



36
X
Nuestro
digitalizado

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA
FACULTAD DE INGENIERÍA

ANÁLISIS COMPARATIVO DE DOS MODELOS DE PROCESADOR NEURONAL

CENTRO DE INSTRUMENTOS



T E S I S

BIBLIOTECA

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA
P R E S E N T A

SERGIO QUINTANA THIERRY

DIRECTOR DE TESIS: M. en C. ALBERTO A. HERRERA BECERRA

LABORATORIO DE NEUROCONTROL
CENTRO DE INSTRUMENTOS



MÉXICO, D.F.

1997

255416



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



DEDICATORIA:

A Mónica Gabriela, quien con su apoyo, comprensión y cariño me ha motivado a culminar esta y muchas otras metas en mi vida.

A Nini, Gri, Andrea, Pepe Güicho, Albertico, Tognio, Pepillo, Willy, Mike, Alex, Rosendo y mi Amiguito, porque más que compañeros de trabajo son excelentes amigos de una gran calidad humana, con los que siempre he contado a lo largo de estos años que hemos convivido en el Centro de Instrumentos.



AGRADECIMIENTOS

Quiero hacer patente mi más sincero agradecimiento a las siguientes personas e instituciones que de alguna manera han participado en la realización de este trabajo.

Al M. en C. Alberto Arturo Herrera Becerra por su acertada dirección en la realización de esta tesis.

Al M. en C. José Luis Pérez Silva por su invaluable apoyo y asesoría en la realización de este trabajo.

Al Dr. Claudio Firmani Clementi por brindarme la oportunidad y el apoyo para culminar esta tesis.

A la Dra. Nydia Lara Zavala por su valioso apoyo a lo largo de estos años de mi vida académica.

Dr. Francisco Cervantes Pérez por su asesoría durante mis estudios de maestría.

A los miembros del jurado: Dr. Felipe Lara, M. en C. José Luis Pérez, M. en C. Alberto Herrera, Dr. Jesús Savage y M. en I. David González por sus comentarios y el tiempo invertido en la revisión de esta tesis.

Al Centro de Instrumentos por darme la oportunidad de pertenecer a su personal académico.

Al CONACyT por la beca otorgada para realizar mis estudios de maestría.



ÍNDICE

QA76.87/Q85 TCK/SP.

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I	
MODELO DE NEURONA ARTIFICIAL	
Introducción	4
1.1 Morfología de la neurona biológica	5
1.2 Fisiología básica de la neurona	6
1.3 Modelo de neurona artificial	9
1.4 Modelo matemático de neurona artificial	10
CAPÍTULO II	
MODELO ELECTRÓNICO DE LA NEURONA ARTIFICIAL	
Introducción	14
2.1 Modelo electrónico	14
2.2 Módulo sumador Σ	16
2.3 Módulo integrador \int	21
2.4 Módulo generador de respuesta R	23
CAPÍTULO III	
DINÁMICA DE UNA NEURONA ARTIFICIAL	
Introducción	26
3.1 Señal escalón	27
3.1.1 Dinámica de la neurona aislada	28
3.1.1.a Respuesta de la neurona	29
3.1.2 Dinámica de la neurona con una autosinapsis	30
3.1.2.a Respuesta de la neurona	33
3.1.3 Comportamiento de la neurona	35
3.2 Pulso cuadrado	36
3.2.1 Dinámica de la neurona aislada	37

3.2.1.a	Respuesta de la neurona	39
3.2.2	Dinámica de la neurona con una autosinapsis	42
3.2.2.a	Respuesta de la neurona	45
3.2.3	Comportamiento de la neurona	49
3.3	Tren de pulsos cuadrados	51
3.3.1	Dinámica de la neurona aislada	52
3.3.1.a	Respuesta de estado estacionario de la neurona	54
3.3.2	Dinámica de la neurona con una autosinapsis	56
3.3.2.a	Respuesta de estado estacionario de la neurona	60
3.3.3	Comportamiento de la neurona	65
CAPÍTULO IV		
EVALUACIÓN DEL MODELO ELECTRÓNICO		
	Introducción	67
4.1	Neurona aislada	68
4.2	Neurona con autoconexión	70
4.3	Modelo con retardo	79
CONCLUSIONES		82
REFERENCIAS		85

INTRODUCCIÓN

Las redes neuronales artificiales son arreglos de dispositivos simples de procesamiento de señales inspirados en las neuronas biológicas, los cuales son capaces de procesar señales en forma paralela. En general, una neurona artificial puede ser entendida como un dispositivo que desarrolla un mapeo no lineal de un conjunto de señales externas a una única señal de salida. De esta forma, una red neuronal artificial realiza un mapeo complejo no lineal de un conjunto de señales externas a un conjunto de señales de salida. En otras palabras, una red neuronal artificial puede ser usada para construir filtros no lineales, los cuales pueden ser usados, por ejemplo, en tareas de predicción de series de tiempo [1]. La operación de mapeo llevada a cabo por una neurona artificial depende del modelo conceptual usado para definirla. Este modelo es obtenido del comportamiento de la neurona biológica y tiene la intención de describir en forma lingüística, las características básicas del modelo artificial. Sin embargo, con el fin de tener un modelo de neurona factible de ser usado en una aplicación actual, debemos construir realizaciones matemáticas o físicas del modelo conceptual.

Actualmente, la mayoría de los modelos utilizados en aplicaciones prácticas son modelos matemáticos. En particular, las redes neuronales son concebidas como sistemas dinámicos no lineales en el sentido de que las activaciones futuras de todas sus unidades pueden ser computadas a partir del conocimiento de sus activaciones iniciales [2]. Actualmente, el mayor interés en la computación neuronal es originado de una sugerencia hecha por Hopfield en 1982, la cual menciona que las propiedades colectivas de sistemas neuronales artificiales pueden ser utilizada directamente en la implementación de tareas computacionales [3]. En adición, también podemos construir realizaciones físicas del modelo conceptual. En este caso, tenemos un dispositivo físico, e.g., un circuito eléctrico o un microchip, que emula el comportamiento descrito por el modelo conceptual. En particular, algunas realizaciones físicas de circuitos neuronales han sido usadas actualmente en aplicaciones tales como procesamiento de señales o neurocontrol [4].

En este trabajo se verificarán electrónicamente los comportamientos obtenidos del análisis de un modelo matemático de un procesador neuronal simple. El modelo matemático fue diseñado de un modelo conceptual basado en la suposición de que una neurona biológica puede ser entendida como un bloque elemental para construir redes que procesan señales complejas [5]. En particular, nuestro modelo conceptual está extraído de dos fenómenos electroquímicos observados en las neuronas biológicas. El primero está asociado a la integración temporal de la señal de entrada en un potencial de membrana. El segundo toma en cuenta que la respuesta de la neurona es una función del potencial de membrana. De estos fenómenos, hemos deducido que una neurona artificial puede ser diseñada como una clase de mapeo dinámico no lineal. De esta forma, el dispositivo neuronal elemental que se construye es suficientemente simple para llevar a cabo el análisis matemático de su comportamiento, pero suficientemente complejo para exhibir respuestas no triviales. Debido a esto, estamos interesados en el estudio de las características de procesamiento de señales de nuestras neuronas artificiales.

La realización matemática de nuestro modelo conceptual nos condujo, de manera natural, a describir el comportamiento de una red neuronal artificial en términos de un sistema dinámico no lineal. En este punto, debemos tomar en cuenta que cuando

una red neuronal presenta dinámicas dependientes del tiempo, esto es, cuando las activaciones iniciales de las unidades convergen a patrones de activación periódicos, muchas de las herramientas matemáticas disponibles para su análisis son demasiado complejas para ser usadas. En este caso, el desarrollo de circuitos neuronales analógicos basados en dispositivos electrónicos, representan una herramienta alternativa en el análisis de estas redes neuronales. Este planteamiento nos permite desarrollar, de manera relativamente sencilla, experimentos complejos que son muy difíciles de llevar a cabo en simulaciones numéricas. Así, diseñamos una realización física de nuestro modelo matemático en términos de dispositivos electrónicos. En particular, nuestra propuesta de implementación electrónica está basada en dispositivos analógicos debido a la naturaleza misma de la dinámica del modelo matemático. Mostraremos que el circuito electrónico tiene respuestas que no se presentan en el modelo matemático, a pesar de que fue diseñado con base en este último.

CAPÍTULO I

MODELO DE NEURONA ARTIFICIAL

INTRODUCCIÓN

Los modelos de redes neuronales artificiales están basadas en algunas de las propiedades de procesamiento de señales de las neuronas biológicas. De esta forma, es posible modelar una neurona artificial como un dispositivo procesador simple. A pesar de que las neuronas artificiales tienen algún referente con las neuronas biológicas, las primeras son solamente un modelo formal y no son diseñadas para emular todos los detalles de las neuronas biológicas. Sin embargo, para llevar a cabo la construcción de un modelo artificial de neurona es necesario contar primero con una descripción de las propiedades eléctricas de las neuronas biológicas que se desean modelar. Para esto, es necesario considerar las características morfológicas y fisiológicas que permiten a las neuronas realizar tareas de procesamiento de señales.

1.1 MORFOLOGÍA DE LA NEURONA BIOLÓGICA.

Las neuronas son las unidades básicas que componen al tejido nervioso de los animales. Estas células se diferencian de otras células por la presencia de cuatro regiones morfológicamente diferentes, a saber: **el cuerpo celular, las dendritas, el axón y las terminales axónicas**. Adicionalmente, las neuronas biológicas (figura 1.1) poseen sistemas bioquímicos especializados en la generación de señales electroquímicas en cada una de dichas regiones.

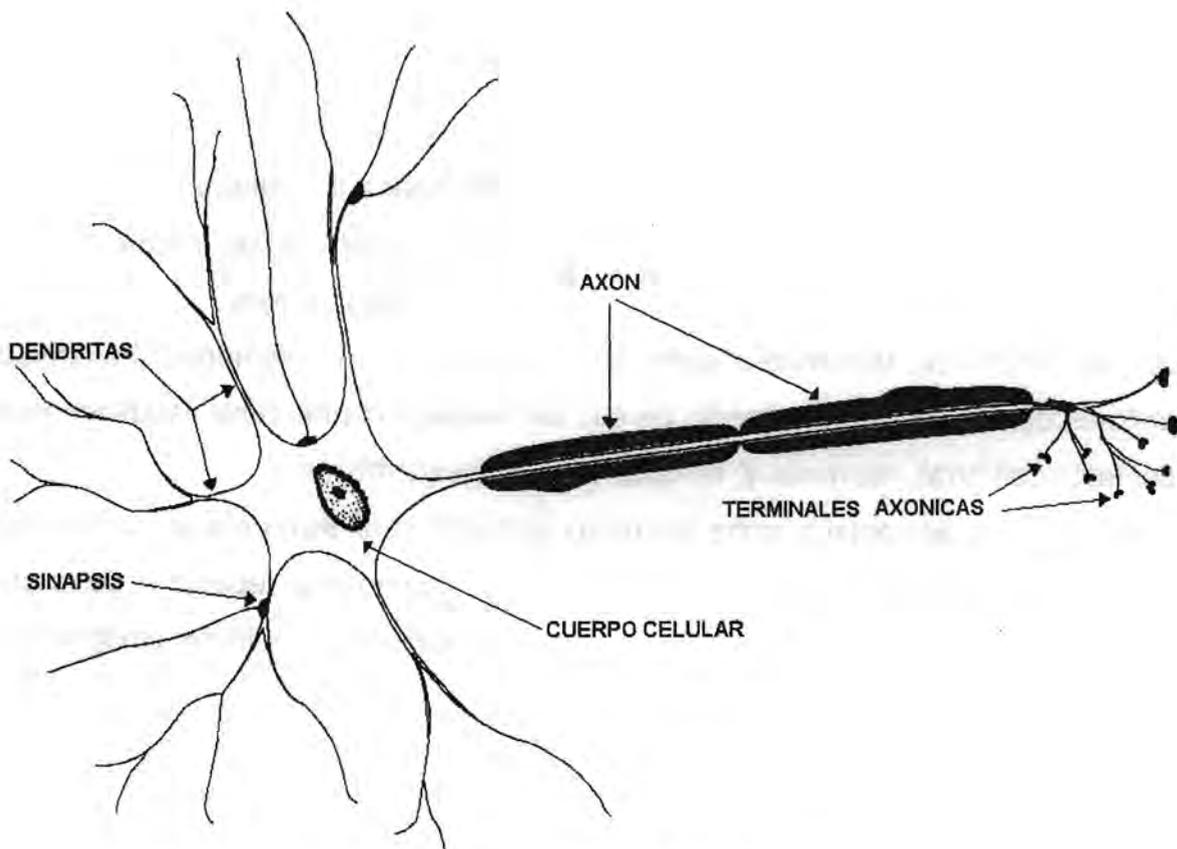


Figura 1.1. Neurona biológica.

El cuerpo celular o soma es donde se localizan los principales sistemas bioquímicos de síntesis, secreción y transporte de sustancias que requiere la célula para su funcionamiento. Es por esto que el soma se considera el centro metabólico de la neurona. Del cuerpo celular se originan diversas extensiones o protuberancias que

se ramifican repetidas veces hasta formar una arborización fina y una protuberancia especial de forma tubular que, en general, sólo se divide en su parte terminal. Las ramificaciones finas se denominan **dendritas**, mientras que la protuberancia tubular se denomina **axón**. Las **dendritas** constituyen el principal, mas no el único, centro receptor de señales de la neurona, mientras que el axón constituye la unidad conductora de las señales procesadas por la neurona.

El axón se caracteriza por carecer de sistemas complejos de síntesis de sustancias aunque contiene diversos sistemas especializados en el transporte de éstas. Además, el axón puede extenderse hasta alcanzar distancias grandes; en este último caso, el axón se encuentra cubierto por una capa aislante (formada por células neurogliales especializadas) denominada capa de mielina y cuya función es permitir la conducción sin decaimiento y a grandes velocidades de señales eléctricas. La capa de mielina no es continua, denominándose Nodos de Ranvier a los puntos de interrupción.

La parte terminal del axón se divide repetidas veces hasta formar una gran cantidad de ramas finas que poseen propiedades funcionales especializadas. Dichas ramas se denominan **terminales axónicas** y constituyen los elementos transmisores de señales de la neurona. Por medio de sus terminales, una neurona establece puntos de contacto con otras neuronas y, en ocasiones, consigo misma.

Los puntos de contacto entre neuronas se denominan **sinápsis**, las cuales están formadas por la terminal de la célula presináptica, la superficie receptora de la célula postsináptica y un espacio que las separa, denominada hendidura sináptica. Las sinápsis se establecen principalmente en las dendritas de la neurona postsináptica, aunque también se puede encontrar en el cuerpo celular y, ocasionalmente, en las partes iniciales y terminales del axón de la neurona postsináptica.

1.2 FISIOLÓGÍA BÁSICA DE LA NEURONA

Toda neurona genera en su membrana externa un potencial electroquímico de reposo y cuatro tipos de señales: las de entrada, las de integración, las de conducción y las de salida. La membrana celular se comporta como un medio excitable, es decir, es

capaz de propagar una perturbación externa local a toda su superficie. Los mecanismos de propagación no involucran, en general, el uso de energía metabólica, por lo que la magnitud de la perturbación tiende a decaer tanto con la distancia como con el tiempo. Cada una de las regiones descritas en la sección anterior poseen sistemas bioquímicos especializados en generar una señal en particular.

El potencial de reposo se genera debido a que la membrana externa constituye una barrera a la difusión libre de iones entre el interior y el exterior de la célula. Las cargas positivas se acumulan en el medio exterior y las cargas negativas en el interior de la célula, por lo que, si se define, de manera arbitraria, el medio extracelular como cero, entonces el potencial de reposo es negativo (los rangos de valores encontrados experimentalmente van de -40mV hasta -90mV con un promedio en -60mV). El potencial de reposo se genera en toda la membrana externa de la neurona y, en general, de una región a otra no cambia su valor de manera apreciable.

Las señales son la respuesta de la célula a perturbaciones externas y se manifiestan como potenciales distintos del valor de reposo. Una señal que provoca que el potencial adquiera un valor menor que el de reposo se denomina **señal hiperpolarizante** mientras que una señal que provoca el efecto contrario se denomina **señal depolarizante**. Las terminales presinápticas que generan potenciales depolarizantes en la célula postsináptica se denominan terminales **excitadoras** mientras que si generan potenciales hiperpolarizantes se denominan terminales **inhibitorias**.

Las señales de entrada son de dos tipos: a) los potenciales generadores y b) los potenciales sinápticos. Los primeros se originan en la superficie receptora de las neuronas sensoriales, mientras que los segundos se presentan en las neuronas centrales o interneuronas. Ambos tipos de señales pueden ser tanto depolarizantes como hiperpolarizantes y se propagan de manera pasiva a lo largo de la neurona. Los potenciales generadores sólo se producen mientras se mantenga presente el estímulo externo, a diferencia de los potenciales sinápticos que se pueden mantener aun después de que se retire el estímulo externo.

Las señales de entrada se propagan hasta una región especializada de la membrana (localizada en la base del axón) que se encarga de sumar o integrar, tanto

en el tiempo como en el espacio, los efectos causados por todos los potenciales sinápticos y/o generadores y de producir un potencial global que constituye la señal de integración. Si esta señal es suficientemente depolarizante entonces se genera un potencial de acción, es decir, una señal fuertemente depolarizante (alcanza valores hasta de 100mV) de corta duración (alrededor de 2ms) pero que se propaga a lo largo del axón por medio de mecanismos activos, lo cual impide que su amplitud decaiga. A diferencia de los potenciales generadores, sinápticos e integrativos que son graduales, los potenciales de acción presentan la característica de ser "todo o nada", es decir, se producen sólo cuando la señal integrativa sobrepasa un valor umbral (figura 1.2).

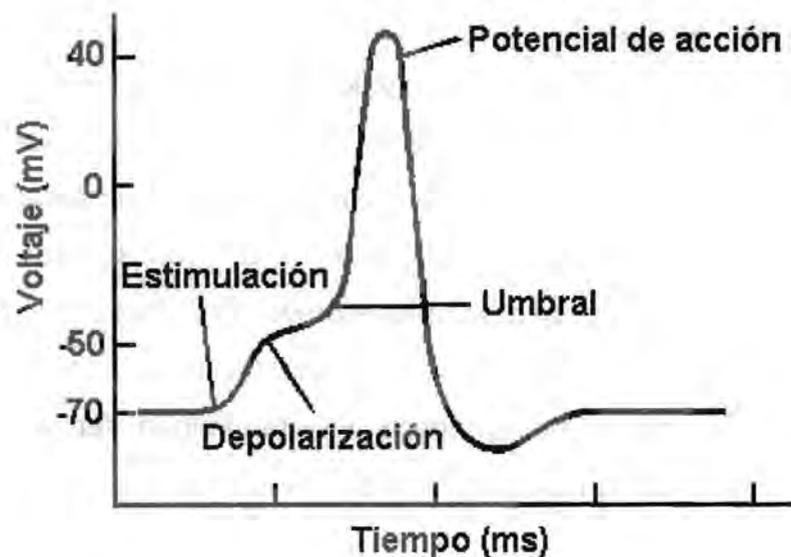


Figura 1.2. Potencial de acción de la neurona.

Al alcanzar la parte terminal del axón, el potencial de acción se transforma en un potencial local y gradual, denominado potencial secretor. Esta señal constituye el estímulo que inicializa los distintos sistemas bioquímicos de secreción de neurotransmisores, es decir, de las sustancias encargadas de transmitir señales entre neuronas. Una vez que el neurotransmisor es liberado en la hendidura sináptica, difunde libremente hacia la superficie receptora de la neurona postsináptica donde participa en la generación de un potencial local sináptico.

1.3 MODELO DE NEURONA ARTIFICIAL

Desde el punto de vista de procesamiento de señales, una neurona biológica consiste de las siguientes tres partes, cada una asociada con una operación de mapeo particular:

- 1) Las dendritas son el área receptora de señales que provienen de otras neuronas o del medio externo que rodea a la neurona.
- 2) El cuerpo celular o soma colecta y combina las señales de entrada que recibe la neurona.
- 3) El axón que es una fibra simple a través de la cual se transmiten a otras neuronas las señales procesadas.

El punto de unión de un axón con las dendritas de otra neurona es llamado sinápsis. De hecho, un mismo axón puede verse involucrado con cientos de conexiones sinápticas. En esta forma, una neurona artificial puede ser considerada, desde el punto de vista de teoría de sistemas, como un dispositivo de múltiples entradas y salida única (MISO) como se muestra en la figura 1.3.

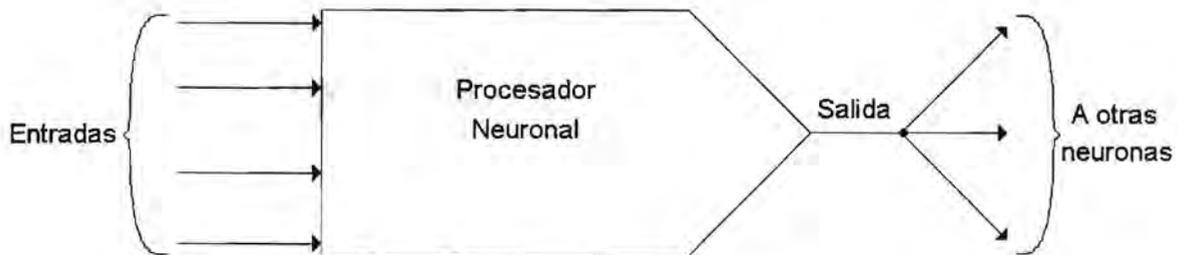


Figura 1.3. Una neurona artificial como un dispositivo MISO

El modelo formal mostrado en la figura anterior es propuesto para la construcción de redes neuronales artificiales con un alto poder computacional. Ahora bien, los ingenieros, a diferencia de los neurobiólogos, no tienen la intención de emular el comportamiento del sistema biológico. Los primeros toman los modelos biológicos solamente como dispositivos formales que son usados, como inspiración, para diseñar y construir sistemas computacionales capaces de resolver diferentes problemas

tecnológicos. En este caso, un modelo biológico puede ser modificado tanto como sea necesario para satisfacer los propósitos tecnológicos.

1.4 MODELO MATEMÁTICO DE NEURONA ARTIFICIAL

Como se mencionó previamente, una neurona artificial es un dispositivo procesador elemental que realiza un mapeo no lineal. En particular, entenderemos a nuestra neurona como un dispositivo que mapea de un vector de señales de entrada externas $I(t)$, a una única señal de salida $R(t)$. En otras palabras, nuestra neurona artificial es un sistema dinámico no lineal de la forma general:

$$R(t) = F_N(I(t)), \quad \text{donde} \quad F_N: \mathbb{R}^n \times [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R} \times [t_0, t_f],$$

donde $[t_0, t_f]$ es un intervalo real. La operación no lineal obtenida por el dispositivo neuronal puede ser definida en términos de un estado interno $m(t)$, llamado la actividad de la neurona, de la siguiente manera:

$$R(t) = F_O(m(t)), \quad \text{con} \quad m(t) = F_I(I(t))$$

donde F_I es una función lineal real llamada función de entrada y F_O es una función no lineal real llamada función de salida de la neurona. De esta manera, la neurona artificial está caracterizada por la forma de las funciones F_I y F_O .

En este trabajo, caracterizaremos a la función de entrada F_I en términos de la evolución de la actividad $m(t)$. Esto es, definiremos F_I implícitamente como la solución de la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$\tau \frac{dm(t)}{dt} + m(t) - m_0 = E(t) \tag{1.1},$$

donde $m(t)$ es la actividad de la neurona al tiempo t , τ es su constante de tiempo característica, m_0 es su potencial de reposo y $E(t)$ es un término de forzamiento que representa a las señales externas que llegan a la neurona. La ecuación (1.1) indica que si el efecto global se anula ($E(t) = 0$), entonces la actividad de la neurona tiende, de manera exponencial, hacia su valor de reposo m_0 ; por otro lado, si el efecto global es excitador ($E(t) > 0$) o inhibitor ($E(t) < 0$), entonces la actividad de la neurona se depolariza o hiperpolariza respectivamente, también de manera exponencial, mientras se mantenga presente el efecto. Si bien, este modelo también ha sido usado para definir fenómenos biológicos como los reportados por Sejnowski [6] y Elman [7], no es nuestra intención usar la ecuación (1.1) como modelo biológico, sino como parte del modelo matemático que define un dispositivo neuronal elemental.

Por otra parte, el término de forzamiento $E(t)$, o **estímulo externo total** que recibe la neurona está relacionado con el vector de señales externas $I(t)$ de la manera siguiente:

$$E(t) = \mathbf{w} \cdot I(t) = \sum_{i=1}^n w_i I_i(t) \quad (1.3),$$

donde $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ es el **vector de pesos sinápticos** asociado a la neurona. Ahora bien, si en la i -ésima sinápsis ocurre que $w_i > 0$, entonces dicha sinápsis se denomina **excitadora**. Es decir, un incremento en la magnitud de la señal I_i hace que la actividad $m(t)$ de la neurona tienda a aumentar, si las restantes entradas se mantienen constantes. De manera análoga, una sinápsis se denomina **inhibitoria** si ocurre que $w_i < 0$. Así, un incremento en I_i ocasiona que la actividad $m(t)$ de la neurona tienda a disminuir, si las entradas restantes se mantienen constantes. Por otro lado, en el vector $I(t)$ se consideran todas las señales que afectan a la neurona, ya sea que provengan del medio externo a la neurona o de otras neuronas. En particular, es posible que uno de los términos I_i de la ecuación (1.3) corresponda a la respuesta de la misma neurona, es decir, es posible que la respuesta de una neurona, además de ser distribuida a otras neuronas, también afecte su propio comportamiento. Cuando esto ocurre se dice que la neurona presenta una **autosinápsis**. Ahora bien, si en una autosinápsis ocurre que

$w > 0$, entonces se dice que la neurona presenta una **autosinápsis positiva**. En caso contrario, *i.e.*, cuando $w < 0$, entonces se dice que la neurona presenta una **autosinápsis negativa**.

En adición, nuestra neurona artificial también está caracterizada por una función de salida no lineal $F_o(m(t))$. Ahora bien, existen diversas formas de describir a la función de salida, por ejemplo, podemos definir ésta en términos de funciones lineales a trazos o en términos de funciones continuas suaves. Sin embargo, no existen restricciones *a priori* en la formulación del modelo conceptual que establezcan un tipo particular de función, salvo su carácter no lineal. En este caso somos libres de definir la función de salida más conveniente para satisfacer los objetivos esperados de la realización particular del modelo. En nuestro caso, estamos interesados en definir un dispositivo neuronal elemental lo suficientemente sencillo para llevar a cabo el análisis matemático de sus comportamientos, pero lo suficientemente complejo para exhibir respuestas no triviales. Debido a esto, hemos considerado una función escalón de la forma

$$F_o(m(t)) = F_{esc}(m(t), \theta, k) = \begin{cases} k & \text{si } m(t) \geq \theta \\ 0 & \text{si } m(t) < \theta \end{cases} \quad (1.2),$$

donde k es la amplitud de la salida y θ es el umbral de la neurona. Adicionalmente, hemos asumido que $\theta - m_0 > 0$ con el fin de evitar una respuesta tónica de la neurona. La forma de la función de respuesta se presenta en la siguiente figura.

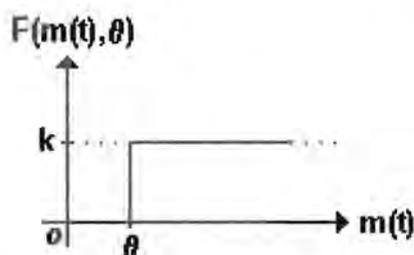


Figura 1.4. Función de respuesta tipo escalón.

Las propiedades dinámicas de una red de neuronas artificiales son descritas formalmente por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de la forma

$$\frac{dm_i(t)}{dt} = G_i(\mathbf{w}, I, m); i = 1, \dots, n \quad (1.4)$$

donde $m_i(t)$ es la actividad de la i -ésima neurona al tiempo t ; \mathbf{w} es una matriz que representa al conjunto de parámetros internos (e.g., los pesos de conexión); I representa al conjunto de parámetros externos (e.g., un vector de entradas externas). Las funciones G_i en el sistema (1.4) son funciones lineales a trazos debido a la presencia de la función de salida (1.2).

CAPÍTULO II

MODELO ELECTRÓNICO DE LA NEURONA ARTIFICIAL

INTRODUCCIÓN

En este capítulo se describe con detalle la forma en que se diseñó la neurona electrónica. Dicha neurona está basada en el modelo de procesador neuronal descrito matemáticamente en capítulo anterior por la ecuación (1.1) para la dinámica de la actividad y por la ecuación (1.2) para la función de respuesta tipo escalón.

2.1 MODELO ELECTRÓNICO

El modelo electrónico de neurona asociado a las ecuaciones (1.1) y (1.2) está formado por los siguientes tres componentes funcionales:

a) un módulo de suma Σ ,

- b) un módulo integrador \int , y
- c) un módulo generador de respuesta R.

En nuestro modelo electrónico, el módulo de suma Σ se usa para generar la suma total ponderada de las señales excitatorias e inhibitorias que llegan a la neurona. El módulo integrador \int genera al potencial $v(t)$ de la neurona electrónica y su comportamiento dinámico. Este potencial estará relacionado a la actividad $m(t)$ de la neurona matemática definida en el capítulo anterior. Finalmente el módulo generador de respuesta R genera la función de salida de la neurona. En este caso, hemos diseñado la función escalón (1.2) con el potencial $v(t)$ como argumento. Todos los módulos fueron diseñados con dispositivos analógicos para que nuestra red electrónica responda con señales continuas. En adición, hemos diseñado nuestra neurona electrónica de forma tal que cualquiera de sus parámetros se puede cambiar individualmente. Nuestro diseño también permite enviar directamente la respuesta de la neurona a cualquier otra neurona de la red. En la figura 2.1 mostramos un diagrama de bloques de nuestro modelo electrónico.

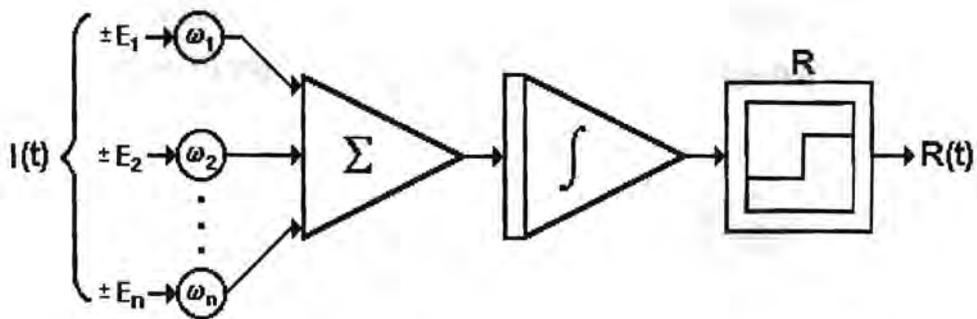


Figura 2.1 Representación en diagrama de bloques del modelo electrónico.

Para fines de diseño, la ecuación (1.1) del capítulo anterior es representada en su forma integral de la manera siguiente:

$$m(t) = \frac{1}{\tau} \int (-m(t) + m_0 + E(t)) dt$$

Tenemos que el valor de $E(t)$ de la ecuación anterior es igual a la suma total ponderada de las señales excitatorias e inhibitorias que llegan a la neurona, por lo que la ecuación anterior se puede reescribir de la forma siguiente:

$$m(t) = \frac{1}{\tau} \int [-m(t) + m_0 + \sum_{i=1}^n Exc_i(t) - \sum_{j=1}^m Inb_j(t)] dt .$$

Esta última ecuación es la que se emulará electrónicamente.

2.2 MÓDULO SUMADOR Σ

El módulo sumador Σ del modelo electrónico está integrado por dos circuitos sumadores de voltaje y un circuito amplificador diferencial, para lo cual se utilizó un circuito sumador para las entradas excitatorias y otro para las entradas inhibitorias ya sean internas o externas. Las salidas de los circuitos sumadores alimentan a las entradas del circuito amplificador diferencial, obteniendo a la salida de este la diferencia de las sumatorias. Los diagramas de estos circuitos se muestran en la figura 2.2.

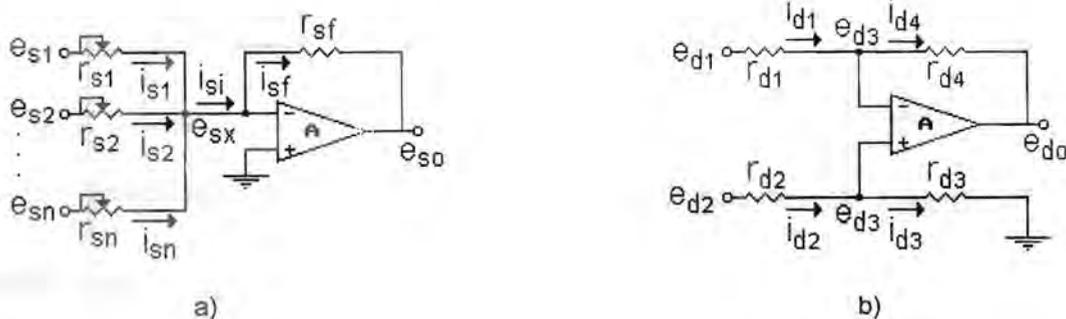


Figura 2.2 a) Sumador de voltaje. b) Amplificador diferencial.

En el circuito sumador de voltaje se puede observar que el nodo e_{sx} corresponde a un punto de suma de corrientes. Así, al aplicar la ley de corrientes de Kirchoff en e_{sx} se tiene que:

$$i_{si} = i_{s1} + i_{s2} + \dots + i_{sn} \quad (2.1)$$

Adicionalmente, la diferencia de potencial entre las entradas es prácticamente nula debido a que la ganancia del amplificador operacional (AO) es muy grande. Así, el punto e_{sx} corresponde a un punto de tierra virtual, dado que la entrada no inversora del AO está conectada a tierra. De esta manera, cada una de las corrientes i_{sk} , ($k=1, \dots, n$) de la ecuación anterior es de la forma:

$$i_{sk} = \frac{e_{sk}}{r_{sk}} \quad (2.2).$$

Como no hay flujo de corriente hacia el interior del AO, debido a su alta impedancia de entrada, la corriente de entrada i_{si} fluye por la rama de retroalimentación a través de la resistencia r_{sf} . De esta manera, se tiene que:

$$i_{si} = i_{sf} = -\frac{e_{s0}}{r_{sf}},$$

Si se sustituyen las ecuaciones (2.1) y (2.2) en la ecuación anterior se obtiene la igualdad siguiente:

$$-\frac{e_{s0}}{r_{sf}} = \frac{e_{s1}}{r_{s1}} + \frac{e_{s2}}{r_{s2}} + \dots + \frac{e_{sn}}{r_{sn}}.$$

Finalmente, de esta ecuación se puede despejar el voltaje de salida e_{s0} en términos de los potenciales e_{sk} como sigue:

$$e_{s0} = -\left(\frac{r_{sf}}{r_{s1}} e_{s1} + \frac{r_{sf}}{r_{s2}} e_{s2} + \dots + \frac{r_{sf}}{r_{sn}} e_{sn}\right) = -\sum_{i=1}^n \frac{r_{sf}}{r_{si}} e_{si} \quad (2.3).$$

Por lo que respecta al circuito amplificador diferencial, nótese que la corriente i_{d2} es igual a la corriente i_{d3} debido a la alta impedancia de entrada que posee el AO. De esta manera, se tiene que:

$$i_{d2} = i_{d3} = \frac{e_{d2}}{r_{d2} + r_{d3}}.$$

De manera similar, se tiene que la corriente i_{d1} es igual a la corriente i_{d4} , con lo cual se obtiene:

$$\frac{e_{d1} - e_{d3}}{r_{d1}} = \frac{e_{d3} - e_{d0}}{r_{d4}}.$$

Despejando de la ecuación anterior el voltaje de salida e_{d0} tenemos la siguiente expresión:

$$e_{d0} = e_{d3} - (e_{d1} - e_{d3}) \frac{r_{d4}}{r_{d1}}.$$

Ahora bien, como el voltaje e_{d3} está dado por el producto de i_{d3} y r_{d3} obtenemos:

$$e_{d3} = i_{d3} r_{d3} = e_{d2} \frac{r_{d3}}{r_{d2} + r_{d3}}.$$

entonces al sustituir la ecuación anterior en la expresión para el voltaje e_{d0} se tiene que:

$$e_{d0} = e_{d2} \frac{r_{d3}}{r_{d2}} \frac{1 + \frac{r_{d4}}{r_{d1}}}{1 + \frac{r_{d3}}{r_{d2}}} - e_{d1} \frac{r_{d4}}{r_{d1}}.$$

Nótese que la expresión anterior se puede simplificar si las resistencias r_{d1} , r_{d2} , r_{d3} y r_{d4} se ajustan de manera tal que $\frac{r_{d4}}{r_{d1}} = \frac{r_{d3}}{r_{d2}}$. Así, bajo estas condiciones, el voltaje de salida e_{d0} toma la forma:

$$e_{d0} = \frac{r_{d4}}{r_{d1}} (e_{d2} - e_{d1}).$$

Adicionalmente, se puede obtener una ganancia unitaria en la respuesta del circuito si se hace que $r_{d4} = r_{d1}$ con lo cual, el voltaje de salida e_{d0} toma finalmente la forma:

$$e_{d0} = e_{d2} - e_{d1}.$$

Como se mencionó anteriormente, con estos elementos se implanta electrónicamente el módulo Σ , lo cual se obtiene al sustituir los voltajes de entrada e_{d1} y e_{d2} de la expresión anterior por el voltaje de salida de la ecuación (2.3) para cada uno de los sumadores teniendo finalmente la expresión siguiente:

$$e_{d0} = \sum_{i=1}^n \frac{r_{sf}}{r_{si}} e_{si_2} - \sum_{j=1}^m \frac{r_{sf}}{r_{sj}} e_{sj_1} \quad (2.4).$$

La ecuación (2.4) es la representación de las señales de entrada a la neurona en términos de los parámetros del circuito electrónico donde las entradas e_{si_2} y e_{sj_1} son las entradas excitatorias e inhibitorias a la neurona respectivamente, mientras que los pesos de interconexión entre las neuronas están dados por:

$$w_i = \frac{r_{sf}}{r_{si}},$$

donde las resistencias de retroalimentación r_{sf} son fijas y las de entrada r_{si} son potenciómetros, los cuales se ajustan para obtener el peso de interconexión deseado. De esta forma, la respuesta total del módulo Σ es de la forma:

$$E(t) = \sum_{i=1}^n Exc_i(t) - \sum_{j=1}^m Inh_j(t) = \sum_{i=1}^n w_i e_{si} - \sum_{j=1}^m w_j e_{sj}$$

El diagrama esquemático del módulo Σ se presenta en la siguiente figura:

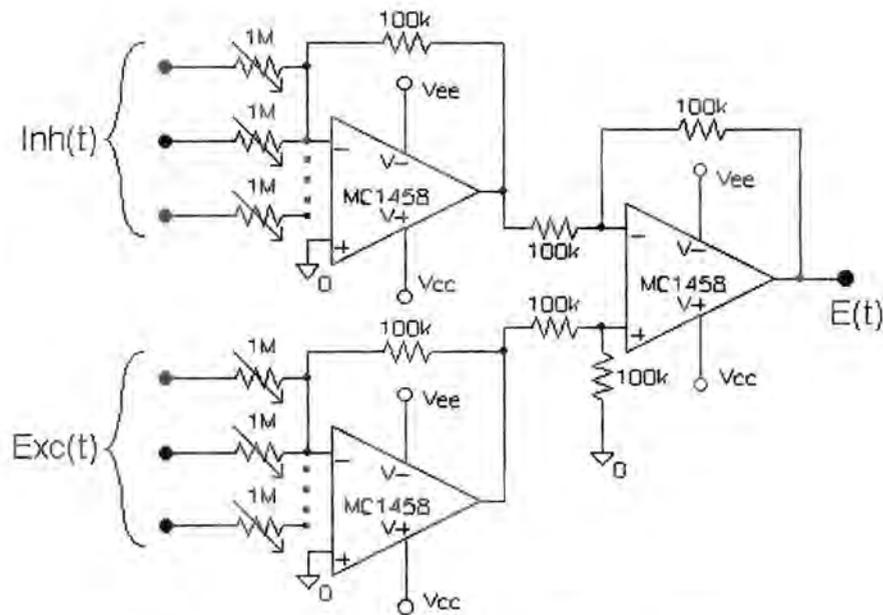


Figura 2.3. Diagrama esquemático del módulo Σ

En el diseño de este módulo se utilizaron amplificadores operacionales de propósito general como son los MC1458 los cuales, entre otras características, no requieren compensación en frecuencia, cuentan con protección a corto circuito, son de bajo consumo de potencia, tienen un amplio rango de voltaje en modo común y en modo diferencial y son de bajo costo. Por otra parte, se utilizaron resistencias de 100k con 5% de tolerancia con el fin de limitar la corriente en los amplificadores. Se eligieron a los potenciómetros de entrada de 1M, con el fin de poder variar los pesos de conexión a un valor mínimo de 0.1 unidades.

2.3 MÓDULO INTEGRADOR

El módulo integrador \int está basado en un circuito integrador de voltaje como el que se muestra en la figura 2.4 y cuyo funcionamiento se describe a continuación.

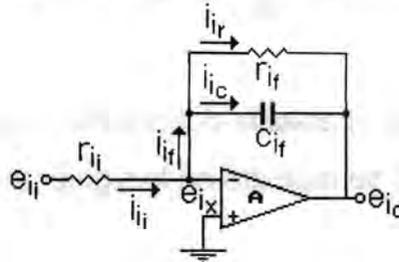


Figura 2.4 Integrador de voltaje.

Nótese que el punto e_{i_x} del circuito integrador corresponde a un punto de tierra virtual debido a que el AO presenta una ganancia muy grande y a que la entrada no inversora está conectada a tierra. De esta manera las corrientes i_{i_i} e i_{i_f} están dadas por:

$$i_{i_i} = \frac{e_{i_i}}{r_{i_i}}, \quad i_{i_f} = c_{i_f} \frac{de_{i_o}}{dt} + \frac{e_{i_o}}{r_{i_f}}.$$

Por otro lado, debido a que el AO presenta una alta impedancia de entrada, no existe flujo de corriente hacia el interior del AO y, en consecuencia, las corrientes i_{i_i} e i_{i_f} son iguales. Así, se tiene que:

$$i_{i_i} = \frac{e_{i_i}}{r_{i_i}} = c_{i_f} \frac{de_{i_o}}{dt} + \frac{e_{i_o}}{r_{i_f}} = i_{i_f}.$$

Despejando el término diferencial de la ecuación anterior se obtiene:

$$c_{i_f} \frac{de_{i_o}}{dt} = -\frac{e_{i_o}}{r_{i_f}} + \frac{e_{i_i}}{r_{i_i}}.$$

Finalmente, si las resistencias r_{i_i} y r_{i_f} se igualan, i.e. $r_{i_i} = r_{i_f} = r$, entonces la ecuación anterior se puede expresar en la forma:

$$rC_{if} \frac{de_{i_o}}{dt} = -e_{i_o} + e_{i_i}.$$

Con base en la forma de operación del circuito integrador de voltaje previamente descrito, el diseño del módulo \int se muestra en la siguiente figura:

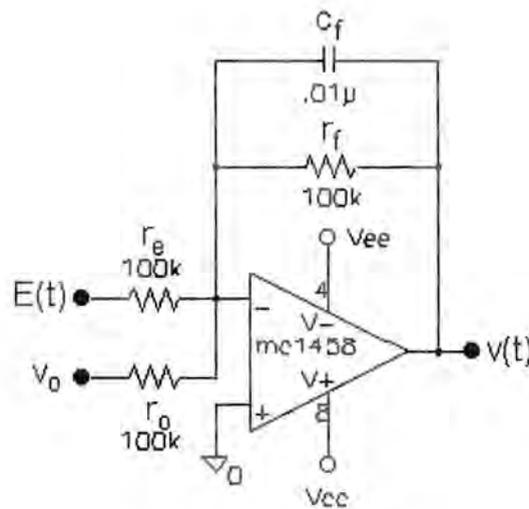


Figura 2.5. Diagrama esquemático del módulo \int .

En este caso, la respuesta del módulo es de la forma

$$r_f C_f \frac{dv(t)}{dt} = -v(t) + E(t) + v_o,$$

donde el voltaje $v(t)$ corresponde al potencial de la neurona electrónica, v_o representa su potencial de reposo m_0 y $r_f C_f$ es su constante característica, la cual puede ser cambiada al valor deseado con solo variar el valor del capacitor C_f . Nótese que la respuesta $E(t)$ del módulo Σ constituye un término de forzamiento del módulo \int .

2.4 MÓDULO GENERADOR DE RESPUESTA R

El circuito que genera la respuesta tipo escalón está formado por un circuito comparador de voltaje. Debemos hacer notar que el circuito comparador de voltaje es básicamente un amplificador operacional de propósito específico, ya que, a diferencia de los amplificadores operacionales convencionales, (los cuales operan, en configuraciones de lazo cerrado, como amplificadores lineales) están diseñados para operar normalmente en una configuración de lazo abierto como dispositivos de conmutación. Ahora bien, un amplificador operacional de propósito específico tiene como características principales: un tiempo de respuesta muy pequeño, (del orden de ns), una diferencia de voltaje entre sus entradas para producir una transición de un estado de saturación a otro muy pequeña, (generalmente en el intervalo de 0.1 a 3 mV), capacidad de operación con una sola fuente de polarización y, generalmente, su salida es en colector abierto, con lo cual el voltaje de saturación de la respuesta puede ser independiente del voltaje de alimentación del circuito mediante una resistencia de "Pull-up". El funcionamiento de este dispositivo es el siguiente: si la señal que se alimenta a través de su entrada no inversora, V_{in} , es mayor o igual a la señal de referencia que se alimenta a través de su entrada inversora, V_{ref} , el circuito responde con un voltaje constante igual al voltaje de saturación alto V_H . En caso contrario, esto es, si la señal de entrada, V_{in} , es menor a la señal de referencia, V_{ref} , el circuito responde con un voltaje constante igual al voltaje de saturación bajo V_L . Es decir, la respuesta del circuito comparador es de la forma siguiente:

$$V_{out} = \begin{cases} V_L & \text{si } V_{in} < V_{ref} \\ V_H & \text{si } V_{in} \geq V_{ref} \end{cases} \quad (2.5).$$

Ahora bien, con base en la forma de operación del circuito comparador de voltaje, se realizó el diseño del módulo de respuesta R, cuya configuración se muestra en la figura 2.6.

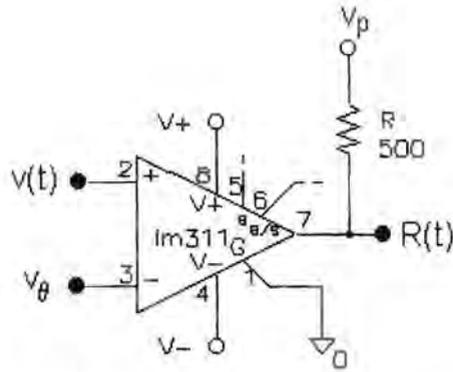


Figura 2.6. Diagrama esquemático del módulo R.

Al aplicar la expresión (2.5) al circuito de la figura 2.6 obtenemos:

$$R(t) = \begin{cases} V_p & \text{si } v(t) \geq v_\theta \\ 0 & \text{si } v(t) < v_\theta \end{cases}$$

El diagrama esquemático de la neurona electrónica completa es mostrada en la siguiente figura.

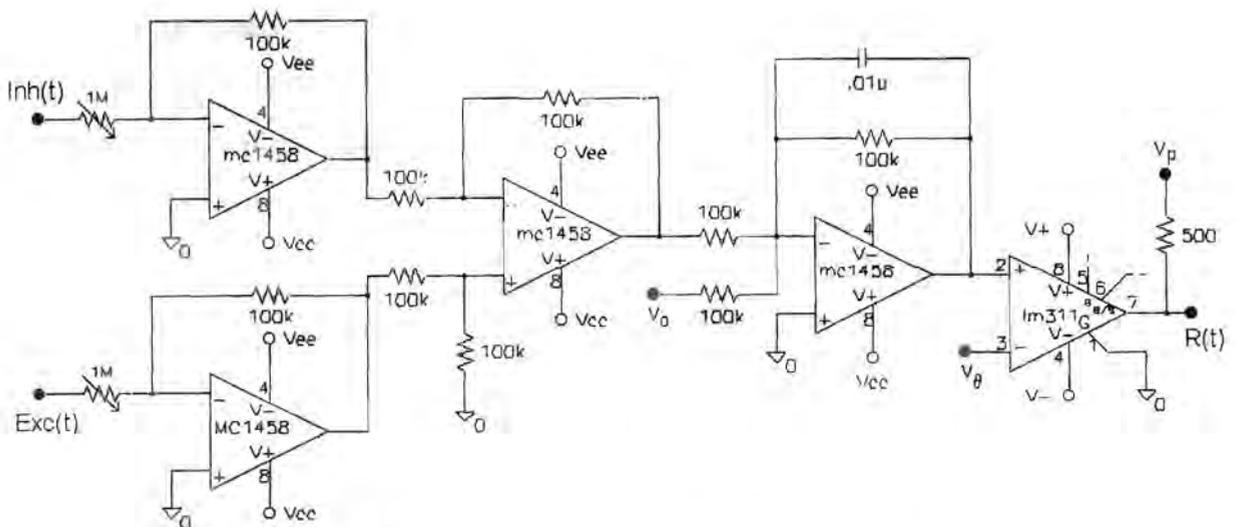


Figura 2.7. Diagrama esquemático completo de la neurona electrónica.

En la figura anterior se muestra solamente una línea de entrada excitadora y una inhibitoria para simplificar del diagrama. Sin embargo, debemos remarcar que nuestro diseño permite conectar cualquier número de líneas de entrada. Por otra parte, la relación entre los parámetros del modelo matemático con los parámetros del modelo electrónico es la siguiente:

Modelo Matemático	Modelo Electrónico
$m(t)$	$v(t)$
m_0	v_0
τ	$r_f C_f$
θ	v_θ
k	v_p
w_i	r_{sf}/r_{si}

El circuito de la figura 2.7 constituye el bloque básico necesario para construir circuitos neuronales grandes.

CAPÍTULO III

DINÁMICA DE UNA NEURONA ARTIFICIAL

INTRODUCCIÓN

En este capítulo mostraremos las relaciones entrada-salida de nuestro modelo matemático para los dos bloques básicos utilizados en la construcción de circuitos grandes, estos son, una neurona simple y una neurona con una autoconexión [8]. Para ello, iremos desarrollando el análisis matemático del modelo para, posteriormente, corroborar dichos resultados en nuestro modelo electrónico.

Para los bloques señalados anteriormente, la ecuación (1.1) puede ser resuelta exactamente si consideramos un pulso simple como señal de entrada a la neurona. En particular, hemos enfocado el análisis matemático para determinar la forma de la respuesta de la neurona y sus principales características.

El modelo de neurona artificial descrito en el capítulo 1 se puede entender, desde el punto de vista de la teoría de sistemas, como un **elemento procesador**

continuo con respuesta binaria formado por un **dispositivo lineal** seguido de un **dispositivo no lineal**. Para caracterizar el comportamiento de dicho dispositivo procesador, primero es necesario estudiar la forma en la que responde a diferentes clases de señales externas, para ello, el estímulo total que recibe el procesador neuronal $E(t)$ lo separaremos en dos términos, el primero incluye exclusivamente a la señal externa cuyo efecto queremos analizar y el segundo incluye al resto de las señales que son recibidas por el procesador neuronal, con lo cual, la ecuación diferencial (1.1) que describe la evolución de la actividad de la neurona se expresará de la forma siguiente:

$$\tau \frac{dm(t)}{dt} = -m(t) + m_0 + I_a(t) + I_j(t),$$

para todo $t \geq 0$, donde $I_a(t)$ es una señal externa cuyo efecto es el que se desea estudiar y donde $I_j(t)$ son otras señales externas que también afectan a la neurona, *e.g.*, autosinapsis o conexiones con otras neuronas. Inicialmente, se caracterizará la respuesta de la neurona artificial a señales cuadradas, considerando, tanto neuronas aisladas (*i.e.*, donde $I_j(t) = 0$), como neuronas que presentan una autosinapsis (*i.e.*, donde $I_j(t) = wR(t)$, donde w es el peso de la autosinapsis y $R(t)$ es la respuesta de la neurona) y comparando las respuestas de las dos clases de neuronas.

3.1 SEÑAL ESCALÓN

En esta sección se estudia el comportamiento de una neurona artificial, tanto aislada como con una autosinapsis, sometida a una señal escalón de la forma:

$$I_a(t) = \begin{cases} E & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases},$$

donde la constante $E > 0$ es la amplitud de la señal. De hecho, la señal escalón constituye una señal de magnitud constante a partir del instante de tiempo $t = 0$. En la figura 3.1 se ejemplifica a la señal escalón que se usará en esta sección.

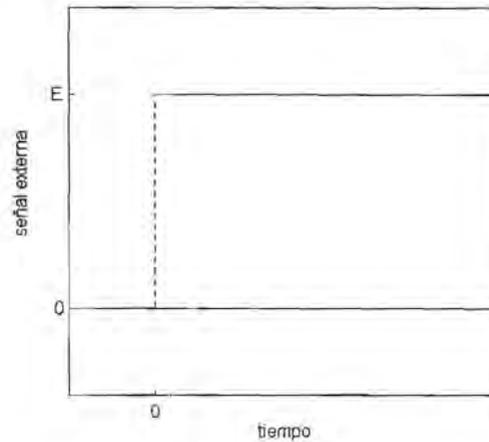


Figura 3.1. Señal Escalón.

3.1.1 Dinámica de la neurona aislada

La evolución de la actividad de la neurona es descrita por la ecuación diferencial siguiente:

$$\tau \frac{dm(t)}{dt} = -m(t) + m_0 + E \quad (3.1),$$

para todo $t \geq 0$. Esto es, la neurona está sometida a una señal constante de amplitud E .

Ahora bien, integrando la ecuación anterior se encuentra que la actividad de la neurona evoluciona de la forma siguiente:

$$m(t) = E + m_0 - Ee^{-t/\tau} \quad (3.2),$$

considerado la condición inicial $m(0) = m_0$. De la ecuación anterior se puede deducir que el término exponencial se hace cada vez más pequeño conforme t aumenta, *i.e.*, $e^{-t/\tau} \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$. Es decir, la actividad de la neurona presenta un **comportamiento transitorio** que decae hacia el valor constante $E + m_0$

independientemente del valor de la constante de tiempo τ , *i.e.*, $m(t) \rightarrow E + m_0$ cuando $t \rightarrow \infty$. En la figura 3.2 se ejemplifica el comportamiento recién descrito.

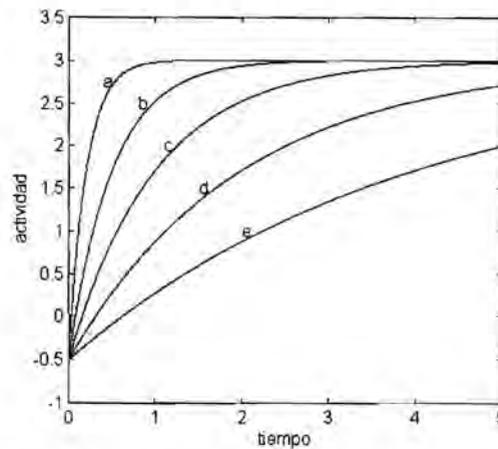


Figura 3.2. Evolución de la actividad de una neurona aislada para diferentes valores de τ . Los parámetros empleados en las simulaciones son $m_0 = -0.5$, $E = 3.5$ y $\tau =$ a) 0.2, b) 0.5, c) 1.0, d) 2.0 y e) 4.0. Para estos parámetros se tiene que la solución de equilibrio es $m_{eq} = 3.0$.

De la figura 3.2 y de la ecuación (3.2) se puede establecer que la ecuación diferencial (3.1) presenta una única **solución de equilibrio** m_{eq} (*i.e.*, una solución que satisface $dm_{eq}/dt = 0$ para todo $t \geq 0$), la cual está dada por $m_{eq} = E + m_0$. Ahora bien, si se considera que la condición inicial es $m(t') = m_{eq} + \delta$, donde $t' > 0$ y $|\delta| \neq 0$, entonces es fácil mostrar que $m(t) \rightarrow m_{eq}$ para $t \gg t'$. Es decir, la solución de equilibrio m_{eq} es **asintóticamente estable**.

3.1.1.a Respuesta de la neurona

La neurona presenta una respuesta no nula si, y sólo si, ocurre que $m(t) \geq \theta$ para algún valor de $t > 0$. Así, asumamos que existe un instante de tiempo $t = t_\theta$, denominado tiempo de disparo de la neurona, en el que ocurre precisamente que $m(t_\theta) = \theta$. De la ecuación (3.2) se puede establecer que:

$$t_{\theta} = \tau \ln \left[\frac{E}{E - (\theta - m_0)} \right],$$

donde $E - (\theta - m_0) > 0$. Así, la respuesta de la neurona es de la forma:

$$R(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < t_{\theta} \\ k & \text{si } t \geq t_{\theta} \end{cases} \quad (3.3),$$

para $E \geq \theta - m_0$. En la figura 3.3 se ejemplifica la forma de la respuesta de la neurona.

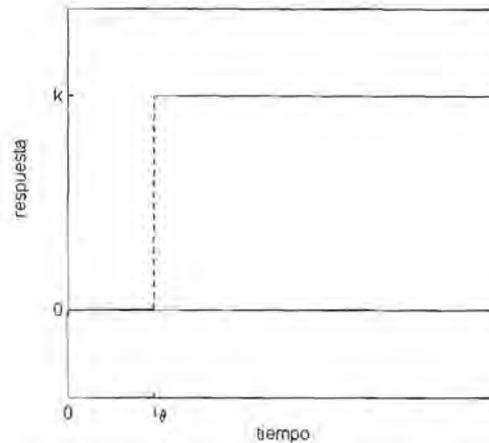


Figura 3.3. Respuesta de una neurona aislada a una señal escalón.

Esto es, la neurona responde con una señal escalón de amplitud k , desfasada t_{θ} unidades de tiempo respecto a la señal escalón.

3.1.2 Dinámica de la neurona con una autosinapsis

En una neurona que presenta una autosinapsis es necesario considerar que la señal externa total a la que está sometida la neurona es de la forma:

$$I_{\tau}(t) = \begin{cases} E \cdot u_{-1}(t) & \text{si } m(t) < \theta \\ E \cdot u_{-1}(t) + wR(t) & \text{si } m(t) \geq \theta \end{cases}$$

donde

$$u_{-1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Es decir, la señal externa total a la neurona depende de su nivel de actividad. De esta manera, la actividad de la neurona evoluciona ahora de la forma siguiente:

$$\tau \frac{dm(t)}{dt} = -m(t) + m_0 + \begin{cases} E & \text{si } m(t) < \theta \\ E + wR(t) & \text{si } m(t) \geq \theta \end{cases}$$

para todo $t \geq 0$. La ecuación diferencial anterior puede ser integrada de manera exacta procediendo como se describe a continuación.

Considérese que la condición inicial es $m(0) = m_0$. Así, se cumple que $m(0) < \theta$ y, por lo tanto, la actividad de la neurona evoluciona inicialmente de la forma:

$$m(t) = E + m_0 - Ee^{-t/\tau} \quad (3.4a),$$

para todo $t \geq 0$, ya que $I_T(t) = I_a(t) = E \cdot u_{-1}(t)$. Ahora bien, si en el instante de tiempo $t = t_1$ ocurre que $m(t_1) = \theta$, entonces para $t \geq t_1$ se tiene que la señal externa cambia a $I_T(t) = E \cdot u_{-1}(t) + wR(t)$. En la sección 3.1.1.a, se mostró que la respuesta de la neurona a una señal escalón es de la forma $R(t) = k \cdot u_{-1}(t - t_1)$, por lo que la actividad de la neurona evoluciona ahora de la forma:

$$m(t) = E + kw + m_0 + (\theta - m_0 - E - kw)e^{-(t-t_1)/\tau} \quad (3.4b),$$

donde $m(t) \geq \theta$ para todo $t \geq t_1$. En la ecuación (3.4b) se puede observar que el término exponencial decae para $t \gg t_1$, por lo que se tiene que $m(t) \rightarrow E + kw + m_0$. Es decir, si la actividad de la neurona supera su valor umbral, entonces la actividad tenderá, eventualmente, al valor de equilibrio $m_{eq} = E + kw + m_0$. En este caso también se encuentra que la solución de equilibrio m_{eq} es estable de manera asintótica. En la figura 3.4 se ejemplifica el comportamiento recién descrito.

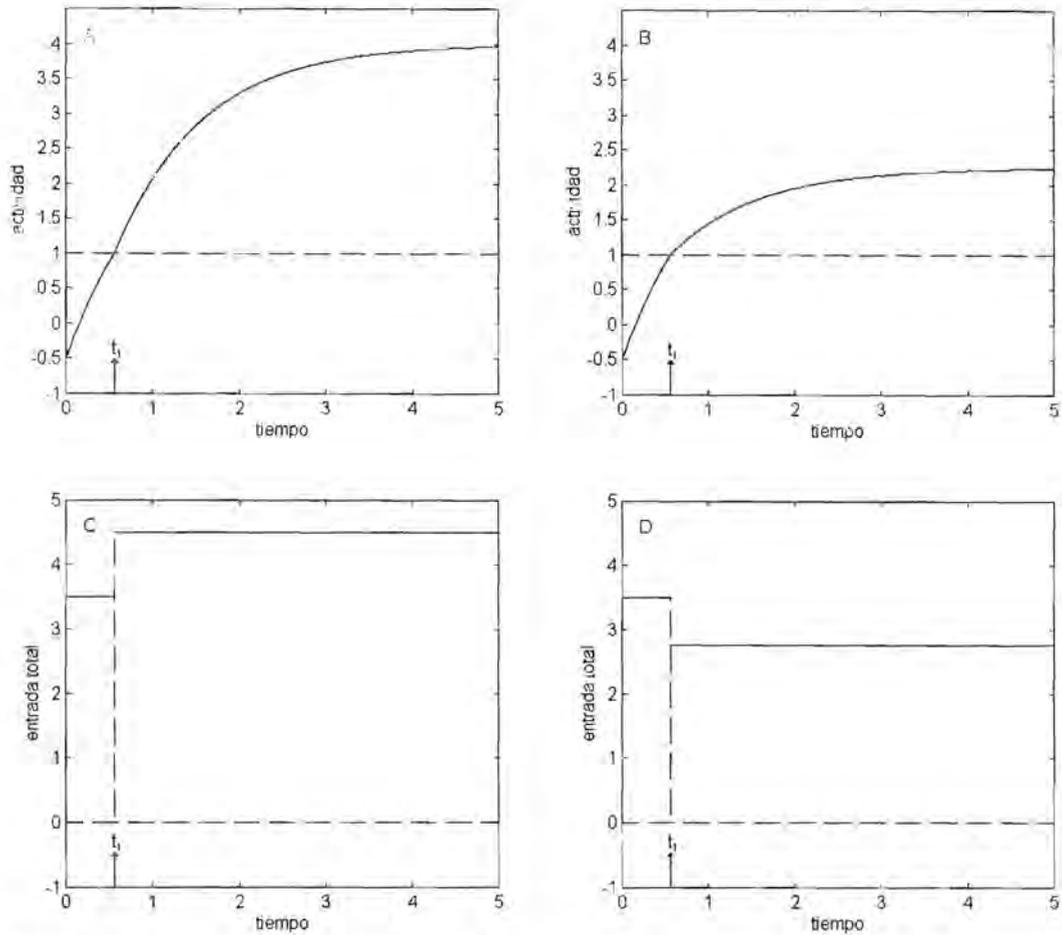


Figura 3.4. Actividad de una neurona con una autosinapsis como respuesta a una señal escalón. En las figuras A y B se muestra la evolución de la actividad de una neurona con una autosinapsis positiva y una con una negativa respectivamente. En las figuras C y D se muestran las entradas totales que afectan a las neuronas. Los parámetros usados en las simulaciones son $m_0 = -0.5$, $\tau = 1$, $\theta = 1$, $k = 1$, $E = 3.5$ y $w =$ A) 1, B) -0.75 . Bajo estas condiciones se tiene que $t_1 = 0.5596$ y $m_{eq} =$ A) 4 y B) 2.25. La línea discontinua señala el valor umbral de las neuronas.

En la figura 3.4 se puede observar que en t_1 se presenta un cambio abrupto en la razón de cambio de la actividad de la neurona. De la ecuación (3.4a) se encuentra que la razón de cambio instantánea para $m(t) \leq \theta$ es:

$$\left. \frac{dm(t)}{dt} \right|_{t=t_1} = \frac{E}{\tau} e^{-t_1/\tau} = \frac{E - (\theta - m_0)}{\tau}$$

mientras que de la ecuación (3.4b) se tiene que:

$$\left. \frac{dm(t)}{dt} \right|_{t=t_1} = \frac{E - (\theta - m_0) + k w}{\tau}$$

para $m(t) \geq \theta$. Es decir, el cambio abrupto que se observa en t_1 se debe a que la autosinapsis se activa precisamente en ese instante de tiempo. Ahora bien, para una autosinapsis positiva (*i.e.*, si $w > 0$), la rapidez de cambio aumenta en t_1 , mientras que ésta disminuye para una autosinapsis negativa, *i.e.*, si $w < 0$.

3.1.2.a Respuesta de la neurona

La condición $m(t) \geq \theta$ se satisface si ocurre que $m_{eq} \geq \theta$. De aquí se tiene que la amplitud de la señal escalón satisface, a su vez, la restricción siguiente:

$$E \geq \theta - m_0 - k w \quad (3.5).$$

Adicionalmente, de la ecuación (3.4a) se puede establecer que:

$$t_1 = \tau \ln \left[\frac{E}{E - (\theta - m_0)} \right],$$

donde se tiene que $E > \theta - m_0$. Nótese que, de hecho, t_1 es el tiempo de disparo de la neurona y que éste no depende del valor del peso w .

Así, si la neurona presenta una autosinapsis positiva, entonces al satisfacer la restricción (3.5) se garantiza que $E > \theta - m_0$, ya que $w > 0$. De esta manera, la respuesta de una neurona con una autosinapsis positiva es de la forma:

$$R(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < t_1 \\ k & \text{si } t \geq t_1 \end{cases} \quad (3.6a),$$

si $E \geq \theta - m_0$. Esto es, la respuesta de la neurona es una señal escalón de amplitud k , desfasada t_1 unidades de tiempo respecto a la señal externa $I(t)$. Si la neurona presenta una autosinapsis negativa, entonces se tiene que $w < 0$ y, en consecuencia, la respuesta de la neurona es ahora de la forma:

$$R(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < t_1 \\ k & \text{si } t \geq t_1 \end{cases} \quad (3.6b),$$

si $E \geq \theta - m_0 - kw$, con $w < 0$. De esta manera, la respuesta de la neurona con una autosinapsis negativa también es una señal escalón de amplitud k y desfasada t_1 unidades de tiempo respecto a la señal externa $I(t)$. En la figura 3.5 se ejemplifica la forma de la respuesta de una neurona con una autosinapsis a una señal escalón.

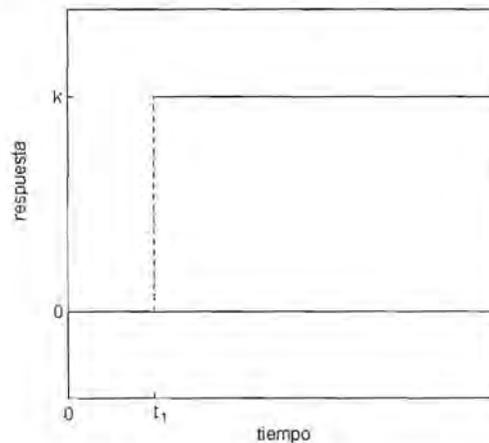


Figura 3.5. Respuesta de una neurona con una autosinapsis a una señal escalón.

Al comparar las ecuaciones (3.3) y (3.6a) y las figuras 3.3 y 3.5 se puede afirmar que *la respuesta de una neurona con una autosinapsis positiva es indistinguible, cualitativa y cuantitativamente, de la que presenta una neurona aislada*. Sin embargo, al comparar las ecuaciones (3.6a) y (3.6b) se puede afirmar que *la respuesta de la*

neurona con una autosinapsis negativa, se genera con una señal externa de amplitud mayor a la que se necesita para una neurona con una autosinapsis positiva.

3.1.3 Comportamiento de la neurona

En la figura 3.6 se ejemplifica la relación que existe entre una señal externa escalón y la respuesta de una neurona, tanto aislada, como con una autosinapsis.

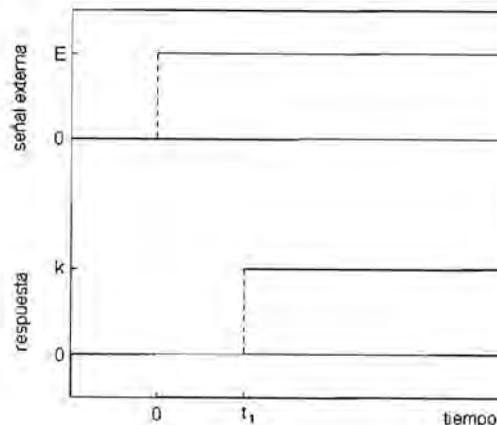


Figura 3.6. Relación entre la señal de entrada y la respuesta de una neurona.

En este caso, la relación respuesta - entrada $R(t)/I(t)$ para la neurona artificial es de la forma:

$$\frac{R(t)}{I(t)} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < t_1 \\ k/E & \text{si } t \geq t_1 \end{cases},$$

siempre y cuando, la amplitud de la señal escalón satisfaga la desigualdad $E > \theta - m_0$, o la desigualdad $E > \theta - m_0 - kw$, si la neurona presenta una autosinapsis negativa. Así, una neurona artificial, tanto aislada como con una autosinapsis, se comporta como un filtro elemental, ya que la neurona responde sólo para señales externas tipo escalón que presentan una amplitud adecuada. Si esto último no ocurre, entonces la neurona

3.2.1 Dinámica de la neurona aislada

En este caso, la evolución de la actividad de la neurona aislada es descrita por la ecuación diferencial siguiente:

$$\tau \frac{dm(t)}{dt} = -m(t) + m_0 + \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq t_i \\ E & \text{si } t_i \leq t \leq t_f \\ 0 & \text{si } t \geq t_f \end{cases}$$

Ahora bien, si se considera la condición inicial $m(0) = m_0$, entonces la actividad de la neurona evoluciona de la forma siguiente:

$$m(t) = \begin{cases} m_0 & \text{si } t \leq t_i \\ E + m_0 - Ee^{(-t+t_i)/\tau} & \text{si } t_i \leq t \leq t_f \\ m_0 + E(1 - e^{(-t_f+t_i)/\tau})e^{(-t+t_i)/\tau} & \text{si } t \geq t_f \end{cases} \quad (3.7).$$

Es decir, la actividad de la neurona presenta tres diferentes etapas de evolución como respuesta a la señal cuadrada. En la primera etapa, *i.e.*, para $t \leq t_i$, la actividad de la neurona no presenta cambio alguno debido a que la señal externa es nula. Sin embargo, en la segunda etapa la actividad de la neurona aumenta exponencialmente desde su valor de reposo m_0 hasta alcanzar el valor máximo:

$$m_{\max} = m(t_f) = E + m_0 - Ee^{(-t_f+t_i)/\tau} = E + m_0 - Ee^{-\Delta/\tau}$$

en el instante de tiempo $t = t_f$. Por último, para $t \geq t_f$ la actividad de la neurona decae exponencialmente hacia su valor de reposo m_0 .

Los cambios transitorios que sufre la actividad de la neurona son muy sensibles al valor de su constante característica τ . De la ecuación anterior se puede establecer que $m_{\max} \rightarrow m_0$ si $\tau \rightarrow \infty$, mientras que $m_{\max} \rightarrow E + m_0$ si $\tau \rightarrow 0$. En otras palabras, la neurona presenta un cambio de actividad pequeño si su constante característica es

alta, mientras que el cambio es mayor mientras más pequeña sea su constante característica. En la figura 3.8 se ejemplifica este comportamiento.

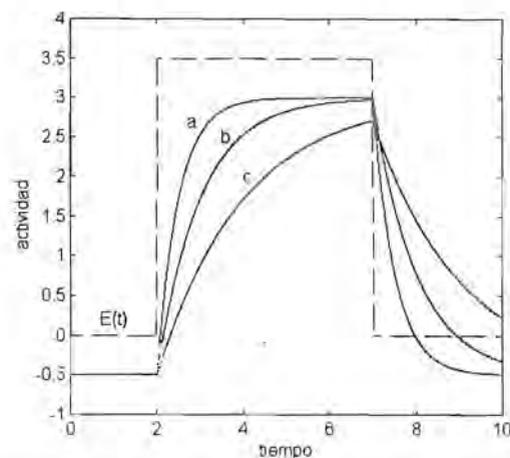


Figura 3.8. Evolución de la actividad de una neurona aislada para diferentes valores de τ . Los parámetros empleados son $E = 3.5$, $\Delta = 5$, $m_0 = -0.5$, y $\tau = a) 0.5$, $b) 1.0$, $c) 2.0$.

En la figura 3.8 se puede observar que, a diferencia de lo que ocurre con una señal escalón, la actividad de la neurona no alcanza un valor de equilibrio diferente del valor de reposo m_0 como respuesta a un pulso cuadrado. De la ecuación (3.7) se puede establecer que la rapidez de cambio de la actividad durante la **etapa de crecimiento** está dada por:

$$\frac{dm(t)}{dt} = \frac{E}{\tau} e^{-(t-t_i)/\tau}$$

Ahora bien, como $E > 0$, se tiene que $dm/dt > 0$ en $t_i \leq t \leq t_f$. Sin embargo, la rapidez de cambio de la actividad durante la **etapa de decaimiento** está dada por:

$$\frac{dm(t)}{dt} = -\frac{E}{\tau} (e^{t_i/\tau} - e^{t_f/\tau}) e^{-t/\tau}$$

la cual es negativa ya que $E > 0$ y $t_f > t_i$. Lo anterior significa que la actividad de la neurona presenta un cambio transitorio respecto a su valor de reposo como respuesta a la señal cuadrada.

3.2.1.a Respuesta de la neurona

La neurona aislada presenta una respuesta no nula a una señal cuadrada si su nivel de actividad supera su umbral característico. Esto último se puede garantizar si ocurre que $m_{\max} \geq \theta$, es decir, si ocurre que:

$$E + m_0 - Ee^{-\Delta/\tau} \geq \theta$$

Nótese que la desigualdad anterior limita los valores de los parámetros característicos de la señal externa, *i.e.*, E y Δ , en términos de los parámetros m_0 , τ y θ de la neurona. Ahora bien, si se satisface la restricción anterior, entonces deben presentarse dos instantes de tiempo t_1 y t_2 , con $t_i < t_1 < t_f$ y $t_2 > t_f$, en los que ocurre que $m(t_1) = m(t_2) = \theta$. De la ecuación (3.7) se puede establecer que:

$$t_1 = t_i + \tau \ln \left[\frac{E}{E - (\theta - m_0)} \right] \quad (3.8a)$$

y

$$t_2 = t_f + \tau \ln \left[\frac{E(1 - e^{-\Delta/\tau})}{\theta - m_0} \right] \quad (3.8b).$$

A partir de las ecuaciones anteriores se puede mostrar que $t_i < t_1 < t_f$ y que $t_2 > t_f$ si, y sólo si, $E + m_0 - Ee^{-\Delta/\tau} \geq \theta$.

De esta manera, si los parámetros del pulso cuadrado son los adecuados, entonces la neurona aislada responde también con un pulso cuadrado de la forma:

$$R(t) = k \cdot (u_{-1}(t - t_1) - u_{-1}(t - t_2)) \quad (3.8c).$$

En la figura 3.9 se ejemplifica la forma que toma el pulso de respuesta de la neurona aislada.

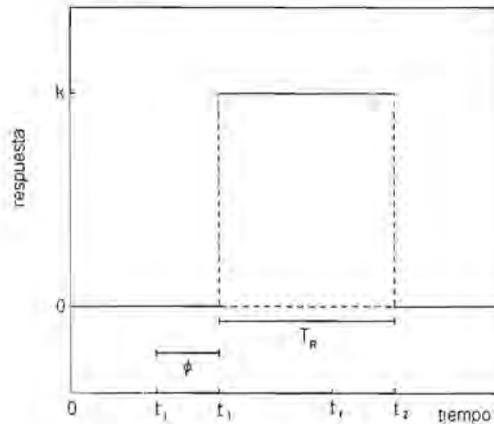


Figura 3.9. Pulso de respuesta de la neurona aislada a un pulso de entrada.

Una vez más, la respuesta de la neurona se presenta ϕ unidades de tiempo desfasada respecto a la señal de entrada, donde se tiene que:

$$\phi = t_1' - t_1 = \tau \ln \left[\frac{E}{E - (\theta - m_0)} \right]$$

De hecho, ϕ corresponde al tiempo de disparo de la neurona. Adicionalmente, la respuesta de la neurona presenta un ancho (o tiempo de respuesta) T_R dado por:

$$T_R = t_2' - t_1' = \Delta + \tau \ln \left[(1 - e^{-\Delta/\tau}) \frac{E - (\theta - m_0)}{\theta - m_0} \right].$$

Nótese que $T_R \geq \Delta$ si el término logarítmico de la ecuación anterior es positivo. Esto último ocurre si

$$E \geq (\theta - m_0) \frac{2 - e^{-\Delta/\tau}}{1 - e^{-\Delta/\tau}}$$

Las dos características principales de la respuesta de la neurona son el ancho T_R y diferencia de fase ϕ con la señal entrada. Ahora, es fácil de deducir de la ecuación

(3.8a) que ϕ depende de los valores de E y θ , mientras que T_R también depende de estos mismos parámetros así como de los valores de τ y Δ . Sin embargo, no es fácil deducir la forma en que cambia T_R con respecto al cambio de uno o más parámetros debido a que las relaciones entre ellos involucran términos logarítmicos que no son fáciles de simplificar. Así, realizamos una serie de simulaciones numéricas de T_R como una función de los diferentes parámetros con el fin de entender las relaciones entre ellos. En la figura 3.10 se muestran algunas de estas simulaciones.

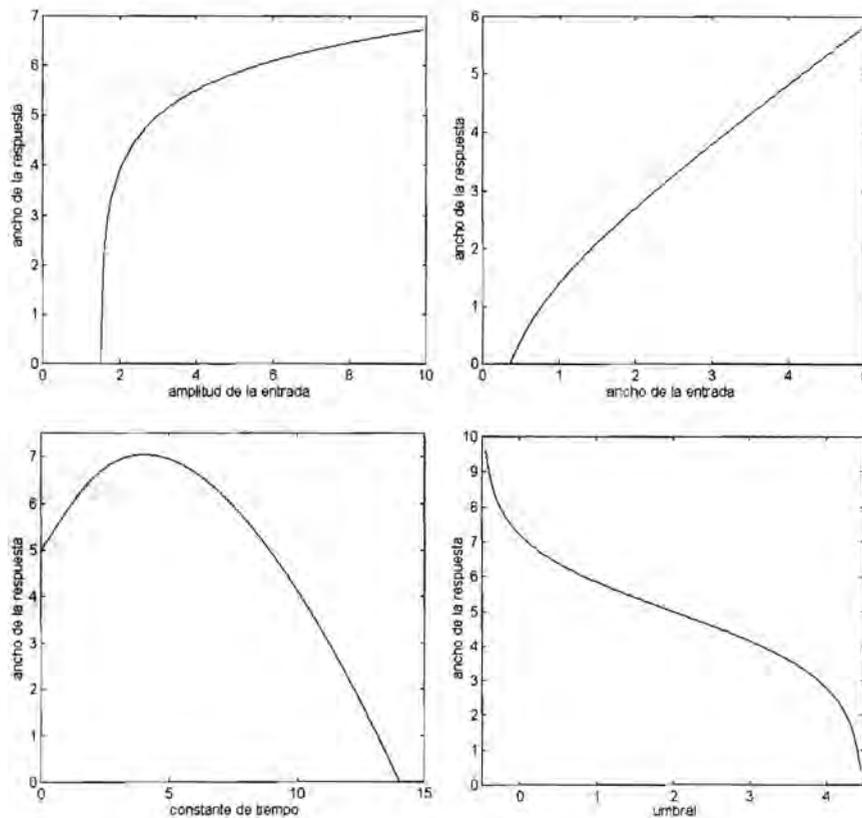


Figura 3.10. Dependencia del ancho T_R de la señal de salida con respecto a sus diferentes parámetros. Los parámetros usados en las diferentes simulaciones son $m_0 = -0.5$, $\tau = 1$, $\theta = 1$, $k = 5$, $E = 5$, y $\Delta = 5$.

En esta figura se puede ver que cada parámetro tiene un valor crítico para el cual la respuesta de la neurona es nula. Todos estos valores críticos pueden ser deducidos de las ecuaciones (3.8a), (3.8b) y (3.8c). En particular, uno de los resultados más interesantes que hemos encontrado es que la neurona artificial puede amplificar el ancho del pulso de entrada sin alterar su forma.

3.2.2 Dinámica de la neurona con una autosinapsis

De manera similar a como ocurrió en la sección 3.1.2, en este caso también es necesario considerar que la señal externa total que recibe la neurona depende de su actividad. En este caso, en particular, la señal externa total es de la forma:

$$I_{\tau}(t) = \begin{cases} E \cdot (u_{-1}(t - t_i) - u_{-1}(t - t_r)) & \text{si } m(t) < \theta \\ E \cdot (u_{-1}(t - t_i) - u_{-1}(t - t_r)) + wR(t) & \text{si } m(t) \geq \theta \end{cases}$$

donde $w \neq 0$. Ahora bien, para analizar el comportamiento de la neurona, asumamos que inicialmente se tiene que $m(0) = m_0 < \theta$. Así, la actividad de la neurona evoluciona de la forma siguiente:

$$m(t) = \begin{cases} m_0 & \text{si } 0 \leq t < t_i \\ E + m_0 - Ee^{-(t-t_i)/\tau} & \text{si } t_i \leq t < t_r \end{cases}$$

ya que inicialmente la señal externa es nula y, posteriormente, aparece el pulso cuadrado. Asumamos ahora que existe un instante de tiempo $t = t_1$, con $t_i < t_1 < t_r$, en el que ocurre que $m(t_1) = \theta$. De la ecuación anterior se puede establecer que:

$$t_1 = t_i + \tau \ln \left[\frac{E}{E - (\theta - m_0)} \right] \quad (3.9a).$$

Ahora bien, en el intervalo $t_1 \leq t < t_r$ se presentan tanto el pulso cuadrado como la autosinapsis, por lo que la actividad de la neurona evoluciona ahora de la forma:

$$m(t) = E + kw + m_0 + (\theta - m_0 - E - kw)e^{-(t-t_1)/\tau},$$

ya que, como se mostró en la sección 3.2.1.a, la respuesta de la neurona es también un pulso cuadrado de la forma $R(t) = k \cdot (u_{-1}(t - t_1) - u_{-1}(t - t_2))$. De la ecuación anterior se

puede establecer que el valor máximo que alcanza el nivel de actividad ocurre en $t = t_f$ y corresponde al valor:

$$m_{\max} = m(t_f) = m_0 + E(1 - e^{-\Delta/\tau}) + kw \left[1 - \frac{E}{E - (\theta - m_0)} e^{-\Delta/\tau} \right] \quad (3.9b).$$

Nótese que el primer sumando de la ecuación anterior corresponde al valor máximo que alcanza la actividad de una neurona aislada. Así, el segundo sumando corresponde a la contribución de la autosinapsis. Adicionalmente, en el instante de tiempo $t = t_f$ también desaparece el pulso cuadrado externo, por lo que la actividad de la neurona evoluciona ahora de la forma:

$$m(t) = kw + m_0 + (m_{\max} - m_0 - kw)e^{-(t-t_f)/\tau},$$

ya que la neurona es estimulada únicamente por la actividad residual de la autosinapsis. Como ya no existe un estímulo externo puede ocurrir que $m(t_2) = \theta$ para algún instante de tiempo $t_2 > t_f$. Así, de la ecuación anterior se puede establecer que:

$$t_2 = t_f + \tau \ln \left[\frac{m_{\max} - m_0 - kw}{\theta - m_0 - kw} \right] \quad (3.9c).$$

Finalmente, para $t \geq t_2$ tanto la señal externa como la autosinapsis han desaparecido, por lo que el nivel de actividad evoluciona de la forma:

$$m(t) = m_0 + (\theta - m_0)e^{-(t-t_2)/\tau}.$$

Es decir, la actividad de la neurona decae exponencialmente hacia el valor de reposo m_0 , siempre y cuando no se presente una nueva perturbación. En la figura 3.11 se ejemplifican y comparan los comportamientos de dos neuronas con los mismos

parámetros característicos, una con una autosinapsis positiva, la otra con una negativa, estimuladas con la misma señal cuadrada.

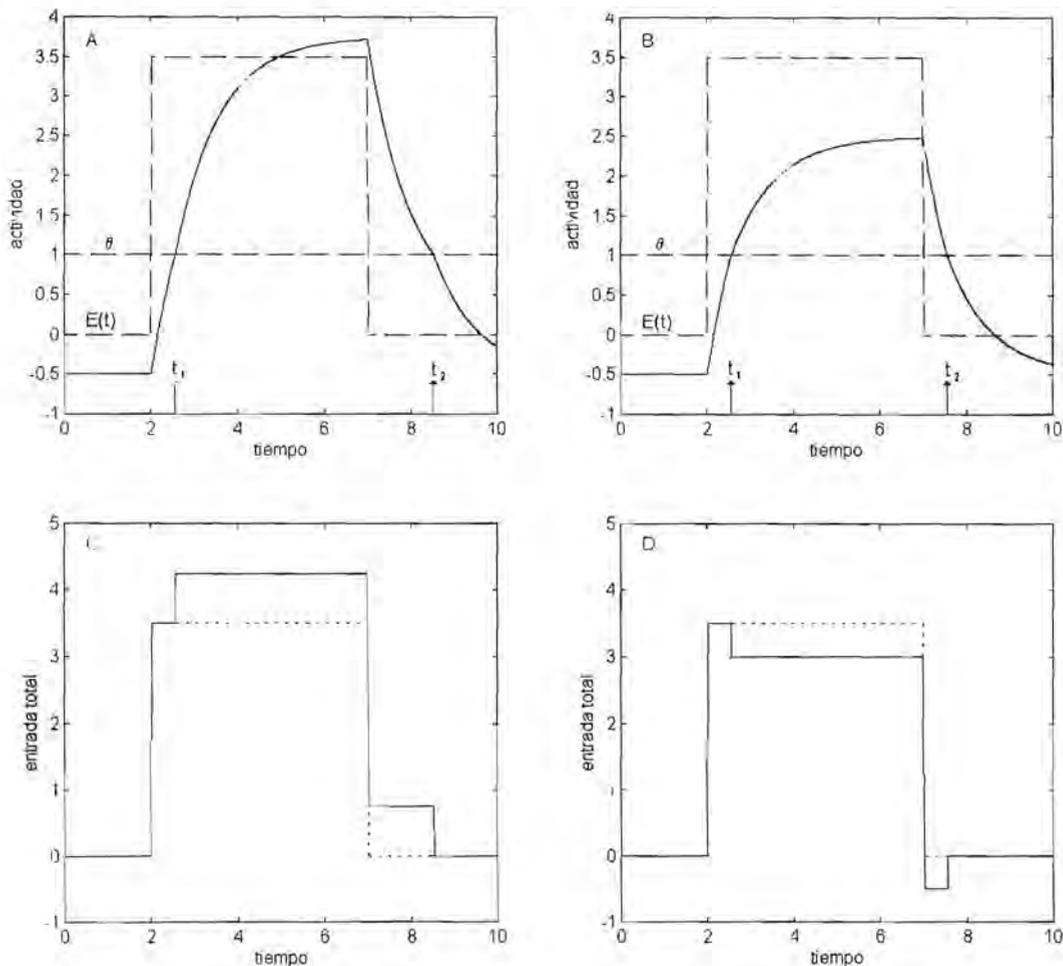


Figura 3.11. Evolución de la actividad de una neurona con autosinapsis como respuesta a un pulso cuadrado. En las figuras A y B se ejemplifica la evolución de la actividad de una neurona con una autosinapsis positiva y negativa, respectivamente, como respuesta a un pulso cuadrado. En las figuras C y D se muestran las entradas totales $I_T(t)$ que afectan a las neuronas. Los parámetros empleados en las simulaciones son $m_0 = -0.5$, $\tau = 1$, $\theta = 1$, $k = 1$, $E = 3.5$, $\Delta = 5$. En el caso A) se tiene $w = 0.75$, $t_1 = 2.5596$, $t_2 = 8.5311$ y $m_{\max} = 3.7176$, mientras que en B) se tiene $w = -0.5$, $t_1 = 2.5596$, $t_2 = 7.5543$ y $m_{\max} = 2.4823$.

En la figura 3.11 se puede verificar que la presencia de una autosinapsis en la neurona cambia la amplitud de la señal externa total que recibe. Este efecto provoca que el valor máximo que alcanza la actividad de la neurona sea mayor para aquella neurona con una autosinapsis positiva que el que se alcanza con una negativa.

3.2.2.a Respuesta de la neurona

Se puede garantizar que la neurona presenta una respuesta no nula si se satisfacen las restricciones siguientes:

- 1) $t_i < t_1 < t_f$,
- 2) $m_{\max} > \theta$,
- 3) $t_2 > t_f$.

Por lo que concierne a la primera restricción, de la expresión para t_1 se puede establecer que $t_1 > t_i$ si se cumple que:

$$\frac{E}{E - (\theta - m_0)} > 1.$$

Ahora bien, como $E > 0$, se tiene que $E - (\theta - m_0) > 0$. Además, como $\theta > m_0$, entonces la desigualdad anterior se satisface para todo $E > \theta - m_0$. De la misma expresión para t_1 se puede establecer que $t_1 < t_f$, si se cumple que:

$$E(1 - e^{-\Delta/\tau}) + m_0 > \theta,$$

Por lo que concierne a la segunda restricción, de la expresión para m_{\max} se puede establecer que es necesario resolver la desigualdad siguiente:

$$m_0 + E(1 - e^{-\Delta/\tau}) + kw \left[1 - \frac{E}{E - (\theta - m_0)} e^{-\Delta/\tau} \right] > \theta.$$

Ahora bien, en el análisis de la desigualdad anterior es necesario considerar los dos casos siguientes.

- a) Si $kw > 0$. En este caso, la desigualdad se reduce a $0 < kw < \theta - m_0$.
- b) Si $kw < 0$. En este caso, la desigualdad se reduce a $-[E - (\theta - m_0)] < kw < 0$.

Finalmente, la restricción $t_2 > t_f$ se satisface si, de la expresión para t_2 , se establece que

$$\frac{m_{\max} - m_0 - kw}{\theta - m_0 - kw} > 1.$$

Es fácil mostrar que esta última desigualdad se satisface si se satisface, a su vez, la restricción para m_{\max} .

Así, las restricciones para t_1 , m_{\max} y t_2 se satisfacen en los dos casos siguientes:

$$\begin{cases} E(1 - e^{-\Delta/\tau}) > \theta - m_0 \\ 0 < kw < \theta - m_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E(1 - e^{-\Delta/\tau}) > \theta - m_0 \\ -[E - (\theta - m_0)] < kw < 0 \end{cases}$$

De esta manera, al satisfacer alguno de los conjuntos de restricciones anteriores se tiene que la neurona responde con un pulso cuadrado de la forma

$$R(t) = k \cdot (u_{-1}(t - t_1) - u_{-1}(t - t_2)) \quad (3.9d).$$

Al igual que en el caso de la neurona aislada, el pulso de respuesta de la neurona con una autosinapsis se presenta desfasado ϕ unidades de tiempo respecto a la señal de entrada, donde:

$$\phi = t_1 - t_i = \tau \ln \left[\frac{E}{E - (\theta - m_0)} \right].$$

Adicionalmente, el pulso de respuesta presenta un ancho T_R dado por:

$$T_R = t_2 - t_1 = \Delta + \tau \ln \left[\frac{[E + kw - (\theta - m_0)](1 - e^{-\Delta/\tau}) - kw}{\theta - m_0 - kw} \right].$$

Una vez más, puede ocurrir que $T_R \geq \Delta$ si ocurre, a su vez, que:

$$E \geq (\theta - m_0) \frac{2 - e^{-\Delta/\tau}}{1 - e^{-\Delta/\tau}} - kw.$$

En la figura 3.12 se ejemplifica la forma de la respuesta de una neurona con una autosinapsis.

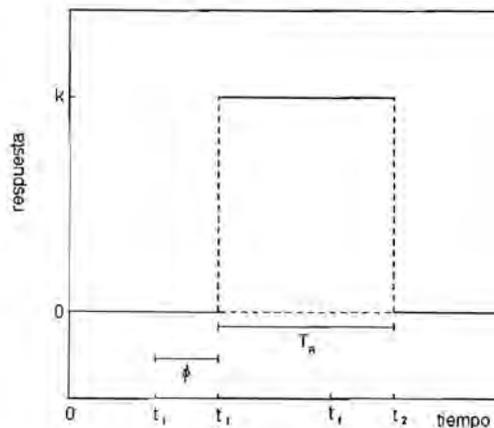


Figura 3.12. Respuesta de una neurona con una autosinapsis a un pulso cuadrado.

De esta manera, se puede establecer que la forma general del pulso de respuesta es la misma tanto para la neurona con una autosinapsis positiva como para aquella con una negativa. Sin embargo, el ancho T_R del pulso siempre es mayor para una neurona con una autosinapsis positiva que el que se obtiene con una negativa para un mismo pulso de entrada. Estos resultados se ilustran en la figura 3.13.

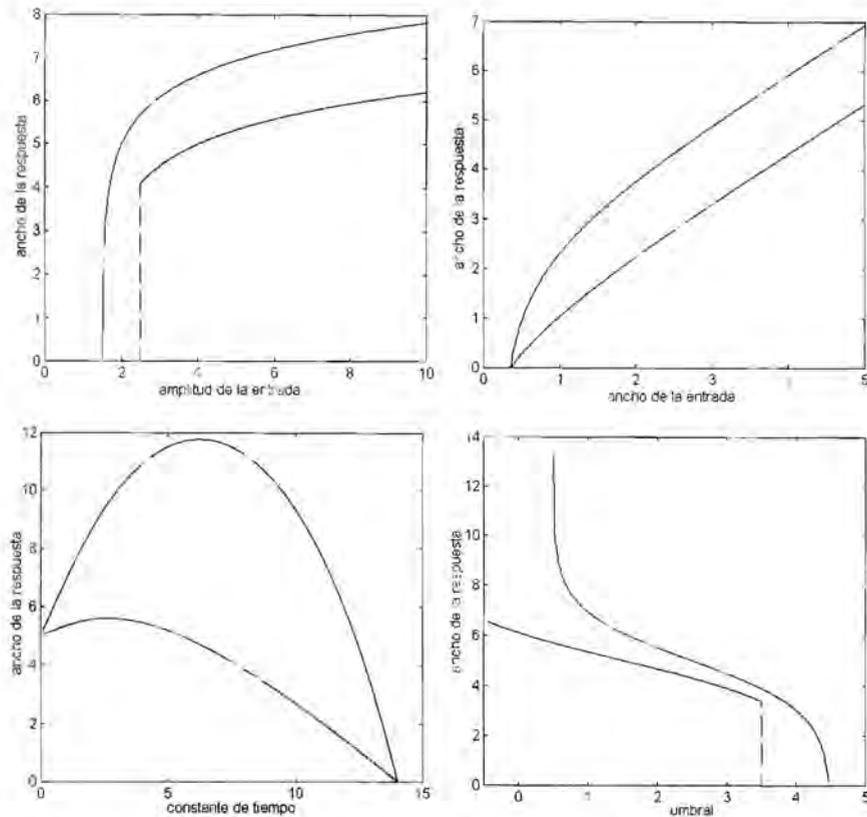


Figura 3.13. Dependencia del ancho de la señal de salida T_R con respecto a los diferentes parámetros de la neurona. Las curvas superiores siempre corresponden a la autoconexión positiva. Los parámetros usados en las diferentes simulaciones son $m_0 = -0.5$, $\iota = 1$, $\theta = 1$, $k = 5$, $E = 5$ y $\Delta = 5$. Para la autoconexión positiva tenemos que $w = 0.2$ y para la negativa tenemos que $w = -0.2$. Las unidades son adimensionales.

Comparando la figura anterior con la figura 3.10, podemos observar otra vez que hay un valor crítico para cada parámetro y para cada tipo de neurona para que la respuesta sea nula. Sin embargo, también podemos observar que en este caso existen dos situaciones donde la respuesta de la neurona con autoconexión negativa desaparece para un valor no crítico del parámetro. Este resultado puede ser explicado ya que en las ecuaciones (3.9a) a (3.9c) el peso de conexión debe ser restringido al intervalo

$$w_{\min} = -\frac{E - (\theta - m_0)}{k} < w < w_{\max} = \frac{\theta - m_0}{k}$$

con el fin de tener expresiones significativas. En otras palabras, nuestra neurona artificial está restringida en la magnitud con respecto al peso de autoconexión como se ilustra en la siguiente figura.

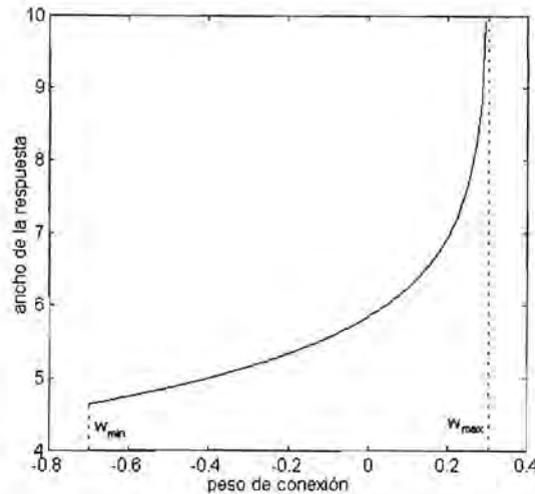


Figura 3.14. Dependencia del ancho de la señal de salida con el peso de conexión. Los parámetros usados son $m_0 = -0.5$, $\tau = 1$, $\theta = 1$, $k = 5$, $E = 5$ y $\Delta = 5$.

Como podemos ver, la curva tiende a infinito conforme el peso se aproxima a su límite superior w_{max} . Esto es, que la magnitud de la autoconexión es suficientemente fuerte para mantener la actividad de la neurona por arriba de su valor umbral. Esto significa que el pulso de salida, se convierte en una señal escalón y, así, la neurona tiene una respuesta continua diferente de cero bajo estas condiciones. Por otro lado, la neurona no tiene una respuesta significativa si el peso de conexión es menor que w_{min} . A pesar de esta limitación, la neurona puede amplificar el ancho de la señal de entrada incluso si se tiene una autoconexión negativa.

3.2.3 Comportamiento de la neurona

En primer término, analizando las ecuaciones (3.8) y (3.9d) se puede concluir que la forma general del pulso de respuesta es la misma tanto para la neurona aislada como para la neurona con una autosinapsis. Aún más, la diferencia de fase que existe

entre la señal de entrada y la respuesta es el mismo en las tres clases de neurona. En la figura 3.15 se ejemplifica la relación que existe entre la señal cuadrada y la respuesta de la neurona, tanto aislada como con una autosinapsis. Ahora bien, las tres clases de neuronas involucradas en el estudio se pueden distinguir por las características propias de sus respectivas respuestas. Así, si consideramos una misma señal externa, se encuentra que el ancho de la respuesta de la neurona con una autosinapsis positiva siempre es mayor que el de una neurona aislada y el de esta última siempre es mayor que el de una neurona con una autosinapsis negativa.

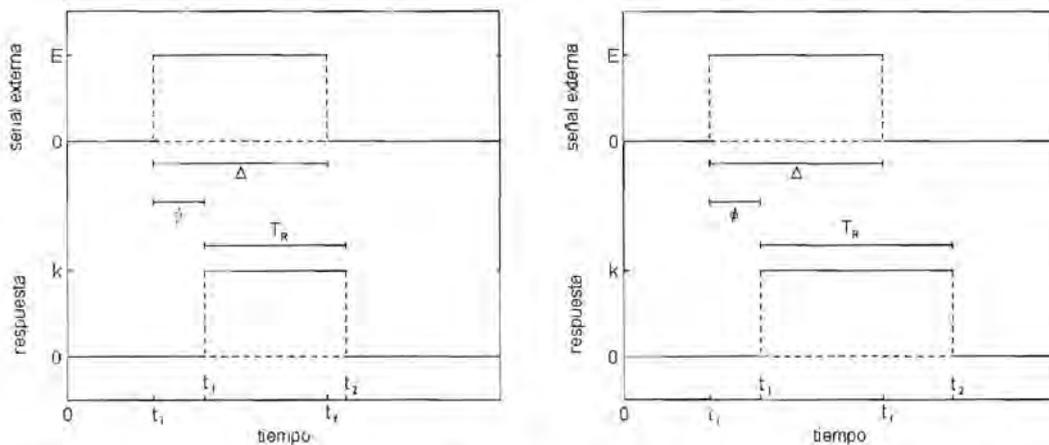


Figura 3.15. Relación entre la señal externa tipo pulso y la respuesta de una neurona artificial. A la izquierda se muestra el caso donde $T_R < \Delta$, mientras que a la derecha se muestra el caso donde $T_R \geq \Delta$.

Por otro lado, la razón entre el ancho de la respuesta al ancho de la entrada T_R/Δ es de la forma:

$$\frac{T_R}{\Delta} = \frac{\Delta + \tau \ln \left[(1 - e^{-\Delta/\tau}) \frac{E - (\theta - m_0)}{\theta - m_0} \right]}{\Delta}$$

para la neurona aislada y de la forma:

$$\frac{T_R}{\Delta} = \frac{\Delta + \tau \ln \left[\frac{[E + kw - (\theta - m_0)](1 - e^{-\Delta/\tau}) - kw}{\theta - m_0 - kw} \right]}{\Delta}$$

para una neurona con una autosinapsis. Cabe recordar que la razón T_R/Δ puede ser, tanto mayor a la unidad, como menor.

Así, la neurona artificial conserva su comportamiento de filtro elemental, ya que, nuevamente, sólo responde si la señal externa presenta una amplitud y un ancho adecuados. Además, la neurona conserva su retardo característico ya que, de hecho, presenta el mismo retardo que el que se observa con la señal escalón. Sin embargo, en este caso la neurona, tanto aislada como con una autosinapsis, tiene la capacidad de producir una respuesta con un ancho diferente al de la señal de entrada.

3.3 TREN DE PULSOS CUADRADOS

En esta última sección se analiza el comportamiento de una neurona artificial estimulada con un tren de pulsos cuadrados. Se considera que los pulsos tienen una amplitud de E unidades y un ancho $\Delta = \xi * T$ unidades, donde $0 < \xi < 1$ es el ciclo de trabajo de la señal y donde T es su período. Así, un período de la señal es de la forma:

$$I_a(t) = \begin{cases} E & \text{si } 0 \leq t < \Delta \\ 0 & \text{si } \Delta \leq t \leq T \end{cases}$$

donde E es una constante positiva definida. En la figura 3.16 se muestra la forma del tren de pulsos cuadrados que se usará en esta sección.

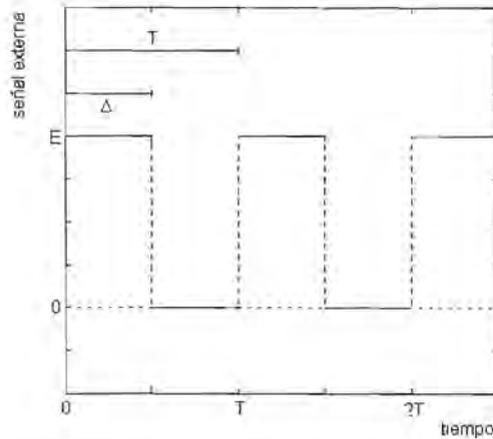


Figura 3.16. Tren de pulsos cuadrados.

En un tren de pulsos el parámetro más importante a considerar es el ciclo de trabajo ξ , ya que dicho parámetro establece la razón entre el tiempo que la señal no es nula al tiempo en el que es nula, *i.e.*, $\xi = \Delta/T$. Adicionalmente, la señal periódica anterior genera transiciones abruptas y periódicas entre un valor nulo y uno no nulo, con lo cual permite estudiar la capacidad de conmutación de la neurona artificial.

3.3.1 Dinámica de la neurona aislada

En este caso, la actividad de la neurona evoluciona durante el primer periodo de la señal externa de la forma siguiente.

$$m(t) = \begin{cases} E + m_0 + (m(0) - m_0 - E)e^{-t/\tau} & \text{si } 0 \leq t < \Delta \\ m_0 + (m(\Delta) - m_0)e^{-(t-\Delta)/\tau} & \text{si } \Delta \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.10),$$

donde se ha considerado la condición inicial $m(0)$ en $t = 0$. La ecuación (3.10) muestra que la actividad de la neurona pasa por las dos etapas siguientes.

- 1) Del valor inicial $m(0)$ en $t = 0$ al valor máximo $m_{\max} = m(\Delta)$ en $t = \Delta$.
- 2) Del valor $m(\Delta)$ en $t = \Delta$ al valor terminal $m_{\text{fin}} = m(T)$ en $t = T$.

De la ecuación (3.10) se puede establecer que el valor máximo que alcanza la actividad de la neurona es:

$$m(\Delta) = E + m_0 + (m(0) - m_0 - E)e^{-\Delta/\tau},$$

mientras que de la misma ecuación (3.10) y de la ecuación anterior se puede establecer que el valor terminal es:

$$m_{\text{fin}} = m_0 + Ee^{(-T + \Delta)/\tau} + (m(0) - m_0 - E)e^{-T/\tau}.$$

Ahora bien, la actividad de la neurona se encuentra bajo condiciones de estado estacionario cuando ocurre que $m(0) = m(T) = m_{\text{fin}}$. Así, de la expresión para m_{fin} se puede establecer que:

$$m(0) = m_0 + E \left[e^{(-T + \Delta)/\tau} \frac{1 - e^{-\Delta/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} \right],$$

corresponde al valor de estado estacionario de la actividad de la neurona en $t = 0$. De esta manera, sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (3.10) se encuentra que la actividad de estado estacionario de la neurona es de la forma:

$$m(t) = \begin{cases} E + m_0 + E \left[\frac{e^{(-T + \Delta)/\tau} - 1}{1 - e^{-T/\tau}} \right] e^{-t/\tau} & \text{si } 0 \leq t < \Delta \\ m_0 + E \left[\frac{1 - e^{-\Delta/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} \right] e^{(-t + \Delta)/\tau} & \text{si } \Delta \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.11).$$

De la ecuación anterior se puede establecer que el valor máximo que alcanza la actividad de la neurona bajo condiciones de estado estacionario es:

$$m_{\max} = m_0 + E \left[\frac{1 - e^{-\Delta/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} \right]$$

el cual se alcanza en el instante de tiempo $t = \Delta$. De esta forma, la amplitud pico a pico $A_{pp} = m_{\max} - m(0)$ de la actividad de la neurona, bajo condiciones de estado estacionario, es:

$$A_{pp} = E \left(1 - e^{(-T + \Delta)/\tau} \right) \left[\frac{1 - e^{-\Delta/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} \right]$$

En la figura 3.17 se ejemplifica el comportamiento de estado estacionario de la actividad de la neurona.

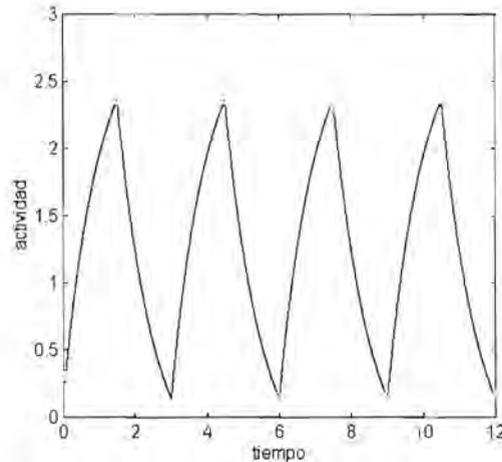


Figura 3.17. Comportamiento de estado estacionario de la actividad de la neurona. Los parámetros empleados en la simulación son: $m_0 = -0.5$, $\tau = 1$, $E = 3.5$, $T = 3$, $\xi = 0.5$. $\Delta = 1.5$ y $A_{pp} = 2.2230$.

3.3.1.a Respuesta de estado estacionario de la neurona

La neurona presenta una respuesta de estado estacionario no nula si se garantiza que $m_{\max} \geq \theta$. Si esto último ocurre, entonces debe existir un instante de tiempo t_1 , con $0 < t_1 < \Delta$, donde ocurre que $m(t_1) = \theta$. Así, de la ecuación (3.11) se puede establecer que:

$$t_1 = \tau \ln \left[\frac{E}{E - (\theta - m_0)} \right] + \tau \ln \left[\frac{1 - e^{(-T + \Delta)/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} \right].$$

Adicionalmente, debe existir otro instante de tiempo t_2 , con $\Delta < t_2 < T$, en el que ocurre que $m(t_2) = \theta$ nuevamente. Así, de la misma ecuación (3.11) se puede establecer ahora que:

$$t_2 = \Delta + \tau \ln \left[\frac{E}{\theta - m_0} \right] + \tau \ln \left[\frac{1 - e^{-\Delta/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} \right].$$

Ahora bien, para que la neurona presente una respuesta no nula se debe satisfacer que $m_{\max} \geq \theta$, $0 < t_1 < \Delta$ y $\Delta < t_2 < T$. De las expresiones para t_1 y t_2 se puede establecer que dichas restricciones se satisfacen si se cumple que:

$$(\theta - m_0) \left[\frac{1 - e^{-T/\tau}}{1 - e^{-\Delta/\tau}} \right] < E < (\theta - m_0) \left[\frac{1 - e^{-T/\tau}}{1 - e^{-\Delta/\tau}} \right] \frac{1}{e^{(-T + \Delta)/\tau}}.$$

De esta forma, la neurona responde, bajo condiciones de estado estacionario, con un tren de pulsos cuadrados de amplitud k , período T y con un ancho T_R dado por:

$$T_R = t_2 - t_1 = \Delta + \tau \ln \left[\frac{E - (\theta - m_0)}{\theta - m_0} \right] + \tau \ln \left[\frac{1 - e^{-\Delta/\tau}}{1 - e^{(-T + \Delta)/\tau}} \right].$$

Así, un período de la respuesta de la neurona es de la forma:

$$R(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} & 0 \leq t < t_1 \\ k & \text{si} & t_1 \leq t < t_2 \\ 0 & \text{si} & t_2 \leq t < t_1 + T \end{cases} \quad (3.12).$$

En la figura 3.20 se ilustra la forma de la respuesta de estado estacionario de la neurona.

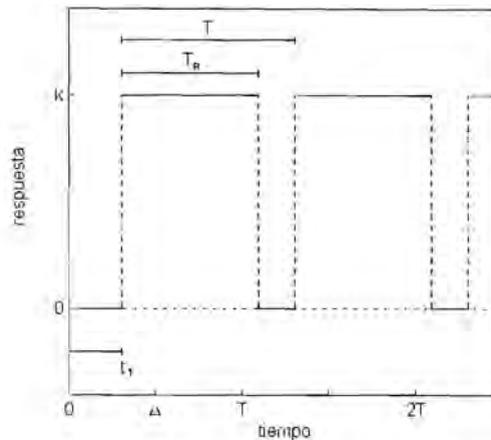


Figura 3.20. Respuesta de estado estacionario de la neurona aislada a un tren de pulsos cuadrados.

Tanto en la figura anterior y como en la ecuación (3.12) se observa que la respuesta de estado estacionario de la neurona aparece desfasada t_1 unidades de tiempo respecto a la señal de entrada $I(t)$.

3.3.2 Dinámica de la neurona con una autosinapsis

De manera similar a como se procedió en las secciones 3.1.2 y 3.2.2, nuevamente consideremos que la condición inicial $m(0) < \theta$ en $t = 0$. De esta manera, la actividad de la neurona evoluciona inicialmente de la forma:

$$m(t) = E + m_0 + (m(0) - m_0 - E)e^{-t/\tau}$$

para $0 \leq t \leq \Delta$. Asumamos ahora que existe un instante de tiempo $t = t_1$, con $0 \leq t < \Delta$, en el que $m(t_1) = \theta$. Así, de la ecuación anterior se puede establecer que:

$$t_1 = t_i + \tau \ln \left[\frac{E - (m(0) - m_0)}{E - (\theta - m_0)} \right].$$

De esta manera, para $t_1 \leq t \leq \Delta$ la actividad de la neurona evoluciona ahora de la forma:

$$m(t) = E + k w + m_0 + (\theta - m_0 - k w - E) e^{-(t+t_1)/\tau},$$

ya que el estímulo externo ha cambiado a $I_T(t) = E \cdot u_{-1}(t) + wR(t)$. Ahora bien, la actividad de la neurona alcanza su valor máximo en $t = \Delta$, el cual está dado por la expresión siguiente:

$$m_{\max} = m(\Delta) = E + k w + m_0 + (\theta - m_0 - k w - E) e^{(-\Delta+t_1)/\tau},$$

donde $m_{\max} > \theta$. En el instante mismo en el que la actividad alcanza su valor máximo también desaparece el estímulo externo. Así, para $\Delta \leq t \leq T$, la actividad de la neurona evoluciona ahora de la forma siguiente:

$$m(t) = k w + m_0 + (m_{\max} - m_0 - k w) e^{-(t+\Delta)/\tau},$$

donde se tiene, además, que $m(t) \geq \theta$. Es decir, la actividad de la neurona sólo es afectada por la actividad residual de la autosinapsis y, por lo tanto, comienza a decaer del valor m_{\max} en $t = \Delta$ hasta que alcanza nuevamente el valor θ en $t = t_2$. De la ecuación anterior se puede establecer que:

$$t_2 = \Delta + \tau \ln \left[\frac{k w - (m_{\max} - m_0)}{k w - (\theta - m_0)} \right].$$

donde $\Delta < t_2 < T$. Finalmente, en el intervalo de tiempo $t_2 \leq t \leq T$ la señal externa a la neurona es nula y, por lo tanto, la actividad de la neurona evoluciona finalmente de la forma:

$$m(t) = m_0 + (\theta - m_0)e^{(-t+t_2)/\tau}$$

hasta alcanzar el valor terminal

$$m_{fin} = m(T) = m_0 + (\theta - m_0)e^{(-T+t_2)/\tau}$$

precisamente en $t = T$.

Ahora bien, la actividad de la neurona se encuentra bajo condiciones de estado estacionario cuando ocurre que $m(0) = m(T)$. Así, de la expresión para m_{fin} se puede establecer que:

$$m_0 + (\theta - m_0)e^{(-T+t_2)/\tau} = m(0)$$

Sustituyendo las expresiones para t_2 , m_{max} y t_1 , en ese orden, en la ecuación anterior se obtiene la expresión siguiente para $m(0)$.

$$m(0) = \frac{(E + m_0)D - AE[kw - (\theta - m_0)(1 - e^{(-T+\Delta)/\tau})]}{D}$$

donde $A = E - (\theta - m_0)$, $D = [(\theta - m_0) - kw]G(T) - (G(T) - kw)E$ y $G(T) = (\theta - m_0)(1 - e^{-T/\tau})$. De la ecuación anterior se obtienen las expresiones siguientes para t_1 , m_{max} y t_2 .

$$t_1 = \tau \ln \left[\frac{E[kw - (\theta - m_0)(1 - e^{(-T+\Delta)/\tau})]}{D} \right]$$

$$m_{max} = \frac{(kw + m_0)D + EB[A - (A + kw)e^{-\Delta/\tau}]}{D}$$

donde $B = kw - (\theta - m_0)$, y

$$t_2 = \Delta + \tau \ln \left[\frac{E[kw e^{-\Delta/\tau} - A(1 - e^{-\Delta/\tau})]}{D} \right].$$

Las expresiones anteriores se reducen, en el límite donde $w = 0$, a las expresiones encontradas en la sección 3.3.1 para una neurona aislada.

De esta manera, la actividad de la neurona evoluciona, bajo condiciones de estado estacionario, de la forma siguiente:

$$m(t) = \begin{cases} E + m_0 + (m(0) - m_0 - E)e^{-t/\tau} & \text{si } 0 \leq t < t_1 \\ E + kw + m_0 + (\theta - m_0 - kw - E)e^{-(t-t_1)/\tau} & \text{si } t_1 \leq t < \Delta \\ kw + m_0 + (m_{\max} - m_0 - kw)e^{-(t-\Delta)/\tau} & \text{si } \Delta \leq t < t_2 \\ m_0 + (\theta - m_0)e^{-(t-t_2)/\tau} & \text{si } t_2 \leq t < T \end{cases} \quad (3.13),$$

donde $m(t)$ es periódica, con período T , esto es, $m(t + T) = m(t)$. En la figura 3.19 se ilustra la evolución, bajo condiciones de estado estacionario, de la actividad de una neurona con una autosinapsis.

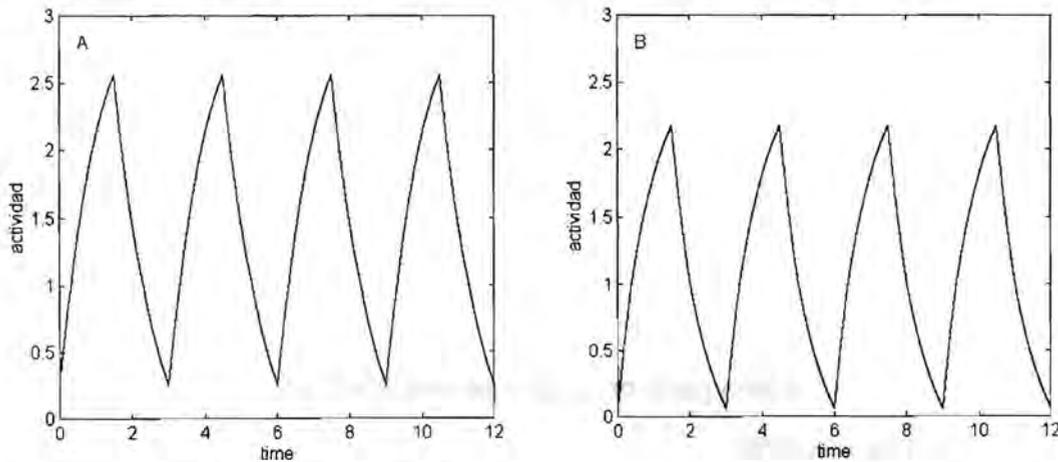


Figura 3.19. Evolución, bajo condiciones de estado estacionario, de la actividad de una neurona con una autosinapsis. Los parámetros empleados en las simulaciones son: $m_0 = -0.5$, $\tau = 1$, $\theta = 1$, $k = 1$, $E = 3.5$, $T = 3$, $\xi = 0.5$, $\Delta = 1.5$ y $w =$ A) 0.25, B) -0.25. Las amplitudes pico a pico son: $A_{pp} =$ A) 2.3078 y B) 2.1163.

En la figura 3.19 se puede observar que la actividad de ambas neuronas es periódica, con el mismo período, pero cuya amplitud pico a pico A_{pp} es mayor para la neurona que presenta una autosinapsis positiva. Ahora bien, ya que $A_{pp} = m_{\max} - m(0)$, se encuentra que:

$$A_{pp} = \frac{(k w - E) + E \left[B \left[2A - (A + k w) e^{-\Delta/\tau} \right] + A(\theta - m_0) e^{(-T + \Delta)/\tau} \right]}{D}$$

de donde se puede deducir que A_{pp} es mayor para una neurona con una autosinapsis positiva que el que se obtiene con una neurona con una autosinapsis negativa.

3.3.2.a Respuesta de estado estacionario de la neurona

La ecuación (3.13) se estableció asumiendo que la señal externa era tal que el valor máximo que alcanza la actividad de la neurona en un período supera su valor umbral característico, *i.e.*, asumiendo que $m_{\max} \geq \theta$. Ahora bien, para que la neurona presente una respuesta no nula es necesario satisfacer además las restricciones siguientes:

- a) $0 < t_1 < \Delta$.
- b) $m_{\max} > \theta$.
- c) $\Delta < t_2 < T$.

Ahora bien, la expresión para m_{\max} que se encontró en la sección 3.3.2 se puede expresar de la forma siguiente:

$$m_{\max} = \theta + (E + k w - (\theta - m_0)) \left(1 - e^{(-\Delta + t_1)/\tau} \right).$$

De esta manera, la restricción (b) se satisface si se satisface, a su vez, la desigualdad siguiente:

$$(E + k w - (\theta - m_0))(1 - e^{(-\Delta + t_1)/\tau}) > 0.$$

Sin embargo, de la restricción (a) se tiene que $t_1 < \Delta$ y, en consecuencia, se tiene que:

$$(1 - e^{(-\Delta + t_1)/\tau}) > 0.$$

Así, la restricción (b) se satisface si los parámetros de la neurona y de la señal externa satisfacen, a su vez, la restricción siguiente:

$$E + k w - (\theta - m_0) > 0 \quad (3.15).$$

Por otro lado, la restricción $t_1 > 0$ se cumple al satisfacer la desigualdad siguiente:

$$\frac{E[k w - (\theta - m_0)(1 - e^{(-T + \Delta)/\tau})]}{D} > 1,$$

donde $D = [(\theta - m_0) - k w]G(T) - (G(T) - k w)E$ y $G(T) = (\theta - m_0)(1 - e^{-T/\tau})$. La desigualdad anterior se reduce a los dos casos siguientes:

$$E > ((\theta - m_0) - k w) \frac{1}{F(T)}, \text{ con } D > 0 \quad (3.16a),$$

$$E < ((\theta - m_0) - k w) \frac{1}{F(T)}, \text{ con } D < 0 \quad (3.16b),$$

donde

$$F(T) = \frac{e^{\Delta/\tau} - 1}{e^{T/\tau} - 1}$$

En cambio, la restricción $t_1 < \Delta$ se satisface bajo las condiciones siguientes:

$$\frac{E[kw - (\theta - m_0)(1 - e^{(-T + \Delta)/\tau})]}{D} < e^{\Delta/\tau}$$

Esta última desigualdad se reduce a los casos siguientes:

$$E < (\theta - m_0) \frac{e^{(-T + \Delta)/\tau}}{F(T)}, \text{ con } (\theta - m_0) - kw > 0 \text{ y } D > 0 \quad (3.17a)$$

$$E > (\theta - m_0) \frac{e^{(-T + \Delta)/\tau}}{F(T)}, \text{ con } (\theta - m_0) - kw < 0 \text{ y } D > 0 \quad (3.17b)$$

$$E > (\theta - m_0) \frac{e^{(-T + \Delta)/\tau}}{F(T)}, \text{ con } (\theta - m_0) - kw > 0 \text{ y } D < 0 \quad (3.17c)$$

$$E < (\theta - m_0) \frac{e^{(-T + \Delta)/\tau}}{F(T)}, \text{ con } (\theta - m_0) - kw < 0 \text{ y } D < 0 \quad (3.17d)$$

Ahora bien, la restricción $t_2 > \Delta$ se satisface bajo las condiciones siguientes:

$$\frac{E[kwe^{-\Delta/\tau} - A(1 - e^{-\Delta/\tau})]}{D} > 1$$

Esta desigualdad se reduce a los dos casos siguientes.

$$E < (\theta - m_0) \frac{e^{(-T + \Delta)/\tau}}{F(T)}, \text{ con } D > 0 \quad (3.18a).$$

$$E > (\theta - m_0) \frac{e^{(-T + \Delta)/\tau}}{F(T)}, \text{ con } D < 0 \quad (3.18b).$$

Finalmente, la restricción $t_2 < T$ se satisface bajo las condiciones siguientes:

$$\frac{E[k w e^{-\Delta/\tau} - A(1 - e^{-\Delta/\tau})]}{D} < e^{(T - \Delta)/\tau}.$$

Esta desigualdad se reduce a los dos casos siguientes:

$$E > ((\theta - m_0) - k w) \frac{1}{F(T)}, \text{ con } E - (\theta - m_0) > 0 \text{ y } D > 0 \quad (3.19a).$$

$$E < ((\theta - m_0) - k w) \frac{1}{F(T)}, \text{ con } E - (\theta - m_0) > 0 \text{ y } D < 0 \quad (3.19b).$$

Los conjuntos de desigualdades anteriores se pueden agrupar en los dos grupos siguientes:

- a) (3.15), (3.16a), (3.17a), (3.18a) y (3.19a), donde $D > 0$.
- b) (3.15), (3.16b), (3.17c), (3.18b) y (3.19b), donde $D < 0$.

En el primer grupo se tiene que las desigualdades (3.16a) y (3.19a), por un lado, y (3.17a) y (3.18a), por el otro, son equivalentes. De esta manera, el primer grupo de desigualdades se puede reducir al sistema de desigualdades siguiente:

$$(\theta - m_0)(1 - e^{(-T+\Delta)/\tau}) < kw < (\theta - m_0)(1 - e^{-T/\tau}) \quad (3.20a).$$

$$[(\theta - m_0) - kw] \frac{1}{F(T)} < E < (\theta - m_0) \frac{e^{(-T+\Delta)/\tau}}{F(T)}$$

De manera similar, en el segundo grupo se encuentra que las desigualdades (3.16b) y (3.19b), por un lado, y (3.17c) y (3.18b), por el otro, son equivalentes. Así, este grupo de desigualdades se puede reducir al sistema de desigualdades siguiente:

$$(\theta - m_0) - E < kw < (\theta - m_0)(1 - e^{(-T+\Delta)/\tau}) \quad (3.20b).$$

$$(\theta - m_0) \frac{e^{(-T+\Delta)/\tau}}{F(T)} < E < [(\theta - m_0) - kw] \frac{1}{F(T)}$$

Nótese que las soluciones del sistema (3.20a) involucran únicamente a pesos positivos, *i.e.*, $w > 0$, mientras que en el sistema (3.20b) se tiene pesos tanto positivos como negativos.

Así, si se satisface alguno de los sistemas de desigualdades (3.20), se tiene que la respuesta de la neurona, bajo condiciones de estado estacionario, es de la forma siguiente:

$$R(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < t_1 \\ k & \text{si } t_1 \leq t < t_2 \\ 0 & \text{si } t_2 \leq t < T \end{cases} \quad (3.22),$$

donde $R(t + T) = R(t)$. Esto es, la respuesta de la neurona es un tren de pulsos cuadrados de período T , ancho dado por:

$$T_R = \Delta + \tau \ln \left[\frac{kw e^{-\Delta/\tau} - A(1 - e^{-\Delta/\tau})}{kw - (\theta - m_0)(1 - e^{(-T+\Delta)/\tau})} \right].$$

y amplitud k . En la figura 3.20 se ejemplifica la forma de la respuesta de estado estacionario de una neurona con una autosinapsis.

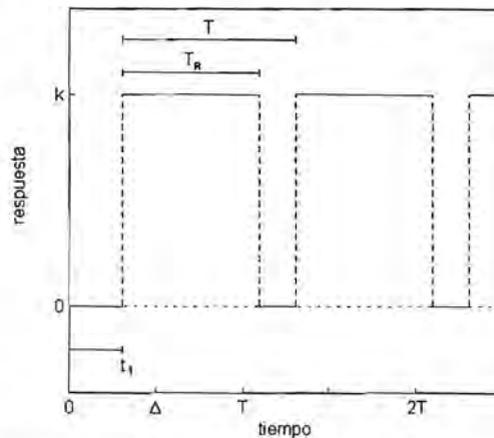


Figura 3.20. Respuesta de estado estacionario de una neurona con una autosinapsis un tren de pulsos cuadrados.

Una vez más, la respuesta de la neurona se presenta desfasada t_1 unidades de tiempo respecto a la señal de entrada. Nótese que bajo las condiciones empleadas en el cálculo de la ecuación (3.22), se encuentra que $T_R < T$, *i.e.*, la respuesta de la neurona es efectivamente un tren de pulsos para dichas condiciones. Sin embargo, cabe aclarar que la respuesta de la neurona se puede convertir en una señal escalón si ocurre que $t_2 \geq T$. En este caso se tiene que la actividad de la neurona nunca baja de su valor umbral.

3.3.3 Comportamiento de la neurona

El análisis realizado en las dos secciones anteriores muestra que la neurona artificial, tanto aislada como con una autosinapsis, puede responder, bajo condiciones de estado estacionario, a un tren de pulsos cuadrados también con una señal periódica de la misma naturaleza. La relación que existe entre la señal externa y la respuesta de la neurona se muestra en la figura 3.21.

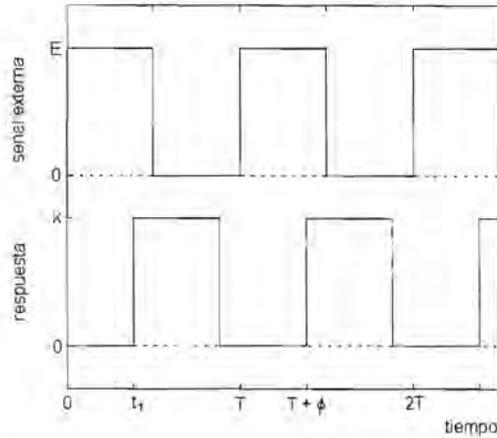


Figura 3.21. Respuesta de estado estacionario de una neurona artificial a un tren de pulsos cuadrados.

En la figura 3.21 se puede observar que la señal de respuesta aparece desfasada de la señal de entrada t_1 unidades de tiempo. También se puede observar que, en general, el ciclo de trabajo de la señal de respuesta es diferente del de la señal de entrada.

En este caso, la razón de ciclos de trabajo de las señales, ξ_R/ξ_E , corresponde a la razón de los anchos durante un ciclo de ambas señales, *i.e.*, $\xi_R/\xi_E = T_R/\Delta$. Así, para la neurona aislada se tiene que:

$$\frac{T_R}{\Delta} = \frac{\Delta + \tau \ln \left[\frac{E - (\theta - m_0)}{\theta - m_0} \right] + \tau \ln \left[\frac{1 - e^{-\Delta/\tau}}{1 - e^{-(T+\Delta)/\tau}} \right]}{\Delta}$$

mientras que para la neurona con una autosinapsis se tiene que:

$$\frac{T_R}{\Delta} = \frac{\Delta + \tau \ln \left[\frac{k w e^{-\Delta/\tau} - A(1 - e^{-\Delta/\tau})}{k w - (\theta - m_0)(1 - e^{-(T+\Delta)/\tau})} \right]}{\Delta}$$

En ambos casos se encuentra que T_R/Δ puede ser mayor o menor a la unidad.

Finalmente, podemos decir que la neurona artificial se sigue comportando como un filtro elemental y como un dispositivo de retardo.

CAPÍTULO IV

EVALUACIÓN DEL MODELO ELECTRÓNICO

INTRODUCCIÓN

Una vez que hemos estudiado la realización matemática del modelo neuronal, estamos en condiciones de explorar los comportamientos característicos del modelo electrónico. En este sentido, caracterizaremos tres aspectos esenciales del modelo neuronal electrónico. Primero, debemos verificar que la neurona puede amplificar el ancho del pulso de entrada sin afectar su forma. Segundo, debemos caracterizar la dependencia de la respuesta de la neurona con respecto a sus diferentes parámetros y su señal de entrada. Finalmente, podemos explorar el comportamiento del circuito electrónico fuera de los límites encontrados para el modelo matemático.

4.1 NEURONA AISLADA

La primer serie de experimentos fueron conducidos para verificar que la neurona electrónica también es sensible a cambios en su constante característica $r_f C_f$, esto es, que la neurona electrónica presenta un cambio pequeño en su potencial si su constante característica es grande, mientras que el cambio es mayor mientras mas pequeña sea su constante característica. En la figura 4.1 se ejemplifica este comportamiento.

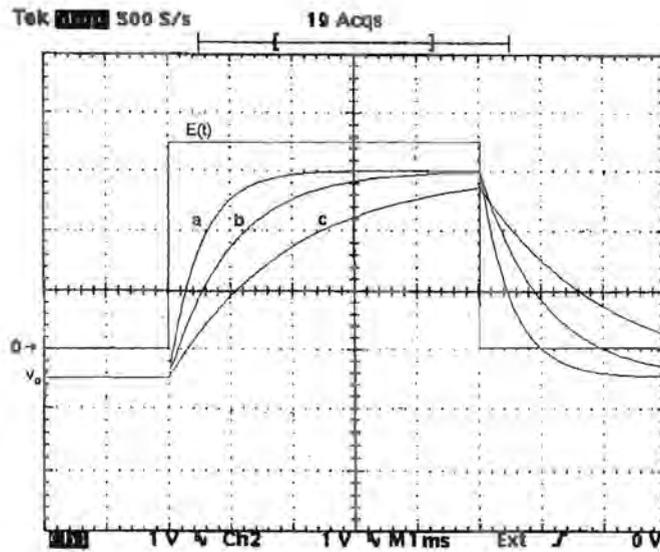


Figura 4.1. Evolución del potencial de la neurona electrónica aislada para diferentes valores de $r_f C_f$. Los parámetros utilizados son $E = 3,5 V$, $\Delta = 5 ms$, $v_0 = -0,5 v$ y $r_f C_f = a) 0,5 ms$, $b) 1,0 ms$, $c) 2,0 ms$.

En el oscilograma de la figura 4.1 se puede observar, al igual que en el modelo matemático, que el potencial de la neurona electrónica no alcanza un valor de equilibrio diferente del valor de equilibrio v_0 como respuesta a un pulso cuadrado.

Ahora bien, la segunda serie de experimentos fueron conducidos para verificar que la neurona electrónica también puede amplificar el ancho del pulso de entrada sin modificar su forma. Por ejemplo, en la figura 4.2 mostramos el comportamiento característico de nuestro modelo electrónico sin autoconexión.

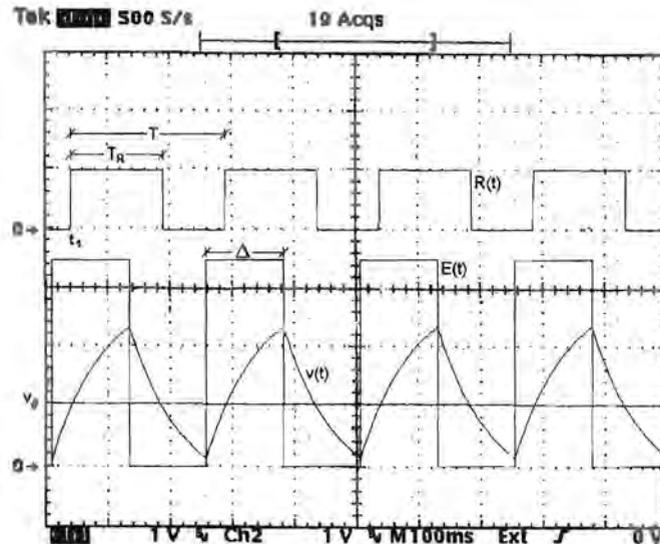


Figura 4.3. Comportamiento en estado estacionario de la neurona electrónica. Los parámetros de la neurona son $v_0 = -500 \text{ mV}$, $\tau_{CF} = 1 \text{ ms}$, $v_\theta = 1 \text{ V}$, $v_p = 1 \text{ V}$, mientras que los de la entrada externa son $E = 3.5 \text{ V}$, $\Delta = 1.5 \text{ ms}$ y $T = 3 \text{ ms}$. En este caso, la amplitud pico a pico del potencial de la neurona es $v_{pp} = 2.2218 \text{ V}$, mientras que el tiempo de defasamiento entre la señal de entrada y la señal de respuesta es $t_1 = 0.371 \text{ ms}$ y el ancho de la señal de respuesta es $T_R = 1.78 \text{ ms}$.

En la figura 4.3 se puede apreciar que la respuesta del modelo electrónico, al igual que en el modelo matemático, se presenta t_1 unidades de tiempo desfasada con respecto a la señal de entrada de la neurona. Adicionalmente, observamos que la respuesta de la neurona presenta un ancho (o tiempo de respuesta) T_R mayor que el ancho de los pulsos de entrada Δ , con lo cual se corrobora, una vez más, que el modelo electrónico presenta los mismos comportamientos que el modelo matemático.

4.2 NEURONA CON AUTOCONEXIÓN

De manera similar a lo realizado en la sección 3.2.2, exploramos el comportamiento del circuito con una autoconexión, recordemos que ahora la señal de entrada total a la neurona será la suma de el pulso inicial de entrada más el

pulso de respuesta de la misma neurona de amplitud v_p que se presenta ϕ unidades de tiempo después. En las figuras 4.4 y 4.5 mostramos dos de la serie de experimentos que se llevaron a cabo.

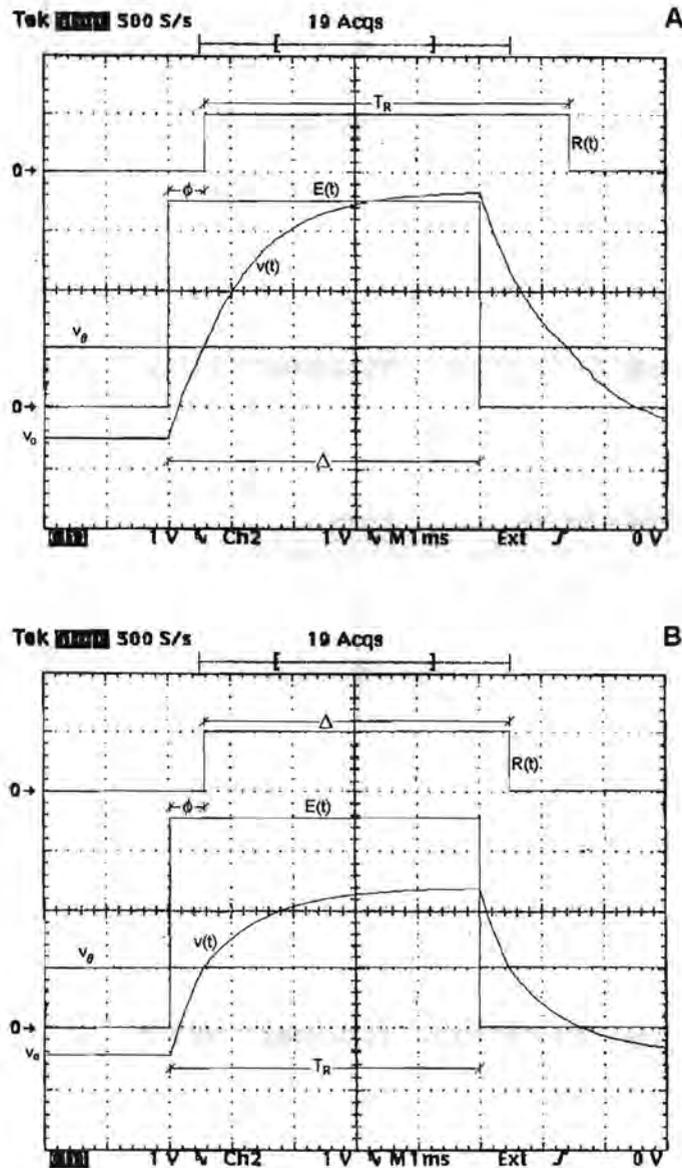


Figura 4.4. Comportamiento de la neurona electrónica con una autoconexión como respuesta a un pulso cuadrado. En las figuras A y B se muestra la evolución del potencial $v(t)$ con una autoconexión positiva y negativa, respectivamente. Los parámetros usados son los mismos que los utilizados para la figura 4.2 con $w = 0.2$ para el caso positivo y $w = -0.2$ para el negativo. Los retardos medidos son los mismos que los de la figura 4.2, pero el ancho de la señal de salida son $T_R = 6.58$ ms para el caso positivo y $T_R = 5.31$ ms para el negativo.

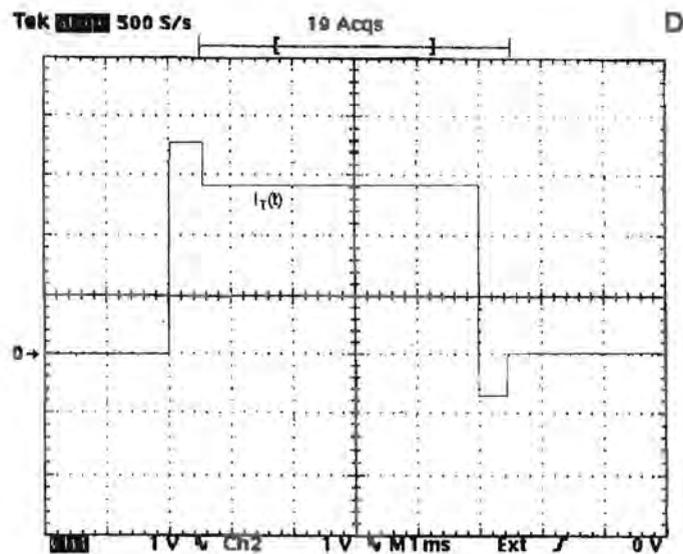
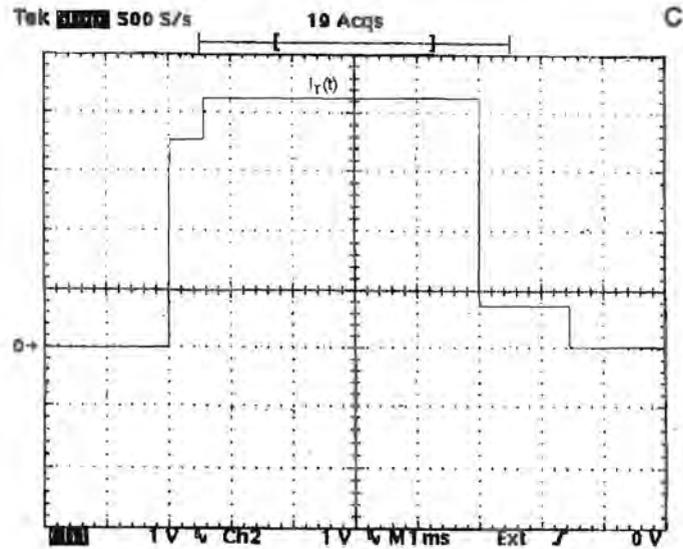


Figura 4.5. Oscilogramas de las entradas totales $I_T(t)$ que afectan a la neurona electrónica con una autoconexión como respuesta a un pulso cuadrado; C) para autoconexión positiva y D) para autoconexión negativa. Los parámetros usados son los mismos que los utilizados para la figura 4.2 con $w = 0.2$ para el caso positivo y $w = -0.2$ para el negativo.

Como podemos observar en las figuras 4.4 y 4.5, el circuito electrónico muestra esencialmente los mismos comportamientos que los encontrados en el modelo matemático. Nótese que todas las neuronas electrónicas pueden

amplificar el ancho del pulso de entrada en la misma forma que hemos encontrado para los modelos matemáticos. Sin embargo, debemos remarcar que la señal de salida no es perfectamente rectangular debido a que el tiempo de respuesta de los circuitos electrónicos no es instantáneo. Esta deformación de la señal de salida es, sin embargo, muy pequeña, incluso cuando tenemos una autoconexión.

A continuación, caracterizamos la sensibilidad del circuito electrónico a cambios en los diferentes parámetros. En particular, hemos estudiado la dependencia del ancho del pulso de respuesta con respecto a los parámetros de la señal de entrada de la neurona. Los resultados obtenidos se ilustran en la figura 4.6.

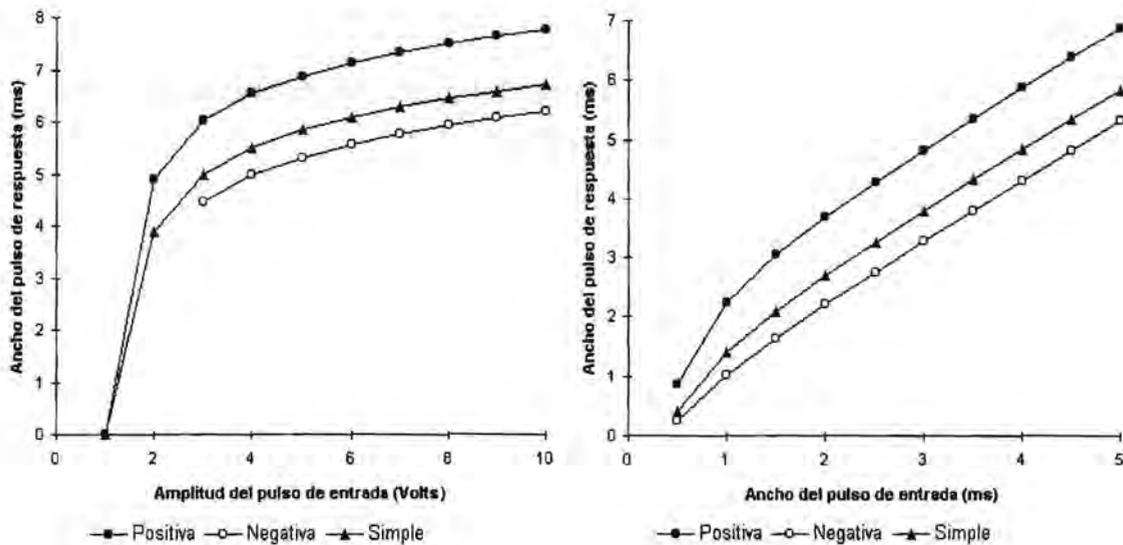


Figura 4.6. Dependencia del ancho de la señal de salida respecto a los parámetros de la señal de entrada de la neurona. Los parámetros usados son: $v_0 = -500$ mV, $r_i c_i = 1$ ms, $v_\theta = 1$ V, $E = 5$ V y $\Delta = 5$ ms. Para la autoconexión positiva tenemos $w = 0.2$ y para la negativa tenemos $w = -0.2$.

Por otro lado, la dependencia del ancho del pulso de respuesta con respecto a los parámetros de la neurona se ilustran en la figura 4.7.

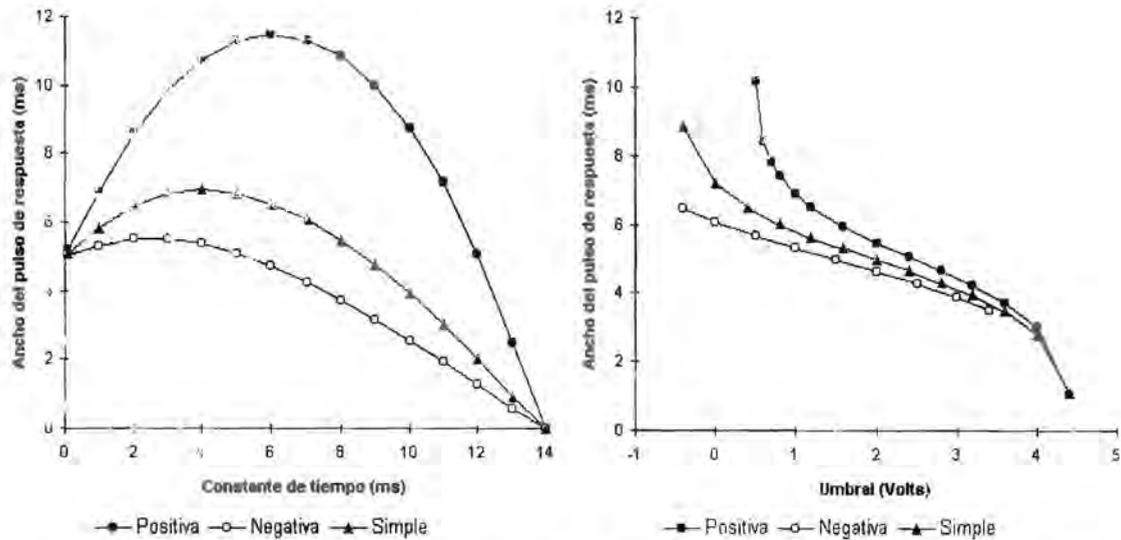


Figura 4.7. Dependencia del ancho de la señal de salida respecto a los parámetros de la neurona. Los parámetros usados son los mismos que los utilizados en la figura 4.6.

Ahora bien, la dependencia del ancho del pulso de respuesta con respecto al peso de conexión se muestra en la figura 4.8.

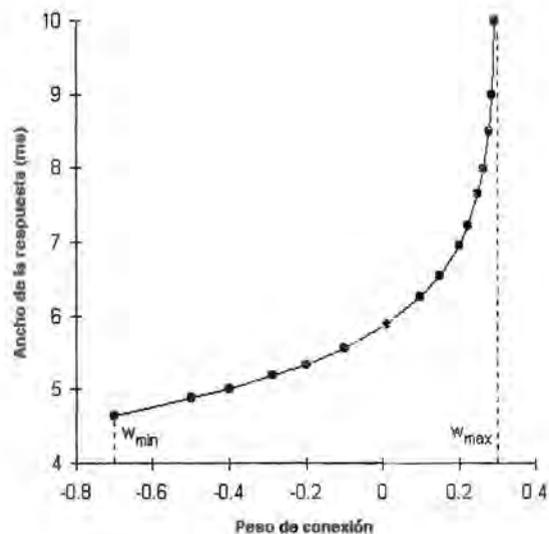


Figura 4.8. Dependencia del ancho del pulso de respuesta con respecto al peso de conexión. Los parámetros usados son: $v_0 = -500$ mV, $rC_f = 1$ ms, $v_\theta = 1$ V, $E = 5$ V y $\Delta = 5$ ms.

Una vez mas, podemos observar que el modelo electrónico muestra los mismos comportamientos que aquellos encontrados en el modelo matemático a

pesar de que sabemos que la forma de la señal de salida es ligeramente diferente. Debemos remarcar que en las figuras previas hemos limitado la exploración a los mismos valores usados en los modelos matemáticos.

Ahora bien, de manera similar a lo realizado en la sección 3.3.2, exploramos el comportamiento del circuito en estado estacionario con una autoconexión, teniendo como señal de entrada un tren de pulsos, recordemos que ahora la señal de entrada total a la neurona será la suma de los pulsos de entrada más los pulsos de respuesta de la misma neurona de amplitud v_p que se presenta t_1 unidades de tiempo después. En la figura 4.9 mostramos dos de la serie de experimentos que se llevaron a cabo.

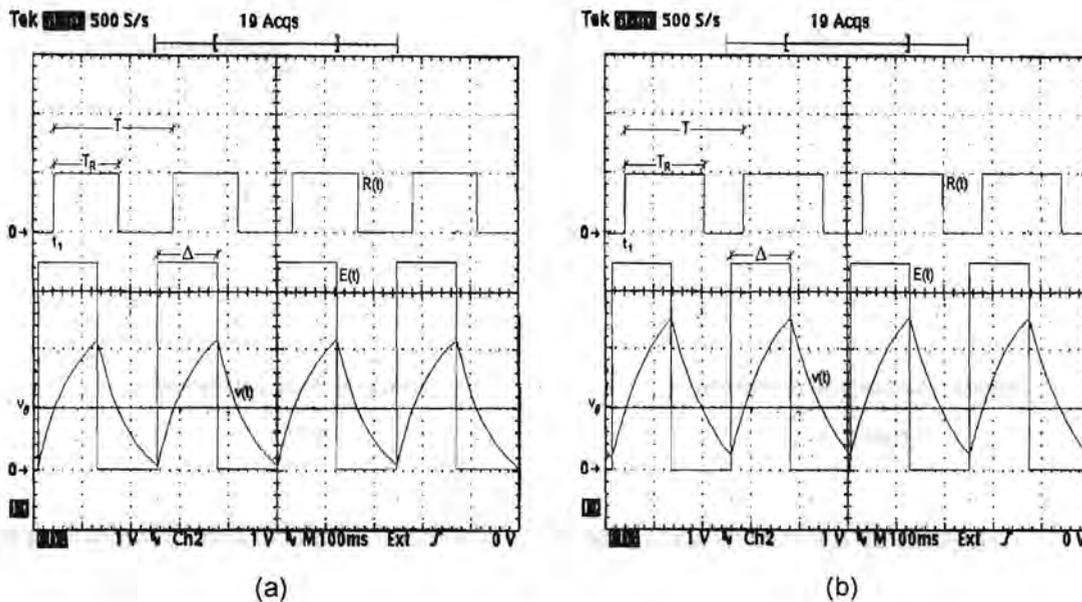


Figura 4.9. Comportamiento en estado estacionario de la neurona electrónica. Los parámetros de la neurona son $v_0 = -500$ mV, $rC_f = 1$ ms, $v_\theta = 1$ V, $v_p = 1$ V y $w =$ (a) -0.25 , (b) 0.25 , mientras que los de la entrada externa son $E = 3.5$ V, $\Delta = 1.5$ ms y $T = 3$ ms. En este caso, la amplitud pico a pico del potencial de la neurona es $v_{pp} =$ (a) 2.1162 V, (b) 3.3108 V mientras que el tiempo de defasamiento entre la señal de entrada y la señal de respuesta es $t_1 =$ (a) 0.387 ms, (a) 0.318 ms y el ancho de la señal de respuesta es $T_R =$ (a) 1.63 ms, (b) 2.01 ms.

Como podemos observar en la figura 4.9, el circuito electrónico muestra esencialmente los mismos comportamientos que los encontrados en el modelo

matemático. Nótese que todas las neuronas electrónicas pueden amplificar el ancho del pulso de entrada en la misma forma que hemos encontrado para los modelos matemáticos.

A continuación, caracterizamos la sensibilidad del circuito electrónico a cambios en los diferentes parámetros. En particular, hemos estudiado la dependencia del ciclo de trabajo de los pulsos de respuesta en estado estacionario con respecto a los parámetros de la señal de entrada de la neurona. Los resultados obtenidos se ilustran en la figura 4.10.

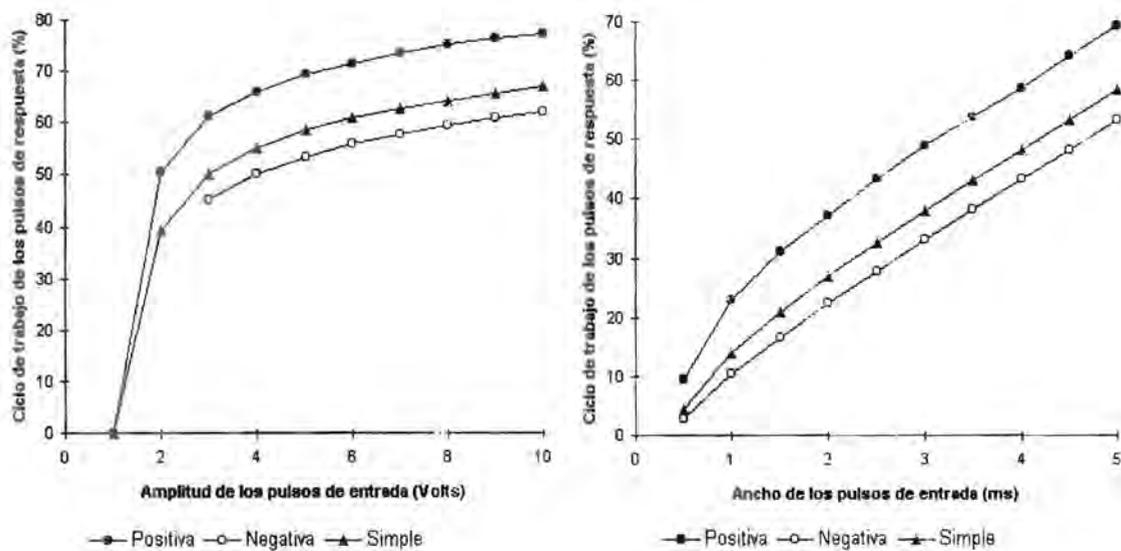


Figura 4.10. Dependencia del ciclo de trabajo de la señal de salida respecto a los parámetros de la señal de entrada de la neurona. Los parámetros usados son: $v_0 = -500 \text{ mV}$, $r_f c_f = 1 \text{ ms}$, $v_\theta = 1 \text{ V}$, $E = 5 \text{ V}$, $\Delta = 5 \text{ ms}$ y $T = 10 \text{ ms}$. Para la autoconexión positiva tenemos $w = 0.2$ y para la negativa tenemos $w = -0.2$.

Por otro lado, la dependencia del ciclo de trabajo de los pulsos de respuesta con respecto a los parámetros de la neurona se ilustran en la figura 4.11.

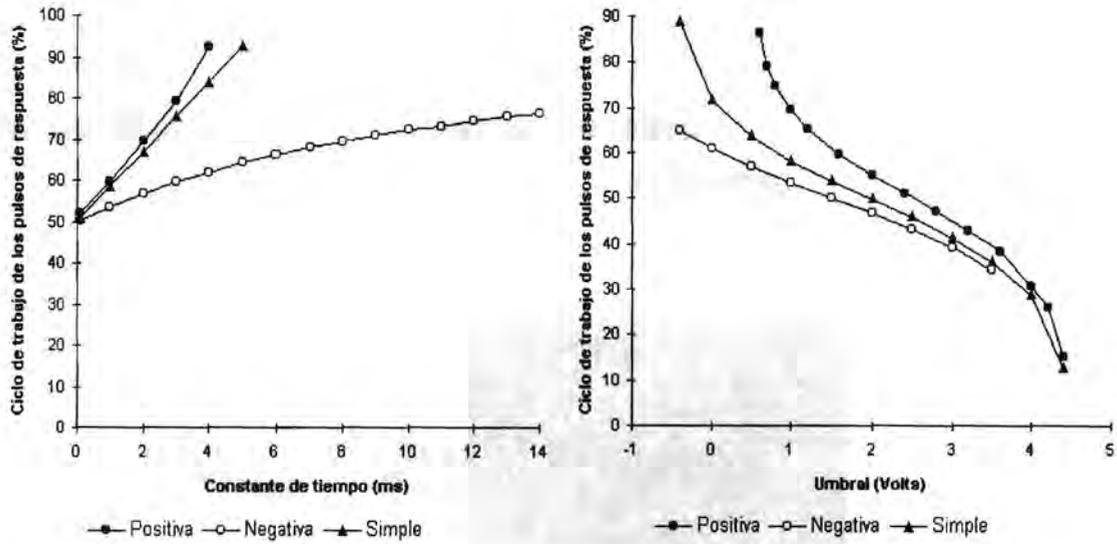


Figura 4.11. Dependencia del ciclo de trabajo de los pulsos de respuesta respecto a los parámetros de la neurona. Los parámetros usados son los mismos que los utilizados en la figura 4.10.

Ahora bien, la dependencia del ciclo de trabajo de los pulsos de respuesta con respecto al peso de conexión se muestra en la figura 4.12.

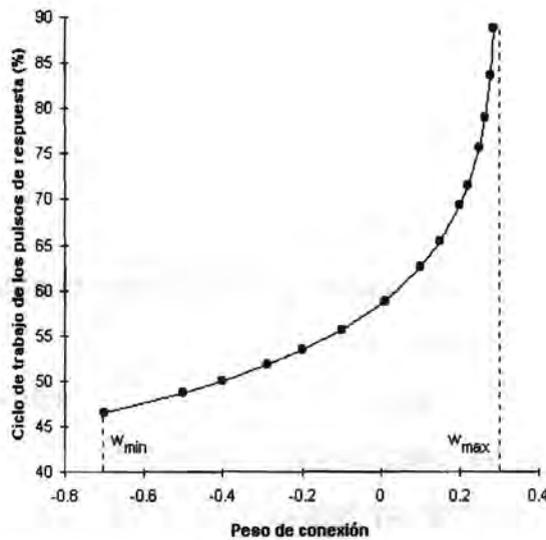


Figura 4.12. Dependencia del ciclo de trabajo de los pulsos de respuesta con respecto al peso de conexión. Los parámetros usados son: $v_0 = -500$ mV, $r_f c_f = 1$ ms, $v_\theta = 1$ V, $E = 5$ V y $\Delta = 5$ ms.

Finalmente, exploramos el comportamiento del circuito electrónico para valores de pesos de conexión menores que w_{\min} . Recuérdese que el modelo matemático no tiene una respuesta significativa para estas condiciones. Los resultados obtenidos se ilustran en la figura 4.13.

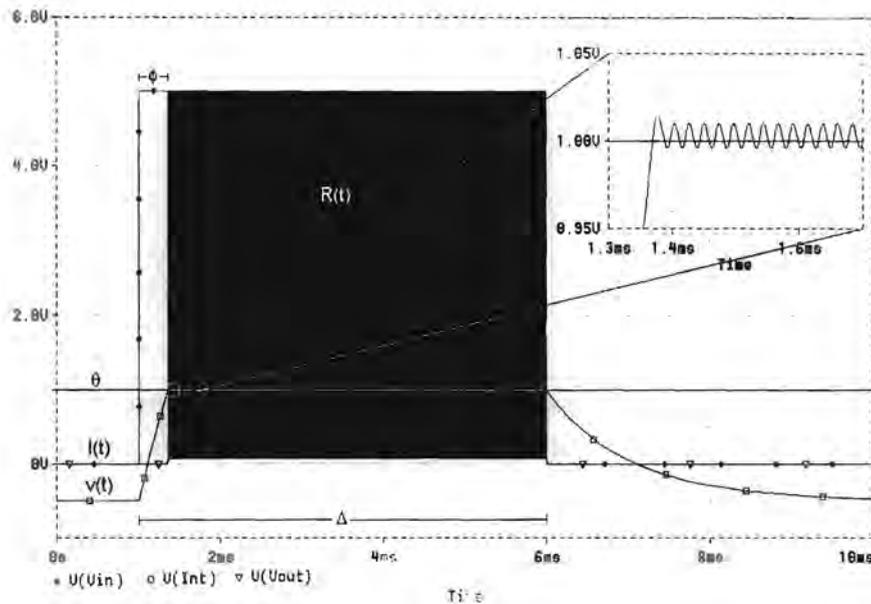


Figura 4.13. Respuesta oscilatoria de la neurona electrónica. Los parámetros de la neurona son $v_0 = -500 \text{ mV}$, $r_f c_f = 1 \text{ ms}$, $v_\theta = 1 \text{ V}$, $v_p = 5 \text{ V}$, $w = -1$, mientras que los de la entrada externa son $E = 5 \text{ V}$ y $\Delta = 5 \text{ ms}$

Como podemos apreciar en la figura 4.13, el potencial $v(t)$ bajo estas condiciones oscila alrededor del valor umbral y, por tanto, la neurona presenta una respuesta oscilatoria $R(t)$. Este nuevo comportamiento puede ser explicado si retomamos que la respuesta de cualquier dispositivo electrónico no es instantánea. Esto es, la respuesta de nuestro circuito electrónico tiene un retardo de tiempo intrínseco con su entrada correspondiente. En esta forma, podemos asumir que la neurona electrónica toma una cantidad de tiempo, aunque muy pequeña, para procesar las señales de entrada. De hecho, Marcus y Westervelt han mostrado que una red neuronal artificial con un tiempo de retardo fijo puede producir oscilaciones sostenidas [9]. Este mismo comportamiento se presenta cuando la señal de entrada es un tren de pulsos como se ilustra en la figura 4.14.

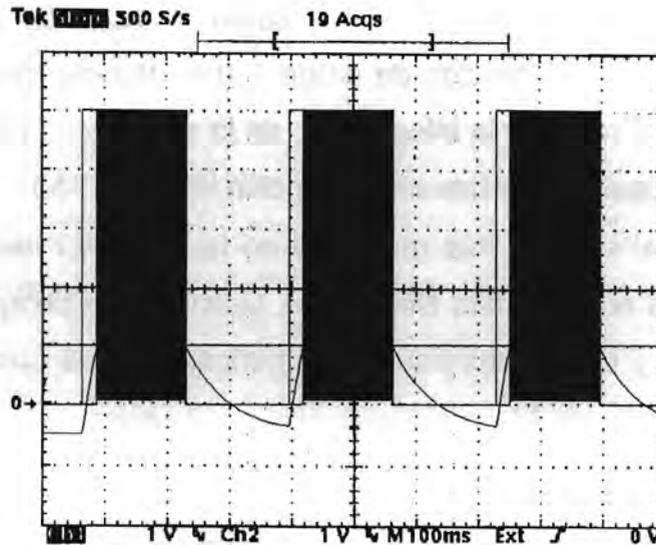


Figura 4.14. Respuesta oscilatoria de la neurona electrónica. Los parámetros de la neurona son $v_0 = -500 \text{ mV}$, $r_{C1} = 1 \text{ ms}$, $v_\theta = 1 \text{ V}$, $v_p = 5 \text{ V}$, $w = -1$, mientras que los de la entrada externa son $E = 5 \text{ V}$, $\Delta = 2.5 \text{ ms}$ y $T = 5 \text{ ms}$.

De esta forma, con el fin de verificar que el tiempo de retardo en el circuito electrónico es la única fuente del comportamiento oscilatorio, realizamos una extensión al modelo matemático presentado anteriormente, incluyendo un tiempo de retardo en la función de salida.

4.3 MODELO CON RETARDO

Una neurona artificial con un retardo de tiempo es un dispositivo procesador elemental que puede ser entendido de la siguiente forma

$$F_N(t) = F_0(m(t - \delta)), \text{ con } m(t) = F_1(I(t))$$

y donde δ es, precisamente, el tiempo de retardo de la neurona. Esto es, la neurona no responde instantáneamente a la señal de entrada $I(t)$, pero produce su señal de salida después del retardo δ . En esta forma, la función de entrada de la

neurona esta aún definida implícitamente como la solución de la ecuación diferencial (1.1), mientras su función de salida $F_0(t)$ está definida por la ecuación (1.2). Sin embargo, al realizar la integración de la ecuación (1.1) en el intervalo $t_0 \leq t \leq t_f$, debemos considerar ahora una condición inicial ($t_0 - \delta$).

Ahora bien, del experimento mostrado en la figura 4.7 hemos medido un retardo total de $5.2\mu s$ en el circuito electrónico. Usando este tiempo de retardo en las ecuaciones (1.1) y (1.2) encontramos, numéricamente, la conducta mostrada en la figura 4.15.

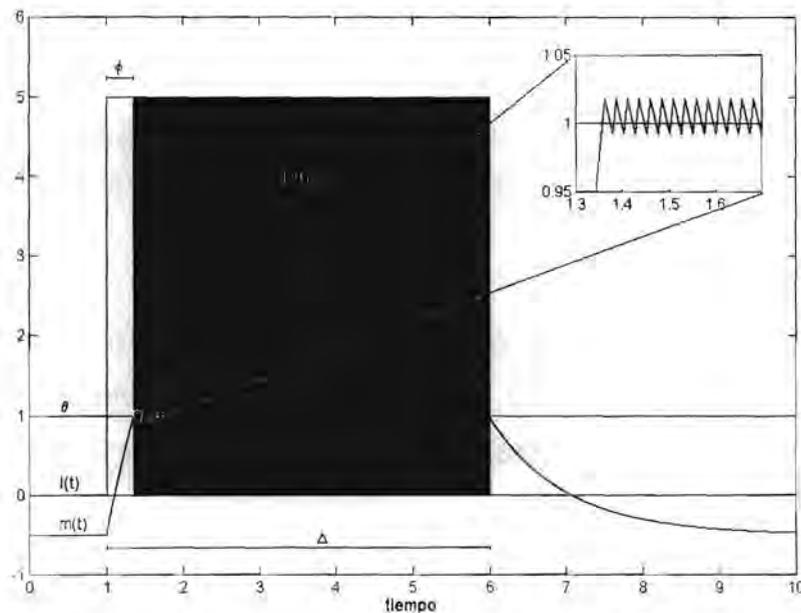


Figura 4.15. Respuesta oscilatoria del modelo matemático extendido. Los parámetros de la neurona son $m_0 = -0.5$, $\tau = 1$, $\theta = 1$, $k = 5$, $w = -1$, mientras que los de la entrada externa son $E = 5$ y $\Delta = 5$.

Como se puede apreciar en la figura 4.15, la presencia de un tiempo de retardo en la operación de la neurona da cuenta de una respuesta oscilatoria al pulso de entrada. A primera vista, las simulaciones de las figuras 4.13 y 4.15 son muy similares desde un punto de vista cualitativo. Esto es, ambos modelos muestran un comportamiento oscilatorio pero con diferente forma de onda. El potencial de la neurona del modelo electrónico tiene una forma de onda suave, mientras que el nuevo modelo matemático tiene cambios abruptos. En adición, la respuesta del modelo matemático es un tren de pulsos perfectamente

rectangulares, mientras que la respuesta del circuito electrónico tiene ligeras deformaciones. Estas diferencias se ilustran en la figura 4.16.

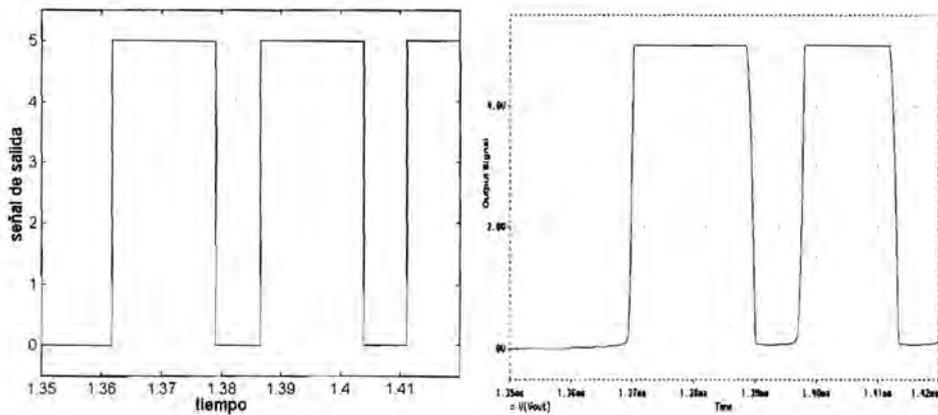


Figura 4.16. Forma de onda de la respuesta oscilatoria.

Las diferencias entre las dos señales son evidentes. La primera diferencia importante es encontrada en la forma del primer pulso de salida. Nótese que en la neurona electrónica este pulso es más ancho que en el modelo matemático, a pesar de que ambas señales tienen la misma frecuencia. Como una consecuencia de esto, la onda de salida del circuito electrónico está desplazada a la derecha. En segundo lugar, los pulsos de salida del modelo matemático son rectangulares, mientras que los del circuito electrónico tienen pendiente finita. Debido a esto, esperamos que el espectro de Fourier de estas señales será diferente. De esta forma podemos concluir que el nuevo modelo matemático no describe completamente el comportamiento de la neurona electrónica.

CONCLUSIONES

En este trabajo, hemos realizado el diseño de un modelo de neurona electrónica el cual cuenta con tres diferentes módulos funcionales conectados en serie. El primer módulo implementa la suma total ponderada de los estímulos que llegan a la neurona. El segundo implementa al potencial de la neurona y su evolución. Finalmente, el último módulo implementa la respuesta de la neurona. En nuestro modelo, la salida del primer módulo actúa como un término de forzamiento para el segundo módulo, mientras la salida del módulo de respuesta depende de el estado del segundo módulo. En nuestro diseño somos capaces de ajustar cada parámetro de la red individualmente, por lo que es posible implementar diferentes tipos de neurona, más aun, nuestro diseño nos permite implementar pequeñas redes de arquitectura arbitraria de manera sencilla. Adicionalmente, con este diseño somos capaces de llevar a cabo fácilmente experimentos que son muy difíciles de simular en computadoras digitales, con la ventaja de poder observar los diversos comportamientos dinámicos en tiempo real. Además, el análisis de sensibilidad de parámetros del modelo de procesador neuronal es más fácil de realizar en el circuito electrónico, además de ser robusto y fácil de operar.

En este trabajo, presentamos una serie de experimentos con el propósito de caracterizar un efecto de acoplamiento entre la evolución de los potenciales y las respuestas de las neuronas, pudimos observar que las propiedades dinámicas

observadas en el circuito electrónico coinciden con las que se obtuvieron en el análisis del modelo matemático. Consideramos que los modelos electrónicos analógicos jugarán un papel muy importante en el modelado de redes neuronales artificiales, particularmente como una herramienta auxiliar para entender el comportamiento de pequeñas redes recurrentes. Adicionalmente, creemos fuertemente que el uso de modelos neuronales analógicos ayudarán al desarrollo de nuevas tecnologías para aplicaciones prácticas como pueden ser la construcción de memorias a corto plazo [13].

Por otra parte, en el análisis matemático que se llevo a cabo, hemos mostrado que la magnitud del peso de conexión de una neurona artificial con autoconexión no puede tomar cualquier valor. Hemos mostrado que la neurona responderá con un simple pulso si el peso de conexión está restringido al intervalo (w_{\min}, w_{\max}) . También mostramos que la neurona seguirá respondiendo, aun cuando el pulso externo ha desaparecido, para valores positivos grandes del peso de conexión. Sin embargo, el modelo de neurona no es significativo para valores negativos grandes. Por otro lado, la neurona electrónica tiene un comportamiento significativo bajo estas condiciones. En este caso, hemos encontrado que la neurona electrónica tiene una respuesta oscilatoria tan prolongada como la señal externa está activa. En este punto, extendimos nuestro modelo matemático incluyendo un retardo de tiempo en la generación de la señal de salida. A pesar de que el nuevo modelo tiene los mismos comportamientos cualitativos que el circuito electrónico, encontramos diferencias cuantitativas muy importantes entre ellos. Esto es, los componentes de los modelos electrónicos tienen comportamientos intrínsecos que no son descriptibles en términos del tiempo de retardo. De tal forma, que si estuviéramos interesados en tener una descripción más completa de los comportamientos de la neurona electrónica, entonces requerimos desarrollar un modelo matemático más complejo. Ahora bien, los modelos electrónicos de neuronas artificiales son de sumo interés para los neuroingenieros debido a que ellos son los bloques constructores de instrumentos novedosos de procesamiento de señales. Sin embargo, debemos tener una descripción detallada de las respuestas características de estas neuronas electrónicas a diferentes tipos de señales con el fin de concebir sus posibles aplicaciones. En este sentido, una descripción matemática del

comportamiento del modelo electrónico será necesaria, tarde o temprano, para lograr estas metas. En otras palabras, creemos que el futuro desarrollo de instrumentos basados en redes neuronales dependerá de nuestra habilidad para describir y predecir el comportamiento de las redes desarrolladas con estos procesadores neuronales elementales.

REFERENCIAS

- [1] Pineda, F. J., Dynamics and architecture for neural computation. *Journal of Complexity*, **4**, 216 - 245 (1988).
- [2] Hirsch, M. W., Convergent activation dynamics in continuous time networks. *Neural Networks*, **2**, 331 - 349 (1989).
- [3] Hopfield, J. J., Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proc. Nat'l. Academy Sciences*, **79**, 2554 - 2558 (1982).
- [4] Choi, J. and Sheu, B. J., *Neural information processing and VLSI*. Kluwer Academic Publishers, Boston (1995).
- [5] Gupta, M. M. and Rao, D. H., Neuro-control systems: A Tutorial. In Gupta, M. M. and Rao, D. H. (eds.), *Neuro-control systems: Theory and applications*. IEEE Press, New York (1994).
- [6] Sejnowski, T. J., Skeleton filters in the brain. In Hinton, G. E. and Anderson, J. A. (eds.), *Parallel models of associative memory*. Erlbaum, NJ (1981).
- [7] Elman, J. L., Finding structure in time. *Cognitive Science*, **14**, 179 - 211 (1990).
- [8] Beer, R. D., On the dynamics of small continuous-time recurrent neural networks. To appear in *Adaptive Behavior* (1995).

- [9] Cragg, B. C. and Temperley, H. N. V., Memory: The analogy with ferro-magnetic hysteresis. *Brain* **78**, 304-316 (1955).
- [10] Hoffman, G. W., Neuron with hysteresis? In *Computer simulations in brain science* (Cotterill, R., ed.). Cambridge University Press, Cambridge, 74-87 (1988).
- [11] Tom, M. D. and Tenorio, M. F., A neural computation model with short-term memory. *IEEE Transactions On Neural Networks* **6**, 387-397 (1995).
- [12] Marcus, C. M., and Westervelt, R. M., Dynamics of analog neural networks with time delay. In Touretzky, D. S. (ed.), *Advances in neural information processing systems I*. Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo, CA (1989).
- [13] Herrera, A., Pérez J.L., Quintana S. and Prieto R., Analysis of a short term memory phenomenon in a single neuron. *Sian Ka'an 97 International Conference The Second Join Mexico-US Internatonal Workshop on Neural Networks and Neurocontrol*, Playa del Carmen Q.R. (1997).
- [14] Quintana S., Herrera, A., and Pérez J.L., A Comparative study of two emelementary neural processors. *Sian Ka'an 97 International Conference The Second Join Mexico-US Internatonal Workshop on Neural Networks and Neurocontrol*, Playa del Carmen Q.R. (1997).
- [15] Carey G. F., Richardson W. B., Reed C. S. and Mulvaney B., *Circuit, Device and Process Simulation Mathematical and Numerical Aspects*. John Wiley & Sons, Chichester, (1996).
- [16] Kandel E. R. and Schwartz J. H., *Principles of Neural Science*. Elsevier Science Publishing, New York, (1985).
- [17] Soclof S., *Design and Applications of Analog Integrated Circuits*. Prentice Hall, (1991).
- [18] Sendra A. and Smith K. C., *Dispositivos Electrónicos y Amplificación de Señales*. Interamericana, (1987).
- [19] Savant, Roden and Carpenter, *Diseño Electrónico*. Addison-Wesley Iberoamericana, (1992).
- [20] Franco S., *Design with Operational Amplifier and Analog Integrated Circuits*. McGraw Hill, (1988).
- [21] Graeme J. G., Tobey G. E. and Huelsman L. P., *Operational Amplifiers: Design and Applications*. McGraw-Hill, Tokyo, (1971).
- [22] Mead C., *Analog VLSI and Neural Systems*. Addison-Wesley Publishing, New York, (1989).

- [23] Horowitz P. and Winfield H., The Art of Electronics. Cambridge University Press, New York, (1993).
- [24] Millman J. and Halkias C., Integrated Circuits: Analog and Digital Circuits and Systems. McGraw-Hill, Tokyo, (1972).
- [25] Ranville E.D. and Bedient P.E., Ecuaciones Diferenciales, Interamericana, México D.F., (1977).
- [26] Elsgoltz L., Ecuaciones Diferenciales y Calculo Variacional, Ediciones de Cultura Popular, México D.F., (1975).