

51
201

006994

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES

ACATLAN

97 OCT 29 AM 10 53

SECRETARIA DE EDUCACION
PUBLICA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

**"ANALISIS DE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN
ESTRUCTURAS AXISIMETRICAS"**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO CIVIL

P R E S E N T A :

NEFTALI SARMENTO SOLANO

✓



ACATLAN, EDO. DE MEX.

OCTUBRE 1997.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLÁN"
PROGRAMA DE INGENIERÍA CIVIL

SR. NEFTALI SARMIENTO SOLANO
ALUMNO DE LA CARRERA DE INGENIERÍA CIVIL.

P R E S E N T E .

En atención a su solicitud presentada con fecha de 25 de octubre de 1995, me complace notificarle que esta Jefatura de Programa aprobó el tema que propuso, para que lo desarrolle como tesis de su examen profesional de INGENIERO CIVIL.

"ANÁLISIS DE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN ESTRUCTURAS
ASIMÉTRICAS".

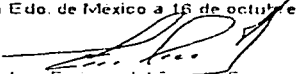
INTRODUCCIÓN

1. MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO
 2. PROBLEMAS ASIMÉTRICOS EN INGENIERÍA CIVIL
 3. PROGRAMA DE COMPUTADORA
 4. APLICACIONES A TÚNELES Y LUMBRERAS
- CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Asimismo fue designado como asesor de tesis el ING. ROBERTO MAGAÑA DEL TORO, pido a usted, toma nota en cumplimiento de lo especificado en la Ley de Profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses, como requisito básico para sustentar examen profesional, así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de esta.

Esta comunicación deberá publicarse en el interior del trabajo profesional.

ATENTAMENTE .
" POR MI RAZA HABLARA EL ESPÍRITU " .
Acatlán Edo. de México a 16 de octubre de 1997


Ing. Enrique del Castillo Fragoso
Jefe del Programa de Ingeniería Civil



ENEP-ACATLÁN
JEFATURA DEL
PROGRAMA DE INGENIERÍA

A mis padres:

Irene Solano y Manuel Sarmiento

A quienes jamás encontrare la forma de agradecer todo su cariño, comprensión y apoyo brindados en las derrotas y logros obtenidos haciendo de éste un triunfo más sayo que mío, dándome la posibilidad de crecer junto a ustedes y aprender que el amor y la humildad es lo que hace al varón.

Gracias.

A mis hermanos:

Elmer e Ixtzel

Por ser ellos ejemplos de esfuerzo y dedicación, que me motivaron para superarme día con día.

A Juanita:

Por darme la oportunidad de demostrar todo lo que significas para mí y llegar en el momento en que más lo necesitaba.

A todas las personas, familiares y amigos, que me han demostrado su confianza y apoyo en todo momento.

AGRADECIMIENTOS

Al M. I. Roberto Magaña del Toro por su invaluable ayuda y atinada dirección en la realización de esta tesis.

Al Dr. Miguel P. Romo por su interés y atinados consejos durante el desarrollo del trabajo.

Al Instituto de Ingeniería de la UNAM, por todas las facilidades otorgadas para la realización de esta tesis.

A todos mis amigos y compañeros de estudio que contribuyeron de alguna manera en la culminación de este trabajo.

ÍNDICE

Pag.

CAPÍTULO 1. Introducción.

1.1. Generalidades.	1
1.2. Antecedentes.	3
1.2.1. Estado de esfuerzos en una masa de suelo.	3
1.2.2. Esfuerzos principales.	4
1.2.3. Estabilidad de una masa de tierra.	4
1.2.4. Estructuras axisimétricas.	5
1.3. Objetivos.	6
1.4. Resumen.	6

CAPÍTULO 2. Método del elemento finito.

2.1 Fundamentos.	7
2.1.1. Discretización del medio continuo.	8
2.1.2. Métodos variacionales.	10
2.1.3. Energía potencial de deformación.	11
2.1.4. Formulación de la matriz de rigidez elemental.	13
2.1.5. La elastoplasticidad y su implementación.	15
2.1.5.1. Formulación teórica.	15
2.1.5.2. Implementación.	17
2.2. Tipos de elementos.	21
2.3. Formulación para el caso axisimétrico.	24
2.3.1 Función de desplazamientos.	25
2.3.2. Funciones de forma.	26
2.3.3. Componentes de deformación.	27
2.3.4. Matriz de elasticidad.	29

2.3.5. Matriz de rigidez.	29
2.3.6. Fuerzas másicas distribuidas.	30
2.3.7. Fuerzas nodales debidas a esfuerzos iniciales.	30
2.3.8. Fuerzas nodales exteriores.	31
2.3.9. Formulación axisimétrica para elementos en sectores circulares.	31
2.3.10. Implementación para un material elasto-plástico perfecto.	32
CAPÍTULO 3. Problemas axisimétricos en Ingeniería Civil.	
3.1. Generalidades.	34
3.2. Tipos de problemas.	35
3.2.1. Esfuerzos debidos a una carga puntual concentrada.	35
3.2.2. Cimentación superficial circular.	36
3.2.3. Pilotes, pilas y cilindros de cimentación.	37
3.2.4. Túneles y lumbreras.	37
3.3. Estudios previos.	38
3.3.1. Túnel circular sencillo en una masa infinita, problema bidimensional.	38
3.3.2. Lumbrera aislada, problema bidimensional.	40
3.3.3. Solución elastoplástica para un túnel circular.	42
3.4. Casos a analizar.	45
3.4.1. Túnel de sección circular.	46
3.4.2. Lumbrera.	46
CAPÍTULO 4. Programa de computadora.	
4.1. Descripción del programa.	48
4.1.1. Características principales.	48
4.1.2. Diagrama de bloques.	49
4.2. Subrutinas empleadas.	49
4.2.1. Archivos.	51
4.3. Manual de usuario.	52

CAPÍTULO 5. Aplicaciones a túneles y lumbreras.

5.1. Estudios elásticos.

5.1.1. Cilindro hueco sujeto a una presión interna.

5.1.2. Túnel de sección circular.

5.1.3. Lumbrera.

5.2. Estudios plásticos.

5.2.1. Túnel bajo una presión hidrostática.

5.2.2. Lumbrera, modelo elastoplástico.

CAPÍTULO 6. Conclusiones y recomendaciones.

Bibliografía y referencias.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1. GENERALIDADES.

Por lo regular, en un problema de ingeniería como por ejemplo: determinar la variación de esfuerzos en la excavación de una lumbrera, el análisis del comportamiento de un túnel durante su construcción, determinar el estado de esfuerzos y deformaciones de una estructura térrea (terraplén, excavación abierta), etc., prevalecen ciertas características que son comunes en todos ellos.

Una primera característica de importancia, es que en este tipo de problemas es necesario emplear un modelo físico real. Esta herramienta es útil para estudiar el comportamiento del fenómeno o problema en cuestión.

Otra característica común es el empleo de expresiones o relaciones matemáticas del tipo analítico, algebraico o geométrico, para poder definir toda la información que se encuentra involucrada en el modelo físico.

Una tercera consideración se refiere al comportamiento de la solución en relación a ciertos parámetros como son: condiciones iniciales del problema, así como sus condiciones de frontera.

Una cuarta característica no menos importante que se debe cumplir, es que dada una ecuación algebraica o diferencial que define al modelo físico y fijando las condiciones iniciales y de frontera, existe una solución única que cumple con estas condiciones, lo que se conoce como "unicidad" del problema.

Un método para obtener la solución aproximada de este tipo de problemas, es el Método del Elemento Finito, que es un procedimiento numérico-variacional, que ha cobrado mucha importancia en las últimas décadas gracias al avance en el equipo de cálculo electrónico.

El análisis de estructuras de tierra, considerando este método es de gran interés y ha tenido grandes aplicaciones. En un principio se han analizado obras geotécnicas en su estructuración total (construidas), sin embargo al tener las herramientas necesarias y saber que los procedimientos constructivos son muy importantes en el comportamiento de cualquier obra durante y después de su construcción, se ha buscado un análisis más completo que nos permita estudiar su evolución durante las etapas constructivas.

Los procedimientos constructivos específicos en este tipo de obras son: la gradual **substracción** de materiales en excavaciones abiertas o subterráneas y la construcción de terraplenes.

Sin embargo, este tipo de análisis se complica por las siguientes razones: la frontera del dominio de análisis cambia continuamente; la existencia de elementos estructurales que intervienen en el proceso de construcción o excavación (además, puntales, muros de retención y revestimientos); en el ambiente de construcción o excavación se pueden encontrar una o varias estructuras vecinas; y por último, el comportamiento del suelo durante el proceso constructivo es muy complicado.

Este último aspecto quiere decir, que durante la construcción de una obra geotécnica, el estado de esfuerzos puede variar en función de las condiciones de carga a que este sometido el suelo. Por ejemplo, durante una excavación se presentan esfuerzos de tensión y por consiguiente agrietamientos; a diferencia del estado de compresión que inducen las cargas transmitidas por una cimentación.

Además, debido a los grandes esfuerzos que se pueden presentar, se generan zonas de **fluencia** donde el suelo se comporta plásticamente. Por lo cual, es importante considerar los efectos plástico en el análisis de esfuerzos y deformaciones.

1.2. ANTECEDENTES.

1.2.1. Estado de esfuerzos en una masa de suelo.

Los esfuerzos en el interior de una masa de suelo están distribuidos por cargas exteriores aplicadas al mismo y por su propio peso.

Los estados de equilibrio plástico que se producen en todos los puntos de una masa seminfinita de suelo sujeta sólo a su propio peso, fueron estudiados por Rankine, quien supuso un elemento de suelo de altura dz , situado a una profundidad z , en el interior de una masa de suelo seco en reposo (sin ningún desplazamiento en su estado natural) como se muestra en la fig. 1.1.

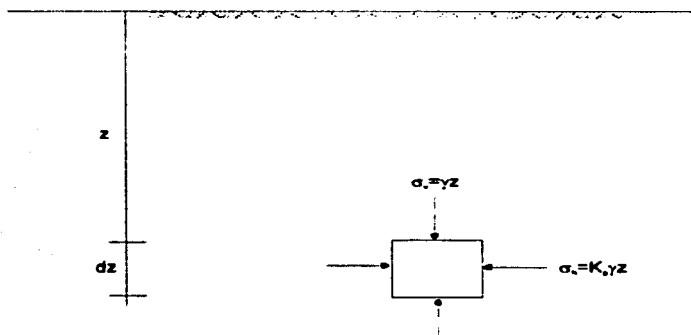


Fig 1.1 Esfuerzos actuantes sobre un elemento de suelo en "reposo".

De esta consideración, se tiene que el esfuerzo vertical efectivo actuante sobre la estructura del elemento es:

$$\sigma_v = \gamma z \quad (1.1)$$

Donde γ es el peso volumétrico que corresponde al estado en que se encuentre el suelo. Existe también una presión lateral que origina un esfuerzo horizontal que empíricamente se ha aceptado como:

$$\sigma_h = K_0 \gamma z \quad (1.2)$$

Donde K_0 es la constante de proporcionalidad o coeficiente de presión lateral en reposo.

Las soluciones para conocer los esfuerzos producidos por cargas aplicadas exteriormente sobre una masa de suelo, parten de la teoría de Elasticidad. En esta teoría suponen que el suelo es linealmente elástico (el esfuerzo es proporcional a la deformación), es homogéneo (sus propiedades no varían de un punto a otro), es isótropo (sus propiedades son las mismas en cualquier dirección) y de extensión semiinfinita (limitado por una sola frontera plana). Estas soluciones (Boussinesq, Damy, etc.) se emplean comúnmente en problemas de asentamientos, aunque el suelo por lo general, no se ajuste a las hipótesis mencionadas.

1.2.2. Esfuerzos principales.

En cualquier punto sometido a esfuerzos existen tres planos ortogonales (perpendiculares entre sí), donde los esfuerzos tangenciales son nulos. Por tal razón, a estos planos se les llama principales. Los esfuerzos normales que actúan sobre estos planos se denominan esfuerzos principales, de los cuales, el de mayor magnitud es el esfuerzo principal mayor (σ_1), el de menor magnitud es el esfuerzo principal menor (σ_3) y el de valor intermedio esfuerzo principal intermedio (σ_2).

Cuando los esfuerzos en el medio se encuentran en reposo, el plano horizontal que pasa por un determinado punto, es un plano principal, al igual que todos los planos verticales a través de dicho punto (ref. 12). Por lo tanto, se tiene que cuando $K_0 < 1$, el esfuerzo vertical que se define por la expresión (1.1), es igual al esfuerzo principal mayor ($\sigma_1 = \sigma_v$); y el esfuerzo horizontal, de acuerdo a la expresión (1.2), es igual al esfuerzo principal menor e intermedio ($\sigma_h = \sigma_3 = \sigma_2$).

A partir de los esfuerzos principales, se pueden determinar los esfuerzos normales y tangenciales de ese mismo punto en cualquier dirección, que al graficarlos en un plano (σ - τ) definen un lugar geométrico conocido como Círculo de Mohr.

1.2.3. Estabilidad de una masa de tierra.

La estabilidad de una masa de tierra se analiza a partir de las condiciones de esfuerzo en un punto de la masa que supuestamente se encuentra en un estado de falla incipiente (ref. 11). Es decir, se considera que la seguridad en un punto puede medirse por el esfuerzo cortante máximo que puede soportar y que a su vez, es función del esfuerzo normal efectivo ($\bar{\sigma}$) actuante en el plano en que ocurre la falla.

Esta teoría es debida a Mohr-Coulomb y modificada por Terzaghi al tomar en cuenta la influencia del agua contenida en el suelo. También supone que las líneas de falla no concurren únicamente en el origen de un plano de coordenadas (σ - τ), sino que cortan al eje vertical formando una cierta ordenada, conocida como cohesión (c). Este concepto define la resistencia al esfuerzo cortante, que se expresa matemáticamente como:

$$s = c + \bar{\sigma} \tan \phi \quad (1.3)$$

La expresión anterior representa el lugar geométrico de los esfuerzos cortantes de falla, correspondientes a distintos esfuerzos normales. Para suelos cohesivos ($\phi=0$), la resistencia se expresa como:

$$s = \frac{1}{2} q_u = c \quad (1.4)$$

donde q_u es la resistencia a la compresión simple del suelo.

Las expresiones teóricas que se derivan de la ecuación (1.4) se pueden emplear en muchos problemas prácticos que se relacionan con la resistencia al corte de las arcillas saturadas de consistencia blanda a media.

1.2.4. Estructuras axisimétricas.

El problema de distribución de esfuerzos en cuerpos de revolución (sólidos axisimétricos) sometidos a cargas de revolución o axiales es de considerable interés práctico. Algunos ejemplos de estructuras axisimétricas dentro de las obras geotécnicas son: la construcción de túneles, lumbreras (accesos verticales ó pozos), zapatas aisladas de geometría circular, pilotes circulares, etc. y todas aquellas que tienen la característica de ser simétricas radialmente con respecto a un eje de revolución.

El análisis de este tipo de estructuras se ha manejado de la siguiente forma. Por ejemplo, la estabilidad de un túnel durante su construcción depende del procedimiento de excavación y de las propiedades esfuerzo-deformación y resistencia del suelo. Durante la construcción de un túnel el estado de esfuerzos *in situ* se modifica debido al proceso de descarga que origina la excavación del mismo.

Los aspectos principales para determinar el estado de esfuerzo y deformación en cuerpos de revolución o cavidades aisladas (túneles y lumbreras sin revestimiento), parten de la Teoría de la Elasticidad o de la Mecánica del Medio Continuo. Con estas teorías, que se basan en las suposiciones mencionadas en el inciso 1.2.1, se han obtenido soluciones a estos problemas y que se analizarán en los capítulos siguientes.

1.3 OBJETIVOS.

- Este trabajo tiene como objetivo principal: implementar en un programa de elementos finitos una generalización para el análisis de esfuerzos y deformaciones en problemas axisimétricos.
- Para cumplir con el objetivo anterior, es necesario conocer el algoritmo en que se basa el programa TEST92 (bidimensional para materiales elastoplásticos) y determinar su estructura general.
- Al mismo tiempo, se revisará la bibliografía relacionada con el propósito de conocer los fundamentos del método que emplea el programa.

1.4. RESUMEN.

En el capítulo dos se dan a conocer las bases y fundamentos del Método del Elemento Finito, para el cálculo de esfuerzos y deformaciones en un modelo de suelo elástico-lineal y elastoplástico perfecto. Se describe brevemente el concepto de energía potencial mínima para deducir las expresiones que determinan la matriz de rigideces de un elemento y el vector de cargas nodales equivalente.

Posteriormente, dentro de este mismo capítulo se desarrolla la formulación de un elemento finito axisimétrico, empleando como sección plana de revolución un elemento isoparamétrico de cuatro nodos.

En el tercer capítulo, se mencionan los diferentes problemas axisimétricos que se presentan en obras de Ingeniería Civil, principalmente en el área de mecánica de suelos, y que se pueden analizar con el método descrito en el capítulo anterior.

En el cuarto capítulo, se describen las características principales del programa de computadora estructurado para el análisis axisimétrico. También, se presenta el manual de usuario con las instrucciones necesarias para preparar un archivo de datos y poder ejecutar el programa.

El quinto capítulo está dedicado al estudio numérico de túneles y lumbreras, como casos particulares de este trabajo, y poder comprobar la formulación axisimétrica implementada al programa de elementos finitos. Primero se realizan estudios con un modelo elástico-lineal y posteriormente, se analizan estos problemas con un modelo de suelo elastoplástico perfecto.

Finalmente en el capítulo seis, se presentan las conclusiones obtenidas de los estudios realizados en este trabajo.

CAPÍTULO 2

MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

2.1. FUNDAMENTOS.

Para estudiar el comportamiento de cualquier fenómeno físico es necesario representarlo por medio de modelos matemáticos. Esto implica emplear una o varias ecuaciones diferenciales ó plantearse como un problema de funcionales equivalente (un conjunto de funciones).

El método de elementos finitos es un método numérico variacional aproximado para resolver problemas de maximización o minimización de funcionales.

La secuencia de este método implica los siguientes aspectos:

a) Discretización del medio continuo, que consiste en dividir la región o el dominio de las variables de las ecuaciones diferenciales, mediante líneas imaginarias, donde cada región será un elemento finito.

b) Los elementos finitos estarán conectados entre si mediante un número discreto de puntos denominados nodos, y el campo de desplazamientos del elemento es representado por una combinación lineal de funciones de interpolación (funciones de desplazamiento).

c) Mediante el uso de métodos variacionales las funciones diferenciales que gobiernan el problema se transforman en ecuaciones que gobiernan en forma aislada a todos los elementos finitos, obteniendo la matriz de rigidez elemental.

d) Las matrices de los elementos se ensamblan para obtener la matriz de rigidez global del sistema.

e) Los valores puntuales de las incógnitas de las ecuaciones diferenciales se conocen al resolver el sistema de ecuaciones.

f) Una vez conocidos los desplazamientos se calculan los esfuerzos y deformaciones de cada elemento.

A continuación se plantearán los conceptos básicos de la teoría del elemento finito, considerando los puntos anteriores.

2.1.1. Discretización del medio continuo.

Para estudiar más fácilmente el comportamiento de fenómenos físicos, en muchos casos el modelo se divide en un número finito de componentes bien definidos (sistemas discretos), ó en otros donde la subdivisión prosigue con un número infinito de elementos implicados (sistemas continuos).

Estos últimos se definen haciendo uso de expresiones matemáticas y se han propuesto a través de los años diversos métodos de discretización. Para lo cual, es necesario hacer alguna "aproximación" de tal naturaleza, que se acerque a la solución continua verdadera.

Los métodos generales para analizar problemas de naturaleza discreta, siguen un mismo patrón y por lo tanto, es posible definir un sistema discreto tipo. El estudio de estos problemas nos lleva a la primera definición del *método del elemento finito* como un procedimiento de aproximación de problemas continuos, de tal forma que:

- a) El continuo se divide en un número finito de partes (elementos), cuyo comportamiento se especifica mediante un número finito de parámetros.
- b) Se obtiene la solución del sistema completo como ensamblaje de los elementos.

Por otra parte, todo problema del medio continuo se debe idealizar para su estudio en diversos modelos. En este caso, la modelación matemática tiene un papel fundamental, que consiste en expresar en un lenguaje formal las leyes que gobiernan ese problema. Estas leyes son los principios básicos de la Mecánica del Medio Continuo, que se encarga de estudiar el estado de esfuerzos y deformaciones en sólidos, líquidos y gases. Esta teoría busca principalmente satisfacer las ecuaciones de equilibrio, las relaciones cinemáticas y las ecuaciones constitutivas (ref. 22).

Se requiere entonces, llegar a una formulación variacional, que consiste en expresar el problema en ecuaciones diferenciales adecuadas y condiciones de frontera que se imponen a la función o funciones incógnitas.

De esta forma, todo problema de ingeniería queda representado por:

$$L[u] = f \text{ en } \Omega \quad (2.1)$$

$$B[u] = g \text{ en } \Gamma \quad (2.2)$$

Donde L y B son operadores diferenciales, las componentes del vector u son las funciones incógnitas del problema y las componentes del vector f y g son funciones conocidas. La ecuación (2.1), representa el equilibrio en cualquier punto interior de la estructura (dentro del dominio Ω) y la ecuación (2.2), representa las condiciones de frontera (Γ), (fig. 2.1).

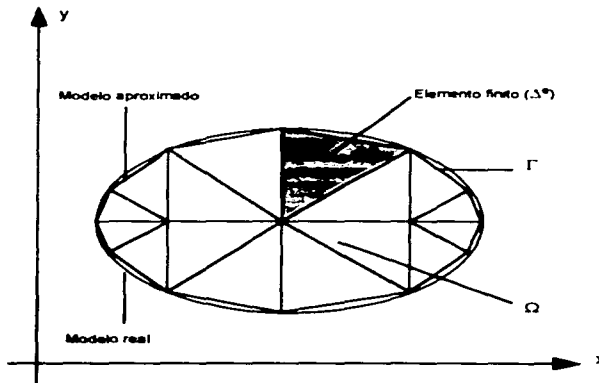


Fig 2.1 Región dividida en elementos finitos.

Una vez planteado el modelo real donde se presenta el fenómeno físico en cuestión, se procede a dividirlo en subregiones denominados *elementos finitos* (Δ^n), que al unirlos se obtiene un modelo aproximado geoméricamente al original. Esta partición define una red o *mallado de elementos finitos* y los puntos de intersección se denominan *puntos nodales* o *nodos*, como se muestra en la fig. 2.1.

2.1.2. Métodos variacionales.

Para determinar los valores máximos y mínimos de una funcional se requiere el uso de métodos variacionales (diferencias finitas, Kantorovich, Trefftz, etc.). Donde la idea fundamental consiste en que el problema variacional se considera como límite para cierto problema sobre el extremo de una función de un número finito de variables. Esto último se resuelve con los métodos comunes, y luego se obtiene mediante el paso al límite, la solución al problema variacional correspondiente.

Lo anterior quiere decir, que a partir de una funcional $F[y(x)]$ que tiene un infinito número de variables, se puede desarrollar la función $y(x)$ en: series de Potencias, en series de Fourier ó en general, en algunas series del tipo:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \Phi_n(x) \quad (2.3)$$

Donde $\Phi_n(x)$ son funciones dadas. Retomando la función $y(x)$, ésta se determina dando los valores de todos los coeficientes C_n y el valor de la funcional se obtiene fijando la sucesión finita de dichos coeficientes, es decir, la funcional queda en función de un conjunto infinito de variables:

$$F[y(x)] = \Phi(C_0, C_1, C_2, \dots, C_n, \dots) \quad (2.4)$$

De los métodos antes mencionados, el que actualmente tiene mayor aplicación es el **método de Ritz** o Rayleigh-Ritz, el cual consiste en sustituir en el principio variacional determinado por las ecuaciones (2.1) y (2.2), un conjunto de funciones expresadas en términos de sus coeficientes indeterminados, los cuales se conocen al hacer mínimo o máximo el valor de la funcional. Es decir, se propone una solución aproximada, de la forma:

$$u = \sum_{r=1}^m C_r \Phi_r \quad (2.5)$$

Donde Φ , son m funciones conocidas y C_r , son coeficientes indeterminados. La sustitución se da en la funcional $I(u)$ que representa la energía total del sistema. De esta forma, la ecuación (2.5), puede quedar en función de sus puntos críticos, como se muestra:

$$I(u^*); u^* = \Phi(C_0, C_1, C_2, \dots, C_m) \quad (2.6)$$

Para determinar el mínimo de esta funcional, los coeficientes C_r se obtienen aplicando la siguiente condición de extremo en función de sus parámetros, de tal forma que se cumpla:

$$\frac{\partial I[u^*]}{\partial C_r} = 0 \quad (r = 1, \dots, m) \quad (2.7)$$

De lo cual, el problema variacional se ha transformado en un problema elemental de máximos y mínimos.

Puesto que el método del elemento finito proporciona una solución aproximada (u^*), como aquellos puntos críticos de $I(u)$, de acuerdo a la ecuación (2.7). Para determinar estos puntos críticos esta ecuación se resolverá en la forma antes descrita donde (u^*) es una función de interpolación, la cual se construye a partir de los elementos finitos (Δ^*). De tal forma, que una vez seleccionada la malla se tienen elementos en los que definimos polinomios de interpolación locales (funciones de desplazamiento) y que posteriormente se ensamblará a un polinomio de interpolación global.

2.1.3. Energía potencial de deformación.

El método del elemento finito es equivalente a la minimización de la energía potencial del sistema, la cual está en función del campo de desplazamientos dado. Si este campo de desplazamiento ha sido bien formulado (en base a un método variacional), deberá producirse convergencia hacia la solución exacta.

El principio del trabajo virtual establece que la suma de la energía potencial de las cargas que actúan en un cuerpo rígido y la energía de deformación almacenada debido a desplazamientos virtuales es igual a cero (ref. 9), se tiene entonces que:

$$\pi = U + W_p \quad (2.8)$$

donde:

π = energía potencial.

U = energía de deformación interna.

$W_p = -W$ = trabajo de las cargas aplicadas.

La energía potencial total debe asumir no nada más un valor estacionario, sino también mínimo, para satisfacer una determinada configuración de desplazamientos, por lo cual:

$$d\pi = 0$$

$$d\pi = dU + dW_p = dU - dW = 0 \quad (2.9)$$

La energía de deformación está definida por:

$$\begin{aligned} U &= \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv \\ \delta U &= \int_V \sigma_{ij} (\delta \varepsilon_{ij}) dv \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde:

σ_{ij} = Tensor esfuerzo.

ε_{ij} = Tensor deformación.

El trabajo por cargas aplicadas está dado por:

$$\begin{aligned} W &= \int_s T_i u_i ds + \int_V X_i u_i dv \\ \delta W &= \int_s T_i \delta u_i ds + \int_V X_i \delta u_i dv \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde:

u_i = Configuración inicial de desplazamientos.

T_i = Tracción superficial.

X_i = Tensor de fuerzas de cuerpo.

dv = Diferencial de volumen

ds = Diferencial de superficie.

De acuerdo con la ecuación (2.9), se tiene:

$$\int_V \sigma_{ij} (\delta \varepsilon_{ij}) dv = \int_s T_i \delta u_i ds + \int_V X_i \delta u_i dv \quad (2.12)$$

En notación matricial se escribe como:

$$\int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dv = \int_V \{\delta u\}^T \{X\} dv + \int_s \{\delta u\}^T \{T\} ds \quad (2.13)$$

2.1.4. Formulación de la matriz de rigidez elemental.

Todo cálculo por elementos finitos, siendo un método aproximado busca una expresión aproximada de la forma:

$$\{U\} = \sum_1^r N_i a_i = [N_i, N_j, N_k] \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \\ a_k \end{Bmatrix} = [N]\{a\} \quad (2.14)$$

En donde N_i son funciones de forma expresadas en términos de sus variables independientes y los parámetros a_i son incógnitas. Las funciones de forma se obtienen a partir de la geometría del elemento finito y del polinomio de desplazamientos que se propone como solución (ref. 25). De esta forma, se tiene:

$$\begin{aligned} \{\delta U\} &= [N]\{\delta a\} \\ \{\delta U\}^T &= \{\delta a\}^T [N]^T \end{aligned} \quad (2.15)$$

La relación entre desplazamientos y deformaciones está dada por la expresión:

$$\begin{aligned} \{\epsilon\} &= [L]\{U\} = [L][N]\{a\} \\ \{\epsilon\} &= [B]\{a\} \quad \text{siendo} \quad [B] = [L][N] \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde $[L]$ es la matriz de operadores diferenciales. Entonces:

$$\begin{aligned} \{\delta \epsilon\} &= [L][N]\{\delta a\} \\ \{\delta \epsilon\}^T &= \{\delta a\}^T [N]^T [L]^T \end{aligned} \quad (2.17)$$

De la relación esfuerzo-deformación se conoce:

$$[\sigma] = [D]\{\epsilon\} \quad (2.18)$$

donde $[D]$ es la matriz de elasticidad. Sustituyendo la ecuación (2.16) en (2.18) se tiene:

$$[\sigma] = [D][L][N]\{a\} \quad (2.19)$$

Sustituyendo en la expresión (2.13),

$$\int_V \{\delta e\}^T [N]^T [L]^T [D][L][N]\{e\} dv = \int_V \{\delta e\}^T [N]^T \{X\} dv + \int_S \{\delta e\}^T [N]^T \{T\} ds \quad (2.20)$$

Simplificando términos:

$$\iint [N]^T [L]^T [D][L][N]\{e\} dv = \iint [N]^T \{X\} dv + \iint [N]^T \{T\} ds \quad (2.21)$$

Llamando:

$$[B]^T = [N]^T [L]^T \quad (2.22)$$

Se tiene:

$$\int_V [B]^T [D][B]\{e\} dv = \int_V [N]^T \{X\} dv + \int_S [N]^T \{T\} ds \quad (2.23)$$

Esto nos lleva a que:

$$[K]\{e\} = \{P\} \quad (2.24)$$

Donde:

$$[K] = \int_V [B]^T [D][B] dv \quad (2.25)$$

$[K]$ =matriz de rigideces del elemento finito.

$\{e\}$ =vector de desplazamientos nodales.

$\{P\}$ =vector de cargas.

La expresión general una vez realizando el ensamble de las matrices de rigideces y vectores de carga interna de cada elemento, y considerando fuerzas externas concentradas actuantes en los nodos es:

$$\begin{aligned} [K]\{e\} + \{P\} &= \{r\} \\ [K] &= \sum [K]_e, \quad \{P\} = \sum \{P\}_e \\ \{r\} &= -\iint [N]^T \{X\} dv - \iint [N]^T \{T\} ds - \iint [B]^T [D]\{\epsilon_o\} dv - \iint [B]^T \{\sigma_o\} dv \end{aligned} \quad (2.26)$$

Donde $\{f^e\}$ es el vector de fuerzas internas de cada elemento debidas a fuerzas de cuerpo $\{X\}$, de tracción superficial $\{T\}$ y fuerzas debidas a esfuerzos y deformación iniciales. $\{F\}$ es el vector de fuerzas externas concentradas en los nodos.

Una vez que se determinan los desplazamientos al resolver el sistema de ecuaciones que resulta de la expresión (2.26) se calcula el estado de esfuerzos y deformaciones con lo siguiente.

$$\begin{aligned}\{e\} &= [B]\{a\} \\ \{\sigma\} &= [D][B]\{a\}\end{aligned}\tag{2.27}$$

Donde $\{a\}$ es el vector de desplazamiento que se obtiene al resolver el sistema de ecuaciones

2.1.5. La elastoplasticidad y su implementación.

La teoría de la elastoplasticidad, se aplica a problemas donde la solución plástica se obtiene al resolver primeramente una secuencia de problemas elásticos, debido a la no linealidad de las ecuaciones matemáticas involucradas

Una deformación elástica se presenta cuando el material es capaz de recuperar sus dimensiones originales, al quitar las fuerzas aplicadas. Una deformación plástica es la que permanece en el material después de suprimir las cargas actuantes, y si estas no cesan, la plastificación continúa hasta que se produce el agrietamiento

De esta forma, toda deformación está compuesta de una deformación elástica y otra plástica. Cuando esta última es despreciable en comparación con la primera, se dice que el material es elástico, y viceversa

La teoría de la elastoplasticidad ha sido ampliamente tratado para problemas geotécnicos (ref. 3, 4 y 24) y a continuación se resumen brevemente sus principales aspectos, así como su implementación computacional.

2.1.5.1. Formulación teórica.

a) Como se ha mencionado, la deformación total del material se descompone en dos partes: elástica y plástica.

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^e\} + \{d\varepsilon^p\}\tag{2.28}$$

b) Existe una función de fluencia o de carga (F) que separa el espacio de esfuerzos en dos regiones: elástico y plástico. Esta función depende del vector de esfuerzos (σ) y de un parámetro de endurecimiento k .

El parámetro k es un escalar y el vector $\{\sigma\}$ es función de dos parámetros p y q , que se definen como primer y segundo invariantes de esfuerzos respectivamente y se determinan por:

$$p = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (2.29)$$

$$q = \sqrt{\sigma_x(\sigma_x - \sigma_y) + \sigma_y(\sigma_y - \sigma_x) + \sigma_x(\sigma_x - \sigma_z) + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{yz}^2 + 3\tau_{zx}^2}$$

de tal forma que la función de fluencia se convierte en:

$$F(p, q, k) = 0 \quad (2.30)$$

c) Existe un potencial plástico (Q) que especifica las magnitudes relativas de varias componentes de las deformaciones plásticas, tal como:

$$\{d\varepsilon^p\} = \phi \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \quad (2.31)$$

donde ϕ es una constante de proporción, que se define más adelante.

d) Para relacionar la función de fluencia y el potencial plástico se emplea una regla de flujo, que puede ser asociada ($Q=F$), o en caso contrario, no asociada ($Q \neq F$). Cuando la regla de flujo es asociada, se cumple la condición de normalidad; es decir, el vector de incremento de deformación plástica está siempre en la dirección normal y hacia afuera de la superficie definida por la función de fluencia en el espacio de esfuerzos.

La función del potencial plástico, depende del modelo con que se trabaje. En este caso, se emplea el modelo elastoplástico perfecto que adopta la ley de falla del tipo Von Mises (ref. 14) y se supone una regla de flujo asociada ($F=Q$). Este modelo se expresa como:

$$F(q) = Q(q) = q - 2c \quad (2.32)$$

donde c es la cohesión y q es el segundo invariante de esfuerzo, que se define por la ecuación (2.29). El modelo elastoplástico perfecto es el más simple entre los modelos elastoplásticos y es únicamente útil para modelar el comportamiento no-drenado de los suelos saturados, o bien, realizar un análisis $\phi=0$ (suelos cohesivos). Sin embargo, este criterio puede tener dificultades numéricas cuando la zona de fluencia es amplia (ref. 4).

2.1.5.2. Implementación.

La implementación de la teoría de plasticidad consiste en dos pasos: el de la pre-solución y el de la post-solución. En el primero, se calcula la matriz elastoplástica (D^{ep}) utilizando el lenguaje del método del elemento finito. En la post-solución se calculan los esfuerzos finales a que está sometido el material y se determina si estos esfuerzos se encuentran en un estado elástico ó plástico, que sirve para el cálculo de las matrices de rigidez en la siguiente etapa.

Existen dos métodos de implementación: explícito e implícito. En ambos se requieren algoritmos de regreso (return) con el fin de convertir el estado de esfuerzos calculados inicialmente en el real, (Simo y Taylor, 1985). La forma explícita es la tradicional y la que se emplea en el programa, donde el cálculo de la matriz D^{ep} es relativamente sencillo y requiere poco trabajo computacional.

De esta forma, para determinar la matriz elastoplástica D^{ep} , se supone que el vector de incrementos de esfuerzo $\{d\sigma\}$ y el de deformación elástica $\{d\varepsilon^e\}$ se relacionan por medio de la matriz elástica D de la siguiente forma:

$$\{d\sigma\} = D\{d\varepsilon^e\} \quad (2.33)$$

en donde:

$$\{d\sigma\} = \begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \{d\varepsilon^e\} = \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x^e \\ d\varepsilon_y^e \\ d\gamma_{xy}^e \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & \beta \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\alpha = \frac{\nu}{(1-\nu)} \quad \beta = \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}$$

donde E es el modulo de elasticidad y ν , la relación de Poisson.

Combinando las expresiones (2.28), (2.31) y (2.33), se tiene:

$$\{d\sigma\} = D\{d\varepsilon\} - \theta D \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \quad (2.36)$$

De acuerdo con la ecuación (2.30), la función de fluencia (F) se expresa como el siguiente diferencial completo:

$$dF = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial k} dk \quad (2.37)$$

Debido a que el estado de esfuerzos representado por $\{d\sigma\}$ corresponde a un estado de fluencia, la expresión (2.36) puede sustituirse en la (2.37), obteniendo finalmente:

$$\phi = \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \{d\varepsilon\} \quad (2.38)$$

donde:

$$\beta = A + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \quad (2.39)$$

$$A = - \frac{\partial F}{\partial k} \frac{dk}{\phi} \quad (2.40)$$

Sustituyendo la ecuación (2.38) en la (2.36), se tiene la relación entre $\{d\sigma\}$ y $\{d\varepsilon\}$ de la siguiente forma:

$$\{d\sigma\} = D^{ep} \{d\varepsilon\}$$

$$D^{ep} = D - \frac{1}{\beta} D \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D^T \quad (2.41)$$

Esta expresión define la matriz elastoplástica y en los pasos para su derivación, se tienen que las ecuaciones (2.28), (2.30), (2.31) y (2.33) son de gran importancia, puesto que en ellas se indica que un estado de esfuerzos elastoplástico puede medirse mediante la deformación elástica, es decir, cuando el material entra en un estado plástico, también se produce una deformación elástica. Esto se muestra en la expresión (2.41), la cual queda en función de la matriz D .

Como el estado de esfuerzos depende de los invariantes p y q , la función de fluencia (F) queda de la siguiente forma:

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} = \frac{1}{3} \frac{\partial F}{\partial p} \{1\} + \frac{3}{2q} \frac{\partial F}{\partial q} \{\bar{\sigma}\} \quad (2.42)$$

donde:

$$\{1\} = (1, 1, 1, 0, 0, 0)^T \quad (2.43)$$

$$\{\bar{\sigma}\} = (\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z, 2\tau_{xy}, 2\tau_{yz}, 2\tau_{zx})$$

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x - p$$

$$\bar{\sigma}_y = \sigma_y - p$$

$$\bar{\sigma}_z = \sigma_z - p$$

$$(2.44)$$

Sustituyendo la ecuación (2.42), en la ecuación (2.39) nos queda:

$$\beta = A + K \frac{\partial F}{\partial p} + 3G \frac{\partial F}{\partial q} \quad (2.45)$$

donde:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad \text{y} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.46)$$

son las constantes elásticas de Lamé.

La matriz elastoplástica (D^{ep}) y la constante de proporcionalidad ϕ , quedan también en función de p y q , como se expresa en las siguientes ecuaciones.

$$D^{ep} = D - \frac{1}{\beta} D \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \left[\frac{1}{3} \frac{\partial F}{\partial p} \{1\}^T + \frac{3}{2q} \frac{\partial F}{\partial q} \{\bar{\sigma}\}^T \right] D^T \quad (2.47)$$

$$\phi = \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{1}{3} \frac{\partial F}{\partial p} \{1\}^T + \frac{3}{2q} \frac{\partial F}{\partial q} \{\bar{\sigma}\}^T \right\} \quad (2.48)$$

Como se ha mencionado, para el modelo elastoplástico perfecto la función de fluencia y el potencial plástico quedan como:

$$F(q) = Q(q) = q - 2c = 0 \quad (2.49)$$

Esta ecuación implica que no existe el efecto de endurecimiento, de lo cual se tiene:

$$\frac{\partial F}{\partial k} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial p} = 0 \quad (2.50)$$

De estas consideraciones, las expresiones (2.42), (2.45) y (2.49) se simplifican en:

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{3}{4c} \{\bar{\sigma}\} \quad y \quad \beta = 3G \quad (2.51)$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la expresión (2.47), la matriz D^{ep} queda finalmente:

$$D^{ep} = D - \frac{1}{3G} D \left\{ \left(\frac{3}{4c} \{\bar{\sigma}\} \right) \left(\frac{3}{4c} \{\bar{\sigma}\}^T \right) \right\} D^T \quad (2.52)$$

Una vez que se calcula la matriz elastoplástica D^{ep} , el siguiente paso (post-solución) consiste en determinar el estado final de esfuerzo $\{\sigma\} = \{\sigma^0\} + \{d\sigma\}$ (donde $\{\sigma^0\}$ denota el inicio de una iteración o el inicio de una etapa de construcción), de la siguiente forma:

- a) Se calcula el incremento de esfuerzo, debido a un incremento de la deformación, con la siguiente expresión:

$$\{d\sigma^*\} = D \{d\varepsilon\} \quad (2.53)$$

Esta ecuación es válida, ya sea para un estado inicial elástico o elastoplástico. El superíndice *tr* (primeras letras de la palabra en inglés *trial*), indica que se trata de un esfuerzo aparente o tentativo, que se pondrá a prueba para determinar si sigue en un rango elástico o plástico.

- b) Se suman los esfuerzos inicial e incremental:

$$\{\sigma^*\} = \{\sigma^0\} + \{d\sigma^*\} \quad (2.54)$$

donde

$\{\sigma^0\}$ = esfuerzo inicial

$\{\sigma^*\}$ = esfuerzo inicial más el calculado.

$\{d\sigma^*\}$ = incremento del esfuerzo calculado.

- c) Se verifica la condición de fluencia, expresión (2.30):

$$F(p^{tr}, q^{tr}, k^{tr}) \leq 0 \quad (2.55)$$

Si se cumple la desigualdad el material sigue en un rango elástico y el estado final de esfuerzos se calcula simplemente como:

$$\{\sigma\} = \{\sigma^e\} \quad (2.56)$$

d) Ahora bien, si la condición de fluencia no se cumple significa que el material entra en una región plástica, donde el estado de esfuerzos $\{\sigma^e\}$ se sobrestima y debe corregirse por el criterio de Von Mises (ref. 15). De esta forma, el vector de esfuerzo final $\{\sigma\}$ en el modelo elasto-plástico perfecto, se obtiene con la siguiente expresión:

$$\{\sigma\} = \rho^e \{\tau\} + \frac{2c}{q^e} [\{\sigma^e\} - \rho^e \{\tau\}] \quad (2.57)$$

2.2. TIPOS DE ELEMENTOS.

La discretización de una malla de elementos finitos dentro de la región o dominio que se pretende estudiar, esta condicionada por lo común a dos factores: el grado de exactitud de la solución a obtener y el ahorro computacional de la misma.

Aunque no existen reglas fijas que permitan decidir el tamaño y la forma de los elementos a emplear en un determinado problema, se atiende primeramente al ahorro computacional utilizando elementos complejos y mallas sencillas.

En general los elementos finitos se clasifican en: elementos unidimensionales, bidimensionales y tridimensional.

Sin embargo, comúnmente los elementos finitos se clasifican de acuerdo a su forma geométrica, la cual puede ser muy variada, y por lo regular depende de la geometría del modelo original. A continuación se describen brevemente los elementos mas empleados en este método y que se muestran en la fig. 2.2.

Elemento barra.

El elemento barra tiene una gran importancia debido a que se emplea en estructuras constituidas por elementos viga en conexión con partes estructurales continuas.

Elementos triangulares.

El elemento triángulo es el elemento finito primordial. Con él se puede aproximar cualquier forma estructural continua, plana o espacial, en forma de lámina (cascazones) y bordes curvos. Sin embargo, para una mejor aproximación de resultados, se deben disminuir adecuadamente el tamaño de estos elementos y, en consecuencia, aumentar su número en la discretización de la estructura continua.

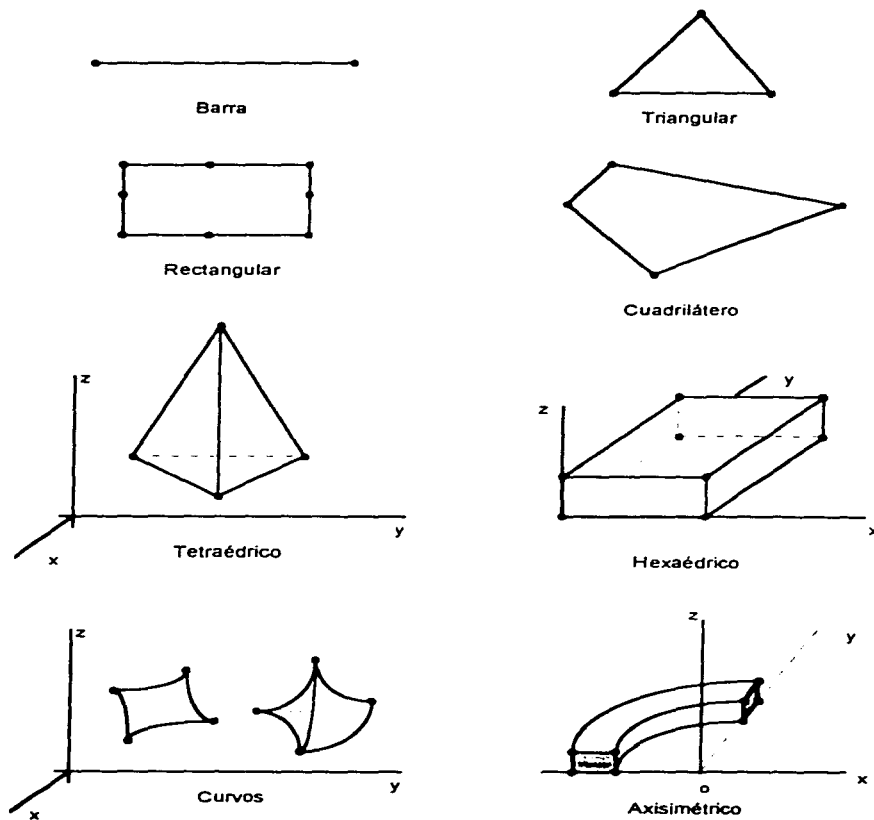


Fig 2.2 Tipos de elementos finitos.

Elementos rectangulares.

El elemento rectángulo es un elemento útil, por su facilidad computacional, cuando sus lados son paralelos a los ejes coordenados globales y la estructura no presenta bordes curvos. Este elemento es de gran importancia en el estudio de la flexión de placas delgadas, y al igual que el elemento triángulo, su uso es importante en el análisis de estructuras espaciales (elementos hexaédricos).

Elemento cuadrilátero.

Este elemento puede estudiarse como suma de dos elementos triángulo.

Elementos tetraédricos.

Estos elementos son empleados para el estudio de problemas de elasticidad tridimensional, y tiene en el espacio la adaptabilidad que tiene el elemento triángulo en el plano.

Elementos hexaédricos.

Estos elementos son empleados principalmente para el estudio de problemas de elasticidad espacial y en el estudio de placas gruesas sometidas a cargas transversales.

Elementos curvos o isoparamétricos.

Estos refinados elementos de bordes curvos o distorsionados son especialmente útiles para ser adaptados a estructuras continuas con perímetros no rectos. En los elementos isoparamétricos su geometría y desplazamientos, dentro de ellos, se aproximan con la misma función de interpolación. Estos elementos hacen posible tener elementos cuadriláteros no rectangulares donde sus lados pueden ser curvos. Tienen su propio sistema de coordenadas (ξ, η, ζ) llamadas naturales o locales, donde los extremos están definidos por ± 1 . De esta forma, las funciones de interpolación son función de las coordenadas naturales o locales.

Elementos axisimétricos.

Existen diferentes casos que por geometría es difícil realizar un análisis detallado, empleando elementos que no definen perfectamente la región en estudio o simplemente no se acercan al modelo original. Los elementos axisimétricos tienen gran interés práctico para el estudio de estructuras con ejes de simetría como pueden ser: depósitos cilíndricos, vasijas de presión, estructuras de láminas delgadas, domos, etc., y por la simplificación de formulación que presentan. Este elemento se obtiene por el giro radial de una figura plana (elemento triángulo, rectángulo, isoparamétrico, etc.) alrededor de un eje de simetría (fig. 2.2).

Los elementos finitos también se pueden clasificar de acuerdo al polinomio de interpolación en:

- a) **Simplejos.** Son aquellos que emplean polinomios de interpolación lineal, donde el número de nodos en el elemento es igual al número de coeficientes en el polinomio.
- b) **Complejos.** Emplean además de sus coeficientes constantes dentro del polinomio, términos ó variables de orden mayor (parabólica, cuadrática, cúbica, etc.). La característica principal es que se requieren nodos intermedios además de los que se emplean en los vértices.
- c) **Multiplejos.** Los elementos multiplejos usan polinomios de orden mayor a uno (variaciones parabólicas o cúbicas), pero sus lados deben ser paralelos a los ejes coordenados.

En el método del elemento finito se debe plantear para cada tipo de elemento su correspondiente formulación, que consiste en el estudio de su geometría mediante funciones de forma geométrica, útiles en la aproximación de los desplazamientos de los puntos de su interior. Con lo cual, es posible determinar la matriz de rigidez elemental y las fuerzas nodales equivalentes.

2.3. FORMULACIÓN PARA EL CASO AXISIMÉTRICO.

En todo problema de revolución o axisimétrico: la geometría, las propiedades del material, las cargas y condiciones de apoyo son independientes de la dirección angular (θ). En este caso, el problema es matemáticamente bidimensional, donde el desplazamiento circunferencial es nulo y los puntos del material tienen solamente componentes de desplazamiento radial y axial.

De lo anterior, se tiene que el estado de esfuerzo y deformación de una sección plana cualquiera perpendicular al eje de simetría del cuerpo está definida por dos componentes de desplazamiento (fig. 2.3). Las variables r y z representan las coordenadas radial y axial respectivamente, y se puede asignar como u y v sus correspondientes desplazamientos.

Sin embargo, la característica más importante en todo problema de revolución esta en considerar una cuarta componente de deformación en dirección circunferencial (aunque su desplazamiento sea nulo) y su correspondiente esfuerzo. Además, el volumen del material asociado es ahora el de un sólido de revolución y a él deben referirse todas las integraciones (ref. 25).

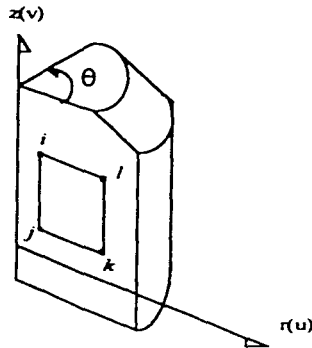


Fig 2.3 Elemento finito de un sólido de revolución.

2.3.1. Función de desplazamientos.

Empleando como sección plana de revolución el elemento isoparamétrico definido por los nodos i, j, k, l (fig. 2.3), el procedimiento a seguir es similar al análisis plano de esfuerzos y deformaciones que define el método del elemento finito (ref. 3). De esta forma, nuestro vector desplazamiento para cada elemento es:

$$\{a\}^* = \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \\ a_k \\ a_l \end{Bmatrix} \quad \text{Donde:} \quad \{a_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}, \dots \text{etc.} \quad (2.58)$$

Para definir las funciones de desplazamientos dentro del elemento se puede emplear un polinomio lineal. Finalmente nuestro campo de desplazamientos es dado nuevamente por la expresión general (2.14).

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [IN_1, IN_2, IN_3, IN_4] \{a\}^* \quad (2.59)$$

Donde I es la matriz identidad y N son las funciones de forma.

2.3.2. Funciones de forma.

Para determinar las funciones de forma es conveniente definir la geometría del elemento isoparamétrico de la fig. 2.4 en coordenadas locales (ξ, η).

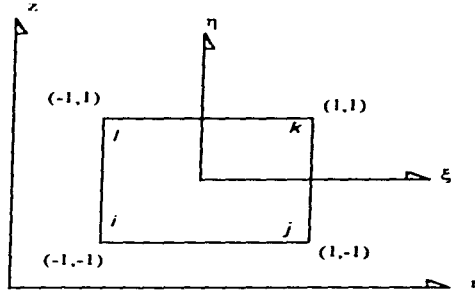


Fig 2.4 Elemento finito definido en coordenadas locales (isoparamétrico).

Como se ha mencionado, las funciones de desplazamiento es proporcionada por dos polinomios de primer grado.

$$\begin{aligned} r = u &= \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta \\ z = v &= \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta \end{aligned} \quad (2.60)$$

Donde α_i son coeficientes indeterminados. Sustituyendo los valores de cada punto de la fig. 2.4, en la expresión (2.60), se obtiene lo siguiente en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} r_i \\ r_j \\ r_k \\ r_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = [P] \{ \alpha \} \quad (2.61)$$

Despejando los coeficientes (α) de la expresión (2.61) y sustituyendo en la ecuación (2.60), se tiene la siguiente expresión agrupando términos:

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)r_i + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)r_j + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)r_k + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)r_l \\ &= N_i r_i + N_j r_j + N_k r_k + N_l r_l \end{aligned} \quad (2.62)$$

Si se realiza este procedimiento para la coordenada z de la expresión (2.60) se llega a la misma ecuación (2.62), de la siguiente forma:

$$z = N_i z_i + N_j z_j + N_k z_k + N_l z_l$$

De lo anterior, las funciones de forma en coordenadas locales son:

$$\begin{aligned} N_i &= (1/4)(1-\xi)(1-\eta) & N_k &= (1/4)(1+\xi)(1+\eta) \\ N_j &= (1/4)(1+\xi)(1-\eta) & N_l &= (1/4)(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Para determinar la matriz de rigideces es necesario transformar las coordenadas locales al sistema global (r, z). Aplicando la regla de la cadena para derivadas parciales, se define el Jacobiano (J) de la función de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (2.64)$$

Derivando parcialmente la expresión (2.62), con respecto a las coordenadas locales r y z , se obtiene el jacobiano (J), que matricialmente queda de la siguiente forma:

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_i & z_i \\ r_j & z_j \\ r_k & z_k \\ r_l & z_l \end{Bmatrix} \quad (2.65)$$

Despejando matricialmente de la expresión (2.64), se determinan las funciones de forma en coordenadas globales.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad \text{para } i, j, k, l \quad (2.66)$$

2.3.3. Componentes de deformación.

De acuerdo con la teoría de la elasticidad, se consideran cuatro componentes de la deformación (ref. 22). Estas son: todas las componentes de deformación no nulas posibles en un sólido de revolución (fig. 2.5a).

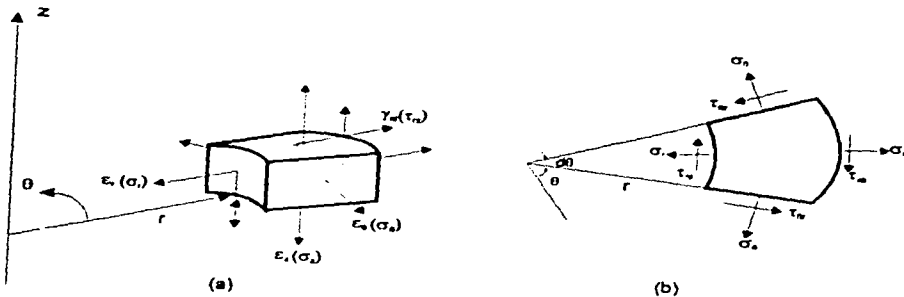


Fig 2.5 Deformaciones y esfuerzos asociados a un sólido de revolución

De lo cual se tiene:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{Bmatrix} = [L]\{U\} \quad (2.67)$$

Sustituyendo en la anterior ecuación, el campo de desplazamientos definido por la expresión (2.59), obtenemos:

$$\{\epsilon\} = [B]\{a\}^* = [B_1, B_2, B_3, B_4]\{a\}^* \quad (2.68)$$

Donde:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & \frac{N_3}{r} & 0 & \frac{N_4}{r} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_4}{\partial r} & \frac{\partial N_5}{\partial z} & \frac{\partial N_6}{\partial r} & \frac{\partial N_7}{\partial z} & \frac{\partial N_8}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Observando la configuración de la matriz B las deformaciones ya no son constantes dentro de cada elemento, esto se debe a que esta matriz depende de la coordenada r , debido al término ε_θ , como se muestra en la ecuación (2.67).

2.3.4. Matriz de elasticidad.

A partir de la teoría de elasticidad, la relación esfuerzo-deformación implica un cambio en la matriz de elasticidad que se relaciona mediante la expresión:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = [D](\varepsilon - \varepsilon_0) + \{\sigma_0\} \quad (2.70)$$

Para un material isótropo:

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Donde E es el módulo de elasticidad y ν la relación de Poisson.

2.3.5. Matriz de rigidez.

Recordando que la matriz de rigidez de cada elemento se determina por la expresión (2.25) y tomando en cuenta que la integración se debe realizar en todo el volumen del sólido de revolución, se tiene:

$$[K]^e = 2\pi \int [B]^T [D] [B] r dr dz \quad (2.72)$$

Como no se puede realizar la integración tan sencillamente debido a que B está en función de las coordenadas locales y de la coordenada global r , lo que llevaría a métodos muy elaborados, se realiza un procedimiento aproximado sencillo que es evaluar a B en el centro de gravedad del elemento, teniendo la siguiente condición:

$$\bar{r} = \frac{r_i + r_j + r_k + r_l}{4} \quad (2.73)$$

Para transformar las variables y la región sobre la cual se efectúa la integración se emplea lo siguiente:

$$dr dz = |J| d\xi d\eta \quad (2.74)$$

De lo cual se obtiene como primera aproximación:

$$[K]^e = 2\pi \bar{r} \int [\bar{B}]^T [D][\bar{B}] |J| d\xi d\eta \quad (2.75)$$

Donde $|J|$ es el determinante del jacobiano (2.65). La ecuación (2.75) se resuelve fácilmente por métodos numéricos, donde el más conocido es el método de cuadratura de Gauss (ref. 25).

2.3.6. Fuerzas másicas distribuidas.

Si denominamos como b al vector de fuerzas de cuerpo (por peso propio) para cada nodo del elemento (fig. 2.1), se tiene entonces:

$$\{f_i\}^e = -2\pi \int N_i \{b\} r dr dz = -2\pi \{b\} \int N_i r dr dz \quad (2.76)$$

Como N_i depende de las coordenadas locales y globales, se emplea la misma consideración anterior integrando al centro de gravedad del elemento y tomando en cuenta la expresión (2.74), se tiene:

$$\{f_i\}^e = -2\pi \{b\} \bar{r} \int N_i |J| d\xi d\eta \quad (2.77)$$

2.3.7. Fuerzas nodales debidas a esfuerzos iniciales.

Las fuerzas nodales debidas a esfuerzos iniciales se determinan a partir de la siguiente expresión, tomando en cuenta el mismo criterio antes mencionado para realizar la integración.

$$\{f_i\}^e = -2\pi \int B_i^T \sigma_0 r dr dz = -2\pi \bar{r} \int \bar{B}_i^T \sigma_0 |J| d\xi d\eta \quad (2.78)$$

2.3.8. Fuerzas nodales exteriores.

También las fuerzas nodales exteriores representan un efecto combinado de la fuerza actuante a lo largo de la circunferencia del círculo que forma el "nodo" del elemento; ya que esta es otra característica de un elemento axisimétrico, donde los puntos nodales se convierten en circunferencias nodales y por lo cual se tiene:

$$\{f_i\}^e = 2\pi r \begin{Bmatrix} R \\ Z \end{Bmatrix} \quad (2.79)$$

Donde R y Z representan la componente radial y axial de la fuerza por unidad de longitud respectivamente.

2.3.9. Formulación axisimétrica para elementos en sectores circulares.

El procedimiento para obtener la matriz de rigidez de un elemento en sectores circulares (fig. 2.6), es similar al caso anterior. Pero ahora se emplean las coordenadas polares radial y angular (r, θ), mientras que la coordenada axial (z) se anula por ser constante.

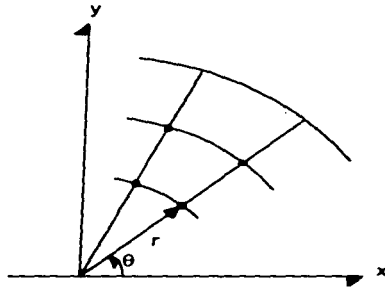


Fig 2.6 Elemento en forma de sector circular en coordenadas polares (r, θ).

De la relación esfuerzo-deformación se tienen tres componentes de deformación (fig. 2.5b), y que se muestra en la siguiente expresión:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\partial\theta} \\ \frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \end{Bmatrix} = [L]\{U\} \quad (2.80)$$

Por lo tanto, la expresión (2.69) queda de la siguiente forma:

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ \frac{N_i}{r} & \frac{\partial N_i}{r\partial\theta} \\ \frac{\partial N_i}{r\partial\theta} & \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} - \frac{N_i}{r} \right) \end{bmatrix} \quad \text{para } i, j, k, l \quad (2.81)$$

Tomando en cuenta las expresiones (2.73) y (2.74); y que la integración no se realiza en un radio de revolución, la matriz de rigidez se obtiene con la siguiente expresión:

$$[K]^e = \bar{r} \int [\bar{B}]^T [D][\bar{B}] |J| d\xi d\eta \quad (2.82)$$

2.3.10. Implementación para un material elasto-plástico perfecto.

La implementación axisimétrica empleando un modelo elasto-plástico perfecto, sigue los mismos pasos que se mencionan en el inciso 2.1.5. Pero ahora, el vector de esfuerzo está expresado en coordenadas polares, como se muestra en la ecuación (2.70). Por lo tanto, como el vector de esfuerzo está en función de los invariantes p y q , estos se deben transformar de coordenadas polares a cartesianas, por medio de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (2.83)$$

De esta forma, la expresión (2.44) queda en función de los esfuerzos en coordenadas cilíndricas.

$$\begin{aligned} \{\bar{\sigma}\} &= (\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\sigma}_z, 2\tau_{rz}) \\ \bar{\sigma}_r &= \sigma_r - p \\ \bar{\sigma}_\theta &= \sigma_\theta - p \\ \bar{\sigma}_z &= \sigma_z - p \end{aligned} \tag{2.84}$$

Donde p se define por la expresión (2.29).

CAPÍTULO 3

PROBLEMAS AXISIMÉTRICOS EN INGENIERÍA CIVIL

3.1. GENERALIDADES.

Son muchos los casos dentro de la Ingeniería Civil en los que es necesario conocer la distribución de esfuerzos y deformaciones en todo el medio o región que se pretende estudiar. El método del elemento finito descrito en el capítulo anterior, nos proporciona esta información para diferentes casos (análisis bidimensional de esfuerzo y de deformación plano, flexión de placas y láminas, sólidos tridimensionales, etc.), y particularmente para problemas de sólidos de revolución.

Una obra de Ingeniería Civil se puede considerar como un problema axisimétrico si cumple con la característica de ser simétrica (por geometría) con respecto a un eje de revolución, así como también las cargas o solicitaciones que actúen en ella.

El análisis de estructuras axisimétricas tienen una gran variedad de aplicaciones y no únicamente se limitan a obras propias de ingeniería estructural (vasija de presión de un reactor, contenedor cónico o cilíndrico de fluidos, torres de refrigeración, domos, etc.), sino que también tienen una gran aplicación en la mecánica de suelos.

Ejemplos de este tipo de problemas se describen brevemente en el siguiente inciso, tomando en cuenta como principal característica de axisimetría, las condiciones antes mencionadas.

3.2. TIPOS DE PROBLEMAS.

3.2.1. Esfuerzos debidos a una carga puntual concentrada.

Es de gran interés determinar los esfuerzos debidos a una sola carga vertical concentrada en un punto que actúa en la superficie horizontal de una masa de suelo. Boussinesq estudió por primera vez este problema y en base a la teoría de la Elasticidad calculó los esfuerzos que se inducen por este tipo de carga en los puntos de cualquier vertical trazada en el medio.

Este caso se considera como un problema axisimétrico, debido a que se trata de una carga vertical, que aplicada en un punto en la superficie, genera esfuerzos simétricos con respecto a un eje. En la fig 3.1 se muestra que el eje de revolución es el que describe la dirección de la carga axial (P).

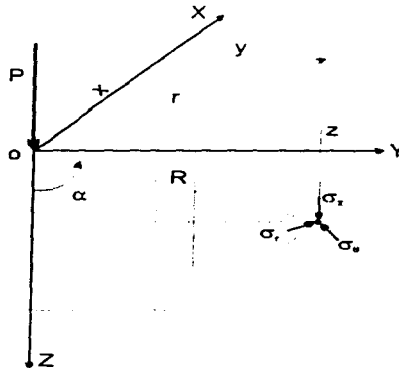


Fig 3.1 Esfuerzos debidos a una carga vertical concentrada

Las soluciones obtenidas por Boussinesq son las siguientes, expresadas en coordenadas cilíndricas.

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{P}{2\pi z^2} \left[3\cos^3 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha - (1-2\nu) \frac{\cos^2 \alpha}{1+\cos \alpha} \right] \\ \sigma_{\theta} &= -(1-2\nu) \frac{P}{2\pi z^2} \left[\cos^3 \alpha - \frac{\cos^2 \alpha}{1+\cos \alpha} \right] \\ \sigma_z &= \frac{3P}{2\pi z^2} \cos^5 \alpha = \frac{3Pz^3}{2\pi R^5} \\ \tau_{rz} &= \frac{3P}{2\pi z^2} \cos^4 \alpha \operatorname{sen} \alpha\end{aligned}\tag{3.1}$$

Donde ν es el módulo de Poisson y P es una carga concentrada. Estas expresiones son comúnmente usadas en la Mecánica de Suelos, principalmente en la determinación de esfuerzos verticales para el cálculo de asentamientos.

Existen otras condiciones de carga como por ejemplo lineal y rectangular uniformemente repartida, que sus soluciones se obtienen del análisis de Boussinesq. Sin embargo, estos ejemplos no se puede considerar como axisimétricos por la condición de simetría antes mencionada.

3.2.2. Cimentación superficial circular.

Este es un caso especial de gran importancia práctica que corresponde al cálculo de esfuerzos a lo largo de una normal por el centro de una área circular uniformemente cargada (w). La solución a este tipo de problema se obtuvo también a partir de los estudios de Boussinesq, y como se puede observar en la fig. 3.2, existe la característica geométrica que corresponde a un problema axisimétrico.

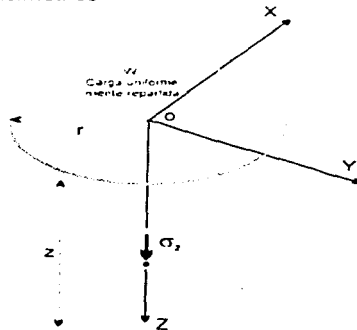


Fig 3.2 Distribución del esfuerzo bajo el centro de una superficie circular uniformemente cargada

El esfuerzo vertical en cualquier punto de la normal que pasa por el centro del círculo cargado, se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\sigma_z = w \left[1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{z} \right)^2} \right]^{3/2} \quad (3.2)$$

Un ejemplo de este tipo de cargas, es una zapata de cimentación aislada de sección circular que se emplea para transmitir el peso de una sola columna; sin embargo no son muy comunes por las dificultades constructivas que presentan.

3.2.3. Pilotes, pilas y cilindros de cimentación.

Cuando el terreno firme no está próximo a la superficie, un sistema habitual para transmitir el peso de una estructura al terreno, es mediante elementos verticales como son: pilotes, pilas y cilindros.

Los pilotes son los elementos más esbeltos con dimensiones transversales del orden comprendido entre 0.30 m y 1.0 m. Los elementos que tienen una sección transversal mayor que 1.0 m, pero que no excede el doble de ese valor se conocen como pilas. Cuando se requieren elementos de mayor sección que los anteriores, se emplean cilindros cuyo diámetro varía de 3.0 a 6.0 m y por lo común, se construyen huecos.

Cuando se utilizan estos tipos de cimientos con una sección transversal circular y sometidos a una carga axial, se tienen las condiciones necesarias para tratar a este problema como un caso axisimétrico, siempre y cuando este elemento se analice en forma independiente o completamente aislado.

3.2.4. Túneles y lumbreras.

Un túnel de sección circular se considera como una estructura axisimétrica, si éste es demasiado profundo, de tal forma que el esfuerzo que actúe en su periferia, sea casi constante y cumpla con la característica de axisimetría, de la cual se ha estado mencionando.

Sin embargo, existen soluciones en base a la teoría de la Elasticidad, para analizar un túnel como si fuera una placa infinita con un orificio circular en el centro y sujeta a diferentes esfuerzos en sus fronteras (ref. 17). Este problema ha sido tratado en este trabajo como un caso axisimétrico y se ha analizado con el programa sin ningún problema.

El caso de una lumbrera, que es un pozo o acceso vertical que se emplea comúnmente durante la construcción de un túnel, no tiene mucho problema para considerarse como una estructura axisimétrica, si ésta se construye con una sección transversal circular.

3.3. ESTUDIOS PREVIOS.

Los estudios realizados hasta el momento para determinar el estado de esfuerzos y deformaciones en problemas axisimétricos, se basan principalmente en la teoría del medio continuo (elasticidad lineal y plasticidad). Estos estudios aunque sus limitaciones son obvias permiten establecer un marco de referencia para el análisis de estos problemas prácticos.

A continuación se describen los casos de cavidades aisladas (túnel y lumbrera en un medio continuo), cuyas propiedades se suponen conocidas.

3.3.1. Túnel circular sencillo en una masa infinita, problema bidimensional.

Se considera un túnel de sección circular aislado, suficientemente largo (relación de largo a diámetro igual por lo menos a 5), y no recubierto con el fin de no tomar en cuenta la interacción suelo-revestimiento.

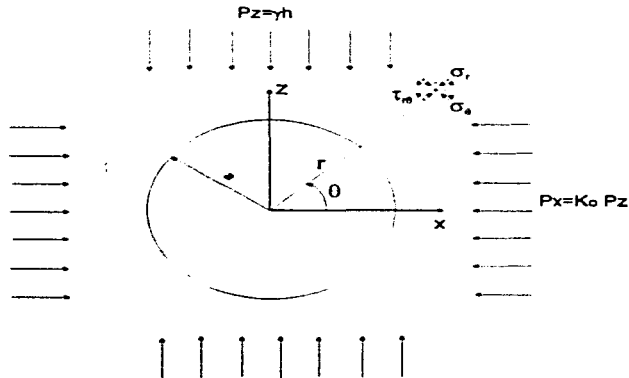


Fig 3.3 Túnel circular en una masa infinita.

Las soluciones elásticas son propuestas por Kirsch y el caso es similar al de una placa infinita con un orificio circular en el centro (ref. 20). De acuerdo con la fig. 3.3, se tienen las siguientes expresiones:

$$\sigma_r = \frac{1}{2}(P_z + P_x) \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{1}{2}(P_z - P_x) \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \quad (3.3)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(P_z + P_x) \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}(P_z - P_x) \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \quad (3.4)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2}(P_z - P_x) \left(1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4}\right) \sin 2\theta \quad (3.5)$$

Donde P_z y P_x , son cargas uniformes por unidad de área. El material localizado en la periferia del túnel se encuentra sometido, de acuerdo a las expresiones (3.3) y (3.4), en el siguiente estado de esfuerzos.

$$\begin{aligned} \sigma_r = 0 \quad \text{y} \quad \sigma_\theta = 3P_z - P_x \quad \text{para} \quad \theta = 0 \\ \sigma_r = 0 \quad \text{y} \quad \sigma_\theta = 3P_x - P_z \quad \text{para} \quad \theta = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

De lo anterior se puede deducir que si:

$$3P_z - P_x > q_u$$

donde q_u es la resistencia a la compresión simple del suelo, el material falla a compresión para $\theta=0$. De la segunda consideración ($\theta=\pi/2$) se tiene que el material falla a tensión en la clave del túnel si se cumple lo siguiente:

$$\frac{P_x}{P_z} < \frac{1}{3}$$

De esta forma, la inestabilidad en el contorno del túnel puede generarse en las paredes de la excavación por insuficiencia de resistencia a la compresión triaxial, o en la clave por insuficiencia de resistencia a la tensión.

Las expresiones para el cálculo de desplazamientos son proporcionadas por Obert y Duval (1967), para la combinación de un esfuerzo vertical P_z y horizontal P_x (ref. 17).

$$\rho_r = \frac{1-\nu^2}{E} \left\{ \left(\frac{P_i + P_t}{2} \right) \left(r + \frac{a^2}{r} \right) + \left(\frac{P_i - P_t}{2} \right) \left(r - \frac{a^2}{r} + \frac{4a^2}{r} \right) \cos 2\theta \right\} - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \left\{ \left(\frac{P_i + P_t}{2} \right) \left(r - \frac{a^2}{r} \right) - \left(\frac{P_i - P_t}{2} \right) \left(r - \frac{a^4}{r^3} \right) \cos 2\theta \right\} \quad (3.7)$$

$$\rho_\theta = \frac{1-\nu^2}{E} \left\{ \left(\frac{P_i - P_t}{2} \right) \left(r + \frac{2a^2}{r} + \frac{a^4}{r^3} \right) \sin 2\theta \right\} - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \left\{ \left(\frac{P_i - P_t}{2} \right) \left(r + \frac{2a^2}{r} + \frac{a^4}{r^3} \right) \sin 2\theta \right\} \quad (3.8)$$

Los desplazamientos en la periferia del túnel, se determinan cuando θ es igual a r , para las expresiones (3.7) y (3.8).

3.3.2. Lumbreira aislada, problema bidimensional.

En este caso, las expresiones (3.3) a (3.5) son válidas si se consideran esfuerzos principales horizontales actuantes, previamente a la excavación, es decir, si se cumple que: $P_2 = P_x$. De esta forma, las soluciones elásticas son:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= P_x \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \\ \sigma_\theta &= P_x \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Por lo anterior, el material en la periferia de la lumbreira ($R=r$) se encuentra en un estado de compresión triaxial, como se muestra en la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 0 \\ \sigma_x &= P_x \\ \sigma_y &= 2P_x \end{aligned} \quad (3.10)$$

para cualquier valor de θ (fig. 3.4).

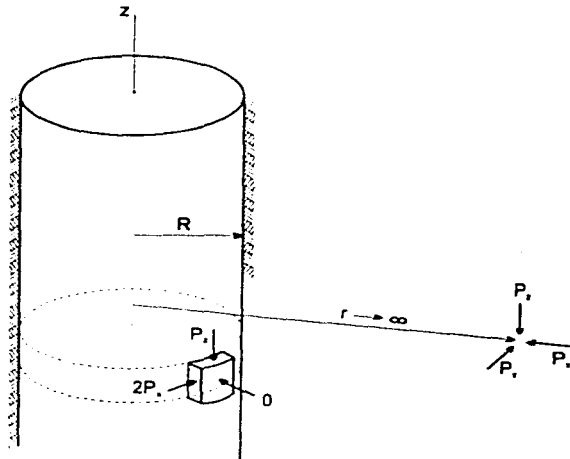


Fig 3 4 Estado de esfuerzos alrededor de una lumbra.

Los desplazamientos en la periferia de la lumbra se pueden determinar con las expresiones (3.7) y (3.8), solamente igualando a un estado de esfuerzos horizontales, previos a la excavación ($P_z = P_x$).

Si se tiene un coeficiente K_0 mayor a 0.5, es decir:

$$\frac{P_x}{P_z} > 0.5$$

los esfuerzos principales máximo y mínimo actuantes en la periferia de la lumbra son los esfuerzos σ_0 y σ , respectivamente, y a partir de cierta profundidad se presenta una zona de plastificación limitada en el espacio por un cono de revolución de eje vertical, con una sección circular de radio r , (fig. 3.5).

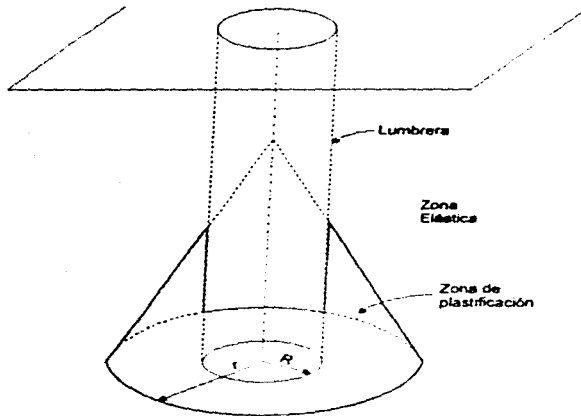


Fig 3 5 Zona de plastificación alrededor de una lumbrera.

3.3.3. Solución elastoplástica para un túnel circular.

Tresca propone un criterio de fluencia plástica en función del máximo esfuerzo cortante (ref. 16). Este criterio se expresa en términos de esfuerzos principales, de tal forma, que si $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, el máximo esfuerzo cortante es $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$; entonces el criterio de fluencia plástica se determina de la siguiente forma:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = k \quad (3.11)$$

donde k es una constante.

Esta suposición, se basa en el modelo elastoplástico perfecto de St. Venant, donde el material tiene un comportamiento perfectamente elástico, para esfuerzos menores que σ_0 (esfuerzo límite); y perfectamente plásticos para esfuerzos igual a σ_0 , como se muestra en la fig. 3.6.

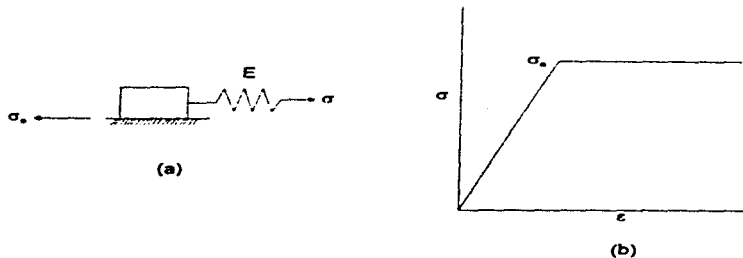


Fig 3.6 Material St. Venant. (a) Modelo. (b) Gráfica esfuerzo-deformación

De esta forma, se considera un túnel circular sujeto a condiciones de esfuerzo hidrostático (fig. 3.7). El problema es similar al caso (3.3.1) para $P_r=P_x=P$, pero ahora se considera un modelo de material elastoplástico.

De acuerdo con la condición de fluencia plástica, definida por la expresión (3.11), el campo de falla ocurre cuando:

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2c \quad (3.12)$$

donde c es un parámetro de resistencia denominado cohesión.

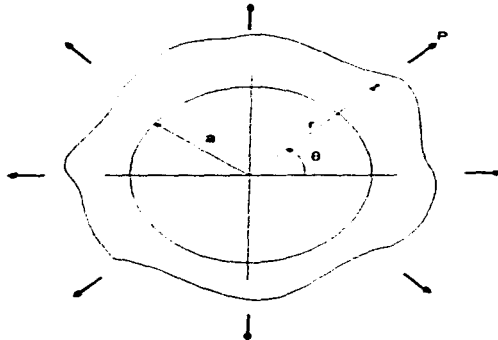


Fig 3.7 Túnel circular en una masa infinita bajo presión hidrostática.

Resolviendo conjuntamente la expresión (3.12), con las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad, que define la teoría de Elasticidad para problemas en coordenadas polares (ref. 22), y de acuerdo con las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} (\sigma_r^p)_{r=a} &= 0 & (\sigma_r^p)_{r=r_{ep}} &= (\sigma_r)_{r=r_{ep}} \\ (\sigma_\theta)_{r=a} &= (\sigma_r)_{r=a} = P & (\sigma_\theta^p)_{r=r_{ep}} &= (\sigma_\theta)_{r=r_{ep}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde:

a = radio del túnel.

r_{ep} = radio que define la frontera entre la zona elástica y plástica.

P = presión hidrostática.

σ_θ, σ_r = esfuerzos elásticos angular y radial.

$\sigma_\theta^p, \sigma_r^p$ = esfuerzos plásticos angular y radial.

se obtienen las siguientes soluciones elastoplásticas para el problema considerado.

En la región plástica:

$$\begin{aligned} \sigma_r^p &= 2hP \ln \frac{r}{a} \\ \sigma_\theta^p &= 2hP \left(1 + \ln \frac{r}{a} \right) \\ \sigma_z^p &= hP \left(1 + 2 \ln \frac{r}{a} \right) \end{aligned} \quad a \leq r \leq r_{ep} \quad (3.14)$$

En la región elástica:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= P \left[1 - \frac{ha^2}{r^2} e^{(1-h)/h} \right] \\ \sigma_\theta &= P \left[1 + \frac{ha^2}{r^2} e^{(1-h)/h} \right] \\ \sigma_z &= 2hP \end{aligned} \quad r_{ep} \leq r \quad (3.15)$$

donde:

$$r_{ep} = a e^{(1-h)/2h} \quad (3.16)$$

y la cohesión (parámetro de resistencia c), se representa como un porcentaje (h) de la presión hidrostática (P), de tal forma que:

$$c = hP \quad (3.17)$$

De estas expresiones, se puede observar que cuando $h=1$ (la cohesión c es igual a la presión hidrostática P), se obtiene la solución que corresponde a la elástica-lineal. Las soluciones plásticas-elásticas se muestran gráficamente en la fig. 3.8, junto con la solución elástica perfecta.

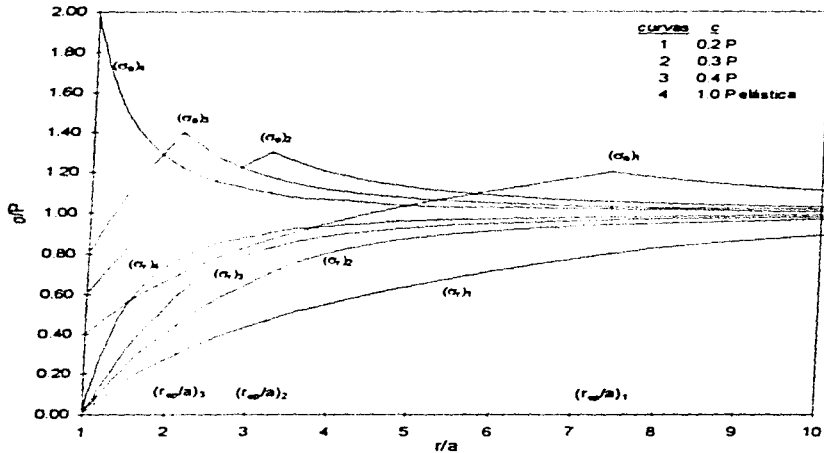


Fig 3.8 Distribución de esfuerzos alrededor de un túnel cilíndrico en un material elastoplástico.

De la gráfica se tiene que los esfuerzos angulares (σ_θ) y radiales (σ_r) cerca de la periferia del túnel son considerablemente menores para un material elastoplástico que para un material perfectamente elástico. Sin embargo, los esfuerzos angulares en la frontera plástica-elástica (r_{ep}/a), son mayores que los esfuerzos angulares para un material elástico-lineal, a una misma distancia radial.

3.4. CASOS A ANALIZAR.

Como se ha mencionado, existen una gran variedad de problemas axisimétricos y que se pueden analizar con el método descrito en este trabajo. Sin embargo, este estudio se enfocará a dos casos en particular: túneles y lumbreras.

3.4.1. Túnel de sección circular.

La mayoría de los métodos para determinar las presiones sobre los revestimientos de túneles se han establecido intuitivamente, como son los métodos de Terzaghi, Bierbaumer y Protodyakonov. Estos procedimientos que se basan en fórmulas empíricas y consideraciones geométricas, presentan las siguientes características: a) ignoran los desplazamientos y la rigidez del soporte, b) suponen superficies de falla y c) no consideran la distribución esfuerzo-deformación del medio.

Esta última característica ha provocado que algunos autores analicen este problema por medio de un círculo de dimensiones infinitas, usando métodos de elasticidad lineal y plasticidad, descritos en el inciso anterior.

Un túnel se considera como una estructura axisimétrica, si tiene una sección transversal circular y está sometido a esfuerzos o cargas uniformes en su contorno, de tal forma, que se obtenga una distribución de esfuerzos y deformaciones simétrica con respecto a un eje de revolución.

Resulta un poco difícil encontrar un caso práctico de un túnel con estas características, a menos que se construya a una profundidad considerable donde los esfuerzos verticales y horizontales que actúen en su periferia sean casi iguales; o que se encuentre sometido únicamente a un estado de esfuerzo hidrostático (con una misma presión en todas direcciones), como se describe en el inciso (3.3.3).

Sin embargo, la formulación para el caso axisimétrico en sectores circulares que se presenta en el capítulo anterior, permite modelar una cavidad aislada circular sometida a diferentes esfuerzos en sus fronteras, similar al caso de una placa infinita con un orificio en el centro.

De esta forma, la modelación de un túnel se realizará con una malla de elementos finitos en sectores circulares (fig. 2.6), donde su geometría se define en coordenadas polares (r, θ).

3.4.2. Lumbrera.

Una lumbrera es una estructura axisimétrica, si además de construirse con una sección transversal circular, tiene un eje de simetría vertical.

Los esfuerzos que actúan en el contorno de una lumbrera son constantes, lo que permite que su estudio se realice en una sección plana cualquiera perpendicular al eje de simetría de la estructura.

Por lo tanto, la modelación de una lumbrera se realizará con una malla de elementos finitos, empleando como sección plana de revolución un elemento isoparamétrico de cuatro nodos, es decir, la geometría del problema se define en un plano de coordenadas r y z , como se muestra en la fig. 2.3.

Los casos a analizar de túneles y lumbreras con la formulación axisimétrica, para un modelo elástico-lineal y elastoplástico perfecto, se describen detalladamente en el quinto capítulo. También se presentan los resultados obtenidos para cada malla de elementos finitos, junto con las soluciones teóricas que se mencionan en el inciso anterior.

Se muestra, como ejemplo de comprobación, el caso de un cilindro hueco bajo una presión interna, considerando un material elástico-lineal.

CAPÍTULO 4

PROGRAMA DE COMPUTADORA

4.1. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA.

4.1.1. Características principales.

En relación a los programas TEST y TEST92 (ref. 13 y 14), se conservan las siguientes características:

- a) Puede implementarse en cualquier computadora personal (PC).
- b) Se puede modelar el proceso de construcción y excavación por etapas, así como también, la forma de aplicación de cargas secuenciales.
- c) Existe la capacidad de expansión de la biblioteca actual de elementos finitos.
- d) El sistema de ecuaciones se resuelve con la solución directa de Gauss, empleando un método de columna activa y de bloques, es decir, no existe un límite en cuanto al tamaño del problema por analizar.

- e) Cuenta con un algoritmo incremental e iterativo para analizar problemas no-lineales. Los materiales pueden ser elásticos-lineales y elastoplásticos perfectos.
- f) El proceso constructivo y de excavación se simulan con un algoritmo variacional, lo cual garantiza la unicidad del problema.
- g) El programa maneja el concepto de almacenamiento dinámico en el sentido de que la máxima memoria central está disponible en la etapa de solución del sistema de ecuaciones.

4.1.2. Diagrama de bloques.

El algoritmo general del programa se describe en la fig. 4.1.

4.2. SUBROUTINAS EMPLEADAS.

El funcionamiento de cada una de las subrutinas que constituyen al programa se muestran a continuación ordenadas alfabéticamente.

ADBLKS:	Ensambla el sistema global de ecuaciones por bloques.
ADDRS:	Calcula la localización de los elementos diagonales de la matriz de rigidez global.
ADDSTF:	Ensambla la matriz de rigidez global.
BLOCK:	Forma bloques para la solución del sistema de ecuaciones.
ELCAL:	Lee los datos generales de elementos y calcula el almacenamiento dinámico para los elementos.
ELEMNT:	Selecciona subrutinas de elementos.
LIMIT:	Calcula el error de iteración.
NEQCAL:	Calcula el número total de ecuaciones.
OPTBLOK:	Resuelve el sistema de ecuaciones.
PCONT:	Lee los datos generales, calcula el almacenamiento dinámico para los datos del sistema y procede por etapas de construcción y/o substracciones dentro de estas y en cada una con un número determinado de iteraciones.
PROFIL:	Calcula el perfil de arreglos globales.
PRTDIS:	Imprime los resultados de los desplazamientos calculados.
RLOAD:	Agrega las cargas externas al vector de carga global.
XLEC:	Lee los datos de los puntos nodales.
ZEROR1:	Vacia un vector real.
ZEROR2:	Vacia una matriz real.

Programa TEST92

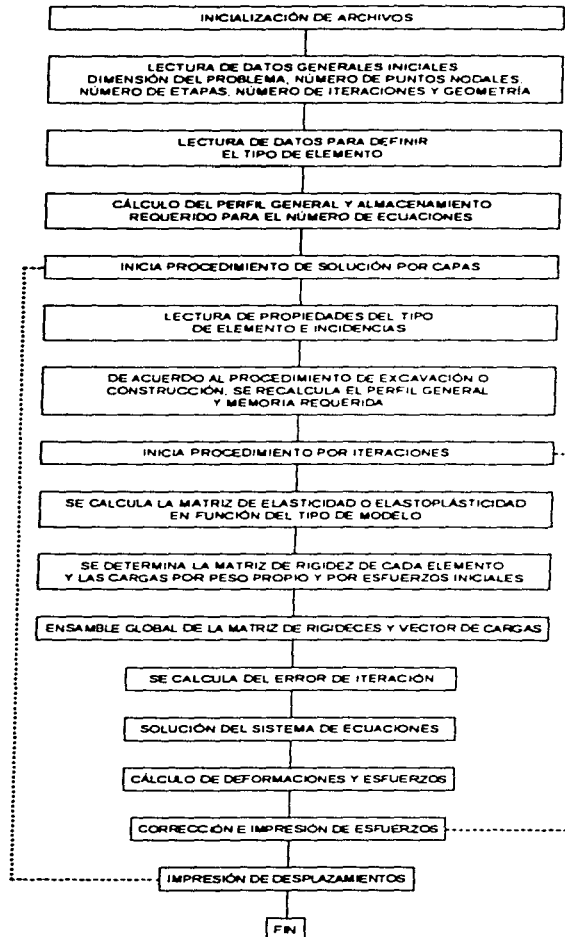


Fig 4.1 Diagrama de bloques del programa.

Las siguientes subrutinas corresponden a cada tipo de elemento finito.

TRUSS2:	Llamada por : PCONT
EPP21:	Llamada por : ELPLP8, ELPLP2
EPP22:	Llamada por : ELPLP8, ELPLP2
PRES2:	Llamada por : PCONT
NOTEN4:	Llamada por : PCONT
PRCPL:	Llamada por : ELPLP8, ELPLP2, NOTEN4, NOTEN8
SHP28:	Llamada por : ELPLP8
SHP24:	Llamada por : ELPLP2, NOTEN4
TFORM4:	Llamada por : VIGA2
TFOR44:	Llamada por : TFOR44
PQ2:	Llamada por : EPP21, EPP22
ELPLP2:	Llamada por : PCONT
NOTEN8:	Llamada por : PCONT
PRES3:	Llamada por : PCONT
SHP13:	Llamada por : PRES3, VIGA3
VIGA3:	Llamada por : PCONT
TFOR8:	Llamada por : PRES3, VIGA3
TFO8:	Llamada por : VIGA3
SHP12:	Llamada por : VIGA2
VIGA2:	Llamada por : PCONT
ELPLP8:	Llamada por : PCONT
EPPOL2	Llamada por : PCONT
EPPOL21	Llamada por : EPPOL2
EPPOL22	Llamada por : EPPOL2
SHPOL32	Llamada por : EPPOL2
PQPOL2	Llamada por : EPPOL21, EPPOL22
EPPAX12	Llamada por : PCONT
EPPAX21	Llamada por : EPPAX12
EPPAX22	Llamada por : EPPAX12
SHP32	Llamada por : EPPAX12
PQAX2	Llamada por : EPPAX21, EPPAX22

4.2.1. Archivos

Se requiere un archivo controlador, el cual contiene los nombres de todos los archivos que necesita el programa. La función de cada uno de ellos se describe a continuación:

Archivo No. 1	Datos de entrada.
Archivo No. 2	Datos de salida.
Archivo No. 3	Escribe datos intermedios.
Archivo No. 4	Escribe los desplazamientos y los esfuerzos de salida.
Archivo No. 5	Escribe el perfil de arreglo general.
Archivo No. 6	Escribe las matrices de rigidez elementales.
Archivo No. 7	Escribe la matriz de rigidez global.
Archivo No. 8	Escribe las matrices intermedias.
Archivo No. 9	Escribe los Coeficientes de pivote.

4.3. MANUAL DEL USUARIO.**1. TARJETA DEL TITULO DEL PROBLEMA (20A4)**

NOTA	COLUMNAS	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
	1-80	TITLE	Título del problema.

2. TARJETA DE CONTROL GLOBAL (10I5)

NOTA	COLUMNAS	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
(1)	1- 5	NDM	Dimensión del problema.
(2)	6-10	NUMNP	Número total de puntos nodales.
	11-15	NDFMAX	Número máximo de grados de libertad en cada nudo.
(3)	16-20	NUMEG	Número total de grupos de elementos.
(4)	21-25	NLAYER	Número total de etapas de análisis.
(5)	26-30	ITER	Número máximo de iteraciones en cada etapa de análisis
(6)	31-35	NLOAD	Número total de cargas concentradas
(7)	31-35	NPRES	Número total de cargas de presión.
(8)	31-35	INI	Número total de puntos que definen las condiciones iniciales de esfuerzos.

NOTAS: (1) NDM = 1 si es unidimensional.
NDM = 2 si es bidimensional.

- (2) En la malla de elementos finitos que representa la región en estudio, se numeran los nodos con un orden que por lo común es de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba. Sin embargo esto depende de la geometría de la malla.
- (3) En un análisis puede haber varios tipos de elementos (ver la tabla del inciso 9), NUMEG el número máximo de tipos empleados.
- (4) Los análisis se realizan por etapas. La aplicación de cargas y el cambio geométrico del problema (construcción o excavación) evoluciona por etapas de análisis. NLAYER es el número total de etapas.
- (5) Dentro de cada etapa de análisis, los cálculos se realizan iterativamente. Existen dos criterios para detener el cálculo, el error de iteración es menor que el prefijado ó el número de iteraciones excede ITER (igual para todas las etapas de análisis).
- (6) NLOAD es el número total de cargas concentradas en todas las etapas.
- (7) NPRES es la suma total de cargas de presión en todas las etapas.
- (8) INI es el número de tarjetas para especificar las condiciones iniciales de esfuerzos.

3. TARJETA DE CONTROL DE ARREGLO COMÚN (I10)

NOTA	COLUMNAS	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
(1)	1-10	NTOT	Número de espacio necesario en memoria para el análisis

NOTAS:(1) Esta variable depende del compilador FORTRAN utilizado. En una PC con el compilador FORTRAN Microsoft Ver. 4, NTOT no debe ser mayor que 7000.

4. TARJETA DE ERROR DE ITERACIÓN (F10.0)

NOTA	COLUMNAS	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
(1)	1-10	ERRO	Error previsto de iteración (criterio de convergencia).

NOTAS:(1) El error se calcula de acuerdo con $ERRO = \frac{\|r_n\|}{\|r_n\|}$, donde r_n es el vector desplazamientos en la primera iteración de la etapa n y r_n en la k-ésima iteración. $\| \cdot \|$ es la norma.

5. TARJETAS DE PUNTOS NODALES (Libre)

NOTA	COLUMNAS	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
(1)		X(1)	X - ordenada
		X(2)	Y - ordenada (si NDM > 1)
		X(3)	Z - ordenada (si NDM > 2)
(2)		ID(1)	X - translación, código
		ID(2)	Y - translación, código
		ID(3)	Z - translación, código
		ID(4)	X - rotación, código
		ID(5)	Y - rotación, código
		ID(6)	Z - rotación, código

NOTAS: (1) Este grupo de datos consiste en NUMNP tarjetas.

(2) ID = 0 condición libre, ID = 1 condición fija (no se permite desplazamiento o rotación). El número de códigos ID es igual al máximo grado de libertad NDFMAX, es decir, que si NDFMAX es igual a tres ID tendrá tres componentes.

6. TARJETAS DE CARGAS CONCENTRADAS (3I5, F10.0)

NOTA	COLUMNAS	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
(1)	1- 5 6-10	NOD IDIRN	Punto nodal donde se aplica la carga. Grado de libertad de la aplicación de carga, ya sea sobre el eje de las abscisas o el de las ordenadas.
(2)	11-15	ILAYER	Número de etapa de la aplicación de la carga.
(3)	16-25	FLOAD	Valor de la carga

- NOTAS:(1) Este grupo de datos tiene NLOAD tarjetas. Si NLOAD = 0, se omite este grupo de tarjetas.
- (2) Una vez aplicada la carga, se mantendrá en todas las etapas subsecuentes, por tanto ILAYER es la primera etapa en que se aplica la carga
- (3) Debe recordarse que la carga tiene signo y es congruente con la convención del signo del sistema global de coordenadas

Para el caso axisimétrico (EPPAXI2) de acuerdo con la expresión (2 79), la carga se debe multiplicar por el factor $2\pi r$, en un plano de coordenadas (r, z)

7. TARJETAS DE CARGAS DE PRESIÓN (2I5, 3F10.0)

NOTA	COLUMNAS	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
(1)	1- 5	NODP	Punto nodal donde se aplica la carga
(2)	6-10	ILAYP	Número de etapa de la aplicación de carga
(3)	11-15	FLOAD(1)	Valor de la presión normal
	16-25	FLOAD(2)	Valor de la presión tangencial
	26-35	FLOAD(3)	Valor de la presión tangencial (si NDM > 2), en dirección ortogonal a la anterior.

- NOTAS: (1) Este grupo de datos tiene NPRES tarjetas. Si NPRES = 0, se omiten este grupo de tarjetas.
- (2) Una vez aplicada la carga, se mantendrá en todas las etapas subsecuentes, por tanto ILAYP es la primera etapa en que se aplica la carga
- (3) Debe recordarse que las presiones tienen signo. Consulte los elementos de presión.

8. TARJETAS DE CONDICIONES INICIALES DE ESFUERZOS (5F10.0), (SOLO BIDIMENSIONAL)

NOTA	COLUMNAS	VARIABLE	DESCRIPCION
(1)	1-10	PF	Ordenada en la dirección de gravedad (en la dirección Y si NDM = 2 y Z si NDM = 3).
(2)	11-20	SZ0	Valor de esfuerzo total vertical.
	21-30	COF	Valor del coeficiente de empuje de reposo (se supone isotrópico)
(3)	31-40	AGA	Valor de la presión del agua.
(2)	41-50	PC0	Valor de la presión de consolidación.

- NOTAS: (1) Este grupo de datos tiene INI tarjetas. Si INI = 0. se omite este grupo de tarjetas.
 (2) Es positivo si el esfuerzo es de compresión
 (3) Es positivo si la presión es de compresión

9. TARJETAS DE CONTROL GLOBAL DE ELEMENTOS (1015)

NOTA	COLUMNAS	VARIABLE	DESCRIPCION
(1)	1-5	ITYPE	Indicador del tipo de elemento
(2)	6-10	NEL	Número de elementos
	11-15	NEN	Número de puntos nodales en cada elemento
	16-20	NDF	Número de grados de libertad de los puntos nodales que forman el elemento
	21-25	NMAT	Número de grupos de material
(3)	26-30	NPRO	Número de propiedades de material en cada grupo.
	31-35	NSTR	Número de datos de salida
	36-40	NGAUS	Número de puntos de integración Gaussiana.

- NOTAS: (1) Este grupo de datos tiene NUMEG tarjetas. La descripción de cada tipo de elemento es:

NOTEN4: Sólido isoparamétrico con 4 nudos, material elástico lineal.

ELPLP2: Sólido isoparamétrico con 4 nudos, material elastoplástico perfecto con el criterio de Von Mises.

VIGA2: Viga isoparamétrica con 2 nudos, material elástico lineal.

PRES2: Elemento para calcular cargas de presión, con 2 nudos.

NOTEN8: Sólido isoparamétrico con 8 nudos, material elástico lineal

ELPLP8: Sólido isoparamétrico con 8 nudos, material elastoplástico perfecto con el criterio de Von Mises.

TRUSS2: Barra isoparamétrica con 2 nudos, material elástico lineal

PRES3: Elemento para calcular cargas de presión, con 3 nudos

EPPAXI2: Sólido axisimétrico empleando como sección plana de revolución un elemento isoparamétrico de 4 nudos, material elastoplástico perfecto con el criterio de Von Mises.

EPPOL2: Sólido axisimétrico en sectores circulares de 4 nudos; material elastoplástico perfecto con el criterio de Von Mises. Su geometría se define en coordenadas polares (r, θ) .

Los valores que se deben fijar para cada tipo de elemento se listan en la Tabla 4.1.

- (2) Los elementos se numeran en la misma dirección en que se numeran los nudos.
- (3) El programa reporta los resultados de cada elemento que contiene NSTR valores.

Tabla 4.1 Valores de cada elemento

CLAVE	ITYPE	NEN	NDF	NPRO	NSTR	NGAUSS
NOTEN4	1	4	2	4	3	4
ELPLP2	2	4	2	5	5	1
VIGA2	3	2	3	5	3	1
PRES2	4	2	2	0	0	2
NOTEN8	5	8	2	4	3	2
ELPLP8	6	8	2	5	5	4
TRUSS2	7	2	2	2	1	2
PRES3	8	3	2	0	0	3
EPPAXI2	9	4	2	5	5	4
EPPOL2	10	4	2	5	3	4

10.a TARJETAS DE ELEMENTO NOTEN4: PROPIEDADES (FORMATO LIBRE)

NOTA	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
(1)	(ELPRO(I), I=1, NPRO)	Propiedades de material.

NOTA: (1) Este grupo de datos tiene NMAT tarjetas y cada tarjeta contiene NPRO valores separados por coma.
 ELPRO(1) = Módulo de elasticidad.
 ELPRO(2) = Relación de Poisson.
 ELPRO(3) = Peso volumétrico.
 ELPRO(4) = Resistencia a la tensión.

10.b TARJETAS DE ELEMENTO NOTEN4: CONECTIVIDADES (10I5)

NOTA	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
(1)	(IX(I), I=1, NEN+2)	Conectividad y propiedad del elemento.

NOTA: (1) Este grupo de datos tiene NEL tarjetas y cada tarjeta contiene NEN+2 valores separados por un espacio.
 IX(I) a IX(NEN) son puntos nodales en cada elemento (se escriben en sentido antihorario), IX(NEN+1) es el grupo de material que corresponde. El valor absoluto de IX(NEN+2) es la etapa que este elemento se construye o se excava, dependiendo del signo de IX(NEN+2), si es positivo se construye y si es negativo se excava. Los elementos intactos siempre tienen un valor IX (NEN+2) de 1.
 Debe notarse que un elemento construido ya no puede ser excavado posteriormente y de igual forma, un elemento excavado ya no podrá ser colocado de nuevo.

11.a TARJETAS DE ELEMENTO ELPLP2: PROPIEDADES (FORMATO LIBRE)

NOTA	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
(1)	ELPRO(I), I=1, NPRO)	Propiedades de material.

NOTA: (1) Ver la NOTA (1) de 10 a.
 ELPRO(1) = Módulo de elasticidad.
 ELPRO(2) = Relación de Poisson.
 ELPRO(3) = Peso volumétrico.
 ELPRO(4) = Cohesión.
 ELPRO(5) = Resistencia a la tensión.

11.b TARJETAS DE ELEMENTO ELPLP2: CONECTIVIDADES (1015)

NOTA	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
(1)	(IX(I), I=1, NEN+2)	Conectividad y propiedad del elemento.

NOTA: (1) Ver la NOTA (1) de 10.b.

12.a TARJETAS DE ELEMENTO VIGAZ: PROPIEDADES (FORMATO LIBRE)

NOTA	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
(1)	(ELPRO(I), I=1, NPRO)	Propiedades de material.

NOTA: (1) Ver la NOTA (1) de 10 a.
ELPRO(1) = Módulo de elasticidad.
ELPRO(2) = Relación de Poisson.
ELPRO(3) = Factor de pandeo.
ELPRO(4) = Área transversal.
ELPRO(5) = Momento de inercia.

12.b TARJETAS DE ELEMENTO VIGAZ: CONECTIVIDADES (1015)

NOTA	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
(1)	(IX(I), I=1, NEN+2)	Conectividad y propiedad del elemento.

NOTA: (1) Ver la NOTA (1) de 10.b.

13.a TARJETAS DE ELEMENTO PRES2: PROPIEDADES (FORMATO LIBRE)

NOTA	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
(1)	(ELPRO(I), I=1, NPRO)	Propiedades de material.

NOTA: (1) Ver la NOTA (1) de 10.a.

13.b TARJETAS DE ELEMENTO PRES2: CONECTIVIDADES (10I5)

NOTA	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
(1)	(IX(I), I=1, NEN+2)	Conectividad y propiedad del elemento.

NOTA: (1) Ver la NOTA (1) de 10.b.

14.a TARJETAS DE ELEMENTO NOTEN8: PROPIEDADES (FORMATO LIBRE)

NOTA	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
(1)	(ELPRO(I), I=1, NPRO)	Propiedades de material.

NOTA: (1) Ver la NOTA (1) de 10 a.
 ELPRO(1) = Módulo de elasticidad.
 ELPRO(2) = Relación de Poisson.
 ELPRO(3) = Peso volumétrico.
 ELPRO(4) = Resistencia a la tensión.

14.b TARJETAS DE ELEMENTO NOTEN8: CONECTIVIDADES (10I5)

NOTA	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
(1)	(IX(I), I=1, NEN+2)	Conectividad y propiedad del elemento.

NOTA: (1) Ver la NOTA (1) de 10.b.

15.a TARJETAS DE ELEMENTO ELPLP8: PROPIEDADES (FORMATO LIBRE)

NOTA	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
(1)	(ELPRO(I), I=1, NPRO)	Propiedades de material.

NOTA: (1) Ver la NOTA (1) de 10 a.
 ELPRO(1) = Módulo de elasticidad.
 ELPRO(2) = Relación de Poisson.
 ELPRO(3) = Peso volumétrico.
 ELPRO(4) = Cohesión.
 ELPRO(5) = Resistencia a la tensión.

15.b TARJETAS DE ELEMENTO ELPLP8: CONECTIVIDADES (1015)

NOTA	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
(1)	(IX(I), I=1, NEN+2)	Conectividad y propiedad del elemento.

NOTA: (1) Ver la NOTA (1) de 10.b.

16.a TARJETAS DE ELEMENTO TRUSS2: PROPIEDADES (FORMATO LIBRE)

NOTA	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
(1)	(ELPRO(I), I=1, NPRO)	Propiedades de material.

NOTA: (1) Ver la Nota (1) de 10.a
 ELPRO(1) = Módulo de elasticidad.
 ELPRO(2) = Área transversal.

16.b TARJETAS DE ELEMENTO TRUSS2: CONECTIVIDADES (1015)

NOTA	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
(1)	(IX(I), I=1, NEN+2)	Conectividad y propiedad del elemento.

NOTA: (1) Ver la NOTA (1) de 10.b.

17.a TARJETAS DE ELEMENTO PRES3: PROPIEDADES (FORMATO LIBRE)

NOTA	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
(1)	(ELPRO(I), I=1, NPRO)	Propiedades de material.

NOTA: (1) Ver la Nota (1) de 10.a.
 ELPRO(1) = Módulo de elasticidad.
 ELPRO(2) = Relación de Poisson.
 ELPRO(3) = Peso volumétrico.

17.b TARJETAS DE ELEMENTO PRES3: CONECTIVIDADES (1015)

NOTA	VARIABLE	DESCRIPCION
(1)	(IX(I), I=1, NEN+2)	Conectividad y propiedad del elemento

NOTA: (1) Ver la NOTA (1) de 10 b

18.a TARJETAS DE ELEMENTO EPPAX12: PROPIEDADES (FORMATO LIBRE)

NOTA	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
(1)	(ELPRO(I), I=1, NPRO)	Propiedades de material

NOTA: (1) Ver la Nota (1) de 10.a.
 ELPRO(1) = Módulo de elasticidad
 ELPRO(2) = Relación de Poisson.
 ELPRO(3) = Peso volumétrico.
 ELPRO(4) = Cohesión
 ELPRO(5) = Resistencia a la tensión

18.b TARJETAS DE ELEMENTO EPPAX12: CONECTIVIDADES (1015)

NOTA	VARIABLE	DESCRIPCION
(1)	(IX(I), I=1, NEN+2)	Conectividad y propiedad del elemento.

NOTA: (1) Ver la NOTA (1) de 10.b.

19.a TARJETAS DE ELEMENTO EPPOL2: PROPIEDADES (FORMATO LIBRE)

NOTA	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
(1)	(ELPRO(I), I=1, NPRO)	Propiedades de material.

NOTA: (1) Ver la Nota (1) de 10.a.
 ELPRO(1) = Módulo de elasticidad.
 ELPRO(2) = Relación de Poisson.
 ELPRO(3) = Peso volumétrico.
 ELPRO(4) = Cohesión.
 ELPRO(5) = Resistencia a la tensión

19.b TARJETAS DE ELEMENTO EPPOL2: CONECTIVIDADES (1015)

NOTA	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
(1)	(IX(I), I=1, NEN+2)	Conectividad y propiedad del elemento.

NOTA: (1) Ver la NOTA (1) de 10.b

CAPÍTULO 5

APLICACIONES A TÚNELES Y LUMBRERAS

5.1. ESTUDIOS ELÁSTICOS.

En esta parte del trabajo se presentan los casos que se analizaron con el programa axisimétrico en un material elástico-lineal. Primero se muestra un ejemplo de comprobación de la formulación axisimétrica, para posteriormente aplicarse a problemas de cavidades aisladas: un túnel de sección circular y la excavación de una lumbrera. Los resultados de cada análisis se comparan con soluciones teóricas descritas en el tercer capítulo.

5.1.1. Cilindro hueco sujeto a una presión interna.

Un contenedor cilíndrico de fluidos, es un buen ejemplo para comprobar la formulación axisimétrica que se presenta en el inciso (2.3), debido a que en un cilindro bajo esfuerzo axial o radial constante se tienen soluciones exactas para un modelo elástico-lineal.

Por lo cual, este ejemplo se tomó como base para comprobar el algoritmo implementado al programa antes de analizar los casos plásticos (propios de este trabajo). El problema consiste en un cilindro de pared gruesa bajo una presión interna, donde las propiedades y dimensiones se muestran en la fig. 5.1 (ref. 18).

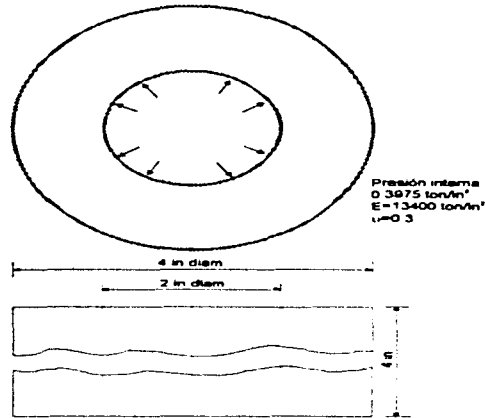


Fig. 5.1 Cándro hueco, bajo una presión interna.

Por simetría, el análisis se realizó en un corte transversal en el plano de revolución r - z , y el medio se discretizó con una malla de elementos finitos (isoparamétricos de cuatro nodos, de $0.2''$ de base y $0.4''$ de altura) como se muestra en la fig. 5.2. Se tiene un total de 50 elementos y 33 puntos nodales.

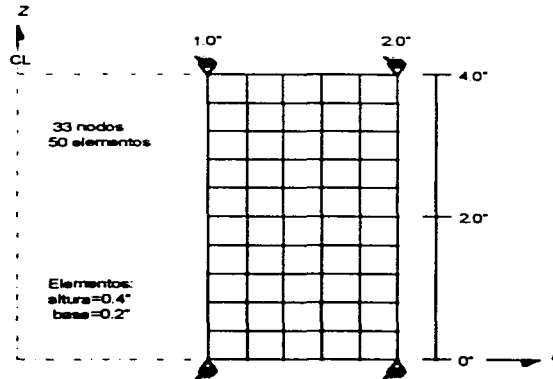


Fig. 5.2 Malla de elementos finitos, cándro hueco.

Las soluciones teóricas para determinar la distribución de esfuerzos en un cilindro hueco sometido a una presión interna uniforme (ref. 22), se determinan con las siguientes expresiones:

$$\sigma_r = \frac{a^2 P_i}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{a^2 P_i}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right)$$
(5.1)

donde a y b son los radios interior y exterior respectivamente, y P_i es la presión interna.

Los esfuerzos radial y angular se presentan en la fig. 5.3, donde las líneas punteadas muestran los valores teóricos calculados con las expresiones (5.1), y los puntos representan los valores determinados con el programa axisimétrico. En las gráficas se observa que existe una buena aproximación de resultados para la malla empleada, donde se obtuvieron diferencias numéricas de 0.9% para el esfuerzo radial (σ_r) y 0.5% para el esfuerzo angular (σ_θ).

En la fig. 5.4 se presentan los desplazamientos radiales. Se puede observar que los valores calculados con el programa se aproximan bastante a los resultados teóricos.

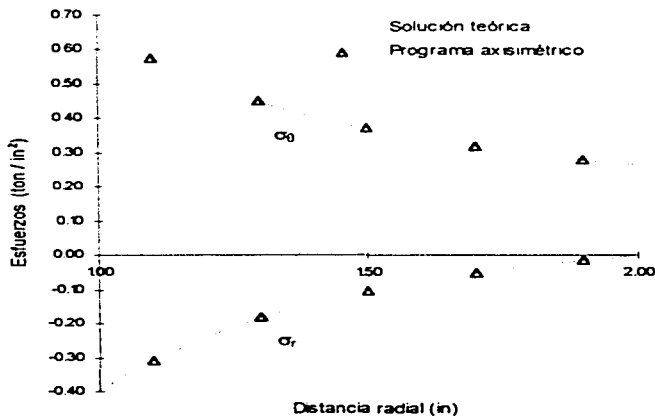


Fig 5.3 Esfuerzos radial y angular en el cilindro.

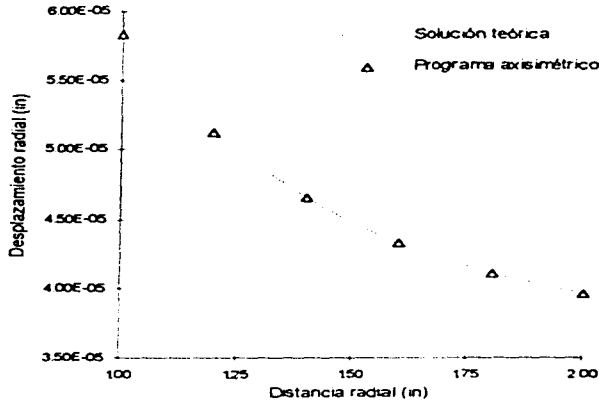


Fig 5.4 Desplazamientos en el cilindro

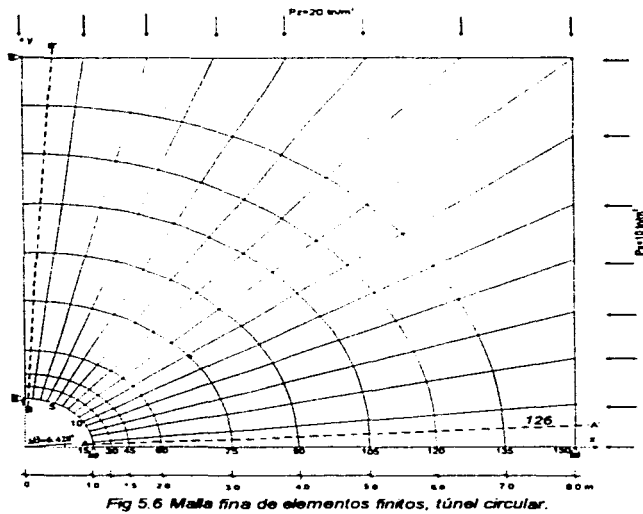
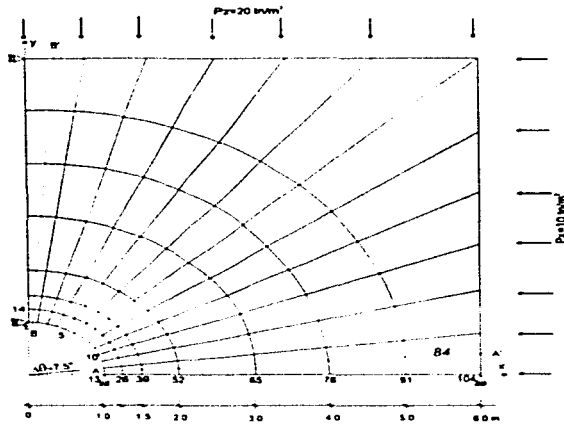
Los esfuerzos radiales que se producen en un cilindro hueco bajo una presión interna son de compresión, mientras que los esfuerzos angulares en las mismas condiciones, son de tensión. Esto se aprecia también, en las gráficas de esfuerzo 5.3, donde el signo negativo indica en este caso, compresión.

5.1.2. Túnel de sección circular.

Para modelar un túnel circular de 2.0 m de diámetro sin revestimiento, en una masa infinita sujeta a diferentes estados de esfuerzos en sus fronteras, como se describe en el inciso (3.3.1), se realizaron dos mallas de elementos finitos en sectores circulares donde su geometría se define en coordenadas cilíndricas (r, θ) . Estas mallas se muestran en las fig. 5.5 y 5.6, y se analiza únicamente un cuarto de círculo por las condiciones de simetría que definen el problema.

La primera malla esta constituida por 84 elementos y 104 puntos nodales, y se extiende a una distancia radial de 6.0 m. La segunda malla es más fina con 126 elementos y 150 puntos nodales, y tiene una mayor extensión radial de 8.0 m.

Las dos mallas tiene las mismas condiciones y propiedades, aplicando en sus contornos una presión vertical de 20 ton/m² y una presión horizontal de 10 ton/m² ($K_0=0.5$). Estos esfuerzos se distribuyen en cargas concentradas, en los nodos de la frontera.



Se emplea un modulo de elasticidad $E=1 \times 10^5 \text{ ton/m}^2$ y una relación de Poisson $\nu=0.3$. Se realizó un análisis con peso volumétrico nulo ($\gamma=0 \text{ ton/m}^3$) para comparar los resultados con las soluciones teóricas las cuales no consideran fuerzas por peso propio o de masa. Además, el estado de esfuerzos por peso propio del suelo, es el representado por los esfuerzos aplicados en las fronteras de las mallas.

En la fig. 5.7 se presentan los resultados para los esfuerzos radial y angular que se obtuvieron con la malla burda. Estos resultados se comparan con las soluciones teóricas calculadas con las expresiones (3.3) y (3.4), a lo largo de los ejes A-A' y B-B' (fig. 5.5), que son los más cercanos a un eje horizontal y vertical respectivamente. Los desplazamientos radiales en la periferia del túnel se comparan con los valores teóricos, en la fig. 5.8.

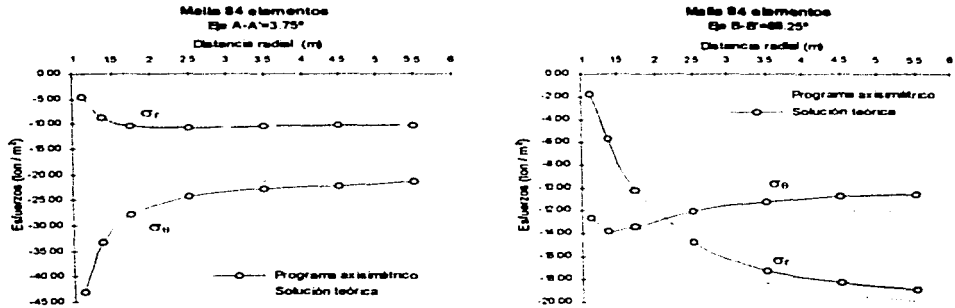


Fig 5.7 Esfuerzos radial y angular, malla burda

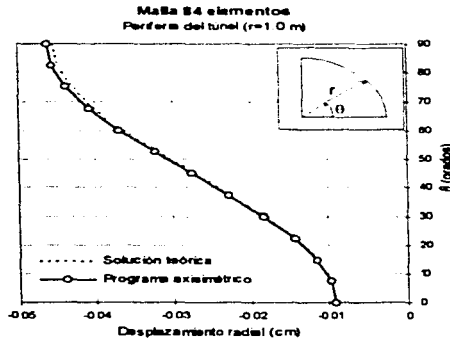


Fig 5.8 Desplazamiento radial en la periferia del túnel, malla burda.

Esta misma información para la malla fina de mayor extensión, se muestra en las fig. 5.9 y 5.10.

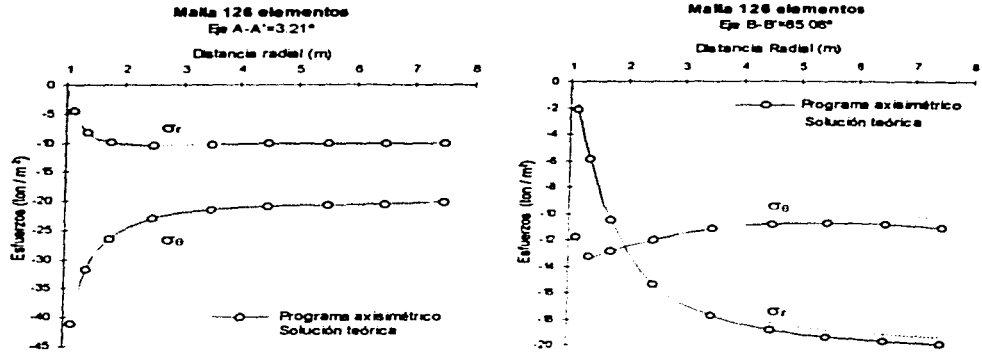


Fig 5.9 Esfuerzos radial y angular, malla fina.

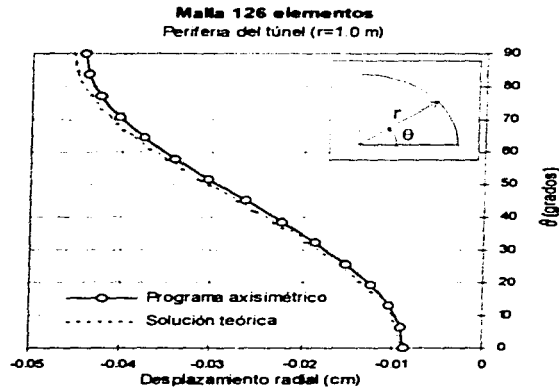


Fig 5.10 Desplazamiento radial en la periferia del túnel, malla fina.

Los resultados que se obtuvieron para la malla burda sobre el eje B-B', presentan errores numéricos de 9.6% para el esfuerzo radial (σ_r) y 6.3% para el esfuerzo angular (σ_θ). Ahora, para la malla fina sobre el mismo eje, se tienen errores de 5% para el esfuerzo radial y 3.3% para el esfuerzo angular.

Los desplazamientos radiales en la periferia del túnel, muestran errores de 1.1% para la malla burda y 3.75% para la malla fina.

De esta forma, existe una mayor aproximación de resultados mientras más fina es la malla y más extensa es la región de análisis. Esto se debe a que los elementos de menor tamaño aproximan más a un medio continuo y al tener la malla mayor extensión se esta simulando un medio infinito.

De los resultados, también se determina que el esfuerzo radial en la periferia del túnel es nulo, debido a que no existe una restricción del desplazamiento por tratarse de un caso aislado (túnel sin revestimiento).

En los puntos más alejados del orificio sobre el eje A-A', los esfuerzos radial y angular se aproximan respectivamente, a los esfuerzos horizontal y vertical que se aplican en el contorno de la malla. Por el contrario, en los puntos más alejados del orificio sobre el eje B-B', ahora el esfuerzo radial se aproxima al vertical, y el angular, al horizontal.

Lo anterior quiere decir, que la presencia de un túnel en un medio continuo altera el estado de esfuerzos en su contorno; pero a una mayor distancia radial, los esfuerzos se mantienen en un estado de equilibrio.

5.1.3. Lumbrera.

Se analiza la excavación de una lumbrera de 4.0 m de diámetro y 15.0 m de profundidad, en un medio homogéneo elástico-lineal. Se emplea un modulo de elasticidad, $E=600 \text{ ton/m}^2$; una relación de Poisson, $\nu=0.4$; y un peso volumétrico, $\gamma=1.0 \text{ ton/m}^3$.

La modelación se realizó mediante una malla de elementos finitos que por simetría se analiza únicamente la mitad de la región en un plano r-z, como se muestra en la fig. 5.11. Se puede observar como a partir de los 2.0 m de radio, el ancho de estos elementos se incrementa linealmente en un orden de 15%, mientras que su altura se mantiene constante. Se obtuvieron en total 320 elementos y 357 puntos nodales.

El análisis considera únicamente el peso propio del suelo, es decir, no se toman en cuenta cargas externas, ni fuerzas que simulen elementos de retención en la pared de la lumbrera (análisis aislado). La excavación se realiza quitando los elementos que definen la geometría de la lumbrera, en una sola etapa (fig. 5.11).

Los resultados obtenidos de la modelación se comparan con los valores teóricos calculados con las expresiones (3.9). Sin embargo, el esfuerzo horizontal que actúa en el contorno de la lumbrera a una determinada profundidad, se obtiene de la siguiente expresión:

$$P_x = K_o P_z = K_o \gamma z \quad (5.2)$$

donde K_o es el coeficiente de presión de tierra en reposo, el cual esta en función del modulo de Poisson, de la siguiente forma (ref. 7):

$$K_o = \frac{\nu}{1-\nu} \quad (5.3)$$

Por lo tanto, para una relación de Poisson (ν) igual a 0.4, se tiene una relación de esfuerzos, $K_o=0.667$.

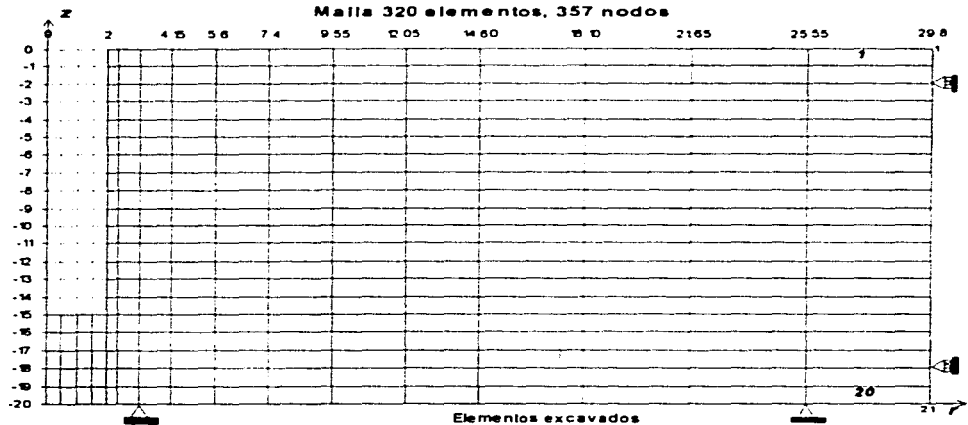


Fig 5.11 Malla de elementos finitos, lumbrera.

En la fig. 5.12, se muestran los resultados para los esfuerzos radial, angular y vertical, junto con las soluciones teóricas, a lo largo de dos ejes horizontales (4.5 y 11.5 m de profundidad). Los desplazamientos radiales en el contorno de la lumbrera se presentan en la fig. 5.13, donde se comparan con los valores teóricos calculados con la expresión (3.7).

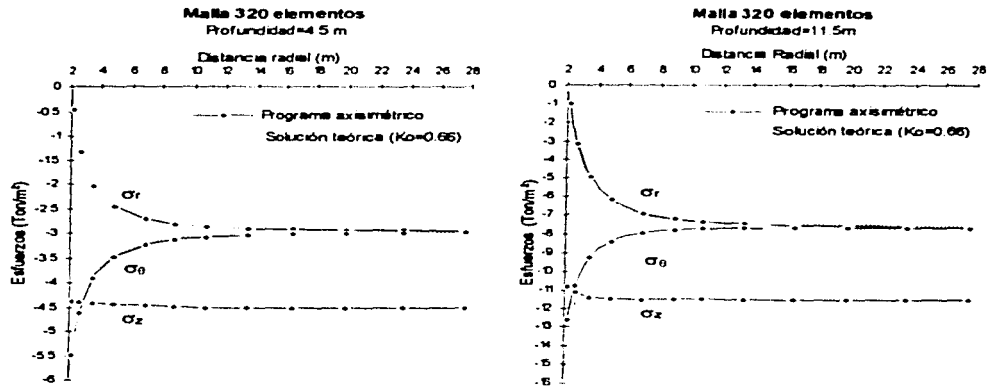


Fig 5.12 Esfuerzos a lo largo de un eje horizontal

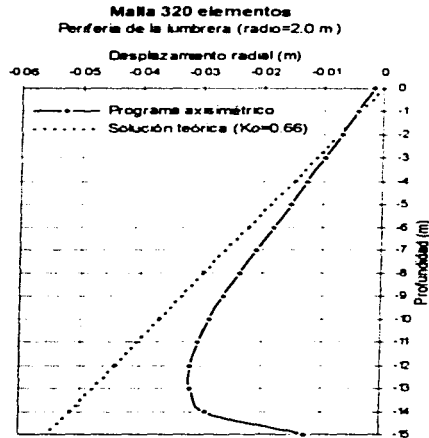


Fig 5.13 Desplazamientos en la periferia de la lumbrera

Los esfuerzos radial y angular calculados con el programa para una profundidad de 4.5 m, son casi exactos a los valores teóricos, con un error numérico de 0.06%. Los resultados a una profundidad de 11.5 m, presentan un error aproximado de 0.5%.

Los desplazamientos radiales en la periferia de la lumbraera, no siguen una misma relación lineal con respecto a la profundidad, como lo muestran los valores teóricos. Esto posiblemente se debe a que las expresiones teóricas no consideran que la proximidad del fondo de la excavación afecta las condiciones en esos puntos.

Resultados completos de la distribución de esfuerzos radial, vertical y angular, calculados con el programa en toda la región en estudio, se presentan en la fig. 5.14, 5.15 y 5.16 respectivamente. De estas gráficas, se observa como el estado de esfuerzos se altera en la proximidad de la lumbraera, y en los puntos más alejados de la excavación los esfuerzos se mantienen en un estado de equilibrio.

De la fig. 5.15, se tiene que el esfuerzo vertical (σ_z), coincide con la expresión teórica:

$$\sigma_z = \gamma z$$

De la misma forma, los esfuerzos radial y angular en la región mas alejada de la lumbraera se aproximan al esfuerzo horizontal, que se determina con la expresión (5.2).

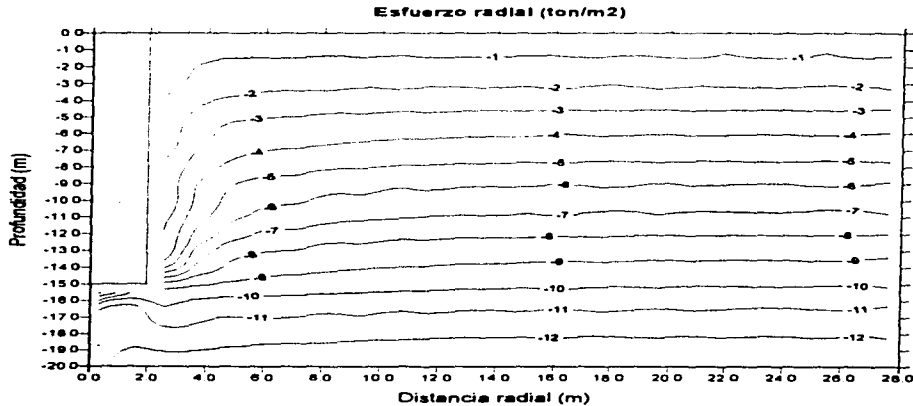


Fig 5.14 Distribución de esfuerzo radial; alrededor de una lumbraera.

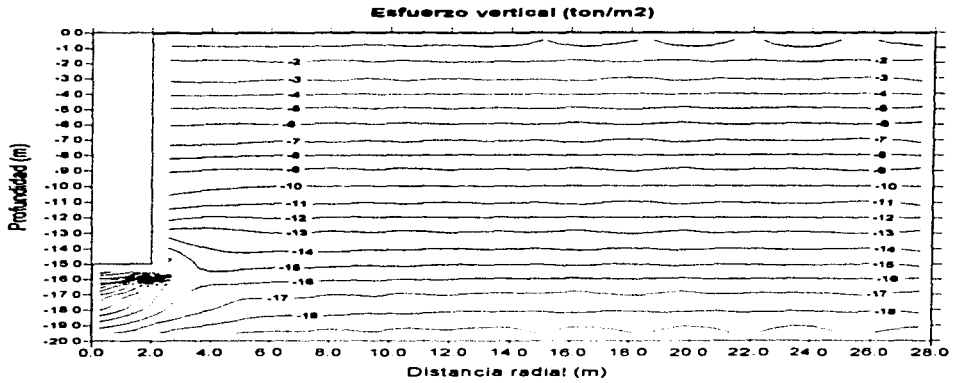


Fig 5.15 Distribución de esfuerzo vertical, alrededor de una lumbrera.

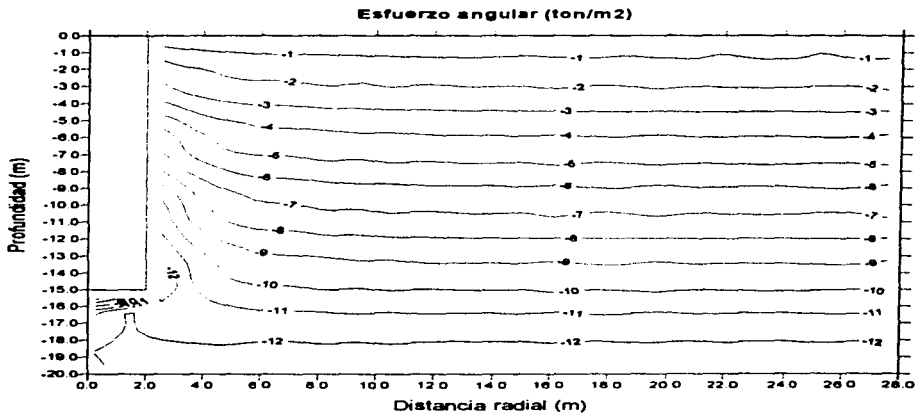


Fig 5.16 Distribución de esfuerzo angular, alrededor de una lumbrera.

5.2. ESTUDIOS PLÁSTICOS.

Se analizan los casos axisimétricos de cavidades aisladas del inciso anterior, pero ahora considerando un modelo de suelo elastoplástico perfecto. Se presenta primero, un túnel de sección circular bajo una presión hidrostática, y después se analiza la excavación de una lumbrera. Estos problemas se modelaron con mallas diferentes a las presentadas anteriormente, para mejorar la aproximación de los resultados a las soluciones analíticas.

5.2.1. Túnel bajo a una presión hidrostática.

Se analiza un túnel circular sujeto a una presión hidrostática en un medio elastoplástico perfecto, como se describe en el inciso (3.3.3). Para modelar este caso se realizaron varias pruebas con diferentes mallas de elementos finitos en sectores circulares, donde la geometría se define en coordenadas polares (r, θ) . Sin embargo, en este trabajo solamente se presentan los resultados obtenidos con la malla de la fig. 5.17, la cual tiene un orificio circular de 1.0 m de radio y se extiende hasta una distancia radial de 16.43 m. El ancho radial de los elementos aumenta linealmente en un 10% y se tiene una división angular a cada 5° . En la malla se obtuvieron en total 396 elementos y 437 nudos.

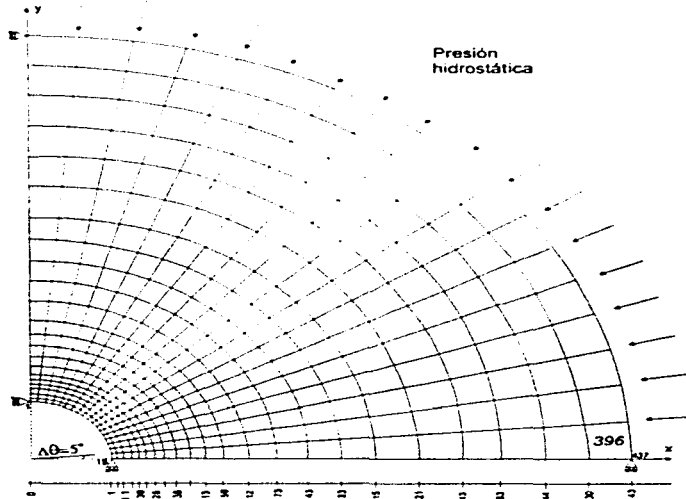


Fig 5.17 Malla de elementos finitos, túnel sujeto a una presión hidrostática.

El medio se caracteriza con un modulo de elasticidad $E=10,000 \text{ ton/m}^2$ y una relación de Poisson, $\nu=0.3$. Se realiza un análisis sin peso propio del suelo ($\gamma=0$), considerando únicamente la distribución de esfuerzos debidos a una presión hidrostática (P), que en este caso se da un valor de 10 ton/m^2 . Esta presión se distribuye por medio de cargas concentradas actuantes en los nodos de la frontera.

Se realizaron varios análisis con las condiciones y propiedades mencionadas, únicamente variando el valor de la cohesión como un porcentaje de la presión hidrostática (P). Es decir, se obtienen resultados para una cohesión igual a 100, 70, 50, 40, 30 y 20% de la presión hidrostática aplicada. Estos resultados se presentan en las fig. 5.18, para los esfuerzos radial y angular, junto con los valores teóricos calculados con las expresiones (3.14) y (3.15).

De las gráficas se observa que para una cohesión igual a la presión hidrostática ($c=10 \text{ ton/m}^2$), los resultados corresponden a la solución elástica-lineal. Lo que indica que el esfuerzo cortante (para $r=1.0 \text{ m}$ y $c=P$) es igual a la presión hidrostática, que es la condición para iniciar la fluencia plástica.

En las demás gráficas, al reducir el valor de la cohesión (resistencia del suelo), se presenta una zona de plastificación que comienza de la periferia del túnel, hasta la distancia radial donde se encuentra el esfuerzo angular máximo ó pico, lo que define la frontera plástica-elástica. Después de esta línea, los valores corresponden a un comportamiento elástico-lineal.

Los resultados son en general aproximados como se muestra en la tabla 5.1, donde los valores del esfuerzo angular máximo para cada valor de la cohesión, presentan errores menores del 4%. Sin embargo, la distancia radial donde se debe presentar la frontera plástica-elástica, los errores son mayores (hasta de un 21%, para una cohesión igual a 2 ton/m^2).

Tabla 5.1 Comparación de resultados de esfuerzo angular máximo y frontera plástica-elástica

Cohesión (ton/m^2)	Esfuerzo angular máximo			Frontera radial plástica-elástica		
	calculado (ton/m^2)	teórico (ton/m^2)	Error	calculado (m)	teórico (m)	Error
7.0	17.57	17.00	3.35%	1.16	1.24	6.38%
5.0	15.27	15.00	1.80%	1.49	1.65	9.63%
4.0	13.75	14.00	1.79%	1.95	2.12	7.89%
3.0	12.65	13.00	2.69%	2.93	3.21	8.75%
2.0	11.70	12.00	2.50%	5.83	7.39	21.10%

Esta diferencia de resultados se debe probablemente a lo siguiente. La malla de la fig. 5.17 es más fina en la proximidad del túnel, precisamente con el objetivo de poder definir mejor la frontera entre la zona plástica y elástica. Sin embargo, como los esfuerzos se calculan con el programa al centroide de cada elemento, no es posible definir exactamente el lugar donde se presentaría esta frontera, para cada valor de la cohesión.

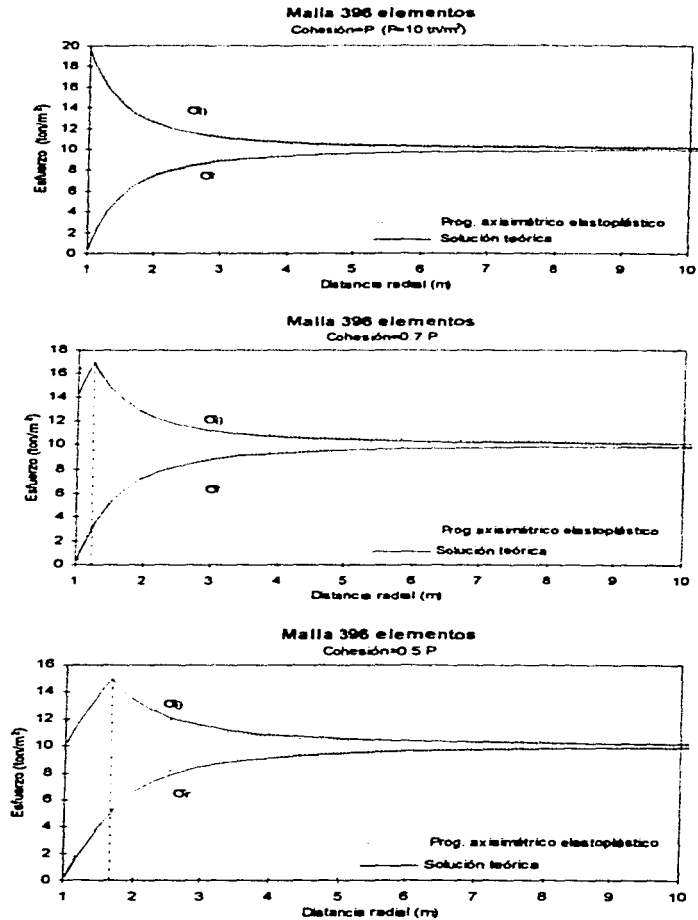


Fig. 5.18 Esfuerzos radial y angular en el contorno de un túnel, modelo elastoplástico.

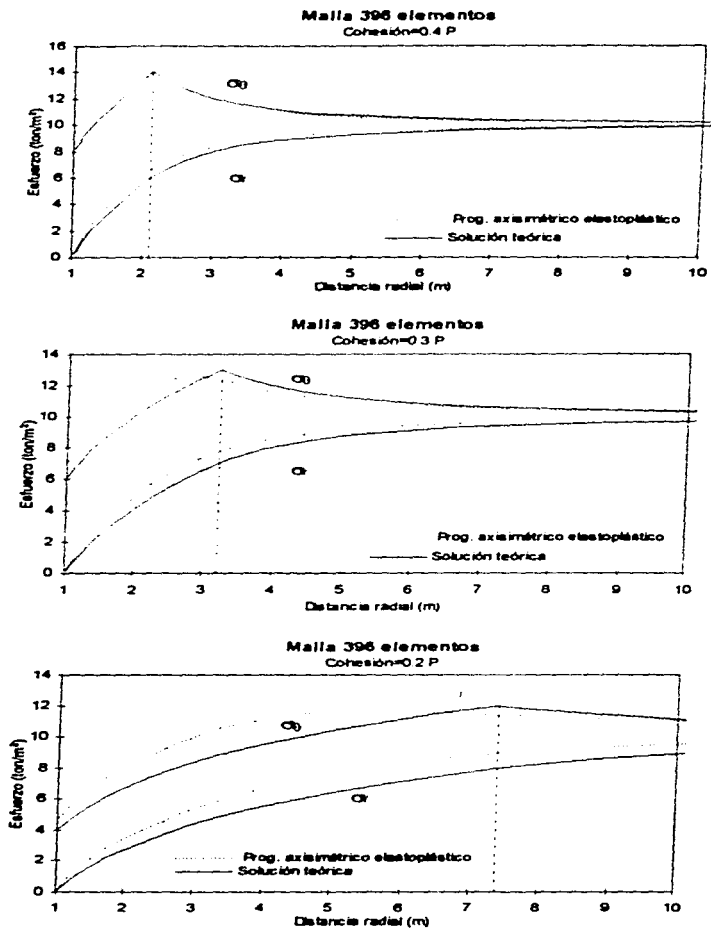


Fig. 5.18 (continuación) Esfuerzos radial y angular en el contorno de un túnel, modelo elastoplástico.

De las gráficas se determina que el esfuerzo angular (σ_θ) cerca de la periferia de túnel es menor para un modelo de suelo elastoplástico (cohesión igual a $0.7 P$, $0.5 P$, $0.4 P$, $0.3 P$ y $0.2 P$), que para un el modelo elástico-lineal ($c=P$). Sin embargo, el esfuerzo angular (máximo) que se presenta en la frontera plástica-elástica, es mayor que el esfuerzo angular para la solución elástica a esa misma distancia radial.

Lo anterior indica, que la zona de influencia o la región donde la presencia del túnel ha alterado el campo de esfuerzos originales (alrededor de una abertura cilíndrica), es mucho más grande para un material elastoplástico que para una material perfectamente elástico. Esto se muestra en las gráficas de la fig. 5.18, que coinciden con los resultados teóricos que se presentan en la fig. 3.8.

De acuerdo con la formulación elastoplástica, que se describe en el inciso (2.3.10), se tiene como condición de fluencia plástica el máximo esfuerzo cortante. Por esta razón, la plastificación se presenta en las proximidades del túnel, debido a que existe una mayor diferencia de esfuerzos en esa zona. Mientras que a una mayor distancia radial, esta diferencia va decreciendo, hasta que los esfuerzos angular y radial se equilibran o se igualan a la presión hidrostática.

En la fig. 5.19 se muestran resultados para una distribución de esfuerzos radial y angular calculados con el programa, en una región próxima a la periferia del túnel (hasta una distancia radial de 4.0 m) y para una cohesión igual al 40% de la presión hidrostática. Se observa que existe una simetría de los resultados por las condiciones del problema, es decir, esta distribución de esfuerzos simétrica con respecto a un eje de revolución es una de las principales características de un problema axisimétrico.

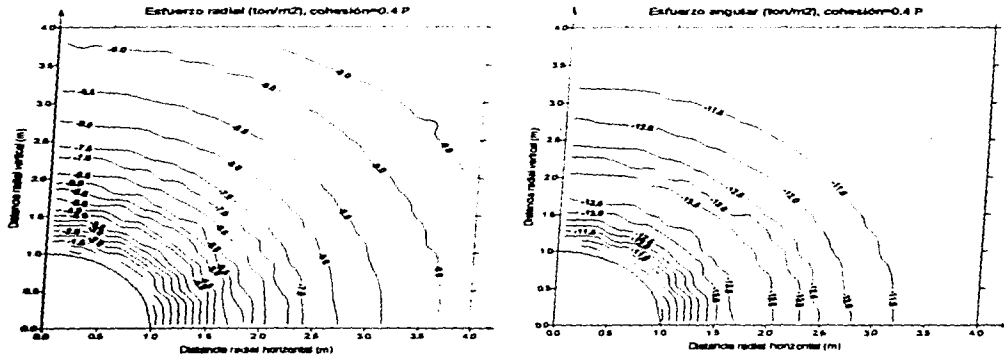


Fig 5.19 Distribución de esfuerzos radial y angular en el contorno del túnel, para $c=0.4 P$.

Los desplazamientos radiales en la región del túnel se presentan en la fig. 5.20, y se comparan únicamente con la solución elástica, debido a que no se tienen expresiones teóricas para el cálculo de desplazamientos en un modelo de suelo elastoplástico perfecto.

Sin embargo, de las gráficas se observa que para una cohesión igual a la presión hidrostática (P), se tiene un comportamiento elástico-lineal, donde los valores son casi exactos. En las gráficas para una cohesión igual a $0.6 P$ y $0.4 P$, existe un aumento del desplazamiento radial en la zona de plastificación; mientras que en la zona elástica, los resultados se aproximan a los valores teóricos. Esto se debe, a que no es muy extensa la región de plastificación, y no afecta considerablemente los resultados.

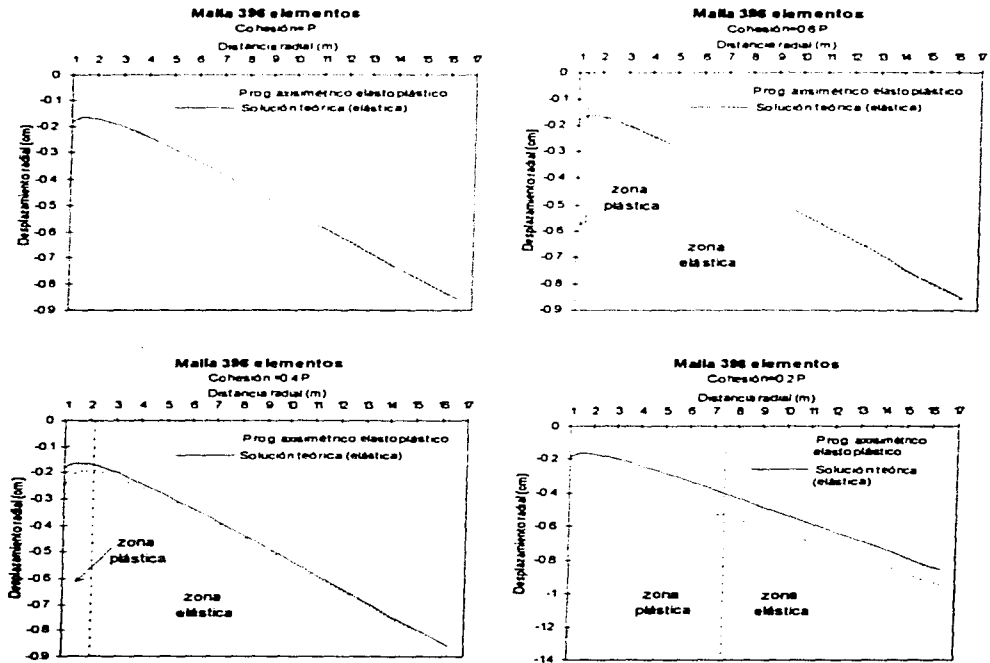


Fig 5.20 Desplazamientos radiales en la región del túnel.

En cambio, en la gráfica para una cohesión de 0.2 P, donde la región de plastificación llega hasta 7.4 m de radio, existe una mayor diferencia de resultados, aunque se tiene la misma tendencia de la curva en la zona elástica. Estas curvas (excepto para 0.2 P) presentan los mayores desplazamientos cerca de la frontera donde se aplican las cargas, decreciendo conforme se aproximan al orificio y aumentando un poco en la periferia del túnel.

5.2.2. Lumbrera, modelo elastoplástico.

El problema consiste en modelar la excavación de una lumbrera de 2.0 m de diámetro y 15.0 m de profundidad. El caso es similar al analizado en el inciso 5.1.2, pero ahora considerando un modelo de suelo elastoplástico perfecto.

La malla de elementos finitos para modelar este caso se muestra en la fig. 5.21 y esta constituida por 780 elementos y 840 puntos nodales. Se observa que existe una mayor discretización en las proximidades de la excavación, con la finalidad de definir mejor la frontera que divide las zonas plástica y elástica.

Como propiedades del suelo se tiene un modulo de elasticidad, $E=600 \text{ ton/m}^2$; una relación de Poisson, $\nu=0.4$; un peso volumétrico, $\gamma=1.0 \text{ ton/m}^3$, y una cohesión, $c= 3.0 \text{ ton/m}^2$. Se realiza un análisis considerando únicamente el peso propio del suelo, sin tomar en cuenta cargas externas, ni elementos de retención en las paredes de la lumbrera.

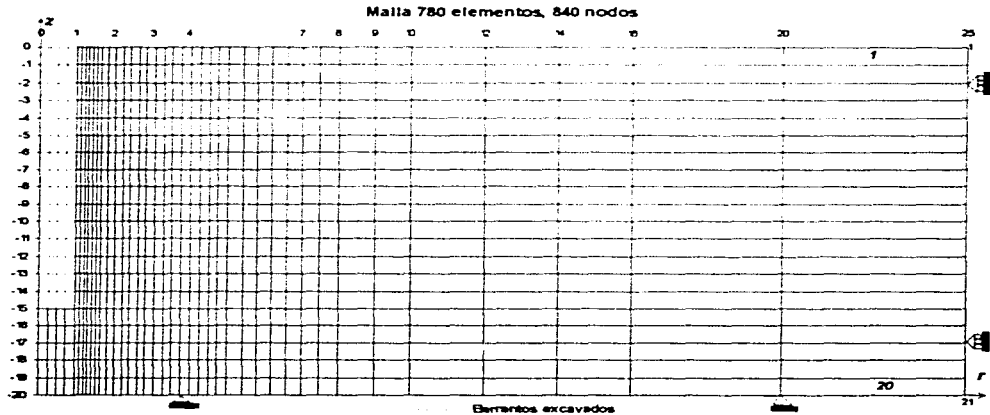


Fig 5.21 Malla de elementos finitos, lumbrera.

En este caso no es necesario tener diferentes valores de la cohesión, debido a que el esfuerzo horizontal (P_x) en el contorno de la lumbrera, varía de acuerdo a la profundidad. Puesto que este esfuerzo es constante radialmente en un plano horizontal (misma profundidad), el caso es similar al anterior (túnel bajo una presión hidrostática), y por lo tanto, se emplean las mismas soluciones teóricas.

Los resultados se presentan en la fig. 5.22 para los esfuerzos radial y angular sobre un eje horizontal a 4.5 m, 6.5 m, 8.5 m y 10.5 m. de profundidad, junto con los valores teóricos calculados con las expresiones (3.14) y (3.15). La presión (P) que aparece en las ecuaciones teóricas es igual al esfuerzo horizontal que se determina con las expresiones (5.2) y (5.3). De esta forma, se tienen para una misma cohesión ($c=3 \text{ ton/m}^2$), diferentes porcentajes (h) que de acuerdo con la expresión (3.16), son igual a 100, 70, 56 y 42%, para cada profundidad.

De las gráficas se tiene que para una cohesión igual a la presión horizontal ($P_x=3 \text{ ton/m}^2$ a una profundidad de 4.5 m), los valores son casi exactos a la solución elástica-lineal con un error numérico aproximado de 1.2%. A una profundidad mayor a 4.5 m, la presión horizontal aumenta, y por lo cual, se presenta una zona de plastificación, que como se ha mencionado (caso anterior), inicia de la periferia de la lumbrera hasta la distancia radial donde se encuentra el máximo esfuerzo angular. Esta frontera plástica-elástica aumenta a mayor profundidad como lo muestran las gráficas de la fig. 5.22.

Los datos calculados con el programa axisimétrico son aproximados a los valores teóricos, como se aprecia en la tabla 5.2, donde se tiene para un esfuerzo angular máximo errores menores de 4.5%. En los valores para la frontera radial plástica-elástica, se presentan errores hasta de 10.5%.

Tabla 5.2 Comparación de resultados de esfuerzo angular máximo y frontera radial plástica-elástica.

Esfuerzo horizontal (ton/m^2)	Esfuerzo angular máximo			Frontera radial plástica-elástica		
	calculado (ton/m^2)	teórico (ton/m^2)	Error	calculado (m)	teórico (m)	Error
4.33	7.50	7.33	2.40%	1.15	1.25	8.00%
5.66	8.63	8.63	0.01%	1.45	1.55	6.45%
7.00	9.41	9.85	4.45%	1.70	1.90	10.53%

Estos resultados se complementan con las gráficas de la fig. 5.23, donde se presenta la distribución de esfuerzos radial, vertical y angular calculados con el programa para un modelo elastoplástico, en toda la región de análisis. Se puede observar la zona donde los esfuerzos se alteran debido a la excavación de la lumbrera, y si estas gráficas se compara con los resultados elásticos de las fig. 5.14, 5.15 y 5.16, se observa una mayor variación de esfuerzos en la zona de plastificación que se genera alrededor de la lumbrera. Esto se observa con mayor detalle en la gráfica de esfuerzos verticales a partir de una profundidad de 5 m aproximadamente.

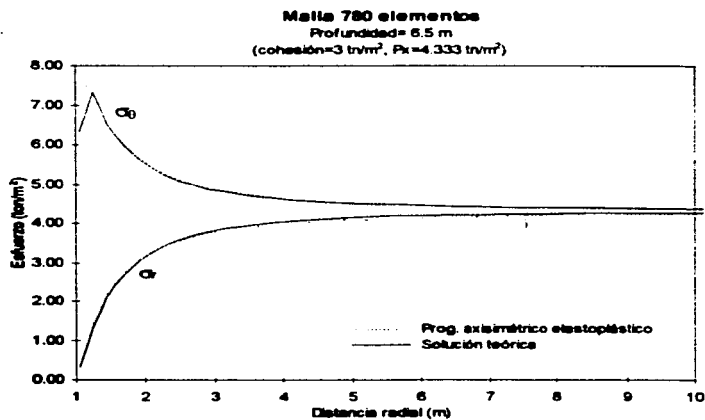
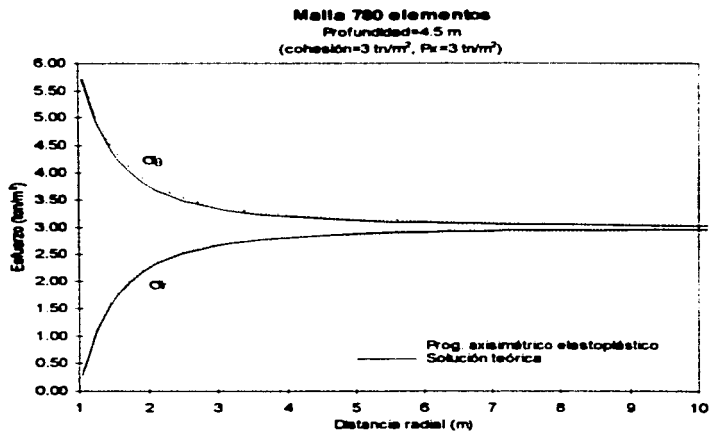


Fig 5.22 Esfuerzos radial y angular alrededor de una lumbrera sobre un eje horizontal.

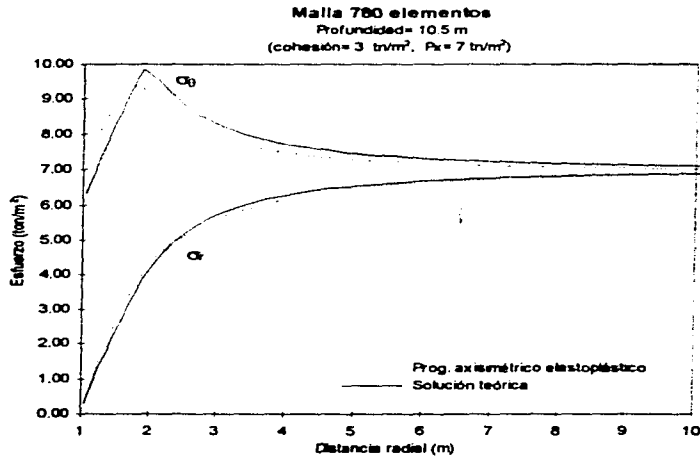
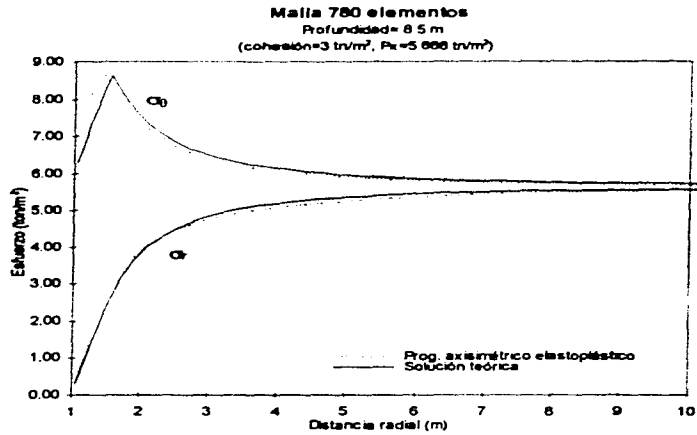


Fig 5.22 (continuación) Esfuerzos radial y angular alrededor de una lumbrera sobre un eje horizontal.

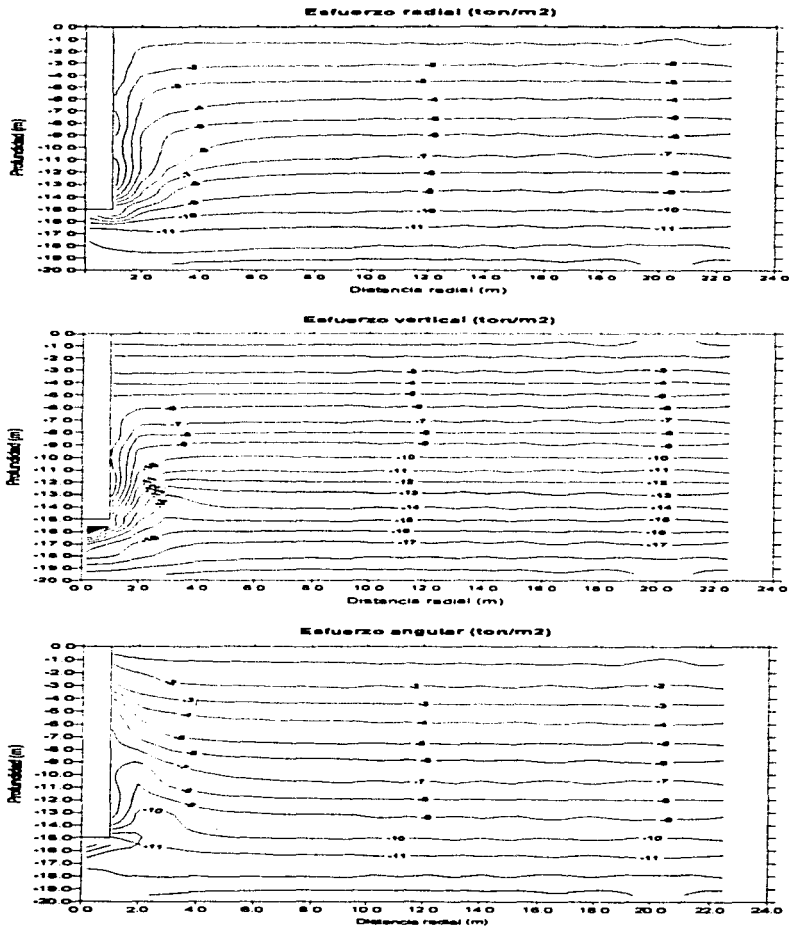


Fig 5.23 Distribución de esfuerzos radial, vertical y angular en el contorno de una lumbrera, modelo elastoplástico.

En la fig. 5.24 se muestra sobre la malla, los elementos que se plastificaron después de la excavación. Como se ha mencionado, la frontera plástica-elástica va aumentando a mayor profundidad debido al incremento del esfuerzo horizontal actuante en el contorno de la lumbrera. Esta zona de plastificación, coincide geoméricamente con la de un cono cilíndrico de revolución, similar a la que se presenta en la fig. 3.5.

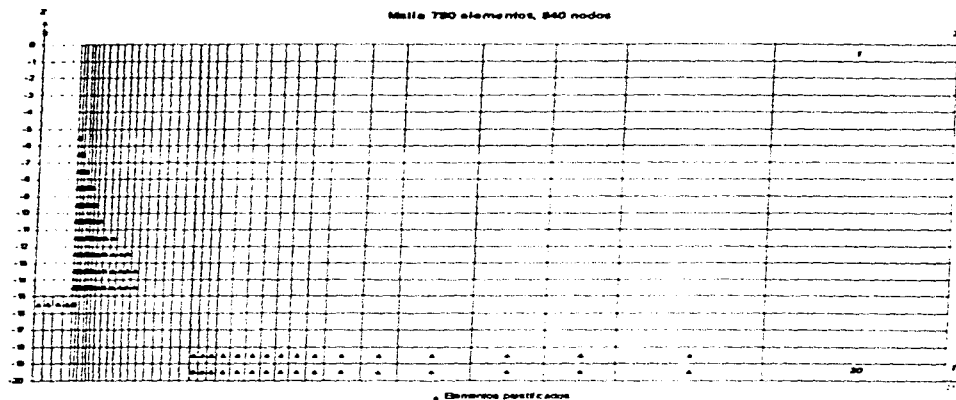


Fig 5.24 Zona de plastificación en el contorno de la lumbrera

Los desplazamientos radiales en la pared de la lumbrera se presentan en la fig. 5.25, junto con la solución elástica-lineal teórica y calculada con el programa. Los desplazamientos elásticos y elastoplásticos determinados con el programa, son parecidos a la solución teórica hasta una profundidad aproximada de 5.0 m, donde se presenta todavía un comportamiento elástico-lineal. De la misma gráfica se observa que a una profundidad de 14 m se presentan los máximos desplazamientos en las paredes de la lumbrera (en las proximidades del fondo de la excavación), siendo mayores los valores para un modelo de suelo elastoplástico perfecto (4.5 cm) que para un modelo elástico-lineal (1.9 cm).

En la fig. 5.26 se muestran los asentamientos superficiales alrededor de la lumbrera y las expansiones en el fondo de la excavación para un comportamiento del suelo elástico y elastoplástico perfecto calculados con el programa. Como se muestra en estas gráficas, son mayores los desplazamientos plásticos, que los elásticos. Se presenta una expansión en el fondo de la excavación de 4 cm en un medio elastoplástico, sin embargo, los asentamientos superficiales son casi despreciables.

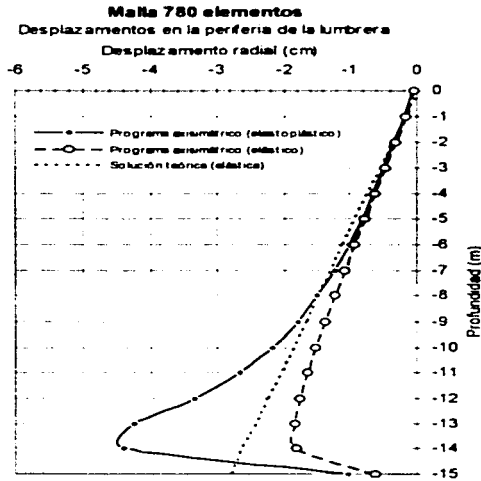


Fig 5.25 Desplazamientos radiales en el contorno de la lumberra.

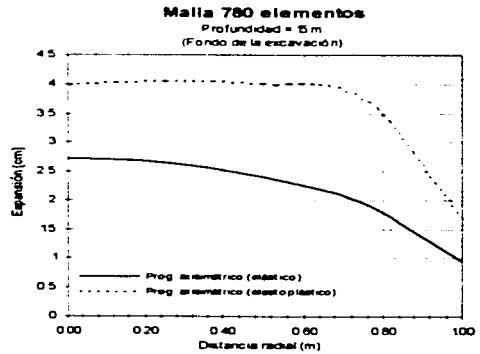
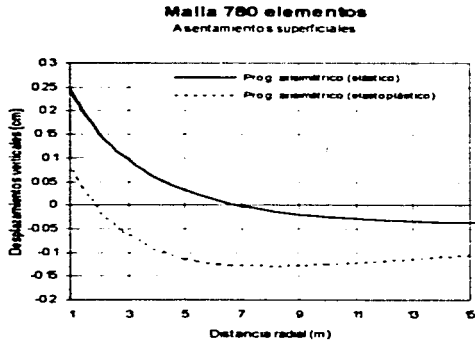


Fig 5.26 Desplazamientos verticales superficiales y en el fondo de la excavación de la lumberra.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El método del elemento finito es una herramienta de gran utilidad para el análisis de esfuerzos y deformaciones en cualquier medio, ya que con la ayuda de un equipo de cómputo se pueden realizar estudios en regiones de cualquier forma, cargas y condiciones de frontera, donde existen un gran número de incógnitas. Además, la versatilidad de esta técnica permite analizar cualquier variedad de problemas enfocados no únicamente en la ingeniería estructural, sino también en la mecánica de suelos.

De esta forma, se implementó en un programa de elementos finitos una generalización para el análisis de estructuras axisimétricas en un medio elástico-lineal y elastoplástico perfecto. Este último modelo, que emplea el criterio de falla de Von Mises, se maneja como una aproximación al comportamiento no-lineal de los suelos.

Esta formulación axisimétrica se aplicó particularmente al análisis de cavidades aisladas (túneles y lumbreras), y en base a los resultados presentados en este trabajo se pueden remarcar ciertas consideraciones:

- A) Se obtienen buenos resultados al emplear como elemento axisimétrico un isoparamétrico de cuatro nodos, como sección plana de revolución y como elementos en sectores circulares. También es necesario realizar una cuadratura de Gauss en cuatro puntos del elemento al resolver la integral que determina la matriz de rigidez elemental. Los esfuerzos que se obtienen en esos cuatro puntos de integración se promedian para calcular el esfuerzo al centroide del elemento.
- B) Los resultados de los problemas axisimétricos resueltos en un medio elástico-lineal son casi exactos a las soluciones analíticas; mientras que para un medio no-lineal elastoplástico existe una mayor diferencia de resultados, pero dentro de márgenes de error aceptables.

- C) Para modelar un túnel de sección circular y eje horizontal, en una masa de suelo sometida a diferentes estados de esfuerzos en sus fronteras (peso propio del suelo) y en un medio elástico-lineal, fue necesario realizar mallas de elementos finitos en sectores circulares (coordenadas $r-\theta$). Los resultados que se obtuvieron de estos análisis mejoraron al elaborar una malla de mayor extensión que permite simular más un medio infinito.
- D) La modelación de una lumbrera en un material elástico-lineal, se realizó con una malla de elementos finitos en un plano de revolución (r,z). En este caso, aunque el proceso de excavación se llevo a cabo en una sola etapa, la implementación axisimétrica si puede considerar estos procedimientos de excavación y construcción con mayor detalle (varias etapas). De la misma forma que el caso anterior, se tendría una mejor aproximación de resultados si se realizaran mallas más finas, en la zona cercana a la excavación de la lumbrera, y con una mayor extensión radial.
- E) En la modelación de un túnel en un medio elastoplástico perfecto y bajo una presión hidrostática, se utilizó una malla en sectores circulares con una mayor discretización de elementos en las proximidades del orificio, con el objetivo de definir mejor la zona de plastificación. Sin embargo, se siguieron presentando mayores diferencias de resultados para definir la frontera plástica-elástica, debido probablemente a que como los esfuerzos se calculan al centroide de cada elemento, no sería posible definir exactamente el lugar donde se presentaría esta frontera, y además de que la solución elástica presenta pequeñas diferencias de resultados, lo que puede provocar que se acumulen errores numéricos.
- F) En el caso de la excavación de una lumbrera en un modelo elastoplástico perfecto, se obtuvieron las mismas diferencias de resultados para definir la frontera plástica-elástica, donde fue necesario realizar una mayor discretización de elementos en las proximidades de la excavación y definir mejor la zona de plastificación.
- G) De los análisis elásticos y plásticos que se presentaron en el capítulo anterior, es conveniente resumir ciertas conclusiones de carácter cualitativo relativas a las concentraciones de esfuerzos alrededor de cavidades aisladas.
- Alrededor de un túnel circular excavado en un medio elástico-lineal sometido a esfuerzos por peso propio del suelo, se tiene un aumento del esfuerzo normal angular de compresión en las paredes laterales, y por lo tanto, el suelo puede fallar por resistencia a la compresión simple. Sin embargo, los esfuerzos normales angulares en la clave del túnel tienden a disminuir, donde posiblemente se pueden presentar zonas de tensión. El efecto de la excavación del túnel en un medio homogéneo se disipa con la distancia, donde los esfuerzos en los puntos más alejados se encuentran en un estado de equilibrio.

- Al iniciarse la plastificación del material alrededor del túnel, la frontera entre zonas plástica y elástica describe una geometría circular, cuando la masa de suelo se encuentra en un estado de esfuerzo hidrostático. La diferencia de esfuerzos provocados por la presencia del túnel es mayor en sus proximidades, por lo cual, se presenta una zona de plastificación que comienza desde la periferia del túnel, hasta la distancia radial donde se tiene el máximo esfuerzo angular, lo que define la frontera plástica-elástica. La amplitud de esta zona de plastificación depende mucho de la cohesión del material. La variación de los esfuerzos actuantes al alejarse del túnel es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del eje del túnel, es decir, los esfuerzos radial y angular tienden a igualarse a la presión hidrostática actuante, en los puntos más alejados de la excavación.

- Alrededor de una lumbrera de eje vertical, los esfuerzos normales angulares (tangenciales) al perímetro de la sección recta se duplican. Puede entonces plastificarse el material en el contorno de la lumbrera dentro de un cono de revolución de eje vertical. La amplitud de la zona de plastificación esta en función de la profundidad debido al aumento del esfuerzo horizontal actuante en el contorno de la lumbrera. De la misma forma, la variación de los esfuerzos es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al eje de la lumbrera, de tal forma, que los esfuerzos angular y radial, a una distancia alejada de la excavación se aproximan al valor del esfuerzo horizontal actuante en un estado de equilibrio inicial.

H) La excavación de un túnel o una lumbrera modifica, en sus contornos, el estado de esfuerzos iniciales o en reposo, por lo tanto, se presenta una zona de plastificación entorno a estas cavidades aisladas, donde la amplitud de esta zona esta en función de la cohesión del material y la variación de los esfuerzos. Es decir, las zonas de plastificación representan zonas potenciales de falla, y si la cohesión es el principal parámetro de resistencia de los suelos blandos, entonces este valor influye en la variación de la región plastificada. Tal es el caso de un túnel bajo una presión hidrostática, donde a menor cohesión, aumenta la región de plastificación. En el caso de una lumbrera, a una cohesión constante, la zona de plastificación aumenta con la profundidad porque la variación de esfuerzos en el contorno de la excavación también es mayor.

I) Consideraciones que no se tomaron en cuenta en este trabajo y que son posibles de analizar a partir de la implementación axisimétrica, son las siguientes:

- Evaluar con mayor detalle el procedimiento de excavación de túneles y lumbreras, y comparar los resultados con mediciones en campo.

- Realizar análisis de cavidades no aisladas para considerar el efecto de la interacción suelo-revestimiento.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

1. Borja, R.I., Lee, S.R. y Seed, R.B. (1989), "Numérica simulation of excavation in elasto-plastic soils", *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* Vol 13, No. 3, edit. Wiley.
2. Brebbia, C. A., (1971), "Analysis of axisymmetric structures by finite element". University of Southampton, Faculty of Engineering and Applied Science, Department of Civil Engineering.
3. Britto, A. M. y Gunn, M. J., (1987), *Critical State Soil Mechanics Via Finite Element*, Ellis Horwood Ltd., England.
4. Chen, W.F. y Baladi, G.Y. (1985), "Soil Plasticity, Theory and Implementation", Elsevier, Amsterdam.
5. Clough, R. W. And Rashid, Y. R. (1965), "Finite Element Analysis of Axi-symmetric Soil", *Proc. ASCE*, 91, EM.1, 71.
6. Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., (1989), "Concepts and applications of finite element analysis", edit. Wiley, New York.
7. Desai, C. S., (1972), "Introducción to the finite element method: a numerical method for engineering analysis", New York.
8. Gallagher, R. H. (1975), "Finite element analysis", Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.
9. Guzman de la Llave, J., (1985), "Aplicación del metodo del elemento finito a la simulación del proceso constructivo en túneles en suelo blando", Tesis de maestría, DEPTI UNAM, México.
10. Jimenez, J. A.(1981), "Geotecnia y cimientos II", Edit. Rueda, Madrid.
11. Juarez Badillo, E. y Rico Rodriguez A (1992), "Mecánica de suelos", tomo I y II, Limusa, México.

12. Lambe T. Wiliam y Whitman V. R. (1991), "Mecánica de suelos", Edit. LIMUSA.
13. Li, X., Romo, M.P.,(1990), "TEST, un programa de elementos finitos para el análisis tridimensional de interacción suelo-estructura", Informe Interno, Instituto de Ingeniería, UNAM.
14. Li X. y Romo M.P. (1992), "TEST92: un programa de elementos finitos para simular procesos constructivos en suelos elasto-plásticos", Informe interno, Instituto de Ingeniería UNAM.
15. Magaña del T.; Romo O., M.P.; Monterroso, B., (1995), "Análisis tridimensional de excavaciones profundas (2a. Etapa)", Informe interno, Instituto de Ingeniería UNAM.
16. Obert , L. and Duval, W., (1967), "Rock mechanics and the design of structures in rocks", edit. Wiley.
- 17 Poulos and Davis, (1974), "Elastic solution for soil and rock mechanics", New York, edit. Wiley.
18. Rockey, K.C., Evans, H. R., (1975), "The Finite Element Method", London.
19. Romo, M.P., Magaña, R., y Rodríguez, R., (1995), "Procedimiento para evaluar los movimientos del terreno causados por excavaciones apuntaladas en arcillas blandas", Informe interno, Instituto de Ingeniería UNAM.
20. SMMS, (1981), "Túneles en suelos blandos y firmes", Méx. D. F.
21. Terzaghi K. y Peck R. (1980), "Mecánica de Suelos en la Ingeniería práctica", versión española, el Ateneo, España, segunda edición.
22. Timoshenko S. Goodier, J. N. (1951), "Teoría de la Elasticidad", 2nd ed., McGraw-Hill.
23. Wilson, E. L. (1963), "Finite element analysis of two-dimensional structures", universidad de California, Berkeley.
24. Wood, D. M., (1990), "Soil Behaviour and Critical State Soil Mechanics", Cambridge University Press. Cambridge.
25. Zienkiewicz, O. C. (1989), "Método del Elemento Finito", Edit. McGraw-Hill, London.