

57  
2e;



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**Algunas Pruebas No-Paramétricas de  
Bondad de Ajuste en Estadística**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

**A C T U A R I A**

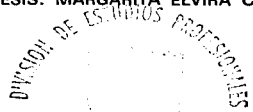
**P R E S E N T A :**

**ANGELICA LOZA OROZCO**

DIRECTORA DE TESIS: MARGARITA ELVIRA CHAVEZ CANO.



MEXICO, D. F.



1997

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

**FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Algunas Pruebas No-Paramétricas de Bondad de Ajuste  
en Estadística

realizado por Angélica Loza Orozco

con número de cuenta 8620491-0 , pasante de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

Mat. Margarita Elvira Chávez Cano

Propietario

Act. Eloina de la Rosa Arana

Propietario

M. en E. Raquel Buenrostro Sánchez

Suplente

Act. Leonardo López Monroy

Suplente

Fis. Armando Rojas Niño

*MELO*  
*[Signature]*  
*[Signature]*  
*[Signature]*  
*[Signature]*  
*AROS*

Consejo Departamental de Matemáticas

*[Signature]*  
Act. Agustín Roman Aguilar

# Algunas Pruebas No-Paramétricas de Bondad de Ajuste en Estadística

Angélica Loza Orozco

Directora de tesis:  
Mat. Margarita Elvira Chávez Cano

Septiembre 1997



---

***Con cariño a ...***

***Héctor, mi papá; por apoyarme, quererme, educarme  
y ser un ejemplo de fortaleza.***

***Adriana, mi hermana; por su complicidad y amistad.***

***Angela, mi mamá; que aunque ya no esta con nosotros,  
siempre la recuerdo como una gran amiga.***

***Alejandro, mi novio; un ser extraordinario, por su amor,  
amistad, paciencia, compañía, inmensa ayuda, ...***

***mi familia, por razones de espacio, no menciono a nadie  
en particular; me siento orgullosa del conjunto que formamos.***



---

## *Gracias a ...*

**Margarita**, por la dirección en este trabajo  
y el tiempo que siempre amablemente me brindó.

**Fico y Susana**, por su apoyo y cariño.

**Elisa**, por sus ánimos e inspiración.

**Dra. Karina**, que por transitividad,  
era amiga de mi mamá; llegó a ser amiga mía.

**Dr. González, Dr. Gutiérrez, Dra. Ramírez**,  
por la gran influencia que tuvieron en mi vida.

**Javier Fernández**, por sus inolvidables clases, y a todos  
los profesores que compartieron sus conocimientos conmigo.

**Rodolfo San Agustín y Hugo Rincón**, por su amistad.

**Paco**, por darme a conocer **LT<sub>E</sub>X** y ayudarme a editar  
este trabajo; además de su agradable compañía.

**mis amigos**, Antonio, Paty, Leticia, Mauricio,  
Gerardo, Ayde, Ian, Hugo Reyes, Hugo Guadarrama,  
Raquel, Eloina, Diana, Verónica, Oscar,  
Leonardo, Armando, Gerardo Sousa, Adriana Ortiz,  
Marco Antonio, Germán, Lénica, Claudia,  
Manuel, Paco y Julio (el trío dinámico).

la **Facultad de Ciencias**, por ese ambiente mágico.

la vida que me ha dado tanto ...

---





---

Pensamientos que he leído últimamente:

*"... quizás había llegado más lejos, arrastrándome con mi pierna coja, de lo que habrían llegado la mayoría de los hombres con un par de piernas sanas. Porque, demasiado consciente de mi capacidad, no me permitía pausa ni disminución alguna del ritmo."*

Claudio, el dios;  
Robert Graves

*"... además del amor por ... hecho realidad, existe en el reino de lo posible una cantidad infinita de amores no realizados ..."*

La insoportable levedad del ser;  
Milán Kundera

*"El acto de desobediencia, como acto de libertad, es el comienzo de la razón"*

Erich Fromm

*"La sumisión y tolerancia no son el camino moral, pero sí con frecuencia el más cómodo"*

Martin Luther King

*"Una vez terminado el juego, el rey y el peón vuelven a la misma caja"*

Proverbio italiano

*"La vida fluye como los ríos y nadie puede bañarse dos veces en la misma agua"*

Rabindranath Tagore



# Índice General

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 Pruebas Basadas en la Distribución <math>\chi^2</math></b>	<b>3</b>
1.1 Surgimiento y desarrollo	3
1.2 Distribución $\chi^2$	8
1.2.1 Propiedades básicas de la distribución $\chi^2$	9
1.2.2 Manejo de la tabla $\chi^2$	9
1.3 Aplicación de la prueba de bondad de ajuste $\chi^2$	10
1.3.1 Recomendaciones	10
1.3.2 Aplicación de la prueba de bondad de ajuste $\chi^2$	10
1.4 Ejemplos de la aplicación	12
1.4.1 Problema sobre la teoría de Mendel	12
1.4.2 Problema de las monedas "honestas"	13
1.4.3 Un resultado interesante	14
1.4.4 Problema para probar normalidad	17
1.4.5 Problema en física	19
<b>2 Pruebas Basadas en la FDE</b>	<b>21</b>
2.1 Función de Distribución Empírica (FDE)	21
2.2 Definición de las estadísticas basadas en la FDE	23
2.3 Pruebas FDE	25
2.3.1 Parámetros de escala y localización desconocidos	25
2.3.2 Parámetros desconocidos de forma	26
2.4 Aplicación para hipótesis simples	27
2.4.1 Ejemplo	27
2.4.2 Niveles de significancia	28
2.5 Potencia de las pruebas para hipótesis simples	30
2.6 Aplicación para hipótesis compuestas	30
2.6.1 Prueba de Lilliefors (Distribución Normal)	30
2.6.2 Ejemplo	32
2.6.3 Pruebas para la Distribución Exponencial	33
2.6.4 Pruebas para la Distribución de Valor Extremo	34
2.6.5 Pruebas para la Distribución Weibull	35

## ÍNDICE GENERAL

---

2.6.6	Prueba cuando $\alpha$ es conocida, reducción a 2.6.4 . . . . .	35
2.6.7	Prueba para la Distribución Gamma . . . . .	36
2.6.8	Prueba para la Distribución Logística . . . . .	38
2.6.9	Prueba para la Distribución Cauchy . . . . .	39
2.7	Potencia de las pruebas para hipótesis compuestas . . . . .	40
2.7.1	El efecto en la potencia al conocer ciertos parámetros . . . . .	40
2.7.2	Uso de Estadísticas Suficientes . . . . .	41
2.8	Pruebas FDE para distribuciones discretas . . . . .	41
2.8.1	La FDE para datos discretos: Hipótesis simples . . . . .	42
2.8.2	Ejemplo . . . . .	43
<b>3</b>	<b>La estadística Kolmogorov-Smirnov <math>D</math></b> . . . . .	<b>45</b>
3.1	Importancia de la estadística $D$ . . . . .	45
3.1.1	Bandas de confianza . . . . .	45
3.1.2	Tamaño de la muestra . . . . .	46
3.2	Comparación entre las pruebas $\chi^2$ y $D$ . . . . .	46
3.3	Otras estadísticas basadas en la FDE . . . . .	48
3.3.1	Hipótesis simples . . . . .	48
	<b>Conclusiones</b> . . . . .	<b>51</b>
	<b>A Tablas</b> . . . . .	<b>53</b>
	<b>Bibliografía</b> . . . . .	<b>80</b>

# Índice de Figuras

1.1	Diferentes curvas $\chi^2$ . . . . .	8
1.2	Uso gráfico de la tabla $\chi^2$ . . . . .	9
1.3	Uso gráfico de la tabla $\chi^2$ . . . . .	10
1.4	Región de rechazo . . . . .	11
2.1	Gráfica de la FDE . . . . .	22
2.2	Gráfica de $S_n(x)$ de los datos de la tabla 2.1 y sobrepuesta una función normal acumulada . . . . .	31
3.1	Encontrando los límites de las categorías . . . . .	48



# Índice de Tablas

1.1	Cálculos de $X^2$ para el problema 1.4.3 inciso (a)	16
1.2	Cálculos de $X^2$ para el problema 1.4.3 inciso (b)	17
2.1	Despliegue de datos para los ejemplos de la sección 2.4.1 y la sección 2.6.2	29
A.1	Distribución $\chi^2$	54
A.2	Distribución Normal estandarizada, probabilidad de las colas	55
A.3	Distribución Normal estandarizada, probabilidad acumulada	56
A.4	Estadística $D$ Kolmogorov-Smirnov	57
A.5	Valores críticos para la prueba de Lilliefors	58
A.6	Estadísticas FDE, hipótesis simple	59
A.7	Niveles de significancia para $A^2$	60
A.8	Cuantiles para Normalidad con $\mu$ ó $\sigma^2$ desconocidas	61
A.9	Cuantiles para Normalidad, $\mu$ y $\sigma^2$ desconocidas	62
A.10	Constantes para calcular $\alpha$ de $A^2 N(\mu, \sigma^2)$ [caso 3]	63
A.11	Niveles de significancia, para normalidad [caso 3]	64
A.12	Prueba Exponencial [caso 2]	65
A.13	Niveles de significancia, para una Exponencial [caso 2]	66
A.14	Cuantiles para $\text{Exp}(\alpha, \beta)$ con $\alpha$ y $\beta$ desconocidas	67
A.15	Cuantiles para $\text{Exp}(\alpha, \beta)$ [caso 3] $\sqrt{n}D^+$ , $\sqrt{n}D^-$ , $\sqrt{n}D$ , $\sqrt{n}V$	68
A.16	Cuantiles para $\text{Exp}(\alpha, \beta)$ [caso 3] $W^2$ , $U^2$ , $A^2$	69
A.17	Cuantiles para Dist. De Valor Extremo o Weibull $W^2$ , $U^2$ , $A^2$	70
A.18	Cuantiles de las Dist. De Valor Extremo o Weibull $D^+$ , $D^-$ , $D$ , $V$	71
A.19	Cuantiles para la Distribución Gamma [caso 1] $W^2$ , $U^2$ , $A^2$	72
A.20	Cuantiles para la Distribución Gamma [caso 2] $W^2$ , $U^2$ , $A^2$	73
A.21	Cuantiles para la Distribución Gamma [caso 3] $W^2$ , $U^2$ , $A^2$	74
A.22	Cuantiles para la Distribución Logística $W^2$ , $U^2$ , $A^2$	75
A.23	Cuantiles para la Distribución Logística $D^+ \sqrt{n}$ , $D \sqrt{n}$ , $V \sqrt{n}$	76
A.24	Cuantiles para la Distribución Cauchy para $W^2$	77
A.25	Cuantiles para la Distribución Cauchy para $A^2$	78
A.26	Estadística FDE $S$ , para hipótesis simples discretas	79



## ÍNDICE DE TABLAS

---

# Introducción

“Querer conocer es, siempre, querer entender, querer comprender cuáles son las causas y las características de un objeto, de un acto, de un fenómeno, querer prever sus consecuencias. También, si no en todos, sí en muchos casos, se trata de descubrir la forma de intervenir en los acontecimientos, para influir en ellos de manera conveniente. En todo esto hay, como es lógico, muchas opiniones y variados procedimientos”. Brom [4] aplica esta reflexión a la historia, pero se puede aplicar a cualquier campo de conocimiento del hombre; en este trabajo la aplicaremos en el sentido de que queremos conocer la distribución de una población a partir de una muestra, y analizaremos dos procedimientos para tener fundamentos respecto a lo que proponemos.

Desde los inicios de la estadística, los estadísticos han comenzado su análisis proponiendo una distribución para sus observaciones y luego, han verificado si esta hipótesis es cierta. Así, a través de los años ha aparecido una gran cantidad de procedimientos de prueba, el estudio de éstos es conocido como *prueba de bondad de ajuste*.

Por *bondad de ajuste*, entenderemos los métodos que examinan qué tan bien está de acuerdo una muestra de datos con una distribución dada como su población. Es decir, verifica la compatibilidad de un conjunto de valores muestrales observados con una distribución dada, cualquier tipo de distribución puede ser verificado mediante una *prueba de bondad de ajuste*, estas son pruebas diseñadas para hipótesis nulas, las cuales son proposiciones acerca de la forma de la función de distribución acumulativa o función de densidad de probabilidad de la población de la cual fue tomada la muestra. En el esquema formal de prueba de hipótesis la hipótesis nula  $H_0$  es que una variable aleatoria  $X$  dada sigue una ley de probabilidad establecida  $F(x)$  (por ejemplo, la distribución normal); la variable aleatoria puede provenir de un proceso que está bajo investigación.

El complemento de la hipótesis nula se conoce como hipótesis alternativa, que es necesariamente muy extensa, ya que la forma de la distribución hipotética puede ser totalmente diferente o variar mucho en cuanto al valor de los parámetros. Por lo anterior las *pruebas de bondad de ajuste* son aplicadas con la esperanza de que la hipótesis nula no será rechazada, ya que en caso contrario no se obtiene ninguna información útil sobre la población estudiada.

Las técnicas de *bondad de ajuste* aplicadas para probar  $H_0$  están basadas en medir de alguna forma, la conformidad de los datos muestrales con la distribución hipotética, o equivalentemente su discrepancia de ella. Las técnicas usualmente dan pruebas estadísticas formales y las medidas de consistencia o de discrepancia son las estadísticas de prueba.

Desde principios de siglo se ha utilizado la prueba de la  $\chi^2$  para *bondad de ajuste* y apartir de 1950, el interés en el análisis de datos categóricos renovó la discusión sobre la teoría de las pruebas ji-cuadradas en general (i.e. aquellas pruebas que, bajo ciertas condiciones, tienen una distribución  $\chi^2$  asintótica), y cómo mejorar su desempeño en la práctica estadística. Actualmente se sigue utilizando la prueba con el mismo entusiasmo; es por esto que nos parece interesante presentar un trabajo en el que se tratara este tema que junto con las pruebas basadas en la función de distribución empíricas, conforma la parte más conocida y difundida sobre *bondad de ajuste* en todas las áreas.

El término *bondad de ajuste* es muy amplio y contempla muchas técnicas como el análisis gráfico, pruebas basadas en regresión y correlación; y aunque hubiésemos deseado cubrir de manera general el tema *bondad de ajuste*, algunos temas se hubieran cubierto ampliamente, mientras que otros hubieran sido minimizados. Por ejemplo en las *pruebas basadas en la función de distribución empírica* no se cubren algunos temas como el de muestras censuradas o la construcción de las diferentes tablas de cuantiles, dado que cada tema por separado constituye un trabajo completo. De esta forma se eligieron los tópicos que consideramos de interés.

Idealmente la distribución hipotética está completamente especificada, esto se conoce como hipótesis simple; cuando para la distribución propuesta se desconocen uno o más parámetros tenemos una hipótesis compuesta; en los capítulos uno y dos se tratan estas dos situaciones, en las que se divide la hipótesis nula.

En este trabajo se desarrollan principalmente dos tipos de *pruebas de bondad de ajuste*. El primer tipo, que se desarrolla en el capítulo uno, está diseñado para hipótesis nulas concernientes a distribuciones discretas y compara las frecuencias observadas con frecuencias esperadas bajo la hipótesis nula, y se conoce como la *prueba de bondad de ajuste  $\chi^2$*  (se lee Ji-Cuadrada). El segundo tipo está diseñado para hipótesis nulas concernientes a distribuciones continuas, y se trata en el segundo capítulo, y compara la frecuencia acumulada relativa observada con aquellas esperadas bajo la hipótesis nula; la prueba se basa en la función de distribución empírica y se conocen precisamente como *pruebas de bondad de ajuste basadas en la función de distribución empírica*. En el capítulo tres se trata sobre la estadística  $D$  basada en la función de distribución empírica, que es la más conocida de este tipo de estadísticas.

# Capítulo 1

## Pruebas Basadas en la Distribución $\chi^2$

### 1.1 Surgimiento y desarrollo

La prueba de bondad de ajuste  $\chi^2$  fue propuesta por Karl Pearson en 1900. La prueba surgió cuando Pearson [37] abandonó la suposición de que las poblaciones biológicas estaban normalmente distribuidas.

La idea de Pearson fue deducida del problema general de probar ajustes de escenarios multinomiales, basándose en una prueba sobre la comparación entre celdas, i.e.  $k$ -categorías, tanto de, frecuencias observadas como frecuencias esperadas bajo la hipótesis propuesta.

Para probar la hipótesis simple de que una muestra aleatoria  $X_1, \dots, X_n$  tiene una función de distribución  $F(X)$ , Pearson particionó el dominio de  $X$  en  $k$ -categorías  $E_1, \dots, E_k$ . Si  $O_1, \dots, O_k$  son los valores observados de las  $X$ 's en estas celdas, entonces  $O_i$  (donde  $O_i$  puede tomar valores entre 0 y  $n$ ) tiene una distribución binomial con parámetros  $n$  y  $p_i$  donde:

$$p_i = p(X_j \in E_i) = \int_{E_i} \partial F(X)$$

cuando la hipótesis nula es cierta, Pearson razonó que las diferencias ( $O_i - e_i$ ), entre las frecuencias observadas y las frecuencias esperadas (la suma de estas  $k$  desviaciones es cero, excepto por el redondeo), expresaban falta de ajuste de los datos con  $F_0(x)$ ; excepto para variaciones muestrales, debería haber una similitud entre las frecuencias observadas y esperadas si los datos muestrales son compatibles con la  $F_0(x)$  especificada. Estas diferencias podrían compararse usando un histograma, un polígono de frecuencias o una gráfica de barras. La prueba de bondad de ajuste  $\chi^2$  proporciona bases probabilísticas para efectuar la comparación y decidir si la concordancia o discordancia es demasiado grande para que hayan ocurrido por azar.

El criterio de la prueba sugerido por Pearson está basado en la variable aleatoria:

$$X^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} \quad (1.1)$$

Un valor grande de  $X^2$  reflejará una incompatibilidad entre las frecuencias relativas observadas y las esperadas, entonces la hipótesis nula con la cual  $e_i$  fue calculada deberá rechazarse para  $X^2$  grandes.

La distribución de probabilidad exacta de la variable aleatoria  $X^2$  es aproximadamente  $\chi^2$  con  $k - 1$  grados de libertad, i.e.  $\chi^2_{(k-1)}$ . Las bases teóricas para ésto pueden ser argumentadas brevemente como sigue:

Una vez que la muestra está clasificada en forma de una distribución de frecuencias, las únicas variables aleatorias de interés son las frecuencias de clases  $F_1, \dots, F_k$ . Estas constituyen un conjunto de variables aleatorias de una distribución multinomial  $k$ -variada con  $k$  posibles resultados, el  $i$ -ésimo resultado pertenece a la  $i$ -ésima categoría en el sistema de clasificación. Con  $p_1, \dots, p_k$  denotamos las probabilidades de los resultados respectivos, la función de verosimilitud de la muestra es entonces:

$$L(p_1, \dots, p_k) = \prod_{i=1}^k p_i^{O_i} \quad (1.2)$$

$$\text{donde} \quad \sum_{i=1}^k O_i = n; \quad \sum_{i=1}^k p_i = 1; \quad (1.3)$$

La hipótesis nula fue supuesta para especificar completamente la distribución de la población, de la cual el  $p_i$  puede ser calculado. Esta hipótesis entonces tiene que ver sólo con los valores de estos parámetros y puede ser enunciada de manera equivalente como:

$$H_0 : p_i = p_i^0 \quad i = 1, \dots, k$$

Es fácil probar que los estimadores de máxima-verosimilitud de los parámetros en la ecuación (1.2) son  $\hat{p}_i = \frac{O_i}{n}$ ; como  $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ , solamente  $k - 1$  de los  $p_i$ 's son parámetros independientes; por lo tanto, para encontrar los estimadores máximo-verosimiles de los  $p_i$ 's, reemplazaremos  $p_k$  por  $1 - \sum_{i=1}^{k-1} p_i$ . Entonces:

$$\begin{aligned} L(p_1, \dots, p_k) &= p_1^{O_1} p_2^{O_2} \dots p_{k-1}^{O_{k-1}} \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} p_i\right)^{O_k} \\ \ln L(p_1, \dots, p_k) &= O_1 \ln p_1 + \dots + O_{k-1} \ln p_{k-1} + O_k \ln \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} p_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} O_i \ln p_i + O_k \ln \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} p_i\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(p_1, \dots, p_k)}{\partial p_i} &= \frac{O_i}{p_i} - \frac{O_k}{1 - \sum_{i=1}^{k-1} p_i} = 0 \quad i = 1, \dots, k-1 \\ &\Rightarrow \frac{O_i}{p_i} = \frac{O_k}{p_k} \quad i = 1, \dots, k \\ &\Rightarrow O_i p_k = O_k p_i \quad i = 1, \dots, k \end{aligned}$$

Sumando las  $k$  igualdades tenemos:

$$\begin{aligned} p_k \sum_{i=1}^k O_i &= O_k \sum_{i=1}^k p_i \quad \text{sustituyendo la ecuación (1.3)} \\ \Rightarrow p_k n &= O_k \quad \Rightarrow p_k = \frac{O_k}{n} \quad \therefore \hat{p}_k = \frac{O_k}{n} \end{aligned}$$

Y este resultado puede generalizarse a los demás  $p_i$ 's:

$$\therefore \hat{p}_i = \frac{O_i}{n} \quad i = 1, \dots, k$$

La estadística de razón de verosimilitudes para esta prueba de hipótesis es entonces:

$$\Lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} = \frac{L(p_1^o, \dots, p_k^o)}{L(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_k)} = \prod_{i=1}^k \left( \frac{p_i^o}{\hat{p}_i} \right)^{O_i}$$

La distribución de la variable aleatoria  $-2 \log \Lambda$  puede aproximarse por la distribución  $\chi^2$ , los grados de libertad son  $k-1$ , ya que la restricción  $\sum_{i=1}^k p_i = 1$  deja sólo  $k-1$  parámetros en  $\Omega$  a ser estimados independientemente. Así tenemos:

$$-2 \log \Lambda = -2 \sum_{i=1}^k O_i \left( \log p_i^o - \log \frac{O_i}{n} \right) \quad (1.4)$$

Algunos estadísticos usan la expresión (1.4) como un criterio de *prueba de bondad de ajuste*. Demostraremos ahora que es asintóticamente equivalente a la expresión (1.1). La expansión en series de Taylor de  $\log p_i$  alrededor de  $\frac{O_i}{n} = \hat{p}_i$  es:

$$\log p_i = \log \hat{p}_i + (p_i - \hat{p}_i) \frac{1}{\hat{p}_i} + \frac{(p_i - \hat{p}_i)^2}{2!} \left( -\frac{1}{\hat{p}_i^2} \right) + \epsilon$$

sustituyendo  $\hat{p}_i = \frac{O_i}{n}$

$$\begin{aligned} \log p_i^o - \log \frac{O_i}{n} &= \left( p_i^o - \frac{O_i}{n} \right) \frac{n}{O_i} - \left( p_i^o - \frac{O_i}{n} \right)^2 \frac{n^2}{2O_i^2} + \epsilon \\ &= \frac{(n p_i^o - O_i)}{O_i} - \frac{(n p_i^o - O_i)^2}{2O_i^2} + \epsilon \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde  $\epsilon$  representa la suma de los términos alternantes de signos:

$$\sum_{j=3}^{\infty} (-1)^{j+1} \left( p_i^j + \frac{O_i}{n} \right)^j \frac{n^j}{j! O_i^j}$$

sustituyendo la ecuación (1.5) en la ecuación (1.4) tenemos:

$$-2 \log \Lambda = -2 \sum_{i=1}^k (np_i^0 - O_i) + \sum_{i=1}^k \frac{(np_i^0 - O_i)^2}{O_i} + \sum_{i=1}^k \epsilon_i$$

puede demostrarse que:

$$\sum_{i=1}^k \frac{(np_i^0 - O_i)^2}{O_i} = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i}$$

por la ley de los grandes números se sabe que  $\frac{F_i}{n}$  es un estimador consistente de  $p_i$ , i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} p(|F_i - np_i|) > \epsilon \right\} = 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

Así vemos que la distribución de probabilidad de  $X^2$  converge a la de  $-2 \log \Lambda$ , la cual es  $\chi^2_{(k-1)}$ . Entonces un nivel aproximado de prueba  $\alpha$  es obtenido rechazando  $H_0$  cuando  $X^2$  excede el cuantil  $(1 - \alpha)$  de la distribución  $\chi^2_{(k-1)}$ . Esta aproximación puede ser usada con suficiente confianza cuando cada frecuencia esperada es al menos 5, este es un valor conservador y la aproximación  $\chi^2$  es a menudo razonablemente precisa para frecuencias esperadas tan pequeñas como 1.5.

De esta manera se maneja fácilmente cualquier caso donde las  $p_i$ 's están completamente especificadas por la hipótesis nula. Sin embargo, la situación más común es cuando la hipótesis nula es la hipótesis, donde la forma de la distribución está enunciada pero no todos los parámetros son conocidos. Para poder calcular las frecuencias esperadas bajo  $H_0$  los parámetros deben conocerse. Pearson recomendó estimar  $p$  por un estimador  $\hat{p}_n$ , una función de la muestra  $X_1, \dots, X_n$  y probar el ajuste de la distribución  $F(\bullet | \hat{p}_n)$ . Entonces las celdas de probabilidad estimadas llegan a ser:

$$\hat{p}_i = \int_{E_i} \partial F(X | \hat{\theta}_n)$$

y la estadística de Pearson es:

$$X^2(\hat{\theta}_n) = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} \quad (1.6)$$

Pearson no pensó que estimando  $p_i$  cambia la distribución de la muestra grande de  $X^2$ , a menos que  $\hat{p}_n$  sea consistente. Fisher [16] mostró que el límite de la distribución

nula de  $X^2(\hat{\theta}_n)$  no es  $\chi^2_{(k-1)}$  y que esta distribución depende del método de estimación usado. Fisher demostró que el método apropiado de estimación es la estimación máximo-verosímil basada en las frecuencias de las celdas  $O_i$ . Este *estimador máximo verosímil de datos agrupados* es la solución de las ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^k \frac{O_i}{p_i(\theta)} \frac{\partial p_i(\theta)}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s^1 \quad (1.7)$$

obtenidas diferenciando el logaritmo de la función multinomial de verosimilitud. Fisher notó que la estadística logaritmo de la razón de verosimilitudes:

$$G^2 = \sum_{i=1}^k O_i \log \frac{O_i}{np_i}$$

es asintóticamente equivalente a  $X^2$ , observó además que un estimador máximo verosímil asintóticamente equivalente a los datos agrupados puede ser obtenido escogiendo  $\theta$  para minimizar  $X^2(\theta)$  para los  $O_i$ 's observados. Este *estimador mínimo  $\chi^2$*  es la solución de:

$$\sum_{i=1}^k \left\{ \frac{O_i}{p_i(\theta)} \right\}^2 \frac{\partial p_i(\theta)}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s \quad (1.8)$$

Denotemos a ambos estimadores por  $\hat{\theta}_n$ . Entonces  $X^2(\hat{\theta}_n)$  es conceptualmente la estadística de Pearson para probar el ajuste de  $F(\bullet|\hat{p}_n)$ , el miembro de la familia  $F(X|\theta)$  es el que está más cerca a los datos si la estadística de Pearson es usada como medida de distancia. Fisher mostró que la estadística Pearson-Fisher  $X^2(\hat{\theta}_n)$  tiene la distribución  $\chi^2_{(k-1-s)}$ <sup>2</sup> bajo la hipótesis nula, no importa que  $\theta \in \Omega$  sea el valor verdadero. Este es el famoso resultado "se pierde un grado de libertad por cada parámetro estimado".

Neyman [34] notó que otro *estimador asintóticamente equivalente a  $\hat{\theta}_n$*  puede ser obtenido minimizando la estadística  $\chi^2$  modificado

$$X^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - n\hat{p}_i)^2}{O_i}$$

Este *estimador mínimo  $\chi^2$  modificado* es la solución de:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\hat{p}_i}{O_i} \frac{\partial \hat{p}_i}{\partial \theta_j} = 0 \quad j = 1, \dots, s \quad (1.9)$$

Como para los propósitos de la teoría de las muestras grandes bajo la hipótesis nula este estimador es intercambiable con los dos anteriores, lo llamaremos también

<sup>1</sup>número de parámetros estimados

<sup>2</sup>La distribución de  $\Lambda$  y por lo tanto de (1.6) se hace exactamente como antes, excepto que la dimensión del espacio  $\Omega$  es aumentada



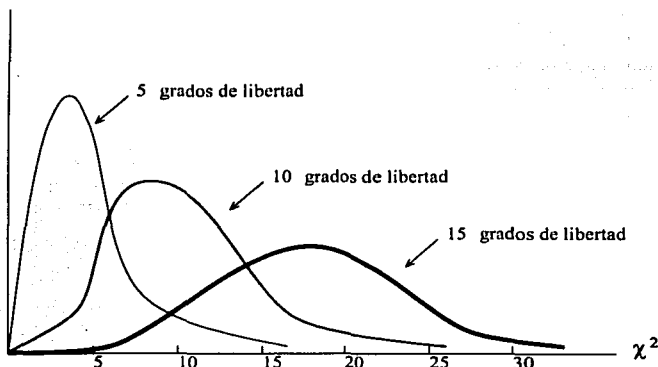


Figura 1.1: Diferentes curvas  $\chi^2$

$\hat{\theta}_n$  para minimizar la notación. El comentario de Neyman es importante porque las ecuaciones (1.9) son comúnmente resueltas en forma cerrada más que las ecuaciones (1.7) y (1.8), i.e. es recomendable usar las ecuaciones (1.9).

Cuando los datos originales están sin agrupar y los estimadores máximo verosímiles están basados en la función máximo-verosímil de todas las observaciones, la teoría es diferente. Chernoff y Lehman [6], probaron que la distribución límite de la estadística (1.6) no es  $\chi^2$  en este caso y que  $P(N^2(\hat{\theta}) > \chi_n^2) > \alpha$ . La prueba es entonces no conservativa. Sus investigaciones probaron que el error es considerablemente más serio para la distribución normal que para la Poisson. Sin embargo, la estadística (1.6) es comúnmente tratada como una variable  $\chi^2$  de todas maneras.

## 1.2 Distribución $\chi^2$

La distribución  $\chi^2$  es una distribución continua en la cual se basan varios procedimientos de inferencia; por ejemplo, pruebas para determinar si dos características de una población son estadísticamente dependientes, inferencia sobre la desviación estándar de una población y *pruebas de bondad de ajuste* que se basan en esta distribución. Estas *pruebas de bondad de ajuste* son las que trataremos en este capítulo. Por lo tanto comenzaremos con una breve discusión de la distribución  $\chi^2$ .

Las probabilidades de una variable aleatoria que tiene distribución  $\chi^2$  son iguales al área bajo la curva  $\chi^2$ . En realidad, hay una infinidad de curvas  $\chi^2$ 's e identificamos a la curva en cuestión dando sus grados de libertad (como con la distribución t de Student). La figura 1.1 muestra tres diferentes curvas  $\chi^2$ 's.

### 1.2.1 Propiedades básicas de la distribución $\chi^2$

1. El área total bajo la curva  $\chi^2$  es uno, ya que es una función de densidad de probabilidad.
2. Una curva  $\chi^2$  empieza en el cero sobre el eje horizontal y se extiende indefinidamente a la derecha, aproximándose al eje horizontal conforme lo hace, i.e. es asíntota al eje horizontal positivo.
3. La curva  $\chi^2$  no es simétrica. Llega rápidamente al punto más alto y regresa al eje horizontal lentamente, i.e. es sesgada a la derecha.
4. A medida que el número de grados de libertad aumenta, las curvas  $\chi^2$  son más parecidas a la curva normal.

### 1.2.2 Manejo de la tabla $\chi^2$

Una distribución  $\chi^2$  está determinada por sus grados de libertad, en la tabla A.1 la columna etiquetada con  $\nu$  da los grados de libertad y las probabilidades de la cola derecha se dan en el primer renglón, generalmente a estas cantidades se les etiqueta con  $\alpha$ , el área acumulada hasta un punto determinado se le conoce como cuantil y se hace referencia como el cuantil  $1 - \alpha$ , entonces un mismo punto puede estar denotado como  $\chi^2_{(\nu)\alpha}$  o el cuantil  $1 - \alpha$  de una  $\chi^2_{(\nu)}$ .

Por ejemplo, para encontrar los cuantiles de una  $\chi^2$  con 12 grados de libertad cuya área derecha sea de 0.05 (ver la figura 1.2), usaremos la tabla A.1. En este caso, buscamos en la columna  $\nu$  el renglón 12 y en el renglón superior la columna etiquetada con 0.05 y en esta posición encontramos el valor 21.03; esto es el valor de una Ji-Cuadrada con 12 grados de libertad y  $\alpha = 0.05$  cuya notación es  $\chi^2_{(12)0.05}$  (ver la figura 1.3) o el cuantil .95 de una  $\chi^2_{(12)}$ .

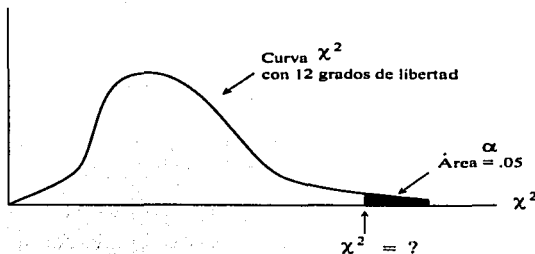


Figura 1.2: Uso gráfico de la tabla  $\chi^2$

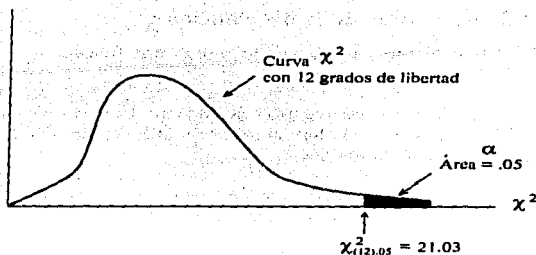


Figura 1.3: Uso gráfico de la tabla  $\chi^2$

## 1.3 Aplicación de la prueba de bondad de ajuste $\chi^2$

### 1.3.1 Recomendaciones

Roscoe y Byars [41] a través de simulaciones llegaron a las siguientes recomendaciones:

1. Los datos de la muestra deben ser agrupados de acuerdo a algún esquema<sup>3</sup>, para poder formar una distribución de frecuencias.
2. Todas las frecuencias esperadas son al menos 1.5. Si no se cumple ésta recomendación, el procedimiento usual es combinar grupos adyacentes en la distribución de frecuencias, hasta que la restricción se satisfice; entonces el número de grados de libertad debe ser reducido para que corresponda con el número actual de categorías usadas en el análisis. La aproximación  $\chi^2$  es a menudo razonablemente precisa para celdas con frecuencias esperadas tan pequeñas como 1.5.
3. Cuando mucho el 20% de las frecuencias esperadas son menores que 5 (investigaciones de W.G. Cochran [8], notable estadístico, muestran que "la regla de 5" es demasiado estricta).

Posteriormente Larntz [25] y Koehler y Larntz [21] hicieron estudios sobre estas recomendaciones, basando su trabajo también en simulaciones.

### 1.3.2 Aplicación de la prueba de bondad de ajuste $\chi^2$

1. Establecer la hipótesis nula. Si la distribución no está completamente especificada y  $s$  parámetros deben ser estimados a partir de la muestra entonces se

<sup>3</sup>Por ejemplo, al lanzar un dado, las categorías podrían ser el número de puntos; en las encuestas de preferencias de marcas, las categorías serían los nombres de las marcas consideradas

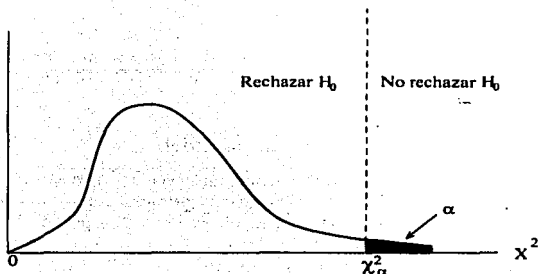


Figura 1.4: Región de rechazo

pierden  $s$  grados de libertad en la distribución  $\chi^2$  (ver la sección 1.1).

2. Calcular las frecuencias esperadas, usando:

$$e_i = np_i$$

donde  $n$  es el tamaño de la muestra y  $p_i$  es la probabilidad para la categoría  $i$  dada por la hipótesis nula.

3. Verificar si las frecuencias esperadas satisfacen las recomendaciones de la sección 1.3.1.
4. Decidir el nivel de significancia  $\alpha$ .
5. Consultar la tabla A.1 para encontrar el cuantil  $1 - \alpha$  de una  $\chi^2_{(k-1)}$  (ver sección 1.2.2), donde  $k$  es el número de categorías<sup>4</sup>; recordar que si se estimaron algunos parámetros se pierden grados de libertad.
6. Calcular el valor de la estadística de prueba

$$X^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i}$$

donde  $O_i$  son las frecuencias observadas y  $e_i$  son las frecuencias esperadas.

7. Si el valor de la estadística de prueba cae en la región de rechazo (ver figura 1.4), rechazar  $H_0$ ; en otro caso no rechazar  $H_0$ .
8. Establecer la conclusión en palabras; interpretar, de acuerdo con el contexto del problema, la decisión que se haya tomado.

<sup>4</sup>Si  $k = 2$ , entonces la población está dicotomizada, y la prueba es equivalente a la prueba de una proporción simple de una población

## 1.4 Ejemplos de la aplicación

A continuación se mostrarán algunos ejemplos de la prueba de bondad de ajuste  $\chi^2$ , en la que por la manera de recabar los datos o las distribuciones que se proponen (discretas) es la apropiada.

### 1.4.1 Problema sobre la teoría de Mendel

Dos tipos de maíz (dorado y criollo) contienen genes recesivos. Cuando se hacen experimentos híbridos entre ellos se obtiene una primera generación que es consistente (ni dorada ni criolla). Cuando a esta generación le fue permitido desarrollarse ella misma, 4 diferentes tipos de planta fueron obtenidas -normal, dorada, criolla, criolla-dorada. En 1200 plantas el proceso produjo la distribución que se muestra en la siguiente tabla:

tipo de maíz	$O_i$
normal	670
dorado	230
criollo	238
criollo-dorado	62
total (n)	1200

Un monje llamado Mendel escribió un artículo donde exponía la teoría de que en una segunda generación de tales híbridos, la distribución del tipo de maíz debería estar en la razón 9:3:3:1. ¿Son los datos mostrados en la tabla consistentes con la teoría de Mendel?

- Siguiendo la sección 1.3.2 tenemos:

1. La hipótesis nula es:

$H_0$  : Los híbridos resultantes están en razón 9:3:3:1

2. Calculamos las frecuencias esperadas  $e_i = np_i$ :

tipo de maíz	$p_i$	$e_i$
normal	$\frac{9}{16}$	675
dorado	$\frac{3}{16}$	225
criollo	$\frac{3}{16}$	225
criollo-dorado	$\frac{1}{16}$	75
total	1	1200

3. Ya que las frecuencias esperadas cumplen las recomendaciones de la sección 1.3.1 continuamos.

- Se decide desarrollar la prueba al nivel de significancia 5%, esto es con  $\alpha = .05$
- Buscamos el cuantil .95 que es:  $\chi^2_{(3)0.05} = 7.81$  (ver la sección 1.2.2)
- Calcular el valor de la estadística de prueba  $X^2$

tipo de maíz	$O_i$	$e_i$	$O_i - e_i$	$(O_i - e_i)^2$	$(O_i - e_i)^2/e_i$
normal	670	675	-5	25	0.037037
dorado	230	225	5	25	0.111111
criollo	238	225	13	169	0.751111
criollo-dorado	62	75	-13	169	2.253333
$\Sigma$	1200	1200	0		<b>3.152592</b>

- Ya que  $X^2 = 3.1526 < 7.81 = \chi^2_{(3)0.05}$ ; no rechazamos  $H_0$  (ver figura 1.4)
- Aceptamos la teoría de Mendel, i.e. los híbridos resultantes están en razón 9:3:3:1

#### 1.4.2 Problema de las monedas "honestas"

Un grupo de 4 monedas es lanzado 160 veces, los resultados del número de águilas que se observaron se muestran en la siguiente tabla:

# de águilas	$O_i$
0	16
1	48
2	55
3	33
4	8
total (n)	160

¿Cree que las 4 monedas son "honestas"?

- Si siguiendo la sección 1.3.2 tenemos:

- Como al lanzar una moneda "honesta" se tiene un evento Bernoulli ( $p = \frac{1}{2}$ ) y en este caso se lanzan 4, al final tenemos una Binomial( $4, \frac{1}{2}$ ). Entonces la hipótesis nula es:

$H_0$ : El número de águilas (o "soles", por lo de la honestidad) obtenidas en el lanzamiento de cuatro monedas se distribuye como una Bin( $4, \frac{1}{2}$ )

## Pruebas Basadas en la Distribución $\chi^2$

2. Calculamos las frecuencias esperadas  $e_i = np_i$

# de águilas	$p_i$	$e_i$
0	0.0625	10
1	0.2500	40
2	0.3750	60
3	0.2500	40
4	0.0625	10
total	1	$n = 160$

3. Ya que las frecuencias esperadas cumplen las recomendaciones de la sección 1.3.1 continuamos.
4. Se decide desarrollar la prueba al nivel de significancia 5%, esto es con  $\alpha = .05$
5. Buscamos el cuantil .95 en la tabla A.1 que es:  $\chi^2_{(4)0.05} = 9.49$  (ver la sección 1.2.2)
6. Calcular el valor de la estadística de prueba  $X^2$

# de águilas	$O_i$	$e_i$	$O_i - e_i$	$(O_i - e_i)^2$	$(O_i - e_i)^2 / e_i$
0	16	10	6	36	3.6000
1	48	40	8	64	1.6000
2	55	60	-5	25	0.4167
3	33	40	-7	49	1.2250
4	8	10	-2	4	0.4000
$\Sigma$	160	160	0		7.2417

7. Ya que  $X^2 = 7.2417 < 9.49 = \chi^2_{(4)0.05}$ , no rechazamos  $H_0$ ; (ver figura la 1.4)
8. Se acepta el planteamiento de que las monedas son "honestas", i.e. la probabilidad de que caiga un sol o un águila es igual ( $p = \frac{1}{2}$ ).

### 1.4.3 Un resultado interesante

Un ingeniero de control de calidad ha tomado 50 muestras de tamaño 13, cada una de un proceso de producción. El número de defectuosos de estas muestras aparece en la siguiente tabla:

# de defectuosos	# de muestras ( $O_i$ )
0	10
1	24
2	10
3	4
4	1
5 ó +	1

Pruebe la hipótesis nula al nivel 0.05 de que el número de defectuosos siguen alguna de las distribuciones siguientes:

(a) Una distribución Poisson

- Siguiendo la sección 1.3.2 tenemos:

1. Queremos probar una distribución Poisson pero no tenemos  $\mu$ , que es la media de los defectuosos para una muestra de tamaño 13. El estimador máximo verosímil de  $\mu$  es la media de los defectuosos en las 50 muestras:

$$\hat{\mu} = \frac{0 \cdot 10 + 1 \cdot 24 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1}{50} = \frac{65}{50} = 1.3$$

Usamos este valor en  $f(x)$  para tener los  $\hat{p}_i$ 's. Entonces la hipótesis nula es:

$H_0$  : Los defectuosos siguen una distribución Poisson( $\hat{\mu}$ )

2. Calculamos las frecuencias esperadas  $e_i = np_i$ :

# de defec	$\hat{p}_i$	$\hat{e}_i$
0	0.2725	13.625
1	0.3543	17.715
2	0.2303	11.515
3	0.0998	4.990
4	0.0324	1.620
5 ó +	0.0107	0.535
total	1	$n = 50$

3. Ya que la última frecuencia esperada no cumple la recomendación 2 de la sección 1.3.1, la combinamos con la categoría anterior hasta que la condición se cumpla.
4. Se decide desarrollar la prueba al nivel de significancia 5%, esto es con  $\alpha = .05$
5. Buscamos el cuantil .95 en la tabla A.1 que es:  $\chi^2_{(3)0.05} = 7.81$ , se tienen  $k-1 = 5$  grados de libertad, pero al combinar las dos últimas categorías y estimar  $\mu$  se pierden 2 grados más de libertad (ver sección 1.2.2)
6. Calcular el valor de la estadística de prueba  $X^2$  (ver tabla 1.1)
7. Ya que  $X^2 = 3.6010 < 7.81 = \chi^2_{(3)0.05}$  no rechazamos  $H_0$ , (ver figura 1.4)
8. Aceptamos el planteamiento de que los defectuosos del proceso de producción en cuestión se distribuyen Poisson( $\hat{\mu} = 1.3$ ).



## Pruebas Basadas en la Distribución $\chi^2$

# de defec	$O_i$	$\hat{e}_i$	$O_i - \hat{e}_i$	$(O_i - \hat{e}_i)^2$	$(O_i - \hat{e}_i)^2 / \hat{e}_i$
0	10	13.625	-3.625	13.1406	0.9644
1	24	17.715	6.285	39.5012	2.2298
2	10	11.515	-1.515	2.2952	0.1993
3	4	4.990	-0.990	0.9801	0.1964
4	1	1.620	-0.155	0.0240	0.0111
5 ó +	1	0.535			
$\Sigma$	50	50	0		<b>3.6010</b>

Tabla 1.1: Cálculos de  $\chi^2$  para el problema 1.4.3 inciso (a)

### (b) Una distribución Binomial

- Siguiendo la sección 1.3.2 tenemos:

1. Queremos probar una distribución Binomial(13,  $p$ ) pero no tenemos  $p$ , que es el número total de defectuosos para cualquier muestra de tamaño 13. El estimador máximo verosímil de  $p$  es el número total de defectuosos entre el número total de observaciones.

$$\hat{p} = \frac{0 * 10 + 1 * 24 + 2 * 10 + 3 * 4 + 4 * 1 + 5 * 1}{50 * 13} = \frac{65}{650} = 0.01$$

Usamos este valor en  $f(x)$  para tener los  $\hat{p}_i$ 's. Entonces la hipótesis nula es:

$H_0$ : Los defectuosos siguen una distribución Binomial(13, 0.01)

2. Calculamos las frecuencias esperadas  $e_i = np_i$

# de defec	$\hat{p}_i$	$\hat{e}_i$
0	0.2542	12.710
1	0.3671	18.355
2	0.2488	12.240
3	0.0977	4.985
4	0.0277	1.385
5 ó +	0.0065	0.325
total	1	$n = 50$

3. Ya que la última frecuencia esperada no cumple la recomendación 2 de la sección 1.3.1, la combinamos con la categoría anterior hasta que la condición se cumpla.
4. Se decide desarrollar la prueba al nivel de significancia 5%, esto es con  $\alpha = .05$
5. Buscamos el cuantil .95 en la tabla A.1 que es:  $\chi^2_{(3)0.05} = 7.81$ ; se tienen  $k-1 = 5$  grados de libertad, pero al combinar las dos últimas categorías y estimar  $p$  se pierden 2 grados más de libertad.

# de defec	$O_i$	$\hat{e}_i$	$O_i - \hat{e}_i$	$(O_i - \hat{e}_i)^2$	$(O_i - \hat{e}_i)^2 / \hat{e}_i$
0	10	12.710	-2.710	7.3441	0.5778
1	24	18.355	5.645	31.8660	1.7360
2	10	12.240	-2.240	5.0176	0.4099
3	4	4.985	-0.985	0.9702	0.1946
4	1	1.385	0.2900	0.0841	0.04920
5 ó +	1	0.325			
$\Sigma$	50	50	0		2.9675

Tabla 1.2: Cálculos de  $X^2$  para el problema 1.4.3 inciso (b)

- Calcular el valor de la estadística de prueba  $X^2$  (ver tabla 1.2)
- Ya que  $X^2 = 2.9675 < 7.81 = \chi^2_{(3)0.05}$  no rechazamos  $H_0$ , (ver figura 1.4)
- Aceptamos el planteamiento de que los defectuosos del proceso de producción en cuestión se distribuyen Binomial( $13, \hat{p} = 0.01$ )

Este ejemplo ilustra un resultado común con las *pruebas de bondad de ajuste*, i.e. cada una de dos (o más) diferentes hipótesis nulas fueron aceptadas para el mismo conjunto de datos. Sin embargo, la verdadera distribución no puede ser Poisson y Binomial al mismo tiempo. Por lo tanto, la conclusión adecuada en esta situación con base en la *prueba de bondad de ajuste*  $\chi^2$  es que no tenemos suficiente información para distinguir entre estas dos distribuciones.

#### 1.4.4 Problema para probar normalidad

Aunqu la distribución normal es continua, también le podemos aplicar la *prueba de bondad de ajuste*  $\chi^2$ , a continuación veremos un ejemplo:

Un ingeniero de control de calidad quiere conocer si los diámetros de los tubos producidos por una máquina están distribuidos aproximadamente normal. De una muestra de 300 tubos el determinó que  $\bar{x} = 10.00\text{mm}$  con desviación estándar muestral  $s = 0.10\text{mm}$ . Además obtuvo las siguientes frecuencias de distribución para los diámetros:

Diámetro ( mm )	$(O_i)$
$d < 9.8$	8
$9.8 \leq d < 9.9$	42
$9.9 \leq d < 10.0$	112
$10.0 \leq d < 10.1$	97
$10.1 \leq d < 10.2$	38
$d \geq 10.2$	3

¿Puede o no esperarse que los diámetros de los tubos producidos por las máquinas se distribuyan normal con un nivel de significancia  $\alpha = 0.05$ ?

- Siguiendo la sección 1.3.2 tenemos:

1. La hipótesis nula es:

$H_0$  : Los diámetros de los tubos producidos por las máquinas se distribuyen  $N(10mm, [0.10mm]^2)$

2. Calculamos las frecuencias esperadas  $e_i = np_i$ :

Diámetro ( mm )	$z_i$	$p_i$	$e_i = np_i$
$d < 9.8$	$z_i < -2$	.0228	6.84
$9.8 \leq d < 9.9$	$-2 \leq z_i < -1$	.1355	40.65
$9.9 \leq d < 10.0$	$-1 \leq z_i < 0$	.3413	102.39
$10.0 \leq d < 10.1$	$0 \leq z_i < 1$	.3413	102.39
$10.1 \leq d < 10.2$	$1 \leq z_i < 2$	.1355	40.65
$10.2 \leq d$	$2 \leq z_i$	.0228	6.84

- Ya que las frecuencias esperadas cumplen las recomendaciones de la sección 1.3.1 continuamos.
- Se decide desarrollar la prueba al nivel de significancia 5%, esto es con  $\alpha = .05$
- Buscamos el cuantil .95 en la tabla A.1 que es:  $\chi_{(3)0.05}^2 = 7.81$ , los grados de libertad son 3 ya que aunque se tienen 6 categorías, se pierde el grado de libertad acostumbrado y 2 grados más por que se usan las estimaciones de la media y la desviación estándar.
- Calcular el valor de la estadística de prueba  $X^2$

Diámetro (mm)	$O_i$	$e_i$	$O_i - e_i$	$(O_i - e_i)^2$	$(O_i - e_i)^2 / e_i$
$d < 9.8$	8	6.84	1.16	1.3436	.1964
$9.8 \leq d < 9.9$	42	40.65	1.35	1.8225	.0448
$9.9 \leq d < 10.0$	112	102.39	9.61	92.3521	.9020
$10.0 \leq d < 10.1$	97	102.39	-5.39	29.0521	.2837
$10.1 \leq d < 10.2$	38	40.65	-2.65	7.0225	.1728
$10.2 \leq d$	3	6.84	-3.84	14.7456	2.1558
$\Sigma$	300				3.7555

- Ya que  $X^2 = 3.7555 < 7.81 = \chi_{(3)0.05}^2$  no rechazamos  $H_0$ , (ver figura 1.4)
- Acceptamos que los diámetros de los tubos que produce la máquina se distribuyen normalmente con media 10.0mm y desviación estándar 0.10mm.

## 1.4.5 Problema en física

Considere la prueba de bondad de ajuste  $\chi^2$  para la familia de funciones de densidad:

$$f(x|\theta) = \frac{1}{2}(1 + \theta x), \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (1.10)$$

Esta familia ha sido usada como un modelo para la distribución del coseno del ángulo de dispersión en experimentos de dispersión de haces en física, donde  $\Omega = \{\theta \mid \theta \in (-1, 1)\}$ . Para celdas  $E_i = (a_{i-1}, a_i)$  con  $-1 = a_0 < a_1 < \dots < a_M = 1$  tenemos:

$$p_i(\theta) = \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x|\theta) dx = \frac{\theta}{4}(a_i^2 - a_{i-1}^2) + \frac{1}{2}(a_i - a_{i-1})$$

Si utilizamos la ecuación (1.9) tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^M \frac{1}{O_i} \left[ \frac{\theta}{4}(a_i^2 - a_{i-1}^2) + \frac{1}{2}(a_i - a_{i-1}) \right] \left( \frac{1}{4}(a_i^2 - a_{i-1}^2) \right) \\ &= \frac{\theta}{4^2} \sum_{i=1}^M \frac{1}{O_i} (a_i^2 - a_{i-1}^2)^2 + \sum_{i=1}^M \frac{1}{8O_i} (a_i - a_{i-1})(a_i^2 - a_{i-1}^2) \\ \theta &= \frac{-\sum_{i=1}^M \frac{1}{8O_i} (a_i - a_{i-1})(a_i^2 - a_{i-1}^2)}{\frac{1}{16} \sum_{i=1}^M \frac{1}{O_i} (a_i^2 - a_{i-1}^2)^2} \\ \hat{\theta} &= \frac{-2 \sum_{i=1}^M \frac{1}{O_i} (a_i - a_{i-1})(a_i^2 - a_{i-1}^2)}{\sum_{i=1}^M \frac{1}{O_i} (a_i^2 - a_{i-1}^2)^2} \end{aligned}$$

Utilizando  $e_i = np_i(\hat{\theta})$  para calcular la estadística de Pearson se genera un procedimiento fácil de calcular para la prueba de bondad de ajuste para la familia (1.10) usando los cuantiles de una  $\chi^2_{(M-2)}$ .



## Capítulo 2

# Pruebas Basadas en la FDE

### 2.1 Función de Distribución Empírica (FDE)

La función de distribución acumulativa de una muestra aleatoria de tamaño  $n$ , llamada la función de distribución empírica (o muestral) se denota  $S_n(x)$  y se define para cada  $x$ ,  $-\infty < x < \infty$ , como la proporción de valores observados en la muestra que son menores o iguales que  $x$ ; i.e. si exactamente  $k$  de los valores observados en la muestra son menores o iguales entonces  $S_n(x) = \frac{k}{n}$ .

Sea  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias de una muestra aleatoria y  $x_1, \dots, x_n$  sus respectivos valores observados, [Puesto que las observaciones provienen de una población continua,  $p(x_i) = p(x_j) = 0$  con  $i \neq j$ ; i.e. no existen dos valores observados iguales. Por simplicidad se supone que los  $n$  valores observados son diferentes.] sea  $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$  la estadística de orden de la muestra; i.e. se ordena ascendentemente la muestra, la función de distribución empírica se define como:

$$S_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < X_{(1)} \\ \frac{k}{n} & \text{si } X_{(k)} \leq x < X_{(k+1)} \text{ para } k = 1, \dots, n-1 \\ 1 & \text{si } x \geq X_{(n)} \end{cases} \quad (2.1)$$

y la gráfica se puede ver en la figura 2.1.

La función de distribución empírica  $S_n(x)$  es una función escalonada, y por lo tanto discreta, con saltos de magnitud  $\frac{1}{n}$  en cada punto  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Algunas veces es también llamada la imagen estadística de la población.

Para un valor fijo pero arbitrario de  $x$ ,  $S_n(x)$  es una variable aleatoria, entonces tiene una distribución de probabilidad, la cual esta dada en el siguiente teorema:

**Teorema** Para la variable aleatoria discreta  $S_n(x)$ , la cual es la función de distribución empírica de una muestra aleatoria  $X_1, \dots, X_n$  de una población con función de distribución  $F_x$ , tenemos:

$$p(S_n(x) = \frac{j}{n}) = \binom{n}{j} [F_x(x)]^j [1 - F_x(x)]^{n-j} \quad j = 0, \dots, n$$

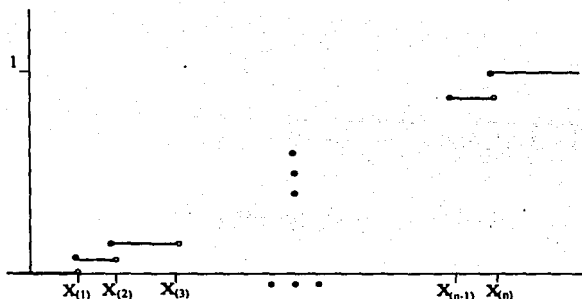


Figura 2.1: Gráfica de la FDE

Demostración:

Definimos el indicador de variable aleatoria

$$\delta_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \leq t \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Los  $\delta_1(t), \delta_2(t), \dots, \delta_n(t)$  constituyen un conjunto de  $n$  variables aleatorias independientes de una distribución Bernoulli con parámetro  $\theta$ , donde

$$\theta = p[\delta_i(t) = 1] = p(X_i \leq t) = F_x(t)$$

ya que podemos escribir:

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i(x)}{n}$$

la variable aleatoria  $nS_n(x)$  es la suma de  $n$  variables aleatorias independientes Bernoulli's, la cual sigue una distribución binomial con parámetro  $\theta = F_x(x)$ .

**Corolario** La media y la varianza de  $S_n(x)$  son:

$$\begin{aligned} E[S_n(x)] &= F_x(x) \\ \text{Var}[S_n(x)] &= \frac{1}{n}[F_x(x)][1 - F_x(x)] \end{aligned}$$

El lema de Glivenko-Cantelli afirma que  $S_n(x)$  converge a  $F_x(x)$  uniformemente para todos los valores de  $x$ , i.e.  $S_n(x)$  es un estimador consistente de  $F_x(x)$ . El lema se enuncia como sigue:

**Lema de Glivenko-Cantelli**

$$p\left[ \sup_{-\infty < x < \infty} |S_n(x) - F_x(x)| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \right] = 1$$

## 2.2 Definición de las estadísticas basadas en la FDE

Las pruebas de bondad de ajuste que utilizan la función de distribución empírica se basan en las diferencias entre la  $F_x(x)$  a probar y  $S_n(x)$ , i.e. una estadística basada en la función de distribución empírica mide las diferencias verticales entre  $F_x(x)$  y  $S_n(x)$ . Mencionaremos siete que han atraído mayor atención. Estas están divididas en dos clases: la clase suprema y la clase cuadrática.

La clase suprema la componen las siguientes estadísticas:

1.

$$D^+ = \sup_{-\infty < x < \infty} \{S_n(x) - F_x(x)\}$$

Es la diferencia más larga cuando  $S_n$  es más grande que  $F_x$

2.

$$D^- = \sup_{-\infty < x < \infty} \{F_x(x) - S_n(x)\}$$

Es la diferencia más larga cuando  $S_n$  es más pequeña que  $F_x$

3.

$$D = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_x(x) - S_n(x)| = \max(D^+, D^-)$$

Es la estadística más conocida, fue introducida por Kolmogorov [22], en algunos libros se le conoce como la estadística Kolmogorov-Smirnov

4.

$$V = D^+ + D^-$$

Propuesta por Kuiper [24] es útil para observaciones sobre un círculo.

La segunda clase de medidas de discrepancia está dada por la familia Cramér-von Mises, conocida como la clase cuadrática

$$Q = n \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - F_x(x)]^2 \psi(x) \partial F_x(x)$$

donde  $\psi(x)$  es una función que le da peso a la diferencia cuadrada  $[S_n(x) - F_x(x)]^2$ .

1.

$$W^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - F_x(x)]^2 \partial F_x(x)$$

Que se obtiene cuando  $\psi(x) = 1$  y es conocida como la estadística Cramér-von Mises.

2.

$$A^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - F_x(x)]^2 [F_x(x)[1 - F_x(x)]]^{-1} \partial F_x(x)$$

Que se obtiene cuando  $\psi(x) = [F_x(x)[1 - F_x(x)]]^{-1}$  y es la estadística Anderson-Darling [2].

3.

$$U^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - F_x(x) - \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - F_x(x)] \partial F_x(x)]^2 \partial F_x(x)$$

Es la estadística Watson, que es una modificación de  $W^2$ , también inventada originalmente para observaciones en un círculo



Una vez definidas las estadísticas, deben encontrarse cálculos convenientes para las fórmulas, esto se hace usando la Transformación Integral de Probabilidad (TIP)  $Z = F(X)$ ; cuando  $F(x)$  es la verdadera distribución de  $X$ , la nueva variable aleatoria  $Z$  está uniformemente distribuida entre 0 y 1. Entonces  $Z$  tiene función de distribución  $F^*(z) = z, 0 \leq z \leq 1$ . Suponga que una muestra aleatoria  $X_1, \dots, X_n$  toma valores  $Z_i = F(X_i), i = 1, \dots, n$  y sea  $S_n^*(z)$  la función de distribución empírica de los valores  $Z_i$ .

Ahora las estadísticas basadas en la función de distribución empírica pueden calcularse de una comparación de  $S_n^*(z)$  con la distribución uniforme para  $Z$ . Se muestra fácilmente que para valores relacionados por  $z = F(x)$  las diferencias verticales correspondientes en el diagrama de la función de distribución empírica para  $X$  y  $Z$  son iguales, esto es:

$$S_n(x) - F_x(x) = S_n^*(z) - F^*(z) = S_n^*(z) - z$$

consecuentemente las estadísticas función de distribución empírica calculadas de las estadísticas función de distribución empírica de las  $Z_i$  comparadas con la distribución uniforme tomara los mismos valores que si fueran calculadas de la función de distribución empírica de las  $X_i$ . Esto nos lleva a las siguientes fórmulas para calcular las estadísticas basadas en la función de distribución empírica de los  $Z$ -valores, las fórmulas involucran los  $z$ -valores ordenados de manera ascendente  $z_1 < \dots < z_n$ . Entonces con  $\bar{z} = \sum_{i=1}^n \frac{z_i}{n}$  tenemos:

$$\left. \begin{aligned} D^+ &= \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{i}{n} - z_{(i)} \right\} \\ D^- &= \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ z_{(i)} - \frac{i-1}{n} \right\} \\ D &= \max(D^+, D^-) \\ V &= D^+ + D^- \\ W^2 &= \sum_{i=1}^n \left( z_{(i)} - \frac{(2i-1)}{2n} \right)^2 + \frac{1}{12n} \\ U^2 &= W^2 - n \left( \bar{z} - \frac{1}{2} \right)^2 \\ A^2 &= -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \{ \ln z_{(i)} + \ln(1 - z_{(n+1-i)}) \} \\ &\quad \delta \\ A^2 &= -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{ (2i-1) \ln z_{(i)} + (2n+1-2i) \ln(1 - z_{(i)}) \} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Todas las fórmulas (2.2) son calculadas fácilmente con una computadora o una calculadora programable. Hay que tener cuidado para no usar  $\frac{1}{n}$  en  $D^-$ .

## 2.3 Pruebas FDE

La prueba general de bondad de ajuste es una prueba de:

$H_0$  : Una muestra aleatoria  $X_1, \dots, X_n$  provienen de  $F(x; \theta)$

Donde  $F(x; \theta)$  es una función de distribución continua y  $\theta$  es un vector de parámetros. Cuando  $\theta$  está especificado completamente, tenemos una hipótesis simple. Entonces  $Z_{(i)} = F(X_{(i)}; \theta)$  nos da un conjunto  $Z_{(i)}$  el cual, bajo  $H_0$ , está ordenado uniformemente y las ecuaciones (2.2) son usadas para obtener estadísticas FDE. Por otro lado,  $F(x; \theta)$  puede estar definido sólo como un miembro de la familia de distribución, sin conocer uno o más parámetros, entonces tenemos una hipótesis compuesta. Como un ejemplo de hipótesis simple, los datos de la tabla 2.1 en la columna  $z_1$  prueban una  $N(\mu = 55, \sigma^2 = 64)$ ; y como un ejemplo de hipótesis compuesta, en la columna  $z_2$  se probará una  $N(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$  con  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\sigma}^2$  estimaciones de la muestra.

Para hipótesis simples, la teoría de la distribución de estadísticas basadas en la FDE, está bien desarrollada, aún para muestras pequeñas y las tablas para estas pruebas están disponibles hace tiempo. Cuando  $\theta$  contiene uno o más parámetros desconocidos, estos parámetros pueden ser reemplazados por estimaciones, usando  $\hat{\theta}$  como la estimación de  $\theta$ . Entonces las fórmulas (2.2) pueden ser todavía usadas para calcular las estadísticas basadas en la FDE, con  $Z_{(i)} = F(X_{(i)}; \hat{\theta})$ ; sin embargo, las distribuciones de las estadísticas basadas en la FDE serán muy diferentes de las usadas para una hipótesis simple; éstas dependerán de la distribución probada, los parámetros estimados, el método de estimación, así como también del tamaño de la muestra; por lo tanto deben usarse nuevos cuantiles para la prueba apropiada, aún para muestras grandes, de lo contrario resultaría un grave error en el nivel de significancia.

### 2.3.1 Parámetros de escala y localización desconocidos

Cuando las componentes desconocidas de  $\theta$  son parámetros de localización o de escala, y si éstos son estimados por métodos apropiados, las distribuciones de las estadísticas basadas en la FDE no dependerán de los valores verdaderos de los parámetros desconocidos. Por lo tanto los cuantiles para las pruebas basadas en la FDE para tales distribuciones, por ejemplo, la normal, la exponencial, la de valor extremo y las distribuciones logísticas, dependerán sólo de la familia probada y del tamaño de la muestra. Sin embargo, las distribuciones exactas de las estadísticas basadas en la FDE son muy difíciles de encontrar y, a excepción de la distribución exponencial, los estudios de Monte Carlo han sido usados extensivamente para encontrar cuantiles para  $n$ 's pequeñas. Afortunadamente, para las estadísticas cuadráticas  $W^2$ ,  $U^2$  y  $A^2$  se dispone de la teoría asintótica; más aún, los cuantiles de estas estadísticas para  $n$ 's pequeñas convergen rápidamente a los puntos asintóticos. Para las estadísticas de la clase suprema  $D^+$ ,  $D^-$ ,  $D$  y  $V$ , no existe una teoría asintótica general (excepto para hipótesis simples), y hasta los puntos asintóticos deben ser estimados. Esto se puede hacer mediante graficación para un  $\alpha$  fijo, los puntos de

Monte Carlo para muestras de tamaño  $n$  contra  $m = \frac{1}{n}$ , y después extrapolando para  $m = 0$ ; alternativamente, ya que las estadísticas son funciones de un proceso asintóticamente Gaussiano, los puntos pueden encontrarse simulando el proceso Gaussiano. Serfling y Wood [44] y Wood [56] han obtenido por este método puntos asintóticos. Ambas técnicas están, por supuesto, sujetas a variaciones muestrales y errores debido a extrapolación; Chandra, Singpurwalla, y Stephens [5] han dado algunas comparaciones de los dos métodos al obtener cuantiles para pruebas de Distribución de Valor Extremo.

Para las pruebas correspondientes a muchas familias de distribuciones, Stephens [50] [52] [54] [55] ha dado modificaciones de las estadísticas de prueba; si la estadística es, digamos  $T$  la modificación es una función de  $n$  y  $T$  la cual es referida a los puntos asintóticos de  $T$  o de  $T\sqrt{n}$ . La teoría asintótica depende del uso de estimadores asintóticamente eficientes para las estimaciones de las componentes desconocidas de  $\theta$ ; los puntos asintóticos dados serán válidos para tales estimadores. Los cuantiles para  $n$ 's pequeñas dependerán de los estimadores usados; usualmente estos son estimadores obtenidos por máxima-verosimilitud, aunque la distribución Cauchy es una excepción. En las pruebas de las siguientes secciones, cuantiles para  $n$ 's pequeñas, usando estimadores dados, fueron encontrados de extensivos estudios de Monte Carlo hechos por Stephens, aunque otros estudios han sido usados también como referencia. Las modificaciones son derivadas del análisis de como estos cuantiles, digamos para  $\alpha = 0.05$ , convergen al cuantil asintótico. Una característica de las modificaciones es que, al menos en la cola apropiada, no dependen de  $\alpha$ ; por tanto cuando han sido encontradas tales modificaciones, las tablas usuales de cuantiles, con entradas para  $n$  y  $\alpha$ , pueden ser reducidas a una línea para cada situación de prueba. Las modificaciones permanecen sólo si son usados los estimadores dados, que han sido calculados para ser los más precisos cuando  $\alpha$  es aproximadamente 0.05, pero usualmente dan buenos resultados para propósitos prácticos. para  $\alpha$ 's menores que 0.2 aproximadamente.

### 2.3.2 Parámetros desconocidos de forma

Cuando los parámetros desconocidos no son ni de localización ni de escala, por ejemplo cuando el parámetro de forma de una distribución Gamma o Weibull es desconocido, la teoría de la distribución nula, aún la asintótica, cuando los parámetros son estimados, dependerá de los valores verdaderos de estos parámetros. Sin embargo, si esta dependencia es muy ligera, un conjunto de tablas, para ser usadas con el valor estimado del parámetro de forma, puede todavía ser útil (ver por ejemplo, la sección 2.6.7 concerniente a pruebas para la distribución Gamma); otros métodos para tratar con parámetros desconocidos son discutidos en la sección 2.7.2.

Existe una vasta literatura, sobre estadísticas y pruebas basadas en la FDE, y sólo las principales referencias relacionadas directamente con las pruebas y las tablas usadas se mencionan. Las recopilaciones comentadas han sido dados por Sahler [42] y por Neuhaus [33]; una revisión comprensible de la teoría y varias referencias están dadas por Durbin [11].

## 2.4 Aplicación para hipótesis simples

Tenemos una muestra aleatoria  $X_1, \dots, X_n$  y queremos probar para  $F_0(x; \theta)$  una función de distribución continua, donde  $\theta$  es un vector de parámetros que está completamente especificado:

$$H_0 : F_X(x; \theta) = F_0(x; \theta) \quad \forall x$$

el procedimiento a seguir es:

1. Ordenar ascendentemente la muestra,  $x_{(1)} < \dots < x_{(n)}$
2. Calcular  $z_{(i)} = F_0(x_{(i)}; \theta)$  para  $i = 1, \dots, n$
3. Calcular la(s) estadística(s) de prueba apropiada(s) usando la(s) fórmula(s) que se dan en (2.2)
4. Modificar la estadística de prueba como se indica en la tabla A.6 usando las modificaciones para la cola superior y compararla con la línea apropiada al cuantil deseado.
5. Si el valor de la estadística(s) excede(n) el valor de la cola superior dada al nivel  $\alpha$ ,  $H_0$  es rechazada al nivel  $\alpha$  de significancia

La prueba arriba descrita es una prueba que usa la cola superior de la estadística de prueba, i.e. es una prueba de una cola. Esto es porque, en general podríamos esperar que la diferencia entre  $F_0(x; \theta)$  y  $F_x(x; \theta)$ , o entre  $F_0(z)$  y  $F_x(z)$ ; será grande cuando  $H_0$  es falsa. Si la estadística de prueba muestra ser significativa en la cola inferior, esto sugiere que la  $Z$ -muestra es demasiado regular para ser una muestra aleatoria uniforme, y quizás los  $X$ -datos originales han sido manipulados. Tales  $Z$ -valores son llamados superuniformes, pueden hacerse pruebas usando las modificaciones y cuantiles de las colas inferiores también dados en la tabla A.6. Hay que considerar que observaciones superuniformes pueden obtenerse, sin haber manipulado los datos; particularmente en conexión con pruebas para la distribución exponencial, o para puntos aleatorios en el tiempo.

### 2.4.1 Ejemplo

Se tomaron los pesos (en kg) de 28 mujeres que ingresaron a un hospital, los resultados se muestran en la tabla 2.1. Sea  $X$  la variable aleatoria que describe el peso de una mujer, se desea probar que los datos provienen de una población normal con  $\mu = 55$  y  $\sigma^2 = 64$ .

$$H_0 : F_X(x; \theta) = n(x; 55, 64) \quad \forall x$$

## Pruebas Basadas en la FDE

Los resultados de las estadísticas se muestran en la siguiente tabla:

Estadística	$D^+$	$D^-$	$D$	$V$	$W^2$	$U^2$	$A^2$
$T$	0.03913	0.20073	0.20073	0.23986	0.27581	0.10515	1.38818
$T^*$ c. sup	0.21256	1.09041	1.09041	1.31726	0.27166	0.10461	-
$T^*$ c. inf	-	-	1.11584	1.35576	0.27523	0.10574	-

Las fórmulas (2.2) dan los valores para cada estadística en el primer renglón, las modificaciones se calculan según la tabla A.6 y los resultados para la cola superior se dan en el segundo renglón, para la cola inferior se muestran en el último renglón. Comparando los resultados obtenidos con los cuantiles correspondientes, también en la tabla A.6; vemos que con  $\alpha = .15$  no podemos rechazar la hipótesis, ya que los valores de las estadísticas modificadas son menores que los cuantiles dados; por lo tanto aceptamos que los pesos de las mujeres se distribuyen normal con media 55 y varianza 64.

**Observación** De las modificaciones dadas en la tabla A.6 se puede ver que los cuantiles de  $W^2$  y  $U^2$  para  $n$  pequeñas convergen rápidamente en la cola superior a los puntos asintóticos, y aunque las modificaciones no fueran incluidas en la tabla, el uso de los cuantiles asintóticos para  $n$  mayores que 20 daría un error insignificante en  $\alpha$ . Resulta más asombroso que para  $n$  mayores que 2 la distribución de  $A^2$  está dada de manera precisa por la distribución asintótica; esto fue demostrado por Lewis [26], y es válido a lo largo de toda la distribución. Las formas modificadas son tomadas de Stephens [50] donde son dadas referencias para las fuentes de las tablas para estadísticas FDE.

### 2.4.2 Niveles de significancia

Suponga que la estadística de prueba  $T$  toma el valor  $t$ ; el nivel de significancia, o  $p$ -valor de la estadística será entonces el valor  $p = p(T > t)$ . En algunos contextos el término es también aplicado a la probabilidad de la cola inferior  $p(T < t)$  pero aquí  $q$ , o el  $q$ -nivel, denota esta cantidad; entonces  $q = 1 - p$ . Esto es útil para ser capaz de calcular el nivel de significancia a lo largo de la distribución  $T$ , y no solamente en las colas. Para la estadística  $A^2$ , bajo una hipótesis simple, la tabla de  $q$ -valores de la distribución asintótica, dada por Lewis [26], es reproducida en la tabla A.7; ya que  $A^2$  no necesita modificaciones para un tamaño de muestra más grande que 3, la tabla A.7 puede ser usada para dar los  $q$ -valores para cualquier  $n$  mayor o igual que 3. Las tablas para encontrar  $p$  o  $q$  en las colas fueron dadas para otras estadísticas basadas en la FDE por Stephens [50].

- En el ejemplo 2.4.1  $A^2 = 1.38818$  de la tabla A.7 observamos que el  $q$ -nivel aproximado es 0.7903 entonces  $p = 0.2097$ .

## 2.4 Aplicación para hipótesis simples

Num i	peso $x_{(i)}$	$S_n(x)$	Hipótesis simple		Hipótesis compuesta	
			$z_{1(i)} = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$	$F_z(x) = \Phi(z_{1(i)})$	$z_{2(i)} = \frac{(x-\bar{\mu})}{\sigma}$	$F_z(x) = \Phi(z_{2(i)})$
1	43.09	★	-1.49	0.0681	-1.89	0.0294
2	46.72	★	-1.04	0.1492	-1.41	0.0793
3	47.63	★	-0.92	0.1788	-1.28	0.1003
4	47.63	★	-0.92	0.1788	-1.28	0.1003
5	47.63	★	-0.92	0.1788	-1.28	0.1003
6	49.90	★	-0.64	0.2611	-0.98	0.1635
7	52.16	★	-0.36	0.3594	-0.68	0.2483
8	52.16	★	-0.36	0.3594	-0.68	0.2483
9	54.43	★	-0.07	0.4721	-0.37	0.3557
10	54.43	★	-0.07	0.4721	-0.37	0.3557
11	55.34	★	0.04	0.5160	-0.25	0.4013
12	56.70	★	0.21	0.5832	-0.07	0.4721
13	57.61	★	0.33	0.6293	0.05	0.5199
14	57.61	★	0.33	0.6293	0.05	0.5199
15	58.97	★	0.50	0.6915	0.23	0.5910
16	58.97	★	0.50	0.6915	0.23	0.5910
17	58.97	★	0.50	0.6915	0.23	0.5910
18	58.97	★	0.50	0.6915	0.23	0.5910
19	58.97	★	0.50	0.6915	0.23	0.5910
20	59.88	★	0.61	0.7291	0.35	0.6368
21	61.24	★	0.78	0.7823	0.54	0.7054
22	61.24	★	0.78	0.7823	0.54	0.7054
23	61.24	★	0.78	0.7823	0.54	0.7054
24	63.50	★	1.06	0.8554	0.54	0.7054
25	64.41	★	1.18	0.8810	0.96	0.8315
26	65.77	★	1.35	0.9115	1.14	0.8729
27	70.31	★	1.91	0.9719	1.75	0.9599
28	77.11	★	2.76	0.9971	2.66	0.9961

Tabla 2.1: Despliegue de datos para los ejemplos de la sección 2.4.1 y la sección 2.6.2

## 2.5 Potencia de las pruebas para hipótesis simples

Resumiremos ciertas propiedades de la potencia de las pruebas basadas en la FDE para hipótesis simples.

1. Las estadísticas basadas en la FDE son usualmente más potentes que la estadística  $\chi^2$  de Pearson, esto se puede explicar porque para la estadística de Pearson los datos deben estar agrupados, resultando una pérdida de información, especialmente para muestras pequeñas.
2. La estadística basada en la FDE  $D$  es la más conocida, pero es comúnmente menos potente que las estadísticas de la clase cuadrática  $W^2$  y  $A^2$ .
3. Las estadísticas  $D^+$  y  $D^-$  son potentes en detectar si el  $Z$ -conjunto tiende o no a estar cerca del cero o del uno, respectivamente;  $A^2$ ,  $W^2$ , y  $D$  detectarán cualquiera de estas dos alternativas, y  $U^2$  y  $V$  son potentes en detectar un agrupamiento de los  $Z$ -valores en un cuantil, o una división en dos grupos cerca del cero y el uno. En términos de las observaciones originales  $X$ , las estadísticas  $D^+$ ,  $D^-$ ,  $A^2$ ,  $W^2$ , y  $D$  detectarán un error en la media de  $F(x; \theta)$ , y  $U^2$  y  $V$  detectarán un error en la varianza.
4. La estadística  $A^2$  a menudo se comporta como  $W^2$ , pero es más potente para pruebas cuando  $F(x; \theta)$  se aleja de la distribución verdadera en las colas, especialmente cuando parece haber muchos  $X$ -valores lejos de como se especificó  $F(x; \theta)$ . En trabajos de *bondad de ajuste*, es a menudo importante detectar el alejamiento en las colas, y la estadística recomendada es  $A^2$ .

## 2.6 Aplicación para hipótesis compuestas

Recordemos que una hipótesis compuesta es en la cual la función de distribución es propuesta pero los parámetros son desconocidos. Stephens hace una separación de los casos, dependiendo de los parámetros que se desconocen. Y la variación es que se usan estimadores de los parámetros y se hace referencia a diferentes tablas para encontrar la región de rechazo apropiada.

### 2.6.1 Prueba de Lilliefors (Distribución Normal)

Empezaremos con el problema de *bondad de ajuste* para la distribución normal con media y/o varianza desconocidas.

La función de distribución normal, denotada por  $n(\mu, \sigma^2)$  es:

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$H_0$  : La muestra aleatoria  $X_1, \dots, X_n$  proviene de una  $n(\mu, \sigma^2)$ , con uno o ambos parámetros desconocidos

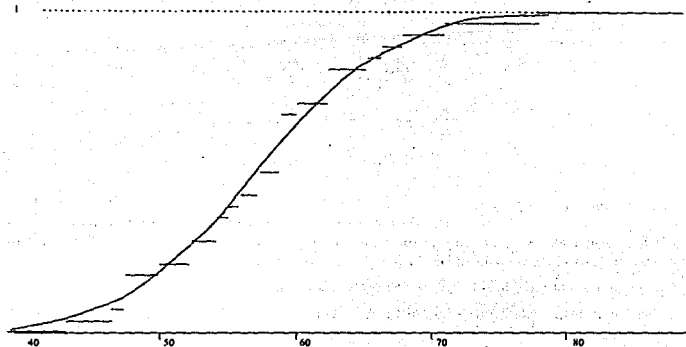


Figura 2.2: Gráfica de  $S_n(x)$  de los datos de la tabla 2.1 y sobrepuesta una función normal acumulada

Este problema es muy importante, ya que la suposición de una distribución normal con  $\mu$  y  $\sigma^2$  desconocidas es necesaria para muchas pruebas de estadística paramétrica y procedimientos de estimación. Lilliefors [27] mostró que usando los puntos críticos para  $D$ , la estadística Kolmogorov-Smirnov, se obtenían resultados extremadamente conservativos; por lo que usó una simulación Monte Carlo para desarrollar una tabla para la estadística Kolmogorov-Smirnov  $D$  que da valores críticos más precisos.  $\hat{F}_0(x)$  es calculado como la función de distribución acumulada normal estándar  $\Phi(z)$  en la cual:

$$z = \frac{x - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \quad \forall x$$

$$\text{donde } \hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \text{ y } \hat{\sigma} = s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (2.3)$$

La estadística  $D$  se define como antes,  $D = \sup_x |S_n(x) - \hat{F}_0(x)|$ . Entonces la región apropiada de rechazo nos la da los valores que corresponden a la cola derecha de la tabla A.5 que da la probabilidad exacta de la cola, calculada con simulaciones de Monte Carlo. Stephens [51] propone una separación de casos, según el parámetro desconocido, de la siguiente manera:

**Caso 1** La varianza  $\sigma^2$  es conocida y  $\mu$  es desconocida y estimada por la media muestral  $\bar{x}$ .

**Caso 2** La media  $\mu$  es conocida y la varianza  $\sigma^2$  es desconocida, estimada por

$$s_1^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{n}$$

**Caso 3**  $\mu$  y  $\sigma^2$  son desconocidos, y son estimados por máxima verosimilitud; ver ecuación (2.3). Este es el caso más importante en las situaciones prácticas.



## Pruebas Basadas en la FDE

Los pasos a seguir son:

1. Calcular  $w_i$ , para  $i = 1, \dots, n$  de

$$w_i = \frac{(x_{(i)} - \bar{x})}{\sigma} \quad (\text{caso 1})$$

$$w_i = \frac{(x_{(i)} - \mu)}{s_1} \quad (\text{caso 2})$$

$$w_i = \frac{(x_{(i)} - \bar{x})}{s} \quad (\text{caso 3})$$

2. Para hacer la substitución  $z_{(i)} = F(X_{(i)}, \hat{\theta})$  calcular  $z_{(i)} = \Phi(w_i)$  con  $i = 1, \dots, n$  donde  $\Phi(x)$  denota la probabilidad acumulada de una distribución normal estándar  $N(0, 1)$  para el valor  $x$ , que se encuentra directamente en la tabla A.2 para valores menores que cero y en la tabla A.3 para valores mayores que 0.
3. Calcular las estadísticas de acuerdo a las fórmulas (2.2)
4. Para los casos 1 ó 2, usar la tabla A.8. Para el caso 3, usar la tabla A.9 y calcular las estadísticas modificadas. Si el valor de la estadística usada,  $\alpha$ , en el caso 3, su valor modificado, excede el cuantil apropiado al nivel  $\alpha$ ,  $H_0$  es rechazada con nivel de significancia  $\alpha$

### 2.6.2 Ejemplo

Se tomaron los pesos (en kg) de 28 mujeres que ingresaron a un hospital, los resultados se muestran en la tabla 2.1. Sea  $X$  la variable aleatoria que describe el peso de una mujer, se desea probar que los datos provienen de una población normal, pero se desconocen  $\mu$  y  $\sigma^2$ . Obtenemos los valores observados de los estimadores máximo-verosímiles, como se muestra en las ecuaciones (2.3):

$$\hat{\mu} = 57.24 \quad \hat{\sigma} = 7.484$$

Entonces queremos probar:

$$H_0 : F_X(x; \hat{\theta}) = n(x; 57.24, 56.01) \quad \forall x$$

Los valores para los  $w_{(i)}$  y  $F_X$  se muestran en la tabla 2.1, los valores obtenidos para las estadísticas calculadas según las formulas (2.2) se muestran en la siguiente tabla:

Estadística	$D^+$	$D^-$	$D$	$V$	$W^2$	$U^2$	$A^2$
$T$	0.11603	0.09133	0.11603	0.20736	0.06001	0.05933	0.37355
$T^*$ c. sup	0.63144	-	0.63144	1.13973	0.06108	0.06039	0.38463
$T^*$ c. inf	-	-	-	-	0.06108	0.06039	0.38463

en el primer renglón, las modificaciones se calculan según la tabla A.9 y los resultados para la cola superior se dan en el segundo renglón, para la cola inferior se muestran en el último renglón. Comparando los resultados obtenidos con los cuantiles correspondientes, también en la tabla A.9; vemos que con  $\alpha = .25$  no podemos rechazar la hipótesis, ya que los valores de las estadísticas modificadas son menores que los cuantiles dados; por lo tanto aceptamos que los pesos de las mujeres se distribuyen normal con media y varianza desconocidos. Usando la estadística  $D = 0.11603$  y la tabla A.5 llegamos a la misma conclusión.

### 2.6.3 Pruebas para la Distribución Exponencial

La función de distribución Exponencial, denotada por  $Exp(\alpha, \beta)$ , es:

$$F(x; \alpha, \beta) = 1 - \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right), \quad x > \alpha; \quad \beta > 0$$

entonces la hipótesis nula a probar es:

$H_0$ : La muestra aleatoria  $X_1, \dots, X_n$  proviene de una  $Exp(\alpha, \beta)$ , con uno o ambos parámetros desconocidos

Como en la prueba de Lilliefors, analizaremos tres casos:

**Caso 1**  $\alpha$  (parámetro de localización) es desconocida y  $\beta$  es conocida.

Para este caso se usa una propiedad especial de la Distribución Exponencial; sea

$$X'_{(i-1)} = X_{(i)} - X_{(1)} \quad i = 2, \dots, n \quad (2.4)$$

Entonces  $X'$  es una variable aleatoria de  $Exp(0, \beta)$  y ya que  $\beta$  es conocido, se tiene una hipótesis simple y se puede aplicar la sección 2.4 usando los  $n-1$  valores de  $X'$ . Alternativamente,  $\alpha$  puede estimarse insesadamente por  $\hat{\alpha} = (X_{(1)} - \frac{1}{n})$ ; este estimador es derivado del estimador máximo verosímil  $X_{(1)}$ , y tiene una varianza que disminuye hasta  $\frac{1}{n\beta}$ . Entonces  $Z_{(i)}$  se distribuye  $Exp(\hat{\alpha}, \beta)$  para  $i = 1, \dots, n$  y las estadísticas calculadas conforme a (2.2) tendrán distribuciones asintóticas a la de una hipótesis simple, de tal forma que los cuantiles de la tabla A.6 podrán ser usados para muestras grandes. Sin embargo, en contraste con el procedimiento anterior de prueba (para hipótesis simples), las modificaciones que se dan no se aplicarán; y ya que los dos procedimientos anteriores tienden a tener propiedades de potencia muy similares, el primer procedimiento es más práctico para muestras relativamente pequeñas.

**Caso 2**  $\beta$  (parámetro de escala) es desconocida y  $\alpha$  es conocida.

Suponga que  $\alpha = 0$ . El estimador máximo verosímil de  $\beta$  está dado por  $\hat{\beta} = \bar{X}$ , la media muestral.

Los pasos para probar  $H_0$  son como sigue:

1. Calcular  $z_{(i)} = 1 - \exp\left(-\frac{X_{(i)}}{\hat{\beta}}\right)$ ,  $i = 1, \dots, n$
2. Calcular las estadísticas de acuerdo a las fórmulas (2.2)
3. Usar la tabla A.12 para modificar las estadísticas y encontrar los cuantiles, o alternativamente obtener los p-niveles de la tabla A.13.

Si  $\alpha = \alpha_0$ , es distinta de 0, la sustitución  $X'_i = X_i - \alpha_0$ ,  $i=1, \dots, n$ ; puede hacerse y probarse  $X'_i$  para  $Exp(0, \beta)$ , y se hace como se describió anteriormente.

**Caso 3**  $\alpha$  y  $\beta$  desconocidos.

Pocas pruebas son propuestas para probar exponencialidad en este caso, probablemente porque el resultado de la ecuación (2.4) puede usarse para reducir la prueba a una prueba con  $\alpha = 0$

### 2.6.4 Pruebas para la Distribución de Valor Extremo

La función de distribución de Valor Extremo, es:

$$F(x) = \exp \left[ -\exp \frac{-(x-\alpha)}{\beta} \right]; \quad -\infty < x < \infty \quad (2.5)$$

entonces la hipótesis nula a probar:

$H_0$  : La muestra aleatoria  $X_1, \dots, X_n$  proviene de una una distribución que sigue la ecuación (2.5), con uno o ambos parámetros desconocidos

Analizaremos tres casos:

**Caso 1**  $\beta$  es conocida y  $\alpha$  es desconocida,  
 $\alpha$  es estimada como en la ecuación (2.7), reemplazando  $\hat{\beta}$  por  $\beta$  que es conocida.

**Caso 2**  $\alpha$  es conocida y  $\beta$  es desconocida,  
 Como  $\alpha$  es conocida; sea  $Y_i = X_i - \alpha$ ; entonces  $\hat{\beta}$  se da resolviendo:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - \sum_{i=1}^n Y_i \exp \frac{-Y_i}{\hat{\beta}}}{n}$$

**Caso 3**  $\alpha$  y  $\beta$  desconocidos

Los estimadores máximo verosímiles de los parámetros son:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n X_i \exp \frac{-X_i}{\hat{\beta}}}{\sum_{i=1}^n \exp \frac{-X_i}{\hat{\beta}}} \quad (2.6)$$

La ecuación (2.6) se resuelve iterativamente, entonces ya puede resolverse (2.7).

$$\hat{\alpha} = -\hat{\beta} \log \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\exp \frac{-X_i}{\hat{\beta}}}{n} \right] \quad (2.7)$$

Los pasos para probar  $H_0$  son:

1. Estimar los parámetros desconocidos como arriba.
2. Calcular  $z_{(i)} = F(x_{(i)})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , donde  $F(x)$  está dada por la ecuación (2.5).
3. Calcular las estadísticas de acuerdo a las fórmulas dadas en (2.2).
4. Usar la tabla A.17 para modificar las estadísticas y encontrar los cuantiles, o alternativamente obtener los p-niveles de la tabla A.18.

### 2.6.5 Pruebas para la Distribución Weibull

La función de distribución Weibull, es:

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^m\right); \quad x > \alpha, \beta > 0, m > 1$$

donde:

- $\alpha$  es el parámetro de localización, es llamado el origen de la distribución
- $\beta$  es el parámetro de escala
- $m$  es el parámetro de forma

La hipótesis nula es:

$H_0$ : La muestra aleatoria  $X_1, \dots, X_n$  proviene de una una distribución  $W(x; \alpha, \beta, m)$ , con uno o más parámetros desconocidos

### 2.6.6 Prueba cuando $\alpha$ es conocida, reducción a 2.6.4

Suponemos que  $\alpha = 0$ , tal que  $H_0$  se convierte en:

$H_{0\alpha}$ : La muestra aleatoria  $X_1, \dots, X_n$  proviene de una una distribución  $W(x; 0, \beta, m)$ , con uno o ambos parámetros desconocidos

Esta distribución es comúnmente llamada la distribución Weibull de dos parámetros. Si  $\alpha \neq 0$ , pero tiene un valor  $\alpha_0$ , la transformación  $X'_i = X_i - \alpha_0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , da un conjunto  $X'_i$ , para el cual  $H_{0\alpha}$  sera cierta cuando  $H_0$  es cierta para  $X$ ; entonces  $H_{0\alpha}$  es probada para los  $X'_i$ . Considerando  $H_{0\alpha}$  se distinguen tres casos:

**Caso 1**  $m$  es conocida y  $\beta$  es desconocida

**Caso 2**  $\beta$  es conocida y  $m$  desconocida

**Caso 3**  $m$  y  $\beta$  son desconocidos

Para la prueba  $H_{0\alpha}$ , las tablas que se usaron en la sección 2.6.4 pueden ser usadas<sup>1</sup>. Sea  $Y = -\log X$  en la distribución  $W(x; 0, \beta, m)$  la distribución para  $Y$  se convierte en:

$$F(y) = \exp^{-\exp(-\frac{y-\theta}{\phi})}, \quad -\infty < y < \infty \quad (2.8)$$

con  $\theta = \frac{1}{m}$  y  $\phi = -\log \beta$ , esta distribución es la distribución de Valor Extremo de la sección 2.6.4, y una prueba de  $H_{0\alpha}$  para  $X$  puede hacerse probando que  $Y$  tiene distribución de Valor Extremo, con  $\theta$  y  $\phi$  uno o ambos desconocidos<sup>2</sup>.

El procedimiento de prueba es:

1. Hacer la transformación  $Y_i = -\log X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .
2. Ordenar  $Y_i$  en forma ascendente.
3. Probar que la muestra  $Y$  proviene de una distribución de Valor Extremo (ver ecuación (2.5)) como se describió en la sección 2.6.4

<sup>1</sup>Las tablas para casos bastante más inusuales donde  $\alpha$  es desconocida se pueden encontrar en Lockhart y Stephens [28]

<sup>2</sup>Notar que hay correspondencia entre el caso  $i$  de esta sección con el caso  $i$  de la sección 2.6.4

### 2.6.7 Prueba para la Distribución Gamma

La función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\beta \Gamma(m)} \left( \frac{x - \alpha}{\beta} \right)^{m-1} \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right); \quad x > \alpha, \beta > 0, m > 0$$

donde:

- $\alpha$  es el parámetro de localización, es llamado el origen de la distribución
- $\beta$  es el parámetro de escala
- $m$  es el parámetro de forma

La hipótesis nula es:

$H_0$  : La muestra aleatoria  $X_1, \dots, X_n$  proviene de una una distribución Gamma  $G(x; \alpha, \beta, m)$ , con uno o más parámetros desconocidos

Se analizará solamente cuando  $\alpha = \alpha_0$  es conocida, entonces la hipótesis nula es:

$H_{0\alpha}$  : La muestra aleatoria  $X_1, \dots, X_n$  proviene de una una distribución Gamma  $G(x; \alpha_0, \beta, m)$

Primero se hace una transformación  $X'_i = X_i - \alpha_0, i = 1, \dots, n$ ; y la hipótesis  $H_0$  ahora pasa a ser  $H_{0\alpha}$  probada para los  $X'_i$ . Considerando  $H_{0\alpha}$  se distinguirán tres casos:

**Observación** Todos las estimaciones son por Máxima-Verosimilitud.

**Caso 1**  $m$  es conocida,  $\beta$  es desconocida. Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Ordenar la muestra de forma ascendente,  $X_{(1)} < \dots < X_{(n)}$ .
2. Sea  $\bar{X}$  la media muestral, entonces  $\hat{\beta} = \frac{\bar{X}}{m}$ ;
3. Definir

$$I(X; m, \beta) = \frac{1}{\beta^m \Gamma(m)} \int_0^X x^{m-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) dx \quad (2.9)$$

Existen rutinas para computadora que calculan con precisión la expresión anterior, que es conocida como función gamma incompleta.

4. Calcular  $Z_{(i)} = I(X_{(i)}; m, \hat{\beta})$ , para  $i = 1, \dots, n$
5. Calcular las estadísticas FDE de prueba para  $Z_{(i)}$  usando (2.2)
6. Modificar las estadísticas como sigue:

	$W^*$	$U^*$	$A^*$
$m = 1$	$W^2 \left(1 + \frac{0.16}{n}\right)$	$U^2 \left(1 + \frac{0.16}{n}\right)$	$A^2 \left(1 + \frac{0.6}{n}\right)$
$m \geq 2$	$\frac{1.8nW^2 - 0.14}{1.8n - 1}$	$\frac{1.8nU^2 - 0.14}{1.8n - 1}$	$A^2 + \frac{1}{n} \left(0.2 + \frac{0.3}{m}\right)$

estas modificaciones estan basadas en estudios Monte Carlo para  $n$  pequeña, y han sido diseñados para ser tan comprensibles como sea posible, convergiendo todos los valores de  $m$  y  $n$ , cuando los cuantiles son usados al nivel  $\alpha$  se cree que el verdadero nivel de significancia no diferirá por más de 0.5% para  $n \geq 5$ .

7. Las estadísticas modificadas están referidas a los cuantiles de la cola superior dados en la tabla A.19 para el valor apropiado de  $m$ . Estos puntos son los puntos asintóticos de varias distribuciones; fueron dados por Pettitt y Stephens [39].

**Caso 2**  $\beta$  es conocida y  $m$  desconocida. Para este caso los pasos a seguir son:

1. Ordenar la muestra de forma ascendente,  $X_{(1)} < \dots < X_{(n)}$ .
2. Estimar  $m$  resolviendo para  $\hat{m}$  la ecuación para  $\frac{\sum_{i=1}^n \log X_i}{n} = \psi'(m) - \log \beta$ ; donde  $\psi(m)$  es la función digamma  $\frac{\Gamma}{\Gamma m} \log \Gamma(m)$
3. Calcular  $Z_{(i)} = I(X_{(i)}; \hat{m}, \beta)$  para  $i = 1, \dots, n$   $I$  se define en (2.9).
4. Calcular las estadísticas FDE de prueba para  $Z_{(i)}$  usando (2.2)
5. Rechazar  $H_{0\alpha}$  si el valor de la estadística usado es mayor que el valor en la tabla A.20 para el nivel de significancia  $\alpha$  deseado y la  $\hat{m}$  apropiada.

**Caso 3**  $m$  y  $\beta$  son desconocidos. Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Estimar los parámetros de la siguiente forma:  
 $m$  resolviendo para  $\hat{m}$  la ecuación para  $\frac{\sum_{i=1}^n \log X_i}{n} - \log \hat{X} = \psi(m) - \log m$ ; donde  $\psi(m)$  es la función digamma como arriba; y  
 $\hat{\beta} = \frac{\hat{X}}{\hat{m}} \frac{\Gamma}{\Gamma \hat{m}} \log \Gamma(\hat{m})$ .
2. Calcular  $Z_{(i)} = I(X_{(i)}; \hat{m}, \hat{\beta})$  para  $i = 1, \dots, n$   $I$  se define en (2.9).
3. Calcular las estadísticas FDE de prueba para  $Z_{(i)}$  usando (2.2)
4. Rechazar  $H_{0\alpha}$  si el valor de la estadística usado es mayor que el valor en la tabla<sup>3</sup> A.21 para el nivel de significancia  $\alpha$  deseado y la  $\hat{m}$  apropiada.

Para los Casos 2 y 3, cuando  $m$  es desconocida; la teoría de la distribución, cuando  $m$  es estimado por Máxima-Verosimilitud u otro método eficiente, dependerá del verdadero valor de  $m$ ; esto pasa porque  $m$  no es un parámetro de localización o de escala. Sin embargo, pueden hacerse pruebas aproximadas como se mencionó arriba.

**Nota:** Los casos en donde  $\alpha$  es desconocida son menos agradables; además, es difícil estimar los parámetros eficientemente, pruebas para estos casos se dan en Lockhart y Stephens [29]; los cuantiles de las tablas A.20 y A.21 son tomados del mismo, donde la teoría asintótica se desarrolla. Tablas para la estadística Kolmogorov-Smirnov  $D$ , son dadas por Schneider y Clickner [43], para el caso 3, se toma un estimador diferente para  $m$ .

---

<sup>3</sup>Los cuantiles en esta tabla permanecen notablemente estables cuando  $m$  cambia, especialmente para  $U^2$ , y deben esperarse resultados precisos cuando  $\hat{m}$  es usada en lugar de  $m$ . Sólo cuantiles asintóticos son dados, experiencias con  $W^2$ ,  $A^2$  y  $U^2$  sugieren que estas son buenas aproximaciones a los cuantiles para  $n$ 's pequeñas, aún para  $n$ 's muy pequeñas

## 2.6.8 Prueba para la Distribución Logística

La función de distribución Logística, es:

$$F(x; \alpha, \beta) = \left\{ 1 + \exp \frac{-(x-\alpha)}{\beta} \right\}^{-1}; \quad -\infty < x < \infty; \beta < 0 \quad (2.10)$$

entonces:

$H_0$ : La muestra aleatoria  $X_1, \dots, X_n$  proviene de una una Distribución Logística, con uno o ambos parámetros desconocidos

Como en las secciones anteriores, analizaremos tres casos:

**Caso 1**  $\alpha$  es desconocida,  $\beta$  es conocida.  $\alpha$  es estimada como en la ecuación (2.11), reemplazando  $\hat{\beta}$  por  $\beta$

**Caso 2**  $\alpha$  es conocida,  $\beta$  es desconocida y será estimada como en la ecuación (2.12), reemplazando  $\hat{\alpha}$  por  $\alpha$

**Caso 3**  $\alpha$  y  $\beta$  desconocidos, y son estimados según (2.11) y (2.12)

Los estimadores máximo verosímiles de los parámetros son:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ 1 + \exp \frac{(X_i - \hat{\alpha})}{\hat{\beta}} \right\}^{-1} = \frac{1}{2} \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \right) \frac{1 - \exp \frac{(X_i - \hat{\alpha})}{\hat{\beta}}}{1 + \exp \frac{(X_i - \hat{\alpha})}{\hat{\beta}}} = -1 \quad (2.12)$$

Estas ecuaciones pueden ser resueltas iterativamente; valores apropiados para empezar con  $\alpha$  y  $\beta$  son la media muestral  $\bar{X}$  y la desviación estándar muestral  $s$ .

Los pasos para probar  $H_0$  son:

1. Estimar los parámetros desconocidos.
2. Calcular  $z_{(i)} = F(x_{(i)})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , donde  $F(x)$  está dado por (2.10).
3. Calcular las estadísticas de acuerdo a las fórmulas (2.2).
4. Para las estadísticas  $W^2$ ,  $U^2$  y  $A^2$ , hacer las modificaciones como se indica en la tabla A.22; rechazar  $H_0$  si la estadística excede el cuantil dado para el nivel de significancia  $\alpha$  dado. Para  $D^+$ ,  $D^-$ ,  $D$  y  $V$ , multiplicar por  $\sqrt{n}$  y usar la tabla A.23, la tabla para  $D^+ \sqrt{n}$  también puede usarse para  $D^- \sqrt{n}$ , rechazar  $H_0$  si la estadística excede el cuantil dado para el nivel de significancia deseado  $\alpha$

### 2.6.9 Prueba para la Distribución Cauchy

La función de densidad Cauchy es:

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \frac{\beta}{\beta^2 + (x - \alpha)^2}, \quad -\infty < x < \infty; \beta > 0$$

y su función de distribución es:

$$F(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{x - \alpha}{\beta} \right); \quad -\infty < x < \infty; \beta > 0 \quad (2.13)$$

La hipótesis nula es:

$H_0$ : La muestra aleatoria  $X_1, \dots, X_n$  proviene de una una Distribución Cauchy, con uno o ambos parámetros desconocidos

Como en las secciones anteriores, analizaremos tres casos:

**Caso 1**  $\alpha$  es desconocida,  $\beta$  es conocida.

**Caso 2**  $\alpha$  es conocida,  $\beta$  es desconocida.

**Caso 3**  $\alpha$  y  $\beta$  desconocidos.

Para las distribuciones anteriores, los parámetros han sido estimados por Máxima Verosimilitud; sin embargo, en la distribución Cauchy la verosimilitud puede tener máximos locales, y esto dificulta encontrar los verdaderos máximos. Entonces encontramos estimadores usando estadísticas de orden ponderadas.

Chernoff, Gastwirth, y Johns [7] dieron los estimadores para:

$$\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^n c_i X_{(i)} \quad \text{con } c_i = \frac{\sin 4\pi \left( \frac{j}{n+1} - \frac{1}{2} \right)}{n \tan \pi \left( \frac{j}{n+1} - \frac{1}{2} \right)}$$

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^n d_i X_{(i)} \quad \text{con } d_i = \frac{8 \tan \pi \left( \frac{j}{n+1} - \frac{1}{2} \right)}{n \sec^4 \pi \left( \frac{j}{n+1} - \frac{1}{2} \right)}$$

Estos estimadores son asintóticamente eficientes y distribuciones asintóticas pueden ser encontradas para  $W^2$ ,  $U^2$  y  $A^2$ .

La prueba para  $H_0$  es:

1. Estimar los parámetros desconocidos, como se describió arriba.
2. Calcular  $z_{(i)} = F(x_{(i)})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , donde  $F(x)$  está dado por la ecuación (2.13), reemplazando los parámetros desconocidos con las estimaciones.
3. Calcular las estadísticas de acuerdo a las fórmulas (2.2). (Se tienen las tablas para  $A^2$  y  $W^2$ ).
4. Usar la tabla A.24 y la tabla A.25 para hacer la prueba.
5. Rechazar  $H_0$  si el valor de la estadística de prueba es más grande que el cuantil dado para  $n$  y el nivel de significancia desendo  $\alpha$ .



### 2.7 Potencia de las pruebas para hipótesis compuestas

En la sección 2.5 se hicieron algunos comentarios sobre la potencia de diferentes estadísticas de las FDE para hipótesis simples, donde esencialmente la prueba final es una prueba para la uniformidad de los  $Z$ -valores dados por la Transformación Integral de Probabilidad. Diferentes estadísticas fueron encontradas para detectar diferentes tipos de desviación de la uniformidad. Cuando parámetros desconocidos son estimados de la misma muestra como se hace para la *prueba de bondad de ajuste*, las diferencias en las potencias de las estadísticas tienden a hacerse más pequeñas. Parece que ajustando el parámetro o parámetros hace posible el ajustar la distribución en prueba a la muestra de tal manera que las estadísticas pueden detectar una desviación de la distribución nula con rudeza con casi la misma eficiencia; sin embargo,  $A^2$  tiende a superar a los otros, probablemente porque es efectivo al detectar desviaciones en las colas.

Algo de teoría asintótica está disponible para examinar la potencia, al menos para estadísticas cuadráticas. Durbin y Knott [12] mostraron un método por el cual los resultados asintóticos de potencia podían ser obtenidos, y lo aplicaron a pruebas para la distribución normal con media 0 y varianza 1, esto es, pruebas de hipótesis simples, contra alternativas normales con un cambio en la media o en la varianza. Stephens [51] extendió los resultados a cambios en ambos la media y la varianza. La técnica se fundamenta en una partición de las estadísticas apropiadas en componentes, Durbin, Knott, y Taylor [13] mostraron como la descomposición en componentes podía ser hecha también para la prueba de normalidad con media y varianza desconocidas (**Caso 3**), o para la prueba exponencial con parámetro de escala desconocido, y usaron su método para discutir la potencia asintótica de las componentes. Stephens [53] siguió el método y lo aplicó a pruebas para las estadísticas  $W^2$ ,  $U^2$  y  $A^2$  para estas situaciones. El resultado global cuando son hechas las pruebas de normalidad o exponencialidad con parámetros desconocidos, es que  $A^2$  es ligeramente mejor que  $W^2$  para las alternativas discutidas, con  $U^2$  no muy atrás de  $W^2$ .

La superioridad de  $A^2$  ha sido también documentada por varios estudios de potencia basados en el muestreo de Monte Carlo. Algunos de estos, en comparaciones de pruebas de uniformidad y normalidad, están dados por Stephens [52]. Estos estudios de potencias también incluyeron las estadísticas  $D^+$ ,  $D^-$ ,  $D$  y  $V$ .

La más famosa estadística, la Kolgomorov-Smirnov  $D$ , tiene a ser débil en potencia. Las estadísticas  $D^+$  y  $D^-$ , por otro lado, a menudo tienen buena potencia pero cada una contra sólo ciertas clases de alternativas. Por ejemplo, en pruebas de exponencialidad  $D^+$  parece ser poderoso contra alternativas de razón de falla decreciente y  $D^-$  es poderoso contra alternativas de razón de falla creciente. En algunas aplicaciones la alternativa de interés puede ser identificada claramente, y entonces será posible identificar que estadística usar. Sin embargo,  $D^+$  y  $D^-$  serán sesgados cuando son usados contra las alternativas equivocadas, entonces estas estadísticas deben ser usadas con cuidado.

De los estudios de potencia para pruebas de normalidad y exponencialidad parece que  $A^2$  ó  $W^2$  como segunda opción, deberían ser recomendados como pruebas estadísticas generales para las pruebas FDE con parámetros desconocidos, con buena potencia contra un amplio rango de alternativas.

#### 2.7.1 El efecto en la potencia al conocer ciertos parámetros

De una comparación de las tablas A.12 y A.14 de cuando la estimación es muy cercana al valor real, uno tiene una prueba mucho más sensitiva usando las tablas para los parámetros desconocidos que usando las tablas para el caso de una hipótesis simple; en general, los valores críticos para el rechazo son mucho más pequeños cuando los parámetros deben ser

## 2.8 Pruebas FDE para distribuciones discretas

estimados. Pasaría bastante frecuentemente que el valor estimado de  $\beta$  estaría cercano al valor real, y entonces el practicante quien desconoce  $\beta$  obtendrá mayor potencia que si  $\beta$  fuera conocida.

Esto parece algo paradójico, ya que usualmente en pruebas estadísticas uno supone que mientras más se conozca mejor. Sin embargo, las *pruebas de bondad de ajuste* están planeadas como pruebas para una forma de distribución, y no como pruebas para valores de parámetros, el conocimiento de los parámetros puede no ser importante al estimar la forma de la distribución. Por ejemplo, puede ser que no ayude el saber, y usar, la media de la verdadera distribución, cuando ésta no es la que está en prueba. Stephens [52] y Dyer [14] han notado estos efectos en pruebas para la normalidad; siendo dados los cambios en media y varianza la prueba del **caso 3** al caso de hipótesis simple, con una pérdida consecuente de potencia. Por otra parte, Spinelli y Stephens [46] han mostrado que en pruebas para exponencialidad es mejor usar el valor del origen, cuando este es conocido, que estimarlo. Se necesita aún más trabajo acerca de qué información paramétrica es útil y cuál no lo es.

### 2.7.2 Uso de Estadísticas Suficientes

Otros métodos interesantes han sido propuestos para tratar con parámetros desconocidos. Cuando están disponibles estadísticas suficientes para  $\theta$ , Srinivasan [47] [48] ha sugerido usar la estadística Kolgomorov  $D$  calculada de una comparación de  $S_n(x)$  con la estimación  $\bar{F}(x, \hat{\theta})$  aplicando el teorema de Rao-Blackwell a  $F(x, \hat{\theta})$ , donde  $\hat{\theta}$  es, digamos, el estimador máximo verosímil de  $\theta$ . Las pruebas resultantes son asintóticamente equivalentes a las pruebas dadas en la sección previa usando  $F(x; \theta)$  por ella misma (Moore [31]) y se puede esperar que tenga propiedades similares para  $n$  finito. El método usualmente llevará a cálculos complicados, y ha sido desarrollado sólo para pruebas de normalidad (Srinivasan [47]; veasé también Kotz [23]) y para pruebas de exponencialidad.

## 2.8 Pruebas FDE para distribuciones discretas

Las pruebas dadas en las secciones previas han sido desarrolladas para casos en los cuales la distribución  $F(x)$  probada es continua. Históricamente, las pruebas basadas en las estadísticas FDE fueron introducidas con este supuesto, y se dejó el campo de las pruebas de distribuciones discretas a la estadística  $\chi^2$  de Pearson.

Sin embargo, una prueba FDE puede ser también trazada para datos discretos y puede ser comparada con la distribución acumulativa de la cual los datos supuestamente son sacados; es entonces natural definir medidas de discrepancia análogas a las estadísticas dadas para distribuciones continuas.

Aquí examinaremos pruebas basadas en tales medidas. Una revisión general de las pruebas de *bondad de ajuste* para distribuciones discretas fue dada por Horn [20].

Los datos pueden parecer discretos porque la muestra proviene genuinamente de una distribución discreta como la Binomial o la Poisson, por ejemplo, en mediciones de conteos; o porque originalmente datos continuos fueron agrupados. Tales agrupamientos pueden ocurrir porque a la unidad de medida le falta precisión, por ejemplo, cuando los ángulos son redondeados a los 5 grados más cercanos, o el peso es redondeado al gramo más cercano; esto ocurre en los datos de la tabla 2.1, los tres pesos de las mujeres que son registrados como 47.63kg, obviamente no son exactamente iguales, pero cada uno puede estar entre 47.625 y 47.635kg.

Con grandes cantidades de datos, los agrupamientos pueden también hacerse para facilitar el despliegue o el manejo de los mismos; y los valores originales, y por tanto alguna

información, pueden perderse antes de que se haga una prueba de bondad de ajuste. Por supuesto, en la práctica todos los datos continuos están sujetos a los límites de mediciones exactas, pero el grupo de interés puede ser tan fino como para tener efectos despreciables.

### 2.8.1 La FDE para datos discretos: Hipótesis simples

Supongamos que para datos discretos los posibles resultados son divididos en  $k$  celdas y la hipótesis nula es

$$H_0: P(\text{una observación } \in \text{ en la celda } i) = p_i, \quad i = 1, \dots, k$$

Las  $p_i$ 's se supone que están dadas, de tal forma que  $H_0$  está completamente especificada, y la situación es una hipótesis simple para distribuciones discretas. Las fronteras de las celdas pueden estar determinadas por los valores actuales tomados por una variable aleatoria  $X$ , especialmente si hay exactamente  $k$  de éstas, o algunos valores pueden ser agrupados, como en la cola de una distribución Poisson, para dar  $k$  celdas en total. Supongamos que se toman  $n$  observaciones independientes, y sea  $O_i$  el número observado y  $E_i$  el número esperado ( $E_i = np_i$ ), en la  $i$ -ésima celda. La estadística  $S$  se define:

$$S = \max_{1 \leq j \leq k} \left\{ \sum_{i=1}^j (O_i - E_i) \right\}$$

Para grupos de datos continuos, sean las fronteras de las celdas, en orden ascendente,  $c_0, c_1, \dots, c_k$ ; la celda  $i$  contiene valores  $X$  tales que  $c_{i-1} \leq x < c_i$ . Si  $O_i$  y  $E_i$  son los valores observado y esperado respectivamente en la celda  $i$ , la estadística  $S$  puede definirse como arriba. También, una FDE puede ser definida como

$$F_n(c_j) = \frac{\sum_{i=1}^j O_i}{n} \quad j = 1, \dots, k$$

$$F_n(x) = F_n(c_j) \quad c_j \leq x < c_{j+1}$$

$F_n(x)$  es el histograma acumulativo de los datos. La función de distribución de grupo  $F_g(x)$  puede ser definida de la misma manera, reemplazando  $O_i$  por  $E_i$ . Entonces la estadística  $S$  es igual a

$$S = n \sup_x |F_n(x) - F_g(x)|$$

y hay un paralelismo obvio con la estadística Kolmogorov-Smirnov  $nD$ . Similarmente, una estadística paralela a  $W^2$  sería

$$W_d^2 = n^{-1} \sum_{j=1}^k \left\{ \sum_{i=1}^j (O_i - E_i) \right\}^2$$

y es posible construir otras estadísticas paralelas para distribuciones continuas.

El valor de la estadística  $S$  depende del ordenamiento de las celdas de tal manera que un ordenamiento diferente producirá un valor diferente para los mismos datos. Es por esto que se recomienda que  $S$  sea usado cuando hay un ordenamiento natural de categorías. Varios autores han discutido la estadística  $S$  o las estadísticas  $S^+$  y  $S^-$  definidas por

$$S^+ = \max_{1 \leq j \leq k} \left\{ \sum_{i=1}^j (O_i - E_i) \right\}$$

$$S^- = \max_{1 \leq j \leq k} \left\{ \sum_{i=1}^j (E_i - O_i) \right\}$$

que son análogas a  $nD^+$  y  $nD^-$ , y nos confinamos a pruebas para datos discretos basadas en estas tres estadísticas.

Pettitt y Stephens [38] han dado probabilidades exactas para la distribución de  $S$  para celdas de igual probabilidad. Ellos también mostraron como las tablas pueden ser usadas como buenas aproximaciones para las distribuciones de probabilidad de  $S$  para probabilidades desiguales por celda, y también para deducir probabilidades aproximadas para  $S^+$  o  $S^-$  (ver también Conover [9]. La tabla A.26 es tomada de la Tabla 1 de Pettitt y Stephens [38]. La tabla da valores de  $P(S \geq m)$ , para valores de  $m$  que da probabilidades cercanas a valores usuales de niveles de prueba. Por tanto una prueba de  $H_0$  se realiza como sigue:

1. Registrar el número de observaciones  $O_i$  y el número esperado  $E_i$ , para  $i = 1, \dots, k$ .
2. Calcular

$$T_j = \sum_{i=1}^j (O_i - E_i), \quad j = 1, \dots, k$$

3. Definir

$$S^+ = \max_j T_j$$

$$S^- = \max_j -\{T_j\}$$

$$S = \max_j |T_j|$$

Sea  $m$  el valor de la estadística usada.

4. Usar la tabla A.26 para encontrar los  $p$ -niveles, esto es  $p(S \geq m)$ . Los  $p$ -niveles para  $S^+$  o  $S^-$ , esto es  $p(S^+ \geq m)$  o  $p(S^- \geq m)$  son aproximadamente  $\frac{1}{2}p(S \geq m)$
5. Si el  $p$ -nivel para la estadística usada es menor que el nivel de prueba  $\alpha$ , se rechaza  $H_0$  al nivel de significancia  $\alpha$ .

La estadística  $S$  da una prueba de dos colas y las estadísticas  $S^+$  y  $S^-$  dan pruebas de una cola.

### 2.8.2 Ejemplo

Los datos de la tabla siguiente, usada por Pettitt y Stephens [38], son tomados de Siegel [45].

A diez personas se le enseñó 5 fotografías personales, variando en tono (grados 1-5), y le fue pedido que escogiera la fotografía que más le gustara. La hipótesis en prueba fue que no había alguna preferencia por algún tono, esto es que cada tono tenía la misma posibilidad de ser elegido. Los valores de  $T_j$  están dados en la tabla anterior. Los valores de  $S^+$  y  $S^-$  son respectivamente 0 y 5, y el valor de  $S$  es 5. De la tabla A.26 para  $n=10$ ,  $k=5$ , tenemos que  $P(S \geq 5) = 0.00477$ , así que  $S$  es altamente significativa, con un  $p$ -nivel menor que .005, y  $H_0$  sería rechazado. La estadística de Pearson:

Tono $j$ de foto escogida	Tono escogido de grado $j$ $O_j$	Número esperado $E_j$	$T_j = \sum_{i=1}^j \{O_i - E_i\}$
1	0	2	-2
2	1	2	-3
3	0	2	-5
4	5	2	-2
5	4	2	0

$$X^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (O_i - E_i)^2}{E_i} = 11,$$

usando la aproximación usual  $\chi^2$ ,  $P(X^2 \geq 11) = 0.024$ , mientras que por numeración exacta la probabilidad es 0.04. La estadística  $S$  por tanto da un valor mucho más extremo que el que da  $X^2$ , y parece ser más sensitiva en este ejemplo. Pettitt y Stephens han investigado la potencia de  $S$ , especialmente contra alternativas que representan una tendencia en probabilidades de celdas a medida que el índice  $i$  aumenta, y parece que para tales alternativas,  $S$  será a menudo más potente que  $X^2$ .

Hay que notar que las tablas para la hipótesis simple para  $nD$  no deberían ser usadas para  $S$ , a pesar del paralelismo entre las dos estadísticas. Noether [36] sugiere que el uso de las tablas  $nD$  da una prueba conservativa; Pettitt y Stephens han dado varios ejemplos para mostrar que esto es cierto, con el verdadero  $\alpha$  - valor muy diferente del valor supuesto.

La prueba  $S$  ha sido dada arriba para hipótesis simples donde la hipótesis nula está completamente especificada. El análogo de  $S$  no está disponible para los variados casos donde las probabilidades para cada celda deben ser estimadas, por ejemplo, en una prueba para una distribución Poisson o binomial, donde un parámetro desconocido debe ser estimado de los datos.

Wood y Altavela [57] han discutido propiedades asintóticas de las estadísticas Kolmogorov Smirnov  $D^+$ ,  $D^-$  y  $D$  cuando es usada con distribuciones discretas, y han mostrado como los cuantiles asintóticos pueden ser simulados.

## Capítulo 3

# La estadística Kolmogorov-Smirnov $D$

### 3.1 Importancia de la estadística $D$

La estadística  $D$  es la más conocida de las estadísticas basadas en la FDE; aquí mencionaremos dos aplicaciones útiles, aunque en la sección 2.7 se recomienda el uso de la estadística  $A^2$  por su potencia; y haremos una comparación entre las pruebas  $\chi^2$  y  $D$  como representante de las pruebas basadas en la FDE.

#### 3.1.1 Bandas de confianza

El procedimiento de bandas de confianza puede ser usado para diseñar una prueba de la hipótesis  $F_x(x) = F_0(x)$  ya que  $F_0(x)$  yace completamente dentro de los límites  $L_n(x)$  y  $U_n(x)$  si y sólo si la hipótesis no puede ser rechazada al nivel de significancia  $\alpha$ .

El uso de la estadística  $D$  es encontrando bandas de confianza para  $F(x)$ ; de la tabla A.4 podemos encontrar el número de  $D_\alpha$  tal que  $p(D > D_\alpha) = \alpha$ , esto es equivalente a enunciar:

$$\begin{aligned} p(\sup_x |S_n(x) - F_x(x)| < D_\alpha) &= 1 - \alpha \\ p(S_n(x) - D_\alpha < F_x(x) < S_n(x) + D_\alpha) &= 1 - \alpha \quad \forall x \end{aligned}$$

Sabemos que  $0 \leq F_x(x) \leq 1 \forall x$ , donde la desigualdad en este enunciado de probabilidad admite números fuera de este rango. Entonces se definen:

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \max[S_n(x) - D_\alpha, 0] \\ U_n(x) &= \min[S_n(x) + D_\alpha, 1] \end{aligned}$$

y llamamos a la región entre  $L_n(x)$  y  $U_n(x)$  una banda de confianza para  $F_x(x)$  con coeficiente de confianza asociado  $1 - \alpha$ .

El procedimiento más simple en la aplicación es graficar la  $S_n(x)$  observada y dibujar líneas paralelas a una distancia  $D_\alpha$ , en cualquier dirección pero siempre dentro del cuadrado de la unidad. Cuando  $n$  es mayor que 40, el valor  $D_\alpha$  puede ser determinado de la distribución asintótica.

### 3.1.2 Tamaño de la muestra

Tenemos  $S_n(x)$  es un estimador de  $F_n(x)$  para cada  $x$ .  $D$  nos hace capaces de determinar el tamaño de muestra requerido para enunciar justificadamente con una cierta probabilidad  $1 - \alpha$  de que el error en la estimación nunca excede un valor fijo  $c$ ; queramos encontrar el valor mínimo de  $n$  que satisfaga:

$$\begin{aligned}p(D < c) &= 1 - \alpha \\p(D > c) &= 1 - p(D < c) = \alpha\end{aligned}$$

entonces  $c$  es igual al valor de  $D_\alpha$  que se encuentra en la tabla A.4; esto significa que el valor de  $n$  puede leerse directamente de la tabla A.4, como el tamaño de muestra correspondiente a  $D_\alpha = c$ . Si  $n$  es mayor que 40, conoceremos  $n$  con la precisión dada, usando la distribución asintótica resolviendo  $c = \frac{d}{\sqrt{n}}$  para  $n$ , donde  $\frac{d}{\sqrt{n}}$  está dado en el último renglón de la tabla A.4.

Suponga que queremos tomar una muestra de tamaño  $n$  y usamos  $S_n(x)$  como un estimador de  $F_X(x)$  para cada  $x$ ; queremos que el error en la estimación no sea mayor que .25 con probabilidad .98 ¿Qué tan grande debería ser la muestra tomada?

- Observando bajo la columna  $1 - .98 = .02$  en la tabla A.4 hasta que encontremos el valor  $c$  más grande que es menor o igual a .25, esta entrada el .247; el cual corresponde a  $n = 36$

Si queremos más precisión en el estimador y por lo tanto un error máximo de .20 pero manteniendo la probabilidad al .98; la tabla muestra que  $n > 40$ ; el valor se encuentra resolviendo  $\frac{.20}{\sqrt{n}} = .2$  y llegamos a  $n = 57.76$ , el cual redondeamos para pedir una muestra de 58 observaciones.

### 3.2 Comparación entre las pruebas $\chi^2$ y $D$

La prueba  $\chi^2$  está especialmente diseñada para usarla con datos categóricos, mientras que la estadística  $D$  es para variables aleatorias de poblaciones continuas. Sin embargo, cuando los datos no son recolectados como categorías, estas dos pruebas de *bondad de ajuste* pueden ser intercambiadas. Sólo una breve comparación se hará a continuación:

- La diferencia básica entre las dos pruebas es que la  $\chi^2$  es sensitiva a la desviación vertical entre el histograma observado y el esperado, mientras que los procedimientos usados por  $D$  están basados en las desviaciones verticales entre la función de distribución acumulativa observada y la esperada. Sin embargo, ambos tipos de desviaciones son útiles para determinar *bondad de ajuste* y probablemente son igualmente informativas.
- La diferencia obvia es que mientras la prueba  $\chi^2$  requiere de datos agrupados la prueba basada en la estadística  $D$  no. Por eso cuando la distribución propuesta es continua la prueba  $D$  permite examinar la *bondad de ajuste* para cada una de las  $n$  observaciones, en lugar de sólo para  $k$  clases, donde  $k \leq n$ . En este sentido la prueba  $D$  hace un uso más completo de los datos disponibles.
- La estadística  $\chi^2$  es afectada por el número de categorías y sus longitudes; las cuales son elegidas por el experimentador.

- Una de las principales ventajas de la estadística  $D$  es que la distribución exacta de la muestra  $D_n$  es conocida y está tabulada; mientras que la distribución de la estadística  $X^2$  es sólo aproximadamente  $\chi^2$  para cualquier  $n$  pequeña.
- La estadística  $D$  puede aplicarse para cualquier tamaño de muestra, mientras que la estadística  $X^2$  debe usarse sólo para muestras no tan pequeñas (y frecuencias esperadas mayores o iguales que 1.5, ver recomendaciones 1.3.1); cuando las celdas deben combinarse, el valor de  $X^2$  no es único, ya que el esquema de combinación no es único.
- La estadística  $D$  es más flexible, además permite calcular bandas de confianza y tamaño de muestra requerido.
- En la mayoría de los casos  $D$  es más fácil de aplicar.
- Una ventaja de la prueba  $\chi^2$  es que no presenta problemas para distribuciones discretas, mientras que las propiedades exactas de la distribución  $D$  son violadas por la falta de continuidad, este es un problema que puede ser eliminado, generalmente, reemplazando igualdades por desigualdades en las probabilidades.
- Quizás la principal ventaja de la prueba  $\chi^2$  es que simplemente reemplazando los parámetros desconocidos por estimadores consistentes y reduciendo los grados de libertad, la prueba puede desarrollarse de la manera usual. Si tenemos una hipótesis compuesta la distribución de la estadística  $\hat{D}$  tiene una distribución diferente a  $D$ . La prueba resulta conservativa cuando usamos los cuantiles para  $D$ ; de lo anterior surgen nuevas tablas (por ejemplo la tabla A.5).
- Relativo al desempeño, la función potencia de las dos estadísticas depende de diferentes cantidades. Si  $F_0(x)$  es la función propuesta y  $F_X(x)$  la verdadera distribución, la potencia de la estadística  $D$  depende de:

$$\sup_x |F_X(x) - F_0(x)|$$

mientras que la potencia de la  $\chi^2$  depende de:

$$\sum_{i=0}^k \frac{\{[F_X(a_{i+1}) - F_X(a_i)] - [F_0(a_{i+1}) - F_0(a_i)]\}^2}{[F_0(a_{i+1}) - F_0(a_i)]}$$

donde  $a_i$  son los límites de las categorías.

Muchos estudios de la comparación de la potencia han sido reportados a través de los años, Kac, Kiefer y Wolfowitz (1955) mostraron que  $D$  es asintóticamente más potente que la prueba  $\chi^2$  cuando se prueba una distribución normal completamente especificadas. Además, cuando el tamaño de la muestra es pequeño,  $D$  da una prueba exacta, mientras que la  $\chi^2$  no.

La potencia de la prueba  $\chi^2$  puede probarse agrupando hábilmente en algunas situaciones. El número de categorías puede ser escogido de tal forma que la potencia es maximizada en la vecindad donde la potencia es igual a .5. En particular Cochran [8] y otros mostraron que escogiendo intervalos de frecuencia esperadas iguales para todas las clases provee de un buen procedimiento y además simplifica los cálculos (ver figura 3.1), donde:

$$p_i = \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x; \theta) dx$$



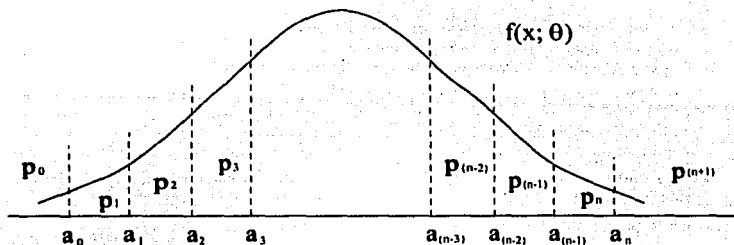


Figura 3.1: Encontrando los límites de las categorías

intervalo o categoría	$(a_{(i-1)}, a_i)$
frecuencia observada	$O_i$
frecuencia esperada	$e_i = np_i$

### 3.3 Otras estadísticas basadas en la FDE

#### 3.3.1 Hipótesis simples

Muchas otras estadísticas han sido propuestas para medir la discrepancia entre  $S_n(x)$  y  $F(X; \theta)$ ; éstas están cercanamente relacionadas a las siete estadísticas discutidas anteriormente y tienen propiedades similares.

1. Anderson y Darling [1] sugirieron usar una especie de  $D$ -ponderada, que se obtiene incorporando una función de peso a la definición de  $D$ , algo parecido a lo que se hace con  $A^2$ . Los cuantiles asintóticos han sido dados por Doksum, Fenstad y Aaberge [10] y tablas para  $n$  pequeñas son dadas por Niederhausen [35].
2. Suponga  $s_i = F^{-1}(\frac{i}{n})$  y sea  $b_i = \frac{i}{n} - S_n(s_i)$ , donde  $S_n(x)$  es la FDE de la muestra original  $x$ ; Riedwyl [40] sugirió la estadística de prueba  $\sum_{i=1}^{n-1} |b_i|$ . Sobre el  $Z$ -diagrama esta estadística está basada en la discrepancia entre  $S_n^*(z)$  y  $F(z)$  a intervalos iguales a lo largo del eje  $z$  entre 0 y 1; la estadística tiene una distribución discreta.
3. Sea  $\delta_i = \max\{|z_{(i)} - \frac{i-1}{n}|, |z_{(i)} - \frac{i}{n}|\}$  la estadística Kolmogorov-Smirnov  $D$  es entonces el  $\max \delta_i$ . Finkelstein y Schafer [15] propusieron la estadística  $T = \sum_i \delta_i$ ; y dieron una tabla de cuantiles para  $n$  hasta 30.
4. Hegazy y Green [19] y Green y Hegazy [18] discutieron varias estadísticas calculadas de ligeras modificaciones de las formulas 2.2. Berk y Jones [3] dieron otras

estadísticas basadas en  $S_n(x)$  y estadísticas similares a las estadísticas Kolmogorov-Smirnov. Hegazy y Green [19] han demostrado que sus estadísticas modificadas pueden incrementar la potencia contra ciertas alternativas, y Berk y Jones mostraron ciertas propiedades óptimas en el sentido de la eficiencia Bahadur para sus estadísticas.

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA



# Conclusiones

Después de conocer los procedimientos de *bondad ajuste* basados en la  $\chi^2$  y la Función de Distribución Empírica podemos recomendar las pruebas basadas en la Función de Distribución Empírica; ya que, como vimos anteriormente, su potencia es mayor porque hace un uso mejor de los datos muestrales, además de que la distribución de estas estadísticas es conocida; mientras que con la prueba  $\chi^2$  sólo se tiene una distribución asintótica.

Aunque la estadística  $D$  Kolmogorov-Smirnov no resulta ser la más potente, es la más conocida y el acceso a la tabla de cuantiles podría facilitar el desarrollo de la prueba. En este sentido, la tabla de la distribución  $\chi^2$  puede encontrarse en cualquier libro de estadística y el desarrollo de la prueba es muy sencillo; por lo que podría ser una buena primera *prueba de bondad de ajuste* para un caso en que no se tengan las tablas necesarias.

Este trabajo es introductorio a las *pruebas de bondad de ajuste* y una fuente de referencias interesantes para trabajos posteriores, y temas más específicos.

Hay que notar que parte importante de las pruebas es proponer la hipótesis, en este caso, la forma de la distribución; y para esto es necesario tener un conocimiento de las distribuciones para reconocer cuáles nos pueden ser útiles al tratar de modelar la población de interés.

## REFERENCES

1. J. H. Duerksen, *Journal of Polymer Science*, **10**, 1 (1953).
2. J. H. Duerksen, *Journal of Polymer Science*, **10**, 1 (1953).
3. J. H. Duerksen, *Journal of Polymer Science*, **10**, 1 (1953).
4. J. H. Duerksen, *Journal of Polymer Science*, **10**, 1 (1953).
5. J. H. Duerksen, *Journal of Polymer Science*, **10**, 1 (1953).
6. J. H. Duerksen, *Journal of Polymer Science*, **10**, 1 (1953).
7. J. H. Duerksen, *Journal of Polymer Science*, **10**, 1 (1953).
8. J. H. Duerksen, *Journal of Polymer Science*, **10**, 1 (1953).
9. J. H. Duerksen, *Journal of Polymer Science*, **10**, 1 (1953).
10. J. H. Duerksen, *Journal of Polymer Science*, **10**, 1 (1953).

## **Apéndice A**

### **Tablas**

Tabla A.1 Distribución  $\chi^2$ 

Cada entrada de la tabla es el valor de una variable aleatoria con  $\nu$  grados de libertad tal que la probabilidad de la cola derecha es el valor dado en el renglón superior.

$\nu$	Probabilidad de la cola derecha								
	0.95	0.90	0.50	0.25	0.10	0.05	0.01	0.005	0.001
1	0.004	0.016	0.45	1.32	2.71	3.84	6.63	7.88	10.82
2	0.10	0.21	1.39	2.77	4.61	5.99	9.21	10.60	13.82
3	0.35	0.58	2.37	4.11	6.25	7.81	11.34	12.84	16.26
4	0.71	1.06	3.36	5.39	7.78	9.49	13.28	14.86	18.47
5	1.15	1.61	4.35	6.63	9.24	11.07	15.09	16.75	20.52
6	1.64	2.20	5.35	7.84	10.64	12.59	16.81	18.55	22.46
7	2.17	2.83	6.35	9.04	12.02	14.07	18.48	20.28	24.32
8	2.72	3.49	7.34	10.22	12.36	15.51	20.09	21.96	29.12
9	3.33	4.17	8.34	11.39	14.68	16.92	21.67	23.59	27.88
10	3.94	4.87	9.34	12.55	15.99	18.31	23.21	25.19	29.59
11	4.57	5.58	10.34	13.70	17.28	19.68	24.72	26.76	31.26
12	5.23	6.30	11.34	14.85	18.55	21.03	26.22	28.30	32.91
13	5.89	7.04	12.34	15.98	19.81	22.36	27.69	29.82	34.53
14	6.57	7.79	13.34	17.12	21.06	23.68	29.14	31.32	39.12
15	7.26	8.55	14.34	18.25	22.31	25.00	30.58	32.80	37.70
16	7.96	9.31	15.34	19.37	23.54	26.30	32.00	34.27	39.25
17	8.67	10.09	16.34	20.49	24.77	27.59	33.41	35.72	40.79
18	9.39	10.86	17.34	21.60	25.99	28.87	34.81	37.16	42.31
19	10.12	11.65	18.34	22.72	27.20	30.14	36.19	38.58	43.82
20	10.85	12.44	19.34	23.83	28.41	31.41	37.57	40.00	45.32
21	11.59	13.24	20.34	24.93	29.62	32.67	38.93	41.40	46.80
22	12.34	14.04	21.34	26.04	30.81	33.92	40.29	42.80	48.27
23	13.09	14.85	22.34	27.14	32.01	35.17	41.64	44.18	49.73
24	13.85	15.66	23.34	28.24	33.20	36.42	42.98	45.56	51.18
25	14.61	16.47	24.34	29.34	34.38	37.65	44.31	46.93	52.62
26	15.38	17.29	25.34	30.43	35.66	38.89	45.64	48.29	54.05
27	16.15	18.11	26.34	31.53	36.74	40.11	46.96	49.64	55.48
28	16.93	18.94	27.34	32.62	37.92	41.34	48.28	50.99	56.89
29	17.71	19.77	28.34	33.71	39.09	42.56	49.59	52.34	58.30
30	18.49	20.60	29.34	34.80	40.26	43.77	50.89	53.67	59.70

Tabla A.1: Distribución  $\chi^2$ 

Para  $\nu \geq 31$ , la probabilidad de la cola derecha o izquierda para  $Q$  una variable  $\chi^2$  puede ser encontrada de la Tabla A.2 con  $Z$  donde  $Z = \sqrt{2Q} - \sqrt{2\nu - 1}$ . Fuente: Tomada de Gibbons [17]; adap. tabla 8 de Pearson, E.S. y O. Hartley, eds. (1954), *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1, Cambridge University Press, con permiso de Biometrika Trustees.

**Tabla A.2** Distribución Normal  $\Phi(z)$ , probabilidad de la cola derecha

Cada entrada de la tabla es la probabilidad acumulada  $P$  de la cola derecha del valor de  $z$  a más infinito, y también de la cola izquierda de menos infinito a  $-z$ ,  $\forall P \leq .50$ . Leer abajo de la primera columna el primer valor decimal de  $z$ , y sobre el primer renglón el segundo valor decimal; la intersección es  $P$ .

$z$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
3.5	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002

**Tabla A.2:** Distribución Normal estandarizada, probabilidad de las colas

Fuente: Tomada de Gibbons [17], Adap. tab. 1 de Pearson y Hartley, eds. (1954), *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge-England, con permiso de Biometrika Trustees.



**Tabla A.3** Distribución Normal  $\Phi(z)$ , probabilidad acumulada hasta  $z$   
 Cada entrada de la tabla es la probabilidad acumulada  $P$  de  $-\infty$  a  $z$ ,  $\forall P \geq .50$   
 Leer abajo de la primera columna el primer valor decimal de  $z$ , y sobre el primer renglón  
 segundo valor decimal; la intersección es  $P$ .

$z$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7229
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

**Tabla A.3:** Distribución Normal estandarizada, probabilidad acumulada

Fuente: Tomada de Mood [30]

**Tabla A.4 Estadística  $D$  Kolmogorov-Smirnov**

Cada entrada de la tabla es el valor de la estadística Kolmogorov-Smirnov  $D$  para una muestra de tamaño  $n$  tal que la probabilidad de la cola derecha es el valor dado en el renglón superior.

$n$	.200	.100	.050	.020	.010	$n$	.200	.100	.050	.020	.010
1	.900	.950	.975	.990	.995	21	.226	.259	.287	.321	.344
2	.684	.776	.842	.900	.929	22	.221	.253	.281	.314	.337
3	.565	.636	.780	.785	.829	23	.216	.247	.275	.307	.330
4	.493	.565	.624	.689	.734	24	.212	.242	.269	.301	.323
5	.447	.509	.563	.627	.669	25	.208	.238	.264	.295	.317
6	.410	.468	.519	.577	.617	26	.204	.233	.259	.290	.311
7	.381	.436	.483	.538	.576	27	.200	.229	.254	.284	.305
8	.358	.410	.454	.507	.542	28	.197	.225	.250	.279	.300
9	.339	.387	.430	.480	.513	29	.193	.221	.246	.275	.295
10	.323	.369	.409	.457	.489	30	.190	.218	.242	.270	.290
11	.308	.352	.391	.437	.468	31	.187	.214	.238	.266	.285
12	.296	.338	.375	.419	.449	32	.184	.211	.234	.262	.281
13	.285	.325	.361	.404	.432	33	.182	.208	.231	.258	.277
14	.275	.314	.349	.390	.418	34	.179	.205	.227	.254	.273
15	.266	.304	.338	.377	.404	35	.177	.202	.224	.251	.269
16	.258	.295	.327	.366	.392	36	.174	.199	.221	.247	.265
17	.250	.286	.318	.355	.381	37	.172	.196	.218	.244	.262
18	.244	.279	.309	.346	.371	38	.170	.194	.215	.241	.258
19	.237	.271	.301	.337	.361	39	.168	.191	.213	.238	.255
20	.232	.265	.294	.329	.352	40	.165	.189	.210	.235	.252

Para  $n > 40$ , los valores crítico de la cola derecha están basados en la distribución asintótica y pueden ser calculados como sigue:

.200	.100	.050	.020	.010
$1.07\sqrt{n}$	$1.22\sqrt{n}$	$1.36\sqrt{n}$	$1.52\sqrt{n}$	$1.63\sqrt{n}$

Fuente: Tomada de Gibbons [17]

Adaptada de L.H. Miller (1956) Tabla de cuantiles para la estadística Kolmogorov-Smirnov, Journal of the American Statistical Association, 51,111-121, con permiso

Tabla A.4: Estadística  $D$  Kolmogorov-Smirnov

Tabla A.5 Valores críticos para la prueba de Lilliefors

Las entradas para una muestra de tamaño  $n$  son los valores críticos de una prueba Lilliefors con la probabilidad de cola derecha que se da en el renglón superior.

n	Probabilidad de la cola derecha					
	.20	.15	.10	.05	.01	.001
4	.303	.321	.346	.376	.413	.433
5	.289	.303	.319	.343	.397	.439
6	.269	.281	.297	.323	.371	.424
7	.252	.264	.280	.304	.351	.402
8	.239	.250	.265	.288	.333	.384
9	.227	.238	.252	.274	.317	.365
10	.217	.228	.241	.262	.304	.352
11	.208	.218	.231	.251	.291	.338
12	.200	.210	.222	.242	.281	.325
13	.193	.202	.215	.234	.271	.314
14	.187	.196	.208	.226	.262	.305
15	.181	.190	.201	.219	.254	.296
16	.176	.184	.195	.213	.247	.287
17	.171	.179	.190	.207	.240	.279
18	.167	.175	.185	.202	.234	.273
19	.163	.170	.181	.197	.228	.266
20	.159	.166	.176	.192	.233	.260
25	.143	.150	.159	.173	.201	.236
30	.131	.138	.146	.159	.185	.217
n > 30	$\frac{0.74}{\sqrt{n}}$	$\frac{0.77}{\sqrt{n}}$	$\frac{0.82}{\sqrt{n}}$	$\frac{0.89}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.04}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$

Fuente: Tomada de Gibbons [17]

Adaptada de Gerard E. Dallal, y Leland Wilkinson (1986),

An analytical approximation to the distribution of Lilliefors's test statistic. The American Statistician, 40, 294-296, con permiso.

Este artículo usa muchos más ejemplos para probar la precisión de los resultados originales simulados en H. W. Lilliefors (1967), sobre la prueba Kolmogorov-Smirnov para la prueba de normalidad con media y varianza desconocida, Journal of the American Statistical Association, 62, 399-402.

Tabla A.5: Valores críticos para la prueba de Lilliefors

Tabla A.6 Modificaciones y cuantiles para las Estadísticas basadas en la FDE para una hipótesis simple

T	Forma modificada de T*	Nivel de significancia de $\alpha$							
		.25	.15	.10	.05	.025	.01	.005	.001
Cuantiles de la cola superior									
$D^{+(-)}$	$D^+(\sqrt{n} + 0.12 + 0.11/\sqrt{n})$	0.828	0.973	1.073	1.224	1.358	1.518	1.628	1.859
$D$	$D(\sqrt{n} + 0.12 + 0.11/\sqrt{n})$	1.019	1.138	1.224	1.358	1.480	1.628	1.731	1.950
$V$	$V(\sqrt{n} + 0.155 + 0.24/\sqrt{n})$	1.420	1.537	1.620	1.747	1.862	2.001	2.098	2.303
$W^2$	$(W^2 - 0.4/n + 0.6/n^2)(1.0 + 1.0/n)$	0.209	0.284	0.347	0.461	0.581	0.743	0.869	1.167
$U^2$	$(U^2 - 0.1/n + 0.1/n^2)(1.0 + 0.8/n)$	0.105	0.131	0.152	0.187	0.222	0.268	0.304	0.385
$A^2$	$\forall n \geq 5$	1.248	1.610	1.933	2.492	3.070	3.880	4.500	6.000
Cuantiles de la cola inferior									
$D$	$D(\sqrt{n} + 0.275 - 0.04/\sqrt{n})$	-	0.610	0.571	0.520	0.481	0.441	-	-
$V$	$V(\sqrt{n} + 0.41 - 0.26/\sqrt{n})$	-	0.976	0.928	0.861	0.810	0.755	-	-
$W^2$	$(W^2 - 0.03/n)(1.0 + 0.05/n)$	-	0.054	0.046	0.037	0.030	0.025	-	-
$U^2$	$(U^2 - 0.02/n)(1.0 + 0.35/n)$	-	0.038	0.033	0.028	0.024	0.020	-	-
$A^2$	$\forall n \geq 5$	-	0.399	0.346	0.283	0.240	0.201	-	-

Fuente: (Tomada de [49]) Adaptada de Stephens [50], con permiso de The Royal Statistical Society.

**Tabla A.7** Niveles de Significancia  $A^2$  (hipótesis simples).  
 $q = p(A^2 < z)$

z	q	z	q	z	q	z	q
.025	.0000	.750	.4815	2.150	.9239	3.550	.9855
.050	.0000	.800	.5190	2.200	.9285	3.600	.9863
.075	.0000	.850	.5537	2.250	.9328	3.650	.9870
.100	.0000	.900	.5858	2.300	.9368	3.700	.9878
.125	.0003	.950	.6154	2.350	.9405	3.750	.9884
.150	.0014	1.000	.6427	2.400	.9441	3.800	.9891
.175	.0042	1.050	.6680	2.450	.9474	3.850	.9897
.200	.0096	1.100	.6912	2.500	.9504	3.900	.9902
.225	.0180	1.150	.7127	2.550	.9534	3.950	.9908
.250	.0296	1.200	.7324	2.600	.9561	4.000	.9913
.275	.0443	1.250	.7503	2.650	.9586	4.050	.9917
.300	.0618	1.300	.7677	2.700	.9610	4.100	.9922
.325	.0817	1.350	.7833	2.750	.9633	4.150	.9926
.350	.1036	1.400	.7973	2.800	.9654	4.200	.9930
.375	.1269	1.450	.8111	2.850	.9274	4.250	.9934
.400	.1513	1.500	.8235	2.900	.9692	4.300	.9938
.425	.1764	1.550	.8350	2.950	.9710	4.350	.9941
.450	.2019	1.600	.8457	3.000	.9726	4.400	.9944
.475	.2276	1.650	.8556	3.050	.9742	4.500	.9950
.500	.2532	1.700	.8648	3.100	.9756	4.600	.9955
.525	.2786	1.750	.8734	3.150	.9770	4.700	.9960
.550	.3036	1.800	.8814	3.200	.9783	4.800	.9964
.575	.3281	1.850	.8888	3.250	.9795	4.900	.9968
.600	.3520	1.900	.8957	3.300	.9807	5.000	.9971
.625	.3753	1.950	.9021	3.350	.9818	5.500	.9983
.650	.3930	2.000	.9082	3.400	.9828	6.000	.9990
.675	.4199	2.050	.9138	3.450	.9837	7.000	.9997
.700	.4412	2.100	.9190	3.500	.9846	8.000	.9999

Tomada de [49]

Adaptada de Lewis [26], con permiso de el autor y de  
 The Institute of Mathematical Statistics.

Tabla A.7: Niveles de significancia para  $A^2$

**Tabla A.8** Cuantiles para la prueba  $N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu$  ó  $\sigma^2$  desconocidas.  
 Cuantiles asintóticos de la cola superior

Estadística	Nivel de significancia $\alpha$							
	.25	.15	.10	.05	.025	.01	.005	.0025
$W^2$								
Caso 1	0.094	0.117	0.134	0.165	0.197	0.238	0.270	0.302
Caso 2	0.190	0.263	0.327	0.442	0.562	0.725	0.851	0.978
$U^2$								
Caso 1	0.088	0.110	0.127	0.157	0.187	0.228	0.259	0.291
Caso 2	0.085	0.105	0.122	0.151	0.180	0.221	0.252	0.284
$A^2$								
Caso 1	0.644	0.782	0.894	1.087	1.285	1.551	1.756	1.964
Caso 2	1.072	1.430	1.743	2.308	2.898	3.702	4.324	4.954

Tomada de [49];

Adaptada de Stephens [52], con permiso de The American Statistical Association.

Tabla A.8: Cuantiles para Normalidad con  $\mu$  ó  $\sigma^2$  desconocidas

Tabla A.9 Modificaciones y cuantiles para la Prueba de Normalidad con  $\mu$  y  $\sigma^2$  desconocidas (caso 3)

Estadística		Nivel de significancia de $\alpha$							
T	Forma modificada de $T^*$	.50	.25	.15	.10	.05	.025	.01	.005
Cuantiles de la cola superior									
$D$	$D(\sqrt{n} - 0.01 + 0.85/\sqrt{n})$	-	-	0.775	0.819	0.895	0.995	1.035	-
$V$	$V(\sqrt{n} + 0.05 + 0.82/\sqrt{n})$	-	-	1.320	1.386	1.489	1.585	1.693	-
$W^2$	$W^2(1.0 + 0.5/n)$	0.051	0.074	0.091	0.104	0.126	0.148	0.179	0.201
$U^2$	$U^2(1.0 + 0.5/n)$	0.048	0.070	0.085	0.096	0.117	0.136	0.164	0.183
$A^2$	$A^2(1.0 + 0.75/n + 2.25/n^2)$	0.341	0.470	0.561	0.631	0.752	0.873	1.035	1.159
Cuantiles de la cola inferior									
$W^2$	$W^2(1.0 + 0.5/n)$	0.051	0.036	0.029	0.026	0.022	0.019	0.017	-
$U^2$	$U^2(1.0 + 0.5/n)$	0.048	0.033	0.027	0.025	0.021	0.018	0.016	-
$A^2$	$A^2(1.0 + 0.75/n + 2.25/n^2)$	0.341	0.249	0.226	0.188	0.160	0.139	0.119	-

Tomada de [49]; Adaptada, con adiciones, de la Tabla 54 de Pearson y Hartley (1972) y de Stephens [52], con permiso de Biometrika Trustees y de The American Statistical Association.

Tabla A.9: Cuantiles para Normalidad,  $\mu$  y  $\sigma^2$  desconocidas

**Tabla A.10** Constantes para calcular el nivel de significancia del valor  $A^2$  en una prueba para normalidad con parámetros desconocidos (caso 3)

$q$	$b_0$	$b_1$	Cuantiles Asintóticos $a_{\infty}$
.05	-.512	2.10	.1674
.10	-.552	1.25	.1938
.15	-.608	1.07	.2147
.20	-.643	.93	.2333
.25	-.707	1.03	.2509
.30	-.735	1.02	.2681
.35	-.772	1.04	.2853
.40	-.770	.90	.3030
.45	-.778	.80	.3213
.50	-.779	.67	.3405
.55	-.803	.70	.3612
.60	-.818	.58	.3836
.65	-.818	.42	.4085
.70	-.801	.12	.4367
.75	-.800	-.09	.4695
.80	-.756	-.39	.5091
.85	-.749	-.59	.5597
.90	-.750	-.80	.6305
.95	-.795	-.89	.7514
.975	-.881	-.94	.8728
.99	-1.013	-.93	1.0348
.995	-1.063	-1.34	1.1578

Tomada de [49]; Adaptada de Pettitt (1977a), con permiso del autor y de The Royal Statistical Society.

Tabla A.10: Constantes para calcular  $\alpha$  de  $A^2 N(\mu, \sigma^2)$  [caso 3]



**Tabla A.11** Fórmulas para niveles de significancia para  $W^2$ ,  $U^2$  y  $A^2$   
Prueba de Normalidad con  $\mu$  y  $\sigma^2$  desconocidas (caso 3).

$W^2$	$z < z_1$	$\log q = -13.953 + 775.5z - 12,542.61z^2$
	$z_1$	0.0275
	$z_1 < z < z_2$	$\log q = -5.903 + 179.546z - 1,515.29z^2$
	$z_2$	0.051
	$z_2 < z < z_3$	$\log p = 0.886 - 31.62z + 10.897z^2$
	$z_3$	0.0920
	$z > z_3$	$\log p = 1.111 - 34.242z - 12.832z^2$
$U^2$	$z < z_1$	$\log q = -13.642 + 766.31z - 12,432.74z^2$
	$z_1$	0.0262
	$z_1 < z < z_2$	$\log q = -6.3328 + 214.57z - 2,022.28z^2$
	$z_2$	0.048
	$z_2 < z < z_3$	$\log p = 0.851 - 32.006z - 3.45z^2$
	$z_3$	0.0940
	$z > z_3$	$\log p = 1.325 - 38.918z + 16.45z^2$
$A^2$	$z < z_1$	$\log q = -13.436 + 101.14z - 223.73z^2$
	$z_1$	0.200
	$z_1 < z < z_2$	$\log q = -8.318 + 42.796z - 59.938z^2$
	$z_2$	0.340
	$z_2 < z < z_3$	$\log p = 0.9177 - 4.279z - 1.38z^2$
	$z_3$	0.600
	$z > z_3$	$\log p = 1.2937 - 5.709z - 0.018z^2$

Suponemos  $z$  es el valor modificado de  $W^2$ ,  $U^2$  y  $A^2$  (ver tabla A.9).  
Para un  $z$  dado, encuentra el intervalo en el cual yace. La fórmula da el valor de  
 $\log q$  ( $q$  = nivel de significancia de la cola inferior)  
ó  $\log p$  ( $p$  = nivel de significancia de la cola superior).

Tabla A.11: Niveles de significancia, para normalidad [caso 3]

**Tabla A.12** Modificaciones y cuantiles para la prueba de una  $\text{Exp}(\alpha, \beta)$  (caso 2;  $\alpha$  conocida y  $\beta$  desconocida)

Estadística		Nivel de significancia de $\alpha$								
T	Forma modificada de $T^*$	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.01	.005	.0025
Cuantiles de la cola superior										
$D$	$(D - 0.2/n)(\sqrt{n} + 0.26 + 0.5/\sqrt{n})$	-	-	0.926	0.995	1.094	1.184	1.298	-	-
$V$	$(V - 0.2/n)(\sqrt{n} + 0.24 + 0.35/\sqrt{n})$	-	-	1.445	1.527	1.655	1.774	1.910	-	-
$W^2$	$W^2(1.0 + 0.16/n)$	0.116	0.130	0.148	0.175	0.222	0.271	0.338	0.390	0.442
$U^2$	$U^2(1.0 + 0.16/n)$	0.090	0.099	0.112	0.129	0.159	0.189	0.230	0.261	0.293
$A^2$	$A^2(1.0 + 0.6/n)$	0.736	0.816	0.916	1.062	1.321	1.591	1.959	2.244	2.254
		.01	.025	.05	.10	.15	.20	.25	.50	
Cuantiles de la cola inferior										
$W^2$	Cuantiles	0.0192	0.0233	0.0276	0.0338	0.039	0.044	0.048	0.074	
$U^2$	Asintóticos	0.0172	0.0207	0.0243	0.0293	0.0339	0.0373	0.0409	0.0601	
$A^2$		0.150	0.178	0.208	0.249	0.280	0.312	0.342	0.502	

Tomada de [49]; Adaptada de la Tabla 54 de Pearson y Hartley (1972) y de Stephens [52], con permiso de Biometrika Trustees y de The American Statistical Association.

**Tabla A.13** Fórmulas para niveles de significancia para  $W^2$ ,  $U^2$  y  $A^2$   
Prueba para una Exponencial (caso 2),

$W^2$	$z < z_1$	$\log q = -11.334 + 459.098z - 5,652.1z^2$
	$z_1$	0.035
	$z_1 < z < z_2$	$\log q = -5.779 + 132.89z - 866.58z^2$
	$z_2$	0.074
	$z_2 < z < z_3$	$\log p = 0.586 - 17.87z + 7.417z^2$
	$z_3$	0.160
	$z > z_3$	$\log p = 0.447 - 16.592z + 4.849z^2$
$U^2$	$z < z_1$	$\log q = -11.703 + 542.5z - 7,574.59z^2$
	$z_1$	0.029
	$z_1 < z < z_2$	$\log q = -6.3288 + 178.1z - 1,399.49z^2$
	$z_2$	0.062
	$z_2 < z < z_3$	$\log p = 0.8071 - 25.166z + 8.44z^2$
	$z_3$	0.120
	$z > z_3$	$\log p = 0.7663 - 24.359z + 4.539z^2$
$A^2$	$z < z_1$	$\log q = -12.2204 + 67.459z - 110.3z^2$
	$z_1$	0.260
	$z_1 < z < z_2$	$\log q = -6.1327 + 20.218z - 18.663z^2$
	$z_2$	0.510
	$z_2 < z < z_3$	$\log p = 0.9209 - 3.353z + 0.30z^2$
	$z_3$	0.950
	$z > z_3$	$\log p = 0.731 - 3.009z + 0.15z^2$

Suponemos  $z$  es el valor modificado de  $W^2$ ,  $U^2$  y  $A^2$  (ver tabla A.12).  
Para un  $z$  dado, encuentra el intervalo en el cual yace. La fórmula da el valor de  
 $\log q$  ( $q$  = nivel de significancia de la cola inferior)  
ó  $\log p$  ( $p$  = nivel de significancia de la cola superior).

Tabla A.13: Niveles de significancia, para una Exponencial [caso 2]

**Tabla A.14**  $\text{Exp}(\alpha, \beta)$  (caso 3)Modificaciones y Cuantiles de la cola superior cuando  $\alpha$  y  $\beta$  son desconocidas

T	T*	Nivel de significancia $\alpha$					
		.25	.15	.10	.05	.025	.01
$W^2$	$W^2(1 + 2.8/n - 3/n^2)$	.116	.148	.175	.222	.271	.338
$U^2$	$U^2(1 + 2.3/n - 3/n^2)$	.090	.112	.129	.159	.189	.230
$A^2$	$A^2(1 + 5.4/n - 11/n^2)$	.736	.916	1.062	1.321	1.591	1.959

Tabla A.14: Cuantiles para  $\text{Exp}(\alpha, \beta)$  con  $\alpha$  y  $\beta$  desconocidas

**Tabla A.15**  $\text{Exp}(\alpha, \beta)$  (caso 3, cuando  $\alpha$  y  $\beta$  son desconocidas)  
 Cuantiles de la cola superior para  $\sqrt{n}D^+$ ,  $\sqrt{n}D^-$ ,  $\sqrt{n}D$ ,  $\sqrt{n}V$

Estadística	n	Nivel de significancia $\alpha$					
		.25	.15	.10	.05	.025	.01
$\sqrt{n}D^+$	5	.491	.569	.639	.743	.825	.917
	10	.580	.674	.745	.851	.952	1.038
	15	.610	.700	.768	.872	.978	1.077
	20	.624	.716	.785	.894	.995	1.108
	25	.635	.725	.799	.909	1.010	1.125
	50	.660	.758	.832	.943	1.051	1.163
	100	.682	.778	.853	.967	1.074	1.189
	$\infty$	.723	.820	.886	.996	1.094	1.211
$\sqrt{n}D^-$	5	.627	.705	.753	.821	.891	.955
	10	.671	.761	.825	.916	.993	1.089
	15	.688	.783	.842	.933	1.022	1.111
	20	.696	.791	.855	.949	1.041	1.132
	25	.702	.795	.860	.958	1.052	1.149
	50	.710	.807	.874	.976	1.072	1.178
	100	.717	.814	.879	.984	1.089	1.192
	$\infty$	.723	.820	.886	.996	1.094	1.211
$\sqrt{n}D$	5	.683	.749	.793	.865	.921	.992
	10	.753	.833	.889	.977	1.048	1.119
	15	.771	.865	.912	1.002	1.079	1.163
	20	.786	.872	.927	1.021	1.099	1.198
	25	.792	.878	.936	1.033	1.115	1.215
	50	.813	.879	.960	1.061	1.149	1.257
	100	.824	.911	.972	1.072	1.171	1.278
	$\infty$	.840	.927	.995	1.094	1.184	1.298
$\sqrt{n}V$	5	1.098	1.186	1.234	1.314	1.400	1.494
	10	1.194	1.294	1.363	1.461	1.556	1.662
	15	1.225	1.325	1.392	1.504	1.596	1.701
	20	1.245	1.346	1.419	1.536	1.635	1.769
	25	1.260	1.366	1.438	1.559	1.658	1.796
	50	1.292	1.400	1.481	1.600	1.701	1.847
	100	1.310	1.419	1.502	1.647	1.740	1.897
	$\infty$	1.334	1.445	1.527	1.655	1.774	1.910

Tabla A.15: Cuantiles para  $\text{Exp}(\alpha, \beta)$  [caso 3]  $\sqrt{n}D^+$ ,  $\sqrt{n}D^-$ ,  $\sqrt{n}D$ ,  $\sqrt{n}V$

**Tabla A.16**  $\text{Exp}(\alpha, \beta)$  (caso 3, cuando  $\alpha$  y  $\beta$  son desconocidas)  
 Cuantiles de la cola superior para  $W^2$ ,  $U^2$  y  $A^2$

Estadística	n	Nivel de significancia $\alpha$					
		.25	.15	.10	.05	.025	.01
$W^2$	5	.083	.102	.117	.141	.166	.197
	10	.097	.122	.142	.176	.211	.259
	15	.103	.130	.151	.188	.229	.281
	20	.106	.133	.157	.195	.237	.293
	25	.107	.135	.160	.199	.247	.301
	50	.111	.141	.166	.209	.256	.319
	100	.113	.144	.170	.215	.263	.328
	$\infty$	.116	.148	.175	.222	.271	.338
$U^2$	5	.068	.083	.093	.113	.131	.153
	10	.075	.094	.108	.131	.155	.187
	15	.080	.099	.114	.139	.165	.200
	20	.082	.102	.117	.143	.170	.207
	25	.083	.104	.119	.146	.173	.212
	50	.087	.108	.124	.152	.180	.223
	100	.089	.110	.126	.155	.184	.229
	$\infty$	.090	.112	.129	.159	.189	.230
$A^2$	5	.460	.555	.621	.725	.848	.989
	10	.545	.660	.747	.920	1.068	1.352
	15	.575	.720	.816	1.009	1.198	1.495
	20	.608	.757	.861	1.062	1.267	1.580
	25	.625	.784	.890	1.097	1.317	1.635
	50	.680	.838	.965	1.197	1.440	1.775
	100	.710	.875	1.008	1.250	1.510	1.855
	$\infty$	.736	.916	1.062	1.321	1.591	1.959

Tabla A.16: Cuantiles para  $\text{Exp}(\alpha, \beta)$  [caso 3]  $W^2$ ,  $U^2$ ,  $A^2$

Tabla A.17 Distribuciones De Valor Extremo o Weibull  
Modificaciones y cuantiles de la cola superior para  $W^2$ ,  $U^2$  y  $A^2$

Estadística	Modificaciones	$\alpha$				
		.25	.10	.05	.025	.01
$W^2$						
Caso 1	$W^2 \left(1 + \frac{0.16}{n}\right)$					
Caso 2	Ninguno	0.116	0.175	0.222	0.271	0.338
Caso 3	$W^2 \left(1 + \frac{0.20}{\sqrt{n}}\right)$	0.186	0.320	0.431	0.547	0.705
		0.073	0.102	0.124	0.146	0.175
$U^2$						
Caso 1	$U^2 \left(1 + \frac{0.16}{n}\right)$					
Caso 2	$U^2 \left(1 + \frac{0.15}{\sqrt{n}}\right)$	0.090	0.129	0.159	0.189	0.230
Caso 3	$U^2 \left(1 + \frac{0.20}{\sqrt{n}}\right)$	0.086	0.123	0.152	0.181	0.220
		0.070	0.097	0.117	0.138	0.165
$A^2$						
Caso 1	$A^2 \left(1 + \frac{0.30}{n}\right)$	0.736	1.062	0.321	1.591	1.959
Caso 2	Ninguno	1.060	1.725	2.277	2.854	3.640
Caso 3	$A^2 \left(1 + \frac{0.20}{\sqrt{n}}\right)$	0.474	0.637	0.757	0.877	1.038

Fuente: Tomada de [49]

Tomada de Stephens [54], con permiso de Biometrika Trustees.

Tabla A.17: Cuantiles para Dist. De Valor Extremo o Weibull  $W^2$ ,  $U^2$ ,  $A^2$

**Tabla A.18** Distribuciones De Valor Extremo o Weibull  
 Cuantiles de la cola superior para  $\sqrt{n}D^+$ ,  $\sqrt{n}D^-$ ,  $\sqrt{n}D$  y  $\sqrt{n}V$ ,  
 para las pruebas de las Distribuciones De Valor Extremo o Weibull.

n	T*	$\alpha$				T*	$\alpha$			
		.10	.05	.025	.01		.10	.05	.025	.01
10	$\sqrt{n}D^+$	0.872	0.909	1.061	1.152	$\sqrt{n}D$	0.934	1.026	1.113	1.206
20	Caso 1	0.878	0.979	1.068	1.176	Caso 1	0.954	1.049	1.134	1.239
50		0.882	0.987	0.070	1.193		0.970	1.067	1.148	1.263
$\infty$		0.886	0.996	1.094	1.211		0.995	1.094	1.184	1.298
10	$\sqrt{n}D^-$	0.773	0.883	0.987	1.103	$\sqrt{n}V$	1.430	1.550	1.650	1.770
20	Caso 1	0.810	0.921	1.013	1.142	Caso 1	1.460	1.580	1.690	1.810
50		0.840	0.950	1.031	1.171		1.480	1.590	1.720	1.840
$\infty$		0.886	0.996	1.094	1.211		1.530	1.650	1.770	1.910
10	$\sqrt{n}D^+$	0.990	1.140	1.270	1.420	$\sqrt{n}D$	1.140	1.270	1.390	1.520
20	Caso 2	1.000	1.150	1.280	1.430	Caso 2	1.150	1.280	1.400	1.530
50		1.010	1.170	1.290	1.440		1.160	1.290	1.410	1.530
$\infty$		1.020	1.170	1.300	1.460		1.160	1.290	1.420	1.530
10	$\sqrt{n}D^-$	1.010	1.160	1.280	1.410	$\sqrt{n}V$	1.390	1.490	1.600	1.720
20	Caso 2	1.010	1.150	1.280	1.430	Caso 2	1.420	1.540	1.640	1.760
50		1.000	1.140	1.290	1.450		1.450	1.560	1.670	1.790
$\infty$		1.020	1.170	1.300	1.460		1.460	1.580	1.690	1.810
10	$\sqrt{n}D^+$	0.685	0.755	0.842	0.897	$\sqrt{n}D$	0.760	0.819	0.880	0.944
20	Caso 3	0.710	0.780	0.859	0.926	Caso 3	0.779	0.843	0.907	0.973
50		0.727	0.796	0.870	0.940		0.790	0.856	0.922	0.988
$\infty$		0.734	0.808	0.877	0.957		0.803	0.874	0.939	1.007
10	$\sqrt{n}D^-$	0.700	0.766	0.814	0.892	$\sqrt{n}V$	1.287	1.381	1.459	1.535
20	Caso 3	0.715	0.785	0.843	0.926	Caso 3	1.323	1.428	1.509	1.600
50		0.724	0.796	0.860	0.944		1.344	1.453	1.538	1.639
$\infty$		0.733	0.808	0.877	0.957		1.372	1.477	1.557	1.671

Fuente: Tomada de [49]  
 Tomada de Chandra, Singpurwalla y Stephens [5], con permiso de los  
 autores y de The American Statistical Association.  
 La tabla para  $\sqrt{n}D$ , Caso 2 ha sido corregida.

Tabla A.18: Cuantiles de las Dist. De Valor Extremo o Weibull  $D^+$ ,  $D^-$ ,  $D$ ,  $V$



**Tabla A.19** Cuantiles para la Distribución Gamma  
 Cuantiles asintóticos para  $W^2$ ,  $U^2$  y  $A^2$ ;  $\alpha$  y  $m$  son conocidos,  
 y  $\beta$  desconocido

Estadística	$m$	Nivel de significancia $\alpha$			
		.10	.05	.025	.01
$W^2$	1	.175	.222	.271	.338
	2	.156	.195	.234	.288
	3	.149	.185	.222	.271
	4	.146	.180	.215	.262
	5	.144	.177	.211	.257
	6	.142	.175	.209	.254
	8	.140	.173	.205	.250
	10	.139	.171	.204	.247
	12	.138	.170	.202	.245
	15	.138	.169	.201	.244
	20	.137	.169	.200	.243
	$\infty$	.135	.165	.196	.237
	$U^2$	1	.129	.159	.189
2		.129	.158	.188	.228
3		.128	.158	.187	.227
4		.128	.158	.187	.227
5		.128	.158	.187	.227
6		.128	.157	.187	.227
8		.128	.157	.187	.227
10		.128	.157	.187	.227
12		.128	.157	.187	.227
15		.128	.157	.187	.227
20		.128	.157	.187	.227
$\infty$		.128	.157	.187	.227
$A^2$		1	1.062	1.321	1.591
	2	.989	1.213	1.441	1.751
	3	.959	1.172	1.389	1.683
	4	.944	1.151	1.362	1.648
	5	.935	1.139	1.346	1.627
	6	.928	1.130	1.335	1.612
	8	.919	1.120	1.322	1.595
	10	.915	1.113	1.314	1.583
	12	.911	1.110	1.310	1.578
	15	.908	1.106	1.304	1.570
	20	.905	1.101	1.298	1.562
	$\infty$	.893	1.087	1.281	1.551

Tabla A.19: Cuantiles para la Distribución Gamma [caso 1]  $W^2$ ,  $U^2$ ,  $A^2$

**Tabla A.20** Cuantiles para la Distribución Gamma  
 Cuantiles asintóticos para  $W^2$ ,  $U^2$  y  $A^2$ ;  $\alpha$  y  $\beta$  son conocidos,  
 y  $m$  desconocido.

Estadística	$m$	Nivel de significancia $\alpha$					
		.25	.10	.05	.025	.01	.005
$W^2$	1	.103	.150	.186	.223	.273	.311
	2	.099	.143	.176	.210	.256	.291
	3	.097	.140	.172	.205	.250	.283
	4	.096	.138	.171	.203	.247	.280
	5	.096	.138	.169	.202	.245	.278
	6	.095	.137	.169	.201	.244	.276
	8	.095	.136	.168	.200	.242	.275
	10	.095	.136	.167	.199	.241	.274
	12	.095	.136	.167	.199	.241	.273
	15	.094	.135	.167	.198	.240	.272
	20	.094	.135	.166	.198	.240	.272
	$\infty$	.094	.134	.134	.165	.197	.238
	$U^2$	1	.090	.129	.159	.189	.230
2		.089	.128	.158	.189	.229	.261
3		.089	.128	.158	.188	.229	.260
4		.089	.128	.158	.188	.229	.260
5		.089	.128	.158	.188	.229	.260
6		.089	.128	.158	.188	.228	.260
8		.089	.128	.157	.188	.228	.260
10		.089	.128	.157	.188	.228	.260
12		.089	.128	.157	.188	.228	.260
15		.089	.128	.157	.188	.228	.260
20		.089	.127	.157	.187	.228	.260
$\infty$		.090	.127	.157	.187	.228	.259
$A^2$		1	.680	.956	1.170	1.390	1.687
	2	.661	.926	1.130	1.338	1.619	1.836
	3	.655	.915	1.115	1.320	1.596	1.809
	4	.651	.909	1.108	1.310	1.584	1.795
	5	.649	.906	1.103	1.305	1.577	1.787
	6	.648	.904	1.101	1.301	1.572	1.781
	8	.646	.901	1.097	1.297	1.567	1.775
	10	.645	.899	1.095	1.294	1.563	1.771
	12	.644	.898	1.094	1.293	1.561	1.768
	15	.644	.897	1.092	1.291	1.559	1.766
	20	.643	.896	1.091	1.289	1.557	1.763
	$\infty$	.644	.894	1.087	1.285	1.551	1.756

Tabla A.20: Cuantiles para la Distribución Gamma [caso 2]  $W^2$ ,  $U^2$ ,  $A^2$

Tabla A.21 Cuantiles para la Distribución Gamma  
 Cuantiles asintóticos para  $W^2$ ,  $U^2$  y  $A^2$ ;  $m$  y  $\beta$  son desconocidos,  
 y  $\alpha$  conocido.

Estadística	$m$	Nivel de significancia $\alpha$					
		.25	.10	.05	.025	.01	.005
$W^2$	1	.079	.111	.136	.162	.196	.222
	2	.076	.107	.131	.155	.187	.211
	3	.075	.106	.129	.153	.184	.208
	4	.075	.105	.128	.152	.183	.207
	5	.075	.105	.128	.151	.182	.206
	6	.075	.105	.128	.151	.181	.205
	8	.074	.104	.127	.150	.181	.204
	10	.074	.104	.127	.150	.180	.204
	12	.074	.104	.127	.150	.180	.203
	15	.074	.104	.127	.149	.180	.203
	20	.074	.104	.126	.149	.180	.203
$\infty$	.074	.104	.126	.148	.178	.201	
$U^2$	1	.071	.098	.119	.141	.169	.190
	2	.070	.097	.118	.139	.166	.187
	3	.070	.097	.118	.138	.165	.186
	4	.070	.097	.117	.138	.165	.186
	5	.069	.097	.117	.138	.165	.185
	6	.069	.097	.117	.138	.165	.185
	8	.069	.096	.117	.137	.164	.185
	10	.069	.096	.117	.137	.164	.185
	12	.069	.096	.117	.137	.164	.185
	15	.069	.096	.117	.137	.164	.185
	20	.069	.096	.117	.137	.164	.185
$\infty$	.069	.096	.117	.136	.164	.183	
$A^2$	1	.486	.657	.786	.917	1.092	1.227
	2	.477	.643	.768	.894	1.062	1.190
	3	.475	.639	.762	.886	1.052	1.178
	4	.473	.637	.759	.883	1.048	1.173
	5	.472	.635	.758	.881	1.045	1.170
	6	.472	.635	.757	.880	1.043	1.168
	8	.471	.634	.755	.878	1.041	1.165
	10	.471	.633	.754	.877	1.040	1.164
	12	.471	.633	.754	.876	1.039	1.163
	15	.470	.632	.754	.876	1.038	1.162
	20	.470	.632	.753	.875	1.037	1.161
$\infty$	.470	.631	.752	.873	1.035	1.159	

Tabla A.21: Cuantiles para la Distribución Gamma [caso 3]  $W^2$ ,  $U^2$ ,  $A^2$

**Tabla A.22: Modificaciones y cuantiles de  $W^2$ ,  $U^2$  y  $A^2$  para la prueba de una Distribución Logística**

Estadística		Nivel de significancia de $\alpha$					
T	Forma modificada de $T^*$	.25	.10	.05	.025	.01	.005
$W^2$	caso 1 $(1.9nW^2 - 0.15)/(1.9n - 1.0)$	.086	.119	.148	.177	.218	.249
	caso 2 $(0.95nW^2 - 0.45)/(0.95n - 1.0)$	.184	.323	.438	.558	.721	.847
	caso 3 $(nW^2 - 0.08)/(n - 1.0)$	.060	.081	.098	.114	.136	.152
$U^2$	caso 2 $(1.6nU^2 - 0.16)/(1.6n - 1.0)$	.080	.116	.145	.174	.214	.246
$A^2$	caso 1 $A^2 + 0.15/n$	.615	.857	1.046	1.241	1.505	1.710
	caso 2 $(0.6nA^2 - 1.8)/(0.6n - 1.0)$	1.043	1.725	2.290	2.880	3.685	4.308
	caso 3 $A^2(1.0 + 0.25/n)$	.426	.563	.660	.769	.906	1.010

Los cuantiles son de la cola superior.

Para los casos 1 y 3 de  $U^2$  use las modificaciones y los cuantiles de  $W^2$ .

Tomada de Stephens (1979), con permiso de The Biometrika Trustees.

**Tabla A.23** Cuantiles para la Distribución Logística  
 Cuantiles asintóticos para  $D^+\sqrt{n}$ ,  $D\sqrt{n}$  y  $V\sqrt{n}$ 

Estadística	Caso	n	Nivel de significancia $\alpha$			
			.10	.05	.025	.01
$D^+\sqrt{n}$	1	5	.702	.758	.805	.854
		10	.730	.792	.846	.913
		20	.744	.809	.867	.944
		50	.752	.819	.880	.962
		$\infty$	.757	.826	.888	.974
	2	5	.971	1.120	1.239	1.380
		10	.990	1.143	1.268	1.423
		20	.999	1.150	1.282	1.444
		50	1.005	1.161	1.290	1.456
		$\infty$	1.009	1.166	1.297	1.464
	3	5	.603	.650	.690	.735
		10	.636	.687	.736	.789
		20	.653	.705	.758	.816
		50	.663	.716	.773	.832
		$\infty$	.669	.723	.781	.842
$D\sqrt{n}$	1	5	.736	.791	.845	.883
		10	.777	.837	.895	.953
		20	.800	.865	.926	.997
		50	.808	.874	.937	1.011
		$\infty$	.816	.883	.947	1.025
	2	5	1.108	1.236	1.349	1.474
		10	1.148	1.274	1.388	1.521
		20	1.167	1.294	1.406	1.545
		50	1.179	1.305	1.410	1.559
		$\infty$	1.187	1.313	1.427	1.568
	3	5	.643	.679	.723	.751
		10	.679	.730	.774	.823
		20	.698	.755	.800	.854
		50	.708	.770	.817	.873
		$\infty$	.715	.780	.827	.886
$V\sqrt{n}$	1	5	1.369	1.471	1.580	1.658
		10	1.410	1.520	1.630	1.741
		20	1.433	1.550	1.659	1.790
		50	1.447	1.564	1.675	1.815
		$\infty$	1.454	1.574	1.685	1.832
	2	5	1.314	1.432	1.547	1.674
		10	1.372	1.483	1.587	1.711
		20	1.400	1.510	1.607	1.730
		50	1.417	1.525	1.619	1.741
		$\infty$	1.429	1.535	1.627	1.748
	3	5	1.170	1.246	1.299	1.373
		10	1.230	1.311	1.381	1.466
		20	1.260	1.344	1.422	1.514
		50	1.277	1.364	1.448	1.542
		$\infty$	1.289	1.376	1.463	1.560

 Tabla A.23: Cuantiles para la Distribución Logística  $D^+\sqrt{n}$ ,  $D\sqrt{n}$ ,  $V\sqrt{n}$

**Tabla A.24 Distribución Cauchy**  
**Cuantiles de la cola superior de la estadística  $W^2$ .**

Situación	n	Nivel de significancia $\alpha$					
		.25	.15	.10	.05	.025	.01
Caso 1	5	0.208	0.382	0.667	1.26	1.51	1.61
	8	0.227	0.480	0.870	1.68	2.30	2.55
	10	0.227	0.460	0.840	1.80	2.60	2.10
	12	0.220	0.430	0.770	1.76	2.85	3.05
	15	0.205	0.372	0.670	1.59	2.88	4.23
	20	0.189	0.315	0.520	1.25	2.65	4.80
	25	0.175	0.275	0.420	0.87	2.10	4.70
	30	0.166	0.250	0.360	0.71	1.60	4.10
	40	0.153	0.220	0.290	0.51	1.50	3.05
	50	0.145	0.200	0.260	0.40	0.70	2.05
	100	0.130	0.170	0.210	0.27	0.35	0.60
$\infty$	0.115	0.146	0.173	0.216	0.26	0.319	
Caso 2	5	.199	.236	.261	.338	.437	.590
	8	.211	.273	.321	.389	.463	.564
	10	.212	.279	.332	.414	.501	.626
	12	.212	.281	.337	.433	.525	.661
	15	.206	.279	.339	.444	.537	.684
	20	.199	.273	.333	.442	.547	.698
	25	.194	.268	.328	.437	.551	.704
	30	.189	.265	.326	.435	.553	.708
	40	.185	.260	.323	.434	.555	.712
	50	.183	.258	.321	.433	.557	.714
	100	.179	.254	.319	.432	.539	.715
$\infty$	.176	.250	.316	.431	.560	.714	
Caso 3	5	.167	.242	.305	.393	.445	.481
	8	.192	.615	.441	.703	.940	1.130
	10	.197	.331	.481	.833	1.201	1.571
	12	.194	.329	.487	.896	1.391	1.901
	15	.185	.317	.472	.904	1.540	2.330
	20	.169	.281	.419	.835	1.630	2.960
	25	.154	.253	.366	.726	1.470	3.080
	30	.143	.225	.319	.615	1.250	2.900
	40	.126	.195	.263	.460	.850	2.170
	50	.117	.175	.235	.381	.642	1.560
	60	.1097	.160	.211	.330	.508	1.070
	100	.098	.135	.174	.2378	.331	.544
	$\infty$	.080	.108	.130	.170	.212	.270

Tabla A.24: Cuantiles para la Distribución Cauchy para  $W^2$

**Tabla A.25 Distribución Cauchy**  
**Cuantiles de la cola superior de la estadística  $A^2$ .**

Situación	n	Nivel de significancia $\alpha$					
		.25	.15	.10	.05	.025	.01
Caso 1	5	1.19	2.22	3.83	8.00	12.75	17.980
	8	1.33	2.62	4.7	10.0	17.4	25.0
	10	1.34	2.52	4.5	10.6	18.2	29.0
	12	1.31	2.42	4.1	9.9	18.8	32.0
	15	1.30	2.15	3.5	8.2	17.2	31.2
	20	1.17	1.86	2.8	6.5	14.4	27.5
	25	1.12	1.68	2.3	4.7	10.8	23.0
	30	1.08	1.55	2.1	3.8	8.2	20.0
	40	1.02	1.38	1.8	2.9	5.2	15.5
	50	0.970	1.29	1.6	2.4	3.8	10.0
	100	0.890	1.16	1.4	1.8	2.2	3.5
	$\infty$	0.834	1.02	1.219	1.519	1.812	2.212
	Caso 2	5	0.974	1.313	1.239	1.59	2.08
8		1.085	1.360	1.560	1.88	2.18	2.55
10		1.110	1.414	1.653	2.04	2.38	2.89
12		1.117	1.443	1.710	2.14	2.55	3.15
15		1.117	1.449	1.728	2.22	2.65	3.31
20		1.101	1.444	1.728	2.24	2.73	3.44
25		1.083	1.432	1.727	2.25	2.77	3.50
30		1.064	1.422	1.724	2.25	2.80	3.53
40		1.051	1.41	1.723	2.26	2.82	3.56
50		1.045	1.405	1.722	2.27	2.83	3.59
100		1.038	1.40	1.718	2.28	2.86	3.64
$\infty$		1.034	1.409	1.719	2.283	2.872	3.677
Caso 3		5	0.835	1.14	1.40	1.77	2.00
	8	0.992	1.52	2.06	3.20	4.27	5.24
	10	1.04	1.63	2.27	3.77	5.58	7.50
	12	1.04	1.65	2.33	4.14	6.43	9.51
	15	1.02	1.61	2.28	4.25	7.20	11.50
	20	0.975	1.51	2.13	4.05	7.58	14.57
	25	0.914	1.40	1.94	3.57	6.91	14.96
	30	0.875	1.30	1.76	3.09	5.86	13.80
	40	0.812	1.16	1.53	2.48	4.23	10.20
	50	0.774	1.08	1.41	2.14	3.37	7.49
	60	0.743	1.02	1.30	1.92	2.76	5.32
	100	0.689	0.927	1.14	1.52	2.05	3.30
	$\infty$	0.615	0.780	.949	1.225	1.52	1.90

Tabla A.25: Cuantiles para la Distribución Cauchy para  $A^2$

**Tabla A.26** Probabilidades para la estadística FDE  $S$   
Distribución discreta, con  $k$  clases; completamente especificada, sección 2.8.1

$k$	$n$	$m$			$k$	$n$	$m$				
3	6	4	3		6	12	6	5	4		
		.00274	.03567				.00173	.01422	.08004		
	9	5	4	3		18	18	7	6	5	
		.00193	.01656	.12361				.00308	.01599	.06435	
	12	6	5	4		24	24	8	7	6	
		.00109	.00771	.04994				.01375	.04695	.13203	
	15	15	7	6		5	30	30	8	7	6
			.00361	.02089		.09181			.01071	.13317	.08836
	18	21	7	6		5	7	14	6	5	4
			.00902	.04005		.13579			.00511	.02996	.12856
24	24	7	6	5	21	21		7	6	5	
		.00402	.01760	.06308				.00807	.02828	.08047	
27	27	8	7	6	28	28		8	7	6	
		.00792	.02897	.08824				.00853	.02828	.08047	
30	30	8	7	6	8	16		6	5		
		.01325	.04245	.011433				.01122	.05166		
4	8	4	3			24		24	8	7	6
		.01514	.10791						.00410	.01641	.05477
12	12	5	4			9	18	7	6	5	
		.01115	.05974					.00406	.02043	.07840	
16	16	6	5	4		27	27	8	7	6	
		.00706	.03299	.12611				.00833	.02831	.08210	
20	20	7	6	5		10	20	7	6	5	
		.00424	.01826	.06598				.00781	.03276	.10909	
24	24	8	7	6	30		30	9	7	6	
		.01014	.03526	.10519				.00421	.04365	.11333	
28	28	8	7	6	5		10	5	4		
		.00566	.01914	.05689				.00477	.04162		
5	10	5	4				15	15	6	5	4
		.00477	.04162						.00584	.03202	.12322
15	15	6	5	4			20	20	7	6	5
		.00584	.03202	.12322					.00496	.02203	.07617
20	20	7	6	5		25	25	8	7	6	
		.00496	.02203	.07617				.00368	.04717	.13083	
25	25	8	7	6		30	30	8	7	6	
		.00368	.04717	.13083				.00946	.02930	.07924	
30	30	8	7	6							
		.00946	.02930	.07924							

Para  $n$  y  $k$  dados, la tabla da valores de  $p(S \geq m)$  para valores abajo de  $m$ .  
Las probabilidades dadas son exactas para celdas equiprobables.

Las probabilidades tabuladas  $\ast \frac{1}{2}$  son  
buenas aproximaciones a  $p(S^+ \geq m) = p(S^- \geq m)$   
Tomada de Pettit y Stephens (1977), con permiso  
de The American Statistical Association.

Tabla A.26: Estadística FDE  $S$ , para hipótesis simples discretas





# Bibliografía

- [1] Anderson, T. W. and Darling, D. A. (1952)  
*Asymptotic theory of certain goodness-of-fit criteria based on stochastic processes*  
Ann. Math. Statist. 23, 193-212
- [2] Anderson, T. W. and Darling, D. A. (1954)  
*A test of goodness-of-fit*  
J. Amer. Statist. Assoc. 49, 765-769
- [3] Berk, R. H. and Jones, D.H. (1979)  
*Goodness-of-fit test statistics that dominate the Kolmogorov statistics*  
Z. Wahrsch Verw. Gebiete 47, 47-59
- [4] Brom, J.  
*Para comprender la historia*  
Editorial Nuestro tiempo, 51a. ed., 11
- [5] Chandra, M., Singpurwalla, N. D., and Stephens, M. A. (1981)  
*Kolmogorov statistics for test of fit for the extreme-value and Weibull distributions*  
J. Amer. Statist. Assoc. 76, 729-731
- [6] Chernoff, H., and Lehmann, E. L. (1954)  
*The use of maximum-likelihood estimates in  $\chi^2$  test for goodness of fit*  
Ann. Math. Statist. 25, 579-586
- [7] Chernoff, H., Gastwirth, J. L., and Johns, M. V. (1967)  
*Asymptotic distribution of linear combinations of functions of order statistics with applications to estimation*  
Ann. Math. Statist. 38, 52-73
- [8] Cochran, W. G. (1952)  
*The  $\chi^2$  test of goodness of fit*  
Ann. Math. Statistics 23, 315-345
- [9] Conover, W. J. (1972)  
*A Kolmogorov goodness of fit test of discontinuous distributions*  
J. Amer. Statist. Assoc. 67, 591-596
- [10] Doksum, K. A., Fenstad, G., and Aaberge, R. (1977)  
*Plots and test for symmetry*  
Biometrika 64 473-487
- [11] Durbin, J. (1973)  
*Distributions Theory for Tests Based on the Sample Distribution Function*  
Regional Conference Series in Appl. Math., No. 9, SLAM, Philadelphia, Pa.

- [12] Durbin, J. and Knott, M. (1972)  
*Components of Cramér-Von Mises statistics, I*  
J. Roy. Statist. Soc., B 34 290-307
- [13] Durbin, J. and Knott, M., and Taylor, C. C. (1975)  
*Components of Cramér-Von Mises statistics, II*  
J. Roy. Statist. Soc., B 37 216-237
- [14] Dyer, A. R. (1974)  
*Comparisons of test for normality with a cautionary note*  
Biometrika 61, 185-189
- [15] Finkelstein, J. M. and Schafer, R. E. (1971)  
*Improved goodness-of-fit test*  
Biometrika 58, 641-645
- [16] Fisher, R. A. (1924)  
*The conditions under which  $\chi^2$  measures the discrepancy between observation and hypothesis*  
J. Roy. Statist. Soc. 87, 442-450
- [17] Gibbons, J. D. (1985)  
*Nonparametric Statistical Inference*  
Second edition, Marcel Dekker, 94-129
- [18] Green, J. R. and Hegazy, Y. A. S. (1976)  
*Powerful modifier EDF goodness-of-fit test*  
J. Amer. Statist. Assoc. 71, 204-209
- [19] Hegazy, Y. A. S and Green, J. R. (1975)  
*Some new goodness-of-fit tests using order statistics*  
Appl. Statist. 24, 299-308
- [20] Horn, S. D. (1977)  
*Goodness-of-fit tests for discrete data; a review and an application to a health impairment scale*  
Biometrics 33, 237-248
- [21] Koehler, K. J. y Larntz, K. (1980)  
*An empirical investigation of goodness-of-fit statistics for sparse multinomials*  
J. Amer. Statist. Assoc. 75, 336-344
- [22] Kolmogorov, A. N. (1933)  
*Sulla determinazione empirica di una legge di distribuziane*  
Giorna. Ist. Attuari, 4, 83-91
- [23] Kotz, S. (1972)  
*Normality versus lognormality with applications*  
Comm. Statist. 1, 113-132
- [24] Kuiper, N. H. (1960)  
*Tests concerning random points on a circle*  
Proc. Koninkl. Neder. Akad. van. Wetenschappen, A 63, 38-47
- [25] Larntz, K. (1978)  
*Small-sample comparisons of exact levels for chi-squared goodness-of-fit statistics*  
J. Amer. Statist. Assoc. 73, 253-263
-

- [26] Lewis, P. A. W. (1961)  
*Distribution of the Anderson-Darling statistic*  
Ann. Math. Statist. 32, 1118-1124
- [27] Lilliefors, H. W. (1967)  
*On the Kolmogorov-Smirnov test for normality with mean and variance unknown*  
J. Amer. Statist. Assoc. 62, 399-402
- [28] Lockhart, R. A. y Stephens, M. A. (1985)  
*Test for the Weibull distribution based on the empirical distribution function.*  
Technical report, Department of Mathematics and Statistics, Simon Fraser University
- [29] Lockhart, R. A. y Stephens, M. A. (1985)  
*Goodness-of-fit tests for the gamma distribution*  
Technical report, Department of Mathematics and Statistics, Simon Fraser University
- [30] Mood, A. M.; Graybill, F.; Boes, D.  
*Introduction to the theory of statistics*  
McGraw-Hill International Editions, third edition
- [31] Moore, D. S. (1973)  
*A note on Srinivasan's goodness-of-fit test*  
Biometrika 60, 209-211
- [32] Moore, D. S. (1986)  
*Test of chi-square type*  
In *Goodness of fit techniques, 63-95* (editors R. B. D'Agostino and M. A. Stephens)  
New York, Marcel Dekker
- [33] Neuhaus, G. (1979)  
*Asymptotic theory of goodness-of-fit tests when parameters are present: A survey* Math.  
Op. Stat. S. 10, 479-494
- [34] Neyman, J. (1949)  
*Contribution to the theory of the  $\chi^2$  test.*  
Proc. Berkeley Symp. Math. Statist. and Prob. 239-273
- [35] Niederhausen, H. (1981)  
*Tables of significance points for the variance-weighted Kolmogorov-Smirnov statistics.*  
Technical report, Department of Statistics, Stanford University.
- [36] Noether, F. E. (1963)  
*A note on the Kolmogorov-Smirnov statistic in the discrete case*  
Metrika 7, 115-116
- [37] Pearson, Karl (1900)  
*On the criterion that a given system of deviations from the probable is the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling*  
Philos. mag. Series 5, Vol 50: 157-172
- [38] Pettitt, A. N. and Stephens, M. A. (1977)  
*The Kolmogorov-Smirnov goodness-of-fit statistic with discrete and grouped data*  
Technometrics 19, 205-210

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [39] Pettitt, A. N. and Stephens, M. A. (1983)  
*EDF statistics for testing for the Gamma distribution*  
Technical report. Department of Statistics, Stanford University.
- [40] Riedwyl, H. (1967)  
*Goodness-of-fit*  
J. Amer. Statist. Assoc. 62, 390-398
- [41] Roscoe, J. T. and Byars, J. A. (1971)  
*An investigation of the restraints with respect to sample size commonly imposed on the use of the chi-square statistics*  
J. Amer. Statist. Assoc. 66, 755-759
- [42] Sahler, W. (1968)  
*A survey of distribution-free statistics based on distances between distribution functions*  
Metrika 13, 149-169
- [43] Schneider, B. E. and Clickner, R. P. (1976)  
*On the distribution of de Kolmogorov-Smirnov statistic for the gamma distribution with unknown parameters*  
Mimeo Series No. 36, Department of Statistics, School of Business Administration, Temple University, Philadelphia, Pa.
- [44] Serfling, R. J. and Wood, C. L. (1975)  
*On null-hypothesis limiting distributions of Kolmogorov-Smirnov type statistics with estimated location and scale parameters*  
Technical report: Florida State University
- [45] Siegel, S. (1956)  
*Non-parametric Statistics for Behavioral Scientists*  
New York; McGraw-Hill
- [46] Spinelli, J. J. and Stephens, M. A. (1983)  
*Test for exponentiality when origin and scale parameters are unknown*  
Technometrics 29, 471-476
- [47] Srinivasan, R. (1970)  
*An approach to testing the goodness-of-fit of incompletely specified distributions*  
Biometrika 57, 605-611
- [48] Srinivasan, R. (1971)  
*Test for exponentiality*  
Statist Hefte 12, 157-160
- [49] Stephens, M. A. (1986)  
*Test based on EDF statistics*  
In *Goodness of fit techniques, 97-193* (editors R. B. D'Agostino and M. A. Stephens)  
New York, Marcel Dekker
- [50] Stephens, M. A. (1970)  
*Use of the Kolmogorov-Smirnov, Cramér-von Mises and related statistics without extensive tables*  
J. Roy. Statist. Soc., B 32, 115-122

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [51] Stephens, M. A. (1974)  
*Components of goodness-of-fit statistics*  
Ann. Inst. H. Poincaré, B 10, 37-54
- [52] Stephens, M. A. (1974)  
*EDF statistics for goodness-of-fit and some comparisons*  
J. Amer. Statist. Assoc. 69, 730-737
- [53] Stephens, M. A. (1976)  
*Asymptotic power of EDF statistics for exponentiality against Gamma and Weibull alternatives*  
Technical report No. 297: Department of Statistics, Stanford University.
- [54] Stephens, M. A. (1977)  
*Goodness-of-fit for the extreme value distribution*  
Biometrika 64, 583-588
- [55] Stephens, M. A. (1979)  
*Test of fit for the logistic distribution based on the empirical distributions function*  
Biometrika 66, 591-595
- [56] Wood, C. L. (1978)  
*On null-hypothesis limiting distributions of Kolmogorov-Smirnov type statistics with estimated location and scale parameters*  
Comm. statist., A 7, 1181-1198
- [57] Wood, C. L. and Altavella, M. M. (1978)  
*Large-sample results for Kolmogorov-Smirnov statistics for discrete distributions*  
Biometrika 65, 235-239