



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO

03082

1  
24

**INSTITUTO DE CIENCIAS DEL MAR Y LIMNOLOGIA**

Colegio de Ciencias y Humanidades

Unidad Académica de los Ciclos Profesional y Posgrado  
Especialización, Maestría y Doctorado en Ciencias del Mar

**SENSIBILIDAD DEL MODELO TERMODINAMICO  
DE ADEM**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**DOCTOR EN CIENCIAS DEL MAR  
(OCEANOGRAFIA FISICA)**

PRESENTA

**M. EN C. TOMAS MORALES ACOLTZI**

DIRECTOR DE TESIS: DR. JULIÁN ADEM

CO-DIRECTOR DE TESIS: DR. YURI N. SKIBA

MÉXICO, D.F.

1997

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## ABSTRACT

### SENSITIVITY OF THE ADEM THERMODYNAMIC MODEL

TOMÁS MORALES-ACOLTZI

THE ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF ADEM'S MODEL IS ANALYZED AS A FUNCTION OF THE EXTERNAL FORCING AND THE DISSIPATION COEFFICIENT. THE EXISTENCE OF A BOUNDED ATTRACTING SET OF THE SEA SURFACE TEMPERATURE ANOMALIES IN A NEIGHBORHOOD OF ZERO IS PROVED. IT IS SHOWN THAT THE PERTURBATION SOLUTION DECAYS EXPONENTIALLY TO ZERO, UNDER A CERTAIN CONDITION. THE DECAY RATE DEPENDS ON THE EXTERNAL FORCING AND THE TURBULENT COEFFICIENT.

THE ADJOINT METHOD IS APPLIED TO DERIVE INTEGRAL FORMULAS FOR THE SENSITIVITY STUDY OF THE ADEM OCEAN THERMODYNAMIC MODEL TO SMALL VARIATIONS BOTH IN THE HEAT FORCING AND IN THE INITIAL AND BOUNDARY CONDITIONS. IN EACH FORMULA, THE ADJOINT MODEL SOLUTION IS A USEFUL SOURCE OF INFORMATION ABOUT THE CONTRIBUTION OF SUCH VARIATIONS TO AVERAGE SEA SURFACE TEMPERATURE ANOMALY IN A CERTAIN REGION. THANKS TO SPECIAL CONDITIONS SET AT INFLOW AND OUTFLOW LIQUID BOUNDARIES, THE MAIN AND ADJOINT THERMODYNAMIC MODELS ARE WELL-POSED IN THE SENSE OF HADAMARD (1923) NOT ONLY FOR CLOSED, BUT ALSO FOR OCEANIC BASINS: EITHER MODEL SOLUTION IS UNIQUE AND STABLE TO INITIAL PERTURBATIONS. THE LAST PROPERTY MEANS THAT EXPONENTIAL GROWTH OF INITIAL PERTURBATIONS IS IMPOSSIBLE, AND THE ADJOINT METHOD CAN PROPERLY BE APPLIED TO THE SENSITIVITY STUDY OF THE MODEL TO SMALL FORCING VARIATIONS.

BALANCED AND ABSOLUTELY STABLE IMPLICIT FINITE-DIFFERENCE SCHEMES OF THE 2<sup>nd</sup> ORDER APPROXIMATION BOTH IN SPACE AND IN TIME ARE CONSTRUCTED FOR THE MAIN AND ADJOINT OCEAN THERMODYNAMIC MODELS. THE SCHEMES ARE BASED ON THE SPLITTING METHOD AND EASILY SOLVED BY FACTORIZATION. BOTH UNSPLIT AND SPLIT DIFFERENCE OPERATORS OF THESE SCHEMES SATISFY THE DISCRETE LAGRANGE IDENTITY AT EVERY TIME STEP. IN THE NONDISSIPATIVE AND UNFORCED CASE WHEN THERE IS NO FLUX ACROSS THE LIQUID BOUNDARIES, THE SCHEMES HAVE TWO CONSERVATION LAWS EACH.

Vo.Bo.



Dr. Julián Adem, Director

  
Dr. Yum N. Skiba, Co-Director

**Aunque en lo fundamental este trabajo puede considerarse una incursión osada y solitaria en el intrincado y apasionante mundo de las matemáticas aplicadas, hay un espacio, aunque breve, para el agradecimiento.**

**A MI ESPOSA GUADALUPE:**

**Por su infinita comprensión y apoyo que hicieron posible la terminación de esta investigación, que culmina toda una vida de sacrificios compartidos.**

**A MIS HIJOS GABY Y PACO:**

**Por ser Motivo de Superación y Esperanza, con todo mi amor.**

**AGRADEZCO PROFUNDAMENTE AL JURADO DE EXAMEN**

**DRA. MA. ADELA MONREAL GOMEZ**

**DR. JULIÁN ADEM**

**DR. DAVID A. SALAS DE LEÓN**

**DR. YURI N. SKIBA**

**DR. ADOLFO MOLINA CRUZ**

**DR. FELIPE VÁZQUEZ GUTIÉRREZ**

**DR. VIRGILIO ARENAS FUENTES**

**su valioso apoyo con la revisión de esta tesis, que con sus comentarios y observaciones la enriquecieron, sin escatimar interés, tiempo y esfuerzo.**

## **AGRADECIMIENTO ESPECIAL**

**A mis directores de tesis:**

**DR. JULIÁN ADEM y DR. YURI N. SKIBA**

**Al primero por darme la oportunidad y confianza de trabajar en el área de matemáticas aplicadas, específicamente en sistemas dinámicos y seguir con mucho interés mi carrera profesional. Al segundo por sus sugerencias y puntualizaciones en un marco de rigor, crítica y formalización matemática.**

**A ambos les agradezco sus observaciones acertadas y estimulantes y el que sean un ejemplo a seguir.**

**A LOS DOCTORES:**

**Ma. Adela Monreal Gómez y David A. Salas de León**

**A ambos les estoy muy reconocido, tanto por su apoyo, como por el contagio de un bien tan parecido e intangible como es el entusiasmo.**

**Me complace incluir al Dr. Víctor Manuel Mendoza Castro, a él debo el apoyo con valiosos comentarios y corridas del código del Modelo termodinámico actual, con el experimento de decaimiento de las anomalías de la temperatura del océano.**

**Al Fis. José Luis Pérez por su apoyo logisticocomputacional.**

**A Lupita Zárrega Sánchez y Oscar Sánchez Meneses por su valioso tiempo y dedicación a la preparación de la versión final del escrito.**

**A todas aquellas personas que de una u otra forma han contribuido a la culminación de este trabajo.**

# **SENSIBILIDAD DEL MODELO TERMODINAMICO DE ADEM**

## **ÍNDICE**

	<b>pág.</b>
<b>RESUMEN</b>	<b>2</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>3</b>
<b>1 INTRODUCCION</b>	<b>4</b>
<b>2 DESCRIPCION DEL MODELO TERMODINAMICO EN UNA CUENCA CERRADA</b>	<b>9</b>
<b>3 COMPORTAMIENTO ASINTOTICO DEL MODELO TERMODINAMICO</b>	<b>12</b>
<b>3.1 Atractores de las Ecuaciones Diferenciales</b>	
<b>3.2 Comportamiento Asintótico del Modelo Termodinámico: Cuenca Cerrada No-forzada</b>	
<b>4 MODELO TERMODINAMICO EN UNA CUENCA OCEANICA ABIERTA</b>	<b>20</b>
<b>4.1 Formulación del Modelo</b>	
<b>4.2 Unicidad y Estabilidad de Soluciones del Modelo</b>	
<b>5 MÉTODO NUMÉRICO</b>	<b>24</b>
<b>5.1 Método de separación (Aproximación en el Tiempo)</b>	
<b>5.2 Aproximación en Espacio</b>	
<b>5.3 Esquema de Diferencias Finitas del Modelo</b>	
<b>6 MODELO TERMODINAMICO ADJUNTO</b>	<b>33</b>
<b>6.1 El Concepto del Operador Adjunto en el Espacio Hilbert</b>	
<b>6.2 El Modelo Adjunto</b>	
<b>6.3 Estudio de Sensibilidad Adjunto</b>	
<b>6.4 Papel de las Condiciones de Frontera</b>	
<b>7 MODELO TERMODINAMICO ADJUNTO NUMERICO</b>	<b>48</b>
<b>7.1 Aproximación en Diferencias Finitas del Operador del Modelo</b>	
<b>7.2 Aproximación de las Condiciones de Frontera</b>	
<b>7.3 Método de Fraccionamiento</b>	
<b>7.4 Esquemas Compatibles Principal y Adjunto. Leyes de Conservación</b>	
<b>8 EXPERIMENTOS DE SENSIBILIDAD DEL MODELO</b>	<b>57</b>
<b>8.1 Leyes de Conservación</b>	
<b>8.2 Función de Corriente Analítica</b>	
<b>8.3 Zonas Energéticamente Activas en el Golfo de México</b>	
<b>9 COMENTARIOS FINALES</b>	<b>62</b>
<b>10 REFERENCIAS</b>	<b>64</b>
<b>APENDICES A y B</b>	<b>70</b>

## RESUMEN

SE ANALIZA EL COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DEL MODELO DE ADEM COMO UNA FUNCIÓN DEL FORZAMIENTO EXTERNO Y EL COEFICIENTE DE DISIPACIÓN. SE PRUEBA LA EXISTENCIA DE UN CONJUNTO ATRAYENTE ACOTADO DE LAS ANOMALÍAS DE LA TEMPERATURA DE LA SUPERFICIE DEL MAR EN UNA VECINDAD DE CERO. BAJO UNA CIERTA CONDICIÓN. SE DEMUESTRA QUE LA SOLUCIÓN DE LA PERTURBACIÓN DECAE EXPONENCIALMENTE A CERO. LA RAZÓN DE DECAIMIENTO DEPENDE DEL FORZAMIENTO EXTERNO Y EL COEFICIENTE TURBULENTO.

SE APLICA EL MÉTODO ADJUNTO PARA DERIVAR FÓRMULAS INTEGRALES PARA EL ESTUDIO DE SENSIBILIDAD DEL MODELO TERMODINÁMICO DE ADEM PARA OCÉANOS A VARIACIONES PEQUEÑAS TANTO EN EL FORZAMIENTO DE CALOR COMO EN LAS CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA. EN CADA FÓRMULA, LA SOLUCIÓN DEL MODELO ADJUNTO ES UNA FUENTE ÚTIL DE INFORMACIÓN ACERCA DE LA CONTRIBUCIÓN DE TALES VARIACIONES A LAS ANOMALÍAS PROMEDIO DE LA TEMPERATURA DE LA SUPERFICIE DEL MAR EN UNA REGIÓN SELECCIONADA. GRACIAS AL CONJUNTO DE CONDICIONES ESPECIALES EN LAS FRONTERAS "LÍQUIDAS" DE ENTRADA Y SALIDA, LOS MODELOS PRINCIPAL Y ADJUNTO SON BIEN-PUESTOS EN EL SENTIDO DE HADAMARD (1923) NO SOLAMENTE PARA CUENCAS OCEÁNICAS CERRADAS, SINO TAMBIÉN PARA ABIERTAS. ES DECIR, LA SOLUCIÓN DEL MODELO ES ÚNICA Y ESTABLE A PERTURBACIONES INICIALES. LA ÚLTIMA PROPIEDAD SIGNIFICA QUE ES IMPOSIBLE UN CRECIMIENTO EXPONENCIAL DE PERTURBACIONES INICIALES, Y ENTONCES EL MODELO ADJUNTO PUEDE SER APLICADO APROPIADAMENTE AL ESTUDIO DE SENSIBILIDAD DEL MODELO A VARIACIONES PEQUEÑAS EN EL FORZAMIENTO.

SE CONSTRUYEN ESQUEMAS EN DIFERENCIAS FINITAS IMPLÍCITOS, ABSOLUTAMENTE ESTABLES Y BALANCEADOS CON APROXIMACIÓN DE SEGUNDO ORDEN TANTO EN ESPACIO COMO EN TIEMPO PARA LOS MODELOS TERMODINÁMICOS PRINCIPAL Y ADJUNTO PARA OCÉANOS. LOS ESQUEMAS ESTÁN BASADOS EN EL MÉTODO DE SEPARACIÓN Y SON RESUELTOS FÁCILMENTE POR FACTORIZACIÓN. AMBOS OPERADORES EN DIFERENCIAS (SEPARADOS Y NO SEPARADOS) DE ESOS ESQUEMAS SATISFACEN LA IDENTIDAD DE LAGRANGE DISCRETA EN CADA PASO DE TIEMPO. EN EL CASO NO-DISIPATIVO Y NO-FORZADO CUANDO NO HAY FLUJO A TRAVÉS DE LAS FRONTERAS "LÍQUIDAS". CADA UNO DE LOS ESQUEMAS TIENE DOS LEYES DE CONSERVACIÓN.

## ABSTRACT

THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF ADEM'S MODEL IS ANALYZED AS A FUNCTION OF THE EXTERNAL FORCING AND THE DISSIPATION COEFFICIENT. THE EXISTENCE OF A BOUNDED ATTRACTING SET OF THE SEA SURFACE TEMPERATURE ANOMALIES IN A NEIGHBORHOOD OF ZERO IS PROVED. IT IS SHOWN THAT THE PERTURBATION SOLUTION DECAYS EXPONENTIALLY TO ZERO, UNDER A CERTAIN CONDITION. THE DECAY RATE DEPENDS ON THE EXTERNAL FORCING AND THE TURBULENT COEFFICIENT.

THE ADJOINT METHOD IS APPLIED TO DERIVE INTERNAL FORMULAS FOR THE SENSITIVITY STUDY OF THE ADEM OCEAN THERMODYNAMICAL MODEL TO SMALL VARIATIONS BOTH IN THE HEAT FORCING AND IN THE INITIAL AND BOUNDARY CONDITIONS. IN EACH FORMULA, THE ADJOINT MODEL SOLUTION IS A USEFUL SOURCE OF INFORMATION ABOUT THE CONTRIBUTION OF SUCH VARIATIONS TO AVERAGE SEA SURFACE TEMPERATURE ANOMALY IN A CERTAIN REGION. THANKS TO SPECIAL CONDITIONS SET AT INFLOW AND OUTFLOW LIQUID BOUNDARIES, THE MAIN AND ADJOINT THERMODYNAMIC MODELS ARE WELL-POSED IN THE SENSE OF HADAMARD (1923) NOT ONLY FOR CLOSED, BUT ALSO FOR OCEANIC BASINS: EITHER MODEL SOLUTION IS UNIQUE AND STABLE TO INITIAL PERTURBATIONS. THE LAST PROPERTY MEANS THAT EXPONENTIAL GROWTH OF INITIAL PERTURBATIONS IS IMPOSSIBLE, AND THE ADJOINT METHOD CAN PROPERLY BE APPLIED TO THE SENSITIVITY STUDY OF THE MODEL TO SMALL FORCING VARIATIONS.

BALANCED AND ABSOLUTELY STABLE IMPLICIT FINITE-DIFFERENCE SCHEMES OF THE 2<sup>ND</sup> ORDER APPROXIMATION BOTH IN SPACE AND IN TIME ARE CONSTRUCTED FOR THE MAIN AND ADJOINT OCEAN THERMODYNAMIC MODELS. THE SCHEMES ARE BASED ON THE SPLITTING METHOD AND EASILY SOLVED BY FACTORIZATION. BOTH UNSPLIT AND SPLIT DIFFERENCE OPERATORS OF THESE SCHEMES SATISFY THE DISCRETE LAGRANGE IDENTITY AT EVERY TIME STEP IN THE NONDISSIPATIVE AND UNFORCED CASE WHEN THERE IS NO FLUX ACROSS THE LIQUID BOUNDARIES. THE SCHEMES HAVE TWO CONSERVATION LAWS EACH.

## **I. INTRODUCCION**

**Modelos termodinámicos del sistema atmósfera-oceano juegan un papel importante en el estudio del clima atmosférico y formación de las anomalías de la temperatura del aire y de la superficie del mar (Donn, et al., 1985; Ghil y Childress, 1987; Adem, 1991). Puesto que la radiación sobre la superficie de la Tierra caracteriza la fuente principal de energía en el sistema atmósfera-oceano (Adem, 1964 a, b, 1970 a, b; Gill, 1982), es siempre de considerable interés analizar la respuesta del modelo a variaciones en este parámetro así como también a variaciones en las condiciones iniciales y de frontera (Skiba, et al. 1996). Actualmente, hay dos métodos principales que se usan frecuentemente en el estudio de sensibilidad de modelos: el directo y el adjunto. Mientras los cálculos directos con un modelo termodinámico son preferibles para dar una información comprensible sobre la respuesta de la temperatura a las variaciones arriba mencionadas, el método del adjunto es especialmente útil y económico si el estudio de sensibilidad de modelos se confina sólo al análisis de unas pocas características integrales del campo de temperatura, por ejemplo, promedios pesados de las anomalías de la temperatura en algunas regiones limitadas y/o intervalos del tiempo los cuales son de especial interés.**

**En geofísica las ecuaciones del adjunto fueron aplicadas primeramente por Marchuk (1974, 1976) para derivar una explícita relación integral entre perturbaciones de promedio pequeño desarrolladas en campos meteorológicos e hidrológicos, y pequeñas variaciones la condición inicial y el forzamiento del modelo. Para el modelo tri-dimensional global lineal de la interacción térmica de la troposfera con los océanos y continentes, fue calculada la solución**

adjunta por Marchuk y Skiba (1976, 1978) y Skiba (1978). Los resultados obtenidos con una versión más refinada del modelo fueron publicados más tarde (Marchuk y Skiba, 1990, 1992). Para la ecuación bi-dimensional de transporte de calor en la troposfera, las soluciones adjuntas fueron también construidas por Sadokov y Shteinbok (1977), Musaelyan, et al (1983) y Voronov, et al (1984).

El método del estudio de la sensibilidad del adjunto fue desarrollado, mejorado y generalizado por Penenko (1979) y Marchuk y Penenko (1979) para sistemas no-lineales discretos, y por Cacuci (1981a, b), Marchuk, et al. (1993) y Marchuk (1995) para sistemas diferenciales no-lineales. Definiciones matemáticas rigurosas del operador adjunto en problemas no-lineales fueron dadas por Vainberg (1979) y Cacuci, et al (1980). Esta metodología fue aplicada para el análisis de la sensibilidad no-lineal del modelo radiativo-convectivo (Hall, et al 1982), el modelo de circulación general OSU (Hall, 1986), y el modelo de mesoescala PSU-NCAR (Errico y Vukicevic, 1992). Con la aproximación adjunta Marchuk, et al. (1985a) construyeron el esquema explícito cuyas propiedades de estabilidad aproximan el esquema implícito de Crank-Nicholson, Marchuk, et al. (1985b) calculó los primeros dos momentos de los campos aleatorios en la filtración Kalman, Robertson (1991, 1992, 1993) llevó a cabo un diagnóstico de anomalías regionales, y Zou, et al. (1993) - el estudio de sensibilidad en el caso de bloqueamiento.

Ecuaciones adjuntas han sido también aplicadas en la asimilación variacional de los datos (Lewis y Derber, 1985; LeDimet y Talagrand, 1986; Courtier y Talagrand, 1987, 1990; Talagrand y Courtier, 1987; Thépaut y Courtier, 1991; Erendorfer, 1992; Navon, et al. 1992;

Rabier, et al., 1992; y otros). Además, Farrel (1990) y Barkmeijer (1992, 1993) utilizaron las técnicas del adjunto para estimar el crecimiento de errores iniciales en modelos atmosféricos.

Una estructura relativamente simple del operador de la ecuación de transporte y difusión de calor, (Zare, 1995), da un discernimiento mejor en el mecanismo del estudio de la sensibilidad del adjunto. Esa es la razón por la cual los modelos termodinámicos fueron especialmente atractivos para la aplicación del método del adjunto. El modelo lineal tri-dimensional atmósfera-oceáno-tierra de interacción térmica y su adjunto fue formulado por Marchuk y Skiba (1976, 1978 1990) y Skiba (1978) para un dominio oceánico cerrado y dominio atmosférico en la forma de un cascarón esférico. Ambos modelos están bien propuestos según Hadamard (1923), esto es, cualquier solución de ambos modelos es única y estable ante perturbaciones iniciales. Significa que la variedad inestable de las anomalías de la temperatura inicial es vacía, y por eso, no hay ningún crecimiento de perturbaciones iniciales con tal de que el forzamiento del modelo sea cero. Esto hace fácil llevar a cabo el estudio de la sensibilidad del modelo adjunto con respecto a variaciones pequeñas en el forzamiento del calor climático y temperatura inicial. Cada vez que el operador del modelo tiene por lo menos un valor propio con una parte real negativa, algunas perturbaciones iniciales pueden crecer exponencialmente (Skiba, 1978; Farrel, 1990; Barkmeijer, 1992, 1993). Por ejemplo esta situación a menudo ocurre cuando el método adjunto es usado en el estudio de la sensibilidad de modelos no-lineales. Claro, cada modelo no-lineal debe primero ser linealizado alrededor de una solución básica. Generalmente el modelo linealizado obtenido no está bien propuesto, y por eso allí existe crecimiento exponencial de perturbaciones que puede abandonar muy rápido el dominio de perturbaciones infinitesimales donde la proximidad del adjunto es sólo

aplicable. Este hecho crea problemas adicionales en llevar a cabo el estudio de la sensibilidad del adjunto, y amerita investigación especial. Cuando tal es el caso, parece razonable llevar a cabo el análisis de la sensibilidad del adjunto separadamente para variedades estables e inestables de la solución básica. Este procedimiento regulariza el problema.

El propósito de este trabajo es extender la técnica de la sensibilidad del adjunto al modelo de área limitada del Golfo de México. En este caso hay un flujo de calor anómalo no-cero por los límites laterales de la cuenca del dominio oceánico. Se muestra aquí que gracias a condiciones especiales puestas en las partes "inflow" y "outflow" de la frontera, tanto el modelo termodinámico de área limitada como su adjunto son también bien-propuestos según Hadamard. Estas condiciones son reducidas a las bien conocidas condiciones de frontera tanto en el límite de no difusión (el caso de advección pura) como en el caso de un dominio de modelo cerrado cuando la componente de la velocidad normal es cero en todas partes de la frontera (Skiba y Adem, 1995; Skiba, et al. 1996).

Una fórmula de sensibilidad resultante directamente del método adjunto relaciona la anomalía de la temperatura promedio en alguna área con anomalías espaciales y temporales de la radiación en superficie de la tierra y anomalías espaciales de la temperatura inicial. Además, la significancia de las anomalías de la radiación en una región local particular de la superficie de la tierra está determinada por valores de la solución del modelo adjunto en esta región. De hecho en cada fórmula de sensibilidad, la solución adjunta juega el papel de una función de Green multidimensional (Roach, 1982), y por lo tanto la anomalía de temperatura promedio está principalmente formada por las anomalías de radiación que se desarrollan en las regiones de máximos locales de soluciones adjuntas. Estas regiones son llamadas las zonas

energéticamente activas y a la solución adjunta se le conoce como función de influencia de la respuesta del modelo.

Gracias al uso del método de separación componente-por-componente simetrizado por Marchuk (1982), la solución del modelo original bi-dimensional principal (o adjunto) es reducida a la solución de dos problemas uni-dimensionales. Esto hace económicos los algoritmos numéricos implícitos principal y adjunto. Los esquemas de diferencias finitas principal y adjuntos son compatibles, absolutamente estables, balanceados, y de aproximación a segundo orden en tiempo y espacio. La compatibilidad significa que a cada paso de tiempo fraccional del algoritmo de separación, los operadores de los esquemas de diferencias principal y adjunto satisfacen una forma discreta de la identidad de Lagrange (Skiba, 1978). Además, en la ausencia de forzamiento y disipación, ambos esquemas tienen dos leyes de conservación para las 2-normas  $L_1$ - y  $L_2$  de la solución del modelo principal (o adjunto). La aplicación de los algoritmos de separación está justificada puesto que ambos operadores, no-separados y todos los separados del modelo principal (así como también del modelo adjunto) son no negativos no solamente en la forma diferencial, sino también en la forma de diferencias finitas.

Como un ejemplo, en la Sección 8, los programas de computadora son probados con algunos experimentos considerando las Leyes de Conservación.

## 2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO TERMODINÁMICO EN UNA CUENCA CERRADA

El modelo climático termodinámico de Adem escrito para la anomalía de temperatura climática  $T(\mathbf{r}, t)$  en la capa superior del océano está dado por la ecuación de balance de calor bi-dimensional (2-D):

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla T - \mu \nabla^2 T + \gamma T = f \quad (1)$$

en una cuenca oceánica 2-D,  $\Omega$ , e intervalo de tiempo  $(0, \bar{t})$ . La solución  $T(\mathbf{r}, t)$  es la anomalía de temperatura de superficie del mar (SST) definida como la diferencia entre la SST actual,  $T_s(\mathbf{r}, t)$ , y la SST climática,  $T_{sc}(\mathbf{r}, t)$ ;  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  es el vector conocido de las corrientes oceánicas,  $\nabla$  es el gradiente horizontal,  $\nabla^2$  es la parte esférica del Laplaciano;  $\mathbf{r} = (\lambda, \vartheta)$  es el punto de la cuenca oceánica identificado por su longitud  $\lambda$  y colatitud  $\vartheta$  en el sistema de coordenadas geográficas; y  $\mu$  es un coeficiente positivo de difusión turbulenta.

El forzamiento del modelo climático de Adem  $F(T_s)$  tomando en cuenta procesos tales como evaporación, radiación y transporte turbulento vertical, depende de la temperatura de superficie del mar  $T_s(\mathbf{r}, t)$  (Adem, 1967, 1971). Se supone que la anomalía de la SST  $T(\mathbf{r}, t)$  es bastante pequeña, de modo que  $F(T_s)$  puede ser expandida en una serie de potencias de  $T(\mathbf{r}, t)$  en una vecindad de la SST climática,  $T_{sc}(\mathbf{r}, t)$ . Luego el término  $\gamma T$  en la ecuación (1) con una función  $\gamma(\mathbf{r}, t)$  representa una parte lineal de esta serie (Adem, 1971), mientras que el forzamiento de la Ec. (1)

$$\tilde{f}(\mathbf{r}, t) = F(T_s) - F(T_{sc}) + \gamma T \quad (2)$$

incluye sus términos de más alto orden. Suponemos que  $\gamma > 0$ . Note que aunque el término  $\gamma T$  hace que la temperatura de superficie del mar  $T_s$  regrese al valor climático  $T_{sc}$ , el forzamiento de calor  $f(\mathbf{r}, t)$  puede generar las anomalías de SST.

Ec. (1) puede ser escrita como

$$\frac{\partial T}{\partial t} + AT = f \quad (3)$$

donde

$$AT = \mathbf{U} \cdot \nabla T - \mu \nabla^2 T + \gamma T \quad (4)$$

Nosotros tomamos

$$T(\mathbf{r}, 0) = T^o(\mathbf{r}) \quad \text{en } \Omega \quad (5)$$

como la condición inicial, y

$$\mu \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{en } S \quad (6)$$

como la condición en la línea costera frontera  $S$  de una cuenca oceánica 2-D,  $\Omega$ . Aquí  $\mathbf{n}$  es el vector normal unitario hacia afuera a  $S$ ,  $\frac{\partial T}{\partial n}$  es la derivada normal, y  $S$  está formada solamente de segmentos de las líneas  $\lambda = \text{Const}$  o  $\vartheta = \text{Const}$ . Además,

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en } S \quad (7)$$

donde  $U_n$  es la componente normal de  $U$  en la línea costera  $S$ . Así que no hay flujo de calor anómalo a través de la frontera  $S$  en el caso de la cuenca cerrada  $\Omega$ . También se supone que el flujo oceánico es incompresible:

$$\operatorname{div} U = 0 \quad (8)$$

Si  $\gamma = 0$  entonces el operador (4) es positivo semidefinido (Skiba y Adem, 1995), y consecuentemente,  $A$  es positivo definido para  $\gamma > 0$ :

$$\int_{\Omega} T A T \, d\mathbf{r} > 0, \quad (9)$$

Así cada solución de (2) - (8) es única y estable a perturbaciones iniciales.

En la siguiente sección consideraremos el comportamiento asintótico del modelo termodinámico de cuenca cerrada en ausencia de forzamiento externo. Esta consideración prueba unicidad y estabilidad de cada solución del modelo a perturbaciones iniciales.

### **3. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DEL MODELO TERMODINÁMICO**

#### **3.1 Atractores de Ecuaciones Diferenciales**

En problemas de años recientes, ideas y nociones de la teoría de los sistemas dinámicos en espacios localmente compactos han sido adaptados a sistemas dimensionales infinitos, especialmente a ecuaciones diferenciales retardadas y ecuaciones diferenciales parciales. Estos últimos sistemas definen sistemas dinámicos en espacios que no son localmente compactos. Incluso cuando el espacio base es localmente compacto pero no limitado, no hay una teoría muy general de sistemas dinámicos. En este caso uno puede y a menudo restringe la clase a una que tenga algún tipo de propiedad disipativa con objeto de reducir la parte esencial del flujo a un conjunto compacto.

Muchos científicos han investigado desde el punto de partida de la teoría de los sistemas dinámicos las ecuaciones de evolución de la física matemática. Tales ecuaciones incluyen el sistema de Navier-Stokes, las ecuaciones magneto-hidrodinámicas, las ecuaciones de reacción-difusión, las ecuaciones de onda amortiguada semilínea.

En años recientes gracias a los esfuerzos de muchos matemáticos, se ha establecido que el atractor del sistema Navier-Stokes, que atrae (en un espacio funcional apropiado) conforme  $t \rightarrow \infty$  son trayectorias de este sistema, es un conjunto compacto dimensional finito (en el sentido de Hausdorff).

Los límites superior e inferior (en términos del número de Reynolds) para la dimensión del atractor fueron encontrados. Estos resultados para el sistema Navier-Stokes han

estimulado investigaciones de atractores de otras ecuaciones de la Física Matemática (Babin and Vishik, 1992).

Para ciertos problemas, en particular para ecuaciones de sistemas de reacción-difusión y de onda no-lineal amortiguada, los matemáticos han establecido la existencia de los atractores y sus propiedades básicas; además, probaron que, conforme  $t \rightarrow \infty$ , una dinámica dimensional infinita descrita por estas ecuaciones y sistemas aproxima uniformemente una dinámica dimensional finita sobre el atractor  $A$ , que, en caso de ser considerado, es la unión de variedades suaves.

Un sistema evolucionario

$$\partial_t \mu = A \mu, \quad \mu|_{t=0} = \mu_0$$

genera un semigrupo  $\{S_t, t \geq 0\}$  de operadores  $S_t$ . El operador  $S_t$  relaciona al dato inicial  $\mu_0$  con el valor  $\mu(t)$  de la solución del sistema al tiempo dado  $t > 0$ . En otras palabras,  $S_t \mu_0 = \mu(t)$ . Una tarea importante es:

investigar el comportamiento a tiempo-largo de las soluciones  $\mu(t)$  del sistema evolucionario. Obviamente, esta tarea es equivalente a la investigación del comportamiento de  $S_t$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

Concluyendo, recientes investigaciones de fluidos dinámicos indican que el comportamiento asintótico de un modelo, y un grado de similaridad del atractor del modelo a ese sistema físico es uno de los criterios importantes que determinan la calidad del modelo (Dijkstra, H. A. and J. D. Neelin, 1995).

### 3.2 Comportamiento Asintótico del Modelo Termodinámico: Cuenca Cerrada No-forzada

Asumimos aquí que  $\mu$  y  $\gamma$  son parámetros positivos constantes en la ecuación (1) y el forzamiento  $f$  es cero:

$$\mu > 0, \text{ y } \gamma > 0 \quad (10)$$

$$f \equiv 0 \quad (11)$$

Sea  $\Omega$  el dominio de integración (Fig. 1), y  $L_2(\Omega)$  el espacio de Hilbert de funciones cuadrado integrables sobre  $\Omega$ , con el producto escalar

$$\langle T, g \rangle = \int_{\Omega} Tgd\Omega \quad (12)$$

definido para cualquier  $T(x, y)$  y  $g(x, y)$  de  $L_2(\Omega)$ . La norma en  $L_2(\Omega)$  está definida por

$$\|T\| = \langle T, T \rangle^{1/2} \quad (13)$$

donde  $d\Omega = dx dy$ ,  $(x, y) \in \Omega$ .

El producto escalar de la ecuación (1) con  $T$ , considerando  $f = 0$ , da

$$\langle \frac{\partial T}{\partial t}, T \rangle = \langle AD, T \rangle + \langle TU, T \rangle + \langle HE, T \rangle \quad (14)$$

donde (Morales-Acoltzi y Adem, 1994)

$$\langle HE, T \rangle = -\gamma \langle T, T \rangle = -\gamma \|T\|^2 \quad (15)$$

Usando la condición de frontera (6) obtenemos

$$\langle TU, T \rangle = \mu \langle \nabla^2 T, T \rangle = -\mu \|\nabla T\|^2 \quad (16)$$

para el término de difusión turbulenta.

Para el término de advección por corrientes oceánicas tenemos

$$\langle AD, T \rangle = -\langle \bar{U} \cdot \nabla T, T \rangle = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{U} \cdot \nabla (T^2) d\Omega \quad (17)$$

Tomando en cuenta la ecuación de continuidad (8) y la fórmula de Green (Sokolnikoff, 1958), la ecuación (15) puede ser escrita como:

$$\langle AD, T \rangle = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \cdot (UT^2) d\Omega = -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} U_n T^2 d_l$$

donde  $\int$  es la integral curvilínea sobre  $\partial\Omega$  y  $d_l$  es el elemento infinitesimal de longitud a lo largo de la línea de frontera  $\partial\Omega$  (Fig. 1). De este modo la condición de frontera de línea costera (7) conduce a

$$\langle AD, T \rangle = 0 \quad (18)$$

Finalmente, para el almacenamiento de energía térmica obtenemos

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial t}, T \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|T\|^2 = \|T\| \frac{\partial}{\partial t} \|T\| \quad (19)$$

Substituyendo (15), (16), (18) y (19) en (14) resulta

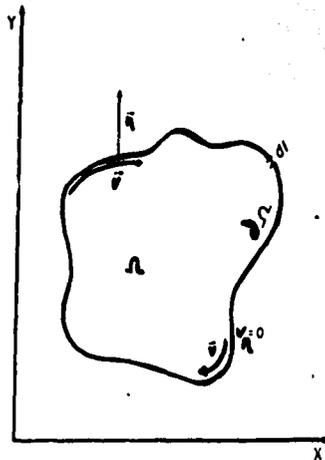


Fig. 1. Dominio de Integración. Aquí  $\vec{n}$  denota el vector normal hacia afuera en la frontera  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ ,  $v_n$  es la componente normal de la corriente oceánica sobre la frontera, y  $dl$  es el elemento infinitesimal de longitud a lo largo de la línea de frontera  $\partial\Omega$ .

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|T\|^2 = -\mu \|\nabla T\|^2 - \gamma \|T\|^2 \quad (20)$$

Ahora usamos la desigualdad Poincaré (Chipot, 1984)

$$\|T\| \leq C \|\nabla T\| \quad (21)$$

con la constante  $C > 0$  que depende solamente de la geometría del dominio  $\Omega$ . La constante  $C$  es positiva en nuestro caso, debido a las condiciones de frontera para las anomalías de temperatura  $T$  (ver Apéndice A de Morales-Acoltzi y Adem, 1994). Entonces

$$-\frac{\mu}{C^2} \|T\|^2 \geq -\mu \|\nabla T\|^2$$

Substituyendo la última desigualdad en la ecuación (20) obtenemos

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|T\|^2 \leq -\frac{\mu}{C^2} \|T\|^2 - \gamma \|T\|^2$$

o

$$\|T\| \frac{\partial}{\partial t} \|T\| \leq -\left(\gamma + \frac{\mu}{C^2}\right) \|T\|^2$$

Dividiendo por  $\|T\|$  obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \|T\| + \left(\gamma + \frac{\mu}{C^2}\right) \|T\| \leq 0 \quad (22)$$

El comportamiento de las soluciones a largo plazo  $T(t, x, y)$  será analizado ahora. La multiplicación de la desigualdad (22) por

$$\exp\left(\gamma + \frac{\mu}{C^2}\right)t$$

lleva a

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \|T\| \exp\left(\gamma + \frac{\mu}{C^2}\right)t \right] \leq 0 \quad (23)$$

Integrando (23) en el tiempo desde  $t=0$  hasta un momento  $t$  resulta

$$\|T(t, x, y)\| \leq \|T_0(x, y)\| \exp\left[-\left(\gamma + \frac{\mu}{C^2}\right)t\right] \quad (24)$$

Puesto que  $\gamma$  es positivo (ver Morales-Acoltzi y Adem, 1994), la solución cero es el único atractor en nuestro sistema

$$T(\mathbf{r}) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty$$

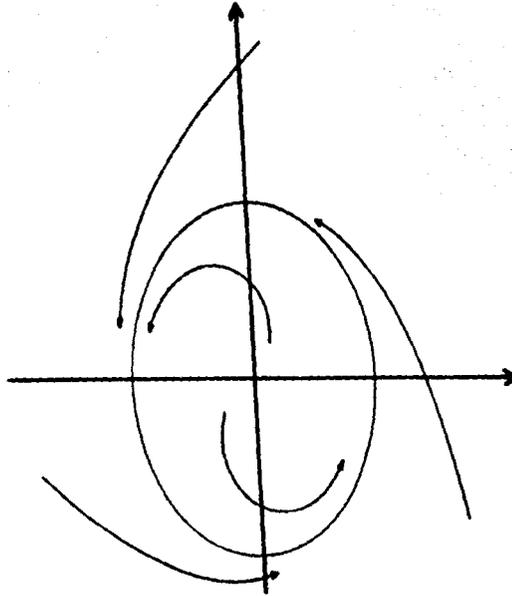
Como  $T(\mathbf{r}, t) = T_S(\mathbf{r}, t) - T_{sN}(\mathbf{r}, t)$ , esto significa que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|T_r(\mathbf{r}, t) - T_{sc}(\mathbf{r}, t)\| = 0 \quad (25)$$

Así, la temperatura del océano  $T_S(t)$  eventualmente tenderá al valor climático normal.

Esquemáticamente esto puede ser representado como en la Figura 2.

Se muestra que en ausencia del forzamiento de calor  $f$ , la solución cero es el único atractor de la ecuación (1), i.e., cualquier solución  $T(t, x, y)$  de la ecuación (1) eventualmente tiende a cero. Esto significa que la temperatura del océano  $T_s(t)$  (ver Ec. (1)) se aproxima al valor climático normal  $T_{sc}(t)$ .



**Fig. 2.** Atractor climático del ciclo anual de la anomalía de la temperatura de la superficie del océano. Todas las trayectorias de la solución tienden al ciclo límite con el tiempo.

En otras palabras, si  $f = 0$  entonces cualquier vecindad acotada de cero es un conjunto absorbente para las soluciones de la ecuación (1). Nótese, que entre más pequeñas son  $\gamma$  y  $\mu$ , más baja es la razón de convergencia de todas las soluciones  $T(t, r)$  a cero y viceversa. Además, como puede verse de (24), la razón de disminución también depende de la constante  $C$  de la desigualdad de Poincaré (21).

Como un ejemplo simple, supongamos que nuestro dominio  $\Omega$  coincide con el Hemisferio Norte en su totalidad, el parámetro  $\gamma$  es dado por (Morales-Acoltzi y Adem, 1994), y el coeficiente de difusión  $\mu$  es igual a  $3 \times 10^8 \text{ cm}^2 \text{ seg}^{-1}$ .

Obtenemos  $\left| \frac{V_{A_N}}{h} \right| = 10^{-1} \text{ seg}^{-1}$ , donde  $|V_{A_N}|$  es el valor normal de la velocidad del viento en superficie y  $h$  es la profundidad de la capa, considerando el par de valores: con  $|V_{A_N}| = 5 \text{ m seg}^{-1}$  y  $h = 50 \text{ m}$  o  $|V_{A_N}| = 10 \text{ m seg}^{-1}$  y  $h = 100 \text{ m}$  (Adem, 1971).

En este caso, los valores propios del operador de Laplace sobre el hemisferio son iguales a  $N(N+1)/R^2$  donde  $N$  es natural y  $R = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$  es el radio de la esfera. Puesto que  $1/C^2$  es igual al menor valor propio no cero  $N = 1$ ,  $1/C^2 = 2/R^2$ . Esto lleva a un factor  $\mu/C^2 = 0.01478 \times 10^{-7} \text{ seg}^{-1}$ .

Como un resultado  $\gamma + \frac{\mu}{C^2} = 1.894 \times 10^{-7} \text{ sec}^{-1} = \tau$

Por lo tanto el tiempo e-folding de decrecimiento de la norma (24) de las perturbaciones es igual a  $\frac{1}{\tau} = 60.9 \text{ días} \sim 2 \text{ meses}$ .

Hacemos ahora una nota importante.

Hemos analizado el comportamiento de la Ec. perturbada (14). El término HE en esta ecuación es el resultado de la linealización del forzamiento (2) (ver Apéndice B de Morales-Acoltzi y Adem, 1994)

$$f(T_s) = \frac{1}{hp_s C_s} (E_s - G_2 - G_3) - \frac{W}{h} \quad (26)$$

El decrecimiento exponencial de cualesquiera perturbaciones pequeñas obtenidos en la sección previa (ver Ec. (24)) ha sido mostrado para el caso particular  $\gamma = \text{constante} > 0$ . En el caso general,  $\gamma$  no es constante, y las perturbaciones tenderán exponencialmente a cero solamente si

$$\frac{\mu}{C^2} > \max_{r, \Omega} \max_t |\gamma(t, r)| \quad (27)$$

La condición (27) también toma en cuenta el caso de una solución normal estacionaria, periódica y limitada (en tiempo) no estacionario  $T_{sc}(t, x, y)$  (ver Apéndice B de Morales-Acoltzi y Adem, 1994).

Por ejemplo, puesto que el comportamiento de los valores medios normales mensuales  $T_{sc}(t)$  es aproximadamente periódico durante el año, la solución  $T_{sc}(t)$  de Ec. (1), tenderá al ciclo climático anual independientemente de la condición inicial  $T_{sc}(0, r)$ , (Fig. 2).

Enfatizamos una vez más que en el caso general que el forzamiento  $f$  de (1) es no-cero, el comportamiento asintótico es mucho más complicado.

## 4. MODELO TERMODINAMICO EN UNA CUENCA OCEANICA ABIERTA

### 4.1 Formulación del modelo

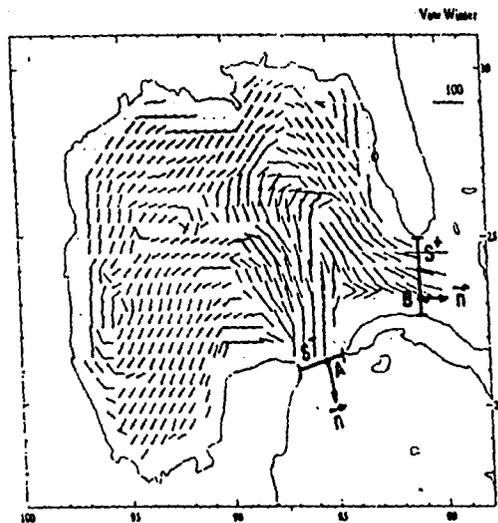
Consideremos ahora el caso de una cuenca oceánica abierta  $\Omega$  cuando el flujo de calor anómalo es posible a través de las partes líquidas de la frontera  $S$ . Las condiciones (6) y (7) se usarán en la frontera coincidiendo con la línea costera. Física y matemáticamente las condiciones apropiadas en la frontera líquida han sido discutidas muy ampliamente (ver, e.g. Vichnevetsky y Bowles, 1982; Poinsoy y Lele, 1992, y referencias en estos trabajos). Aquí la aproximación sugerida por Marchuk (1986) para el problema 2-D, y por Skiba (1993) para el problema 3-D serán usadas.

Dividiremos el límite lateral  $S$  en dos partes: el "outflow" parte  $S^-$  donde el vector velocidad  $U$  es exteriormente dirigido ( $U_n \geq 0$ ), y el "inflow" parte  $S^+$  donde el vector velocidad  $U$  es interiormente dirigido ( $U_n \leq 0$ ). En la Fig. 3 tomada de Adem et al. (1994 a, b), el Golfo de México se muestra como un ejemplo de una cuenca abierta. La parte  $S^+$  también incluye la línea costera.

La ecuación (1) es ahora resuelta en el intervalo de tiempo  $(0, \bar{t})$  y sobre el dominio  $\Omega$  con la condición inicial (5) y las condiciones de frontera (10)-(11)

$$\mu \frac{\partial T}{\partial n} - U_n T = 0 \quad \text{en} \quad S^-, \quad (28)$$

$$\mu \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{en} \quad S^+ \quad (29)$$



**Fig. 3.** El Dominio Océánico abierto  $D$ . Los puntos de Frontera A y B pertenecen a las partes de la frontera  $S'$  y  $S''$ , respectivamente;  $U_n$  es una proyección del vector de Velocidad de la Corriente  $U$  sobre la normal unitaria hacia afuera a la frontera  $S$ .

Las condiciones (28) significan que el flujo de calor anómalo combinado difusivo más advectivo es cero en  $S^-$  (flujos de calor climático no-cero en  $S^-$  son, sin embargo, posibles; ver Fig. 1). Si (28) es violada, y hay una fuente de anomalía de SST en el exterior de  $\Omega$  que genera un flujo de calor en  $S^-$ , entonces al ensanchar la cuenca  $\Omega$  esta fuente puede ser incluida en  $\Omega$ . Por otro lado, (28) puede ser reemplazada por

$$\mu \frac{\partial T}{\partial n} - U_n T = q \quad \text{sobre } S^- \quad (30)$$

si el flujo de calor anómalo  $q(\mathbf{r}, t)$  es conocido en  $S^-$  de las observaciones. La condición (29) significa que en la frontera  $S^+$  el flujo de calor anómalo inducido por difusión es despreciable comparado con el causado por advección con el vector de velocidad de corriente  $\mathbf{U}$ .

Donde  $S$  coincide con la línea costera, la Ec. (29) automáticamente satisface la condición (6).

Las Ecs. (28) y (29) son bien conocidas como condiciones de frontera de tercera clase y segunda clase, respectivamente (Ladyzhenskaya, 1973). En el caso limitante no difusivo ( $\mu=0$ ), (28) es reducida a la condición razonable  $T = 0$  sobre la parte del flujo hacia adentro de la frontera, mientras la condición (29) desaparece como debe ser, ya que para advección pura, no se requiere condición en el flujo hacia afuera de la frontera, donde la solución está determinada por el método de características (Skiba y Adem, 1995).

#### 4.2 Unicidad y estabilidad de las soluciones del modelo

Mostraremos ahora que el operador  $A$  del problema (1), (5), (28), (29) es positivo semidefinido:  $A \geq 0$ . Integrando el producto interior  $\langle AT, T \rangle$  por partes y usando la fórmula de Green obtenemos

$$\langle AT, T \rangle = \mu \int_{\Omega} |\nabla T|^2 dr + \gamma \int_{\Omega} T^2 dr + \frac{1}{2} \left\{ \int_{S^+} U_n T^2 dS - \int_{S^-} U_n T^2 dS \right\} \geq 0 \quad (31)$$

donde  $dS$  es un elemento lineal de la frontera  $S$ . Las dos últimas integrales en (31) son no negativas ya que  $U_n \geq 0$  sobre  $S^+$ , y  $U_n \leq 0$  sobre  $S^-$ . Así que, el operador  $A$  es positivo semi-definido. Además,  $A$  es simétrico-sesgado solamente si  $\mu = 0$ ,  $\gamma = 0$  y  $S$  es la línea costera ( $U_n = 0$ ). Si no es el caso entonces todos los valores propios  $\omega_k$  del problema espectral

$$A W_k(\mathbf{r}) = \omega_k W_k(\mathbf{r})$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial n} W_k - U_n W_k = 0 \quad \text{on } S^+$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial n} W_k = 0 \quad \text{on } S^- \quad (32)$$

son positivos. Como mostraron Skiba y Adem, 1995, si  $f = 0$  la amplitud  $T_k$  de la temperatura inicial anómala  $W_k(\mathbf{r})$  decae como la razón determinada por el valor propio  $\omega_k$ .

Si el forzamiento  $f$  de (1) es idénticamente cero entonces la desigualdad (24) es otra vez satisfecha debido a (31), y cada solución del problema (1), (5), (28), (29) es única y

estable bajo perturbaciones iniciales, i.e., el modelo de cuenca abierta está bien propuesto de acuerdo con Hadamard (1923).

Integrando (1) sobre  $\Omega$  obtenemos la ecuación de balance

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} T dr = \int_{\Omega} (f - \gamma T) dr - \int_{S^+} U_n T dS + \int_{S^-} q dS \quad (33)$$

donde la condición de frontera (30) es tomada en cuenta. En el caso de la condición de frontera (28), la última integral en la fórmula (33) es cero. A diferencia de lo que sucede en el modelo de la cuenca cerrada, la anomalía de temperatura

$$\bar{T} = (\text{mes } \Omega)^{-1} \int_{\Omega} T(r) dr \quad (34)$$

donde  $\text{mes } \Omega$  es el área de  $\Omega$  (Skiba y Adem, 1995) pueden ser ambos cambiados no solamente por un forzamiento de calor anómalo sino también por un flujo de calor anómalo a través de la frontera líquida  $S$ .

## 5. METODO NUMERICO

### 5.1 Método de fraccionamiento (Aproximación en el Tiempo)

La ecuación (1) puede ser escrita

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (A_1 + A_2)T = f \quad (35)$$

donde

$$A_1 T = \frac{1}{2 a \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} (u T) + u \frac{\partial T}{\partial \lambda} \right] - \frac{\mu}{a^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} T + \frac{\gamma}{2} T \quad (36)$$

$$A_2 T = \frac{1}{2 a \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (v T \sin \vartheta) + v \sin \vartheta \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \right] - \frac{\mu}{a^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\gamma}{2} T \quad (37)$$

Usando la ecuación de continuidad (8) es fácil ver que la suma  $A_1 + A_2$  coincide con el operador  $A$ .

Probaremos ahora que los operadores (36) y (37) son positivos semidefinidos  $A_i \geq 0$  ( $i = 1, 2$ ). Calculemos el producto interior  $\langle A_i T, T \rangle$ . Integrando por partes y usando la fórmula de Green con las condiciones de frontera (28) y (29) obtenemos (Skiba, et al. 1996)

$$\begin{aligned} \langle A_1 T, T \rangle &= \int_{\Omega} T A_1 T dr = \mu \int_{\Omega} \frac{1}{a^2 \sin^2 \vartheta} \left( \frac{\partial T}{\partial \lambda} \right)^2 dr + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} T^2 dr \\ &+ \int_{\Sigma} \left[ \frac{1}{2} U_n T - \mu \frac{\partial T}{\partial n} \right] T dS = \mu \int_{\Omega} \frac{1}{a^2 \sin^2 \vartheta} \left( \frac{\partial T}{\partial \lambda} \right)^2 dr + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} T^2 dr \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\int_{S^+}U_n T^2 dS - \int_{S^-}U_n T^2 dS\right\} \geq 0 \quad (38)$$

Fue tomado en cuenta aquí que  $U_n < 0$  sobre  $S^-$ , y  $U_n \geq 0$  sobre  $S^+$ . La cualidad positiva definida del operador (37) puede ser demostrada del mismo modo. Ya que  $A_1 \geq 0$  y  $A_2 \geq 0$ , el método de fraccionamiento está justificado (Douglas y Rachford, 1956; Marchuk, 1982). Puede ser aplicado para resolver (35) dentro de cada intervalo de tiempo  $(t, t + \tau)$  de pequeña longitud  $\tau$ . El método consiste de dos pasos:

(1) la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} T_1 + A_1 T_1 = 0 \quad (39)$$

es resuelta en  $(t, t + \tau)$  con la condición inicial  $T_1(t) = T(t)$ , donde  $T(t)$  es la solución de la Ec. (35).

(2) la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} T_2 + A_2 T_2 = f \quad (40)$$

es resuelta en  $(t, t + \tau)$  con la condición inicial  $T_2(t) = T_1(t + \tau)$ .

Como un resultado, la solución  $T_2(t + \tau)$  del problema split (40) aproximará la solución  $T(t + \tau)$  del problema 2-D original (35) al tiempo  $t + \tau$ .

De acuerdo con Douglas y Rachford (1956), el algoritmo (39), (40) tiene aproximación de segundo orden en  $\tau$  solamente si los operadores  $A_i$  son independientes del

tiempo y conmutativos  $A_1 A_2 = A_2 A_1$ . Para alcanzar una aproximación de segundo orden en  $\tau$  para los operadores dependientes del tiempo no conmutativos (36) y (37), usamos la versión simétrica del método de fraccionamiento (Marchuk, 1975; Marchuk y Skiba, 1978) dentro de cada intervalo doble  $(t - \tau, t + \tau)$ . Esto consiste de tres pasos:

(1) la ecuación (39) es resuelta en el intervalo  $(t - \tau, t)$  con la condición inicial  $T_1(t - \tau) = T(t - \tau)$ ;

(2) la ecuación (40) es resuelta en  $(t - \tau, t + \tau)$  con la condición inicial  $T_2(t - \tau) = T_1(t)$ ;

(3) la ecuación (39) es ahora resuelta en el intervalo  $(t, t + \tau)$  con la condición inicial  $T_1(t) = T_2(t + \tau)$ .

## 5.2 Aproximación en espacio

Hay varios esquemas numéricos para la ecuación de transporte los cuales preservan la propiedades más importantes del problema diferencial (ver, por ejemplo, Forester, 1977; Smolarkiewicz, 1991; Williamson, 1992). Nuestra intención aquí es obtener el esquema de segundo orden balanceado y absolutamente estable que preserve el problema de temperatura media (34) y la norma  $\|T(r, t)\|$  en el caso de que el operador  $A$  es simétrico sesgado y el forzamiento es cero (ver sección 4). Estas propiedades son especialmente importantes para correr modelos climáticos a largo plazo.

Note que la frontera S consiste solo de segmentos paralelos a las líneas  $\lambda = \text{Const}$  o  $\vartheta = \text{Const}$ . Así que para todo punto en S la componente normal  $U_n$  de la velocidad de corriente  $U$  coincide con  $\pm u$  o  $\pm v$ , donde  $u, v$  son las componentes de  $U$  en la dirección de los ejes  $\lambda$  y  $\vartheta$ .

Considere mallas igualmente espaciadas sobre una esfera con distancias  $\Delta\lambda$  y  $\Delta\vartheta$  entre puntos de malla. Las funciones de red  $T_{ij} = T(\lambda_i, \vartheta_j)$ ,  $u_{ij} = u(\lambda_{i-1/2}, \vartheta_j)$  y  $v_{ij} = v(\lambda_i, \vartheta_{j-1/2})$  están definidas sobre mallas diferentes (Fig.4). La línea de frontera S del dominio de la malla pasa a través de los nodos de la función  $u_{ij}$  o  $v_{ij}$  (Fig. 5). Tomamos

$$\frac{1}{a \sin \vartheta_j} \left[ \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta\lambda} + \frac{v_{i,j+1} \sin \vartheta_+ - v_{ij} \sin \vartheta_-}{\Delta\vartheta} \right] = 0 \quad (41)$$

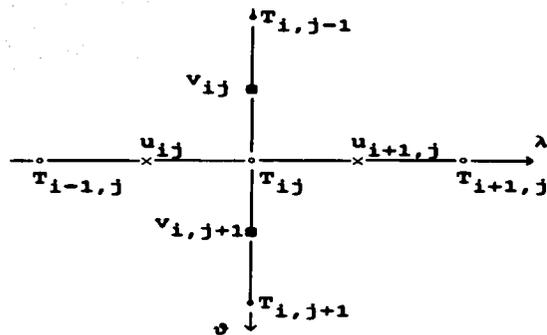
como la forma en diferencias de la ecuación de continuidad (2). La notación  $\sin \vartheta_+ = \sin \vartheta_{j+1/2}$ ,  $\sin \vartheta_- = \sin \vartheta_{j-1/2}$  es usada en (41) y en lo subsecuente. Para aproximar los operadores (36), (37) notamos que pueden ser escritos como

$$A_1 T = \frac{1}{2 a \sin \vartheta} \left[ \frac{1}{2} T \frac{\partial u}{\partial \lambda} + u \frac{\partial T}{\partial \lambda} \right] - \frac{\mu}{a^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} T + \frac{\gamma}{2} T \quad (42)$$

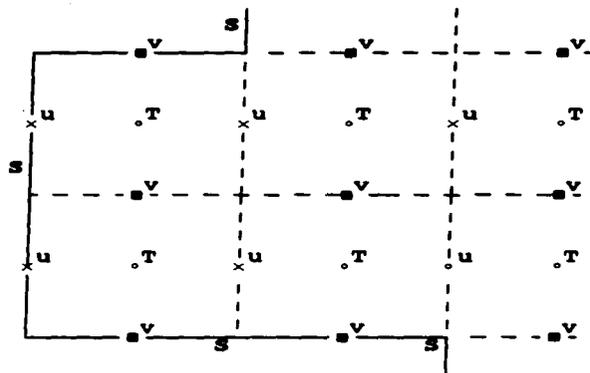
$$A_2 T = \frac{1}{2 a \sin \vartheta} \left[ \frac{1}{2} T \frac{\partial}{\partial \vartheta} (v \sin \vartheta) + v \sin \vartheta \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \right] - \frac{\mu}{a^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\gamma}{2} T \quad (43)$$

Puesto que el término

$$\frac{1}{2 \Delta\lambda} \{ u_{i+1,j} T_{i+1,j} - u_{ij} T_{i-1,j} \} \quad (44)$$



**Fig. 4. Localización de las funciones discretas cerca del nodo  $(\lambda_i, \theta_j)$ .**



**Fig. 5. Localización de las funciones en el dominio discreto.**

aproxima la suma  $\frac{1}{2} T \frac{\partial u}{\partial \lambda} + u \frac{\partial T}{\partial \lambda}$  en el punto  $(\lambda_i, \vartheta_j)$  a segundo orden, los operadores  $A_m$  son aproximados por las matrices  $A_m^h$  (Skiba 1993):

$$(A_1^h T)_y = \frac{1}{2a\Delta\lambda \sin \vartheta_j} \{u_{i+1,j} T_{i+1,j} - u_{i,j} T_{i,j}\} - \frac{\mu}{a^2 \Delta \lambda^2 \sin^3 \vartheta_j} \{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}\} + \frac{\gamma}{2} T_{i,j} \quad (45)$$

$$(A_2^h T)_y = \frac{v_{i,j+1} \sin \vartheta_+ T_{i,j+1} - v_{i,j} \sin \vartheta_- T_{i,j-1}}{2a\Delta \vartheta \sin \vartheta_j} - \frac{\mu \{ \sin \vartheta_+ (T_{i,j+1} - T_{i,j}) - \sin \vartheta_- (T_{i,j} - T_{i,j-1}) \}}{a^2 \Delta \vartheta^2 \sin \vartheta_j} + \frac{\gamma}{2} T_{i,j} \quad (46)$$

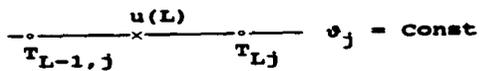
Ahora aproximemos las condiciones de frontera (Skiba, 1993). Considere, por ejemplo, una línea a lo largo del eje  $\lambda$  para una fija  $\vartheta_j$ . Supongamos que  $(\lambda_i, \vartheta_j)$  son nodos internos del dominio de la red para  $i = 1, \dots, I-1$ , y sean  $L = (\lambda_{1/2}, \vartheta_j)$  y  $R = (\lambda_{I-1/2}, \vartheta_j)$  los puntos de frontera izquierdo y derecho sobre esta línea, respectivamente (Fig. 6). Entonces las condiciones de frontera (28) y (29) son aproximadamente como sigue:

(1) Si  $u_{ij} \equiv u(L) > 0$  entonces  $U_n = -u_{ij} < 0$  y el punto  $L$  pertenece a la frontera  $S^-$ .

Además, ya que

$$\frac{\partial T}{\partial n}(L) \equiv \frac{1}{a\Delta\lambda \sin \vartheta_j} (T_{i'} - T_{i,j}) \quad (47)$$

la condición de frontera (28) es aproximada por



**Fig. 6.** Localización de los nodos del dominio discreto inmediatamente adyacentes al Punto de frontera L sobre la línea  $\theta_j = \text{Constante}$ .

$$\frac{\mu}{a\Delta\lambda \sin\vartheta_j}(T_{\vartheta_j} - T_{1,j}) + \frac{1}{2}u_{1,j}(T_{\vartheta_j} + T_{1,j}) = 0 \quad (48)$$

(2) Si  $u_{1j} = u(\mathbf{L}) \leq 0$  entonces  $U_n = -u_{1j} \geq 0$  y el punto  $\mathbf{L}$  pertenece a  $S^+$ . Por lo que la condición de frontera (29) es aproximada por

$$\frac{\mu}{a\Delta\lambda \sin\vartheta_j}(T_{\vartheta_j} - T_{1,j}) = 0 \quad (49)$$

y de ahí que  $T_{1j} = T_{\vartheta_j}$ . De este modo el valor  $T_{\vartheta_j}$  de la función  $T$  en el operador (45) para  $i = 1$  debe ser cambiado a  $T_{1j}$  así como excluir el punto externo  $(\lambda_0, \vartheta_j)$ .

Asimismo, si  $u_{1j} = u(\mathbf{R}) < 0$  entonces  $U_n = u_{1j} < 0$ , y el punto de frontera  $\mathbf{R}$  pertenece al punto  $S^-$ . Además

$$\frac{\partial T}{\partial n}(\mathbf{R}) \equiv \frac{1}{a\Delta\lambda \sin\vartheta_j}(T_{\vartheta_j} - T_{1-1,j}) \quad (50)$$

y por lo tanto, la condición de frontera (28) es aproximada como

$$\frac{\mu}{a\Delta\lambda \sin\vartheta_j}(T_{\vartheta_j} - T_{1-1,j}) - \frac{1}{2}u_{1,j}(T_{1-1,j} + T_{\vartheta_j}) = 0 \quad (51)$$

Finalmente, si  $u_{1j} = u(\mathbf{R}) \geq 0$  entonces el punto de frontera  $\mathbf{R}$  pertenece a  $S^+$ , y (29) se reduce a

$$T_{1j} = T_{1-1,j} \quad (52)$$

Para los puntos de frontera localizados sobre las líneas  $\lambda_i = \text{Const}$ , las condiciones de frontera son aproximadas en la misma forma. Por supuesto, el número de puntos internos de

la red varía de línea a línea. Vemos que la ecuación diferencial (1), y las condiciones de frontera (28)-(29) están aproximadas al segundo orden en las variables geométricas.

### 5.3 Esquema de Diferencias Finitas del Modelo

Con las condiciones (47)-(52) podemos mostrar que cada una de las matrices  $A_m^h$  es positiva semidefinida:

$$T^T A_m^h T \geq 0, \quad (m = 1, 2) \quad (53)$$

Aquí  $T$  es el vector columna con componentes  $T_{ij}$ , y el supraíndice  $\tau$  denota la transposición. Así que las aproximaciones a diferencias finitas (45) y (46) conservan la cualidad positiva semidefinida de los operadores diferenciales  $A_m$  ( $i = 1, 2$ ). Por lo tanto la aplicación del método de fraccionamiento en la construcción de esquemas numéricos está justificada.

Suponga que requerimos resolver la ecuación (1) dentro de un intervalo de tiempo dado. El intervalo está dividido en subintervalos iguales  $(t_{n-1}, t_n)$  o pequeña longitud  $\tau = t_n - t_{n-1}$ . Ya que las matrices  $A_i^h$  no conmutan, la variante simétrica del método de fraccionamiento descrita al final de la sección 4.4 será aplicada para obtener el esquema de diferencias a segundo orden dentro de cada subintervalo doble  $I_n = (t_{n-1}, t_{n+1})$ :

$$\begin{aligned}
T\left[n-\frac{1}{2}\right]-T[n-1] &= -\frac{\tau}{2} A_1^h \left\{ T\left[n-\frac{1}{2}\right] + T[n-1] \right\} \\
T\left[n+\frac{1}{2}\right]-T\left[n-\frac{1}{2}\right] &= -\tau A_2^h \left\{ T\left[n+\frac{1}{2}\right] + T\left[n-\frac{1}{2}\right] \right\} + 2\tau F[n] \\
T[n+1]-T\left[n+\frac{1}{2}\right] &= -\frac{\tau}{2} A_1^h \left\{ T[n+1] + T\left[n+\frac{1}{2}\right] \right\}
\end{aligned} \tag{54}$$

Aquí,  $T[n-1]$  y  $T[n+1]$  son los vectores columna con las componentes  $T_{ij}(t_{n-1})$  y  $T_{ij}(t_{n+1})$  respectivamente,  $F[n] = \frac{1}{2} \{f_{ij}(t_{n+1}) + f_{ij}(t_{n-1})\}$  es la aproximación del forzamiento, y  $T[n-1/2]$  y  $T[n+1/2]$  son las funciones auxiliares ( $n = 1, 3, 5, \dots$ ). Cada una de las ecuaciones 1-D en (54) es resuelta usando el esquema de Crank-Nicholson. La solución  $T[n-1]$  para el intervalo previo  $I_{n-1}$  es tomada como la condición inicial para resolver el problema en el intervalo  $I_n$ . El vector inicial  $T[0]$  tiene como sus componentes  $T^0(\lambda_i, \theta_j)$  (ver Ec. (4)).

Multiplicando la primera ecuación (54) por el vector  $\{T[n-1/2] + T[n-1]\}^T$  de la izquierda, y tomando en cuenta (53) encontramos

$$T^T \left[ n - \frac{2}{3} \right] T \left[ n - \frac{2}{3} \right] \leq T^T [n-1] T [n-1] \tag{55}$$

Si  $F[n] = 0$  entonces las desigualdades tales como (55) son válidas para cada una de las ecuaciones (54). Puesto que  $T^T T = \|T\|^2$  donde  $\|T\|$  es la norma Euclidiana, estas cantidades llevan a

$$\|T[n+1]\| \leq \|T[n-1]\| \tag{56}$$

esto es, el esquema (54) es estable a perturbaciones iniciales de cualquier paso de tiempo  $\tau$ .

Multipliquemos las ecuaciones (54) de la izquierda por el vector hilera  $v^T$  cuyas componentes  $V_{ij}$  son iguales a los valores  $a^2 \Delta \lambda \Delta \theta \sin \theta_j$  en los nodos internos correspondientes del dominio de la red. La suma de todos los resultados obtenidos da una variante de diferencias finitas de la ecuación de balance (33). De ahí que el esquema (55) esté balanceado. Más aún, cuando  $\mu = 0$ ,  $\gamma = 0$  el forzamiento  $F[n] = 0$  y la cuenca es cerrada, i.e.,  $U_n = 0$  sobre la frontera  $S$ , entonces el esquema (54) tiene las dos leyes de conservación:

$$\sum_{i,j} T_{ij}(t_{n+1}) V_{ij} = \sum_{i,j} T_{ij}(t_{n-1}) V_{ij} \quad (57)$$

$$\|T [n+1]\| = \|T [n-1]\| \quad (58)$$

Aunque el esquema (54) es absolutamente estable para un paso de tiempo arbitrario  $\tau$ , su magnitud está evidentemente limitada por los requerimientos de la aproximación. Para la ecuación original (1), el problema de aproximación fue discutido por Adem (1971). El método de fraccionamiento ("split") impone restricciones adicionales a la selección de  $\tau$ . Experimentos numéricos de Marchuk y Skiba (1976, 1978, 1992) con el modelo termodinámico global muestran que un paso de tiempo de 6 horas proveerá una buena aproximación para el esquema (54). Este esquema resuelto sin iteraciones por el método directo (factorización), y puede ser generalizado al modelo de transporte 3-D de calor termodinámico del océano en el mismo modo como fue hecho en Skiba (1993).

## 6. EL MODELO TERMODINAMICO ADJUNTO

### 6.1 El Concepto del Operador Adjunto en el Espacio de Hilbert

Consideremos un espacio de Hilbert  $H$  de funciones reales  $\varphi(\mathbf{r})$  definidas en un dominio  $\Omega$  que tiene una norma finita

$$\|\varphi\| = \left\{ \int_{\Omega} |\varphi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} \right\}^{1/2} \quad (59)$$

Entonces el producto interno de cualesquiera dos funciones  $\varphi(\mathbf{r})$  y  $\psi(\mathbf{r})$  de  $H$  puede ser definida como

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (60)$$

Obviamente,  $\|\varphi\| = \langle \varphi, \varphi \rangle^{1/2}$ .

Sea  $A$  un operador lineal con dominio  $D(A)$ , i.e., el resultado  $A\varphi(\mathbf{r})$  está determinado en  $H$  para cualquier función  $\varphi(\mathbf{r})$  de  $D(A)$ . Entonces el operador adjunto  $A^*$  puede ser definido por la identidad de Lagrange (Kato 1966),

$$\langle A\varphi, g \rangle = \langle \varphi, A^*g \rangle \quad (61)$$

la cual se cumple para cualquier  $\varphi(\mathbf{r})$  de  $D(A)$  y cualquier función  $g(\mathbf{r})$  de un dominio  $D(A^*)$  del operador adjunto  $A^*$ . Consideremos ahora 4 ejemplos simples de operador adjunto en varios espacios de Hilbert  $H$ . Operadores en los ejemplos 1, 3 y 4 son partes del operador del

modelo termodinámico (4) y por lo tanto elucidan la formulación del modelo adjunto continuo. El ejemplo 2 es útil al implementar un modelo adjunto numérico.

**Ejemplo 1. Operador auto-adjunto.**

Sea  $H$  un espacio de funciones cuadrado integrables  $\varphi(\mathbf{r})$  definida en  $\Omega$  con producto interno (59), y  $A\varphi(\mathbf{r}) = \gamma\varphi(\mathbf{r})$  donde  $\gamma = \text{Const}$ . Obviamente, el dominio  $D(A)$  coincide con  $H$ , y  $A$  está acotada:  $\|A\| = \gamma$  (ver Kato, 1966). Luego debido a (60),

$$\langle A\varphi, g \rangle = \int_{\Omega} [\gamma\varphi(\mathbf{r})] g(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{r}) [\gamma g(\mathbf{r})] d\mathbf{r} = \langle \varphi, A^*g \rangle \quad (62)$$

Así debido a (61)  $A$  es auto-adjunto, i.e.,  $A^*g(\mathbf{r}) = \gamma g(\mathbf{r})$ , y  $D(A^*) = D(A)$ .

**Ejemplo 2. La matriz adjunta.**

Sea  $H$  un espacio vectorial real Euclidiano  $n$ -D, y  $A$  una matriz  $n \times n$ . Nosotros definimos por  $\langle \vec{\varphi}, \vec{g} \rangle = \vec{g}^T \vec{\varphi}$  el producto interno de los vectores  $\vec{\varphi}$  y  $\vec{g}$  en  $H$  donde  $\vec{g}^T$  es la transpuesta. Entonces

$$\langle A\vec{\varphi}, \vec{g} \rangle = \vec{g}^T A\vec{\varphi} = (\vec{g}^T A)\vec{\varphi} = (A^T \vec{g})^T \vec{\varphi} = \langle \vec{\varphi}, A^T \vec{g} \rangle \quad (63)$$

y, debido a (61),  $A^* = A^T$ . Así el adjunto de  $A$  es propiamente la transpuesta de  $A$ . En particular,  $A^* = A$  si  $A$  es simétrico, y  $A^* = -A$  si  $A$  simétrico sesgado (Zare, 1995).

**Ejemplo 3. Operador de advección simétrico sesgado.**

Sea  $H$  un espacio de funciones reales periódicas cuadrado integrables  $\varphi(x)$  en el intervalo  $[a, b]$  con el producto interno

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx \quad (64)$$

y la norma

$$\|\varphi\| = \langle \varphi, \varphi \rangle^{1/2} \quad (65)$$

Consideremos el más simple operador de advección

$$A\varphi(x) = \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) \quad (66)$$

en el dominio  $D(A)$  de todas las funciones periódicas continuamente diferenciables:  $\varphi(b) = \varphi(a)$ . Puesto que  $D(A)$  es una parte de  $H$ ,  $A$  no está limitada, y por (64),

$$\begin{aligned} \langle A\varphi, g \rangle &= \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) g(x) dx = \varphi(b)g(b) - \varphi(a)g(a) \\ &+ \int_a^b \varphi(x) \left[ -\frac{\partial g}{\partial x}(x) \right] dx \end{aligned} \quad (67)$$

Estamos ahora en una buena posición para explicar el papel de las condiciones de frontera en la definición del operador adjunto. En realidad, si  $D(A^*) = D(A)$ , i.e.,  $D(A^*)$  es también el conjunto de funciones periódicas continuamente diferenciales en  $[a, b]$  entonces

$$\langle A\varphi, g \rangle = \int_a^b \varphi(x) \left[ \frac{\partial g(x)}{\partial x} \right] dx \quad (68)$$

y por (61), A es simétrico sesgado ( $A^* = -A$ ):

$$A^* g = -\frac{\partial g}{\partial x} \quad (69)$$

La fórmula (68) es válida también si  $D(A^*)$  es un conjunto de todas las funciones continuamente diferenciables  $g(x)$  en  $[a, b]$  tales que  $g(b) = 0$  y  $g(a) = 0$ . Sin embargo el dominio  $D(A^*)$  del adjunto  $A^*$  es ahora más estrecho. Así aunque dos operadores adjuntos tienen la misma estructura (68), son diferentes, ya que sus dominios  $D(A^*)$  no coinciden uno con otro.

Por último, suponga que  $D(A)$  es un conjunto de funciones continuamente diferenciables  $\varphi(x)$  tales que  $\varphi(a) = c$ ,  $\varphi(b) = d$ ,  $c \neq d$ . Entonces  $A^* = -A$  sólo si  $D(A^*)$  consiste de funciones continuamente diferenciables  $g(x)$  tales que  $g(a) = d$  y  $g(b) = c$ . En este caso,  $\varphi$  y  $g$  tienen diferentes condiciones de frontera, y  $D(A^*)$  y  $D(A)$  difieren una de otra. Así que el adjunto  $A^*$  está definido no solamente por su estructura formal (69), sino también por su dominio  $D(A^*)$  y condiciones de frontera. Este hecho es tomado en cuenta en la construcción del operador del modelo adjunto en cuenca oceánica abierta (ver condiciones de frontera (79), (80)).

**Ejemplo 4.** Operador de difusión simétrica.

Sea  $H$  el mismo espacio que en el ejemplo 3, teniendo  $A$  la forma de operador de difusión (ver (4)):

$$A\varphi(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x) \quad (70)$$

además,  $D(A)$  contiene funciones continuamente diferenciables dos veces en  $[a, b]$  tales que

$$\varphi(a) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(b) = 0 \quad (71)$$

Luego

$$\langle A\varphi, g \rangle = -g(a) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a) - \varphi(b) \frac{\partial g}{\partial x}(b) + \int_a^b \varphi \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right] dx \quad (72)$$

para cualquier función continuamente diferenciable dos veces  $g(x)$ . Entonces

$$A^*g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \quad (73)$$

si

$$g(a) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial g}{\partial x}(b) = 0 \quad (74)$$

Así que  $D(A^*) = D(A)$ , y  $A$  es acotado y simétrico.

## 6.2 El modelo adjunto

Ahora formulemos el modelo termodinámico adjunto en cuencas oceánicas tanto cerradas como abiertas.

a) La cuenca cerrada  $\Omega$ . Entonces el operador  $A$  es definido por las fórmulas (4) y (6).

Usando (7) y la identidad de Lagrange (60) es fácil mostrar que

$$A^*g = -\nabla \cdot (Ug) - \mu \nabla^2 g + \gamma g \quad (75)$$

es el operador adjunto bajo la condición de frontera

$$\mu \frac{\partial g}{\partial n} = 0 \quad \text{en } S \quad (76)$$

Debido a (8),  $A^*$  puede ser escrito como

$$A^*g = -U \cdot \nabla g - \mu \nabla^2 g + \gamma g \quad (77)$$

Ya que  $D(A^*) = D(A)$ , podemos poner  $\varphi = g$  en (61), y obtener

$$\langle g, A^*g \rangle = \langle Ag, g \rangle \quad (78)$$

Así, si  $A$  es positivo definido o simétrico sesgado ( $\gamma = \mu$ ,  $U_n = 0$  sobre  $S$ ) entonces es el adjunto  $A^*$ .

b) La cuenca abierta  $\Omega$ . La aplicación de la identidad (61) al operador del modelo (4), (28) y (29), resulta en el hecho de que el operador adjunto  $A^*$  recupera la forma (75) o (77) si

cualquier función  $g(r)$  de  $D(A^*)$  satisface las siguientes condiciones de frontera (ver Skiba, 1993):

$$\mu \frac{\partial g}{\partial n} = 0 \quad \text{en } S^+ \quad (79)$$

$$\mu \frac{\partial g}{\partial n} + U_n g = 0 \quad \text{en } S^- \quad (80)$$

Puesto que  $D(A^*)$  no coincide con  $D(A)$ , la identidad (78) no puede ser usada en este caso para probar la cualidad de positivo definido del operador adjunto  $A^*$ . Sin embargo, calculando directamente el producto escalar (60) de  $g$  y  $A^*g$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \langle g, A^*g \rangle &= \mu \int_{\Omega} |\nabla g|^2 dr + \gamma \int_{\Omega} g^2 dr \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \int_{S^+} U_n g^2 dS - \int_{S^-} U_n g^2 dS \right\} \end{aligned} \quad (81)$$

Las condiciones de frontera (79) y (80) han sido usadas aquí. Ya que  $U_n \geq 0$  en  $S^+$ , y  $U_n < 0$  en  $S^-$ , el adjunto  $A^*$  es positivo definido. Éste es simétrico sesgado solamente si  $\gamma = \mu = 0$  y  $U_n = 0$  sobre  $S$ .

Como el modelo termodinámico adjunto en el dominio  $\Omega$  e intervalo de tiempo  $(0, \bar{t})$  consideremos la ecuación

$$-\frac{\partial g}{\partial t} + A^*g = R \quad (82)$$

El forzamiento adjunto  $R$  será definido más tarde. Como las condiciones de frontera para el modelo adjunto tomemos (76) si  $\Omega$  es una cuenca oceánica cerrada, y (79), (80) si  $\Omega$  es abierta. Ya que  $A^* > 0$ , tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \|g\| > 0 \quad (83)$$

si el forzamiento adjunto  $R$  es cero. De aquí que el modelo termodinámico adjunto está bien propuesto o de acuerdo con Hadamard solamente si se resuelve hacia atrás en el tiempo: desde  $t = \bar{t}$  a  $t = 0$ . Por lo tanto la condición inicial para la Ec. (82) es puesta en el momento  $t = \bar{t}$ :

$$g(\mathbf{r}, \bar{t}) = Z(\mathbf{r}) \text{ en } t = \bar{t} \quad (84)$$

Denotemos  $t' = \bar{t} - t$ . Luego

$$\frac{\partial g}{\partial t'} = - \frac{\partial g}{\partial t} \quad (85)$$

y (82) puede ser escrita como

$$\frac{\partial g}{\partial t'} + A^* g = R \quad (86)$$

Se ve fácilmente que las estructuras formales (34) y (77) de los operadores adjunto y principal son diferentes sólo por el signo del vector corriente  $U$ . Estos vectores son directamente opuestos en los problemas principal y adjunto ya que el problema adjunto es resuelto hacia atrás en el tiempo. Por lo tanto, las fronteras inflow y outflow  $S^-$  y  $S^+$  del

modelo principal (4), (28), (29) llegan a ser, respectivamente, las fronteras outflow e inflow para el modelo adjunto (76), (79), (80). Esto explica el reemplazo de las condiciones de frontera (28), (29) por (79), (80), respectivamente.

Nótese que el modelo adjunto es una herramienta matemática conveniente usada para resolver algunos problemas físicos. Además, la elección del forzamiento  $R(r, t)$  y la condición inicial  $Z(r)$  para el modelo adjunto está determinada por el propósito de investigación concreto. Uno de tales problemas, el estudio de sensibilidad del modelo, será considerado en la siguiente sección. La interpretación física y matemática de la solución adjunta será dada también.

### 6.3 Estudio de Sensibilidad Adjunto

Consideremos el modelo de cuenca abierta (3), (28) (o (30)), (29) con condiciones iniciales (5). Supongamos que tenemos el estudio de la respuesta del modelo a variaciones en las anomalías iniciales  $T^0(r)$  y las anomalías de forzamiento  $f(r, t)$  dentro de un intervalo de tiempo  $(0, \bar{t})$ . Consideremos y comparemos dos diferentes aproximaciones al problema.

### 1) El método directo

Suponga que hay un conjunto de varias anomalías de temperatura iniciales  $T_k^0(\mathbf{r})$  y anomalías de forzamiento  $f_k(\mathbf{r}, t)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). El método directo del estudio de sensibilidad del modelo consiste en resolver el modelo (3), (28), (29) dentro de  $(0, \bar{t})$  para cada  $k$ , y encontrar todas las soluciones  $N$   $T_k(\mathbf{r}, t)$ . Este camino da información comprensible acerca de cada solución de  $T_k$  en el dominio  $\Omega$  y el intervalo de tiempo  $(0, \bar{t})$ . Sin embargo, si el intervalo  $(0, \bar{t})$  y el número  $N$  de experimentos numéricos son muy grandes, este método es más que costoso a causa del considerable consumo de tiempo de cómputo. Es especialmente costoso para complicados modelos multidimensionales. En tales casos el método adjunto descrito a continuación puede ser usado como una alternativa más económica.

### 2) El método adjunto

Apliquemos la combinación estándar de las ecuaciones principal y adjunta (Marchuk, 1974) al modelo termodinámico de Adem. El producto interno (60) de la Ec. (3) con la solución  $g$  de la Ec. (82) da

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial t}, g \right\rangle + \langle AT, g \rangle = \langle f, g \rangle, \quad (87)$$

mientras el producto interno de (82) con la solución  $T$  de la Ec. (3) da

$$-\left\langle T, \frac{\partial g}{\partial t} \right\rangle + \langle T, A'g \rangle = \langle T, R \rangle \quad (88)$$

Substrayendo (88) de (87) y usando la identidad de Lagrange (61) obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle T, g \rangle = \langle f, g \rangle - \langle T, R \rangle \quad (89)$$

Si integramos (89) sobre el tiempo desde  $t = 0$  a  $t = \bar{t}$ , y tomando en cuenta (5) y (84) entonces

$$\langle T(\mathbf{r}, \bar{t}), Z(\mathbf{r}) \rangle - \langle T^*(\mathbf{r}), g(\mathbf{r}, 0) \rangle = \int_0^{\bar{t}} [\langle f, g \rangle - \langle T, R \rangle] dt \quad (90)$$

Definamos el valor

$$J_R(T) = \int_0^{\bar{t}} \langle T, R \rangle dt = \int_0^{\bar{t}} \int_{\Omega} R(\mathbf{r}, t) T(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} dt \quad (91)$$

como una característica de sensibilidad de la respuesta lineal del modelo termodinámico (4). Note que  $J_R(T)$  está completamente definido por la función  $R(\mathbf{r}, t)$ . La característica (91), puede ser calculada con el método de sensibilidad directa el cual requiere primero encontrar la solución  $T(\mathbf{r}, t)$ . Al mismo tiempo, (91) puede ser determinada por el método adjunto. En realidad, poniendo  $Z(\mathbf{r}) = 0$  en (84) eliminamos el primer término en (90), y obtenemos

$$J_R(T) = \int_{\Omega} g(\mathbf{r}, 0) T^*(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \int_0^{\bar{t}} \int_{\Omega} g(\mathbf{r}, t) f(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} dt \quad (92)$$

la cual es fundamental en el estudio de sensibilidad adjunta. Cualquiera de las fórmulas duales (91) y (92) puede ser usada para el estudio de la respuesta del modelo. Sin embargo, la principal ventaja de (92) radica en el hecho de que relaciona directamente la característica de sensibilidad del modelo  $J_R(T)$  con la condición inicial  $T^*(\mathbf{r})$  y el forzamiento  $f(\mathbf{r}, t)$  del modelo, además, la solución adjunta  $g(\mathbf{r}, t)$  aparece aquí como la función de peso (multiplicador) para  $T^*(\mathbf{r})$  y  $f(\mathbf{r}, t)$ . A diferencia de (91) que involucra la solución del modelo termodinámico, la fórmula (92) usa la solución del modelo termodinámico adjunto. Puesto que (92) puede ser escrito en la forma

$$J_R(T) = \langle g(\mathbf{r}, 0), T^*(\mathbf{r}) \rangle + \int_0^{\bar{t}} \langle g(\mathbf{r}, t) f(\mathbf{r}, t) \rangle dt \quad (93)$$

(ver (60)), la respuesta del modelo  $J_R(T)$  es insensible a cualquier anomalía de temperatura inicial  $T^0(\mathbf{r})$  cuya estructura espacial es ortogonal a  $g(\mathbf{r}, 0)$  en el sentido del producto interno (59). Este es el caso, por ejemplo si las regiones de valores no cero  $g(\mathbf{r}, 0)$  y  $T^0(\mathbf{r})$  en  $\Omega$  tiene intersección vacía. En modo similar la sensibilidad de  $J_R(T)$  a la anomalía de forzamiento  $f(\mathbf{r}, t)$  en cualquier subintervalo  $(t_1, t_2)$  de  $(0, T)$  depende de la proyección de  $f(\mathbf{r}, t)$  en  $g(\mathbf{r}, t)$  dentro de este subintervalo. En particular, estas respuestas pueden ser significantes si las posiciones de los máximos locales de  $g(\mathbf{r}, 0)$  y  $g(\mathbf{r}, t)$  coinciden con la posición de los máximos locales de  $T^0(\mathbf{r})$  y  $f(\mathbf{r}, t)$ , respectivamente. Puesto que una característica fija (91) no puede ser sensible a cualquier  $T^0(\mathbf{r})$  y  $f(\mathbf{r}, t)$ , unas pocas de tales características (para varios  $R(\mathbf{r}, t)$ ) son generalmente escogidas en el estudio de sensibilidad adjunta del modelo.

Así que la solución adjunta  $g(\mathbf{r}, t)$  puede ser interpretada como una función de influencia la cual da cierta información acerca de la estructura espacial y temporal del forzamiento y las anomalías de temperatura inicial responsables del valor de  $J_R(T)$ . En realidad, los dominios donde la función de influencia  $g(\mathbf{r}, t)$  tiene máximos locales, las anomalías  $T^0(\mathbf{r})$  y  $f(\mathbf{r}, t)$  son especialmente importantes, puesto que pueden contribuir significativamente a la característica (92).

Asuma que queremos analizar la respuesta lineal del modelo en  $M$  subdominios  $\Omega_i \subset \Omega$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) dentro de un intervalo de tiempo  $(\bar{t} - \Delta t, \bar{t})$  de la longitud  $\Delta t$ . Con este fin, introducimos  $M$  funciones

$$R_i(\mathbf{r}, t) = p_i(\mathbf{r}) q(t) \quad (94)$$

con funciones no negativas  $p_i(\mathbf{r})$  y  $q(t)$  tales que

$$\int_{\Omega_i} p_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1 \quad (95)$$

por cada  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ), y

$$\int_{\bar{t}-\Delta t}^{\bar{t}} q(t) dt = 1 \quad (96)$$

En particular,  $p_i(\mathbf{r})$  y  $q(t)$  pueden tomarse como en Marchuk y Skiba (1976):

$$p_i(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{mes \Omega_i}, & , \text{ si } \mathbf{r} \in \Omega_i \\ 0, & , \text{ en otro caso} \end{cases} \quad (97)$$

y

$$p_i(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{mes \Omega_i}, & , \text{ si } t \in (\bar{t} - \Delta t, \bar{t}) \\ 0, & , \text{ en otro caso} \end{cases} \quad (98)$$

donde  $mes \Omega_i$  es el área de  $\Omega_i$ , y  $\in$  denota la pertenencia a un conjunto. Los valores de  $t$  y  $\Delta t$  así como también la forma y localización de  $\Omega_i$  están determinadas por el propósito del estudio. Bajo las suposiciones (94)-(98), cada característica de sensibilidad

$$J_i(\mathbf{T}) = J_{R_i}(\mathbf{T}) = \frac{1}{\Delta t mes \Omega_i} \int_{\bar{t}-\Delta t}^{\bar{t}} \int_{\Omega_i} T(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} dt \quad (99)$$

( $i = 1, 2, \dots, M$ ) es la anomalía de SST promediada sobre el dominio  $\Omega_i$  e intervalo de tiempo ( $\bar{t} - \Delta t, \bar{t}$ ), y puede ser calculado tan pronto como la solución  $T(\mathbf{r}, t)$  de la ecuación (3) sea encontrada. Al mismo tiempo, (99) puede también ser calculado usando la fórmula dual (92):

$$J_i(\mathbf{T}) = \langle g_i(\mathbf{r}, 0), T(\mathbf{r}) \rangle + \int_0^{\bar{t}} \langle g_i(\mathbf{r}, 0), f(\mathbf{r}, 0) \rangle dt \quad (100)$$

Para este fin, para cada  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ), la solución adjunta  $g_i(\mathbf{r}, t)$  debe ser encontrada con la condición inicial cero (84) y forzamiento (94) La fórmula (100) puede ser usada repetidamente para calcular la característica  $J_i(\mathbf{T})$  para varios pares de pequeña anomalía de temperatura inicial  $T^0_k(\mathbf{r})$  y pequeño forzamiento anómalo  $f_k(\mathbf{r}, t)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ).

La principal ventaja del método directo del estudio de sensibilidad del modelo es la posibilidad de usar, junto con las características lineales (99), cualquier característica no-

lineal. Sin embargo si el número N de pares  $\{T^{\circ}_k(\mathbf{r}), f_k(\mathbf{r}, t)\}$  es suficientemente grande entonces el método directo llega a ser más bien costoso (en consumo de tiempo), ya que el modelo termodinámico tiene que ser resuelto N veces (para cada k). En esta conexión, dondequiera que el número M de características de sensibilidad (99) es considerablemente menor que N, el estudio de sensibilidad del modelo adjunto es más económico, puesto que requiere resolver solamente M problemas adjuntos antes de usar las fórmulas simples (100).

Ya que el operador  $A^{\circ}$  del problema adjunto es positivo definido para ambos tipos de cuencas oceánicas (ver (77), (79) y (80)), la solución adjunta es estimada en la norma (59) por

$$\|g(\mathbf{r}, t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{\text{mes } \Omega_i}} \quad (101)$$

Si el forzamiento adjunto es definido por (94), (97)-(98) entonces, debido a (100),

$$|J_i(T)| \leq \frac{1}{\sqrt{\text{mes } \Omega_i}} \left( \|T^{\circ}(\mathbf{r})\| + \int_0^t \|f(\mathbf{r}, t)\| dt \right) \quad (102)$$

Así la respuesta del modelo (100) depende del tamaño de  $\Omega_i$ : entre menor es  $\text{mes } \Omega_i$ , más fuerte puede ser la respuesta del modelo.

Una vez más, insistimos en que el modelo termodinámico adjunto no es bien propuesto en el sentido de Hadamard si  $A^{\circ}$  no es positivo semidefinido. En este caso, las funciones propias correspondientes a los valores propios con parte real negativa forman la variedad inestable. En realidad, una proyección no cero del forzamiento adjunto (94) sobre tal variedad causará el crecimiento exponencial de la solución adjunta  $g_i(\mathbf{r}, t)$  con  $t' = \bar{t} - t$ . Por lo tanto, debido a (100), el estudio de sensibilidad adjunta para anomalías pequeñas  $T^{\circ}(\mathbf{r})$  y  $f(\mathbf{r}, t)$  puede llegar a ser problemático. Este caso sugiere una investigación posterior la cual debería incluir pasos tales como (Skiba, et. al. 1996):

- a) llevar a cabo el estudio de sensibilidad del modelo separadamente para las anomalías  $T^{\circ}(\mathbf{r})$  y  $f(\mathbf{r}, t)$  de los variedades invariantes estables e inestables;

- b) búsqueda de las características de sensibilidad apropiadas y un conveniente intervalo de tiempo  $(0, \bar{t})$ ;
- c) formulación de los problemas adjuntos separadamente para las variedades estable e inestable

#### 6.4 Importancia de las condiciones de frontera

Analicemos ahora el papel de las condiciones de frontera en la respuesta lineal del modelo termodinámico de Adem, y generalicemos la fórmula de sensibilidad (92) al caso cuando hay también flujo de calor anómalo en la frontera inflow  $S^-$  de la cuenca oceánica abierta  $\Omega$ . Para este fin, supongamos que la condición de frontera (30) tiene la forma

$$\mu \frac{\partial T}{\partial n} + U_n T = q \quad \text{en } S^- \quad (103)$$

mientras la condición (29) es invariable. Aquí  $q(\mathbf{r}, t)$  es un flujo de calor anómalo conocido a través de  $S^-$ . Luego la fórmula de sensibilidad (92) es generalizada a

$$J_n(T) = \int_{\Omega} g(\mathbf{r}, 0) T^*(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \int_0^i \int_{\Omega} g(\mathbf{r}, t) f(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} dt + \int_0^i \int_{S^-} g(\mathbf{r}, t) q(\mathbf{r}, t) dS dt \quad (104)$$

lo cual toma en cuenta no solamente la anomalía de temperatura inicial  $T^*(\mathbf{r})$  y la anomalía de forzamiento de calor  $f(\mathbf{r}, t)$ , sino también el flujo de calor anómalo  $q(\mathbf{r}, t)$  a través de la frontera  $S^-$ .

## 7. MODELO TERMODINAMICO NUMERICO ADJUNTO

### 7.1 Aproximación de diferencias finitas del operador del modelo

Los operadores  $A$  y  $A^*$  de los modelos termodinámicos principal y adjunto pueden ser escritos como

$$A = A_1 + A_2, \quad A^* = A_1^* + A_2^* \quad (105)$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  están definidas por (36) y (37), y

$$A_1^* g = -\frac{1}{2a \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} (u g) + u \frac{\partial g}{\partial \lambda} \right] - \frac{\mu}{a^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2} + \frac{\gamma}{2} g \quad (106)$$

y

$$A_2^* g = -\frac{1}{2a \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (v g \sin \vartheta) + v \sin \vartheta \frac{\partial g}{\partial \vartheta} \right] - \frac{\mu}{a^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial g}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\gamma}{2} g \quad (107)$$

Los operadores (36), (37) y (106), (109) son positivos definidos si al menos una de las siguientes tres condiciones se satisface (Skiba, 1993; Skiba y Adem, 1995):  $\mu > 0$ ,  $\gamma > 0$  o  $U_n \neq 0$  en la frontera de la cuenca. Si  $\mu = 0$ ,  $\gamma = 0$  y  $U_n = 0$  entonces cada operador de estos es simétrico sesgado.

Usaremos las mismas mallas regulares desplazadas que en Skiba y Adem (1995) con constantes tamaños de malla  $\Delta \lambda$  y  $\Delta \vartheta$  a lo largo de los ejes  $\lambda$  y  $\vartheta$  respectivamente (Fig. 5). La aproximación en diferencias finitas  $A_1^h$  y  $A_2^h$  de los operadores 1-D,  $A_1$  y  $A_2$  están dados por (45) y (46).

Los operadores adjuntos  $A_i^*$  son aproximados por las matrices  $(A_i^*)^h$  definidas como

$$\left\{ (A_1^*)^h g \right\}_y = -\frac{1}{2a\Delta\lambda \sin\vartheta_j} \{u_{i+1,j} g_{i+1,j} - u_{ij} g_{i-1,j}\} - \frac{\mu}{a^2 \Delta\lambda^2 \sin^2\vartheta_j} \{g_{i+1,j} - 2g_{ij} + g_{i-1,j}\} + \frac{\gamma}{2} g_y \quad (108)$$

y

$$\left\{ (A_2^*)^h g \right\}_y = -\frac{v_{i,j+1} \sin\vartheta_{i,j+1} - v_{ij} \sin\vartheta_{i,j}}{2a\Delta\vartheta \sin\vartheta_j} \frac{g_{i,j+1} - g_{i,j-1}}{\sin\vartheta_j} - \frac{\mu \{ \sin\vartheta_{i,j+1} (g_{i,j+1} - g_{ij}) - \sin\vartheta_{i,j} (g_{ij} - g_{i,j-1}) \}}{a^2 \Delta\vartheta^2 \sin\vartheta_j} + \frac{\gamma}{2} g_y \quad (109)$$

Obviamente hay generalmente una diferencia entre el operador adjunto discretizado  $(A_1^*)^h$  y el adjunto  $(A_1^*)^*$  del operador discretizado  $A_1^*$ . Sin embargo la aproximación a las condiciones de frontera dada en la siguiente sección lleva a:

**Proposición 1** (Skiba et al., 1996). La igualdad

$$(A_1^*)^h = (A_1^*)^* \quad (110)$$

es válida para cualquier cuenca oceánica, ya sea cerrada o abierta.

La igualdad (110) significa que los operadores de los problemas discretos principal y adjunto satisfacen la identidad de Lagrange (61) (ver (114) más adelante).

## 7.2 Aproximación de las condiciones de frontera

Aproximemos ahora las condiciones de frontera (28), (29) y (79) (80). Supongamos que la frontera oceánica  $S$  consiste solamente de segmentos tales que son paralelos a cualquiera de las líneas  $\lambda = \text{Const}$  o a las líneas  $\vartheta = \text{Const}$  (Fig. 6). Por lo tanto en cada nodo de frontera, la componente normal  $U_n$  del vector velocidad  $U$  coincide ya sea con  $\pm u_{ij}$  o con  $\pm v_{ij}$ , mientras que el vector normal  $n$  a  $S$  está siempre dirigido a lo largo de los ejes  $\lambda$  o  $\vartheta$ .

Como un resultado no tenemos ninguna dificultad con la implementación de las condiciones de frontera para los operadores split 1-D (36), (37) y (106), (107).

Puesto que la aproximación en diferencias finitas de las condiciones de frontera para los problemas de split principales es descrita en Skiba y Adem (1995), demostramos la aproximación de la condición de frontera solamente en un nodo de frontera simple para los operadores split principal y adjunto (36) y (106).

Sea una línea  $\vartheta_j = \text{Const.}$  que cruza el dominio oceánico, y sea  $L = (\lambda_L - \Delta\lambda/2, \vartheta_j)$  el punto de frontera izquierdo sobre esta línea. Sea  $\mu(L) > 0$ . Entonces  $L$  pertenece a  $S^-$  (Fig. 3), la componente normal  $U_n(L)$  en  $L$  es negativa y coincide con  $-u_{L,j}$ . Denotemos como  $T_{L,j}$  la anomalía de SST en el primer nodo interno  $(\lambda_L, \vartheta_j)$  adyacente a  $L$ . En el punto  $L$ , el vector normal  $\mathbf{n}$  a  $S$  está dirigido de  $(\lambda_L, \vartheta_j)$  al punto externo  $(\lambda_{L-1}, \vartheta_j)$  de la malla del dominio del océano, y la derivada  $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}(L)$  es aproximada por  $(T_{L-1,j} - T_{L,j})/(\alpha\Delta\lambda \sin\vartheta_j)$ . Entonces la condición de frontera (28) es aproximada como

$$\frac{\mu}{\alpha\Delta\lambda \sin\vartheta_j} (T_{L-1,j} - T_{L,j}) + \frac{1}{2} u_{L,j} (T_{L-1,j} + T_{L,j}) = 0 \quad (111)$$

mientras que la condición de frontera del problema adjunto (79) en  $L$  es aproximada como

$$\mu \frac{g_{L-1,j} - g_{L,j}}{\Delta\lambda} = 0 \quad \text{o} \quad g_{L-1,j} = g_{L,j} \quad (112)$$

Las condiciones de frontera en cualquier nodo de  $S^+$  así como también las condiciones de frontera para los operadores split (37) y (107) son obtenidas en analogía perfecta a ésta (ver también Skiba y Adem, 1995).

Introduzcamos el producto interior en el espacio vectorial dimensional finito de la función de malla como

$$\langle \bar{T}, \bar{g} \rangle_n = \alpha^2 \Delta\lambda \Delta\vartheta \sum_{i,j} T_{i,j} g_{i,j} \sin\vartheta_j \quad (113)$$

donde la suma es tomada sobre todos los intervalos de nodos de la malla del dominio del océano  $\Omega$ . Luego es fácil checar usando las condiciones de frontera del tipo de (111) y (112) que los operadores de las diferencias finitas (45) y (108) así como (46) y (109) satisfacen la identidad de Lagrange discreta:

$$\langle A_i^h \bar{T}, \bar{g} \rangle_h = \langle \bar{T}, (A_i^h)^* \bar{g} \rangle_h \quad (114)$$

( $i = 1, 2$ ), y de ahí, la Proposición 1 (ver (110)) es válida. Más aún, cualquier operador discreto  $A_i^h$  o  $(A_i^h)^*$  es positivo definido en presencia de disipación ( $\mu > 0$  o  $\gamma > 0$ ), y/o cuando  $U_n \neq 0$  en la frontera  $S$  (ver (81)):

$$\langle A_i^h \bar{T}, \bar{T} \rangle_h > 0, \quad \langle \bar{g}, (A_i^h)^* \bar{g} \rangle_h > 0 \quad (115)$$

Si ambos  $\mu = 0$ ,  $\gamma = 0$  y  $U_n = 0$  en  $S$  entonces los operadores (110)-(113) son simétricos sesgados:

$$\langle A_i^h \bar{T}, \bar{T} \rangle_h = 0, \quad \langle \bar{g}, (A_i^h)^* \bar{g} \rangle_h = 0 \quad (116)$$

Así los operadores discretos (45), (46) y (108), (109) conservan las principales propiedades de los operadores diferenciales correspondientes (36), (37) y (106), (107).

### 7.3 Método de Separación, Partición o Fraccionamiento

Las ecuaciones (3) y (82) discretizadas en el espacio pueden ser escritas como

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + (A_1^h + A_2^h) \bar{T} = \bar{F} \quad (117)$$

y

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial t} + \left\{ (A_1^h)^* + (A_2^h)^* \right\} \bar{g} = \bar{R} \quad (118)$$

donde  $A_i^h$  y  $(A_i^h)^*$  son definidos por (110)-(113), (45), (46) y (108), (109) respectivamente y los vectores columna  $\bar{T}(t)$  o  $\bar{F}(t)$ ,  $\bar{g}(t)$  y  $\bar{R}(t)$  tienen como sus componentes los valores  $T_{ij}(t)$ ,  $f_{ij}(t)$ ,  $g_{ij}(t)$  y  $R_{ij}(t)$  de las funciones correspondientes en los nodos de malla (Fig. 3).

En la sección 7.2 discutimos la aproximación de las condiciones de frontera del modelo y mostramos que todas las matrices 1-D,  $A_i^h$  y  $(A_i^h)^*$  son positivas definidas ( $i = 1, 2$ ). Esta propiedad es de gran importancia para la construcción de esquemas de diferencias implícitas absolutamente estables económicos basados en el método de separación.

Puesto que los operadores  $A_1$  y  $A_2$  son dependientes del tiempo y no conmutan:  $A_1 A_2 \neq A_2 A_1$ , la versión simétrica del método de separación (Marchuk, 1975) es usado aquí para obtener un esquema de la aproximación a segundo orden en el tiempo dentro de cada intervalo de tiempo  $(t - \tau, t + \tau)$  (la elección de  $\tau$  es discutida en Skiba y Adem (1995)). El algoritmo simétrico en  $(t - \tau, t + \tau)$  para el modelo principal (117) consiste de los tres pasos sucesivos:

1) La ecuación

$$\frac{\partial \bar{T}_1}{\partial t} + A_1^h \bar{T}_1 = 0 \quad (119)$$

es resuelta en el intervalo  $(t - \tau, t)$  con la condición inicial  $\bar{T}_1(t - \tau) = \bar{T}(t - \tau)$  donde  $\bar{T}(t - \tau)$  es la solución de la Ec. (117) obtenida en el intervalo previo  $(t - 3\tau, t - \tau)$ .

2) La ecuación

$$\frac{\partial \bar{T}_2}{\partial t} + A_2^h \bar{T}_2 = 0 \quad (120)$$

es resuelta en el intervalo  $(t - \tau, t + \tau)$  con condición inicial  $\bar{T}_2(t - \tau) = \bar{T}_1(t)$ .

3) La ecuación

$$\frac{\partial \bar{T}_3}{\partial t} + A_1^* \bar{T}_3 = 0 \quad (121)$$

es resuelta en  $(t, t + \tau)$  con la condición inicial  $\bar{T}_3(t) = \bar{T}_2(t + \tau)$ . Entonces  $\bar{T}_3(t + \tau)$  aproxima la solución  $\bar{T}(t + \tau)$  de la ecuación sin separación (117), y es tomada como la condición inicial para resolver (117) en el siguiente intervalo  $(t + \tau, t + 3\tau)$ .

El algoritmo de fraccionamiento usado para resolver el modelo adjunto (118) en el mismo intervalo de tiempo  $(t - \tau, t + \tau)$  tiene una forma similar:

1) La ecuación

$$-\frac{\partial \bar{g}_3}{\partial t} + (A_1^*)^* \bar{g}_3 = 0 \quad (122)$$

es resuelta hacia atrás dentro de  $(t, t + \tau)$  con la condición inicial  $\bar{g}_3(t + \tau) = \bar{g}(t + \tau)$  donde  $\bar{g}(t + \tau)$  es la solución de la ecuación adjunta (118) en el momento  $t + \tau$  obtenida en el intervalo previo  $(t + \tau, t + 3\tau)$ .

2) La ecuación

$$-\frac{\partial \bar{g}_2}{\partial t} + (A_2^*)^* \bar{g}_2 = 0 \quad (123)$$

es resuelta hacia atrás en  $(t - \tau, t + \tau)$  con la condición inicial  $\bar{g}_2(t + \tau) = \bar{g}_3(t)$ .

3) La ecuación

$$-\frac{\partial \bar{g}_1}{\partial t} + (A_1^*)^* \bar{g}_1 = 0 \quad (124)$$

es resuelta hacia atrás dentro de  $(t - \tau, t)$  con la condición inicial  $\bar{g}_1(t) = \bar{g}_2(t - \tau)$ . Entonces  $\bar{g}_1(t - \tau)$  aproxima la solución adjunta  $\bar{g}(t - \tau)$  del problema de separación (118).

#### 7.4 Esquemas Compatibles Principal y Adjunto. Leyes de Conservación

Dividamos el intervalo de tiempo completo  $(0, \bar{t})$  en un conjunto de subintervalos iguales  $(t_n, t_{n+1})$  donde  $t_{n+1} = t_n + \tau$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_{N+1} = \bar{t}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ , y  $\tau$  es pequeño. Aplicando el algoritmo de fraccionamiento simétrico (119)-(121) y aproximando los problemas de fraccionamiento no estacionario 1-D con el esquema de Crank-Nicolson, obtenemos el siguiente esquema numérico implícito para el modelo termodinámico del océano de Adem:

$$\begin{aligned} \bar{T}\left[n - \frac{1}{2}\right] - \bar{T}[n-1] &= -\frac{\tau}{2} A_1^* \left( \bar{T}\left[n - \frac{1}{2}\right] + \bar{T}[n-1] \right) \\ \bar{T}\left[n + \frac{1}{2}\right] - \bar{T}\left[n - \frac{1}{2}\right] &= -\tau A_2^* \left( \bar{T}\left[n + \frac{1}{2}\right] + \bar{T}\left[n - \frac{1}{2}\right] \right) + 2\tau \bar{F}(n) \\ \bar{T}[n+1] - \bar{T}\left[n + \frac{1}{2}\right] &= -\frac{\tau}{2} A_1^* \left( \bar{T}[n+1] + \bar{T}\left[n + \frac{1}{2}\right] \right) \end{aligned} \quad (125)$$

donde  $\bar{T}[n-1]$ ,  $\bar{T}[n+1]$  y  $\bar{F}[n]$  son los vectores columna  $\bar{T}[t_{n-1}]$ ,  $\bar{T}[t_{n+1}]$  y  $\frac{1}{2} [\bar{F}(t_{n+1})] + \bar{F}(t_{n-1})$  respectivamente, mientras  $\bar{T}\left[n - \frac{1}{2}\right]$  y  $\bar{T}\left[n + \frac{1}{2}\right]$  teniendo la mismas dimensión que  $\bar{T}[n-1]$  son los vectores auxiliares del algoritmo de partición.

En el mismo intervalo de tiempo  $(t_{n-1}, t_{n+1})$ , el algoritmo (122)-(124) lleva al esquema del modelo termodinámico adjunto

$$\begin{aligned} \bar{g}\left[n+\frac{1}{2}\right]-\bar{g}[n+1] &= -\frac{\tau}{2}(A_1^*)' \left( \bar{g}\left[n+\frac{1}{2}\right] + \bar{g}[n+1] \right) \\ \bar{g}\left[n-\frac{1}{2}\right]-\bar{g}\left[n+\frac{1}{2}\right] &= -\tau(A_2^*)' \left( \bar{g}\left[n-\frac{1}{2}\right] + \bar{g}\left[n+\frac{1}{2}\right] \right) + 2\tau\bar{R}[n] \\ \bar{g}[n-1]-\bar{g}\left[n-\frac{1}{2}\right] &= -\frac{\tau}{2}(A_1^*)' \left( \bar{g}[n-1] + \bar{g}\left[n-\frac{1}{2}\right] \right) \end{aligned} \quad (126)$$

Suponga ahora que  $\bar{F}[n]$  y  $\bar{R}[n]$  son idénticamente cero. Si tomamos el producto interno (113) de la primera ecuación (125) con el vector  $\frac{1}{2}(\bar{T}\left[n-\frac{1}{2}\right]) + \bar{T}[n-1]$ , y usamos la desigualdad (115) entonces obtenemos

$$\|\bar{T}\left[n-\frac{1}{2}\right]\|_h < \|\bar{T}[n-1]\|_h \quad (127)$$

donde  $\|\bar{T}\|_h = \langle \bar{T}, \bar{T} \rangle_h^{1/2}$ . Un procedimiento similar como el aplicado al resto de las ecuaciones homogéneas ( $\bar{F}[n] = 0$ ,  $\bar{R}[n] = 0$ ) de los esquemas (125) y (126) resulta en las desigualdades

$$\|\bar{T}[n+1]\|_h < \|\bar{T}[n-1]\|_h \quad (128)$$

y

$$\|\bar{g}[n-1]\|_h < \|\bar{g}[n+1]\|_h \quad (129)$$

las cuales son válidas para cada  $n$ . Así los esquemas (125) y (126) son estables a cualesquiera errores iniciales sin importar la elección del paso de tiempo del esquema  $\tau$ , o absolutamente estable. Por lo tanto  $\tau$  debe ser elegido solamente por razones de obtener una buena aproximación de los problemas diferenciales no-separadas originales.

Tomemos ahora el producto interno (113) de cada una de las tres ecuaciones (125) con los vectores  $\frac{1}{2}(\bar{g}[n-\frac{1}{2}] + \bar{g}[n-1])$ ,  $\frac{1}{2}(\bar{g}[n+\frac{1}{2}] + \bar{g}[n-\frac{1}{2}])$  y  $\frac{1}{2}(\bar{g}[n+1] + \bar{g}[n+\frac{1}{2}])$  respectivamente. Similarmente, tomemos el producto interno de los vectores  $\frac{1}{2}(\bar{T}[n+\frac{1}{2}] + \bar{T}[n+1])$ ,  $\frac{1}{2}(\bar{T}[n+\frac{1}{2}] + \bar{T}[n-\frac{1}{2}])$  y  $\frac{1}{2}(\bar{T}[n-1] + \bar{T}[n-\frac{1}{2}])$  con la primera, segunda y tercera ecuación del sistema (126) respectivamente. Entonces la identidad de Lagrange (114) lleva a la fórmula

$$\begin{aligned}
 & \langle \bar{T}[n+1], \bar{g}[n+1] \rangle_n - \langle \bar{T}[n-1], \bar{g}[n-1] \rangle_n \\
 & = 2\tau \langle \bar{F}[n], \frac{1}{2}(\bar{g}[n+\frac{1}{2}] + \bar{g}[n-\frac{1}{2}]) \rangle_n \\
 & \quad - 2\tau \langle \frac{1}{2}(\bar{T}[n+\frac{1}{2}] + \bar{T}[n-\frac{1}{2}]), \bar{R}[n] \rangle_n, \quad (130)
 \end{aligned}$$

la cual es la aproximación de diferencias a segundo orden de la identidad (90) escrita para un pequeño intervalo de tiempo ( $t - \tau$ ,  $t + \tau$ ). Así que los esquemas numéricos principal y adjunto son no solamente estables, sino también balanceados y, debido a la proposición 1, compatibles entre ellos mismos.

Bajo las condiciones (116), y dado que  $\bar{F}[n] = 0$  y  $\bar{R}[n] = 0$ , cada uno de los esquemas (125) y (126) tiene dos leyes de conservación. La primera ley es:

$$\|\bar{T}[n+1]\|_n = \|\bar{T}[n-1]\|_n, \quad (131)$$

y

$$\|\bar{g}[n-1]\|_n = \|\bar{g}[n+1]\|_n, \quad (132)$$

La segunda ley de conservación bajo las mismas condiciones establece que la anomalía de temperatura promedio y el valor solución adjunto promedio en el dominio de la red son constantes en el tiempo:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} T_{ij} \sin \vartheta_j &= \text{Const}, \\ \sum_{i,j} g_{ij} \sin \vartheta_j &= \text{Const} \end{aligned} \quad (133)$$

Cada ecuación de los esquemas (125) y (126) representa una ecuación simple de tres puntos que es fácilmente resuelta por el método de factorización (Skiba y Adem, 1995).

## 8. EXPERIMENTOS DE ESTUDIO DE SENSIBILIDAD

### 8.1 Leyes de Conservación

Sea  $\mu = 0$ ,  $\gamma = 0$ , y  $U_n = 0$  en S y la condición de frontera (111),

$$\frac{\mu}{a \Delta \lambda \sin^2 \vartheta_j} (T_{L-1,j} - T_{Lj}) + \frac{1}{2} \mu_{Lj} (T_{L-1,j} + T_{Lj}) = 0,$$

la condición de frontera del problema adjunto (112),

$$\mu \frac{g_{L-1j} - g_{Lj}}{\Delta \lambda} = 0 \quad \text{o} \quad g_{L-1j} = g_{Lj}$$

se cumple. Luego, debido a (110)  $(A^*)^h = (A^h)^*$ .

El producto interno en el espacio vectorial finito-dimensional de la función discretizada, está definido por (113):

$$\langle \bar{T}, \bar{g} \rangle_h = a^2 \Delta \lambda \Delta \vartheta \sum_{i,j} T_{ij} g_{ij} \sin \vartheta_j$$

Note que en este caso, así como los operadores discretos (45) y (46),

$$\begin{aligned}
(A_1^* T)_y &= \frac{1}{2a\Delta\lambda \sin \vartheta_j} \{u_{i+1,j} T_{i+1,j} - u_{ij} T_{i,j}\} \\
&\quad - \frac{\mu}{a^2 \Delta \lambda^2 \sin^2 \vartheta_j} \{T_{i+1,j} - 2T_{ij} + T_{i-1,j}\} + \frac{\gamma}{2} T_{ij} \\
(A_2^* T)_y &= \frac{v_{i,j+1} \sin \vartheta_+ T_{i,j+1} - v_{ij} \sin \vartheta_- T_{i,j-1}}{2a\Delta \vartheta \sin \vartheta_j} \\
&\quad - \frac{\mu \{ \sin \vartheta_+ (T_{i,j+1} - T_{ij}) - \sin \vartheta_- (T_{ij} - T_{i,j-1}) \}}{a^2 \Delta \vartheta^2 \sin \vartheta_j} + \frac{\gamma}{2} T_{ij}
\end{aligned}$$

y los operadores adjuntos (108) y (109),

$$\begin{aligned}
\{(A_1^*)^* g\}_y &= -\frac{1}{2a\Delta\lambda \sin \vartheta_j} \{u_{i+1,j} g_{i+1,j} - u_{ij} g_{i,j}\} \\
&\quad - \frac{\mu}{a^2 \Delta \lambda^2 \sin^2 \vartheta_j} \{g_{i+1,j} - 2g_{ij} + g_{i-1,j}\} + \frac{\gamma}{2} g_{ij} \\
\{(A_2^*)^* g\}_y &= -\frac{v_{i,j+1} \sin \vartheta_+ g_{i,j+1} - v_{ij} \sin \vartheta_- g_{i,j-1}}{2a\Delta \vartheta \sin \vartheta_j} \\
&\quad - \frac{\mu \{ \sin \vartheta_+ (g_{i,j+1} - g_{ij}) - \sin \vartheta_- (g_{ij} - g_{i,j-1}) \}}{a^2 \Delta \vartheta^2 \sin \vartheta_j} + \frac{\gamma}{2} g_{ij}
\end{aligned}$$

son simétricos sesgados conservando las propiedades principales de los operadores diferenciales correspondientes (36) y (37),

$$\begin{aligned}
A_1 T &= \frac{1}{2a \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} (uT) + u \frac{\partial T}{\partial \lambda} \right] - \frac{\mu}{a^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} T + \frac{\gamma}{2} T \\
A_2 T &= \frac{1}{2a \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (vT \sin \vartheta) + v \sin \vartheta \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \right] - \frac{\mu}{a^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\gamma}{2} T
\end{aligned}$$

y los operadores (106) y (107),

$$A_1^* \mathbf{g} = -\frac{1}{2a \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} (\mathbf{u} \mathbf{g}) + \dot{\mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \lambda} \right] - \frac{\mu}{a^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \lambda^2} + \frac{\gamma}{2} \mathbf{g}$$

$$A_2^* \mathbf{g} = -\frac{1}{2a \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\mathbf{v} \mathbf{g} \sin \vartheta) + \mathbf{v} \sin \vartheta \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \vartheta} \right] \\ - \frac{\mu}{a^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\gamma}{2} \mathbf{g} .$$

Así (ver 116))

$$\langle A_1^* \bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{T}} \rangle_h = 0, \quad \langle \bar{\mathbf{g}}, (A_1^*)^* \bar{\mathbf{g}} \rangle_h = 0$$

Por lo tanto si  $\bar{\mathbf{F}}[n] = 0$  y  $\bar{\mathbf{R}}[n] = 0$  luego ambos: el esquema numérico (125)

$$\bar{\mathbf{T}}\left[n - \frac{1}{2}\right] - \bar{\mathbf{T}}[n-1] = -\frac{\tau}{2} A_1^* \left( \bar{\mathbf{T}}\left[n - \frac{1}{2}\right] + \bar{\mathbf{T}}[n-1] \right)$$

$$\bar{\mathbf{T}}\left[n + \frac{1}{2}\right] - \bar{\mathbf{T}}\left[n - \frac{1}{2}\right] = -\tau A_2^* \left( \bar{\mathbf{T}}\left[n + \frac{1}{2}\right] + \bar{\mathbf{T}}\left[n - \frac{1}{2}\right] \right)$$

$$\bar{\mathbf{T}}[n+1] - \bar{\mathbf{T}}\left[n + \frac{1}{2}\right] = -\frac{\tau}{2} A_1^* \left( \bar{\mathbf{T}}[n+1] + \bar{\mathbf{T}}\left[n + \frac{1}{2}\right] \right)$$

y el esquema numérico adjunto, (126)

$$\bar{\mathbf{g}}\left[n + \frac{1}{2}\right] - \bar{\mathbf{g}}[n+1] = -\frac{\tau}{2} (A_1^*)^* \left( \bar{\mathbf{g}}\left[n + \frac{1}{2}\right] + \bar{\mathbf{g}}[n+1] \right)$$

$$\bar{\mathbf{g}}\left[n - \frac{1}{2}\right] - \bar{\mathbf{g}}\left[n + \frac{1}{2}\right] = -\tau (A_2^*)^* \left( \bar{\mathbf{g}}\left[n - \frac{1}{2}\right] + \bar{\mathbf{g}}\left[n + \frac{1}{2}\right] \right)$$

$$\bar{g}[n-1] - \bar{g}\left[n - \frac{1}{2}\right] = -\frac{\tau}{2}(A^{\dagger})^n \left( \bar{g}[n-1] + \bar{g}\left[n - \frac{1}{2}\right] \right)$$

tienen dos leyes de conservación, cada uno. La primera ley debido a, (131) y (132) es

$$\|\bar{T}[n+1]\|_h = \|\bar{T}[n-1]\|_h$$

$$\|\bar{g}[n-1]\|_h = \|\bar{g}[n+1]\|_h$$

La segunda ley de conservación (133) establece que la anomalía de temperatura promedio y el valor promedio de la solución adjunta en el dominio de la red son constantes en el tiempo:

$$\sum_{i,j} T_{ij} \sin \vartheta_j = \text{Const}, \quad \sum_{i,j} g_{ij} \sin \vartheta_j = \text{Const}.$$

**Experimento 1.** En las figuras (7) y (8) presentamos los primeros experimentos bajo las condiciones

$$u = 0, v = 0, T^*(\mathbf{r}, \bar{t}) = 1 \text{ (ver apéndice A)}, \mu = 0$$

Obtenemos que

$$\int_{\mathcal{V}} T(\mathbf{r}, t) d\mathbf{v} = \int_{\mathcal{V}} T^*(\mathbf{r}) d\mathbf{v}$$

$$\int_{\mathcal{V}} |T(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{v} = \int_{\mathcal{V}} |T^*(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{v}$$

donde el superíndice "o" denota valores iniciales. Este experimento demuestra que los operadores discretos (45), (46) y (108), (109) conservan las propiedades principales de los correspondientes operadores diferenciales (36), (37) y (106), (107), y después de correr los esquemas para 100 días.

CONSERVATION LAWS  
NUMERICAL EXPERIMENT  $V=0$  AND  $T \neq 0$

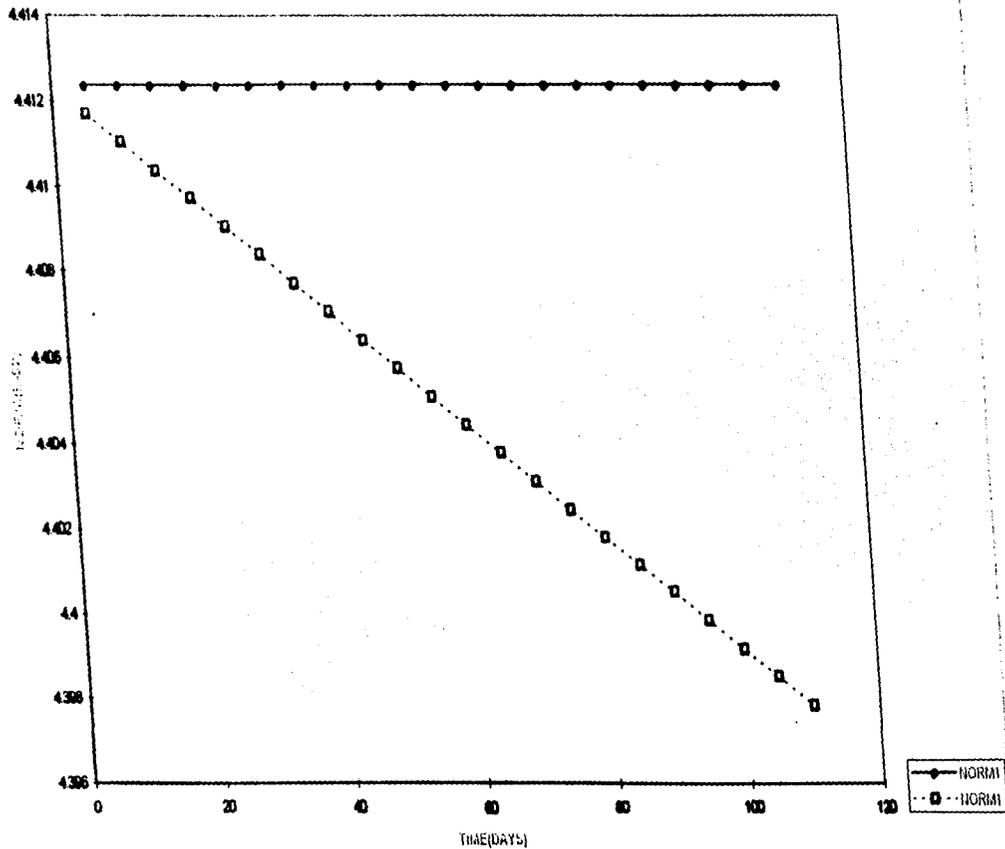


Fig. 7. Leyes de Conservación. Experimento Numérico con  $V = 0$  y  $T \neq 0$ , para Norma 1.

CONSERVATION LAWS  
NUMERICAL EXPERIMENT  $V=0$  AND  $T \neq 0$

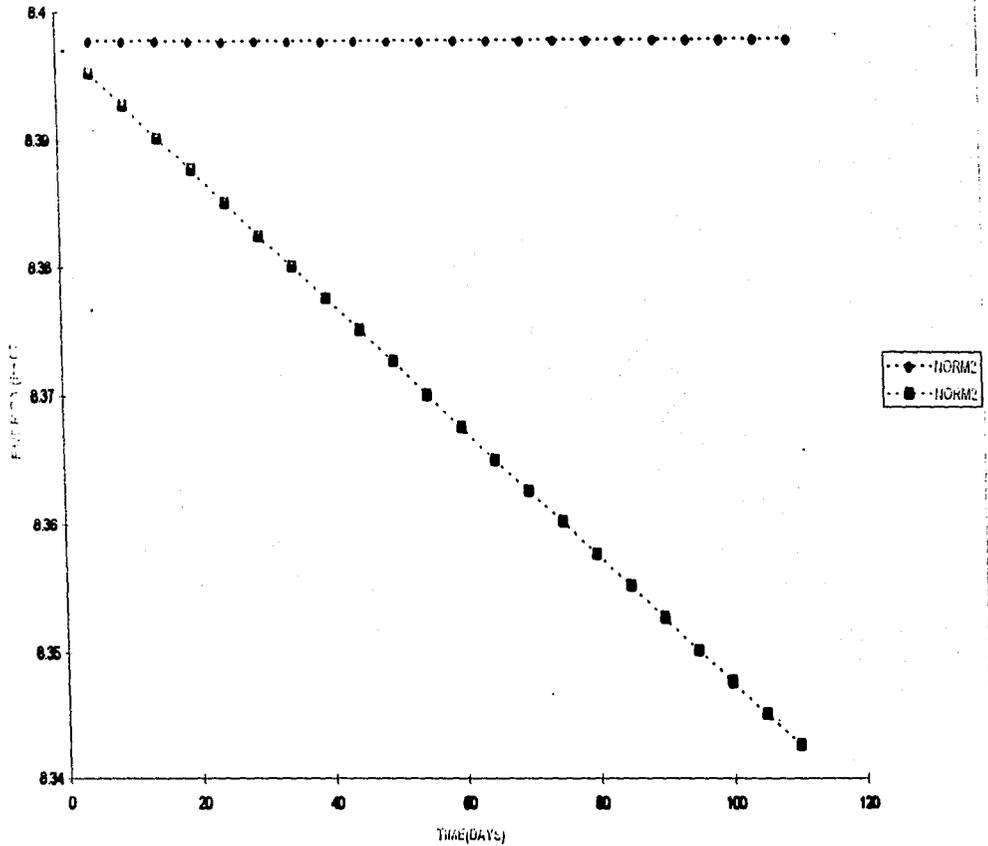


Fig. 8. Leyes de Conservación. Experimento Numérico con  $V=0$  y  $T \neq 0$ , para Norma 2.

Experimento 2. Este experimento fue realizado bajo las condiciones (Fig. 9)

$$u = 0, v = 0, T^*(r, \bar{t}) = 1, \mu = 5 \times 10^8 \text{ cm s}^{-2}$$

Como un resultado, obtenemos que

$$\int_V T(r, t) dv = \int_V T^*(r) dv$$

$$\int_V |T(r, t)|^2 dv < \int_V |T^*(r)|^2 dv$$

como debía de ser: solamente el valor solución promedio se conserva, y la norma  $L_2$  de la solución decrece a causa de la disipación ( $\mu > 0$ ).

## 8.2. Función Corriente Analítica

Con objeto de verificar los programas de computadora en el caso de corrientes oceánicas no-cero ( $U \neq 0$ ) en el dominio, introducimos la función corriente analítica

$$\psi = A \sin \frac{\pi}{L} x \sin \frac{\pi}{M} y$$

o, en la forma discreta

$$\psi_i = A \sin \frac{\pi}{L} x_i \sin \frac{\pi}{M} y_i,$$

donde  $L$ ,  $M$ , y  $A$  están mostradas en la Fig. (10).

Entonces los componentes de velocidad de flujo no divergente ( $\nabla \cdot U = 0$ ) están definidas por

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

En cada punto de malla  $(x_i, y_j)$  tenemos

DISSIPATIVE CASE

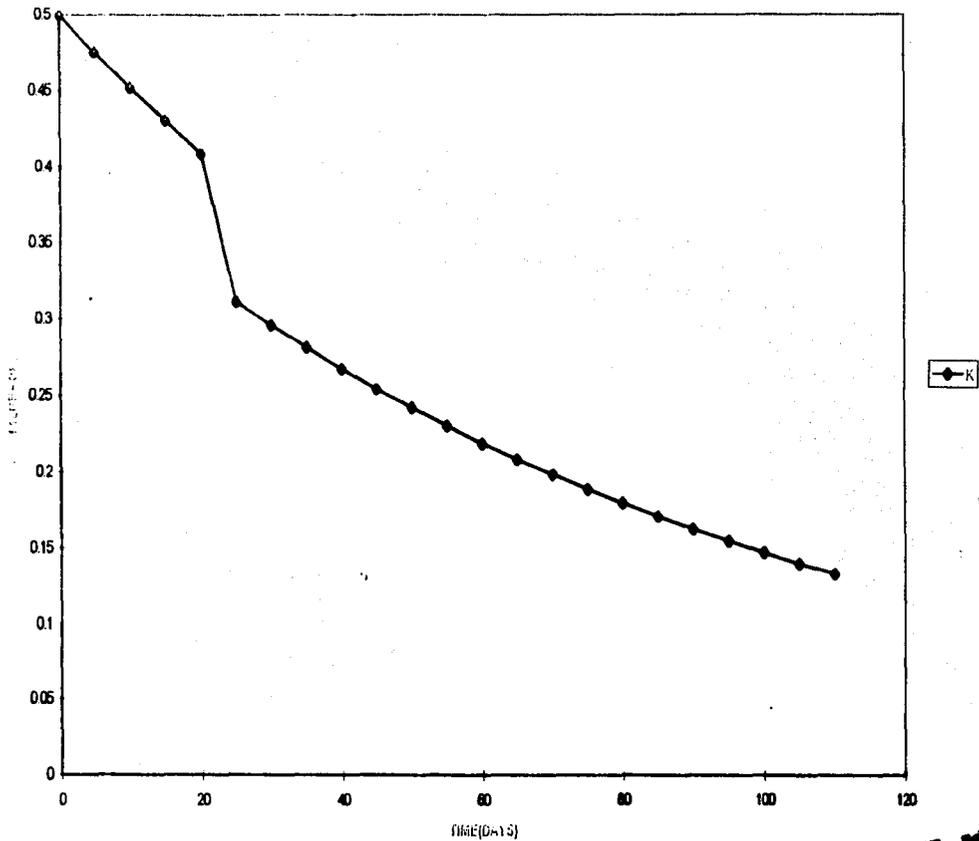


Fig. 9. Experimento incluyendo  $V = 0$  y  $T \neq 0$  y disipación.

RECEIVED AT THE  
INSTITUTE OF  
MATHS AND  
STATS

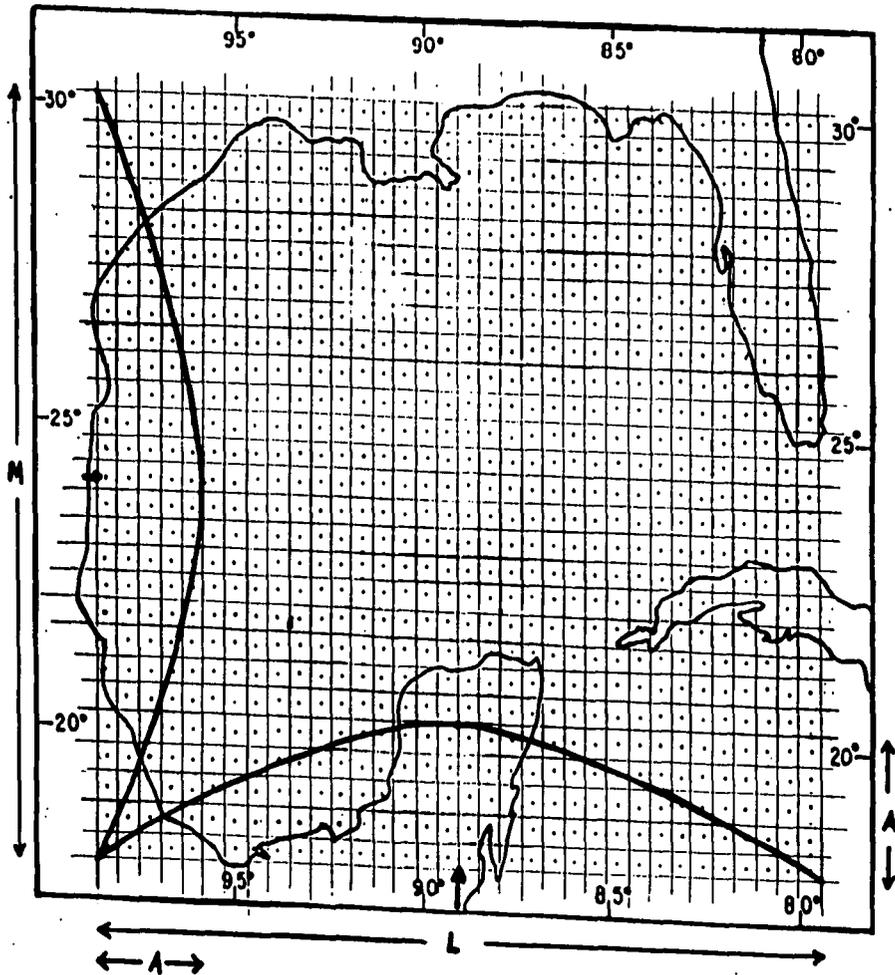


Fig. 10. Parámetros de la Función de Corriente Analítica.

$$u_y = -\frac{\psi_{y+1} - \psi_y}{a\Delta\vartheta}, \quad v_{ij} = \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{ij}}{a \sin \vartheta \Delta\lambda}$$

Así

$$(\text{div } \vec{V})_y = \frac{1}{a} \left\{ \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta\lambda} + \frac{v_{i,j+1} \sin \vartheta_{j+\frac{1}{2}} - v_{ij} \sin \vartheta_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta\vartheta} \right\}$$

es exactamente cero, y de ahí que, la ecuación de continuidad discreta es también satisfecha. Puesto que la línea de frontera es la isolínea  $\psi = 0$ , la componente normal de la velocidad es cero:  $U_n = 0$ , y en la ausencia de forzamiento y disipación, los esquemas principal (125) y adjunto (126) tenemos dos leyes de conservación.

La función corriente analítica para el Golfo de México es presentada en la Fig. (11). El vector velocidad está normalizado de tal forma que se aproximó el campo de velocidad real, en magnitud, en el Golfo (Fig. 12).

## 9. COMENTARIOS FINALES

El comportamiento asintótico del modelo de cuenca oceánica cerrada de Adem fue analizado como una función de forzamiento externo y el coeficiente de disipación. La existencia del atractor cero para las anomalías en la temperatura de la superficie del mar fue provisto que el forzamiento externo es cero. Además la solución de la perturbación decae exponencialmente en el tiempo. La razón de decaimiento depende del forzamiento externo, el coeficiente turbulento y la geometría del dominio. Hemos investigado desde el punto de vista de la teoría de los sistemas dinámicos la evolución de las soluciones linealizadas del modelo termodinámico de Adem. Ver apéndice B para comparaciones numéricas.

Se muestra que gracias a condiciones especiales puestas en las fronteras líquidas inflow y outflow, los modelos termodinámicos principal y adjunto fueron bien propuestos en el sentido de Hadamard (1923) no solamente para cuencas oceánicas cerradas, sino también

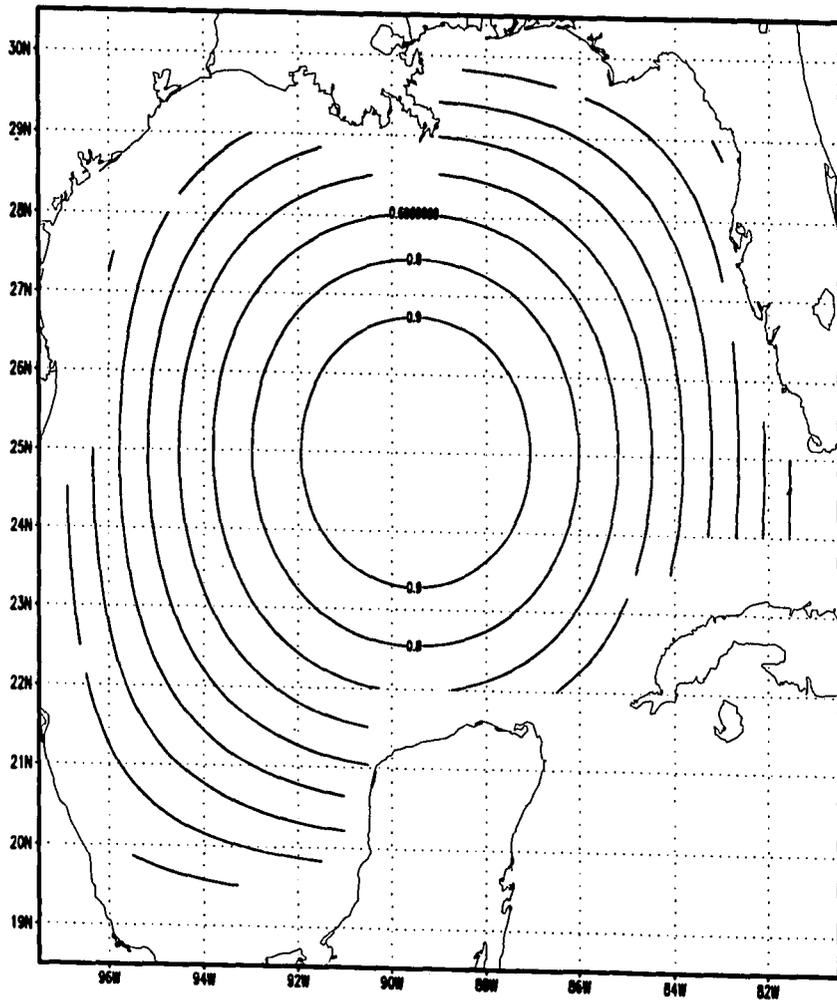


Fig. 11. El Campo de la Función de Corriente Analítica.

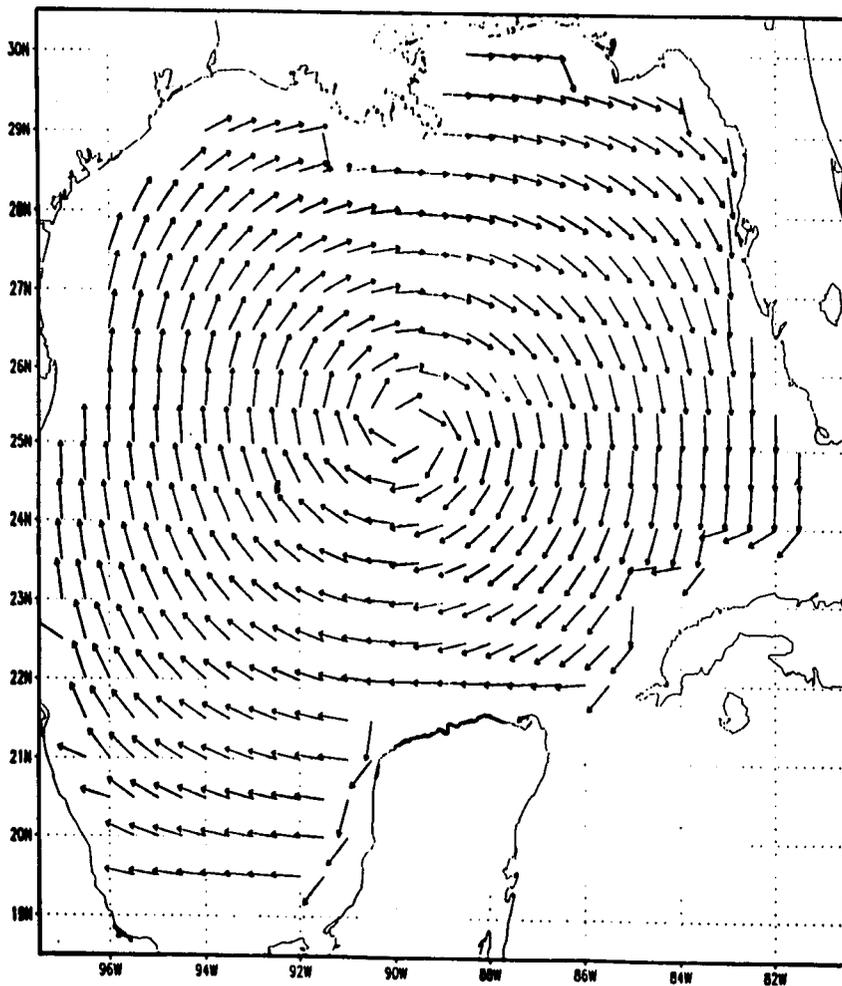


Fig. 12. El Campo Vectorial de la Velocidad, de la corriente oceánica, de acuerdo con la Función de Corriente Analítica.

para abiertas, esto es, cualquier solución de cualquiera de los modelos es única y estable a perturbaciones iniciales. Esto significa que la variedad inestable de anomalías de temperatura inicial es vacío, y por eso, no hay crecimiento de perturbaciones iniciales provisto que el forzamiento del modelo es cero. Esto hace fácil llevar a cabo el estudio de sensibilidad del modelo con respecto a variaciones pequeñas en el forzamiento del calor climático y temperatura inicial.

La aproximación adjunta al estudio de sensibilidad de un modelo termodinámico bi-dimensional de área limitada del sistema de cuenca oceánica fue desarrollada. Fórmulas integrales derivadas proveen un método efectivo y económico para llevar a cabo el estudio de sensibilidad del modelo.

Este análisis está basado en la selección de algunas zonas energéticamente activas en el dominio oceánico, y en el monitoreo de las anomalías de temperatura promedio en tales zonas durante el estudio de sensibilidad.

Esquemas de diferencias finitas implícitos compatibles, balanceados y absolutamente estables de la aproximación a segundo orden tanto en espacio como en tiempo fueron construidos para el modelo termodinámico del océano principal y adjunto. Los esquemas están basados en el método de fraccionamiento y son fácilmente resueltos por la factorización LU. La compatibilidad significa que a cada paso de tiempo fraccional del algoritmo de fraccionamiento, los operadores de los esquemas de diferencias principal y adjunto satisfacen una forma discreta de la identidad de Lagrange. Además en la ausencia de forzamiento y disipación, ambos esquemas tienen dos leyes de conservación cada uno. Para el valor promedio en el dominio y norma L2 del principal (o adjunto) solución del modelo.

Un algoritmo numérico, económico y eficiente, y los programas de computadora fueron escritos y probados con algunos experimentos.

Los campos físicos en el Golfo de México están en preparación con objeto de llevar a cabo en un futuro inmediato estudios de sensibilidad adjunta completos del Modelo Termodinámico del Océano de Adem en su versión tridimensional.

## 10. REFERENCIAS

- Adem, J.**, On the physical basis for the numerical prediction of monthly and seasonal temperatures in the troposphere-ocean-continent system. *Mon. Wea. Rev.*, **92**, 91-104, 1964a.
- Adem, J.**, On the normal thermal state of the troposphere-ocean-continent system in the Northern Hemisphere. *Geofs. Int.*, **4**, 3-32, 1964b.
- Adem, J.**, Relations among wind, temperature, pressure and density, with particular reference to monthly averages. *Mon. Wea. Rev.* **95**, 531-539, 1967.
- Adem, J.**, On the prediction of mean monthly ocean temperature. *Tellus*, **22**, 410-430, 1970a.
- Adem, J.**, Incorporation of advection of heat by mean winds and by ocean currents in a thermodynamic model for long range weather prediction. *Mon. Wea. Rev.*, **98**, 775-786, 1970b.
- Adem, J.**, Further studies on the thermodynamic prediction of ocean temperatures. *Geofs. Inter.*, **II** (1), 7-45, 1971.
- Adem, J.**, Review of the development and applications of the Adem thermodynamic climate model. *Climate Dynamics*, **5**, 145-160, 1991.
- Adem, J., E.E. Villanueva, and V.M. Mendoza.** Preliminary experiments on the prediction of sea surface temperature anomalies in the Gulf of Mexico. *Geofs. Int.*, **33**, 511-521, 1994a.
- Adem, J., V.M. Mendoza, and E.E. Villanueva.** Numerical prediction of the sea surface temperature in the Pacific and Atlantic oceans. *Geofs. Int.*, **34**, 149-160, 1994b.
- Babin, A.V. and Vishik, M.I.** Attractors of Evolution Equations. Studies in Mathematics and Its Applications, **25**, North Holland, 1992.
- Barkmeijer, J.**, Local error growth in a barotropic model. *Tellus*, **44A**, 314-323, 1992.
- Barkmeijer, J.**, Local skill prediction for the ECMWF model using adjoint techniques. *Mon. Wea. Rev.*, **121**, 1262-1268, 1993.
- Cacuci, D.G., C.F. Wever, E.M. Oblow and J.H. Marable.** Sensitivity theory for general systems of nonlinear equations. *Nucl. Sci. Eng.*, **75**, 88, 1980.
- Cacuci, D.G.**, Sensitivity theory for nonlinear systems. I. Nonlinear functional analysis approach. *J. Math. Phys.*, **22**, 2794-2802, 1981a.

- Cacuel, D.G.**, Sensitivity theory for nonlinear systems. II. Extensions to additional classes of responses. *J. Math. Phys.*, **22**, 2803-2812, 1981b.
- Chipot, M.**, Variational Inequalities and Flow in Porous Media. Applied Mathematical Sciences, **52**, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokio, 188 pp. 1984.
- Courtier, P.**, and **O. Talagrand**, Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. II. Numerical results. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **113**, 1329-1343, 1987.
- Courtier, P.**, and **O. Talagrand**, Variational assimilation of meteorological observations with the direct and adjoint shallow-water equations. *Tellus*, **42A**, 531-549, 1990.
- Dijkstra, H.A.** and **J.D. Neelin**, On the Attractors of an Intermediate Coupled Ocean-Atmosphere Model. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, **22**, 19-48, 1995.
- Doan, W.L.**, **R. Goldberg**, and **J. Adem**, Experiments in monthly temperature forecasting. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **67**, 165-169, 1985.
- Douglas, J. Rachford, H.**, On the numerical solution of the heat conduction problems in two and three space variables. *Trans. Amer. Math. Soc.* **82**, 2, 1956.
- Ehrendorfer, M.**, Four-dimensional data assimilation: comparison of variational and sequential algorithms. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **118**, 673-713, 1992.
- Errico, R. M.** and **T. Vukicevic**, Sensitivity analysis using an adjoint of the PSU-NCAR mesoscale model. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 1644-1660, 1992.
- Farrel, B.F.**, Small error dynamics and the predictability of atmospheric flow. *J. Atmos. Sci.*, **47**, 2409-2416, 1990.
- Forester, C.K.**, High order monotonic convective difference schemes. *J. Comput. Phys.*, **23**, 1-22, 1977.
- Gill, A.E.**, Atmosphere-Ocean Dynamics, Academic Press, New York, 1982.
- Godunov, S.K.**, Equations of Mathematical Physics, Nauka, Moscow, 1971.
- Hadamard, J.**, *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. Dover, 316 pp., 1923.
- Hall, M.C.G.**, Applications of adjoint sensitivity theory to an atmospheric general circulation model. *J. Atmos. Sci.*, **42**, 2644-2651, 1986.

- Hall, M.C.G., D.G. Cacuci, and M.E. Schlesinger**, Sensibility analysis of a radiative-convective model by the adjoint method. *J. Atmos. Sci.* **39**, 2038-2050, 1982.
- Kato, T.**, *Perturbations theory for linear operators*. Springer-Verlag, New York, 1966.
- Ladyzhenskaya, O.A.**, Boundary problems in mathematical physics. Nauka, Moscow (in Russian), 1973.
- Leben, R.R.**, An Altimeter Data assimilation Study in the Gulf of Mexico. Technical Report, 1991.
- LeDimet, F.X., and O. Talagrand**, Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: Theoretical aspects. *Tellus*, **38A**, 91-110, 1986.
- Lewis, J.M., and J.C. Derber**, The use of adjoint equations to solve a variational adjustment problem with advective constraints. *Tellus*, **37A**, 309-322, 1985.
- Marchuk, G.I.**, The Numerical Solution of Problems of Atmospheric and Oceanic Dynamics, *Gidrometeoizdat*, Leningrad (translated from Russian by Rainbow Systems, Inc., Alexandria, Virginia), 1974.
- Marchuk, G.I.**, Formulation of the Theory of Perturbations for Complicated Models. Part I: The Stimulation of the Climate Change. *Geofis. Int.*, **15**, 103-156, 1975.
- Marchuk, G.I.**, Formulation of the theory of perturbations for complicated models. Part I: The estimation of the climate change, *Geofis. Int.* **15**, 103, 1976.
- Marchuk, G.I. and Yu. N. Skiba**, Numerical Calculation of the Conjugate problem for a Model of the thermal Interaction of the Atmosphere with the Oceans and Continents. *Izvestiya, Atmos. Ocean. Physics*, **12**, 459, 1976.
- Marchuk, G.I. and Yu. N. Skiba**, On a Model for the Prediction of Average Temperature Anomalies, Preprint 120, Computing Center, Akad, Naak SSSR, Novosibirsk 40 pp, 1978.
- Marchuk, G.I., and V.V. Penenko**, The sensitivity study of the discrete Atmosphere and ocean dynamics models, *Izvestiya, Atmos. Ocean. Physics*, **15**, 279, 1979.
- Marchuk, G.I.**, Methods of numerical mathematics. *Springer-Verlag*, New York, 1982.
- Marchuk, G.I., Yu. N. Skiba and I.G. Protzenko**, Method of calculating the evolution of random hydrodynamic fields on the basis of adjoint equations, *Izvestiya, Atmos. Ocean. Physics*, **21**, 87, 1985a.

- Marchuk, G.I., Yu. N. Skiba and I.G. Protzenko**, Application of adjoint equations to problems of estimating the state of random hydrodynamic fields. *Izvestiya, Atmos. Ocean. Physics*, **21**, 175, 1985b.
- Marchuk, G.I.**, Mathematical Models in Environmental Problems, *Elsevier*, New York, 1986.
- Marchuk, G.I. and Yu. N. Skiba**, Role of Adjoint Functions in Studying the Sensitivity of a Model of the Thermal Interaction of the Atmosphere and Ocean to Variation in Input Data, *Izvestiya, Atmos. Ocean. Physics*, **26**, 335, 1990.
- Marchuk, G.I., and Yu. N. Skiba**, Role of the adjoint equation solution in estimating the mean temperature anomalies. *Atmosfera*, **5**(3), 119-133, 1992.
- Marchuk, G.I., V.I. Agoshkov and V.I. Shutisev**, Adjoint Equations and Perturbation Algorithms in Nonlinear Problems of Mathematical Physics, Nauka, Moscow, 1993.
- Marchuk, G.I.**, Adjoint Equations and Analysis of Computer Systems, Kluwer, Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- Morales-Acoltzi, T., and J. Adem**, On the asymptotic behaviour of the Adem thermodynamic model for the ocean temperature prediction. *Atmosfera*, **7**(2), 105-116, 1994.
- Musaelyan, Sh.A., A.D. Tavadyan, and D.B. Shteinbok**, Simulating some long-period atmospheric processes. *Sov. Meteorol. Hydrology*, **3**, 12-20, 1983.
- Navon, I.M., X. Zou, J. Derber, and J. Sela**, Variational data assimilation with an adiabatic version of the NMC spectral model. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 1433-1446, 1992.
- Penenko, V.V.**, Estimation of the parameters of discrete models of the dynamics of atmosphere and ocean. *Sov. Meteorol. Hydrology*, **7**, 57-68, 1979.
- Poinso, T.J. and Lele, S.K.**, Boundary Conditions for Direct Simulations of Compressible Viscous Flows, *J. Comput. Physics*, **101**, 104, 1992.
- Rabier, F., P. Courtier, and O. Talangran**, An Application of Adjoint Models to Sensitivity Analysis. *Beitr. Phys. Atmosph.*, **65**, 177-192, 1992.
- Roach**, Computational Fluid Dynamics. Hermosa Publishers. Albuquerque, N.M. 1972.
- Robertson, A.W.**, Diagnosis of regional monthly anomalies using the adjoint method. Part I. Temperature, *J. Atmos. Sci.* **49**, 885-905, 1991.

- Robertson, A.W.**, The investigation of regional climate anomalies with a linear barotropic model and an adjoint technique. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **118**, 1187-1209, 1992.
- Robertson, A.W.**, An examination of simulated regional climate change using an adjoint method. *Climate Dynamics*, **9**, 43-51, 1993.
- Sadokov, V.P. and D.B. Shteinbok**, Application of Conjugate Functions in Analysis and Forecasting of the Temperature Anomaly, *Sov. Meteorol. Hydrology*, **10**, 16, 1977.
- Skiba, Yu. N.**, Method of Solving the Atmosphere-Ocean-Soil Thermal Interaction Problem on Basis of the Adjoint Equations. Ph. D. Thesis, Computing Center, the USSR Academy of Sciences, Novosibirsk, 124 pp. 1978.
- Skiba, Yu. N.**, Balanced and absolutely stable implicit schemes for the main and adjoint pollutant transport equations in limited area. *Rev. Internac. Contamin. Ambiental*, **9(2)**, 39-51, 1993.
- Skiba, Yu. N., and J. Adem**, A balanced and absolutely stable numerical thermodynamic model for closed and open oceanic basins. *Geofis. Inter.*, **34**, **4**, 1995, **385-393**.
- Skiba, Yu. N., J. Adem, and T. Morales-Acoltzi**, Numerical Algorithm for the Adjoint Sensitivity study of the Adem Ocean Thermodynamic Model. *Atmósfera*, **9**, 147-170, 1996.
- Skiba, Yu. N.**, The Derivation and Applications of the Adjoint Solutions of a simple Thermodynamic limited Area Model of the Atmosphere-Ocean-Soil System. *World Resource Review*, Vol. **8**, No. **1**, 1996.
- Smolarkiewicz, P.K.**, On forward-in-time differencing for fluid. *Mon. Wea. Rev.*, **119**, 2505-2510, 1991.
- Sokolnikoff, I.S.**, Tensor Analysis Theory and Applications. Applied Mathematics Series, New York, John Wiley and Sons, Inc. 1958 (see page 11).
- Talagrand, O., and P. Courtier**, Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. Part I. Theory. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **113**, 1311-1328, 1987.
- Thépaut, J.N. and P. Courtier**, Four-dimensional variational data assimilation using the adjoint of a multilevel primitive-equation model. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **117**, 1225-1254, 1991.
- Vainberg, M.M.**, Functional Analysis. prosveschenie, Moscow (Russian), 1979.

- Vichnevetsky, R. and J.B. Bowles**, Fourier analysis of numerical approximations of hyperbolic equations (SIAM, Philadelphia), 1982.
- Voronov, A.A., M.F., Ivanov, and V.L. Perchuk**, A Method of organization of Data Banks for Long-range forecasting. Dokf. Akad. Nauk. SSSR, 275, 1984.
- Williamson, D.L.**, Review of numerical approaches for modelling global transport. In: Air Pollution Modelling and its Application IX. (H. Van Dzop and G. Kallos, Eds.), Plenum Press, New York, Vol. 17, pp. 377-394, 1992.
- Zare, K.**, Representation and Classification of Dynamical Systems. From Newton to Chaos. Plenum Press, N.Y., 1995.
- Zou, X., A. Barcilon, I. M. Navon, J. Whitaker, and D.G. Cacuel**, An adjoint sensitivity study of blocking in a two-layer isentropic model. *Mon. Wea. Rev.* **121**, 2833-2857, 1993.

## **APENDICE A.**

### **Zonas Energéticamente Activas en el Golfo de México**

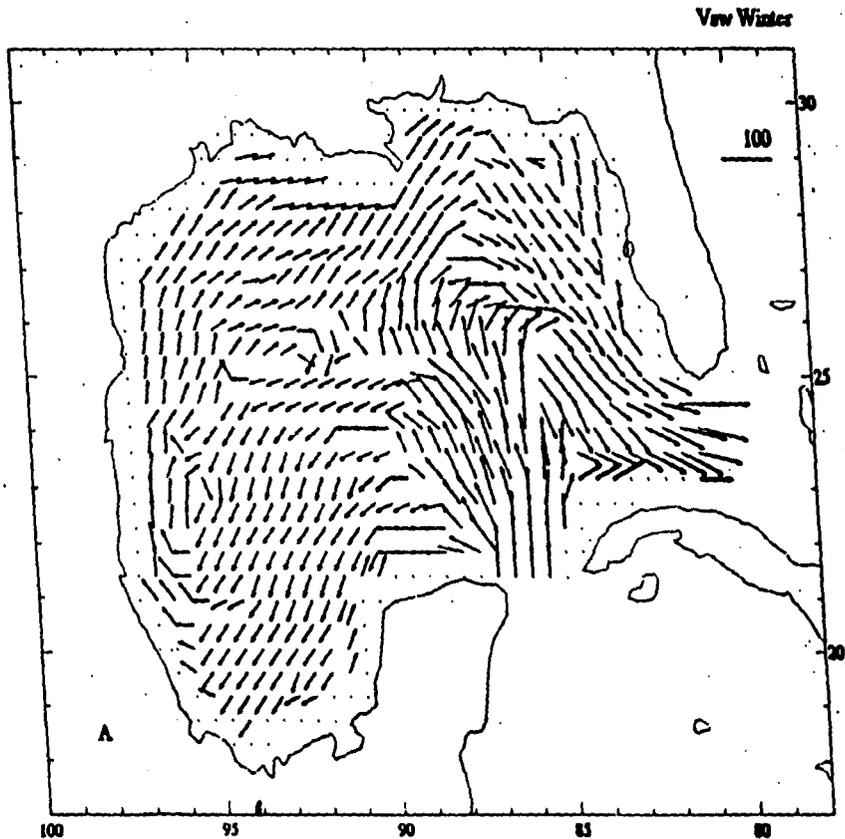
Como un mar semi-encerrado, el Golfo de México ha probado ser una región ideal para el desarrollo y prueba de modelos termodinámicos. Su extensión geográfica limitada y relativamente simples condiciones de frontera inflow y outflow son ideales para la validación de modelos de simulaciones físicamente realistas con una mínima demanda de recursos computacionales. En suma, varias investigaciones llevadas a cabo últimamente han incrementado nuestro entendimiento de los complejos procesos físicos en la región

Asimismo, el Golfo de México porvee un excelente testbed para la aplicación del algoritmo numérico desarrollado para el estudio de sensibilidad adjunta del Modelo Termodinámico del Océano de Adem.

El Golfo de México es uno de los océanos más observados del mundo, exhibiendo un amplio rango de detalles oceanográficos incluyendo:

- 1) un fuerte sistema de corrientes - La Corriente Loop, la cual provee la mayor fracción de las Aguas de las Corrientes del Golfo (Fig. 13);
- 2) grandes eddies anticiclónicos formados por inestabilidad de la Corriente Loop - algunos de los más fuertes y más grandes eddies de mesoescala en los océanos del mundo, segundo solamente a los eddies de Agulhas; y
- 3) una ausencia de ciclicidad estacional en el desvanecimiento del eddy de la Corriente Loop.

Estos grandes anticiclónicos no solamente tienen un tremendo efecto sobre el balance de sal, calor y momentum del Golfo, también pasan por interacciones warm-core ring/ring y ring/topographic vistas en todas partes en los océanos del Mundo. Así que, el estudio de su física es de interés general.



**Fig. 13.** Corrientes oceánicas estacionales modificadas en la capa mezclada, en el Golfo de México, para invierno, en  $\text{cm seg}^{-1}$ , destacan dos sistemas anticiclónicos y un sistema de corriente fuerte - la Corriente del Lazo.

Dentro de la discusión de las distribuciones de propiedad del agua del Golfo, estos anillos aparecen como cuerpos salados calientes. El calor y la sal añadidos por una de estas características juegan un papel importante en el balance de calor y sal del Oeste del Golfo. Lo último indica que alrededor de un anillo por año debe advectar dentro del Oeste del Golfo para balancear el contenido de sal del Oeste del Golfo. En la figura (14) se muestra una zona energéticamente activa escogida para el estudio de sensibilidad adjunta, con  $T^*(r, \bar{t}) = 1$ , en la prueba del programa computacional y de las leyes de conservación.

#### **Un Ejemplo Observacional: Cambios Secuenciales en la Circulación de Mesoescala del Golfo de México del 12 de Abril de 1985 al 5 de Noviembre de 1985**

Una serie de tiempo de anomalías de siete meses en la altura del nivel del mar relativa a una media de tres años se grafica con altas relativas a la media en color rojo y bajas en color azul. La serie de tiempo del nivel del mar muestra la propagación de dos bien documentados eddies de la Corriente Loop en el Golfo de México, Figura 15 (Leben, 1991). La primera de estas ha sido llamada "eddy rápido" mientras que la segunda es llamada "eddy caliente" (Lewis et al., 1989). Un detalle de calentamiento adicional en el oeste del Golfo fue llamado "eddy fantasma" y fue primero observado en datos de satélite "tracked drifter" (Lewis y Kirwan, 1987). Este nombre fue dado a esta característica ya que no hubo evidencia disponible inicialmente para conectarla a un evento de desvanecimiento en la Corriente Loop.

Los datos históricos han sido usados para determinar que estos anillos son típicamente trasladados al oeste a una velocidad media de  $2.1 \text{ km día}^{-1}$ . Su escala de longitud definida por su rms radio es 183 km. Una estimación de la duración de la vida del anillo, definida como un tiempo e-folding, es un año.

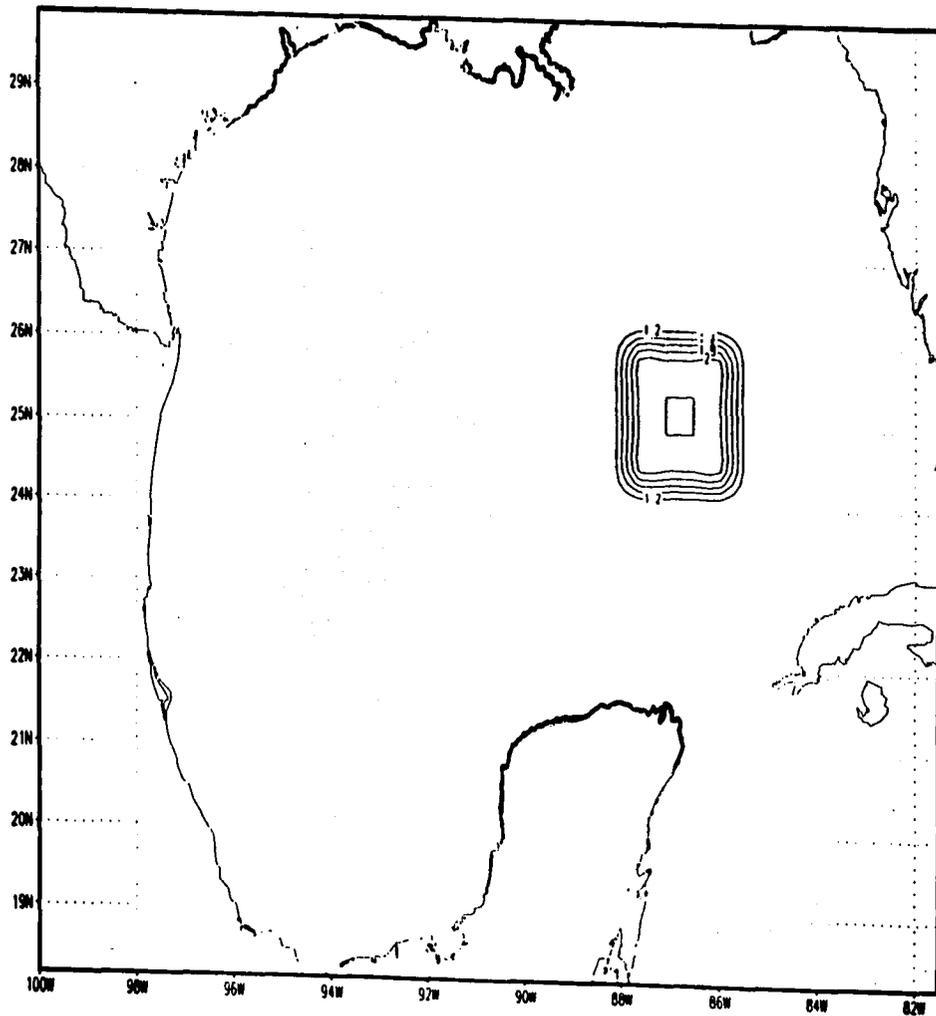
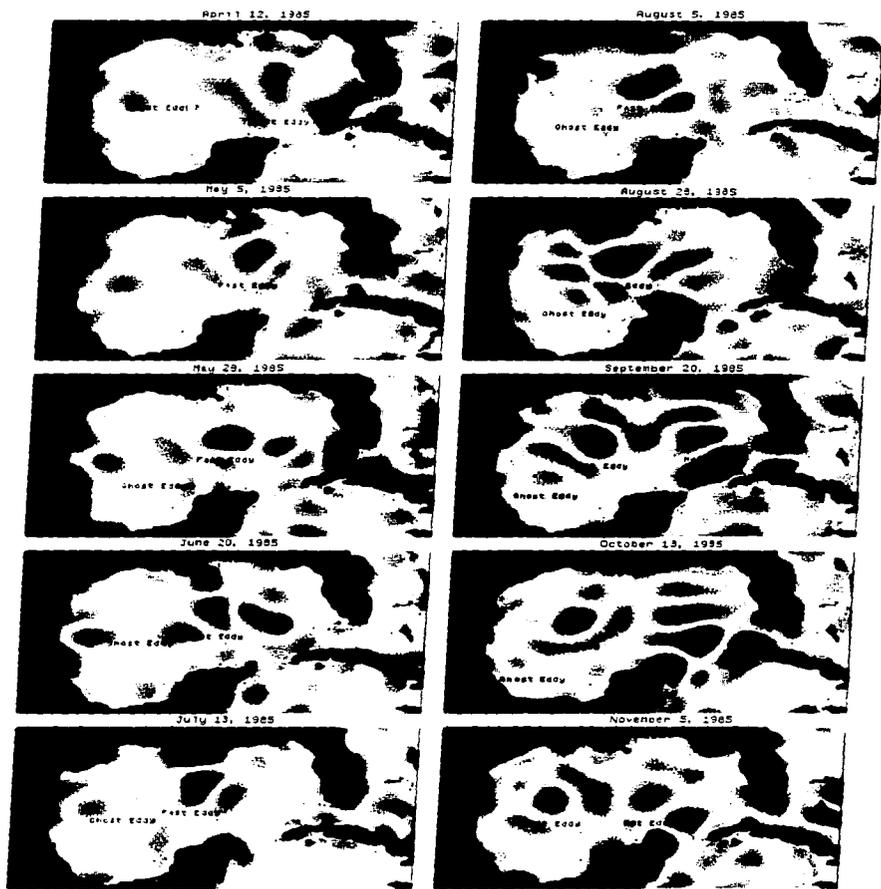


Fig. 14. Zona energéticamente activa.



**Fig. 15.** Serie de tiempo de anomalías de la altura del nivel del mar, altas (rojo) y bajas (azul), muestra la propagación de dos sistemas, "fast eddy" y "hot eddy" (Leben, 1991).

## **APENDICE B**

### **Decaimiento de las anomalías de SST: Solución numérica v.s. "Analítica"**

Se corrió el modelo termodinámico para una predicción extendida a tres meses del campo de anomalías de la temperatura de la superficie de los océanos, con pasos de tiempo de 5 días. En el cuadro B1 se presenta un ejemplo de salida del código en FORTRAN.

En las tablas T1 y T2, para verano e invierno, respectivamente, se presenta la predicción para tres meses de las anomalías de SST (A.P.), para los océanos Pacífico y Atlántico, columnas tercera y cuarta para ambos océanos en la quinta columna.

De acuerdo al análisis del comportamiento asintótico (C.A.), las anomalías se reducirán por un factor de  $e^{-1} = 0.367879...$  en dos meses. Seleccionando el primer mes pronosticado como mes inicial, entonces dos meses después corresponderá al tercer mes pronosticado y éste debiera haber disminuído por el factor  $e^{-1}$ . Si se compara con el valor del primer mes pronosticado multiplicado por un factor de  $e^{-1}$ , generalmente hay diferencias. La explicación de las diferencias es que el comportamiento asintótico corresponde a un decaimiento exponencial, mientras el modelo numérico genera un decaimiento de tipo geométrico (S.G.), es decir, cualquier valor de anomalía pronosticada es aproximadamente igual a la raíz cuadrada del producto de los términos precedente y siguiente.

TOTAL	*****	*****	200.00	**	0.00	**	0.00	**	0.00	**	0.00	**	0.00
AVRGE.	75.75	74.32	1.43	**	0.00	**	0.00	**	0.00	**	0.00	**	0.00

\*\*\*\*\*  
THERMO - DYNAMICAL MODEL .

OPTION : EULER FORMULA.

\*\*\*\*\* MODEL RUNNED IN JAN. OF 1993. \*\*\*\*\*

\*\*\*\*\* VS01 = 1 . HT01 = 1 . KS01 = 1 . T701 = 0 . \*\*\*\*\*

PREDICTION WAS MADE FROM JUNE 1980 TO MAY 1984



Cuadro B1. Ejemplo de salida del Modelo Termodinámico, Predicción a tres meses de la Anomalia de la Temperatura de la Superficie del Océano.

MONTH	PACIFIC OCEAN .			ATLANTIC OCEAN .			BOTH OCEANS .		
D.N.	CLIMA- TO LOGIA.	DIFFERENCE	D.N.	CLIMA- TO LOGIA.	DIFFERENCE	D.N.	CLIMA- TO LOGIA.	DIFFERENCE	
JUNE.	0.64	0.43	0.20	0.42	0.59	-0.17	0.57	0.49	0.07
JULY.	0.53	0.28	0.26	0.82	0.39	0.12	0.53	0.32	0.21
AUG.	0.53	0.19	0.34	0.54	0.27	0.27	0.54	0.22	0.31
JULY.	0.55	0.39	0.16	0.49	0.46	0.03	0.53	0.41	0.12
AUG.	0.56	0.25	0.31	0.54	0.31	0.23	0.55	0.27	0.28
SEPT.	0.67	0.16	0.50	0.75	0.22	0.53	0.70	0.18	0.51
AUG.	0.48	0.30	0.18	0.43	0.43	0.01	0.46	0.35	0.11
SEPT.	0.61	0.17	0.44	0.66	0.31	0.36	0.63	0.23	0.40
OCT.	0.55	0.11	0.44	0.88	0.23	0.65	0.68	0.16	0.52
SEPT.	0.50	0.23	0.27	0.53	0.47	0.06	0.52	0.31	0.18
OCT.	0.58	0.14	0.43	0.81	0.35	0.46	0.66	0.23	0.43
NOV.	0.62	0.09	0.53	0.75	0.26	0.49	0.67	0.17	0.50
OCT.	0.61	0.33	0.28	0.61	0.58	0.03	0.61	0.43	0.18
NOV.	0.64	0.20	0.44	0.67	0.39	0.28	0.65	0.23	0.37

**TABLA T1. VERANO**

AÑO	MES	OCEANO								
		PACIFICO			ATLANTICO			AMBOS		
		A.P.	S.G.	C.A.	A.P.	S.G.	C.A.	A.P.	S.G.	C.A.
1980	JUNIO	0.43			0.59			0.49		
1980	JULIO	0.28	0.2825		0.39	0.3991		0.32	0.3283	
1980	AGOSTO	0.19		0.1581	0.27		0.2170	0.22		0.1802
1981	JUNIO	0.56			0.35			0.50		
1981	JULIO	0.39	0.3888		0.18	0.1870		0.33	0.3391	
1981	AGOSTO	0.27		0.2060	0.10		0.1280	0.23		0.1800
1982	JUNIO	0.54			0.37			0.49		
1982	JULIO	0.36	0.3600		0.22	0.2275		0.32	0.3207	
1982	AGOSTO	0.24		0.1986	0.14		0.1360	0.21		0.1802
1983	JUNIO	0.82			0.41			0.70		
1983	JULIO	0.60	0.5868		0.24	0.2395		0.50	0.4949	
1983	AGOSTO	0.42		0.3016	0.14		0.1500	0.35		0.2500

**TABLA T2. INVIERNO**

AÑO	MES	OCEANO								
		PACIFICO			ATLANTICO			AMBOS		
		A.P.	S.G.	C.A.	A.P.	S.G.	C.A.	A.P.	S.G.	C.A.
1980	DICIEMBRE	0.35			0.57			0.44		
1980	ENERO	0.22	0.2291		0.35	0.3541		0.27	0.2814	
1980	FEBRERO	0.15		0.1287	0.22		0.2096	0.18		0.1618
1981	DICIEMBRE	0.32			0.26			0.30		
1981	ENERO	0.20	0.2116		0.13	0.1349		0.18	0.1897	
1981	FEBRERO	0.14		0.1177	0.07		0.0956	0.12		0.1103
1982	DICIEMBRE	0.37			0.25			0.34		
1982	ENERO	0.21	0.2193		0.14	0.1414		0.19	0.1933	
1982	FEBRERO	0.13		0.1361	0.08		0.0919	0.11		0.1250
1983	DICIEMBRE	0.37			0.28			0.34		
1983	ENERO	0.21	0.2193		0.15	0.1580		0.19	0.2019	
1983	FEBRERO	0.13		0.1361	0.09		0.1030	0.12		0.1250