29
21

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES ACATLAN

"APLICACIONES DE LA TECNICA DE LAGRANGE EN MODELOS MICROECONOMICOS."

T E S I N A

Q U E P R E S E N T A :

JOSE ELIUD SILVA URRUTIA

PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

ACATLAN

ACATLAN, EDO. DE MEX. OCTUBRE 1997.

Este trabajo lo dedico a:

María Guadalupe, mi madre por sus desvelos y apoyo en todo momento.
José Guadalupe, mi padre por su paciencia y comprensión.
María Dolores mi abuelita, por sus sabios consejos.
Mis hermanas Claudia, Gabriela y Jessica, por tanta comunicación.
Todos mis tíos y primos, por sus atenciones.
Mis cuñados, por su ayuda.

La U. N. A. M, y a la E. N. E. P. Acatlán la oportunidad de haberme preparado profesionalmente como Actuario.

Los profesores que aportaron su experiencia y conocimientos en mi formación profesional, y a los que enriquecieron esta tesina:
al Act. Lucio Pérez Rodríguez †,
al Dr. Rafael López Bracho, y en especial
al Ing. Jaime Núñez Nassar, y
a mi asesor Act. Hugo Reyes Martínez.

Mis amigos: Silvia Vargas, Francisco Ruíz, Luis Ramos, y demás compañeros.

Erick y Ricardo Fuentes, Dana, Jaime, Héctor, y M. O. M..

Juan, Jaime, David, y Marc.

Finalmente a la memoria de:
Einstein, Tchaikovsky, Rachmaninov, y Beethoven.

Y principalmente a Dios.

Dies Irae (breve pensamiento solemne y aterrador medieval)

Día de ira, aquel en que reducirá el mundo a cenizas según los oráculos de David y la Sibila. Cuál será pues el terror, cuándo aparezca el juez a examinarlo todo con rigor y con justicia. Al oírse el sonido maravilloso de la trompeta, reunirá ante su trono a todos los que yacen en los sepulcros. La muerte y la naturaleza estarán aterradas cuando resuciten los hombres para responder al juez. Se abrirá el libro escrito que contiene todo y por lo cual el mundo será juzgado. Al sentarse el juez, todo lo oculto quedará patente, no quedará delito sin castigo. ¿ Que diré entonces, miserable ? ¿ A quién suplicaré interceda por mi, cuando aún ni el justo estará seguro ?. Oh Rey de tremenda majestad, que a los escogidos salvais por pura gracia, salvadme, fuente de piedad. Acordaos Jesús piadoso, que por mi bajaste al mundo, no me pierdas en aquel día. Buscándome te sentiste fatigado por redimirme sentiste muerte de cruz: que no sea infructuoso tanto trabajo. Justo juez de venganza: concédeme el perdón antes del día de la cuenta. Como reo gimo; mis pecados llenan mi rostro de rubor, perdona oh Dios al que te suplica. Tu que escuchaste a María y escuchaste al ladrón, me has infundido esperanza. No son dignas mis suplicas pero tú que eres bueno, concédeme benignamente que no me abrase el fuego eterno. Dame lugar entre tus ovejas, y separame de los cabritos, colocame a tu diestra. Confundidos los malditos, y condenados a las acerbas llamas, llámame con los benditos. Te ruego suplicante y postrado, con un corazón contrito como la ceniza, que te apiades de mi en el último día. Oh día de lágrimas, en el cual el hombre culpable resucitará del sepulcro para ser juzgado. Perdóname oh Dios, oh piadoso Jesús concédeles el descanso eterno. Así sea.

Secuencia ideológica de Tomás de Celano (? - 1256) de la Misa de Requiem (Ed. Vat.).

CONTENIDO.

INTRODUCCIÓN.

En la formación académica de nivel superior en el área de las matemáticas se imparten generalmente una extensa gama de técnicas, procedimientos, principios, leyes, etcétera, cuya aplicación casi nunca se presenta, o en el mejor de los casos solamente se menciona de manera muy superficial. Como concecuencia de dicha carencia, algunas veces se produce un desinterés o apatía por parte de los alumnos; y es precisamente en ese momento cuando el estudiante se cuestiona acerca del ¿Por qué aprender tales conocimientos si no se les visualiza utilidad alguna?, encontrándose generalmente la respuesta de que sólo son abstracciones (alejadas de la realidad) que sirven para avanzar en los niveles de estudios futuros, o que su empleo radica en desarrollar el grado de análisis en las ciencias exactas.

Ante la situación anterior, se olvida la importancia que en igual magnitud debe atender a la práctica en relación a la teoría. Esto se convierte en un problema crucial que se puede englobar generalmente en dos etapas: en un inicio en el proceso educativo y posteriormente en la vida profesional. En el proceso educativo al no existir un balance entre ambas actividades (teoría y práctica), pueden darse dos vertientes. Por un lado, si se dispone a impartir un curso meramente teórico, entre otros riesgos se corren los de que los estudiantes se desesperen por no ver aplicación alguna, o el de disminuir su rendimiento académico por extraviarse en un extenso conjunto de abstracciones que en el mismo se usen. Por el contrario, si se preocupa más en la práctica que en la teoría, pueden cometerse entre otros los errores de no justificar resultados, tener deducciones pobres, o conclusiones extremadamente reducidas dentro de las diversas técnicas que se utilicen. En la vida profesional, al no haber un equilibrio inicial en el proceso enseñanza-aprendizaje, pienso que se traerá como resultado final que al empezar a ejercer profesionalmente el proceso de adaptación y desenvolvimiento se extenderá más tiempo de lo debido, ya sea porque la enseñanza impartida fue extremadamente teórica y no se logra aplicar los conocimientos en los problemas que se susciten, o porque en caso opuesto tanta aplicación no permite el abarcar situaciones más generales. Este problema posiblemente se pudiese corregir tempranamente poniendo más interés en todo lo concerniente a lograr ese adecuado balance entre ambas actividades.

Desde luego no se puede solucionar el problema anterior de forma inmediata, no obstante si se impulsará más la aplicación desde los niveles de aprendizaje teórico ya citados, se podrian tener los resultados deseados en lo concerniente a la práctica. Ante esta preocupación, se desea presentar una aplicación matemática consistente en la optimización restringida con un enfoque microeconómico, cuyo soporte teórico matemático corresponde al analizado en el curso de Cálculo Diferencial e Integral III de la carrera de Actuaría. Concretamente la presente tesina tiene como objetivo el *aplicar la técnica de Lagrange en los modelos de: Maximización de la utilidad sujeta a una restricción presupuestaria, la Minimización del costo sujeto a una restricción de producción; y dar una interpretación económica del Dual enfocado a la Ley de la oferta y la demanda.*

Dentro del contenido de este trabajo, los posibles problemas de conocimiento a desarrollar son:

a) comprender y analizar las bases teóricas que garantizan que una función determinada ha sido optimizada de acuerdo a la programación clásica, en el caso restringido a igualdad(es), cuya aplicación se ilustra en el último capitulo con las funciones objetivos de los modelos microeconómicos en los que se obtienen diversas relaciones de igualdad de las derivadas de primer y segundo orden respectivamente;

b) tener presente diversas nociones y / o conceptos teóricos de economía, esto para deducir las interpretaciones económicas de las derivadas, de las rectas de isocostos, isocuentas, curvas de indiferencia, marginalidad, tasa de sustitución, etcétera;

c) conocer o estar familiarizado con la técnica de Lagrange que se aplica en diversos problemas de optimización del cálculo diferencial dentro de los cursos respectivos de Actuaría, para saber en términos generales el algoritmo que sigue dicha técnica, y no detenerse en tratar de entenderla cuando se está aplicando en los modelos microeconómicos del capitulo III;

d) finalmente, saber acerca de la Teoria de Dualidad de la programación matemática, para comprender de modo adecuado una interpretación económica del Dual del Lagrangeano, presentada en la última capitulo de esta tesina.

El trabajo inicia con algunas ideas, definiciones útiles en los capítulos restantes, y una justificación teórica de la existencia de puntos óptimos, puntos de inflexión, puntos silla, concavidad, etcétera, por medio de teoremas importantes de la programación clásica, para funciones de R en R y de R^n en R (obtenidos en su mayoria del libro de Análisis Matemático de B. Hasser, P. La Salle, y A. Sullivan citado en la bibliografia de este trabajo).

En el capítulo II, se discutirá: la técnica de Lagrange, su aplicación e interpretación económica, las diferenciales de primer y segundo orden respectivamente, el análisis estático comparativo, etcétera. Asimismo se considerará en forma concisa algunas propiedades, ideas y nociones de la economía matemática relacionada con el planteamiento de modelos de misma indole, y la Teoria de Dualidad relacionada con la técnica ya citada.

Por último, se expondrán algunas aplicaciones de la técnica de los multiplicadores de Lagrange en economía, en los modelos de: Maximización de la utilidad sujeta a una restricción presupuestaria, Minimización del costo sujeto a una restricción de producción; y se expondrá la Interpretación económica del problema Dual enfocado a la Ley de la oferta y la demanda. Además de ello, se les analizará en cuanto a las condiciones necesarias y suficientes de la programación clásica, y se comentará brevemente algunos otros aspectos relacionados con lo actual que resulta la optimización restringida en modelos económicos en otros niveles.

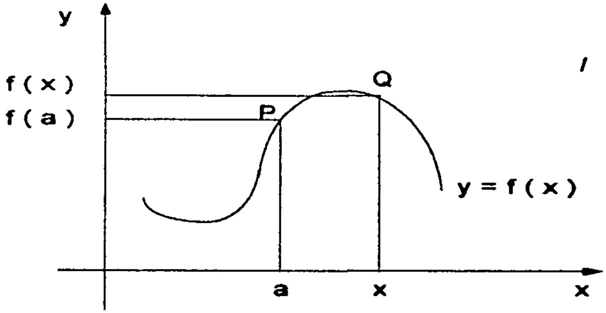
Se evidenciará en las conclusiones que la técnica de Lagrange es aplicable en modelos microeconómicos, cuyo fin es el de plasmar en el lenguaje matemático determinadas condiciones que se presentan en el mundo real, además de que existen distintas cuestiones interpretativas de los multiplicadores. También, se observará que se cuenta con una herramienta muy poderosa de las matemáticas y que en caso de ser necesario existen otras técnicas en la optimización restringida que se pueden aplicar en otros modelos más complejos tanto de orden

microeconómico como macroeconómico. En caso que el lector tenga alguna otra inquietud acerca del tema, se propondrá una extensa bibliografía compuesta por fuentes del cálculo diferencial, la economía matemática, y además algunos artículos relacionados con otros ámbitos económicos de actualidad, que podrán ayudar a ampliar sus conocimientos.

I ELEMENTOS TEÓRICOS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL.

1.1 Definiciones.

Suponga que una función f está definida en un intervalo abierto que contiene a *a*. Sea *l* la recta secante (se intersecta con la función f en dos puntos) a f que pasa por dos puntos P y Q de la función, como se muestra en la siguiente figura:



Usando la fórmula de la pendiente, se observa que la correspondiente a la recta secante *l* es $m = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Conforme el punto P se acerca al punto Q, ya sea por la derecha o por la izquierda, la pendiente de la recta secante tiende a ser la respectiva de la recta tangente (recta que se intersecta con la curva en un sólo punto) con pendiente *m*. Es decir que $m = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ siempre y cuando el límite exista. Al igual que la pendiente de la recta tangente en un punto de la gráfica de una función f, existen otros límites en importantes en matemáticas que frecuentemente se presentan. Esta clase de límites reciben el nombre de derivada.

Definición 1.-Derivada de una función de R en R: la derivada de una función y = f (x) con respecto a "x" en el punto x = a se define como $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$ supuesto que existe el límite (nótese que esta definición es equivalente al de la pendiente si se toma en cuenta el cambio de variable h = x - a). Este límite se llama también razón instantánea de cambio (o simplemente, razón de cambio) de "y" con respecto a "x" en x = a.

La derivada se expresa con el símbolo $\frac{dy}{dx}$; o si "y" está expresada por f (x) se puede expresar por los símbolos $f'(x)$, f', $\frac{dy}{dx}$, o D_x. En esta tesina se utilizarán indistintamente cualquiera de los tres primeros símbolos.

El proceso seguido para hallar la derivada se llama derivación, y se dice que se deriva "y" con respecto a "x". Este proceso consiste en los siguientes cuatro pasos:
1.-Dar un incremento a "x".
2.-Calcular el incremento correspondiente de "y".
3.-Dividir el incremento de "y" por el incremento de "x"-
4.-Determinar el límite de este cociente cuando el incremento de "x" (o sea h) tiende a cero.

La diferenciabilidad significa que una función tiene ciertas propiedades de continuidad sobre la derivada. La existencia de derivadas no implica que una función sea diferenciable en cualquier punto o intervalo, pues pueden haber discontinuidades en tales derivadas. Si la derivada de una función f existe y es continua en un punto, se dice que la función f, es derivable en *a*, que es diferenciable en *a*, o simplemente que f tiene derivada en *a*. Esto nos conduce a la definición de función diferenciable (o derivable).

Definición 2.-Función diferenciable de R en R: una función f se dice diferenciable (o derivable) en el punto $x = a$ si su derivada existe en ese punto. En otras palabras, una función f es derivable en un intervalo abierto (a, b) si lo es en todos los puntos c del intervalo (a, b). Formalmente, f es derivable en un intervalo cerrado [a. b] si lo es en el intervalo abierto (a, b) y los límites

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \text{ y}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

existen. Los límites anteriores se llaman derivada por la derecha y derivada por la izquierda de f en a y b respectivamente. Si una función f está definida en un intervalo abierto que contiene a *a*, entonces $f'(a)$ existe si y sólo si las derivadas por la derecha y por la izquierda en *a* existen y son iguales.

Si la derivada de una función no cambia de signo en un intervalo, entonces esto indica acerca del carácter de la función. Por ejemplo, si la derivada de una función es positiva en todos los puntos del intervalo, entonces la gráfica de la función tiene una tangente con pendiente positiva en cada punto y es de esperar que la función sea creciente en el intervalo. Esto nos lleva a la definición de función creciente.

Definición 3.-Función creciente: una función f (x) se dice creciente en un intervalo abierto si cuando sucede que $x < x_0$ implica que $f(x) < f(x_0)$. Además dicha función se dice creciente en $x = x_0$ si f (x) es creciente en algún intervalo abierto que contenga a x_0. La definición de función decreciente se obtiene con las mismas condiciones dadas, tan sólo cambiando el sentido de la desigualdad de la función f evaluada en ambos puntos. Por otra parte una función f se dice monótona sobre un intervalo cualesquiera, si es no creciente o no decreciente en dicho intervalo.

Respecto de la diferenciabilidad de una función f de R^nen R no existe una extensión directa de la definición común de derivada. Sin embargo, como la notación de diferenciabilidad se extiende fácilmente, se tomará esta noción básica para definir función derivable en este contexto.

Definición 4.-Función diferenciable de R^n en R: si f es una función de R^n en R, se dice que f es diferenciable en el punto $\mathbf{x}$ si f está definida en una vecindad B (x; r) de $\mathbf{x}$ y si existe un vector $\mathbf{a}$ (independiente de $\mathbf{h}$) tal que para cualquier punto $\mathbf{x} + \mathbf{h}$ en B´ (x; r)

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{a}\bullet\mathbf{h} + \Phi(\mathbf{x};\mathbf{h})\bullet\mathbf{h} \text{ donde } \lim_{\mathbf{h}\to 0}\Phi(\mathbf{x};\mathbf{h}) = \mathbf{0}.$$

Los teoremas que demuestran que si una función f de R en R es diferenciable en un punto, entonces la función f es continua; así como también los respectivos que involucran la suma y el producto de dos o más funciones diferenciables, se extienden para las funciones de R^n en R. Sin embargo no se demostrarán, pues sus respectivas implicaciones no se utilizan en el desarrollo del presente trabajo.

Considere ahora una función de R^n en R, con n = 2. En un punto $\mathbf{x}$ del dominio de la función f no tendrá en general una razón de cambio única, sino que cambiará en proporciones distintas, según en la dirección en que $\mathbf{x}$ se mueva. La razón de cambio de f en la dirección de $\mathbf{u}$, siendo tal un vector unitario [1], se denomina derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$ en el punto $\mathbf{x}$. Debe notarse que el valor de la derivada direccional depende sólo de los valores de la función f en los puntos sobre la recta que pasa por $\mathbf{x}$ y es paralela a $\mathbf{u}$. Puntualmente, considerando una función f de R^n en R, se tiene la definición que a continuación de aborda.

Definición 5.-Derivada direccional: la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$, donde tal es un vector unitario en R^n, es la función $D_u f$ con regla de correspondencia

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\mathbf{x}+h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{h}$$

y con dominio el conjunto de todos los puntos $\mathbf{x}$ del dominio de f para las que existe el límite.

Para funciones de R^n en R se puede aplicar un procedimiento análogo al de los cuatro pasos para derivadas de funciones de R en R. Es decir, dada f (x), primero se

[1] Recuerde que punto unitario es aquel vector de longitud igual a la unidad, dónde si $\mathbf{a}$ es un vector distinto de cero, entonces $\left|\dfrac{1}{\mathbf{a}}\right|$ $\mathbf{a}$ es un vector de longitud igual a uno que está en la dirección de $\mathbf{a}$.

incrementa una de las variables la correspondiente a la primer coordenada, en una cantidad h, luego se divide entre h el incremento correspondiente de f, y finalmente se hace tender h a 0. Lo anterior nos conduce a la derivada parcial de f con respecto a la primera coordenada. En otras palabras, las derivadas direccionales en la dirección de los ejes coordenados reciben el nombre de derivadas parciales.

Definición 6.-Derivada parcial: si f es una función real definida sobre un conjunto abierto de $\mathbf{R}^n$ y $\mathbf{u}_k$ es el vector con componente k-ésimo 1 y todos los otros componentes 0 [2], entonces se llama a $D_{u_k} f$ la derivada parcial de f con respecto a la k-ésima coordenada. Se denotará por brevedad $D_k f$ y será la función con regla de correspondencia

$$D_k f(\mathbf{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}_k) - f(\mathbf{x})}{h}$$

y el dominio el conjunto de puntos $\mathbf{x}$ en el dominio de f para los que el límite existe. Al vector de derivadas parciales se le denota por $\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, \ldots, \frac{\delta f}{\delta x_n} \right)$, este vector recibe el nombre de gradiente de f en $\mathbf{x}$. La derivada parcial de $D_k f$ con respecto a la coordenada j, o j-ésima se denota por $D j(D_k f)$, que a su vez se puede expresar como $D_{j,k} f$, y recibe el nombre de derivada parcial segunda de f. Es claro que se pueden seguir tomando derivadas parciales de f de órdenes superiores. Por último se debe tener presente que $D_{j,k} f(\mathbf{x}) = \frac{\delta}{\delta x_j}\left(\frac{\delta w}{\delta x_k} \right) = \frac{\delta^2 w}{\delta x_j \delta x_k}$.

Si la función f es continua y diferenciable se define como la matriz Hessiana o simplemente el Hessiano de $f(\mathbf{x})$ (escrito por $\mathbf{H}(\mathbf{x})$), a la siguiente matriz cuadrada:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 f(\mathbf{x})}{\delta x_1^2} & \frac{\delta^2 f(\mathbf{x})}{\delta x_1 \delta x_2} \cdots & \frac{\delta^2 f(\mathbf{x})}{\delta x_1 \delta x_n} \\ \frac{\delta^2 f(\mathbf{x})}{\delta x_2 \delta x_1} & \frac{\delta^2 f(\mathbf{x})}{\delta x_2^2} \cdots & \frac{\delta^2 f(\mathbf{x})}{\delta x_2 \delta x_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\delta^2 f(\mathbf{x})}{\delta x_n \delta x_1} & \frac{\delta^2 f(\mathbf{x})}{\delta x_n \delta x_2} \cdots & \frac{\delta^2 f(\mathbf{x})}{\delta x_n^2} \end{pmatrix}$$

[2] Que en conjunto se conocen cómo vectores base, o individualmente cómo vector coordenado unidad $\mathbf{u}_k$ de $\mathbf{R}^n$. Por ejemplo los $\mathbf{u}_k$ para k = 1, 2, ..., n, son:
$\mathbf{u}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, ..., $\mathbf{u}_n = (0, 0, \ldots, 1)$.

El Hessiano valuado en el punto **y**, se escribe **H (y)**. En esta tesina se hará mención al Hessiano de manera indistinta con los símbolos **g (x)**, **H (x)**, o **H**.

Como se verá más adelante en el caso de extremos libres, es posible expresar la condición de suficiencia de segundo orden en forma de determinante del Hessiano [3]. En los modelos de optimización restringida en lugar del determinante Hessiano, se encontrará lo que se conoce con el nombre de *Hessiano orlado*. Preparando el desarrollo de esta idea, se analizarán las condiciones para que sea definida una forma cuadrática de dos variables sujeta a una restricción lineal, y posteriormente se deducirán los resultados para la condición de segundo orden, en la parte que corresponde a los teoremas de la programación clásica.

Sea $q = au^2 + 2huv + bv^2$ sujeto a $\alpha u + \beta v = 0$. Puesto que la restricción implica $v = -\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)u$, se puede volver a expresar q como una función de una única variable $q = \left(\alpha\beta^2 - 2h\alpha\beta + b\alpha^2\right)\frac{u^2}{\beta^2}$. Es obvio que q será definida positiva (negativa) si y sólo si la expresión entre paréntesis es positiva (negativa). Ahora bien, el siguiente determinante simétrico

$$\det\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & a & h \\ \beta & h & b \end{vmatrix} = 2h\alpha\beta - \alpha\beta^2 - b\alpha^2$$

es exactamente el negativo del polinomio que multiplica al cociente de la expresión q. Dado lo anterior, se puede expresar que

$$q \text{ es } \left\{\begin{array}{l} \text{definida positiva} \\ \text{definida negativa} \end{array}\right\} \text{ sujeta a } \alpha u + \beta v = 0$$

$$\text{si} \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & a & h \\ \beta & h & b \end{vmatrix} \left\{\begin{array}{l} < 0 \\ > 0 \end{array}\right. \text{ respectivamente.}$$

Es digno señalar que el determinante aplicado en este criterio no es más que el discriminante de la forma cuadrática original $\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}$, con la orla la primera fila y la otra en la primera columna. Además, ésta se compone sólo de los dos coeficientes α y β de la restricción, más un cero en la diagonal principal. Este discriminate orlado es simétrico.

[3] La demostración del criterio para encontrar de extremos de funciones de variables se encuentra en la parte de los Teoremas importantes de Optimización clásica en la siguiente sección, del mismo capítulo.

Volviendo al punto de en qué casos las derivadas parciales mixtas de f son iguales, se puede encontrar demostrado en libros de Cálculo reseñados en la bibliografía del presente trabajo. Dicho teorema garantiza esta igualdad, si se cumple que la función f, las parciales respecto a "x" y a "y", e incluso las mismas mixtas son continuas en una región abierta R. Se concretará ahora, lo que se entiende por clase, que se relaciona con la continuidad de derivadas parciales de orden n.

Definición 7.-Clase: se dice que una función f pertenece a la clase C^n sobre un conjunto abierto A, lo que se escribe: $f \in C^n$ sobre A, si todas las derivadas parciales de orden n de f son continuas sobre A.

En general se puede decir que si $f \in C^n$ sobre un conjunto abierto E, entonces cualesquiera dos derivadas parciales de orden n o menor, con los mismos subíndices, son iguales en E aunque el orden en que los subíndices aparezcan sean diferentes.

Existe a menudo el problema de analizar en que punto del intervalo donde se define la función f, ésta alcanza su punto máximo o su punto mínimo; o en otras palabras localizar los valores más grandes y más pequeños de una función en un intervalo. Se debe entender que una función f tiene un valor máximo relativo en un intervalo en un punto c si f (c) es mayor o igual al valor de la función en cada uno de los puntos del intervalo; similarmente para el mínimo relativo f (c) es menor o igual al valor de la función en los mismos puntos. Formalmente se tiene la siguiente definición.

Definición 8.-Máximo relativo de R en R: una función f tiene un máximo relativo en un punto c si existe una vecindad de c, N (c), tal que para todo "x" en N (c) y en el dominio $f(x) \leq f(c)$. Un número tal f (c) se llama (valor) máximo relativo de la función. Un (valor) mínimo relativo de la función se define de modo análogo.

Para determinar los valores máximo y mínimo relativos de una función f de R^n en R, se tiene que reflexionar en la condición necesaria: si f tiene un valor máximo o mínimo relativo en un punto $\mathbf{x}_0$ entonces todas las derivadas parciales de orden uno o son nulas o no existen en $\mathbf{x}_0$. Sin embargo, la condición no es suficiente para asegurar la existencia de un valor máximo o un valor mínimo relativo de la función en tal punto. Para funciones de R^n en R, con n = 2 se puede obtener una razón suficiente para la existencia de un máximo o un mínimo relativo que puede extenderse, aunque con dificultad, a funciones definidas sobre espacios de mayor dimensión.

Definición 9.-Máximo relativo de R^n en R: la función f tiene un máximo relativo en el punto $\mathbf{x}_0$ si existe una vecindad N de $\mathbf{x}_0$ tal que para todo $x \in N \cap D_f$, $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$. Un (valor) mínimo relativo de la función se define de modo análogo.

Si f(c) [4] es el máximo (mínimo) relativo de la función en un intervalo, entonces se dice que f alcanza su máximo (mínimo) en c, y el punto con coordenadas (c, f (c)), representa el punto más alto (bajo) de la gráfica. Los máximos y mínimos son los valores extremos de la función f. Estos valores extremos se pueden alcanzar en más de una vez.

Definición 10.-Valores extremos: los valores extremos de una función son los máximos y mínimos relativos de una función, para ambos casos. Estos valores también se llaman mínimo absoluto y máximo absoluto de f en un intervalo (o conjunto abierto, según corresponda). Los máximos y mínimos locales de una función también son importantes.

La palabra local se refiere a que estos máximos o mínimos lo son en relación con un intervalo abierto que contiene al punto en estudio. Esta definición se extiende para funciones de R^n en R.

En los puntos correspondientes a los extremos locales de una función f, la recta tangente es horizontal (con pendiente m = 0), o bien la gráfica tiene un pico [5]. Las abscisas de estos números son en los que la derivada es cero o no existe. Se definirá formalmente puntos críticos, que también se extiende para funciones de R^n en R.

Definición 11.-Puntos críticos: los puntos críticos de una función definida sobre un intervalo (o conjunto abierto para funciones de R^n en R) son los puntos donde la derivada (o bien la derivada parcial) o es cero o no existe, y también los puntos extremos del intervalo si es que pertenecen al intervalo (o en un punto frontera del dominio de la función, en términos genéricos). Una función no tiene necesariamente un valor extremo en cada punto crítico. Los valores extremos de una función pueden sólo ocurrir en puntos críticos.

Para describir la gráfica de una función derivable f, es substancial saber cómo se está doblando o flexionando la curva. Esta flexión se refiere a lo cóncavo o convexo de una gráfica. La definición de convexidad de una función es objeto de la aceptación de una convención, de la misma manera que pudiera la definición de la dirección de norte-sur. Curiosamente en algunos textos antiguos lo que ahora se ha convenido casi universalmente como convexidad, era definido como "concavidad" y viceversa. De manera formal en términos de topología se tiene, lo siguiente:

Definición 12.- Función convexa: Sea f una función definida sobre un conjunto convexo S, tal que $S \subset R^n$. Entonces se dice que f es una función convexa, si dados $x, y \in S$ se tiene que

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

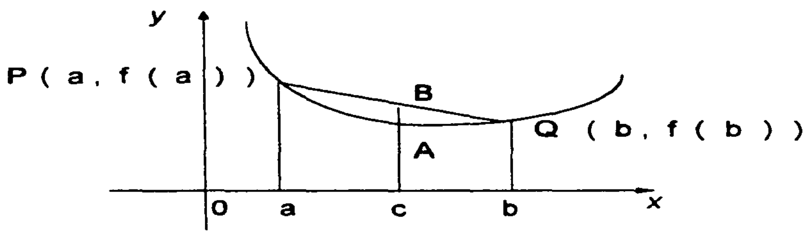
[4] De igual forma sucede si el número real c, se intercambia por el vector n-dimensional c.

[5] Para las funciones de R^n en R, en vez de ser recta tangente, esta idea se extendería a ser un hiperplano tangente a la superficie.

Se dice que f es cóncava, si - f es una función convexa. Si la desigualdad se cumple estrictamente para $\lambda \in (0, 1)$, entonces la función es estrictamente convexa; es decir,

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) < \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \quad \forall x \neq y.$$

Actualmente, en general se acepta que: una función f es cóncava en el intervalo $a \leq x \leq b$, si la linea que une a los puntos (a, f (a)) y (b, f (b)) encuentra debajo de la función, y es convexa en dicha intervalo si la recta antes mencionada se halla arriba de la función. De modo alternativo geométricamente se tiene que un arco de una curva denotada por $y = f(x)$ se llama cóncava hacia arriba si en cada uno de sus puntos el arco está por encima de la tangente en ese punto. En otras palabras, se puede decir que una curva $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba en donde se cumpla que $a \leq x \leq b$ si para cualquier arco PQ de la curva en ese intervalo, la función queda por debajo de la cuerda PQ; y es cóncava hacia abajo si queda por encima de tales cuerdas, como se puede ver en la siguiente figura,



La concavidad de una gráfica es relativa pues está en relación a la perspectiva que se tenga, es decir la curva que desde arriba se ve cóncava (se referira esto cóncava desde arriba), resulta que vista desde abajo es convexa, por lo cual es equivalente decir *curva cóncava desde arriba* a decir *curva convexa desde abajo*. Análogamente, en el caso de que una gráfica es *cóncava desde abajo* es similar a decir que es *convexa desde arriba*. La convexidad y la concavidad vistas desde arriba, gráficamente se manifiestan con abombamientos y depresiones, respectivamente. Para unificar la perspectiva en esta obra, cada vez que se hable de concavidad de la gráfica de una función será desde arriba y se hará referencia a esto diciendo: "*...es cóncava hacia arriba...*", similarmente para el segundo caso [6].

---

[6] Nótese que se intercambió la preposición *desde* por *hacia*, esto debido a que en la mayoría de los textos se maneja de esta forma.

Antes de continuar, sería propio recalcar los siguientes puntos,
a) la definición de función cóncava (convexa) no depende de la definición de función continua (discontinua),
b) una función que es cóncava sobre una región es convexa respecto a la región complementaria,
c) una función lineal es a la vez cóncava y convexa.

La importancia de la convexidad (concavidad) de funciones para la teoría de optimización es notable, ya que demuestra que si la función es convexa (cóncava), sus mínimos (máximos) son globales, mientras que sus máximos (mínimos) pueden ni siquiera existir, o ser difícil de identificar el global, entre todos los máximos locales. Así, para cualquier aplicación, es crucial el determinar las propiedades de convexidad de la función para poder precisar la clase de óptimo obtenido en un momento dado. En términos de la teoría de optimización, se requieren propiedades de convexidad para poder obtener condiciones de suficiencia para la optimalidad.

Por otro lado, como la flexión de la gráfica de una función f concierne al cambio en dirección de la gráfica y como f'' da la razón de cambio de la función pendiente f', la consideración de los valores de f'' debe de darnos información sobre la flexión de la gráfica.

Al dibujar la gráfica de una función f, los puntos en los que la dirección de la concavidad cambia deben ser claramente identificados con la mayor exactitud posible. Nótese que los picos de las gráficas pueden ser también de tal clase. Se precisará el concepto de punto de inflexión.

Definición 13.-Punto de inflexión: un punto sobre la gráfica de una función donde la dirección de concavidad cambia, se llama punto de inflexión. Una curva $y = f(x)$ tiene en $x = x_0$ un punto de inflexión si $f''(x_0) = 0$, o si no está definida y tal cambia de signo al crecer "x" a tráves de x_0, lo cual equivale a que $f'''(x_0) \neq 0$ cuando ésta existe.

Con esta última definición se concluye la primera parte de este capítulo, dando paso a la segunda sección que constantemente empleará muchas de las definiciones ya citadas.

1.2 Teoremas importantes de la programación clásica.

Los problemas del mundo real tienden a tener muchos criterios alternativos en la búsqueda de soluciones, que en apariencia son inciertos y es muy difícil si no imposible, encontrar una solución que sea realmente óptima. Existe la posibilidad de considerar como óptima la solución que sea más satisfactoria, en cuyo caso la satisfacción es la meta en vez de la optimización (afortunadamente en problemas matemáticos la situación no es tan drástica).

En modelos de características similares a los de este trabajo, una solución se llama óptima cuando es la mejor de acuerdo a ciertas pruebas matemáticas. Asimismo, es preciso saber que éstos tienen el común denominador de buscar un óptimo (si es que existe), aunque al mismo tiempo, tales tienen rasgos muy propios que los distinguen entre sí. Es por ello que cada problema requiere de un tratamiento particular para hallar su óptimo que se logra mediante la elección de una alternativa de entre una extensa variedad de posibilidades. Dentro de esas posibilidades está el emplear algunos teoremas importantes de la programación clásica, que en esta sección se analizarán. Se hará la referencia de estas preposiciones de acuerdo a su complejidad, iniciando con los respectivos de funciones de R en R, y posteriormente con los correspondientes de las funciones de R^n en R.

El primer teorema que se va a tomar en cuenta nos indica cuándo una función de R en R en un intervalo (a, b) tiene un máximo o un mínimo, y en qué punto se encuentra. Esto se logra al examinar sólo la primera derivada de la función. De igual manera se puede examinar los lugares donde la función es creciente o decreciente de acuerdo al comportamiento del signo de la primera derivada. Este teorema se puede encontrar como *el criterio de la primera derivada* en diversos libros del cálculo diferencial.

1.2.1. Criterio de la primera derivada. Si c es un punto crítico de f y si existe un intervalo dado [a, b] con $c \in (a, b)$ tal que f es continua sobre [a, b] y

1) $f'(x) \geq 0$ para $x \in (a, c)$ y $f'(x) \leq 0$ para $x \in (c, b)$, entonces f tiene un máximo relativo en c;

2) $f'(x) \leq 0$ para $x \in (a, c)$ y $f'(x) \geq 0$ para $x \in (c, b)$, entonces f tiene un mínimo relativo en c;

3) $f'(x) > 0$ para $x \in (a, c)$ y $f'(x) > 0$ para $x \in (c, b)$, o $f'(x) < 0$ para $x \in (a, c)$ y $f'(x) < 0$ para $x \in (c, b)$ entonces f no tiene ni un máximo, ni un mínimo relativo en c.

Demostración.

1) Como $f'(x) \geq 0$ para $x \in (a, c)$, f es no decreciente sobre [a, c] pues si f es continua sobre un intervalo J y $f'(x) \geq 0$ en todo punto interior de J, entonces f es no decreciente sobre J. De donde

$$f(x) \leq f(c) \text{ para toda } x \in (a, c).$$

Como $f'(x) \leq 0$ para $x \in (c, b)$, f es no creciente sobre [c, b].
De donde, $f(x) \leq f(c)$ para toda $x \in (c, b)$.

Así pues, $f(x) \leq f(c)$ para toda $x \leq f(c)$ y f tiene un máximo relativo en c.

2) La prueba de esta parte del teorema es análoga a la de la parte (1). Es decir, como $f'(x) \leq 0$ para $x \in (a, c)$, f es decreciente sobre [a, c] pues si f es continua sobre un intervalo J y $f'(x) \leq 0$ en todo punto interior de J, entonces f es decreciente sobre J.

De donde

$$f(x) \geq f(c) \text{ para toda } x \in (a, c).$$

Como $f'(x) \geq 0$ para $x \in (c, b)$, f es creciente sobre [c, b].
De donde, $f(x) \geq f(c)$ para toda $x \in (c, b)$.

Así pues, $f(x) \geq f(c)$ para toda $x \geq f(c)$ y f tiene un máximo relativo en c.

3) Si $f'(x) > 0$ para $x \in (a, c)$ entonces f es creciente en $[a, c]$ y si $f'(x)$ para toda $x \in (c, b)$ entonces f es creciente en $[a, c]$. Luego f es creciente sobre el intervalo $[a, b]$. Análogamente, se ve que si f' es negativa a ambos lados de c entonces f es decreciente en el intervalo $[a, b]$. En cualquiera de los casos, f no tiene ni un máximo ni un mínimo relativo. Lo que completa la demostración.

El siguiente teorema nos dice que cuando una función f definida en una vecindad, tiene un punto extremo, y la derivada existe en tal punto entonces, ésta última es igual a cero. Esto se puede ver geométricamente a partir del hecho de que cualquier punto extremo de la gráfica de una función, tiene una recta tangente cuya pendiente es cero, debido a que la recta es horizontal. Se debe recordar que la primera derivada de una función f, representa la pendiente de la recta tangente en un punto x.

1. 2. 2. Teorema que garantiza la existencia de un óptimo para funciones de R en R.
Si 1), la función f tiene un valor extremo en c; 2), f está definida en una vecindad de c; y 3), $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

Demostración.

Suponga que f tiene un máximo relativo en c. Existe un número $k > 0$ tal que f está definida sobre $(c - k, c + k)$, $f(x) \leq f(c)$. Luego para toda $h \in (0, k)$,

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

y por lo tanto, $f^{+\prime}(c) \leq 0$. Para todo $h \in (-k, 0)$, se tiene

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$$

y por lo tanto, $f^{+\prime}(c) \geq 0$. Como $f'(c)$ existe por hipótesis $f^{+\prime}(c) = f^{+\prime}(c)$, y por lo tanto , $f'(c) = 0$.

Ahora, supóngase que f tiene un mínimo relativo en c. Existe un número $k > 0$ tal que f está definida sobre $(c - k, c + k)$, $f(x) \geq f(c)$. Luego para toda $h \in (0, k)$,

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$$

y por lo tanto, $f^{+\prime}(c) \geq 0$. Para todo $h \in (-k, 0)$, se tiene

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

y por lo tanto, $f^{+\prime}(c) \leq 0$. Como $f'(c)$ existe por hipótesis $f^{+\prime}(c) = f^{+\prime}(c)$, y por lo tanto, $f'(c) = 0$. Lo que completa la demostración.

Este teorema confirma como consecuencia inmediata que los valores extremos de una función definida sobre un intervalo pueden aparecer solamente en:

1) puntos donde la derivada es cero,
2) puntos donde la derivada no esta definida, o
3) puntos extremos del intervalo si es que pertenecen al mismo.

El teorema que sigue es conocido bajo el nombre de *criterio de la segunda derivada*, por medio de éste se pueden hallar los máximos, mínimos, puntos de inflexión, intervalos de concavidad, etc., de una función f. Para problemas de optimización con restricciones se utiliza con frecuencia.

1. 2. 3. Criterio de la segunda derivada. Supóngase que f es diferenciable en una vecindad $N(c)$ de c, donde $f'(c) = 0$, y que $f''(c)$ existe.

1) Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en c.
2) Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en c.

Demostración.
1) Si

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f'(c)}{x - c} < 0$$

entonces por el teorema que enuncia que " *si* $\lim_{x_0} f = L$ *y* $a < L < b$, *entonces existe un número* $k > 0$ *tal que* $a < f(x) < b$ *para todo* x *en el dominio de* f *que satisfaga* $0 < |x - x_0| < k$ ", existe una vecindad (a, b) de c tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \frac{f'(x)}{x - c} < 0 \text{ para todo } x \in (a, b) \cup (c, b).$$

Se puede suponer que $(a, b) \subset N(c)$. Entonces f es continua sobre $[a, b]$ y

$f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, c)$,
$f'(x) < 0$ para todo $x \in (c, b)$,

por lo tanto f tiene un máximo relativo en c.

2) La prueba es análoga, es decir, si

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f'(c)}{x - c} > 0$$

entonces con el apoyo del mismo teorema de límites utilizado en la primera parte de esta demostración, se tiene que existe una vecindad (a, b) de c, tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \frac{f'(x)}{x - c} > 0 \text{ para todo } x \in (a, b) \cup (c, b)$$

Se puede suponer que (a, b) $\subset$ N (c). Entonces f es continua sobre [a, b] y

$f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, c)$,

$f'(x) > 0$ para todo $x \in (c, b)$,

por lo tanto f tiene un mínimo relativo en c. Lo que completa la demostración.

Al momento de buscar un óptimo de alguna función f en caso de que exista, podría pensarse que es indistinto el emplear un criterio en vez del otro. Sin embargo, para establecer la condición de suficiencia en algunos casos es más recomendable el uso del primer criterio en lugar del segundo criterio, o viceversa. Por ejemplo, si se tiene en la primera derivada una expresión muy extensa que involucre cocientes, raíces n-ésimas, etcétera, es más recomendable el emplear el criterio de la primera derivada; si se trata de una expresión no muy extensa el utilizar el criterio de la segunda derivada es notablemente más ventajoso.

El próximo teorema tiene mucho que ver con el *criterio de la segunda derivada*, de hecho se desprende de él. Esta proposición muestra como encontrar de una manera conveniente y rápida la concavidad de la gráfica de una función f a partir de la segunda derivada. Se presenta la demostración para ambos casos de concavidad.

1. 2. 4. Teorema concavidad de la gráfica de una función. I) Si $f''(x) > 0$ para todo punto $x \in (a, b)$ entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre (a, b). II) Si se tiene que $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre (a, b).

Demostración.

I) Tómese dos puntos cualesquiera x_1 y x_2 en (a, b) tales que $x_1 < x_2$. Sean los puntos $P_1 = (x_1, f(x_1))$ y $P_2 = (x_2, f(x_2))$. Tómese un número cualquiera entre x_1 y x_2: $(1 - t)x_1 + t x_2$, donde $t \in (0, 1)$. Según el teorema del valor medio existen puntos $c \in (x_1, (1 - t)x_1 + t x_2)$ y otros puntos cualesquiera $c' \in ((1 - t)x_1 + t x_2, x_2)$ tales que

$$\frac{f((1 - t)x_1 + t x_2) - f(x_1)}{(1 - t)x_1 + t x_2 - x_1} = f'(c)$$

y

$$\frac{f(x_2) - f((1 - t)x_1 + t x_2)}{x_2 - (1 - t)x_1 - t x_2} = f'(c').$$

Las condiciones para el teorema del valor medio se verifican en los intervalos

$$[\, x_1, (1-t)\, x_1 + t\, x_2 \,] \text{ y } [\, (1-t)\, x_1 + t\, x_2, x_2 \,]$$

ya que $f''(x)$ existe para toda $x \in [\, x_1, x_2 \,]$. Como $f''(x) > 0$ para todo $x \in [\, x_1, x_2 \,]$, la función f' es una función creciente sobre $[\, x_1, x_2 \,]$, de donde

$$f'(c) < f'(c').$$

Por tanto,

$$\frac{f((1-t)\, x_1 + t\, x_2) - f(x_1)}{t(x_2 - x_1)} < \frac{f(x_2) - f((1-t)x_1 + tx_2)}{((1-t)(x_2 - x_1)}$$

$$(1-t)\, f((1-t)x_1 + t\, x_2) - (1-t) f(x_1) < t\, f(x_2) - tf((1-t)x_1 + tx_2)$$

$$f((1-t)x_1 + tx_2) < (1-t) f(x_1) + tf(x_2).$$

Así pues, si $f''(x) > 0$, para todo $x \in (a, b)$, la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre (a, b).

II) Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$,

entonces

$$[-f\,]''(x) = -f''(x) > 0 \text{ para todo } x \in (a, b).$$

De donde, por analogía de la primera parte de este teorema,

$$-f((1-t)x_1 + t\, x_2) < (1-t)[\, -f(x_1)\,] + t\, [-f(x_2)]$$

y

$$f((1-t)x_1 + t\, x_2) > (1-t) f(x_1) + t\, f(x_2).$$

Por la tanto, la gráfica de la función f es cóncava hacia abajo sobre (a, b). Lo que completa la demostración.

Ahora bien, el teorema siguiente nos dice que los valores extremos de una función de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}$ definida sobre un conjunto abierto pueden ocurrir sólo en los puntos críticos de la función. Sin embargo, la función no necesariamente tiene un valor extremo en cada uno de los puntos críticos.

1. 2. 5. Teorema que garantiza la existencia de un óptimo para funciones de R^n en R. Si la función f definida sobre un conjunto abierto ℓ de R^n tiene un valor extremo en $\mathbf{x}_0 \in \ell$ y $D_k f(\mathbf{x}_0)$ existe, entonces $D_k f(\mathbf{x}_0) = 0$.

Demostración.
Supóngase que f tiene un máximo relativo en $\mathbf{x}_0$. Entonces

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}_k) - f(\mathbf{x}_0)}{h} \leq 0$$

y

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}_k) - f(\mathbf{x}_0)}{h} \geq 0.$$

Como $D_k f(\mathbf{x}_0)$ existe, los dos anteriores límites deben de ser iguales a $D_k f(\mathbf{x}_0)$. Luego $D_k f(\mathbf{x}_0) = 0$.
Si f tiene un mínimo relativo en $\mathbf{x}_0$, entonces - f tiene un máximo relativo en $\mathbf{x}_0$. Aplicando la parte del teorema ya probada a - f, se obtiene $D_k f(\mathbf{x}_0) = 0$. Lo que completa la demostración.

Como se ha visto los puntos críticos ocurren cuando la recta tangente a la gráfica de una función es horizontal. En el caso de funciones de varias variables, como se recordara, los puntos criticos suceden cuando el hiperplano tangente a la gráfica de la función es horizontal. En otras ideas, donde las derivadas parciales de f (o bien el vector gradiente de f) respecto a las variables de la función deben anularse.

Para un punto $\mathbf{x} \in R^n$ el sistema representado por el $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ contendrá n ecuaciones (tal vez muchas serán no lineales), las cuales podran tener una solución, más de una solución o en otro caso ninguna solución. Para n = 1 un punto crítico que no es máximo, ni mínimo debe corresponder a un punto de inflexión, pero para n ≥ 2 hay más posibilidades; para n = 2, por ejemplo, un punto crítico puede ser un punto silla.

Los criterios de la primera y de la segunda derivada para funciones de R en R, se extienden para funciones de R^n en R. Concretamente la condición de suficiencia de la segunda derivada para el caso n-dimensional es más complicada que cuando "x" es un escalar pues no basta checar las segundas derivadas parciales individualmente. Debido al modo en que esas derivadas están relacionadas a la curvatura de la gráfica de f, la prueba debe ser reemplazada usando la matriz Hessiana $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ ya se definida anteriormente. Si f tiene las segundas derivadas parciales continuas entonces, se tiene la relación siguiente de:
$\frac{\delta^2 f(\mathbf{x})}{\delta x_i \delta x_j} = \frac{\delta^2 f(\mathbf{x})}{\delta x_j \delta x_i}$ para j, i = 1, 2, ...,n, y el Hessiano será simétrico.
Revisar el signo de la segunda derivada cuando n = 1, es similar a revisar las componentes de la matriz cuando n > 1. Los distintos tipos de matrices, donde **M** es una matriz de n por n y $\mathbf{z}$ un vector n-dimensional, a continuación se definen,

$$\mathbf{M} \text{ es} \left\{ \begin{array}{l} \text{positiva definida} \\ \text{positiva semidefinida} \\ \text{negativa semidefinida} \\ \text{negativa definida} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \mathbf{z}^T \mathbf{M} \mathbf{z} \text{ es} \left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ \geq 0 \\ \leq 0 \\ < 0 \end{array} \right\} \text{para } \mathbf{z} \neq \mathbf{0}.$$

La relación entre el Hessiano y clasificación de puntos críticos para el caso de minimización a continuación se resume,
si $\mathbf{x}$ es un punto crítico de $f(\mathbf{x})$, entonces
$\mathbf{H}(\mathbf{x})$ es positiva definida $\Rightarrow$ $\mathbf{x}$ es un mínimo absoluto,
$\mathbf{H}(\mathbf{x})$ es positiva semidefinida $\forall$ $\mathbf{x}$ en alguna vecindad de $\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}$ es un mínimo absoluto,
$\mathbf{x}$ es un punto mínimo $\Rightarrow$ $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ es positiva semidefinida.

A continuación se demostrará el teorema relativo a la condición de suficiencia para óptimos de R^n en R. Conforme la n del espacio n-dimensional R^n se incremente, se complicará gradualmente la prueba de este teorema. Se asumirá que f es una función de R^2 en R, en la demostración de la ya mencionada proposición.

1. 2. 6. Criterio para localización de óptimos de funciones de R^n en R. Supóngase que f es una función de R^2 en R que pertenece a la clase C^2 (la demostración es similar para cuando $n > 2$) para en una vecindad de $\mathbf{x}_0$, y supóngase que $D_1f(\mathbf{x}_0) = D_2f(\mathbf{x}_0) = 0$.

1.- Si $D_{1,1}f(\mathbf{x}_0)D_{2,2}f(\mathbf{x}_0) - (D_{1,2}f(\mathbf{x}_0))^2 > 0$, entonces f tiene un valor extremo en $\mathbf{x}_0$: un máximo relativo si $D_{1,1}f(\mathbf{x}_0) < 0$ y un mínimo relativo si $D_{1,1}f(\mathbf{x}_0) > 0$.
2.- Si $D_{1,1}f(\mathbf{x}_0)D_{2,2}f(\mathbf{x}_0) - (D_{1,2}f(\mathbf{x}_0))^2 < 0$, entonces f no tiene un valor extremo en $\mathbf{x}_0$: tiene un punto silla o de ensilladura.

Demostración.
Tomese un punto $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$ en la vecindad reducida $B'(\mathbf{x}_0; r)$ y sea $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$. Usando el teorema de Taylor, se tiene que para un cierto θ en (0, 1)

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = h_1 D_1 f(\mathbf{x}_0) + h_2 D_2 f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}[h_1^2 D_{1,1}f(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h})$$
$$+ 2h_1 h_2 D_{1,2} f(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h}) + h_2^2 D_{2,2} f(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h})]$$

$$= \frac{1}{2}[h_1^2 D_{1,1}f(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h}) + 2h_1 h_2 D_{1,2} f(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h})$$
$$+ h_2^2 D_{2,2} f(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h})]$$
$$= \frac{1}{2}[Ah_1^2 + 2B h_1 h_2 + Ch_2^2]$$

donde $A = D_{1,1}f(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h})$, $B = D_{1,2} f(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h})$, $C = D_{2,2} f(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h})$.

Sea $g = D_{1,1}f\,D_{2,2}f - (D_{1,2}f)^2$; entonces g es continua sobre $B(\mathbf{x}_0; r)$.
1.- Si $g(\mathbf{x}_0) > 0$ y $D_{1,1}f(\mathbf{x}_0) < 0$, entonces existe una vecindad $B(\mathbf{x}_0; \delta)$ contenida en $B(\mathbf{x}_0; r)$ tal que para todo x en $B(\mathbf{x}_0; \delta)$

$$g(\mathbf{x}) > 0 \qquad y \qquad D_{1,1}f(\mathbf{x}) < 0.$$

Si se toma $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$ en $B(\mathbf{x}_0; \delta)$, entonces $\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h}$ en $B(\mathbf{x}_0; \delta)$ y

$$g(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h}) = AC - B^2 > 0 \quad y \qquad D_{1,1}f(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h}) = A < 0.$$

Por lo tanto, para todo $\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h}$ en $B'(\mathbf{x}_0; \delta)$,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) &= \frac{1}{2}[Ah_1^2 + 2B\,h_1\,h_2 + Ch_2^2] \\ &= \frac{1}{2A}[(Ah_1 + Bh_2)^2 + (AC - B^2)h_2^2] < 0. \end{aligned}$$

Esto prueba que f tiene un máximo relativo en $\mathbf{x}_0$ si $g(\mathbf{x}_0) > 0$ y $D_{1,1}f(\mathbf{x}_0) < 0$. La prueba que f tiene un mínimo relativo en $\mathbf{x}_0$ si $g(\mathbf{x}_0) > 0$ y $D_{1,1}f(\mathbf{x}_0) > 0$ es análoga a la anterior.

2.- Si $g(\mathbf{x}_0) < 0$, se demostrará que hay dos rectas L_1 y L_2 que pasan por $\mathbf{x}_0$ tales que la función $f(\mathbf{x}_0)$ es un mínimo relativo de los valores de la función sobre una de las rectas y es un máximo relativo de los valores de la función sobre la otra recta.
Si $\mathbf{h} = |\mathbf{h}|\mathbf{u} = |\mathbf{h}|(u_1, u_2)$, entonces

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}|\mathbf{h}|^2[Au_1^2 + 2B\,u_1\,u_2 + Cu_2^2].$$

Sea $a = D_{1,1}f(\mathbf{x}_0)$, $b = D_{1,2}f(\mathbf{x}_0)$, $c = D_{2,2}f(\mathbf{x}_0)$. Como $f \in C^2$ sobre $B(\mathbf{x}_0; r)$, para toda $|\mathbf{h}|$ suficientemente pequeña $Au_1^2 + 2B\,u_1\,u_2 + Cu_2^2$, y por lo tanto se tiene que $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)$, tiene el mismo signo que $au_1^2 + 2b\,u_1\,u_2 + cu_2^2$, con tal que éste último sea realmente distinto de cero. Ahora se demostrará que siempre hay dos elecciones de $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ tales que $au_1^2 + 2b\,u_1\,u_2 + cu_2^2$ tiene signos opuestos para estas dos elecciones. Es decir, tales que $f(\mathbf{x}_0)$ es un mínimo relativo para una de estas dos elecciones y un máximo relativo para la otra.

Considerese tres casos.

Caso 1. $a \neq 0$.
Si $(u_1, u_2) = (1, 0)$, entonces $au_1^2 + 2b\,u_1\,u_2 + cu_2^2 = a$.
Si $(u_1, u_2) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(b, -a)$, entonces

$$au_1^2 + 2b\, u_1\, u_2 + cu_2^2 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\, g(\mathbf{x}_0).$$

Así pues $g(\mathbf{x}_0) < 0$, para $|\mathbf{h}|$ suficientemente pequeña, pero no cero, el signo del incremento $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)$ será diferente cuando $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in L_1 = \{ \mathbf{x}_0 + t(1, 0)\}$ que cuando $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in L_2 = \{ \mathbf{x}_0 + t(b, -a)\}$. Así pues $f(\mathbf{x}_0)$ es un valor mínimo relativo sobre una de las rectas y un valor máximo relativo sobre la otra.

Caso 2. $c \neq 0$.
Este caso es análogo al caso 1. Aqui $f(\mathbf{x}_0)$ es un valor mínimo relativo respecto a una de las rectas, $L_1 = \{ \mathbf{x}_0 + t(1, 0)\}$ y $L_2 = \{ \mathbf{x}_0 + t(c, -b)\}$, y es un máximo relativo sobre la otra recta.

Caso 3. $a = c = 0$.
Como $g(\mathbf{x}_0) = ac - b^2 < 0$, se debe tener $b \neq 0$.
Si $(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, entonces $au_1^2 + 2b\, u_1\, u_2 + cu_2^2 = b$.
Si $(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$, entonces

$$au_1^2 + 2b\, u_1\, u_2 + cu_2^2 = -b.$$

Así pues, se puede concluir que para $|\mathbf{h}|$ suficientemente pequeña, pero no cero, el signo del incremento $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)$ será diferente con,

$\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in L_1 = \{ \mathbf{x}_0 + t(1, 1)\}$,

que cuando $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in L_2 = \{ \mathbf{x}_0 + t(1, -1)\}$. Y de nuevo $f(\mathbf{x}_0)$ es un valor mínimo relativo sobre una de las rectas y un valor máximo relativo sobre la otra. Lo que completa la demostración.

En muchas ocasiones se necesita calcular el óptimo de una función sujeta a una o a un conjunto de restricciones de igualdades. En la(s) restricción(es) adicional o adicionales comunmente todas o algunas de las variables están en correlación con el resto, y en múltiples circunstancias es despejable cualquiera de las variables. Cuando lo anterior sucede, y es sustituible en la función principal, es posible optimizar la función f, mediante los criterios clásicos de la programación ya mencionados. Sin embargo, este procedimiento no siempre es factible, y su aplicación puede dificultar demasiado el problema original. Otro hecho que desfavorece al método citado, es que en algunos problemas puede ser imposible despejar a alguna de las variables. Es por ello que es a veces más fácil y recomendable usar la técnica de *Lagrange*. A continuación se demostrará el teorema de la función implícita, que sirve de base para demostrar el teorema de los *multiplicadores de Lagrange*.

1. 2. 7. Teorema de la función implícita. Sea F una función de R^3 en R que pertenece a la clase C^1 en un conjunto abierto A. Si $F(\mathbf{x}_0) = 0$ y $D_3 F(\mathbf{x}_0) \neq 0$, donde el punto denotado por $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in A$, entonces existe una vecindad N de (x_0, y_0), una vecindad de z_0 $(z_0 - c, z_0 + c)$, y una función única $f \in C^1$ sobre N tal que

$$f(x_0, y_0) = z_0$$

y para todo $(x, y) \in N$,

$$f(x, y) \in (z_0 - c, z_0 + c)$$

y

$$F(x, y, f(x, y)) = 0.$$

Además para $(x, y) \in N$,

$$D_1 f(x, y) = -\frac{D_1F(x,y,f(x,y))}{D_3F(x,y,f(x,y))}$$

y

$$D_2 f(x, y) = -\frac{D_2F(x,y,f(x,y))}{D_3F(x,y,f(x,y))}.$$

Demostración.
Supóngase $D_3 F(\mathbf{x}_0) > 0$, la prueba es exactamente la misma si $D_3 F(\mathbf{x}_0) < 0$. Como $D_3 F$ es continua en A, $D_3 F(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x}$ en cierta vecindad de $B(\mathbf{x}_0 ; \delta)$ de $\mathbf{x}_0$. Tomese $0 < c < \delta$. Para "x" y "y" fijos, $D_3 F(x, y, z)$ aumenta cuando "z" aumenta. Por lo tanto como $F(\mathbf{x}_0) = 0$, se tiene $F(x_0, y_0, z_0 - c) < 0$ y también se tiene que la función $F(x_0, y_0, z_0 + c) > 0$. La continuidad de F en A implica la existencia de un número $r \leq \sqrt{\delta^2 - c^2}$ tal que, para todo $(x, y) \in B((x_0, y_0); r)$,

$$F(x_0, y_0, z_0 - c) < 0 \quad y \quad F(x_0, y_0, z_0 + c) > 0$$

Sea $N = B((x_0, y_0); r)$. Sean $(x, y) \in N$ y $g(z) = F(x, y, z)$.
Entonces g es continua y creciente en $[z_0 - c, z_0 + c]$. Además, $g(z_0 - c) < 0$ y por otra parte $g(z_0 + c) > 0$. Luego hay un y sólo un punto $z \in (z_0 - c, z_0 + c)$ tal que la función $g(z) = 0$. Así pues, para cada punto $(x, y) \in N$ existe un z y sólo uno en la vecindad descrita por $(z_0 - c, z_0 + c)$, tal que $F(x, y, z) = 0$. Si por definición se hace f (x, y) igual a este z, entonces la función f está definida sobre N y $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo $(x, y) \in N$. Además, $f(x_0, y_0) = z_0$ .Obsérvese que para cualquier $(x, y) \in N$, $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < c$. Se prueba a continuación que f es continua en N. Tomese (x, y) en N, sea $z = f(x, y)$, y tomese ε tal que,

$$0 < \varepsilon < \text{mín} \{ z_0 + c - z, z - z_0 + c \}.$$

Considere la región cilíndrica que se extiende de $z - c$ a $z + c$ y que tiene N como sección, es decir, como proyección sobre el plano XY. De acuerdo con el argumento usado para demostrar la existencia y unicidad de f se puede comprobar que la existencia de una vecindad N (x, y) de (x, y) tal que para todo punto $(x', y') \in N (x, y)$

$$| f(x', y') - f(x, y) | < e .$$

Por tanto, f es continua en N.

Se probará ahora que $f \in C^1$ en N. Se toma $(x, y) \in N$ y (h, k) tales que el punto esté dado por $(x + h, y + k) \in N$. Sea $L (h, k) = f (x + h, y + k) - f (x, y)$. Usando entonces el teorema del valor medio, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= F (x + h, y + k , f (x + h, y + k)) - F (x, y, f (x, y)) \\ &= F (x + h, y + k , f (x, y) + L (h, k)) - F (x, y, f (x, y)) \\ &= F (h, y, L (h, k)) \bullet DF (x + \theta h, y + \theta k , f (x, y) + \theta L (h, k)) \end{aligned}$$

donde θ está en el intervalo (0, 1). Si se hace k = 0, se tiene

$$\begin{aligned} &hD_1 F (x + \theta h, y, f (x, y) + \theta L (h, 0)) \\ &\qquad + L (h, 0) D_3 F (x + \theta h, y, f (x, y) + \theta L (h, 0)) = 0. \end{aligned}$$

Luego para $h \neq 0$

$$\frac{L(h,0)}{h} = \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = -\frac{D_1F(x + \theta h, y, f(x,y) + \theta L(h, 0))}{D_3F(x + \theta h, y, f(x,y) + \theta L(h, 0))}$$

Como f es continua en (x, y) y D_1 F y D_2 F son continuas en (x, y, f (x, y)), el límite del segundo miembro cuando h tiende a cero existe y, por tanto,

$$D_1 f (x, y) = -\frac{D_1F(x,y,g(x,y))}{D_3F(x,y,g(x,y))}.$$

De forma análoga se tiene

$$D_2 f (x, y) = -\frac{D_2F(x,y,g(x,y))}{D_3F(x,y,g(x,y))}.$$

Lo que completa la demostración.

1. 2. 8. Teorema de los multiplicadores de Lagrange. Supóngase que F y G son funciones de R^3 en R que pertenecen a la clase C^1 en un conjunto abierto A y DG es distinta de cero en A. Si $\mathbf{x}_0 = (x_0 , y_0 , z_0)$ es un punto en A en el que F tiene un valor extremo sujeto a la restricción $G (\mathbf{x}) = 0$, entonces, para algún valor de λ , en vector denotado por $(x_0 , y_0 , z_0 , \lambda)$ es un punto crítico de

$$H (x, y, z, \lambda) = F (x, y, z) + \lambda G (x, y, z).$$

Demostración.
Supóngase que F restringida a la superficie L descrita por $G (x) = 0$ tiene un valor extremo en el punto $\mathbf{x}_0$. Como $\mathbf{D}G (\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$, una de las derivadas parciales de G es distinta de cero en $\mathbf{x}_0$, es decir $D_3 G (\mathbf{x}_0) \neq 0$. De acuerdo con el teorema de la función implícita, existe una vecindad N de (x_0 , y_0) y una función $g \in C^1$ sobre N tal que la función $g (x_0 , y_0) = z_0$ y, para todo $(x, y) \in N$,

$$G (x, y, g (x, y)) = 0$$

$$D_1 g (x, y) = -\frac{D_1 G(x,y,g(x,y))}{D_3 G(x,y,g(x,y))}$$

$$D_2 g (x, y) = -\frac{D_2 G(x,y,g(x,y))}{D_3 G(x,y,g(x,y))}.$$

Si $f (x, y) = F (x, y , g (x, y))$, entonces f tiene un valor extremo en (x_0 , y_0) y

$$D_1 f(x_0 , y_0) = D_1 F (x_0 , y_0 , z_0) + D_1 g (x_0 , y_0)D_3 F (x_0 , y_0 , z_0)$$

$$= D_1 F (x_0 , y_0 , z_0) - \frac{D_1 G(x,y,g(x,y))}{D_3 G(x,y,g(x,y))} D_3 F (x_0 , y_0 , z_0) = 0$$

$$D_2 f(x_0 , y_0) = D_2 F (x_0 , y_0 , z_0) + D_2 g (x_0 , y_0)D_3 F (x_0 , y_0 , z_0)$$

$$= D_2 F (x_0 , y_0 , z_0) - \frac{D_2 G(x,y,g(x,y))}{D_3 G(x,y,g(x,y))} D_3 F (x_0 , y_0 , z_0) = 0.$$

Luego si $\lambda = -\dfrac{D_3 F (x,y,g(x,y))}{D_3 G (x,y,g(x,y))}$, se tiene

$$D_1 H (x_0 , y_0 , z_0 , \lambda) = D_1 F (x_0 , y_0 , z_0) + \lambda D_1 G (x_0 , y_0 , z_0) = 0$$

$$D_2 H (x_0 , y_0 , z_0 , \lambda) = D_2 F (x_0 , y_0 , z_0) + \lambda D_2 G (x_0 , y_0 , z_0) = 0$$

$$D_3 H (x_0 , y_0 , z_0 , \lambda) = D_3 F (x_0 , y_0 , z_0) + \lambda D_3 G (x_0 , y_0 , z_0) = 0$$

$$D_4 H (x_0 , y_0 , z_0 , \lambda) = \qquad G (x_0 , y_0 , z_0) = 0.$$

Así pues (x_0 , y_0 , z_0 , λ) es un punto critico de H. Lo que completa la demostración.

Con esta demostración se concluye la parte que corresponde a los elementos teóricos concernientes a diversas ideas, definiciones y teoremas importantes de la programación clásica. Ahora se procederá a discutir algunas nociones, conceptos y proposiciones del cálculo diferencial relacionadas con la técnica de Lagrange dentro de la economía matemática, que asociadas a lo aquí expuesto, fundamentaran la optimización, interpretación y análisis en los modelos económicos del último capitulo.

II. LA TÉCNICA DE LAGRANGE EN LA ECONOMÍA MATEMÁTICA.

2.1 Breve semblanza de la Economía Matemática.

Se dice que la economía matemática es una aproximación al análisis económico de un problema dado, en la que se utilizan a la vez tanto un simbolismo estandarizado como eficaces teoremas matemáticos [1]. Se puede afirmar que el hecho de que un compendio de economía se sirva de usar técnicas geométricas para deducir resultados, implica de manera explicita necesariamente el estar directamente involucrado con la aplicación de la economía matemática. Sin embargo, como es de esperarse la economía matemática va más allá de cuestiones meramente geométricas (en dos o en tres dimensiones), haciéndolo por medio de técnicas matemáticas más eficaces tanto en obtención de resultados como en las respectivas interpretaciones. Por citar algunas se tienen: el álgebra de matrices, cálculo diferencial, ecuaciones diferenciales, ecuaciones en diferencia, etcétera.

Como se sabe el inferir con base al razonamiento acerca de un conjunto de datos, para hallar conclusiones o generalizar resultados partiendo de una serie de supuestos o hipótesis establecidas, es el objeto de todo análisis teórico, no exceptuando de ello a la propia ciencia económica. El análisis económico tiene dos vertientes fundamentales que son la economía matemática y la economía literaria, cuya mayor diferencia radica en que en la primera los supuestos y resultados obtenidos se establecen con un simbolismo matemático en vez de expresarlo con palabras, y con igualdades como restricciones por satisfacer en lugar de proposiciones. Suponiendo que tanto los símbolos y las palabras son similares o semejantes entre sí, o dicho de otro modo tienen mismas implicaciones, es poco importante que se opte por cualesquiera de los dos, por lo que no es absoluto el decir que el uso de símbolos (o palabras) es lo más beneficioso, pertinente, recomendable, eficaz, o exacto en la búsqueda de la solución del modelo a discutir.

El ir más allá de los métodos geométricos es significativo, puesto que a pesar de que los métodos geométricos tienen la ventaja en la visualización, pierden esta cualidad cuando en las hipótesis establecidas hay más de dos variables a tratar (en estos casos se tendría que trabajar con gráficas tridimensionales cuyo manejo es difícil), y además para más de tres dimensiones la elaboración de curvas es imposible. Al enfrentarse con modelos más generales que involucren 3, 4, o n variables se debe acudir a instrumentos más manejables como lo son las ecuaciones, por lo que se hace indispensable el estudio de otros métodos matemáticos más poderosos.

La matemática es la ciencia más recomendable para el planteamiento y solución de modelos, entre otras razones porque:
(i) se vale de un "lenguaje" es sobrio, claro y de extraordinaria exactitud;
(ii) tiene un gran soporte teórico basado en una gran diversidad de proposiciones matemáticas a disposición, además de que se puede extender para casos en que se trabaja

[1] Estos teoremas son herramienta indispensable para entender y solucionar innumerables modelos económicos.

con más de 3 variables, o sea que nos da la oportunidad de extender resultados al tratar casos más genéricos, es decir para n variables.;
(iii) al momento de fundamentar los supuestos necesarios en los modelos de modo manifiesto como exigencia para más adelante usar teoremas matemáticos, no permite fijar supuestos de modo implícito que no se quieran.

Como es sabido toda teoría es una abstracción del mundo que nos rodea, y del cual se desea comprender aquellas reglas que lo rigen, haciendo ello por medio de seleccionar algunas características substanciales para poder estudiar un determinado problema en esencia, sin que éste contenga tantas complicaciones que se presentan en la realidad. Como cualquier otra teoría, la economía se ve envuelta en una gran complejidad en cuanto a entender el momento, y circunstancias en todas sus interrelaciones claves para el desarrollo de un modelo específico. Por lo anterior, el procedimiento recomendable en dicha teoria, es el considerar a los elementos primarios y las relaciones altamente significativas del problema para establecer hipótesis, después agruparlos y obtener como producto el modelo económico, que representará esquemática y aproximadamente determinada situación de la economía en estudio.

2.1.1 Elementos de un modelo económico-matemático.

Un modelo económico es un esquema teórico y no necesariamente matemático. No obstante, si es de índole matemática, casi siempre tendrá o estará sujeto a una serie de restricciones (igualdades) a considerar, que a su vez describirán el problema a resolver; además se observará que éstas traducen al lenguaje matemático el conjunto de hipótesis analíticas adoptadas, y son resultado de relacionar las variables que se hallan inmersas en el mismo. Al resolver el modelo vía las técnicas matemáticos adecuadas, se pueden obtener algunas conclusiones como solución del modelo planteado.

Los modelos tratados en esta tesina son los que se sitúan dentro de la una de las ramas de la economía, que es la llamada microeconomía, la cual se dirige o tiene como propósito el analizar, o estudiar a las unidades productivas (empresas particulares o de gobierno), con problemas de eficiencia y funcionamiento, optimización de beneficios, competitividad, etcétera. Aunque los modelos del siguiente capítulo, se pueden englobar en mayores escalas, es decir analizarlos desde un punto de vista macroeconómico, esta generalización hace al modelo mucho más complejo (pues se tendrían que tener demasiados supuestos, variables, datos, etcétera), y al mismo tiempo exigiría que los interesados estuviesen más involucrados con cuestiones más avanzadas en este sentido, además muy probablemente con herramientas mas avanzadas de las matemáticas y de la economía.

Ahora bien, dado lo significativo de un modelo económico, es pertinente señalar una breve descripción de los elementos que lo integran, y que son:
a) variables, constantes y parámetros; y,
b) ecuaciones e identidades.

Se entiende por variable algo que de forma continua puede cambiar y tomar diferentes valores. En la economía estas variables representan precio, beneficio, ingreso, costo, renta nacional, consumo, inversión, importación, exportación, etcétera. En otras áreas, una variable puede representar tantas cosas como contextos existan, pues su constitución está en función de los usos que se le vayan suscitando de acuerdo a las necesidades por satisfacer. Dado que a cada variable se le puede asignar múltiples valores, ésta se representa con un símbolo, en lugar de un número en especial.

Al existir un problema inicial, debidamente planteado se puede solucionar éste, por medio de las técnicas matemáticas, llegando de tal modo a un determinado conjunto de variables como solución. Por ejemplo, el nivel de producción que maximiza el beneficio, o las combinaciones óptimas de los insumos o factores en el proceso productivo para maximizar la utilidad, o minimizar los costos, etcétera. Las variables que se desean encontrar a partir del modelo, se conocen como *variables endógenas*, o sea originadas desde dentro del modelo (por ejemplo el consumo, la inversión, la oferta, etcétera). Además de esas variables, el problema puede a la vez contener otras que se suponen determinadas por fuerzas externas al mismo, o sea variables autónomas, cuyos valores se aceptan sólo como datos (por ejemplo, la demanda, distribución de la producción obtenida, etcétera), estas variables reciben el nombre de *variables exógenas*, pues se originan desde afuera. No existe razón alguna para hacer absoluta la afirmación de que determinada variable es endógena en todo modelo, pues se debe tener como punto de referencia el contexto del problema en tratamiento. Asimismo, para que las variables exógenas puedan distinguirse visualmente de las endógenas, se asignará un subíndice 0 al símbolo elegido. Ambos tipos de variables merecen similar importancia, pues las dos clases ayudan a encontrar la solución óptima del modelo.

Dada una expresión algebraica donde las variables aparecen en combinación con números fijos o constantes, se tiene que éstos últimos reciben el nombre de *coeficiente* de esa variable, pudiendo ser simbólicos en vez de numéricos, pues es ello implica que es más sencillo el generalizar resultados o conclusiones. Como muestra se puede citar lo siguiente: al establecer el símbolo a para una constante cualquiera y usar en un modelo la expresión ax, en lugar de $5x$, se tiene una generalización flexible que da ciertas libertades de hallar soluciones particulares a partir de una solución que engloba todos los posibles casos. Dicho símbolo es un caso peculiar pues denota una constante dada, y no obstante, como no le se ha asignado un número específico, es tan manejable que tiene la facultad de poder tomar cualquier valor. Consecuentemente se puede pensar que se trata de una *constante* que puede variar libremente, e indiscutiblemente se encuentra en lo cierto. A este tipo de variables se les llama *constantes paramétricas* o *parámetros*, que son muy semejantes a las variables exógenas, pues se toman como "datos" en un modelo. Las constantes paramétricas se representan por lo general con los símbolos a, b, c, o con sus correspondientes del alfabeto griego: α, β, y γ .

Cuando se traduce al lenguaje matemático las hipótesis dadas, las variables, constantes y parámetros se relacionan entre sí, y se obtiene un conjunto de restricciones, que en los casos aquí presentados se tratarán tan sólo las ecuaciones, pero en casos más generales se utilizan las desigualdades o combinaciones de ambas. Dentro del contexto aquí manejado hay tres tipos de ecuaciones, que son:

a) *ecuaciones de condiciones de equilibrio*, sólo son relevantes si el modelo tiene inmerso en sí la noción de equilibrio. Estas igualdades describen un requisito para lograr dicha estabilidad, como lo es el caso del modelo de mercado,
$Q_d = Q_s$ [cantidad demanda = cantidad ofrecida], que en otras palabras partiendo de la premisa de que *los productores estarán dispuestos a vender lo más elevado posible sus artículos, y los consumidores estarán dispuestos a pagar la menor cantidad posible por la adquisición de dichos bienes*, en donde deberá de existir un punto de equilibrio que de la pauta para establecer precios de acuerdo a oferta y demanda.

b) *ecuación de comportamiento*, denota como una variable responde a los cambios producidos en otras variables. Estas ecuaciones pueden utilizarse para describir la evolución de un modelo, ante determinados cambios, y antes de establecerlas se debe adoptar hipótesis precisas en cuanto al tipo de comportamiento de la variable en cuestión. Mediante la especificación de las ecuaciones de comportamiento se da una expresión matemática representativa a las hipótesis adoptadas en un modelo, y cualquier error en el planteamiento de las hipótesis traerá consigo resultados equivocados. Por ejemplo, si se tiene un costo de producción para satisfacer determinada demanda, y se altera el costo de alguno de los insumos del proceso productivo, entonces el costo se verá claramente afectado y quizá la demanda de ese bien disminuya dada esa variación.

c) *ecuación por definición*, establece una identidad entre dos expresiones reciprocas que tienen igual significado. En estas ecuaciones a menudo se emplea el signo idénticamente igual ≡ en lugar del signo igual normal =. Por ejemplo, la utilidad detrás de un proceso de producción se define como la diferencia entre el ingreso percibido y el costo de producción.
Utilidad = Ingreso percibido - Costo de producción.

2.1.2 La estática comparativa en los modelos económicos.

La estática comparativa tiene como fin principal el confrontar los diferentes estados o momentos de equilibrio que se asocian con los distintos conjuntos de valores de los parámetros y de las variables exógenas. Existe la posibilidad de que halla un cambio cualesquiera que rompa el estado de equilibrio inicial, por lo que las distintas variables endógenas experimentarán ciertos ajustes, pues como es sabido éstas se determinan dentro del modelo. Las variables, y parámetros restantes se toman sólo como datos, pues tales no se pueden ajustar, sino más bien se debe ajustar el modelo en función de ellas, para así obtener un nuevo estado de equilibrio relacionado con las nuevas condiciones dadas. En otras palabras la estática comparativa coteja los diferentes estados de equilibrio, es decir, por ejemplo el equilibrio inicial con el final, contemplando la posibilidad de que el nuevo equilibrio sea estable, debido al supuesto de que éste se puede alcanzar. Es importante en la estática comparativa el saber cuales fueron las condiciones que condujeron a estas nuevas circunstancias, bajo que influencias, y ver si de algún modo se pueden minimizar las posibles fluctuaciones que en tales se manifiesten.

La estática-comparativa puede ser de índole cualitativa y / o cuantitativa, es decir si se interesa en que dirección se cambiará determinada variable tras experimentarse una ruptura en el equilibrio de alguna restricción del modelo en estudio; o bien, en que magnitud se ve afectada dicha variable. Si se obtiene una respuesta cuantitativa, se tendrá de forma inmediata la respectiva respuesta cualitativa. La propia naturaleza de la estática comparativa hace que ésta ignore el proceso de ajuste del equilibrio inicial al equilibrio final.

En esta comparación el problema principal es el hallar la tasa de cambio del valor de equilibrio de una variable endógena con respecto al cambio respectivo de una variable exógena. En economía a menudo se está interesado en encontrar cómo afectará un cambio de desequilibrio de un parámetro, al estado de equilibrio del modelo, es entonces donde la *marginalidad* juega un papel protagonista. La marginalidad se define como el modo en que la producción se ve alterada respecto a la modificación, por algún cambio en algunos de los factores o insumos que intervienen en el proceso productivo. Este cambio o variación se encuentra relacionado de modo directo con la noción de tasa de cambio, y con la primer derivada de la función objetivo (en este caso) respecto al insumo modificado, que se supone es el que se interesa conocer por su grado de provechoso o beneficioso es dentro del proceso productivo. Al aumentar la producción como concecuencia de un aumento o decremento en los factores, se deben mantener el resto de los insumos constantes, y después analizar en que tanto beneficia o perjudica las variaciones de los insumos en la producción. La marginalidad está vinculada con el principio de escasez de la economía, es decir si un bien es abundante su valor es relativamente pequeño, mientras que si ese otro bien no es abundante o es escaso su valor es relativamente alto.

2.2 Método de Lagrange e ideas preliminares.

2.2.1 Funciones homogéneas.

Como preámbulo a lo que precede es necesario mencionar algunos términos que posteriormente se emplearán. Caso de ello es lo que respecta a la definición de las funciones homogéneas. Se dice que una función homogenéa de grado r, es aquella que si multiplicando cada una de sus variables independientes por una constante j el valor de la función se altera en la proporción j^r, es decir, si

$$f(jx_1, jx_2, \ldots, jx_n) = j^r f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

El valor de la constante j puede ser arbitrario. De acuerdo con un contexto económico, además de que el punto $(jx_1, jx_2, \ldots, jx_n)$ debe permanecer dentro del dominio de la función f; en las aplicaciones, la constante j se debe tomar como positiva, pues esto es exigido por la mayoría de las variables económicas. Una función homogénea muy usada en economía es la función de producción de Coobb-Douglas, la cual se abordará después de definir algunos tecnicismos económicos cuyo uso será indispensable para la discusión de los modelos microeconómicos del último capítulo.

Desde un punto de vista microeconómico los inputs se refieren a los factores o insumos que se van a utilizar o combinar dentro del proceso de producción, por ejemplo la cantidad de trabajo, las materias primas, la maquinaria, etcétera. Los outputs son el resultado de usar esos factores productivos o insumos, o lo que se obtiene después de llevado a cabo el proceso productivo, en conjunto desde una perspectiva global. En términos macroeconómicos los input-outputs representan los movimientos de oferta-demanda de n sectores productivos en los que se ha dividido el sistema económico de un determinado territorio. Los inputs primarios son los valores de los sectores finales es decir remuneraciones del trabajo, el capital y el empresario, impuestos y amortizaciones). El input total representa el total de las ventas del sector "x". La demanda final del sector "x" es el valor de las ventas del sector número "x" a la demanda final (familias, gobierno, formación de capital, etcétera). El output del sector i al sector j es el valor de las ventas efectuadas por el sector i-ésimo al j-ésimo.

Una curva de indiferencia es la representación geométrica de los puntos de las combinaciones posibles que puede tener un consumidor respecto a dos tipos de bienes, con un nivel de ingreso establecido, y con el cual obtiene su mayor nivel de satisfacción. En otras palabras cómo se puede gastar el consumidor sus percepciones económicas en un bien, otro, o en ambos tratando de buscar la mayor complacencia posible. Si hay un punto sobre la curva, entonces se tiene una máxima satisfacción de que se emplea todo el ingreso, excluyendo la posibilidad de que exista ahorro alguno. Si se tiene algún punto por encima de la linea presupuestaria, entonces en ese caso se está consumiendo más de lo que el presupuesto lo permite, quizá sea el caso de del uso de una tarjeta de crédito. Si existe algún punto por debajo de la linea presupuestaria, entonces en ese caso se presenta un ahorro, o sea no se gasta toda la percepción económica en consumir bienes, o se está optando por una combinación con menores cantidades de los productos para el beneficio del consumidor.

Por lo general cuando se enfrenta a las palabras de *isocuanta, isocosto, isobeneficio*, etcétera, se refiere a una curva o lugar geométrico que encierra diversas maneras o posibilidades que el productor tiene para mover sus factores de producción, ya sea atendiendo a un presupuesto, costos, o buscando optimizar un beneficio. Si se trata de la utilización de factores productivos o en la compra de insumos que intervienen en el proceso de producción, entonces se habla de una curva de isocosto o isocuanta respectivamente.

La isocuanta de producción es una curva que reúne en sí todos los métodos técnicamente eficientes, o todas las combinaciones de los factores de producción para obtener un determinado nivel de producción. Esta curva puede tener varias formas, pues engloba las diferentes formas de organizar los insumos a disposición, para satisfacer determinada demanda. El isocosto de producción es una curva que representa todas las combinaciones de los factores que la empresa puede hacer con determinado desembolso monetario, partiendo de una cantidad fija de capitales o costo de producción establecidos.

Dado que en términos generales las curvas de los párrafos anteriores son continuas y diferenciables, se puede extraer de tales funciones la derivada de primer orden. En particular al derivar la función que describe una curva de isocuanta, se obtiene su pendiente que en términos económicos representa el grado de sustitución de los diferentes factores productivos. Es decir, en que medida o grado se puede disponer o cambiar un insumo con respecto a otro, o bien como se puede incrementar un factor con respecto a otro, con el fin de mantener un nivel de producción. Por ejemplo si se piensa aumentar el factor trabajo por cuestiones de costos, se tiene que considerar la posibilidad de disminuir el insumo capital, para así sostener determinada oferta deseada. Esta tasa de sustitución también busca la compensación entre los insumos, o sea que al aumentar uno se reduzca el otro, pues en algunos casos esta situación no se presenta, por lo que a toda costa es relevante e trascendental lograr ese equilibrio de aumento-disminución. Si por ejemplo, se incrementa el factor tierra y se disminuye el factor trabajo se alterará el producto, y a la vez el grado de sustitución entre las dos variables no será bueno.

Otro concepto importante relacionado con las curvas anteriores es la *elasticidad* que se refiere a la capacidad de reacción que tiene la demanda de un bien ante los cambios en sus precios. Por ejemplo, las tortillas son un bien con una elasticidad alta, pues su precio al consumidor puede tener modificaciones, pero precisamente por ser un bien básico en la alimentación del pueblo mexicano, no habría un descenso tan drástico en su demanda. Ahora bien, si hay una variación en el precio de los libros habría una variación más grave en su consumo, es decir se dejarían de vender muchos ejemplares, pues no son artículos de primera necesidad. En consecuencia un bien elástico es aquel que aún con cambios en sus precios, se enfrentará a cambios no muy drásticos en su demanda. Si por el contrario, un determinado artículo tiene graves desviaciones en su adquisición por cambios en su precio entonces se dice que es un bien con elasticidad baja.

Dentro de la extensa variedad de funciones de producción, existe una que es muy utilizada que es la llamada función de producción de Cobb-Douglas:

$$Q = A K^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

donde $A > 0$ y $\alpha > 0$. Se puede generalizar reescribiendo

$$Q = A K^{\alpha} L^{\beta} \ldots(0)$$

donde $\beta > 0$ que puede ser igual o no a $(1-\alpha)$.

En caso de que se desee profundizar en lo referente de dicha función, ya sea para ver sus principales características, o bien revisar su homogeneidad se recomienda consultar las páginas 422 Y 423 del libro número 3 citado en la bibliografía de esta tesina.

2.2.2 La técnica de los multiplicadores de Lagrange.

Antes de ver la técnica de Lagrange se discutirán algunas ideas, que nos ayudarán a reconocer la necesidad de dicho mecanismo en los problemas de programación clásica restringidos a igualdad(es). Por ejemplo, cuando una función f está sujeto a una restricción, el objetivo es dar a conocer claramente las limitaciones con que se cuenta, y bajo esas restricciones encontrar la solución óptima del modelo en estudio.

En matemáticas el efecto de la restricción consiste en reducir el dominio y rango de la función objetivo, disminuyendo más no eliminando las posibles elecciones de las variables. En otras palabras, la solución encontrada, tendrá como principio el satisfacer las restricciones a la vez del optimizar la función objetivo. Por ejemplo, si la restricción o conjunto de restricciones son funciones complejas, la técnica de sustitución y eliminación de variables debe descartarse (debido a su ineficacia respecto al exceso de cálculos, retraso en la búsqueda de soluciones, y dar lugar fácilmente a errores de estimación). En tales casos se puede recurrir a la *técnica de los multiplicadores de Lagrange*, o indistintamente llamada como la *técnica de Lagrange*, la cual cuenta con diversas ventajas analíticas. Antes de discutir de lleno dicha técnica, pienso pertinente hablar respecto al autor francés de este procedimiento matemático dentro de un contexto histórico-matemático.

En el siglo XVIII la mayor parte de los matemáticos franceses no estaban integrados en las universidades, sino relacionados con la iglesia o con el ejército, mientras que otros disfrutaban del mecenazgo real o bien se dedicaban a impartir clases de modo particular. Joseph Louis Lagrange (1736-1813), fue el único matemático de Francia que no tenía dicha nacionalidad en sentido estricto, ya que había nacido en Turín, de padre francés y madre italiana con una buena posición económica. Lagrange era el más pequeño de 11 hermanos y el único que sobrevivió más allá de la infancia, hizo sus estudios en su ciudad natal, y muy joven llego a ser profesor de matemáticas en la Academia Militar de Turín, pero más tarde disfruto del patrocinio real con Federico el Grande de Prusia y con Luis XVI de Francia. Dentro de sus múltiples aportaciones destacan las siguientes:

a) presidió la comisión que formuló el sistema métrico decimal,

b) desarrollo la Teoría de la Mecánica, en especial en su obra *Mecánica Analítica* en el año de 1787, considerada como una geometría en el espacio de cuatro dimensiones, es decir las tres coordenadas espaciales y el tiempo,

c) halló un método para resolver el problema de la optimización restringida, que quizá sea esto lo que constituye su trabajo más popular, conocido en la actualidad como la técnica de los multiplicadores de Lagrange [2] que consiste en transformar un problema restringido, en uno no restringido, de tal modo que se pueda aplicar la condición de primer orden de los problemas no restringidos. A continuación se explicará la técnica ya mencionada.

Sea el problema maximizar $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, donde z recibe el nombre de función objetivo, sujeta a la restricción $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$. Por principio se construye la *función Lagrangeana*, que es una modificación de la función objetivo en la que se introduce la restricción

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda\, [\, c - g(x_1, x_2, \dots, x_n)] \dots (^\circ)$$

La letra λ del alfabeto griego con valor desconocido, se llama *multiplicador de Lagrange*. Si se garantiza que $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$, tal que se cumpla la restricción, el último término de la función Lagrangeana se hará idénticamente cero para cualquiera que

[2] O simplemente Técnica de Lagrange.

sea el valor de λ. Si se elimina la restricción se debe localizar el optimizar la función Z, como si se tratara de una función sin restricciones y olvidarse de que se tiene que optimizar una función f sujeta a una restricción g. Se habla de maximizar en un sentido amplio en el que se engloba de manera implícita la minimización, esto se puede generalizar si se multiplica por menos uno (- 1) la función original.

Para optimizar Z y por consiguiente z, se considerará al multiplicador λ como una variable adicional, o sea la función Lagrangeana Z estará en función del conjunto de variables $\lambda, x_1, x_2, \ldots, x_n$, es decir $Z = Z(\lambda, x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Por lo tanto, la condición de primer orden para extremos libres consistirá en hallar los valores solución de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en el conjunto de ecuaciones simultáneas, siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} Z_\lambda = c - g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ Z_i = f_i - \lambda g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n \end{array}\right\} \ldots(*)$$

y como se deduce la primera ecuación garantiza el cumplimiento de la restricción g. Así, por lo tanto es viable el hallar el extremo restringido de z, al localizar los valores estacionarios de la función Lagrangeana Z sin restricciones.

2.2.3 La diferencial total en la técnica de Lagrange.

Se sabe que la condición necesaria de primer orden de los extremos de la función $z = f(x, y)$, de dz es que $dz = f_x\,dx + f_y\,dy = 0 \ldots(1)$. Al tener la restricción de la función $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$, no es válido el alterar libremente las diferenciales dx y dy. Al existir la restricción $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$, se tiene que la diferencial dg debe ser igual a la derivada de una constante (dc), lo cual es cero. Por consiguiente,

$$g_x\,dx + g_y\,dy = 0 \ldots(2),$$

y con esto tanto dx como dy se convierten en dependientes. Por lo que de la condición necesaria de primer orden resulta que dz = 0 [(1)], recordando que la restricción (en notación vectorial) $g(\mathbf{x}) = c$, implica que dg = 0 [(2)]. Se observa de (1) y (2), que para cumplir esta condición se debe satisfacer

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} \ldots(3).$$

La condición denotada por (3), junto con la restricción $g(\mathbf{x}) = c$ arrojará dos ecuaciones con las que se puede localizar, en caso de que existan, los valores críticos de "x" y "y". El resto de las ecuaciones de (*) se pueden reescribir como

$$\frac{f_x}{g_x} = \lambda, \text{ y } \frac{f_y}{g_y} = \lambda \ldots(4)$$

y esto es equivalente al resultado encontrado en (3). Es notorio que por medio del empleo de la técnica de Lagrange al encontrar el valor de λ, se obtiene una medida de la sensibilidad de las funciones Z y z respectivamente (ambas optimizadas), respecto a un posible cambio en la restricción g (**x**) = c, con lo que se concluye que estos multiplicadores contienen información estático comparativa, relacionada con las tasas de cambio de las funciones Lagrangeanas vistas ya anteriormente.

2.2.4 Interpretación económica de los multiplicadores de Lagrange.

Como se ha expuesto λ mide la sensibilidad de Z = f (**x**) cuando hay una variación en la restricción g (**x**) = c. Ahora bien, sean λ,"x" y "y" variables endógenas del modelo, y sea la c (el segundo miembro de la restricción) la única variable exógena del modelo. La repercusión de un posible cambio en c mostraría de modo directo como se afectará la solución óptima bajo esas nuevas circunstancias. Esto es algo muy similar a lo que sucede en la programación lineal, cuando una vez localizado el óptimo restringido de un programa o modelo, se experimenta que todas o solo algunas de las restricciones, o la propia función objetivo presenten diversos cambios. Esta situación sugeriría el rehacer paso a paso desde un inicio el algoritmo de optimización, sin embargo gracias a la Teoría del Análisis de Sensibilidad se vuelve a encontrar el óptimo de la función, a partir de la solución anteriormente hallada.

Al tomar en cuenta el teorema de la función implícita, con las tres ecuaciones referidas por (4) para expresarlas de la forma $F^j(\lambda, x, y; c) = 0$ (con j = 1, 2, 3), con derivadas parciales continuas, se debe verificar que el Jacobiano de las variables endógenas (dónde $f_{xy} = f_{yx}$ y $g_{xy} = g_{yx}$)

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{dF^1}{d\lambda} & \frac{dF^1}{dx} & \frac{dF^1}{dy} \\ \frac{dF^2}{d\lambda} & \frac{dF^2}{dx} & \frac{dF^2}{dy} \\ \frac{dF^3}{d\lambda} & \frac{dF^3}{dx} & \frac{dF^3}{dy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -g_x & -g_y \\ -g_x & f_{xx} - \lambda g_{xx} & f_{xy} - \lambda g_{xy} \\ -g_y & f_{yx} - \lambda g_{xy} & f_{yy} - \lambda g_{yy} \end{vmatrix} \ldots(5)$$

no se anula en el óptimo. Este Jacobiano es equivalente a la condición de suficiencia, y si cumple dicha condición entonces el Jacobiano será distinto de cero en el óptimo. Supóngase que $|J| \neq 0$, y sea que c se puede expresar como la variable independiente de las variables "x", "y", y λ, o sea,

$$\hat{\lambda} = \lambda(c),\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(c),\ \text{e}\ \mathbf{y} = \mathbf{y}(c) \ldots(6)$$

contando con derivadas continuas. Considere que a la vez se tiene el siguiente conjunto de restricciones

$$\left.\begin{array}{l} c - g(x, y) = 0 \\ f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = 0 \end{array}\right\} \ldots(7).$$

El óptimo de la función Lagrangeana F depende de λ, x y y, por lo que dado

$$F = f(x, y) + \bar{\lambda}[c - g_x(x, y)] \ldots(8)$$

se puede, tratar a F como función exclusiva de c. Si se calcula la diferencial de F respecto a c, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dc} &= f_x \frac{dx}{dc} + f_y \frac{dy}{dc} + [c - g_x(x, y)] \frac{d\lambda}{dc}\,] + \lambda\left(1 - g_x \frac{dx}{dc} - g_y \frac{dy}{dc}\right) \\ &= (f_x - \lambda g_x(x, y)) \frac{dx}{dc} + (f_x - \lambda g_x(x, y)) \frac{dy}{dc} + \\ &\qquad + [c - g_x(x, y)] \frac{d\lambda}{dc}\,] + \lambda \end{aligned}$$

donde f_x, f_y, g_x, g_y, son calculadas en el óptimo. Pero al revisar el conjunto de restricciones de (7) se sabe que sólo deja de anularse el último sumando de la expresión anterior, es decir el multiplicador λ, llegando a

$$\frac{dF}{dc} = \lambda \ldots(9)$$

que muestra que el valor solución del multiplicador de Lagrange representa una medida del efecto de una variación del parámetro c de la restricción g (x) sobre el valor óptimo de la función objetivo.

El valor en el óptimo del multiplicador de Lagrange asociado a la k-ésima restricción es igual al valor, en el óptimo, de la derivada parcial de la función respecto al segundo miembro de dicha restricción, o sea es igual a la modificación que experimenta el valor de la función cuando se mueve ligeramente el segundo miembro de la restricción correspondiente.

En términos generales existen muchas interpretaciones económicas de lo que representa el multiplicador de Lagrange, cada una de las cuales tiene una traducción económica según sea la función a optimizar y las restricciones. Si la función a tratar es una de utilidad restringida a una ecuación de balance, entonces el multiplicador se interpreta como la utilidad marginal por unidad monetaria; si se trata de optimizar el costo del plan de producción de una empresa, representará como el costo marginal de producción del producto. Si el costo de producción se expresa en forma de mínimo del tiempo del trabajo directo, el multiplicador correspondiente a una restricción que exprese la disponibilidad de un cierto tipo de tierra, se interpretará como la reducción en el tiempo de trabajo directo, provocada por la disponibilidad de una unidad adicional de dicha tierra. En conclusión, los multiplicadores en términos generales reciben la denominación de precios de *cálculo*, por permitir determinar las consecuencias de una modificación marginal de una restricción, y por consiguiente evaluar el interés de la operación consistente en destinar recursos a desplazar efectivamente las restricciones.

2.2.5 Generalización de la técnica de Lagrange.

La técnica de los multiplicadores de Lagrange tiene la facultad de poderse extender al caso de m variables con n restricciones. Sea la función objetivo la siguiente

$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$
sujeta a n restricciones,
$g^i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = c^i$ con $i = i, \ldots, n$. Nótese que en vez de usar subíndices en el conjunto de restricciones se emplearon superíndices, ello para evitar confusiones con la respectiva notación de las derivadas parciales. La función Lagrangeana estará conformada por

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) + \lambda_1 [c^1 - g^1(x_1, x_2, \ldots, x_m)] + \ldots$$
$$\ldots + \lambda_n [c^n - g^n(x_1, x_2, \ldots, x_m)]$$

por lo que la condición necesaria implicará el cumplir con las (m + n) siguientes ecuaciones simultáneas:

$$Z_{\lambda_1} = c^1 - g^1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$$
$$Z_{\lambda_2} = c^2 - g^2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Z_{\lambda_n} = c^n - g^n(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$$

$$Z_1 = f_1 - \lambda_1 g_1^1 - \lambda_2 g_1^2 - \ldots - \lambda_n g_1^n = 0$$
$$Z_2 = f_2 - \lambda_1 g_2^1 - \lambda_2 g_2^2 - \ldots - \lambda_n g_2^n = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Z_m = f_m - \lambda_1 g_m^1 - \lambda_2 g_m^2 - \ldots - \lambda_n g_m^n = 0$$

La primeras n de estas ecuaciones aseguran que se satisfacen las restricciones g_i. Este sistema permitirá encontrar los valores desconocidos tanto de las variables x_i con $i = 1, \ldots, m$, como para todos los valores desconocidos de los multiplicadores λ_i con $i = 1, \ldots, n$. Como se ha mostrado la técnica de Lagrange es también aplicable cuando hay n restricciones ($n \geq 1$, y $n \in Z^{++}$), teniendo como exigencia el relacionar tantos multiplicadores como restricciones se tenga en la función por optimizar.

Cuando se cuenta con una restricción única, y se establece la función Lagrangeana mediante la introducción de un multiplicador de Lagrange, es posible que se pueda emplear la misma condición de necesaria de problemas no restringidos. A partir de la función Lagrangeana F se deduce que a diferencia de que se altere x_i con i = 1,..., m, si $\overline{\lambda}$[3] se cambia por cualquier otro valor, no habrá modificación sobre F, pues al factor que multiplica es cero, es decir c - g (**x**) = 0. Con esto anterior, al optimizar la función Lagrangena F, λ difiere del resto de las i variables x_i, pues al obtener la condición necesaria, se debe ser precavido para no aplicar sin cautela las condición de suficiencia de problemas no restringidos en los modelos restringidos al caso de igualdad (es). En vez de volver a analizar dichas condiciones, es pertinente el deducir otras nuevas en función del cálculo de la diferencial total de segundo orden.

2.2.6 La diferencial total de segundo orden en la técnica de Lagrange.

Para optimizar z = f (**x**) sujeta a g (**x**) = c, con la función Lagrangeana Z, las condiciones necesaria y suficiente respectivamente están en función a la naturaleza algebraica de la diferencial total de segundo orden, dada por [4],

$$d^2 z = Z_{xx}\, d x^2 + Z_{xy}\, d x\, d y + Z_{yx}\, dy\, d x + Z_{yy}\, d y^2,$$

evaluada en el punto crítico. Se debe poner atención en saber si $d^2 z$ es definida o semidefinida para todo valor de dx y dy (con ambos no nulos), sobretodo para aquellos valores que satisfacen la restricción lineal $dz = f_x\, dx + f_y\, dy = 0$.

Dado lo anterior, las condiciones necesarias de segundo orden son:

Para un máximo de z: $d^2 z$ semidefinida negativa, sujeto a dg = 0

Para un mínimo de z: $d^2 z$ semidefinida positiva, sujeto a dg = 0

y las condiciones suficientes de segundo orden son:

Para un máximo de z: $d^2 z$ definida negativa, sujeto a dg = 0

Para un mínimo de z: $d^2 z$ definida positiva, sujeto a dg = 0.

La condición de suficiencia para un modelo restringido es más débil que la de un problema no restringido, pues mientras que las distintas condiciones necesarias deben ser difíciles a fin de servir de filtro, las condiciones suficientes deben ser débiles para ser útiles para la localización de puntos extremos restringidos.

2.2.7 Dualidad en la técnica de Lagrange.

En programación matemática el concepto de dualidad existe con naturalidad pues a cada "objeto matemático" se le puede asociar otro "objeto matemático", teniendo ambos entre sí determinados características similares. La relevancia de la dualidad radica en que en muchas ocasiones es más comprensible y fácil solucionar el Dual del modelo a tratar, que directamente intentar resolver el problema original; además de ello, la dualidad complementa y proporciona información sobre el problema inicial. Dentro de la extensa gama de todos los Duales en la programación matemática, el Dual del Lagrangeano es el

---

[3] Vector n-dimensional formado por los i multiplicadores, con i = 1, ..., n.

[4] Se obtiene derivando por segunda vez d z, y después sustituyendo algunas relaciones ya vistas en la sección 2.2.2.

que causa más interés [5], posiblemente por su relevancia tanto teórica como práctica, en relación con las diversas interpretaciones económicas de los multiplicadores de Lagrange involucradas con la dualidad del modelo original. Por otra parte, el Dual del Lagrangeano se puede considerar como un problema "maximin", debido a que trata de maximizar el infimo [6] de una función, por lo que alternativamente se le llama como el problema *Dual máx-min*.

Por medio de la aplicación de la teoria de dualidad no se intenta resolver de modo directo un problema restringido dado, sino que busca solucionar un problema alternativo asociado, es decir el problema Dual (o simplemente el Dual) teniendo como incógnitas a los multiplicadores de Lagrange del modelo inicial, cuyas mediciones de sensibilidades tienen un significado e interpretación intuitiva de precios asociados con restricciones de recursos. Al localizar el valor de dichas variables la determinación del óptimo generalmente será sencilla e inmediata. Por citar un ejemplo: para un modelo de optimización restringido a igualdad (es) con n variables y m restricciones, el Dual se desenvolverá en un espacio m-dimensional de los multiplicadores de Lagrange.

En años recientes la dualidad se ha convertido en un pilar indispensable en el desarrollo y unificación de la teoria de la optimización. Por ello, se ha intensificado el proporcionar y estudiar tanto nuevas e importantes interpretaciones de los multiplicadores de Lagrange, así como también la evolución y surgimiento de nuevas técnicas para programación matemática aplicables en múltiples problemas. En un principio la teoria de optimización estaba fundamentalmente relacionada con las derivadas de las funciones en tratamiento, y se obtenían resultados locales (por ejemplo, para el caso de un intervalo cerrado (a, b)), dejando incertidumbre respecto a un carácter global o absoluto. Posteriormente, al establecerse hipótesis de convexidad se sentaron las bases matemáticas para el advenimiento de una teoria global de la optimización, que se preocupa de estudiar a las funciones en tratamiento y no a sus derivadas. Asimismo, esta teoria de dualidad al ser más general exige lo mínimamente necesario de hipótesis de convexidad para su aplicación, es decir requiere sólo la condición de tener convexidad de naturaleza local, que quizá sea lo más recomendable para el desenvolvimiento de importantes resultados en dicha área de las matemáticas.

Antes de entrar de lleno al análisis de la dualidad del Lagrangeano, se advierte que la notación que a continuación se empleará será en forma de forma de matrices, por necesidades de generalización de resultados. Ahora bien, sea el problema de la forma

minimizar $f(\mathbf{x})$

sujeta a

$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$,

donde $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in R^m$ y $f, \mathbf{h} \in C^2$.

---

[5] Siendo ampliamente estudiado y desarrollado por Dorn, Mangasarian, Stoër y Wolfe.

[6] Un número c se llama infimo de un conjunto S, si c es una cota inferior de S y ningún número mayor a c es cota inferior de S. Una cota inferior de S, es un número c tal que para todo $x \in S$, $x \geq c$.

Sea $\mathbf{x}^*$ un punto que satisface el conjunto de restricciones $\mathbf{h}$. Como se señaló anteriormente, a cada restricción h se le debe de asociar un multiplicador de Lagrange, con lo que habrá un vector renglón de multiplicadores de Lagrange λ^*, que al cumplir con la condición de primer orden se tendrá

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + (\lambda^*)^T \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

y el Hessiano del Lagrangeano o Hessiano de la función Lagrangeana, estará definido de acuerdo a

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) + (\lambda^*)^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

nótese que se trata de la suma de dos Hessianos, es decir de los de f y $\mathbf{h}$ respectivamente. El Hessiano del Lagrangeano debe ser positivo semidefinido sobre todos los puntos que cumplan con la condición de $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.

Sea el Hessiano $\mathbf{L}(\mathbf{x}^*)$ positivo definido, lo que de acuerdo con las implicaciones de convexidad respecto a naturaleza de las matrices Hessianas, da como resultado que la matriz Lagrangeana $\mathbf{L}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + (\lambda^*)^T \mathbf{h}(\mathbf{x}^*)$ sea convexa en $\mathbf{x}^*$. Con el supuesto anterior, el punto $\mathbf{x}^*$ además de ser una solución del problema restringido original, es una solución local del problema no restringido siguiente

$$\text{minimizar } f(\mathbf{x}) + (\lambda^*)^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) \ldots (\mathrm{I}),$$

que cumple con las condiciones necesarias y suficientes para mínimo local. Para un λ cercano a λ^* la función (I) tendrá un mínimo local en un punto $\mathbf{x}$ cercano a $\mathbf{x}^*$, lo que según el teorema de función implícita, arroja la expresión

$$\text{minimizar } f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) + \lambda^T \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}) \ldots (\mathrm{II}),$$

cuya solución $\mathbf{x}$ se encuentra cercana a $\mathbf{x}^*$ cuando λ esta próximo a λ^*, debido a que $\mathbf{L}^*$ es no singular [7], y dado además que en $\mathbf{x}$, el Hessiano $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) + (\lambda^*)^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^*) > 0$. Por lo tanto, existe una relación única entre λ y $\mathbf{x}$ en la solución del problema no restringido de

$$\text{minimizar } f(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) \ldots (\mathrm{III}),$$

asumiendo que la correspondencia es continuamente diferenciable.

Sea la función Dual ϕ de λ^* denotada por

$$\phi(\lambda) = \text{minimizar } [f(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{h}(\mathbf{x})],$$

lo que exige concluir con que: el resolver el problema original será equivalente a maximizar el problema no restringido Dual de ϕ con respecto a λ, mediante lo cual se

---

[7] Es decir que el valor de su determinante es distinto de cero.

establecerá una equivalencia entre un problema restringido en $\mathbf{x}$ y uno no restringido en λ. Para dar un soporte teórico matemático en este sentido, se deben considerar las siguientes proposiciones, en cuya demostración $\mathbf{x}(\lambda)$ representará la solución única en una bola en $\mathbf{x}^*$ del modelo (III).

Lema 1. La función Dual ϕ tiene gradiente, y está dado por la relación,
$\nabla\phi(\lambda) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(\lambda))^T$

Demostración.
Se tiene que

$$\phi(\lambda) = f(\mathbf{x}(\lambda)) + \lambda^T \mathbf{h}(\mathbf{x}(\lambda)),$$

al hallar el gradiente de la función ϕ, aplicando la regla de la cadena y la del producto, se llega a

$$\nabla\phi(\lambda) = [\ \nabla f(\mathbf{x}(\lambda)) + \lambda^T \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}(\lambda))\ ]\nabla \mathbf{x}(\lambda) + \mathbf{h}(\mathbf{x}(\lambda))^T,$$

pero el primer término de la derecha se anula por la definición de $\mathbf{x}(\lambda)$, obteniendo sólo el segundo sumando de la última expresión de tal modo se tiene lo que se quería demostrar.

El lema 1 deduce que el gradiente de la función Dual, se puede calcular fácilmente. Al obtener el Hessiano de la función Dual, éste se puede expresar en términos del Hessiano del Lagrangeano, de manera

$\mathbf{L}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{H}(\mathbf{x})$ que de manera implícita indican la dependencia con λ.

Lema 2. El Hessiano de la función Dual es
$\varphi(\lambda) = -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}(\lambda))\, \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{x}(\lambda), \lambda)\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}(\lambda))^T$

Demostración.
El Hessiano es la derivada del gradiente. Así, aplicando el resultado del Lema anterior
$\varphi(\lambda) = \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}(\lambda))\,\nabla \mathbf{x}(\lambda),$

demás por definición se tiene

$$\nabla f(\mathbf{x}(\lambda)) + \lambda^T \mathbf{h}(\mathbf{x}(\lambda)) = \mathbf{0}$$

que al diferenciarlo con respecto a λ, y usando la regla de la cadena se llega a

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}(\lambda), \lambda)\,\nabla \mathbf{x}(\lambda) + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}(\lambda))^T$$

de donde al despejar $\nabla \mathbf{x}(\lambda)$ se llega a

$$\nabla \mathbf{x}(\lambda) = -\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{x}(\lambda), \lambda) \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}(\lambda))^{T}$$

que al sustituirlo en $\varphi(\lambda) = \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}(\lambda)) \nabla \mathbf{x}(\lambda)$,

se obtiene que

$$\varphi(\lambda) = -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}(\lambda)) \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{x}(\lambda), \lambda) \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}(\lambda))^{T},$$

lo que completa la demostración.

$\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{x}(\lambda))$ es positiva definida, y $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}(\lambda))$ está cercana a $\mathbf{x}^*$, lo que concluye que el Hessiano de m x m de ϕ es negativo definido, que como se presuponía este Hessiano tiene alta relevancia en la teoría de dualidad.

A continuación se demostrará el teorema de la dualidad, que tiene como característica principal el hecho de facilitar en muchas situaciones la resolución de modelos, y simplificar enormemente los diversos cálculos que en los mismos se susciten.

Teorema de Dualidad. Suponga que el problema
minimizar $f(\mathbf{x})$
sujeta a
$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$
tiene una solución en $\mathbf{x}^*$ con correspondencia con el valor $\mathbf{r}^*$ y el multiplicador de Lagrange λ^*. Sea $\mathbf{x}^*$ un punto que satisface las restricciones y que el correspondiente Hessiano del Lagrangeano $\mathbf{L}^* = \mathbf{L}(\mathbf{x}^*)$ es positivo definido. Entonces el problema Dual, es
Maximizar $\phi(\lambda)$
el cual tiene una solución en λ^* con correspondencia con el valor $\mathbf{r}^*$, y $\mathbf{x}^*$ como punto correspondiente a λ^* en la definición de ϕ.

Demostración.
A cada $\mathbf{x}^*$ le corresponde un λ^* de acuerdo con la definición de ϕ: En el vector de los multiplicadores de Lagrange λ^* se tiene por Lema 1 que,

$$\nabla \phi(\lambda) = \mathbf{h}(\mathbf{x}^*)^{T}$$

y por el Lema 2 se deduce que el Hessiano de ϕ es negativo definido. Así λ^* satisface las condiciones de suficiencia para un máximo restricto de ϕ, y el valor de $\phi(\lambda^*)$ se encuentra de la definición de ϕ que viene a ser $\mathbf{r}^*$, lo que completa la demostración.

El hecho de encontrar la función Dual ϕ para una función f de R en R es relativamente sencillo, pues al satisfacer las condiciones necesarias para un punto crítico de una función f restringida a una igualdad, el problema se enfoca en determinar los valores de ambas variables en función del multiplicador de Lagrange. Considerese que hay dos ecuaciones que se obtienen al calcular las derivadas parciales de la función Lagrangeana respecto a las variables e igualarlas con cero. Al tomar una de las ecuaciones y despejar ambas variables en función del multiplicador de Lagrange y de la variable restante, se llega a dos expresiones que dependen de dos variables que a saber son: "x" y λ ó "y" y λ. De acuerdo con lo anterior, al sustituir cada una de las variables en la ecuación restante y haciendo reducciones algebraicas en la función Lagrangeana de ϕ, se obtiene el Dual de la función f en términos de λ. Es recomendable reducir tal función a una expresión pequeña, pues posteriormente se tendrá que maximizar. Para funciones de R^n en R y $n \in Z$, con $n > 1$, se puede generalizar el procedimiento anterior.

Con este teorema se concluye con la exposición de la técnica de Lagrange dentro de la economía matemática, la explicación de la técnica, así como también los principios de la dualidad; para que de tal suerte, al anexar lo analizado del capítulo inicial, se pueda proceder con las aplicaciones económicas en los modelos microeconómicos de: la maximización de un presupuesto y la minimización de un costo de producción, estando ambos modelos restringidos al caso de igualdad; y a la vez exponer la interpretación económica del Dual del Lagrangeano en un mercado competitivo, regido por el comportamiento de la Ley de la oferta y la demanda.

III. APLICACIONES ECONÓMICAS DE LA TÉCNICA DE LAGRANGE.

3.1 Maximización de la utilidad sujeta a una restricción presupuestaria.

En este modelo se analizará una función de utilidad sujeta a una restricción presupuestaria cualesquiera de igualdad. Sea un consumidor "x" que tiene exclusivamente como opción el elegir la mejor combinación de dos bienes, cuyos precios como están determinados por el mercado serán variables exógenas. Supóngase que la restricción presupuestaria del consumidor corresponde a la cantidad C, y sea la función de utilidad,

$F = F\ (x, y)$ con

$$\frac{\delta F}{\delta x} = F_x > 0, \text{ y }, \frac{\delta F}{\delta y} = F_y > 0, \forall \text{ "x", "y"} > 0,$$

es decir, con funciones de utilidad marginal estrictamente positivas. El problema es hallar el óptimo de la función $F = F\ (x, y)$
sujeto a la restricción presupuestaria

$$xP_x + y P_y = C$$

en esta igualdad se supone que todo el presupuesto del consumidor se destina únicamente a los bienes "x", y "y", sin tener la posibilidad de ahorro alguno. En realidad esto pocas veces se cumple pues en general un consumidor destina sus ingresos a n articulos para lograr su máxima satisfacción. Las P_x, y P_y representan los precios de los bienes "x" y "y" respectivamente.

Antes de continuar, es importante saber el comportamiento de este problema en forma geométrica, y para ello es preciso recordar la definición de curva de indiferencia vista en el capitulo anterior. Sobre una curva de indiferencia debe cumplirse que

$$d F = F_x\, d x + F_y\, d y = 0,$$

lo que implica que $\frac{d y}{d x} = - \frac{F_x}{F_y}$, y a su vez esto se deduce al trazar curvas de indiferencia en el eje coordenado de dos dimensiones, como en la figura 1. Reciprocamente, como $\frac{F_x}{F_y}$ es la pendiente de la curva de indiferencia cambiada de signo, representará la *tasa marginal de sustitución* entre los dos bienes. Al ser las curvas de indiferencia cóncavas hacia arriba, se exige que se satisfaga $\frac{d^2 y}{d x^2} > 0$ en todo el dominio de la curva, que en terminología económica representa que la *tasa marginal de sustitución* es *decreciente*.

Curvas de Indiferencia

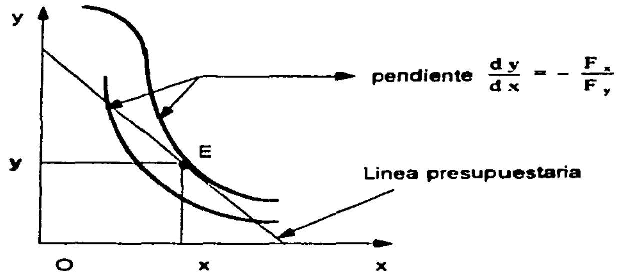


Figura 1

Ahora bien, sabiendo que la función Lagrangeana es

$$W = F(x, y) + \lambda\,(C - x P_x + y P_y),$$

al derivar parcialmente e igualar con cero, es decir al cumplir la condición necesaria, se llega al sistema,

$$\left.\begin{aligned} W_\lambda &= C - x P_x - y P_y \\ W_x &= F_x - \lambda P_x = 0 \\ W_y &= F_y - \lambda P_y = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (1).$$

En términos económicos esta condición, garantiza que la ecuación inicial del sistema (1) cumpla con la restricción presupuestaria del consumidor. Al despejar el multiplicador λ de las dos últimas ecuaciones, se llega a

$$\frac{F_x}{P_x} = \frac{F_y}{P_y} = \lambda \ldots (2),$$

esta condición coincide con la Teoría Clásica del Consumidor, en la que éstos deben distribuir sus ingresos de modo que la tasa de la utilidad marginal sea igual al precio de cada bien (o sea ambas serán igual a λ), que como se sabe mide el efecto estático-comparativo de la constante de la restricción en el valor óptimo de la función objetivo, es decir,

$$\lambda = \frac{\delta F}{\delta C},$$

que se interpreta como la *utilidad marginal del dinero* cuando la utilidad se optimiza.

Geométricamente en base a la figura 1, el óptimo debe localizarse donde tanto la pendiente de la curva de indiferencia como la pendiente de la recta de presupuesto sean iguales. Por lo cual, al encontrar la solución del sistema (1), se hallará fácilmente el punto de tangencia *E* de la figura mencionada.

Al evaluar la condición de segundo orden, se debe conocer la naturaleza numérica cualitativa del Hessiano orlado, es decir, deducir que signo le corresponde al determinante siguiente,

$$|H| = \begin{vmatrix} 0 & P_x & P_y \\ P_x & F_{xx} & F_{xx} \\ P_y & F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} = 2P_xP_y F_{xx} - P_y^2 F_{xx} - P_x^2 F_{yy} > 0 \ldots(4),$$

evaluado en los puntos criticos "x" y "y", después concluir dónde la función F tendrá un máximo si $|H| > 0$ o un mínimo si $|H| < 0$. Para cumplir esta condición es preciso establecer las restricciones de continuidad y diferenciabilidad a la función de utilidad respecto a las derivadas de segundo orden F_{xx}, F_{xy} y F_{yy}.

Debido a que F_x y F_y son funciones de "x" y / o de "y", se tiene que

$$\left.\begin{aligned} \frac{dF_x}{dx} &= F_{xx} + F_{yx}\frac{dy}{dx} \\ \frac{dF_y}{dx} &= F_{xy} + F_{yy}\frac{dy}{dx} \end{aligned}\right\} \ldots(6).$$

Puesto que $\frac{dy}{dx} = -\frac{P_x}{P_y}$. Así se puede reescribir (6) de la forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{d F_x}{d x} &= F_{xx} - F_{yx} \frac{P_x}{P_y} \\ \frac{d F_y}{d x} &= F_{xy} - F_{yy} \frac{P_x}{P_y} \end{aligned}\right\} \ldots(7).$$

Sustituyendo (7) en (5), teniendo en cuenta que

$F_x = F_y \frac{P_x}{P_y}$ de (3),

sacando como factor común $\frac{F_y}{P_y^2}$, (5) se convierte en

$$\frac{d^2 x}{d y^2} = \frac{2 P_x P_y F_{xy} - P_y^2 F_{xx} - P_x^2 F_{yy}}{F_y P_y^2} = \frac{|H|}{F_y P_y^2} \ldots(8)$$

Cuando se cumple la condición de suficiencia (4), la derivada en la ecuación con número (8) es positiva. Posteriormente de evaluar el Hessiano en los puntos críticos y ver que es positivo, el punto *E* de la figura 1, representará un máximo localizado donde la igualdad $-\frac{d y}{d x} = \frac{F_x}{F_y}$ se obtenga. Esto conduce a que para maximizar la satisfacción de consumo de un individuo, sujeto a cierto presupuesto, se deben distribuir sus ingresos de modo que la *tasa marginal de sustitución* entre los dos bienes sea igual a la razón de sus respectivos precios.

Dentro del análisis estático-comparativo del modelo, se consideran como variables exógenas los precios P_x y P_y, y la cantidad presupuestaria, pues como puede apreciarse todos ellas dependen de fuerzas externas al problema mismo. Al satisfacerse la condición necesaria y suficiente, es viable el analizar las propiedades estático-comparativas del modelo en función de la condición de la primera derivada (1), bajo los supuestos de continuidad y diferenciabilidad. El Jacobiano de las variables endógenas de (1), será idéntico al Hessiano, o sea $|J| = |H|$. Así, al verificarse (8), se implicará que $|J| > 0$ en el óptimo, con lo que es aplicable el teorema de la función implícita, expresando los valores críticos de las variables endógenas como funciones implícitas de las variables exógenas (las variables del modelo que a continuación se emplean cuentan con una testa, para asi distinguirlas de las variables utilizadas inicialmente),

$$\left.\begin{aligned} \overline{\lambda} &= \overline{\lambda}\ (P_x, P_y, C) \\ \overline{x} &= \overline{x}\ (P_x, P_y, C) \\ \overline{y} &= \overline{y}\ (P_x, P_y, C) \end{aligned}\right\} \ldots(9).$$

Se podría concluir a partir de las derivadas de las dos últimas funciones del sistema anterior, el posible comportamiento del consumidor en caso de ocurrir una variación tanto en precios como en su presupuesto. Al transformar la condición del criterio de la primera derivada (1), se obtiene

$$\left.\begin{array}{l} C - \bar{x}\,P_y = 0 \\ F_x - \bar{\lambda}\,P_x = 0 \\ F_y - \bar{\lambda}\,P_y = 0 \end{array}\right\} \ldots(\,10\,).$$

Al calcular la diferencial total de cada identidad, se llega a [1]

$$\left.\begin{array}{l} -P_x\, d\bar{x} - P_y\, d\bar{y} = \bar{x}\, dP_x + \bar{y}\, dP_x - dC \\ -P_x\, d\bar{l} + F_{xx}\, d\bar{x} + F_{xy}\, d\bar{y} = \bar{\lambda}\, dP_x \\ -P_y\, d\bar{l} + F_{yx}\, d\bar{x} + F_{yy}\, d\bar{y} = \bar{\lambda}\, dP_y \end{array}\right\} \ldots(\,11\,).$$

Para deducir la afectación de una alteración en el presupuesto del consumidor, suponga que los precios da ambos bienes se mantienen fijos, y que existe necesariamente una modificación en los ingresos económicos del individuo, que respectivamente se representan con $dP_x = dP_y = 0$, y $dC \neq 0$. Después de realizar el producto de (11) por el inverso multiplicativo de dC, se puede escribir la ecuación de matrices como

$$\begin{bmatrix} 0 & -P_x & -P_y \\ -P_x & F_{xx} & F_{xy} \\ -P_y & F_{yx} & F_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\delta\bar{\lambda}}{\delta C} \\ \dfrac{\delta\bar{x}}{\delta C} \\ \dfrac{\delta\bar{y}}{\delta C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al resolver este sistema para las tres derivadas estático-comparativas, y poniendo atención sólo en las dos siguientes, pues son las que implican tasas de cambio en la cantidad de consumo de cada bien respecto al presupuesto B,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\delta\bar{x}}{\delta C} = \dfrac{1}{|J|}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -P_y \\ -P_x & 0 & F_{xy} \\ -P_y & 0 & F_{yy} \end{bmatrix} = \dfrac{1}{|J|}\begin{bmatrix} -P_x & F_{xy} \\ -P_y & F_{yy} \end{bmatrix} \\[2em] \dfrac{\delta\bar{y}}{\delta C} = \dfrac{1}{|J|}\begin{bmatrix} 0 & -P_x & -1 \\ -P_x & F_{xx} & 0 \\ -P_y & F_{yx} & 0 \end{bmatrix} = -\dfrac{1}{|J|}\begin{bmatrix} -P_x & F_{xx} \\ -P_y & F_{yx} \end{bmatrix} \end{array}\right\} \ldots(\,12\,)$$

[1] Considerando que las parciales mixtas son iguales, por los supuestos de continuidad y diferenciabilidad.

donde según la condición de segundo orden, $|J| = |H|$ es positivo, al igual que P_x y P_y. Sin embargo, no se pueden definir los signos de estas derivadas, pues no existe suficiente información en términos cualitativos de P_x, P_y y F_{ij}, es decir se debería tener un caso muy particular en estudio, pues no se puede englobar en la generalidad los comportamientos de demanda que tenga cada consumidor; pero en cambio se puede decir que a medida que el presupuesto del consumidor crece o decrece, su nivel de compras óptimo puede ser directamente proporcional a ese cambio, todo quedando en función de sus preferencias, cultura, ambiente social, etcétera.

Ahora se analizará el efecto de un cambio en el precio P_x del bien respectivo, teniendo $dP_x \neq 0$, a la vez sin existir alteraciones tanto en el precio del otro bien como en el presupuesto C, esto respectivamente denotado con $dP_y = dC = 0$. Dividiendo (11) por dP_x, se llega a

$$\begin{bmatrix} 0 & -P_x & -P_y \\ -P_x & F_{xx} & F_{xy} \\ -P_y & F_{yx} & F_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\delta \bar{\lambda}}{\delta P_x} \\ \dfrac{\delta \bar{x}}{\delta P_x} \\ \dfrac{\delta \bar{y}}{\delta P_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\lambda} \\ 0 \end{bmatrix} \ldots(13).$$

Aquí surgen las siguientes derivadas estático-comparativas:

$$\frac{\delta \bar{x}}{\delta P_x} = \frac{1}{|J|}\begin{bmatrix} 0 & \bar{x} & -P_y \\ -P_x & \bar{\lambda} & F_{xy} \\ -P_y & 0 & F_{yy} \end{bmatrix} \ldots(14)$$

$$= -\frac{\bar{x}}{|J|}\begin{bmatrix} -P_x & F_{xy} \\ -P_y & F_{yy} \end{bmatrix} + \frac{\bar{\lambda}}{|J|}\begin{bmatrix} 0 & -P_y \\ -P_y & F_{yy} \end{bmatrix}$$

$$= A + B'' \ldots(14\ a)$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta P_x} = \frac{1}{|J|}\begin{bmatrix} 0 & -P_x & \bar{x} \\ -P_x & F_{xx} & \bar{\lambda} \\ -P_y & F_{yx} & 0 \end{bmatrix} \ldots(15)$$

$$= \frac{\bar{x}}{|J|}\begin{bmatrix} -P_x & F_{xx} \\ -P_y & F_{yx} \end{bmatrix} - \frac{\bar{\lambda}}{|J|}\begin{bmatrix} 0 & -P_y \\ -P_y & F_{yx} \end{bmatrix}$$

$= D + F ...(15\ a)$.

La derivada $\frac{d\,\bar{x}}{d\,P_x}$ representa cómo un cambio en P_x afecta en el nivel óptimo de compras del bien "x". El primer sumando de (14 a) mide un cambio en el presupuesto sobre el nivel óptimo de compra del bien "x". Cuando el precio P_x aumente, y descienda la renta del consumidor se producirá un efecto sobre la cantidad de consumo de "x", similar a la de la disminución del presupuesto. En otras palabras, entre más aumenten los precios de los artículos y disminuyan los ingresos de los consumidores, la adquisición de esos bienes decrecerá en la medida en que decrezcan las percepciones económicas del individuo.

Al compensar al consumidor por su pérdida en ingresos, mediante una cantidad igual d C, entonces $\frac{d\,\bar{x}}{d\,P_x}$, o sea B", medirá la variación de la cantidad del bien "x" en relación al cambio dado por el precio, de un bien por otro. La primera ecuación del sistema (11) puede escribirse como $-P_x\,dx - P_y\,dy = x\,dP_x$, pues lo que indica la pérdida de ingresos es $x\,dP_x$. Esta derivada se debe igualar a cero debido a que esto significa el compensar al consumidor. De tal suerte, el vector constante de (13) debe cambiarse de $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\lambda} \\ 0 \end{bmatrix}$ a $\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\lambda} \\ 0 \end{bmatrix}$, y la renta-compensada de la derivada $\frac{d\,\bar{x}}{d\,P_x}$ será

$$\frac{\delta\,\bar{x}}{\delta\,P_x} = \frac{1}{|J|}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -P_y \\ -P_x & \bar{\lambda} & F_{xy} \\ -P_y & 0 & F_{yy} \end{bmatrix} = \frac{\bar{\lambda}}{|J|}\begin{bmatrix} 0 & -P_y \\ -P_y & F_{yx} \end{bmatrix}$$

De ahí se puede expresar (14 a) de la forma

$$\frac{d\,\bar{x}}{d\,P_x} = \frac{d\,\bar{x}}{d\,C}\bar{x} + \frac{d\,\bar{x}}{d\,P_x}.$$

Ahora se valoraran aspectos cualitativos de los efectos hasta aqui vistos. En primer lugar, el efecto sustitución B" es negativo, debido a que $|J| > 0$ y $\bar{\lambda} > 0$. En segundo lugar, el efecto renta A tiene signo indeterminado de acuerdo con (12), existiendo así las opciones de que: si es menor que cero reforzaría B" [2]; y si fuera positiva, pero pequeña en magnitud, no repercutiría el efecto sustitución, teniendo como resultado

[2] En ese caso, un incremento de P_x disminuiría las compras del bien "x" y la curva de demanda del consumidor que maximiza la utilidad tendría pendiente negativa

una curva de demanda con pendiente negativa. Si A es positivo y domina a B" [3], entonces un aumento en P_x conducirá a una compra mayor de "x".

La ecuación (15 a) se relaciona con el *efecto cruzado* de un cambio en el precio de "x" sobre la compra óptima de "y". El término F tiene un gran parecido con el término A y se puede ver como un efecto renta, mientras que el término D es otra medida del efecto de sustitución. El bien "x" es el factor de ponderación, pues se analiza el efecto en el presupuesto del consumidor en un cambio en P_x, cuya magnitud depende de lo significativo que resulte el bien "x", no tanto del respectivo bien "y".

De acuerdo con el presente modelo y resumiendo, el consumidor hipotético tiene la facultad de elegir solo entre dos bienes que pueden sustituirse mutuamente, que en realidad dicho supuesto es limitado en tanto que sus posibles elecciones oscilan entre [4] grandes cantidades de bienes. Por otra parte, aunque el análisis anterior se refiere a los efectos de un cambio en P_x, se puede volver a expresar análogamente para al caso de un cambio en P_y.

3.2 Minimización del costo sujeto a una restricción de producción.

Como otra aplicación de la técnica de Lagrange en la optimización restringida, se analizará el problema en que un productor se encuentra frente a la tarea de satisfacer determinado nivel de producción (por ejemplo un volumen específico de mercancías para una fecha determinada), o dicho de otro modo, de que manera una empresa se puede combinar sus insumos para mantener un producto o demanda a futuro a un costo mínimo de producción.

Sea la función de producción G = G (a, b) diferenciable, con ambos insumos "a" y "b" con funciones de insumo marginal positivas, con $\frac{\delta G}{\delta a} = G_a > 0$, y $\frac{\delta G}{\delta b} = G_b > 0$. Además supóngase que los precios de los dos insumos son exógenos, es decir están en función de factores externos al modelo. Considere la función de costo del productor

$$T = aP_a + bP_b,$$

en la que P_a y P_b son los precios positivos de "a" y "b" respectivamente.

Ante el propósito de minimizar costos se debe cuestionar qué niveles o combinación de los insumos "a" y "b" se deben ocupar dentro del proceso productivo. Para dar respuesta a ésta interrogante, se procede a utilizar la técnica de Lagrange, donde el planteamiento de la función Lagrangeana a optimizar es,

$$Y = aP_a + bP_b + \lambda\ [\ G_0 - G\ (\ a, b\ )].$$

---

[3] Si el bien "x" es un articulo resulta de mayor satisfacción dentro del presupuesto del consumidor.

[4]

Para ver geométricamente este problema, se auxiliara de la figura 2. La curva de G_0 tiene forma convexa respecto al origen, y a la vez es el lugar geométrico que muestran un conjunto de todas las combinaciones de los insumos "a" y "b" que comparten un nivel constante de producción, o sea se trata de una curva de *isocuanta* [5]. La pendiente de una isocuanta es negativa, puesto que si se deriva G, tenemos

$$d\,G = \frac{\delta G}{\delta a}\,d\,a + \frac{\delta G}{\delta b}\,d\,b = 0,$$

que implica que $m = \dfrac{d\,a}{d\,b} = -\dfrac{\frac{\delta G}{\delta b}}{\frac{\delta G}{\delta a}}$, la cual es negativa. En términos económicos esta expresión negativa se llama *tasa marginal de sustitución técnica*, cuya definición ya fue ilustrada en el capitulo anterior.

La función de costo por minimizar también se puede graficar, al reescribirla como,

$$a = \frac{T_0}{P_x} - \frac{P_y}{P_x} b,$$

como se muestra en la figura 2. Esta recta representa las combinaciones de insumos que proporcionan un costo constante, que como ya se señalo anteriormente recibe el nombre de curva de *isocosto*. Ahora se puede estar consiente de que el problema del productor es escoger esta combinación de insumos, que a la vez se encuentre colocada con el isocosto más bajo. Por lo tanto, la combinación óptima de insumos está en el punto de la isocuanta G donde la tasa marginal de sustitución técnica entre los dos insumos es igual a la razón de los precios de los insumos.

Para satisfacer la condición de primer orden para un mínimo costo T, se debe solucionar el sistema,

$$Y_\lambda = G_0 - G(a, b) = 0$$
$$Y_a = P_a - \lambda G_0 = 0$$
$$Y_b = P_b - \lambda G_0 = 0.$$

que al resolverlo se llegará (en caso de que exista) a la localización del óptimo de la función. La primer ecuación del sistema garantiza que se satisfaga la restricción de las cantidades de los insumos disponibles dentro del proceso productivo, que a su vez obliga a que el punto óptimo se halle sobre la isocuanta G_0.

[5] Para la generación de más curvas de isocuantas basta tomar niveles de producción constantes distintos de Q_0.

En relación con la figura 2, y a las dos últimas igualdades, el punto mínimo del modelo se localizará donde la pendiente de la isocuanta sea igual a la respectiva de la línea presupuestaria, que implican que,

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{G_a}{G_b} = \lambda \ldots(16),$$

Puesto que esta relación mide la magnitud del gasto por unidad de producto marginal del insumo en cuestión, al multiplicador de Lagrange puede dársele la interpretación del costo marginal de producción del óptimo. La ecuación (16) puede escribirse como,

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{G_a}{G_b} \ldots(16^*).$$

La relación $\frac{G_a}{G_b}$ es una medida de la *tasa marginal de sustitución técnica de la cantidad del insumo "a" respecto al insumo "b"*, mientras que la relación de $\frac{P_a}{P_b}$ representa la pendiente de la curva de isocosto cambiada de signo. Al tener la relación $\frac{G_a}{G_b} = \frac{P_a}{P_b}$ exige que tanto la pendiente de la isocuanta como la respectiva del isocosto tengan una intersección en un punto de tangencia *E*, que conducirá a la combinación óptima de los niveles de los insumos ($\bar{a}, \bar{b}$).

Para verificar que se trate de un costo realmente mínimo, basta con cumplir con la condición de suficiencia por medio del Hessiano

$$|H| = \begin{bmatrix} 0 & G_a & G_b \\ G_a & -\lambda G_{aa} & -\lambda G_{ab} \\ G_b & -\lambda G_{ba} & -\lambda G_{bb} \end{bmatrix}$$

$$= \lambda\left(G_{aa} G_b^2 - 2 G_{ab} G_a G_b + G_{bb} G_a^2 \right) < 0$$

como el óptimo $\lambda > 0$, se tiene que ver que el signo de la expresión entre paréntesis sea negativa evaluada en *E*.

La concavidad de la gráfica de una función se remite a examinar la segunda derivada, por lo que en la curva de isocuanta se deduce que,

$$\frac{d^2 b}{d a^2} = -\frac{1}{G_b^3}\left(G_{aa} G_b^2 - 2G_{ab} G_a G_b + G_{bb} G_a^2 \right)$$

que coincide con la expresión entre paréntesis del Hessiano para la condición de segundo orden. Dado $G_b > 0$, entonces se tiene que la segunda derivada $\frac{d^2 b}{d a^2} > 0$. Sin embargo, hay que tener en cuenta que la condición suficiente $|\mathbf{H}| < 0$ en el punto de tangencia no es necesaria para la minimización de T, pues se puede hallar el mínimo de la función de costo T aunque la isocuanta sea (no estrictamente) convexa, en una situación mínimo múltiple con la derivada de segundo orden $\frac{d^2 b}{d a^2} = 0$ y con $|\mathbf{H}| < 0$ en cada mínimo.

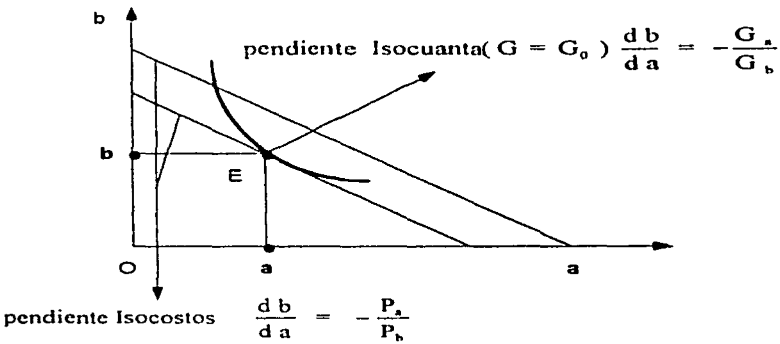


Figura 2

En la estática-comparativa del modelo, supóngase que los precios de los insumos permanecen constantes, y que hay incrementos continuos de los niveles de producción G_0. Un efecto sobre la combinación del costo mínimo implicaría que cada desplazamiento de la isocuanta determinará un nuevo punto de tangencia, con su correspondiente isocosto superior. La representación geométrica de tales puntos de tangencia es llamada *senda de expansión* de la empresa, y sirve para describir las combinaciones de costo mínimo requeridas para producir los distintos niveles de producto G_0.

Sean las curvas de isocuantas convexas, la senda de expansión se encontrará de la condición de primer orden (16*), que se ilustrará para la función de producción Cobb-Douglas $Q = Aa^{\alpha}b^{\beta}$ (citada ya anteriormente en el capítulo anterior). La condición cuyo número corresponde a (16 *) obliga a la igualdad entre la relación precio del insumo y producto marginal, que conduce a que cada punto de la senda de expansión debe satisfacer,

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{G_a}{G_b} = \frac{A\alpha\, a^{\alpha-1}\, b^{\beta}}{A\, a^{\alpha}\, \beta\, b^{\beta-1}} = \frac{\alpha\, b}{\beta\, a}$$

por lo que la relación óptima del insumo es

$$\frac{\overline{b}}{\overline{a}} = \frac{\beta\, P_a}{\alpha\, P_b} = \text{constante}\ldots(17)$$

puesto que α, β y el precio de los insumos son constantes. Por tanto, la senda de expansión debe ser una recta que pase por el origen.

Por último y resumiendo, este modelo tiene el supuesto de que el productor cuenta con dos insumos en su proceso productivo, sin embargo en la realidad son más de dos insumos y el modelo para hallar el mínimo costo de producción se ve seriamente complicado, por lo que hay que hacer uso de otros métodos matemáticos más eficaces.

3.3 Una interpretación económica del problema Dual enfocado a la Ley de la oferta y la demanda.

La dualidad posee importantes implicaciones económicas, tanto las variables duales como el problema Dual son susceptibles de interpretaciones económicas. Las variables duales en el óptimo corresponden a los *precios de cálculo*, y también reciben la denominación de *precios sombra o precios ficticios*. Su concepción puede ser no inmediata, pues dependerá de la naturaleza de las restricciones y de la función objetivo especialmente cuando el segundo miembro es nulo; de aquí que comunmente, interpretar las variables duales exija formular un análisis primal-dual (primal se refiere al problema original) del modelo en estudio.

La interpretación del problema Dual [6] del Lagrangeano, se basa en un ejemplo práctico de una empresa como unidad económica en un mercado competitivo, con "m" insumos dentro de su proceso productivo, y con un vector $\mathbf{x} \in R^n$ que denota el nivel de producto con cada una de sus componentes x_j que a su vez representan la magnitud del producto del bien j, al concluirse el proceso de producción. Sea $\mathbf{b} \in R^m$ el vector de las disponibilidades o insumos que tiene la empresa para poder obtener cierto nivel de oferta;

[6] En caso de tener interés en profundizar en la Teoría de Dualidad, se recomienda revisar el libro número 15 de la bibliografía citada.

o sea la compañia cuenta con b_i unidades del bien i [7]. Además suponga que para poder satisfacer o alcanzar ese nivel de producción, se requieren $g'_i(\mathbf{x})$unidades del insumo i.

Sea $g(\mathbf{x})$ la diferencia entre las disponibilidades del recurso i y las unidades necesarias del mismo bien para satisfacer cierta producción, matemáticamente tenemos $g(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - g'_i(\mathbf{x})$. De esta sustracción tenemos tres casos que son que: $g_i(\mathbf{x}) = 0$, ó $g_i(\mathbf{x}) > 0$, ó $g_i(\mathbf{x}) < 0$. En el primer caso las disponibilidades del recurso i y sus respectivas unidades necesarias para satisfacer determinado nivel de producto son idénticas, por lo que no se tiene un excedente ni una falta de unidades de dicho bien para atender los compromisos de oferta. Cuando $g_i(\mathbf{x}) > 0$, se cuenta con un excedente del respectivo recurso i, y las disponibilidades superan a los requerimientos, o bien se puede afirmar que se sobrepasa lo mínimamente indispensable para enfrentar las obligaciones en el mercado. Si por el contrario $g_i(\mathbf{x}) < 0$, entonces no hay suficiente cantidad del recurso i para producir al nivel $\mathbf{x}$, y existe la necesidad de adquirir más unidades de ese bien en el mercado, por tanto la compañia no es capaz de atender sus pedidos con las existencias de los bienes con que cuenta, y de alguna u otra forma debe de encontrar el cómo disminuir tales carencias, pues contrariamente a ello perderá mercado y consecuentemente se debilitará si de manera iterativa permanece en dicha circunstancia.

Es evidente que cualquier productor [8] en un sistema económico capitalista trata de obtener el máximo beneficio. Por ello, mientras las empresas tengan una carencia de un bien i y lo demanden, cayendo en el caso $g_i(\mathbf{x}) < 0$, los productores seguirán elevando lo más que puedan los precios de estos productos. Sin embargo, si la meta de la empresa es el de maximizar sus percepciones económicas bajo un determinado nivel producción $\mathbf{x}$, y se representa la función de ingresos por $f(\mathbf{x})$, entonces se debe resolver el modelo de
maximizar $f(\mathbf{x})$
sujeto a
$g(\mathbf{x}) = 0$.

En términos generales de los precios de cualesquiera bienes en el mercado se rigen de acuerdo al principio de *escasez*, por ejemplo si un bien es abundante entonces su precio será relativamente bajo, y si en caso opuesto es escaso entonces tendrá un valor relativamente alto. Ahora sea que el recurso "i" se puede vender o comprar en el mercado al precio unitario u_i, con lo que el conjunto de todos los precios de todos los bienes se denota por el vector $\mathbf{u} \in R^n$. Por lo anterior, el precio de venta en el mercado de los excedentes del recurso i, se cotizan con un ingreso adicional de $u_i\, g_i(\mathbf{x}) > 0$; en caso contrario, con el fin de poder producir a un nivel específico $\mathbf{x}$, habria que pagar un costo de $u_i\, g_i(\mathbf{x})$, y el costo de producción seria el representado por la función Lagrangeana

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^T g(\mathbf{x}) \ldots (18).$$

---

[7] con $i = 1, 2, \ldots, m$.
[8] De los insumos que necesita la empresa para llevar a cabo su proceso productivo a un nivel específico.

La función anterior desde una perspectiva de un mercado competitivo, conduce a afirmar que éste paga $f(\mathbf{x})$ por la producción y un incremento adicional $u_i\, g_i(\mathbf{x})$ por cualquier excedente del recurso i. Por lo que se concluye (según este enfoque): existe una convergencia hacia una misma función Lagrangeana, que es precisamente la que corresponde a la referencia (18).

Existe un gran problema entre mercado y empresario, ya que el primero desea que el (18) sea lo más baja posible (es decir que la producción final tenga como caracteristica la de ser barata), mientras que el segundo quiere que sea lo más alta que se pueda (o sea cobrar lo máximo por su producción). En ese momento es cuando la Ley de la oferta y la demanda se manifiesta estableciendo los precios de los articulos de acuerdo con un equilibrio entre ambas partes. Sin embargo, para determinar los precios del producto en el mercado hay que controlar dos factores indispensables que son el nivel de producción $\mathbf{x}$ y el nivel de precios $\mathbf{u}$. Por un lado la empresa controla exclusivamente el primer factor, y por otro, el mercado controla sólo el segundo factor; por consiguiente ni el mercado tiene control sobre producción, ni empresa tiene control sobre los precios. Asi, bajo estas condiciones, en cuanto la empresa saque al mercado su producción $\mathbf{x}^*$, éste último buscará un nivel de precios $\mathbf{u}$, tal que se cumpla la igualdad

$$L(\mathbf{x}^*) = \min_{u \geq 0} L(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}) \ldots (19).$$

En caso opuesto, la empresa buscará un nivel de producción $\mathbf{x}^*$ tal que maximice sus beneficios sujeta a un nivel de precios unitarios $\mathbf{u}^*$ comprometido por el mercado para los recursos necesarios en el proceso productivo, es decir intentará que

$$L(\mathbf{u}^*) = \max_{x \in X} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*) \ldots (20).$$

Dadas las dos tendencias anteriores, el mercado alcanzará un punto de equilibrio en caso de que halla un punto óptimo ($\mathbf{x}^*$, $\mathbf{u}^*$) tal que

$$L(\mathbf{u}^*) = L(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = L(\mathbf{x}^*) \ldots (21)$$

En resumen, si cada integrante del mercado competitivo piensa en satisfacer sus intereses estando restringido a lo que la demanda proponga, y se ajusta a las politicas del resto de la competencia, entonces el sistema tenderá a un nivel óptimo en forma bilateral en función de "productos-precios", o sea habrá un punto de equilibrio ($\mathbf{x}^*$, $\mathbf{u}^*$) tal que se establezca la triple relación (21). Con esta interpretación del Dual del Lagrangeano se finalizan las aplicaciones e interpretaciones de la técnica de Lagrange, que es parte de la teoría recibida de los cursos de Cálculo Diferencial e Integral III de la carrera de Actuaria.

3.4 Comentarios sobre otros modelos económicos de optimización restringida.

Existen otras técnicas de optimización restringida más complejas empleadas para el planteamiento y solución de modelos de índole tanto macroeconómica como microeconómica, que van más allá de utilizar las herramientas de la programación clásica. Ciertamente la técnica de Lagrange resulta insuficiente en muchos casos, pero sin embargo es el precedente teórico matemático más elemental con que se cuenta, que al generalizarle y aplicársele, se convierte en un medio basto y flexible para situaciones difíciles de ilustrar.

Dentro del extenso conjunto de modelos de optimización, hay una gran diversidad de casos y situaciones que dependen de la economía en práctica, con características concordantes al contexto específico que se analice. Por esta razón no es congruente el intentar implementar un modelo cualesquiera perteneciente a una economía de *Primer mundo*, a una economía como la que vive nuestro país, o cualquier otra nación del *Tercer mundo* (dadas sus particularidades en cuanto a recursos, objetivos, etcétera). No obstante a ello, lo rescatable de estos modelos es el reconocer que sus procedimientos de optimización se derivan de generalizaciones de la técnica de Lagrange.

Debido a la gran diversidad de modelos económicos que se han generado a velocidades impresionantes en la última mitad del siglo XX, principalmente después de la Segunda Guerra Mundial y hasta nuestros días (sobretodo de 1980 a la fecha en: Universidades, Centros e Institutos de Investigaciones Económicas, Secretarías de Estado, etcétera), es imposible reseñar de manera física a los mismos, dado que no existe un parámetro comparativo universal que distinga a los más significativos del resto, pues esto es totalmente relativo. Asimismo es menester decir que todos esos modelos tienen una finalidad común, que es la de optimizar bajo determinadas restricciones considerando otras ramas de la investigación como lo son: la investigación de operaciones, la probabilidad y estadística, las finanzas, la mercadotecnia, las políticas, etcétera.

En la última parte de la bibliografía se citan tan sólo algunos artículos relacionados con modelos de optimización restringida, desarrollados en Estados Unidos por profesores e investigadores de diferentes Universidades y nacionalidades. Estos modelos emplean diversos conceptos macroeconómicos no explorados en este trabajo, por lo que pienso que no es pertinente ahondar en ellos, sino tan sólo hacer énfasis que en la actualidad la optimización restringida juega un papel preponderante en el *Crecimiento del Sistema Económico Mundial*, y que falta mucho por hacer al respecto. Con estos comentarios se concluye el presente trabajo, y en la parte contigua, se mencionan diversas ideas que considero notables de destacar concernientes a todo lo analizado en todos los capítulos expuestos.

CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS.

Las definiciones y teoremas de la programación clásica, presentados en el primer capitulo, fueron importantes pues sustentaron la aplicación de la técnica de Lagrange en la optimización restringida al caso de igualdad. También es significativo notar que el criterio de optimización para funciones no restringidas de R^n en R, será cada vez más difícil de aplicar conforme la función a tratar dependa de mayor número de variables, pues aunque tal técnica teóricamente se puede extender a n variables, se tienen grandes limitaciones como las de que x no debe tener restricciones en R^n, y la función tiene que ser diferenciable con derivadas parciales de segundo orden.

Afortunadamente para la solución de modelos de optimización restringida, existe todo un extenso conjunto de ramas y algoritmos de la programación matemática, como lo son: la programación convexa, los métodos basados en la aproximación lineal (el método de Griffith-Stewart, el método de Wolfe, método de direcciones factibles, la programación separable, etcétera), los métodos penales paramétricos y no paramétricos (dentro de los paramétricos están: el método de punto interior, el método de punto exterior, el método mixto que incluye al método del SUMT [9], y la técnica de Lagrange; en los métodos no paramétricos se encuentran: el método de centros de Huard, el método de Davidon-Box-Davies-Swann, el método de Weisman, el método de Zangwill, etcétera), la programación geométrica, y otros métodos basados en programas de computo.

La interpretación económica de los multiplicadores de Lagrange, como se discutió en el capitulo II, es tan diversa que no se puede resumir a un sólo caso pues depende del contexto que se este manejando, y como se menciono anteriormente, en muchas casos precisar el significado de los multiplicadores no es tan directo o fácil, por lo que se debe de tener mucha cautela cuando se intente dar alguna implicación al respecto.

El objetivo planteado de *aplicar la técnica de Lagrange en los modelos de: Maximización de la utilidad sujeta a una restricción presupuestaria, la Minimización del costo sujeto a una restricción de producción; y dar una interpretación económica del Dual enfocado a la Ley de la oferta y la demanda* fue alcanzado puesto que se ilustraron algunas aplicaciones de la técnica de Lagrange con un enfoque económico, además de discutir una interpretación del Dual del Lagrangeano en un mercado competitivo, y comentar que la optimización restringida en los ámbitos micro y macroeconómico es un tema de actualidad.

---

[9] Son las siglas en ingles de "Secuential Unconstrained Minimization Technique"

Asimismo, en los modelos y en la interpretación se tiene respectivamente lo siguiente:

a) Como se apreció en las aplicaciones de la técnica de Lagrange, en la restricción presupuestaria en el modelo de maximización de la utilidad del consumidor, se enuncia de la forma que el gasto total sea exactamente igual (y no menor o igual) a una suma específica. En otras palabras, la limitación de la aproximación por el cálculo niega al consumidor la opción de ahorrar parte de sus fondos disponibles, y es por ello que no se ha restringido explícitamente las variables de elección a ser no negativas, como dicta el sentido común en la economía.

b) En el modelo de la minimización del costo de producción, se supuso que el productor sólo cuenta con dos insumos en su proceso productivo con los cuales habría de encontrar una combinación que le minimizare sus costos, sin embargo en la realidad se emplean muchos más insumos para satisfacer ciertos pedidos, como por ejemplo lo son las materias primas, las horas disponibles de mano de obra, la maquinaria, los recursos monetarios, las instalaciones, las fuentes de energía, etcétera. Por lo anterior, se tendría que construir un modelo más complejo, y consecuentemente habría que emplear otros métodos matemáticos más fuertes que englobarán a más supuestos.

c) En la interpretación económica del Dual del Lagrangeano, se supuso un mercado competitivo en el que los precios están sujetos a la ley de la oferta y la demanda, sin embargo cuando llega a existir un capitalismo muy agresivo puede surgir el monopolio como una unidad económica donde las empresas más grandes absorberán a las más pequeñas o débiles, entonces la competencia perfecta se anulará dejando de permanecer un mercado competitivo, y los precios estarán sujetos a los intereses económicos de los particulares (o dueños de dichos organismos), con lo que evidentemente la interpretación mencionada se verá afectada.

Como ya se menciono el matemático francés Lagrange, sentó las bases teóricas-matemáticas que sustentaron un notable desarrollo en la optimización restringida, pues por medio de su técnica de los *multiplicadores de Lagrange* las matemáticas fueron capaces de solucionar diversos problemas que se presenten en la vida del ser humano, que van más allá de simple optimización no restringida, y además abriendo con ello un campo nuevo en dicha disciplina que ha marcado la pauta de nuevas técnicas y generalizaciones hasta nuestros dias.

En lo que atañe a algunas recomendaciones para cualquier modelo de programación restringido a igualdad(es), al utilizar la técnica de Lagrange, se tiene que al momento de derivar la función Lagrangeana y satisfacer las condiciones de primer orden, se llega a un sistema de ecuaciones cuya solución con frecuencia es el mayor obstáculo que se presenta [10], por lo que se sugiere el uso de la técnica de sustitución (que aunque es muy laboriosa es apropiada), familiarizarse más con algunos artificios matemáticos aplicables en estos modelos, consultar los métodos de programación no lineal como el del Jacobiano, y el de SUMT, o en caso extremo consultar otras técnicas más generales en textos de niveles más avanzados [11] .

Como opinión personal pienso que para que los estudiantes lleguen más capacitados a la vida profesional, y el proceso de enseñanza-aprendizaje funcione de manera óptima (en cuanto mostrar al alumnado las aplicaciones reales de la diversidad de conocimientos transmitidos a lo largo de la educación), es indispensable que este sea continuamente alimentado y retroalimentado por todas las partes integrantes que participen en él, a la vez que se motive a edades más tempranas el interés por aplicar lo enseñado-aprendido. Es decir, entre más preparados, capacitados, interesados y entusiasmados estén los alumnos y profesores, mejores serán los resultados en el proceso, haciendo referencia a preparación en todos los términos, pues es altamente significativo, en el desarrollo de toda licenciatura, el aprender a aplicar los conocimientos adquiridos en la propia.

[10] Puesto que generalmente se trata de sistema(s) de ecuaciones no lineales.
[11] Los textos avanzados citados en la bibliografía son los correspondientes a los números: 7 , 9, 11, 12, 13, 14 y 15.

BIBLIOGRAFÍA.

Textos:

1.- Apostol, T. (1973) *Calculus*. Vol. I. Ed. Reverté.
2.- Boyer, C. (1986) *Historia de la matemática*. Ed. Alianza.
3.- Caballero, E., González, A., Triguero, F. (1982) *Métodos matemáticos para la economía*. Ed. Alhambra Mexicana.
4.- Chiang, A. (1987) *Métodos fundamentales de economía matemática*. Ed. Mc Graw Hill.
5.- Costa, E. (1977) *Problemas de matemáticas para economistas*. Ed. Alianza.
6.- Demianov, F. (1974) *Introduction to minimax*. Ed. J. Wiley.
7.- Haaser, B., Sullivan, A., La Salle, P. (1970) *Análisis matemático*. Vol. I. Ed. Trillas.
8.- Haaser, B., Sullivan, A., La Salle, P. (1970) *Análisis matemático*. Vol. II. Ed. Trillas.
9 .- Huang, D. (1964) *Introducción al uso de la matemática en el análisis económico*. Ed. Siglo veintiuno.
10.- Intriligator, M. (1971) *Mathematical optimization and economic theory*. Ed. Prentice Hall.
11.- Lipman, B. (1976) *Calculus*. Ed. Holt, Rnehart and Winston.
12.- Loffe, A. (1979) *Theory of extremal problems*. Ed. North-Holland.
13.- Luenberger, D. (1989) *Programación lineal y no lineal*. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana.
14.- Márquez, J. (1987) *Fundamentos de teoría de optimización*. Ed. Limusa.
15.- Mendelson, E. (1962) *Análisis matemático*. Ed. Interamericano.
16.- Mital, K. V. (1984) *Métodos de optimización: en investigación de operaciones y análisis de sistemas*. Ed. Limusa.
17.- Phillips, D. (1976) *Operations research principles and practice*. Ed. John Wiley & Sons.
18.- Prawda, J. (1984) *Métodos y modelos de investigación de operaciones*. Vol. I. Ed. Limusa.
19.- Sewell, M. (1987) *Maximun and minimun principles: a unified approach, with applications*. Ed. Cambridge.
20.- Tikhomirov, V. (1986) *Fundamental principles of theory of extreme problems*. Ed. J. Wiley, Chichester.

Articulos:

1.- Dehejia, V. (1993) *Optimal endogenous growt in a two-sector model with learning-by-doing and spillovers*. Journal of Economics Integration, E. U. A.
2.- Feenstra, R. (1988) *Symmetric pass-through of tariffs and exchange rates under imperfect competition: an empirical test*. Journal of International, E. U. A.
3.- Gardner, G. (1989) *Tariffs, interest rates, and the trade balance in the world economy*. Journal of International Economics, E. U. A.
4.- Kay, N. M. (1980) *Optimal size of firm as problem in transaction costs and property rights*. Journal of Economics Studies, E. U. A.
5.- Kolli, U. (1980) *Production in heckscher-ohlin-samuelson model of international trade theory: a simple mathematical treatment*. Journal of Economics Studies, E. U. A.
6.- Merton, R (1992) *Labor supply flexibility and portafolio choice in a life cycle model*. Journal of Economics Dynamics and Control, E. U. A.
7.- Olson, L. (1992) *Irreversibility and behavior of aggregate stochastic growth models*. Journal of Economics Dynamics and Control, E. U. A.
8.- Pennacchi, G. (1987) *Optimal portafolio choice and the collapse of a fixed-exchange rate regime*. Journal of International Economics, E. U. A.
9.- Perold, A. (1992) *Theory of constant proportion portafolio insurance*. Journal of Economics Dynamics and Control, E. U. A.
10.- Pitchford, J. (1989) *Optimum borrowing and the current account when there are fluctuations in income*. Journal of International Economics, E. U. A.
11.- Rodrik, D. (1989) *Optimal trade taxes for a large country with non-atomistic firms*. Journal of International Economics, E. U. A.
12.- Sayta, P. (1986) *Optimal taxation of foreing capital when its movements are sluggish*. Journal of International Economics, E. U. A.
13.- Turnovsky, S. (1986) *Optimal tariffs in consistent conjectural variations equilibrium*. Journal of International Economics, E. U. A.
14.- Wang, L. (1980) *Specific factor and optimal intervention to achieve non-economic objetives*. Journal of Economics Studies, E. U. A.