31
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"MODELOS PARA VALUACION DE OPCIONES"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

CLAUDIA ROSA ENRIQUEZ SERRANO

DIRECTOR DE TESIS: ACT. AGUSTIN ROMAN AGUILAR

OCTUBRE DE 1997

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"Modelos para valuación de Opciones"

realizado por Claudia Rosa Enríquez Serrano.

con número de cuenta 8923687-1 **, pasante de la carrera de** Actuaria.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Act. Agustín Román Aguilar.	
Propietario	M. en I. Ricardo Hernández Barajas.	
Propietario	M. en E. Arturo Lorenzo Valdés.	
Suplente	Act. Gabriel Vargas Vilchis.	
Suplente	Act. Fátima Bautista Ocón.	

Consejo Departamental de Matemáticas

Mtra. Ma. del Pilar Alonso Reyes.

*A mi madre, por engendrarme, cuidarme,
mantenerme, soportarme, complacerme,
confiar en mi, apoyarme, regañarme,
... y a veces quererme un poquito.*

*A mi Dios, por refugiarme en él cada vez que no entiendo al mundo
... y cada vez que logro hacerlo.*

*A mi padre, por engendrarme y heredarme ese
maldito carácter que me ayuda a finalizar cada día.*

“MODELOS PARA VALUACIÓN DE OPCIONES”

CLAUDIA ROSA ENRÍQUEZ SERRANO

" Suelten amarras, cachorros de
argonauta. Partimos en búsqueda del
vellocino de oro, a la captura del conocimiento! "

INTRODUCCIÓN:

Las opciones son instrumentos que forman parte del Mercado de Productos Derivados, con el objetivo de garantizar operaciones de compra y venta de bienes subyacentes a futuro, este tipo de contratos se establecen entre dos partes, pagando un costo o prima de la opción para poder ser establecidos, esta valuación es muy interesante, ya que por la infinidad de variables que pueden influir para la determinación de la prima, existen modelos que tratan de buscar una frontera de éstas para poder hacer una aproximación correcta del precio de contratación, que refleja el comportamiento del mercado así como el riesgo que el inversionista asume al tener uno de estos contratos.

El primer capítulo hace referencia a los demás productos derivados con los que las opciones compiten para ofrecer mejores alternativas de cobertura y especulación a los diferentes participantes del mercado. En el segundo capítulo se hace un estudio más profundo de las opciones, describiendo todo el marco teórico de desarrollo, así como las diversas posibilidades de clasificación, tipo de participantes y uso, además de interesantes estrategias de cobertura; siendo este capítulo la estructura teórica del desarrollo de los modelos de valuación de los siguientes capítulos.

Los modelos matemáticos que son el objetivo de estudio de la tesis, representan el inicio y el presente de la teoría de valuación de opciones, ya que el primer modelo desarrollado para este fin, fue el modelo Binomial presentado en el tercer capítulo, mostrando de una manera clara y sencilla como se puede estimar el valor de una opción de manera individual y tomando en cuenta el bien subyacente de la que se origina, así como el número de periodos que se pretenda conservar; mientras que el modelo Black & Scholes del quinto capítulo, es un desarrollo más riguroso, y por lo tanto más preciso de dicha valuación, además de ser el modelo que se utiliza actualmente en la Bolsa Mexicana de Valores. Sin embargo, puede haber inversionistas que tengan otra perspectiva del uso de las opciones, y que estos modelos no les sean válidos, de ahí surge la idea de estudiar el desarrollo del modelo de Fijación de Precios de Activos de Capital en el cuarto capítulo, como una propuesta para encontrar el valor de una opción a traves de un modelo que no sólo tome en cuenta el valor del bien subyacente, sino también el comportamiento del mercado financiero donde se encuentra, cubriendo así la posibilidad de estar incluido dentro de un portafolio de inversión.

PRODUCTOS DERIVADOS

Capítulo I

PRODUCTOS DERIVADOS

Dentro del Mercado Financiero Internacional, surgen diversos instrumentos financieros que buscan garantizar operaciones de compra y venta de bienes, obteniendo de esta manera un mercado eficiente donde se abren más posibilidades tanto de cobertura como de especulación para los participantes del gran Mercado de Productos Derivados. En este capítulo se mostrará una breve descripción de los instrumentos más comunes del mismo a manera de ambientación para el concepto fundamental de ésta tesis: las Opciones.

INTRODUCCIÓN:

Un Producto **Derivado** es un instrumento financiero cuyo valor es una función que depende de variables más básicas, (bienes subyacentes), mismas que pueden ser de cualquiera de las siguientes clases:

- Divisas.
- Índices bursátiles.
- Precios de acciones.
- Precios de productos básicos y metales.
- Tasas de interés.
- Otro producto derivado.

En cuanto al plazo del producto derivado, es obvio que no puede exceder a la vigencia del bien subyacente por estar ligado directamente al mismo, además, es el único instrumento financiero que tiene la propiedad de cubrir directamente la posición financiera de algún bien subyacente.

Los productos derivados surgen al buscar un instrumento bursátil que logre transformar el riesgo de mercado o pueda ser utilizado en operaciones financieras de cobertura, contrarrestando así el riesgo adyacente a las posibles fluctuaciones adversas de tasas de interés, precios de materias primas, índices bursátiles, etcétera. Sin embargo, las estadísticas muestran que sólo un pequeño porcentaje de los contratos de productos derivados finalizan con la entrega del bien subyacente, por lo que se infiere que son usados principalmente por especuladores, ya que se pueden obtener ganancias potenciales sin tener que asumir un alto grado de riesgo.

Los productos derivados pueden comercializarse dentro y fuera de un mercado bien estructurado; existen diversas bolsas alrededor del mundo donde los contratos están bien establecidos y estandarizados, mientras que en el mercado extrabursátil (*Over the Counter* (OTC)), se diseñan los instrumentos de acuerdo a las necesidades de cada participante.

Cuando se llevan a cabo operaciones con productos derivados, se deben de pactar las condiciones para la entrega y/o liquidación futura de un activo, y en este concepto radica la importancia de los productos derivados, pues así se disminuye la incertidumbre del precio del activo dándonos la posibilidad de administrar el riesgo y poder planear hacia un futuro más cierto.

Existen cuatro grupos básicos de productos derivados:

- FUTUROS:
  Los futuros son contratos entre dos partes para negociar un bien subyacente a un cierto precio en un determinado periodo de entrega. Este tipo de contrato está estandarizado en cuanto a requisitos de calidad y a normas de operación ya que son comercializados en bolsas establecidas oficialmente.

- FORWARDS:
  Los forwards o contratos adelantados, son acuerdos entre dos partes, que se conocen regularmente, donde una de ellas se compromete a vender el bien subyacente en una fecha futura especifica a un precio determinado; mientras que la otra parte se compromete a comprar el bien subyacente, en la fecha predeterminada al precio acordado.

- OPCIONES:
  Son contratos que dan el derecho más no la obligación de comprar o vender un bien subyacente a un precio determinado en una fecha determinada. A diferencia de los forwards, las opciones si tienen precio de contratación.

- SWAPS:
  Es un contrato por el cual dos partes se comprometen a intercambiar una serie de flujos de efectivo en una fecha futura. Este dinero se encuentra en función de las fluctuaciones del valor de casi cualquier bien subyacente.

Entonces, un Mercado de Productos Derivados es un Mercado Financiero donde se comercializan los instrumentos antes mencionados, así como combinaciones y variaciones de los mismos. Dentro de un Mercado de Productos Derivados, cada transacción necesita dos participantes, el que compra y el que vende; la parte que se compromete a vender se dice que adopta una posición corta, y la parte que se compromete a comprar tiene una posición larga; se dice también, que se abre una posición cuando se adopta una posición corta o larga, y se cierra al adoptar la posición contraria para cancelar la posición inicial.

FUTUROS:

Un futuro es un contrato entre dos partes para comprar o vender un bien subyacente a un cierto precio en un determinado periodo de entrega. Este contrato se negocia dentro de una bolsa bien estructurada, y por lo mismo los contratos a futuro están estandarizados en cuanto a requisitos de calidad y a normas de operación.

La bolsa donde se comercializan los futuros debe de establecer:

- Mecanismos para garantizar el cumplimiento de los compromisos adquiridos por los contratantes.
- El número de unidades de negociación para cada bien subyacente.
- Los límites de movimientos de los precios en un día. (jornada).
- Estándares de calidad mínima para cada bien subyacente.

Los contratos de futuros, por negociarse dentro de un mercado bursátil, llevan implícitas las siguientes especificaciones:

- El Bien Subyacente.- Las calidades que son aceptables de color, sabor, longitud, diámetro, etcétera. Si se entrega un bien con una calidad inferior, el comprador puede pagar un menor precio del comprometido.

- El Tamaño del Contrato.- El tamaño de negociación de cada bien establecido por cada bolsa, por ejemplo:

Bien subyacente	Cantidad por contrato
Maíz	5 000 bushels.
Cocoa	10 toneladas.
Azúcar	112 000 libras.
Oro	100 onzas troy.
Petróleo	barriles.

- Entrega del Bien.- Lugar y fecha de entrega del bien. Dependiendo del lugar se hacen ajustes en el precio por los costos de transportación, la bolsa también determina el periodo de negociación y el periodo de entrega, por ejemplo, si un contrato tiene un periodo de entrega del 15 al 30 de junio, se podrá comenzar a negociar este contrato del 5 de enero al 14 de junio.

- Cotización de Precios.- Se hace la cotización por cada unidad, de manera conveniente y fácil de entender, por ejemplo el petróleo se cotiza en dólares por barril y con dos decimales de aproximación, mientras que el trigo está cotizado en centavos y cuartos de centavo de dólar por cada bushel.

- Límites de Movimiento Diario.- Los límites en que fluctúan los precios diariamente de cada bien, están establecidos por cada bolsa para evitar demasiada especulación.

- Límites en la Posición.- La bolsa también establece el número máximo de contratos que un participante puede tener, así se sabe qué participación de la emisión de los contratos se posee.

Una manera en que las bolsas garantizan los cumplimientos de cada participante es la cuenta de margen, donde, dependiendo de cada participante y sus motivaciones para actuar en la bolsa, se establece un margen inicial y uno de mantenimiento. Si en el transcurso de la vigencia del contrato, la cantidad en la cuenta de margen excede el monto necesario, se puede retirar la diferencia por el inversionista. Cuando la cantidad es menor al margen de mantenimiento, se hace una llamada de margen para restablecer la cuenta al margen inicial.

Por ejemplo, supongamos que un inversionista compra el 1 de junio un contrato de futuros sobre oro con los siguientes datos:

Fecha de entrega:	diciembre.
Precio por onza:	$ 400
Onzas por contrato:	100
Margen por contrato:	$ 2000.
Margen de mantenimiento:	$ 1500.

En la fecha de entrega tendría que pagar $40 000 por contrato, al final de cada día el margen es ajustado de acuerdo al precio de cierre del bien, en este caso el oro, desde el primer día hasta la fecha de entrega; supongamos también que la primera semana de vigencia está representada por el siguiente cuadro:

DÍA	PRECIO A FUTURO $400	GANANCIA O PÉRDIDA DIARIA	GANANCIA O PERDIDA ACUMULADA	SALDO EN LA CUENTA DE MARGEN	MONTO POR LLAMADA DE MARGEN
1, junio	397	- $ 300	- $ 300	$ 1 700	-
2, junio	398	- $ 200	- $ 500	$ 1 500	-
3, junio	395	- $ 500	- $ 1 000	$ 1 000	$ 1 000
4, junio	397	- $ 300	- $ 1 300	$ 1 700	-
5, junio	392	- $ 800	- $ 2 100	$ 900	$ 1 100
6, junio	405	$ 500	- $1 600	$ 2 500	-

Cuadro I.1 Cuenta de margen.

La ganancia o perdida depende del día anterior y es la diferencia entre los precios de cada día, es importante hacer notar que cuando existe una llamada de margen el restablecimiento al margen inicial se puede hacer en especie con acciones o bonos gubernamentales; podemos observar que el 6 de junio la "salida en la cuenta de margen" es mayor al margen establecido inicialmente, ésta diferencia se puede retirar.

Existe un organismo que se encarga de regular todas las transacciones realizadas dentro del mercado de futuros, llamado cámara de compensación o *clearinghouse* y supervisa los siguientes puntos:

- Solidéz financiera de los participantes.
- Procedimientos de margen.
- Facilitar al vencimiento la entrega del bien subyacente, o su equivalente.
- Resolver disputas entre las partes.
- Libre acceso al mercado.

- Transparencia en las negociaciones.
- Actuar como intermediario entre el comprador y el vendedor del futuro.
- Posee la autoridad legal para actuar como contraparte, (vendedor o comprador), para cumplir el contrato satisfactoriamente, eliminando así el riesgo crediticio.

FORWARDS:

Los forwards o contratos anticipados son un acuerdo entre dos partes, donde una de ellas se compromete a vender el bien subyacente, en una fecha futura específica, a un precio determinado, mientras que la otra parte se compromete a comprar el bien subyacente en la fecha fijada y en el precio acordado.

El establecimiento de un contrato anticipado no tiene costo para ninguna de las partes, pero se debe de establecer un precio de entrega o precio forward, del bien subyacente que hará que el valor del contrato sea cero. Éste precio es fijo y su variación depende del precio del bien subyacente al cual esté sujeto el contrato forward, así como a la oferta y la demanda de dichos contratos.

Los forwards se comercializan fuera de una bolsa establecida, es decir en un mercado extrabursátil llamado *Over the Counter*, y por lo regular estas negociaciones se realizan entre bancos y clientes corporativos que se conocen entre sí.
En contraste con los demás productos derivados, los forwards terminan con la entrega física del activo subyacente; y con esto, el riesgo de crédito radica en el incumplimiento de alguna de las partes del contrato.

La parte que asume una posición de compra o posición larga tiene una pérdida limitada, es decir tiene una cota inferior, mientras que la parte que asume una posición de venta o posición corta tiene una cota superior, es decir un nivel de ganancias delimitado.

Los forwards tienen dos tipos basicos para su comercialización:

FORWARDS DE DIVISAS:

Esta clase de forwards son utilizados para protegerse de movimientos negativos no anticipados del tipo de cambio de alguna divisa, y para especular con la misma; estableciendo ahora la cantidad y el precio de una transacción de divisas, (compra/venta de divisas), que se efectuará en el futuro.

FORWARDS DE TASAS DE INTERÉS:

Los contratos adelantados de tasas de interés o *forward rate agreements* (FRAs), son instrumentos que se utilizan para cubrir riesgos de movimientos adversos de una tasa de interés internacional; es decir sirven para compensar en efectivo las pérdidas ocasionadas por dichos movimientos. Dentro del contrato FRAs, se debe de especificar los siguientes puntos:

- Interés de referencia sobre el que se esperan movimientos negativos al capital del participante.
- Interés pactado que compesará las fluctuaciones negativas (si existen), del capital del contratante.
- Principal nocional o cantidad sobre la cual se calculará las fluctuaciones de las tasas de interés.

En base a las secciones anteriores, podemos observar que un contrato a futuro es muy parecido a un contrato forward, por esa razón se muestra el siguiente cuadro de las diferencias entre estos contratos:

CONCEPTO	FUTUROS	FORWARDS
NEGOCIACIÓN.	Dentro de una bolsa.	Fuera de una bolsa.
TAMAÑO.	Tienen un tamaño preestablecido por la bolsa.	Al estar fuera de una bolsa, se puede pactar cualquier tamaño de venta del bien subyacente.
VENCIMIENTO.	Se establece un periodo de entrega del bien.	Tiene una fecha exacta de entrega del bien.
DETERMINACIÓN DE LA FECHA DE ENTREGA.	La parte que asume la posición corta o posición de venta tiene el derecho de elegir la fecha exacta dentro del periodo de entrega al vencimiento.	Ambas partes acuerdan la fecha más conveniente.
CALIDAD.	Los estándares de calidad son establecidos por cada bolsa.	La calidad se establece por los contratantes.
RIESGO.	El riesgo es minimizado por la existencia de la cámara de compensación, así como de la cuenta de margen y los depósitos de garantía.	Como la negociación es directa, el riesgo aumenta y depende del incumplimiento de alguna de los contratantes.
CONTRATANTES	No se conocen, por la existencia de intermediarios bursátiles.	Generalmente se conocen.

Cuadro I.2 Diferencias entre futuros y forwards.

SWAPS

Un swap es un contrato por el cual dos partes se comprometen a intercambiar una serie de flujos de efectivo, (dinero) en una fecha futura. Los flujos en cuestión pueden estar en función de casi cualquier bien subyacente.

Los swaps han brotado como una herramienta de administración del riesgo con divisas, y un instrumento flexible de tasas de interés, que pueden utilizar bancos, sociedades constructoras, instituciones de préstamo y ahorro, compañías aseguradoras en los fondos de pensión, así como personas físicas. Se usan para disminuir costos de financiamiento, crear instrumentos sintéticos y cubrir riesgos cambiarios y por supuesto de tasas de interés. Los préstamos en paralelo fue el concepto básico para la aparición de los swaps de divisas, ampliando después el uso a tasas de interés.

Los swaps no son comercializados en un mercado bursátil, sino en el mercado interbancario; los principales mercados se encuentran en New York y Londres.

El precio de un swap está determinado por los siguientes cuatro componentes:

1. Un precio de referencia.
2. La oferta y demanda de los instrumentos de cobertura de los swaps, (bonos y futuros).
3. Costos de transacción, (cuotas de origen y costos de financiamiento).
4. Riesgo del crédito, (la probabilidad de incumplimiento de la contraparte).

Dentro del Mercado de Productos Derivados, existen dos tipos básicas de los contratos de swaps:

SWAPS DE TASAS DE INTERÉS:

Establece un precio teórico y determina el valor actual neto de los flujos de efectivo, el valor teórico del que se parte es un swap a la par si se negocia a su tasa de cupón.

La tasa interna de retorno (TIR) de los flujos de efectivo representa el costo neto del crédito, es difícil asignar la tasa de descuento, pero se puede elegir entre la tasa vigente del mercado de swaps y las tasas de cupón cero del mismo mercado, considerando que cada pago en efectivo se comporta como un bono de cupón cero.

SWAPS DE DIVISAS:

Estos swaps se utilizan para manejar el riesgo de cambio de monedas extranjeras a largo plazo y el de tasas de interés; implicando un intercambio de capital en la fecha de inicio y un reintercambio del mismo en la fecha de vencimiento, el capital intercambiado está determinado por el precio de mercado o precio spot, que también se utiliza como referencia al vencimiento.

Los swaps de divisas surgen en base a los préstamos en paralelo, y evolucionando de manera importante por el afán de los bancos de evitar la reglamentación impuesta por los bancos centrales para dichos préstamos, y buscando al mismo tiempo que bajaran los costos de financiamiento para los usuarios corporativos y para los mismos bancos.

La cobertura para este tipo de swaps es costosa y difícil pues depende ampliamente de la divisa bajo la cual se esté contratando el swap.

Existen tres estructuras de manejo básicas para swaps de divisas:

- " FIJA A FIJA".- La motivación de esta estructura es lograr que cada contraparte tenga acceso a fondos baratos en países diferentes, siendo la finalidad del swap la transformación de los pagos de la divisa en cuestión; es decir que la empresa A pagará los costos del crédito de la empresa B y viceversa. Por ejemplo, al inicio del contrato la empresa A vende marcos alemanes y compra francos franceses, mientras que la empresa B vende francos franceses y compra marcos alemanes; durante la vigencia, la empresa A paga los intereses generados por empresa B y viceversa, al vencimiento la empresa A vende francos franceses y compra marcos alemanes, mientras que la empresa B vende marcos alemanes y compra francos franceses. Amortizando de esta manera las emisiones de cada empresa.
- " FLOTANTE A FLOTANTE".- Ésta estructura es una alternativa al mercado de cambio de monedas, la ventaja radica en que cada contraparte adquiere un compromiso a largo plazo equivalente a un contrato en efectivo de cambio de moneda extranjera a futuro con respecto a un periodo acordado.
- " FLOTANTE A FIJA".- Dentro de este contrato, se intercambia un flujo de pagos y de capital a una tasa fija por uno a tasa flotante. Los pagos tienen una periodicidad sobre un capital establecido en una divisa determinada, para pagar los intereses. En la práctica, si la periodicidad de los contratantes coincide, entonces se efectúa un pago compensatorio del diferencial de las tasas, y es efectuado por la contraparte que pague la tasa más alta; por ejemplo, la empresa A y la empresa B tienen un convenio de este tipo, donde la empresa A está comprometiéndose a pagar una tasa fija y consecuentemente recibe una tasa flotante, mientras que la empresa B está obligada a pagar una tasa flotante y a recibir una tasa fija; si en el vigencia del swap la tasa más alta fue la flotante, entonces la empresa B efectúa el pago compensatorio y viceversa.

MERCADOS INTERNACIONALES DE PRODUCTOS DERIVADOS:

La siguiente lista es de los mercados de futuros y opciones que dan a conocer sus cotizaciones a través de las páginas del periódico *Wall Street Journal.*

- CBOT Chicago Board of Trade.
- CME Chicago Mercantil Exchange.
- CSCE Coffee, Sugar & Cocoa Exchange, New York.
- CMX-COMEX División del New York Mercantil Exchange.
- CTN New York Cotton Exchange.
- FINEX Financial Exchange, División del New York Cotton Exchange.
- IPE International Petroleum Exchange.

- KC Kansas City Board of Trade.
- LIFFE London International Financial Futures Exchange.
- MATIF Marche a Terme International International de Francia.
- ME Montreal Exchange.
- MCE MidAmerica Commodity Exchange.
- MPLS Minneapolis Grain Exchange.
- NYFE New York Futures Exchange, División del New York Cotton Exchange.
- NYMEX New York Mercantil Exchange.
- SFE Sydney Futures Exchange.
- TFE Toronto Futures Exchange.
- WPG Winnipeg Commodity Exchange.

MÉXICO Y LOS PRODUCTOS DERIVADOS:

En 1985 las autoridades mexicanas, a causa de la situación económica del país, imponen restricciones sobre las liquidaciones del peso en el extranjero, propiciando que las cotizaciones del tipo de cambio en los mercados de Chicago, aunado a esto, la economía cerrada de nuestro país no permitía la libre fluctuación del tipo de cambio, ya que existían restricciones al respecto, en consecuencia, la eficiencia del mercado resultaba dudosa y por lo tanto poco atractiva para los participantes del mismo.

Dada la apertura de la economía mexicana y del tratado de libre comercio con Canadá y Estados Unidos (TLC), a demás de un mercado en crecimiento como marco en 1995, se inician los planes para la reapertura del mercado de futuros del peso en la Bolsa Mercantil de Chicago (CME), que serviría también para contribuir a la estabilización del tipo de cambio peso-dólar; como parte de los preparativos, Banco de México autorizó formalmente, el 10 de abril de 1995, a Banamex, Banco Mercantil del Norte, Banca Mifel y Banco Inbursa a ejercer la función de intermediario de compraventa de futuros y opciones sobre el dólar, al mismo tiempo que se autorizaba a Banca Serfín, Banamex, Banco Mexicano, Banco del Centro, Multivalores Casa de Bolsa, y Operadora de Bolsa como intermediarios de los contratos de futuros sobre tasas de interés nominales y sobre el Índice Nacional de Precios al Consumidor (IPC); todas las instituciones mencionadas anteriormente cumplieron los requisitos de la circular-telefax 21/95 emitida por Banco de México, dicha autorización fue por seis meses con posibilidad de renovación semestral a criterio del mismo, lógicamente, las instituciones financieras que hayan recibido apoyo del Fondo Bancario de Protección al Ahorro, (FOBAPROBA), no podrán participar en el mercado. Las garantías de los bancos autorizados podrán ser títulos bancarios o derechos derivados de instrumentos de captación bancaria.

OPCIONES

Capítulo II

OPCIONES

INTRODUCCIÓN:

Las **Opciones** son contratos que nos permiten tener el derecho, mas no la obligación de comprar o vender un bien subyacente a un precio determinado, en una fecha específica.

Existen opciones sobre los siguientes bienes subyacentes:

- Acciones.
- Bienes de consumo.
- Divisas.
- Futuros.
- Índices.
- Tasas de interés.

Existen dos clases de opciones de acuerdo a las operaciones que se pueden realizar con ellas:

- Opciones de compra (call).
- Opciones de venta (put).

Si el tenedor del contrato usa la opción para comprar o vender el activo subyacente[1], se dice que ha ejercido la opción. Cuando la opción no es sobre un activo subyacente, el derecho que concede no es el de comprar o de vender, sino simplemente el derecho a efectuar una transacción determinada a un periodo de tiempo dado; por otro lado, las opciones sobre índices, dan al comprador el derecho de recibir una cantidad de dinero específica sí llega a ocurrir una serie de circunstancias determinadas.

Además, existen dos tipos de opciones de acuerdo al momento en que son ejercidas: americanas y europeas. Por otro lado, existe una colección de opciones que han sido creadas para cubrir riesgos muy específicos y que son llamadas "opciones exóticas", y de las cuales se hablará un poco mas adelante.

Las opciones se comercían en bolsas organizadas (mercado bursátil), como las siguientes:

- Chicago Board Options Exchange (CBOE).
- Philadelphia Stock Exchange (PHLX).
- American Stock Exchange (AMEX).
- Pacific Stock Exchange (PSE).
- New York Stock Exchange (NYSE).

(1) se hace la diferencia entre bien y activo subyacente, ya que no todos los bienes subyacentes se pueden vender.

Siendo las más bursátiles las opciones de IBM, Kodak y General Motors, negociándo en lotes de 100. También existen negociaciones en "mostrador" (mercado extrabursátil), es decir, entre un banco o corredor y su cliente, en donde cada opción es diseñada de acuerdo a las especificaciones que cada cliente requiere para una operación específica.

La mayoría de las opciones se comercian con operadores norteamericanos, pero también existen mercados organizados de opciones en el resto del mundo, como por ejemplo:

- Amsterdam (European Options Exchange EOE).
- Frankfurt (Deutsche Terminbörse DTB).
- Londres (London Traded Options Market LTOM).
- París (Marché à Options Négociables MOFET).
- Tokio (Tokio Stock Exchange TYO).

Al igual que las acciones, las opciones también cuentan con un índice que muestra las fluctuaciones promedio que se realizan en los mercados bursátiles mencionados anteriormente, ejemplos de dichos índices son los siguientes:

- S & P100 .- Es la ponderación de 100 opciones americanas más importantes de la bolsa (búrsatiles).
- S & P500 .- Refleja los cambios promedio de las 500 opciones europeas que se comercian en bolsa.

Estos índices se manejan en el Chicago Board Options Exchange (CBOE) y son muy importantes por el volumen de las negaciaciones de las bolsas al día.

Las opciones se utilizan para especular y estructurar coberturas más adecuadas utilizando su flexibilidad y fácil manejo para administrar riesgos tanto de activos como de pasivos. El inversionista puede asumir dos papeles, emisor de la opción o tenedor de la misma. En cuanto a las operaciones que se pueden realizar con las opciones, se dice que se pueden adoptar las siguientes posiciones:

- Posición Corta, que es una posición de venta del bien subyacente.
- Posición Larga, que es una posición de compra del bien subyacente.

Si se combinan las posiciones que se pueden adoptar con el tipo de inversionista , y respecto a los tipos de opciones que existen, se obtiene el siguiente cuadro:

	EMISOR (posición corta)	TENEDOR (posición larga)
OPCIÓN CALL	Adquiere la obligación de vender el activo.	Adquiere el derecho de comprar el activo.
OPCIÓN PUT	Adquiere la obligación de comprar el activo.	Adquiere el derecho de vender el activo.

Cuadro II.1: Posiciones & tipos de Opciones.

Los vendedores de opciones en bolsa, deben de constituir una *cuenta de margen* para respaldar las operaciones de dichas opciones, análogamente, los vendedores de opciones en el mercado extrabursátil deben de contar con calificaciones crediticias muy altas y a pesar de que sean respaldados por su excelente crédito, a veces se les exige constituir depósitos de buena fe.

HISTORIA:

En 1968, en el Chicago Board of Trade (más conocido por sus contratos a futuro), se exploró la posibilidad de ofrecer contratos de futuros sobre acciones, pero después de realizarlo, las sorpresivas recomendaciones fueron para las opciones, surgiendo así en 1972, el Chicago Board Option Exchange (CBOE), y en abril de 1973, comenzó la comercialización de opciones sobre acciones del New York Stock Exchange (NYSE) (16 opciones tipo Call), en 1975, se adhirieron cuatro importantes bolsas de Estados Unidos: Amex, Philadelphia, Pacific y Mid West, en 1977, comenzó la negociación con opciones tipo put, para 1978, el CBOE, negociaba diariamente 10 000 contratos de acciones.

Hoy en día, en el Wall Street Journal, se publican las cotizaciones de las 200 opciones sobre acciones del CBOE, de opciones sobre el S&P 100 Stock Index (las 100 acciones más cotizadas del NYSE mejor conocidas como "blue chips"), y opciones sobre bonos de la tesorería de Estados Unidos, donde el promedio diario de comercialización es de 500 000 contratos.

Las opciones sobre divisas comercializadas en bolsa aparecieron después de las opciones sobre futuros de T-Bonds, y antes de las de futuros de eurodólares en el Philadelphia Stock Exchange (PHLX). Esta bolsa negocia con opciones sobre las ocho divisas más importantes en el mercado de cambios interbancario de Estados Unidos, que son:

- Yen.
- Marco alemán.
- Libra esterlina.
- Franco suizo.
- Franco francés.
- Dólar canadiense.
- Dólar australiano.
- European Currency Unit (ECU).

Esta última se cotiza en términos del dólar estadounidense. Los participantes más activos de las operaciones sobre divisas en el PHLX son especuladores, bancos y todo tipo de empresa con exposición a riesgos cambiarios; entre los participantes más destacados se encuentran los principales bancos de Estados Unidos, Canadá, Europa y Japón, y empresas como Kodak, British Petroleum y Walt Disney. El éxito de las operaciones con opciones de divisas obligó al PHLX en 1989 a ampliar el horario de transacciones a dieciocho horas y media al día para permitir el acceso a participantes europeos y del lejano oriente.

Después de iniciadas las transacciones de divisas en el PHLX, comenzaron las negociaciones sobre opciones de contratos de divisas en el International Monetary Market del Chicago Mercantil Exchange; las opciones de mas éxito fueron las del marco alemán (enero de 1984), y del yen japonés (marzo de 1986).

El mercado extrabursátil de opciones de tasas de interés y de divisas se desarrolló en la década de los ochenta. Al mismo tiempo que se desarrolla el de opciones bursátiles, este tipo de opciones se comercializan en los principales mercados internacionales, ya sea entre dichos intermediarios o por medio de clientes internacionales; pese a que este tipo de opciones constituyen riesgos crediticios de parte a parte y no son tan líquidas como las bursátiles, tienen otros atractivos: su estructura se adecua a las necesidades específicas del cliente, pero uno de sus inconvenientes es que no están disponibles para pequeñas empresas o para personas físicas pues la cantidad mínima para su operación es de un millón de dólares estadounidenses o más.

Los mercados extrabursátiles de opciones de divisas y de instrumentos de deuda han complementado a los mercados de opciones en bolsa; pues, por un lado están las opciones bursátiles estandarizadas y diseñadas con el objetivo de tener liquidez, mientras que por otro lado se encuentran las opciones extrabursátiles que se adecuan a las necesidades de cada cliente, es decir, estos mercados satisfacen distintas necesidades de diferentes participantes.

En la década de los ochenta, aparecieron algunos productos para la cobertura de tasas de interés y tipos de cambio, ofrecidos por bancos norteamericanos, tales como los *ceillins* (techos), *floors* (pisos), y *collars* (collares), que no son otra cosa más que "paquetes" de opciones extrabursátiles. Poco después, hacia mediados de los ochenta, se comenzó la oferta de "swapciones", las cuales son "swaps" con características de opciones; a toda ésta gama de opciones se les llama "opciones exóticas".

CONTRATO:

Para cada contrato de una opción, se deben especificar los siguientes puntos:

- El nombre del bien subyacente.
- El monto del bien subyacente.
- El precio al cual se puede ejercer la opción, (precio de ejercicio).
- El vencimiento del contrato.

A diferencia de los futuros o de los forwards, los contratos de opciones si tienen un valor (prima), que es el precio de recibir a cambio el riesgo que se corre, y existe toda una técnica para asignársela, la cual se analizará en los suguientes capítulos.

PARTICIPANTES DEL MERCADO DE OPCIONES:

Los inversionistas que son atraídos por el Mercado de Opciones, se pueden clasificar dentro de tres categorías esencialmente, en base a las motivaciones que los guían en este mercado.

Administradores del Riesgo:

Un administrador del riesgo compra o vende opciones para así cubrirse de una posición particular o bien adopta una posición determinada para así compensar las pérdidas obtenidas en el mercado accionario.

Este tipo de participantes suelen ser, por lo regular, bancos comerciales, bancos de inversión, corredores de valores, bancos centrales, compañías de seguros y organismos gubernamentales, así como personas físicas; aunque existen los corredores de opciones extrabursátiles que cubren sus posiciones con opciones de bolsa.

Tómese un ejemplo: Una empresa tiene cuentas por pagar en marcos alemanes a seis meses, corre el riesgo de un alza en la cotización de USD/DM, para cubrir este riesgo, la empresa puede comprar una opción call a seis meses sobre el monto total de las cuentas por pagar y así asegurar un tipo de cambio que le permita planear a largo plazo. Análogamente, podría proceder si se tratara de cuentas por cobrar y la exposición al riesgo fuera de la caída de la paridad USD/DM, la opción a comprar sería una put sobre el mismo monto.

Especuladores:

Los participantes del mercado que compran y venden opciones para contraer riesgos y por medio estrategias sobre negociaciones del precio del bien subyacente obtener ganancias significativas, son llamados especuladores.

Supóngase que un especulador compra opciones call sobre el precio de una acción, la cual tiene un precio spot de $28, siendo el costo de la opción $1 y el precio de ejercicio de $30, con vencimiento a tres meses. El especulador ha estimado que el precio de la acción subirá; si sus estimaciones fueran acertadas y al vencimiento el valor de la acción fuera de $34, se tendría una utilidad de $3 por acción; es decir del 300%; por otro lado si se hubiera ejercido la opción y vendido las acciones directamente, la utilidad sería de $6 por acción; es decir 21% aproximadamente. Por lo tanto, los rendimientos obtenidos por un especulador alcanzan niveles mayores que los de un participante del mercado que se dedica a comprar y vender el bien subyacente de manera directa.

Dentro de los especuladores se podría considerar a los arbitradores, que son los participantes que obtienen ganancias al hacer operaciones simultáneas en dos o más mercados; la misma naturaleza del arbitraje hace que desaparezca con el tiempo; por ejemplo, supóngase que el precio de un opción en Nueva York es de $172 y en Londres es de £100, y que el tipo de cambio es de $1.75 x £1, entonces lo más razonable sería comprar en Nueva York y vender en Londres, pero entre más participantes se den cuenta de esto, los precios de las opciones se irán nivelando y las oportunidades de arbitraje desaparecerán. Otra manera de entender el arbitraje es cuando el participante aprovecha las condiciones del mercado para obtener ganancias sin riesgo.

Intermediarios:

Los intermediarios o corredores del mercado de opciones se dividen en dos categorías:

- Corredores del Mercado Bursátil: Este tipo de corredores trabaja sobre opciones que se comercializan dentro de una bolsa bien establecida y reciben ordenes de clientes para comprar y vender opciones, y a cambio de su labor reciben una comisión; estos corredores también pueden actuar por sí solos.

- Corredores del Mercado Extrabursátil.- Los intermediarios de esta clase, comercializan las opciones del mercado extrabursátil, para lo cual requieren de grandes conocimientos para asignar el precio adecuado a cada opción y lograr que las negociaciones sean tanto de compra como de venta. Por lo regular se trata de bancos y sociedades de inversión; las cuales requieren un análisis crediticio profundo de cada cliente para lograr un control mínimo del riesgo de la negociación.

TIPOS DE OPCIONES:

Tomando en cuenta el momento en que se ejerce la opción se derivan dos tipos esenciales de ellas, y aunque su nombre pueda implicar confusiones, no tiene nada que ver con la región en la cual se comercializan.

- OPCIONES AMERICANAS: Son aquellas opciones que pueden ser ejercidas en cualquier momento de su vigencia, es decir, en cualquier momento anterior a su vencimiento.

- OPCIONES EUROPEAS: Estas opciones únicamente, se pueden ejercer hasta que se cumpla la fecha de su vencimiento.

Una gran ironía es observar que las opciones más populares en los mercados europeos son las opciones americanas.

UTILIDAD:

Como casi todos los instrumentos financieros, las opciones generan utilidades para sus contratantes y es importante conocer la forma de obtenerla antes de mencionar su clasificación, ya que se utilizará en esa parte; independientemente de la posición que asuma el inversionista, se calcula de la siguiente manera:

UTILIDAD = PRECIO SPOT - (PRECIO DEL EJERCICIO + PRECIO DE LA OPCIÓN)

Clasificación :

Opciones de Compra (*CALL*):

La opción de compra (opción call), da al tenedor del contrato el derecho, más no la obligación de comprar un bien subyacente en una fecha determinada a un precio determinado (precio de ejercicio de la opción que se denota como K).

Observaciones:

- El derecho de compra se obtiene a cambio de una prima o valor de la opción.
- El tenedor de la opción tiene el derecho de ejercer la opción y comprar el bien subyacente al precio de ejercicio.
- El emisor de la opción tiene la obligación de vender el bien subyacente al precio de ejercicio.
- Se compra una opción call si se espera que el precio del bien aumente.

Posición Corta:

La posición corta de una opción call compra el derecho de comprar un bien subyacente en una fecha determinada al precio de ejercicio, pagando una prima que representa el valor de la opción; es decir, ésta es la posición que asume el tenedor de la opción.

Posición Larga:

La posición larga de una opción call vende el derecho de comprar un bien subyacente en una fecha determinada al precio de ejercicio, recibiendo la prima que representa el valor de la opción; es decir, ésta es la posición que asume el emisor de la opción.

Ejemplo:

Para las posiciones que se pueden asumir en una opción call se utilizarán los datos del siguiente ejemplo:

" Se propone un contrato de 100 opciones call sobre las aciones de IBM con un vencimiento a tres meses, el precio de ejercicio (K) es de \$140 y el costo por cada opción es de \$5; es decir el valor de todo el contrato es de \$500 "

La combinación de las posiciones existentes del ejemplo anterior en una opción call, se resume en el siguiente cuadro que representa las situaciones posibles al vencimiento del contrato:

Precio de mercado (Spot) al vencimiento	Acción del Tenedor de la opción	Utilidad o perdida del tenedor de la opción.	Acción del Emisor de la opción.	Utilidad o perdida del emisor de la opción
$ IBM < $140	No ejerce la opción.	Perdida: $5 (prima).	Recibe la prima por el contrato.	Utilidad: $5 (prima).
$140 ≤ $ IBM < $145	No ejerce la opción.	Perdida: ($0, $5)	Recibe la prima por el contrato.	Utilidad: $5 (prima).
$ 145 = $ IBM	Existe un punto de equilibrio; es decir da lo mismo ejercer o no la opción, pues no existen ni utilidades ni perdidas.		Recibe la prima por el contrato.	Utilidad: $5 (prima).
$ IBM > $145	Ejerce la opción	Utilidad: ($0, ∞)	Está obligado a vender el bien subyacente al precio spot.	Perdida: $140 + $5 - $ IBM.

Cuadro II.2: Posibles situaciones de una opción call.

La información que el cuadro proporciona se puede observar en las gráficas posteriores, donde el eje Y, muestra las utilidades o perdidas netas resultantes del precio del bien subyacente al vencimiento; mientras que el eje X, muestra los valores posibles del precio spot o precio de mercado del bien subyacente al vencimiento.

La siguiente gráfica muestra el perfil de ganancias (para el tenedor), o perfil de riesgo (para el emisor), de una posición corta de una opción call:

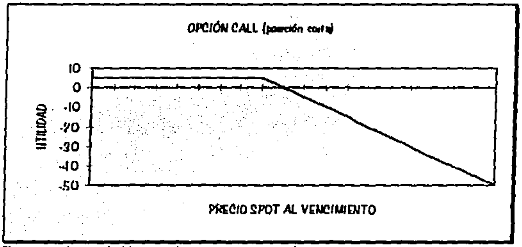


Figura II.1: Posición Corta de una opción call.

La gráfica muestra que el emisor de una opción call tiene ganancias acotadas y conocidas, mientras que corre el riesgo que se presenten condiciones de mercado que lo enfrenten a perdidas catastróficas.

La siguiente gráfica muestra el perfil de ganancias (para el tenedor), o perfil de riesgo (para el emisor), de una posición larga de una opción call:

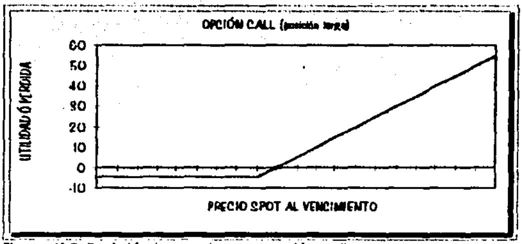


Figura II.2: Posición Larga de una opción call.

La gráfica muestra que para el tenedor de la opción call tiene una posibilidad acotada de perdida y un potencial de ganancias atractivamente desconocidas que propician la contratación de la opción.

OPCIONES DE VENTA (*PUT*):

La opción de venta (opción put), da al tenedor del contrato el derecho, más no la obligación de vender un bien subyacente en una fecha determinada a un precio determinado (precio de ejercicio de la opción k).

Observaciones:

- El derecho de venta se obtiene a cambio de una prima o valor de la opción.
- El tenedor de la opción tiene el derecho de ejercer la opción y vender el bien subyacente al precio de ejercicio.
- El emisor de la opción tiene la obligación de comprar el bien subyacente al precio de ejercicio.
- Se compra una opción put si se espera que el precio del bien disminuya.

Posición Corta:

La posición corta de una opción put vende el derecho de vender un bien subyacente en una fecha determinada al precio de ejercicio, pagando una prima que representa el valor de la opción; es decir, ésta es la posición que asume el tenedor de la opción.

Posición Larga:

La posición larga de una opción put vende el derecho de comprar un bien subyacente en una fecha determinada al precio de ejercicio, recibiendo la prima que representa el valor de la opción; es decir, ésta es la posición que asume el emisor de la opción.

Ejemplo:

Para las posiciones que se pueden asumir en una opción put se utilizarán los datos del siguiente ejemplo:

" Se propone un contrato de 100 opciones put sobre las aciones de EXXON con un vencimiento a seis meses, el precio de ejercicio (K) es de $90 y el costo por cada opción es de $3; es decir el valor de todo el contrato es de $300 "

Las posiciones que se pueden asumir y los diferentes situaciones que se podrían presentar al vencimiento del contrato de la opción put del ejemplo, se resume en el siguiente cuadro:

Precio de mercado (Spot) al vencimiento	Acción del Tenedor de la opción	Utilidad o perdida del tenedor de la opción.	Acción del Emisor de la opción.	Utilidad o perdida del emisor de la opción
$ EXXON > $90	No ejerce la opción.	Pérdida: $3, (prima)	Recibe la prima por el contrato.	Utilidad: $3
$90 ≤ $ EXXON < $87	No ejerce la opción.	Pérdida: ($0, $3)	Recibe la prima por el contrato.	Utilidad: $3
$87 = $ EXXON	Existe un punto de equilibrio; es decir da lo mismo ejercer o no la opción, pues no existen ni utilidades ni perdidas.		Recibe la prima por el contrato.	Utilidad: $3 (prima).
$87 > $ EXXON	Ejerce la opción	Utilidad: ($0,∞)	Está obligado a vender el bien subyacente al precio spot.	Perdida: $EXXON - $90 + $3

Cuadro II.3: Posibles situaciones de una opción put.

Análogamente a la opción call, con la información del cuadro anterior se aprecia mejor en las gráficas siguientes, donde las utilidades o perdidas netas resultantes del precio del bien subyacente al vencimiento se representan en el eje Y; mientras que el eje X, muestra los valores posibles del precio spot o precio de mercado del bien subyacente al vencimiento del contrato.

La gráfica ilustrativa del ejemplo para el tenedor de la opción put (emisor), es la siguiente:

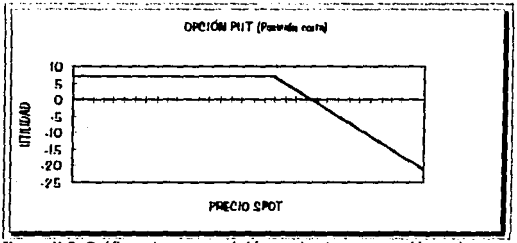


Figura II.3: Gráfica de una posición corta de una opción put.

Como se muestra en la gráfica, el vendedor de la opción put, tiene utilidades acotadas y por el contrario, tiene un potencial desconocido e ilimitado de pérdidas.

La siguiente gráfica muestra el perfil de ganancias para el tenedor de la opción put, (posición larga):

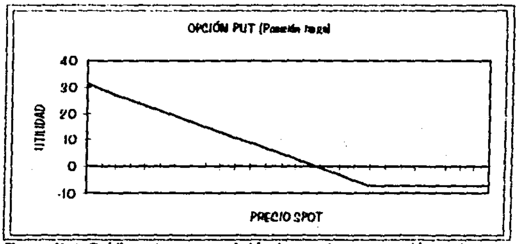


Figura II.4: Gráfica de una posición larga de una opción put.

El comprador de una opción put tiene un riesgo conocido y limitado de pérdida y una posibilidad atractiva, desconocida e ilimitada de ganancias.

Paridad Put/Call:

La paridad Put/Call es una simetría sencilla del precio de las opciones europeas que se pueden utilizar para definir arbitrajes.

De manera general, la paridad Put/Call expresa la relación que existe entre la posición larga y corta en los mercados de opciones y las posiciones larga y corta en el bien subyacente: cuando el precio de ejercicio de las opciones son iguales al precio de mercado del bien subyacente tenemos la siguiente relación:

POSICIÓN LARGA EN OPCIÓN CALL + POSICIÓN CORTA EN OPCIÓN PUT = POSICIÓN LARGA EN EL BIEN SUBYACENTE

Es decir, si las primas de las opciones son tales que dichas posiciones no son equivalentes, entonces existen oportunidades de arbitraje (ganancias sin riesgo).

En la práctica, las primas de las opciones put y call sobre un mismo bien subyacente, al mismo plazo y por la misma cantidad del bien, no siempre tienen una prima idéntica, pues depende de las estimaciones que se hayan hecho de cada operación de la opción y a las fluctuaciones del mercado.

Para detallar ésta particularidad se presenta el siguiente ejemplo:

" Supóngase que se tiene una opción put europea a un año con un precio strike de \$120, el valor de la opción es \$17, el precio spot del bien subyacente es de \$100, la tasa de interés es del 10%, ¿Cuál sería el precio de un call europeo con las mismas características? "

Para calcular el precio se supone que se forma la siguiente cartera:

1 opción put a \$120	costo: \$17 (hoy).
1 unidad del bien subyacente	costo: \$100 (hoy).
\$117 al 10% como préstamo	costo: + \$117 (hoy) y -\$128.7 (en un año)
-1 opción call a \$120	prima: X

La cartera no tiene riesgo, pues el put más la unidad del bien subyacente y el préstamo que los financia, se comporta de manera inversamente proporcional a un call a \$120, que aún no valoramos, pero que sirve para anular el riesgo.

Se tienen las siguientes posibilidades:

- Si el precio del bien subyacente acaba por encima de 120 UM al transcurrir el año, entonces, por cada unidad monetaria (UM) se pierde si el call es ejercido contra el poseedor, pero se gana uno en la unidad del bien subyacente que se compra; mientras el put no se ejerce y se ganaría por lo menos 20 UM al subir de 100 UM a 120 UM, pero el financiamiento de la posición habrá costado 11.70 UM, entonces, el beneficio neto es de 20 - 11.70 = 8.30 UM.

- Si el precio del bien subyacente acaba por debajo de 120 UM, el call vence y no es ejercido mientras que el put a 120 UM compensa las pérdidas a causa de la compra de una unidad del bien subyacente, la ganancia en este caso es de 20 UM y se preserva el costo del financiamiento de 11.70 UM; es decir que el beneficio dentro de un año es nuevamente de 8.30 UM.

Se observa que la opción put más el bien subyacente y el préstamo son equivalentes al call en cuanto al riesgo de movimientos del precio del bien subyacente, entonces se puede definir el beneficio neto (utilidades) como los mismos que se obtienen en una opción call, por lo tanto el valor X de la opción call es el valor presente de dichos beneficios, es decir el valor presente de 8.30 UM = 7.55 UM; una buena alternativa sería establecer un contrato Forward sobre el precio del bien subyacente para establecer así un precio adelantado del bien subyacente convenientemente determinado.

Entonces se puede expresar la paridad Put/Call de la siguiente manera:

PRIMA DE LA OPCIÓN CALL EUROPEA - PRIMA DE LA OPCIÓN PUT EUROPEA = VALOR PRESENTE (PRECIO ADELANTADO DEL BIEN SUBYACENTE - PRECIO DE EJERCICIO)

Sipóngase otro ejemplo para este resultado:

"Una opción put y call a tres meses, sobre marcos alemanes con un precio de ejercicio de .48 USD/DM, las cotizaciones de un contrato adelantado (Forward) de marcos alemanes a tres meses a .51 USD/DM, si la opción call tiene un valor de 0.04 USD/DM, y la tasa de interés a tres meses en dólares es de 10%."

Entonces el valor de la opción put sería:

prima de la opción put europea = 0.04 USD/DM - [(.51-.48) ÷ (1+.10 x (90/360))]

prima de la opción europea = .0111 USD/DM

Se pude observar que la prima de la opción put es más baja que la prima de la opción call, y esto es porque la opción call está *in-the-money* y la de la opción put está *out-of-the-money* con respecto a la cotización de marcos alemanes adelantados.

Otra observación con respecto a la paridad Put/Call, es que las opciones put pueden convertirse en opciones call al combinarlas con una posición en el bien subyacente; por ejemplo: una opción call larga combinada con una posición larga en un Forward del bien subyacente equivale a una posición larga en una opción put, es decir que se encuentra una forma más de disminuir riesgos y cubrir posiciones por medio de opciones y forward's de un mismo bien subyacente, a esta estrategia se le llama reversión y su forma análoga es la de conversión, que transforma una posición larga put europea a una posición larga call europea.

MARGEN :

El sistema de margen que se utiliza en la mayoría de las bolsas donde se comercializan opciones es el *Premium Paid Options*, y el vendedor de la opción es el único que debe de cumplir con tenerlo, mientras que el comprador de la opción sólo debe de cubrir la prima o precio de la opción.

El Margen es un fondo que garantiza el cumplimiento de los derechos adquiridos por las operaciones realizadas por el comprador de la opción, es requerido por los corredores para establecer así una *cuenta de margen.*

Para instituir la *cuenta de margen* se necesita un *margen inicial* que es fijado por la bolsa, pero que el corredor puede modificar pidiendo márgenes más altos, pero nunca menores, de acuerdo al tipo de comprador de opciones con quien se trate; ya establecido el *margen inicial* se fija un *margen de mantenimiento*, que por lo regular es del 75% del *margen inicial*, cuando el saldo en la *cuenta de margen* es menor al *margen de mantenimiento*, se hace una *llamada de margen* para que por medio de un depósito se restablezca el *margen inicial.*

Si el comprador de la opción no restablece la *cuenta de margen*, entonces el corredor tiene facultades para cerrar la posición y el comprador pierde así sus derechos.

En el *margen inicial* se pueden hacer depósitos de valores como bonos gubernamentales y algunas acciones, pero los depósitos realizados a causa de una *llamada de margen*, deben de realizarse en efectivo.

El *margen inicial* varía de acuerdo al tipo de comprador; si el éste es un especulador y por lo tanto es atraído por el riesgo, entonces el *margen inicial* tiende a ser más grande; en cambio, si el objetivo de la compra es buscar cobertura, entonces el *margen inicial* es menor al que pretende especuladar con la opción; por otro lado, el comportamiento y la antigüedad del comprador dentro de la bolsa también son determinantes para establecer el monto del *margen inicial.* Otro factor influyente es la volatilidad del precio del bien subyacente sobre el cual se basa el contrato de la opción, pues entre más fluctúe, más grande será el monto y viceversa.

RIESGO DE CRÉDITO DE UNA OPCIÓN :

Existe riesgo de crédito en una opción cuando se presenta la posibilidad de que alguna parte deba algo en el futuro como consecuencia de la misma; es decir, al comprar una opción existe la posibilidad de obtener una deuda si ésta es ejercida. Podemos observar que si se vende una opción y la prima ha sido pagada, entonces el riesgo de crédito es nulo.

Para valorar el riesgo de crédito de una opción basta con usar el modelo de valoración de opciones con una volatilidad más alta, para obtener de nuevo un margen de confianza del 95%, y en la práctica esto se vuelve sencillo pues al negociar con opciones, se supone que tenemos un modelo disponible y conocemos la volatilidad.

FACTORES QUE DETERMINAN EL PRECIO DE LAS OPCIONES:

El precio de la opciones, o la prima que se paga por ellas, se determina, al igual que muchos instrumentos financieros, a través de la oferta y la demanda; y su prima está en función de las siguientes variables:

PRECIO DE MERCADO (S):

El precio de mercado o precio spot es muy importante, pues entre más se aproxime el valor de la opción al precio spot, disminuye la probabilidad de obtener utilidades a través de la opción.

PRECIO DE EJERCICIO (K):

El precio de ejercicio o precio strike, tiene un comportamiento análogo al del precio spot; es decir, entre más se aproxime al valor de la opción, menores serán las utilidades obtenidas por el contrato.

FECHA DE EXPIRACIÓN (t):

La fecha de expiración o plazo al vencimiento de la opción es un determinante para su valor, pues entre más largo es el plazo al vencimiento, más grande es también el valor de la opción, porque al mismo tiempo aumentan las probabilidades de que se ejerza; pero como las opciones son activos financieros, estas se deprecian con el tiempo, de ahí que el valor por tiempo de la opción decrece y tiende a cero.

VOLATILIDAD DEL PRECIO DEL BIEN SUBYACENTE (σ):

Por volatilidad del precio del bien subyacente podemos entender una medida de dispersión, pues la volatilidad de un precio es la medida de cuan inciertos serán los movimientos del precio en el mercado en el futuro; por lo general la volatilidad es considerada como la desviación estándar, entre más volátil sea el precio mayor es la desviación estándar y se tienen más probabilidades de ejercer la opción y el valor de la prima aumenta; es decir, cuando la volatilidad aumenta, el valor de la prima también aumenta y viceversa. Cuando la volatilidad esperada crece, entonces se recomienda comprar opciones para disminuir riesgos.

TASA LIBRE DE RIESGO (r):

La tasa libre de riesgo afecta de forma clara y determinante al valor de la opción pero se mide a través de dos factores: el primero involucra a la economía, es decir cuando el indicador económico crece, la tasa esperada que determina al precio stock tiende a crecer; y por otro lado, el valor presente de cualquier flujo de efectivo que recibirá el tenedor de la opción, calculado con la tasa libre de riesgo, disminuye también afectando al valor de la opción; tomemos el ejemplo de una opción put, en este caso el precio tiende a bajar; es decir, cuando estos dos factores tienden a bajar, el valor de la opción put también tiende a disminuir, pues la tasa libre de riesgo aumenta. En el caso de una opción call sucede lo contrario cuando el indicador económico aumenta, el precio de la opción call también aumenta y cuando el valor presente tiende a crecer, el valor de la opción call tiende a crecer. Esta es una forma de observar claramente que la economía domina a los flujos de efectivo.

En la práctica, cuando la tasa libre de riesgo disminuye, el precio stock tiende a crecer, y cuando la tasa aumenta el precio stock tiende a disminuir, es decir el efecto neto del cambio de la tasa de interés y del cambio en el precio stock es análogo pero de manera contraria.

PRIMA DE UNA OPCIÓN:

El valor de la prima de una opción es la suma de dos componentes: el valor intrínseco y el valor por tiempo; este último está determinado por el plazo al vencimiento, por otro lado, la relación del precio actual del bien subyacente (precio spot), frente al precio del ejercicio (precio strike), determina el valor intrínseco. Entonces, el valor total de una opción es el siguiente:

PRIMA DE LA OPCIÓN = VALOR POR TIEMPO + VALOR INTRÍNSECO

De acuerdo a la relación entre el precio strike y el precio spot, la opción puede ubicarse en tres lugares dentro del área generada por dicha relación:

- " IN-THE-MONEY ".- Una opción se dice que está *in-the-money* si es un call y su precio strike está por debajo del precio actual del bien subyacente; o si es un put y tiene un precio strike que está por encima del precio spot, es decir:

  - Call $S > K$ pérdida.
  - Put $S < K$ utilidad.

- " AT-THE-MONEY ".- La opción está *at-the-money* si el precio strike es igual al precio spot, para los dos tipos de opciones.

  - Call o Put $S = K$

- " OUT-OF-THE-MONEY ".- Cuando el precio strike está alejado del precio del bien subyacente, se dice que la opción está *out-of-the-money*, es decir:

  - Call $S < K$ utilidad.
  - Put $S > K$ pérdida.

En el siguiente ejemplo se ilustrarán las áreas anteriores:

Moneda :	Marco Alemán.
Tamaño del contrato:	62 500.
Expiración:	2 meses.
Precio de ejercicio (strike):	\$0.67/DM
Prima o precio de la opción:	\$0.0118/DM. (\$737.50 por contrato).

Cuando el precio spot es $0.680/DM la opción tiene un valor intrínseco de $0.670 - $0.680, es decir, un centavo por marco; así el contrato de DM 62 500 tendrá un valor intrínseco de $625. Si el precio spot está por debajo de $0.670, la opción estará *out-of-the-money* y no tendrá valor intrínseco. La opción está *at-the-money* cuando el precio spot sea $0.67/DM, y en cualquier otro caso la opción estará *in-the-money*, es decir existirán ganancias para el tenedor de la opción.

DIVIDENDOS (d):

Los dividendos tienen un efecto reductor en el precio de mercado en el día que estos se anuncian, esto implica que el valor de una opción call disminuye y el de una opción put aumenta.

El valor de las opciones call se afecta de manera negativa por el tamaño de cualquier paquete de dividendos anticipados, mientras que el valor de las opciones put es beneficiado.

CLASIFICACIÓN DE LAS OPCIONES DE ACUERDO AL BIENES SUBYACENTES RESPECTIVO:

Como ya se había mencionado, las opciones son contratos sobre bienes subyacentes, y de acuerdo a cada bien subyacente se tienen especificaciones diferentes, como se explicará a continuación:

OPCIONES SOBRE BIENES DE CONSUMO:

Las opciones sobre bienes de consumo otorgan el derecho de comprar o vender un bien de consumo a un precio determinado en una fecha prevista, donde la prima de opción es expresada en dólares y en las unidades correspondientes al bien de consumo, por ejemplo, centavos para las onzas troy y bushel's para los productos agrícolas.

Estas opciones son emitidas principalmente sobre energéticos, metales y productos agrícolas, también dentro de ésta modalidad existen las opciones sobre futuros de bienes de consumo.

OPCIONES SOBRE ÍNDICES:

También existen contratos de opciones sobre índices bursátiles y las correspondientes de futuros de índices bursátiles. El poseedor de una opción sobre un índice bursátil tiene el derecho de comprar o vender el valor del índice a un cierto precio, así el emisor de la opción se compromete a liquidar en efectivo la diferencia entre el precio spot del índice y el precio de ejercicio (strike).

OPCIONES SOBRE ACCIONES:

Las opciones sobre acciones en mercados organizados suelen ser de tipo americano, y la fecha de vencimiento varía de acuerdo al mercado en donde se comercialicen, por ejemplo, en el CBOE es el sábado posterior al tercer viernes del mes, aunque en términos reales quiere decir el viernes, pues en caso de querer ejercer la opción se debe de notificar ese día antes de las 4:30 p.m. de Chicago.

Cada acción tiene opciones de varios vencimientos, en un ciclo trimestral, para el CBOE:

enero	→	abril	→	julio	→	octubre
febrero	→	mayo	→	agosto	→	noviembre
marzo	→	junio	→	septiembre	→	diciembre

aunque también existen con vencimientos mensuales para plazos cortos. Los precios strikes disponibles son los dos o tres más cercanos al precio actual de la acción; la separación entre ellos es en números redondos \$2.5, \$5, \$10, etc., a menos que existan cambios como emisiones de derecho o divisiones de capital.

Tomemos un ejemplo: Opciones sobre acciones de la IBM, las cuales cerraron a 48 7/8 y algunos precios de opciones son siguientes:

STRIKE	Feb. Put	Call	Apr. Put	Call	Jul. Put	Call
45	17/16	4 5/8	2 3/8	5¾	-	-
50	3 ¾	115/16	4 7/8	3 1/8	-	4 3/8
55	3 ¾	115/16	-	1 11/16	-	-

Cuadro II.4: Ejemplo de opcione sobre una acción.

Al examinar la tabla podemos deducir algunas cosas:

- El valor de los calls es más grande si el precio strike tiende a disminuir.
- El valor de los puts es mayor cuando el precio strike crece también.
- El valor de opciones equivalentes aumenta conforme nos alejamos de la fecha de vencimiento.
- La liquidez del mercado de opciones negociables se acaba inmediatamente al salir del intervalo de los plazos cortos, por ejemplo, en julio sólo hay opciones a \$50.

OPCIONES SOBRE INSTRUMENTOS DE DEUDA O TASAS DE INTERÉS:

Antes de comenzar a explicar esta clase de opciones, se debe de recordar que los precios de deuda o de tasas de interés tienen una relación inversa pues en medida que se incrementan los precios del instrumento, caen las tasas de interés y cuando disminuyen los precios, las tasas de interés aumentan; entonces podemos deducir que una opción call sobre el precio de un instrumento de deuda es equivalente a una opción put sobre la tasa de interés, análogamente, una opción put sobre el precio de un instrumento de deuda equivale a una opción call sobre la tasa de interés.

Las opciones sobre instrumentos de deuda son equivalentes a las opciones sobre tasas de interés, estas opciones también pueden ser comercializadas en bolsa y fuera de ella. Las opciones que se comercializan en bolsa, por ejemplo las del Chicago Board Options Exchange son opciones sobre contratos de instrumentos al contado como por ejemplo los T-Bills, T-Notes y T-Bonds del gobierno de los Estados Unidos. El mercado extrabursátil de opciones sobre tasas de interés también tienen gran actividad a pesar de su sofisticación, ya que también son diseñadas cliente por cliente.

Todas las opciones, ya sean las cotizadas en bolsa como las del mercado extrabursátil, han venido a completar el mercado satisfaciendo necesidades diferentes para los diversos participantes del mercado, pues por lo general, los corredores del mercado extrabursátil cubren sus riesgos en el mercado bursátil.

Las opciones sobre tasas de interés o sobre futuros de instrumentos de deuda pueden clasificarse de acuerdo al plazo del vencimiento de la tasa, a corto y largo plazo. La liquidación de la opción es en efectivo por la diferencia del precio de mercado del futuro y su precio de ejercicio. La opción se cotiza en puntos porcentuales sobre el valor nominal del contrato y en puntos básicos como cualquier acción.

OPCIONES SOBRE DIVISAS :

El poseedor de una opción sobre una divisa tiene el derecho de comprar o vender una determinada cantidad de la divisa a un tipo de cambio específico. Dentro de este tipo de opciones están incluidas las opciones sobre futuros de divisas correspondientes a dos categorías, las comercializadas en bolsa y las del mercado extrabursátil.

Las opciones de divisas bursátiles más importantes se comercializan en el PHLX, tanto de compra, venta, americanas y europeas. Las opciones sobre el tipo de cambio del dólar estadounidense frente al dólar australiano, libra esterlina, dólar canadiense, marco alemán, franco francés, yen , franco suizo y ECU. El precio de las cuales se reporta diariamente en el Wall Street Journal. Como las negociaciones son en bolsa, los participantes pueden aumentar o salir de sus posiciones con la respectiva ganancia o pérdida en USD, antes del vencimiento y si la opción aún no se ejerce.

En orden de importancia, el mercado que sigue al PHLX es el International Monetary Market, que es una división del Chicago Mercantil Exchange, donde se negocian contratos sobre futuros de divisas; de igual forma, las opciones sobre futuros del U.S. Dollar Index, se comercía en el Financial Instrument Exchange, división del New York Cotton Exchange.

Por otro lado, los bancos ofrecen a sus clientes institucionales como otros bancos, grandes empresas, bancos centrales, compañías de seguros, etc., las opciones sobre divisas del mercado extrabursátil; que son contratos diseñados de acuerdo a las necesidades de cada cliente, comprendiendo así montos mayores, periodos de tiempo más largos y otros atributos que no están disponibles en bolsa y que son privilegio de clientes importantes.

El siguiente cuadro muestra las especificaciones de los contratos más bursátiles de las opciones sobre divisas del PHLX:

		LIBRA ESTERLINA	DÓLAR CANADIENSE	MARCO ALEMÁN	FRANCO SUIZO	YEN JAPONÉS
Divisa subyacente (unidad)	Tipo Americano	£ 31250	C$ 50 000	DM 62 500	SF 62 500	¥ 6 250000
	Tipo Europeo	£ 31250	C$ 50 000	DM 62 500	SF 62 500	¥ 6 250000
Intervalo del precio de ejercicio		2½¢	½¢	1¢	1¢	1/100¢
Cotización de precio de ejercicio y prima		Centavos por unidad.				Centésimos de 1¢
Mes de vencimiento:		Marzo, junio, septiembre y diciembre, además de los dos meses más cercanos al vencimiento.				
Fecha de vencimiento:		Sábado anterior al tercer miércoles de cada mes.				
Método de ejercicio:		Tipo americano: Opciones que están sujetas a ejercicio en cualquier momento anterior a su vencimiento. Tipo europeo: El ejercicio de éstas opciones está restringido al último día comerciable.				
Método de entrega:		Comprador de divisa extranjera: Entrega de dólares al contado al OCC en Estados Unidos. Vendedor de divisa extranjera: Entrega de divisas al contado al OCC en el país de origen.				
Emisor y aval:		Options Clearing Corporation (OCC).				
Margen a pagar por el vendedor de la opción (sin cobertura):		Prima adicional del 4% del valor del contrato, menos el importe fuera del dinero, hasta un mínimo adicional a la prima de ¾% del valor del contrato, pagadera en USD al tipo de cambio, revalorizando diariamente.				
Horas comerciables:		4:30 a.m. a 2:30 p.m. EST/EDT 6:00 p.m. a 10:00 a.m. EST; 7:00 p.m. a 11:00 p.m. EDT(incluyendo al dólar australiano y eliminando al canadiense).				

Cuadro II.5: Especificaciones de contratos de opciones.

Opciones sobre Futuros:

Cada contrato de una opción da a su poseedor el derecho a compara o vender un futuro a su precio de ejercicio (strike), estas opciones son americanas y los vencimientos son un poco anteriores a los vencimientos de los futuros dando tiempo así a cerrar cualquier posición residual en futuros que pudiese quedar tras el vencimiento de las opciones en el mes en cuestión.

Un ejemplo de las características de un contrato de una opción sobre futuros de petróleo es:

Bien subyacente:	Futuro NYMEX WTI crude oil, (petróleo crudo).
Tamaño:	Contratos mensuales sobre los primeros 9 meses.
Strike:	Cada 1 USD/barril.
Vencimientos:	Mensualmente, y una semana antes del vencimiento del futuro aproximadamente.

Opciones Exóticas:

Además de las clasificaciones que ya se han hecho, existe toda una familia de diferentes opciones que tienen su origen en la cobertura de riesgos más específicos y complicados, y a las que se les ha llamado "opciones exóticas".

Dentro de las opciones exóticas podemos encontrar las siguientes:

- Opciones Asiáticas: estas opciones son sobre el precio medio de un bien subyacente durante un periodo determinado.
- Opciones con Barrera: estas opciones sólo llegan a existir ("aparecer") o ha dejar de existir, ("desaparecer") de acuerdo a la ocurrencia de algún evento.
- Opciones *Lookback*: son opciones sobre el precio máximo o mínimo de un bien subyacente durante un periodo determinado.
- Opciones sobre opciones.
- Opciones sobre la suma, diferencia, producto u otras operaciones entre uno o más activos.

A continuación se darán algunas especificaciones a cerca de estas interesantes y poco comunes opciones, no se verán a fondo cada una pues la variedad de las dos últimas es tan grande que excede a los objetivos del presente trabajo.

Opciones Asiáticas:

De todas las opciones exóticas, las asiáticas son quizá, las que más utilidad tienen entre los usuarios comerciales ya que cumplen una necesidad muy real.

Una opción "call asiática" paga la diferencia (si es positiva), entre el precio medio de un bien determinado en un periodo preestablecido y el precio de ejercicio (strike). Es decir, se paga el Max $[\bar{S} - K , 0]$, donde $\bar{S}$ es el valor medio del bien subyacente S durante la vigencia de la opción, y K es el precio strike. Análogamente, si tenemos una opción put asiática, la fórmula es al revés, es decir Max [K - $\bar{S}$, 0].

Este tipo de opciones surgen porque es más frecuente que una compañía esté expuesta al precio medio de un bien subyacente durante un periodo determinado, que al precio spot a cada momento.

OPCIONES SOBRE OPCIONES:

Dentro de esta modalidad se encuentran los siguientes cuatro casos:

- Call sobre un call.
- Call sobre un put.
- Put sobre un put.
- Put sobre un call.

Por ejemplo, una opción call sobre una opción put, da el derecho a comprar una opción put determinada con todas sus características a un precio determinado en una fecha futura determinada.

Las opciones sobre opciones encuentran su utilización en aquellos casos en donde no es claro si la presencia de una opción va a hacer falta o no, y no se desea desembolsar una prima muy fuerte.

OPCIONES QUE DAN EL DERECHO PARA ELEGIR ENTRE UN PUT Y UN CALL:

Este tipo de opciones han aparecido de manera esporádica en el mercado, dan al poseedor el derecho a escoger en una fecha determinada si la opción deseada es un put o un call.

Se utilizan cuando existen situaciones políticas, económicas, etc., que no se pueden controlar y que son temporalmente inciertas, de ahí que dependiendo de si persisten o no se necesiten opciones call o put.

OPCIONES *LOOKBACK*:

Estas opciones son sobre el precio máximo de un bien subyacente (opción call), o sobre el precio mínimo del mismo, (opción put).

Por ejemplo, se tiene una opción call tipo *lookback*, sobre el precio de algún bien, al momento de la contratación el precio strike es de $123, durante la vigencia de la opción se registra el precio máximo del bien, y sólo se reemplaza si este aumenta, supongamos que al termino del contrato el precio máximo fue de $135, entonces se compara la cantidad que el comprador de la opción recibe ($135), con el precio strike ($123) y la ganancia es la diferencia de dicha comparación, es decir $135 -$123 = $12.

Obviamente el precio de este tipo de opciones es mayor al de las opciones europeas comunes, pues se pagan con más seguridad porque no importa el precio de mercado que se tenga al vencimiento, siempre y cuando en el transcurso de la vigencia exista un precio mayor al del precio strike.

El principal uso de las opciones *lookback* es un uso indirecto, pues su costo es muy alto, y es frecuente que sean vendidas para generar primas elevadas que ayudarán al vendedor de la opción a comprar instrumentos que sí necesita, como otras opciones por ejemplo.

OPCIONES CON BARRERA:

Una opción con Barrera se comporta de manera análoga a una opción europea normal, pero si se cumple o se llega a la barrera, la opción "desaparece"; el caso contrario sería que la opción "apareciera" si determinadas circunstancias se cumplen. Las circunstancias pueden estar determinadas por un precio determinado, el nivel de un índice bursátil, etc..

Las opciones con Barrera son más baratas que las opciones europeas comunes pues existe la probabilidad de que desaparezcan, o en su caso, que nunca lleguen a aparecer.

Para una opción call de este tipo se tienen dos casos:

- Opción *down-and-out*.- La opción desaparece si el bien subyacente está por debajo de la barrera determinada.
- Opción *down-and-it*.- Aparece la opción si el bien subyacente está por debajo de la barrera determinada.

Cuando se habla de las opciones put, ocurre algo análogo:

- Opción *over-and-out*.- Esta opción desaparece si el bien subyacente rebasa a la barrera determinada.

- Opción *over-and-in*.- La opción aparece si el nivel del bien rebasa a la barrera.

Hasta ahora sólo se han mencionado opciones que involucran a un sólo bien subyacente, pero también existen opciones sobre dos o más bienes, por ejemplo la apreciación de un índice bursátil pagado en cualquier otra divisa, o el cuadrado del precio de una acción, o cualquier otra función que nuestra imaginación requiera para obtener ganancias o prevenir perdidas.

✎ Estrategias con Opciones:

Dentro del mercado de opciones es muy frecuente observar que las opciones se manejan combinando posiciones, vencimientos y precios de tal manera que se reduzca o aumente la prima y el riesgo no quede concentrado en un sólo parámetro determinante para la utilidad de las opciones; para tales motivos existen infinidad de combinaciones de opciones que permiten aún más tratar de disminuir el riesgo y poder cubrir una posición particular con más certeza.

En la siguiente parte solamente se mencionará a las estrategias más generales y estandarizadas en el mercado mundial de opciones.

✎ " Spread" :

Un *spread* es una estructura en donde se compra una opción de un tipo (call o put), y se vende simultáneamente una opción del mismo tipo, pero con diferente vencimiento o precio strike, con el fin de reducir la prima pagada por una opción que se desea comprar, pero limitando las posibilidades de ganancia.

Ejemplo de un call *spread*:

"Supongase que un inversionista compra un call a 100 UM y al mismo tiempo vende un call con las mismas características pero con un precio strike de 110 UM."

En el caso anterior la única posibilidad de ganar es cuando el valor del bien subyacente en el mercado está por encima de 100 UM, pero a partir de 110 UM dejamos de ganar; es decir la ventaja de esta estrategia se encuentra cuando el movimiento esperado en el valor del bien es pequeño y compar una opción normal resultaría más costoso.

Un call *spread* también es útil cuando se quiere vender la opción pero se teme que el movimiento del mercado pueda ser adverso y se desea reducir el riesgo al máximo.

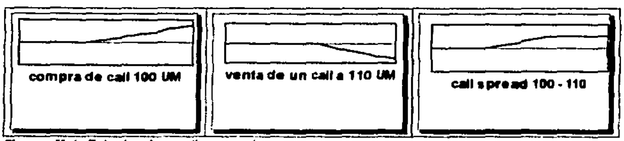


Figura II.6: Estrategia *call spread.*

La contraparte se llama put *spread*. Otra variedad de los *spread's* son los *callendar spread*, en el cual se compra un tipo de opción y se vende otro análogo pero con plazo diferente, (el precio strike puede variar o no), y se utiliza para especular sobre variaciones en el precio de un activo a diferentes plazos.

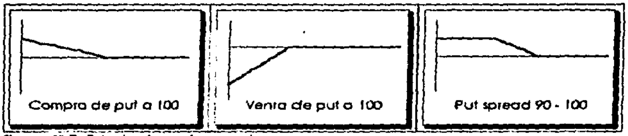


Figura II.7: Estrategia *put spread*.

" Straddles" y " Strangles" :

Un *straddle* es una estructura en d

onde se compra (o se vende) simultáneamente un call y un put con el mismo vencimiento y el mismo precio strike. Un *butterfly* es una variante del *straddle* pero está limitado por unos call y put *out-of-the-money*.

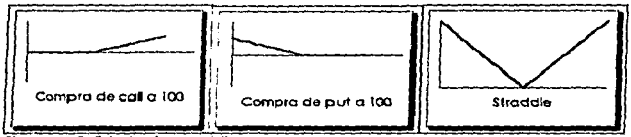


Figura II.8: Estrategia *straddle*.

En un *strangle* se compra (o se vende) de manera simultanea un call y un put al mismo plazo, pero con el precio strike del call superior al precio strike del put.

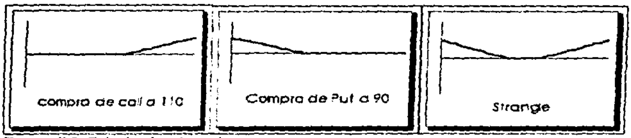


Figura II.9: Estrategia *strangle*.

" COLLARS" :

Un *collar* o un *cylinder* es una estructura en donde se vende un put y se compra un call con un precio strike más alto, o en donde se compra un put y se vende un call; se utilizan para protegerse contra un aumento catastrófico en el precio de un bien determinado.

Una variante muy frecuente de los *collars* es el *collar costo cero* en el que el precio de compra (venta) del call y del put de venta (compra) son iguales y por lo tanto el costo total es cero.

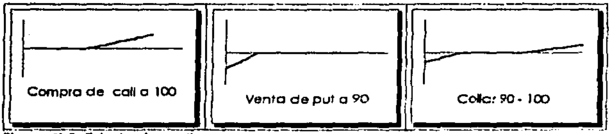


Figura II.5: Estrategia *collar*.

Anexo 1: Warrants

Los *Warrants* son productos derivados que tienen bases similares a las opciones, por lo que se ha incluído un breve estudio de ellos en este capítulo para su mejor comprensión.

Warrants:

Un warrant es un instrumento bursátil en donde el emisor otorga al tenedor el derecho más no la obligación de comprar o vender un número determinado de títulos (acciones) a un precio de ejercicio específico dentro de un vigencia establecida.

Las empresas inscritas en bolsa pueden emitir warrants sobre sus propias acciones, o bien una casa de bolsa sobre las acciones más bursátiles del mercado. De acuerdo al precio del warrant (W) es denominado dentro del mercado donde se comercializa:

- " Sobre la par".- Un warrant está en este caso si tiene un precio mayor al precio de ejercicio (K), es decir $W > K$.

- " A la par".- Un warrant está a la par si su precio es igual al precio de ejercicio, es decir $W = K$.

- " Debajo de la par".- Un warrant está debajo de la par si su precio es menor al precio de ejercicio, es decir $W < K$.

En el contrato de un warrant se deben de especificar los siguientes conceptos:

- Tipo de derecho.
- Valor de referencia, es decir el tipo y nombre de las acciones que avala el warrant.
- El tiempo definido del contrato, (vigencia que va de 1 a 5 años).
- Intervalo en el que se puede ejercer el warrant.
- Forma de liquidación,(en efectivo o en especie).
- Prima o valor del contrato.

En México, el 20 de agosto de 1992 se autoriza la negociación de warrants dentro del Mercado Financiero Mexicano, bajo el siguiente marco:

- La emisión de warrants se realiza en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) por instituciones financieras o por aquellas empresas que cotizan dentro de ella con acciones sobre su capital social. De manera conjunta con la Comisión Nacional de Valores (CNV), son reguladas dichas operaciones.
- Se hace una declaración unilateral de voluntad ante notario público con la respectiva aprobación del consejo administrativo de la empresa y de la CNV.
- Todas las emisiones de la BMV liberan de impuestos a las utilidades generadas por los warrants.

- Las emisiones deben de llevar un prospecto de colocación.
- Sólo se puede emitir warrants sobre acciones de alta bursatilidad, canastas de dichas acciones o índices bursátiles reconocidos por la BMV definiendo si la liquidación será en efectivo o en especie.
- Sólo pueden adquirir warrants personas físicas o morales mexicanas o no, pero los extranjeros sólo pueden comprar los que son liquidables en especie.
- Las negociaciones se realizan a través de la BMV.
- La emisión queda a cargo de un agente y bajo la custodia de la INDEVAL.

Los warrants tienen un tratamiento análogo al de las "opciones", pues teóricamente son el mismo producto, de hecho un warrant es una modificación operacional de una opción, siendo sus principales diferencias operativas las siguientes:

CONCEPTO	WARRANT	OPCIÓN
EMISOR:	Intermediario financiero o la empresa misma.	Cualquier persona o institución certificada por el mercado en el que se encuentre.
PRECIO DE EJERCICIO Y VIGENCIA	Para cada emisión existe un único plazo de vigencia y un único precio de ejercicio.	El precio de ejercicio está en función de la oferta y la demanda, y por emisión se puede encontrar una amplia variedad así como diferentes vigencias.
CANTIDAD DEL BIEN	Por emisión existe una única cantidad bien especificada.	Se puede tener diversas cantidades del bien subyacente para una misma emisión.
RIESGO	El riesgo es asumido por el emisor y si se puede se minimiza a través de coberturas.	El riesgo lo tienen las dos partes del contrato.
COLOCACIÓN	Debe de proporcionarse un prospecto de colocación por emisión.	La colocación de una opción no necesita un prospecto pues las condiciones del mercado hacen que propician una colocación inmediata.
CONTRATO	No están estandarizados.	Cada contrato está estandarizado y establecido por la bolsa.
RIESGO CREDITICIO	Como no existe un sistema de compensación, no se puede tener una garantía definida.	La garantía está a cargo del Instituto de compensación, disminuyendo así el riesgo.

Cuadro II.6: Diferencias entre Warrants y Opciones.

MODELO BINOMIAL

Capítulo III

Modelo Binomial

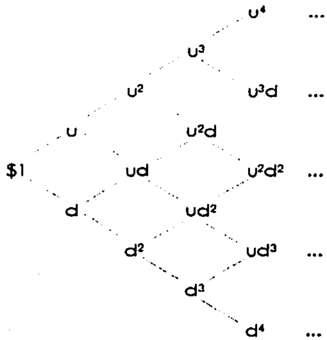
Introducción:

La mayoría de los modelos para valuación de precios de opciones usan como herramientas de soporte conceptos matemáticos avanzados y por lo tanto muy sofisticados, pero William Sharpe ideó un nuevo camino para poder llegar a los mismos resultados sin tener que utilizar dichas herramientas, al contrario, empleando conceptos matemáticos más básicos y de fácil entendimiento, como lo es la probabilidad, logró llegar a su meta. El desarrollo del modelo estuvo a cargo de los matemáticos John C. Cox, Mark Rubinstein y Stephen Ross.

El Modelo Binomial utiliza como concepto esencial la distribución binomial y su desarrollo, así como álgebra básica como primer estimación; y dentro de las correcciones para las mejoras del modelo se emplean algunos conceptos fundamentales de procesos estocásticos.

Ideas Elementales:

La idea básica del modelo se puede expresar a través de un juego de azar. Supóngase que se tiene una urna con 100 fichas, K de ellas son negras, y 100 - K son verdes; se va a extraer una ficha en cada turno de manera sucesiva y con reemplazo en n turnos. Sólo se puede apostar al principio del juego siendo la apuesta de $1. El jugador recibe $u si la ficha extraída fue negra y $d si fue verde; con u > d; conforme transcurre el juego, el dinero se acumula con respecto a la posición en la que se encuentre el jugador; es decir cuántas veces haya extraído fichas verdes y cuántas fichas negras, como u > d, cada vez que se extraiga una ficha negra el jugador se moverá hacia arriba, mientras que si se obtuvo una ficha verde, el movimiento se hará hacia abajo; la representación de este juego se muestra en el siguiente diagrama de árbol:



Cada posición representa la cantidad acumulada por el jugador; por ejemplo, sea $u = 1.1$ y $d = 0.9$, y en el juego se han extraído 4 fichas negras, el ganador obtendrá entonces $\$u^4 = \$(1.1)^4 = \$1.46$ y lo que indica una ganacia, pero en cambio, si se extrajeron 4 fichas verdes, el valor del juego sería de $\$d^4 = \$(0.9)^4 = \$0.6561$, y existirían pérdidas, o si fueran 3 fichas negras y 1 ficha verde, el jugador obtendría $\$u^3d = \$(1.1)^3(0.9) = \$1.1979$ resultando así una combinación entre ganancia y pérdida.

Analizando el juego se pueden hacer algunas observaciones: si se suman los superíndices de cada elemento se puede ubicar en el turno correspondiente, y el super índice también no indica el número de veces que se ha extraído un color determinado de ficha.

Al hacer un arreglo con todos los elementos del juego utilizando el triángulo de Pascal y quedando de la siguiente manera:

n \ j	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Figura III. 1: Triángulo de Pascal.

Cada renglón representa un turno, es decir se tienens n renglones, y el turno en el que está el juego se representa en cada columna, es decir son j columnas, con $j \in \{0,\ldots,n\}$. Lo importante de este arreglo es que se puede determinar cada elemento en términos de columnas y de renglones, obsérvese que se puede generar un número del interior en cualquiera fila por la suma de los dos números sobre y a la izquierda en la fila inmediata a él, es decir que con la siguiente expresión se puede calcular:

$$(n, j) = n! / j!(n-j)!$$

y cada elemento en el arreglo (triángulo), es llamado coeficiente binomial, pues aparece en la expansión algebraica de $(a+b)^n$, se puede observar que la suma de cada renglón es 2^n.

Para denotar el valor de la jugada n-ésima se usará Xn, por ejemplo si $n = 3$ entonces $X_3 = d^3, ud^2, u^2d$ ó u^3. Al generalizar esta notación se obtiene el siguiente resultado:

$$Xn = d^n,\ u^1d^{n-1},\ u^2d^{n-2},\ \ldots,\ u^{n-1}d \text{ ó } u^n.$$

o lo que es equivalente a:

$$Xn = u^j d^{n-j} \quad j \in \{0,\ldots,n\}.$$

Como Xn es una variable aleatoria, (pues no se conoce el valor de Xn para ningún n), que evoluciona a través del tiempo, entonces se puede inferir que Xn es un proceso estocástico. Ahora, como Xn depende del número de tiradas anteriores, (n-1), y del resultado de las mismas, (X_0, X_1 , ... , X_{n-1}), concluyendo así que Xn es una caminata aleatoria multiplicativa.

Se dice que (X_1 / X_0), (X_2 / X_1), ... ,(X_n / X_{n-1}) se distribuyen idéntica e independientemente, y como cada tirada cumple con las observaciones anteriores, se obtiene que forma una probabilidad acumulada.

. De acuerdo a la manera en que está definido el juego, se sabe que el evento "extraer una ficha verde" es mutuamente excluyente con respecto al evento "extraer una ficha negra", además de que son complementarios; es decir que la probabilidad de "extraer una ficha verde" más la probabilidad de "extraer una ficha negra" es igual al todo, definiendo entonces las siguientes probabilidades:

- q = probabilidad de "extraer una ficha negra".
  = K ÷ 100
  = P(u).

- 1-q = probabilidad de "extraer una ficha verde".
  = 1 - (K ÷ 100)
  = (100 - K) ÷ 100
  = P(d).

Obteniendo que P(u) y P(d) $\in$ [0, 1], y, por las observaciones anteriores, P(u) + P(d) = 1; por lo que, por construcción, cumplen con los supuestos de la definición de probabilidad. Para tener una notación más manejable, en lugar de utilizar P(u) y P(d), se usará u y d respectivamente, haciendo notar cada vez que sea necesario si se trata de una probabilidad o de un valor.

Ahora ya se puede expresar a Xn en términos probabilísticos; por ejemplo, n = 2:

$$X_2 = \{ u^2, ud, du, d^2\}$$
$$= \{ q^2, q(1-q), (1-q)q, (1-q)^2 \}$$

cada probabilidad acumulada está en [0,1], y además la suma de ellas es igual a 1:

$$q^2 + q(1-q) + (1-q)q + (1-q)^2 = 1$$
$$q^2 + q - q^2 + q - q^2 + 1 - 2q + q^2 = 1$$
$$1 = 1$$

En general, en la secuencia n, existen j fichas negras y n-j verdes, es decir, se tiene una probabilidad de $q^j (1-q)^{n-j}$ y hay exactamente n!÷[j!(n -j)!] maneras de que ocurra la secuencia; por lo tanto la probabilidad de Xn será:

$$n! \quad q^j (1-q)^{n-j}$$

$$\overline{j!(n-j)!}$$

y además:

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} q^j (1-q)^{n-j} = 1$$

Para un j determinado, (supóngase j = a), podemos encontrar una función de la probabilidad de que $X_n \geq u^a d^{n-a}$, siendo la siguiente.

$$\Phi [a; n, q] = \sum_{j=a}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} q^j (1-q)^{n-j}$$

donde Φ es una distribución binomial complementaria.

Para calcular el valor de una opción se tienen que tomar en cuenta algunos conceptos que están relacionados muy íntimamente con el precio de la opción, además de ciertas situaciones que también influyen en dicho cálculo, como la información privilegiada y el desequilibrio de mercado que propician oportunidades de arbitraje. Para el desarrollo del modelo se debe de suponer primero que no existen dichas oportunidades de arbitraje y que las variables que influyen en el valor de la opción son las siguientes:

- Precio actual de mercado para el bien subyacente.
- Precio de ejercicio.
- Tiempo de expiración.
- La volatilidad del mercado.
- Tasas de interés.
- Pago de dividendos durante la vigencia de la opción.

Cada una de las variables anteriores, influye de muy distinta y arbitraria manera en el precio de la opción a lo largo de su vigencia, de ahí que no se pueda encontrar una expresión para el cálculo del precio dentro de ese intervalo, pero en la fecha de expiración sí existe una ecuación que permite conocer el valor de la opción, siendo las siguientes:

$C = \max[0, S - K]$ para una opción call,
$P = \max[0, K - S]$ para una opción put.

Tomando en cuenta estas igualdades se desarrollará el modelo binomial de Sharpe; y después se harán algunas modificaciones al modelo para su mejor aprovechamiento.

Supuestos:

- Como los precios cambian de manera discreta pero muy rápidamente, se puede suponer que lo hacen de manera continua y sin "saltos".
- Los costos de transacción y los impuestos se ignoran.
- La tasa de interés libre de riesgo para el periodo vencerá hasta el final de el mismo.

- La tasa de interés será constante y positiva.
- No existen dividendos.
- No existen requerimientos u operaciones de margen.
- La cantidad de compra o venta del bien subyacente no afecta al precio de la opción.
- No existen oportunidades de arbitraje.

Los supuestos anteriores garantizan oportunidades de mercado iguales para todos los participantes, facilitando además el cálculo del precio de la opción, aunque las condiciones del mercado no siempre sean las ideales como las que maneja el modelo.

DESARROLLO DE LA FORMULA BINOMIAL PARA ESTIMAR PRECIOS DE UNA OPCIÓN:

Si se supone que el precio stock sigue un proceso binomial multiplicativo en periodos discretos, entonces el precio se comportará esencialmente como el juego de las fichas mencionado en la sección anterior.

La tasa de retorno r en el mercado sobre cada periodo puede tomar sólo dos valores; u - 1 con probabilidad q, y d - 1 con probabilidad 1 - q.

Se supone que el precio stock al principio del periodo es \$S, entonces, al final tendremos \$Su ó \$Sd, es decir, el precio subió, (*up*), con probabilidad q; o bajó, (*down*); con probabilidad (1-q):

$$\$S \begin{cases} \$uS & \text{probabilidad} = q \\ \$dS & \text{probabilidad} = 1 - q \end{cases}$$

Se tomará en cuenta el caso más simple para iniciar el desarrollo, considerénse para esto las siguientes definiciones:

- Sea r el incremento de la tasa de interés de un periodo, donde u > r > d.
- Sea C el valor actual de una opción call, al final del periodo sólo se tendrán las siguientes posibilidades:

$$C \begin{cases} C_u & \text{si el valor aumentó a uS.} \\ C_d & \text{si el valor disminuyó a dS.} \end{cases}$$

Ya que únicamente se puede considerar el valor que tomará la opción al final del periodo, entonces se pude hacer la sigguiente igualdad:

$$C_u = uS \qquad\qquad C_d = dS.$$

Lo que significa tener el siguiente diagrama:

$$C \begin{cases} C_u = uS & \text{probabilidad} = q \\ C_d = dS & \text{probabilidad} = 1-q \end{cases}$$

Si la vigencia del call fuera de sólo un periodo, entonces el valor de la opción call al final del periodo sería alguna de la las dos posibilidades siguientes de acuerdo a la teoría de las opciones:

$$C \begin{cases} C_u = \max(0,\ uS - K) & \text{probabilidad} = q \\ C_d = \max(0,\ dS - K) & \text{probabilidad} = 1 - q \end{cases}$$

Si se formará un portafolio que contenga Δ porciones del portafolio de mercado y el monto de un bono sin riesgo B; entonces el valor del portafolio será:

$$\Delta S + B$$

al final del periodo, el valor del portafolio será

$$S\Delta + B \begin{cases} uS\Delta + rB & \text{probabilidad } q \\ dS\Delta + rB & \text{probabilidad } 1-q \end{cases}$$

como Δ y B se pueden escoger casi de cualquier manera, se hace de tal forma que al final del periodo el valor del portafolio sea equivalente al de la opción call, teniendo entonces, para cada posibilidad del valor de la opción las siguientes igualdades:

$$C_u = uS\Delta + rB$$

$$C_d = dS\Delta + rB$$

obteniendo así el siguiente diagrama:

$$C = S\Delta + B \begin{cases} C_u = uS\Delta + B & \text{probabilidad } q \\ C_d = dS\Delta + B & \text{probabilidad } 1-q \end{cases}$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones a resolver:

$$C_u = uS\Delta + rB \;\ldots (1)$$

$$C_d = dS\Delta + rB \;\ldots (2)$$

de (2) se obtiene:

$rB = C_d - dS\Delta$
$\Rightarrow B = (C_d - dS\Delta) \div r \;\ldots (3)$

sustituyéndolo en (1) se tiene:

$C_u = uS\Delta + r((C_d - dS\Delta) \div r)$

$\Rightarrow C_u = uS\Delta + C_d - dS\Delta$

$\Rightarrow (u-d)S\Delta = C_u - C_d$

$\Rightarrow \Delta = (C_u - C_d) \div [(u-d)S] \blacksquare$

sustituyendo en (3):

$B = (C_d - dS((C_u - C_d) \div [(u-d)S])) \div r$

$\quad = [C_d \div r] - dS(C_u - C_d) \div [rS(u-d)]$

$\quad = [C_d \div r] - d(C_u - C_d) \div r(u-d)$

$\quad = [C_d(u-d) - d(C_u - C_d)] \div r(u-d)$

$B = \dfrac{uC_d - dC_u}{r(u-d)} \blacksquare$

Por lo tanto:

$$\Delta = (C_u - C_d) \div (u-d)S \qquad\qquad B = \frac{uC_d - dC_u}{r(u-d)} \qquad \ldots(①)$$

Entonces, ahora ya se "puede" conocer el valor de la opción en el portafolio:

$C = \Delta S + B$

$\quad = \dfrac{(C_u - C_d)S}{(u-d)S} + \dfrac{uC_d - dC_u}{r(u-d)}$

$\quad = \dfrac{r(C_u - C_d) + uC_d - dC_u}{r(u-d)}$

$$C = \frac{C_u \frac{r-d}{u-d} + C_d \frac{u-r}{u-d}}{r} \qquad \ldots(2)$$

Sea $p = \frac{r-d}{u-d}$

entonces

$1 - p = \frac{u-r}{u-d}$

El precio de una opción al final de un periodo es:

$$C = \frac{C_u p + C_d(1-p)}{r} \qquad \ldots(3)$$

Es fácil ver que cuando no existen dividendos S - K es más grande que la tasa de interés positiva, (S - K > r); entonces la ecuación (3) es la fórmula exacta para el valor de una opción call un periodo antes de su expiración en términos de S, K, u, d y r.

La fórmula (3) tiene algunas características que observar:

- Primero; la probabilidad q no aparece en la fórmula, lo que da como resultado una forma equilibrada de estandarizar las expectativas de todos los participantes del mercado con respecto al aumento o la disminución del valor del mercado, es decir que así todos tendrán la misma "probabilidad" y esto todavía puede ser compatible con la relación existente de C para S y r.

- Segundo; el valor del call no depende de la actitud del inversionista frente al riesgo, pues en la construcción de la fórmula no tomamos en cuenta este concepto; es decir, se tiene la misma fórmula para un inversionista que busca altos riesgos y para uno que es adverso al mismo.

- Tercero; la única variable aleatoria que interfiere en el valor del call es el precio de mercado por sí mismo; es decir, que no depende de otros precios aleatorios de otros valores de algún portafolio. Es fácil de comprender lo anterior si se tiene en mente que la fórmula sólo toma en cuenta la relación que existe entre S, u, d y r para el cálculo de C.

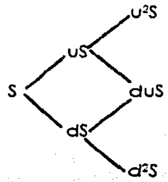
- Por último; observesemos que p = (r - d) ÷ (u - d), siempre tiene la siguiente relación: 0 < p < 1; por lo cual p tiene todas las características de una probabilidad, de hecho p es el valor q que va a tener en equilibrio al inversionista que asuma un riesgo neutral. Para entender esto, nótese que la tasa de interés de ganancias en el mercado, que es la suma de cada posible tasa que tenga probabilidad de ocurrir en un intervalo específico, va a ser una tasa de bajo riesgo y:

$$q(uS) + (1-q)(dS) = rS$$

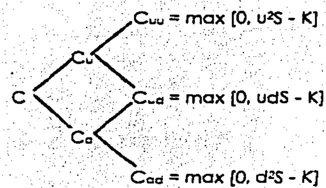
con $q = (r-d) \div (u-d) = p$.

De acuerdo a las observaciones anteriores, se puede interpretar el valor de un call como el valor esperado de descuento en un mundo de riesgo neutral. Por otro lado, la tasa esperada de rendimientos de un call no necesariamente tiene que ser de bajo riesgo, lo único que se puede asegurar es, por la construcción, que la tasa esperada de rendimientos y el riesgo del call va a ser el mismo que el considerado en el portafolio.

Continuando con el desarrollo de la fórmula, supóngase que se tiene un call con dos periodos establecidos antes de la fecha de expiración; por lo que, siguiendo con el proceso binomial, al final del segundo periodo se pueden obtener los siguientes posibles valores en el mercado:



y los siguientes para el call:



donde C_{uu} es el valor de un call en la fecha de expiración si los movimientos en el mercado, fueron ambos hacia arriba; lo contrario a C_{dd}; (C_{ud} es la notación para cuando primero sube y después baja el valor, o viceversa).

Al final del periodo actual, al trasladarse un periodo hacia atrás dentro de la vigencia del call, se presenta el siguiente problema a resolver, (idéntico al que enfrentamos en el caso anterior):

$$C_u = \frac{pC_{uu} + (1-p)C_{du}}{r} \qquad \ldots(④a)$$

$$C_d = \frac{pC_{du} + (1-p)C_{dd}}{r} \qquad \ldots(④b)$$

Si se forma nuevamente un portafolio con ΔS partes del mercado y B bonos tales que tengan un valor al final del periodo igual a C_u si el precio de mercado fue uS, y C_d si el precio de mercado fue dS. Es de mucha ayuda la forma funcional en la que Δ y B fueron definidos, pues quedan iguales dentro de la formula, con esto sabemos que para encontrar su valor basta con recordar la ecuación ① para los nuevos valores de C_u y C_d.

Como en el caso anterior, también existen oportunidades de arbitraje si el precio del call es diferente al valor del portafolio, o si también difiere de S - K. Pero existe una importante diferencia. Con un sólo periodo se podría planificar con vistas a ganancias de bajo riesgo, por haber vendido el call y con una parte comprar el portafolio equivalente. Al final del periodo se sabe que el precio de mercado del call va a ser igual al valor del portafolio y la posición entera va a ser liquidada satisfactoria y completamente; pero esto es posible si y sólo si, la fecha de expiración coincide con el final del periodo, y esto no es necesariamente cierto. Al final del periodo actual, (un periodo fijo hacia la izquierda), el precio fijo del call estará en desequilibrio y será más grande que el valor del portafolio equivalente. Si se cierra fuera de la posición, entonces, se vende el portafolio y se vuelve a comprar el call, lo que causaría una pérdida que será compensada con la ganancia original.

Sin embargo, siempre van a existir pérdidas por mantener el portafolio por un periodo más. El valor del portafolio al final del periodo actual, va a ser suficiente para comprar el portafolio que hay que diferir en el último periodo. En efecto, se tienen que reajustar las proporciones en el portafolio equivalente de Δ y B, pero no implica poner más dinero. En consecuencia, se puede concluir que aún con dos periodos, se garantiza que, aunque exista la posibilidad de obtener ganancias de bajo riesgo el inversionista no recurrirá a ellas si el precio actual de mercado del call está dentro del intervalo siguiente: max [ΔS + B, S-K]; es decir que el precio actual del call sólo puede estar incluido dentro de dicho intervalo.

Dado que Δ y B tienen la misma forma para cada periodo, el valor actual del call en términos de C_u y C_d será:

$$C = \frac{pC_u + (1-p)C_d}{r} \qquad \text{Si } C > S - K.$$

$$C = S - K \qquad \text{e. o. c.}$$

Ya que $C_{ud} = C_{du}$, sustituyendo en la ecuación ④ se obtiene:

$$C = \frac{p^2C_{uu} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2C_{dd}}{r^2}$$

$$C = \{p^2 \max[0, u^2S - K] + 2p(1-p)\max[0, udS - K] + (1-p)^2 \max[0, d^2S - K]\} \div r^2 \qquad \ldots (5)$$

Nuevamente, todas las observaciones hechas a la ecuación ④ son válidas para la ecuación ⑤, excepto claro, el número de periodos en los que la vigencia del call fue particionado. Como podemos observar, el número de periodos, n, se ha vuelto un factor importante para la valuación del call; por lo tanto, las variables que influyen dentro del cálculo del precio de la opción son:

- S Precio de mercado o precio stock.
- K Precio de ejercicio o precio strike.
- n Número de periodos anteriores a la expiración de la opción.
- u Probabilidad de aumento del mercado.
- d Probabilidad de descenso del mercado.
- r Tasa libre de riesgo.

Por medio de un procedimiento recursivo se puede encontrar el valor del call cualquier número de periodos n, que van desde la fecha de expiración hasta el momento de contratación de la opción, obteniendo la siguiente fórmula:

$$C = \{ \Sigma^{n}_{j=0} [n! \div (j!(n - j)!)] \; p^{j} (1-p)^{n-j} \max[0, u^{j} d^{n-j} S - K] \} \div r^{n}$$

Esta fórmula ya es muy completa, pero aún se le puden hacer algunas mejoras; agregando las siguientes condiciones:

- Sea a = número mínimo de movimientos ascendentes en el mercado.

- Supóngase que al final de los n periodos, el valor del call se encontrará siempre *"in-the-money"*.

Por otro lado, a también va a ser el entero no negativo más pequeño que cumpla con la siguiente desigualdad:

$$u^{a} d^{n-a} S > K$$

con un poco de álgebra se puede acotar el valor de a:

$\log(u^{a} d^{n-a} S) < \log(K)$
$a \log(u) + (-a)\log(d) + \log(Sd^{n}) < \log(K)$
$a(\log(u) - \log(d)) < \log(k) - \log(Sd^{n})$
$a\log(u/d) < \log(K/Sd^{n})$
$a < \log(K/Sd^{n}) \div \log(u/d)$

por lo que a va a ser el entero no negativo más pequeño que cumpla:

$$a > \log(K/Sd^{n}) \div \log(u/d).$$

Entonces:

$\forall\, j < a \qquad \max[0, u^j d^{n-j} S - K] = 0$

$\forall\, j \geq a \qquad \max[0, u^j d^{n-j} S - K] = u^j d^{n-j} S - K$

Por lo tanto:

$$C = \{ \Sigma^n_{j=a} [n! \div (j!(n-j)!)] \; p^j (1-p)^{n-j} [u^j d^{n-j} S - K] \} \div r^n$$

Por supuesto, si $a > n$, el call finalizará *"out-of-the-money"* aún si el precio de mercado aumentara en cada periodo, pues esto haría que el valor actual del call se haga cero.

Por otro lado, podemos dividir a C en dos partes, con respecto al precio de mercado y al precio de ejercicio:

$$\begin{aligned} C = \; & S \{\Sigma^n_{j=a} [n! \div (j!(n-j)!)] \; p^j (1-p)^{n-j} [u^j d^{n-j} / r^n]\} - \\ & K r^{-n} \{\Sigma^n_{j=a} [n! \div (j!(n-j)!)] \; p^j (1-p)^{n-j}\} \end{aligned}$$

Las expresiones en las que se dividió la fórmula, son funciones de distribución binomial complementaria, $\Phi[a; n, p]$. Pero, la primera parte la podemos ver como $\Phi[a; n, p']$, donde $p' = (u/r)p$, y $(1 - p') = (d/r)(1 - p)$; además de que p' también cumple con la definición de probabilidad; otras observaciones a cerca de p', son:

$0 < p' < 1$,

$p < (r/u)$, y

$p^j (1-p)^{n-j} [u^j d^{n-j} / r^n] = [(u/r)p]^j \, [(d/r)(1-p)]^{n-j} = p'^j \, (1-p')^{n-j}$.

Entonces, para finalizar el desarrollo del Modelo Binomial, resumimos en la siguiente fórmula:

$C = S\Phi[a; n, p'] - Kr^{-n}\Phi[a; n, p]$
donde:
$p = (r - d)/(u - d) \qquad p' = (u/r)p$
a = entero nonegativo más pequeño que cumpla:
$a > \log(K/Sd^n) \div \log(u/d)$,
Si $a > n \Rightarrow C = 0$.

Figura III.2: Fórmula Binomial del Precio de unaOpción.

EJEMPLO BIN -1:

El siguiente ejemplo ilustrará la manera de usar la Fórmula del Modelo Binomial para estimar precios de opciones (BOPM), desarollada en las secciones anteriores.

Sean los siguientes valores para las variables involucradas en la BOPM:

$S = 80,\qquad n = 3,\qquad K = 80,\qquad u = 1.5,\qquad d = 0.5\qquad r = 1.1,$

donde:

$$
\begin{aligned}
p &= (r-u) \div (u-d) \\
&= (1.1 - 0.5) \div (1.5 - 1.1) \\
&= 0.6. \\
r^{1} &= 0.909. \\
r^{2} &= 0.826. \\
r^{3} &= 0.751.
\end{aligned}
$$

La posible trayectoria que el precio seguirá, de acuerdo al modelo y a los valores supuestos anteriormente, se desglozan en los siguientes diagramas de árbol:

$n = 1,\ S = 80.$

$S = 80$

$uS = (1.5)(80) = 120$
$p = 0.6$

$dS = (0.5)(80) = 40$
$p = 0.4$

$n = 2,\ S = 80,\ uS = 120,\ dS = 40.$

$uS = 120$

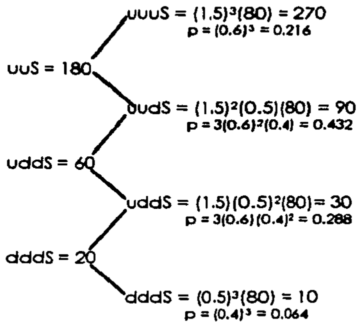
$dS = 40$

$uuS = (1.5)^2(80) = 180$
$p = (0.6)^2 = 0.36$

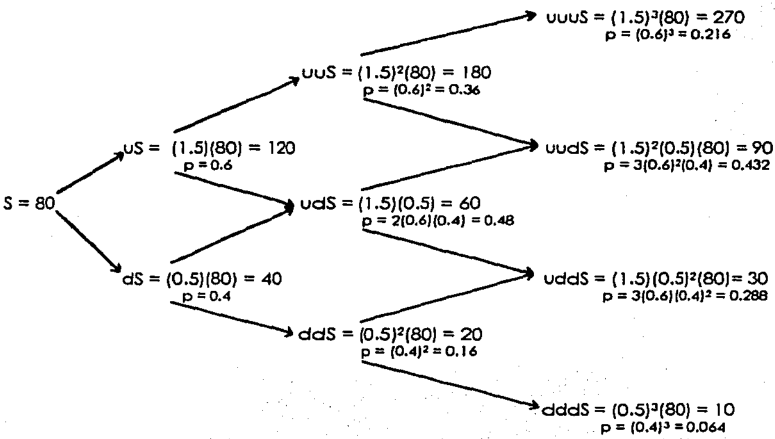
$udS = (1.5)(0.5) = 60$
$p = 2(0.6)(0.4) = 0.48$

$ddS = (0.5)^2(80) = 20$
$p = (0.4)^2 = 0.16$

$n = 3$, $S = 80$, $uS = 120$, $dS = 40$, $uuS = 180$, $udS = 60$, $ddS = 20$.



Al ensamblar todos los eventos, se obtiene el siguiente diagrama de árbol:



Para determinar el valor del call usamos la fórmula del modelo binomial:

$$C = r^{3}\{p^{3}\max[0, u^{3}S - K] + p^{2}(1-p)\max[0, u^{2}dS - K] + p(1-p)^{2}\max[0, ud^{2}S - K] + (1-p)^{3}\max[0, d^{3}S - K]\}$$

$$C = 0.751\{0.216(190) + 0.432(10) + 0.288(0) + 0.064(0)\}$$

$$C = 0.751(43.36)$$

$$C = 34.06536$$

Conocemos los valores del call al final del tercer periodo, y son los siguientes:

$$C = \max[0, u^{3}S - K] = 190$$

$$C = \max[0, u^{2}dS - K] = 10$$

$$C = \max[0, ud^{2}S - K] = 0$$

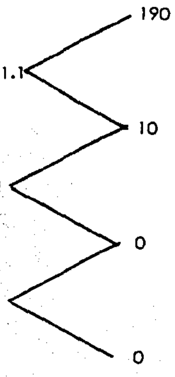
$$C = \max[0, d^{3}S - K] = 0$$

En base a lo anterior, se encontrará el valor de la opción retrocediendo un periodo a la vez, por medio de las fórmulas que se utilizan en el portafolio equivalente que se construyó antes, además detener el valor de Δ; teniendo en el primer retroceso:

$C = [pC_u + (1-p)C_d] \div r$
$C = [0.6(190) + 0.4(10)] \div 1.1$
$C = 107.272$
Δ

$C = [pC_u + (1-p)C_d] \div r$
$C = [0.6(10) + 0.4(0)] \div 1.1$
$C = 5.454$
Δ

$C = [pC_u + (1-p)C_d] \div r$
$C = [0.6(0) + 0.4(0)] \div 1.1$
$C = 0$
Δ



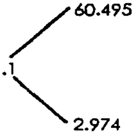
Para el segundo retroceso:

$C = [pC_u + (1-p)C_d] \div r$
$C = [0.6(107.272) + 0.4(5.454)] \div 1.1$
$C = 60.495$
Δ

$C = [pC_u + (1-p)C_d] \div r$
$C = [0.6(5.454) + 0.4(0)] \div 1.1$
$C = 2.974$
Δ

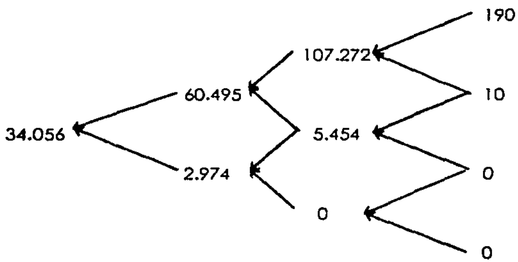
Para el último retroceso:

$C = [pC_u + (1-p)C_d] \div r$
$C = [0.6(60.495) + 0.4(2.974)] \div 1.1$
$C = 34.056$
Δ



Por lo tanto, el método presenta un nivel de significancia de cinco dígitos, utilizando tres después del punto decimal; si hubieramos utilizado cuatro, entonces tendríamos un nivel de significancia de cuatro dígitos, es decir el valor del call que se ubiera obtenido mediante esta aproximación es de 34.0547, por lo que se puede decir que se tiene la mejor aproximación.

En el siguiente diagrama se resume este procedimiento recursivo:



El diagrama anterior muestra que el precio del call es de 34.056, lo que hace que la construcción del portafolio y la fórmula de evaluación del precio de la misma coincidan, asegurando así que las operaciones son equivalentes. Gracias al análisis preliminar, se puede utilizar la fórmula binomial para conocer una estimación del precio de una opción de una manera sencilla, y así construir estrategias para tomar ventaja de los precios desconocidos en el mercado y poder obtener mayores ganancias y un mejor nivel de coberturas.

Riesgo de la Opción y Tasa de Rendimientos Esperada:

El equilibrio del riesgo y la tasa esperada de rendimientos de una opción, tienen una relación estrecha con el riesgo y la tasa esperada de rendimientos del bien subyacente al cual se referencia la opción. En la parte siguiente se probará esta hipótesis.

Riesgo del Stock, (Bien Subyacente) y Rendimientos Esperados:

Para un sólo periodo, el total de rendimientos en un título, es el precio al final del periodo, más cualquier distribución del dinero realizada, también, al final del periodo, todo esto dividido por el precio al inicio del periodo; es decir:

$$\frac{\text{Precio Final + Dividendos Al Final Del Periodo}}{\text{Precio Inicial}}$$

Dentro del Modelo Binomial, el rendimiento total del bien subyacente ocurre cada vez que aumenta o disminuye su precio, es decir cada u o **d**. Los rendimientos esperados correspondientes, m_s son el "peso" promedio de los posibles rendimientos, donde el "peso" es la probabilidad respectiva, es decir:

$$m_s = qu + (1-q)d.$$

Una medida para estimar el riesgo del stock es la varianza del total de rendimientos, v^2_s. Esto es, el peso promedio de la desviación cuadrada del total de rendimientos posibles de este significado, donde el "peso" es la probabilidad respectiva, es decir:

$$v^2_s = q(u - m_s)^2 + (1 - q)(d - m_s)^2.$$

al sustituir el valor de m_s en la ecuación anterior se tiene:

$$v^2_s = q(1-q)(u-d)^2. \qquad \text{...(Anexo BIN-1)}$$

$$v_s = [q(1-q)(u-d)^2]^{1/2}.$$

Donde la ecuación anterior equivale a la desviación estándar que significa la volatilidad del stock. Todas éstas medidas están en función de la tasa de rendimiento, la cual es menor a 1; es fácil entender que la tasa esperada de rendimientos es $m_s - 1$, y que la desviación estándar respectiva es v_s.

ELASTICIDAD DE LA OPCIÓN:

Recordando que el radio total de cobertura es:

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S}$$

Supóngase que el precio stock tendrá un movimiento hacia abajo, entonces es lógico preguntarse: *¿Cuál va a ser el cambio en el valor relativo en el call para el cambio en el stock, si éste llega a moverse hacia arriba?*. Se infiere que para contestar lo anterior se utilizará a Δ; es decir que se debe utilizar para medir este tipo de situaciones. Si la comparación que se pretende realizar está en términos de cambio de porcentaje, entonces si se divide el numerador de Δ por el valor actual del call C, y el denominador por el precio stock actual S; teniendo así un nuevo concepto, llamada la elasticidad de la opción "Ω", que es:

$$\Omega = (S \div C)\ \Delta .$$

Para un put, se tiene:

$$\Delta = \frac{P_u - P_d}{(u-d)S} \qquad\qquad \Omega = (S \div P)\ \Delta .$$

con $P_u \leq P_d$; $0 \leq \Omega$; $0 \leq \Delta$.

Se tiene la siguiente observación:

- Tanto para call's como para put's, Ω crece, al mismo tiempo que K crece.

RIESGO DE LA OPCIÓN:

Los conceptos de de medición de riesgo utilizados para el stock, se pueden aplicar y deducir de la misma manera para una opción, donde m_c es la media y v_c la desviación estándar del total de rendimientos de un call sobre un periodo; calculando las estadísticas correspondientes de manera análoga a las del mercado; es decir:

$$m_c = [qC_u + (1-q)C_d] \div C$$

$$v_c = \{q(1-q)[C_u - C_d) \div C]^2\}^{1/2}.$$

Al combinar la ecuación de v_s , y v_c; y usando las definiciones de Ω y Δ, se ontiene la siguiente igualdad:

$$v_c = \Omega v_s \qquad\qquad \text{...(Anexo BIN-2)}$$

que habla del riesgo de un call con respecto al riesgo del bien subyacente. El riesgo de un call, (la desviación estándar de la tasa de rendimientos), equivale a la elasticidad de la opción por la volatilidad del bien subyacente (medida en tiempo). La elasticidad de una opción Ω, puede ser estimada fácilmente, pues sólo re requieres conocer u, d, C, C_u y C_d. Por otra parte, es fácil mostrar que en términos de porcentaje, (tasa de rendimiento), el call nunca puede ser más riesgoso que el stock: es decir $v_c \geq v_s$. Para demostrarlo, necesitamos mostrar solamente que $\Omega \geq 1$. Retomando las siguientes igualdades demostradas anteriormente:

$$C = [pC_u + (1-q)C_d] \div r \qquad\qquad p = (r-d) \div (u-d).$$

resultando:

$$r[C_u - C_d - (u-d)C] + [uC_d + dC_u] = 0. \qquad \text{...(Anexo BIN-3)}$$

Si la segunda parte de la ecuación es negativa, implica que la primera será positiva. Por definición de Ω, tenemos:

$$C_u - C_d - (u-d)C \geq 0 \qquad \text{si y sólo si } \Omega \geq 1.$$

Por lo tanto, si podemos mostrar que $uC_d - dC_u$ es negativo, entonces estará demostrado que $\Omega \geq 1$.

Para la demostración, hay que recordar que es posible conocer el valor presente de un call para un periodo, donde éste puede tomar los siguientes valores:

$$C_d = \{E \max[0, dSu^j d^{n-1-j} - K]\} \div r^{n-1}.$$

$$C_u = \{E \max[0, uSu^j d^{n-1-j} - K]\} \div r^{n-1}.$$

Donde E representa al valor esperado (esperanza matemática), de la distribución de probabilidad para j cuando q = p. Después de sustituir esta expresión, es claro ver que $uC_d - dC_u \leq 0$, y esto confirma el resultado. Note que si $\Omega \geq 1$, implica que $C - S\Delta \leq 0$. Desde que $B = C - S\Delta$, verifica el comentario de que $B \leq 0$, y de aquí la conclusión sobre un sólo periodo donde el call es equivalente a asumir una posición larga en el stock. Esto concuerda con los resultados del riesgo de la opción y del riesgo del mercado.

La media m_P y la desviación estándar v_P del total de rendimientos de un put sobre un periodo es definido de manera análoga a la de un call, teniendo:

$$m_P = [qP_u + (1-q)P_d] \div P$$

$$v_P = \{q(1-q)[P_u - P_d) \div P]^2\}^{1/2}.$$

Donde la volatilidad de un put puede entenderse como:

$$v_P = -\Omega v_s$$

pues el signo "-" es necesario ya que v_P (la desviación estándar de la tasa de interés), por definición nunca es negativa, pero Ω de un put nunca es positiva; la analogía con el call puede forzar a pensar que Ω de un put es menor o igual a -1, pero esto no es cierto, pues además se puede mostrar que la única restricción que se tiene sobre Ω, es que $\Omega \leq 0$. Por consiguiente, es posible que la volatilidad de un put sea menor que la volatilidad del stock.

Rendimientos Esperados de una Opción:

Para buscar la relación entre m_C y m_S, es necesario recordar la derivación de la Formula Binomial. Sabemos que el portafolio equivalente tienen el mismo valor que el call al final del periodo para cualquiera de sus posibilidades; es decir:

$$uS\Delta + rB = C_u$$
$$dS\Delta + rB = C_d$$

con Δ y B escogidos para que $C = S\Delta + B$. Combinando esto de la siguiente manera:

$$uS\Delta - C_u = r(S\Delta - C) \quad \text{probabilidad} = q$$
$$dS\Delta - C_d = r(S\Delta - C) \quad \text{probabilidad} = 1-q$$

sumándo término a término se obtiene:

$$q(uS\Delta - C_u) + (1-q)(dS\Delta - C_d) = r(S\Delta - C) \qquad \text{...(Anexo BIN-4)}$$

arreglando esto de manera conveniente, se tiene:

$$m_S S\Delta - m_C C = r(S\Delta - C) \qquad \text{...(Anexo BIN-5)}$$

finalmente, utilizando la definición de Ω se obtiene:

$$m_C - r = \Omega(m_S - r) \qquad \text{...(Anexo BIN-6)}$$

Esto indica que el "exceso" de la tasa de rendimientos esperados, (sobre una tasa libre de riesgo), equivale a Ω tiempo del exceso de la tasa de rendimientos del stock (para un call). Si $\Omega \geq 1$ y la tasa esperada de rendimientos en el stock es más grande, (pequeña), que la tasa libre de riesgo, entonces, la tasa esperada de rendimientos nunca será más pequeña, (grande), que la tasa esperada de rendimientos en el stock.

Existe la misma relación para los put's:

$$m_P - r = \Omega(m_S - r)$$

Pero ahora, $\Omega \leq 0$, por lo que sólo se dice que, si la tasa esperada de rendimientos en el stock es más grande, (pequeña), que la tasa libre de riesgo, entonces la tasa esperada de rendimientos en el put es más pequeña, (grande), que la tasa libre de riesgo.

EJEMPLO BIN-2:

Todo lo anterior lo podemos ilustrar con un ejemplo numérico, que para facilitar la comprensión, retomaremos los resultados del desarrollo del ejemplo numerico anterior, (EJEMPLO BIN 1) donde se suponía lo siguiente:

$S = 80,\quad K = 80,\quad n = 3,\quad u = 1.5,\quad d = 0.5,\quad r = 1.1,$

Del desarrollo anterior se sabe:

- $C = 34.065,$
- $C_u = 60.463,\ C_d = 2.974,$
- $C_{uu} = 107.272,\ C_{ud} = 5.454$ y $C_{dd} = 0.$

Y como es necesario conocer la distribución actual del precio stock, sea:

- $q = 0.7.$

Se pueden calcular los valores iniciales de m_s, v_s, m_c y v_c, directamente de las definiciones anteriores, obteniendo los siguientes resultados:

- $m_s = qu + (1-q)d$
  $= 0.7(1.5) + 0.3(0.5)$
  $= 1.2.$

- $m_s - r = 1.2 - 1.1 = 0.1.$

- $v^2_s = qu^2 + (1-q)d^2 - [qu + (1-q)d]^2$
  $= 0.7(1.5)^2 + 0.3(0.5)^2 - [0.7(1.5) + 0.3(0.5)]^2$
  $= 1.575 + 0.075 - 1.44$
  $= 0.21.$

- $v_s = (0.21)^{1/2} = 0.458.$

- $m_c = [qC_u + (1-q)C_d] \div C$
  $= [0.7(60.463) + 0.3(2.974)] \div 34.065$
  $= (42.3241 + 0.8922) \div 34.065$
  $= 43.2163 \div 34.065$
  $= 1.269.$

- $m_c - r = 1.269 - 1.1 = 0.169.$

- $v^2_c = q(1-q)[(C_u - C_d) \div C]^2$
  $= 0.7(0.3)[(60.463 - 2.974) \div 34.065]^2$
  $= 0.21(2.848)$
  $= 0.598.$

- $v_c = (0.598)^{1/2} = 0.773.$

Para verificar que los valores son consistentes con las formulas propuestas anteriormente, hacemos las valuaciones respectivas:

- $\Omega \quad = \Delta(S \div C)$
  $= [C_u \quad C_d] \div C(u\text{-}d)$
  $= (60.463 - 2.974) \div 1(34.065)$
  $= 1.688.$

para confirmar esta fórmula, notemos que:

- $v_C \quad = \Omega v_S$
  $=(1.688)(0.458)$
  $= 0.773.$

- $m_C - r = \Omega(m_S - r)$
  $= 1.688(1.2 - 1.1)$
  $= 1.688(.1)$
  $= 1.69.$

Si se quiere calcular el total de rendimientos esperados sobre, por ejemplo, dos periodos, se podrían utilizar las fórmulas, es decir:

- $m_S(2) =[qu + (1\text{-}q)d]^2$
  $= [0.7(1.5) + 0.3(0.5)]^2$
  $= (1.2)^2$
  $= 1.44.$

- $mC(2) = [\, q^2C_{uu} + 2q(1\text{-}q)C_{ud} + (1\text{-}q)^2C_{dd}] \div C$
  $= [(0.7)^2(107.27) + 2(0.7)(0.3)(5.454) + (0.3)^2(0)] \div 34.065$
  $= [0.49(107.27) + 0.42(5.454)] \div 34.065$
  $= 54.85298 \div 34.065$
  $= 1.61.$

➥ ANEXO 1 DEL MODELO BINOMIAL (Anexo Bin)

ANEXO BIN-1:

P.D. $v^2{}_s = q(1-q)(u-d)^2$.

$$
\begin{aligned}
v^2{}_s &= q(u-m_s)^2 + (1-q)(d-m_s)^2.\\
&= q[u - (qu + (1-q)d)]^2 + (1-q)[d - (qu + (1-q)d)]^2.\\
&= q(u - qu - (d - qd))^2 + (1-q)(d - qu - d + qd)^2.\\
&= q(u - qu - d + qd)^2 + (1-q)(qd - qu)^2.\\
&= q[u^2 + q^2u^2 + d^2 + q^2d^2 - 2u^2q - 2ud + 2qud + 2qud - 2q^2ud - 2d^2q]\\
&\quad + (1-q)[q^2d^2 - 2q^2ud + q^2u^2].\\
&= qu^2 + q^3u^2 - 2q^2u^2 + q^2u^2 - q^3u^2\\
&\quad + qd^2 + q^3d^2 - 2q^2d^2 + q^2d^2 - q^3d^2\\
&\quad - 2udq + 2q^2ud + 2q^2ud - 2q^3ud - 2q^2ud + 2q^3ud.\\
&= qu^2 + qd^2 - 2qud - u^2q^2 - d^2q^2 + 2q^2ud.\\
&= q(u^2 + d^2 - 2ud) - q^2(u^2 + d^2 - 2ud).\\
&= q(u-d)^2 - q^2(u-d)^2.\\
&= q(1-q)(u-d)^2 \blacksquare
\end{aligned}
$$

ANEXO BIN-2:

P.D. $v_c = \Omega v_s$

$$v_s = [q(1-q)(u-d)^2]^{1/2} \qquad \ldots(①)$$
$$v_c = [q(1-q)((C_u - C_d) \div C)^2]^{1/2} \qquad \ldots(②)$$

de (①):

$$v^2{}_s = q(1-q)(u-d)^2.$$
$$q(1-q) = v^2{}_s \div (u-d)^2$$

en (②):

$$v^2{}_c = [v^2{}_s \div (u-d)^2][(C_u - C_d) \div C)^2]$$
$$v^2{}_c = v^2{}_s[(C_u - C_d) \div C(u-d)]^2.$$

como:

$$
\begin{aligned}
\Omega &= (S \div C)[(C_u - C_d) \div (u-d)S]\\
&= (C_u - C_d) \div (u-d)C.
\end{aligned}
$$

entonces:

$$v^2{}_c = \Omega^2 v^2{}_s.$$
$$v_c = \Omega v_s \blacksquare$$

ANEXO BIN-3:

P.D. $r[C_u - C_d - (u-d)C] + [uC_d + dC_u] = 0$

$C = [pC_u + (1-q)C_d] \div r$

como:

$p = (r-d) \div (u-d)$ y
$(1-p) = (u-r) \div (u-d).$

entonces:

$$
\begin{aligned}
rC &= [(r-d) \div (u-d)]C_u + [(u-r) \div (u-d)]C_d \\
rC(u-d) &= rC_u - dC_u + uC_d - rC_d \\
ruC - rdC &= rC_u - dC_u + uC_d - rC_d \\
0 &= -ruC + rdC + rC_u - dC_u + uC_d - rC_d \\
&= r[-uC + dC + C_u - C_d] + uC_d - dC_u \\
&= r[C_u - C_d - C(u-d)] + uC_d - dC_u \blacksquare
\end{aligned}
$$

ANEXO BIN-4:

P.D. $q(uS\Delta - C_u) + (1-q)(dS\Delta - C_d) = r(S\Delta - C)$

$q(uS\Delta - C_u) = qr(S\Delta - C)$ ...(①)
$(1-q)(dS\Delta - C_d) = (1-q)r(S\Delta - C)$ ...(②)

sumando término a término:

$$
\begin{aligned}
q(uS\Delta - C_u) + (1-q)(dS\Delta - C_d) &= qr(S\Delta - C) + (1-q)r(S\Delta - C) \\
&= [qr + (1-q)r](S\Delta - C) \\
&= r(q + 1 - q)(S\Delta - C) \\
&= r(S\Delta - C) \blacksquare
\end{aligned}
$$

ANEXO BIN-5:

P.D. $q(uS\Delta - C_u) + (1-q)(dS\Delta - C_d) = msS\Delta - mcC$

$$
\begin{aligned}
q(uS\Delta - C_u) + (1-q)(dS\Delta - C_d) &= quS\Delta - qC_u + dS\Delta - C_d - qdS\Delta + qC_d \\
&= S\Delta(qu + d - qd) - qC_u - C_d + qC_d \\
&= S\Delta(qu + (1-q)d) - [qC_u + (1-q)C_d]
\end{aligned}
$$

como: $mc = [qC_u + (1-q)C_d] \div C$

entonces: $[qC_u + (1-q)C_d] = Cmc$

$\therefore \quad q(uS\Delta - C_u) + (1-q)(dS\Delta - C_d) = S\Delta ms - Cmc \blacksquare$

ANEXO BIN-6:

P.D. $m_s S\Delta - m_c C = r(S\Delta - C)$

como:

$\Omega = (S+C)\Delta \quad \Rightarrow \quad \Delta = (C+S)\Omega$

entonces:

$$m_s S[(C+S)\Omega] - m_c C = r[S[(C+S)\Omega] - C]$$
$$m_s C\Omega - m_c C = rC\Omega - rC$$
$$m_s\Omega - m_c = r\Omega - r$$
$$m_s\Omega - r\Omega = m_c - r$$
$$(m_s - r)\,\Omega = m_c - r \blacksquare$$

OBSERVACIONES ADICIONALES:

Aunque el valor del call en términos del bien subyacente, no depende de q, la tasa esperada de rendimientos sí depende, y lo hace a través de la tasa esperada de rendimientos del bien subyacente, m_s. Si es más alta la probabilidad de que el movimiento del stock sea hacia arriba, la tasa esperada de rendimientos crecerá, y por lo tanto la tasa esperada de rendimientos de la opción.

Además, el riesgo y la tasa esperada de rendimientos de un call, estarían estancados si el call está en equilibrio al inicio y al final del periodo. Si el precio del call está generalmente fuera de equilibrio, pero si se mueve hacia atrás de algunos periodos, (o uno solo), entonces podemos calcular el riesgo y la tasa de rendimientos sobre dichos intervalos; sustituyendo el precio actual del mercado en el lugar del valor actual de la formula, C. Si el precio del call está aún más fuera de equilibrio, el riesgo y la tasa de rendimientos de la participación accionaria del call podría ser cualquier cosa.

Modelo para Fijación de Precios de Activos de Capital

Capítulo IV

Modelo de Fijación de Precios de Activos de Capital

Introducción:

Al inicio de los años cincuenta y a lo largo de los sesenta surgen nuevas corrientes económicas relacionadas con los mercados de capitales, algunas de ellas publicadas en el "Journal of Royal Statistical Society and Econometric" y compiladas en 1964 por Paul Cootner en el libro "The Random Character of Stock Market Price"(1); donde se menciona por primera vez la hipótesis de caminata aleatoria o trayectoria al azar. En base a este libro y publicaciones posteriores surge el concepto de "Mercado Eficiente", un mercado eficiente es aquel en el que los precios de las transacciones reflejan íntegramente toda la información conocida y disponible para todos los participantes del mercado, el nuevo concepto es aceptado después de observar algunos resultados de análisis estadísticos aplicados a los principales mercados de capitales, pues estos concuerdan con las observaciones presentadas en un mercado eficiente.

Mientras tanto en 1952, Harry Markowitz publica en el "Journal of Finance" su teoría de selección de carteras de inversión, la cual sentó las bases para el desarrollo del "Mode lo de Fijación de precios de Activos de Capital", ("Capital Asset Pricing Model" (CAPM)), el cual, si no bien establece a la perfección el precio de un activo a causa de sus hipótesis, si proporciona un método eficiente en la solución del problema del riesgo. Tiempo después en 1973 Mark Rubinstein publica un artículo en el que fusiona la Teoría de Finanzas Empresariales y la Teoría de Administración de Carteras de Inversión en el CAPM, usando métodos analíticos que han servido de base establecer implicaciones importantes para la política financiera de la empresa.

Rendimiento:

El rendimiento o interés de un instrumento bursátil es el monto que se obtiene de invertir dinero en él durante cierto periodo y se puede expresar en términos de unidades monetarias, (monto específico de dinero), o de porcentaje, (tasa de interés).

Cuando se forma un portafolio de inversión, es lógico inferir que será constituido por aquellos instrumentos que tengan un alto rendimiento, aunque no hay que perder de vista el nivel de riesgo implícito en el rendimiento: un instrumento que tiene un alto rendimiento implica generalmente, un gran riesgo, puesto que es la manera de justificar esas ganancias.

El rendimiento esperado para una inversión se puede ver como:

$$r = \frac{\text{dividendos} + (\text{precio final} - \text{precio inicial})}{\text{precio inicial}}$$

(1) Cootner, P. H. (ed), M. I. T. Press, Cambrige Mass, 1964.

y al no existir dividendos se tiene:

$$r = \frac{\text{utilidad o perdida}}{\text{precio inicial}}$$

ARBITRAJE:

El concepto de arbitraje se puede entender simplemente, como el proceso que se presenta cuando un inversionista tiene la oportunidad de comprar barato y vender caro y en consecuencia existe otro inversionista que compra caro y tiene que vender barato, lo cual provoca que los beneficios de dicha transacción sean diferentes para los participantes del mercado.

Un ejemplo de arbitraje sería el siguiente:

Supóngase que el inversionista A y el inversionista B son participantes de los mercados de Singapur y Francfort, y ambos están interesados en algodón, pero el inversionista A se da cuenta que el precio en Singapur es menor al de Francfort, compra en Singapur y le vende a B en Francfort; simultaneamente, otros inversionistas hacen la misma transacción y ésta demanda propicia el equilibrio entre los dos mercados de manera casi inmediata; equilibrandose los precios de Singapur con los de Francfort; por lo tanto A obtiene ganancias "extras" resultado de la venta a B, mientras que B perdió al no conocer la misma información que A. Por lo tanto A y B, al hacer una misma transacción, tuvieron diferentes condiciones de mercado; es decir, existieron oportunidades de arbitraje.

Por lo tanto un mercado eficiente es aquel en el que no existen oportunidades de arbitraje pues todos los participantes tienen acceso a la misma información y por lo tanto a ganancias equivalentes en circunstancias análogas.

RIESGO:

El riesgo, habitualmente, es un concepto que está asociado con un incidente que afecte de manera adversa a alguna situación o actividad y el procedimiento de estimación a veces puede resultar difícil; por lo cual, es necesario recurrir a la probabilidad para poder hacerlo; por lo que el riesgo se va a definir como la probabilidad de que ocurra un evento desfavorable dentro de una situación particular.

Dentro de un ambiente financiero, el riesgo que lleva inmerso un instrumento bursátil está en función de múltiples eventos como la variación de la economía en la que se encuentra, la situación financiera de la entidad de origen, (en el caso de las acciones de su empresa emisora y en el de las opciones del poseedor del bien subyacente), políticas de gobierno, prestigio (calificación), bursatilidad del instrumento; en fin, son tantos los eventos que pueden afectar al valor del instrumento y por lo tanto a sus rendimientos, que se ha hecho la siguiente clasificación del riesgo:

RIESGO ESPECÍFICO O EVITABLE:

El riesgo especifico o evitable, (riesgo del emisor), es aquel que depende del inversionista, como por ejemplo, la imagen de la empresa, la transparencia de sus transacciones y el cumplimiento de ellas, la tecnología de punta que lo vuelva obsoleto, la nueva competencia de mercado, etcétera; ya que este riesgo es dependiente de alguna manera del poseedor del instrumento, podemos suponer que existe una manera de minimizarlo, y esto se logra por medio de la diversificación de los instrumentos del portafolio de inversión; es decir comprando instrumentos que estén poco relacionados entre sí.

RIESGO SISTEMÁTICO O INEVITABLE:

Dentro del riesgo sistemático o inevitable, (riesgo del mercado), podemos encontrar a todos aquellos acontecimientos que un inversionista por sí solo no puede controlar; como por ejemplo la inflación, el crecimiento económico nacional, la política de mercado, etcétera; y que por lo tanto siempre van a estar presentes y no se van a poder eliminar. En otras palabras, el inversionista que posea el portafolio de inversión más diversificado del mercado, está expuesto a este tipo de riesgo.

Por lo anterior, el riesgo de un instrumento bursátil puede expresarse de la siguiente forma:

RIESGO TOTAL = RIESGO SISTEMÁTICO + RIESGO ESPECÍFICO.

Markowitz propone dentro de su modelo de selección de carteras de inversión que el criterio de selección fuera minimizar la varianza del rendimiento de la cartera, ya que si ésta fuera cero no habría incertidumbre, es decir mientras menor sea la varianza, menor será el posible rango de variación de los rendimientos, menor la incertidubre y por lo tanto el nivel de riesgo también disminuirá. Por lo tanto, la idea de Markowitz es usar la varianza como medida indirecta del riesgo, pues realmente lo que se esta midiendo es el grado de incertidumbre. Dentro de este modelo, las definiciones de rendimiento y riesgo es la siguiente:

RENDIMIENTO DENTRO DEL MODELO DE MARKOWITZ:

Una medio analítico de definir rendimientos esperados es con la esperanza matemática, dado que éstos se pueden ver como una variable aleatoria (R), con un número finito de resultados posibles (n), y una probabilidad asignada a cada uno de ellos (p_i). Entonces, la esperanza matemática de R se define como:

$$\bar{r} = E[R] = \sum_{i=1}^{n} r_i \, p_i$$

Es decir, el rendimiento esperado de algun instrumento de inversión se calcula como la media aritmética de una distribución de frecuencias.

Para un portafolio, la manera de medir el rendimiento esperado es análoga, pero como no se invierte la misma proporción de dinero en cada instrumento que lo forma, hay que tomar en cuenta dicha proporción al momento de estimarlo, resultando:

$$r_p = \sum_{j=1}^{m} r_j P_j$$

donde:
r_j = rendimiento esperado para el instrumento j.
P_j = proporción invertida en el instrumento j.
m = número total de valores que constituyen al portafolio p.

Riesgo dentro del modelo de Markowitz:

El riesgo de una inversión es considerado como la posibilidad de que el rendimiento real difiera del rendimiento esperado, en base a esto surge la idea de conceptualizar a la varianza de los rendimientos esperados como una medida del riesgo y al minimizar la varianza, se estaría minimizando el riesgo y encontrando así un criterio de selección de cartera, tomando en cuenta que la clase de riesgo que se esta manipulando es el riesgo especifico.

El riesgo de un instrumento o desviación estándar se define como:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (r_i - \bar{r})^2 p_i}$$

donde:

$\bar{r}$ = media de los rendimientos esperados.
r_i = rendimiento esperado para el instrumento i.
p_i = probabilidad de que r_i ocurra.
n = número total de posibilidades.

No es posible tratar de hacer una analogía con el riesgo de un portafolio, pues éste no depende sólo del riesgo de cada instrumento que lo forma, además hay que tomar en cuenta la relación existente entre ellos, pues eso puede aumentar o disminuir el riesgo.

Dado que la covarianza mide la relación existente entre los elementos de una muestra, en este caso se utilizará para ponderar la relación entre los instrumentos que conforman al portafolio, y se define como sigue:

$$Cov(x_i, x_j) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (r_i - \bar{r})(r_j - \bar{r})}{n - 1} = \sigma_{ij}$$

donde:

$i \neq j$ y r_i y r_j son los rendimientos respectivos de los instrumentos del portafolio.

Tomando en cuenta el concepto anterior se expresa el riesgo de un portafolio en base a la relación existente entre los rendimientos de los diversos instrumentos del mismo, con una matriz, a la cual se le conoce como "Matriz de Covarianzas":

$$
\begin{array}{ccccc}
 & r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\
r_1 & \sigma^2_1 & Cov(r_1\,,\,r_2) & & Cov(r_1\,,\,r_n) \\
r_2 & Cov(r_2\,,\,r_1) & \sigma^2_2 & & Cov(r_2\,,\,r_n) \\
\cdots & & & & \cdots \\
r_n & Cov(r_n\,,\,r_1) & Cov(r_n\,,\,r_2) & \cdots & \sigma^2_n
\end{array}
$$

para poder calcular el riesgo del portafolio, hacen falta otros conceptos que se definirán en la siguiente parte, después de eso, se definirá formalmente su cálculo.

CARTERA EFICIENTE:

El concepto de cartera eficiente está muy ligado al de riesgo, pero también involucra al de rendimiento esperado para un portafolio de inversión; es decir, tanto a las proporciones de cada instrumento dentro del portafolio como a sus rendimientos esperados; al plantear la definición como sistema de ecuaciones lineales, se tiene:

$$r_1P_1 + r_2P_2 + \ldots + r_iP_i + \ldots + r_mP_m = r_p$$

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_i + \ldots + P_m = 1$$

$$\text{con } P_i \geq 0$$

P_i = proporción del instrumento i dentro del portafolio de inversión

dado que los rendimientos esperadas para cada instrumento, (r_i), son conocidos y es fácil calcular el rendimiento esperado asociado al portafolio (r_p), lo que se plantea es un sistema de 2 ecuaciones con "m" incógnitas, esto implica que el sistema tiene un número infinito de soluciones, del que se obtiene un conjunto infinito de portafolios con el mismo rendimiento esperado, pero cada uno con diferente varianza; es sensato pensar que cualquier inversionista va a preferir el que tenga la menor varianza para asegurar su inversión, en base a esto se puede establecer la siguiente definición:

Cartera Eficiente:

Una "Cartera Eficiente" es aquel portafolio de inversión con rendimiento esperado r_p que garantice que su varianza asociada es la mínima entre el conjunto de portafolios con el mismo rendimiento esperado. Análogamente, un portafolio de inversión con una varianza σ^2 es una "Cartera Eficiente" si el rendimiento esperado r_p es el máximo entre el conjunto de portafolios con la misma varianza.

El ideal de cada inversionista sería poder conocer todas las posibles carteras eficientes dentro de un mercado en las cuales pueda invertir; entonces, al generalizar la manera de obtener una cartera eficiente asociándola a cualquier rendimiento esperado r_p, se tendría que resolver el siguiente problema:

$$\min \sigma^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} P_i\ P_j\ \sigma_{ij}$$

sujeto a:

$$r_1P_1 + r_2P_2 + \ldots + r_iP_i + \ldots + r_mP_m = r_p$$

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_i + \ldots + P_m = 1$$

$$\text{con } P_i \geq 0;\ i = 1,2,\ldots,m$$

P_i = proporción del instrumento i dentro del portafolio de inversión

para resolverlo, se tiene que tomar en cuenta el rango de valores aceptables del rendimiento esperado dentro de un mercado para un portafolio de inversión. Entonces, al encontrar la solución al sistema anterior se están encontrando el conjunto de carteras eficientes que existen dentro de un mercado y de las que un inversionista puede escoger en base a sus preferencias respecto al riesgo; a este conjunto se le llama 'Frontera Eficiente".

Por otro lado, el Modelo de selección de carteras de inversión propuesto por William Sharpe, se basa en la relación que existente entre el precio de mercado y el riesgo de los diversos instrumentos de inversión del mercado, expresada en forma lineal y llamada Línea Característica, definiendo el concepto de la siguiente manera:

LÍNEA CARACTERÍSTICA:

Al tratar de estimar los rendimientos futuros de un instrumento, se condicionan en base a un rendimiento particular de mercado, por ejemplo, si el rendimiento del mercado para el próximo periodo es de X, ¿cuál será el rendimiento esperado para el instrumento?; al contestar esta pregunta se tendrá que establecer un parámetro para aproximar la incertidumbre de las estimaciones condicionadas; en cambio si se utiliza información histórica sólo se tendrá que agregar el supuesto de que la relación existente entre el riesgo y el rendimiento continuará en el futuro.

La línea que resulta del cálculo que describe la relación histórica entre el rendimiento en exceso de un instrumento, (rendimiento real menos rendimiento libre de riesgo), sobre el rendimiento del portafolio de mercado, es conocida como línea característica, y se usa para aproximar la relación esperada de un portafolio de inversion en base a sus rendimientos en exceso, describiendo también el comportamiento posible de un instrumento particular o de todo un portafolio de inversión con respecto al comportamiento del mercado.

Como se menciona anteriormente, el riesgo que esta inmerso en cualquier inversión se divide en dos partes: riesgo sistemático o riesgo de mercado y riesgo especifico o riesgo del emisor. Tomando en cuenta lo anterior, Sharpe expresa la clasificacion de riesgo de la siguiente manera:

Alfa (α):

El coeficiente α expresa el riesgo especifico o del emisor, aquel riesgo que se puede evitar atraves de la diversificación del portafolio de inversión, y que está en relación directa con los rendimientos en exceso del portafolio, pues conforme crece este riesgo la prima que se paga por asumirlo es mayor del que se obtiene al invertir en un instrumento libre de riesgo.

La intersección de la línea característica con el eje de las ordenadas se interpreta como el rendimiento en exceso de cualquier instrumento bursátil o conjunto de ellos: como el modelo se desarrolla dentro de un mercado eficiente, podemos afirmar que α de un instrumento y por lo tanto la de un portafolio de inversión siempre será cero. La conclusión anterior es facil de verificar:

- Supongamos que $\alpha < 0$: esto implica que con una combinación de títulos libres de riesgo se obtendría un mejor rendimiento sin asumir riesgo; lo que implica que el instrumento sería descartado como alternativa de inversión; por lo tanto $\alpha \geq 0$.

- Supongamos que $\alpha > 0$: esto implica que los rendimientos del instrumento tienden a crecen más que los de los instrumentos libres de riesgo, lo que implica que su precio también crece; pero esto haría que el equilibrio del mercado se viera afectado temporalmente, ya que se están obteniendo ganancias sin asumir todo el nivel de riesgo asociado tanto al precio como al rendimiento, y como todos los inversionistas tienen acceso a la misma información, todos van a tender a la misma toma de decisiones y esto va a provocar que se vuelva a estabilizar el mercado, pero van a existir condiciones de arbitraje lo que contradice los supuestos del modelo; por lo tanto $\alpha = 0$, para cualquier intrumento y para cualquier portafolio de inversión.

Analogamente, se considera α desde el punto de vista del riesgo, se puede observar que dentro de un portafolio de inversión si se seleccionan instrumentos que tengan poca relación entre sí, el inversionista puede llegar a eliminar el riesgo relativo del portafolio; es decir, si el portafolio está bien diversificado siempre tendrá $\alpha = 0$.

Beta (β):

El coeficiente β es usado para expresar al riesgo sistemático o riesgo de mercado, aquel riesgo al que siempre está expuesto el inversionista, resultando ser el objeto de estudio de cualquier modelo de selección de cartera de inversion, pues, aunque el modelo se desarrolle dentro de la hipótesis del mercado eficiente, este riesgo no se puede evitar.

En conclusión, β es el camino que tiene el inversionista para estimar la prima resultante de haber asumido un riesgo dentro de un mercado eficiente; es decir β mide el riesgo sistemático através del ángulo de inclinación, (pendiente), de la línea característica; Através de β, también se puede medir la sensibilidad (volatilidad), del rendimiento en exceso tanto de un instrumento como de un portafolio con respecto al comportamiento del mercado, (portafolio de mercado), comportándose de la siguiente manera:

- Si β = 1, implica que los rendimientos excesivos de la acción se mueven de manera proporcional a los del mercado. En otras palabras, el stock tiene el mismo inevitable o sistemático riesgo que el mercado. Y es muy conveniente para un inversionista que busca riesgo neutral.

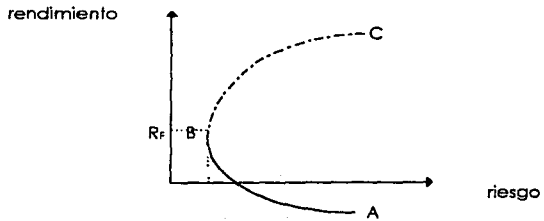
- Si β > 1, implica que los rendimientos excesivos del stock se mueven más que los del mercado; es decir tiene más riesgo sistemático que el mercado, y es atractivo para un inversionista agresivo.

- Si β < 1, implica que los rendimientos excesivos del stock tienen menos riesgo sistemático que los del mercado, y es adecuado para un inversionista defensivo o con mucha aversión al riesgo.

Trabajos empíricos que se han realizado en cuanto a la β, muestran que datos pasados con los que se ha calculado, sirven para inferir betas futuras de una manera óptima. Sin embargo, la habilidad de predección depende del tamaño del portafolio y de la estabilidad del mercado en el que se encuentre.

DERIVACIÓN INTUITIVA:

Teniendo en cuenta el supuesto de ventas en corto y además que el inversionista se encuentra dentro de un mercado eficiente, y de acuerdo con la Teoría Moderna de Portafolios de Inversión, se puede afirmar que cada participante tiene el mismo diagrama de posibilidades de inversión dentro de un mercado en particular, es decir un Portafolio de Mercado (M) constituido por todos los instrumentos de inversión disponibles en el mercado y que sean atractivos para los inversionistas.

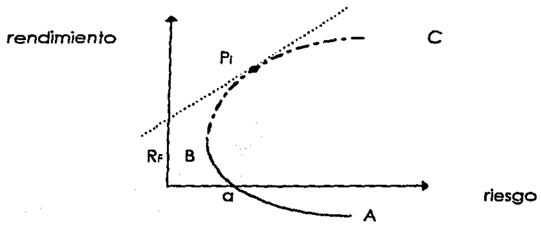


donde:

ABC: Conjunto de todos los portafolios de varianza mínima de todos los posibles rendimientos del mercado.

BC: Frontera Eficiente, con R_F rendimiento libre de riesgo.

Cuando se permiten oportunidades de otorgar y pedir prestamos con un nivel bajo de riesgo es posible formar un portafolio de instrumentos de inversión en el que cada inversionista puede encontrar alternativas para sus expectativas de riesgo, esto se obtiene al trazar una línea tangente a la Frontera Eficiente en el punto de intersección del nivel de riesgo y de rendimiento que cubran la perspectiva del inversionista.



donde:

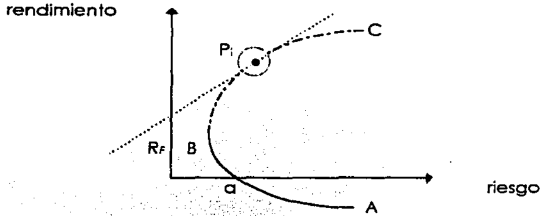
ABC: Conjunto de todos los portafolios de varianza mínima de todos los posibles rendimientos del mercado.

BC: Frontera Eficiente, con R_F rendimiento libre de riesgo.

.... Línea tangente.

P_i: Cartera Eficiente.

Si todos los inversionistas tienen expectativas similares de inversión, entonces la Frontera Eficiente va a ser la misma para todos y en consecuencia se obtendrá una sola Cartera Eficiente, de la que se tomará su vector de soluciones como guía para cada inversionista; por ejemplo, si el 3% del total del capital invertido en la Cartera Eficiente corresponde a acciones de IBM, el 3% del capital de cada inversionista también será invertido en acciones de IBM; por lo que se puede concluir que el portafolio de inversión (P_i) de cada participante será una combinación de los instrumentos del portafolio de mercado (M), (aunque también algunos se puedan sustituir por instrumentos libres de riesgo como bonos del gobierno por ejemplo): por lo tanto, con la línea tangente a la Frontera Eficiente, (Línea Característica de Mercado), y una vecindad alrededor del punto de tangencia (P_i) proporcionarán el conjunto de Carteras Eficientes disponibles para los participantes.



donde:

ABC: Conjunto de todos los portafolios de varianza mínima de todos los posibles rendimientos del mercado.

BC: Frontera Eficiente, con R_F rendimiento libre de riesgo.

……… Línea Característica de Mercado.

P_i: Cartera Eficiente.

Línea Característica de Mercado:

La línea tangente a la Frontera Eficiente se llama Línea Característica de Mercado, y resulta del cálculo que describe la relación histórica entre el rendimiento en exceso de un instrumento y del portafolio de mercado y se usa para aproximar la relación esperada para dos conjuntos de inversiones de acuerdo a sus rendimientos en exceso.

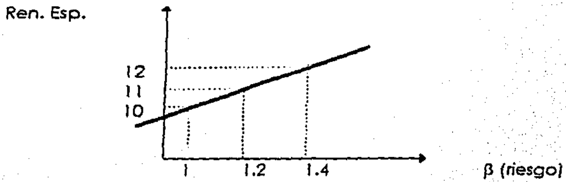
Ejemplo: Supongamos que existen dos portafolios de inversión, (A y B), con las características siguientes:

Portafolio	Rendimiento Esperado	Beta β
A	10 %	1
B	12 %	1.4

En base a esto, se forma un portafolio C con la mitad de los instrumentos de A y la mitad de los instrumentos de B; en base a las definiciones del cálculo del riesgo y rendimiento de un portafolio obtenemos la siguiente información de C:

$$R_C = (10 + 12) \div 2 = 11$$
$$\beta_C = (1 + 1.4) \div 2 = 1.2$$

En consecuencia existen ahora tres posibilidades de inversión, que gráficamente se verían así:



La línea que se forma al relacionar el riesgo y el rendimiento de los posibles portafolios formados con proporciones de los portafolios A y B siempre será descrita por la siguiente ecuación de una línea recta:

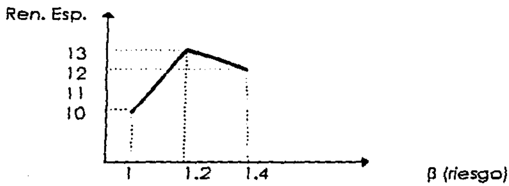
$$R_P = a + b\beta_P$$

que resulta al resolver el siguiente sistema:

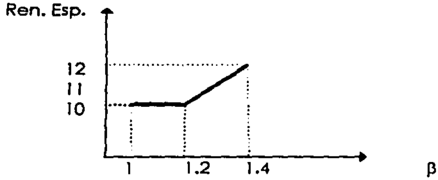
$$R_P = X R_A + (1 - X)R_B \qquad \beta_P = X\beta_A + (1 - X)\beta_B$$

Es fácil demostrar que la línea que conjunta la relación anterior es recta:

- Supongamos que existe un portafolio D con un rendimiento esperado de 13% y una $\beta = 1.2$, eso haría que el inversionista vendiera el portafolio C y comprara el D, pues asume el mismo riesgo, pero obtiene más rendimiento, lo que significaría aprovechar una oportunidad de arbitraje; por lo tanto esto no es posible pues estamos en un mercado Eficiente.



- Supongamos que existe un portafolio E con un rendimiento esperado de 10% y una β = 1.2, lo que significaría que el nivel de riesgo no está compensado por el rendimiento esperado; es decir, no sería un portafolio atractivo para invertir en él; por lo tanto tampoco es posible que un portafolio de este tipo exista.

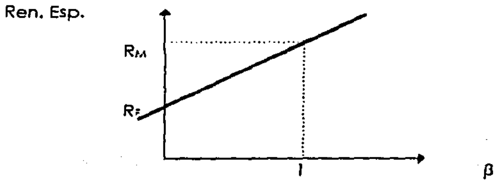


Por lo tanto podemos concluir que para portafolios con rendimiento igual deben de tener asociado un mismo nivel de riesgo, es decir la relación entre el riesgo y el rendimiento de un portafolio es lineal.

Ya que todos los posibles portafolios de inversión van a ser combinaciones del portafolio de mercado (M) y de instrumentos libres de riesgo, la línea recta que resuma a los riesgos y rendimientos posibles para cualquier mercado eficiente tiene que construirse a partir de ellos; de la siguiente manera:

- La beta del mercado siempre será: $\beta_M = 1$; con un rendimiento asociado R_M.
- El rendimiento de un instrumento libre de riesgo es R_F y por definición, su beta asociada es $\beta = 0$.
- Cada punto de la recta es de la forma $R_i = a + b\beta_i$.

Por lo tanto, para los dos puntos conocidos tenemos:



$\beta_M = 1 \Rightarrow$ $R_M = a + b\beta_M$
$b = R_M - a.$

$\beta_F = 0 \Rightarrow$ $R_F = a + b\beta_F$
$R_F = a.$

Sustituyendo en $R_i = a + b\beta_i$, se obteniene la ecuación que describe a todas las posibles relaciones riesgo-rendimiento en un mercado en particular, sin importar que el portafolio de origen sea eficiente o no:

$$R_i = R_F + \beta_i(R_M - R_F)$$

a esta ecuación se le conoce como la Línea de Mercado de Garantía, y apoya la hipótesis de que el riesgo realmente importante en un portafolio es el sistemático, además de que la relación entre el rendimiento de dos instrumentos de inversión, (uno sólo o todo un portafolio), se puede expresar como la diferencia entre el valor de las betas de cada uno de ellos, pues entre más grande sea el nivel de riesgo que asuma un inversionista más grande será el rendimiento esperado.

En conclusión, el CAPM se puede expresar de la siguiente manera:

$$R_i = R_F + \beta_i(R_M - R_F) \ \ldots \ (1)$$

si $\beta_i = \sigma_i \div \sigma^2_M$

$$R_i = R_F + \frac{(R_M - R_F)}{\sigma_M}(\sigma_{iM} \div \sigma_M)$$

donde:

$(R_M - R_F) \div \sigma_M$ = Precio de mercado del riesgo.

$\sigma_i \div \sigma_M$ = Medida de como el riesgo de cualquier instrumento afecta al portafolio de mercado.

En otras palabras, el CAPM asegura que el rendimiento esperado de un instrumento es igual a la tasa libre de riesgo más el precio de mercado por el monto del riesgo en él; que es el mismo concepto que maneja la Línea Característica de Mercado, por lo que concluyendo que son equivalentes.

DESARROLLO FORMAL:

Existen dos caminos para encontrar una Cartera Eficiente, minimizando riesgos o maximizando rendimientos. Para el siguiente desarrollo utilizaremos el segundo bajo la hipótesis de ventas en corto donde la capacidad de un inversionista para pedir y otorgar prestamos son montos ilimitados. La función que describe los rendimientos de la tasas libres de riesgo es la siguiente:

$$\theta = (\bar{R}_P - R_F) \div \sigma_P$$

donde:

$$\sigma_P = [\textstyle\sum^n_{i=1} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum^n_{i=1} \sum^n_{j=1, j\neq i} x_i x_j \sigma_{ij}]^{1/2}$$
$$\bar{R}_P = \textstyle\sum^n_{i=1} x_i \bar{R}_i$$
$$R_F = \textstyle\sum^n_{i=1} x_i R_F$$

Utilizando un poco de álgebra y propiedades de derivadas, se puede afirmar que para derivar θ con respecto a todos los instrumentos que forman al portafolio, (cada x_i), es conveniente verla como un producto de funciones; es decir:

$$\theta = F_1(x) F_2(x)$$

$$\theta' = F_1(x) F'_2(x) + F_2(x) F'_1(x)$$

donde:

$$F_1(x) = \textstyle\sum^n_{i=1} x_i \bar{R}_i - \sum^n_{i=1} x_i R_F$$
$$F_2(x) = [\textstyle\sum^n_{i=1} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum^n_{i=1} \sum^n_{j=1, j\neq i} x_i x_j \sigma_{ij}]^{-1/2}$$

lo que implica, fijando un x_k:

$$F'_1(x) = \bar{R}_k - R_F$$

$$F'_2(x) = -\tfrac{1}{2} [\textstyle\sum^n_{i=1} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum^n_{i=1} \sum^n_{j=1, j\neq i} x_i x_j \sigma_{ij}]^{-3/2} [2x_k \sigma_k^2 + 2\sum^n_{j=1, j\neq k} x_j \sigma_{kj}]$$

resultando:

$$\begin{aligned}\theta' &= (\textstyle\sum^n_{i=1} x_i \bar{R}_i - \sum^n_{i=1} x_i R_F)[-\tfrac{1}{2} [\sum^n_{i=1} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum^n_{i=1} \sum^n_{j=1, j\neq i} x_i x_j \sigma_{ij}]^{-3/2} [2x_k \sigma_k^2 + 2\sum^n_{j=1, j\neq k} x_j \sigma_{kj}]] \\ &\quad + [\textstyle\sum^n_{i=1} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum^n_{i=1} \sum^n_{j=1, j\neq i} x_i x_j \sigma_{ij}]^{-1/2} (\bar{R}_k - R_F)\end{aligned}$$

para encontrar el máximo, igualamos $\theta' = 0$; y multiplicamos por σ_P, lo que implica:

$$0 = \textstyle\sum^n_{i=1} x_i (\bar{R}_i - R_F) \div \sigma^2_P [\sum^n_{j=1, j\neq k} x_j \sigma_{kj}] + (\bar{R}_k - R_F)$$

se define $\lambda = (\bar{R}_P - R_F) \div \sigma^2_P$

por lo que para cada instrumento k, se tiene la siguiente ecuación:

$$\lambda(X_1\sigma_{1k} + X_2\sigma_{2k} + \ldots + X_i\sigma_{ik} + \ldots + X_n\sigma_{nk}) = \bar{R}_k - R_F \qquad \ldots (2)$$

con la que se obtiene el vector de soluciones que maximizen el rendimiento en un portafolio, convirtiéndolo en una Cartera Eficiente.

Si existen condiciones homogéneas, entonces todos los inversionistas van a elegir la misma Cartera Eficiente para invertir. Si además existen condiciones de equilibrio, estará integrada por todos los instrumentos disponibles en una proporción equivalente a la del portafolio de mercado M.

En base al resultado anterior, podemos asegurar que la primera parte de la ecuación representa $\lambda Cov(R_k, R_M)$, pues recordemos que

$$R_M = \sum_{i=1}^{n} R_i x_i$$

Entonces, se tiene:

$$Cov(R_k, R_M) = E[(R_k - \bar{R}_k)(R_M - \bar{R}_M)]$$
$$Cov(R_k, R_M) = E[(R_k - \bar{R}_k)(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{R}_i x_i)]$$

arreglando el segundo termino:

$$Cov(R_k, R_M) = E[(R_k - \bar{R}_k)(\sum_{i=1}^{n} x_i (R_k - \bar{R}_k))]$$

al distribuir la suma:

$$Cov(R_k, R_M) = E[x_1(R_k - \bar{R}_k)(R_1 - \bar{R}_1) + x_2(R_k - \bar{R}_k)(R_2 - \bar{R}_2) + \ldots + x_k(R_k - \bar{R}_k)(R_k - \bar{R}_k) + \ldots + x_n(R_k - \bar{R}_k)(R_n - \bar{R}_n)]$$

Como la esperanza de la suma de variables aleatorias es la suma de las esperanzas, la ecuación queda:

$$Cov(R_k, R_M) = x_1 E[(R_k - \bar{R}_k)(R_1 - \bar{R}_1)] + x_2 E[(R_k - \bar{R}_k)(R_2 - \bar{R}_2)] + \ldots + x_k E[(R_k - \bar{R}_k)^2] + \ldots + x_n E[(R_k - \bar{R}_k)(R_n - \bar{R}_n)]$$

como se estableció que x_i representaba la proporción de un instrumento dentro del portafolio, y se concluyó que debe ser igual a la proporción en el portafolio de mercado y en base a la definición de covarianza podemos concluir que:

$$\lambda Cov(R_k, R_M) = \bar{R}_k - R_F \quad \ldots (3)$$

como se tienen disponibles todos los instrumentos del mercado para formar todos los portafolios de inversión, uno de ellos también es el de Mercado M, que tiene una parte de cada instrumento; al resolver la ecuación anterior para ese portafolio y sabiendo que $Cov(R_M, R_M) = \sigma^2_M$, obtenemos:

$$\lambda\sigma^2_M = \bar{R}_M - R_F$$
$$\lambda = (\bar{R}_M - R_F) \div \sigma^2_M$$

al sustituirlo en la ecuación (3), y despejando a $\bar{R}_k$:

$$\bar{R}_k = R_F + [(\bar{R}_M - R_F) \div Var(R_M)]Cov(R_k, R_M)$$

$$\bar{R}_k = R_F + [(\bar{R}_M - R_F) \div \sigma^2_M]\, \sigma_{kM}$$

$$\bar{R}_k = R_F + \beta_k(\bar{R}_M - R_F)$$

con lo que se completa la demostración, ya que se llega a la expresión característica del CAPM.

CAPM y el Precio de Instrumentos de Inversión:

El CAPM puede usarse para describir el equilibrio de mercado en terminos de rendimientos o de precios, el siguiente desarrollo tratará de expresar el modelo en terminos de precios, involucrando un poco de álgebra y estableciendo las siguientes definiciones:

P_i	= precio actual del instrumento i.
P_M	= precio actual del portafolio de mercado M.
Y_i	= valor en dolares del instrumento i al final de un periodo; incluyendocualquier pago por dividendos.
Y_M	= valor en dolares del portafolio de mercado M al final de un periodo; incluyendo cualquier pago por dividendos.
$Cov(Y_i, Y_M)$	= la covarianza entre Y_i Y_M.
$Var(Y_M)$	= σ^2_M = la varianza en Y_M.
r_F	= tasa de rendimimento libre de riesgo, $(1 + R_F)$.

el rendimiento de un instrumento se definió como:

$$R_i = \frac{\text{precio final - precio inicial}}{\text{precio inicial}}$$

en base a la formula definida anteriormente ya las nuevas definiciones, obtenemos para cualquier instrumento i:

$R_i = (Y_i - P_i) \div P_i = (Y_i \div P_i) - 1$

análogamente para el portafolio de mercado M:

$R_M = (Y_M - P_M) \div P_M = (Y_M \div P_M) - 1$

al sustituirlo en la ecuación caracterítica del CAPM:

$$\bar{R}_i = R_F + \left(\frac{\bar{R}_M - R_F}{\sigma^2_M}\right)\sigma_{iM}$$

se obtiene:

$$(\bar{Y}_i \div P_i) - 1 = R_F + [(\bar{Y}_M \div P_M) - 1 - R_F]\,\frac{Cov(R_i, R_M)}{\sigma^2_M} \qquad \ldots(A1)$$

sustituyendo las nuevas definiciones en la definición de $Cov(R_i, R_M)$:

$$Cov(R_i, R_M) = E\left[\left(\frac{(Y_i - P_i)}{P_i} - \frac{(\bar{Y}_i - P_i)}{P_i}\right) * \left(\frac{(Y_M - P_M)}{P_M} - \frac{(\bar{Y}_M - P_M)}{P_M}\right)\right]$$

$$= E\left[\frac{(Y_i - \bar{Y}_i)}{P_i} * \frac{(Y_M - \bar{Y}_M)}{P_M}\right]$$

$$= (P_i P_M)^{-1} E[(Y_i - \bar{Y}_i) * (Y_M - \bar{Y}_M)]$$

$$= (P_i P_M)^{-1} Cov(Y_i, Y_M) \blacksquare$$

análogamente se obtiene la expresión para σ^2_M:

$$\sigma^2_M = (1 \div P^2_M)\, Var(Y_M) \blacksquare$$

sustituyendo estos conceptos en la ecuación (A1), resulta:

$$(\bar{Y}_i \div P_i) - 1 = R_F + [(\bar{Y}_M \div P_M) - 1 - R_F]\,\frac{(P_i P_M)^{-1} Cov(Y_i, Y_M)}{(1 \div P^2_M)\, Var(Y_M)}$$

por las definiciones establecidas, sabemos que $r_F = (1 + R_F)$. Al susutituirlo se obtiene:

$$(\bar{Y}_i \div P_i) - 1 = r_F - 1 + [(\bar{Y}_M \div P_M) - 1 - r_F - 1]\,\frac{(P_i P_M)^{-1} Cov(Y_i, Y_M)}{(1 \div P^2_M)\, Var(Y_M)}$$

$$(\bar{Y}_i \div P_i) = r_F + [(\bar{Y}_M \div P_M)]\,\frac{(P_i)^{-1} Cov(Y_i, Y_M)}{(P_M)^{-1} Var(Y_M)}$$

$$= r_F + \left(\frac{\bar{Y}_M - r_F P_M}{P_M}\right)(P_M \div P_i)\,\frac{Cov(Y_i, Y_M)}{Var(Y_M)}$$

$$= r_F + [(\bar{Y}_M - r_F P_M)] \frac{Cov(Y_i, Y_M)}{P_i \, Var(Y_M)}$$

multiplicando por P_i:

$$\bar{Y}_i = P_i r_F + [(\bar{Y}_M - r_F P_M)] \frac{Cov(Y_i, Y_M)}{Var(Y_M)}$$

finalmente, resolviendo para P_i:

$$P_i = (r_F)^{-1} \left[\bar{Y}_i - (\bar{Y}_M - r_F P_M) \right] \frac{Cov(Y_i, Y_M)}{Var(Y_M)} \blacksquare$$

Por lo tanto, la ecuación anterior es la expresión en terminos de precios del CAPM.

Ecuaciones para estimar el valor presente de la proyección de los flujos de pagos para un periodo determinado son muy comunes; pero la definición introducida por el CAPM donde al rendimiento esperado se le restan los pagos compensatorios por los riesgos asumidos, obteniéndose el rendimiento neto por medio del valor presente, es algo demasiado trascendental; es decir, la contribución fundamental del CAPM es haber establecido para cualquier instrumento las siguientes definiciones:

- Medida del riesgo del precio de mercado:

$$[(\bar{Y}_M - r_F P_M)] \div \sigma^2_M$$

- Medida relevante del riesgo:

$$\sigma_{iM} \div \sigma^2_M$$

Uso del CAPM para valuación de Opciones:

El CAPM, como su nombre lo indica, surge como un modelo que sirve para valuar activo de capital, generalmente precios de acciones, pero al buscar nuevas alternativas de valuación de opciones, este modelo puede llegar a ser un camino para lograrlo, ya que el mercado de opciones ha crecido a tal punto que sus condiciones influyen de una manera más importante en el precio de las opciones.

En base al desarrollo que se hizo para estimar el precio de un instrumento bursátil a través del CAPM, se hará el siguiente ejemplo de como se podría usar, tomando en cuenta las observaciones siguientes:

- La información histórica del precio de la opción ya tiene implicito el comportamiento del precio de bien subyacente.

- El precio de mercado estará en función del índice S&P500, por ser el más representativo del mercado de opciones.

Ejemplo:

Supónganse los siguientes datos:

$Cov\ (Y_i, Y_M) = .8$ $\sigma^2_M = .3$ $r_F = 15\%$

Valor de la opción al final del periodo. Y_i	Valor del precio de mercado al final del periodo. Y_M
25.2	28.6
28.4	30.7
29.9	31.5
27.5	29.9

lo que implica:

- $\bar{Y}_i = 27.75$
- $\bar{Y}_M = 30.175$

Al usar la fórmula del CAPM en función de precios obtenemos:

$$P_i = (r_F)^{-1}\ [\ \bar{Y}_i - (\ \bar{Y}_M - r_F P_M)]\frac{Cov(Y_i, Y_M)}{Var(Y_M)}$$

obtenemos:

$$P_i = (.15)^{-1}\ [27.75 - (30.175 - (.15)(26.5))](.8/.3)$$

$$P_i = (.15)^{-1}\ [27.75 - (\ 30.175 - 3.975)](2.666)$$

$$P_i = (.15)^{-1}\ [27.75 - (26.2)](2.666)$$

$$P_i = (.15)^{-1}\ (1.55)(2.666)$$

$$P_i = (.15)^{-1}\ (4.1323)$$

$$P_i = 27.6\ \blacksquare$$

Por lo tanto el valor estimado de la opción para el siguiene periodo es de \$ 27.6, lo que concuerda con la tendencia del mercado y con los datos con los que se suponen, ya que por tener una Cov $(Y_i, Y_M) = .8$, indica que están muy correlacionados y que los movimientos del precio de mercado van a ser análogos al del precio de la opción, como se muestra a lo largo de la información historica de la tabla.

Modelo Black & Scholes

Capítulo V

Modelo Black & Scholes

Introducción:

En 1973, Fisher Black y Myron Scholes, publican un artículo que marca el inicio de la teoría moderna de asignación de precios a opciones, en el cual, por medio de sus investigaciones financieras, llegaron a establecer un modelo matemático que arroja una ecuación diferencial que al manipularla por medio de diversas funciones puede utilizarse para valuar casi cualquier tipo de producto derivado.

En el siguiente capítulo se describirá el modelo de Black & Scholes y los elementos esenciales con los que fue desarrollado, así como su uso para la valuación de opciones.

Conceptos Esenciales:

Procesos Estocásticos:

Una variable cuyos posibles resultados evolucionan en el tiempo de manera aleatoria, se dice que sigue un proceso estocástico. Los primeros trabajos al respecto tuvieron su origen en el estudio del movimiento aleatorio de pequeñas partículas de polvo o de polen suspendidas en un gas, más conocido como movimiento Browniano, que realizaron Einstein y Smoluchowski a principios de siglo.

En base a los resultados que tome una de estas variables, el proceso estocástico asociado puede clasificarse en dos tipos, de variable discreta o de variable continua; y de acuerdo con la periodicidad que se presenten dichos resultados, se pueden definir procesos estocásticos de tiempo continuo o de tiempo discreto; un proceso de tiempo discreto es aquel cuya variabilidad no es constante, si no que sólo lo hace en momentos determinados; por el contrario, un proceso de tiempo continuo es aquel que va cambiando conforme transcurre el tiempo.

Los bienes subyacentes, en general, suelen seguir procesos de variable discreta, pero es frecuente y más fácil tratarlos como procesos de variable continua, ya que los movimientos mínimos permitidos son tan pequeños que se pueden despreciar. Con respecto al tiempo, se podría decir que siguen procesos de tiempo discreto, ya que casi todos los mercados cierran al menos una vez al día, y durante este periodo los precios no pueden cambiar, aunque en la práctica, los precios siguen cambiando aún si el mercado está cerrado, ya que el precio de apertura no tiene que ser el precio de cierre del día anterior; por lo tanto, el modelo de Black & Scholes supone que el proceso estocástico seguido por el precio de los bienes subyacentes es un proceso de variable continua y tiempo continuo.

PROCESOS DE MARKOV:

Un proceso estocástico que puede predecirse en base a su información actual, sin importar su comportamiento pasado, se dice que sigue un proceso de Markov; es decir, tiene la propiedad de pérdida de memoria.

Con respecto a los bienes subyacentes, la suposición convencional, es que siguen procesos de Markov; lo que significa que toda la información que afecta a su precio futuro está contenida en el valor de mercado actual de dicho bien; por lo que se supone también que toda la información pasada sólo servirá como respaldo estadístico sin aportar datos sobre la evolución de los precios. Al conjunto de supuestos anteriores se les llama "Eficiencia Débil de Mercado".

PROCESO DE WIENER:

Una variable z sigue un proceso de Wiener cuando sus cambios Δz en un intervalo Δt (limite de $\Delta t \rightarrow 0$), tiene las siguientes propiedades:

1.- $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$; donde ε es una variable aleatoria que se distribuye como una normal de media cero y varianza 1, ($\varepsilon \sim N[0,1]$).

2.- Δz sigue un proceso de Markov.

La propiedad 1 implica que Δz tiene también una distribución normal pero con media cero y varianza Δt, ($\Delta z \sim N[0,\Delta t]$).

Bajo el supuesto de que los bienes subyacentes siguen procesos de tiempo continuo, se puede considerar un intervalo de tiempo mayor que se pueda descomponer en intervalos de tiempo que sean los que tiendan a cero para que cada subintervalo siga un proceso de Wiener; garantizando que se puede calcular la media y la varianza para cada incremento Δz ya que tiene una distribución normal; obteniendo de esta manipulación que $\partial z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$; generalizando este resultado y *agregando una función determinística del tiempo transcurrido y considerando una* varianza por unidad de tiempo no necesariamente igual a 1 se llega a que una variable aleatoria $\mathcal{X}$ es:

$$\partial \mathcal{X} = \alpha\partial t + \beta\partial z$$

donde α y β son constantes y $\alpha\partial t$ es la parte que describe a la evolución de $\mathcal{X}$ en el tiempo; es decir, representa la tendencia general del movimiento de $\mathcal{X}$. El término $\beta\partial z$ es la parte aleatoria de $\mathcal{X}$, con β igual a su desviación estándar.

PROCESOS DE ITO:

Un proceso de Ito es una proceso de Wiener donde α y β son funciones determínisticas del valor de $\mathcal{X}$ y del tiempo transcurrido t.

$$\partial \mathcal{X} = \alpha(x,t)\partial t + \beta(x,t)\partial z$$

SUPUESTOS:

Los supuestos con los que se inicia el desarrollo del Modelo de Black & Scholes son bastante peculiares, pues mientras que se apegan un poco más a la realidad de cualquier mercado financiero, se deben de cumplir una serie de condiciones complicadas de comprobar para el comportamiento del precio del bien subyacente; y son:

- El precio del bien subyacente (P_s), sigue un proceso de Ito del tipo:

$$\partial P_s = \mu P_s$$
$$\partial t = \sigma P_s \partial z$$

con μ y σ, la media y la desviación estándar respectivamente.

- La venta en corto de activos está permitida, sin restricciones sobre el uso del dinero así generado.
- No existen costos de transacción ni impuestos por las operaciones que se lleguen a realizar durante la vigencia del contrato.
- El mercado se comporta como una variable de tiempo continuo.
- Todos los activos son infinitamente divisibles.
- No existen pagos de dividendos durante la vigencia de la opción.
- La tasa libre de rendimiento (r), es continua e igual para todos los plazos.
- No existen posibilidades de arbitraje

Los supuestos anteriores implican que el precio de cualquier bien subyacente puede tener dos o más posibles valores al final de un periodo, que dicho periodo no necesariamente tiene que ser igual a un día, pues se puede considerar tan pequeño como se necesite, además de que el mercado puede estar siempre abierto y el transcurrir de cada instante genera intereses libres de riesgo; y basta con tener eficiencia débil del mercado. Por otro lado, sólo se pueda aplicar a opciones europeas, cuando la mayoría de las opciones en Estados Unidos son americanas y la vigencia de los contratos abarca, por lo menos, un periodo de pago de dividendos.

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE BLACK & SCHOLES:

El resultado que se obtiene del modelo de Black & Scholes es la siguiente ecuación diferencial, consecuencia de un riguroso desarrollo matemático.

$$\frac{\partial V_C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 P_s \frac{\partial V_C}{\partial P_s} + r P_s \frac{\partial V_C}{\partial P_s} - r V_C = 0$$

donde:

P_s = Precio actual del bien subyacente, (precio stock).
V_C = Precio de la opción call.
r = Tasa de rendimiento libre de riesgo anual y continua.

T = Tiempo de vigencia de la opción.
t = Cualquier momento dentro de la vigencia de la opción. ($t \in [0.T]$)
σ = Componente de riesgo sobre las variaciones del precio del bien subyacente, medido por la desviación estándar, (volatilidad o riesgo).

ECUACIÓN DEL MODELO DE BLACK & SCHOLES PARA VALUACIÓN DE OPCIONES:

El modelo desarrollado por Black y Scholes puede ser usado para estimar el valor de una opción call, usando la siguiente formula:

$$V_C = N(d_1)P_S - N(d_2)(E \div e^{rT}) \qquad \ldots (1)$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln(P_S \div E) + (r + .5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad \ldots (1.1)$$

$$d_2 = \frac{\ln(P_S \div E) + (r - .5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad \ldots (1.2)$$
$$= d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

con:
P_S = Precio actual del bien subyacente, (precio stock).
E = Precio de ejercicio de la opción.
r = Tasa de rendimiento libre de riesgo anual.
T = Tiempo de vigencia de la opción.
σ = Componente de riesgo sobre las variaciones del precio del bien subyacente, medido por la desviación estándar, (volatilidad o riesgo).

De la fórmula anterior se puede notar que $E \div e^{rT}$ es el valor presente del precio de ejercicio de la opción a una tasa de rendimiento continua.

También se puede notar que $N(d_1)$ y $N(d_2)$ son la representación de la distribución normal de probabilidad de d_1 y d_2, que a su vez son funciones que representan la Δ de cada opción.

Para poder obtener el precio para una opción put basta con usar la paridad put/call de la que se habla en el segundo capítulo.

EJEMPLO:

Considerar una opción call que expira en tres meses, que tiene un precio de ejercicio de \$40, la tasa libre de riesgo es de 5%, el precio del bien subyacente es de \$36 y el riesgo del mismo es del 50%: es decir se tienen los siguientes valores:

P_S = 36,
E = 40,

$r \quad = 0.05,$
$T \quad = (12 \div 3) = 0.25,$
$\sigma \quad = 0.50.$

para poder utilizar la formula (1) de Black & Scholes primero hay que encontrar el valor de d_1 y d_2 a través de las ecuaciones 1.1 y 1.2:

$$d_1 = \frac{\ln(36 \div 40) + (0.05 + .5(0.50)^2)0.25}{0.50\sqrt{0.25}}$$

$$= [-0.1054 + (0.175)0.25] \div 0.50(0.5)$$

$$= -0.06165 \div 0.25$$

$$= -0.2466$$

$$\approx -0.25$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$= -0.25 - 0.5(\sqrt{.25})$$

$$= -0.50$$

para encontrar los valores que corresponden a $N(d_1)$ y $N(d_2)$ basta con consultar una tabla de valores de la distribución normal de media 0 y varianza 1; obteniéndose:

$$N(d_1) = N(-0.25) = 0.4013$$

$$N(d_2) = N(-0.50) = 0.3085,$$

con toda la información necesaria, ya se puede utilizar la formula (1) de Black & Scholes de la siguiente manera:

$$V_c = N(d_1)P_s - N(d_2)(E \div e^{rT})$$

$$V_c = (0.4013)36 - (0.3085)(40 \div e^{0.05 * 0.25})$$

$$V_c = 14.45 - 12.19$$

$$V_c = 2.26 \blacksquare$$

Por lo tanto, el precio de la opción call usando la formula del modelo de Black & Scholes es de $2.26.

CONCLUSIONES:

El análisis de los modelos anteriores no se realiza con la intención de compararlos para saber cual es el que logra asignar la prima de cada opción de manera más precisa, sino mostrar como son valuadas las opciones desde diferentes puntos de vista, de hecho, el propósito inicial es hacer una propuesta de como influye el uso de opciones dentro de un portafolio de mercado y como las condiciones del mismo afectan al precio de la opción; por medio del Modelo de Fijación de Activos de Capital, logrando tener un modelo que cumpla otro tipo de expectativas para los participantes del mercado, cumpliendo así con uno de los propósitos de la tesis al presentar como se evalúa una opción dentro de un portafolio de mercado.

En lo que refiere al Modelo Binomial y al Black & Scholes, se logra mostrar la evolución de los modelos de valuación, es decir, al inicio se parte de una idea casi intuitiva, como es la distribución binomial, la cual se va perfeccionando y formalizando hasta llegar a un modelo que involucra conceptos avanzados de matemáticas, como procesos estocásticos y ecuaciones diferenciales; lo mas interesante es poder observar que la teoría financiera esta sustentada por un desarrollo matemático riguroso que muestra una parte de las gran mundo teórico que se puede expresar a través de ellas.

BIBLIOGRAFÍA:

LIBROS

- COX Jhon C., RUBINSTEIN Mark; "Options Markets"; Prentice Hall; 1985.
- DECOVNY Sherree; "Swaps"; Editorial Limusa & BMV; 1994.
- ELTHON & GRUBER; "Modern Portfolio: Theory and investment analysis"
- HULL;"Options, Futures and other derivative securities";
- MANSELL Catherine; "Las nuevas Finanzas en México"; Editorial Milenio; 1992.
- MARQUEZ DIEZ CANIEDO Javier;"Carteras de Inversión: fundamentos teóricos y modelos de selección óptima"; Editorial Limusa;
- RODRIGUEZ DE CASTRO James; "Introducción al análisis de productos financieros derivados"; Editorial Limusa & BMV; 1995.
- SHARPE William F.;"Investment".
- VAN HORNE James C.; "Financial Management and Policy"; Prentice Hall; 10ª edición, 1995.
- WESTON J. Fred, BRIGHAM Eugene F.; "Finanzas en Administración"; Nueva Editorial Interamericana; volumen 1; 1985.
- WILMOTT Paul, HOWISON Sam, DEWYNNE Jeff; "The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction"; Cambridge University Press; 1995.
- BURDEN, Richard I.;"Análisis Numérico"; Editorial Prindle Weber & Schmidt,Boston Massachussets; 1978.
- EITEMAN David, SONEHILL Arthur y MOFFETT Michael;"Multinational Business Finance";Addison-Wesley; 6ª edición.

TESIS

- CUEVAS RODRIGUEZ Juana;
"El mercado de productos derivados en México; un modelo dinámico para estimar la volatilidad del índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores"; Licenciatura en Economía, ITAM, 1994.
- DE LA ROSA ARANA Eloína, DIAZ MESA Diana;
"Hacia un mercado de productos derivados",Actuaria, UNAM, 1995.

Í N D I C E