia entre las aperturas numéricas de las lentes PCW y PCH es significativa; al respecto, podemos anticipar que la lente PCW no será útil para nuestros propósitos, ya que su capacidad angular de recolección de luz es muy limitada.
- El radio de curvatura de la superficie convexa,  $R$ , es fijo para las lentes PCW. Sin embargo, en el caso de las lentes PCH, puede oscilar entre 1,0 mm y 3,0 mm, por lo que se ha seleccionado el valor medio de 2,0 mm.

- Los datos correspondientes a  $d_1$ ,  $d_2$  y  $TC$ , son proporcionados por el fabricante en base a desarrollos experimentales y se consideran como las distancias objeto e imagen óptimas asociadas a cada lente. Sin embargo, esto debe considerarse en términos generales y la validez de estos datos, podría variar dependiendo de la fuente láser y la fibra óptica utilizadas.

El análisis para cada una de las lentes, se hará en base a las ecuaciones 7.29 y 7.30, considerando que  $\eta_1 = \eta_2 = 1$ , ya que el elemento óptico está rodeado por aire. Obteniendo el valor de  $C$  y despejando  $d_1$  de la ecuación 7.30, se obtiene lo siguiente para la lente PCW:

$$C = \frac{\eta_0 - 1}{\eta_0 R} = \frac{1,59 - 1}{(1,59)(2)} = 0,1855$$

$$d_1 = \frac{m \cos(L\sqrt{A}) - 1}{m\eta_0 [\sqrt{A} \operatorname{sen}(L\sqrt{A}) + C \cos(L\sqrt{A})]}$$

$$d_1 = \frac{(5,25) \cos[(4,81)(0,326)] - 1}{(5,25)(1,59)[(0,326) \operatorname{sen}[(4,81)(0,326)] + (0,1855) \cos[(4,81)(0,326)]}$$

$$d_1 = -0,3616 \text{ mm}$$

El resultado anterior es físicamente imposible, ya que implica que el diodo láser estuviera ubicado dentro de la lente. Para continuar nuestro análisis, utilizaremos la misma consideración que en el caso de la lente *GRIN* Plano-Plano y asignaremos a  $d_1$ , el valor de 1,0  $\mu\text{m}$ . Bajo estas condiciones y resolviendo la ecuación 7.29, se obtiene lo siguiente:

$$d_2 = \frac{\left(\frac{-1}{0,326}\right) \operatorname{sen}[(4,81)(0,326)] - (1,59)(1 \times 10^{-3}) \left[ \cos[(4,81)(0,326)] - \left(\frac{0,1855}{0,326}\right) \operatorname{sen}[(4,81)(0,326)] \right]}{(1,59) \cos[(4,81)(0,326)] - (1,59)^2 (1 \times 10^{-3}) [(0,326) \operatorname{sen}[(4,81)(0,326)] + (0,1855) \cos[(4,81)(0,326)]}$$

$$d_2 = -869,87 \text{ mm}$$

Este resultado nos indica, que para la distancia objeto considerada, la lente se está comportando como un elemento divergente y en consecuencia, está generando una imagen virtual en el espacio objeto. Sin embargo, no desecharemos aún la posibilidad de utilizar esta lente y calcularemos el valor de la amplificación transversal (ecuación 7.30), utilizando el valor de  $d_1$  recomendado por el fabricante.

$$m = \frac{1}{\cos[(4,81)(0,326)] - (1,59)(0,7)[(0,326)\text{sen}[(4,81)(0,326)] + (0,1855)\text{cos}[(4,81)(0,326)]}$$

$$m = -2,773$$

Analizando el resultado anterior, podemos decir que se está obteniendo una imagen invertida y ampliificada casi tres veces. Sin embargo, este valor de ampliificación transversal no es suficiente para nuestros requerimientos, por lo que continuaremos el análisis con las lentes PCH, aplicando la metodología anterior. Substituyendo los valores de la Tabla 7.8, correspondientes a las lentes del tipo PCH, en las ecuaciones 7.29 y 7.30, obtenemos los siguientes resultados:

PCH con <i>Pitch</i> =0,22				PCH con <i>Pitch</i> =0,20			
$d_1$ (mm)	$d_2$ (mm)	$m$	Observaciones	$d_1$ (mm)	$d_2$ (mm)	$m$	Observaciones
$-1,51 \times 10^{-3}$	-----	-----	El valor de la distancia objeto resulta negativa, por lo que no se calcula la distancia imagen ni la ampliificación.	0,1607	-7,213	-----	El valor de la distancia objeto es positiva, sin embargo, la distancia imagen resulta negativa y no se calcula la ampliificación.
$1 \times 10^{-3}$	-7,64	-----	Se aplica la mínima distancia objeto que puede manejar el editor del "SOLSTIS"; sin embargo, la distancia imagen resulta negativa y no se calcula la ampliificación.	$1 \times 10^{-3}$	-4,505	-----	Se aplica la mínima distancia objeto que puede manejar el editor del "SOLSTIS"; sin embargo, la distancia imagen resulta negativa y no se calcula la ampliificación.
0,7	3,91	-3,12	Se utilizan las distancias objeto e imagen recomendadas por el fabricante de la lente y resulta una imagen invertida y ampliificada un poco más de tres veces.	0,7	6,12	-4,72	Se utilizan las distancias objeto e imagen recomendadas por el fabricante de la lente y resulta una imagen invertida y ampliificada casi cinco veces.

Tabla 7.9 Resultados obtenidos para las lentes GRIN del tipo PCH.

De los resultados que se presentan en la tabla anterior, es posible concluir que las lentes PCH proporcionan una ampliificación transversal mayor a la de la lente PCW; no obstante, la lente cuyo *pitch* es igual a 0,22, genera una ampliificación transversal menor a la de la lente cuyo *pitch* es igual a 0,20 y en ambos casos, es necesario utilizar las distancias objeto e imagen recomendadas por el fabricante. Como consecuencia de lo anterior, la simulación mediante el software de análisis fotónico se hará para la segunda lente PCH, considerando las distancias objeto e imagen recomendadas.

Al igual que en los dos casos anteriores, el proceso de simulación requiere de un conjunto de datos, asociados a los tres elementos involucrados. Sin embargo, los cálculos que se han hecho hasta este punto, son los únicos que se deben determinar previamente, ya que son característicos de este caso. Los parámetros restantes, de carácter general, se encuentran contenidos en las librerías del software de análisis. Enseguida, se presenta la tabla general de los resultados obtenidos, utilizando el esquema de acoplamiento de la lente GRIN PC:

	TEORÍA GAUSSIANA		TEORÍA DE DIFRACCIÓN Y ABERRACIONES		
	CON DATOS INICIALES	DATOS CORREGIDOS	CON DATOS INICIALES	DATOS GAUSSIANOS	DATOS CORREGIDOS
DISTANCIA IMAGEN (mm)	6,12	6,1487	6,12	6,1487	5,504
EFICIENCIA DE ACOPLAMIENTO (%)	94,091	99,889	14,2	13,2	39,86
Ø DE LA CINTURA DEL HAZ EN EL PLANO DE ENTRADA DE LA FIBRA (µm)	-----	10,9 (eje X) 9,44 (eje Y)	48,0	53,8	36,8

Tabla 7.10 Resultados de la simulación para el caso de la lente *GRIN* Plano-Convexo.

De la tabla anterior, se pueden hacer las siguientes observaciones:

1. Las distancias imagen, corresponden a las distancias entre el plano de salida de la lente y el plano de entrada de la fibra.
2. Al igual que en el caso anterior, bajo las consideraciones de la óptica Gaussiana, los datos recomendados por el fabricante de la lente *GRIN* conducen a un resultado óptimo, ya que el ajuste requerido es mínimo. Adicionalmente, para el diámetro de la cintura del haz no se observa ninguna diferencia, entre los resultados derivados de los datos iniciales y los de la Teoría Gaussiana.
3. De manera similar a los dos casos anteriores, para el diámetro de la cintura del haz en el plano imagen, el Módulo Gaussiano no proporciona los resultados asociados a las condiciones iniciales. Sin embargo, los valores que se muestran en la columna de datos corregidos, se originan como consecuencia de la relación elipticidad-divergencia que se explicó en el primer caso.
4. Cuando se realiza el análisis considerando los efectos de aberraciones y difracción, se nota un decremento considerable de la eficiencia de acoplamiento, tanto para las condiciones determinadas por los datos recomendados, como para las de la óptica Gaussiana. Sin embargo, es importante hacer notar que en este caso, los datos recomendados por el fabricante conducen a un mejor resultado, en comparación con las correcciones de la óptica Gaussiana. En lo que respecta a las dimensiones de la cintura del haz en el plano imagen y con el propósito de simplificar la presentación de resultados, se muestran únicamente los valores correspondientes al eje X.
5. Al igual que en el caso anterior, se presenta una tolerancia de posicionamiento muy cerrada, ya que una pequeña variación en la posición del plano de entrada de la fibra, da como consecuencia un cambio significativo en la eficiencia de acoplamiento.
6. Como era de esperarse, cuando se genera una cintura de haz más pequeña en el plano de entrada de la fibra, se obtiene una mayor eficiencia de acoplamiento.

- 7. En el caso de esta lente, la apertura numérica se asemeja más a la de la fuente, en comparación del caso anterior; sin embargo, la eficiencia estimada en la etapa final, resulta ligeramente menor, en comparación de la que se obtiene con la lente de caras planas paralelas y por supuesto, de la obtenida con la esfera de acoplamiento.**

En los siguientes puntos se describe la secuencia de simulación, así como las gráficas más significativas generadas durante este proceso y a partir de las cuales, se obtuvieron los resultados de la Tabla 7.10. Es importante aclarar, que las curvas de tolerancia de posicionamiento, que se originan bajo las consideraciones de la óptica Gaussiana se han omitido, ya que en lo general, son muy similares a las de los casos anteriores.

1. Nuevamente, el primer paso consiste en definir dentro del editor principal, los parámetros ópticos y físicos más importantes del sistema (ver Figura 7.62). Sin embargo, en el caso de la función *GRIN*, también es necesario establecer los parámetros que definen el perfil de la variación del índice de refracción; esta situación se presenta en la Figura 7.63. Es importante señalar, que este proceso también se llevó a cabo para la lente *GRIN* Plano-Plano.
2. Como siguiente paso, se generó el trazo de rayos bajo las consideraciones de la Óptica Geométrica y que permite analizar, un panorama general del sistema bajo estudio. Lo anterior se presenta en la Figura 7.64. Al igual que en los casos anteriores, el diagrama de trazo de rayos permite observar el efecto de la aberración esférica en la lente.
3. A continuación, se establecen los parámetros Gaussianos más importantes de la fuente óptica (Figuras 7.65 y 7.66), dentro del Editor Principal del Módulo de Haz Gaussiano. De la misma forma que en los casos anteriores, estos parámetros se definen tanto para el eje X, como para el eje Y.
4. Ya que se han definido los parámetros Gaussianos, se genera un diagrama de haz en perspectiva, el cual nos permite observar la diferencia que existe, entre el plano de observación calculado inicialmente y el que calcula el software. Como se puede observar en la Figura 7.67, esta diferencia es muy pequeña.
5. Como siguiente paso, se corrige dentro del Editor de Movimientos del Módulo Gaussiano, la localización del plano de observación (Figuras 7.68 y 7.69); esto con el objeto de alcanzar la mayor eficiencia de acoplamiento.
6. Una vez que se ha corregido la distancia imagen, se genera nuevamente el diagrama de haz. A este respecto, en la Figura 7.70 se puede observar que no existe ninguna diferencia entre el plano de observación y el plano de mejor enfocamiento.
7. Al igual que en los casos anteriores, los parámetros ópticos del diodo láser, así como la transmitancia de éste y de la interfase aire-fibra, permanecen constantes. Sin embargo, es necesario redefinir los valores de transmitancia para las caras de entrada y salida de la lente *GRIN* P-C, en base a los datos de la tabla 7.8. Lo anterior se muestra en la Figura 7.71.

8. Como primer paso dentro de la evaluación con el Módulo Láser-Pro, se genera el mapa de irradiancia para el plano de observación, cuya ubicación se determinó mediante la Teoría Gaussiana (ver Figura 7.73) y para efectos comparativos, se genera también el mapa correspondiente a la distancia imagen calculada inicialmente (ver Figura 7.72).
9. De forma similar al caso anterior, se omitió la presentación de las curvas correspondientes a la eficiencia de acoplamiento vs. el alineamiento angular y ortogonal, para el plano de observación calculado en el Módulo Gaussiano. Como consecuencia, se generaron directamente las curvas de la eficiencia de acoplamiento vs. la distancia imagen (Figura 7.75) y los desalineamientos angular y ortogonal en el eje X (Figuras 7.76 y 7.77). Al obtener de la Figura 7.75 la posición de mejor enfocamiento, se generó el mapa de irradiancia correspondiente (Figura 7.74) y se determinó el diámetro aproximado de la cintura del haz, al nivel  $1/e^2$ .
10. En relación a la Figura 7.76, obtenida en el paso anterior, es importante observar las oscilaciones que aparecen alrededor del punto de máxima eficiencia (desalineamiento angular cero). A este respecto y en base a los comentarios que se recibieron de la compañía **OPTIS**, aparentemente estas oscilaciones se deben a una "saturación" del software durante el proceso de cálculo, por la simulación de la propagación láser a través del medio de índice de gradiente. Sin embargo podemos decir, que los datos correspondientes al punto de máxima eficiencia para un alineamiento óptimo son válidos y que dichas oscilaciones no se deben a ningún efecto óptico.
11. Como último paso, se realizaron los cálculos correspondientes a la eficiencia de acoplamiento, para las distancias imagen obtenidas en los diferentes pasos de la evaluación (inicial, Gaussiana y Difractiva) y bajo las consideraciones de la Teoría de Difracción y aberraciones. Esto se llevó a cabo sin utilizar gráficas y los resultados se presentan en las Figuras 7.78, 7.79 y 7.80.



Figura 7.62 Editor principal del "SOLSTIS", para el caso de la lente GRIN Plano-Convexa.



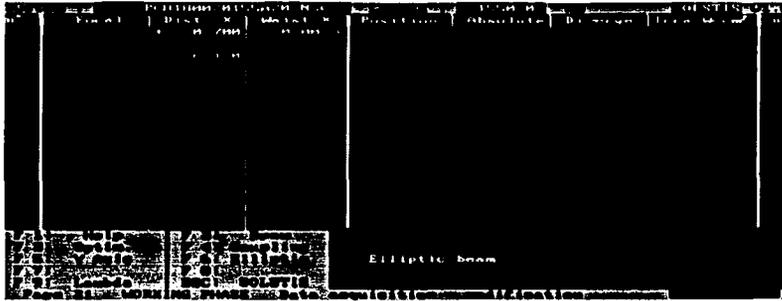


Figura 7.65 Editor del Módulo Gaussiano para el eje X. A diferencia del caso anterior, existe una pequeña variación entre la distancia imagen calculada inicialmente (6.12 mm) y la distancia imagen calculada por el software (6.149 mm).

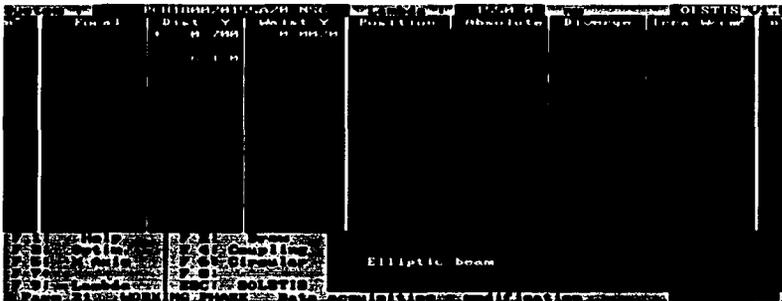


Figura 7.66 Editor del Módulo Gaussiano para el eje Y, bajo las mismas condiciones que en la figura anterior.

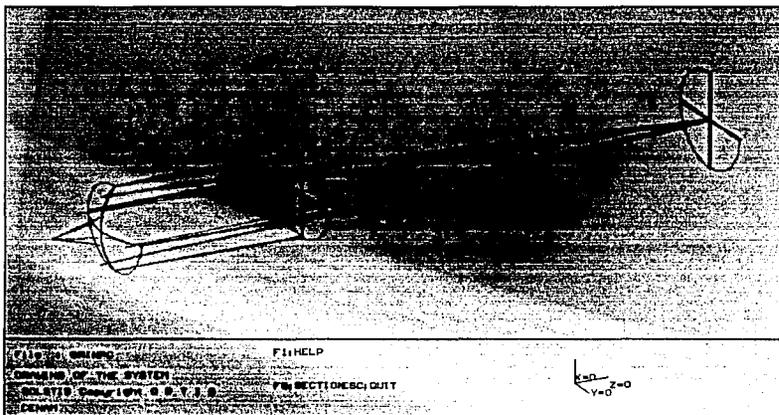


Figura 7.67 Diagrama de haz en perspectiva, obtenido en base a las consideraciones de la Óptica Gaussiana. Nótese que la línea vertical, ubicada en el semicírculo del extremo derecho es más gruesa, lo que nos indica el ligero error de posicionamiento en el plano imagen (error de enfocamiento).



Figura 7.68 Editor de movimientos y eficiencia de acoplamiento del Módulo Gaussiano. En base al dato que aparece en el campo denominado *Defocus error*, es posible hacer una ligera corrección en la ubicación sobre el eje óptico del plano de entrada de la fibra óptica. Dado que el signo asociado a este dato es negativo, significa que tenemos que aumentar la distancia imagen, para alcanzar una mayor eficiencia de acoplamiento.



Figura 7.69 En esta figura, se observa cómo la distancia imagen ha cambiado de 6,12 mm a 6,1487mm y la eficiencia de acoplamiento ha aumentado de 94,091% a 99,889%. Sin embargo, por la resolución del campo denominado *Fiber distance*, ya no es posible hacer una mayor corrección.

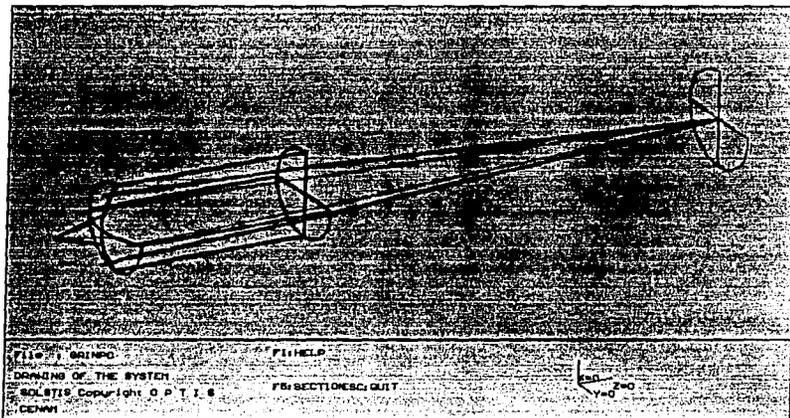


Figura 7.70 Diagrama de haz corregido. Nótese como la línea vertical, contenida en el semicírculo del extremo derecho, se ha hecho más angosta, esto significa que el error de enfocamiento se ha corregido.



Figura 7.69 En esta figura, se observa cómo la distancia imagen ha cambiado de 6.12 mm a 6.1487mm y la eficiencia de acoplamiento ha aumentado de 94.091% a 99.889%. Sin embargo, por la resolución del campo denominado *Fiber distance*, ya no es posible hacer una mayor corrección.

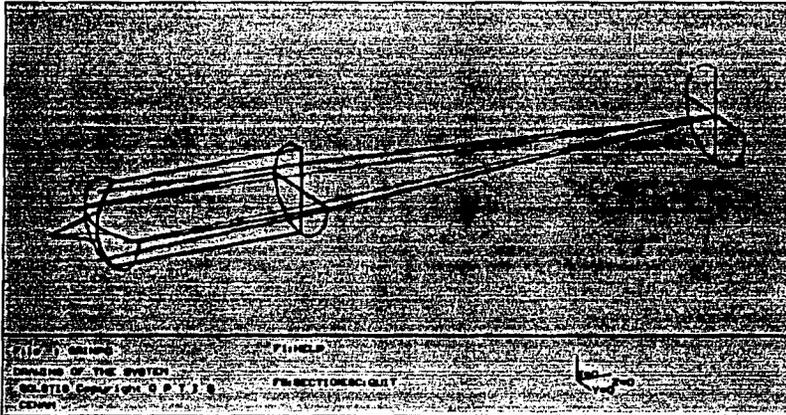


Figura 7.70 Diagrama de haz corregido. Nótese como la línea vertical, contenida en el semicírculo del extremo derecho, se ha hecho más angosta, esto significa, que el error de enfocamiento se ha corregido.

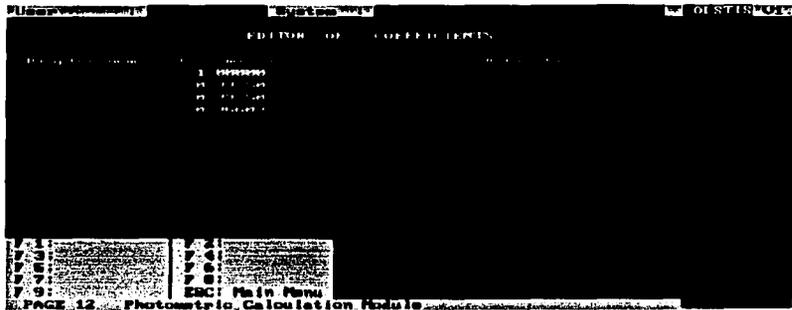


Figura 7.71 Editor de coeficientes de transmitancia, para cada uno de los elementos involucrados en el sistema. El valor de la transmitancia de las caras de la lente, es el complemento de la reflectancia que se definió en la Tabla 7.8. Los coeficientes correspondientes al objeto y a la imagen, permanecen igual que en los dos casos anteriores



Figura 7.72 Mapa de irradiancia, que muestra el perfil Gaussiano del haz enfocado, en el plano de observación calculado inicialmente (6,12 mm).



Figura 7.73 Mapa de irradiancia, que muestra el perfil Gaussiano del haz enfocado, en el plano de observacion calculado mediante la Teoria Gaussiana (6.1487 mm).



Figura 7.74 Mapa de irradiancia, que muestra el perfil Gaussiano del haz enfocado, en el plano de observacion calculado mediante la Teoria de Difraccion y Aberraciones (5.504 mm)



Figura 7 75 Gráfica que muestra la curva de la eficiencia de acoplamiento, en función de la distancia imagen calculada mediante la Teoría de Difracción y Aberraciones (de esta imagen se tomo el dato para generar la gráfica anterior)

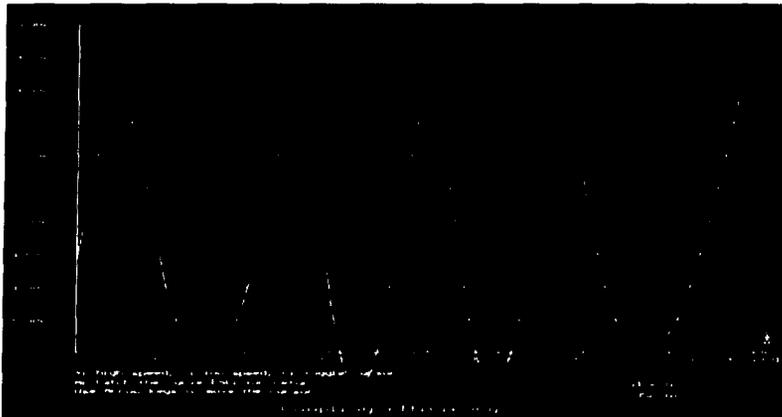


Figura 7 76 Gráfica que muestra la curva de la eficiencia de acoplamiento, en función del desalineamiento angular en el eje X, utilizando la distancia imagen obtenida en la gráfica anterior. No obstante que se hicieron diversas corridas de simulación para este caso, las oscilaciones siempre se presentaron y no se encontro ninguna explicación para ellas

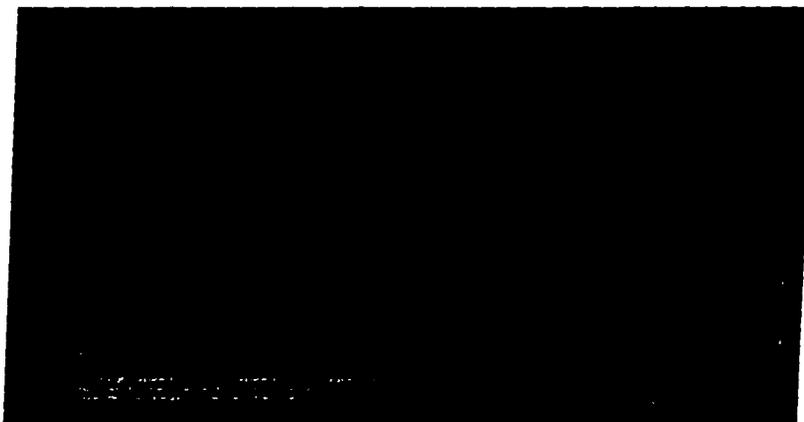


Figura 7.77 Gráfica que muestra la curva de la eficiencia de acoplamiento, en función del desalineamiento ortogonal en el eje X, aplicando la misma distancia imagen que en la gráfica anterior (las gráficas correspondientes al eje Y, se omitieron por ser muy semejantes). La tolerancia de posicionamiento para una eficiencia máxima, es de  $0,144 \mu\text{m}$



Figura 7.78 Pantalla de cálculo del Módulo Láser-Pro, considerando la distancia imagen calculada inicialmente. De la misma forma que en los dos casos anteriores, la eficiencia de acoplamiento se calcula sin considerar ningún tipo de desalineamiento angular u ortogonal, para el plano de entrada de la fibra óptica



## 7.6 CASO 4:LENTE ASFÉRICA

Como se observó en los casos anteriores, existen diferentes planteamientos para la definición de un elemento óptico, que permita resolver adecuadamente el problema de acoplamiento. Sin embargo hasta este momento, las eficiencias de acoplamiento esperadas aún se mantienen por debajo del 50%, lo que resulta desalentador, ya que la mayor parte de la energía óptica del diodo láser se estaría desperdiciando. Por esta razón, los fabricantes de lentes se dieron a la tarea de diseñar y producir en masa, un elemento óptico que proporcionara un incremento significativo en la eficiencia de acoplamiento, manteniendo como parámetros esenciales, el tamaño y un costo accesible. Bajo estas circunstancias, se originaron las lentes esféricas, que no son otra cosa que micro componentes en los que sus caras no han sido formadas como segmentos esféricos, con el propósito de realizar una mejor corrección de las aberraciones.

En los sistemas que utilizan diodos láser, las dificultades asociadas a la corrección de aberraciones se originan por el gran ángulo de divergencia del haz. Dado que una lente esférica trabajando en forma individual, puede refractar la luz únicamente en ángulos pequeños antes de que la aberración esférica sea introducida, en condiciones normales se requerirían tres o cuatro elementos ópticos para colimar el haz o enfocarlo a un punto muy pequeño para obtener una alta eficiencia de acoplamiento. Para nuestra aplicación esta solución no es factible, ya que estamos tratando un caso en el que el diodo, la lente y la sección inicial de la fibra están contenidos en un mismo encapsulado tipo circuito integrado, por lo que existen limitantes de espacio. Esta situación se resuelve utilizando una sola lente esférica, cuyo costo puede variar inversamente al diámetro, entre los 15 y los 152 Dólares Americanos.

### 7.6.1 SELECCIÓN DE LA LENTE Y DESARROLLO

La información técnica de estas lentes, fue obtenida de los catálogos de las compañías *OptoSigma* y *ThorLabs, Inc.*, principalmente de esta última. Desafortunadamente, la información disponible es limitada y la mayor parte de la bibliografía no toca el tema del análisis de superficies esféricas. Por este motivo, la lente se seleccionó en base a dos parámetros: (a) la aplicación de enfocamiento, para acoplar un diodo láser a una fibra óptica y (b) el recubrimiento antirreflejante, optimizado para el intervalo de longitud de onda de 1050 a 1550 nm ( $r \leq 1\%$  por superficie). El componente óptico en cuestión, corresponde al modelo 350200-C y es importante mencionar que no obstante que aparece en el catálogo de *ThorLabs*, es fabricada por la compañía *Geltech*. En la siguiente tabla, se presentan las especificaciones más importantes de esta lente:

f (mm)	NA		Claro de la apertura (mm)		Diámetro exterior (mm)	Espesor en el eje óptico (mm)	Índice de refracción	Material
	Lado Objeto	Lado Imagen	Lado Objeto	Lado Imagen				
1,14	0,436	0,125	1,13	1,30	2,40	1,03	1,58572	Corning Glass CO550

Tabla 7.11 Especificaciones técnicas de la lente esférica *Geltech* 350200-C.

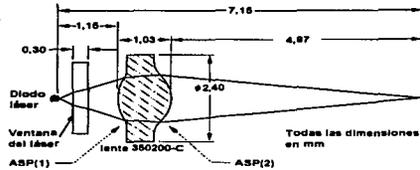


Figura 7.81 Diagrama de una lente esférica, para la aplicación de acoplamiento Diodo-Fibra.

De la figura anterior, se observa que ASP(1) y ASP(2) son las superficies esféricas de entrada y salida, respectivamente y el "doblamiento" de estas superficies en función de la distancia ( $x$ ) al eje esférico, está definido por la siguiente ecuación:

$$d = f(x) = \frac{(CURV)x^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + K)(CURV)^2 x^2}} + (A)x^4 + (B)x^6 + (C)x^8 + (D)x^{10} \quad \text{--- (7.32)}$$

donde  $(CURV)$  es la curvatura en el eje simétrico de revolución ( $1/\text{Radio}$ ),  $K$  es la constante cónica y  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son los coeficientes esféricos, cuyos valores se muestran en la siguiente tabla:

Superficie	$CURV$	$K$	$A$	$B$	$C$	$D$
ASP(1)	-0,9	-6,985295	0,0	+1,71893E-01	+4,09008E-02	-8,85435E-02
ASP(2)	+0,9	-0,896917	0,0	+8,69628E-02	+1,33304E-02	+1,53352E-01

Tabla 7.12 Valores correspondientes a los parámetros esféricos de la lente Geltech 350200-C.

La ecuación 7.32 se aplica en el sistema coordenado (0, X, Y, Z), donde el vértice de la superficie refractante se encuentra en el origen (0) y el eje simétrico de revolución es el eje óptico (Z). Cada superficie cónica de simetría en revolución, se define por el software "SOLSTIS" utilizando una versión simplificada de la ecuación 7.32 (utiliza únicamente el primer término del miembro derecho), en base a los parámetros  $R$  ( $1/CURV$ ) y  $K$ . En lo que respecta a la constante cónica, sabemos que para el caso de una esfera es igual a cero y para cualquier otra curva, siempre será menor que cero. Por lo tanto, es necesario considerar los siguientes casos particulares:

- 1 < K < 0 ⇒ **elipsoide**
- K = -1 ⇒ **paraboloide**
- K < -1 ⇒ **hiperboloide**

En base a lo anterior y tomando en cuenta los datos de la tabla 7.12, podemos decir que la superficie ASP(1) es una hiperboloide y la superficie ASP(2) es una elipsoide.

Como se mencionó al inicio de esta sección, existe muy poca información respecto al análisis de las superficies esféricas y en consecuencia, no se dispone de ecuaciones que relacionen la distancia focal efectiva con los puntos nodales, o la amplificación transversal con las distancias objeto e imagen. De la Figura 7.81, es posible observar que el fabricante de la lente ha definido ciertas distancias de trabajo, las cuales se consideran óptimas para proporcionar una amplificación máxima de 3,7, dentro del esquema diodo-ventana-lente-fibra. Es decir, se está considerando que la fuente láser, se encuentra dentro de un encapsulado que tiene una ventana de cuarzo para protegerla. A este respecto, sabemos que en nuestro caso esta situación no es válida, ya que el diodo láser se considera sin ningún tipo de encapsulado, aparte del que contiene al conjunto diodo-lente-fibra.

Con estos antecedentes y para poder aplicar las ecuaciones desarrolladas por Self, se decidió obtener a partir de las ecuaciones de la lente gruesa, una distancia focal efectiva equivalente a la de una lente esférica delgada. De antemano, sabemos que esto nos conducirá a un resultado incorrecto, pero nos servirá para poder proporcionar al software de análisis fotónico, el primer juego de datos a partir del cual inicie la simulación y posteriormente, podremos evaluar qué tan significativa es la desviación a la que conduce esta equivalencia. Aplicando el concepto de la curvatura de las superficies esféricas, para obtener el valor del radio, se tiene que:

$$\text{radio}_1 = \frac{1}{CURV_{ASP(1)}} = \frac{1}{+0,9} = \boxed{1,11 \text{ mm}}$$

$$\text{radio}_2 = \frac{1}{CURV_{ASP(2)}} = \frac{1}{-0,9} = \boxed{-1,11 \text{ mm}}$$

Substituyendo estos valores junto con el de la distancia focal efectiva, en las ecuaciones 1.57 y 1.60, obtenemos lo siguiente:

$$h_1 = \frac{-f(\eta - 1)d}{R_2\eta} = -\frac{(1,14)(0,58572)(1,03)}{(-1,11)(1,58572)} = \boxed{0,3903 \text{ mm}}$$

$$h_2 = \frac{-f(\eta - 1)d}{R_1\eta} = -\frac{(1,14)(0,58572)(1,03)}{(1,11)(1,58572)} = \boxed{-0,3903 \text{ mm}}$$

Estos resultados nos indican, que los planos principales,  $H_1$  y  $H_2$ , son simétricos y se encuentran ubicados a la derecha del vértice de ASP(1) y a la izquierda del vértice de ASP(2), respectivamente. Como desconocemos las distancias focales anterior y posterior, el dato que falta para obtener la distancia focal efectiva equivalente, es el que corresponde a la distancia entre los puntos nodales:

$$\overline{H_1 H_2} = \left[ d - \frac{fd}{\eta} \right] \cdot \left[ \frac{1}{f} - \left( \frac{\eta - 1}{\eta} \right) \left( \frac{d}{R_1 R_2} \right) \right] \quad \text{--- (7.33)}$$

$$\overline{H_1 H_2} = \left[ 1,03 - \frac{(1,14)(1,03)}{1,59572} \right] \cdot \left[ \frac{1}{1,14} - \frac{(0,58572)^2 (1,03)}{(1,58572)(1,11)(-1,11)} \right]$$

$$\boxed{\overline{H_1 H_2} = 0,3063 \text{ mm}}$$

De esta manera, es posible calcular la distancia focal equivalente, como la suma de la distancia focal conocida más la mitad de la distancia entre los puntos nodales; tal y como se muestra a continuación:

$$f_{\text{equiv.}} = f_{\text{conocida}} + \frac{\overline{H_1 H_2}}{2} \quad \text{--- (7.34)}$$

$$f_{\text{equiv.}} = 1,14 + \frac{0,3063}{2} = \boxed{1,2932 \text{ mm}}$$

Una forma de visualizar el error que se genera, al analizar a la lente como un elemento esférico, es recalculando el espesor de la lente en base a los datos que se han obtenido:

$$\text{espesor} = h_1 + \overline{H_1 H_2} + |h_2|$$

$$\text{espesor} = 0,3903 + 0,3063 + 0,3903 = 1,0869 \text{ mm}$$

Este valor nos indica, que ya se está acarreado una diferencia de 57  $\mu\text{m}$  en lo que respecta al espesor de la lente, comparando contra el dato que proporciona el fabricante. Independientemente de este resultado, continuaremos el análisis y ya que se ha calculado la distancia focal equivalente, aplicaremos las ecuaciones de Self, tal y como se hizo en el caso de la esfera de acoplamiento:

$$1 - \frac{s}{f} = \pm \sqrt{\frac{1}{m^2} - \left( \frac{z_{R_{\text{inv}}}}{f} \right)^2} = \pm \sqrt{\frac{1}{(5,25)^2} - \left( \frac{2,027 \times 10^{-6}}{1,2932 \times 10^{-3}} \right)^2}$$

$$1 - \frac{s}{f} = \pm 0,19047$$

---

Este resultado es idéntico al que se obtuvo para la esfera de acoplamiento, lo que nos indica que hasta esta etapa del proceso, el valor de la distancia focal tiene muy poca influencia. Continuando con el desarrollo, se tiene que:

$$-\frac{s_1}{f} = 0,19047 - 1 = -0,80953$$

$$s_1 = (0,80953)(1,2932 \times 10^{-3}) = 1,0469 \text{ mm}$$

Para poder analizar la primera posibilidad de la distancia objeto, debemos restar al resultado anterior el valor de la mitad del espesor de la lente, de tal forma que:

$$s_1 = 1,0469 - \frac{1,03}{2} = 0,5319 \text{ mm}$$

Más adelante, retomaremos este valor para compararlo con el que resulte de  $s_2$ , mientras tanto resolviendo para el valor negativo de la raíz:

$$-\frac{s_2}{f} = -1,19047$$

$$\Rightarrow s_2 = (1,19047)(1,2932) = 1,5395 \text{ mm}$$

Al igual que en el caso anterior, para poder analizar la segunda posibilidad para la distancia objeto, debemos restar al resultado anterior el valor correspondiente a la mitad del espesor de la lente; tal y como se muestra enseguida:

$$s_2 = 1,5395 - \frac{1,03}{2} = 1,0245 \text{ mm}$$

A diferencia del caso de la esfera de acoplamiento, ahora tenemos dos resultados que aparentemente son válidos, bajo la consideración de que el objeto queda fuera de la lente. En primera instancia, podríamos seleccionar el que más se asemeja a la distancia recomendada por el fabricante de la lente y que en este caso es el correspondiente a  $s_2$ . Sin embargo, realizaremos el cálculo de la distancia imagen utilizando los dos resultados, con el objeto de tener más elementos para emitir una conclusión respecto a cuál debemos utilizar. En consecuencia, substituiremos primeramente el valor de  $s_1$  en la ecuación 2.151:

$$\frac{1}{s'_1} = \frac{1}{1,2932 \times 10^{-3}} - \frac{1}{1,0469 \times 10^{-3} + \frac{(2,027 \times 10^{-6})^2}{(1,0469 \times 10^{-3} - 1,2932 \times 10^{-3})}}$$

$$s'_1 = -5,4963 \text{ mm}$$

El signo negativo de este resultado, nos indica que para la distancia objeto considerada, la lente se comporta como un elemento divergente y genera una imagen virtual. En base a esta situación, consideraremos ahora el valor de  $s_2$  para calcular la distancia imagen:

$$\frac{1}{s'_2} = \frac{1}{1,2932 \times 10^{-3}} - \frac{1}{1,5395 \times 10^{-3} + \frac{(2,027 \times 10^{-6})^2}{(1,5395 \times 10^{-3} - 1,2932 \times 10^{-3})}}$$

$$s'_2 = 8,0827 \text{ mm}$$

Este último resultado es válido para nuestros propósitos y nos permite concluir, que el valor que se debe considerar para la distancia objeto es el de  $s_2$ . No obstante, debemos restarle el valor de la mitad del espesor de la lente, para obtener la distancia imagen que requiere el editor del "SOLSTIS":

$$s' = 8,0827 - \frac{1,03}{2} = 7,5677 \text{ mm}$$

Al igual que en los tres casos anteriores, el proceso de simulación requiere de un conjunto de datos, asociados a los elementos involucrados. Sin embargo, los cálculos que se han hecho hasta este punto, son los únicos que se deben determinar previamente, ya que son característicos de este caso. Los parámetros restantes, de carácter general, se encuentran contenidos en las librerías del software de análisis. Enseguida, se presenta la tabla general de los resultados obtenidos, utilizando el esquema de acoplamiento de la lente esférica:

	TEORÍA GAUSSIANA		TEORÍA DE DIFRACCIÓN Y ABERRACIONES		
	CON DATOS INICIALES	DATOS CORREGIDOS	CON DATOS INICIALES	DATOS GAUSSIANOS	DATOS CORREGIDOS
DISTANCIA IMAGEN (mm)	7,5677	5,5571	7,5677	5,5571	5,396
EFICIENCIA DE ACOPLAMIENTO (%)	0,261	99,303	0,3	45,6	68,9
Ø DE LA CINTURA DEL HAZ EN EL PLANO DE ENTRADA DE LA FIBRA (µm)	-----	9,66 (eje X) 8,40 (eje Y)	-----	32,6	27,6

Tabla 7.13 Resultados de la simulación para el caso de la lente esférica.

De la tabla anterior, se pueden hacer las siguientes observaciones:

1. Las distancias imagen, corresponden a las distancias entre el plano de salida de la lente y el plano de entrada de la fibra.
2. Contrariamente a lo que se obtuvo con la esfera de acoplamiento, en este caso las ecuaciones de Self no proporcionan una primera aproximación adecuada y conducen a una eficiencia de acoplamiento extremadamente pobre. Esto se debe, a que en primera instancia se analiza a la lente como un componente esférico.
3. Como sucedió en los casos anteriores, para el diámetro de la cintura del haz en el plano imagen, el Módulo Gaussiano no proporciona los resultados asociados a las condiciones iniciales. Sin embargo, los valores que se muestran en la columna de datos corregidos, siguen siendo una consecuencia de la relación elipticidad-divergencia que se explicó en el caso de la micro-esfera.
4. Cuando se realiza el análisis considerando los efectos de aberraciones y difracción, para las condiciones establecidas por la óptica Gaussiana se nota un decrecimiento considerable en la eficiencia de acoplamiento, mientras que para las condiciones establecidas inicialmente, ésta se mantiene sin variación significativa. Sin embargo, como era de esperarse, en la etapa final del análisis se obtiene una eficiencia de acoplamiento superior al 50%, lo que era parte de los objetivos de este caso. Nuevamente, en lo que respecta a las dimensiones de la cintura del haz en el plano imagen, se muestran únicamente los valores correspondientes al eje X, esto con el propósito de simplificar la presentación de resultados.
5. Dentro del análisis de la óptica difractiva, NO se presenta el valor de la cintura del haz obtenido con los datos iniciales. Esta situación se aclarará más adelante, con ayuda de las gráficas generadas por el software "SOLSTIS".
6. Al igual que en los casos anteriores, se presenta una tolerancia de posicionamiento muy cerrada, ya que una pequeña variación en la posición del plano de entrada de la fibra, da como consecuencia un cambio significativo en la eficiencia de acoplamiento.

- 7. Este caso mantiene la congruencia con los anteriores, ya que cuando se genera una cintura de haz más pequeña en el plano de entrada de la fibra, se obtiene una mayor eficiencia de acoplamiento.**
- 8. En lo que respecta a la comparación de las aperturas numéricas de la fuente y de la lente, en el lado objeto, este caso es muy similar al de la lente GRIN de caras planas paralelas; sin embargo, la eficiencia de acoplamiento final es significativamente mayor, por el efecto que producen las superficies esféricas.**

En los siguientes puntos se describe la secuencia de simulación, así como las gráficas más significativas generadas durante este proceso y a partir de las cuales, se obtuvieron los resultados de la Tabla 7.13. Es importante aclarar, que las curvas de tolerancia de posicionamiento, que se originan bajo las consideraciones de la óptica Gaussiana se han omitido, ya que en lo general, son muy similares a las de los primeros casos.

1. De manera similar a los tres casos anteriores, el primer paso consiste en definir dentro del editor principal, los parámetros ópticos y físicos más importantes del sistema (ver Figura 7.82). Nótese que en la columna denominada **Conic.**, se han definido los valores correspondientes a las constantes cónicas, para cada una de las superficies esféricas y en la columna denominada **Disper.**, al igual que en el caso de las dos lentes GRIN, no se ha definido ningún valor, ya que no se tiene disponible. Sin embargo, la ausencia de este dato no es significativa para nuestra aplicación, ya que estamos considerando un diodo láser monomodal (una sola longitud de onda), cuya longitud de onda de emisión es muy estable.
2. Como siguiente paso, se genera el trazo de rayos utilizando los lineamientos de la Óptica Geométrica (ver Figura 7.83) y que como ya se ha visto, permite obtener un panorama general del sistema bajo estudio. Es importante observar, la drástica reducción en la aberración esférica que se obtiene con esta lente.
3. Enseguida, se establecen los parámetros Gaussianos más importantes de la fuente láser (ver Figuras 7.84 y 7.85), dentro del editor principal del Módulo de Haz Gaussiano. Como se ha manejado en los casos anteriores, estos parámetros deben ser definidos tanto para el eje X, como para el eje Y.
4. Una vez definidos los parámetros Gaussianos, es posible generar el diagrama de haz, que nos permitirá observar la diferencia entre el plano de observación y el plano de mejor enfocamiento (Figura 7.86). En este caso la diferencia en distancia es considerable, ya que está representada por el espaciamiento entre la línea vertical y el semicírculo de la extrema derecha.
5. A continuación, dentro del Editor de Movimientos del Módulo Gaussiano, se corrige la ubicación del plano de observación para alcanzar la máxima eficiencia de acoplamiento (ver Figuras 7.87 y 7.88).
6. Ya que se ha realizado la corrección en la distancia imagen, se genera un nuevo diagrama de haz, en el que se observa que no existe diferencia entre los planos de observación y de mejor enfocamiento (Figura 7.89).

7. Al igual que en los casos anteriores, el editor de los parámetros ópticos del diodo láser permanece sin cambios; no obstante, es necesario redefinir los valores correspondientes a los coeficientes de transmitancia de las superficies esféricas de la lente, basados en los datos de la Sección 7.6.1. Lo anterior se puede observar en la Figura 7.90.
8. Como etapa inicial dentro del análisis con el Módulo Láser-Pro, se generan los mapas de irradiancia que corresponden al plano imagen calculado mediante la Teoría Gaussiana (Figura 7.93) y al plano imagen calculado inicialmente, aplicando la ecuación de Self (Figuras 7.91 y 7.92). Es muy importante observar los resultados que se obtienen para la distancia imagen inicial, los cuales nos indican que a esa distancia, la imagen NO está en foco y como consecuencia, el perfil de densidad de potencia no se asemeja a una campana Gaussiana. Lo anterior nos permite concluir, que el aplicar las ecuaciones de las lentes esféricas a las lentes esféricas, aún con las consideraciones que se plantean en la Sección 7.6.1, no conduce a un resultado aceptable.
9. De manera similar a los casos anteriores, se omitió la presentación de las curvas correspondientes a la eficiencia de acoplamiento vs. el alineamiento angular y ortogonal, para el plano de observación calculado en el Módulo Gaussiano. En consecuencia, se generaron en forma directa las curvas de la eficiencia de acoplamiento vs. la distancia imagen (ver Figura 7.95) y los desalineamientos angular y ortogonal en el eje X (ver Figuras 7.96 y 7.97). Las gráficas correspondientes al eje Y, se omitieron nuevamente por ser muy semejantes a las del eje X. De la Figura 7.95, se obtiene la posición de mejor enfocamiento, mediante la cual se generó el mapa de irradiancia de la Figura 7.94.
10. Como paso final, se realizaron los cálculos correspondientes a la eficiencia de acoplamiento, para las distancias imagen obtenidas en los diferentes pasos de la evaluación (inicial, Gaussiana y Difractiva), considerando los lineamientos de la Teoría de Difracción y aberraciones. Estos resultados se obtuvieron sin generar gráficas y se presentan en las Figuras 7.98, 7.99 y 7.100.

Radius	Input Layer	Glass	Index	Thickness	Disper	DISTR
100.0000	CO550	CO550	1.450000	0.000000		
100.0000	CO550	CO550	1.450000	0.000000		
100.0000	CO550	CO550	1.450000	0.000000		
100.0000	CO550	CO550	1.450000	0.000000		
100.0000	CO550	CO550	1.450000	0.000000		
100.0000	CO550	CO550	1.450000	0.000000		
100.0000	CO550	CO550	1.450000	0.000000		
100.0000	CO550	CO550	1.450000	0.000000		
100.0000	CO550	CO550	1.450000	0.000000		
100.0000	CO550	CO550	1.450000	0.000000		

Figura 7.82 Editor principal del "SOLSTIS" para el caso de la lente esférica. Nótese que en la columna denominada *Disper*, no aparece ningún dato, dado que no fue posible obtener este valor para el material CO550.



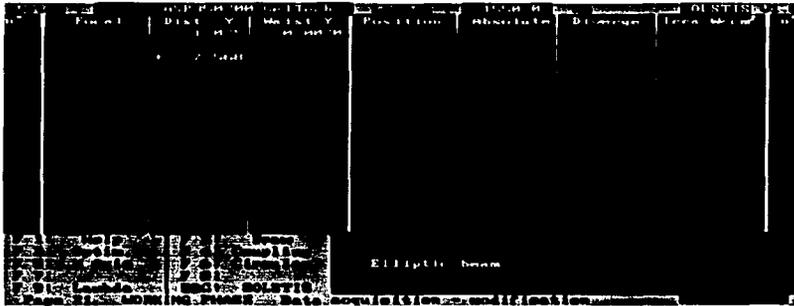


Figura 7.85 Editor del Módulo Gaussiano para el eje Y, tomando en cuenta las mismas condiciones que en la figura anterior

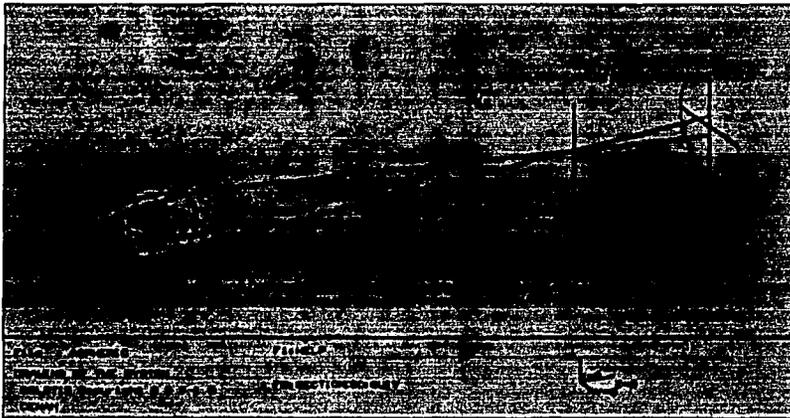


Figura 7.86 Diagrama de haz en perspectiva, que muestra las consideraciones de la Óptica Gaussiana. Es importante observar que el error de enfocado, representado por la diferencia en distancia entre la línea vertical y la cruz contenida en el semicírculo, es significativo.

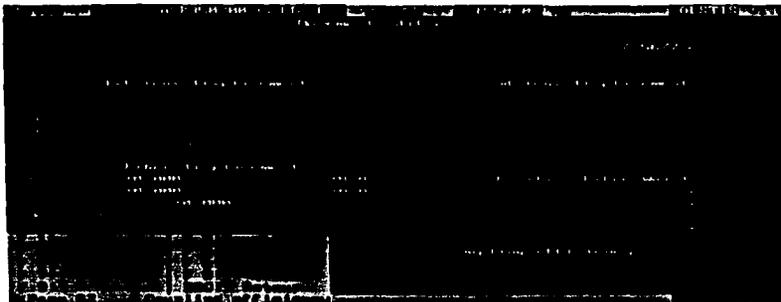


Figura 7.87 Editor de movimientos y eficiencia de acoplamiento del Módulo Gaussiano. En base al dato que aparece en el campo denominado *Defocus error*, es posible realizar la corrección de la ubicación sobre el eje óptico, del plano de entrada de la fibra óptica. Dado que el signo asociado a este dato es positivo, significa que tendremos que disminuir la distancia imagen, para alcanzar una mayor eficiencia de acoplamiento.



Figura 7.88 En esta figura, se observa cómo la distancia imagen cambia de 7.5677 mm a 5.5571 mm y la eficiencia de acoplamiento, aumenta de 0,26054% a 99,303%. Sin embargo y al igual que en los casos anteriores, la resolución del campo *Fiber distance* limita la corrección.



Figura 7.89 Diagrama de haz corregido, en base a los datos de las figuras anteriores.

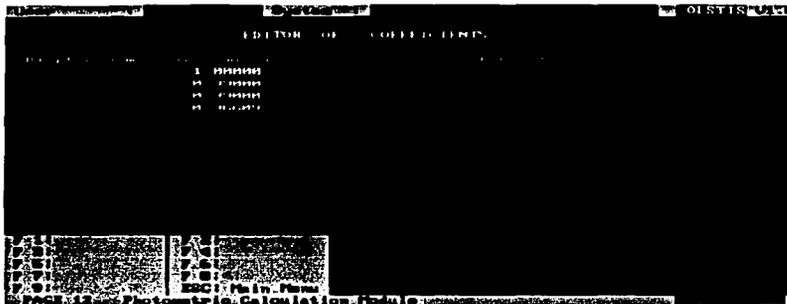


Figura 7.90 Editor de coeficientes de transmitancia, para cada uno de los elementos involucrados en el sistema. El valor de la transmitancia de las caras de la lente, es el complemento de la reflectancia que se definió en la sección 7.6.1. Los coeficientes asociados al diodo laser y a la fibra óptica, permanecen igual que en los casos anteriores.

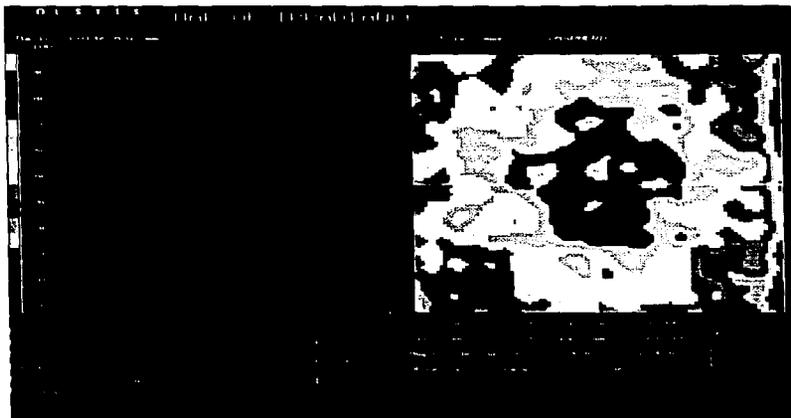


Figura 7.91 Mapa de irradiancia, que muestra el perfil del haz en el plano de observación calculado inicialmente. Debemos recordar, que el objeto tiene un perfil Gaussiano y en consecuencia, la lente generará como imagen un perfil semejante, en el punto de mejor enfocamiento y en la vecindad de éste. Esta figura nos indica, que la distancia **NO** calculada inicialmente está muy lejos del plano de mejor enfocamiento y como resultado, el perfil de irradiancia **NO** se asemeja a una campana Gaussiana.



Figura 7.92 Mismo plano de observación visto en perspectiva



Figura 7 93 Mapa de irradiancia, que muestra el perfil Gaussiano del haz enfocado, en el plano de observación corregido en el Modulo Gaussiano (5.5571 mm)



Figura 7 94 Mapa de irradiancia, que muestra el perfil Gaussiano del haz enfocado, en el plano de observación calculado mediante la Teoría de Difracción y Aberraciones (5.396 mm)

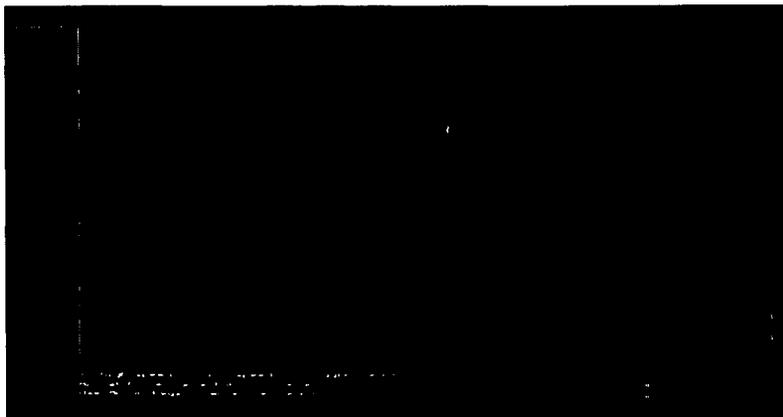


Figura 7 95 Gráfica que muestra la curva de la eficiencia de acoplamiento, en función de la distancia imagen calculada mediante la Teoría de Difracción y Aberraciones (de esta imagen se tomó el dato para generar la gráfica anterior)

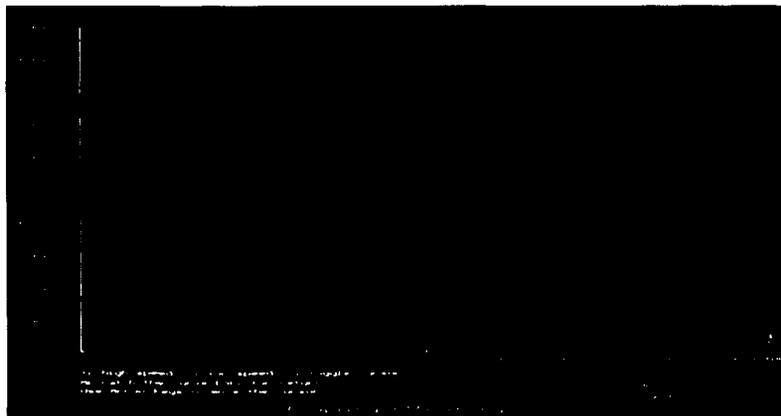


Figura 7 96 Gráfica que muestra la curva de la eficiencia de acoplamiento, en función del desalineamiento angular en el eje X, utilizando la distancia imagen obtenida en la grafica anterior. La tolerancia de posicionamiento obtenida es de 0.106 grados





---

## **CONCLUSIONES**

---

---

## CONCLUSIONES

A continuación, se presentan las conclusiones y observaciones más importantes, derivadas del estudio del proceso de acoplamiento.

1. Por las características y enfoque de este trabajo, los resultados obtenidos pueden ser clasificados en dos grandes ramas. Primeramente, en lo general, fue posible apreciar la importancia que la óptica y en especial la optoelectrónica, están adquiriendo en la actualidad, básicamente como consecuencia del uso extensivo de dispositivos optoelectrónicos y el auge de los sistemas ópticos de comunicación. Por otro lado, en lo particular, se realizó la evaluación radiométrica del proceso de acoplamiento de diodos láser a fibras ópticas, considerando cuatro diferentes esquemas ópticos simples y utilizando como herramienta el software de análisis fotónico "SOLSTIS" V1.0, desarrollado por la compañía francesa *OPTIS*. Dado que el análisis está enfocado, hacia las comunicaciones ópticas de larga distancia, se consideró un diodo láser con las siguientes especificaciones: a) cavidad monomodal DFB; b) ángulos de divergencia al nivel FWHM en el campo lejano de  $\theta_r=30^\circ$  y  $\theta_l=35^\circ$  y c) transmisión en la ventana de 1 550 nm. En consecuencia, la fibra seleccionada es del tipo monomodo, por ser la que se utiliza en los sistemas de comunicación de este tipo y presenta como características principales: a) diámetro modal de 10,5  $\mu\text{m}$ ; b) Índice de refracción del núcleo=1,4514 y c) índice de refracción del revestimiento=1,4469.
2. Los esquemas ópticos, están constituidos por las lentes que comúnmente se han empleado para llevar a cabo la tarea de acoplamiento. Esto se debe, a que sus características ópticas y físicas permiten colocarlas dentro del mismo encapsulado que contendrá al diodo láser y a la sección inicial de la fibra óptica, dando como resultado un módulo transmisor robusto. Las lentes utilizadas son: a) Esfera de acoplamiento de 2 mm de diámetro; b) Lente *GRIN* Plano-Plano de 1,8 mm de diámetro; c) Lente *GRIN* Plano-Convexa del mismo diámetro que la anterior y d) Lente esférica de 2,4 mm de diámetro exterior. Todas ellas, fueron consideradas con un recubrimiento antirreflejante, optimizado para la longitud de onda de trabajo.
3. Para poder analizar correctamente el proceso de acoplamiento, es una condición primordial el que se determine cuál, o cuáles de los parámetros de la fuente y del receptor, son los que determinan dicho proceso; lo anterior, con el objeto de definir las adecuaciones necesarias para cada uno de estos parámetros. En este caso, los parámetros de influencia son el diámetro modal del haz emitido por el diodo láser y el diámetro del modo que será propagado por la fibra, ambos al nivel de intensidad  $1/e^2$ . La relación entre estos dos, permitió determinar la magnitud de la amplificación transversal requerida, ya que de antemano sabemos, que el diámetro modal de la fuente es menor al diámetro modal de la fibra óptica. En consecuencia, la amplificación transversal constituye el factor básico, a partir del cual se calcularon las distancias objeto e imagen, tomando en cuenta las ecuaciones aplicables en cada caso.

- 
4. Antes de proceder a realizar los cálculos asociados a los parámetros del sistema óptico, fue necesario trabajar sobre algunas de las especificaciones del diodo láser, ya que el fabricante de este dispositivo no proporciona los datos suficientes, ni en el formato requerido para el análisis. En este punto, nos referimos en particular a las dimensiones de la cintura del haz láser, en el plano de emisión del área activa del diodo y que es un dato fundamental para poder calcular la amplificación transversal.
  5. En el caso de la esfera de acoplamiento, para obtener una primera aproximación del posicionamiento de los elementos involucrados, se utilizaron las ecuaciones desarrolladas por S. A. Self. Estas ecuaciones, integran el concepto del intervalo de Rayleigh de la Óptica Gaussiana, a la ecuación de la lente delgada.
  6. Debido a que las lentes de índice de gradiente (*GRIN*), no se rigen por las mismas ecuaciones de las lentes convencionales, fue necesario aplicar las ecuaciones desarrolladas por el fabricante (*Nippon Sheet Glass America, Inc.*). Sin embargo, la amplificación transversal se mantuvo como el factor fundamental para el cálculo de los parámetros del sistema óptico. En primera instancia, se utilizó una lente *GRIN* de caras planas paralelas y en segundo término, una lente *GRIN* plano-Convexa, aplicando las ecuaciones válidas para cada una de ellas.
  7. Al igual que en el caso de las lentes *GRIN*, las lentes esféricas tampoco se rigen por las ecuaciones de las lentes convencionales, ya que como su nombre lo indica, el desarrollo de la curvatura de su superficie no corresponde a una sección esférica. No obstante, dado que el índice de refracción es constante y tomando en cuenta que se genera un cierto error, esta lente se analizó en base a las mismas ecuaciones de las lentes esféricas, para poder calcular las distancias objeto e imagen iniciales.
  8. En los cuatro casos planteados, durante todo el proceso de análisis la distancia objeto se mantuvo como un parámetro constante y una vez que se determinó la primera aproximación, respecto a la ubicación de los elementos, se aplicó el software de análisis fotónico. El primer paso, consistió en calcular la eficiencia de acoplamiento que se tendría con esta primera aproximación, bajo las consideraciones de la Óptica Gaussiana, que es propia de los haces láser. Como segundo paso y dentro de la misma teoría Gaussiana, se utilizó nuevamente el software para recalcular las distancias objeto e imagen. Por último, se aplicó la herramienta de análisis de la propagación láser, basada en la Óptica de Fourier y que considera los efectos de las aberraciones y la difracción, ya que éstos no habían sido considerados en los cálculos anteriores. Con el fin de observar la importancia, que tiene el considerar estos efectos negativos, en este último paso se realizaron tres corridas de simulación: a) utilizando los datos iniciales arrojados por la Óptica Geométrica; b) utilizando los datos corregidos por la Óptica Gaussiana y c) la corrida en base a las consideraciones de la óptica de Fourier.
  9. Como era de esperarse, de acuerdo con los datos que proporciona la literatura, en términos generales la esfera de acoplamiento es la que presentó la menor eficiencia de acoplamiento (40,11% en la etapa final del análisis). Esto se debe principalmente, al grado de aberración esférica que presenta esta lente, el cual impide la formación de una mancha láser de dimensiones adecuadas, en el plano de entrada de la fibra.
-

10. La lente *GRIN* Plano-Plano, presentó una eficiencia ligeramente mayor a la de la esfera de acoplamiento (40,67 % en la etapa final del análisis) y en este caso, el principal factor en contra sigue siendo la aberración esférica. Esta situación, es mencionada por el mismo fabricante de la lente y en general, en la literatura referente a este tema. Adicionalmente, esta lente presentó diversas complicaciones en el proceso de cálculo, dada su limitada capacidad de amplificación ( $m_T \text{ máx.} = 4,54$  cuando  $d_1 = 0$ ) y la relación que esto tiene con las distancias objeto e imagen. Es importante mencionar, que las ecuaciones que rigen el comportamiento de estas lentes son muy complicadas y un análisis minucioso, podría dar origen a otro trabajo independiente de éste.
11. De acuerdo con los datos del fabricante y los de la literatura en general, en el caso de la lente *GRIN* Plano-Convexa se debería de haber obtenido una eficiencia significativamente mayor, en comparación con la de los dos casos anteriores. Sin embargo, debido a la amplificación requerida y las limitantes de la lente en este sentido, el grado de acoplamiento obtenido es muy similar al del caso de la lente de caras planas paralelas (39,86 % en la última etapa del análisis).
12. En forma congruente con los datos de la literatura, la lente esférica fue la que proporcionó la mayor eficiencia de acoplamiento (68,9 % en la etapa final del análisis). El problema en este caso, es que como este tipo de lentes se ha puesto a disposición comercial muy recientemente (en especial para esta aplicación), los fabricantes no proporcionan todas las herramientas necesarias para calcular las posiciones de los elementos y como consecuencia, se tuvieron que aplicar las ecuaciones de la óptica geométrica, válidas para las lentes gruesas esféricas.
13. Un factor negativo para los cuatro casos y en especial para las lentes *GRIN* y la lente esférica, es el que se refiere a las pequeñas dimensiones de la ventana de emisión del diodo láser. Este parámetro, trajo como consecuencia los siguientes problemas: a) El haz emitido, presenta una gran divergencia en los dos planos de la unión activa, lo que reduce la cantidad de energía óptica recolectada por las lentes; b) Se requiere una gran amplificación transversal, para adecuar las dimensiones de la cintura del haz, a las dimensiones del modo de propagación de la fibra óptica.

14. Enseguida se presenta, la tabla general de los resultados obtenidos en cada paso del proceso de evaluación, para los cuatro esquemas de acoplamiento considerados:

	TEORIA GAUSIANA		TEORIA DE DIFRACCION Y ABERRACIONES			
	CON DATOS EXACTOS	DATOS COMUNICADOS	CON DATOS EXACTOS	DATOS GAUSIANOS	DATOS COMUNICADOS	
DISTANCIA OBJETO (mm)	0,3214					Esfera de acoplamiento
	0,001					Lente GRIN P-P
	1,0245					Lente GRIN P-C
	0,7					Lente esférica
DISTANCIA IMAGEN (mm)	5,9378	6,1381	5,9378	6,1381	5,38	Esfera de acoplamiento
	8,5184	8,5181	8,5184	8,5181	7,932	Lente GRIN P-P
	6,12	6,1487	6,12	6,1487	5,504	Lente GRIN P-C
	7,5877	5,5571	7,5877	5,5571	5,396	Lente esférica
EFICIENCIA DE ACOPLAMIENTO (%)	30,101	97,21	21,0	14,7	40,11	Esfera de acoplamiento
	99,992	99,993	13,9	13,9	40,67	Lente GRIN P-P
	94,091	99,889	14,2	13,2	39,86	Lente GRIN P-C
	0,281	99,303	0,3	45,6	68,9	Lente esférica
Ø DE LA CINTURA DEL HAZ EN EL PLANO DE ENTRADA DE LA FIBRA (µm)	11,62	11,62	49,0	53,8	42,4	Esfera de acoplamiento
	9,733	9,733	51,6	51,6	37,8	Lente GRIN P-P
	10,15	10,15	48,0	53,8	36,8	Lente GRIN P-C
	9,027	9,027	32,6	32,6	27,6	Lente esférica

15. A continuación se presenta una tabla, que contiene las diferencias obtenidas entre cada una de las etapas del proceso de evaluación, tanto para la eficiencia de acoplamiento, como para la distancia imagen. Para obtener los resultados que se muestran en la primera columna de datos, los valores que se tomaron como referencia, corresponden a los obtenidos mediante la Teoría Gaussiana. Por otra parte, para obtener los resultados que se muestran en la segunda y tercera columnas de datos, los valores que se tomaron como referencia, son los que se obtuvieron en la etapa final del análisis. Lo anterior se debe, a que los datos obtenidos al aplicar la teoría de difracción y aberraciones, se consideran como los más cercanos a la realidad.

	DIFERENCIA ENTRE DATOS INICIALES Y DATOS GAUSSIANOS	DIFERENCIA ENTRE DATOS INICIALES Y DATOS OBTENIDOS CON LA TEORÍA DE DIFRACCIÓN	DIFERENCIA ENTRE DATOS GAUSSIANOS Y DATOS OBTENIDOS CON LA TEORÍA DE DIFRACCIÓN	
<b>DISTANCIA IMAGEN (mm / %)</b>	0,2003 / 3,26	-0,5778 / -10,78	-0,7781 / -14,52	<b>Esfera de acoplamiento</b>
	-0,0003 / -0,0035	-0,5864 / -7,39	-0,5861 / -7,39	<b>Lente GRIN P-P</b>
	0,0287 / 0,467	-0,616 / -11,19	-0,6447 / -11,71	<b>Lente GRIN P-C</b>
	-2,0106 / -36,18	-2,1717 / -40,25	-0,1611 / -2,99	<b>Lente esférica</b>
<b>EFICIENCIA DE ACOPLAMIENTO (%)</b>	-8,3	19,11	25,41	<b>Esfera de acoplamiento</b>
	0,0	26,77	26,77	<b>Lente GRIN P-P</b>
	-1,0	25,66	26,7	<b>Lente GRIN P-C</b>
	45,3	66,6	23,3	<b>Lente esférica</b>

16. Del desarrollo anterior, se observa que el problema de acoplamiento no es trivial, ya que son muchos los factores de influencia; sin embargo, en la actualidad existen las herramientas necesarias para poder simplificar el análisis del proceso y acortar los tiempos de diseño. Tradicionalmente, este proceso de evaluación requeriría de un largo desarrollo experimental, que involucra costosos equipos de nanoposicionamiento controlados por computadora.
17. La importancia de este trabajo, radica en el hecho de que la información concerniente a la eficiencia de acoplamiento y el posicionamiento de cada uno de los elementos involucrados (fuente-sistema óptico-fibra), no son proporcionados por los fabricantes de los dispositivos, ya que se consideran datos de confidencialidad industrial asociados con patentes. Por otro lado, en los casos en los que se proporcionan estos datos, no se hace ninguna mención al proceso utilizado para calcularlos.

18. Para el desarrollo de este trabajo, se abordaron diversos aspectos de la óptica y la electrónica, con el propósito de explicar los principios básicos asociados a la naturaleza de la luz y su mecanismo de propagación en función del medio, así como los referentes a la operación de los dispositivos optoelectrónicos y las guías de onda dieléctricas. Lo anterior con el objeto de tener un trabajo "autocontenido", en el que se proporcionen los elementos teóricos más importantes, relacionados con el estudio del problema de acoplamiento y con los principios de operación del software de análisis fotónico. Sin embargo, es importante aclarar que no se profundizó en la totalidad de los principios y ecuaciones utilizados por dicho software, ya que este tipo de análisis queda fuera de los objetivos planteados.
19. No obstante que el estudio realizado hasta este punto es extenso, las líneas de investigación quedan abiertas, ya que sería conveniente llevar a cabo una verificación experimental de los resultados obtenidos. Originalmente, la etapa experimental estaba considerada dentro de los objetivos de este trabajo, ya que se tiene acceso a la mayoría de los elementos requeridos, incluyendo el sistema de nanoposicionamiento automático; sin embargo, no fue posible contar con el diodo láser utilizado en la simulación. Básicamente, existen dos razones por las que no fue posible obtener esta fuente láser: a) El costo de un diodo láser para comunicaciones de larga distancia y gran capacidad, oscila entre los 6 000 y los 9 000 Dólares Americanos; en consecuencia, no es fácil obtener los recursos financieros para adquirir un dispositivo de este tipo; b) Cuando se dispuso de la cantidad necesaria para adquirir uno de estos dispositivos, no fue posible contactar a ninguno de los proveedores, ni siquiera a través del fabricante, por lo que los recursos tuvieron que ser utilizados en otro concepto.
20. En relación con el punto anterior, a continuación se presenta una tabla que contiene los resultados correspondientes a la eficiencia de acoplamiento, obtenidos en la etapa final del proceso de simulación y obtenidos experimentalmente. Estos últimos, fueron proporcionados de manera personal por el Dr. Soon Jang en Mayo de 1995, durante una estancia de entrenamiento referente al sistema de nanoposicionamiento *AutoAlign*<sup>®</sup>, en las instalaciones del *Photonics Packaging Automation Group* de Newport, Co. y aunque no fueron obtenidos utilizando los mismos elementos que se consideraron en este trabajo, proporcionan una idea general muy adecuada respecto a la eficiencia de acoplamiento que puede esperarse de cada tipo de lente.

	EFICIENCIA DE ACOPLAMIENTO OBTENIDA POR SIMULACIÓN (%)	EFICIENCIA DE ACOPLAMIENTO OBTENIDA EXPERIMENTALMENTE (%)
ESFERA DE ACOPLAMIENTO	40,11	22 (típica) / 30 (máxima)
LENTE GRIN PLANO-PLANO	40,67	25 - 36
LENTE GRIN PLANO-CONVEXA	39,86	35 - 45
LENTE ASFÉRICA	68,9	65 - 82
		(en general > 55 %)

---

## BIBLIOGRAFÍA

---

---

## BIBLIOGRAFÍA

### A. LIBROS

- B. E. A. Saleh y M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, Wiley Interscience, New York, 1991.
- S. M. Sze, *Semiconductor Devices, Physics and Technology*, Wiley, New York, 1985.
- J. Millman y C. C. Halkias, *Integrated Electronics: Analog and Digital Circuits and Systems*, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., Singapur, 27<sup>ava.</sup> Impresión, 1985.
- R. A. Serway, *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics*, Saunders-Golden, New York, 2a. Edición, 1986.
- E. Hecht y A. Zajac, *Óptica*, Fondo Educativo Interamericano, México, 1977.
- D. Tentori, *Notas del Curso de Óptica Geométrica*, Comunicaciones Académicas, Serie Óptica, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Ensenada, B.C., México, 1991.
- A. E. Siegman, *An Introduction to Lasers and Masers*, Mc Graw-Hill, New York, 1971.
- J. T. Verdeyen, *Laser Electronics*, Prentice-Hall, New Jersey, 1981.
- H.-D. Wu y F. S. Barnes, *Microlenses: coupling light to optical fibers*, IEEE Press, New York, 1991.
- V. Aboites, *Láseres, una introducción*, Centro de Investigaciones en Óptica, León, Gto., México, 1991.
- W. J. Smith, *Modern Optical Engineering: The Design of Optical Systems*, Mc Graw-Hill, New York, 2a. Edición, 1990.
- A. W. Snyder y J. D. Love, *Optical Waveguide Theory*, Chapman and Hall, New York, 1983.

### B. MANUALES Y CATÁLOGOS

- Projects in Optics Workbook, *Newport Corporation*, Fountain Valley, California, E.U.A.
- Projects in Fiber Optics, Applications Handbook, *Newport Corporation*, Fountain Valley, California, E.U.A., 1986.
- Projects in Single-Mode Fiber Optics, Applications Workbook, *Newport Corporation*, Irvine, California, E.U.A., Revisión B1, 1993.
- Light Guide, *AT&T Product Training Services*, Dublin, Ohio, E.U.A., 7a. Edición, 1990.

---

SOLSTIS Versión 1,0 - User's Manual, *Optis*, Toulon, Francia, 1994.

Lasers and Instruments Guide, *Melles Griot, Inc.*, Irvine, California, E.U.A., 1994.

Melles Griot Catalog 1995/96, *Melles Griot, Inc.*, Irvine, California, E.U.A., 1995.

SELFOC Product Guide, *NSG America, Inc.*, Somerset, New Jersey, E.U.A., 1995.

Mitsubishi Optoelectronics, Optical Semiconductor Devices and Optical-Fiber Components Data Book, *Mitsubishi Electric Corp., Semiconductor Marketing Division*, Japón, 1996.

The 1994 Newport Catalog, Scientific & Laboratory Products, *Newport Corporation*, Irvine, California, E.U.A., 1994.

International Catalog 1996/1997, *ThorLabs, Inc.*, Newton, New Jersey, E.U.A., 1996.

Optics, Opto-Mechanics Catalog 1995/96, *OptoSigma Corporation*, Santa Ana, California, E.U.A., 1985.

## C. ARTÍCULOS Y OTRAS PUBLICACIONES

J. Delacour, G. Mathieu, E. Grard y R. Meilleur, A Program to Simulate the Coupling of Laser Diodes into Single Mode Optical Fibers and Calculate the Coupling Efficiency and Tolerances, *Optis*, BP 275, F-83078 Toulon Cedex 9 y Alcatel Alsthom Recherche, Route de Nozay, F-91460 Marcoussis, Francia.

S. A. Self, Focusing of Spherical Gaussian Beams, *Applied Optics*, Vol. 22, No. 5, pp. 658-661, 1983.

L. A. Reith, J. W. Mann, G. R. Laik, R. R. Krchnavek, N. C. Andreadakis y Chung-en Zah, Relaxed-Tolerance Optoelectronic Device Packaging, *Journal of Lightwave Technology*, Vol. 9, No. 4, pp. 477-484, 1991.

I. Kitano, H. Ueno y M. Toyama, Gradient-Index Lens for Low-Loss Coupling of a Laser Diode to Single-Mode Fiber, *Applied Optics*, Vol. 25, No. 19, pp. 3336-3339, 1986.

A. Nicia, Lens Coupling in Fiber-Optic Devices: Efficiency Limits, *Applied Optics*, Vol. 20, No. 18, pp. 3136-3145, 1981.

D. Gloge, Weakly Guiding Fibers, *Applied Optics*, Vol. 10, No. 10, pp. 2252-2258, 1971.

D. Marcuse, Loss Analysis of Single-Mode Fiber Splices, *The Bell System Technical Journal*, American Telephone and Telegraph Company, Vol. 56, No. 5, pp. 703-718, 1977.

- R. W. Gilsdorf y J. C. Palais, Single-Mode Fiber Coupling Efficiency with Graded-Index Rod Lenses, *Applied Optics*, Vol. 33, No. 16, pp. 3440-3445, 1994.
- M. L. Celaya, J. Camacho, R. García e I. Rizo, *Diseño de Componentes y Sistemas Ópticos de Lentes con Variación Gradual en el Índice de Refracción; Índice de Refracción Parabólico, Aproximación Paraxial*, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Ensenada, B.C., México.
- L. D. Dickson, Characteristics of a Propagating Gaussian Beam, *Applied Optics*, Vol. 9, No. 8, pp. 1854-1861, 1970.
- H. Kogelnik y T. Li, Laser Beams and Resonators, *Applied Optics*, Vol. 5, No. 10, pp. 1550-1567, 1966.

---

# **ANEXOS**

---

---

**ANEXO A**

**ESPECIFICACIONES DEL  
DIODO LÁSER**

---



**MITSUBISHI LASER DIODES**  
**ML9XX2 SERIES**

FOR OPTICAL COMMUNICATION

TYPE  
NAME

## ML974A2F, ML9922

### DESCRIPTION

ML9XX2 is a DFB (Distributed Feedback) laser diode which oscillates in a single wavelength with emission wavelength of 1550nm and standard continuous light output of 5mW.

ML9XX2 are hermetically sealed devices having the photodiode for optical output monitoring. This is a high-performance, high reliability, and long-life laser diode.

### FEATURES

- Low threshold current typical 20mA
- High stable fundamental transverse mode oscillation
- High side mode suppression ratio typical 40dB ( $T_c = 0 \sim +60^\circ\text{C}$ )
- High speed of response (Rise and fall time typically 0.2nsec)

### APPLICATION

Long-distance, large-capacity optical communication systems

### ABSOLUTE MAXIMUM RATINGS

Symbol	Parameter	Conditions	Rating	Unit
$P_o$	Light output power	CW	6	mW
$V_{rL}$	Reverse voltage (Laser diode)	—	2	V
$V_{rD}$	Reverse voltage (Photodiode)	—	20	V
$I_{FD}$	Forward current (Photodiode)	—	2	mA
$T_c$	Case Temperature	—	$0 \sim +60$	$^\circ\text{C}$
$T_{stg}$	Storage temperature	—	$-40 \sim +100$	$^\circ\text{C}$

### ELECTRICAL/OPTICAL CHARACTERISTICS ( $T_c = 25^\circ\text{C}$ )

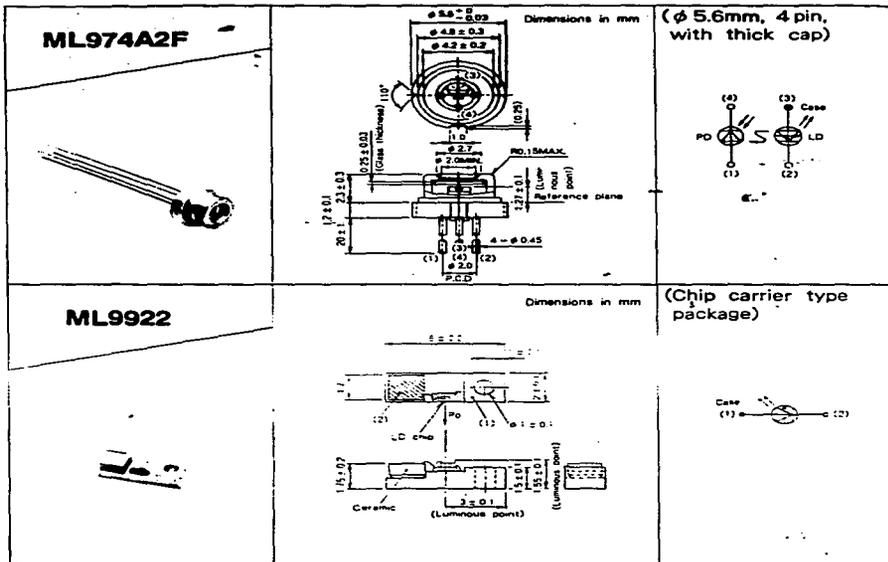
Symbol	Parameter	Test Conditions	Limits			Unit
			Min.	Typ.	Max.	
$I_{th}$	Threshold current	CW	—	20	40	mA
$I_{op}$	Operating current	CW, $P_o = 5\text{mW}$	—	45	90	mA
$V_{op}$	Operating voltage	CW, $P_o = 5\text{mW}$	—	1.2	1.8	V
$\eta$	Slope efficiency	CW, $P_o = 5\text{mW}$	—	0.25	—	mW/mA
$\lambda_p$	Peak wavelength	CW, $P_o = 5\text{mW}$	—	1550	—	nm
$\theta_{//}$	Beam divergence angle (parallel)	CW, $P_o = 5\text{mW}$	—	30	—	deg.
$\theta_{\perp}$	Beam divergence angle (perpendicular)	CW, $P_o = 5\text{mW}$	—	35	—	deg.
$I_m$	Monitoring output current (Photodiode)	CW, $P_o = 5\text{mW}$ , $V_{rD} = 1\text{V}$ , $R_L = 10\Omega$ (Note 1)	0.1	0.25	—	mA
$t_r, t_f$	Rise and fall times	$I_r = I_m$ , $P_o = 5\text{mW}$ , $10 \sim 90\%$	—	0.2	0.4	ns
SMSR	Side mode suppression ratio	CW, $P_o = 5\text{mW}$ , $0 \sim +60^\circ\text{C}$	30	40	—	dB
$P_{mon(D)}$	Monitoring Light Output	CW, $P_o = 5\text{mW}$	—	0.5	—	mW

Note 1:  $R_L$  is load resistance of the photodiode.  
 2:  $P_{mon}$  only apply to ML9922.

MITSUBISHI LASER DIODES  
ML9XX2 SERIES

FOR OPTICAL COMMUNICATION

OUTLINE DRAWINGS



FOR OPTICAL COMMUNICATION

**SAMPLE CHARACTERISTICS**

**Light output vs. forward current**  
Typical light output vs. forward current characteristics are shown in Fig. 1. The threshold current for lasing is typically 20mA at room temperature. Above the threshold, the light output increases linearly with current, and no kinks are observed in the curves. An optical power of about 5mW is obtained at  $I_f + 25\text{mA}$ .

As can be seen in Fig. 1,  $I_{th}$  and slope efficiency  $\eta$  ( $dP_o/dI_f$ ) depends on case temperature, obtaining a constant output at varying temperatures requires to control the case temperature  $T_c$  or the laser current. (Control the case temperature or laser current such that the output current of the built-in monitor PD becomes constant.)

**Temperature dependence of threshold current ( $I_{th}$ ), operating current ( $I_{op}$ ) and slope efficiency ( $\eta$ )**  
A typical temperature dependence of the threshold current and operating current (5mW) is shown in Fig. 2. The characteristic temperature  $T_0$  of the threshold current is typically 60k in  $T_c \leq 40^\circ\text{C}$ , 50k in  $T_c > 40^\circ\text{C}$ .

$I_{th}$

A typical temperature dependences of the slope efficiency  $\eta$  is shown in Fig. 3. The gradient is  $-0.013\text{mW}/\text{mA}/^\circ\text{C}$

2

Fig. 1 Light output vs. forward current

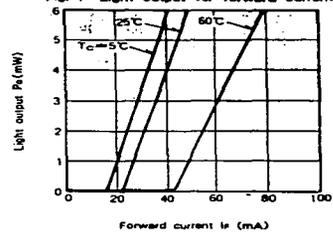


Fig. 2 Temperature dependence of threshold current and operating current

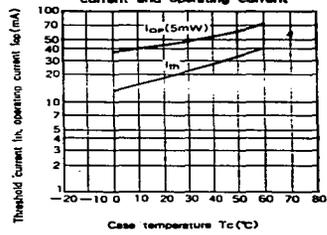
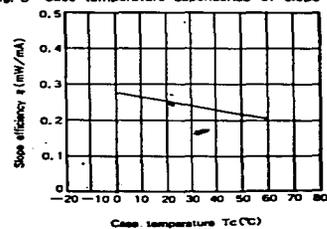


Fig. 3 Case temperature dependence of slope efficiency

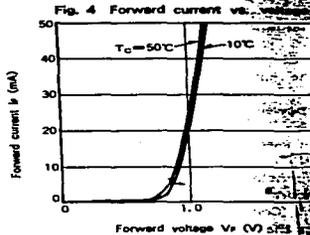


# MITSUBISHI LASER DIODES ML9XX2 SERIES

FOR OPTICAL COMMUNICATION

## 1. Forward current vs. voltage

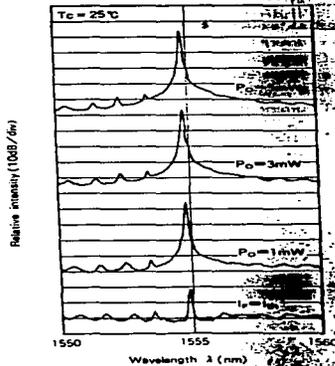
Typical forward current vs. voltage characteristics are shown in Fig. 4. In general, as the case temperature rises, the forward voltage  $V_f$  decreases slightly against the constant current  $I_f$ .  $V_f$  varies typically at a rate of  $-1.0\text{mV}/^\circ\text{C}$  and  $-0.9\text{mV}/^\circ\text{C}$  at  $I_f = 1\text{mA}$  and  $10\text{mA}$ , respectively.



## 2. Emission spectra

Typical emission spectra under CW operation are shown in Fig. 5.

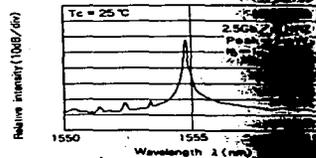
Fig. 5 Light output dependence of emission spectra



Emission spectrum under  $2.5\text{Gb/s}$  (NRZ) modulation is shown in Fig. 6.

Typical spectral width (Chirping) is about  $0.15\text{nm}$  at  $-3\text{dB}$ ,  $0.35\text{nm}$  at  $-10\text{dB}$  and  $0.80\text{nm}$  at  $-20\text{dB}$ .

Fig. 6 Spectrum at modulation

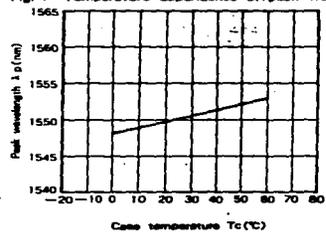


FOR OPTICAL COMMUNICATION

A typical temperature dependence of the peak wavelength at an output of 5mW is shown in Fig. 7. As the temperature rises, the peak wavelength shifts to the long-wavelength side at a rate of about 0.08nm/°C.

0.08 nm/°C  
TYP. InGaAsP

Fig. 7 Temperature dependence of peak wavelength



Far-field pattern

The ML9XX2 laser diodes lase in fundamental transverse (TE<sub>00</sub>) mode and the mode does not change with the current. They have typical emitting area (size of near-field pattern) of 1.0 × 1.25 μm<sup>2</sup>. Fig. 8 and 9 show the typical far-field patterns.

The full angles at half maximum points (FAHM) are typically 30deg. and 35deg., respectively.

Fig. 8 Far-field pattern (parallel)

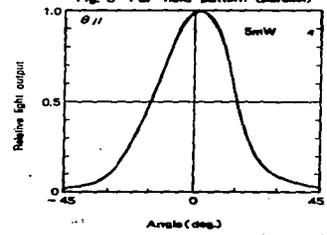
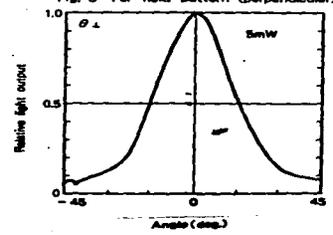


Fig. 9 Far-field pattern (perpendicular)



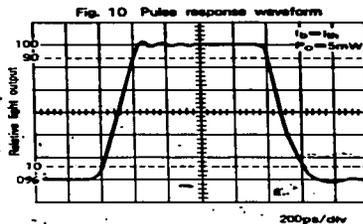
MITSUBISHI LASER DIODES  
ML9XX2 SERIES

FOR OPTICAL COMMUNICATION

**6 Pulse response**

In digital optical transmission systems, the response wavelength and speed of the light output against the input pulse current waveform is a main concern.

In order to shorten the oscillation delay time, the laser diode is usually biased close to the threshold current. Fig. 10 shows a typical response waveform when a rectangular pulse current (rise/fall time is shorter than 0.1ns) is applied. Rise/fall time is typically 0.2ns at  $I_b = I_n$  and  $P_o = 5mW$ .

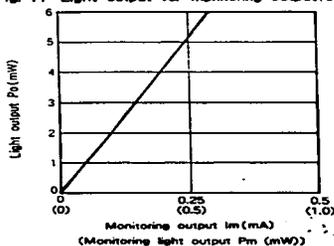


**7 Monitoring output**

The laser diodes emit beams from both of their mirror surfaces, front and rear surfaces. The rear beam can be used for monitoring power of the front beam since the power of the rear beam is proportional to the front one. In the ML9XX2 series, the rear beam power is changed into photocurrents by monitor photodiodes. Fig. 11 shows typical light output vs. monitoring photo-current characteristics.

Above the threshold current, the monitored photocurrent increases linearly with the front light output. The monitoring output current is typically 0.25mA when the front light output is 5mW. In the ML9922, monitor photodiodes are not installed in the laser package. Monitoring output is emitted from the back of package. Monitoring output is typically 0.5mW when the front light output is 5mW.

Fig. 11 Light output vs. monitoring output current



---

**ANEXO B**

**ESPECIFICACIONES DE LA  
FIBRA ÓPTICA**

---

# Optical Fibers

## Multimode Fibers

Model	Operating Wavelength (nm)	—	Cladding/ Coating Diameter (μm)	—
F-MSD	850/1300	—	125/250	—
F-MLD	850/1300	—	140/250	—
F-MSC	500–1100	—	630±10/1040±10	—
F-MMC	500–1100	—	1035±15/1400±50	—
F-MTC	500–2100	—	400±10/730±50	—
F-MFC	500–2100	—	600±10/750±50	—

## Single-mode Specialty Fibers

Model	Operating Wavelength (nm)	Mode Field Diameter (μm)	Cladding/ Coating Diameter (μm)	Cutoff Wavelength (nm)
F-SA	488/514	3.7	125/250	380±60
F-SV	630	4.6	125/250	580±30
F-SE	780	5.6	125/250	730±40
F-SF	820	6	125/250	750±50
F-SC	980	7	125/250	930±40
F-SY	1060	7.7	125/250	970±60
F-SS	1300/1550	9.3/10.5	125/250	1180±70

## Polarization Preserving Fibers

Model	Operating Wavelength (nm)	Mode Field Diameter (μm)	Cladding/ Coating Diameter (μm)	Cutoff Wavelength (nm)
F-SPA	488/514	2.75–3.0	125/250	400
F-SPV	633	3.00–3.4	125/250	550
F-SPF	820	3.50–4.5	125/250	700
F-SPS	1300/1550	5.50–7.5	125/250	1150

## UV-NIR Fiber Cable

Model	Operating Wavelength (nm)	—	Cladding/ Coating Diameter (μm)	—
FC-2UV	—	—	250/1000	—

## Patch Cords

Model	Operating Wavelength (nm)	Mode Field Diameter (μm)	Cladding/ Coating Diameter (μm)	Cutoff Wavelength (nm)
F-SA-PC	488/514	3.7	125/250	380±60
F-SV-PC	630	4.6	125/250	580±30
F-SE-PC	780	5.6	125/250	730±40
F-SF-PC	820	6	125/250	750±50
F-SC-PC	980	7	125/250	970±40
F-SY-PC	1060	7.7	125/250	970±60
F-SS-PC	1300/1550	9.3/10.5	125/250	1180±70

Maximum Attenuation (dB/km)	Nominal Core Diameter ( $\mu\text{m}$ )	—	—	NA
—	50	—	—	0.2
—	100	—	—	0.29
—	600 $\pm$ 10	—	—	0.37
—	1000 $\pm$ 15	—	—	0.37
60	365 $\pm$ 10	—	—	0.22
60	550 $\pm$ 12	—	—	0.22

Maximum Attenuation (dB/km)	Nominal Core Diameter ( $\mu\text{m}$ )	Refractive Index of Cladding	Refractive Index of Core	NA
30	3.1	1.4613	1.4658	0.11
12	3.8	1.4571	1.4616	0.11
4	4.8	1.4536	1.4581	0.11
4	5	1.4529	1.4574	0.11
3	6	1.4506	1.4552	0.11
2	6.4	1.4496	1.4541	0.11
0.4	—	1.4469	1.4514	0.11

Maximum Attenuation (dB/km)	Nominal Core Diameter ( $\mu\text{m}$ )	—	—	NA
<100	1.9	—	—	0.11
<12	2.6	—	—	0.16
<5	3.5	—	—	0.16
<2	5.5	—	—	0.16

Maximum Attenuation (dB/km)	Nominal Core Diameter ( $\mu\text{m}$ )	—	—	NA
—	200	—	—	0.2

Maximum Attenuation (dB/km)	Nominal Core Diameter ( $\mu\text{m}$ )	Refractive Index of Cladding	Refractive Index of Core	NA
30	3.1	1.4613	1.4658	0.11
12	3.8	1.4571	1.4616	0.11
3	4.8	1.4536	1.4581	0.11
4	5	1.4529	1.4574	0.11
4	6	1.4506	1.4552	0.11
2	6.4	1.4496	1.4541	0.11
0.4	—	1.4469	1.4514	0.11

---

**ANEXO C**

**ESPECIFICACIONES DE LA  
ESFERA DE ACOPLAMIENTO**

---

## Fiber Coupling Spheres

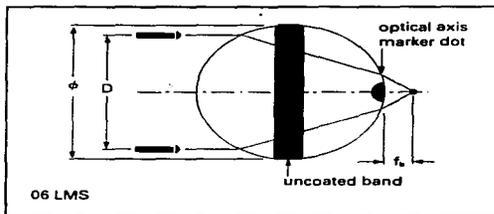
Of the various techniques presently used to couple optical fibers to each other (and to diode lasers and detectors) the ball lens method is one which allows the researcher to interact with the beam in the coupling process. Using this method, spheres are arranged such that the fiber end (or input/output device) is located at the focal point of the sphere. The output from the sphere is then a collimated beam. If two spheres are arranged in axial alignment with each other the beam will be transferred from one focal point to the other. This is exactly analogous to a pair of thin lenses relaying the object to the image space through a collimator/focusing lens combination. By enlarging the coupling beam, translational alignment sensitivity is reduced.

Spheres are much easier to manufacture than thin lenses in these small diameters. In the same way, they are easy to align in experimental applications. Because of their simplicity, ball lens coupling systems tend to achieve better coupling efficiencies than other methods. Using communication fibers, coupling efficiencies up to 95% (0.4 dB insertion loss) have been achieved.

These optical spheres are available in three diameters. The larger spheres are easier to handle and the diameter of the collimated output beam is greater to facilitate interaction with the beam and to minimize translational sensitivity. Conversely, larger spheres require substantially bigger packaging volumes.

Spherical aberration is the overriding defect in all coupling systems. Fiber diameters are so much smaller than the coupler's focal length that off-axis aberrations are absent. Evidence exists which indicates that a slight negative defocusing of the ball lens will substantially reduce the spherical aberration third-order contribution (see Lens Coupling in Fiber-Optics Devices: Efficiency Limits, A Nicia, *Applied Optics*, Vol. 20, No. 18, pp 3136-3145)

All of these spheres are coated on both hemispheres with a single layer  $MgF_2$  antireflection coating. Because of the high index of these spheres, this results in a very effective coating with low reflectivity at the specified wavelengths. A narrow equatorial band is not coated due to fixturing but the optical axis may be located by a small black dot that is located on the optical axis. This dot should be used to locate the optical axis during mounting. Once aligned the black dot may be removed by applying acetone with a cotton swab.



### SPECIFICATIONS: FIBER COUPLING SPHERES

Wavelength Range: 600 nm-1550 nm

#### Refractive Index:

$$n_{633}=1.84491, n_{830}=1.83109,$$

$$n_{1300}=1.81767, n_{1550}=1.81337$$

Sphericity:  $< \lambda/4$  at 632.8 nm

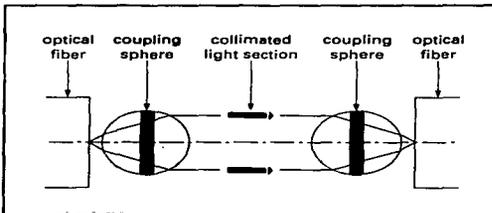
#### Reflectance:

$< 0.25\%$  at specified wavelength except uncoated version

Diameter ( $\phi$ ):  $\pm 1 \mu\text{m}$

Material: LaSFN 9

Coating: Single layer  $MgF_2$



FIBER COUPLING USING SPHERES. Lateral positioning sensitivity is greatly reduced by this method.

## Fiber Coupling Spheres; Uncoated

$\phi$ (mm)	$f_{830}$ (mm)	$f_b$ (mm)	$f_{830}/D$	D (mm)	PRODUCT NUMBER
2.0	1.10	0.10	0.69	1.60	06 LMS 002
3.0	1.65	0.15	0.69	2.40	06 LMS 003
5.0	2.75	0.25	0.69	4.00	06 LMS 005

Fiber Coupling Spheres; Antireflection Coated For  $\lambda = 632.8$  nm

$\phi$ (mm)	$f_b$ (mm)	$f_{633}/D$	D (mm)	PRODUCT NUMBER
2.0	0.09	0.68	1.60	06 LMS 102
3.0	0.14	0.68	2.40	06 LMS 103
5.0	0.23	0.68	4.00	06 LMS 105

Fiber Coupling Spheres; Antireflection Coated For  $\lambda = 830$  nm

$\phi$ (mm)	$f_b$ (mm)	$f_{830}/D$	D (mm)	PRODUCT NUMBER
2.0	0.10	0.69	1.60	06 LMS 202
3.0	0.15	0.69	2.40	06 LMS 203
5.0	0.25	0.69	4.00	06 LMS 205

Fiber Coupling Spheres; Antireflection Coated For  $\lambda = 1300$  nm

$\phi$ (mm)	$f_b$ (mm)	$f_{1300}/D$	D (mm)	PRODUCT NUMBER
2.0	0.11	0.69	1.60	06 LMS 302
3.0	0.17	0.69	2.40	06 LMS 303
5.0	0.28	0.69	4.00	06 LMS 305

Fiber Coupling Spheres; Antireflection Coated For  $\lambda = 1550$  nm

$\phi$ (mm)	$f_b$ (mm)	$f_{1550}/D$	D (mm)	PRODUCT NUMBER
2.0	0.11	0.69	1.60	06 LMS 402
3.0	0.17	0.69	2.40	06 LMS 403
5.0	0.29	0.69	4.00	06 LMS 405

---

**ANEXO D**

**ESPECIFICACIONES DE LA  
LENTE *GRIN* PLANO-PLANO**

---

### GRADIENT INDEX LENS TYPES

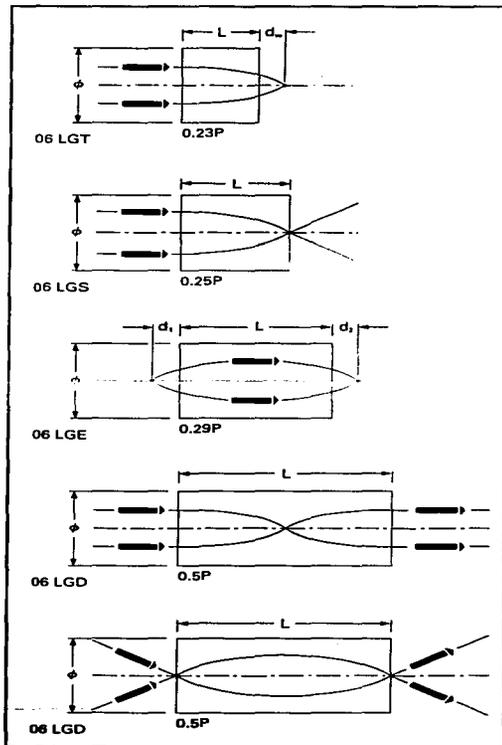
Knowing the pitch ( $P$ ) of gradient index rod material, it is possible to achieve various imaging characteristics simply by varying the length of the lens. Imaging properties of common fractional pitch lens types are shown in the accompanying diagram.

A quarter pitch lens forms an inverted, real image of an object at infinity on the opposite end of the lens. A half pitch lens transfers an inverted real image from one end of the lens to the other. Uneven fractional pitch lenses ( $0.23P$  and  $0.29P$ ) are useful for coupling diode laser outputs either to a collimated beam or into an optical fiber. Their advantage lies in the fact that the image is displaced from the end of the lens and is therefore accessible. A  $0.29P$  lens may be used over a range of magnifications. (See graph on page D. 5-21.)

Both the index on-axis ( $n_0$ ) and the quadratic gradient constant  $\sqrt{A}$  are wavelength dependent. This results in the pitch, and consequently the length, varying with wavelength. For this reason we list lenses separately for each wavelength of interest. We can, of course, supply lenses for other wavelengths on special request.

### COATINGS

Since these lenses are wavelength specific we have chosen to offer them with an antireflection coating. This reduces the surface reflection losses to less than 1.5% per surface.



Gradient Index Rod Lenses; for  $\lambda = 1550$  nm

Fractional Pitch	N.A.	Diameter $\phi$ (mm)	Length L (mm)	Maximum Acceptance Angle, $2\theta$ (degrees)	Design Index On-Axis $n_{00}$	Quadratic Constant $\sqrt{A}$	PRODUCT NUMBER
0.23	0.46	1.8	4.4	55	1.590	0.326	06 LGT 414
0.25	0.37	1.0	3.3	43	1.550	0.481	06 LGS 411
	0.37	2.0	6.6	43	1.550	0.237	06 LGS 412
	0.46	1.0	2.6	55	1.592	0.596	06 LGS 413
	0.46	1.8	4.8	55	1.592	0.326	06 LGS 414
	0.46	2.0	5.3	55	1.592	0.294	06 LGS 415
	0.60	1.8	3.8	72	1.634	0.417	06 LGS 416
0.25	0.46	1.8	5.5	55	1.590	0.326	06 LGE 414
	0.37	1.0	6.5	43	1.550	0.481	06 LGD 411
0.50	0.37	2.0	13.3	43	1.550	0.237	06 LGD 412
	0.46	1.0	5.3	55	1.592	0.596	06 LGD 413
	0.46	1.8	9.6	55	1.592	0.326	06 LGD 414
	0.46	2.0	10.7	55	1.592	0.294	06 LGD 415
	0.60	1.8	7.5	72	1.634	0.417	06 LGD 416

## GRADIENT INDEX ROD LENS HOLDER

The HGI001, a simple holder for gradient index rod lenses, is offered for your convenience.

	PRODUCT NUMBER
Gradient Index Rod Lens Holder	07 HGI001

Opto-Technology manufactures integrated diode collimator lens assemblies for OEM applications, including compact gradient index systems. Contact your nearest Opto-Technology office for details.

---

**ANEXO E**

**ESPECIFICACIONES DE LA  
LENTE *GRIN* PLANO-CONVEXA**

---

# SELFOC® Plano-Convex (PC) Lens

The SELFOC® Plano-Convex Lens features a curved surface on one end facet, designed to reduce spherical aberration in the lens. The result is an increased acceptance angle, smaller spot size as shown in the Figure below. The most common application is coupling from a light source, such as a laser diode or LED, into an optical fiber.

There are three types of PC lens: PCW, PCH, and PCT, all with 1.8 mm diameter. The characteristics of PCW and PCH are listed in the Table below. PCT has higher coupling efficiency than PCW or PCH due to better control of higher order coefficients in the index distribution equation.

There are two coupling schemes: the single lens system and the confocal (two-lens) system. The confocal system is used where it is necessary to include an additional optical component (e.g. filter, isolator) between the light source and the fiber.

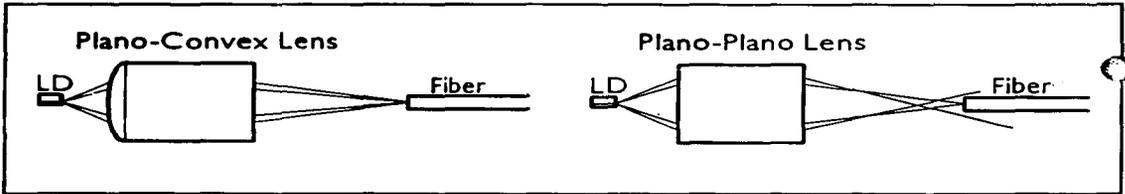


Figure 1 Comparison of Plano-Convex and Plano-Plano Lenses for Diode/Fiber Coupling Application

Table 1 Optical Design Parameters for PCW and PCH

Standard Wavelength	830 nm									1300 nm					1560 nm						
	Pitch	N.A. Axis	2θ (deg)	N <sub>o</sub>	√A (mm <sup>-1</sup> )	Z (mm)	L <sub>1</sub> (mm)	L <sub>2</sub> (mm)	TC (mm)	N <sub>o</sub>	√A (mm <sup>-1</sup> )	Z (mm)	L <sub>1</sub> (mm)	L <sub>2</sub> (mm)	TC (mm)	N <sub>o</sub>	√A (mm <sup>-1</sup> )	Z (mm)	L <sub>1</sub> (mm)	L <sub>2</sub> (mm)	TC (mm)
PCW	0.25	0.46	55	1.599	0.332	4.73	0.7	4.01	9.44	1.592	0.327	4.80	0.7	4.20	9.70	1.590	0.326	4.81	0.7	4.25	9.76
PCH	0.22	0.60	72	1.646	0.423	3.27	0.7	3.67	7.64	1.636	0.418	3.30	0.7	3.88	7.88	1.634	0.417	3.31	0.7	3.91	7.92
PCH	0.20	0.60	72	1.646	0.423	2.97	0.7	5.68	9.35	1.636	0.418	3.01	0.7	6.04	9.75	1.634	0.417	3.01	0.7	6.12	9.83

\* Radius of Curvature(R): For PCW, R = 2.0 +/- 0.1 mm;

For PCH, R may vary from 1 to 3 mm as determined by NSG based on index distribution of each lot.

Ordering Information:

X X X	X X X	X X X	X X X	X X X
Type	Diameter	Pitch	Wavelength	* **
PCH/PCW	180=1.8mm	025=0.25P,etc.	083=830nm,etc.	(see SML Options)

\* AR Coating: A2, C1, etc., NC = Non-Coated

When AR coating is specified for one side only, e.g., A1, D1, etc., the coating is applied to the convex side unless otherwise specified by the customer.

\*\* Metallization: M = Metallized, 0 = Non-metallized

Part Numbers for PCT:

PCT 180 326 130 A2M Z  
PCT 180 326 155 A2M Z

PCT 180 283 130 A2M Z  
PCT 180 283 155 A2M Z

# SELFOC® Micro Lens Options

AR (Anti-Reflection) Coating, Metallization, Angled Facet

## AR Coating

AR coatings reduce the amount of light lost due to Fresnel reflections at the lens surfaces. They also help to protect the lens surfaces from humidity, chemical reaction and physical damage. Four grades (A, C, D, W) of coating are available, each with its unique characteristics. The coatings are optimized for specific wavelength(s).

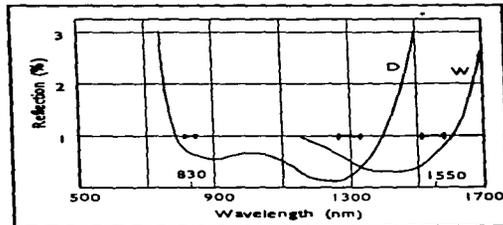
**Table 1 AR Coating Specifications**

ITEMS COATING TYPE	NON-COATED	A-GRADE	C-GRADE	D-GRADE	W-GRADE
Max. Total Reflection from Both Surfaces	9 - 12%	0.5%	2.5%	1.0%	1.0%
Spectrum Width @ Max. Reflectance	-----	$\lambda \pm 15$ nm	$\lambda \pm 30$ nm	830 +/- 15 nm 1300 +/- 30 nm	1300 +/- 30 nm 1560 +/- 30 nm
Coating Structure	-----	Multilayer Metal Oxide	Single Layer MgF <sub>2</sub>	Multilayer Metal Oxide	Multilayer Metal Oxide
Maximum Temperature	350°C	200°C×1000 hrs.	200°C×1000 hrs.	200°C×1000 hrs.	200°C×1000 hrs.
Maximum Humidity and Reliability	not recommended for high humidity.	85°C-85%RH 1000 hours	60°C-95%RH 1000 hours	85°C-85%RH 1000 hours	85°C-85%RH 1000 hours

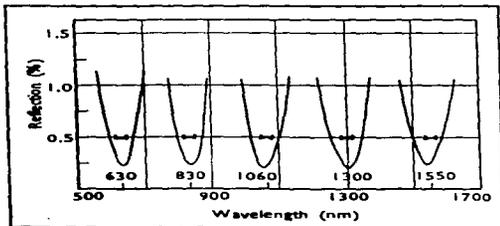
**Table 2 Availability of Standard AR Coatings**

Lens Type	Grade	Standard Wavelength (nm)
SLS-1.0, SLS-2.0,	A, C	630, 830, 1060, 1300, 1560
SLH-1.8, SLW-1.0,	D	830 / 1300
SLW-1.8, SLW-2.0	W	1300 / 1560
SLW-3.0, SLW-4.0	C	780
PCW-1.8, PCH-1.8	A,C	830, 1300, 1560
	D	830 / 1300
	W	1300 / 1560

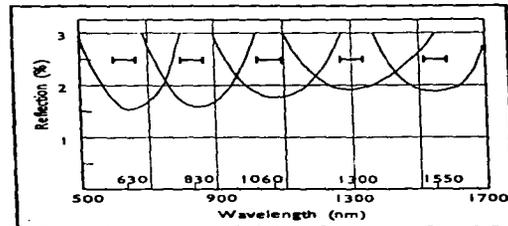
- \* Minimum quantity for all standard coating is 10 pcs.
- \* For non-standard AR coatings, consult NSG America.



**Figure 1 Reflection of D and W Grades Coating**



**Figure 2 Reflection of A-Grade AR Coating**



**Figure 3 Reflection of C-Grade AR Coating**

---

**ANEXO F**

**ESPECIFICACIONES DE LA  
LENTE ASFÉRICA**

---

## ASPHERIC LENSES SUMMARY



### Laser Quality Geltech Molded Glass Aspheric Lenses

- High NA (0.25 to 0.55)
- Powerful Single Element Replacement for multi-element microscope objectives
- Collimate or focus light with a single element
- Simplifies manufacturing and assembly
- Diffraction limited performance
- AR Coated Optics shipped from stock

In laser diode systems, difficulties with aberration correction are compounded by the beam's high divergence angle. Since individual spherical lenses can refract light at only small angles before spherical aberration is introduced, three or four elements are often required to collimate Laser Diode light. A single Geltech molded glass aspheric lens collimates without introducing aberrations.

MOUNTED ITEM#	UNMOUNTED ITEM#	f (mm)	NA	CLEAR APERTURE (mm)	WORKING DISTANCE (mm)	OUTER DIAMETER (mm)	THICKNESS (mm)	DIFFRACTION LIMITED RANGE (mm)	EQUIVALENT MICROSCOPE OBJECTIVE MAGNIFICATION	HOUSING DIAMETER (mm)	PAGE
C200TM	350200	1.14	0.44	1.30	SEE PROGRAM PAGE 99	2.40	1.03	633-1550	—	6.24	99
C140TM	350140	1.45	0.55	1.60	0.88	2.40	1.01	600-1550	110X	6.24	99
C150TM	350150	2.00	0.50	2.00	1.09	3.00	2.00	460-1550	80X	6.24	100
C390TM	350390	2.75	0.65	3.60	1.56	4.00	1.90	690-1550	58X	8.24	100
C330TM	350330	3.10	0.80	5.00	1.76	6.33	3.19	780-890	52X	9.24	101
C230TM	350230	4.50	0.55	4.96	2.91	6.33	2.94	600-1550	35X	9.24	101
C350TM	350350	4.50	0.41	3.70	2.38	4.70	3.65	430-1550	35X	8.24	102
C430TM	350430	5.00	0.15	1.50	4.36	2.00	Ref. pg 102	350-1550	32X	Ref. pg 102	102
C170TM	350170	6.16	0.30	3.70	4.37	4.70	3.48	430-1550	26X	8.24	103
C110TM	350110	6.24	0.40	5.00	3.45	7.20	5.36	510-1550	26X	9.24	103
C240TM	350240	8.00	0.50	8.00	5.92	9.94	3.69	633-1550	20X	12.24	104
C220TM	350220	11.00	0.25	5.50	7.96	7.20	7.71	350-1550	15X	9.24	104
C260TM	350260	15.36	0.16	5.00	14.00	6.50	2.20	350-1550	10X	9.24	105
C280TM	350280	18.40	0.15	5.50	17.11	6.50	2.20	350-1550	9X	9.24	105

### CO550 Corning Glass Retractive Index

WAVELENGTH nm	INDEX
365.0	1.63624
404.7	1.62590
435.8	1.62016
480.0	1.61411
486.1	1.61341
546.1	1.60786
587.6	1.60500
632.8	1.60251
643.8	1.60198
656.3	1.60141
706.5	1.59940
780.0	1.59708
790.0	1.59654
800.0	1.59630
810.0	1.59628
820.0	1.59603
830.0	1.59579
840.0	1.59556
852.0	1.59528
1014.0	1.59227
1300.0	1.58805
1550.0	1.58572

### LENS DESIGN FORMULA

- Positive radius indicates the center of curvature is to the right
- Negative radius indicates the center of curvature is to the left
- Dimensions are given in millimeters
- Thickness is axial distance to the next surface

ASP (1) and ASP (2) are aspheric surfaces. The sag of the aspheric surface, as a function of distance (X) from the aspheric axis is defined by:

$$z = \frac{(\text{CURV}) X^2}{1 + \sqrt{1 - (1+K)(\text{CURV})^2 X^2}} + (A) X^4 + (B) X^6 + (C) X^8 + (D) X^{10}$$

Where (CURV) is the centerline curvature (1/radius), and K is the conic constant. A, B, C, and D are the aspheric coefficients. The values of each for both surfaces are given below.

### ANTIREFLECTIVE COATINGS

Our broadband multilayer coatings reduce reflection to less than 1%. Lenses can be coated with a variety of multilayer coatings; please call for details.

All molded glass aspheric lenses are manufactured by Geltech. The glass material (Corning's Glass Code CO550) has been specifically designed to allow production of highly sophisticated aspheric lenses that are cost effective.

