

52  
24.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES  
ACATLAN



ANALISIS POR SERIES DE TIEMPO DE LA  
CONTAMINACION ATMOSFERICA POR  
OZONO (O<sub>3</sub>) EN LA ZMCM

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
LICENCIADA EN MATEMATICAS  
APLICADAS Y COMPUTACION  
P R E S E N T A  
ELIA SANTILLAN MONCAYO

GENERACION  
92-96

OCTUBRE ' 97



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Análisis por series de  
tiempo de la contaminación  
atmosférica por ozono ( $O_3$ )  
en la ZMCM*

# *El presente trabajo está dedicado*

*A mis padres:*

*Antonio y Reyna, por todo su apoyo, cariño y  
compresión.*

*A mis hermanos:*

*Veronica, Javier, Magali, Israel y Oriana, por  
el apoyo y la confianza para conmigo.*

*A mi abuelita:*

*Luisa, por todo su cariño y apoyo.*

*A Roberto*

*Gracias a todos.*

*Agradezco*

*A la Universidad Nacional Autónoma de México*

*CAMPUS "Acatlán"*

*MAC*

Por haberme dado la oportunidad de llegar a ser una profesionista y servir a la sociedad.

*Al Instituto Mexicano del Petróleo*

*Grupo de Economía Ambiental*

*A mis compañeros (as)*

Por las facilidades para la realización de este trabajo.

*A mis profesores (as) y compañeros (as) en toda mi trayectoria como estudiante*

Por su aportación y ayuda para conmigo.

*A mis amigos (as)*

Por la amistad incondicional que me han brindado.

*A mis asesores*

*la Act. Ma. Del Carmen González Videgaray  
y el Dr. Adrián Barrera Roldán*

*A los integrantes del sínodo*

*Fis.Mat. Jorge Luis Suárez Madariaga*

*Ing. Beatriz Clavel Díaz*

*Act. Ma. Del Carmen González Videgaray*

*Lic. Beatriz Trueba Ríos*

*Lic. Jaime Ramírez Muñoz*

# Contenido

Introducción	i
Objetivo general	iii
Objetivos particulares	iii

## Capítulo 1 La contaminación atmosférica en la ZMCM

1.1 Antecedentes	1
1.2 Calidad del aire	2
1.3 Geografía y meteorología en la ZMCM	3
1.4 Fuentes de la contaminación atmosférica	4
1.4.1 Fuentes móviles	4
1.4.2 Fuentes fijas	5
1.4.3 Fuentes naturales.	5
1.5 Criterios y normas de la calidad del aire	6
1.5.1 Sistema de monitoreo atmosférico en la ZMCM	6
1.5.2 Normas de calidad del aire	7
1.5.3 Índices de la calidad del aire	8
1.6 Los contaminantes atmosféricos	9
1.7 Estrategias de mitigación en la contaminación atmosférica	11
1.7.1 Hoy no circula	12
1.7.2 El programa integral contra la contaminación atmosférica (PICCA)	12
1.7.3 Programa para mejorar la calidad del aire en el Valle de México 1995-2000	14

## Capítulo 2 El ozono y sus precursores

2.1 Antecedentes	17
2.2 El ozono (O <sub>3</sub> )	18
2.2.1 Ciclos fotoquímicos de la formación de ozono troposférico	19
2.2.2 La fotoquímica del ozono en la ZMCM	20
2.2.3 Los fenómenos meteorológicos	20
2.3 Sus precursores hidrocarburos no metánicos y óxidos de nitrógeno	21
2.3.1 Fuentes de los precursores de ozono	21
2.4 Sus efectos	22
2.5 Estrategias para su reducción	25

## Contenido

### Capítulo 3 Los modelos matemáticos: análisis de series de tiempo

3.1	Antecedentes	29
3.2	La administración y la empresa	30
3.2.1	La administración	30
3.2.2	La empresa	31
3.3	Series de tiempo	33
3.3.1	Serie de tiempo	35
3.3.2	Patrones básicos en las series de tiempo	35
3.3.3	Objetivos del análisis de series de tiempo	35
3.4	Análisis de series de tiempo: explicación (causa-efecto)	36
3.5	Análisis de series de tiempo: pronósticos	37
3.5.1	¿Qué son los pronósticos?	38
3.5.2	Elementos que determinan qué tipo de técnica deberá recomendarse en una situación dada.	38
3.5.3	La elaboración de pronósticos	39
3.5.4	Técnicas para la elaboración de pronósticos, ventajas y desventajas	41

### Capítulo 4 Metodologías para el análisis

4.1	Metodología Rao-Zurbenko	49
4.1.1	Antecedentes	49
4.1.2	Datos	50
4.1.3	Método de análisis	50
4.2	Análisis de regresión lineal	52
4.2.1	Significado del término lineal	53
4.2.2	La relación causa-efecto	53
4.2.3	Especificación estocástica de la FRP	53
4.2.4	Función de regresión muestral	54
4.2.5	Modelo de regresión con dos variables: la estimación	55
4.2.6	Coefficiente de determinación $r^2$ : medida de la "bondad de ajuste"	62
4.2.7	Coefficiente de correlación muestral	67
4.2.8	Regresión lineal múltiple	68
4.2.9	Conceptos importantes en el modelo de regresión	72
4.2.10	Características a examinar en los diferentes usos del análisis de regresión	73
4.3	Metodología Box-Jenkins	74
4.3.1	Antecedentes	74
4.3.2	Construcción de modelos para series univariadas	74
4.3.3	Series tiempo vistas como procesos estocásticos	77
4.3.4	Uso de operadores y polinomios de retraso	77
4.3.5	Modelos estocásticos lineales	78
4.3.6	Procesos estocásticos	80
4.3.7	Modelos para series de tiempo univariadas	82
4.3.8	Proceso iterativo para la construcción de modelos	91
4.3.9	Análisis de series de tiempo estacionales	110

**Capítulo 5 Eliminando el efecto de las condiciones meteorológicas en las concentraciones de ozono**

5.1 Estaciones de monitoreo en el análisis	115
5.2 Especificación de variables	117
5.3 Pasos de la metodología Rao-Zurbenko	117
5.4 Estación Pedregal	118
5.5 Estación Cerro de la Estrella	123
5.6 Estación Merced	128
5.7 Estación Xalostoc	133
5.8 Estación Tlalnepantla	138
5.9 Resumen y conclusiones	143

**Capítulo 6 El ozono modelado con Box-Jenkins**

6.1 Justificación	147
6.2 Tratamiento de datos	148
6.3 Promedios mensuales de ozono por año	149
6.4 Pasos a seguir en la metodología	150
6.5 Los parámetros en los modelos ARIMA	151
6.6 Estación Pedregal	153
6.7 Estación Cerro de la estrella	157
6.8 Estación Merced	162
6.9 Estación Xalostoc	167
6.10 Estación Tlalnepantla	171
6.11 Resumen y conclusiones	175

<b>Conclusiones</b>	<b>179</b>
---------------------	------------

<b>Bibliografía</b>	<b>183</b>
---------------------	------------

<b>Glosario</b>	<b>185</b>
-----------------	------------

<b>Anexo A</b>	<b>189</b>
----------------	------------

# *Introducción*

Los ecosistemas que constituyen el Valle de México y sus alrededores montañosos han sufrido profundas transformaciones a lo largo de más de seis siglos. Los lagos, bosques y pastizales que constituían el paisaje original del Valle han sido sustituidos por áreas agrícolas, industrias, casas, edificios y obras de infraestructura.

Todos estos cambios han tenido grandes consecuencias y una de las más importantes en nuestros días es la contaminación atmosférica. Ésta es un gran problema debido a que no sólo se debe al crecimiento masivo sino que han intervenido otros factores como: las características meteorológicas y geográficas que propician una mayor generación de contaminantes.

El problema de la contaminación atmosférica se comienza a atacar cuando se perciben los problemas en la salud humana. El mayor problema en la Zona Metropolitana de la Ciudad de México (ZMCM), es el contaminante ozono, ya que no se ha podido controlar de una forma total sus altas concentraciones registradas en la atmósfera.

En este trabajo se presenta un análisis estadístico por medio de series de tiempo del ozono en la ZMCM con el objetivo de evaluar las medidas de control que han sido implementadas para su control, así como obtener proyecciones del comportamiento futuro de éste.

Para realizar el análisis se tomó como referencia la división geográfica de la ZMCM, que consta de cinco zonas importantes: suroeste, sureste, centro, noreste, noroeste; cada una de estas zonas cuenta con diversos puntos o estaciones de monitoreo donde se muestrea la calidad del aire, tanto de ozono como de otros contaminantes y también se miden las variables meteorológicas.

Para el desarrollo de este trabajo se seleccionaron cinco puntos de monitoreo, los cuales son: Pedregal para la zona suroeste, Cerro de la Estrella en la zona sureste, Merced para la zona centro, para la zona noreste a Xalostoc y finalmente en la zona noroeste a Tlalnepantla. La selección se hizo con base en que son los puntos más importantes y representativos en cuanto a calidad, aunado con la cantidad histórica registrada que presentan.

El trabajo presenta un análisis por medio de series de tiempo, utilizando dos herramientas muy importantes dentro de la estadística. El primer análisis se realiza con la metodología Rao-Zurbenko, donde su objetivo es eliminar el efecto de las condiciones meteorológicas en las concentraciones de ozono; mientras que el segundo análisis se utiliza la metodología Box-Jenkins donde a través de ésta se analizan los fenómenos aleatorios.

El análisis de series de tiempo refleja la efectividad de los programas de regulación en el mejoramiento de la calidad del aire por ozono al eliminar la influencia de las condiciones meteorológicas, así como proporciona las características para cada serie de tiempo y las proyecciones futuras del comportamiento del ozono a corto plazo.

El trabajo consta de seis capítulos; estos es, dos partes; la primera con los antecedentes del trabajo, la teoría en la cual se sustenta el análisis y en la segunda se presentan los resultados obtenidos.

En el primer capítulo se abarca el tema de *La contaminación atmosférica en la Zona Metropolitana de la Ciudad de México*, dando en términos generales las características principales de sus orígenes; los diferentes contaminantes existentes, sus fuentes, efectos, y las medidas de control implantadas.

En el capítulo dos, *El ozono y sus precursores*; se explica el fenómeno del ozono, abarcando: sus precursores, su proceso fotoquímico, las diferentes estrategias implementadas para su control, hasta llegar a sus efectos en los seres vivos y otros.

Dentro del capítulo tres, se presenta el por qué de la importancia de los modelos matemáticos en la planeación y específicamente en la toma de decisiones; teniendo dentro de los más importantes a los modelos por análisis de series de tiempo. Describiéndose las características y usos del análisis por series de tiempo.

En el capítulo cuatro se presenta la descripción teórica de las metodologías usadas para el análisis en este trabajo; esto es, la metodología Rao-Zurbenko y la de Box-Jenkins.

Dentro del capítulo cinco, se presentan los resultados obtenidos a través de la metodología Rao-Zurbenko. Se proporcionan las variables meteorológicas significativas para la formación de altas concentraciones de ozono en la atmósfera.

Finalmente, en el capítulo seis, se presentan los modelos ARIMA obtenidos para cada una de las series en estudio y sus características, así como sus proyecciones futuras, con la aplicación de la metodología Box-Jenkins.

# *Objetivo*

## **Objetivo general**

La aplicación de la metodología de Rao-Zurbenko y la de Box-Jenkins en el análisis de series de tiempo del contaminante atmosférico ozono ( $O_3$ ) en la ZMCM para evaluar el efecto de las medidas de control en la contaminación atmosférica.

## **Objetivos particulares**

Evaluar si las medidas de control que se han aplicado para controlar la contaminación atmosférica en la ZMCM indican una disminución en los índices de concentración del ozono.

Aplicar la metodología Rao-Zurbenko al contaminante ozono en la ZMCM, con el fin de eliminar el efecto de las condiciones meteorológicas en el comportamiento del ozono para evaluar el efecto de las medidas de control.

Aplicar la metodología Box-Jenkins con la finalidad de evaluar y explicar el comportamiento histórico del ozono, aunado con la proyección de éste a corto plazo.

# Capítulo I

## *La contaminación atmosférica en la ZMCM*

### 1.1 Antecedentes

En México como en muchos otros países, el crecimiento poblacional e industrial, ha tenido grandes consecuencias, y una de las más importantes en nuestros días es la contaminación ambiental y muy especialmente la contaminación atmosférica.

La contaminación del aire se comienza a manifestar a finales de los años cuarenta, cuando la lucha por la tierra había concluido gracias al reparto masivo realizado por el Presidente Lázaro Cárdenas y se inicia un crecimiento del sector industrial, el cual provoca en las décadas siguientes la conformación de grandes ciudades con sus correspondientes áreas metropolitanas. Así destaca primero la ciudad de México, con su correspondiente área metropolitana (ZMCM) donde se concentra no sólo la industria, los servicios, sino también la administración, la cultura, la educación, y las capas de población que van engrosando lo que hoy se conoce como economía informal; donde día a día llegan más personas, atraídas por la expectativa de mejorar su situación económica y cultural, lo que ha implicado problemas graves en la salud, ya que existe una cantidad finita de aire, tierras y recursos, donde según aumenta la población disminuye la porción disponible para cada persona. Por lo que, es la zona más habitada; el censo de 1990 para la ZMCM registro 14 millones 987 mil habitantes. Este problema, no sólo concierne a los responsables de la contaminación sino también a quienes podrían sufrir las consecuencias, es decir, la población.

Las causas de la contaminación atmosférica en la ZMCM, no sólo son el crecimiento masivo sino que han intervenido otros factores como las características meteorológicas y geográficas que propician una mayor generación de contaminantes, aunado con las profundas transformaciones que han sufrido los ecosistemas que constituyen el Valle de México. Actualmente la ZMCM es la más contaminada del país, ya que registra altos índices de contaminación, por ello se le considera entre las más contaminadas del mundo. En la cuál es difícil implementar programas de calidad del aire eficientes por todas las características con que cuenta.

## *La contaminación atmosférica en la ZMCM*

Se ha hablado de la contaminación atmosférica en la ZMCM, pero qué es *La contaminación del aire*; ésta se define como: "la presencia en la atmósfera de uno o más contaminantes o sus combinaciones, en cantidades tales y con la duración que sean o puedan afectar a la vida humana, de animales, de plantas o de la propiedad que interfiera el goce de la vida, la propiedad o el ejercicio de las actividades".<sup>(1)</sup>

De acuerdo a esta definición la presencia y cantidad de contaminantes en la atmósfera son la causa de la contaminación atmosférica. Algunos contaminantes se emiten directamente de las fuentes de emisión; esto es, de los autos, industrias, etc.; a estos se les denomina contaminantes primarios, otros son el producto de las reacciones de dos o más contaminantes primarios en la atmósfera con la intervención de la meteorología llamados contaminantes secundarios. Además, se cuenta con otra clasificación de los contaminantes, que por constituir compuestos o agentes que permiten conocer la calidad del aire, se les llama contaminantes criterio; éstos se emplean para las regulaciones atmosféricas en los programas de manejo y monitoreo atmosférico; en México se consideran el monóxido de carbono (CO), bióxido de nitrógeno (NO<sub>2</sub>), bióxido de azufre (SO<sub>2</sub>), partículas suspendidas totales (PST), partículas suspendidas respirables (PM10), plomo (Pb) y ozono (O<sub>3</sub>). Además, dentro de la potencialidad tóxica de otros contaminantes atmosféricos se ha demostrado en sistemas humanos o animales que pueden generar malformaciones, cáncer y otros efectos por lo que se les engloba como contaminantes tóxicos.

### **1.2 Calidad del aire**

La contaminación del aire no es un hecho que pueda ser explicado mediante una relación simple causa-efecto. Si no, se define como un conjunto de variables interrelacionadas.

Se puede definir como: un fenómeno complejo que depende de: cantidad de energéticos consumidos (e); calidad y tipo de combustibles empleados (c); tipo, estado y operación de los equipos de combustión y de los procesos industriales prevalecientes (d); existencia y operación de tecnologías de control de combustión y de emisiones tanto en vehículos como en plantas industriales y de servicios (t); estado de cubierta vegetal y textura, la granulometría de los suelos en zonas suburbanas y no urbanas que rodean a la Ciudad de México (s); condiciones meteorológicas del área (m); fisicoquímica atmosférica, que define los procesos y productos de interacción entre los diferentes contaminantes y los componentes del aire (q). La calidad del aire en cualquier momento, puede describirse como:

$$a = f(e, c, d, t, s, m, q),$$

con

$$e, c, d, t, s = g(p_i, b_r)$$

### 1.3 Geografía y meteorología en la ZMCM

Precios relevantes (p); impuestos relevantes (i); subsidios relevantes(b); normas y regulaciones relevantes (r).<sup>(2)</sup>

En resumen se puede decir que la calidad del aire depende de la emisión de contaminantes, y su comportamiento fisicoquímico con la dinámica meteorológica, lo que determina su dispersión, transformación y remoción; siendo ilustrado en el diagrama de la figura 1.1.

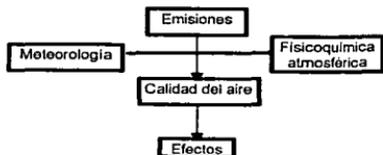


Figura 1.1 La calidad del aire.

Fuente: Véase Quidri&Sánchez, *La Ciudad de México y la Contaminación Atmosférica*, Noriega Editores, México (1992), p. 25.

### 1.3 Geografía y meteorología en la ZMCM

Las características geográficas y meteorológicas de la ZMCM son propicias para la formación de contaminantes.

**Geografía.** La ZMCM es la única que situada en el corazón del continente, a una altura de 2240m sobre el nivel del mar, presenta un contenido de oxígeno del 23% menor que al nivel del mar. Por lo que, la deficiencia de oxígeno hace que los procesos de combustión interna sean menos eficientes y más contaminantes. Su extensión es de más de 2000 Km<sup>2</sup> y está enclavada sobre la porción suroeste de una cuenca lacustre de fondo plano limitada por grandes complejos montañosos de origen volcánico; al oriente por la Sierra Nevada, cuyas cimas más elevadas sobrepasan los 5000m; al poniente, la Sierra de las Cruces separa el Valle de México de Toluca con montañas que alcanzan los 3000m de altura; al sur, por las serranías del Ajusco, Chichinantzin, que llegan a los 4000m; al norte la sierra de Tezontlalpan y la sierra de Pachuca.

La parte media de la cuenca queda bloqueada por la Sierra de Guadalupe, donde los cerros más altos alcanzan a 2600m. Todas estas montañas constituyen una barrera natural que dificulta la circulación del viento, impidiendo el desalojo del aire contaminado hacia fuera del Valle.<sup>(3)</sup>

**Meteorología.** Las características de la dirección del viento prevalente (norte-sur) con velocidades medias superficiales del orden de 2m/seg, provocan que los contaminantes de las zonas de mayor actividad se distribuyan en todo el resto del Valle.

Además, como el Valle se encuentra en la región central de la ciudad está sujeto a la influencia de sistemas anticiclónicos, generados tanto en el Golfo de México como en el Océano Pacífico; éstos sistemas ocurren con mayor frecuencia durante el invierno, ocasionando que la atmósfera se estabilice, causando la inhibición del mezclado vertical del aire que ayuda a la depuración de la atmósfera.

Por otro lado, en el Valle de México se disfruta un clima muy benigno: temperaturas agradables (10 y 27 °C) con pocas variaciones, cielos soleados durante la mayor parte del año, lluvias moderadas y vientos muy ligeros, que en pocas ocasiones llegan a causar molestias. Además, de una alta radiación solar que incrementa el potencial de la atmósfera del Valle para la formación de diversos contaminantes. **La Inversión Térmica** es un fenómeno natural que provoca el estancamiento de los contaminantes, éste ocurre durante las primeras horas de la mañana debido al enfriamiento de la superficie del suelo. La capa de aire que se encuentra en contacto con esta superficie adquiere una temperatura menor que las capas superiores, por lo que se vuelve más densa y pesada. Donde las capas de aire que se encuentran a mayor altura, actúan entonces como una "tapa" que impide el movimiento ascendente del aire contaminado. Bajo la influencia del sol, tanto la superficie del suelo como el aire atrapado aumentan de temperatura durante la mañana, con lo que el aire caliente tiende a ascender permitiendo el rompimiento de la inversión térmica, lo que permite la ventilación de la atmósfera.

## **1.4 Fuentes de la contaminación atmosférica**

Las fuentes de la contaminación son muy diversas, debido a que en la ZMCM existen una gran cantidad de fuentes emisoras de contaminantes como: industrias, servicios, automóviles, etc. Se clasifican en:

**Fuentes móviles.** Transporte: privado, público.

**Fuentes fijas.** Producción y manejo de energéticos, industria y servicios

**Fuentes naturales.** Degradación (suelos), ecología.

### **1.4.1 Fuentes móviles**

La contaminación atmosférica por vehículos no es sólo fruto de técnicas de fabricación, sino también de su proliferación, la cantidad y calidad de combustible utilizado, la lentitud de circulación vial, el tipo y antigüedad de los autos y las condiciones geográficas de la ZMCM.<sup>(9)</sup> Actualmente se estima que existen entre 2.5 y 3 millones de automotores en circulación.

#### *1.4 Fuentes de la contaminación atmosférica*

Aproximadamente un 45% de vehículos tiene más de 10 años de uso. Se dice que la contaminación por fuentes móviles está íntimamente ligada con los combustibles, ya que por su uso se emiten los diferentes contaminantes, el consumo de combustibles por el transporte es de un 56% del total.<sup>(4)</sup> Las emisiones se atribuyen en buena medida a unidades en mal estado que generan un consumo excesivo de combustible en la cámara de combustión. En el transporte encontramos autos particulares, microbuses, combis, taxis, autobuses (R-100), etc.

Por otro lado, el peligro de la contaminación proveniente de los vehículos no sólo depende de la cantidad de emisiones, sino de un conjunto de factores combinados: tiempo de exposición, grado de concentración, distancia de las fuentes, así como las condiciones geográficas y meteorológicas.

Para poder disminuir la contaminación por fuentes móviles es necesaria la expansión del transporte colectivo y la instrumentación de medidas orientadas al uso racional del auto privado.

##### **1.4.2 Fuentes fijas**

La ZMCM en la actualidad es cincuenta veces mayor que a principios de siglo; al mismo tiempo la población se ha multiplicado, y aunado con esto se incrementaron las actividades económicas y se diversificaron con la industria y los servicios. Por ello, al consumo de combustibles se le considera el factor más importante en las fuentes fijas, ya que estadísticas muestran que el 9% del total de combustibles se consume en termoceléctricas, 25% en la industria y servicios, y 11% otros.

Ahora, el inventario actual de industrias incluye 4,623 empresas, como: generación de energía eléctrica, refinación del petróleo, la industria química, etc.; dentro de los servicios, que se denominan "lugares donde un establecimiento o comercio es dedicado a la prestación o venta de un servicio"; se clasifican en: baños públicos, hoteles, centros deportivos, hospitales, lavanderías, tintorerías, panificadoras y tortillerías.<sup>(4)</sup>

##### **1.4.3 Fuentes naturales**

Estas fuentes dan lugar a diferentes contaminantes, y están determinadas por las características de suelo y limpieza. Por su región geográfica la ZMCM reúne en México la mayor cantidad de fuentes naturales de contaminación: áreas erosionadas, basura, y defecación a cielo abierto, filtraciones al subsuelo de aguas no tratadas. Las zonas suburbanas presentes explican el estado del ambiente vegetal, lo que aunado con factores meteorológicos determinan la emisión de partículas naturales.

## **1.5 Criterios y normas de la calidad del aire**

Los efectos de la contaminación atmosférica pueden detectarse en la salud humana, la vegetación, los animales, y materiales. Por lo que es importante contar con equipo analítico cualitativo y cuantitativo que no sólo especifique cuál es el contaminante sino también su concentración en el ambiente. Además, de contar con normas de calidad del aire, es decir, límites de concentración para cada contaminante en la atmósfera. Por ello, la ZMCM cuenta con:

### **1.5.1 Sistema de monitoreo atmosférico en la ZMCM**

El Sistema de Monitoreo Ambiental en la ZMCM fue diseñado y opera con base en observar el comportamiento aerométrico de los contaminantes atmosféricos.

El monitoreo del aire consta de dos procesos: el de muestreo y el de análisis de los contaminantes atmosféricos. El muestreo es el proceso por el cual las muestras son colectadas, mientras que el análisis involucra métodos para determinar las concentraciones de los contaminantes en una muestra de aire. El método de medición especificado para medir la calidad del aire ambiente es conocido como método de referencia; es el diseñado para el muestreo y análisis de un contaminante en particular.

El monitoreo de los diferentes contaminantes en la ZMCM, se puede hacer con monitores automáticos en donde la colección y el análisis de la muestra están combinados en un sólo instrumento a este tipo de monitoreo se le denomina continuo. Estos aparatos realizan análisis continuos y envían la señal de respuesta a un registrador. Por otro lado, existen métodos de análisis manual, donde el muestreo y en análisis no están combinados en un sólo instrumento. Las unidades de medida en que se obtienen las concentraciones de los contaminantes son: **ppm** (partes por millón) y  $\mu\text{g}/\text{m}^3$  (microgramos por metro cúbico).

Todos los contaminantes son medidos a través de procedimientos estandarizados a nivel internacional, y son representativos de la calidad del aire promedio que se respira en la ZMCM. Los lugares donde se monitorea son llamados estaciones de monitoreo, estas estaciones fijas de análisis están ubicadas de acuerdo a los criterios y normas internacionales, y se ubican generalmente en sitios representativos de distintas fuentes de contaminantes. El sistema está integrado por tres subsistemas, que son:

**Red Automática de Monitoreo Atmosférico,**  
**Red Manual de Monitoreo Atmosférico,**  
**Red Meteorológica.**

Este sistema de Monitoreo, permite evaluar el comportamiento de los contaminantes atmosféricos y de la meteorología.

## 1.5 Criterios y normas de la calidad del aire

### ◊ *Red Automática de Monitoreo Atmosférico (RAMA)*

Está integrada por 32 estaciones de Monitoreo, con la asignación de 21 en el D.F. y 11 en el Edo. de México. Muestra los contaminantes gaseosos y partículas suspendidas fracción respirable. Ha venido operando desde 1986. Cuenta con un Monitoreo continuo durante las 24 hrs. del día y todos los días del año.

### ◊ *Red Manual de Monitoreo Atmosférico*

Es un complemento de la RAMA y su principal objetivo es el monitoreo de partículas suspendidas en el aire y los elementos contenidos en ellas. Cuenta con 24 estaciones, con un muestreo de 24 horas cada 6 días.

### ◊ *Red Meteorológica*

Tiene como objetivo proporcionar información que tienda a evaluar la calidad del aire en condiciones normales y extraordinarias. Las variables meteorológicas son: temperatura, dirección del viento, magnitud del viento y humedad relativa.

## 1.5.2 Normas de calidad del aire

Los contaminantes atmosféricos tienen efectos adversos a la salud humana, animal, vegetal y en los materiales. Por ello, se establecen concentraciones límites para cada contaminante. Estos límites se denominan normas de calidad del aire, donde se fijan valores máximos permisibles de concentración de los contaminantes, con el propósito de proteger la salud de la población en general y de los grupos de mayor susceptibilidad en particular, por lo que se incluye un margen adecuado de seguridad, éstos se muestran en el cuadro 1.1.

Estos límites están basados en el análisis de la información experimental como epidemiológica de los efectos "adversos" de los contaminantes, de la probabilidad de la exposición a los mismos, del tamaño de la población potencialmente expuesta y de los porcentajes de los grupos poblacionales más sensibles a los efectos de estos compuestos. En México no existían los recursos, ni la infraestructura para realizar estudios epidemiológicos, toxicológicos y de exposición ni en animales, ni en seres humanos, por lo que las normas se establecieron fundamentalmente tomando en cuenta los criterios y estándares adoptados en otros países del mundo. Actualmente se realizan en la Secretaría de Salud estudios epidemiológicos que valoran la relación dosis/respuesta entre los diferentes contaminantes y la salud de la población del Valle de México para que en un futuro se actualicen los criterios establecidos en las normas que regulan la calidad del aire. Se han ya realizado cambios para algunos contaminantes a partir de 1995.

## La contaminación atmosférica en la ZMCM

Contaminante	Norma	Norma Anual
Monóxido de carbono (CO)	11.0 ppm como promedio móvil de 8 horas (12595 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ) a partir de 1995 y 13.0 ppm (14887 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ) como promedio móvil de 8 horas hasta 1994.	
Ozono (O <sub>3</sub> )	0.11 ppm como promedio de una hora (216 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ).	
Dióxido de nitrógeno (NO <sub>2</sub> )	0.21 ppm como promedio de una hora (395 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ )	
Dióxido de azufre (SO <sub>2</sub> )	0.13 ppm como promedio móvil de 24 horas (341 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ).	79 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ como media aritmética anual
Partículas suspendidas totales (PST)	260 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ como muestreo de 24 horas a partir de enero de 1995 y 275 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ hasta diciembre de 1994.	75 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ como media aritmética anual
Partículas suspendidas fracción respirable (PM10)	150 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ como promedio móvil de 24 horas a partir de enero de 1995 y 150 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ como muestreo de 24 horas hasta diciembre de 1994.	50 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ como media aritmética anual
Plomo (Pb)	1.5 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ como promedio trimestral	

Cuadro 1.1. Normas de calidad del aire vigentes a partir de enero de 1995.

Fuente: Véase Dirección General de Prevención y Control de la Contaminación, Red Automática de Monitoreo Atmosférico de la Ciudad de México, *Compendio Estadístico 1986-1995*, México (1996), p. 6.

### 1.5.3 Índices de la calidad del aire

Existe la necesidad de establecer parámetros indicativos de la calidad del aire, de fácil entendimiento para el público, por lo que se crean los índices de calidad del aire. En la ZMCM se emplea el Índice Metropolitano de Calidad del Aire (IMECA).

**IMECA.** Es un índice de la calidad del aire, es decir, un valor representativo de los niveles de contaminación atmosférica y sus efectos en la salud, en una región determinada. Principalmente, el IMECA tiene la función de mantener informada a la población sobre la calidad del aire en la Ciudad de México; la calidad del aire con el IMECA se muestra en el cuadro 1.2.

Su procedimiento de aplicación consiste en determinar en tiempo real los valores de monitoreo de una serie de estaciones agrupadas en 5 zonas "representativas" (centro, noreste, noroeste, sureste, suroeste) de la actividad urbana industrial. Donde para cada zona se selecciona el valor máximo registrado de cada contaminante de todas las estaciones pertenecientes a ésta, y este valor se utiliza para reportar la calidad del aire.

## 1.6 Los contaminantes atmosféricos

IMECA	CALIDAD DEL AIRE	EFFECTOS EN SALUD
0-100	Satisfactoria	Situación favorable para la realización de todo tipo de actividades.
101-200	No Satisfactoria	Aumento de molestias menores en personas sensibles
201-300	Malas	Aumento de molestias e intolerancia relativa al ejercicio en personas con padecimientos respiratorios
301-500	Muy mala	Aparición de diversos síntomas o intolerancia al ejercicio en la población

Cuadro 1.2 La calidad del aire con el IMECA.  
Fuente: Véase Departamento del Distrito Federal, Contaminación Atmosférica, México (1986).

Mediante este índice de calidad del aire es como se establecen las diferentes líneas de acción, en los casos extremos de la contaminación atmosférica.

### 1.6 Los contaminantes atmosféricos

Los contaminantes en la atmósfera se generan en dos diferentes formas ya sea que se emitan directamente por la fuente, o se producen indirectamente, por medio de reacciones entre ellos. De acuerdo a esto se clasifican en:

- **Primarios.** Son los que permanecen en la atmósfera tal como fueron emitidos por la fuente, éstos son: óxido de azufre, monóxido de carbono, óxido de nitrógeno, hidrocarburos, partículas y plomo.
- **Secundarios.** Son los que han estado sujetos a cambios químicos, o bien son el producto de la reacción de dos o más contaminantes primarios en la atmósfera. Donde destacan los oxidantes fotoquímicos y algunos radicales de corta existencia, como el ozono y otros.

A continuación se dan sus características, fuentes y efectos.

#### ○ Partículas suspendidas totales (PST)

Son partículas sólidas o líquidas dispersas en la atmósfera, pueden estar constituidas por una gran diversidad de sustancias. Las partículas de origen natural se componen principalmente de suelo y ocasionalmente por partículas de origen biológico (restos orgánicos de plantas y animales, esporas, virus, etc.). Las que provienen de la combustión generalmente están integradas por partículas atomizadas y cenizas del combustible. Por otro lado, su reactividad y participación en los procesos fotoquímicos es poco significativa pero representan el agente más relevante en la disminución de la visibilidad.

## *La contaminación atmosférica en la ZMCM*

Dentro de las de mayor interés se encuentran: las partículas menores a 10 micrómetros (PM10), partículas menores a 2.5 micrómetros (PM2.5) y las partículas aerobiológicas.

### *◊ Partículas suspendidas respirables (PM10)*

Son partículas sólidas o líquidas dispersas en la atmósfera (diámetro de 0.3 a 10 micras ) como polvo, cenizas, hollín, partículas metálicas, cemento, polen. Son conocidas como fracción respirable de PST, ya que tienen la particularidad de penetrar en el aparato respiratorio, hasta los alvéolos pulmonares. **Sus fuentes.** La combustión industrial y doméstica usando carbón, combustóleo y diesel; procesos industriales; incendio, erosión cólica y erupciones volcánicas. **Efectos.** En salud: irritación en las vías respiratorias; su acumulación en los pulmones origina enfermedades como la silicosis; agravan enfermedades como el asma y las cardiovasculares. En materiales: deterioro en materiales de construcción y otras superficies. En vegetación: interfieren en la fotosíntesis. Además, disminuyen la visibilidad y provocan la formación de nubes.

### *◊ Monóxido de carbono (CO)*

Es un gas incoloro e inodoro que se combina con la hemoglobina para formar carboxihemoglobina y puede llegar a concentraciones letales. **Sus fuentes.** Combustión incompleta de hidrocarburos y sustancias que contienen carbono, como: gasolina, diesel, etc.; los incendios. **Efectos.** En salud: la carboxihemoglobina afecta al sistema nervioso central y provoca cambios funcionales cardiacos y pulmonares, dolor de cabeza, fatiga, somnolencia, fallos respiratorios y hasta la muerte.

### *◊ Dióxido de nitrógeno (NO<sub>2</sub>)*

Es un gas café-rojizo de olor picante. **Sus fuentes.** La combustión a alta temperatura en industrias y vehículos; tormentas eléctricas. **Efectos.** En salud: irrita los pulmones; agrava las enfermedades respiratorias y cardiovasculares. En Materiales: desteñimiento de las pinturas. En Vegetación: caída prematura de las hojas e inhibe el crecimiento. Además, de disminuir la visibilidad.

### *◊ Dióxido de azufre (SO<sub>2</sub>)*

Es un gas casi incoloro con olor picante que al oxidarse y combinarse con agua forma ácido sulfúrico, principal componente de la lluvia ácida. **Sus fuentes.** La combustión de carbón, diesel, combustóleo y gasolina que contiene azufre; fundición y vetas metálicas ricas en azufre; procesos industriales; erupciones volcánicas. **Efectos.** En salud: irritación en los ojos y tracto respiratorio, reduce las funciones pulmonares y agrava las enfermedades respiratorias como el asma, la bronquitis crónica y el

### 1.7 Estrategias de mitigación en la contaminación atmosférica

enfisema. En materiales: corroe los metales, deteriora los contactos electrónicos, el papel, los textiles, las pinturas, los materiales de construcción y los monumentos históricos. En vegetación: se presentan lesiones en las hojas y reducción en la fotosíntesis.

#### o *Plomo (Pb)*

Es un metal pesado no ferroso, se presenta en forma de vapor, aerosol o polvo. **Sus fuentes.** Combustión de gasolina que contiene plomo, minería, fundición y procesos industriales. **Efectos.** En Salud: se acumula en los órganos del cuerpo, causa anemia, lesiones en los riñones y en el sistema nervioso central.

#### o *Hidrocarburos (HC)*

Son compuestos orgánicos que contienen carbono e hidrógeno en estado gaseoso. Se pueden combinar en presencia de luz solar con óxidos de nitrógeno y participan en la formación de smog fotoquímico. **Sus fuentes.** Combustión incompleta de combustibles y otras sustancias que contienen carbono; procesamiento, distribución y uso de compuestos derivados del petróleo como la gasolina y los solventes orgánicos; incendios; reacciones químicas en la atmósfera; descomposición bacteriana de la materia orgánica en ausencia del oxígeno. **Efectos.** En Salud: Trastornos en el sistema respiratorio, algunos hidrocarburos provocan el cáncer. No se considera aún un contaminante criterio, por ello no tiene norma de calidad del aire.

## 1.7 Estrategias de mitigación en la contaminación atmosférica

La lucha contra la contaminación es reciente ya que hasta finales de 1986 se contó con la red automática de monitoreo atmosférico, y sólo hasta después de la primera mitad de 1987 se obtuvieron datos confiables sobre los niveles de contaminación en el aire. Además, se tuvo que adicionar la materia de protección al ambiente en la Constitución Mexicana como una responsabilidad jurídica. Para 1988 se cuenta con una Ley General de Equilibrio Ecológico y de Protección al Ambiente, a partir de esta ley se empezaron a establecer normas para límites precisos a la generación de contaminantes. En 1989 se obtuvo el primer inventario detallado de emisiones contaminantes, a partir de este inventario se diseñó la estrategia integral en 1990 donde sus objetivos eran controlar los principales factores y fuentes de la contaminación que deterioran la calidad del aire. Finalmente, en 1995 aparece el Programa para Mejorar la Calidad del Aire en el Valle de México 1995-2000, donde se proponen diferentes estrategias para disminuir la contaminación atmosférica. También se establecen otras estrategias en base a la calidad de aire registrada en un día, es decir, Fase I (250 Puntos IMECA) y Fase II (350 Puntos IMECA).

A continuación se mencionan algunas de las estrategias más sobresalientes en la ZMCM.

### **1.7.1 Hoy no circula**

Esta propuesta surgió de los grupos ecologistas, teniendo como objetivo que el 25% de la flota vehicular presente en la ZMCM saliera fuera de la circulación, dependiendo del último dígito del número de la placa del vehículo; este programa se volvió obligatorio el 20 de noviembre de 1989.

En el primer año de su aplicación se obtuvieron resultados favorables ya que permitió agilizar sensiblemente el tránsito y se ahorraron 420 mil litros diarios del consumo total de gasolinas en el Valle de México. Pero este programa influyó en la venta de autos nuevos y la persistencia de los usados, ya que partir del segundo semestre de 1987 y hasta 1992 hubo un aumento de ventas debido al control de la inflación.<sup>(9)</sup> Por ello, con la aplicación de esta estrategia no se han obtenido los resultados esperados.

### **1.7.2 El Programa integral contra la contaminación atmosférica (PICCA)**

El Programa Integral Contra la Contaminación Atmosférica (PICCA) en la ZMCM, surge desde octubre de 1990 con la concentración y el compromiso de todos los sectores de la sociedad. Este programa está integrado en cinco líneas estratégicas de acción.

#### *◊ Investigación local, educación ambiental y participación ciudadana*

El bienestar social en la ZMCM está fundamentado en el consumo de combustibles, que al quemarse generan contaminación atmosférica, ya que desde que nos levantamos y encendemos la luz estamos quemando gas para su generación. Por ejemplo: cuando tomamos un baño de agua caliente, volvemos a quemar gas y así con muchas actividades diarias. Por ello, es importante incorporar la materia de educación ambiental, para que se promueva el uso racional de las tecnologías y la protección del medio ambiente.

#### *◊ Una mejor calidad ambiental de los combustibles*

Como se menciono los combustibles son el bienestar social en la ZMCM, por ello se inició un proceso complejo para el mejoramiento de los combustibles que se expenden en el Valle de México para lograr que la combustión fuera ambientalmente más limpia, de tal forma que sus emisiones resultaran menos tóxicas y menos reactivas en la atmósfera.

Actualmente se cuenta con gasolina sin plomo (Magna Sin), lo que permitió incorporar los convertidores catalíticos en los vehículos, que junto con la reducción del plomo en la gasolina Nova, ha permitido reducir las concentraciones de plomo en

### *1.7 Estrategias de mitigación en la contaminación atmosférica*

la atmósfera, se sustituyó el combustóleo por gasóleo industrial el cual contiene un porcentaje menor de azufre y menos impurezas, se introdujo el Diesel Sin con el contenido de azufre más bajo en el ámbito mundial. Además la introducción de gas en industrias y transporte, ha permitido la reducción de bióxido de azufre.

*Gasolinas oxigenadas.* Por las características geográficas de la ZMCM, existe 23% menos de oxígeno que a nivel del mar; esta circunstancia afecta negativamente los motores de combustión interna, en los que la gasolina es quemada en presencia del oxígeno que se toma del aire ambiente, por lo que si falta oxígeno, la combustión es incompleta motivando que por el escape se emita gasolina que no alcanzó a quemarse y una cantidad mayor de monóxido de carbono. Por esta razón una medida desde 1990, es que toda la gasolina que se distribuye en el Valle de México sea oxigenada; y así reducir las emisiones.

*Reformulación de gasolinas.* La gasolina es una mezcla de hidrocarburos derivados del petróleo, donde el contenido de aromáticos y olefinas, dos de sus componentes son los principales parámetros que intervienen en la contaminación atmosférica. Por ello, para evitar la contaminación atmosférica desde diciembre de 1992, PEMEX estableció especificaciones para limitar el contenido de hidrocarburos reactivos en las gasolinas Nova y Magna Sin. Lo que ha permitido reducir la generación de hidrocarburos reactivos y las evaporaciones que contribuyen a la formación de ozono.

*Recuperación de vapores.* La recuperación de vapores en todo el sistema de almacenamiento, transporte y venta al público de gasolina permite controlar emisiones de hidrocarburos que son altamente reactivos, precursores del ozono. Además, estos vapores son también tóxicos.

#### *◊ Más y mejor transporte colectivo y un transporte individual limpio*

Se busca reducir la generación de emisiones contaminantes por pasajero transportado. Por ello se ha apoyado la ampliación continua y permanente del Metro, se han venido incorporando cambios en todo el transporte de la Ciudad tanto en microbuses, taxis, camiones, etc.; la introducción del convertidor catalítico. Todos los vehículos exceptuando los de servicios básicos y de emergencia, tienen que cumplir con el programa del Hoy no Circula y pasar una verificación de sus gases de escape. Desde 1993 se cuenta con equipo computarizado para esta verificación.

#### *◊ Modernización de la industria, incluyendo el control de sus emisiones contaminantes*

La industria también es una fuente importante de contaminantes por lo que, al igual que los vehículos, todas las industrias tienen que cumplir con una verificación obligatoria de sus emisiones cada año para garantizar el cumplimiento de la normatividad ambiental.

### *La contaminación atmosférica en la ZMCAI*

Para las industrias se aprobó un programa, el cual establece compromisos basados en un diagnóstico económico, energético y ambiental de la industria, así como en la normatividad aplicable y la tecnología de control de emisiones disponible. Este programa permite conocer la cantidad de emisiones que tiene cada industria, además de que los empresarios se preocupen por cumplir la normatividad que les fue asignada. Una importante contribución se ha obtenido de la conversión a uso de gas natural de las dos termoeléctricas de la ciudad así, como de otras grandes industrias.

#### *o Restauración ambiental del Valle*

La desecación de los lagos y la deforestación de bosques en el Valle empezó desde la época de la Colonia. Al ver los grandes problemas de la contaminación se han expropiado y preservado para la Ciudad áreas ecológicamente frágiles como el Ajusco, Xochimilco, el Desierto de los Leones, la Sierra de Guadalupe y la Sierra de Santa Catarina, donde se han venido sembrando año con año millones de árboles, creando múltiples parques urbanos. Además, los tiraderos están siendo convertidos en zonas arboladas.

Entre otras medidas instrumentadas, se encuentra el cierre de la Refinería 18 de Marzo y la construcción de nuevas vialidades para evitar congestionamientos vehiculares. El financiamiento del PICCA estuvo a cargo de dependencias gubernamentales y créditos de instituciones financieras internacionales.

#### **1.7.3 Programa para mejorar la calidad del aire en el Valle de México 1995-2000**

El Programa para Mejorar la Calidad del Aire en el Valle de México 1995-2000, surge también por la necesidad de abatir la contaminación atmosférica en el Valle de México. Esta exigencia es un apremio cotidianamente reiterado por los sectores sociales, ya sea a nivel público o privado, siendo reforzada por la difusión de nueva información relativa a los efectos sobre la salud de la población, que generan los niveles alcanzados por algunos contaminantes. Por ello, es necesario iniciar de inmediato un gran número de acciones eficaces y complementarias, que incluyan a todos los sectores de la sociedad, y que produzcan beneficios claros y permanentes a la población, por los gobiernos federal, estatal y local.

Este programa tiene como propósito general proteger la salud de la población que habita la zona metropolitana de la capital de la República y salvaguardar la de las generaciones futuras, abatiendo para ello de manera gradual y permanente los niveles de contaminación atmosférica. Además, de escoger, con criterios costo-efectividad, una combinación por niveles de contaminación por número de contingencias por año, esto es, cómo escoger, con criterios de eficiencia y de viabilidad social, una combinación de estrategias e instrumentos para que cada vez se tengan menores niveles de contaminantes por día y menos contingencias por año.

## 1.7 Estrategias de mitigación en la contaminación atmosférica

### Metas generales

- I. **Industria limpia:** Reducción de emisiones en la industria y servicios.
- II. **Vehículos limpios:** Disminución de emisiones por kilómetro.
- III. **Nuevo orden urbano y transporte limpio:** Regulación total de kilómetros recorridos por vehículos automotores.
- IV. **Recuperación ecológica:** Abatimiento de la erosión.

---

#### Estrategias Propuestas

---

1. Mejoramiento e incorporación de nuevas tecnologías en la industria y los servicios,
2. Mejoramiento e incorporación de nuevas tecnologías en vehículos automotores,
3. Mejoramiento y sustitución de energéticos en la industria y los servicios,
4. Mejoramiento y sustitución de energéticos automotores,
5. Oferta amplia de transporte público seguro y eficiente,
6. Integración de políticas metropolitanas (desarrollo urbano, transporte y medio ambiente),
7. Incentivos económicos,
8. Inspección y vigilancia industrial y vehicular,
9. Información y educación ambiental y participación social.

Fuente: Véase Departamento del Distrito Federal, Gobierno del Estado de México, Secretaría de Medio Ambiente, Recursos Naturales y Pesca, Secretaría de Salud, Programa para Mediar la Calidad del Aire en el Valle de México 1995-2000, México (1996), p. 137.

Para llevar a cabo todas estas acciones, se ha realizado un amplio proceso de concentración con todas las instituciones públicas y privadas que tendrán la responsabilidad directa o indirecta de poner en marcha este programa, así como su supervisión, vigilancia, retroalimentación y ajustes.

## **Referencias**

1. Wark&Warner, Contaminación del Aire, Origen y Control. Limusa, México-España-Venezuela-Colombia, México(1994).
2. Quadri&Sánchez, La Ciudad de México y la Contaminación Atmosférica. Noriega Editores, México (1992).
3. Comisión Nacional de derechos Humanos, La Contaminación Atmosférica en México. Sus Causas y Efectos en la Salud. La Dirección de Publicaciones de la Comisión Nacional de Derechos Humanos, México (1992).
4. Departamento del Distrito Federal, Gobierno del Estado de México, Secretaría de Medio Ambiente, Recursos Naturales y Pesca, Secretaría de Salud, Programa para Mejorar la Calidad del Aire en el Valle de México 1995-2000. México (1996).
5. Comisión Metropolitana para la Prevención y Control de la Contaminación Ambiental en el Valle de México, La Contaminación Atmosférica en el Valle de México. Acciones para su Control 1988-1994. México (1994).

# Capítulo 2

## *El ozono y sus precursores*

### 2.1 Antecedentes

Cuando se habla de contaminación atmosférica, se habla de smog, pero qué es el smog, éste se conoce como la contaminación fotoquímica por oxidantes, donde es una mezcla de diversos compuestos gaseosos y aerosoles, entre los que destacan el ozono ( $O_3$ ), el bióxido de nitrógeno ( $NO_2$ ) y los nitratos (NO). El ozono es considerado como el representante típico de los oxidantes debido a su mayor porcentaje en la atmósfera urbana y facilidad de medición, aunque también se tienen otros oxidantes de interés como el peróxido de hidrógeno (HO).

Históricamente hablando hasta la mitad de los ochenta los niveles de ozono no representaban un problema importante en comparación con otros contaminantes, pero desafortunadamente en este momento el ozono ha llegado a concentraciones increíbles, que junto con las partículas en suspensión representa la otra vertiente de gravedad en la contaminación atmosférica en la ZMCM.

El ozono es un compuesto que en forma natural se encuentra presente tanto a nivel del suelo (tropósfera) como en las capas superiores de la atmósfera (estratósfera).

En la *estratósfera*, el ozono cumple una función vital para la protección de la vida en la tierra, ya que absorbe gran parte de la radiación ultravioleta emitida por el sol, impidiendo su paso a la superficie terrestre. La destrucción de la capa de ozono en la *estratósfera* tiene como consecuencia una mayor penetración de la radiación ultravioleta a la tierra, lo cual puede afectar a los seres vivos y aumentar las probabilidades de cáncer en la piel de los humanos, entre otros efectos nocivos.<sup>(1)</sup> Contaminantes como los clorofluorocarburos (CFC), empleados en sistemas de refrigeración, aires acondicionados, aerosoles, espumas plásticas y algunos extinguidores de incendios, son capaces de destruir la capa de ozono estratosférico.<sup>(2)</sup>

En la *tropósfera*, el ozono también se forma de manera natural, y se encuentra a concentraciones promedio de 0.05 ppm. En esta capa de la atmósfera es considerado un contaminante, el cual tiene efectos tanto en la salud humana, como en la vegetación y materiales.

## *El ozono y sus precursores*

El ozono a diferencia de los contaminantes primarios (como el monóxido de carbono, bióxido de azufre, los óxidos de nitrógeno y los hidrocarburos) no se emite de los escapes de los automotores, ni de las chimeneas, sino que proviene de complejas y numerosas reacciones entre hidrocarburos no metánicos (HCNM) y óxidos de nitrógeno (NO<sub>x</sub>) en presencia de luz solar.

Los estudios sobre el ozono han coincidido en señalar dos ciclos generales de reacciones en donde participan el oxígeno molecular, los óxidos de nitrógeno (NO<sub>x</sub>) y los hidrocarburos no metánicos (HCNM). Los dos últimos son denominados comúnmente como los precursores del ozono.

La cantidad de ozono formado en la atmósfera tiene una dependencia total en la hora del día, de las condiciones meteorológicas y de la naturaleza de las fuentes emisoras de los precursores. La dependencia de la formación del ozono con la meteorología se debe a que la producción fotoquímica no se inicia inmediatamente con los precursores emitidos, sino que además de intervenir la radiación solar, existe un mezclado y transporte atmosférico simultáneos al inicio y sostenimiento de todas las posibles reacciones de química atmosférica; por esta razón, los niveles más altos de ozono se presentan viento abajo de las principales fuentes de emisión.

Dadas las características geográficas de la ZMCM es de esperarse que la estación Pedregal (zona suroeste) registre los más altos índices de concentración de este contaminante como consecuencia del transporte de vientos. Esto no quiere decir que realmente ahí se localizan los máximos, sino que ahí se localizan los últimos monitores de la ZMCM, y es posible que niveles aún mayores se estén presentando en las faldas del Ajusco y en Contreras.

## **2.2 El ozono (O<sub>3</sub>)**

El ozono es un contaminante secundario, ya que es el producto de la reacción de dos contaminantes primarios en la atmósfera, es decir, no es emitido directamente de las fuentes, sino que proviene de complejas y numerosas reacciones entre hidrocarburos no metánicos (HCNM) y los óxidos de nitrógeno (NO<sub>x</sub>), en presencia de luz solar. A este tipo de reacciones se les conoce como fotoquímicas y ocurren de manera natural en la atmósfera.

"El ozono es una molécula inestable de alta energía, compuesta por tres átomos de oxígeno, con propiedades oxidantes." Sus procesos de formación se estimulan con la acción de la radiación ultravioleta que penetra de la superficie terrestre, éste se presenta en la atmósfera en forma de un compuesto gaseoso incoloro.

## 2.2.1 Ciclos fotoquímicos de la formación de ozono troposférico

La presencia del ciclo fotoquímico del ozono en la ZMCM fue detectado a finales de los años cincuenta, por el Dr. Humberto Bravo, quien se ha dedicado al estudio e investigación de este contaminante, y lo comprobó en 1978.<sup>(9)</sup> El ozono fue monitoreado por primera vez junto con sus precursores en dos sitios de la Ciudad de México; en el Aeropuerto Internacional, y en el centro de la Ciudad.

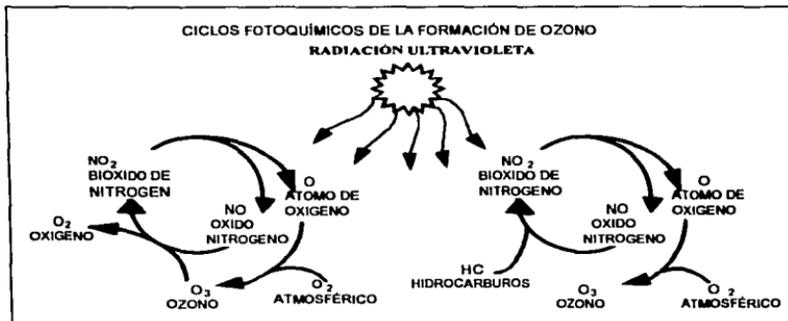


Figura 2.1. Ciclos fotoquímicos de la formación de ozono troposférico.  
Fuente: Véase Comisión Metropolitana para la Prevención y Control de la Contaminación Ambiental en el Valle de México, La Contaminación Atmosférica en el Valle de México. Acciones para su control 1988-1994, México (1994), p. 58.

## o Primer ciclo

El precursor  $NO_2$  es un absorbedor muy eficiente de la energía ultravioleta solar que llega a la superficie de la tierra, por ello se da la reacción fotolítica. Ésta se explica como la formación y destrucción del ozono con base en la disociación del bióxido de nitrógeno ( $NO_2$ ) que libera un átomo libre de oxígeno ( $O$ ) y una molécula de óxido nítrico ( $NO$ ). Donde el átomo libre de oxígeno se une al oxígeno molecular ( $O_2$ ) formando una molécula de ozono ( $O_3$ ). El ozono reacciona a su vez con el óxido nítrico ( $NO$ ) y se disocia para formar de nuevo oxígeno molecular y bióxido de nitrógeno ( $NO_2$ ), cerrándose así el ciclo.

De acuerdo al ciclo fotolítico el  $O_2$  y el  $NO$  deberían destruirse en las mismas cantidades, pero no sucede de este modo debido a que intervienen ciertos hidrocarburos que provocan una reacción más extensa, por lo que se genera el segundo ciclo.

## *El ozono y sus precursores*

### *o Segundo ciclo*

Las moléculas de O y O<sub>3</sub> tienen gran capacidad para reaccionar por medio de la oxidación de los hidrocarburos reactivos; la oxidación de la molécula de O es muchas veces más rápida que la de O<sub>3</sub>. Así, los hidrocarburos (HCNM) se combinan más fácilmente con las moléculas disponibles de oxígeno atómico (O) de la descomposición de NO<sub>2</sub> y se forman radicales libres, que oxidan el NO y NO<sub>2</sub> reiniciando con ello el ciclo. En la figura 2.1, se observa la conversión de NO a NO<sub>2</sub> sin consumir O<sub>3</sub>, lo cual explica la formación de ozono.

### **2.2.2 La fotoquímica del ozono en la ZMCM**

La formación de ozono en la ZMCM se ajusta a la fotoquímica típica, esto es, niveles altos de ozono fuera de las principales fuentes de emisión de NO<sub>x</sub>, transporte de masas de aire por vientos a zonas receptoras viento abajo y picos máximos de O<sub>3</sub> después de mediodía.<sup>(4)</sup> Sin embargo, la intensidad de esta actividad fotoquímica ha sido modificada como resultado indirecto de la aplicación de una serie de "estrategias de control". La formación del ozono no se comporta linealmente en relación con las emisiones de sus precursores, esto es, una reducción del 50% de hidrocarburos u óxidos de nitrógeno no corresponde a una disminución de igual magnitud en el ozono.<sup>(5)</sup>

La formación del ozono depende principalmente de los siguientes factores:

- ⇒ Grado de reactividad fotoquímica de la atmósfera, que a su vez depende principalmente de la incidencia de radiación solar.
- ⇒ Cantidad y características de reactividad de los precursores
- ⇒ Relación entre las concentraciones de hidrocarburos no metánicos y óxidos de nitrógeno (HCNM/NO<sub>x</sub>)

### **2.2.3 Los fenómenos meteorológicos**

Los factores meteorológicos juegan un papel muy importante en el establecimiento de condiciones propicias para la formación y acumulación de ozono. En particular, el Valle de México tiene una localización geográfica así como características meteorológicas únicas que favorecen la presencia de altas concentraciones de ozono. Dentro de las condiciones más importantes, se encuentra el comportamiento de los vientos y la temperatura.

El Valle de México presenta vientos débiles que soplan del noreste al suroeste. Este hecho influye en forma determinante en la acumulación de los contaminantes, principalmente en el suroeste de la Ciudad, este comportamiento es favorecido por las altas montañas que rodean el Valle, lo cual limita la circulación del viento a nivel superficie. El patrón de vientos dominantes (norte-sur) propicia

### *2.3 Sus precursores: hidrocarburos no metánicos y óxidos de nitrógeno*

que los contaminantes generados en las zonas de mayor concentración urbana, industrial, y de servicios, así como con mayor tránsito vehicular, sean transportados hacia el resto de la Ciudad. Además, el Valle cuenta con temperaturas agradables, lo que permite una mayor formación de este contaminante.

La latitud a la que se localiza el Valle de México propicia que éste reciba una mayor cantidad de radiación solar en comparación con otras ciudades situadas más al norte. Por este sólo hecho, se estima que su atmósfera es aproximadamente 40% más reactiva que la de la ciudad de Los Angeles, California, la comparación se hace debido a que en esta ciudad se registran también altos niveles de ozono.

## **2.3 Sus precursores: hidrocarburos no metánicos y óxidos de nitrógeno**

### *◊ Óxidos de nitrógeno (NOx)*

Las concentraciones de bióxido de nitrógeno en el aire ambiente de la Ciudad de México no rebasan actualmente la norma de calidad. Esta circunstancia puede ser explicada en parte, por la alta reactividad de la atmósfera del Valle de México, la cual propicia una rápida transformación del bióxido de nitrógeno en ozono, a través de su ciclo fotolítico.

### *◊ Hidrocarburos no metánicos (HCNM)*

Mediante estudios se ha revelado que la atmósfera de la Ciudad de México presenta altas concentraciones de compuestos orgánicos volátiles o HCNM. En promedio, la concentración de hidrocarburos no metánicos encontrada en las muestras tomadas en el Valle de México es de 3.5 partes por millón medido como carbono (ppmC), con picos de hasta 7.1 ppmC. Este último nivel está dos veces por arriba de las concentraciones más elevadas encontradas en el sur de California, donde se presentan los problemas más severos de ozono de los Estados Unidos.

#### **2.3.1 Fuentes de los precursores de ozono**

Las fuentes de ozono dependen realmente de las emisiones de los óxidos de nitrógeno y los hidrocarburos, a partir de las reacciones entre estos dos contaminantes bajo la influencia de la luz solar. El origen de los precursores del ozono es muy diverso, existen fuentes de emisión de los precursores tanto antropogénicas como naturales.

#### *◊ Naturales*

NO<sub>x</sub>. Proviene de incendios forestales, quema de pastizales, tormentas eléctricas y procesos de descomposición de materia orgánica.

HCMN. Investigaciones recientes realizadas en Europa y los Estados Unidos, han mostrado que la vegetación puede ser un contribuyente muy importante para la formación de ozono, debido a que se emiten hidrocarburos reactivos a la atmósfera. La mayor radiación solar que caracteriza al Valle de México propicia una mayor evapotranspiración en las plantas, lo cual podría incrementar la magnitud de sus emisiones de hidrocarburos. Además, los incendios y la descomposición bacteriana de la materia orgánica en ausencia del oxígeno.

#### *o Antropogénicas*

Para ambos contaminantes, la magnitud del consumo de combustibles es una de las variables más importantes para la emisión de éstos, y consecuentemente la formación de ozono. En la Ciudad de México, el excesivo consumo de combustibles está directamente relacionado con la intensidad de su actividad urbana, industrial y de transporte. Donde estos combustibles permiten generar el bienestar de los habitantes de la ciudad, pero también su quema tiene como efecto adverso la liberación de grandes cantidades de contaminantes a la atmósfera. Además, otra fuente de emisión importante para los HCMN es que en la ZMCM se consume una gran cantidad de solventes.

## **2.4 Sus efectos**

Dentro de las mayores preocupaciones al hablar de los contaminantes, es saber cuáles son sus efectos al estar expuestos a ellos ya sea el ser humano, las plantas, pero en general a todos los seres vivos; los materiales, y la atmósfera en la que vivimos. Por ello, es de vital importancia conocer sus efectos, para así poder diseñar estrategias, y proteger a los seres vivos, y en particular la salud humana. A continuación se mencionan algunos de los efectos más sobresalientes del ozono.

### **• Salud**

Dentro de los efectos más sobresalientes del ozono en la salud humana encontramos la irritación ocular, irritación en la garganta y nariz, sequedad de la garganta, tos, dificultad y dolor durante la respiración profunda, dolor subesternal, opresión en el pecho, malestar general, debilidad, náusea y dolor de cabeza, agrava las enfermedades cardiovasculares, y provoca efectos sistemáticos en órganos como el hígado.

"En gran medida, las respuestas de la población al efecto agudo del ozono se manifiesta en reducciones de la función pulmonar y el incremento en síntomas respiratorios, así como en la reactividad, permeabilidad e inflamación de las vías respiratorias".<sup>(9)</sup> Las concentraciones de ozono en el interior de las casas y edificios son por lo general sustancialmente menores que en exteriores, debido a que el ozono tiende a disociarse en cuanto entra en contacto con cualquier superficie.

Debido a que la mayoría de los individuos pasan hasta el 80% del día en espacios interiores, la exposición total al ozono es mucho menor que en exteriores. Permaneciendo en el interior de las casas o escuelas con las ventanas cerradas se puede abatir la concentración de ozono hasta en un 78%...<sup>(6)</sup>

"Otro parámetro que determina la dosis de ozono que recibe un individuo es su tasa de ventilación o volumen de aire que inhala por minuto". Ocasiona una reducción temporal de la ventilación, esto es, de la capacidad de introducir aire a nuestros pulmones. Por ello, es importante que se evite hacer el ejercicio al aire libre durante las horas de mayor concentración de ozono.<sup>(6)</sup>

◊ *Estudios experimentales sobre los efectos del ozono*

Se han realizado diferentes estudios experimentales sobre el ozono, donde se ha encontrado que el ozono es altamente tóxico para todos los organismos. Su toxicidad está determinada por su elevada capacidad oxidante. Al oxidar a los grupos reactivos de proteínas y lípidos daña las membranas de las células provocando así lesiones celulares.

◊ *Estudios experimentales a nivel internacional*

*a) Efectos de la exposición experimental al ozono en animales*

Se han realizado diferentes estudios en animales, y se concluyó que en todas las especies animales estudiadas a concentraciones de 0.5 ppm de ozono produce en el aparato respiratorio alteraciones bioquímicas, morfológicas y funcionales irreversibles.

Estudios en primates, han mostrado la modificación en las vías conductoras del aire y alteración en la mecánica pulmonar después de exposición crónica. Estas observaciones en animales dan bases para preocuparse de los efectos a largo plazo en los seres humanos.

*b) Efectos de la exposición experimental al ozono en sujetos humanos*

En sujetos que no realizan ninguna actividad física, la exposición a una concentración igual o mayor a 0.5 ppm de ozono, por un período de 2 a 4 horas, provoca una disminución del 11% en los volúmenes y flujos respiratorios. La disminución de la función pulmonar, así como de la capacidad física y el agravamiento de la sintomatología respiratoria se ha demostrado con niveles tan bajos como 0.12 ppm valor por arriba de los 100 IMECAS.<sup>(7)</sup>

Con los niveles antes mencionados, en adultos jóvenes sanos, el ejercicio intenso y sostenido se requiere para provocar disminución en los volúmenes y en las capacidades pulmonares. Además, estos mismos cambios se han observado en niños que hicieron ejercicio y se expusieron a concentraciones tan bajas como 0.12 ppm.<sup>(8)</sup>

El agravamiento de los asmáticos, también se ha asociado a los niveles elevados de oxidantes en el ambiente.<sup>(9)</sup>

◊ *Estudios experimentales a nivel nacional*

En México se han realizado estudios a corto plazo, en 1986, Namihiro estudió la función respiratoria de niños y niñas entre los 6 y 14 años de edad que vivían en San Lorenzo, al sureste de la Ciudad de México y Xalostoc, zona industrializada en el noreste y observó una ligera disminución en los valores normales para estas pruebas en los niños de Xalostoc.<sup>(10)</sup> Castillos encontró cambios en las pruebas de función respiratoria de niños que viven en el suroeste de la Ciudad de México, pero no tan marcados como se hubiera esperado.<sup>(11)</sup>

● **Efectos diversos**

En materiales deteriora el hule, los textiles y la pintura; en la vegetación causa lesiones en las hojas y limita su crecimiento. Además, favorece la formación de otras especies tóxicas, y degradación de la visibilidad.

## **2.5 Estrategias para su reducción**

Los análisis estadísticos demuestran que la frecuencia de las concentraciones de ozono tienden a aproximarse a una distribución normal. Este hecho estadístico es fundamental en el diseño de la estrategia para elevar la calidad del aire en la ZMCM. Con base en ello, el propósito fundamental de la estrategia es reducir la media de la distribución hacia valores más bajos (desplazamiento hacia la izquierda) de tal forma que los valores máximos y la frecuencia de incumplimiento de las normas establecidas se reduzca. Se busca incrementar el número de días con bajos niveles de ozono.

Dentro de los estudios realizados mediante isopletras o curvas de nivel, la relación existente entre las concentraciones de hidrocarburos y óxidos de nitrógeno con los máximos de ozono, muestran información importante para el Valle de México, se deduce que una trayectoria eficiente implica reducciones de óxidos de nitrógeno, lo que permitiría disminuir las concentraciones de ozono rápidamente. Lo anterior determina las acciones dirigidas a disminuir eficazmente los niveles de ozono troposférico, haciendo de la reducción de concentraciones de óxidos de nitrógeno un objetivo altamente prioritario.

El disminuir las concentraciones de ozono en el medio ambiente, no depende de este contaminante como tal, sino de sus precursores. Por ello, se han implantado diferentes estrategias para la disminución de éstos. Los proyectos e inversiones del Programa Integral Contra la Contaminación Atmosférica (PICCA) (Octubre de 1990 a diciembre de 1995), se muestran en el cuadro 2.1.

	Medida	Ejecutor	Propósito	Inversiones
1	Elaboración de gasolina de calidad ecológica internacional.	PEMEX	Reducir las emisiones de compuestos altamente reactivos y tóxicos.	810.81
2	Elaboración de diesel con bajo contenido de azufre.	PEMEX	Evitar la pérdida prematura de eficiencia del convertidor catalítico.	118.33
3	Elaboración de combustóleo con bajo contenido de azufre.	PEMEX	Contribuir a reducir las emisiones de NOx y HCNM	
4	Elaboración de compuestos oxigenados TAME y MTBE	PEMEX	Aplicarlos a la gasolina para ayudar al proceso de combustión.	
5	Suministro de gasolina sin plomo MAGNA SIN para los vehículos 1991 con convertidor catalítico.	PEMEX	Eliminar las emisiones de hidrocarburos evaporativos	345
6	Clausura de la refinoría 18 de Marzo.	SEDESOL	Eliminar las emisiones de contaminantes por esta fuente.	500
7	Instalación de equipos para la recuperación de vapores en terminales de recibo y distribución de combustibles y gasolineras	PEMEX SECTOR PRIVADO	Evitar la emisión del 90% de los hidrocarburos que se pierden por evaporación.	4.225
8	Instalación inmediata de convertidores catalíticos en todos los vehículos a gasolina, modelo 1991.	SECTOR PRIVADO	Asegurar que las emisiones de óxidos de nitrógeno disminuyan y que las de HC y CO se reduzcan aún más.	
9	Ampliación del Metro.		Satisfacer las necesidades de transporte, con sistemas	
10	Reordenamiento y ampliación del Sistema de Transporte Eléctrico.	DDF	ambientalmente adecuados, que reduzcan la emisión de	137.07
11	Mejoramiento de vialidades, semaforización, estacionamientos y coordinación de modos de transporte.		precursores de ozono por pasajero transportado.	
12	Autorización de rutas de autobuses para reducir el uso de vehículos privados, estimular el transporte institucional de escolares y empleados.	DDF EDO MEX	Ofrecer alternativas al transporte individual.	

*El ozono y sus precursores*

	Medida	Ejecutor	Propósito	Inversiones
13	Renovación de R-100 con 3,500 unidades de baja emisión contaminante.	SECTOR PRIVADO	Eliminar de la circulación vehículos altamente contaminantes.	
14	Continuación del programa HOY NO CIRCLA	DDF EDO MEX	Reducir emisión de precursores de ozono.	0.18
15	Ampliación del Programa de Verificación obligatoria de Vehículos a gasolina, diesel y gas L.P.	EDO MEX SECT. DDF SEDESOL	Asegurar el cumplimiento efectivo de las normas de emisión para vehículos en circulación. (reduciendo NOx y HCNM).	4.41
16	Reconversión de flotillas de camiones de carga a gas LP incorporando convertidores catalíticos.	PEMEX SEDUE EDO MEX, DDF	Reducir las emisiones de NOx, hidrocarburos y monóxido de carbono en el escape. Eliminar las emisiones de hidrocarburos evaporativos.	42.6
17	Introducción de convertidores catalíticos en taxis, combis y minibuses y transporte de carga.	EDO MEX DDF	Disminuir la emisión de NOx.	121.15
18	Cambio de combustible por gas natural en industrias.	SEDESOL SECTOR PRIVADO	Reducir la emisión de precursores de ozono.	
19	Racionalización del abasto de materiales y bienes y distribución nocturna en la ciudad.	DDF SECTOR PRIVADO	Disminuir la emisión de los precursores de ozono.	1.0
20	Realización de monitoreo continuo en las industrias más contaminantes.	SEDESOL SECTOR PRIVADO	Asegurar el cumplimiento de los compromisos y normas de control de emisiones de los precursores de ozono.	1.5
21	Mejoramiento de procesos de combustión e instalación de equipos de control en establecimientos de servicios.	SECTOR PRIVADO	Reducir la emisión de precursores de ozono. Optimizar la eficiencia en el uso de combustibles.	0.5

Cuadro 2.1. Medidas aplicadas por el PICCA.

Fuente: Departamento del Distrito Federal, Gobierno del Estado de México, SEMARNAP, Secretaría de Salud, Programa para Mejorar la Calidad del Aire en el Valle de México 1995-2000, México 0909 Y Comisión Metropolitana para la Prevención y Control de la Contaminación Ambiental en el Valle de México. Ozono. Bases para la Elaboración de una Estrategia de Control. México (1992). \* Inversiones a diciembre de 1995 (millones de dólares).

## 2.5 Estrategias para su reducción

En México todavía no se han establecido normas técnicas ecológicas que regulen las emisiones de compuestos orgánicos volátiles o hidrocarburos no metánicos, ni tampoco se han fijado un criterio de calidad del aire para estos compuestos, por lo que su regulación futura podría ser muy importante para la estrategia del control de ozono. Asimismo, las actuales normas de emisión de óxidos de nitrógeno provenientes de la industria deben adecuarse a los nuevos combustibles que se surten en el Valle de México, imponiendo niveles más estrictos.

## Referencias

1. Pitts J:N: Jr, Finlayson-Pitts B:J, Atmospheric Chemistry: Fundamentals and Experimental Techniques, John Wiley and Sons, New York(1986).
2. National Research Council, Rethinking the Ozone Problem in Urban and Regional Air Pollution, National Academy Press, Washington (1991).
3. Dr. Humberto Bravo Alvarez, La Contaminación del Aire de México, Universo Veintiuno, México(1987).
4. Bravo, H. A. y Torres J.R.: Relationship of hydrocarbons to oxidants in the Mexico City Atmosphere during 1985, Technical report, Proyecto CONACYT-UNAM: PCECBNA-001067, Centro de Ciencias de la Atmósfera, UNAM, México (1986).
5. Comisión Metropolitana para la Prevención y Control de la Contaminación Ambiental en el Valle de México, Ozono, Bases para la Elaboración de una Estrategia de Control, México( 1992).
6. Lippmann Morton, "Health Effects of Ozone: A Critical Review", Environmental Science and Technology, Vol25, No. 12, (1991).
7. Lippman M. Ozone, In Environmental Toxicants, Human exposures and their health effects, New York: Van Nostrand Reinhold (1992).
8. McDonnell WF, Chapman RS, Leugh MW, et al. Respiratory responses of vigorous exercise children to 0.12 ppm ozone exposure, Am Rev Respir Dis (1985).
9. Koenig JQ, Covertr DS, Marshall SG et al. The effects of ozone and nitrogen dioxide on pulmonary function in asthmatic adolescents, Am Rev Respir Dis (1987).
10. Namihira D, Slope GL, Helms RW, et al A study of respirometry in children from Mexico City, Pediatric Pulmonol (1986).
11. Castilljos M, Gold DR, Dockery, etal. Effects of ambient ozone on respiratory function and symptoms in Mexico City schoolchildren, Am Rev Respir Dis (1992).

# Capítulo 3

## *Los modelos matemáticos: análisis de series de tiempo*

### 3.1 Antecedentes

*"Cuando deseamos conocer algo adecuadamente, el medio principal es la definición de esa cosa. Sirven para complementarla, el estudio de las especies que de la misma cosa puedan darse, sus relaciones con aquellas otras que se le asemejen y, por fin, las partes o elementos de que se compone".<sup>(1)</sup>*

La definición anterior es el principio de la administración, de donde interpretamos que para solucionar un problema se necesitan conocer todos los elementos y relaciones que influyen en éste.

Una herramienta muy importante dentro de la administración de empresas para la solución de problemas es la investigación de operaciones -conjunto de técnicas similares, más bien que una sola técnica idéntica-.

El origen de la investigación de operaciones se presenta durante la segunda Guerra Mundial, con el fin de determinar el mejor aprovechamiento posible de la Fuerza Aérea Británica. Su éxito obtenido llevó a utilizarla para determinar el mejor modo de organizar y conducir los convoyes, la mejor forma de utilizar y combinar ciertas armas, etc. Su nombre se derivó de una "investigación" que se mandó hacer respecto de ciertas "operaciones" militares.

Por otro lado, la investigación de operaciones se describe como un procedimiento científico, que busca proveer las bases más objetivas y cuantitativas que sea posible, con el fin de apreciar mejor las diversas variables que intervienen en un problema, y analizar su relación, a través de un modelo, para encontrar una solución óptima entre varias posibles.

## 3.2 La administración y la empresa

Si bien la administración se puede aplicar en diversos campos, el de mayor aplicación es en las empresas, debido a que para poder llegar a los objetivos se requiere de toda una administración, dándose así, la combinación de éstas.

### 3.2.1 La administración

*Administración. Es el conjunto sistemático de reglas para lograr la máxima eficiencia en las formas de estructurar y manejar un organismo social.*

La administración se realiza en las siguientes etapas básicas: 1) Planeación, 2) Organización, 3) Ejecución y 4) Control. Por otro lado, la administración se lleva a cabo en dos fases:

- ◊ Mecánica. Previsión: responde a la pregunta ¿qué puede hacerse?; Planeación: ¿qué se va a hacer?; Organización: ¿cómo se va a hacer?.
- ◊ Dinámica. Integración: responde a la pregunta: con qué se va a hacer; Dirección: se refiere al problema: ver que se haga; Control: investiga en concreto: ¿cómo se ha realizado?.

A continuación se describen las etapas de la administración<sup>(1)</sup>

- La Previsión. Consiste en la determinación, técnicamente realizada, de lo que se desea lograr por medio de un organismo social, y la investigación y valoración de cuáles serán las condiciones futuras, hasta determinar los diversos cursos de acción posibles.
- Planeación. Consiste en la determinación del curso concreto de acción que se habrá de seguir, fijando los principios que lo habrán de presidir y orientar, la secuencia de operaciones necesarias para alcanzarlo, y la fijación de tiempos, unidades, etc., necesarias para su realización.
- Organización. Se refiere a la estructuración técnica de las relaciones, que debe darse entre las jerarquías, funciones y obligaciones necesarias en un organismo para su mayor eficiencia.
- Integración. Consiste en los procedimientos para dotar al organismo social de todos aquellos medios que la mecánica administrativa señala como necesarios para su más eficaz funcionamiento.
- Dirección. Consiste en impulsar, coordinar y vigilar las acciones de cada miembro y grupo de un organismo social.

### 3.2 La administración y la empresa

- **Control.** Consiste en el establecimiento de sistemas que nos permitan medir los resultados actuales y pasados en relación con los esperados, con el fin de saber si se ha obtenido lo que se esperaba, corregir, mejorar y formular nuevos planes de acción.

La administración tiene su más clara aplicación en la economía, siendo en ella donde primero se formuló, y donde más se aplica.

#### 3.2.2 La empresa

El concepto de empresa es uno de los más usados en la actualidad. Y sin embargo, es a la vez uno de los conceptos más difíciles, cuya exploración aún no está determinada, por hallarse en evolución. Siendo usado en una gran cantidad de leyes mercantiles, fiscales, del trabajo, etc.

La administración de empresas la podemos definir como: *la técnica que busca lograr resultados de máxima eficiencia en la coordinación de las cosas y personas que integran una empresa.*<sup>(1)</sup>

Los elementos que forman una empresa son: bienes materiales, hombres y sistemas. La empresa se puede ver desde el aspecto económico "como una unidad de producción de bienes y servicios para satisfacer el mercado"; aspecto jurídico "cuando se trata de empresas cuya propiedad es una sociedad"; aspecto administrativo "la unidad de la empresa está representada por la fuente común de decisiones finales, que coordina las distintas actividades para el logro del mismo fin."; y finalmente la podemos ver como la integración de los aspectos antes mencionados.

Como la administración de empresas busca lograr resultados de máxima eficiencia, uno de los aspectos más importantes en los cuales trabaja es en la etapa de *previsión*, es decir, aquella en la que se desarrollan los modelos para la solución de problemas.

*La previsión.* Implica la idea de cierta anticipación de acontecimiento y situaciones futuras, que la mente humana es capaz de realizar y sin la cual sería imposible hacer planes. Se puede definir como *el elemento de la administración en el que, con base en las condiciones futuras en que una empresa habrá de encontrarse, reveladas por una investigación técnica, se determinan los principales cursos de acción que nos permitirán realizar los objetivos de esa misma empresa.*

#### ◊ El principio de previsibilidad

*"Las previsiones administrativas deben realizarse tomando en cuenta que nunca alcanzarán certeza completa ya que, por el número de factores y la intervención de*

### *Los modelos matemáticos: análisis de series de tiempo*

*decisiones humanas, siempre existirá en la empresa un RIESGO; pero tampoco es válido decir que una empresa constituye una aventura totalmente incierta.*

*La previsión administrativa descansa en una certeza moral o probabilidad seria, la que será tanto mayor, cuanto más pueda apoyarse en experiencias pasadas, propias o ajenas, y cuanto más puedan aplicarse a dichas experiencias, métodos estadísticos o de cálculo de probabilidad."*

Los distintos estados en que puede encontrarse nuestra mente, sobre todo para la previsión del futuro, se enfoca en tres situaciones básicas: certeza, incertidumbre y la probabilidad.

Las previsiones serán tanto más válidas y confiables: cuanto más analíticamente se estudie cada uno de los factores que han de intervenir en la realización de los hechos futuros; cuando más se fundamente en hechos obtenidos, y no en opiniones; y cuanto más se puedan aplicar a la determinación de estos factores: medidas, sobre todo estadísticas y de cálculo de probabilidades, dando como resultado los dos principios siguientes:

*Principio de la objetividad. "Las previsiones deben descansar en hechos más bien que en opiniones subjetivas."*

*Principio de la medición. "Las previsiones serán más seguras cuanto más podamos apreciarlas, no sólo cualitativamente, sino en forma cuantitativa"*

Para el desarrollo de las previsiones cuantitativas se cuenta con las medidas estadísticas y de cálculo de probabilidades que se integran en la investigación de operaciones, por la necesidad de resolver problemas de la vida real a partir de un modelo matemático que lo represente. A continuación se mencionan las etapas básicas en la aplicación de la investigación de operaciones:

- **Formulación del problema.** Implica la precisión más exacta de los objetivos, y de las relaciones de los elementos dentro del sistema.
- **Construcción de un modelo matemático.** Es la "precisión lógica de un problema". Constituye la representación de objetivos (lógico, gráfico, matemático, físico, etc.) de las relaciones que se dan entre los diversos factores o variables del problema: el modelo matemático, constituido por una serie de ecuaciones, ya que éstas permiten la máxima cuantificación. Lo fundamental de un "modelo" es que constituye una representación objetiva y cuantitativa del "sistema", y de las relaciones entre sus factores o variables, para facilitarnos el comprender claramente, y sobre todo, analizar, el mayor número posible de combinaciones que de ello puede hacerse, dentro de los límites de una óptima efectividad del sistema.
- **Análisis del modelo.** Consiste en el uso de deducciones matemáticas.

- Comprobación del modelo y de la solución derivada de él. Un modelo no es más que una representación parcial de la realidad. Por lo que debe determinarse la precisión de éste, comparando los resultados que se obtienen al aplicar éste, y los que se obtienen sin su aplicación.
- Establecimiento de controles para la solución.
- Iniciación del nuevo procedimiento, o solución a que se llegó.

Dentro de las principales técnicas de investigación de operaciones se encuentran: los modelos para adopción de decisiones, cálculo de probabilidades, teoría de juego, la teoría de las "colas", la programación lineal, y otras técnicas.

Como es necesaria la construcción de un *modelo*., a continuación se define qué es un modelo y los tipos que existen.

*Modelo*. Es una simplificación de un sistema real, con un objetivo particular sobre el sistema. Dentro de los tipos de modelos tenemos:

- ◊ De acuerdo a sus fines: *descriptivo, explicativo, predictivo, optimización y control.*
- ◊ De acuerdo a su construcción: *aleatorio o determinístico, dinámico o estático, lineal o no lineal, prefabricados o hechos a la medida, mercado horizontal o mercado vertical.*

Los elementos que constituyen un modelo son: ecuaciones, variables, parámetros o estimadores, signos de relación (operadores). De acuerdo a las características que presente el fenómeno en estudio, se identifica qué tipo de modelo se debe aplicar para obtener la solución óptima.

De las técnicas de investigación de operaciones antes mencionadas, a continuación se describirán los modelos para adopción de decisiones, específicamente el análisis de series de tiempo.

### 3.3 Series de tiempo

El análisis de series de tiempo ha tomado gran fuerza en las últimas décadas, puesto que cada día es más aplicado en la toma de decisiones, es decir, al tomador de decisiones se le presentan interrogantes como: ¿cuál sería la solución óptima, cuál es la de menos riesgo, etc.; por ello en la actualidad el análisis de series de tiempo es una herramienta de gran utilidad.

En la vida diaria tomamos muchas decisiones, pero esto lo hacemos casi siempre después de evaluar lo que es posible que suceda con nuestra decisión. Por ello, es que casi todo el tiempo y hasta en cosas que no nos damos cuenta realizamos proyecciones del comportamiento a futuro. Así, el análisis de series de tiempo está relacionado con la toma de decisiones, por que a partir de análisis de datos históricos existentes del fenómeno en estudio se toman las decisiones. Por otro lado, el análisis no sólo es para proyecciones, podemos también tener la relación causa-efecto, por ejemplo al tratar de explicar el comportamiento de un contaminante en base a la influencia de la meteorología, no sólo se pretende predecir, sino, encontrar la relación y tomar decisiones a partir de la relación existente.

El origen del estudio de las series de tiempo se debe a que en la vida real, se presentan situaciones extremadamente incontrolables, o estocásticas. Por lo que, si antes era difícil predecir el futuro, hoy en día hasta el planearlo es difícil. Una de las razones de que ahora sea tan difícil planear es que la predicción del futuro ha pasado de difícil a casi imposible. El futuro es demasiado impredecible y se muestra una racionalidad limitada para poder predecir. Estos factores hacen no factible la planeación, organización. Por ello, se requiere de herramientas matemáticas, para obtener posibles alternativas y a partir de éstas tomar decisiones; el esquema de la toma de decisiones se muestra en la figura 3.1.

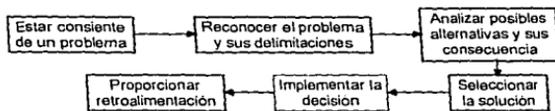


Figura 3.1. Circuito de la toma de decisiones.

Fuente: Véase Reyes Ponce Agustín, Administración de Empresas, Lamusa-Wiley, México (1980), p. 120.

El análisis de series de tiempo tiene múltiples aplicaciones, dentro de las más importantes tenemos, el análisis para obtener pronósticos, para describir simplemente el comportamiento de la serie de tiempo, y para obtener la relación que existe entre dos o más series de tiempo. La aplicación dependerá del objetivo del análisis, de las restricciones con que se cuenten, del tiempo y costo.

Las técnicas de pronóstico se utilizan en diversos campos. Por ejemplo: en mercadotecnia; las decisiones con respecto al futuro de un producto o servicio dependerán de las características de su mercado. Los pronósticos sirven para predecir la penetración de un mercado, la tendencia de precios de un producto, el desarrollo de nuevos productos, etc. En producción, los pronósticos pueden predecir ventas; en finanzas y contabilidad, necesidades futuras de flujos de efectivo; en planeación macroeconómica de un país, el crecimiento del producto interno bruto, el desempleo.

### 3.3.1 Serie de tiempo

Una serie de tiempo puede verse como la representación de los resultados de la variable aleatoria de interés a lo largo del tiempo, observados durante intervalos iguales.

### 3.3.2 Patrones básicos en las series de tiempo<sup>(3,4)</sup>

- **Horizontalidad.** Se dice que existe horizontalidad cuando en una serie tiempo no tiene una tendencia determinada.
- **Tendencia (pattern).** Es el cambio sistemático en el tiempo, se dice que este patrón existe cuando una serie histórica tiende a disminuir o aumentar sus valores medios con el tiempo.
- **Variación Estacional (seasonality).** El patrón de estacionalidad existe cuando una serie de tiempo fluctúa de acuerdo con un factor que depende del periodo del año. Son repeticiones de comportamiento en periodos no mayores de un año.
- **Cíclico (cycle).** Este patrón es similar al de estacionalidad, pero las fluctuaciones ocurren más lentamente: son cambios graduados en el tiempo, son repeticiones del comportamiento en periodos al menos de un año.
- **Fluctuación Aleatoria (Random Shocks).** Son variaciones al azar debidas a fuerzas inexplicables. Son un conjunto de variables no consideradas en el modelo, es decir, el valor real será la suma del patrón más el elemento aleatorio.

### 3.3.3 Objetivos del análisis de series de tiempo<sup>(5)</sup>

Se pueden clasificar cuatro objetivos en el análisis de series de tiempo.

1. **Descripción,** consiste en simplemente enunciar el comportamiento de un proceso, permitiendo una visualización clara.
2. **Explicación,** consiste en realizar un análisis de tipo causa-efecto, al relacionar un fenómeno con el medio circundante.
3. **Pronóstico,** se aplica cuando se desea predecir lo que ocurrirá en el futuro, con el fin de tomar decisiones o prever comportamientos
4. **Control,** es cuando no sólo se desea observar el comportamiento, si no modificarlo para obtener algún beneficio.

### **3.4 Análisis de series de tiempo: explicación (causa-efecto)**

Cuando hablamos de análisis de series de tiempo, desde el punto de explicación, es decir, causa-efecto, explicamos la relación existente entre diferentes variables, donde suponemos existe una relación de causalidad, esto es, una o varias variables pueden explicar el fenómeno en estudio, las cuales son llamadas variables independientes, donde se consideran los datos pasados para conocer el comportamiento, para este tipo de análisis utilizamos: la regresión lineal simple o múltiple.

El análisis de regresión está relacionado con el estudio de la dependencia estadística de una variable, la variable dependiente, de una o más variables adicionales, las variables explicativas con la perspectiva de estimar y/o predecir el valor medio o promedio de la primera en términos de los valores conocidos o fijos de las segundas. En este análisis se estudian las relaciones estadísticas entre variables, se trata esencialmente con variables aleatorias o estocásticas. Por otra parte, en la dependencia funcional o determinística se trata con variables, pero no son aleatorias ni estocásticas.

Aunque el análisis de regresión tiene que ver con la dependencia de una variable con relación a otras variables, esto no implica necesariamente que exista una relación de causalidad. Por otro lado, el análisis de correlación está estrechamente relacionado con éste, aunque conceptualmente los dos son muy diferentes, ya que, el objetivo fundamental de éste último es la medición de la fuerza o grado de asociación lineal entre dos variables.

En el análisis de regresión existe una asimetría en la manera como se manejan las variables dependientes y explicativas. Se supone que la variable dependiente es estadística o aleatoria, lo cual implica que tiene asociada a ella una distribución de probabilidad. También se supone que las variables explicativas tienen valores fijos. No siempre se cumple con estas características en el análisis y se puede decir que las dos variables sean estocásticas. Para el análisis de correlación se manejan las variables simétricamente; no existe distinción alguna entre las variables dependientes y las explicativas.

En este tipo de análisis es muy importante conocer las variables en estudio, ya que podemos encontrar que existe una correlación alta entre ciertas variables, pero en una razón de causa-efecto éstas no tienen ninguna relación, por ello, el analista debe ser muy cuidadoso.

Las aplicaciones más importantes del análisis de regresión se han dado principalmente en la economía, por ejemplo: un profesional en economía laboral puede estar interesado en estudiar la relación existente entre el porcentaje de cambio en los salarios monetarios y la tasa de desempleo. Una de las aplicaciones más importantes del análisis de regresión son los pronósticos, también podemos

utilizarlo para obtener la dependencia de una variable endógena, con respecto a una o varias variables exógenas (explicativas); y con ello poder explicar que tanta dependencia existe entre ellas. Es difícil encontrar un modelo donde las variables exógenas expliquen totalmente el comportamiento de la variable endógena, la razón principal es porque ésta última presenta un comportamiento aleatorio o estocástico.

### 3.5 Análisis de series de tiempo: pronósticos

Desde siempre el ser humano ha deseado saber el comportamiento a futuro de las cosas, ya sea en el aspecto económico, meteorológico, psicológico etc., ya que el conocer éste permite hacer una planeación y tomar decisiones de acuerdo a las circunstancias. Es por ello, que el ser humano se ha preocupado por obtener pronósticos.

Antes de 1950, la elaboración sistemática de pronósticos en las empresas era casi nula. Aunque se contaba con algunas metodologías tales como la regresión y la descomposición de series de tiempo, sus aplicaciones se limitaban a los principales departamentos de economía política. La falta de datos oportunos y los tediosos cálculos requeridos dificultaron la aplicación formal y extensa de tales técnicas.

Ya para mediados de la década de 1950 ocurrieron dos hechos importantes en el campo de los pronósticos. El primero fue la introducción de *técnicas de atenuación exponencial*. Las principales ventajas de estos métodos, los cuales tenían bases empíricas y orientación práctica, fueron su simplicidad conceptual y su facilidad de cálculo. Y después aparecieron *los métodos de descomposición* que comenzaron a llamar la atención, de donde destacó el método II del censo, pero estos métodos tuvieron poco apoyo estadístico.

A medida que se abarató el costo de las computadoras y que aumentó su disponibilidad en la década de 1960, se dio paso a métodos estadísticos de pronóstico más complejos. Técnicas tales como los métodos econométricos se volvieron prácticos y se les utilizó para cuantificar y probar la teoría econométrica con los datos empíricos. Para las décadas de 1950 y 1960, se buscaba una teoría unificadora del pronóstico, que finalmente con el trabajo de los profesores George Box y Gwilym Jenkins se hizo realidad. La metodología Box-Jenkins, proporcionó un procedimiento sistemático para el análisis y pronóstico de series de tiempo que fue lo bastante general como para manejar prácticamente todos los patrones de datos acerca de las series de tiempo observados en forma empírica. Se dio un importante impulso al método cuando estudios comparativos de pronósticos demostraron que el método Box-Jenkins era al menos tan exacto como los métodos econométricos. Para mediados de la década de 1970 surgió una variante del método del promedio móvil autorregresivo (ARIMA, método de parámetro adaptativo) desarrollado por Box-Jenkins.

### *Los modelos matemáticos: análisis de series de tiempo*

Para principios de la década de 1980, en varias organizaciones se usaron métodos tales como el método Delphi y el de las matrices de Impacto en el Costo. Estos métodos cualitativos intentaron manejar las tendencias a largo plazo de las variables cuando no se disponía de los datos y patrones históricos para aplicar los métodos estadísticos de pronóstico o cuando estos datos y patrones no eran aplicables.

La aplicación de los pronósticos durante las dos últimas décadas (70's y 80's) ha progresado mucho como disciplina. A finales de la década de 1970, esta disciplina se transformó en un campo con derecho propio, a medida que se reconoció su importancia para todas las formas de planeación y de toma de decisiones, en muchas áreas diversas. Se puede atribuir la importancia de los pronósticos a las condiciones económicas y políticas.

La parte más importante dentro de los pronósticos, es conocer el problema, determinar que se desea pronosticar, estas circunstancias las da el tomador de decisiones. El pronóstico es un elemento necesario del proceso de planeación, pero no es la planeación en si.

#### **3.5.1 ¿Qué son los pronósticos o predicciones ?<sup>(4)</sup>**

- "El pronóstico predice lo que pasará si las tendencias históricas no cambian; si esto no sucede, cada pronóstico debe ajustarse: de otra manera resultará engañoso."
- "Son estimaciones de valores desconocidos de una variable endógena"

#### **3.5.2 Elementos que determinan, qué tipo de técnica deberá recomendarse en una situación dada<sup>(4)</sup>**

- a) *El horizonte de planeación que se predecirá.* Puede ser a corto plazo (cero a tres meses), mediano plazo (tres meses a dos años) y largo plazo (dos años o más)
- b) *Incertidumbre* que rodea todo el marco de toma de decisiones
- c) *La existencia de series históricas* que sean relevantes y confiables
- d) *El nivel de detalle.* Puede ser grueso, como en macroplaneación, o fina, como en un departamento de producción
- e) *El número de objetos que se debe predecir.* Varía de unos cuantos, hasta cientos o miles
- f) *El uso del pronóstico* (si es para control o planeación). En caso de control, se requiere de un pronóstico por excepción para detectar rápidamente cuándo un proceso se encuentra fuera de límites tolerables.

Y para el caso de planeación, el pronóstico consiste en identificar los patrones básicos de la información requerida y extrapolarla a futuro

- b) *El costo del pronóstico.* El cuál incluye el desarrollo, almacenamiento, operación y la oportunidad de la técnica utilizada
- c) *La existencia o inexistencia de un proceso de planeación.* Ya que el pronóstico es una herramienta de la planeación, es importante observar qué tipo de planeación se desarrolla. Puesto que, no en todos los tipos de planeación tienen la misma utilidad los pronósticos

### 3.5.3 La elaboración de pronósticos

Cuando se quiere realizar un pronóstico, surgen las interrogantes como ¿Quién necesita pronósticos? ¿Cómo se usan? ¿Cuál es el mejor método para pronosticar qué debe usarse?. En la figura 3.2, se presenta un marco de trabajo para la comprensión del pronóstico en la organización, donde el pronosticador informa al encargado de la toma de decisiones de las consecuencias previstas de un conjunto propuesto de planes; se emplea cierta información recabada a cerca del ambiente, ésta puede obtenerse a través de los servicios de información. El pronosticador debe adoptar un procedimiento específico tomando en consideración el costo de las diversas posibilidades, el tiempo disponible antes de que se necesite el pronóstico y alguna idea de la precisión probable de los métodos que puede aplicar de forma competente. El pronosticador también puede tener en cuenta la importancia de mejorar la precisión del pronóstico.

#### Ø Tipos de pronósticos

De una manera muy general podemos clasificar las posibilidades de pronósticos; de acuerdo a Makridakis y Wheelwright se tiene<sup>(2)</sup>

El pronóstico "intuitivo" se refiere a los procesos que son subjetivos para el (los) planificador (es) de la toma de decisiones. Este pronóstico puede ser menos exacto que técnicas formales. Los métodos "formales" de pronósticos son aquellos cuyos pasos pueden describirse y que cuando los aplican diferentes individuos, se obtiene un pronóstico similar; éstos constituyen un área técnica dominada por métodos estadísticos, aplicados únicamente a datos históricos.

Los procedimientos de pronóstico "implícito" es aquel que busca escribir claramente el valor de tal pronóstico y el tiempo en el que se obtuvo, usándolo tal vez después para fines de planeación o de toma de decisiones, en cambio el "explícito" es aquel que se emplea inmediatamente. De una manera ejemplificada se presentan en el cuadro 3.1.

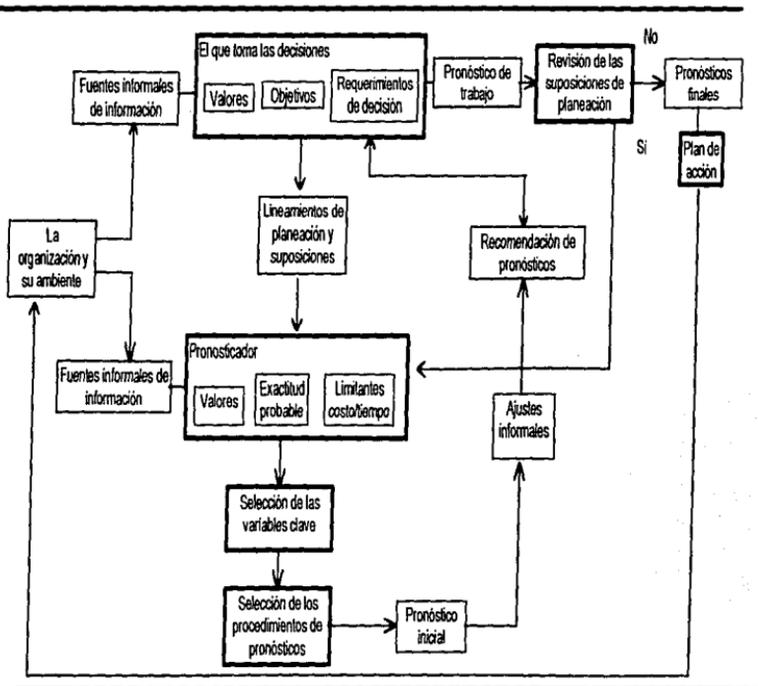


Figura 3.2 Marco de trabajo para la comprensión del pronóstico en la organización.

Fuente: Makridakis & Wheelwright, Manual de Técnicas de Pronósticos, Limusa, México(1991), p.119.

□ representan los componentes principales del sistema para la elaboración de pronósticos, las acciones efectuadas por los participantes, el pronosticador, y el encargado de la toma de decisiones. Los otros cuadros representan la información y las suposiciones.

	<i>Implícito</i>	<i>Explícito</i>
<i>Intuitivo</i>	Estimar las ventas del producto <i>X</i> para un periodo específico de una manera intuitiva.	Recurrir a una junta ejecutiva para formular pronósticos para el producto <i>X</i> durante el mes entrante.
<i>Formal</i>	Predicir las ventas del producto <i>X</i> para el periodo específico con un método de pronósticos estadístico.	Obtener pronósticos mensuales para cada producto <i>X</i> importante en una fecha especificada para emplear en la planeación de la producción.

Cuadro 3.1. Tipos de pronósticos.

Fuente: Véase Makridakis &amp; Wheelwright, Manual de Técnicas de Pronósticos, Limusa, México (1991), p.21.

### 3.5.4 Técnicas para la elaboración de pronósticos, ventajas y desventajas

Existen diferentes técnicas para la elaboración de pronósticos, las cuales se clasifican en diferentes grupos de acuerdo a sus características. Por ejemplo: las técnicas que sólo se basan en la historia previa de la variable a analizar, éstas son conocidas como extrapolativas. Pero como la base de estos métodos consiste en que en una serie de tiempo existen las fuerzas de la inercia y que tales fuerzas harán que las series se repitan por lo menos durante el horizonte de tiempo por pronosticarse, por ello, se consideran "fatalistas", en el sentido de que suponen que las cosas no cambiarán sino que "la historia se repetirá".

Otras técnicas tratan de descubrir los factores causales o por lo menos explicativos que relacionen entre si a dos o más variables; se les denomina técnicas causales. Para poder aplicar estas técnicas es necesario conocer muy bien el objeto en estudio. Una desventaja de las técnicas antes mencionadas es que los patrones en los que se basan se calculan empleando datos históricos; y si estos patrones o relaciones cambian, disminuye la exactitud del pronóstico.

También existen las técnicas que se basan en las opiniones debidas a la experiencia que se tiene con el objeto en estudio. A éstas se les denomina: técnicas subjetivas.

Por otro lado, al obtener pronósticos; siempre existe la incertidumbre, debido a que la capacidad del pronóstico para reducir la incertidumbre futura suele ser muy limitada, ésta puede existir independientemente de lo que hagan los planificadores y los que toman las decisiones o bien, debido a la cantidad de pronósticos. Además, se requiere contar con una precisión del pronóstico, y ésta depende del tiempo que se quiera pronosticar.

o Métodos de pronóstico en cuanto a tipo de variables

Cualitativos

- Datos no cuantificables
- No hay suficiente información
- No existe patrón de comportamiento

Métodos o Técnicas de Pronóstico

Cuantitativos

- Datos cuantificables
- Suficiente Información
- Patrón de comportamiento

Sin información

- **Cualitativos.** El subjetivo: en el cual las opiniones individuales son procesadas para obtener un pronóstico, su descripción se da en el cuadro 3.2.

Método	Definición
<b>Pronósticos Individuales</b>	Un individuo elabora un juicio acerca del futuro sin hacer referencia a ningún otro conjunto de pronósticos
<b>Pronósticos mediante comité/investigación</b>	Esta técnica está basada en la suposición de que varios expertos pueden llegar a un mejor pronóstico que una sola persona. Algunas veces los factores sociales tienen influencia en los pronósticos, lo que puede causar que estos no reflejen un consenso verdadero. O por medio de encuestas a clientes con respecto a sus compras futuras.
<b>Delphi</b>	Este cuenta con tres rasgos que le distinguen del comité: anonimato, retroalimentación y respuesta de grupo. Se interroga a un grupo de expertos mediante una serie de cuestionarios en donde las respuestas a uno se usan para producir el siguiente, esto permite que todos tengan acceso a la información para los pronósticos. Esta técnica elimina el efecto de convencimiento de la opinión de la mayoría.

Cuadro 3.2 Métodos subjetivos

Fuente: Véase Makridakis & Wheelwright, Manual de Técnicas de Pronósticos, Limusa, México(1991), p.119.

• **Cuantitativos**

**Extrapolativos o de series de tiempo:** Este tipo de metodologías busca simplemente extrapolar hacia el futuro los patrones de los datos del pasado, es decir, se hace un énfasis especial en la utilización lógica de los datos con retraso para el desarrollo del pronóstico. Se efectúan los pronósticos para una variable en particular, usando únicamente la historia previa de esta variable. Se supone que los patrones identificados en el pasado se extienden hacia el futuro. Los métodos extrapolativos sólo funcionan con variables cuantitativas, estos métodos se describen en el cuadro 3.3.

Método	Definición
Curvas de tendencia	<i>Aquí las observaciones pasadas se describen como una función en el tiempo, después de identificar el patrón, éste se utiliza para pronosticar el futuro. Las funciones típicas son la recta, la línea exponencial y la curva en forma de S.</i>
Descomposición	<i>Se considera que una serie de tiempo consta de cuatro componentes: la tendencia (su comportamiento a largo plazo), estacional y un componente aleatorio sobrante. Al identificarse los componentes sistemáticos, estos pueden reintegrarse para generar un pronóstico.</i>
Promedios móviles	<i>Cada punto de un promedio móvil de una serie de tiempo es el promedio aritmético de un número de puntos consecutivos de la serie, el número de datos se escoge de manera que se eliminen los efectos estacionales o las irregularidades, o ambos.</i>
Atenuación exponencial	<i>El pronóstico se basa en una suma ponderada de observaciones pasadas. Donde se da más peso a los datos más recientes. Los valores dependen de los parámetros de atenuación. Una vez que se obtienen los parámetros, es fácil calcular los pronósticos. En forma descriptiva, el nuevo pronóstico es igual al antiguo más alguna proporción del error de pronósticos pasados. El método se puede adaptar fácilmente para considerar los factores estacionales y la tendencia. Existen muchas variaciones del suavizamiento exponencial: algunas son más adaptables que otras; algunas más complejas en sus cálculos, y más tiempo de computadora.</i>
Modelos Box-Jenkins (o ARIMA)	<i>Los pronósticos se basan en una suma ponderada de las observaciones previas, como en la atenuación exponencial. Sin embargo, la selección de los valores es mucho más complicada. La serie de tiempo se ajusta con un modelo matemático que es óptimo en el sentido de que asigna a la serie de tiempo errores más pequeños que cualquier otro método. Donde se debe identificar el modelo y después estimar los parámetros. Los modelos ARIMA brindan al analista una gama de modelos diferentes, escogiéndose el más apropiado para la aplicación particular. Ésta es la rutina estadística más exacta con que se cuenta, pero también una de las más costosas y tardadas.</i>
Bayesiano	<i>El pronóstico bayesiano es similar a la atenuación exponencial. Éste trata de tomar en cuenta cambios súbitos en el comportamiento de las series los cuales son impredecibles, mediante la evaluación de los puntos de cada dato para ver si ha ocurrido o no algún cambio. Una vez que se identifican estos cambios, los pronósticos se ajustan automáticamente.</i>

Cuadro 3.3 Métodos extrapolativos

Fuente: Véase Makridakis &amp; Wheelwright, Manual de Técnicas de Pronósticos, Limusa, México(1991), p.129.

### Los modelos matemáticos: análisis de series de tiempo

**El causal ( o estructural):** en el cual se intenta identificar las relaciones entre variables que existieron en el pasado, donde se supone que las relaciones continúan siendo válidas en el futuro. El objetivo de estos modelos es relacionar la variable que se está pronosticando, con las causas que históricamente han ejercido influencia sobre ella y emplear para el pronóstico las relaciones que se establezcan, estos se describen en el cuadro 3.4.

Método	Definición
Modelos de regresión de una sola ecuación	Se considera que la variable dependiente Y está determinada por varios "causas" o "factores exógenos", así como por los valores pasados de la variable dependiente en sí. Las relaciones se identifican por medio de datos pasados. Para hacer pronósticos se necesitan hacer suposiciones con relación a los valores de los factores exógenos en el futuro.
Modelos de sistemas simultáneos	Estos tienen una estructura similar a la de los modelos de una sola ecuación, pero con más de una variable dependiente (endógenas). Se pronostican las variables dependientes mediante suposiciones acerca de los valores futuros de las variables exógenas.
Modelos de simulación	Estos modelos tienen que ver con un gran número de variables y sus interrelaciones con los factores exógenos. Su identificación es mucho más adecuada que los antes mencionados.
Modelos de entrada-salida	Se fundan en la idea de que para obtener una producción dada de artículos, se requiere de un conjunto fijo de insumos. Cuando se han efectuado los pronósticos de la demanda del consumidor, las técnicas de entrada-salida permitirán calcular la cantidad necesaria de un producto para mantener el nivel de la demanda.
Análisis de impacto cruzado	Se elabora una lista de eventos que probablemente tendrán impacto en el sistema analizado. Se obtienen probabilidades asociadas a cada escenario y se eliminan aquellos conjuntos de eventos cuya probabilidad sea baja.

Cuadro 3.4 Métodos causales o estructurales

Fuente: Véase Makridakis & Wheelwright, Manual de Técnicas de Pronósticos, Limusa, México(1991), p.130.

- **Sin información.** Se trata de proyectar una variable de interés sin información antecedente, por ejemplo: los efectos de un tema nuevo, una materia, etc.
- **Ventajas y desventajas de los métodos de pronóstico**

Todos los métodos de pronóstico requieren de diferentes características para su aplicación, así también presentan ventajas y desventajas en la aplicación y en la obtención de resultados. De acuerdo a la clasificación de los métodos se presentan sus ventajas y desventajas en el cuadro 3.5.

Ventajas	Desventajas
<u>Cualitativos o subjetivos</u>	<u>Pronósticos individuales</u>
Lo puede entender cualquier persona, es barato, flexible y se puede pronosticar cualquier cosa.	Su precisión es dudosa; los pronósticos están sujetos al criterio humano.
Se relacionan diferentes perspectivas al problema.	<u>Pronósticos mediante comité/investigación</u>
Se lleva a cabo de la misma forma que el anterior, pero intenta, a través del anonimato eliminar los efectos de dominación del grupo.	Realmente una persona puede dominar en una organización. Las encuestas son muy dudosas.
<u>Métodos de series de tiempo</u>	<u>Delphi</u>
Es fácil de aprender, de usar y de comprender	Complicado, ya que existe presión para lograr el consenso a medida que transcurren las sesiones. No siempre se llega al pronóstico esperado.
Credibles por intuición	<u>Análisis de la curva de tendencia</u>
<u>Métodos por descomposición</u>	Es demasiado fácil y por tanto, propicia el descuido; especialmente a largo plazo, ¿por qué una curva dependiente sólo del tiempo debiera brindar una descripción adecuada del futuro distante?
Fáciles de hacer, aprender y usar, sus pronósticos de corto plazo van de malos a buenos.	No tienen una explicación estadística; no son ideales para los pronósticos y presentan los mismos problemas que las curvas de tendencia. Son de utilidad para la identificación de los factores: tendencia, estacionales y cíclicos.
Fácil de aplicar con computadora para un gran número de productos. Barato para operar. Es fácil establecer sistemas de control. De fácil comprensión.	<u>Promedios móviles</u>
<u>Atenuación exponencial</u>	Sin base teórica; pierden muchos puntos críticos, malo a largo plazo. Los pronósticos a mediano y largo plazo son malos.
Sin base teórica; pierde los puntos críticos, impreciso.	

Ventajas	Desventajas
<u>Modelos de Box-Jenkins (o ARIMA)</u>	
La selección de los valores es amplia, lo cual permite al usuario identificar en los datos muchos más patrones que con los otros métodos previos. El enfoque de Box-Jenkins, más que una técnica, proporciona una filosofía acerca del modelado basada en el principio de la parsimonia.	Complicado y difícil de entender; para algunos usuarios promete más de lo que proporciona; caro por su uso del tiempo de computadora.
<u>Modelos bayesianos</u>	
Trata de incluir la probabilidad del cambio estructural; incluye información subjetiva; puede emplearse con muy pocos datos; es barato desde el punto de vista de computación.	Complicado; se sabe muy poco acerca de su funcionamiento.
<u>Métodos causales</u>	
<u>Modelos de regresión de una sola ecuación</u>	
Si es posible desarrollar modelos que sean suficientemente confiables, estos son ideales ya que contestan a muchas preguntas de relación entre variables.	Los modelos son difíciles de desarrollar, requieren personal con experiencia y gran cantidad de datos que a menudo la organización no se ocupa de recolectar.
<u>Modelos de sistemas simultáneos</u>	
Estos modelos se utilizan para captar las interrelaciones en sistemas que no se ajustan al formato de una sola ecuación.	Grandes requerimientos de datos; difíciles de entender; estadísticamente complicados; difícil de definir el modelo.
<u>Modelos de simulación</u>	
Si se aplican adecuadamente, pueden ofrecer una ayuda substancial al tomador de decisiones; pueden resolver el problema preciso.	Caros; con frecuencia requieren de gran cantidad de datos; requieren de una validación cuidadosa.
<u>Modelos de entrada-salida</u>	
Es ideal para pronosticar productos industriales.	Es costoso preparar tablas de entrada-salida específicas para un producto. Los pronósticos dependen de la exactitud de los pronósticos iniciales acerca de la demanda del consumidor.
<u>Análisis de impacto cruzado</u>	
Es capaz de tratar eventos improbables que pueden ocasionar gran impacto.	Las probabilidades se estiman mediante diversos métodos a criterio. Es crucial la elección de cuáles eventos incluir.

Cuadro 3.5. Ventajas y desventajas de los modelos de pronóstico

Fuente: Véase Makridakis & Wheelwright, Manual de Técnicas de Pronósticos, Limusa, México (1991), pp. 13-14.

El problema de seleccionar un procedimiento de pronóstico no es algo sencillo, ya que todos los métodos presentan tanto desventajas como ventajas.

Cabe mencionar que el factor experiencia y el conocimiento del fenómeno, juegan un papel muy importante, ya que, cuando se cuenta con ello es más fácil la identificación de la mejor metodología a usar, y así poder reducir: el tiempo y el costo de los pronósticos.

### Referencias

1. Reyes Ponce Agustín, Administración de Empresas: Teoría y Práctica, Primera parte, Limusa-Wiley, México (1980).
2. Makridakis y Wheelwright, Manual de Técnicas de Pronósticos, Limusa, Noriega Editores, México(1991).
3. González Videgaray María del Carmen, Modelos de Decisión con Procesos Estocásticos II (Metodología Box-Jenkins), UNAM, ENEP "ACATLAN", Vertiente, México(1990).
4. Prawda Witenberg Juan, Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones, Volumen II, Modelos Estocásticos, Limusa, México (1984).

#### Bibliografía complementaria

- Hiller Frederick, Lieberman Gerald J., Introducción a la Investigación de Operaciones, McGraw-Hill, México (1988).
- Reyes Ponce Agustín, Administración de Empresas: Teoría y Práctica, Segunda parte, Limusa-Wiley, México (1980).
- Damodar N Gujarati, Econometría, McGraw\_Hill, México (1995).



# Capítulo 4

## Metodologías para el análisis

### 4.1 Metodología Rao-Zurbenko

#### 4.1.1 Antecedentes

La metodología Rao-Zurbenko surge como una necesidad de los diferentes análisis estadísticos aplicados en la contaminación atmosférica, específicamente la contaminación atmosférica por ozono troposférico. Ya que existe una gran dificultad para poder evaluar la efectividad de los programas de regulación en el mejoramiento de la calidad del aire por ozono por la presencia de las fluctuaciones meteorológicas.

El ozono es el contaminante que registra las más altas concentraciones en la atmósfera de la ZMCM. Con la aplicación de las diferentes estrategias para el control y disminución de la contaminación atmosférica, este contaminante no ha presentado una disminución representativa en comparación con la de otros contaminantes.

Por otro lado, las concentraciones de ozono en el ambiente están fuertemente influenciadas por variaciones estocásticas y estacionales, por ello es difícil evaluar la efectividad de los controles para mejorar la calidad del aire por ozono. La metodología Rao-Zurbenko es un método estadístico para filtrar o moderar la influencia de las fluctuaciones meteorológicas en las concentraciones de ozono, obteniendo la tendencia del ozono sin la influencia meteorológica.

Recientemente, los autores de esta metodología: S. Trivikrama Rao e Igor G. Zurbenko han aplicado el método para eliminar la influencia de las condiciones meteorológicas en las concentraciones de ozono, usando la temperatura de la superficie como una de las variables meteorológicas más importantes que afectan a la formación de ozono. Además, se investiga la influencia de otras variables meteorológicas. El método consiste en separar los diferentes fenómenos presentes en las series de tiempo, ya que cuentan con características tales como variaciones a corto y largo plazo (componente estocástico y componente determinístico).

## Metodologías para el análisis

Al aplicar la metodología, la tendencia encontrada en el ozono puede ser realmente atribuida a los cambios en las emisiones, permitiendo evaluar el impacto de los diferentes controles de emisión en la calidad del aire, es decir, evaluar las estrategias de control para disminuir las concentraciones de ozono en el aire.

Con resultados obtenidos al aplicar esta metodología, se concluye que se pueden detectar cambios en la calidad del aire por ozono, aunado con la utilidad que presenta para examinar la efectividad de las regulaciones para mejorar la calidad del aire por ozono.

### 4.1.2 Datos

Las series de tiempo son creadas, a partir de las bases de datos pertenecientes a la RAMA y a la Red meteorológica, los registros son por hora; de donde se obtienen las concentraciones máximas diarias de ozono, y los datos de las variables meteorológicas respectivos. Los datos de las variables meteorológicas dependen del dato de ozono seleccionado; esto es, si el máximo de ozono se presentó a las 12 hrs., los datos meteorológicos deben ser del mismo horario.

El periodo tiempo para el análisis es: Enero de 1988 a Diciembre de 1995; en un horario de 9:00 a 19:00 hrs.

### 4.1.3 Método de análisis

Una serie de tiempo de variables aleatorias, puede representarse como

$$X(t) = e(t) + S(t) + W(t)$$

donde

$X(t)$	La serie original
$e(t)$	El componente de tendencia
$S(t)$	La variación estacional
$W(t)$	Residuales

El análisis consiste en separar la parte determinística ( $e$  y  $S$ ) de las variaciones a corto plazo (los residuales). Para éste se utiliza el filtro Kolmogorov-Zurbenko.<sup>(1,2)</sup> El filtro  $KZ_{m,p}$ , está dado bajo pasos producidos por iteraciones repetitivas de promedios móviles. El promedio móvil en cada iteración está definido por

$$Y_i = \frac{1}{m} \sum_{j=-k}^k X_{i+j} ; \text{ donde } m = 2k + 1.$$

La serie de tiempo obtenida es

$$Y_t = KZ_{m,p}(X_t)$$

donde  $m$  es la longitud del promedio móvil y  $p$  es el número de iteraciones.

Con la aplicación del filtro, la serie se denota como  $X_{kz}$ . Esta serie contiene los efectos de tendencia a largo plazo y el componente estacional, es decir, los componentes determinísticos, por lo que los residuales están dados por

$$[X(t) - X_{kz}(t)] = W(t)$$

El análisis regresión es aplicado a las series filtradas para obtener el coeficiente de determinación y el coeficiente de correlación.\*

Se representa a las ecuaciones de regresión como

$$X_{kz}(t) = aT_{kz}(t) + b + \varepsilon(t) \quad \text{Para una variable independiente}$$

$$X_{kz}(t) = aT_{kz}(t) + bV_{kz}(t) + c + \varepsilon(t) \quad \text{Para dos variables dependientes}$$

De la ecuación  $X_{kz}(t) = aT_{kz}(t) + b + \varepsilon(t)$  suponga que  $X_{kz}(t)$  es la serie de tiempo del ozono y éste es explicado por la temperatura  $T_{kz}(t)$ . Donde  $a$  y  $b$  son los parámetros ajustados y  $\varepsilon(t)$  son los residuales de la relación entre las variables.

El término  $\varepsilon(t)$  revela cambios en el ozono atribuidos a los cambios en las emisiones. Podemos aplicar un filtro más a la serie  $\varepsilon(t)$

Un  $KZ_{kz, \text{temp}, p}$  es aplicado a  $\varepsilon(t)$ ,

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{kz, \text{temp}, p}(t) + \delta(t)$$

donde  $\varepsilon_{kz, \text{temp}, p}(t)$  revela los cambios en la serie con un mayor suavizamiento, los cuales no pueden ser atribuidos a las fluctuaciones de la temperatura.

La serie de tiempo original,  $X(t)$ , se puede describir por la parte determinística,  $X_{kz}(t)$ , y el proceso de ruido blanco,  $W(t)$ , como

$$X(t) = W(t) + X_{kz}(t)$$

sustituyendo las ecuaciones  $X_{kz}(t) = aT_{kz}(t) + b + \varepsilon(t)$  y  $\varepsilon(t) = \varepsilon_{kz, \text{temp}, p}(t) + \delta(t)$ , la serie de tiempo original se representa como

$$X_t = W_t + [aT_{kz} + b] + \varepsilon_{kz, \text{temp}, p}(t) + \delta(t)$$

\* El análisis de regresión junto con los coeficientes de determinación y de correlación se explican en el punto 4.2.

Del lado derecho de la expresión  $X_t = W_t + [aT_{\text{est}} + b] + \varepsilon_{\text{est,1980},p}(t) + \delta(t)$ , el primer término representa la turbulencia de corto plazo, la cual esta siempre no correlacionada con los efectos a largo plazo<sup>(2)</sup> (la variación estacional y el componente de tendencia). El segundo término representa los efectos estacionales y a largo plazo de la temperatura en el ozono, el tercer término refleja los efectos de las emisiones a largo plazo no explicados por la temperatura. Finalmente, el cuarto término,  $\{\delta(t) = \{\varepsilon(t) - \varepsilon_{\text{est,1980},p}(t)\}$ , representa las pequeñas variaciones estacionales del ozono producidas por otras variables que no son incluidas en el modelo.

## 4.2 Análisis de regresión lineal

Cuando se habla del análisis de regresión es muy común que se relacione con la correlación, pero aunque el análisis de correlación está estrechamente relacionado con el análisis de regresión, conceptualmente los dos son muy diferentes. En el análisis de correlación, el objetivo fundamental es la medición de la fuerza o grado de asociación lineal entre dos variables, en cambio el análisis de regresión está relacionado con el estudio de la dependencia de una variable, la variable dependiente, de una o más variables adicionales, las variables explicativas con la perspectiva de estimar el valor medio o promedio de la primera en términos de valores conocidos de las segundas.

El análisis de regresión está dirigido a estimar o predecir el valor medio o promedio (poblacional) de la variable dependiente con base en los valores fijos o conocidos de la (s) variables (s) explicativa (s).

Para cada una de las distribuciones de probabilidad condicionales de  $Y$  se puede calcular su valor medio o promedio, término conocido también como la media condicional o esperanza condicional, que se denota como

$$E(Y|X = X_i)$$

Una curva de regresión poblacional es simplemente el trazado o unión de las medias condicionales o esperanzas de la variable dependiente para los valores fijos de las (s) variable(s) explicativa (s).

La regresión lineal poblacional está dada por

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_i$$

en la cual  $\beta_0$  y  $\beta_1$  son parámetros desconocidos, denominados coeficientes de regresión, también llamados intersección y coeficiente de la pendiente, respectivamente.

El análisis de regresión lineal es un proceso iterativo en el cual los datos guían a un modelo y un ajuste es producido por medio de los datos. La calidad del ajuste consiste en hacer modificaciones a éste.

#### 4.2.1 Significado del término "lineal"

*Linealidad en las variables.* El significado de linealidad consiste en la expectativa condicional de que  $Y$  es una función lineal de las  $X_i$ . Geométricamente hablando la curva de regresión en este caso es una línea recta.

*Linealidad en los parámetros.* La esperanza condicional de  $Y$ ,  $E(Y|X = X_i)$  es una función lineal de los parámetros, de las  $\beta$ 's; puede ser o no lineal en la variable  $X$ .

La regresión lineal significa siempre una regresión lineal en los parámetros; las  $\beta$ 's (es decir los parámetros, se elevan únicamente a la primera potencia), pudiendo ser o no lineales en las variables explicativas, las  $X$ 's. Se concluye que el adjetivo de lineal es porque este indica que el modelo es lineal en los parámetros, y no porque  $Y$  sea una función lineal de las  $X$ 's.

#### 4.2.2 La relación causa-efecto

El modelo de regresión no implica la relación causa-efecto entre las variables, aún cuando una relación empírica pudiera existir, no se puede tomar tan arbitrariamente este tipo de relación. Al establecer la relación de causalidad entre las variables ésta debe tener bases en cuanto al conocimiento del tema en estudio. "Una relación estadística, independientemente de qué tan fuerte y aparente sea, nunca puede establecer una conexión causal: nuestras ideas de causación deben provenir de las estadísticas externas, y en, últimas, de algún tipo de teoría" que las soporte.<sup>(1)</sup>

#### 4.2.3 Especificación estocástica de la FRP

Para poder definir la función de regresión poblacional (FRP), partamos de, si la desviación de un  $Y_i$  individual alrededor de su valor esperado, es expresado de la siguiente manera

$$u_i = Y_i - E(Y_i|X_i)$$

$$E(Y_i|X_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$$

en donde  $u_i$  es una variable aleatoria no observable que toma valores positivos o negativos. Se conoce a  $u_i$  como la perturbación estocástica o término de error estocástico.

Como se supone que  $u_i$  es lineal en  $X_i$ , la ecuación puede escribirse como

$$\begin{aligned} Y_i &= E(Y|X_i) + u_i \\ &= \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i \end{aligned}$$

Si se toma el valor esperado de ambos lados de la ecuación, se obtiene

$$E(Y_i|X_i) = E(Y|X_i) + E(u_i|X_i)$$

Puesto que,  $E(Y_i|X_i)$  es equivalente a  $E(Y|X_i)$ , la ecuación anterior implica que

$$E(u_i|X_i) = 0$$

En otras palabras, el supuesto de que la línea de regresión pasa por las medias condicionales de  $Y_i$  implica que los valores medios condicionales de  $u_i$  (condicionales a las  $X_i$ 's dadas) son iguales a cero.

#### 4.2.4 Función de regresión muestral (FRM)

La línea de regresión muestral representa la línea de regresión poblacional, pero en razón de una fluctuación muestral (muestra), es una aproximación de la verdadera RP (regresión poblacional).

De manera análoga a la FRP en que se fundamenta la regresión lineal poblacional, es posible desarrollar el concepto de función de regresión muestral (FRM), la línea de regresión muestral se puede representar como

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$$

donde  $\hat{\ }^$  se lee como "sombbrero" o "gorro"

$\hat{Y}_i$  = estimador de  $E(Y|X_i)$

$\hat{\beta}_0$  = estimador de  $\beta_0$

$\hat{\beta}_1$  = estimador de  $\beta_1$

El estimador o estadístico (muestral), es simplemente una regla, fórmula o método que nos dice cómo estimar el parámetro poblacional a partir de la información proporcionada por la muestra. La FRM en su forma estocástica está dada por

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i + v_i$$

en donde  $v_i$  denota el término *residual* (muestral). Conceptualmente es análogo  $u_i$ .

El objetivo fundamental del análisis de regresión consiste en estimar la FRP

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i + u_i$$

con base en

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i + e_i$$

En términos de la FRM, el  $Y_i$  observado puede expresarse como  $Y_i = \hat{Y}_i + e_i$

#### 4.2.5 Modelo de regresión con dos variables: la estimación

Existen en la actualidad varios métodos para construir la FRM, pero con respecto al análisis de regresión el más usado es el método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO).

##### • Método de mínimos cuadrados ordinarios

Este método se ha atribuido al matemático alemán Carl Friedrich Gauss. El método de mínimos cuadrados es usado para estimar los coeficientes de la línea de regresión, bajo el criterio de que la suma de cuadrados de las diferencias entre los valores reales y los estimados  $\hat{Y}_i$ , sea mínima, es decir, selecciona  $\hat{\beta}_0$  y  $\hat{\beta}_1$  de tal forma que para un conjunto muestral de información  $\sum e_i^2$  es la más pequeña posible. Gráficamente se observa en la figura 4.1.

Recordando

La FRP en dos variables es  $Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i + u_i$

La FRM en dos variables es  $Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i + e_i$

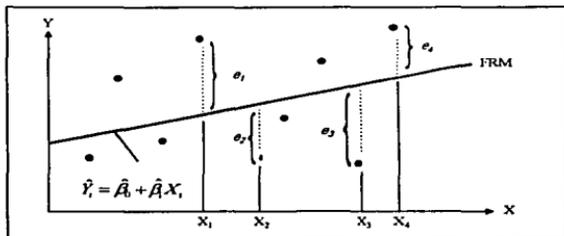


Figura 4.1 El criterio de mínimos cuadrados

Fuente: Véase Damodar N. Gujarati, Econometría, McGraw-Hill, México(1995), p. 69.

El modelo de regresión muestral, está dado en términos de  $N$  pares de datos  $(Y_i, X_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Así, que por el criterio de mínimos cuadrados.

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

$$\Sigma e_i^2 = \Sigma (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

$$= \Sigma (Y_i - \hat{A}_0 + \hat{A}_1 X_i)^2$$

Los estimadores de mínimos cuadrados deben satisfacer

$$\frac{\partial \Sigma_{i=1}^N e_i^2}{\partial \hat{A}_0} = \frac{\partial \left\{ \Sigma_{i=1}^N [Y_i - (\hat{A}_0 - \hat{A}_1 X_i)]^2 \right\}}{\partial \hat{A}_0} = -\Sigma_{i=1}^N 2 [Y_i - (\hat{A}_0 + \hat{A}_1 X_i)]$$

$$= -2 \left( \Sigma_{i=1}^N Y_i - N \hat{A}_0 - \hat{A}_1 \Sigma_{i=1}^N X_i \right) = 0$$

$$\frac{\partial \Sigma_{i=1}^N e_i^2}{\partial \hat{A}_1} = \frac{\partial \left\{ \Sigma_{i=1}^N [Y_i - (\hat{A}_0 - \hat{A}_1 X_i)]^2 \right\}}{\partial \hat{A}_1} = -\Sigma_{i=1}^N 2 [Y_i - (\hat{A}_0 + \hat{A}_1 X_i)] X_i$$

$$= -2 \left( \Sigma_{i=1}^N Y_i X_i - \hat{A}_0 \Sigma_{i=1}^N X_i - \hat{A}_1 \Sigma_{i=1}^N X_i^2 \right) = 0$$

$$N \hat{A}_0 + \hat{A}_1 \Sigma_{i=1}^N X_i = \Sigma_{i=1}^N Y_i$$

simplificando las ecuaciones se tiene

$$\hat{A}_0 \Sigma_{i=1}^N X_i + \hat{A}_1 \Sigma_{i=1}^N X_i^2 = \Sigma_{i=1}^N Y_i X_i$$

Las ecuaciones anteriores son llamadas ecuaciones normales de mínimos cuadrados. Los coeficientes de los estimadores están dados por

$$\hat{A}_0 = \bar{Y} - \hat{A}_1 \bar{X}$$

$$\hat{A}_1 = \frac{\Sigma_{i=1}^N Y_i X_i - \frac{(\Sigma_{i=1}^N X_i)(\Sigma_{i=1}^N Y_i)}{N}}{\Sigma_{i=1}^N X_i^2 - \frac{(\Sigma_{i=1}^N X_i)^2}{N}}$$

donde

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \Sigma_{i=1}^N Y_i \quad \text{y} \quad \bar{X} = \frac{1}{N} \Sigma_{i=1}^N X_i$$

El modelo ajustado de regresión lineal es entonces

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$$

Al obtener  $\hat{\beta}_1$ , el denominador es la suma corregida de cuadrados de las  $X_i$  y el numerador es la suma corregida del producto cruzado de  $Y_i$  y  $X_i$ , se pueden escribir estas cantidades como

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2 \quad \text{y} \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^N Y_i (X_i - \bar{X})$$

por lo que

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

• **Forma alternativa de expresar el modelo de regresión lineal simple**

El modelo de regresión se puede expresar en forma de desviación, donde tanto  $X$  como  $Y$  se expresan en términos de desviaciones de sus valores medios.

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i + e_i$$

$$\sum_{i=1}^N Y_i = N\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^N X_i + \sum_{i=1}^N e_i$$

dividiendo por  $N$

$$\bar{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

restando de la ecuación  $Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i + e_i$ , se obtiene

$$(Y_i - \bar{Y}) = \hat{\beta}_1 (X_i - \bar{X})$$

• **Propiedades de los estimadores de mínimos cuadrados: Teorema de Gauss-Markov**

Se dice que los estimadores de mínimos cuadrados son los mejores estimadores lineales insesgados,<sup>(3)</sup> donde "mejores" implica varianza mínima.

1. Es lineal, es decir, una función lineal de una variable aleatoria tal como: la variable dependiente  $Y$  en el modelo de regresión.

2. Es insesgado, es decir, su valor promedio o esperado, es igual al valor verdadero.

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$$

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

3. Tiene varianza mínima sobre la clase de todos los estimadores lineales insesgados; a un estimador insesgado con varianza mínima se le conoce como un estimador eficiente.

$$V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{S_{xx}} \qquad se(\hat{\beta}) = \frac{\sigma}{\sqrt{S_{xx}}}$$

$$V(\hat{\beta}_1) = \sigma^2 \left( \frac{1}{N} + \frac{\bar{X}^2}{S_{xx}} \right) \qquad se(\hat{\beta}_1) = \sigma \sqrt{\left( \frac{1}{N} + \frac{\bar{X}^2}{S_{xx}} \right)}$$

donde  $E$ , denota la esperanza, o sea, la media;  $V$ , denota la varianza del estimador;  $se$ , denota su error estándar y está dado por la raíz cuadrada de la varianza.

Estimación de  $\sigma^2$  (varianza)

La estimación de  $\sigma^2$  es requerida para pruebas de hipótesis y construcción de intervalos en el modelo de regresión;  $\sigma^2$  se estima mediante la siguiente fórmula

$$SRC = \sum_{i=1}^N u_i^2$$

La suma de los errores al cuadrado o suma residual de cuadrados tiene  $N-2$  grados de libertad, porque éstos son asociados con los estimadores  $\hat{\beta}_0$  y  $\hat{\beta}_1$ . El valor esperado de  $E(SRC) = (N-2)\sigma^2$ , así un estimador insesgado de  $\sigma^2$  es

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SRC}{N-2} = MRC$$

donde  $MRC$  es la llamada media residual de cuadrados. La raíz cuadrada de  $\hat{\sigma}^2$  es llamado el error estándar de la regresión.

◆ Supuestos fundamentales del método de mínimos cuadrados ordinarios

**Supuesto 1.** (El valor medio o promedio de  $u_i$  es igual a cero)

$$E(u_i | X_i) = 0$$

**Supuesto 2.** (No existe autocorrelación entre las  $u_i$ )

$$\begin{aligned} cov(u_i, u_j) &= E[u_i - E(u_i)] [u_j - E(u_j)] \\ &= E(u_i u_j) \text{ por el supuesto 1} \\ &= 0 \quad i \neq j \quad cov. \text{ significa covarianza} \end{aligned}$$

**Supuesto 3.** (Homocedasticidad o igual varianza para  $u_i$ )

$$\begin{aligned}\text{var}(u_i | X_i) &= E[u_i - E(u_i)]^2 \\ &= E(u_i^2) \\ &= \sigma^2\end{aligned}$$

**Supuesto 4.** (Cero covarianza entre  $u_i$  y  $X_i$ )

$$\begin{aligned}\text{cov}(u_i, X_i) &= E[(u_i - E(u_i))][(X_i - E(X_i))] \\ &= E[u_i(X_i - E(X_i))] \\ &= E(u_i X_i) - E(X_i)E(u_i) \\ &= E(u_i X_i) \\ &= 0\end{aligned}$$

**Supuesto 5.** El modelo de regresión está correctamente especificado. (No existen sesgos, ni errores de especificación).

◆ **Propiedades útiles del ajuste de mínimos cuadrados**

1. La suma de los residuales en un modelo de regresión que contenga una intersección  $\beta_0$ , es siempre cero; esto es,  $\sum_{i=1}^N e_i = 0$
2. La suma de los valores observados  $Y_i$ , es igual a la suma de los valores ajustados  $\hat{Y}_i$ ,  $\sum_{i=1}^N Y_i = \sum_{i=1}^N \hat{Y}_i$
3. La línea de regresión de mínimos cuadrados siempre pasa a través del centro de los datos [el punto,  $(\bar{X}, \bar{Y})$ ]
4. La suma de los residuales aumentando el valor correspondiente de la variable explicativa, siempre es igual a cero; esto es,  $\sum_{i=1}^N X_i e_i = 0$
5. La suma de los residuales aumentado el valor ajustado correspondiente, siempre es igual a cero; esto es,  $\sum_{i=1}^N \hat{Y}_i e_i = 0$

◆ **Pruebas de significancia**

Una prueba de significancia es un procedimiento mediante el cual se utilizan los resultados de la muestra para verificar la veracidad o falsedad de una hipótesis.

### Metodologías para el análisis

Consiste en utilizar un estadístico de prueba (estimador) y la distribución muestral de dicho estadístico.

#### ◊ Prueba de significancia para la regresión

Esta prueba constituye un estadístico que sirve para probar la hipótesis nula de que el verdadero  $\beta_1$  es igual a cero.

$$H_0: \beta_1 = 0$$

La prueba de hipótesis

$$H_1: \beta_1 \neq 0$$

El estadístico de prueba es

$$F_0 = \frac{SEC / 1}{SRC / (N - 2)} = \frac{MEC}{MRC}$$

donde  $SEC$  es la suma explicada de cuadrados, o sea, la explicada por la regresión,  $SEC = \sum_{i=1}^N (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$ , tiene un grado de libertad, mientras que  $SRC$  tiene asociados  $(N-2)$  grados de libertad.

Los valores esperados son

$$E(MRC) = \sigma^2$$

$$E(MEC) = \sigma^2 + \beta_1^2 S_{xx}$$

El estadístico  $F_0$  sigue una distribución  $F_{\alpha, 1, N-2}$  grados de 1.

La prueba de hipótesis de  $H_0: \beta_1 = 0$ , para el estadístico  $F_0$ , se rechaza si

$$F_0 > F_{\alpha, 1, N-2}$$

si el valor  $F_0$  es estadísticamente significativo, se procede a rechazar la hipótesis nula, por lo que se dice que la variable explicativa tiene influencia en la variable dependiente. En la práctica si se tiene un valor grande de  $F_0$ , entonces  $\beta_1 \neq 0$ .

#### ◊ Prueba de significancia para los coeficientes de la regresión; la prueba $t$

Esta prueba es útil para determinar si la variable explicativa es significativa en el modelo, el modelo podría ser menos efectivo con la incorporación de nuevas variables, o quizás al eliminar algunas de éste.

$$H_0: \beta = \beta_0$$

La prueba de hipótesis

$$H_1: \beta \neq \beta_0$$

El estadístico de prueba es

$$Z_0 = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{\sqrt{\sigma^2 / S_{XX}}} \equiv N(0,1)$$

lo anterior es cierto si  $\sigma^2$  es conocida. Pero como se está usando un estimador para  $\sigma^2$  se utiliza el estadístico

$$t_0 = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{se(\hat{\beta})}$$

el cual sigue una distribución  $t$  con  $N-2$  grados de l.

La prueba de hipótesis de  $H_0: \beta = 0$ , para el estadístico  $t_0$ , se rechaza si

$$|t_0| > t_{\alpha/2, N-2}$$

Al rechazar  $H_0: \beta = 0$ , se dice que el estadístico es estadísticamente significativo, por lo que  $X$  es una variable significativa de la variabilidad en  $Y$ .

*De acuerdo a la regla práctica "2-t". Si el número de grados de libertad es de 20 o más y si  $\alpha$ , nivel de significancia se fija en 0.05, entonces la hipótesis nula  $\beta = 0$  se puede rechazar en favor de la hipótesis alterna  $\beta \neq 0$ , si el valor  $t = \hat{\beta} / se(\hat{\beta})$  excede a 2 en valores absolutos.<sup>(6)</sup>*

utilizando esta regla se tiene

$$t_0 = \hat{\beta} / se(\hat{\beta}) > t_{\alpha/2} \quad \text{cuando } \hat{\beta} > 0$$

$$t_0 = \hat{\beta} / se(\hat{\beta}) < -t_{\alpha/2} \quad \text{cuando } \hat{\beta} < 0$$

#### ◆ Estimación por máxima verosimilitud

Este es otro método por el cual se pueden obtener los estimadores de la línea de regresión. Es un método de estimación puntual, con algunas propiedades teóricas más fuertes que las del método de MCO.

Este método consiste en la estimación de parámetros desconocidos de tal manera que la probabilidad de observar un determinado valor de la muestra  $Y$  es la más elevada (o máxima) posible.

Se asume que los errores en el modelo de regresión son  $NID(0, \sigma^2)$ , entonces las observaciones en esta muestra son variables aleatorias normales e independientemente distribuidas con media  $\beta_1 + \beta_2 X_i$  y varianzas  $\sigma^2$ . La función de máxima verosimilitud es encontrada por medio de la distribución conjunta de las observaciones. Donde las observaciones son dadas y los parámetros  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ , y  $\sigma^2$  son constantes no conocidas. Los estimadores de máxima verosimilitud de la pendiente y la intersección, son idénticos a los estimadores de mínimos cuadrados, el estimador de  $\sigma^2$  es un estimador sesgado, este sesgo es pequeño si  $N$  es moderadamente grande.

Los estimadores de máxima verosimilitud son *insesgados* (incluyendo  $\sigma^2$ , el cual es insesgado como  $N$  llega a ser grande) y tienen mínima varianzas. También son estimadores *consistentes* (consistencia, quiere decir que en una muestra grande, es la propiedad que indica que los estimadores difieren del verdadero valor del parámetro por una cantidad muy pequeña como  $N$  llega a ser grande) y están en un conjunto de estadísticos *suficientes* (esto implica que los estimadores contienen toda la "información" de la muestra original de tamaño  $N$ ).

#### 4.2.6 Coeficiente de determinación $r^2$ : medida de la "bondad de ajuste"

La llamada bondad de ajuste de la línea de regresión ajustada a un conjunto de datos, intenta encontrar en qué medida se ajusta la línea de regresión muestral a los datos.

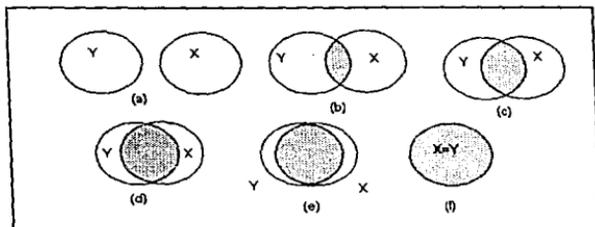


Figura 4.2 Explicación heurística del  $r^2$  .

Fuente: Véase Damodar N. Gujarati, *Econometría*, McGraw-Hill, México (1995), p. 68.

**Explicación heurística del  $r^2$  utilizando el diagrama de Venn o Ballentine**

En la figura 4.2, el círculo  $Y$  representa la variación en la variable dependiente  $Y$ , en tanto que el círculo  $X$  representa la variación en la variable explicativa  $X$ . La intersección de los dos círculos indica hasta qué punto la variación en  $Y$  se explica mediante la variación en  $X$ . Cuando mayor sea la magnitud del término de intersección, mayor será la variación en  $Y$  que es explicada por la variable  $X$ . El  $r^2$  es simplemente una medida numérica de esta intersección. Como lo ilustra la figura, para (a)  $r^2 = 0$ , y en (f)  $r^2 = 1$ .

El procedimiento para calcular la  $r^2$ , es de la siguiente forma

$$Y_i = \hat{Y}_i + e_i$$

Puede expresarse en forma de desviación

$$Y_i - \bar{Y} = (\hat{Y}_i - \bar{Y}) + (Y_i - \hat{Y}_i)$$

y elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación

$$\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^N (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^N (\hat{Y}_i - \bar{Y})(Y_i - \hat{Y}_i)$$

de donde

$$2 \sum_{i=1}^N (\hat{Y}_i - \bar{Y})(Y_i - \hat{Y}_i) = 0$$

por lo que sólo se expresa

$$\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^N (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

$$\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2 = \hat{\beta}^2 S_{xx} + \sum_{i=1}^N e_i^2$$

$$S_{yy} = \hat{\beta}^2 S_{xx} + \sum_{i=1}^N e_i^2$$

debido a que  $(\hat{Y}_i - \bar{Y}) = \hat{\beta}(X_i - \bar{X})$ .

Las sumas de cuadrados que aparecen en la expresión anterior pueden describirse de la siguiente manera:  $\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2 = S_{yy}$  = variación total de los valores reales de  $Y$  con respecto a su media muestral, se conoce como *suma total de cuadrados*).

$\sum_{i=1}^N (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = \hat{\beta}_1^2 (X - \bar{X})^2 = \hat{\beta}_1^2 S_{xx}$  = variación de los valores estimados de  $Y$  con respecto a su media se conoce como *suma de cuadrados debida a la regresión*, o *suma explicada de cuadrados (SEC)*.  $\sum_{i=1}^N e_i^2$  = variación residual o no explicada de los valores de  $Y$  con respecto a la línea de regresión o, simplemente, *suma residual de cuadrados (SRC)*.

Por consiguiente

$$STC = SEC + SRC$$

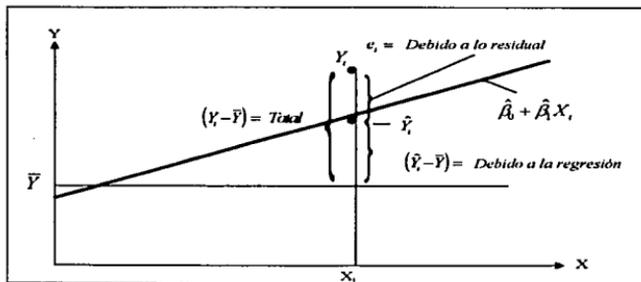


Figura 4.3 Partición de los dos componentes de la variación de  $Y$ .  
Fuente: Véase Damodar N. Gujarati, *Econometría*, McGraw-Hill, México (1995), p. 69.

la expresión  $STC = SEC + SRC$  nos muestra que la variación de los valores observados de  $Y$  alrededor de su media pueden dividirse en dos componentes, el primero atribuible a la línea de regresión y el segundo a las fuerzas aleatorias, ya que no todas las observaciones reales de  $Y$  caen sobre la línea de regresión ajustada, lo anterior se muestra en la figura 4.3.

Dividiendo ambos lados por la  $STC$ , se obtiene

$$1 = \frac{SEC}{STC} + \frac{SRC}{STC}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2} + \frac{\sum_{i=1}^N e_i^2}{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2}$$

Se define a  $r^2$  como

$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{SEC}{STC}$$

$$= 1 - \frac{SRC}{STC}$$

como  $STC$  es una medida de variabilidad en  $Y$  sin considerar el efecto de la variable explicativa  $X$ , y  $SRC$  es una medida de variabilidad en  $Y$  después de que ha sido considerada la variable  $X$ . Y porque  $0 \leq SRC \leq STC$ , se sigue  $0 \leq r^2 \leq 1$ .

A  $r^2$  se le conoce como el coeficiente de determinación (muestral), y es la más ampliamente utilizada medida de la bondad del ajuste de una línea de regresión. Donde  $r^2$  mide la proporción o porcentaje de la variación total en  $Y$  explicada por el modelo de regresión.

Sus propiedades más importantes son:

1. Es una cantidad no negativa.
2. Sus límites son  $0 \leq r^2 \leq 1$ . Un  $r^2$  de 1 denota un ajuste perfecto, mientras que un  $r^2$  de 0 nos dice que no existe relación alguna entre la variable dependiente ( $Y$ ) y la (s) variables (s) explicativa (s).

#### 4.2.7 Coeficiente de correlación muestral

Una cantidad muy estrechamente relacionada a  $r^2$  pero conceptualmente diferente es el coeficiente de correlación; el cual es una medida de grado de asociación lineal entre dos variables.

En muchas ocasiones se habla de análisis en los cuales las dos variables son aleatorias. Se asume que las observaciones  $(Y_i, X_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , son variables aleatorias distribuidas conjuntamente. En estos modelos las inferencias que resultan son condicionales a los valores  $X$ 's observados. La distribución conjunta de  $Y$  y  $X$  es la distribución normal bivariada<sup>(6)</sup>; esto es,

$$f(Y, X) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \left(\frac{Y-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{X-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{Y-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{X-\mu_2}{\sigma_2}\right) \right]\right\}$$

donde  $\mu_1$  y  $\sigma_1^2$  son la media y la varianza de  $Y$  y  $\mu_2$  y  $\sigma_2^2$  son la media y la varianza de  $X$ , y

$$\rho = \frac{E(Y - \mu_1)(X - \mu_2)}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$$

(rho)  $\rho$  es el coeficiente de correlación entre  $X$  y  $Y$ . El numerador es la covarianza de  $Y$  y  $X$ .

La distribución condicional de  $Y$  para un valor de  $X$  dado es

$$f(Y|X) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{Y - \beta_0 - \beta_1 X}{\sigma_{12}}\right)^2\right]$$

Donde

$$\beta_0 = \mu_1 - \mu_2 \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad \beta_1 = \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad \text{y} \quad \sigma_{12}^2 = \sigma_1^2 (1 - \rho^2)$$

La distribución condicional de  $Y$  dado  $X$  es una normal con media  $E(Y|X_i) = \beta_0 + \beta_1 X$  y varianza  $\sigma_{12}^2$ . La media de la distribución condicional de  $Y$  dada  $X$ , es la línea recta del modelo de regresión. Existe una relación entre el coeficiente de correlación y la pendiente. Se puede ver que si  $\rho = 0$ , entonces  $\beta_1 = 0$ , lo cual implica que no existe relación lineal de  $Y$  en  $X$ , es decir  $X$  no es útil para explicar  $Y$ .

El método de máxima verosimilitud puede ser usado para estimar los parámetros  $\beta_0$  y  $\beta_1$ .

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \quad \text{y} \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i (X_i - \bar{X})}{\left[\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2\right]^{1/2}} = \frac{S_{XY}}{S_{XX}}$$

Y los estimadores de los parámetros son los mismos que en mínimos cuadrados, donde se asumió que  $X$  es una variable controlable. Esto resulta por que la variable aleatoria  $Y$  dada  $X$  es independiente y normalmente distribuida con media  $E(Y|X_i) = \beta_0 + \beta_1 X$  y varianza  $\sigma_{12}^2$ , lo cual se sostiene por la distribución conjunta de  $Y$  dado  $X$  tal que la distribución condicional de  $Y$  dado  $X$  es una normal.

El estimador de  $\rho$  es el coeficiente de correlación muestral

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i (X_i - \bar{X})}{\left[\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{S_{YX}}{[S_{XX}S_{YY}]^{1/2}}$$

Note que

$$\hat{\beta}_1 = \left( \frac{S_{YX}}{S_{XX}} \right)^{1/2} r$$

Así que la pendiente  $\hat{\beta}_1$  es sólo el coeficiente de correlación  $r$  multiplicado por una factor escala que es la raíz cuadrada del "cambio" en las  $Y$ 's dividido por el "cambio" en las  $X$ 's. Por lo que,  $r^2$  y  $r$  están fuertemente relacionadas, aunque provean diferente información. El coeficiente de correlación muestral  $r$  es una medida de la asociación entre  $Y$  y  $X$ , mientras  $\hat{\beta}_1$  mide la predicción de cambio en  $Y$  por una unidad de cambio en  $X$ . En caso de que  $X$  sea una variable controlable,  $r$  no tiene significado porque la magnitud de  $r$  depende del espacio determinado de  $X$ .

Se puede escribir

$$\begin{aligned} r^2 &= \hat{\beta}_1^2 \frac{S_{XX}}{S_{YY}} \\ &= \frac{\hat{\beta}_1 S_{YX}}{S_{YY}} \\ &= \frac{SEC}{S_{YY}} \\ &= r^2 \end{aligned}$$

lo que se conoce como coeficiente de determinación. Esto es, el coeficiente de determinación es sólo en cuadrado del coeficiente de correlación entre  $Y$  y  $X$ .

◊ Prueba de significancia para el coeficiente de correlación

$$H_0: \rho = 0$$

La prueba de hipótesis

$$H_1: \rho \neq 0$$

El estadístico de prueba es

$$t_0 = \frac{r\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

el cual sigue una distribución  $t$  con  $N-2$  grados de 1.

Se rechaza la hipótesis nula si

$$|t_0| > t_{\alpha/2, N-2}$$

si  $H_0: \rho = 0$  es verdadera, podemos decir que no existe asociación lineal entre las variables  $Y$  y  $X$ .

Propiedades del coeficiente de correlación

1. Puede ser positivo o negativo; su signo dependerá del signo del numerador, que mide la *covariación* de las dos variables.
2. Tiene como límites  $-1 \leq r \leq 1$
3. Es de naturaleza simétrica
4. Es independiente de origen de la escala.
5. Si  $Y$  y  $X$  son estadísticamente independientes, el coeficiente de correlación entre ellas es cero; si esto sucede no se puede inferir que las dos variables sean independientes. Una correlación igual a cero no implica necesariamente independencia.
6. Es una medida de asociación lineal o dependencia lineal únicamente, no tiene sentido utilizarla para relaciones no lineales.
7. Aunque mide asociación lineal entre dos variables, no necesariamente implica una relación de causa-efecto.

#### 4.2.8 Regresión lineal múltiple

Hasta el momento se ha presentado un análisis con dos variables, es decir, el análisis de regresión simple. En la práctica es común explicar el comportamiento de la variable dependiente a partir de dos o más variables explicativas, a este tipo de análisis se le llama análisis de regresión lineal múltiple.

El análisis de regresión múltiple se desarrolla por medio del enfoque matricial y se expresa de la siguiente forma

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \epsilon$$

el cual es llamado modelo de regresión lineal múltiple con  $k$  variables explicativas, y los parámetros  $\beta_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, k$ , son llamados coeficientes de regresión.

#### ◆ Estimación de los parámetros del modelo

Se escribe el modelo de la siguiente forma

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + \epsilon_i \\ = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j X_{ij} + \epsilon_i \quad i=1, 2, \dots, N$$

La función de mínimos cuadrados es

$$S(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 \\ = \sum_{i=1}^N \left( Y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^k \beta_j X_{ij} \right)^2$$

La función  $S$  es minimizada con respecto a  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  y los estimadores de mínimos cuadrados  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k$  deben satisfacer

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \hat{\beta}_k} \right|_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k} = -2 \sum_{i=1}^N \left( Y_i - \hat{\beta}_0 - \sum_{j=1}^k \hat{\beta}_j X_{ij} \right) X_{ik} = 0$$

y

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \hat{\beta}_j} \right|_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k} = -2 \sum_{i=1}^N \left( Y_i - \hat{\beta}_0 - \sum_{j=1}^k \hat{\beta}_j X_{ij} \right) X_{ij} = 0, \quad j=1, 2, \dots, k$$

A partir de estas ecuaciones se encuentran las ecuaciones normales de mínimos cuadrados. Para poder encontrar la solución es más conveniente que sea expresado en notación matricial.  $Y = X\hat{\beta} + \varepsilon$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \dots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & \dots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & \dots & X_{nk} \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

se desea encontrar un vector de mínimos cuadrados que minimice

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \varepsilon' \varepsilon = (Y - X\beta)' (Y - X\beta)$$

$S(\beta)$  puede ser expresado como

$$S(\beta) = Y'Y - \beta'X'Y - Y'X\beta + \beta'X'X\beta \\ = Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta$$

### Metodologías para el análisis

Los estimadores de mínimos cuadrados deben satisfacer

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\hat{\beta}} = -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0$$

Se simplifica a

$$X'X\hat{\beta} = X'Y$$

Finalmente, los estimadores de mínimos cuadrados están dados por

$$\hat{\beta} = X'Y(X'X)^{-1}$$

#### • Pruebas de significancia en el análisis de regresión múltiple

##### ◊ La prueba de significancia de la regresión

Es una prueba que determina si existe una relación lineal entre la variable de respuesta  $Y$  para al menos una variable explicativa.

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$$

La prueba de hipótesis

$$H_1: \beta_j \neq 0 \text{ para al menos una } j, \text{ con } j=1, 2, \dots, k$$

El estadístico de prueba es

$$F_0 = \frac{SEC / k}{SRC / (N - k - 1)} = \frac{MEC}{MRC}$$

El cual sigue una distribución  $F$  con  $(k, N-k-1)$  grados de libertad.

Se rechaza  $H_0$  si

$$F_0 > F_{\alpha, k, N-k-1}$$

Con esta prueba podemos concluir si se rechaza, que las variables explicativas o al menos una son significativas para explicar el comportamiento de la variable dependiente (variable respuesta).

##### ◊ Prueba de significancia individual para cada coeficiente de la regresión

Con esta prueba se evalúa por separado cada uno de los coeficientes estimados a partir de las variables explicativas en el modelo.

$$H_0: \beta_j = 0$$

La prueba de hipótesis

$$H_1: \beta_j \neq 0 \quad \text{para } j=1, 2, \dots, k$$

El estadístico de prueba es

$$t_0 = \hat{\beta}_j / se(\hat{\beta}_j)$$

El cual sigue una distribución  $t$  con  $(N-k-1)$  grados de libertad.

Se rechaza  $H_0: \beta_j = 0$  si

$$|t_0| > t_{\alpha/2, N-k-1}$$

Si  $H_0: \beta_j = 0$  no es rechazada, esto indica que la variable explicativa puede ser eliminada del modelo, es decir, que la variable no es significativa.

• Coeficiente de determinación múltiple

El coeficiente de determinación múltiple es el mismo que para la regresión simple, pero se denota por  $R^2$ .

$$R^2 = \frac{SEC}{STC} = 1 - \frac{SRC}{STC}$$

Este estadístico debe ser usado con precaución, siempre existe un incremento en éste al agregar una nueva variable al modelo, esto no implica necesariamente que el nuevo modelo es superior al anterior. Su magnitud también depende del rango de variabilidad en la variable explicativa. Generalmente éste incrementa como las  $X$ 's incrementan y decrece como las  $X$ 's decrecen. Es importante mencionar que un valor cercano a uno, no necesariamente implica que el modelo de regresión será un buen predictor.

Existe un coeficiente de determinación alternativo que se define como

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{SRC / (N - k)}{STC / (N - 1)}$$

Y se escribe

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{SRC / (N - k)}{STC / (N - 1)} = 1 - \frac{N-1}{N-k} (1 - R^2)$$

en donde  $k$  = número de parámetros en el modelo, incluyendo el término de intersección.

Este coeficiente se denomina ajustado; el término ajustado implica que el coeficiente se ajusta por los grados de libertad asociados con las sumas de cuadrados que entran en la ecuación. Al comparar los dos coeficientes de determinación, el ordinario y el ajustado si no existe diferencia podemos decir que el valor del coeficiente es bueno. Por ejemplo, al agregar una variable más al modelo, el coeficiente de determinación ordinario siempre incrementa, pero el coeficiente de determinación ajustado penaliza en el análisis la inclusión de variables no necesarias en el modelo. Por lo consiguiente muchos analistas prefieren utilizar éste último.

#### 4.2.9 Conceptos importantes en el modelo de regresión

- Autocorrelación

El término *autocorrelación* se define como la "correlación existente entre los miembros de una serie de observaciones ordenadas en el tiempo". El modelo clásico de regresión supone que el término perturbación asociado a una observación no está influenciado por el término de perturbación asociado a cualquier otra observación. Si existe tal dependencia tenemos autocorrelación.

El análisis de los residuales es importante, ya que éstos deben ser un proceso de ruido blanco, es decir, un conjunto de variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas como una distribución normal con media 0, y varianza  $\sigma^2$ . Se pretende obtener residuales no correlacionados, es decir, que no exista dependencia entre ellos, y se puede examinar con la función de

autocorrelación definida como 
$$\rho_v = \frac{\text{cov}(e_i, e_j)}{V(e_i) \cdot V(e_j)}$$

Si existe autocorrelación en los residuales, se dice que éstos no tienen un comportamiento de ruido blanco, y en el modelo de regresión lineal se dice que faltan variables que expliquen el comportamiento de la variable respuesta.

- Heterocedasticidad

Uno de los supuestos importantes en el modelo clásico de regresión lineal es que la varianza del término de perturbación  $u_i$ , condicional a los valores escogidos de las variables explicativas, es un número constante igual a  $\sigma^2$ . Este es el supuesto de *homocedasticidad* o igual (homo) *dispersión* (cedasticidad), es decir, *igual varianza*.

La heterocedasticidad que detecta graficando los residuales al cuadrado con respecto a  $\hat{Y}_i$  como un diagrama de dispersión, donde deben presentar horizontalidad. Cuando se presentan problemas de varianza no constante podemos aplicar transformaciones a las series. Existen varias transformaciones comúnmente usadas para estabilizar la varianza.

$$Y' = \sqrt{Y} ; Y' = \ln(Y)$$

$$Y' = (Y)^{-1/2} ; Y' = (Y)^{-1}$$

La varianza no constante no sólo se puede identificar en los residuales, este comportamiento se puede visualizar al observar las series de los datos originales.

#### • Multicolinealidad

El concepto de multicolinealidad implicaba la existencia de una relación lineal "perfecta o exacta" entre algunas o la totalidad de las variables explicativas de un modelo de regresión. Actualmente se utiliza este término como aquella situación en donde las variables  $X$ 's están intercorrelacionadas, pero no en forma perfecta. Si existen dos variables explicativas, la *intercorrelación* se puede medir por el coeficiente de correlación simple. Pero si existen más de dos variables, la intercorrelación se puede medir a través de los coeficientes de correlación parcial o por el coeficiente de correlación múltiple  $R$  de una variable  $X$  con las demás variables  $X$ 's consideradas conjuntamente. Se debe tener cuidado en el análisis de no tener multicolinealidad, ya que si existe el modelo será pobre.

#### 4.2.10 Características a examinar en los diferentes usos del análisis de regresión

1. *Descripción de datos.* Se busca encontrar las ecuaciones de regresión con la suma residual de cuadrados más pequeña. Es importante tomar en cuenta que al eliminar algunas variables explicativas se da un pequeño decremento en esta suma. Pero en general es preferible describir el modelo con pocas variables mientras sea posible.
2. *Predicción.* Se busca encontrar un modelo donde la media residual de cuadrados sea mínima. Además, que la media explicada de cuadrados sea minimizada, lo que implicaría que las variables con pequeños efectos deben ser borradas del modelo.
3. *Estimación de parámetros.* Se deben considerar los sesgos que resulten al eliminar ciertas variables y las varianzas de los coeficientes estimados. Se debe tener cuidado con la multicolinealidad, ya que si ésta existe los coeficientes de la regresión podrían ser pobres.
4. *Control.* La estimación correcta de los parámetros es importante. Esto implica que los errores estándar de los coeficientes de regresión deben ser pequeños; esto es, porque los coeficientes de la regresión representan los efectos de las variables explicativas. Debemos tomar en cuenta también si existe multicolinealidad, si esto sucede los coeficientes estimados de la regresión podrían ser estimadores pobres de los efectos de las variables explicativas individuales.

## 4.3 Metodología Box-Jenkins

### 4.3.1. Antecedentes

La metodología surge por la necesidad en la planeación, para poder predecir el futuro como una herramienta importante para la toma de decisiones. La cual presenta bases fuertes en la estadística en comparación con otras metodologías para obtener pronósticos. Además, proporciona un procedimiento sistemático para el análisis y pronóstico de series de tiempo lo bastante general como para manejar prácticamente todos los patrones de datos acerca de las series de tiempo observados en forma empírica.

Esta metodología consiste en que con base a datos históricos del fenómeno de interés se ajusten a un modelo y a partir de éste se generen los pronósticos. Una facilidad que da esta metodología es que, se pueden obtener varios modelos, y en base al análisis de cada uno de ellos, se selecciona cual es el mejor.

Se llama así la metodología, por sus autores; George E.P. Box y Gwilym M. Jenkins, que la dieron a conocer en 1976 con la publicación *TIME SERIES ANALYSIS, Forecasting and Control*.

### 4.3.2 Construcción de modelos para series univariadas

El método de Box-Jenkins consiste en extraer los movimientos predecibles de los datos observados; esto es la serie de tiempo se descompone en varios componentes, algunas veces llamados "filtros", precisamente porque la filosofía del método consiste en detectar las distintas componentes usando los filtros correspondientes, hasta obtener residuales no predecibles cuyo comportamiento tiene poca influencia en el resultado final.

El enfoque de Box-Jenkins hace uso de tres filtros lineales: *el autorregresivo, el de integración y el de promedios móviles*, como se muestra en la figura 4.4.



Figura 4.4 Filtros lineales del enfoque Box-Jenkins.

Fuente: Véase González Videgaray Muria del Carmen, *Modelos de Decisión con Procesos Estocásticos II (Metodología Box-Jenkins)*, U.N.A.M., E.N.E.P Acatlán, México (1990), p. 6.

La metodología Box-Jenkins se basa en dos ideas básicas para la construcción de modelos

**I. Parsimonia.** Este principio es importante al obtener modelos matemáticos, para los cuales empleamos ciertas constantes o parámetros, donde estos valores deben ser estimados a partir de los datos. Un modelo nunca puede llegar a ser una descripción completamente exacta de la realidad; para describir la realidad exactamente se tendría que desarrollar un modelo tan complejo que no sería útil en la práctica. Por ello, es importante emplear el *menor número posible de parámetros* para una representación adecuada del modelo. La regla principal del principio de parsimonia es el uso de parámetros para los cuales llega a ser claro el proceso. (4.5)

**II. Mejoramiento iterativo.** La construcción de modelos de acuerdo a la técnica de Box-Jenkins (1970), es un proceso iterativo. Este proceso iterativo para construir modelos lineales de series de tiempo consiste de cuatro pasos. El proceso se muestra gráficamente en la figura 4.5.

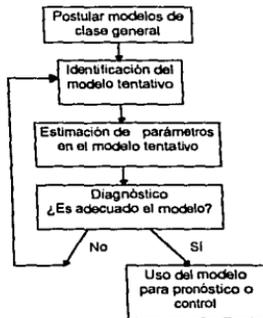


Figura 4.5 Pasos en el proceso iterativo para la construcción del modelo.  
Fuente: Venso Box George E. P., Jenkins Gwilym M., Time Series Analysis Forecasting and Control, Prentice Hall, USA (1976). p. 19.

1. **Identificación** de un posible modelo dentro de la clase de modelos ARIMA; es decir, determinación de los valores de los parámetros,  $p$ ,  $d$  y  $q$  que especifiquen el modelo ARIMA apropiado para la serie en estudio.

2. **Estimación** de los parámetros involucrados en el modelo, a través de técnicas eficientes de estimación no-lineal.

3. **Verificación** del ajuste adecuado proporcionado por el modelo y de que los supuestos básicos, implícitos en el modelo, se satisfagan; donde de no satisfacerse, se determinan las modificaciones necesarias y se repiten las etapas anteriores hasta que la verificación indique resultados aceptables; y por último,

4. **Uso del modelo** para los fines predeterminados que tenga en mente el investigador al construirlo; generalmente son de pronóstico, control, simulación o explicación del fenómeno en estudio.

Con la metodología de Box-Jenkins, se identifica un modelo del tipo ARIMA, con base en la función de autocorrelación (FAC) y la función de autocorrelación parcial (FACP), ya identificado el modelo se estiman los parámetros y con base en el diagnóstico se decide si es adecuado o no; siendo éste no adecuado se regresa a la etapa de identificación; y si es adecuado se procede a obtener los pronósticos.

Para hacer el diagnóstico es muy importante el estudio de los residuales ya que con base en éstos es como se determina si el modelo es adecuado o no. Por otra parte, se debe tener presente que hay modelos que se ajustan a los datos pero que generan pronósticos inaceptables. Cuando se presenta éste tipo de situación hay que regresar a la identificación, o inclusive, revisar si el método es realmente adecuado. Una forma funcional más detallada de la metodología Box-Jenkins se presenta en la figura 4.6.

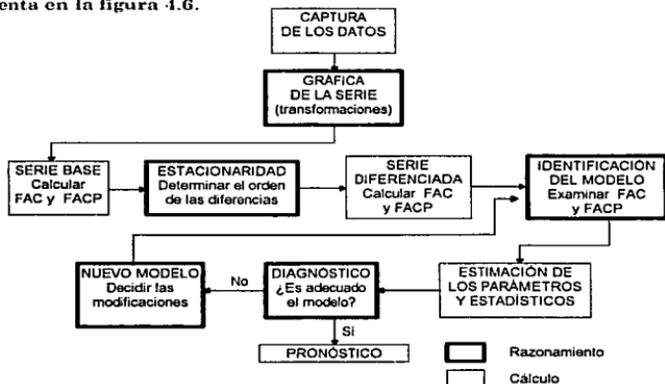


Figura 4.6 Diagrama funcional de la metodología Box-Jenkins  
 Fuente: Véase González Vidogaryy María del Carmen, Modelos de Decisión con Procesos Estocásticos II (Metodología Box-Jenkins), U.N.A.M., E.N.E.P Acatlán, México (1990), p. 7.

Para utilizar la metodología se requiere de al menos 50 observaciones y es preferible 100 o más para una buena identificación del modelo. Cabe mencionar que los procedimientos empleados en la identificación son inexactos y requieren de mucho razonamiento y experiencia, así como de conocer el fenómeno en estudio. La idea principal es elegir un modelo sencillo y tratar de mejorarlo.

Antes de pasar a describir cada uno de los pasos de la metodología, se deben conocer algunos conceptos importantes para el entendimiento de ésta.

#### 4.3.3 Series de tiempo vistas como procesos estocásticos

Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias asociadas a un conjunto índice de números reales, de forma tal que a cada elemento del conjunto le corresponda una y sólo una variable aleatoria, esto se escribirá como  $\{Z(\Gamma); \Gamma \in T\}$ , en donde  $T$  es el conjunto índice y  $Z(\Gamma)$  es la variable aleatoria correspondiente al elemento  $\Gamma$  de  $T$ . Si  $T$  es un intervalo de números reales, ya sea cerrado o abierto, se dirá que el proceso estocástico es continuo, y si  $T$  es un conjunto infinito pero numerable, el proceso estocástico se dirá que es discreto.

Se concibe entonces a una serie de tiempo como la sucesión de observaciones generadas por un proceso estocástico cuyo conjunto índice se toma en relación al tiempo.

El comportamiento de una variable aleatoria  $Z$  puede caracterizarse a través de su función de densidad  $f(Z)$ . En general,  $N$  variables aleatorias, y en consecuencia un proceso estocástico, podrán describirse mediante la función de densidad conjunta  $f(Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$ . Donde se supone que las observaciones que se tienen provienen de variables aleatorias independientes, de tal forma que con el conocimiento de las funciones de densidad individuales, es posible obtener la función de densidad conjunta.

En el caso de series de tiempo se supone que existe toda una estructura de correlación entre las observaciones; por consiguiente, no es posible obtener la función de densidad conjunta directamente, por ello se utiliza otra forma para caracterizar a las variables aleatorias que intervienen. <sup>(6)</sup>

#### 4.3.4 Uso de operadores y polinomios de retraso

El operador de retraso, se denota por la letra  $B$  (del inglés Backward). Se define a través de la relación

$$BZ_t = Z_{t-1} \text{ para toda } t$$

por aplicación sucesiva del operador  $B$  se obtiene

$$B^2 Z_t = B(BZ_t) = Z_{t-2}$$

$$B^3 Z_t = B(B^2 Z_t) = Z_{t-3}$$

⋮

$$B^k Z_t = B(B^{k-1} Z_t) = Z_{t-k}$$

así que, en general la expresión es

$$B^k Z_t = Z_{t-k} \quad \text{para } k = 0, 1, 2 \text{ y para toda } t$$

Al "multiplicar" a  $B^k$  por  $Z_t$ , se obtiene la variable retrasada  $k$  periodos y, debido a que  $B^0 = 1$ , se tiene  $B^0 Z_t = Z_t$ . El operador modifica toda la sucesión de valores  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_t, \dots, Z_N\}$ , y la transforma en la nueva sucesión  $\{Z_{t-k}, Z_{t-k+1}, \dots, Z_{t-1}, \dots, Z_{N-k}\}$ ; así la serie que originalmente constaba de  $N$  observaciones, se reducirá a una serie de solamente  $N - k$  observaciones, al haber aplicado el operador  $B^k$ .

El operador diferencia  $\nabla$ , se encuentra íntimamente ligado con el operador  $B$  y es de uso frecuente. Este operador se utiliza para expresar relaciones del tipo  $Y_t = Z_t - Z_{t-1}$ ; es decir, se define a  $\nabla$  a través de

$$\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1} \quad \text{para toda } t$$

entonces  $Y_t$  puede escribirse como  $Y_t = \nabla Z_t$ .

La relación que liga a  $\nabla$  con  $B$  es la siguiente

$$\nabla = 1 - B \quad \text{o sea} \quad \nabla Z_t = (1 - B)Z_t$$

debido a que  $\nabla^k$  es en realidad un binomio elevado a la  $k$ -ésima potencia; su forma general es

$$\nabla^k Z_t = (1 - B)^k Z_t$$

El uso de los operadores de retraso es importante para poder representar modelos de una manera más simplificada, y el operador diferencia es útil en los problemas de tendencia en las series.

#### 4.3.5 Modelos estocásticos lineales

Los modelos estocásticos que se estudian a través de la metodología Box-Jenkins, se basan en la idea de Yule (1927), donde una serie de tiempo cuyos valores sucesivos pueden ser altamente dependientes; es generada a partir de una serie de choques aleatorios independientes  $\{e_t\}$ . Estos choques aleatorios son supuestas realizaciones independientes de una variable aleatoria, que sigue una distribución, usualmente se asume una normal, teniendo media cero y varianza  $\sigma_e^2$ .

A la sucesión de variables aleatorias  $\{e_t\}$ , se le conoce como el proceso de ruido blanco. Esta terminología surge del concepto de ruido blanco que se utiliza frecuentemente en estudios de ingeniería, donde se pretende distinguir a las señales con mensajes de simples ruidos.

Yule expresa el proceso  $\{Z_t\}$  en función de  $\{e_t\}$  por medio de la relación lineal

$$\begin{aligned} Z_t &= \mu + e_t + \psi_1 e_{t-1} + \psi_2 e_{t-2} + \dots \\ &= \mu + \psi(B)e_t \end{aligned}$$

en general  $\mu$  es el parámetro que determina el nivel del proceso y  $\psi(B)$  es el polinomio de retraso. Donde  $\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots$  convierte al proceso  $\{e_t\}$  en el proceso  $\{Z_t\}$ , el cual se muestra en la figura 4.7.

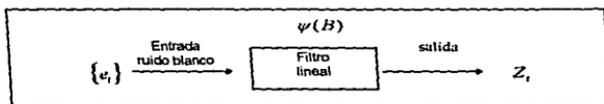


Figura 4.7 Filtro lineal que transforma  $\{e_t\}$  en  $\{Z_t\}$

Fuente: Véase Box George E. P., Jenkins Gwilym M., Time Series Analysis. Forecasting and Control, Prentice Hall, USA (1976), p. 8.

A continuación se mencionan algunos modelos estocásticos lineales.

Un modelo estocástico, el cual puede ser extremadamente útil en la representación de ciertas series de tiempo es el llamado modelo *autorregresivo*, y se define como

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)(Z_t - \mu) = e_t$$

donde  $\mu$  denota a la media de la serie (o al nivel del proceso), de tal forma que  $Z_t - \mu$  representa la desviación de  $Z_t$  respecto a la media;  $\{e_t\}$  es una sucesión de variables aleatorias con ciertas características y  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  son parámetros que sirven para relacionar a las sucesiones  $\{e_t\}$  y  $\{Z_t\}$ , estos modelos pueden expresarse mediante la relación

$$\phi(B)(Z_t - \mu) = e_t$$

Otro tipo de modelo, de gran importancia práctica en la representación de series de tiempo, es el llamado modelo de *promedios móviles* y está definido por

$$Z_t - \mu = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)e_t; \text{ donde } \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q \text{ son parámetros.}$$

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Y se puede expresar como

$$Z_t - \mu = \theta(B)e_t$$

Grandes facilidades en el ajuste de series se obtiene con la combinación de los modelos anteriores, a los que se les conoce como modelos *autorregresivos de promedios móviles*, se les representa por medio de la ecuación

$$\phi(B)(Z_t - \mu) = \theta(B)e_t$$

Finalmente, existe un modelo que describe a series de tiempo estacionarias y no estacionarias; esto es, se hace uso de polinomios de retraso y del operador diferencia. El cual es llamado *modelo autorregresivo integrado y de promedios móviles*, ARIMA.

$$\phi(B)\nabla^d Z_t = \theta(B)e_t$$

#### 4.3.6 Procesos estacionarios

Una muy especial clase de procesos estocásticos, llamados procesos estacionarios, están basados en el supuesto de que el proceso se encuentra en un estado particular de *equilibrio estadístico*. Un proceso estocástico se dice ser estrictamente estacionario si sus propiedades son no afectadas por un cambio en el tiempo.

Para poder caracterizar completamente a un proceso estocástico, es necesario conocer la función de densidad conjunta de todas las variables aleatorias involucradas; esto en la practica no es muy realista que pueda lograrse con una serie de tiempo. En términos estrictos, una serie de tiempo es estacionaria si todos sus valores tienen idéntica distribución de probabilidad en el tiempo, es decir, si todos proceden de la misma población. Puesto que los primeros momentos de las variables aleatorias resumen en buena medida a su distribución, se ha sugerido estudiar a los momentos de primero y segundo orden, es decir, a las medias, las varianzas y las covarianzas de las variables involucradas en el proceso estocástico.

Tomando una muestra, si no hay tendencia puede asumirse que la media es constante y que el valor observado para cada periodo puede representarse por esta media

$$E(Y_i) = E(Y_{i+n}) = \mu$$
$$\bar{Y} = E(Y_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i$$

Supóngase que la media de  $Z_t$  es  $\mu_t$ , es decir,

$E(Z_t) = \mu_t$ , entonces a partir de que  $Z_t = \mu + e_t + \psi_1 e_{t-1} + \psi_2 e_{t-2} + \dots$  se tiene que

$$\mu_t = \mu + E(e_t + \psi_1 e_{t-1} + \psi_2 e_{t-2} + \dots)$$

ya que  $E(e_t) = 0$  para todo  $t$ , por consiguiente la media del proceso no depende del tiempo, lo cual implica que aún cuando el proceso se aleje de la media un cierto periodo, siempre regresará a una vecindad de la misma.

Una segunda suposición, es que la varianza del proceso sea también constante, es decir,

$$\sigma_z^2 = E(Z_t - \mu)^2$$

$$\text{Var } Y_t = \text{Var } Y_{t+h} = \sigma_t^2$$

$$E[(Y_t - \bar{Y})^2] = E[(Y_{t+h} - \bar{Y})^2] = \sigma_t^2$$

Finalmente, al considerar a una serie de tiempo como un proceso estocástico se debe tomar en cuenta a todas las variables aleatorias  $Z_1, Z_2, \dots, Z_{t-1}, \dots, Z_t$ , donde resulta necesario estudiar la covarianza entre  $Z_t$  y  $Z_{t+k}$ . Dicha covarianza se denota por  $\gamma_k = \text{Cov}(Z_t, Z_{t+k})$  y está dada por

$$\gamma_k = E[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)]$$

en la práctica es común suponer que la distribución asociada con las series de tiempo es normal. Por lo que, es suficiente conocer la media  $\mu$  y la función de autocovarianza  $\{\gamma_k\}$  para caracterizar completamente a una serie estacionaria. Sin embargo, para evitar la influencia de las unidades de medida, es preferible trabajar con las autocorrelaciones.

La autocorrelación mide la correlación entre un valor observado  $Z_t$  y otro  $Z_{t+k}$ , que están separadas por un intervalo de longitud  $k$  definida a través de

$$\begin{aligned} \rho_k &= \text{corr}(Z_t, Z_{t+k}) \\ &= \frac{E[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)]}{\sqrt{E[(Z_t - \mu)^2]E[(Z_{t+k} - \mu)^2]}} = \frac{E[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)]}{\sigma_z^2} \end{aligned}$$

el valor  $\rho_k$  debe ser tal que  $-1 \leq \rho_k \leq 1$ . Este valor sólo dependerá de  $k$ ; es decir, la relación entre dos variables sólo depende del intervalo que las separa; resumiendo la función  $\rho_k$ , junto con  $\mu$  y  $\sigma^2$ , sirven para especificar a un proceso estocástico estacionario, además en ninguno aparece  $t$ , lo cual implica que ni el nivel de la serie, ni su variabilidad dependen del tiempo, y en lo que respecta a la covarianza, no existe dependencia del tiempo, pero sí de la separación ( $k$ ) que hay entre las variables.

### 4.3.7 Modelos para series de tiempo univariadas

La experiencia ha demostrado que la mayoría de los fenómenos reales de carácter ya sea económico o de otra índole, son un tanto más complejos que los procesos representables mediante las ecuaciones lineales. Por ello surgen los modelos con componente aleatoria lo que permite una mayor flexibilidad.

#### ◆ Modelos autorregresivos (AR)

Se denotará a  $Z_t$  como la serie estacionaria, que puede ser igual a la serie original; o puede ser el resultado de transformaciones y diferencias. El número resultante de observaciones disponibles dependerá de las diferencias aplicadas. A continuación se analiza el comportamiento teórico de los modelos más usuales.

#### ◆ Modelos autorregresivos de primer orden

Se dice que una serie de tiempo (estacionaria) presenta un proceso autorregresivo de primer orden si los valores actuales de la serie,  $Z_t$ , pueden expresarse como una función lineal del primer valor anterior y un choque aleatorio  $v_t$ .

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + v_t$$

donde  $\phi$  es el parámetro autorregresivo que describe el efecto de un cambio de  $Z_{t-1}$  en  $Z_t$ . Los valores  $v_t$  son conocidos como errores o ruido blanco; los cuales presentan las siguientes características

$$E(v_t) = 0$$
$$E(v_t, v_s) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } t = s \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

donde  $E(v_t, Z_{t-1}) = 0$

$v_t \sim N(0, \sigma^2)$ . (Las  $Z_t$  son desviaciones respecto a  $\bar{Z}$ , de tal forma que su media es cero.)

#### ◆ Restriciones en los parámetros: condiciones de estacionaridad

En primer lugar, la media debe ser constante

$$E(Z_t) = E(Z_{t-1}) = \mu$$
$$E(Z_t) = \phi E(Z_{t-1})$$
$$= \phi E(Z_t)$$

por lo que,  $\mu = 0$  sin importar  $\phi$ .

Además, la varianza debe ser constante

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z_t) &= E(Z_t^2) \\ &= E(\phi Z_{t-1} + e_t)^2 \\ &= E(\phi^2 Z_{t-1}^2 + 2\phi Z_{t-1}e_t) + E(e_t^2) \\ &= \phi^2 \text{Var}(Z_{t-1}) + 0 + \text{Var } e_t \end{aligned}$$

si  $\text{Var}(Z_{t-1}) = \text{Var}(Z_t) = \gamma_0$  ;  $\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$

Por tanto,  $\phi^2 < 1$  y  $-1 < \phi < 1$ ; esta condición es llamada condición de estacionalidad. Por último se analiza la función de autocorrelación

Sea

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \text{Cov}(Z_t, Z_{t-1}) \\ &= E(Z_t Z_{t-1}) \\ \gamma_1 &= \phi \text{Var}(Z_{t-1}) + \text{Cov}(e_t, Z_{t-1}) \\ &= \phi \text{Var}(Z_{t-1}) \\ &= \phi \gamma_0 \\ \gamma_2 &= \phi \gamma_1 \\ &= \phi^2 \gamma_0 \\ &\vdots \\ \gamma_k &= \phi^k \gamma_{k-1} \\ &= \phi^k \gamma_0 \\ \rho_k &= \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \\ &= \phi^k, \quad k > 0 \end{aligned}$$

Se observa que la función de autocorrelación depende únicamente de  $k$ ; por lo que, conforme  $k > 0$  crece, la función de autocorrelación tiende a cero, es decir, sus valores serán infinitos decrecientes.

\* *Función de memoria*

El proceso autorregresivo, también se puede representar, si se utiliza la ecuación de golpe o choque aleatorio que corresponde al proceso AR(1)

$$Z_t = (1 - \phi B)^{-1} e_t = e_t + \phi e_{t-1} + \phi^2 e_{t-2} + \phi^3 e_{t-3} + \dots$$

Se dice que el proceso AR(1) tiene memoria infinita pero, si el proceso es estacionario, es decir, cumple  $|\phi| < 1$ , el efecto se disipa al alejarse de  $t$ .

## Metodologías para el análisis

Se define el coeficiente de memoria con retraso  $k$  como el coeficiente de  $\epsilon_{t-k}$ .

### • Modelos autorregresivos de orden mayor AR(p)

Cuando el valor actual  $Z_t$  depende de dos o más valores anteriores; esto es, cuando  $p > 1$ , el modelo será un AR(p)

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + \epsilon_t$$
$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) Z_t = \phi(B) Z_t = \epsilon_t$$

Se les denomina autorregresivos por que el valor de la variable dependiente  $Z$  en el periodo  $t$  depende, no de los valores de un cierto conjunto de variables independientes, como sucede en el modelo de regresión, sino de sus propios valores, observados en periodos anteriores a  $t$  y ponderados de acuerdo con los coeficientes autorregresivos  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ .

Para verificar el supuesto de estacionaridad, se calculan las ecuaciones de Yule-Walker, en base a las autocorrelaciones obtenidas. Para el proceso AR(p), las ecuaciones están dadas por

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1}$$
$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p \rho_{p-2}$$
$$\dots$$
$$\rho_p = \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \dots + \phi_p$$

se obtienen los valores de las primeras  $p$  autocorrelaciones en función de los parámetros autorregresivos  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ ; para lo cual se reemplazan las autocorrelaciones teóricas por las autocorrelaciones estimadas. De acuerdo a las condiciones de estacionaridad, las autocorrelaciones serán siempre decrecientes infinitas (convergencia a cero).

### • Modelos de promedios móviles (MA)

Existe una forma alternativa de representar el proceso; esto es en base a choques aleatorios ponderados en el tiempo y acumulados. Se les ha llamado promedios móviles por la similitud con este tipo de suavizamiento. El valor actual de  $Z_t$  puede representarse, como: el valor del choque aleatorio actual y el valor anterior.

“Estos modelos fueron introducidos por Yule (1926) y Slutsky (1927); la idea básica de estos modelos consiste en representar a un proceso estocástico  $\{Z_t\}$ , cuyos

valores pueden ser dependientes unos de otros, como una suma finita ponderada de choques aleatorios independientes  $\{e_t\}$ ."

• Modelos de promedios móviles de primer orden

Un modelo de promedios móviles de primer orden se representa como

$$Z_t = e_t - \theta e_{t-1}$$

donde  $\theta$  describe el efecto del choque aleatorio anterior a  $Z_t$ . Con las mismas suposiciones para

$$e_t \sim N(0, \sigma^2), E(e_t, e_s) = 0$$

Al usar promedios móviles el número de parámetros puede reducirse drásticamente y, como los parámetros deben estimarse con un número finito de puntos, es importante representar el proceso con el menor número posible de parámetros. Este es el principio de *parsimonia*, que como ya se había mencionado pretende encontrar el modelo más claro con el menor número de parámetros.

Para poder demostrar como un proceso MA reduce el número de parámetros, se muestra la equivalencia entre un proceso MA(1) y un AR( $\infty$ ), donde se demuestra como un proceso MA reduce el número de parámetros.

$$\begin{aligned} e_t &= Z_t + \theta e_{t-1} \\ e_{t-1} &= Z_{t-1} + \theta e_{t-2} \end{aligned}$$

sustituyendo en el proceso:  $Z_t = e_t - \theta e_{t-1}$ , se tiene

$$Z_t = -\theta_1 Z_{t-1} - \theta_1^2 e_{t-2} + e_t$$

y así sucesivamente

$$Z_t = -\theta_1 Z_{t-1} - \theta_1^2 Z_{t-2} - \theta_1^3 Z_{t-3} - \dots + e_t$$

a esta ecuación se le denomina forma invertida del proceso de promedios móviles y representa un proceso con un número infinito de términos autorregresivos.

• *Restricciones en los parámetros: condición de invertibilidad*

Los modelos AR presentan condiciones de estacionaridad, asimismo, los modelos MA también las presentan. La media y la varianza no imponen restricciones en cuanto a estacionaridad

$$\begin{aligned} E(Z_t) &= E(e_t - \theta e_{t-1}) = 0 \\ \text{Var}(Z_t) &= E[(e_t - \theta e_{t-1})^2] = (1 + \theta^2) \sigma_e^2 \end{aligned}$$

las autocovarianzas están dadas por

$$\text{Cov}(Z_t, Z_{t-1}) = E[(v_t - \theta_1 v_{t-1})(e_{t-1} - \theta_1 e_{t-2})] = -\theta_1 \sigma^2$$

$$\text{Cov}(Z_t, Z_{t-k}) = 0, \quad k > 1$$

Entonces

$$\gamma_0 = (1 - \theta_1^2) \sigma^2$$

$$\gamma_1 = \text{Cov}(Z_t, Z_{t-1}) = -\theta_1^2 \sigma^2$$

$$\gamma_2 = \text{Cov}(Z_t, Z_{t-2}) = E(e_t - \theta_1 e_{t-1})(e_{t-2} - \theta_1 e_{t-3}) = 0$$

$$\gamma_k = 0 \quad \text{para } k > 1$$

de donde la FAC es

$$\rho_k = \begin{cases} -\theta_1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

de modo que la autocorrelación también es constante y sólo depende de  $k$ .

Por lo que, las condiciones de estacionaridad no imponen restricciones directamente sobre  $\theta_1$ ; pero sería poco realista un valor  $|\theta_1| \geq 1$ . Ya que al transformar de choque aleatorio en una ecuación de forma invertida; es decir autorregresiva, se obtiene un AR( $\infty$ ); es necesario obtener coeficientes decrecientes donde  $|\theta_1| < 1$ . Cuando un proceso puede ser representado como un proceso autorregresivo, se dice que tiene la *condición de invertibilidad*.

• *Función de memoria*

"Como las autocorrelaciones para retrasos mayores de un período sean cero, indica que el proceso MA(1) "no recuerda" más allá de lo ocurrido el período anterior; esto es, tiene una memoria limitada a un solo período."<sup>(6)</sup> Dicha autocorrelación no puede ser muy elevada ya que, esto implicaría una fuerte dependencia de la observación actual con la anterior y así sucesivamente, por lo cual sería más adecuado pensar en un modelo autorregresivo.

Por la representación del proceso  $Z_t = v_t - \theta_1 v_{t-1}$ ; el error ( $e$ ) tendrá influencia sobre las observaciones  $t$  y  $t-1$ , nada más. Al momento " $t$ " el sistema sufre el efecto completo de  $e_t$ , pero al tiempo " $t+1$ " el efecto es proporcional a  $-\theta_1$ .

• Modelos de promedios móviles de orden mayor MA( $q$ )

Un proceso estocástico de promedios móviles de orden  $q$  se representa como

$$Z_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \dots - \theta_q e_{t-q}$$

donde  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  son los parámetros de promedios móviles y  $\{e_t\}$  es un proceso de ruido blanco. Para checar el supuesto de estacionariedad, se obtienen la media, la varianza y covarianzas del proceso MA( $q$ ) y se observa como no dependen del tiempo.

$$\begin{aligned} E(Z_t) &= 0 \\ \gamma_0 &= (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_e^2 \\ \gamma_k &= \begin{cases} (-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q) \sigma_e^2, & \text{si } k = 1, \dots, q \\ 0 & \text{si } k \geq q + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

y para que  $\gamma_k$  sea válida en general, se define  $\theta_0 = \theta_{q+1} = \theta_{q+2} = \dots = 0$ . De aquí es inmediato obtener la función de autocorrelación.

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2}, & \text{si } k = 1, \dots, q \\ 0 & \text{si } k \geq q + 1 \end{cases}$$

por lo que, el proceso tiene memoria limitada a  $q$  periodos.

• Modelos mezclados autorregresivos y de promedios móviles (ARMA)

Al combinar los modelos AR y MA, se obtienen los modelos autorregresivos y de promedios móviles (ARMA).

Como un ejemplo se describirá el modelo ARMA (1,1)

Supóngase modelo de la forma AR(1)

$$Z_t - \phi_1 Z_{t-1} = a_t$$

donde

$$a_t = e_t - \theta_1 e_{t-1}$$

esto es, no se tiene ruido blanco sino un error aleatorio que a su vez sigue un modelo del tipo MA(1)

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + e_t - \theta_1 e_{t-1}$$

- Restricciones sobre los parámetros: condiciones de estacionaridad e invertibilidad

$$E(Z_t) = 0$$

$$\gamma_0 = \text{Var}(Z_t) = \frac{1 + \theta_1^2 - 2\theta_1\phi_1}{1 - \theta_1^2} \sigma^2$$

$$\gamma_k = \begin{cases} \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma^2 & \text{si } k = 1 \\ \phi_1 \gamma_{k-1} & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

de donde

$$\rho_k = \phi_1^{k-1} \rho_1, \text{ para } k \geq 2$$

La condición de estacionaridad será:  $|\phi_1| < 1$

Si se sustituyen los  $e_{t-1}$  y  $e_{t-2}$  etc., en forma sucesiva, hasta obtener una ecuación de la forma invertida

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + e_t - \theta_1 e_{t-1}$$

$$e_{t-1} = Z_{t-1} - \phi_1 Z_{t-2} + \theta_1 e_{t-2}$$

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + e_t - \theta_1 (Z_{t-1} - \phi_1 Z_{t-2} + \theta_1 e_{t-2})$$

para que la invertibilidad tenga sentido, se requiere  $|\theta_1| < 1$

- Función de memoria

Si se sustituyen en forma sucesiva los  $Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots$  del ARMA (1,1), hasta obtener una ecuación de choque aleatorio

$$Z_t = e_t + (\phi_1 - \theta_1)e_{t-1} + \phi_1(\phi_1 - \theta_1)e_{t-2} + \phi_1^2(\phi_1 - \theta_1)e_{t-3} + \dots$$

se observa que los coeficientes de memoria van decreciendo en forma exponencial.

- Función de autocorrelación

La función de autocorrelación del ARMA (1,1), esta dada por

$$\rho_k = \phi_1^{k-1} \rho_1, \text{ para } k \geq 2$$

de la misma forma que en el AR(1), la FAC del ARMA (1,1) decrece a partir del valor inicial uno.

El proceso  $ARMA(p, q)$  se representa mediante

$$\phi(B)Z_t = \theta(B)e_t,$$

donde  $\phi(B)$  y  $\theta(B)$  son los polinomios de retraso de orden  $p$  y  $q$  respectivamente y  $\{e_t\}$  es un proceso de ruido blanco. Dicha generalización surge del hecho de que las series de tiempo que se observan en la práctica, muchas veces presentan características tanto de procesos  $AR$  como de procesos  $MA$ . Además, recuérdese que el principio de parsimonia sugiere construir modelos que incluyan el menor número de parámetros, lo cual puede lograrse si intervienen parámetros tanto autorregresivos como de promedios móviles.

El modelo mezclado general,  $ARMA(p, q)$ , se representa mediante

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \dots - \theta_q e_{t-q}$$

En la misma forma como en los otros modelos  $AR(p)$  y  $MA(q)$ , se obtienen restricciones tanto de estacionaridad e invertibilidad, y su función de autocorrelación será decreciente infinita (ya que incluyen una parte de tipo autorregresivo), en la cual el efecto de la parte de medias móviles desaparece después de  $q$  periodos.

#### ◆ Modelos autorregresivos e integrados de promedios móviles (ARIMA)

Los modelos autorregresivos e integrados de promedios móviles ARIMA, pueden verse como una generalización de los modelos ARMA previamente estudiados. Yaglom (1995) sugirió la posibilidad de que un cierto tipo de no-estacionariedad mostrado por algunas series de tiempo, podía representarse mediante la simple toma sucesiva de diferencias de la serie. Este tipo de modelos permiten una gran flexibilidad de representación de los modelos ARMA, ya que al aplicar el operador diferencia  $\nabla^d$  se elimina una posible tendencia polinomial de orden  $d$ , presente en la serie que se analice. Se le llama integrado ya que al hacer los pronósticos será necesario efectuar el proceso opuesto a las diferencias: "integrar" o sumar los valores para reconstruir la variable original.

*"El modelo ARIMA es la descripción más general de la respuesta de un sistema lineal discreto a una excitación puramente aleatoria en presencia de "tendencias". Tendencias comunes naturales a menudo son lineales; lineales discretas o estacionales".*

Si el proceso  $\{Z_t\}$  presenta no estacionaridad causada por la tendencia polinomial no-determinística (a la que se le denomina no estacionaridad homogénea) es posible construir el proceso estacionario  $\{W_t\}$ , a partir de

$$W_t = \nabla^d Z_t \text{ para todo } t$$

Una serie de tiempo también puede tener tendencias periódicas. En este caso un operador de diferencia puede ser

$$W_t = \nabla_s Z_t$$

donde  $s$  es el grado de diferencias periódico.

Para esta serie es posible obtener un modelo ARMA:  $\phi(B)W_t = \theta(B)v_t$ , donde éste es equivalente al modelo ARIMA

$$\phi(B)\nabla^d Z_t = \theta(B)v_t \quad d \geq 1$$

para  $(Z_t)$ , en donde  $\{v_t\}$  es un proceso de ruido blanco. El término "integrado" se refiere a que  $Z_t$  se obtiene de la relación  $W_t = \nabla^d Z_t$  por inversión del operador  $\nabla^d$ , de donde se obtiene una suma infinita (o una integración) de términos  $W_t$ ; como ejemplo se presenta que el inverso del operador  $\nabla$  es

$$\text{si } W_t = \nabla^d Z_t$$

$$Z_t = \nabla^{-1}W_t = W_t + W_{t-1} + W_{t-2} + \dots$$

El orden del polinomio de retraso  $\phi(B)$ , del exponente en el operador diferencia y el orden del polinomio de retraso  $\theta(B)$ , se acostumbra mencionar en esa secuencia, de manera que un modelo ARIMA  $(p, d, q)$  indica que consta de un polinomio autorregresivo de orden  $p$ , de una diferencia de orden  $d$  de diferencias ordinarias (las necesarias para obtener la estacionaridad) y de un polinomio de promedios móviles de orden  $q$ . De esta forma el modelo puede escribirse como

$$W_t - \phi_1 W_{t-1} - \dots - \phi_p W_{t-p} = v_t - \theta_1 v_{t-1} - \dots - \theta_q v_{t-q}$$

Se sugiere aplicar el operador diferencia el número estrictamente necesario para cancelar la componente no determinística de la no estacionaridad, pero sin llegar a tener un modelo muy complicado

Por último, se ha supuesto que el nivel del proceso estacionario  $W_t$  es cero, si esto no es así debe considerarse la existencia de una media constante  $\mu v$  del proceso, lo cual vendría a darse mayor generalidad aun a los modelos ARIMA, o sea, si se considera que

$$\phi(B)(W - \mu v) = \theta(B)v_t$$

se tendría como expresión general de un modelo ARIMA a

$$\phi(B)W'_t = \theta_t + \theta(B)v_t,$$

$\theta_t = \mu n^d(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$ . La interpretación asociada con este nuevo parámetro  $\theta_t$  es de que presenta para  $Z_t$  una tendencia polinomial (no-adaptativa) determinista, que no depende de los choques aleatorios  $\{v_t\}$  y que por lo tanto es perfectamente predecible; debido a que esto es un supuesto muy fuerte, la costumbre es hacer  $\theta_t = 0$ , a menos que el conocimiento del fenómeno en estudio y/o los datos, indiquen lo contrario.

#### 4.3.8 Proceso iterativo para la construcción de modelos

A continuación se presentan con cierto detalle las etapas del proceso iterativo de Box-Jenkins para construir los modelos ARIMA.

##### • Identificación

El objetivo principal en esta etapa es determinar los órdenes de los polinomios autorregresivo y de promedios móviles, así como determinar si es necesario aplicarse el operador diferencia para cancelar la no estacionaridad homogénea y estabilizar la varianza. Podría decirse que esta etapa consiste en determinar, primero, una serie estacionaria en función de la serie original, para la cual se pueda tener una representación ARMA y, posteriormente, en fijar los valores de  $p$  y  $q$ .

Como primer paso en el análisis de series de tiempo tenemos que graficar las observaciones disponibles contra el tiempo. Esto sirve para visualizar tendencia, heteroscedasticidad (varianza no constante), estacionalidad (o fluctuación estacional) discontinuidades y datos discrepantes o influyentes.

**Estabilización de la varianza.** Para obtener varianza constante, existen varias transformaciones posibles; donde la idea básica es transformar los datos de modo que las curvas tiendan a cambiar por rectas y al mismo tiempo hacer la varianza constante. Las transformaciones más usadas son las logarítmicas y las raíces cuadradas. En general, estas transformaciones son útiles cuando: la varianza es proporcional al crecimiento de la series, y cuando el nivel medio de la serie se incrementa o decrementa a una tasa constante.

Pueden usarse otras transformaciones de tipo exponencial como recíproco, recíproco de la raíz cuadrada, etc. Existen procesos especiales para determinar la transformación adecuada. Pero la forma más sencilla es mediante el análisis gráfico, ver que sucede con las transformaciones y determinar cual es la mejor.

**Eliminación de la tendencia.** Una vez determinada la transformación apropiada para estabilizar la varianza, se procede a estabilizar el nivel de la serie. La tendencia (o nivel) se define como un cambio sistemático en el nivel de una serie de tiempo. Existen varios métodos para eliminar la tendencia, uno de ellos es el modelo de regresión, se usa cuando la tendencia es fija y determinística.

El problema fundamental al eliminar la tendencia radica en que es sumamente difícil saber cuándo un cambio en el nivel de la serie se debe a que la tendencia sea determinística o estocástica. Por ello, es que se usan las diferencias. No siempre es lo más efectivo, aunque generalmente funciona para series con un número grande de observaciones.

Cuando se aplican las diferencias se restan los valores de las observaciones uno de otro en un orden preestablecido. Tomando las primeras diferencias de una serie con tendencia lineal.

En general, un polinomio de grado 1 se vuelve constante al aplicar una diferencia, uno de grado 2 se vuelve constante al aplicar 2 diferencias y así sucesivamente. Es importante marcar que cada vez que se diferencia se pierde una observación.

Se debe tener presente que la idea básica de eliminar la tendencia no es olvidar que existe una tendencia en la serie, sino que se obtiene una nueva serie que pueda ser analizada más fácilmente. Ya que al eliminar la tendencia, y seguir haciendo diferencias producirá que la serie se *sobrediferenciarse*, esto trae graves problemas desde el momento en que se pierden observaciones, además el obtener un modelo que se ajuste a los datos es más complicado. Una herramienta muy útil que se puede utilizar en este paso es la función de autocorrelación (FAC).

**Fluctuaciones estacionales.** Después de eliminar la tendencia, se procede a analizar la estacionalidad, ya que la estacionalidad es generalmente obvia después de eliminar la tendencia, y en algunos casos es evidente aún con la tendencia. Existen varios métodos para manejar la estacionalidad. La mayoría de estos métodos son de "autoajuste", basados únicamente en la información contenida en la serie. Otros son de tipo causal. Se piensa que lo ideal debiera de ser formular un modelo econométrico incorporando las causas de la estacionalidad.

En este caso se usarán los de ajuste, por ser sencillos y dar excelentes resultados, aunque también implican una relación causal, por lo menos intuitiva, a partir del conocimiento del fenómeno. El procedimiento de ajuste se hace en base a diferencias estacionales, de forma similar a las diferencias consecutivas (ordinarias).

Sea  $s$  (del inglés span) es la longitud del periodo de la fluctuación estacional.  $\nabla_s Y_t = Y_t - Y_{t-s}$ , al aplicar este tipo de diferencias, se pierden  $s$  observaciones cada que se efectúa el operador.

Al analizar cada uno de los componentes antes mencionados en la serie de tiempo, y contar ya con la serie estacionaria, a partir de las transformaciones y operadores, se procede a identificar el modelo con el comportamiento de la función de autocorrelación (FAC) y la función de autocorrelación parcial (FACP) muestrales.

◆ Autocorrelaciones muestrales y autocorrelaciones parciales muestrales

Se han manejado las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial teóricas. Sin embargo, en la práctica, puesto que se desconoce el proceso real que gobierna a una serie de tiempo, estos valores son desconocidos y como el objetivo es identificar el modelo adecuado al proceso. En lugar de obtener las funciones FAC y FACP a partir del modelo deben usarse las funciones para identificar el modelo, pero como se carece de las funciones teóricas, es necesario utilizar las funciones muestrales; esto es, las que se calculan a partir de la muestra.

• Función de autocorrelación (FAC)

Como siguiente paso en la etapa de identificación se asocia la FAC muestral con un posible proceso generador del tipo ARIMA. Para llevar a cabo este paso es importante advertir que la FAC muestral está afectada por variaciones meramente muestrales, que desvirtúan la apariencia real de las autocorrelaciones; por este motivo se requiere de un criterio para distinguir el verdadero de lo artificial. Se han propuesto diversos estimadores de la función de autocorrelación, de acuerdo a Box-Jenkins, el estimador más satisfactorio en cuanto a sus propiedades es

$$\hat{\rho}_k = r_k = c_k / c_0$$

donde:

$$\hat{\gamma}_k = c_k = 1/N \sum_{i=1}^{N-k} \text{cov}(Z_i, Z_{i-k}), \quad k \geq 0$$

Bartlett (1946) obtuvo expresiones aproximadas para las varianzas y covarianzas de éstas

$$\text{Var}(r_k) \cong \frac{1}{N} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\rho_j^2 + \rho_{j+k} \rho_{j-k} - 4\rho_k \rho_j \rho_{j-k} + 2\rho_j^2 \rho_k^2)$$

$$\text{Cov}(r_k, r_{k+1}) \cong \frac{1}{N} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \rho_j \rho_{j+1}$$

si el proceso es MA( $q$ ), y de forma tal que las autocorrelaciones para retrasos mayores que  $q$  son cero, la expresión para la varianza se convierte

$$\text{Var}(r_k) = \frac{1}{N-d} \left( 1 + 2 \sum_{j=1}^q \rho_j^2 \right) \quad \text{para } k > q$$

### Metodologías para el análisis

donde  $N-d$  es el número de observaciones disponibles y  $p$  representa las primeras  $p$  autocorrelaciones parciales que se suponen distintas de cero.

Es decir, en la hipótesis de que  $\rho_k = 0$  para  $k > q$ , se obtiene la expresión anterior, la cual como puede observarse, decrece conforme el tamaño de muestra,  $N$ , crece. Esta fórmula en la práctica se utiliza con  $\rho_j$  sustituida por su valor estimado  $r_j$ ,  $j = 1, \dots, q$ , y así se obtiene una estimación válida para muestras grandes ( $N \geq 50$ ), de la varianza de  $r_k$ , para  $k > q$ .

Ahora bien, para decidir si las autocorrelaciones son cero a partir de un cierto retraso,  $q$ , deben compararse los valores  $r_k$  con sus correspondientes desviaciones estándar. A partir de esto, se pueden construir las pruebas de hipótesis, las cuales permiten probar si una autocorrelación puede considerarse igual o cero, con un nivel de confianza dado. Puede construirse un estadístico (distribuido asintóticamente como  $t$  de student), para probar la hipótesis

$$H_0: \rho_k = 0$$

$$H_a: |\rho_k| > 0$$

$$t_k = \frac{r_k}{s_{r_k}}$$

Si se considera la regla práctica, que el valor del estadístico  $t$  de student, para muestras grandes es 1.96 ( $\alpha = 0.05$ ), se concluye como regla de decisión:

$$\rho_k = 0 \text{ si } |t_k| \leq 1.96 \approx 2$$

Puede probarse la hipótesis utilizando los intervalos de confianza (del 95% en general), de tal forma que los valores de  $r_k$  que queden fuera del intervalo formado por  $[-2s_{r_k}, 2s_{r_k}]$ , pueden considerarse como significativos.

#### \* Función de autocorrelación parcial (FACP)

La identificación de un proceso de promedios móviles puro se puede llevar a cabo, a través del empleo de la FAC muestral y de la aproximación para la varianza de las autocorrelaciones. Con un proceso autorregresivo, la identificación del modelo a partir de la FAC muestral no es tan simple, pues aún distinguir un AR(1) de un AR(2) es complicado. En general, el orden de un proceso AR( $p$ ) no es posible detectarlo con el sólo uso de la FAC muestral. Por ello, se requiere de otro instrumento que permita efectuar la identificación de procesos AR de forma clara, dicho instrumento lo constituye la *función de autocorrelación parcial* (FACP), la cual adquiere determinadas características que dependen del orden del proceso y del tipo de parámetros involucrados.<sup>(6)</sup>

Para introducir el concepto de la autocorrelación parcial, considérese el proceso  $AR(1): Z_t = \phi Z_{t-1} + v_t$ , para el cual se sabe que  $\rho_k = \phi^k$ ,  $k=0,1,\dots$ , y supóngase ahora que existe interés en cuantificar la dependencia entre  $Z_t$  y  $Z_{t-2}$  sin tener en cuenta a  $Z_{t-1}$ ; es decir (utilizando notación de modelos de regresión, ya que los modelos autorregresivos son casos particulares de los modelos de regresión) se requeriría calcular

$$\rho_{021} = \frac{\rho_{02} - \rho_{01}\rho_{12}}{\sqrt{(1-\rho_{02}^2)(1-\rho_{12}^2)}}$$

en donde  $\rho_{02} = \rho_2 = \phi^2$  y  $\rho_{01} = \rho_{12} = \rho_1 = \phi$ , ya que  $\rho_{02}$  denota a la correlación entre  $Z_t$  y  $Z_{t-2}$ , y entre  $Z_t$  y  $Z_{t-1}$ ; entonces se llega a que  $\rho_{021} = 0$ . De hecho, podría demostrarse que todas las autocorrelaciones parciales que excluyen  $Z_{t-1}$  son cero, pues la única variable "independiente" que aparece en el modelo  $AR(1)$  es  $Z_{t-1}$ .

Con el fin de utilizar una notación más compacta y general para las autocorrelaciones parciales de los procesos AR, se escribirá  $\rho_p$  para denotar al  $k$ -ésimo coeficiente del modelo  $AR(p)$  de manera que la FACP estará dada por la ecuación de valores  $\{\rho_{ik}\}$ .

De acuerdo a Durbin (1960), las FACP's muestrales pueden estimarse, utilizando las ecuaciones de Yule-Walker

$$\hat{\rho}_{ik} = r_{ik} = \begin{cases} r_1 & k=1 \\ r_k - \frac{\sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j} r_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j} r_j} & k=2,3,\dots \end{cases}$$

donde  $r_j = r_{t-1,j} = r_{ik} r_{t-1,k-j}$   $j=1,2,\dots,k-1$ .

Este método consiste en sustituir las FAC's estimadas en las ecuaciones de Yule-Walker, y despejar el  $k$ -ésimo coeficiente del conjunto de ecuaciones correspondientes al modelo con  $k$  parámetros autorregresivos.

De esta manera, el número de autocorrelaciones parciales distintas de cero se identifica el orden del proceso AR. No debe perderse de vista que la FACP estimada está sujeta a errores muestrales, así que decidir si  $\{\rho_{ik}\}$  puede o no ser considerada como cero, se requiere cuantificar la variación muestral de su  $\hat{\rho}_{ik}$ .

Una aproximación según Quenouille (1949), indica que si el proceso es  $AR(p)$ , las autocorrelaciones parciales muestrales se distribuyen de manera independiente con media  $E(r_{kk}) = \rho_{kk}$  y con

$$\text{Var}(r_{kk}) \approx \frac{1}{N-d} \text{ para } k > p$$

donde  $N-d$  es el número de observaciones disponibles y  $p$  representa las primeras  $p$  autocorrelaciones parciales que se suponen distintas de cero. A partir de esta fórmula, se establece que  $\{\rho_{kk}\}$  es distinto de cero (al nivel de significación de aproximadamente el 5%) si el valor calculado de  $\hat{\rho}_{kk}$  se encuentra fuera del intervalo definido por

$$\left[ -2/\sqrt{N-d}, 2/\sqrt{N-d} \right] \text{ para } k > p$$

Así mismo, como en la FAC, se puede obtener el estadístico

$$r_{kk} = \frac{r_{kk}}{\sqrt{(N-d)^{-1}}}$$

para probar la hipótesis

$$H_0: \rho_{kk} = 0$$

$$H_a: |\rho_{kk}| > 0$$

entonces,  $\rho_{kk} = 0$  si  $|r_{kk}| \leq 1.96 \approx 2$ .

Por último es importante mencionar que mientras un proceso  $AR(p)$  tiene sólo las primeras  $p$  autocorrelaciones parciales distintas de cero; esto es, el número de autocorrelaciones parciales distintas de cero indica el orden del proceso  $AR$ . Mientras que un proceso  $MA(q)$  (el cual es equivalente a un proceso  $AR(\infty)$ ) tendrá todas sus autocorrelaciones parciales distintas de cero, aunque la FACP muestre convergencia a cero. De manera similar, un proceso  $ARMA(p, q)$  tendrá asociada una FACP que no desaparecerá después de un número finito de retrasos.

• *Comportamientos típicos de la FAC y la FACP*

Finalmente, para llevar a cabo la etapa de identificación es conveniente recordar las características de la FAC y la FACP; las cuales se resumen en el cuadro 4.1, para una serie estacionaria  $W_t = \nabla^d T(Z_t)$ .

Proceso	FAC	FACP
<b>AR(p)</b>	Convergencia a cero.	Solamente las primeras $p$ autocorrelaciones parciales son distintas de cero.
<b>MA(q)</b>	Sólo las primeras $q$ autocorrelaciones son distintas de cero.	Sucesión infinita convergente a cero.
<b>ARMA(p,q)</b>	Comportamiento irregular de las primeras $q$ autocorrelaciones y después convergencia a cero.	Sucesión infinita convergente a cero.

Cuadro 4.1 Comportamientos típicos de la FAC y la FACP para procesos AR, MA y ARMA.

- Estimación

En esta etapa se presupone que se ha identificado ya un modelo y que, de ser éste adecuado, lo único que resta es encontrar los mejores valores de los parámetros para que el modelo represente apropiadamente a la serie en consideración. Es decir, una vez conocidos los órdenes de los polinomios autorregresivo y de promedios móviles  $p$  y  $q$ , así como el grado de diferenciación  $d$ , se postula el modelo como

$$\phi(B)\nabla^d T(Z_t) = \theta_t + \theta(B)\epsilon_t,$$

deben obtenerse estimadores para  $\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_q$ , lo cual podría hacerse de manera arbitraria, pero es preferible utilizar un método objetivo y estadísticamente apropiado.

Para obtener los estimadores de los parámetros puede usarse el método de mínimos cuadrados, el método de los momentos o el método de máxima verosimilitud. En este caso el método será el de máxima verosimilitud, ya que de acuerdo a William W. S. Wei, es el más recomendable, y además es equivalente al de mínimos cuadrados.

- Método de máxima verosimilitud

Si se parte del supuesto de que  $\{\epsilon_t\}$  es un proceso de ruido blanco con distribución normal, media cero y varianza  $\sigma_\epsilon^2$ , se obtiene la función de densidad conjunta de los errores aleatorios

$$f(\epsilon_{d-p+1}, \epsilon_{d-p+2}, \dots, \epsilon_N) = (2\pi)^{-(N-d-p)/2} \sigma_\epsilon^{-N-d-p} \exp\left\{-\sum_{t=d-p+1}^N \frac{\epsilon_t^2}{2\sigma_\epsilon^2}\right\}$$

por lo tanto, si se considera a la variable

$$W_i = \nabla^d T(Z_i)$$

la expresión  $\phi(B)\nabla^d T(Z_i) = \theta_0 + \theta(B)e$ , implica que

$$e_i = W_i - \phi_1 W_{i-1} - \dots - \phi_p W_{i-p} - \theta_0 + \theta_1 e_{i-1} + \dots + \theta_q e_{i-q}$$

esto permite obtener la función de densidad conjunta de  $W_{d,p+1}, W_{d,p+2}, \dots, W_N$ , como

$$f(W_{d,p+1}, W_{d,p+2}, \dots, W_N) = f(e_{d,p+1}, e_{d,p+2}, \dots, e_N) \prod_{i=d,p+1}^N \left| \frac{dW_i}{de_i} \right| \\ = (2\pi)^{-(N-d-p)2} \sigma_e^{-N-d-p} \exp \left\{ - \sum_{i=d,p+1}^N \frac{(W_i - \phi_1 W_{i-1} - \dots - \phi_p W_{i-p} - \theta_0 + \theta_1 e_{i-1} + \dots + \theta_q e_{i-q})^2}{2\sigma_e^2} \right\}$$

La función de densidad permite calcular probabilidades de la distribución normal multivariada una vez que se conoce a los parámetros  $\hat{\phi} = (\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_p)$ ,  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_0, \dots, \hat{\theta}_q)$  y  $\sigma_e^2$ . Lo que se conoce en realidad es  $W = (W_{d,p+1}, W_{d,p+2}, \dots, W_N)$  y lo que se desconoce es  $\hat{\phi}, \hat{\theta}$  y  $\sigma_e^2$ , por ello se considera que la función  $f(W_{d,p+1}, W_{d,p+2}, \dots, W_N)$ , es una función de verosimilitud de los parámetros, la cual depende del vector de observaciones  $W$ ; esto es

$$L(\phi, \theta, \sigma_e^2 | W) = (2\pi)^{-(N-d-p)2} \sigma_e^{-N-d-p} \exp \left\{ \frac{-S(\phi, \theta, \sigma_e^2)}{2\sigma_e^2} \right\}$$

con

$$S(\phi, \theta, \sigma_e^2) = \sum_{i=d,p+1}^N e_i^2 \\ = \sum_{i=d,p+1}^N (W_i - \phi_1 W_{i-1} - \dots - \phi_p W_{i-p} - \theta_0 + \theta_1 e_{i-1} + \dots + \theta_q e_{i-q})^2$$

dicha función de verosimilitud  $L(\phi, \theta, \sigma_e^2 | W)$  debe maximizarse con respecto a los parámetros, para obtener la representación  $\phi(B)\nabla^d T(Z_i) = \theta_0 + \theta(B)e$ , más apropiada de la serie  $\{W_i\}$  en estudio.

Para maximizar  $L(\phi, \theta, \sigma_e^2 | W)$ , en primer lugar se seleccionan los valores  $\hat{\phi}$ ,  $\hat{\theta}$  y  $\hat{\sigma}_e^2$  que minimicen  $S(\phi, \theta, \sigma_e^2)$ . Se supone en principio, que ya se encontró el valor mínimo  $S(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}_e^2)$ , entonces se procede a maximizar la función de verosimilitud con respecto a  $\sigma_e^2$  o, equivalentemente, se maximiza al logaritmo de la función de verosimilitud, obteniéndose el estimador

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{S(\hat{\phi}, \hat{\theta}_1, \hat{\theta})}{N-d-p-q-1}$$

donde  $\hat{\sigma}_e^2$  es un estimador insesgado ya que considera la corrección por grados de libertad usados en estimar a todos los parámetros del modelo.

El problema de maximizar  $L(\phi, \theta_1, \theta, \sigma_e^2 | W)$  se reduce a minimizar  $S(\phi, \theta_1, \theta)$ . Se tienen demasiadas dificultades la tratar de minimizar  $S(\phi, \theta_1, \theta)$ . Por consiguiente deberá utilizarse algún procedimiento numérico para encontrar el mínimo de  $S(\phi, \theta_1, \theta)$ .

En su libro Box y Jenkins (1970) sugieren un método de estimación no-lineal para  $\phi$ ,  $\theta_1$  y  $\theta$  basado en el algoritmo de Marquardt (1963), que permite obtener no sólo estimaciones puntuales de los parámetros, sino también intervalos de confianza para éstos. El método tiene como fundamento un desarrollo en la serie de Taylor que linealiza a

$$e_t = W_t - \phi W_{t-1} - \dots - \phi_p W_{t-p} - \theta_1 + \theta_1 e_{t-1} + \dots + \theta_q e_{t-q},$$

condicionada en que se conocen los valores muestrales  $W$  y los valores iniciales de los parámetros  $\hat{\phi}$ ,  $\hat{\theta}_1$  y  $\hat{\theta}$ . Los valores iniciales serán corregidos iterativamente con el objetivo de minimizar  $S(\hat{\phi}, \hat{\theta}_1, \hat{\theta})$ ; el proceso iterativo termina al lograrse la "convergencia"; es decir, si el cambio relativo en cada parámetro no es mayor que un cierto valor pequeño, fijado de antemano. Debe tomarse en cuenta, que el proceso de estimación puede ser sensible a los valores iniciales de los parámetros, de tal forma que si dichos valores no son cercanos a los valores definitivos, puede que no se logre la convergencia.

◆ Obtención de valores iniciales

Si se cuenta con un programa de estimación no-lineal para modelos de Box-Jenkins, lo único que se requiere, es proporcionar valores iniciales para los parámetros. Cuando el modelo identificado es  $AR(p)$ , los valores iniciales pueden obtenerse como solución del sistema de ecuaciones de Yule-Walker

$$\begin{aligned} r_1 &= \hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2 r_1 + \dots + \hat{\phi}_p r_{p-1} \\ r_2 &= \hat{\phi}_1 r_1 + \hat{\phi}_2 + \dots + \hat{\phi}_p r_{p-2} \\ &\dots \\ r_p &= \hat{\phi}_1 r_{p-1} + \hat{\phi}_2 r_{p-2} + \dots + \hat{\phi}_p \end{aligned}$$

En particular para un modelo AR(1) se tiene

$$\hat{\phi}_1 = r_1$$

y para modelos AR(2)

$$\hat{\phi}_1^2 = r_1(1-r_2)/(1-r_1^2), \quad \hat{\phi}_2 = (r_2-r_1^2)/(1-r_1^2)$$

Cuando el modelo sea del tipo MA( $q$ ), las relaciones entre los parámetros  $\theta_1, \dots, \theta_q$  y las autocorrelaciones  $\rho_1, \rho_2, \dots$  son no lineales por lo que deberá resolverse el sistema de ecuaciones no-lineal

$$\begin{aligned} r_1 &= -\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_1\hat{\theta}_2 + \dots + \hat{\theta}_{q-1}\hat{\theta}_q / 1 + \hat{\theta}_1^2 + \hat{\theta}_2^2 + \dots + \hat{\theta}_q^2 \\ r_2 &= -\hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_1\hat{\theta}_3 + \dots + \hat{\theta}_{q-2}\hat{\theta}_q / 1 + \hat{\theta}_1^2 + \hat{\theta}_2^2 + \dots + \hat{\theta}_q^2 \\ &\dots \dots \dots \\ r_q &= -\hat{\theta}_q / 1 + \hat{\theta}_1^2 + \hat{\theta}_2^2 + \dots + \hat{\theta}_q^2 \end{aligned}$$

para poder obtener las estimaciones iniciales  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_q$ . Es importante advertir que el sistema tiene múltiples soluciones, pero se elegirá la solución que satisfaga las condiciones de invertibilidad. Por ejemplo, si el modelo es MA(1) se tendrá

$$r_1 = -\hat{\theta} / (1 + \hat{\theta}^2)$$

de donde se obtienen dos soluciones, pero sólo una de ellas satisface la condición de invertibilidad  $|\hat{\theta}| < 1$ , así que dicha solución deberá ser la elegida.

Finalmente, con modelos ARMA( $p, q$ ) se presentan tanto ecuaciones lineales como no-lineales por ser resueltas para obtener los valores iniciales de los parámetros; esto es, ya que en un proceso ARMA( $p, q$ ) se tiene  $\phi(B)\rho_x = 0$  para  $k > q$ , entonces el sistema

$$\begin{aligned} r_{q+1} &= \hat{\phi}_1 r_q + \hat{\phi}_2 r_{q-1} + \dots + \hat{\phi}_p r_{q-p+1} \\ r_{q+2} &= \hat{\phi}_1 r_{q+1} + \hat{\phi}_2 r_q + \dots + \hat{\phi}_p r_{q-p+2} \\ &\vdots \\ r_{q+p} &= \hat{\phi}_1 r_{q+p-1} + \hat{\phi}_2 r_{q+p-2} + \dots + \hat{\phi}_p r_q \end{aligned}$$

proporciona las estimaciones iniciales  $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_p$ ; las cuales deberán sustituirse posteriormente en las ecuaciones de las primeras  $q$  autocorrelaciones muestrales, para así poder determinar los valores iniciales  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_q$ . Donde se debe de elegir la solución que satisfaga  $|\hat{\theta}| < 1$ .

Con respecto al término  $a_t$ , una estimación inicial de este parámetro puede obtenerse a partir de la relación

$$E[\phi(B)W_t] = a_t$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} \hat{a}_t &= (1 - \hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2 - \dots - \hat{\phi}_p) \hat{E}(W_t) \\ &= (1 - \hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2 - \dots - \hat{\phi}_p) \bar{W} \end{aligned}$$

con  $\bar{W} = \sum_{i=1}^N W_i / (N - d - p)$ . Se prefiere no introducir el término  $a_t$  a priori, sino esperar a, que en la etapa de la verificación se haga evidente su inclusión.

#### ◆ Verificación

La etapa de verificación tiene su origen en la idea de que **todo modelo es erróneo**, puesto que los modelos son meras representaciones simplificadas de la realidad. Si existe la necesidad de elegir entre varios modelos, habrá de elegirse aquél que presente menos fallas, o más bien, fallas menos importantes; por este motivo habrá que poner a los posibles modelos en tela de juicio para detectar sus posibles fallas (violaciones a los supuestos que fundamentan al modelo).

Para poder evaluar el ajuste del modelo, existen cuatro grupos de pruebas de diagnóstico

- ⇒ Análisis de estacionaridad
- ⇒ Análisis de residuales
- ⇒ Modelos sobreespecificados
- ⇒ Modelos subespecificado

Estos criterios deben compararse en conjunto, y no en forma aislada, ya que si se detecta falta de ajuste deben buscarse diferentes especificaciones.

#### ◆ Análisis de estacionaridad

Se debe tener cuidado de no sobrediferenciar el modelo. Esto genera un modelo sobrediferenciado; esto es, más complicado, lo cual va en contra del principio de parsimonia.

#### ◆ Análisis de residuales

Una de las formas más claras y simples para detectar violaciones a los supuestos de los modelos es a través del análisis de residuales, en donde, como **residual** se considera la parte de las observaciones que no pueden ser explicadas por el modelo. Los residuales para el modelo  $\phi(B)W_t = \theta(B)v_t$ , se definen mediante

$$\begin{aligned}\hat{e}_t &= [\hat{\phi}(B)]^{-1} \hat{\phi}(B)W_t \\ &= \hat{\beta}(B)W_t\end{aligned}$$

donde

$$W_t = \hat{e}_t + \hat{\beta}_1 W_{t-1} + \hat{\beta}_2 W_{t-2} + \dots$$

ahora bien, la estimación de  $W_t$  puede hacerse con base en el polinomio estimado  $\hat{\beta}(B)$  y las observaciones hasta el tiempo  $t-1$ , obteniéndose

$$\hat{W}_t = \hat{\beta}_1 \hat{W}_{t-1} + \hat{\beta}_2 \hat{W}_{t-2} \dots$$

así, de estas dos últimas expresiones se obtiene que

$$\hat{e}_t = W_t - \hat{W}_t;$$

es decir, los residuales miden la discrepancia entre los valores observados y los valores estimados por el modelo. Si se tiene que el tamaño de muestra es grande, los errores aleatorios y los residuales son esencialmente iguales; por lo que, al analizar los residuales observados  $\{\hat{e}_t\}$  se analiza básicamente lo que debería ser una realización del proceso de ruido blanco  $\{e_t\}$ .

Por lo anterior, se forman los supuestos acerca del proceso  $\{e_t\}$ , los cuales pueden verificarse y posiblemente corregirse.

- *Supuesto 1.-  $\{e_t\}$  tiene media cero.*

Verificación.- Calcúlese la media aritmética y la desviación estándar muestral de los residuales

$$m(\hat{e}) = \sum_{t=1}^N \frac{\hat{e}_t}{N-d-p}$$

$$\hat{\sigma}_e = \sqrt{\frac{[\hat{e}_t - m(\hat{e})]^2}{N-d-p-q}}$$

donde  $t' = d + p + 1$ , para construir el cociente  $\sqrt{N-d-p} \frac{m(\hat{e})}{\hat{\sigma}_e}$ . De donde si el valor absoluto de dicho cociente es menor que dos, se dice que no existe evidencia de que la media del proceso de ruido blanco sea distinta de cero y por lo mismo no se rechaza el supuesto; por el contrario, si el valor absoluto del cociente es mayor o

igual que dos, entonces la media de los residuales es significativamente distinta de cero, lo cual implica que el supuesto se ha violado.

**Corrección.-** Cuando la media de los residuales sea significativamente distinta de cero, implica que existe una parte determinística o semideterminística en  $\{\hat{\varepsilon}_t\}$  que no ha sido considerada por el modelo, por lo tanto, convendría considerar la posibilidad de que un término autorregresivo o una diferencia más sean necesarios en el modelo. Esto es, por el hecho de que la diferencia o el parámetro autorregresivo podrían representar ambos a una posible tendencia adaptiva presente aún en los residuales.

- *Supuesto 2.-  $\{\varepsilon_t\}$  tiene varianza constante.*

**Verificación.-** Hágase una gráfica de los residuales contra el tiempo para observar, visualmente, si la varianza parece o no ser constante. Este tipo de verificación es burda, pero con ella se detectan las violaciones más notorias a este supuesto, que son las que realmente lleguen a causar problemas.

**Corrección.** Sólo en el caso de que la varianza parezca seguir algún patrón de crecimiento o de decrecimiento como los que aparecen en la figura 4.8 (b) y (c), es posible que al aplicar una transformación de potencia, la varianza de la serie se estabilice.-

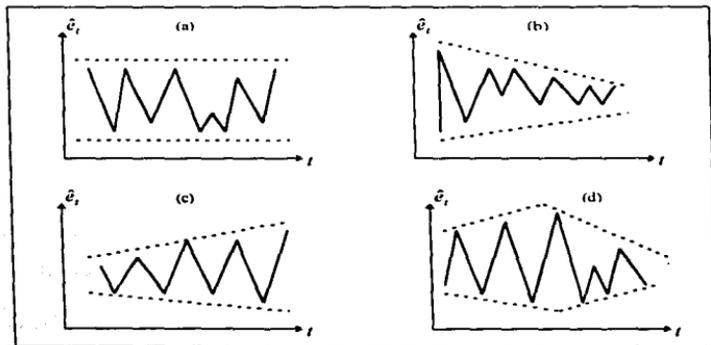


Figura 4.8 Comportamientos típicos de la varianza residual. (a) Varianza constante, (b) varianza creciente, (c) varianza decreciente, (d) varianza no-monótona.  
Fuente: Véase Guerrero Victor M., Análisis Estadístico de Series de Tiempo Económicas, Universidad Autónoma Metropolitana, México (1991), p.138.

- **Supuesto 3.-** Las variables aleatorias  $\{e_t\}$  son mutuamente independientes.

**Verificación.-** Debido a que independencia implica no autocorrelación, por ello se requiere que  $\rho_1(e) = 0$  para todo  $k \neq 0$ , esto se puede verificar calculando, primero, la FAC muestral de los residuales  $\{r_t(\hat{\varrho})\}$ , que por el supuesto de que su media es cero, está dada por

$$r_k(\hat{\varrho}) = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} \hat{e}_t \hat{e}_{t+k}}{\sum_{t=1}^N \hat{e}_t^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

con  $t' = d + p + 1$ , y posteriormente:

- (i) Se estima la desviación estándar de  $r_k(\hat{\varrho})$  como

$$\sqrt{\text{var}[r_k(\hat{\varrho})]} = \frac{1}{\sqrt{N-d-p}}$$

para determinar la significancia estadística individual de las autocorrelaciones de los residuales: o sea, si  $|r_k(\hat{\varrho})| \geq 2/\sqrt{N-d-p}$  se dice que la autocorrelación  $K$ -ésima es significativamente distinta de cero. Esta prueba no es del todo válida para autocorrelaciones correspondientes a retrasos pequeños, por ello se realiza una prueba de conjunta de la significación de las primeras  $k$  autocorrelaciones, como sigue

- (ii) Se calcula el estadístico  $Q$  de Box y Pierce (1970) para realizar una prueba de significancia conjunta (prueba "portmanteau") de  $k$  autocorrelaciones simultáneamente, con el estadístico

$$Q = (N-d-p) \sum_{k=1}^K r_k^2(\hat{\varrho})$$

el cual, si  $K$  es grande ( $K > 20$ ), sigue aproximadamente una distribución Ji-cuadrada con  $K-p-q$  grados de libertad; por lo que el valor de  $Q$  deberá ser comparado con valores de tablas de Ji-cuadrada para efectuar la prueba de significancia.

Es conveniente mencionar que en ocasiones, la aproximación lograda con  $Q$  no es del todo apropiada. Por esta razón Ljung y Box (1978) modificaron el estadístico anterior para obtener

$$Q' = (N-d-p)(N-d-p+2) \sum_{k=1}^K r_k^2(\hat{\varrho}) / (N-d-p-k)$$

el cual resulta ser más adecuado para realizar la prueba.

**Corrección.-** Si al efectuar la verificación, ésta indica que las autocorrelaciones no son las correspondientes a un proceso de ruido blanco, entonces es de suponer que corresponden a un proceso ARMA, es decir, se identifica un modelo para los residuales y en base a éste se sugerirán modificaciones al modelo originalmente identificado para  $\{W_t\}$ .

- *Supuesto 4.-  $\{e_t\}$  tiene una distribución normal, para toda  $t$ .*

**Verificación.-** i) Se sabe que de una distribución normal, aproximadamente el 95% de las observaciones deben localizarse dentro de un intervalo que se extienda dos desviaciones estándar por abajo y por arriba de la media; si se cumple que la media de los residuales es cero, se esperará que a lo más un total de  $N-d-p/20$  observaciones se localizarán fuera del intervalo  $(-2\hat{\sigma}_e, 2\hat{\sigma}_e)$ . Se sugiere utilizar la gráfica de los residuales contra el tiempo.

- ii) Mediante el histograma de los residuales, se puede visualizar la forma de su distribución, donde podría detectarse si la distribución contiene asimetría.

**Corrección.-** Cabe mencionar que el supuesto de normalidad se debe cumplir para los errores aleatorios  $\{e_t\}$ , pero no tiene que ser satisfecho exactamente por los residuales  $\{\hat{e}_t\}$ ; por lo que, pueden esperarse pequeñas violaciones a este supuesto; pero si estas violaciones son muy notorias, se puede aplicar una transformación y con ello obtener residuales con un comportamiento normal.

- *Supuesto 5. Implícitamente se ha supuesto que no existen observaciones aberrantes (posiblemente ajenas a la serie de estudio).*

**Verificación.-** De nuevo, la gráfica de los residuales contra el tiempo permite visualizar si existen observaciones irregulares. Una forma general, que se considera una regla empírica de trabajo, es considerar como "sospechosas" a las observaciones cuyos residuales estén fuera del intervalo de  $(-3\hat{\sigma}_e, 3\hat{\sigma}_e)$ .

**Corrección.-** Debe investigarse de que tal observación sea sospechosa, y que esto podría deberse a un cambio estructural en el comportamiento del fenómeno, causa quizá por una "intervención" exógena a la serie en estudio, lo cual requeriría un análisis específico (análisis de intervención). También podría tratarse de un simple error de copiado de datos.

Existen otros supuestos relacionados con el modelo en sí que no se verifican mediante un análisis de residuales, estos se mencionan a continuación.

## Metodologías para el análisis

### ◆ Modelo sobreespecificado: omitir parámetros

Cuando se estima un modelo, se debe verificar si todos los parámetros son significativos para éste. Box y Jenkins sugieren una herramienta para verificar la bondad del modelo, la cual se conoce con el nombre de sobreparametrización; esta, consiste en introducir parámetros extra en el modelo, previendo la posible necesidad de incluirlos, pero que en caso de no ser necesarios, serán rechazados por la verificación del supuesto de parsimonia.

Los parámetros redundantes o excesivos se pueden detectar a través del estadístico  $t$  de los coeficientes y el estimador de las correlaciones entre los estimadores. Puede usarse la desviación estándar para evaluar la significancia estadística de un coeficiente. Un coeficiente es significativamente distinto de cero si el valor absoluto del estimador puntual es al menos dos veces el error estándar. Puede usarse el estadístico  $T$  del estimador

$$T = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sigma_{\hat{\beta}_j}}$$

para probar la hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0: \beta_j &= 0 \\ H_1: \beta_j &\neq 0 \end{aligned}$$

si el valor en tabla de  $T$  con nivel de significancia  $\alpha$  y  $(N - d - p - q)$  grados de libertad es mayor que  $T$ , hay evidencia de que el parámetro puede ser cero.

Un parámetro insignificante es una indicación de que el modelo puede estar sobreespecificado, por lo que deberá simplificarse. Si este parámetro insignificante es el de mayor orden, entonces, en general, el modelo ARIMA puede simplificarse eliminando este parámetro del modelo.

Otra forma de verificación del modelo, es bajo el supuesto de parsimonia, es decir, bajo el cual el modelo es considerado *parsimonioso*.

Verificación. Ya que la parsimonia implica que no se puede reducir el número de parámetros involucrados, puesto que todos son necesarios para explicar el comportamiento del fenómeno y no pueden ser considerados como iguales a cero. Por ello se construyen intervalos de aproximadamente 95 % de confianza del tipo

$$\left( \hat{\theta} - 2\sqrt{\hat{var}(\hat{\theta})}, \hat{\theta} + 2\sqrt{\hat{var}(\hat{\theta})} \right)$$

este intervalo es para cada uno de los parámetros y con ello se observa si el valor cero se encuentra dentro del intervalo.

**Corrección.** Si el cero es un valor razonable para el parámetro en turno, entonces deberá cancelarse este parámetro y volver a estimar el modelo sin él. Existen casos, en los cuales debido al conocimiento del fenómeno se podría contemplar el parámetro aunque este sea rechazado. Además, se debe examinar si el modelo es estable en los parámetros.

**Verificación.** La principal causa de inestabilidad es la redundancia de parámetros, de tal forma que un cambio en un parámetro puede compensarse mediante un cambio en otro, sin que la suma de cuadrados se altere. Por ello se deben examinar las correlaciones altas (positivas o negativas) entre parámetros estimados, ya que éstas indican una posible inestabilidad; para ello se requiere calcular las correlaciones entre parejas de parámetros estimados. Las cuales las podemos obtener a partir de

$$\begin{aligned} r(\hat{\phi}, \hat{\theta}) &= \text{Corr}(\hat{\phi}, \hat{\theta}) \\ &= \text{Cov}(\hat{\phi}, \hat{\theta}) / \sqrt{\text{Var}(\hat{\phi}) \text{Var}(\hat{\theta})} \end{aligned}$$

**Corrección.** Se puede cancelar alguno de los parámetros cuya correlación con otro sea alta. Donde el parámetro que si se incluya será capaz de reflejar la contribución del otro.

- ◆ Modelo subespecificado : ajustar parámetros extra

Para verificar que el modelo tentativo contiene el número apropiado de parámetros, puede incluirse un parámetro adicional y con ello observar si con esta adición se obtiene un mejor modelo.

Al ajustar parámetros extra al modelo de series de tiempo, se puede caer en la *redundancia de parámetros*. La redundancia de parámetros ocurre cuando se agregan al mismo tiempo tanto un parámetro autorregresivo como uno de promedios móviles. En forma general, el problema de la redundancia de parámetros puede explicarse a partir de

$$\begin{aligned} Z_t(1 - \phi B) &= e_t \\ (1 - B)Z_t(1 - \phi B) &= e_t(1 - B) \end{aligned}$$

Como se observa al multiplicar por  $(1 - B)$ , la ecuación muestra claramente que no es difícil generar modelos complicados, ya que pueden multiplicarse a la izquierda y derecha de una ecuación por el mismo factor.

Es importante mencionar que cuando se tiene que elegir entre varios modelos que cumplen los requisitos de la etapa de verificación, se debe de tomar en cuenta los residuales (la menor suma de residuales), y el comportamiento de los pronósticos.

◆ Pronósticos

Finalmente, una vez que se ha encontrado un modelo adecuado para representar los datos, se llega a la última etapa que es el uso del modelo, para los fines por los cuales fue construido; a continuación se presenta el uso del modelo para obtener pronósticos, ya que uno de los fines más frecuentes al construir un modelo para una serie de tiempo dada es el pronóstico.

Se le llama *origen* al período actual, y se denota como el período " $n$ ", si se desea pronosticar " $h$ " periodos de tiempo hacia adelante, hasta el período  $n+h$ , esto es, se desea conocer el valor de la observación no realizada  $Z_{n+h}$ ; donde, el intervalo de tiempo se llama horizonte; y se denota como  $Z_n(h)$  al valor futuro estimado de la variable aleatoria. Por lo que,  $Z_{n+h}$  es una variable aleatoria cuya distribución es condicional a los datos pasados y presentes, así como a las especificaciones del modelo ARIMA.

El error cometido al hacer un pronóstico en el momento  $n$  para un futuro  $n+h$ ,  $e_n(h)$ , se define como

$$e_n(h) = Z_{n+h} - Z_n(h)$$

entonces el pronóstico óptimo será el valor de  $Z_n(h)$  que minimice el costo esperado  $C(e_n(h))$ ; normalmente, esta función se desconoce la mayoría de las veces, pero se puede usarse una función de costos cuadrática

$$C(e) = \alpha e^2$$

donde  $\alpha$  es una constante positiva. Esta función define el costo en forma proporcional al cuadrado del error. También, a partir de ella se obtiene que la solución para el pronóstico óptimo es la media de la distribución del pronóstico

A continuación se muestra que la media de la distribución del pronóstico minimiza el valor esperado de la función de costo cuadrática.

Sea  $m_n$  el valor esperado de  $Z_{n+h}$ ; con  $m_n = E(Z_{n+h})$ , y  $m$  es cualquier otro pronóstico de  $Z_{n+h}$ , definido como

$$m = m_n + d$$

donde " $d$ " es la diferencia entre  $m$  y  $m_n$ . Usando el pronóstico puntual  $m$ , el valor esperado del error es

$$\begin{aligned} E[(Z_{n+h} - m)^2] &= E[Z_{n+h} - (m_n + d)]^2 \\ &= E[(Z_{n+h} - m_n)^2] - 2dE[(Z_{n+h} - m_n)] + d^2 \\ &= E[(Z_{n+h} - m_n)^2] + d^2 \end{aligned}$$

para minimizar, "d" deberá ser igual a cero. Así, el pronóstico óptimo de  $Z_{n+h}$  se obtiene con  $m = m_n = E(Z_{n+h})$ .

Para calcular la media de la distribución de pronósticos,  $E(Z_{n+h})$  se parte de Sea  $Z_t$  un proceso ARMA( $p, q$ ) estacionario e invertible. Para  $t = n+h$

$$Z_{n+h} = \phi_1 Z_{n+h-1} + \phi_2 Z_{n+h-2} + \dots + \phi_p Z_{n+h-p} + e_t - \theta_1 e_{n+h-1} - \dots - \theta_q e_{n+h-q}$$

1. Se reemplaza el error actual y los pasados,  $e_{n+j}$ ,  $j \leq 0$ , por los residuales.
2. Se reemplaza cada error futuro  $e_{n+j}$ ,  $0 < j \leq h$  por su valor esperado; es decir, cero.
3. Se reemplazan las observaciones  $Z_{n+j}$ ,  $j \leq 0$ , por los valores observados.
4. Se reemplaza cada valor futuro de  $Z_{n+j}$ ,  $0 < j \leq h$ , por el pronóstico adecuado  $Z_n(j)$ ; de modo que habrá que pronosticar  $Z_{n+1}, \dots, Z_{n+h-1}$  para pronosticar  $Z_{n+h}$ .

Por último, se reemplazan los parámetros del modelo por sus estimadores.

A continuación se muestra como ejemplo

- \* Modelo mezclado de orden ARMA(1,1), con media  $\mu$

$$\begin{aligned} Z_t - \mu &= \phi(Z_{t-1} - \mu) + e_t - \theta e_{t-1} \\ Z_{n+1} &= (1 - \phi)\mu + \phi Z_n - \theta e_n \\ Z_n(1) &= (1 - \phi)\mu + \phi Z_n - \theta e_n \\ Z_n(h) &= (1 - \phi)\mu + \phi Z_n(h-1), \quad h > 1 \end{aligned}$$

Se puede observar, como el pronóstico de un periodo adelante está influenciado directamente por el parámetro de promedios móviles. Así, también como en los modelos AR, los pronósticos a largo plazo tenderán a la media.

Lo anterior, nos lleva a concluir que, en general, los pronósticos a largo plazo tendrán poca significancia. Por lo que, se recomienda utilizar otros métodos para la obtención de pronósticos a largo plazo.

- Intervalos de confianza

Como los pronósticos son utilizados en aplicaciones prácticas, es importante obtener límites de confianza para éstos; los cuales se obtienen haciendo uso de las siguientes expresiones

$$E[v_t(h)] = 0 \quad \text{y} \quad \text{Var}[v_t(h)] = \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2 \sigma_e^2$$

como

$$[T(Z_{t+h} - \hat{T}(Z_t)(h)) | \{Z_t, Z_{t-1}, \dots\}] \sim N(0, \text{Var}[e_t(h)])$$

por lo tanto, los límites del 100(1- $\alpha$ )% de confianza para  $T(Z_{t+h})$ , condicionados en el conocimiento de las observaciones  $Z_t, Z_{t-1}, \dots$ , vienen a ser

$$\hat{T}(Z_t)(h) \pm Z_{\alpha/2} \left( \sum_{j=0}^{h-1} \Psi_j^2 \right)^{1/2} \sigma_e$$

donde  $Z_{\alpha/2}$  es el punto porcentual tal que  $P(Z > Z_{\alpha/2}) = \alpha/2$  si  $Z \sim N(0,1)$ . El intervalo de confianza definido se estima al sustituir a  $\psi_1, \dots, \psi_{h-1}$  y  $\sigma_e$  por sus respectivas estimaciones y la interpretación asociada con el intervalo resultante, por lo que  $T(Z_{t+h})$  será cubierto por el intervalo con una confianza de 100(1- $\alpha$ )%.

#### ◆ Aspectos del pronóstico

A través de la experiencia en la aplicación ARIMA, se ha llegado a la conclusión que es uno de los mejores métodos para obtener pronósticos a corto plazo, y para pronósticos de variables que presenten patrones estacionales muy fuertes. Ya que si se pronostica a mediano y largo plazo el pronóstico tenderá a la media. Una forma de estudiar la capacidad del pronóstico radica en contrastar los pronósticos de valores observados de la serie, con sus valores reales.

Esta metodología es la que presenta las bases estadísticas más fuertes de todas las que existen, por ello es de las más difíciles de comprender, pero una vez que ha aprendido y se cuenta con experiencia para identificar modelos se vuelve muy práctica y fácil.

Además, se requiere del conocimiento del fenómeno en estudio, ya que es base a esto se elige si la aplicación de ARIMA es la más adecuada, o se requiere de otro método más adecuado para pronosticar.

#### 4.3.9 Análisis de series de tiempo estacionales

Los modelos ARIMA presentados anteriormente permiten representar a una gran cantidad de fenómenos reales, debido a su gran flexibilidad, pero existen algunas series a las cuales no es posible modelar como "simples" procesos ARIMA. Por esta razón se recurre al análisis de series de tiempo estacionales.

Una *serie estacional* se entenderá como una serie de tiempo que, aparte de contener una tendencia (y/o ciclos) de larga duración, muestre fluctuaciones que se repiten anualmente, quizá con cambios graduales a través del tiempo.

Una característica fundamental de las series estacionales con observaciones mensuales, es la similitud del comportamiento entre observaciones mensuales para el mismo mes en años consecutivos. De igual manera, si la serie estacional es de observaciones trimestrales, existirán similitudes entre los mismos e estacional es de observaciones trimestrales. Además, es importante notar que aún cuando la estacionalidad se considera en general como un fenómeno repetitivo anual, esto no implica que no pueda existir un patrón de comportamiento periódico con duración menor al año. Por lo anterior, es conveniente hablar de un período estacional que comprende  $s$  observaciones contiguas, donde  $s$  no es necesariamente igual a 12 para series mensuales.

◆ Modelos estacionales autorregresivos

Este modelo se aplica si el valor actual de la serie  $Z_t$  puede expresarse como una función lineal del valor de la serie  $s$  periodos atrás,  $Z_{t-s}$ , y el choque aleatorio  $\epsilon_t$ ; es decir,

$$Z_t - \Phi_1 Z_{t-s} = \epsilon_t$$

$$(1 - \Phi_1 B^s) Z_t = \epsilon_t$$

donde  $\Phi_1$  es el parámetro autorregresivo estacional. Este modelo puede denotarse como SAR(1) y el valor "s" se inferirá de acuerdo al proceso.

De la misma forma puede expresarse a un SAR(P) :

$$\Phi(B^s) Z_t = \epsilon_t$$

donde

$$\Phi(B^s) = 1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \dots - \Phi_p B^{ps}$$

$$Z_t = \nabla^d \nabla^s W_t$$

La función de autocorrelación del modelo estacional autorregresivo es similar en características generales a las de un modelo ordinario autorregresivo, pero excepto que los valores de las autocorrelaciones aparecen en múltiplos de "s". Por ejemplo, para un proceso SAR(1), su función estará dada por:

$$\rho_k = \Phi_1^k \quad k > 0$$

Por lo que, la función presenta un comportamiento decreciente infinita y sólo es distinta de cero en los intervalos  $s, 2s, 3s, \dots$ ; ahora la función de autocorrelación parcial sólo tendrá un valor significativo en  $k = s$ .

• Modelos estacionales de promedios móviles

Se dice que una serie de tiempo presenta un comportamiento del proceso de promedios móviles estacionales de primer orden si el valor actual de la serie  $Z_t$  puede representarse como el choque aleatorio  $e_t$ , y el choque ocurrido "s" observaciones antes,  $e_{t-s}$ , donde "s" es igual a la longitud del periodo.

$$\begin{aligned}Z_t &= e_t - \Theta_1 e_{t-s} \\Z_t &= (1 - \Theta_1 B^s) e_t\end{aligned}$$

donde  $\Theta_1$  es el parámetro de promedio móvil estacional. Este modelo puede denotarse como SMA(1). En general un modelo SMA ( $Q$ ) puede expresarse como

$$Z_t = \Theta(B^s) e_t$$

donde

$$\Theta(B^s) = 1 - \Theta_1 B^s - \Theta_2 B^{2s} - \dots - \Theta_Q B^{Qs} \quad \text{y} \quad Z_t = \nabla_t^D \nabla^d W_t$$

La función de autocorrelación es semejante a la de promedios móviles, excepto que los valores de las autocorrelaciones aparecen en los intervalos múltiplos de "s". Para un modelo estacional de promedios móviles de orden 1, la función de autocorrelación tendrá sólo un valor distinto de cero, en el intervalo "s".

$$\rho_s = -\Theta_1 / (1 + \Theta_1^2)$$

por lo que los demás valores son ceros, y la función de autocorrelación parcial será decreciente infinita, con valores significativos en múltiplos de s.

• Modelos estacionales mezclados

Se puede construir un modelo estacional autorregresivo y de promedios móviles, de orden ( $P, Q$ )  $\Phi(B^s)Z_t = \Theta(B^s)e_t$

Para estos modelos existe una única diferencia entre las autocorrelaciones de un proceso estacional mixto y uno ordinario: las autocorrelaciones distintas de cero aparecen en los intervalos múltiplos de s. En general, puede denotarse el proceso ARIMA ( $P, D, Q$ )s donde:

- $P$  = orden del proceso AR estacional
- $Q$  = orden del proceso MA estacional
- $D$  = orden de las diferencias estacionales
- $s$  = longitud del periodo estacional

## ◆ Modelo multiplicativo estacional

Finalmente, los modelos antes mencionados pueden combinarse en una clase general que, proporciona un buen ajuste para muchas series de tiempo y genera pronósticos adecuados. Este modelo lo propusieron Box y Jenkins (1970), el cual es llamado ARIMA multiplicativo y se expresa como

$$\phi(B)\Phi(B^s)Z_t = \Theta(B^s)\theta(B)e_t$$

$$\text{ARIMA}(p, d, q) \times (P, D, Q)s,$$

donde  $Z_t = \nabla^d \nabla^{D/s} W_t$ . La importancia de este modelo radica en que para series con observaciones periódicas, se presentan ambas relaciones, la estacional y la no estacional.

En este tipo de modelos se supone que al identificar un modelo estacional, los residuales obtenidos no son ruido blanco, sino están generados por un proceso ARIMA  $(p, d, q)$ , por lo que se obtiene un modelo multiplicativo con efecto estacional y efecto no estacional.

La identificación de este tipo de modelos de series de tiempo que presentan ambos efectos el estacional y el no estacional es muy semejante a la identificación de modelos ordinarios, pero se debe tener presente que ahora se tendrá una gran cantidad de modelos que puedan representar el fenómeno en estudio.

- Comportamientos típicos de la FAC y la FACP

Para facilitar la identificación de modelos estacionales a partir de valores muestrales, en el cuadro 4.2, se resumen las características de la FAC y la FACP.

Proceso	FAC	FACP
<b>AR(p) X SAR(P)</b>	Convergencia a cero	Se trunca después de $p + sP$ autocorrelaciones parciales
<b>MA(q) X SMA(Q)</b>	Se trunca después de $q + sQ$ autocorrelaciones	Sucesión infinita convergente a cero.
<b>Mezclados</b>	Convergencia a cero	Sucesión infinita convergente a cero

Cuadro 4.2 Comportamientos típicos de la FAC y la FACP para modelos estacionales.

## Referencias

1. I. Zurbenko, The Spectral Analysis of Time Series, North Holland (1986).
2. S. Trivikram Rao e Igor G. Zurbenko, "Detecting and Tracking Changes in Ozone Air Quality", Albany, New York; Journal of Air & Waste Management Association, Vol. 44, September (1994).
3. Damodar N. Gujarati, Econometría, McGraw-Hill, México, D.F., (1995).
4. Douglas C. Montgomery, Elizabeth A. Peck, Introduction to Linear Regression Analysis, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, INC, USA (1992).
5. Box George E. P., Jenkins Gwilym M.; Time Series Analysis, Forecasting and Control, Prentice Hall, USA (1976).
6. Guerrero Victor M., Análisis Estadístico de Series de Tiempo Económicas, Universidad Autónoma Metropolitana, México (1991).
7. González Videgaray María del Carmen, Modelos de Decisión con Procesos Estocásticos II (Metodología Box-Jenkins), U.N.A.M., E.N.E.P. Acatlán, México (1990).

### Bibliografía complementaria

- Draper & H. Smith, Applied Regression Analysis, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, INC, (1980)
- William Mendenhall, Dennis D. Wackerly, y Richard L. Scheaffer, Estadística Matemática con Aplicaciones, Grupo Editorial Iberoamérica, Segunda edición México (1994).
- Trivikram Rao e Igor G. Zurbenko, "Mapping Ozone in the Eastern United States", Albany, New York, Environmental Manager, Vol. 1, February (1995).
- Wei William S. W., Time Series Analysis, Univariate and Multivariate Methods, Edit. Addison-Wesley Publishing Company, United States of América (1990).

# Capítulo 5

## *Eliminando el efecto de las condiciones meteorológicas en las concentraciones de ozono*

### 5.1 Estaciones de monitoreo en el análisis

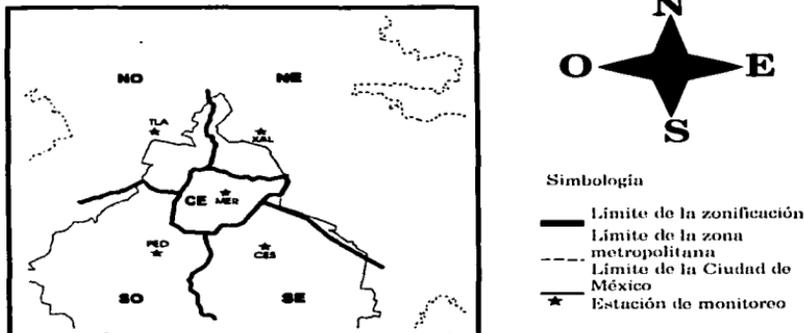


Figura 5.1 Estaciones de monitoreo

Para el análisis se toma una estación por cada zona de la ZMCM, siendo estas las estaciones más completas; esto es, las que presentan más registros; y son llamadas "las cinco grandes", de la Red Automática de Monitoreo Atmosférico (RAMA).

La intención de este análisis es filtrar el efecto de las condiciones meteorológicas en el comportamiento del ozono.

### *Eliminando el efecto de las condiciones meteorológicas en las concentraciones de ozono*

La metodología Rao-Zurbenko evaluará si el ozono está fuertemente influenciado por las condiciones meteorológicas, para cada una de las estaciones seleccionadas. Es importante señalar que se encontrará el porcentaje de influencia de las condiciones meteorológicas en la formación de ozono, y se eliminará de las series de tiempo de ozono con el fin de evaluar las medidas de control implantadas para disminuir las concentraciones de éste en la atmósfera .

A continuación se describen las características de cada una de las estaciones utilizadas en el análisis.

- **Pedregal**

Zona: Suroeste.

Ubicación: Escuela primaria "John F. Kennedy". Cañada No. 370, avenida Crater; colonia: Pedregal de San Angel; c.p. 01900, Delegación: Alvaro Obregón. Altura de la toma de la muestra: 3.70 metros.

Entorno de la estación: El uso del suelo es habitacional de tipo residencial, cuenta con todos los servicios. La fluidez vehicular es baja de tipo particular. La disposición de residuos es totalmente controlada.

- **Cerro de la estrella**

Zona: Sureste.

Ubicación: Planta de tratamiento de aguas negras "Cerro de la estrella", D.D.F.; avenida San Lorenzo s/n; colonia: Paraje San Juan; c.p. 09830, Delegación: Iztapalapa.

Altura de la toma de muestra: 3.70 metros.

Entorno de la estación: El uso del suelo es habitacional con baja densidad; debido a que se encuentra en expansión, existen algunos tiraderos cercanos. La circulación de vehículos es alta, circulan principalmente camiones de volteo.

- **Merced**

Zona: Centro.

Ubicación: Centro de salud "Luis E. Ruiz"; avenida Congreso de la unión 148 antes Francisco Morazan y prolongación de los Carretones; colonia: Merced Balbueba; c.p. 158500, Delegación: Venustiano Carranza.

Altura de la toma de muestra: 6.20 metros.

Entorno de la estación: El uso del suelo es fundamentalmente habitacional, se encuentra en una zona de fluidez vehicular alta; cuenta con todos los servicios urbanos. Frente a la estación se encuentra un parque deportivo que es fuente generadora de polvos en época de tolvaneras.

- **Xalostoc**

Zona: Noreste.

Ubicación: Agencia Volkswagen "Santa Clara". Carretera México-Pachuca, Km. 13.5 calle del hierro, Xalostoc, Municipio: Ecatepec, Estado de México.

Altura de la toma de muestra: 3.70 metros.

Entorno de la estación: El uso del suelo es fundamentalmente industrial, la estación se encuentra dentro de los talleres de una agencia VW, ubicada a espaldas de una fundidora y cercana a una cementera, la infraestructura y servicios urbanos en general son deficientes.

• **Tlalnepantla**

Zona: Noroeste.

Ubicación: Glorieta Atlacomulco, avenida Toluca s/n esquina Atlacomulco; Fraccionamiento Tlalnemex, c.p. 54070, Municipio de Tlalnepantla, Estado de México.

Altura de la toma de muestra: 6.20 metros.

Entorno de la estación: El uso es mixto, en la zona cercana a la estación predominan las casas-habitación y comercios de desarrollo horizontal, es una zona que en su totalidad, aún no cuenta con todos los servicios de urbanización, la fluidez vehicular es alta, circulan vehículos particulares y autobuses urbanos.

## 5.2 Especificación de variables

Dependientes (Contaminante) : Ozono ( $O_3$ ) [ppm]. Explicativas (Meteorología): Temperatura (TMP) [°C] y Humedad Relativa (HR) [Porcentual].

Periodo de Tiempo: 1988-1995. Los datos: Máximos diarios de  $O_3$ , y la lectura correspondiente de temperatura y humedad relativa a la hora en que ocurre el máximo de ozono; en un intervalo de tiempo de [9:00-19:00] hrs.

## 5.3 Pasos de la metodología Rao-Zurbenko

Primero se deben graficar los datos con respecto al tiempo; así es como construimos las series de tiempo, una vez teniendo las series, se procede con los siguientes pasos:

• **Análisis de varianza**

Se observa si las series de tiempo presentan una varianza constante, si no es así, se aplican transformaciones para eliminar la varianza, como se mencionó anteriormente podemos aplicar el logaritmo, la raíz cuadrada, etc., dependiendo de la serie que se tenga.

• **Análisis de regresión**

Si tenemos series que no presenten problemas de varianza, se observa si las variables presentan una relación lineal; es decir, el comportamiento de una línea recta, si es así se aplica el análisis de regresión y se identifica que variables son

### *Eliminando el efecto de las condiciones meteorológicas en las concentraciones de ozono*

significativas para el modelo (selección de variables que expliquen el comportamiento de la variable dependiente). Además, de obtener el coeficiente de determinación ( $R^2$ ) y el coeficiente de correlación ( $R$ ). Como herramienta para el análisis se utilizó el STATISTICA for Windows, Ver 4.5, StatSoft.

- Aplicación del " filtro KZmp "

Se aplican diferentes tipos de filtros, es decir, un filtro con cierta longitud de promedio móvil, y el número de repeticiones necesarias para obtener series sin la presencia del componente estocástico (la serie original se divide en dos series: la que presenta el componente estocástico, y la que presenta la parte determinística). Es necesario mencionar que no existe una fórmula que especifique que filtro se debe aplicar, si no, se aplican varios filtros y se selecciona el mejor, en base a la relación lineal. Al obtener sólo la parte determinística de las series de tiempo se aplica de nuevo el análisis de regresión; obteniéndose nuevamente los estadísticos (coeficientes); en este paso se observará si la relación de dependencia aumenta al eliminar la parte estocástica de las series.

- Análisis de residuales

Es la parte más importante de la metodología, ya que en base a los residuales se evalúan los resultados. Después de haber aplicado el modelo de regresión, los residuales obtenidos no son explicados por las variables meteorológicas seleccionadas como explicativas; es decir son el comportamiento real del ozono sin la influencia de las condiciones meteorológicas.

## 5.4 Estación Pedregal

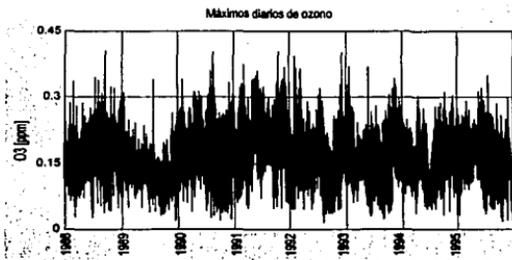


Figura 5.2 Serie de tiempo de ozono.

A partir de la figura 5.2, se observa que la serie de tiempo presenta: Varianza constante, Tendencia irregular, no se puede observar una fluctuación estacional definida, y variación aleatoria. Por otro lado, la serie de tiempo presenta las concentraciones más altas registradas en la ZNICM, en un intervalo de [0.03,0.405] ppm.

#### 5.4 Estación Pedregal

En la figura 5.3, se observa que la serie de tiempo presenta un comportamiento no tan aleatorio en comparación a la de ozono. Y presenta:  
\*Varianza constante  
Tendencia irregular.  
\*Se observa una fluctuación estacional anual con cierta facilidad.  
\*Variación estocástica  
El intervalo es  $[07,28]^{\circ}\text{C}$ .

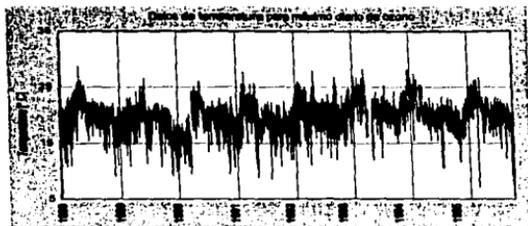


Figura 5.3 Serie de tiempo temperatura.

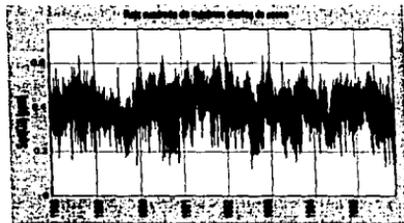


Figura 5.4 Serie de tiempo Sqrt(O<sub>3</sub>).

#### ◊ Análisis de varianza

Se aplicó la transformación de raíz cuadrada a los datos de la serie tiempo de ozono para disminuir la varianza. Como se puede observar en la figura 5.4 la varianza disminuyó.

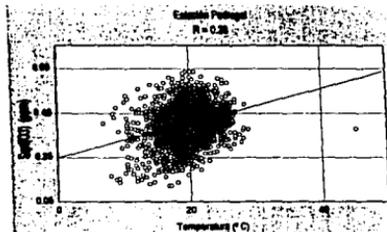


Figura 5.5 Diagrama de dispersión O<sub>3</sub> & TMP.

#### ◊ Linealidad en las variables

En la figura 5.5, se observa la relación lineal que presentan la temperatura y el ozono; ésta es creciente; esto es, a mayor temperatura mayor concentración de ozono. La relación es pobre debido a la presencia del componente estocástico.

#### ◊ Estadísticos obtenidos con la aplicación del análisis de regresión

Se aplicó el análisis de regresión tomando al ozono como variable dependiente para cada una de las variables meteorológicas, donde éstas se consideran como variables que explican el comportamiento del ozono. Con el análisis se obtienen el coeficiente de correlación (R) y el coeficiente de determinación (R<sup>2</sup>).

*Eliminando el efecto de las condiciones meteorológicas en las concentraciones de ozono*

<b>Variables Dependiente</b>	<b>Explicativas</b>	
	<b>TMP</b>	<b>HR</b>
<b>O<sub>3</sub></b>	r = 0.25 r <sup>2</sup> = 0.06	r = 0.23 r <sup>2</sup> = 0.05
<b>Ln (O<sub>3</sub>)</b>	r = 0.30 r <sup>2</sup> = 0.09	r = 0.30 r <sup>2</sup> = 0.10
<b>Sqrt(O<sub>3</sub>)</b>	r = 0.28 r <sup>2</sup> = 0.08	r = 0.26 r <sup>2</sup> = 0.07
	<b>TMP/HR</b>	
<b>Ln (O<sub>3</sub>)</b>	R = 0.37 R <sup>2</sup> = 0.14	
<b>Sqrt(O<sub>3</sub>)</b>	R = 0.34 R <sup>2</sup> = 0.11	

Tabla 5.1 Estadísticos del análisis.

A partir de la tabla 5.1, se observa una mayor relación lineal del ozono y la temperatura y al aplicar una transformación logarítmica a la serie de tiempo de ozono se observa un aumento en ambos coeficientes, lo mismo sucede con la transformación de raíz cuadrada. Como segunda variable significativa se considera a la humedad relativa.

Al aplicar el análisis de regresión múltiple, es decir, con dos variables explicativas, encontramos una mayor relación lineal, ya que; el ozono se explica en base a la humedad relativa y la temperatura. Mediante estos estadísticos se selecciona que variables son significativas para explicar el comportamiento del ozono.

♦ Aplicación del filtro Kolmogorov-Zurbenko "KZ<sub>m,p</sub>, filter"

<b>Filtro</b>	<b>Variables</b>			
	<b>Ln(O<sub>3</sub>) / TMP</b>	<b>Ln(O<sub>3</sub>) / HR</b>	<b>Ln(O<sub>3</sub>) / TMP / HR</b>	<b>Sqrt (O<sub>3</sub>) / HR</b>
<b>KZ23,3</b>	r = 0.04 r <sup>2</sup> = 0.00; no sig	r = 0.30 r <sup>2</sup> = 0.09	R = 0.30 R <sup>2</sup> = 0.09 ; no sig.	r = 0.25 r <sup>2</sup> = 0.07

Tabla 5.2 Estadísticos obtenidos con el filtro KZ<sub>m,p</sub>.

Se aplican los filtros de promedios móviles para obtener sólo la parte determinística de las series de tiempo. Al obtenerla se aplica nuevamente el análisis de regresión y se obtienen los coeficientes de correlación y determinación.

Como se puede observar de la tabla 5.2, al eliminar la parte estocástica de las series de tiempo y dejar sólo la parte determinista, la temperatura ya no presenta un comportamiento lineal con respecto al ozono, es decir, ya no es significativa para explicar el comportamiento del ozono.

La humedad relativa si presenta una relación lineal con el ozono. Por lo que, el 7% de la variación máxima diaria de ozono se explica por la variación de la humedad relativa. Es importante mencionar que se decidió utilizar la transformación de raíz cuadrada ya que, los residuales del modelo de regresión presentan un mejor comportamiento.

Al aplicar el filtro KZ23.3 las series de tiempo se representan como:  $I(O(t) - O_{Lz}(t)) = W(t)$ ; donde  $W(t)$  es la parte estocástica de las series, a continuación se procederá a examinar los residuales; es decir, si siguen un comportamiento ruido blanco.

◊ Ajuste a la distribución normal

Gráficos de los residuales que se distribuyen aproximadamente como una normal.



Figura 5.6 Ajuste a la normal. (O.)  
 $[O(t) - O_{Lz}(t)] = W(t)$



Figura 5.7 Ajuste a la normal (HR)  
 $[HR(t) - HR_{Lz}(t)] = W(t)$

A partir de las figuras 5.6 y 5.7, se puede observar que los residuales  $W(t)$ : la parte estocástica de  $\text{Sqrt}(O_3)$  y HR se distribuyen aproximadamente como una  $N(0, \sigma^2)$ , donde éstos son casi ruido blanco.

◊ La no correlación de los residuales con sus variables

Mediante el diagrama de dispersión se evalúa que la parte estocástica esté separada de la determinística, es decir, que no sigan algún tipo de relación. En las figuras 5.8 y 5.9 se observa que tanto el ozono como la humedad relativa no están correlacionados con los residuales.

Además, el coeficiente de determinación obtenido refuerza lo anterior debido a que es muy pobre. Se puede concluir que los dos efectos están separados.

*Eliminando el efecto de las condiciones meteorológicas en las concentraciones de ozono*

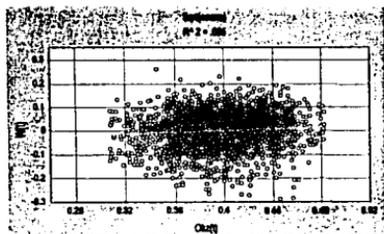


Figura 5.8. Diagrama de dispersión W(t) & Sqrt(O)

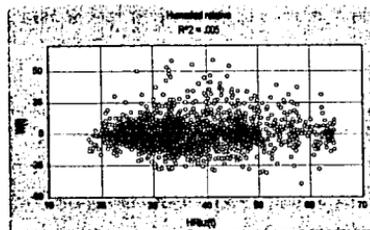


Figura 5.9. Diagrama de dispersión W(t) & HR

◊ Series de tiempo suavizadas

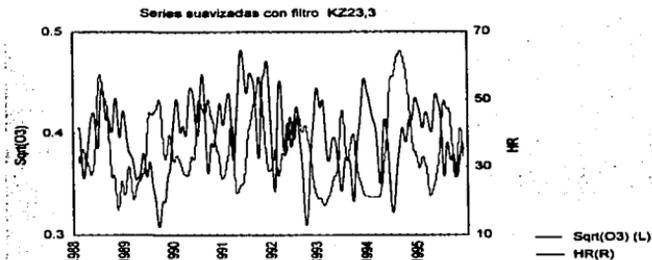


Figura 5.10 Suavizamiento de las series de tiempo

En la figura 5.10, se puede observar que en las series suavizadas (parte determinística), se ha eliminado la parte estocástica. Analizando estas series no presentan una estacionalidad definida. Por otro lado, se aprecia en la serie de tiempo de ozono una tendencia decreciente para los últimos tres años.

◊ Comportamiento del ozono sin la influencia de las condiciones meteorológicas

Como se había mencionado anteriormente los residuales obtenidos a través del análisis de regresión son el comportamiento del ozono sin la influencia de las condiciones meteorológicas (humedad relativa).

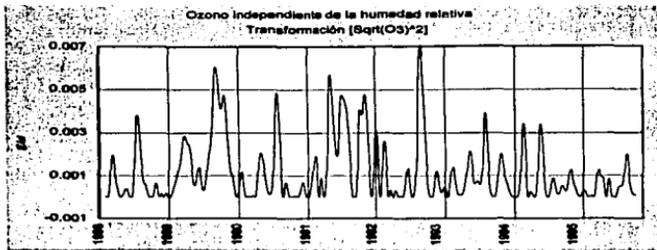


Figura 5.11 Comportamiento del ozono sin la influencia de la humedad relativa.

Como se puede observar en la gráfica 5.11, existen unos picos muy sobresalientes, éstos son las mayores concentraciones de ozono que se registraron en esos años. Se podría decir que además de la meteorología existen otras variables que explican el comportamiento del ozono; lo anterior se refuerza por qué los residuales presentan autocorrelación.

Pero a partir de estos resultados se puede decir que las máximas concentraciones de ozono presentan una tendencia decreciente, como se muestra en la figura 5.11, por lo que las estrategias de control para disminuir las concentraciones máximas de ozono en la atmósfera si han tenido efecto. Esto no podemos asegurarlo totalmente, porque como se mostró anteriormente el porcentaje de explicación de la humedad relativa para la formación de ozono es pobre y se necesitan más variables que expliquen el comportamiento del ozono.

## 5.5 Estación Cerro de la Estrella

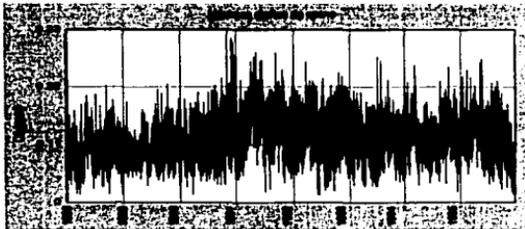


Figura 5.12 Serie de tiempo de ozono

En la gráfica de la figura 5.12, se observa que la serie de tiempo presenta:

- \*Varianza no constante
- \*Tendencia irregular
- \*No se puede observar una fluctuación estacional definida.
- \*Variación aleatoria

El intervalo de los datos es de [0.02,0.314] ppm.

*Eliminando el efecto de las condiciones meteorológicas en las concentraciones de ozono*

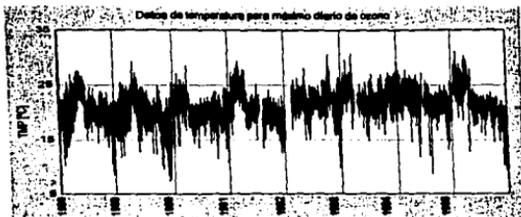


Figura 5.13 Serie de tiempo de la temperatura

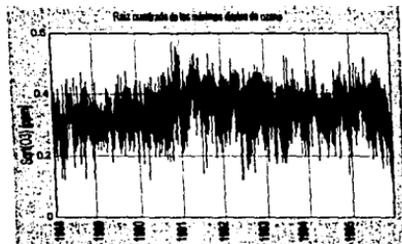


Figura 5.14 Serie de tiempo Sqrt(O<sub>3</sub>).

◊ Análisis de varianza

Se aplicó la transformación de raíz cuadrada a la serie tiempo de ozono para disminuir la varianza. Como se puede observar en la figura 5.14, que ésta disminuyó.

◊ Estadísticos obtenidos con la aplicación del análisis de regresión

Aplicando el análisis de regresión, se obtienen el coeficiente de correlación ( $R$ ) y el coeficiente de determinación ( $R^2$ ).

En la figura 5.13, se observa como la serie de tiempo presenta un comportamiento no tan aleatorio en comparación con la de ozono. También: Varianza constante, fluctuación estacional anual y Tendencia horizontal. Los datos se encuentran en el intervalo [07,31]°C.

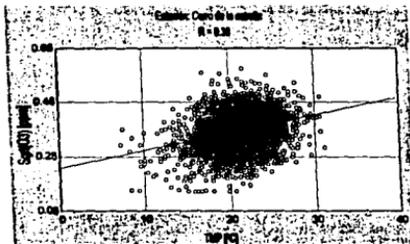


Figura 5.15 Diagrama de dispersión Sqrt(O<sub>3</sub>) & TMP.

◊ Linealidad en las variables

En la figura 5.15, se observa como la temperatura y el ozono presentan una relación lineal creciente, es decir, a mayor temperatura mayor concentración de ozono. Esta relación es muy pobre debido a la existencia del componente estocástico (aleatoriedad) en las series.

Variables Dependiente	Explicativas	
	TMP	HR
<b>O<sub>3</sub></b>	r = 0.277 r <sup>2</sup> = 0.067	r = 0.008 r <sup>2</sup> = 0.00; no sig.
<b>Ln (O<sub>3</sub>)</b>	r = 0.310 r <sup>2</sup> = 0.096	r = 0.042 r <sup>2</sup> = 0.002
<b>Sqrt (O<sub>3</sub>)</b>	r = 0.296 r <sup>2</sup> = 0.088	r = 0.0152 r <sup>2</sup> = 0.0002

Tabla 5.3. Estadísticos del análisis

Los resultados de la tabla 5.3 nos muestran que el ozono y la temperatura presentan una relación lineal. Y al aplicar una transformación logarítmica en la serie de tiempo de ozono, se observa un aumento en ambos coeficientes, lo mismo sucede con la transformación de raíz cuadrada.

Analizando la humedad relativa, ésta no presenta una relación lineal significativa con respecto al ozono.

o Aplicación del filtro Kolmogorov-Zurbenko "KZ<sub>m,p</sub>, filter"

KZ 91,2	TMP	HR	TMP/HR
<b>O<sub>3</sub></b>	r = 0.177 r <sup>2</sup> = 0.031	r = 0.429 r <sup>2</sup> = 0.184	R = 0.436 R <sup>2</sup> = 0.190 $\bar{R}^2 = 0.189$
<b>Ln(o<sub>3</sub>)</b>	r = 0.161 r <sup>2</sup> = 0.026	r = 0.375 r <sup>2</sup> = 0.140	R = 0.383 R <sup>2</sup> = 0.147 $\bar{R}^2 = 0.146$
<b>Sqrt(O<sub>3</sub>)</b>	r = 0.156 r <sup>2</sup> = 0.025	r = 0.40 r <sup>2</sup> = 0.16	R = 0.405 R <sup>2</sup> = 0.164 $\bar{R}^2 = 0.163$

Tabla 5.4 Estadísticos obtenidos con el filtro KZ<sub>m,p</sub>.

En la tabla 5.4, se muestran los estadísticos obtenidos con la aplicación del filtro KZ; a partir de los resultados podemos decir que el 16% de la variación diaria máxima de ozono se explica por la variación de humedad relativa. Cabe mencionar que se decide utilizar la transformación de raíz cuadrada, porque se obtiene un mejor comportamiento de los residuales.

Al aplicar el filtro, las series de tiempo se representan como:  $\{O(t) - O_A(t) \} = W(t)$ , donde  $W(t)$  es la parte estocástica de las series, a continuación se procede a examinar el comportamiento de los residuales (parte estocástica), es decir, si son ruido blanco.

*Eliminando el efecto de las condiciones meteorológicas en las concentraciones de ozono*

◊ Ajuste a la distribución normal

Gráficos de los residuales que se distribuyen aproximadamente como una normal.

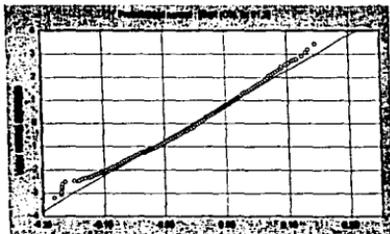


Figura 5.16. Ajuste a la normal  $\text{Sqrt}(O_o)$ .  
 $[O(t) - O_{e}(t)] = W(t)$

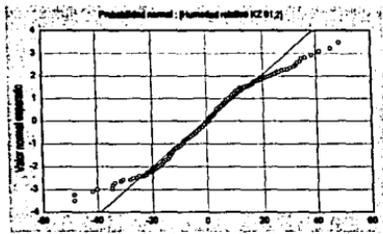


Figura 5.17. Ajuste a la normal (HR).  
 $[TMP(t) - TMP_{e}(t)] = W(t)$

Se puede observar que los residuales  $W(t)$ ; la parte estocástica de las series de tiempo de  $\text{Sqrt}(O_o)$ ; figura 5.16 y de la HR; figura 5.17, se distribuyen aproximadamente como una  $N(0, \sigma^2)$ .

◊ La no correlación de los residuales con sus variables

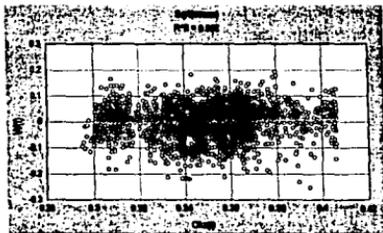


Figura 5.18 Diagrama de dispersión  $W(t)$  &  $\text{Sqrt}(O_o)$

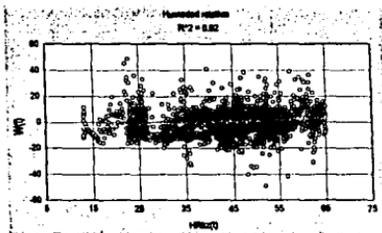


Figura 5.19 Diagrama de dispersión  $W(t)$  & HR

A partir de los gráficos de dispersión se observan en la figura 5.18 y la 5.19 del ozono y la humedad relativa respectivamente; los residuales no están relacionados con la parte determinística de las series. Además, el coeficiente de determinación obtenido refuerza lo anterior, debido a que es muy pobre.

○ Series de tiempo suavizadas

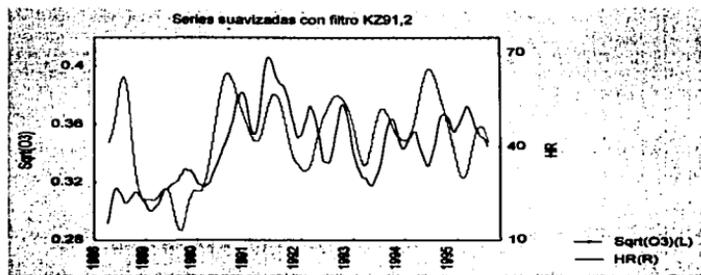


Figura 5.20 Suavizamiento de las series de tiempo.

Como se observa en la figura 5.20, las series de tiempo sin el componente estocástico, no presentan una fluctuación estacional definida. Además, podemos observar como la serie de tiempo del ozono presenta una tendencia creciente, pero después decreciente y finalmente presenta horizontalidad para los últimos dos años.

○ Comportamiento del ozono sin la influencia de las condiciones meteorológicas

Los residuales son el comportamiento del ozono sin la influencia de las condiciones meteorológicas (humedad relativa).

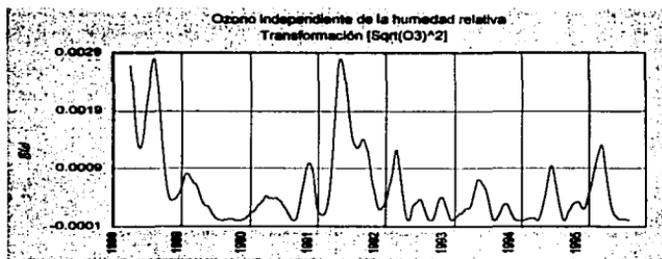


Figura 5.21 Comportamiento del ozono sin la influencia de la humedad relativa.

### *Eliminando el efecto de las condiciones meteorológicas en las concentraciones de ozono*

A partir de la figura 5.21, se puede observar que la serie de tiempo del ozono al eliminar el efecto de la humedad relativa, se puede decir que las concentraciones máximas diarias de ozono presentan una tendencia decreciente, con ello se dice que las estrategias de control para disminuir las concentraciones máximas de ozono en la atmósfera si han tenido efecto. Pero se debe tener presente, que el porcentaje de explicación de la humedad relativa en la formación de ozono es pobre, por lo que se necesitan más variables que expliquen el comportamiento de éste.

## 5.6 Estación Merced

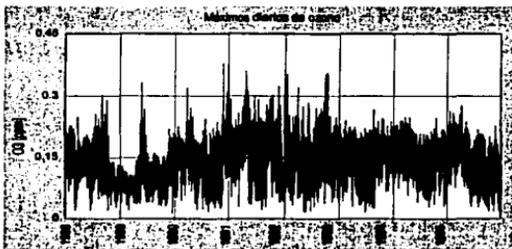


Figura 5.22 Serie de tiempo de ozono

En la figura 5.22, se observa que la serie de tiempo presenta:

- \*Varianza no constante
- \*Tendencia decreciente
- \*No se puede observar una fluctuación estacional definida.

\*Variación aleatoria  
Las concentraciones fluctúan en un intervalo de [0.02, 0.38] ppm.

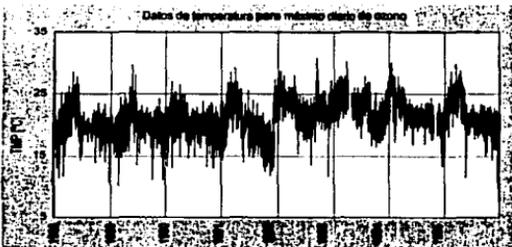


Figura 5.23 Serie de tiempo de temperatura

Como se puede observar en la figura 5.23, la serie de tiempo presenta un comportamiento no tan aleatorio en comparación con la de ozono. También:

- \*Varianza constante
- \*Fluctuación estacional anual
- \*Tendencia (horizontal)

Los datos se encuentran en un intervalo de [07,31]°C.

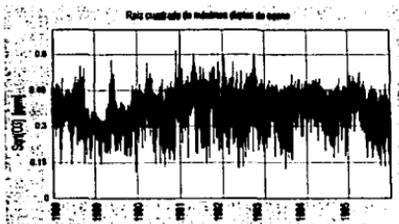


Figura 5.24 Serie transformada Sqrt(O3)

#### ◊ Análisis de varianza

Se aplicó la transformación de raíz cuadrada a los datos de la serie de tiempo de ozono para estabilizar la varianza. Como se puede observar en la figura 5.24 ésta se estabilizó.

#### ◊ Estadísticos obtenidos con la aplicación del análisis de regresión

Se aplica el análisis de regresión tomando al ozono como variable dependiente para cada una de las variables meteorológicas, donde éstas son variables que explican la formación del ozono.

<b>Variables Dependiente</b>	<b>Explicativas</b>	
	<b>TMP</b>	<b>HR</b>
<b>O<sub>3</sub></b>	$r = 0.323$ $r^2 = 0.104$	$r = 0.125$ $r^2 = .016$
<b>Sqrt(O<sub>3</sub>)</b>	$r = 0.344$ $r^2 = 0.112$	$r = 0.147$ $r^2 = 0.021$
<b>Ln(O<sub>3</sub>)</b>	$r = 0.355$ $r^2 = 0.127$	$r = 0.172$ $r^2 = 0.020$
	<b>TMP/HR</b>	
<b>Ln(O<sub>3</sub>)</b>	$R = 0.362$ $R^2 = 0.131$	
<b>Sqrt(O<sub>3</sub>)</b>	$R = 0.345$ $R^2 = 0.110$	

Tabla 5.5 Estadísticos obtenidos

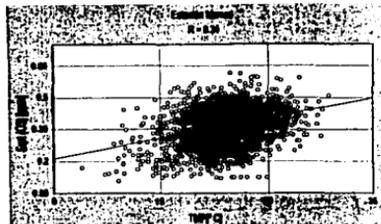


Figura 5.25 Diagrama de dispersión Sqrt(O3)&amp;TMP

#### ◊ Linealidad en las variables

En la figura 5.25, se observa el diagrama de dispersión de la temperatura y el ozono. Presentando una relación lineal creciente; esto es, a mayor temperatura, mayor concentración de ozono, la relación es pobre.

*Eliminando el efecto de las condiciones meteorológicas en las concentraciones de ozono*

Con el análisis se obtienen el coeficiente de correlación (R) y el coeficiente de determinación (R<sup>2</sup>), a partir de los resultados mostrados en la tabla 5.5, se tiene que existe una mayor relación lineal del ozono con la temperatura.

Con la aplicación de la transformación logarítmica en la serie de tiempo del ozono, se observa un aumento en ambos coeficientes, lo mismo sucede con la raíz cuadrada. Con respecto a la humedad relativa no se observa una relación lineal significativa. Por otro lado, con el análisis de regresión múltiple, se encuentra un aumento en los estadísticos obtenidos.

◊ Aplicación del filtro Kolmogorov-Zurbenko "KZ<sub>m,p</sub>, filter"

"KZ 45,4	TMP	HR	TMP/HR
<b>O<sub>3</sub></b>	r=0.378 r <sup>2</sup> =0.143	r=0.045 r <sup>2</sup> =0.002 no sig.	R=0.379 R <sup>2</sup> = 0.143 no sig.
<b>Ln(O<sub>3</sub>)</b>	r=0.418 r <sup>2</sup> =0.175	r=0.036 r <sup>2</sup> = 0.001 no sig.	R=0.422 R <sup>2</sup> = 0.178
<b>Sqrt(O<sub>3</sub>)</b>	r=0.403 r <sup>2</sup> = 0.162	r=0.011 r <sup>2</sup> =0.000 no sig.	R=0.403 R <sup>2</sup> =0.162 no sig.

Tabla 5.6 Estadísticos obtenidos con el filtro KZ<sub>m,p</sub>.

En esta tabla 5.6, se presentan los estadísticos obtenidos al aplicar el filtro, donde se obtiene un mayor coeficiente de dependencia, es decir, al eliminar el ruido blanco en las series, y dejar sólo la parte determinística; la relación lineal aumenta.

Por lo que, se dice que aproximadamente el 16% de la variación máxima diaria de ozono se explica por la variación de la temperatura. Se decidió utilizar la transformación de raíz cuadrada por el mejor comportamiento de los residuales.

Al aplicar el filtro, las series de tiempo se representan como:

$$|O(t) - O_c(t)| = W(t)$$

donde  $W(t)$  es la parte estocástica de las series, mediante el ajuste a la distribución normal se examina si los residuales (parte estocástica) son ruido blanco.

◊ Ajuste a la distribución normal

Gráficos de los residuales que se distribuyen aproximadamente como una normal.

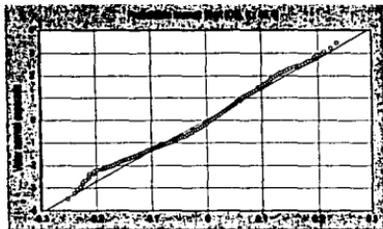


Figura 5.26 Ajuste a la normal  $\text{Sqrt}(O_3)$ .  
 $[O(t) - O_k(t)] = W(t)$



Figura 5.27 Ajuste a la normal TMP.  
 $[TMP(t) - T_k(t)] = W(t)$

Se puede observar en las figuras 5.26 y 5.27 los residuales  $W(t)$ ; la parte estocástica de  $\text{Sqrt}(O_3)$  y de TMP respectivamente se distribuyen aproximadamente como una normal, con  $N-(0, \sigma^2)$ , éstos son casi ruido blanco.

◊ La no correlación de los residuales con sus variables

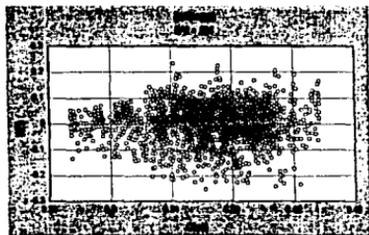


Figura 5.28 Diagrama de dispersión  $W(t)$  &  $\text{Sqrt}(O_3)$

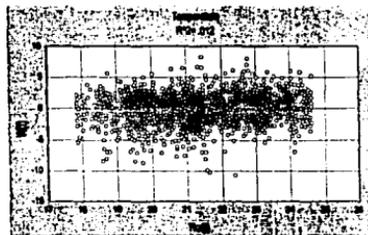


Figura 5.29 Diagrama de dispersión  $W(t)$  & TMP

Mediante los diagramas de dispersión de la parte determinística y la parte estocástica de las series de tiempo de ozono y temperatura, mostrados en las figuras 5.28 y 5.29, se observa que no existe correlación. Además, el coeficiente de determinación obtenido refuerza lo anterior debido a que es muy pobre.

## Eliminando el efecto de las condiciones meteorológicas en las concentraciones de ozono

### ◊ Series de tiempo suavizadas

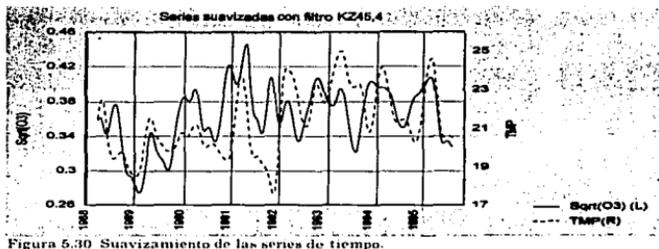


Figura 5.30 Suavizamiento de las series de tiempo.

En la figura 5.30, se observa como al aplicar el filtro a las series de tiempo, sólo queda la parte determinística de éstas. Con la aplicación del filtro se esperaba encontrar un mismo patrón estacional, pero no es así; si no que las dos series presentan comportamientos diferentes; es por ello que no tienen una asociación lineal más fuerte. Si observamos la serie de tiempo suavizada de ozono, ésta presenta una horizontalidad en los últimos 3 años.

### ◊ Comportamiento del ozono sin la influencia de las condiciones meteorológicas

Los residuales son el comportamiento del ozono sin la influencia de las condiciones meteorológicas (temperatura).

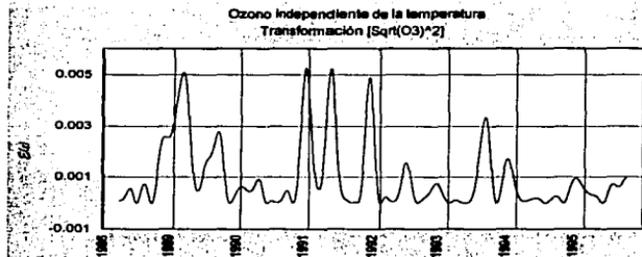


Figura 5.31 Comportamiento del ozono sin la influencia de la temperatura.

A partir de la figura 5.31, se observa en la serie de tiempo de ozono una tendencia decreciente al eliminar el efecto de la temperatura. También se observan algunos picos, muy sobresalientes esto se explica por que las mayores concentraciones de ozono se dieron en esos años. También podemos decir que existen otras variables que explican el comportamiento del ozono, esto se refuerza debido a que los residuales presentan autocorrelación.

Finalmente, podemos decir que las estrategias de control para disminuir las concentraciones máximas de ozono en la atmósfera si han tenido efecto. Cabe mencionar que sólo se está eliminando la influencia de las condiciones meteorológicas, y existen otras variables que explican el comportamiento del ozono. Por ello, es que se obtiene un modelo de regresión lineal pobre.

## 5.7 Estación Xalostoc

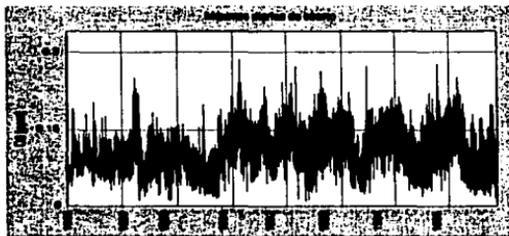


Figura 5.32 Serie de tiempo de ozono

En la figura 5.32, se observa que la serie de tiempo presenta:

- \*Varianza constante
  - \*Tendencia (horizontal)
  - \*No se puede observar una fluctuación estacional definida.
  - \*Variación aleatoria
- Las concentraciones se encuentran en un intervalo de  $[0.01, 0.285]$  ppm.

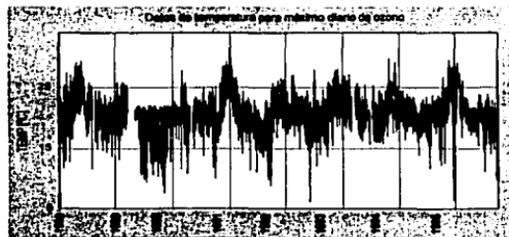


Figura 5.33 Serie de tiempo de temperatura.

En la figura 5.33, se observa como la serie de tiempo presenta un comportamiento no tan aleatorio en comparación con la serie de ozono. También:

- \*Varianza constante
- \*Se observa una fluctuación estacional anual
- \*Tendencia (horizontal). El intervalo en que se encuentran los datos es de  $[6, 32]^{\circ}\text{C}$ .

*Eliminando el efecto de las condiciones meteorológicas en las concentraciones de ozono*

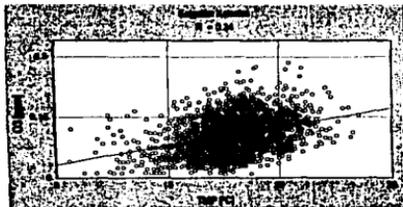


Figura 5.34 Diagrama de dispersión O<sub>3</sub>&TMP.

◊ Linealidad en las variables

Mediante el diagrama de dispersión, que se presenta en la figura 5.3-4, se observa como el ozono y temperatura siguen un comportamiento lineal creciente, es decir, a mayor temperatura mayor concentración de ozono. Pero este comportamiento es pobre por la presencia del componente estocástico (aleatoriedad).

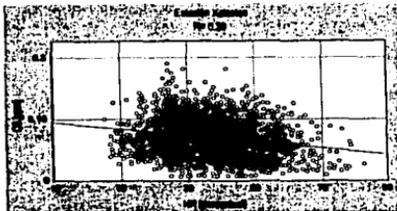


Figura 5.35 Diagrama de dispersión O<sub>3</sub>&HR.

En la figura 5.34 del diagrama de dispersión de la humedad relativa y el ozono, se puede observar una relación lineal; pero de comportamiento contrario con respecto a la temperatura, aquí se dice que a mayor humedad relativa menores concentraciones de ozono; es decir, una relación lineal decreciente.

◊ Estadísticos obtenidos con la aplicación del análisis de regresión

Variables Dependiente	Explicativas	
	TMP	HR
O <sub>3</sub>	r = 0.341 r <sup>2</sup> = 0.116	r = 0.289 r <sup>2</sup> = 0.083
Sqrt(O <sub>3</sub> )	r = 0.338 r <sup>2</sup> = 0.114	r = 0.235 r <sup>2</sup> = 0.055
ln (O <sub>3</sub> )	r = 0.345 r <sup>2</sup> = 0.119	r = 0.244 r <sup>2</sup> = 0.060
	TMP / HR	
O <sub>3</sub>	R = 0.336 R <sup>2</sup> = 0.129.	
Ln (O <sub>3</sub> )	R = 0.361 R <sup>2</sup> = 0.131 R̄ <sup>2</sup> = 0.130	
Sqrt(O <sub>3</sub> )	R = 0.352 R <sup>2</sup> = 0.124 R̄ <sup>2</sup> = 0.123	

Tabla 5.7 Estadísticos.

Se aplica el análisis de regresión lineal tomando al ozono como variable dependiente para cada una de las variables meteorológicas, donde éstas son variables que explican la formación de ozono.

De acuerdo a los resultados presentados en esta tabla 5.7, se tiene que existe mayor relación lineal del ozono con la temperatura. Al aplicar una transformación logarítmica en la serie de tiempo de ozono se obtiene un aumento tanto en el coeficiente de correlación, como en el coeficiente de determinación, lo mismo sucede al aplicar la transformación de raíz cuadrada. Como segunda variable significativa se encontró a la humedad relativa, aunque en muy poco porcentaje. Y aplicando el análisis de regresión múltiple no se observa un mejor ajuste.

◊ Aplicación del filtro Kolmogorov-Zurbenko "KZ<sub>m,p</sub>", filter

KZ 45,4	TMP	HR	TMP/HR
<b>O<sub>3</sub></b>	r= 0.448 r <sup>2</sup> = 0.200	r= 0.356 r <sup>2</sup> = 0.127	R= 0.605 R <sup>2</sup> = 0.256 $\bar{R}$ = 0.256
<b>Ln(O<sub>3</sub>)</b>	r= 0.450 r <sup>2</sup> = 0.201	r= 0.384 r <sup>2</sup> = 0.147	R= 0.522 R <sup>2</sup> = 0.273 $\bar{R}$ = 0.272
<b>Sqrt(O<sub>3</sub>)</b>	r= 0.448 r <sup>2</sup> = 0.20	r= 0.375 r <sup>2</sup> = 0.140	R= 0.515 R <sup>2</sup> = 0.265 $\bar{R}$ = 0.265

Tabla 5.8 Estadísticos obtenidos con el filtro KZ<sub>m,p</sub>.

En la tabla 5.6, se presentan los estadísticos obtenidos al aplicar el filtro de promedios móviles; se puede decir que aproximadamente el 20% de la variación del máximo diario de ozono se explica por la variación de la temperatura.

Por otro lado, en un 27% la variación del máximo de ozono se explica por la variación de la temperatura y de la humedad relativa.

Al aplicar el filtro, las series de tiempo se representan como:

$$[O(t) - O_k(t)] = W(t)$$

donde  $W(t)$  es la parte estocástica de las series. Por medio del ajuste a la distribución normal se examina si los residuales (parte estocástica) siguen un comportamiento de ruido blanco.

## Eliminando el efecto de las condiciones meteorológicas en las concentraciones de ozono

### ◊ Ajuste a la Distribución Normal

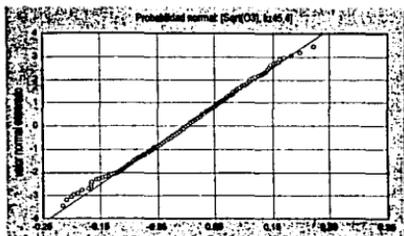


Figura 5.36 Ajuste a la normal Sqrt(O<sub>3</sub>).  
 $[O(t) - O_{kz}(t)] = W(t)$



Figura 5.37 Ajuste a la normal TMP.  
 $[TMP(t) - T_{kz}(t)] = W(t)$

Se observa que los residuales  $W(t)$ ; la parte estocástica de  $\text{Sqrt}(O_3)$  y de la TMP se distribuyen aproximadamente como una  $N(0, \sigma^2)$ , a partir de las figuras 5.36 y 5.37 respectivamente.

### ◊ La no correlación de los residuales con sus variables

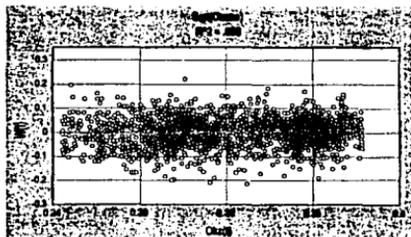


Figura 5.38 Diagrama de dispersión  $W(t)$  &  $\text{Sqrt}(O_3)$ .

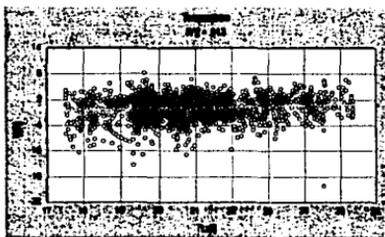


Figura 5.39 Diagrama de dispersión  $W(t)$  & TMP.

Tanto en el diagrama de dispersión de la parte estocástica y la determinística de las serie de tiempo del ozono; figura 5.38, como para la temperatura; figura 5.39, se observa que no presentan correlación. Además, el coeficiente de determinación obtenido refuerza lo anterior debido a que es muy pobre. Por lo que, los dos efectos están separados (la parte determinística y la estocástica).

○ Series de tiempo suavizadas

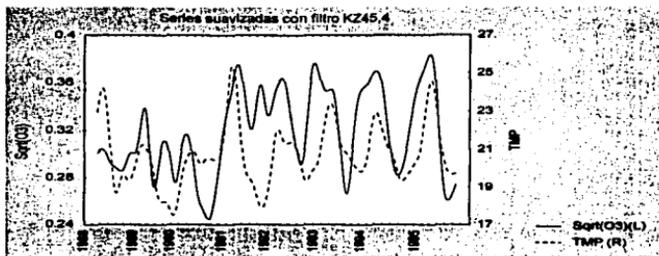


Figura 5.40 Suavizamiento de las series de tiempo.

De acuerdo a la figura 5.40, de las series de tiempo suavizadas (parte determinística); no se observa una fluctuación estacional anual semejante. Por otro lado, analizando la serie de tiempo de ozono no se observa una tendencia para los últimos años, por el contrario presenta tendencia horizontal.

○ Comportamiento del ozono sin la influencia de las condiciones meteorológicas

Al aplicar el análisis de regresión, la ecuación obtenida es el efecto de la temperatura sobre las concentraciones de ozono, se dice entonces que los residuales son el comportamiento del ozono eliminando la influencia meteorológica.

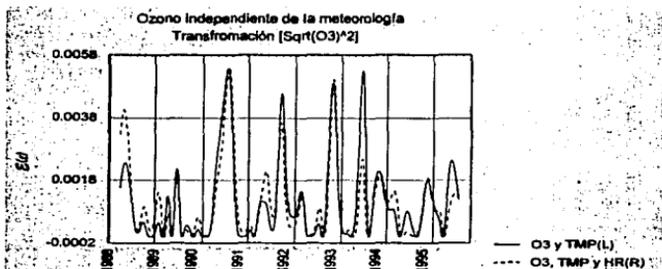


Figura 5.41 Comportamiento del ozono sin la influencia de la temperatura y la humedad relativa.

### *Eliminando el efecto de las condiciones meteorológicas en las concentraciones de ozono*

En la figura 5.41, se puede observar como la serie de tiempo de ozono al eliminar el efecto de la temperatura presenta una tendencia decreciente. También se observa tendencia decreciente aún mayor al eliminar el efecto de la temperatura y la humedad relativa.

Finalmente, se puede decir que las estrategias de control para disminuir las concentraciones de ozono en la atmósfera han tenido efecto. Se debe tomar en cuenta que sólo se está eliminando la influencia de las condiciones meteorológicas y que el porcentaje de explicación obtenido es pobre.

## 5.8 Estación Tlalneantla

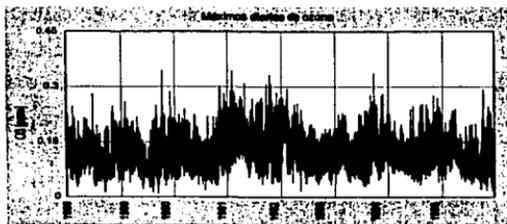


Figura 5.42. Serie de tiempo de ozono.

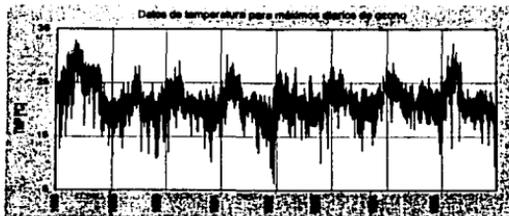


Figura 5.43. Serie de tiempo de temperatura

En la figura 5.42, se observa que la serie de tiempo presenta:

- \*Varianza constante

- \*Tendencia (horizontalidad)

- \*No se puede observar una fluctuación estacional definida.

- \*Variación aleatoria

Las concentraciones de ozono se encuentran en el intervalo  $[0.01, 0.346]$  ppm.

En la figura 5.43, se observa como la serie de tiempo presenta un comportamiento no tan aleatorio en comparación con la de ozono.

También:

- \*Varianza constante

- \*Se observa una fluctuación estacional anual

- \*Tendencia horizontal

El intervalo en que se encuentran los datos es de  $[6.33]^{\circ}\text{C}$ .

### 5.8 Estación Tlalnepantla

#### ◊ Linealidad en las variables

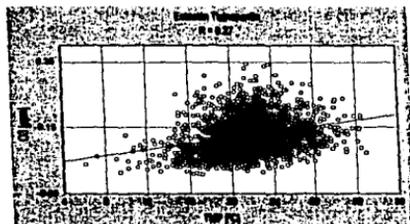


Figura 5.44 Diagrama de dispersión O3&TMP.

Mediante el diagrama de dispersión de la temperatura y el ozono, que se presenta en al figura 5.44, se observa una relación lineal creciente, es decir, a mayor temperatura mayor concentración de ozono, pero la relación es pobre, por la presencia del componente estocástico.

#### ◊ Estadísticos obtenidos con la aplicación del análisis de regresión

Variables Dependiente	Explicativas	
	TMP	HR
O <sub>3</sub>	r = 0.265 r <sup>2</sup> = 0.07	r = 0.258 r <sup>2</sup> = 0.067
Ln (O <sub>3</sub> )	r = 0.311 r <sup>2</sup> = 0.096	r = 0.259 r <sup>2</sup> = 0.067
Sqrt (O <sub>3</sub> )	r = 0.288 r <sup>2</sup> = 0.083	r = 0.262 r <sup>2</sup> = 0.068
	TMP/HR	
O <sub>3</sub>	R = 0.340 R <sup>2</sup> = 0.116	
Ln (O <sub>3</sub> )	R = 0.377 R <sup>2</sup> = 0.142	
Sqrt(O <sub>3</sub> )	R = 0.362 R <sup>2</sup> = 0.131	

Tabla 5.9. Estadísticos.

En la tabla 5.9, se muestran los resultados obtenidos con el análisis de regresión; esto es, el coeficiente de correlación y el coeficiente de dependencia. A partir de estos resultados, se tiene una mayor relación lineal del ozono con la temperatura. Y al aplicar una transformación logarítmica en los datos de ozono, se observa un aumento en ambos coeficientes, lo mismo sucede con la transformación de raíz cuadrada. Por otra parte la humedad relativa es significativa, aunque en menor porcentaje que la temperatura. Los estadísticos obtenidos con el análisis de regresión múltiple muestran una mayor relación lineal del ozono con respecto a las variables explicativas.

Eliminando el efecto de las condiciones meteorológicas en las concentraciones de ozono

◊ Aplicación del filtro Kolmogorov-Zurbenko "KZ<sub>m,p</sub>, filter"

KZ 45.4	TMP	HR	TMP/HR
O <sub>3</sub>	r = 0.037 r <sup>2</sup> = 0.001	r = 0.399 r <sup>2</sup> = 0.159	R = 0.401 R <sup>2</sup> = 0.160
Ln(O <sub>3</sub> )	r = 0.044 r <sup>2</sup> = 0.002	r = 0.324 r <sup>2</sup> = 0.105	R = 0.341 R <sup>2</sup> = 0.116 R̄ <sup>2</sup> = 0.116
Sqrt(O <sub>3</sub> )	r = 0.001 r <sup>2</sup> = 0.000 TMP no sig.	r = 0.376 r <sup>2</sup> = 0.141	R = 0.382 R <sup>2</sup> = 0.146 R̄ <sup>2</sup> = 0.145

Tabla 5.10 Estadísticos obtenidos con el filtro KZ<sub>m,p</sub>.

En la tabla 5.10, se muestran los resultados obtenidos después de aplicar el filtro de promedios móviles, donde la temperatura ya no es significativa en el modelo, es decir, la temperatura ya no explica el comportamiento del ozono. Pero la humedad relativa sí presenta una relación lineal importante. Por lo que el 14% de la variación máxima diaria de ozono se explica por la variación de la humedad relativa.

Al aplicar el filtro, las series de tiempo se representan como:  $[O(t) - O_{kz}(t)] = W(t)$ ; donde  $W(t)$  es la parte estocástica de las series.

◊ Ajuste a la Distribución Normal

Ajuste de los residuales a la distribución normal.

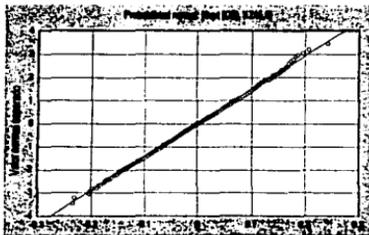


Figura 5.45 Ajuste a la normal Sqrt(O<sub>3</sub>).  
 $[O(t) - O_{kz}(t)] = W(t)$



Figura 5.46 Ajuste a la normal HR.  
 $[HR(t) - HR_{kz}(t)] = W(t)$

En las figuras 5.45 y 5.46, se puede observar que los residuales  $W(t)$ ; la parte estocástica de Sqrt(O<sub>3</sub>) y HR se distribuyen aproximadamente como una normal, con  $N(0, \sigma^2)$ , donde éstos son casi ruido blanco.

◊ La no correlación de los residuales con sus variables

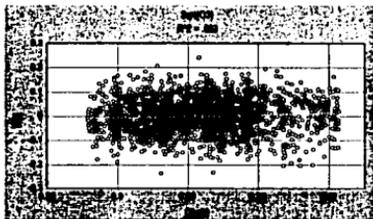


Figura 5.47 Diagrama de dispersión  $W(t)$  &  $\text{Sqrt}(O)$ .

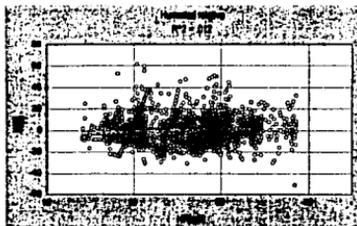


Figura 5.48 Diagrama de dispersión  $W(t)$  & HR.

En las figuras 5.47 y 4.48, se observa como la parte determinística y la parte estocástica de la serie de ozono y la de humedad relativa no presentan correlación, a partir del coeficiente de determinación obtenido, lo cual nos indica que los dos componentes están separados.

◊ Series de tiempo suavizadas

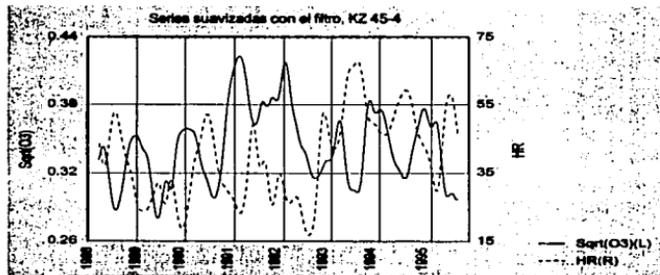


Figura 5.49 Suavizamiento de las series de tiempo.

En la figura 5.49, de las series de tiempo suavizadas (parte determinística), se observa como no presentan fluctuaciones estacionales semejantes. Por otro lado, analizando la serie de ozono presenta una tendencia decreciente.

Ø Comportamiento del ozono sin la influencia de las condiciones meteorológicas

Al aplicar el análisis de regresión con la humedad relativa como variable explicativa. La ecuación obtenida es el efecto de la humedad sobre las concentraciones de ozono. Por lo que, los residuales son el comportamiento del ozono sin la influencia de las condiciones meteorológicas.

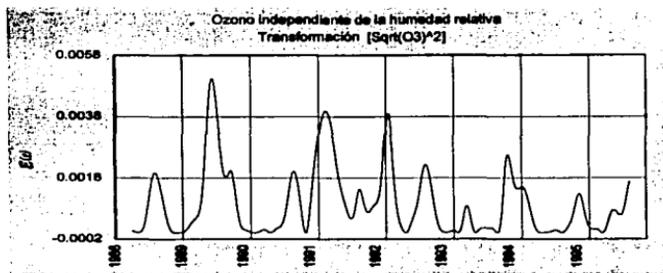


Figura 5.40 Comportamiento del ozono sin la influencia de la temperatura.

Como se puede observar en la figura 5.40, serie de tiempo del ozono al eliminar el efecto de la humedad relativa, presenta una tendencia decreciente. Por otra parte, se observan picos muy sobresalientes, esto se explica por que las mayores concentraciones de ozono se dieron en esos años, donde el efecto de las condiciones meteorológicas no fue muy representativo, lo que nos lleva a decir que existen otras variables que explican el comportamiento del ozono. Por lo que, se concluye que faltan variables en el modelo; esto se refuerza ya que los residuales presentan autocorrelación.

Finalmente, se puede decir que las estrategias de control para disminuir las concentraciones máximas de ozono en la atmósfera si han tenido efecto. El poder decir lo anterior, solo está sujeto a la variable humedad relativa, puesto que como se ha observado los modelos de explicación son pobres, ya que se necesita de otras variables que puedan explicar el comportamiento del ozono, y así obtener un mejor modelo (debido a que los pronósticos presentan autocorrelación)

Se utilizó la transformación de raíz cuadrada ya que, los residuales presentan un mejor comportamiento.

## 5.9 Resumen y conclusiones

Se aplicó la metodología Rao-Zurbenko para las estaciones llamadas las "cinco grandes", para cada una de ellas se seleccionó el filtro con el cual se obtuvo los mejores resultados. A continuación se resumen los resultados obtenidos y se hace un análisis comparativo de las cinco estaciones.

Estación	Zona	Intervalo de O <sub>3</sub> (ppm)	Intervalo de TMP (°C)	Estadísticos	Transformación Sqrt (O <sub>3</sub> )
<b>Pedregal</b>	<b>SO</b>	[0.03,0.405]	[07,28]	r= 0.249 r <sup>2</sup> =0.060	r= 0.335 r <sup>2</sup> =0.112
<b>Cerro de la Estrella</b>	<b>SE</b>	[0.02,0.314]	[07,31]	r= 0.277 r <sup>2</sup> =0.067	r= 0.296 r <sup>2</sup> =0.088
	<b>CE</b>	[0.02,0.38]	[10,31]	r= 0.323 r <sup>2</sup> =0.104	r= 0.345 r <sup>2</sup> =0.11
<b>Xatostoc</b>	<b>NE</b>	[0.01,0.285]	[06,32]	r= 0.341 r <sup>2</sup> =0.116	r= 0.352 r <sup>2</sup> =0.124
<b>Tlalnepantla</b>	<b>NO</b>	[0.01,0.346]	[06,33]	r= 0.265 r <sup>2</sup> =0.07	r= 0.362 r <sup>2</sup> =0.131

Tabla 5.11 Estadísticos obtenidos con la aplicación del filtro KZm.p.

La tabla 5.11, muestra como la serie de tiempo del ozono si presenta una asociación lineal con la serie de tiempo de la temperatura, aunque muy pobre, para todas las estaciones. Hasta éste momento se creía que aunque la relación no era muy fuerte, se encontraría una mejor relación lineal al aplicar el filtro de promedios móviles "KZ<sub>mp</sub> filter"; los resultados obtenidos se presentan en la tabla 5.12.

Estación	Filtro	Estadísticos con TMP	Variable final	Transformación Sqrt (O <sub>3</sub> )	Tendencia
<b>Pedregal</b>	KZ 23,3	r= 0.035 r <sup>2</sup> =0.001	<b>HR</b>	r= 0.254 r <sup>2</sup> =0.065	decreciente *
<b>Cerro de la Estrella</b>	KZ 91,2	r= 0.177 r <sup>2</sup> =0.031	<b>HR</b>	R= 0.399 R <sup>2</sup> =0.159	decreciente *
	KZ 45,4	r= 0.378 r <sup>2</sup> =0.143	<b>TMP</b>	r= 0.403 r <sup>2</sup> =0.162	decreciente *
<b>Xatostoc</b>	KZ 45,4	r= 0.448 r <sup>2</sup> =0.200	<b>TMP / HR</b>	R= 0.515 R <sup>2</sup> =0.265	decreciente *
<b>Tlalnepantla</b>	KZ 45,4	r= 0.037 r <sup>2</sup> =0.001	<b>HR</b>	r= 0.376 r <sup>2</sup> =0.141	decreciente *

Tabla 5.12 Estadísticos obtenidos con la aplicación del filtro KZm.p.

Al comparar los resultados obtenidos después de aplicar el filtro de promedios móviles, se observa como el filtro que predomina es KZ 45,4, para tres estaciones. Por otro lado, el filtro KZ 91,2 es semejante al anterior, pero éste se ajusta mejor a la estación Cerro de la estrella. Pero para el caso de la estación Pedregal se tiene

*Eliminando el efecto de las condiciones meteorológicas en las concentraciones de ozono*

el filtro KZ 23.3. Como se puede observar para algunas estaciones al aplicar el filtro de promedios móviles, ya no existe una dependencia significativa del ozono, a partir de la temperatura. Por ello, para tener un mayor relación lineal se agrega en el análisis la humedad relativa.

*Estación Pedregal.* Esta estación es la que históricamente hablando ha presentado los mayores problemas de ozono (Anexo A), y como se pudo observar si presenta una dependencia lineal el ozono con respecto a la temperatura, pero después de eliminar la parte estocástica de las series de tiempo la relación de dependencia desaparece. Por ello, se utiliza la humedad relativa, con la cual se obtiene un porcentaje de explicación pobre, pero esta variable es significativa en la explicación del comportamiento del ozono.

Por lo que, que la temperatura y la humedad relativa no son un factor importante para explicar la formación de ozono en el entorno de esta estación. Se piensa que el comportamiento del ozono está fuertemente influenciado por el transporte de este contaminante proveniente del norte. Es muy probable, que el transporte del contaminante sea producido por vientos no superficiales.

*Estación Cerro de la Estrella.* Esta estación no presenta graves problemas de ozono en comparación con la estación Pedregal, aunque es la tercera con concentraciones máximas diarias de ozono por arriba de la norma en comparación con las cinco estaciones. Como en el caso anterior la relación de dependencia del ozono con respecto a la temperatura no es muy fuerte pero se esperaría mejorarla al eliminar el componente estocástico de las series de tiempo. Los resultados obtenidos muestran que la relación lineal disminuye y sólo aumenta con la variable de humedad relativa en el modelo. Por ello, se decide explicar el comportamiento del ozono en base a esta última variable.

*Estación Merced.* Esta estación es la segunda con mayores concentraciones máximas de ozono por arriba de la norma. En esta estación la temperatura tiene una relación lineal más fuerte con el ozono, y al aplicar el filtro de promedios móviles la relación de dependencia se refuerza. Por lo que, se puede concluir que para esta estación la temperatura sí influye en la formación de ozono. También se estudio la correlación entre la humedad relativa y el ozono; pero se encontró que no era significativa, por ello no se utilizó en el análisis.

*Estación Xalostoc.* Esta estación es la que presenta las menores concentraciones máximas diarias de ozono por arriba de la norma de las cinco analizadas; siendo la zona noreste una de las menos afectadas por el contaminante ozono. Como en el caso de la estación Merced, se presenta una relación lineal de la serie de tiempo de la temperatura con respecto a la serie de tiempo del ozono, y con la aplicación del filtro de promedios móviles ésta aumenta; por lo que existe una relación de dependencia significativa, y al considerar la variable de humedad relativa, la relación mejora aún más, por ello se decide explicar el comportamiento del ozono con base en la temperatura y la humedad relativa.

En esta estación se obtuvieron los mejores resultados al aplicar la metodología Rao-Zurbenko. Por lo que, el ozono se encuentra influenciado por las condiciones meteorológicas locales.

*Estación Tlalnepantla.* Esta estación, se encuentra en el lugar número cuatro con concentraciones máximas diarias de ozono por arriba de la norma en comparación con las cinco estaciones. Al igual que en las otras estaciones la temperatura y el ozono presentan una relación lineal; pero al aplicar el filtro de promedios móviles, es decir, dejar sólo la parte determinística de las series de tiempo y aplicar el análisis de regresión, la relación de dependencia del ozono a partir de la temperatura desaparece; por lo que se utilizó la humedad relativa como variable explicativa, y se encontró que el porcentaje de dependencia es significativo.

Se explicaron brevemente los resultados obtenidos para cada una de las estaciones de monitoreo analizadas. En general la temperatura no es una variable importante para explicar el comportamiento del ozono. Sin embargo, la humedad relativa sí lo es, para las estaciones ubicadas en las zonas: sureste, noroeste, sureste. Por otro lado, utilizando un análisis de regresión múltiple, es decir, la temperatura y la humedad relativa como variables explicativas del ozono, se encontró una mayor dependencia lineal para la estación ubicada en la zona noreste. La única estación en la cual se puede explicar el ozono a partir de la temperatura es Merced, ubicada en la zona centro.

Como se observó en todo en análisis las relaciones lineales encontradas son pobres, aunado con ello, los coeficientes de dependencia también lo son. Y para todas las estaciones se encontró una autocorrelación de los residuales, lo que implica que para poder explicar el comportamiento del ozono se necesitan de otras variables además de las que se consideraron en el análisis.

Como se sabe el ozono es un contaminante secundario, es decir, que se forma a partir de diversas reacciones de otros dos contaminantes ( $\text{NO}_x$  y  $\text{HCNM}$ ) y la radiación UV. La radiación UV juega un papel importante en la formación de ozono, por lo que cabe mencionar que se hizo este mismo tipo de análisis para la estación Pedregal, ya que los únicos datos de radiación UV que se tienen son los de Ciudad Universitaria (ubicada en la misma zona). Se tomó la radiación UV como variable explicativa del comportamiento del ozono, pero los resultados encontrados fueron aún más pobres que con las variables ya consideradas.

Finalmente, con la metodología seguida se puede eliminar el efecto de la temperatura y la humedad relativa del comportamiento del ozono en las estaciones analizadas. Cabe mencionar que en todas ellas este efecto es pobre sobre todo en Pedregal, donde se piensa hay un efecto importante de transporte del contaminante de vientos no superficiales de los cuales no hay datos.

*Eliminando el efecto de las condiciones meteorológicas en las concentraciones de ozono*

Una vez eliminando el efecto de las variables consideradas en cada una de las estaciones, se puede observar en las gráficas de los residuales sin la influencia de las condiciones meteorológicas; que el comportamiento del ozono a través del tiempo muestra una disminución sobre todo en los picos que ocurren.

Cabe recordar que el análisis es con la finalidad de explicar, más no de predecir; por lo que, aún siendo mínima la dependencia del ozono con respecto a las condiciones meteorológicas, ésta existe y es significativa.

# Capítulo 6

## *El ozono modelado con Box-Jenkins*

### 6.1 Justificación

Como se mencionó anteriormente el comportamiento del ozono es muy aleatorio, debido a ello es difícil modelarlo, por lo que se hace uso de la metodología de Box-Jenkins para ajustar un modelo al comportamiento del ozono. A partir del modelo podemos explicar como es su comportamiento; esto es, si el modelo es autorregresivo o de promedios móviles, o si es una combinación de éstos.

Por otro lado, se trata de probar si la metodología Box-Jenkins se puede aplicar a comportamientos muy aleatorios como los que presentan los contaminantes atmosféricos en la ZMCM.

Cabe señalar que al aplicar Box-Jenkins, podemos identificar si la variable en estudio, presenta estacionalidad, tendencia, varianza. En este caso, como hablamos del ozono es importante mencionar que se considera necesario conocer las características del comportamiento de éste contaminante, para poder aplicar nuevas medidas de control. Además, observar si las concentraciones en el medio ambiente de éste han disminuido. Por otro lado, uno de los usos más importantes de Box-Jenkins es la obtención de pronósticos, por ello se busca predecir el comportamiento del ozono a corto plazo.

Para el modelado con Box-Jenkins se trabaja con las mismas estaciones que para el análisis anterior de Rao-Zurbenko, es decir, con las estaciones: Pedregal, Cerro de la Estrella, Merced, Xalostoc, y Tlalnepantla. El analizar las mismas estaciones, se hace con el fin de combinar las dos metodologías para así poder tener un análisis más detallado del comportamiento del ozono en éstas.

## 6.2 Tratamiento de datos

Para el uso de la metodología Rao-Zurbenko se tomaron los máximos diarios de ozono; para aplicar esta metodología se tomaron los mismos datos con el mismo horario; esto es, en el intervalo de [9 a 19] hrs., y con los límites permisibles de las concentraciones de ozono (ppm) como  $(0.003 < O_3 < 0.404)$ . Para el tratamiento especial de los máximos diarios de ozono, se tomó el promedio mensual; esto es,

$$Prom = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N}$$

donde  $X_i$  es el valor correspondiente a la concentración del máximo diario de ozono, y  $N$  el número de observaciones que se tienen en el mes. El período de tiempo considerado es de enero de 1988 a marzo de 1997; por lo que, se consideran 111 observaciones en las series de tiempo.

Por otro lado, es importante justificar cómo se tomaron los meses representativos; esto es, debido a que para poder tener un mes representativo se debe de tener al menos el 75% de los datos, es decir, de un mes de 30 días se deben tener al menos 18 días; pero no en todos los casos fue posible debido a que para algunos meses no se contaba con al menos el 75% de los datos.\* Por lo anterior, se hizo el siguiente análisis y se determina el porcentaje de datos para las series de tiempo.

Observaciones de las series de tiempo					
Porcentaje (% días mes)	Pedregal	Cerro de la Estrella	Merced	Xalostoc	Tlalnepantla
75	100	91	93	87	88
60	100	96	95	93	93
(%) Del total de las 111 observaciones del período de tiempo					

Tabla 6.1. Análisis de las observaciones de las series de tiempo.

con base en los resultados mostrados en la tabla 6.1, se decidió trabajar con un porcentaje de al menos el 60% de los días registrados en el mes. A partir de esto se puede observar que el porcentaje de datos en las series de un total de 111 observaciones es de un 100% para la estación Pedregal y como mínimo tenemos a las estaciones Tlalnepantla y Xalostoc con un porcentaje del 93%.

No se puede generalizar que las series tienen un 60% como mínimo de datos, si no es el mínimo que se consideró para poder tener un mes representativo. Por otro lado, los porcentajes más bajos de las series se deben a los años de 1988 a 1993, ya que existe una gran ausencia de datos; sin embargo, podemos decir que a partir de

\* Programa máximos IMECA, IMP, México (1992)

### 6.3 Promedios mensuales de ozono por año

1994, los registros de los datos son casi en su totalidad de un 100%. Cabe mencionar que la serie con el mejor registro histórico de datos es para la estación Pedregal.

### 6.3 Promedios mensuales de ozono por año

A continuación se presenta el comportamiento promedio de los promedios mensuales de ozono para cada año.

Año	PED [ppm]	% variación	CES [ppm]	% variación	MER [ppm]	% variación
1988	0.172		0.096		0.127	
1989	0.134	-22	0.105	9	0.102	-20
1990	0.179	34	0.121	15	0.141	38
1991	0.194	8	0.154	27	0.166	18
1992	0.162	-16	0.128	-17	0.151	-9
1993	0.160	-1	0.128	0	0.140	-7
1994	0.160	0	0.125	-2	0.149	6
1995	0.161	1	0.125	0	0.136	-9
1996	0.157	-2	0.115	-8	0.115	-15

Tabla 6.2 Variación anual del ozono

año	XAL [ppm]	% variación	TLA [ppm]	% variación
1988	0.089		0.112	
1989	0.099	11	0.114	2
1990	0.082	-17	0.119	4
1991	0.135	65	0.158	33
1992	0.119	-12	0.138	-13
1993	0.110	-8	0.120	-13
1994	0.113	3	0.125	4
1995	0.109	-4	0.115	-8
1996	0.089	-18	0.113	-2

Tabla 6.2 Variación anual del ozono.

Para los resultados mostrados en la tabla 6.2, se consideró el porcentaje de cambio de cada año del ozono; esto es, el cambio del promedio anual de ozono con respecto al año anterior. A partir de los resultados se puede decir que la estación Pedregal presenta un cambio muy pobre en la disminución de este contaminante, y más bien pareciera tener un comportamiento constante en los últimos años; Cerro de la Estrella presenta una variación con tendencia decreciente, teniendo una disminución significativa de 1995 a 1996 con un porcentaje del ocho por ciento; Merced presenta una variación de disminución aun mayor teniendo un porcentaje de variación de 1995 a 1996 del 15 por ciento; Xalostoc, es la estación que presenta los menores problemas de ozono, pues como se puede observar la

tendencia del ozono ha sido el disminuir año con año; y Tlalnepantla, también presenta cambios con tendencia decreciente.

La variación anual de los máximos diarios de ozono presenta cambios muy aleatorios, pero se observó una mayor variabilidad negativa, lo cual implica que las concentraciones de ozono año con año varían en forma decreciente; esto es, se tienen menores concentraciones de ozono en la atmósfera.

En general, los años donde se presentaron las mayores concentraciones de ozono de 1991 a 1992. Por otro lado, Xalostoc y Tlalnepantla tuvieron un aumento en las concentraciones de ozono muy significativo en 1991, este cambio también es evidente para las demás estaciones.

#### **6.4 Pasos a seguir en la metodología**

Para poder aplicar la metodología se deben aplicar los siguientes pasos:

- ⇒ Paso 1. Graficar las observaciones contra el tiempo e identificar si la serie de tiempo presenta varianzas no constante, tendencia, estacionalidad, discontinuidades, y datos discrepantes. Si se detectan problemas de varianzas aplicamos las transformaciones; para los problemas de tendencia se aplican las diferencias ordinarias y para la estacionalidad se aplicarán las diferencias estacionales, obteniéndose así una serie estacionaria.
- ⇒ Paso 2. Identificación del posible modelo ARIMA que representará el fenómeno, a partir de la FAC y FACP
- ⇒ Paso 3. Estimación de parámetros
- ⇒ Paso 4. Teniendo el modelo identificado y la estimación de sus parámetros, se procede con la verificación de éste haciéndose el análisis de estacionaridad, análisis de residuales, modelos sub-especificados, y modelos sobre-especificados.

**Estacionaridad;** Se debe tener cuidado esencialmente de no sobrediferenciar el modelo, y para seleccionar el mejor modelo se debe de tomar en cuenta: el modelo que de mejor ajuste y los mejores pronósticos (principio de parsimonia).

**Residuales;** En este caso se toma en cuenta el comportamiento de los residuales con respecto al tiempo, donde se observa el comportamiento de la media y la varianzas; también, que éstos presenten el comportamiento aproximado de una normal, siendo evaluado con el histograma de frecuencias; por otro lado, se examina que los residuales no presenten autocorrelación, para ello se observan la FAC y FACP.

Para examinar si el modelo no está sobre-especificado o sub-especificado, se evalúan los estimadores de los parámetros del modelo ARIMA seleccionado a partir del estadístico  $t$ , así como también se examina la correlación entre éstos.

⇒ Paso 5. Como siguiente paso, se procede a validar el modelo, es decir, examinar el comportamiento de los errores que se obtienen de la diferencia de los valores observados y de los pronósticos, se obtiene también un porcentaje de error del pronóstico. Para la validación se hacen 12 pronósticos hacia atrás del modelo. Cabe mencionar que para obtener el mejor modelo se seleccionó el que presentaba la menor suma de cuadrados del error.

⇒ Paso 5. Finalmente, una vez que se ha encontrado el modelo adecuado para representar los datos, se llega a los pronósticos, donde dependiendo del tipo de modelo, ya sea ordinario o estacional se da el número de pronósticos. Además, se presenta la ecuación que representa a los datos, es decir, la ecuación a partir de la cual se obtienen los pronósticos.

## 6.5 Los parámetros en los modelos ARIMA

Hemos mencionado los tipos de modelos ARIMA, los autorregresivos y los de promedios móviles, ya sea ordinarios o estacionales o bien la combinación de éstos. Pero es importante conocer el significado de los parámetros obtenidos dependiendo del modelo seleccionado, en la tabla 6.3, se presentan las características de cada uno de ellos.

Modelo	Explicación
<b>AR <math>\phi</math></b> $Z_t = \phi Z_{t-1} + e_t$	Si el valor actual de la serie, $Z_t$ , se puede expresar como una función lineal del primer valor anterior y un choque aleatorio $e_t$ . Donde $\phi$ es el parámetro autorregresivo que describe el efecto de un cambio de $Z_{t-1}$ en $Z_t$ .
<b><math>\theta</math>, MA</b> $Z_t = e_t - \theta e_{t-1}$	Si el valor actual de $Z_t$ puede representarse, como el valor del choque aleatorio actual y el valor anterior. Donde $\theta$ describe el efecto del choque aleatorio anterior a $Z_t$ .
<b><math>\Phi</math> SAR</b> $Z_t - \Phi_1 Z_{t-1} = e_t$ $(1 - \Phi_1 B^1) Z_t = e_t$	Si el valor actual de la serie $Z_t$ puede expresarse como una función lineal del valor de la serie $s$ periodos atrás, $Z_{t-s}$ , y el choque aleatorio $e_t$ . Donde $\Phi_1$ es el parámetro autorregresivo estacional, el cual describe el efecto de un cambio de $Z_{t-s}$ en $Z_t$ .

Modelo	Explicación
$\Theta$ SMA $Z_t = e_t - \Theta_1 e_{t-1}$ $Z_t = (1 - \Theta_1 B^s) e_t$	Si el valor actual de la serie $Z_t$ puede representarse como el choque aleatorio $e_t$ , y el choque ocurrido " $s$ " observaciones antes, $e_{t-s}$ , donde " $s$ " es igual a la longitud del periodo. Donde $\Theta_1$ es el parámetro de promedio móvil estacional, el cual describe el efecto del choque aleatorio anterior $e_{t-s}$ a $Z_t$ .
$\Phi(B^s)Z_t = \Theta(B^s)e_t$	El modelo estacional autorregresivo y de promedios móviles, de orden $(P, Q)$ . Si el valor actual de la serie $Z_t$ , se puede expresar con una combinación de éstos.
$\phi(B)\Phi(B^s)Z_t = \Theta(B^s)\theta(B)e_t$	ARIMA multiplicativo. Si el valor actual de la serie $Z_t$ , se puede expresar como una combinación de modelos ordinarios y de modelos estacionales.

Tabla 6.3. Parámetros de los modelos ARIMA

De acuerdo a estas características se explicará el comportamiento del ozono, dependiendo de los modelos que se ajusten para cada una de las series. A continuación se procede a la identificación de los modelos ARIMA para cada una de las estaciones a analizar con todas las características que con lleva cada una de ellas.

## 6.6 Estación Pedregal

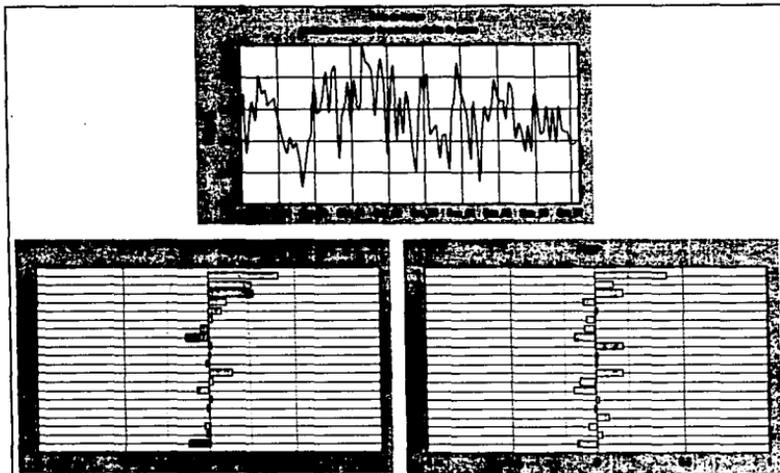


Figura 6.1 Comportamiento de la serie de tiempo

Al analizar Pedregal recordemos que es la estación de monitoreo con las concentraciones más altas registradas de ozono, por ello cabe mencionar que es de sumo interés conocer su comportamiento. En la figura 6.1, se puede observar que la serie de tiempo de los promedios mensuales de los máximos diarios de ozono, presenta casi en su totalidad concentraciones por arriba de 0.11 ppm; la serie presenta tendencia irregular; su comportamiento es muy aleatorio pero no hay necesidad de aplicar una transformación ya que no se observa un problema de varianza. Por otro lado, la serie no presenta una fluctuación estacional anual. Cabe mencionar que se trató de modelar la serie con una diferencia estacional pero el modelo ajustado no fue mejor que el identificado a continuación.

Con base en las características que presenta la función de autocorrelación (FAC) y la función de autocorrelación parcial (FACP); se identificó el modelo: **ARIMA (1,0,1)**

$$(1 - \phi_1 B)Z_t = (1 - \theta_1 B)e_t$$

Teniendo el modelo identificado y los parámetros estimados se da paso a la verificación del modelo comenzando con el análisis de residuales, que como es sabido es una de las formas más claras y simples para detectar violaciones a los supuestos de los modelos.

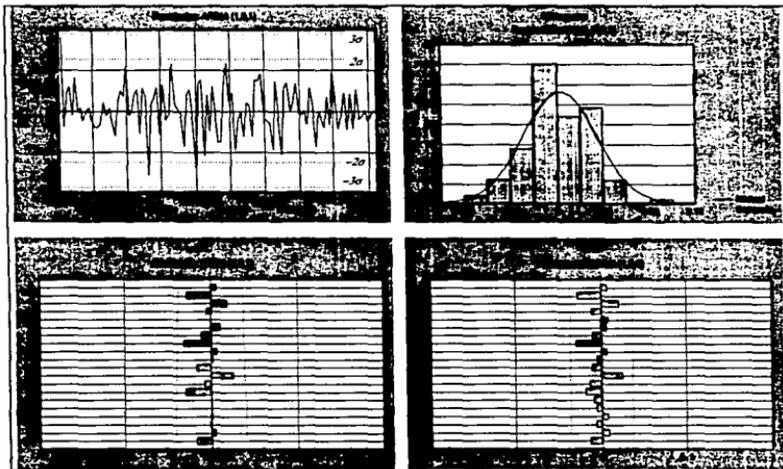


Figura 6.2 Análisis de residuales

La figura 6.2, muestra el análisis de residuales, a partir de la gráfica de los residuales con respecto al tiempo se puede observar como éstos presentan aproximadamente una media igual a cero y calculando el cociente  $\frac{\sqrt{N-d-p} \cdot m(\hat{\epsilon})}{\hat{\sigma}_r} = 0.999$ ; donde si el valor absoluto de este cociente es menor que dos, lo que implica que no existe evidencia de que la media del proceso de ruido blanco sea distinta de cero. Además, podemos observar como los residuales presentan una varianza constante.

Ahora, también se examina si siguen una distribución normal, y como se observa en el histograma, los residuales se comportan aproximadamente con una distribución normal. Por otro lado, a partir de la gráfica de los residuales con respecto al tiempo se observa como la mayoría de las observaciones se localizan en

el intervalo  $(-2\hat{\sigma}_e, 2\hat{\sigma}_e)$ , y ninguna observación está fuera del intervalo  $(-3\hat{\sigma}_e, 3\hat{\sigma}_e)$ , lo cual significa que los residuales no presentan observaciones irregulares o "sospechosas".

Además, se evalúa que los residuales sean variables aleatorias mutuamente independientes. La independencia implica no autocorrelación, y se puede observar a partir de la FAC Y la FACP, que todas las autocorrelaciones de los residuales se encuentran en el intervalo de confianza, por lo que los residuales no presentan autocorrelación.

◆ *Parámetros estimados*

$(1 - \phi_1 B)Z_t = (1 - \theta_1 B)e_t$	Parámetro	Valor t
$\phi_1(1)$	0.996	86.70
$\theta_1(1)$	0.389	-1.06

Como se muestra los parámetros estimados para el modelo ARIMA, cumplen con el estadístico  $t$ , esto es el valor absoluto es mayor a dos y los parámetros no presentan una correlación alta, lo que implica que los estimadores sean significativos.

Correlación	$\phi_1(1)$	$\theta_1(1)$
$\phi_1(1)$	1	0.187
$\theta_1(1)$	0.187	1

◆ *Ajuste del modelo*

Meses	Observado [ppm]	Pronóstico [ppm]	Porcentaje de error	Residual	Residual <sup>2</sup>
Abr-96	0.149	0.154	3	-0.00498	0.00002
May-96	0.172	0.153	11	0.01859	0.00035
Jun-96	0.14	0.153	9	-0.01284	0.00016
Jul-96	0.169	0.152	10	0.01672	0.00028
Ago-96	0.138	0.152	10	-0.01371	0.00019
Sep-96	0.172	0.151	12	0.02085	0.00043
Oct-96	0.15	0.151	0	-0.00059	0.00000
Nov-96	0.148	0.150	1	-0.00204	0.00000
Dic-96	0.148	0.149	1	-0.00148	0.00000
Ene-97	0.136	0.149	10	-0.01293	0.00017
Feb-97	0.136	0.148	9	-0.01238	0.00015
Mar-97	0.138	0.148	7	-0.00983	0.00010
		<b>Promedio</b>	7		
			<b>Suma</b>	-0.01463	0.00186

Tabla 6.4. Ajuste del modelo ARIMA

### El ozono modelado con Box-Jenkins

La validación se realiza con doce pronósticos hacia atrás, es decir, se calculan estos datos con el modelo y se validan con el valor observado, con ello se obtiene un porcentaje de error de pronóstico y además, se observa que los errores son mínimos, como se muestra en la tabla 6.4, mientras que gráficamente se observa en la 6.3.

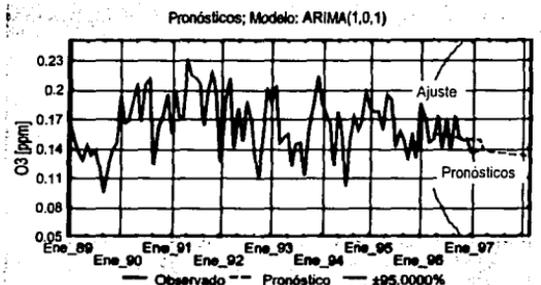


Figura 6.3. Pronósticos Pedregal

#### • Pronósticos

Con base en el modelo seleccionado se obtienen los pronósticos del comportamiento futuro de los promedios mensuales de los máximos diarios de ozono, se pronostican doce observaciones debido, los pronósticos se muestran en la tabla 6.5, con un intervalo de confianza del 95% y se pueden observar gráficamente en la figura 6.3.

Mes	Observado [ppm]	Pronóstico [ppm]	Limite inferior 95 %	Limite superior 95 %
Abr-97	0.126	0.137	0.074	0.200
May-97	0.168	0.137	0.063	0.210
Jun-97	0.168	0.136	0.054	0.219
Jul-97		0.136	0.045	0.227
Ago-97		0.135	0.037	0.233
Sep-97		0.135	0.030	0.240
Oct-97		0.134	0.023	0.246
Nov-97		0.134	0.016	0.251
Dic-97		0.133	0.010	0.257
Ene-98		0.133	0.004	0.262
Feb-98		0.132	-0.001	0.266
Mar-98		0.132	-0.007	0.271

Tabla 6.5 Pronósticos

Para obtener los pronósticos se tiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}(1 - \phi B)Z_t &= (1 - \theta B)e_t \\ Z_t &= \phi Z_{t-1} - \theta e_{t-1} + e_t\end{aligned}$$

Y sustituyendo los estimadores de los parámetros se tiene

$$Z_t = 0.996Z_{t-1} - 0.389e_{t-1} + e_t$$

Con base en la ecuación anterior, podemos decir que el comportamiento del ozono está dado por un modelo ARMA. Donde el valor actual de la serie se puede expresar como la suma de la observación del mes anterior, y el choque aleatorio del mes anterior. Se puede observar que sólo el primer pronóstico está influenciado directamente por el parámetro de promedios móviles, y para los períodos posteriores, el comportamiento es sólo explicado por el parámetro autorregresivo.

Por otro lado, el haber encontrado un parámetro MA, quiere decir que el ozono está influenciado por variables aleatorias, y conociendo su proceso de formación, podríamos atribuirlo a las condiciones meteorológicas. Pero como en este modelo rige la parte AR, se dice entonces que el comportamiento del ozono, depende del comportamiento del mes anterior. Lo que hace pensar que depende de las emisiones de sus precursores a la atmósfera. De acuerdo a los pronósticos obtenidos el ozono presenta tendencia decreciente.

El no haber encontrado estacionalidad, nos podría decir que el ozono no se forma en esta zona, sino que se podría pensar que es transportado del norte y centro de la ZMCM, a la parte sur; debido al patrón de vientos (norte-sur).

## 6.7 Estación Cerro de la Estrella

Primero se procede a analizar la serie de tiempo, y partir de la figura 6.4, se puede observar que la serie de tiempo presenta problemas de tendencia; presenta tendencia decreciente, por ello se aplicó una inferencia ordinaria; no presenta problemas de varianza. Por otro lado, fue necesario aplicar una diferencia estacional, debido a que presenta fluctuación estacional 12, y ésta también fue necesaria, para obtener un mejor ajuste. Con base en las características que presentan la función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial se identificó el modelo: **ARIMA (0,1,1) (2,1,0)**. Siendo este un modelo multiplicativo

$$(1 - \Phi_1 B^{12} - \Phi_2 B^{24}) \nabla \nabla_{12} T(Z_t) = (1 - \theta B) e_t$$

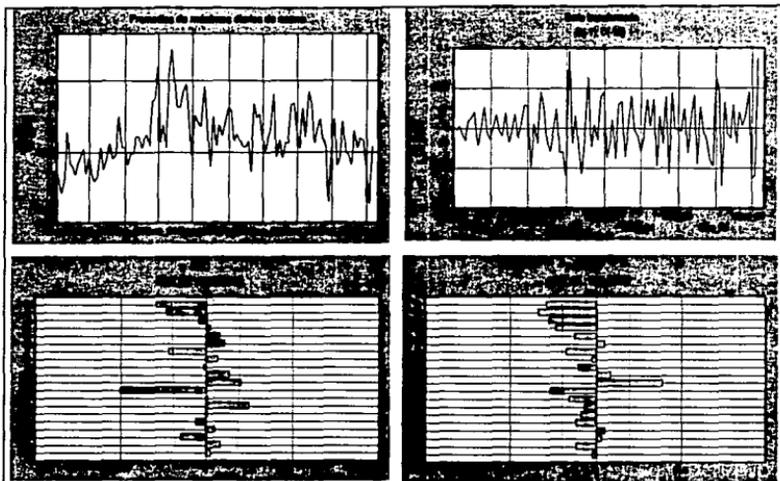


Figura 6.4. Comportamiento de la serie de tiempo

Como siguiente paso se procede a verificar el modelo identificado. A partir de la figura 6.5, se observa como los residuales con respecto al tiempo; tienen una media igual a cero y calculando el cociente  $\sqrt{N-d-p} \frac{m(\hat{\epsilon})}{\hat{\sigma}_{\epsilon}} = -0.784$ ; como el valor absoluto de éste es menor a dos en valor absoluto, entonces no existe evidencia de que la media del proceso de ruido blanco sea distinta de cero. Además, podemos observar como los residuales presentan varianza constante.

Ahora, también se examina si siguen una distribución normal, y como se observa en el histograma, los residuales se comportan aproximadamente con una distribución normal, además a partir de los residuales con respecto al tiempo se observa como la mayoría de las observaciones se localizan en el intervalo  $(-2\hat{\sigma}_{\epsilon}, 2\hat{\sigma}_{\epsilon})$ , y solamente una observación se encuentra fuera del intervalo  $(-3\hat{\sigma}_{\epsilon}, 3\hat{\sigma}_{\epsilon})$ , lo cual significa que los residuales no presentan observaciones irregulares o "sospechosas".

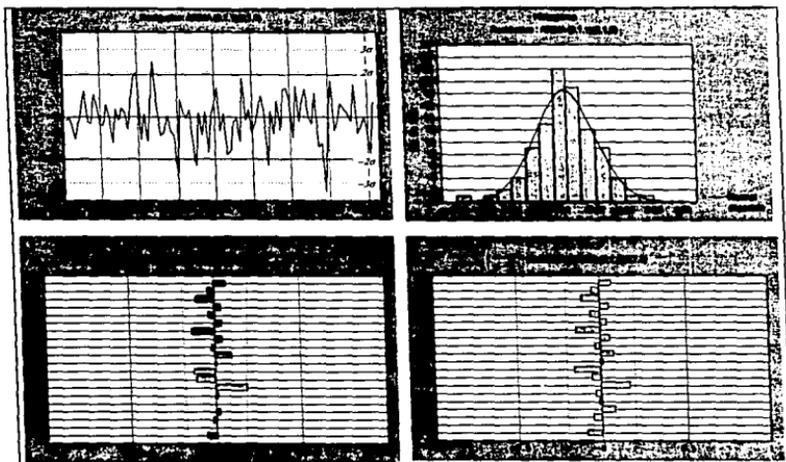


Figura 6.5 Análisis de residuales

Por otro lado, se evalúa que los residuales sean variables aleatorias mutuamente independientes. La independencia implica no autocorrelación, y se puede observar a partir de la FAC y de la FACP obtenidas de los residuales que todas las autocorrelaciones se encuentra dentro del intervalo de confianza que las considera significativamente iguales a cero.

◆ *Parámetros estimados*

$$\text{ARIMA } (0, 1, 1) (2, 1, 0); (1 - \Phi_1 B^{12} - \Phi_2 B^{24}) \nabla \nabla_{12} T(Z_t) = (1 - \theta_1 B) e_t$$

	Parámetro	Valor t
$\theta_1 (1)$	0.707	8.498
$\Phi_1$	0.818	-8.259
$\Phi_2$	0.459	-4.086

Como se puede observar que los residuales cumplen con el estadístico t, y no existe una correlación significativa entre los parámetros, lo que implica que son significativos.

correlación	$\phi_1(1)$	$\Phi_1$	$\Phi_2$
$\phi_1(1)$	1	0.143	0.007
$\Phi_1$	0.143	1	0.487
$\Phi_2$	0.007	0.487	1

• Ajuste del modelo

Para poder comprobar que el modelo se ajusta al comportamiento histórico de los datos, se realiza la validación con doce pronósticos hacia atrás, es decir, se calculan estos datos con el modelo y se validan con el valor observado. También se obtiene el porcentaje de error del pronóstico. Los pronósticos se muestran en la tabla 6.6, y se observan en la figura 6.6.

Mes	Observado [ppm]	Pronóstico [ppm]	Porcentaje de error	Residual	Residual <sup>2</sup>
<b>Abr-96</b>	0.105	0.108	3	-0.00296	0.00001
<b>May-96</b>	0.135	0.123	9	0.01152	0.00013
<b>Jun-96</b>	0.11	0.100	9	0.00981	0.00010
<b>Jul-96</b>	0.107	0.099	7	0.00783	0.00006
<b>Ago-96</b>	0.099	0.098	1	0.00098	0.00000
<b>Sep-96</b>	0.127	0.092	27	0.03454	0.00119
<b>Nov-96</b>	0.121	0.121	0	0.00046	0.00000
<b>Dic-96</b>	0.119	0.114	4	0.00507	0.00003
<b>Ene-97</b>	0.099	0.106	7	-0.00742	0.00006
<b>Feb-97</b>	0.066	0.099	50	-0.03287	0.00108
<b>Mar-97</b>	0.114	0.108	5	0.00563	0.00003
		Promedio	10		
		Suma		0.03002	0.00269

Tabla 6.6 Ajuste del modelo

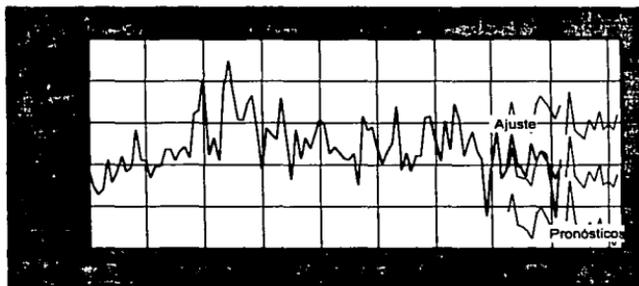


Figura 6.6 Pronósticos, Cerro de la Estrella

## • Pronósticos

Los doce pronósticos obtenidos se muestran en la tabla 6.7 y gráficamente se presentan en la figura 6.6, con un nivel de confianza del 95%. Se puede observar como éstos presentan una tendencia decreciente

Mes	Observado [ppm]	Pronóstico [ppm]	Límite inferior		Límite superior	
			95 %		95%	
Abr-97	0.094	0.100	0.058	0.143		
May-97	0.123	0.133	0.089	0.177		
Jun-97	0.128	0.100	0.054	0.146		
Jul-97		0.095	0.047	0.143		
Ago-97		0.091	0.041	0.140		
Sep-97		0.105	0.054	0.155		
Oct-97		0.096	0.044	0.148		
Nov-97		0.110	0.056	0.163		
Dic-97		0.093	0.038	0.149		
Ene-98		0.096	0.039	0.152		
Feb-98		0.092	0.034	0.149		
Mar-98		0.102	0.042	0.161		

Tabla 6.7 Pronósticos

Para la obtención de los pronósticos, se desarrolló la ecuación

$$(1 - \Phi_1 B^{12} - \Phi_2 B^{24}) \nabla \nabla_{12} T(Z_t) = (1 - \alpha) \beta e_t$$

$$Z_t = Z_{t-1} + (1 + \Phi_1)Z_{t-12} - (1 + \Phi_1)Z_{t-13} - (\Phi_1 - \Phi_2)Z_{t-24} + (\Phi_1 - \Phi_2)Z_{t-25}$$

$$- \Phi_2 Z_{t-36} + \Phi_2 Z_{t-37} - \alpha e_{t-1} + e_t$$

y sustituyendo los parámetros estimados se tiene

$$Z_t = Z_{t-1} + 1.818Z_{t-12} - 1.818Z_{t-13} - 0.359Z_{t-24} + 0.359Z_{t-25}$$

$$- 0.459Z_{t-36} + 0.459Z_{t-37} - 0.707e_{t-1} + e_t$$

A partir de la ecuación anterior el comportamiento del ozono, presenta dos parámetros autorregresivos estacionales y una parte de promedios móviles ordinaria. Con base en ello podemos decir, que el comportamiento del ozono para el mes actual está dado por suma de algunas observaciones de los últimos 37 meses y el choque aleatorio del mes anterior.

### El ozono modelado con Box-Jenkins

Por otro lado, la estacionalidad en el comportamiento del ozono juega un papel muy importante, debido a que sólo influyen los doce datos anteriores para obtener los pronósticos, sino datos de los treinta y siete meses anteriores más un error aleatorio.

Es importante mencionar que al encontrar el modelo con una parte autorregresiva se dice que la concentración actual está en función de concentraciones anteriores, lo que hace pensar que el comportamiento del ozono depende mucho de las emisiones de sus precursores a la atmósfera, aunado con ello el modelo presenta también una parte de promedios móviles, donde este choque aleatorio podría atribuirse a las condiciones meteorológicas.

## 6.8 Estación Merced

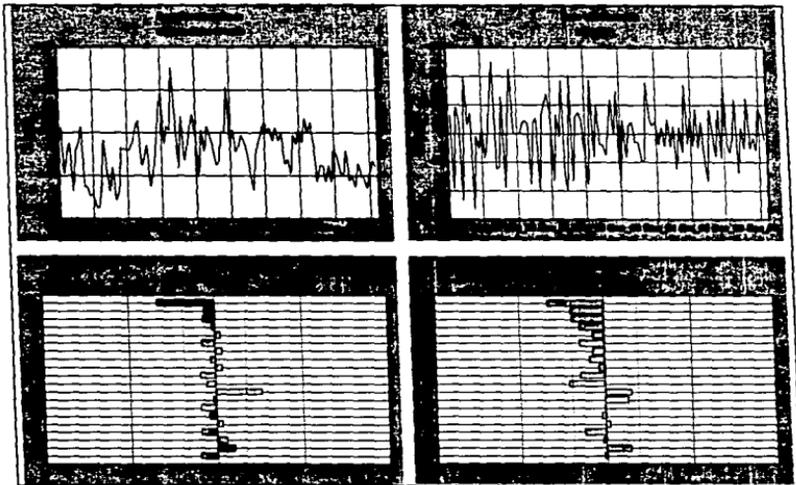


Figura 6.7 Comportamiento de los promedios mensuales de ozono

La estación Merced también presenta altas concentraciones de ozono. A partir de la figura 6.7; la gráfica del ozono contra el tiempo nos permite visualizar que la gran mayoría de las observaciones se encuentran por arriba de 0.11 ppm., lo cual nos indica que están fuera de la norma.

La serie de tiempo presenta un comportamiento muy aleatorio, tiendo problemas de varianza, por ello se aplica una transformación logarítmica; su tendencia decreciente, por lo que se aplica una diferencia ordinaria, también se observa una fluctuación estacional (12), pero no es necesario aplicar una diferencia estacional debido a que se complicaba el modelo. Con base en las características que presentan la función de autocorrelación y la función autocorrelación parcial se identifica el modelo: **ARIMA (0,1,1) (1,0,0)**.

$$(1 - \Phi_1 B^{12}) \nabla T(Z_t) = (1 - \theta_1 B) e_t$$

El modelo pertenece a los modelos multiplicativos. Siendo identificado el modelo y estimados los parámetros se procede a la verificación de éste, comenzando con el análisis de residuales.

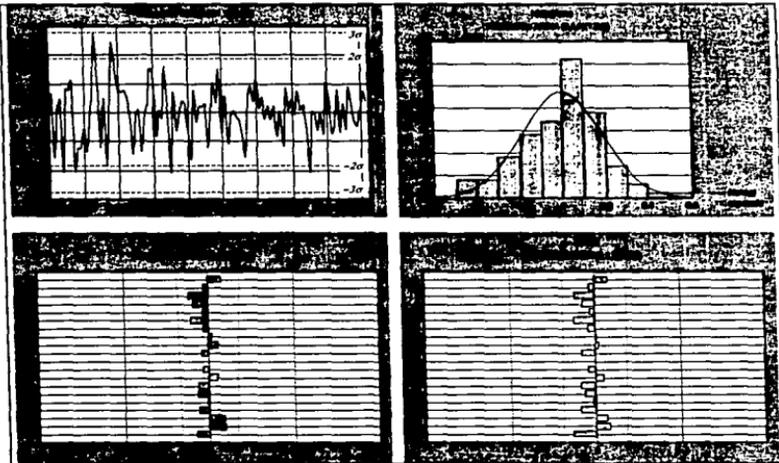


Figura 6.8 Análisis de residuales

En la figura 6.8, podemos observar como en la gráfica de los residuales con respecto al tiempo éstos presentan una media igual a cero; calculando el cociente  $\frac{\sqrt{N-d-p} \cdot \overline{m(\hat{\epsilon})}}{\hat{\sigma}_\epsilon} = -0.186$ ; como el valor absoluto del cociente es menor que dos no existe evidencia de que la media del proceso de ruido blanco sea distinta de cero. Además se observan que presentan varianza constante.

Ahora, también se examina si siguen una distribución normal; en el histograma de los residuales se observa como siguen una distribución normal. Además, a partir de la gráfica de los residuales con respecto al tiempo se observa como la mayoría de las observaciones se localizan en el intervalo  $(-2\hat{\sigma}_\epsilon, 2\hat{\sigma}_\epsilon)$ , y ninguna observación está fuera del intervalo  $(-3\hat{\sigma}_\epsilon, 3\hat{\sigma}_\epsilon)$ , lo cual significa que los residuales no presentan observaciones irregulares o "sospechosas".

Por otro lado, se evalúa que los residuales sean variables aleatorias mutuamente independientes. La independencia implica no autocorrelación, a partir de la FAC y FACP muestrales obtenidas de los residuales se observa como todas las autocorrelaciones son significativamente igual con cero.

◆ *Parámetros estimados*

$$\text{ARIMA } (0, 1, 1)(1, 0, 0)_{12}; (1 - \Phi_1 B^{12}) \nabla T(Z_t) = (1 - \alpha_1 B)\epsilon_t$$

	Parámetro	Valor t
$\alpha_1$ (1)	0.567	5.27
$\Phi_1$ (1)	0.306	3.23

Como se puede observar los parámetros estimados para el modelo ARIMA, cumplen con el estadístico t, lo que implica que los parámetros son significativos.

Correlación	$\alpha_1$ (1)	$\Phi_1$ (1)
$\alpha_1$ (1)	1	-0.00059
$\Phi_1$ (1)	-0.00059	1

También se observa como los parámetros no presentan una correlación alta, lo que implica también, que son significativos.

◆ *Ajuste del modelo*

Para poder comprobar que el modelo se ajusta al comportamiento histórico de los datos, se realiza la validación de éste con doce pronósticos hacia atrás, es decir, se calculan estos datos con el modelo y se validan con el valor observado, obteniéndose el porcentaje de error del pronóstico, como se muestra en la tabla 6.8. El ajuste se puede observar en la figura 6.9.

Mes	Observado [ppm]	Pronóstico [ppm]	Porcentaje de error	Residual	Residua <sup>2</sup>
Abr-96	0.109	0.120	10	-0.01139	0.00013
May-96	0.138	0.123	11	0.01479	0.00022
Jun-96	0.104	0.117	12	-0.01293	0.00017
Jul-96	0.108	0.105	2	0.00255	0.00001
Ago-96	0.097	0.111	14	-0.01388	0.00019
Sep-96	0.124	0.111	11	0.01327	0.00018
Oct-96	0.111	0.105	5	0.00563	0.00003
Nov-96	0.107	0.111	4	-0.00388	0.00002
Dic-96	0.095	0.105	11	-0.01011	0.00010
Ene-97	0.112	0.116	4	-0.00413	0.00002
Feb-97	0.126	0.114	10	0.01245	0.00016
Mar-97	0.12	0.109	9	0.01118	0.00012
		<b>Promedio</b>	<b>9</b>		
			<b>Suma</b>	<b>0.00355</b>	<b>0.00134</b>

Tabla 6.8 Ajuste del modelo

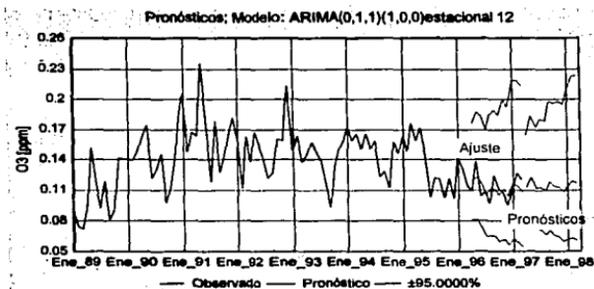


Figura 6.9 Pronósticos Merced

#### • Pronósticos

Con base en el modelo seleccionado se obtienen doce pronósticos del comportamiento futuro de los promedios mensuales de los máximos diarios de ozono, con los niveles de confianza 95%. Gráficamente los podemos observar en la figura 6.9 y se presentan numéricamente en la tabla 6.9.

Mes	Observado [ppm]	Pronóstico [ppm]	Limite inferior 95 %	Limite superior 95 %
<b>Abr-97</b>	0.119	0.113	0.078	0.164
<b>May-97</b>	0.150	0.122	0.081	0.183
<b>Jun-97</b>	0.145	0.112	0.072	0.173
<b>Jul-97</b>		0.113	0.071	0.180
<b>Ago-97</b>		0.109	0.067	0.179
<b>Sep-97</b>		0.118	0.070	0.198
<b>Oct-97</b>		0.114	0.066	0.196
<b>Nov-97</b>		0.113	0.064	0.198
<b>Dic-97</b>		0.109	0.061	0.195
<b>Ene-98</b>		0.114	0.062	0.210
<b>Feb-98</b>		0.119	0.063	0.222
<b>Mar-98</b>		0.117	0.061	0.223

Tabla 6.9 Pronósticos

Para obtener los pronósticos se tiene la siguiente ecuación

$$(1 - \Phi_1 B^{12}) \nabla T(Z_t) = (1 - \alpha) e_t$$

$$Z_t = Z_{t-1} + \Phi_1 Z_{t-12} - \Phi_1 Z_{t-13} - \alpha e_{t-1} + e_t$$

Y sustituyendo los parámetros estimados

$$Z_t = Z_{t-1} + 0.306 Z_{t-12} - 0.306 Z_{t-13} - 0.567 e_{t-1} + e_t$$

Con base en ecuación del comportamiento del ozono, ésta se compone de una parte autorregresiva estacional y otra de promedios móviles ordinarios. Decimos entonces que la observación actual del ozono depende de la suma de algunas observaciones de los últimos trece meses, y el choque aleatorio del mes anterior. Como el modelo tiene un parámetro autorregresivo y uno de promedios móviles; esto hace pensar que el ozono depende de las emisiones existentes de sus precursores en la atmósfera para la formación de éste, y de un componente aleatorio, que en este caso podemos hablar del papel que juega la meteorología.

Es importante mencionar que para esta estación no hubo necesidad de aplicar una diferencia estacional, por lo que se puede decir, que las observaciones actuales del ozono, no dependen de observaciones muy retrasadas sino de los últimos trece meses.

Con base en los pronósticos obtenidos se puede decir que el comportamiento a futuro del ozono tenderá a estabilizarse. Donde sus valores rebasan las 0.11 ppm., es decir, el ozono permanecerá por arriba de la norma.

## 6.9 Estación Xalostoc

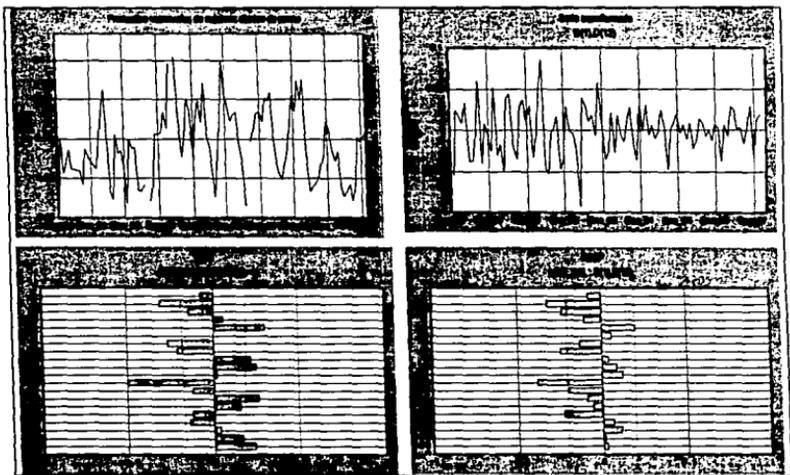


Figura 6.10 Análisis de la serie de tiempo

En la figura 6.10, se puede observar la serie de tiempo de los promedios mensuales de los máximos diarios de ozono presenta una tendencia irregular, y una fluctuación estacional, es por ello que se le aplica tanto una diferencia ordinaria como una diferencia estacional (12) y no presenta problemas de varianza.

Con base en las características que presentan la función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial se identificó el modelo multiplicativo: **ARIMA (0,1,1)(1,1,0)**.

$$(1 - \Phi_1 B^{12}) \nabla \nabla_{12} T(Z_t) = (1 - \theta_1 B) e_t$$

Una vez que la serie es estacionaria, se identifica el modelo, y son estimados los parámetros, se procede al análisis de residuales, que como es sabido es una de las formas más claras y simples para detectar violaciones a los supuestos de los modelos, los cuales se verifican a continuación.

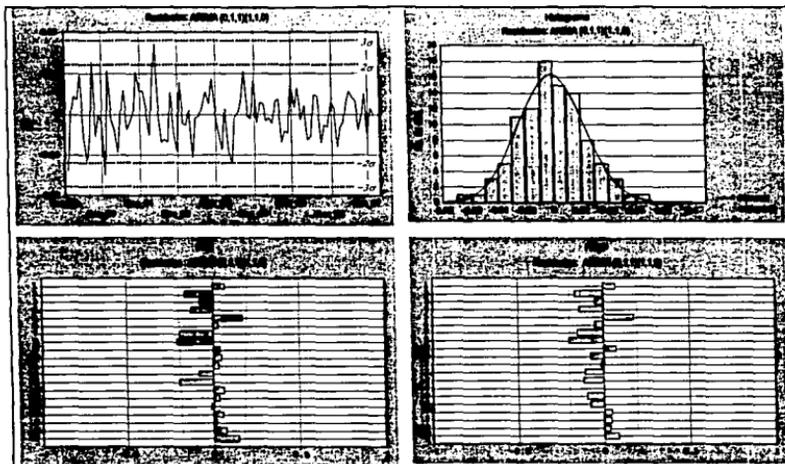


Figura 6.11 Análisis de residuales

En la figura 6.11, se observa la gráfica de los residuales con respecto al tiempo, presentando éstos aproximadamente una media igual a cero y calculando el cociente  $\frac{\sqrt{N-d-p} \cdot m(\hat{\epsilon})}{\hat{\sigma}_\epsilon} = 0.463$ ; como el valor absoluto de este cociente es menor que dos, se dice, que no existe evidencia de que la media del proceso de ruido blanco sea distinta de cero. Además, podemos observar como los residuales presentan varianza constante.

Por otro lado, se evalúa que los residuales sean variables aleatorias mutuamente independientes. La independencia implica no autocorrelación, y se puede observar a partir de la FAC Y la FACP, que casi todas las autocorrelaciones de los residuales se encuentran en el intervalo de confianza. Sin embargo, sobresale una autocorrelación en el número siete, y como no tiene significancia alguna, ya que no vuelve a aparecer en periodos siguientes, se concluye no existe autocorrelación.

Ahora, también se examina si siguen una distribución normal, si observamos el histograma, los residuales se comportan aproximadamente como una normal.

Además, a partir de los residuales con respecto al tiempo se observa como la mayoría de las observaciones se localizan en el intervalo  $(-2\hat{\sigma}_e, 2\hat{\sigma}_e)$ , por otro lado, ninguna observación está fuera del intervalo  $(-3\hat{\sigma}_e, 3\hat{\sigma}_e)$ , por lo que los residuales no presentan observaciones irregulares o "sospechosas".

• *Parámetros estimados*

$$\text{ARIMA } (0, 1, 1)(1, 1, 0)_{12}; (1 - \Phi_1 B^{12}) \nabla \nabla_{12} T(Z_t) = (1 - \theta_1 B) e_t$$

	Parámetro	Valor t
$\theta_1(1)$	0.376	2.980
$\Phi_1 S(1)$	-0.574	-6.576

Como se muestra los parámetros estimados para el modelo ARIMA, cumplen con el estadístico t; esto es, el valor absoluto es mayor a dos, y los parámetros no presentan una correlación alta; lo que implica que son significativos.

correlación	$\theta_1(1)$	$\Phi_1 S(1)$
$\theta_1(1)$	1	-0.076
$\Phi_1 S(1)$	-0.076	1

• *Ajuste del modelo*

Para poder comprobar que el modelo se ajusta al comportamiento histórico de los datos, se realiza la validación con doce pronósticos hacia atrás; se obtiene la diferencia entre el valor observado y el pronóstico, con lo que se obtiene el porcentaje de error del pronóstico, se muestra en la tabla 6.10, y se observa gráficamente en la figura 6.12.

Mes	Observado [ppm]	Pronóstico [ppm]	Porcentaje de error	Residual	Residual <sup>2</sup>
<b>Abr-96</b>	0.093	0.106	14	-0.01298	0.00017
<b>May-96</b>	0.100	0.116	16	-0.01632	0.00027
<b>Jun-96</b>	0.072	0.074	2	-0.00167	0.00000
<b>Jul-96</b>	0.066	0.050	24	0.01608	0.00026
<b>Ago-96</b>	0.070	0.046	34	0.02375	0.00056
<b>Sep-96</b>	0.075	0.045	41	0.03048	0.00093
<b>Oct-96</b>	0.063	0.053	16	0.01034	0.00011
<b>Nov-96</b>	0.076	0.063	17	0.01303	0.00017
<b>Dic-96</b>	0.111	0.077	31	0.03386	0.00115
<b>Ene-97</b>	0.108	0.101	7	0.00737	0.00005
<b>Feb-97</b>	0.111	0.091	18	0.02038	0.00042
<b>Mar-97</b>	0.115	0.098	15	0.01718	0.00030
		<b>Promedio</b>	20		
			<b>Suma</b>	0.14149	0.00438

Tabla 6.10 Ajuste del modelo

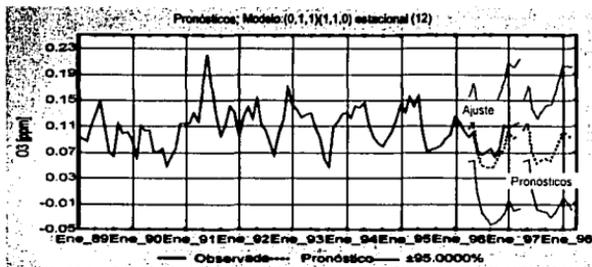


Figura 6.12 Pronósticos. Xinlostoc

• *Pronósticos*

Con base en el modelo seleccionado se obtienen doce pronósticos del comportamiento futuro de los promedios mensuales de los máximos diarios de ozono, con un intervalo de confianza del 95 %. Los pronósticos no presentan problemas con respecto a la norma como se muestra en la tabla 6.11, y se pueden observar gráficamente en la figura 6.12, donde su tendencia es decreciente.

Mes	Observado [ppm]	Pronóstico [ppm]	Limite inferior 95 %	Limite superior 95 %
Abr-97	0.106	0.104	0.057	0.152
May-97	0.109	0.116	0.060	0.172
Jun-97	0.100	0.072	0.008	0.135
Jul-97		0.052	-0.018	0.122
Ago-97		0.056	-0.020	0.132
Sep-97		0.060	-0.022	0.141
Oct-97		0.057	-0.030	0.144
Nov-97		0.068	-0.024	0.160
Dic-97		0.087	-0.010	0.183
Ene-98		0.101	0.000	0.201
Feb-98		0.097	-0.008	0.202
Mar-98		0.091	-0.018	0.200

Tabla 6.11 Pronósticos

Para obtener los pronósticos se tiene la ecuación

$$(1 - \Phi_1 B^{12}) \nabla \nabla_{12} Z_t = (1 - \alpha) e_t$$

$$Z_t = Z_{t-1} + (1 + \Phi_1) Z_{t-12} - (1 + \Phi_1) Z_{t-13} - \Phi_1 Z_{t-24} + \Phi_1 Z_{t-25} - \alpha e_{t-1} + e_t$$

Y sustituyendo los parámetros estimados

$$Z_t = Z_{t-1} + 0.426Z_{t-12} - 0.426Z_{t-13} + 0.574Z_{t-24} - 0.574Z_{t-25} - 0.376e_{t-1} + e_t$$

Con base en la ecuación anterior podemos decir que el valor actual de la serie está determinado por la suma de algunas observaciones de los últimos 25 meses y el choque aleatorio del mes anterior; esto es por la parte autorregresiva estacional y la parte de promedios móviles respectivamente.

El comportamiento del ozono para la estación Xalostoc, es explicado casi en su totalidad por un modelo autorregresivo, lo que hace pensar que las emisiones de los precursores de ozono juegan un papel muy importante en su comportamiento. Teniendo además un choque aleatorio el cual se puede explicar por las condiciones meteorológicas.

## 6.10 Estación Tlalnepantla

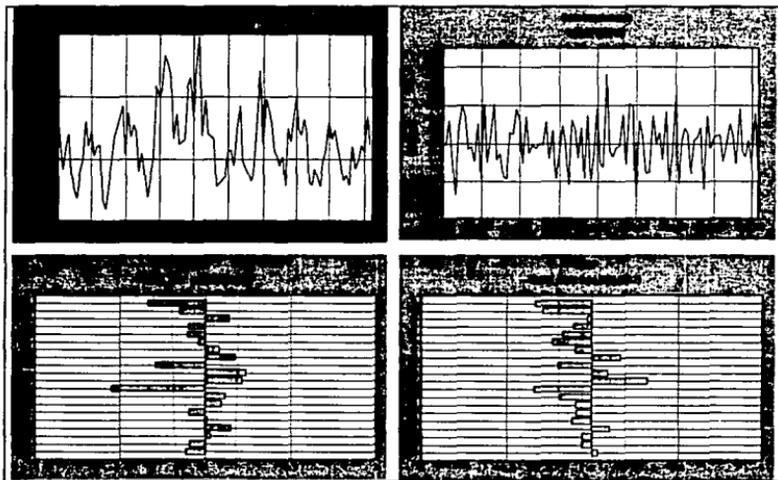


Figura 6.13 Análisis de la serie de tiempo.

### El ozono modelado con Box-Jenkins

En la figura 6.13, se puede observar como la serie de tiempo del ozono presenta tendencia irregular, y una fluctuación estacional (12), por ello se aplica tanto diferencia ordinaria como una diferencia estacional. Por otro lado, la varianza no es constante, y se aplica una transformación logarítmica.

Con base en las características que presentan la función autocorrelación (FAC) y la función de autocorrelación parcial (FACP) se identificó el modelo multiplicativo: **ARIMA (0,1,1) (1,1,0)**.

$$(1 - \Phi_1 B^{12}) \nabla \nabla_{12} T(Z_t) = (1 - \theta_1 B) e_t$$

Después de la identificación y la estimación de parámetros se procede a la verificación del modelo comenzando con el análisis de residuales.

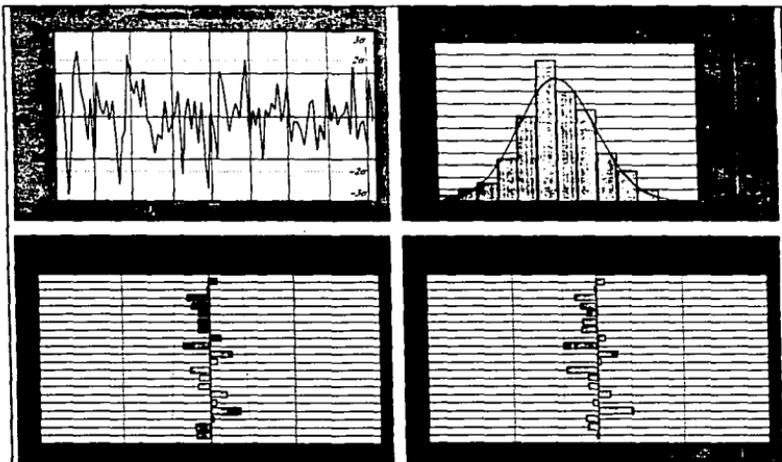


Figura 6.14 Análisis de residuales.

En la figura 6.14, se observa la gráfica de los residuales con respecto al tiempo, donde éstos presentan aproximadamente una media igual con cero y calculando el

cociente  $\sqrt{N-d-p} \frac{m(\hat{\sigma}_e)}{\hat{\sigma}_e} = -0.036$ ; como el valor absoluto de dicho cociente es menor que dos, entonces no existe evidencia de que la media del proceso de ruido blanco sea distinta de cero. Además, podemos observar como los residuales presentan una varianza constante.

Ahora, también se examina si siguen una distribución normal, como se observa en el histograma, los residuales se comportan aproximadamente con una distribución normal, y a partir de los residuales con respecto al tiempo la mayoría de las observaciones se localizan en el intervalo  $(-2\hat{\sigma}_e, 2\hat{\sigma}_e)$ , y ninguna observación está fuera del intervalo  $(-3\hat{\sigma}_e, 3\hat{\sigma}_e)$ , lo cual significa que los residuales no presentan observaciones irregulares o "sospechosas".

Por otro lado, se evalúa que los residuales sean variables aleatorias mutuamente independientes. La independencia implica no autocorrelación, y se puede observar a partir de la FAC Y la FACP, que todas las autocorrelaciones de los residuales se encuentran en el intervalo de confianza que las considera significativamente iguales a cero.

◆ *Parámetros estimados*

$$\text{ARIMA } (0,1,1)(1,1,0)_{12}: (1 - \Phi_1 B^{12}) \nabla \nabla_{12} T(Z_t) = (1 - \theta_1 B) e_t$$

	Parámetro	Valor t
$\theta_1$ (1)	0.482	4.15
$\Phi_1$ (1)	-0.571	-6.87

Como se puede observar los parámetros estimados para el modelo ARIMA, cumplen con el estadístico t, lo cual implica que los parámetros sean significativos.

Correlación	$\theta_1$ (1)	$\Phi_1$ (1)
$\theta_1$ (1)	1	0.062
$\Phi_1$ (1)	0.062	1

También se observa como los parámetros no presentan una correlación alta, lo que implicaría también, que son significativos.

◆ *Ajuste del modelo*

Para poder comprobar que el modelo se ajusta al comportamiento histórico de los datos, se realiza la validación, con doce pronósticos hacia atrás, es decir, se calculan los datos con el modelo y se validan con el valor observado. Obteniéndose el porcentaje de error del pronóstico. Los datos se muestran en la tabla 6.12 y se pueden observar gráficamente en la figura 6.15.

El ozono modelado con Box-Jenkins

Mes	Observado [ppm]	Pronóstico [ppm]	Porcentaje error	Residual	Residual <sup>2</sup>
Abr-96	0.12	0.128	6	-0.00777	0.00006
May-96	0.109	0.112	3	-0.00310	0.00001
Jun-96	0.093	0.094	1	-0.00062	0.00000
Jul-96	0.097	0.089	8	0.00788	0.00006
Ago-96	0.089	0.098	10	-0.00904	0.00008
Sep-96	0.12	0.084	30	0.03650	0.00133
Oct-96	0.102	0.102	0	-0.00035	0.00000
Nov-96	0.109	0.107	2	0.00218	0.00000
Dic-96	0.121	0.119	2	0.00224	0.00001
Ene-97	0.116	0.137	18	-0.02103	0.00044
Feb-97	0.144	0.119	18	0.02527	0.00064
Mar-97	0.122	0.119	2	0.00263	0.00001
		Promedio	8		
		Suma		0.03479	0.00264

Tabla 6.12 Ajuste del modelo

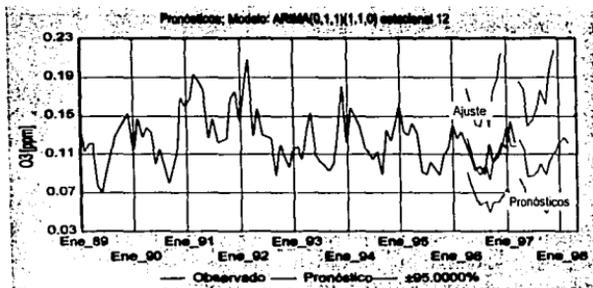


Figura 6.15 Pronósticos. Tlalnepanitla

• *Pronósticos*

Se obtienen doce pronósticos del comportamiento futuro del ozono. Los pronósticos se muestran en la tabla 6.13, junto con los límites de confianza obtenidos del 95%, se pueden observar gráficamente en la figura 6.15, a partir de la figura se observa como éstos muestran una tendencia constante. Por otro lado, se observa como siguen un patrón estacional anual (12 meses).

Mes	Observado	Pronóstico	Limite inferior	Limite superior
	[ppm]	[ppm]	95 %	95 %
Abr-97	0.094	0.1257	0.0908	0.1740
May-97	0.106	0.1157	0.0802	0.1668
Jun-97	0.100	0.0878	0.0587	0.1314
Jul-97		0.0880	0.0568	0.1361
Ago-97		0.0914	0.0573	0.1460
Sep-97		0.1001	0.0609	0.1647
Oct-97		0.0894	0.0529	0.1511
Nov-97		0.1036	0.0597	0.1799
Dic-97		0.1131	0.0636	0.2013
Ene-98		0.1226	0.0673	0.2235
Feb-98		0.1272	0.0682	0.2373
Mar-98		0.1222	0.0640	0.2331

Tabla 6.13 Pronósticos

Para obtener los pronósticos se tiene la ecuación

$$(1 - \Phi_1 B^{12}) \nabla \nabla_{12} Z_t = (1 - \alpha_1 B) e_t$$

$$Z_t = Z_{t-1} + (1 + \Phi_1)Z_{t-12} - (1 + \Phi_1)Z_{t-13} - \Phi_1 Z_{t-24} + \Phi_1 Z_{t-25} - \alpha_1 e_{t-1} + e_t$$

Y sustituyendo los parámetros estimados

$$Z_t = Z_{t-1} + 0.429Z_{t-12} - 0.429Z_{t-13} + 0.571Z_{t-24} - 0.571Z_{t-25} - 0.482e_{t-1} + e_t$$

Con base en la ecuación de los pronósticos, se dice que el valor actual de la serie está determinado por la suma de algunas observaciones de los últimos 25 meses, y el choque aleatorio del mes anterior.

Al obtener un modelo con una parte autorregresiva estacional y otra de promedios móviles, hace pensar que el comportamiento del ozono puede ser atribuido a las emisiones de sus precursores, y el choque aleatorio puede ser atribuido a las condiciones meteorológicas.

## 6.11 Resumen y conclusiones

A continuación se presenta el resumen del análisis de las series de tiempo del comportamiento mensual del ozono, con la aplicación de la metodología Box-Jenkins, indicando el modelo que mejor se ajusta, así como sus principales características.

En la tabla 6.14, se muestran los resultados obtenidos para cada una de las estaciones de monitoreo; como se puede observar el comportamiento para cada una de las estaciones es muy diferente, ya que no predomina una característica en particular para todas.

Una característica importante es el hecho de haber encontrado una estacionalidad con longitud de 12 meses casi para todas las estaciones excepto para Pedregal, que como se ha venido mencionando ésta última es la que presenta los mayores problemas de ozono. Es importante mencionar que en algunos casos fue necesaria la diferencia estacional para modelar el comportamiento del ozono; esto es, para obtener un mejor ajuste.

En la zona sur se presentan casos muy diferentes debido a que para la zona SO donde se ubica la estación Pedregal se obtuvo un modelo ordinario ARMA, mientras para la parte SE con la estación Cerro de la Estrella, se tiene un modelo ARIMA multiplicativo con doble parámetro autorregresivo estacional.

Para la zona centro, con la estación Merced, se obtuvo un modelo multiplicativo, presentando estacionalidad de longitud 12, con una parte autorregresiva estacional y un parámetro de promedios móviles ordinario.

En la zona norte encontramos que el ozono se modela con un mismo modelo ARIMA (0,1,1)(1,1,0), presentando las mismas características, excepto que para la zona NO con la estación Tlalnepantla hubo la necesidad de aplicar una transformación logarítmica.

El haber obtenido modelos autorregresivos; esto es con el parámetro AR, nos dice que las concentraciones de ozono son función de las concentraciones anteriores lo que hace pensar, que su comportamiento es función de las emisiones de sus precursores a la atmósfera. Mientras que el parámetro MA, es decir, el error aleatorio se podría atribuir a las condiciones meteorológicas.

Resumen Modelos ARIMA							
Estación analizada (ubicación)	Tendencia	Varianza	Periodo Estacional (meses)	Diferencias	Transformación	Modelo ARIMA multiplicativo	Parámetros estimados ARIMA
<b>Pedregal</b>  SO	Irregular	constante	no	no	no	(1,0,1)	$\phi_1=0.996$ $\theta_1=0.389$
<b>Cerro de la Estrella SE</b>	Decreciente	constante	12	1 ordinaria 1 estacional	no	(0,1,1)(2,1,0)	$\theta_1=0.707$ $\Phi_1=0.818$ $\Phi_2=0.459$
<b>Merced</b>  CE	Decreciente	irregular	12	1 ordinaria	logarítmica	(0,1,1)(1,0,0)	$\theta_1=0.567$ $\Phi_1=0.306$
<b>Xalosoc</b>  NE	Irregular	constante	12	1 ordinaria 1 estacional	no	(0,1,1)(1,1,0)	$\theta_1=0.376$ $\Phi_1=0.574$
<b>Tlalnepantla</b>  NO	Irregular	irregular	12	1 ordinaria 1 estacional	logarítmica	(0,1,1)(1,1,0)	$\theta_1=0.482$ $\Phi_1=0.571$

Tabla G.14 Resumen Modelos ARIMA

Para cada una de las estaciones de monitoreo se obtuvieron 12 pronósticos del comportamiento futuro del ozono. Con base en éstos, sólo para Pedregal, Cerro de la Estrella, y para Xalosoc el ozono presentó una tendencia decreciente, mientras que para Merced y Tlalnepantla la tendencia es constante, lo anterior se ilustra en la tabla 6.15.

Pronósticos		
Estación	Número	Tendencia
<b>Pedregal SO</b>	12	Decreciente
<b>Cerro de la Estrella SE</b>	12	Decreciente
<b>Merced CE</b>	12	Constante
<b>Xalosoc NE</b>	12	Decreciente
<b>Tlalnepantla NO</b>	12	Constante

Tabla 6.15 Tendencia de los pronósticos

# *Conclusiones*

Desde hace ya varios años la Zona Metropolitana de la Ciudad de México vive el grave problema de la contaminación atmosférica por ozono. A partir de que se contó con la Red de monitoreo atmosférico en 1986 se ha venido observando que es el contaminante que registra las mayores violaciones a las normas de calidad del aire, tanto en intensidad como en frecuencia. Por ello, se ha venido estudiando con mucho apremio debido a los efectos en los seres vivos.

Por la necesidad de estudiar este contaminante, sus cambios y sus características, con el fin de poder implantar nuevas estrategias para su control han surgido como resultado nuevas metodologías.

El ozono se presenta en la atmósfera en forma de gas; éste es un contaminante secundario, ya que es el producto de la reacción dos contaminantes primarios en la atmósfera; es decir, proviene de complejas y numerosas reacciones entre hidrocarburos no metánicos (HCNM) y los óxidos de nitrógeno (NO<sub>x</sub>), en presencia de luz solar, a este tipo de reacciones se les conoce como fotoquímicas.

Los efectos causados por las altas concentraciones de ozono se ven reflejados en la salud humana, pero también se detectan efectos en el deterioro de materiales como el hule, los textiles y la pintura. Por otro lado, en la vegetación causa lesiones en las hojas y limita su crecimiento. Además, también se refleja el problema del ozono en la degradación de la visibilidad.

Para el estudio del ozono, se tiene un interés muy especial para la parte sur de la Zona Metropolitana de la Ciudad de México, debido a que es esta área es donde históricamente se han registrado las más altas concentraciones de ozono, y muy específicamente en la estación Pedregal. Por ello, primero se analizó la zona sur, se continuó con el centro y se finalizó con la zona norte.

Como primer paso en el análisis se utilizó la metodología Rao-Zurbenko, con la cual se obtuvieron las variables significativas para explicar la formación de máximos de ozono.

Las variables meteorológicas utilizadas en el análisis fueron: la temperatura, la humedad relativa, la magnitud y velocidad del viento medidas a nivel superficie (medidas por la RAMA). Se encontró que sólo la temperatura y la humedad relativa son significativas para explicar el ozono. Además, cabe mencionar que se utilizó también la radiación ultravioleta (Estación Pedregal), pero los resultados obtenidos mostraron que no es una variable significativa para explicar las altas concentraciones de ozono en la atmósfera.

## *Conclusiones*

Al aplicar el análisis de regresión lineal se encontró que la variable más significativa para explicar el comportamiento del ozono resultó ser la temperatura para todas las estaciones, pero después de aplicar el filtro de promedios móviles; esto es, separar de las series la parte determinística y la estocástica y aplicar nuevamente el análisis de regresión sólo a la parte determinística de las series, resultó que la variable que explica en un mayor porcentaje el ozono es la humedad relativa.

En la estación Pedregal, que representa la parte suroeste; se pudo observar una relación lineal entre el ozono y la temperatura, pero al aplicar el filtro de promedios móviles (KZ23,3) la relación lineal desapareció, por lo que el ozono se explica por la humedad relativa, teniendo que el 6% de la variación máxima diaria de ozono se explica por la variación diaria de la humedad relativa.

Por otro lado, Cerro de la Estrella de la zona sureste, presentó el mismo comportamiento que Pedregal, con la diferencia del filtro, KZ 91,2, con el cual se obtuvo que el 16% de la variación máxima diaria de ozono se explica por la variación diaria de la humedad relativa.

El caso de Merced en el centro es importante ya que a diferencia de las dos estaciones anteriores, la temperatura continuó siendo una variable significativa, después de aplicar el filtro de promedios móviles: KZ 45,4; y se encontró que el 16% de la variación máxima diaria de ozono se explica por la variación diaria de la temperatura.

Xalostoc, en el noreste fue la estación que presentó la mayor relación lineal con el ozono, ya que dos variables meteorológicas son significativas para explicar éste. El 27% de la variación máxima diaria de ozono se explica por la variación de la temperatura y la humedad relativa, con el filtro KZ 45,4.

Para Tlalnepantla en la zona noroeste se aplicó el mismo filtro que para Xalostoc, pero con la diferencia que sólo la humedad relativa es significativa para explicar el ozono; se encontró que el 14% de la variación máxima diaria de ozono se explica por la variación diaria de la humedad relativa.

Xalostoc, Merced, Cerro de la estrella, Tlalnepantla y Pedregal, en este orden presentan de mayor a menor la influencia de las condiciones meteorológicas para la formación de los máximos de ozono.

Con la metodología seguida se eliminó el efecto de la temperatura y la humedad relativa del comportamiento del ozono en las estaciones analizadas. Cabe mencionar que en todas ellas este efecto es pobre, sobre todo en Pedregal. Se piensa que en esta estación hay un efecto importante de transporte del contaminante por vientos no superficiales de los cuales no hay datos. Además, el ozono en esta estación no se justifica por que sea una zona industrializada.

Debido a que en las estaciones analizadas no se encontró una fuerte relación lineal de las condiciones meteorológicas con el comportamiento del ozono; esto es, con las variables medidas a nivel superficie, hace pensar que existe un transporte del ozono pero en capas superiores. Por lo que, se sugiere que se realicen mediciones de magnitud y dirección del viento a diferentes alturas.

Una vez eliminado el efecto de las variables consideradas en cada una de las estaciones, se observó en las gráficas de los residuales sin la influencia de las condiciones meteorológicas; que el comportamiento de los máximos de ozono a través del tiempo muestran una tendencia decreciente sobre todo en los picos que ocurren.

Como siguiente paso se aplicó la metodología Box-Jenkins, obteniéndose los modelos ARIMA, así como doce pronósticos para cada una de las estaciones; donde se observó que todas las series presentan una tendencia irregular. Una característica importante es que se presentó una estacionalidad de longitud de 12, es decir, de un año para casi todas las series excepto para Pedregal. Esto nos dice que existe una similitud en el comportamiento del ozono por año.

Pedregal presentó el modelo ARIMA (1,0,1), que es mejor conocido como el modelo ARMA. El modelo nos dice que la observación actual de la serie se obtiene a partir de la suma de la observación del mes anterior y del choque aleatorio del mes anterior. Para esta estación no se encontró estacionalidad de longitud 12, es difícil explicar el por qué de esta característica.

Para Cerro de la Estrella; el modelo obtenido fue un ARIMA (0,1,1)(2,1,1), presentado dos parámetros autorregresivos en la parte estacional y una parte de promedios móviles ordinaria, por lo que, el valor actual de la serie se obtiene a partir de la suma de ciertos valores ocurridos durante los últimos treinta y siete meses más el choque aleatorio del mes anterior.

Merced presentó el modelo ARIMA (0,1,1)(1,0,0); en este caso no fue necesario aplicar una diferencia estacional por que el modelo se complicaba. Con el modelo identificado se dice que la observación actual de la serie de obtiene a partir de la suma ciertas observaciones ocurridas durante los últimos trece meses y el choque aleatorio del mes anterior.

Para Xalostoc, el modelo es ARIMA (0,1,1) (1,1,0); en este caso el modelo se determina a través de un proceso de promedios móviles en la parte ordinaria y en la parte estacional por un proceso autorregresivo, por lo que, la observación actual se obtiene a partir de la suma de ciertos valores ocurridos en los últimos 25 meses y el choque aleatorio del mes anterior.

Tlalnepantla, presentó el mismo modelo que Xalostoc, lo cual nos dice que el ozono presenta un comportamiento muy similar en la zona norte; la observación actual se obtiene a partir de la suma de ciertos valores ocurridos en los últimos 25 meses y el choque aleatorio del mes anterior.

## *Conclusiones*

Se obtuvieron modelos mezclados con parámetros autorregresivos y de promedios móviles para las estaciones analizadas. El haber obtenido este tipo de modelos; esto es, con el parámetro AR, nos dice que las concentraciones de ozono son función de las concentraciones anteriores lo que hace pensar que el comportamiento del ozono es función de las emisiones de sus precursores a la atmósfera. Mientras que el parámetro MA, es decir, el choque aleatorio se podría atribuir a las condiciones meteorológicas.

Los pronósticos obtenidos para cada una de las estaciones son de gran importancia ya que nos dan el comportamiento futuro del ozono (tendencia); para Pedregal la tendencia es decreciente; lo mismo se presentó para Cerro de la Estrella; para el caso de Merced su tendencia es constante; en Xalostoc la tendencia es decreciente, y por último para Tlalnepantla la tendencia es constante.

Si generalizamos el comportamiento de los pronósticos por zona donde se encuentra cada una de las estaciones analizadas, se tiene para la zona sur: el comportamiento futuro del ozono presentó tendencia decreciente, mientras que para la zona centro se encontró tendencia constante, pero para la zona norte se tiene que dividir en la zona noreste donde la tendencia es decreciente, mientras que en la zona noroeste la tendencia es constante.

Finalmente, se comprobó que con la metodología Box-Jekins se pueden obtener modelos que se ajustan a comportamientos muy estocásticos como los de los contaminantes atmosféricos, siendo en este caso el ozono.

# Bibliografía

1. Box George E. P., Jenkins Gwilym M.; Time Series Analysis: Forecasting and Control, Prentice Hall, USA (1976).
2. Comisión Metropolitana para la Prevención y Control de la Contaminación Ambiental en el Valle de México, La Contaminación Atmosférica en el Valle de México. Acciones para su Control 1988-1994, México (1994): p. 28.
3. Comisión Metropolitana para la Prevención y Control de la Contaminación Ambiental en el Valle de México, Ozono. Bases para la Elaboración de una Estrategia de Control, México( 1992).
4. Comisión Nacional de derechos Humanos, La Contaminación Atmosférica en México. Sus Causas y Efectos en la Salud, La Dirección de Publicaciones de la Comisión Nacional de Derechos Humanos, México (1992).
5. Damodar N. Gujarati, Econometría, McGraw-Hill, México, D.F., (1995).
6. Departamento del Distrito Federal, Gobierno del Estado de México, Secretaría de Medio Ambiente, Recursos Naturales y Pesca, Secretaría de Salud, Programa para Mejorar la Calidad del Aire en el Valle de México 1995-2000, México (1996).
7. Departamento del Distrito Federal, Gobierno del Estado de México, Secretaría de Medio Ambiente, Recursos Naturales y Pesca, Secretaría de Salud, Programa para Mejorar la Calidad del Aire en el Valle de México 1995-2000, México (1996).
8. Douglas C. Montgomery, Elizabeth A. Peck, Introduction to Linear Regression Analysis, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, Jonh Wiley & Sons, INC, USA (1992).
9. Dr. Humberto Bravo Alvarez, La Contaminación del Aire de México, Universo Veintiuno, México(1987).
10. Draper & H.Smith, Applied Regression Analysis, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, Jonh Wiley & Sons, INC, (1980).
11. González Videgaray María del Carmen, Modelos de Decisión con Procesos Estocásticos II (Metodología Box-Jenkins), U.N.A.M., E.N.E.P. Acatlán, Vertiente, México (1990).
12. Guerrero Victor M., Análisis Estadístico de Series de Tiempo Económicas, Universidad Autónoma Metropolitana, México (1991).

*Bibliografía*

13. Hiller Frederick, Lieberman Gerald J., Introducción a la Investigación de Operaciones, McGraw-Hill, México (1988).
14. Makridakis y Wheelwright, Manual de Técnicas de Pronósticos, Limusa, Noriega Editores, México (1991).
15. Prawda Witenberg Juan, Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones, Volumen II, Modelos Estocásticos, Limusa, México (1984).
16. Quadri & Sánchez, La Ciudad de México y la Contaminación Atmosférica, Noriega Editores, México (1992).
17. Reyes Ponce Agustín, Administración de Empresas: Teoría y Práctica, Primera parte, Limusa-Wiley, México (1980).
18. Reyes Ponce Agustín, Administración de Empresas: Teoría y Práctica, Segunda parte, Limusa-Wiley, México (1980).
19. Wark & Warner, Contaminación del Aire. Origen y Control, Limusa, México-España-Venezuela-Colombia, México (1994).
20. Willian Mendenhall, Dennis D. Wackerly, y Richard L. Scheaffer, Estadística Matemática con Aplicaciones, Grupo Editorial Iberoamérica, Segunda edición México (1994).
21. Zurbenko, The Spectral Analysis of Time Series, North Holland (1986).

# Glosario

**Aerobiológicas.** Son aquellas que mantienen actividad microbiana; por ejemplo: bacterias, hongos, virus y protozoarios.

**Aerométrico.** Medida de la densidad del contaminante en el aire.

**Aleatoriedad.** Las variaciones inexplicables en una serie de tiempo. Error de la serie que ya no puede pronosticarse.

**Antropogénico.** Que se origina a causa de las actividades del hombre.

**ARIMA.** Abreviatura para el promedio móvil autorregresivo integrado (del inglés Autorregresive (AR), Integrated (I), Moving Average (MA)); nombre de una amplia clase de modelos con series de tiempo. Series de modelos de promedios móviles autorregresivos integrados que muestran una impresionante capacidad de predicción.

**Atomizadas.** Se refiere a partículas muy pequeñas

**Autocorrelación parcial.** La autocorrelación parcial del retraso  $k$  de una serie de tiempo  $W$ , es básicamente el coeficiente estimado de  $W_{t-k}$  en la regresión de  $W_t$  sobre  $W_{t-1}, W_{t-2}, \dots, W_{t-k}$ . Las autocorrelaciones parciales son útiles para determinar los retrasos autorregresivos adecuados.

**Autocorrelación.** La autocorrelación del retraso  $k$  de una serie de tiempo de  $n$  observaciones es la correlación entre el valor en el tiempo,  $t$  y digamos  $Z_t$  y el valor en el tiempo  $t - k$ , digamos  $Z_{t-k}$ , calculada sobre los pares de tiempo  $(k+1, 1), (k+2, 2), \dots, (n, n-k)$ , exactamente como uno calcularía la correlación de dos variables diferentes  $X$  y  $Y$ .

**Autorregresión.** Un elemento típico de muchos modelos de series de tiempo en los cuales se puede sugerir que un valor en el tiempo  $t$  como  $W_t$ , se encuentra asociado con los valores  $W$  de series anteriores, digamos  $W_{t-1}, W_{t-2}, \dots, W_{t-p}$ , en el caso de una autorregresión de orden  $p$ . Es la dependencia de una variable con respecto a sus propios valores anteriores.

**Bioquímicas.** Transformaciones químicas que se originan durante la actividad funcional de la materia viva.

**Ciclo.** Secuencia recurrente de períodos de expansión y depresión. Son repeticiones de comportamiento de  $x$  fenómeno en períodos al menos de un año.

## *Glosario*

**Contaminación del aire.** Es la presencia en la atmósfera de uno o más contaminantes o sus combinaciones, en cantidades tales y con la duración que sean o puedan afectar a la vida humana, de animales, de plantas.

**Contaminante criterio.** Se le llama así por constituir compuestos o agentes que permiten conocer la calidad del aire.

**Contaminante.** "polvo, vapores, niebla, líquidos, humo otras materias particuladas, vapor, gas, sustancias olorosas o cualquier combinación de las mismas, pero que no incluirá el vapor de agua no combinado".

**Convertidor catalítico.** Es un dispositivo que atrapa los gases contaminantes en el escape (monóxido de carbono, hidrocarburos y óxidos de nitrógeno) y los transforma químicamente en sustancias inertes y abundantes en la atmósfera (agua, nitrógeno y bióxido de carbono).

**Energéticos.** Productos derivados del petróleo, por ejemplo: gasolinas, etc.

**Erosión eólica.** Proceso erosivo en que el agente principal es el viento cargado de partículas rocosas en suspensión. Erosión causada por el viento.

**Error.** Es la diferencia en entre el valor real y el pronóstico

**Estacionario.** Se refiere a un proceso con una distribución compuesta que es invariable con respecto al desplazamiento a través del tiempo. Los datos de las series de tiempo deben mostrar este carácter estacionario o tener la capacidad de ser transformados a esta condición.

**Estimador.** Es una regla, fórmula o método que no dice como estimar el parámetro poblacional a partir de la información de una muestra.

**Estratósfera.** Capa superior de la atmósfera que rodea a la tierra entre los 40 y 50 kilómetros de altitud.

**Granulomería.** Se refiere a los granos pequeños del suelo.

**HCNM.** Son hidrocarburos reactivos sin incluir al metano.

**Hemoglobina.** Pigmento rojo contenido en la sangre que permite el transporte del oxígeno por la sangre.

**IMECA.** Índice Metropolitano de la Calidad del Aire.

**Isopleta.** Es una curva a lo largo de la cual se mantiene la misma concentración.

**Método de Referencia.** Mide las emisiones puntuales de un contaminante.

**Micrógramos por metro cúbico ( $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ).** Esta unidad se utiliza para expresar la masa de un contaminante; para el caso de partículas expresa la concentración de éstas suspendidas en un volumen de aire.

**Modelo.** Es una simplificación de un sistema real, con un objetivo particular sobre el sistema.

**Morfológicas.** Se refiere a los cambios en la estructura externa de los órganos.

**Parsimonia.** Se refiere a que un modelo nunca puede llegar a ser una descripción completamente exacta de la realidad; por ello, es importante emplear el menor número posible de parámetros para una representación adecuada del modelo.

**Partes por millón (ppm).** Es una unidad de medida para expresar la cantidad de una substancia química en un volumen, esto es, se divide el volumen en un millón de partes iguales. Cada millonésima parte de este volumen que correspondan a la substancia de interés se considera una parte por millón de la substancia. Las ppm. Se utilizan para determinar concentraciones muy pequeñas de gases en la atmósfera.

**Proliferación.** Se refiere a la potencia de un auto.

**Pronóstico de series de tiempo.** Método de pronósticos cuantitativo en el cual se hace un énfasis especial en la utilización lógica de los datos con retraso (es decir, los datos históricos) para el desarrollo de pronóstico.

**Pronóstico.** Estimación del futuro basada en el pasado.

**RAMA.** Red Automática de Monitoreo Atmosférico

**Reacción fotolítica.** Es la reacción que se da cuando el bióxido de nitrógeno ( $\text{NO}_2$ ) absorbe la energía ultravioleta solar que llega a la superficie de la Tierra.

**Remoción.** Se refiere a la acción de removerse.

**Sedimentables.** Se refiere a la propiedad de mantenerse en suspensión.

**Smog.** Mezcla de diversos compuestos gaseosos y aerosoles, su raíz de lingües smoke (humo) y fog (niebla).

**Tendencia.** Curso promedio o predominante de una serie, con frecuencia se expresa como el crecimiento durante un período. Condición en la cual una serie de tiempo presenta un aumento o disminución consistentes a través del tiempo.

**Tropósfera.** Capa inferior de la atmósfera que envuelve a la tierra desde su superficie hasta los diez kilómetros.

*Glosario*

**Valle.** Llanura de tierra entre montañas.

**Variables explicativas.** Variables que explican parte de la fluctuación total de los que se trata de pronosticar.

**Varianza.** La desviación promedio al cuadrado de la media de algunos datos o de una cantidad desconocida; una medida de la variación o de la dispersión

**ZMCM.** *Zona metropolitana de la Ciudad de México*; está constituida por la Ciudad de México y los diferentes municipios que la rodean.

# Anexo A

## Distribución de las concentraciones máximas diarias de ozono por arriba de la norma ( 0.11 ppm)

	PED	CES	MER	XAL	TLA
1988					
DIAS>NORMA	281	101	205	74	165
%	-	36%	73%	26%	59%
1989					
DIAS>NORMA	254	128	124	79	116
%	-	50%	49%	31%	46%
1990					
DIAS>NORMA	303	202	248	79	175
%	-	66%	82%	79%	58%
1991					
DIAS>NORMA	309	268	242	186	241
%	-	87%	78%	60%	78%
1992					
DIAS>NORMA	257	230	223	179	181
%	-	89%	87%	70%	70%
1993					
DIAS>NORMA	250	178	222	148	165
%	-	71%	89%	60%	66%
1994					
DIAS>NORMA	287	232	297	198	204
%	97%	78%	-	67%	69%
1995					
DIAS>NORMA	291	223	251	171	176
%	-	77%	86%	59%	60%
Total	2232	1562	1812	1114	1423
DIAS>NORMA	-	70%	81%	50%	64%
No. de años > norma de 8 años	6.1	4.3	5	3	3.9

Tabla 1. Las concentraciones máximas diarias de ozono por arriba de la norma.  
Fuente: Dirección General de Prevención y Control de la Contaminación, Red Automática de Monitoreo Atmosférico de la Ciudad de México, Compendio Estadístico 1985-1995, México (1999), pp.17-19.

Abreviaturas: PED. Pedregal; CES. Cerro de la estrella; MER. Merced; XAL. Xalostoc; TLA. Tlalnepantla.

En la tabla 1, se muestran los porcentajes de los días que registran concentraciones por arriba de la norma de ozono, es decir, mayores a 0.11 ppm, donde se toma como referencia la estación que tuvo la mayor cantidad de días con concentraciones por arriba de la norma.

De acuerdo a los resultados mostrados, se observa, como la estación pedregal es la que presenta los mayores problemas de ozono. Teniendo como siguientes a la estación Merced, Cerro de la estrella, Tlalnepantla y Xalostoc. Además, se observa como el número de días con concentraciones por arriba de la norma ha ido incrementando año con año, teniendo de 1990 a 1992 como los años más representativos. Por otro lado, a partir de estas fechas se puede decir que en el número de días registrados con concentraciones por arriba de la norma, no han disminuido considerable.

Conforme a las estadísticas de los días con concentraciones por arriba de la norma, se plantea el análisis; en donde se describe que variabilidad que presentan los registros de los días con concentraciones por arriba de la norma, a través del tiempo.

Año	PED		CES		MER	
	días> norma	(I) (II)	días> norma	(I) (II)	días> norma	(I) (II)
1988	281		101		205	
1989	254	-10%	128	27%	124	-40%
1990	303	19%	202	58%	248	100%
1991	309	2%	268	33%	165%	242
1992	257	-17%	230	-14%	128%	223
1993	250	-3%	178	-23%	76%	222
1994	287	15%	232	30%	130%	297
1995	291	1%	223	-4%	121%	251

Año	XAL		TLA	
	días> norma	(I) (II)	días> norma	(I) (II)
1988	74		165	
1989	79	7%	116	-30%
1990	79	0%	175	51%
1991	186	135%	241	38%
1992	179	-4%	181	-25%
1993	148	-17%	165	-9%
1994	198	34%	204	24%
1995	171	-14%	176	-14%

Tabla 2 Porcentaje de cambio de las concentraciones máximas diarias de ozono por arriba de la norma.

- (I) Corresponde al cambio en porcentaje de un año con respecto al siguiente, tomando como referencia el dato del año anterior.  
 (II) Corresponde al cambio de porcentaje de un año con respecto al siguiente, tomando como referencia el dato del primer año, es decir, el año de 1988.

A partir de los resultados mostrados en la tabla 2, para el caso (I) se puede observar como no existe una tendencia en el número registrados de días con concentraciones por arriba de la norma, si no, más bien siguen un comportamiento alcatorio, puesto que aunque pareciera que en un año disminuyen al siguiente aumentan y así sucesivamente.

**Para el caso número (II), se puede observar que todas las estaciones de monitoreo presentes han tenido un aumento considerable con respecto al número de días registrados con concentraciones por arriba de la norma desde 1988. Un caso especial es la estación Cerro de la estrella, la cual registró un aumento de más de un cien por ciento en días con concentraciones por arriba de la norma de 1990-1992. Las estaciones que menos cambios presentaron son: Tlalnepantla y Pedregal.**

**Finalmente, podemos decir que para 1995 se obtuvieron casi todos los porcentajes en número negativos respecto al caso (I), por lo que, de 1994 a 1995 se han podido reducir los días con concentraciones por arriba de la norma en la ZMCM para las cinco estaciones analizadas.**