35
29.

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

# DEL METODO GEOMETRICO Y LA CONSTRUCCION DE ECUACIONES DE DESCARTES A NEWTON

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

**M A T E M A T I C O**

P R E S E N T A :

**JUAN JOSE RIVAUD GALLARDO**

DIRECTOR DE TESIS:

M. EN C. JOSE RAFAEL MARTINEZ ENRIQUEZ

MEXICO, D. F. 1997

PAGINACION VARIA

COMPLETA LA INFORMACION

VNIVERSDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: Del método geométrico y la construcción de ecuaciones. De Descartes a Newton.

realizado por Juan José Rivaud Gallardo

con número de cuenta 8652263-8 , pasante de la carrera de Matemáticas.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

| | | |
|---|---|---|
| Director de Tesis Propietario | M. en C. José Rafael Martínez Enríquez | |
| Propietario | Dr. Carlos Alvarez Jiménez | |
| Propietario | Mat. Julio César Guevara Bravo | |
| Suplente | Mat. Guillermo Eduardo Zambrano Castañeda | |
| Suplente | Dra. María de Lourdes Esteva Peralta | |

Consejo Departamental de Matemáticas

# Presentación

En el presente trabajo se realiza un análisis del pensamiento matemático de René Descartes en torno principalmente a dos aspectos fundamentales: los elementos de su geometría y la construcción de ecuaciones. En este contexto se revisa la extensión de dichas ideas en un trabajo de Isaac Newton. Esta obra constituye una confirmación de la fertilidad del pensamiento matemático de Descartes. La fortuna de estos desarrollos se presenta en la última sección, *Epilogo y conclusiones*.

Algo importante que comentar es que, como estudiante que pretende obtener el grado de matemático, no pude dejar pasar los resultados sin realizar las demostraciones correspondientes. Así, todas las demostraciones que aparecen en esta tesis fueron realizadas por el que la escribió. Conviene enfatizar esta parte del trabajo ya que el texto newtoniano es muy oscuro al respecto, no ofreciendo las demostraciones que corresponden a las afirmaciones que ahí se enuncian.


## Agradecimientos

Agradezco profundamente el gran apoyo en la dirección de este trabajo por parte del M. en C. Rafael Martínez Enríquez así como la invaluable e incondicional cooperación de Marta Ludlow, sin quienes jamás hubiera sido posible llegar a la conclusión de esta tesis.

# Capítulo 1

# El propósito de *La Geometría* y los planteamientos cartesianos (Algebra y Geometría)

## 1.1. Antecedentes

En pocas ocasiones se enfatiza el propósito de *La Geometría*, que consiste, como señala el propio Descartes, en mostrar un método para resolver problemas. En contraste con lo que pudiera esperarse, y siendo *La Geometría* uno de los textos que fueron publicados junto con el *Discurso del Método* –por lo tanto parecería como si debiera ser una muestra de lo que se puede alcanzar siguiendo las directrices que emanan de dicha obra– el desarrollo de los métodos y las ideas aquí presentadas no parecen sujetarse a un guión que se desliza a través de deducciones lógicas que se originan en primeros principios.

Simplemente dicho, *La Geometría* no resulta ser un tratado donde se presenta una estructura lógica a la que debe sujetarse el pensamiento geométrico. Por el contrario, lo que el libro presenta son respuestas a preguntas como ¿cuál es el lugar geométrico que satisface tales y tales condiciones? Y la respuesta no sólo se ocupa de mostrar la curva o una ecuación, sino de acompañar a ambas con el método geométrico de construcción de la curva.

Todo lo que Descartes presenta en *La Geometría* no es más que el camino, mediante procedimientos particulares, que permite darle sustento a la idea de que resolver un problema en geometría consiste en construir la curva o las curvas que constituyen su solución.

Las ideas cartesianas sobre la solución de problemas ocurre en el marco de una larga tradición que se puede rastrear hasta la época dorada del pensamiento griego. Sin embargo, y para no hacer la historia completa de la búsqueda del saber, es legítimo enfocar nuestro interés sobre el clima de discusión en el que madura el pensamiento de Descartes y que apunta hacia el descubrimiento e integración de un "método universal" que permitiera alcanzar la verdad (Rossi, *Clavis*; Turró, *Hermetismo*).

Sobre este particular cabe destacar la influencia que sobre el pensamiento renacentista ejerció el mallorquí Raymundo Lulio (Yates, "Arte", 23-142; *Lulio*, 149-159), quien propuso un método que consistía en listar todas las posible verdades y elegir de entre ellas la correcta. También fue notable la influencia de Petrus Ramus (Rossi, *Clavis*, 128-132), quien veía en el método la clave para transmitir el conocimiento y coadyuvar a que sus practicantes pudieran realizar sus propios descubrimientos (Gaukroger, *Descartes: Philosophy.*, 148-149). El último gran pensador previo a Descartes y que se ocupó del problema del método fue Francis Bacon, estadista de renombre a quien se debe una amplia gama de escritos sobre la certeza del conocimiento y la manera óptima de alcanzarlo: el uso sistemático de la inducción y de la verificación empírica sería la clave para descubrir el contenido de las leyes que rigen el comportamiento de la naturaleza (Bacon, *Novum Organum*).

La idea de estos personajes –y la de muchos más– ayudan a consolidar una corriente de opinión que apuntaba hacia la noción de que el progreso del intelecto sería el logro natural de la utilización de un método que permitiese encontrar la verdad. Es en este ambiente que Descartes elige los métodos que las matemáticas habían generado durante siglos como una vía que permitía vislumbrar las características de lo que sería una *mathesis universalis*.

Tal era el poder que Descartes pensó que residía en el pensamiento matemático que llegó a aventurar que todo lo cognoscible podría encontrarse mediante un método que tenga como modelo el de las matemáticas. Al respecto escribía:

> "Esas largas cadenas de razonamientos, tan simples y tan fáciles de enlazar, que permiten a los geómetras lograr las más difíciles de las demostraciones, me han hecho especular sobre si todas las cosas cognoscibles para el hombre no corresponderán a una sucesión –cadena– lógica similar. Si es así, sólo necesitamos rechazar la aceptación como cierto de aquello que no es cierto, y con cuidado seguir el orden necesario para deducir cada certeza a partir de otras, y no puede haber proposiciones tan extrañas que no podamos demostrarlas, ni tan ocultas que no podamos descubrirlas." (A. T., Vol. VI, p. 19)

Si nos restringimos a los métodos generales desarrollados por los griegos para resolver problemas cuyas soluciones consistían en proporcionar los puntos en el espacio que satisfacen ciertas condiciones geométricas, encontramos que contaban con dos estrategias: "reducción" y "análisis".

La reducción [apopōgē, en griego] consiste en detectar que un problema puede ser resuelto si se resuelve otro problema más sencillo y será entonces este último el que se procede a resolver. Un ejemplo típico de esta situación es la clásica solución que propone Hipócrates de Quíos para resolver el problema de la duplicación del cubo y que consiste, como se muestra en la sección 2 del Capítulo 2 de esta tesis, en reducirlo a encontrar dos medias proporcionales. Esto se puede también traducir a un problema de intersección de una parábola y una hipérbola, lo cual aumentó el interés de los geómetras griegos por el estudio de las secciones cónicas.

La otra estrategia, el análisis [en griego àrnápalin lýsin, que significa "solución en sentido inverso"], fue un método que gozó de gran profundidad desde el siglo IV antes de Cristo. Capo de Alejandría reunió 33 trabajos –muchos de ellos ya perdidos– de varios de los más distinguidos matemáticos de su tiempo –Eratóstenes, Euclides y Apolonio, entre otros– que incluían problemas geométricos cuya solución recurría al análisis (Knorr, *The Ancient Tradition*). El proceso queda mejor ilustrado si se presenta un problema típico y la manera como lo abordaba el análisis.

Supóngase que se busca bisecar el ángulo ACB (figura 1.1) y se conoce como bisecar un segmento de recta.

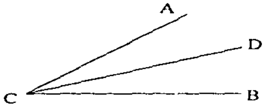



Figura 1.1

El método consiste en suponer que se cuenta con la solución del problema y a partir de ello se procede a deducir un resultado conocido, es decir, se hilan deducciones hasta que se llega a un resultado cuya validez era conocida de antemano. En la figura 1.1 se toma el ángulo ACB y luego se traza la recta DC que lo biseca, acto seguido se toma una porción de recta CE sobre el segmento AC y otro de la misma longitud –llamado CF– sobre BC. A continuación se unen C y F y se denomina M al punto de intersección entre CD y EF (figura 1.2).

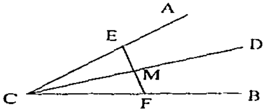



Figura 1.2

Dado que el ángulo ECM es igual al ángulo FCM, ya que CE = CF y CM es común a ambos triángulos, resulta que el triángulo CEM es congruente con el triángulo FCM y por lo tanto EM = MF, lo cual significa que M biseca a EF. ¡y éste es el resultado ya conocido al que nos referíamos previamente! Podemos, por consiguiente, y como se había planteado que funcionaba el método de análisis, proceder en sentido inverso.

Supóngase que nos ha sido dado el ángulo ACB. Constrúyase CE = CF, trácese la línea EF, biséquese ésta en M y únanse los puntos C y M. Resulta que la recta CM biseca al ángulo original. Con ello queda resuelto el problema propuesto y de paso se muestra la razón de por qué el método se le denomina "solución en sentido inverso".

Otro método general de solución de problemas que influyó de manera decisiva en el joven Descartes fue el desarrollo de la llamada álgebra simbólica, desarrollada principalmente por François Viète a fines del siglo XVI y que era considerada por el mismo Viète como una especie de análisis en el sentido utilizado por los griegos (Boyer, *Analytic Geometry*, 65 y 157-173). Sin entrar en detalles este método consiste en etiquetar a las cantidades desconocidas con una cierta letra –la $x$, para remitirnos a la práctica usual– y realizar los cálculos en los que esta letra participa –siendo sumada a algo, sacada una raíz cuadrada, etcétera– como si su valor fuera conocido. Siendo este un ejemplo de lo que los griegos bautizaron como análisis, llevó a Viète a llamar a esta álgebra el "arte analítico" (Viète, *Analytic Art*). Cabe señalar que la forma como Viète utiliza este análisis es el origen de conjunto de ideas que agrupadas dieron origen a lo que hoy en matemáticas se conoce como análisis.

Uno de los méritos de Descartes radicó en haber tomado estas ideas y, extendiéndolas, integrarlas en un enfoque que le permitió escribir un nuevo capítulo de las matemáticas, capítulo sin el cual es difícil concebir los desarrollos de Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Cauchy y toda la pléyade de mentes que instauraron la ciencia moderna.

La puesta en práctica del nuevo enfoque que proponía Descartes en su solución al llamado problema de Papo, el cual será tratado con más detalle en esta tesis en la sección 2.7, resulta evidente el uso de las técnicas derivadas de la reducción, del análisis y de la fortaleza y simplicidad de resolver algebraicamente lo que se presentaba como un problema de la "construcción" de la curva sobre más de un problema (ver discusión en la sección 2.7).

El avance que supone el método cartesiano de resolución de problemas se puede contrastar con lo que era la práctica usual de solución de problemas en los años previos a la publicación de los trabajos del señor Descartes. En función de ello, en la siguiente sección se presentan algunos ejemplos extraídos de un libro de texto que era de uso común en las escuelas jesuitas de la época en la que Descartes asistió a la célebre escuela de *La Flèche* (1607-1616) como estudiante, y donde por primera vez entró en contacto con las ideas que lo apasionarían por el resto de su vida.

## 1.2. Los problemas y las construcciones de principios del siglo XVII

Con el fin de tener un punto de partida bien definido para la correcta ubicación de una de las más importantes aportaciones cartesianas a las matemáticas, es recomendable analizar de qué tipo eran y cómo se resolvían los problemas geométricos en su época, esto es, a principios del siglo XVII.

A continuación se presenta un ejemplo extraído de la *Geometría Práctica* de Christoph Clavius, escrita en 1604[1] (Bos, *The concept*, 40).

**Problema:** Dado el triángulo ABC (figura 1.3) y un punto D, se requiere trazar una línea recta que pase por D y divida al triángulo ABC en dos partes iguales, es decir, dos partes con superficies iguales.

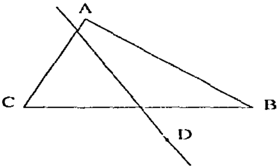



Figura 1.3

[1] Christoph Clavius fue uno de los primeros miembros de la Compañía de Jesús, es decir, fue uno de los primeros jesuitas. Durante los siglos XVI y XVII fue sorprendente la rapidez con la que creció el sistema de escuelas, colegios y universidades creadas bajo los auspicios y dirección de la Compañía. La empresa educativa a la que dio lugar gozó del respeto de todos los círculos académicos y su influencia abarcó, además de los países católicos europeos, los de América que cayeron bajo el dominio español y llegó a contar con centros de enseñanza en lugares tan lejanos como China.

Clavius fue el impulsador de la enseñanza de las matemáticas en las escuelas de la Compañía y para ello escribió varias obras que servirían como libros de texto durante casi 100 años, destacando entre ellos la *Geometría Práctica*, el Algebra (*Algera Chritophori Claviu Bambergersis et Societate Iesu*, Romae, Excudebat Stephanus Gamoretus, 1609) seguramente estudiado por Descartes en el colegio jesuita de La Flèche durante el periodo de estudios que ahí realizó (1606-1614) y que tan determinantes fueron en su vida intelectual. Por su importancia para el estudio de temas astronómicos sus *Comentarios a "De la Esfera" de Sacrobosco* (*In Sphaeram Ioannis de Sacrobosco commentarius*, ..., varias ediciones entre 1570 y 1607) tuvieron una difusión muy amplia.

**Construcción 1**

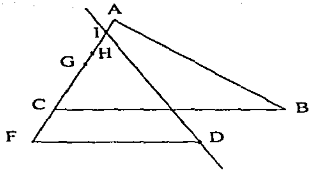



Figura 1.4

1) Prolónguese AC y trácese DF paralela a CB intersecando a AC en F (ver figura 1.4); tómese G sobre AC tal que AG = CG.

2) Tómese H sobre CA tal que CH sea la cuarta proporcional de DF, BC y CG, esto es

$$DF : BC = CG : CH.$$

3) Constrúyase la media proporcional L de FC y CH, esto es, un segmento L que satisfaga

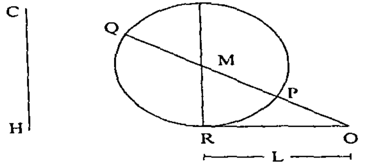
$$FC : L = L : CH .$$

4) Tómese I sobre CA tal que el rectángulo con lados CI y HI sea igual al cuadrado de lado L, esto es

$$CI \times HI = L^2.$$

Para encontrar I Clavius hace referencia a una construcción que ha explicado en un comentario sobre el teorema III-36 de su edición de *Los Elementos* de Euclides[2]. Esta construcción es la siguiente (figura 1.5):

Figura 1.5




[2] *Comentarios a los "Elementos" de Euclides* (*Euclidis Elementorum libri XV*, Frnakfurt, 1654).

Con diámetro CH trácese un círculo y tómese RO = L sobre una tangente al mismo. Trácese una línea por O y el centro M, y sean P y Q la intersección con el círculo. Con ello, por Euclides III-36,

$$OR^2 = OP \times OQ,$$

y tomando CI = QO y HI = PO (CH = QP) tenemos

$$CI \times HI = L^2$$

como se requiere.

5) Trácese una línea recta por D e I. Esa línea divide al triángulo en dos partes iguales.

Para verificar la validez de la construcción presentamos la siguiente prueba.

**Demostración**

Considerando la figura 1.6, donde se han bajado las perpendiculares a CB desde I y A, el área del triángulo ABC está dada por un medio de CB × AK, y la del triángulo CJI por un medio de CJ × MI.

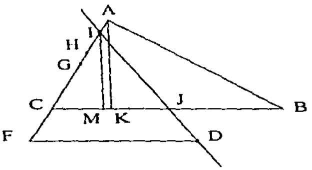



Figura 1.6

Así, lo que se tiene que demostrar es que

(A) $$2(CJ \times MI) = CB \times AK$$

$$\iff \quad 2(CJ \times CI) = CB \times CA$$

ya que $\frac{AK}{MI} = \frac{CA}{CI}$, por la semejanza de los triángulos CMI y CKA,

$$\iff \quad 2CJ \times CI = CB \times 2CG$$

ya que AG = CG,

$$\iff \quad \frac{FD \times CI^2}{FI} = CB \times CG$$

debido a que $\frac{CJ}{CI} = \frac{FD}{FI} \iff CJ = \frac{FD \times CI}{FI}$, por la semejanza de los triángulos CJI y FDI. Como FI = FC +CI, tenemos también

$$\iff \quad \frac{FD \times CI^2}{FC + CI} = CB \times CG$$

$$\text{(B)} \qquad \iff \quad FD \times CI^2 = (CB \times CG)(FC + CI)$$

Para demostrar la igualdad (A) se mostrará la validez de (B). Así, para determinar el valor de CI, tenemos que

$$CI = CH + HI \quad \text{y} \quad CI \times HI = L^2, \quad \text{con} \quad L^2 = FC \times CH$$

$$\Rightarrow \quad (CH + HI) \times HI = FC \times CH$$

$$\iff \quad CH \times HI + HI^2 = FC \times CH$$

$$\iff \quad HI^2 + CH \times HI - (FC \times CH) = 0$$

$$\iff \quad HI = \frac{-CH \pm \sqrt{CH^2 + 4FC \times CH}}{2}$$

y como CI = CH + HI entonces

$$CI = \frac{CH \pm \sqrt{CH^2 + 4FC \times CH}}{2},$$

$$\iff \quad CI = \frac{CH \pm r}{2},$$

con $r = \sqrt{CH^2 + 4FC \times CH}$.

Así pues, sustituyendo CI en (B) tenemos que

(B) $$FD \times CI^2 = (CB \times CG)(FC + CI)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{FD \times (CH \pm r)^2}{4} = CB \times CG \times FC + \frac{(CB \times CG) \times (CH \pm r)}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{FD \times (CH^2 \pm 2CHr + r^2)}{4} = CB \times CG \times FC + \frac{(CB \times CG \times CH) \pm (CB \times CG \times r)}{2},$$

como $DF : BC = CG : CH$, por ser CH la cuarta proporcional de DF, BC y CG $\Longleftrightarrow$ $CH = \dfrac{CG \times CB}{FD}$, tenemos

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{CG^2 \times CB^2}{4FD} \pm \frac{CG \times CB \times r}{2} + \frac{CG^2 \times CB^2}{4FD} + CB \times CG \times FC = CB \times CG \times FC + \frac{CB^2 \times CG^2}{2FD} \pm \frac{CB \times CG \times r}{2}$$

que sí es una igualdad válida.

Q.E.D.

Regresando a la construcción, hay ciertos puntos que requieren comentarios. En primera instancia, Clavius supone que la construcción de la cuarta proporcional y de la media proporcional es algo ya conocido y que no requiere explicación. Sobre el particular, las construcciones habituales en la época eran las siguientes.

**Construcción 2**

**Problema:** Construcción de la cuarta proporcional

Para encontrar CH, la cuarta proporcional de DF, BC y CG, trácense (figura 1.7) CF = DF y BC sobre los lados de un ángulo arbitrario, para después trazar BF. Localizando G sobre CF y trazando la paralela a BF por G que intersecará a CB en H, se obtiene CH como la cuarta proporcional buscada.

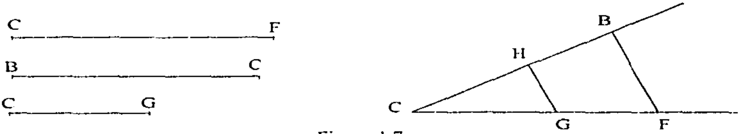



Figura 1.7

La demostración es la misma que se presenta en la primera sección del Capítulo 2 de esta tesis para la construcción de medias proporcionales con regla y compás. Ahí el resultado se deduce a partir de la semejanza de los triángulos.

**Construcción 3**

**Problema:** Construcción de la media proporcional

Para encontrar la media proporcional entre FC y CH dibújese una línea (figura 1.8) y márquense FC y CH sobre la misma y colocándolos uno después de otro, para después trazar un semicírculo con diámetro FH. Trazando la perpendicular a FH por C que intersecará al semicírculo en Q obtenemos CQ como la media proporcional buscada.

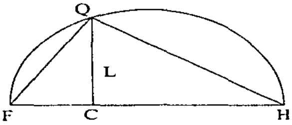



Figura 1.8

**Demostración**

Dado que el ángulo FQH es recto, así como los ángulos FCQ y HCQ, tenemos que los ángulos FQC y QHC son iguales, lo que implica que los triángulos FCQ y QCH son semejantes. Así

$$FC/CQ = CQ/CH$$

Q.E.D.

Si volvemos a los comentarios sobre el trabajo de Clavius, debemos notar que no explica cómo encontró la construcción, es decir cómo se le ocurrió que esos eran los pasos que había que seguir. No se tiene un método para "construir" (resolver) los problemas, se carece de un "análisis" que permitiría establecer generalizaciones en los resultados o, al menos, procedimientos generales para resolver algunos problemas.

Otra cuestión, y en la que de hecho Descartes insiste mucho, es la relacionada con la simplicidad de la construcción. Como se puede ver, no hay un camino geométricamente más sencillo para determinar el punto I que no sea el de la regla y el compás. Un análisis detallado de la situación lleva a que Clavius no está realizando operaciones o utilizando medios innecesarios para llegar a la solución.

Además de todo lo anterior, hay que notar también que si bien la construcción se realiza sólo con la regla y el compás, en la época ya se tenía conocimiento de varios problemas que podían ser resueltos utilizando otras curvas.

## 1.3. El planteamiento cartesiano

¿Con qué fin escribe Descartes *La Geometría*?, ¿qué es lo que busca?, son preguntas que surgen naturalmente y cuya respuesta es distinta a la que en un inicio podríamos dar. El propósito del libro no es, como muchos piensan, el establecer una equivalencia entre curvas en el plano y ecuaciones en dos incógnitas utilizando para ello lo que se conoce como ejes cartesianos. Esto último es más bien una consecuencia de haber sido Descartes el autor de la obra, y de la tradición de los científicos del siglo XVII que tuvieron a bien leerla.

Es innegable que de *La Geometria* el mundo obtuvo lo que hoy conocemos como geometría analítica, y que en dicha obra se manifestó por primera vez la interconexión entre figuras y fórmulas, o, lo que es lo mismo, entre geometría y álgebra. Hoy día es indiferente considerar una curva o una ecuación ya que ambos, entes abstractos, son completamente equivalentes.

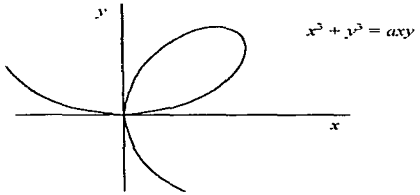



Figura 1.9

Por ejemplo, no existe para nosotros diferencia alguna, en términos matemáticos, entre el *folium* cartesiano y su ecuación algebraica (figura 1.9), y con igual pertinencia hablamos del "dibujo" de la curva y de la "ecuación" de la curva. Entendemos por dibujo la línea en el plano referida a los ejes cartesianos, y por ecuación la expresión algebraica que relaciona las parejas de valores reales –referidas a los ejes cartesianos– que la satisfacen.

Para Descartes, sin embargo, esta equivalencia en ambos sentidos no es fundamental. Lo que sí considera de gran importancia es que aquellas curvas que serán las "aceptables" en su geometría tengan ecuaciones algebraicas (una discusión más amplia de este punto se presenta en la sección "2.7. La construcción de ecuaciones y la clasificación de las curvas", en el Capítulo 2 de esta tesis) y, para sorpresa de muchos de nuestros contemporáneos que suponen lo contrario, Descartes no requiere que las ecuaciones den lugar a curvas. Esto, de hecho, no es mencionado siquiera en su libro.

Descartes se sirve del álgebra para establecer la aceptabilidad de las curvas: ya no sólo el círculo y la recta son válidos, todas aquellas curvas que tengan una ecuación algebraica también lo serán. Hay que notar que en el álgebra de principios del siglo XVII sólo encontramos las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíces, y no se considera todavía como sus equivalentes a los logaritmos, las exponenciales o las funciones trigonométricas, por lo que muchas curvas no pueden ser expresadas por medio de una ecuación[3] (Wieleither, *Historia*, 115-116).

Si el propósito de Descartes hubiera sido lo que desde nuestra perspectiva consistiría en "inventar" la geometría analítica, entonces, muy seguramente, hubiera empezado por definir la recta, para pasar luego a trabajar con las cónicas y continuar con curvas de grados superiores. Pero esto no sucedió así, lo que Descartes buscaba era mostrar su descubrimiento: un procedimiento general para resolver ecuaciones polinomiales en una variable para con ello poder resolver también cualquier problema geométrico.

En *La Geometría*, Descartes explica que todo problema geométrico es reducible a una ecuación polinomial. Esto lo dice en los primeros párrafos:

> "Todo problema en geometría puede ser fácilmente reducido a términos tales que conocer las magnitudes de ciertas líneas rectas es suficiente para su construcción."

y pasa luego a presentar un procedimiento concreto (ver la sección "4.3. Los planteamientos y resultados de Descartes", en el Capítulo 4 de esta tesis) en esta dirección.

[3] Durante el siglo XVI el álgebra logró programas notables en dos direcciones: por un lado aproximándose más a los actuales procedimientos de cálculo literal y por otro extendiendo el conocimiento de las propiedades de las ecuaciones de tercero y cuarto grado. Por otra parte apareció una nueva forma para elaborar cálculos recurriendo a tablas que se llamarían de logaritmos. De manera independiente Joost Bürgui (mecánico y astrónomo) y Juan Napier (Neper en latín) (m. en 1617) llegaron a sus descubrimientos, el primero publicado en Praga, el *Progress Jabulen* (1628) y el segundo haciendo lo propio en 1614, en Edimburgo, en lo que llamó su *Descriptio*. La explicación del método de calcular apareció en la *Constructio* (1619). En Inglaterra Henry Briggs convino con Napier en la adopción de la base 10 y acto seguido publicó sus tablas (1624) bajo el título de *Arithmetica logarithmica*, limitándose en ella a logaritmos de números (la *Descriptio* es una tabla de logaritmos de funciones trigonométricas). El impacto de esta nueva forma de realizar cálculos se hizo sentir de inmediato en el terreno de la astronomía. En 1618 Benjamin Ursino publicó una tabla abreviada de los logaritmos de Napier, lo que inspiró a Kepler para publicar él mismo unas tablas conocidas como las *Tabulae Rudalphinae* (1624) en honor de quien en ese entonces era su mecenas, el rey Rodolfo II.

Apunta que una vez establecido el problema geométrico en términos algebraicos, es decir, transformado en una ecuación de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

aquel puede ser resuelto. Descartes presenta una solución formal para todos los problemas que se traduzcan en ecuaciones hasta de grado seis y plantea que esto puede ser generalizado para cualquier grado, pero que dejará al lector que lo descubra por sí mismo para no quitarle el placer de hacerlo.

Según lo que dice Descartes, las ecuaciones hasta de grado seis pueden resolverse recurriendo primero a un procedimiento de simplificación y estandarización algebraica y luego a una "construcción geométrica".

El proceso algebraico consiste en reducir la ecuación al menor grado posible para después llevarla a una forma estándar que Descartes indica cómo "construir" al final del Libro III.

La construcción de la ecuación se refiere a encontrar dos curvas "aceptables" y de la mayor "simplicidad" posible cuyos puntos comunes determinarán las raíces de la ecuación dada (ver el inicio del Capítulo 4 de esta tesis). Es importante comentar que con esto Descartes marca el surgimiento de la construcción de ecuaciones como un objeto de estudio de los matemáticos del siglo XVII en adelante, quienes a partir de esto se dan a la tarea, como era la pretensión de Descartes, de investigar métodos para resolver las ecuaciones de grado superior a seis. Tal es el caso de Newton, quien retoma los planteamientos cartesianos y propone un método general para construir ecuaciones polinomiales de cualquier grado.

Para aplicar este método de construcción de ecuaciones es necesario realizar antes una extensión de la geometría que consiste en definir y considerar, además de la recta y el círculo, los nuevos entes geométricos, es decir nuevas curvas.

En *La Geometría*, después de resolver problemas que llevan a ecuaciones cuadráticas mediante la regla y el compás, Descartes pasa a explicar cómo deben ser usadas las cónicas para resolver problemas hasta de cuarto grado, esto es, problemas cuya traducción algebraica produce una ecuación de grado cuarto o menor.

Hasta el momento los elementos geométricos introducidos no resultan ser nuevos, ya que eran conocidos desde la antigüedad griega, pero para la resolución de problemas de grados mayores es necesaria la inclusión de curvas más complicadas.

Como se explica con más detalle en los capítulos subsecuentes de esta tesis, Descartes menciona que todas las curvas que sean generadas por un movimiento continuo único, o por movimientos continuos subordinados los unos a los otros, son geométricamente aceptables y servirán para resolver problemas planteados en términos de ecuaciones polinomiales. Este criterio de aceptabilidad de curvas que establece Descartes y que maneja siempre de manera análoga al trazo del círculo mediante el compás, responde precisamente al espíritu geométrico de la época y a la influencia que sobre él había ejercido el pensamiento griego antiguo. Este espíritu puede, de alguna manera, ser descrito como que en toda construcción debe existir la posibilidad de encontrar en acto (mediante trazos) la solución buscada, esto es, debe ser posible realizar una aplicación práctica de la construcción. Si las curvas no pudieran ser trazadas entonces el problema no podría ser en verdad resuelto.

Este criterio, que podríamos caracterizar como mecánico, se muestra en un momento dado dentro de *La Geometría*, aunque de manera un tanto confusa e impráctica. Descartes deja de lado este criterio mecánico al trabajar con óvalos y otras curvas que poseen propiedades ópticas importantes (Descartes, *La Geometría*, libro II), ya que no encuentra, o al menos no muestra, una construcción mecánica y tiene que recurrir a construcciones por puntos o mediante cuerdas. Así pues, el criterio que finalmente es adoptado consiste en que las curvas aceptables sean las que tengan ecuaciones algebraicas. Descartes considera que el criterio mecánico y el algebraico son equivalentes, dando para ello algunos argumentos que no son del todo convincentes. En muy pocos casos dentro del libro se calculan las ecuaciones de curvas mecánicas y, de hecho, la conversión inversa nunca es realizada. No es sino hasta hasta el siglo XIX que aparece la primera demostración de que esta equivalencia es en efecto válida.

Como ya se mencionó, en la época era muy importante no recurrir a medios más complicados de lo necesario para resolver los problemas. Así, Descartes apunta que en sus construcciones se deberán usar las curvas más "simples". Para establecer la simplicidad de una curva se basa en el grado algebraico de la ecuación de la misma. Según este criterio, curvas de grados menores son más simples que las de grados mayores. Evidentemente, curvas con ecuaciones del mismo grado son igual de simples.

Este criterio de simplicidad no fue bienvenido por los matemáticos de la época, ya que se argumentaba que se apartaba del espíritu de la geometría y se decía ademas, que era un criterio externo que nada tenía que ver. Sin embargo, como no fue posible establecer un criterio claro de otra índole, finalmente fue aceptado.

Por otra parte, Descartes también ataca problemas que se plantean algebraicamente en términos de dos incógnitas, como es el caso del problema de Papo (Ver la sección "2.7. El problema de Pappo y las curvas aceptables en geometría", en el Capítulo 2 de esta tesis). Estos problemas tienen como solución un conjunto de parejas de valores, los que corresponden a puntos en el plano, siendo la solución completa un "lugar geométrico", es decir una curva en el plano.

El interés de Descartes en este sentido no es tanto la identificación de la curva o de los puntos, sino el mecanismo para trazarla mediante algún tipo de artefacto "ideal". En concreto, hacia donde dirige sus afanes es hacia la posibilidad de trazar las curvas aceptables.

# Capítulo 2

# El origen de las ideas que conducen a *La Geometría*. El problema de la clasificación de curvas y la construcción de ecuaciones

## 2.1. El compás múltiple

Alrededor de 1618 Descartes comienza a trabajar en un artefacto que le permite construir medias proporcionales. Este aparato, al que se le puede llamar también compás múltiple, ya que traza varias curvas a la vez, aparece en *La Geometría* años más tarde y juega un papel importante en el trazo de curvas de grado creciente, las cuales en dicha obra son definidas algebraicamente y clasificadas de acuerdo con su complejidad.

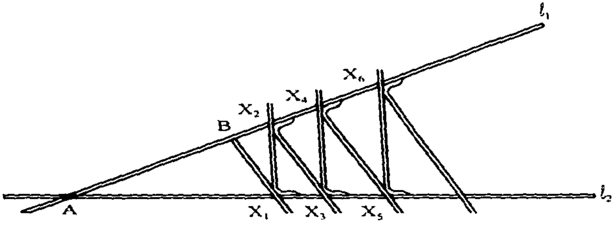



Figura 2.1

El compás múltiple (figura 2.1) consiste en dos ejes $l_1$ y $l_2$ que se intersecan en un punto A formando un ángulo cuya magnitud puede aumentar o decrecer. Al eje $l_1$ (o $l_2$) se le coloca en posición fija y formando un ángulo recto con él la regleta $BX_1$. Las regletas móviles $X_1X_2$, $X_2X_3$, $X_3X_4$, ... se colocan formando ángulos rectos con cada eje de manera alterna. Se pueden colocar tantas regletas como se quiera y éstas habrán de deslizarse, a lo largo del eje en que están apoyadas, al abrirse o cerrarse el compás. No es posible abrir el compás hasta los 90 grados ya que $l_1$ y AB serían paralelas.

En este aparato no influye el ancho de las regletas para determinar la precisión. Es muy importante observar el dibujo original de Descartes y percatarse de que los filos derechos de cada regleta son en realidad los que determinan los movimientos de las regletas que empujan, al intersecarse con éstas exactamente sobre los ejes.

Inicialmente este compás múltiple no tiene como fin el estudio de curvas, como ocurre en *La Geometría*, si no que, como se dice al principio del capítulo, se usa para generar medias proporcionales. Esto debido a que los triángulos $BAX_1$, $X_1AX_2$, $X_2AX_3$, $X_3AX_4$, ... son similares, por lo que directamente se obtienen las siguientes proporciones geométricas:

$$AB/AX_1 = AX_1/AX_2 = AX_2/AX_3 = AX_3/AX_4 = \cdots$$

De esta forma se generan tantas medias proporcionales como regletas móviles se coloquen en el compás y es posible, dados dos segmentos, encontrar $n$ medias proporcionales mediante el siguiente procedimiento:

Sean $a$ y $b$ las longitudes de dos segmentos ($a < b$) y supóngase que se quieren encontrar $n$ medias proporcionales entre $a$ y $b$. Entonces, si se construye un compás tal que la longitud de AB sea $a$ y la intersección de la regleta móvil número $n+1$ con el eje opuesto esté a una distancia $b$ de A, es decir $Ax_{n+1} = b$, las magnitudes de los segmentos $AX_1$, $AX_2$, $AX_3$, ... $AX_n$ serán las medias proporcionales entre $a$ y $b$.

Se puede considerar el mismo problema sujeto a alguna restricción de tipo práctica, como cuando contamos únicamente con un compás múltiple donde no podemos variar la magnitud de AB. En este caso también se puede resolver el problema construyendo, con regla y compás (ver demostraciones), un segmento de magnitud $b'$ tal que

$$a/AB = b/b',$$

con lo cual las medias proporcionales que buscamos, llamémoslas $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, guardarán esta misma proporción con $AX_1$, $AX_2$, $AX_3$, ... $AX_n$ (ver demostraciones), es decir

$$a/AB = x_1/AX_1 = x_2/AX_2 = x_3/AX_3 = \cdots = x_n/AX_n = b/b'. \tag{2.1}$$

De este modo, como la proporción $a$/AB = $b/b'$ es conocida, es posible entonces obtener, utilizando el procedimiento inverso al usado para encontrar $b'$, cada uno de los valores $x_i$ ($i$ = 1, 2, ... $n$) que son las medias proporcionales buscadas.

*Demostraciones*

1) Para construir el segmento $b'$ con regla y compás a partir de $a$, AB y $b$ tracemos el triángulo ACD (figura 2.2), AC sobre AB (sin que A esté entre B y C), AC = $a$ y AD = $b$, y tracemos la paralela a DC por B que interseca a AD en E.

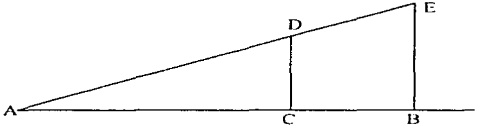



Figura 2.2

Como ACD y ABE son semejantes, entonces

$$AC/AB = AD/AE \iff a/AB = b/AE \implies b' = AE.$$

**Q.E.D.**

2) Para demostrar que en la ecuación (2.1) $x_i$ son las medias proporcionales entre $a$ y $b$, es necesario nada más considerar que

$$a/AB = x_1/AX_1 = x_2/AX_2 = x_3/AX_3 = \cdots = x_n/AX_n = b/b' = \alpha$$

de donde

$$a/x_1 = \alpha AB/\alpha AX_1 = AB/AX_1$$

y, en general

$$x_{i-1}/x_i = \alpha AX_{i-1}/\alpha AX_i = AX_{i-1}/AX_i \qquad (1 < i \leq n)$$

y como

$$AB/AX_1 = AX_1/AX_2 = \cdots AX_{n-1}/AX_n$$

tenemos

$$a/x_1 = x_1/x_2 = x_2/x_3 = \cdots = x_{n-1}/x_n = x_n/b$$

**Q.E.D.**

## 2.2. Los problemas clásicos y la consonancia musical

Descartes andaba tras de una o más soluciones a los llamados tres problemas clásicos de la geometría griega que son: la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo. Hoy día sabemos que estos problemas no tienen una construcción euclideana, es decir, que no se pueden resolver recurriendo únicamente a la regla y el compás. Su interés es más profundo en los dos primeros casos y de hecho los resuelve utilizando su compás múltiple y otro artefacto similar.

Desde la antigüedad, Hipócrates de Quíos descubrió que el problema de la duplicación del cubo se podía reducir a encontrar dos medias proporcionales entre la arista del cubo que se buscaba duplicar y su doble. Esto se ve claramente al tomar $a$ como la arista del cubo, de tal modo que $a^3$ es el cubo original y $2a^3$ es el cubo buscado, a $x$ como la primera y a $y$ como la segunda medias proporcionales entre $a$ y $2a$. Así:

$$a/x = x/y = y/2a \quad => \quad a^3/x^3 = (a/x) \cdot (x/y) \cdot (y/2a)$$

$$=> \quad a^3/x^3 = a/2a \quad <=> \quad 2a^4 = x^3a \quad <=> \quad 2a^3 = x^3.$$

Esto a su vez significa que la duplicación del cubo era equivalente a resolver una ecuación cúbica que más adelante mostrará su importancia. El descubrimiento de Hipócrates de Quíos no muestra cómo encontrar las medias proporcionales pero da lugar al comienzo de la búsqueda de un procedimiento para ello. De hecho, en el siguiente siglo, el tercero antes de Cristo, Erastóstenes diseña y construye un aparato al que nombra *mesolabium* (figura 2.3), y que seguramente no por casualidad tiene el mismo nombre que Descartes le da a su compás múltiple, con el cual es posible encontrar medias proporcionales.

El aparato de Erastóstenes respondía también a una necesidad práctica que Plutarco, en la *Vida de Marcelo*, hace notar al señalar que hombres de la talla de Arquímedes, Eudoxo y Arquitas, quieren adornar a la geometría de una gracia muy peculiar mezclándola con problemas que difícilmente se podían resolver apelando exclusivamente a la razón y a la demostración geométrica: "Tal resulta ser el problema de las dos medias proporcionales, para cuya solución no basta el razonamiento ... y que para resolverlo Arquitas y Eudoxo han recurrido a los medios mecánicos y han construido *mesolabiums* ajustados según líneas curvas o secciones cónicas".

La importancia práctica del *mesolabium* se puede entender si traemos a colación una carta que Eutocio envía a Aristóteles y en la que comenta que "mi invento (el *mesolabium*) puede también ser útil para quienes desean aumentar el tamaño de sus catapultas y de sus ballestas, pues todo debe aumentar con cierta proporción si se desea que el lanzamiento aumente en proporción, lo cual no se puede lograr sin la invención de las *medias*".

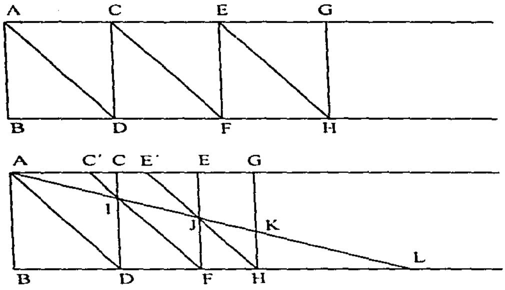



Figura 2.3

El artefacto para obtener dos medias proporcionales aparece en la figura 2.3 y consiste en un marco rectangular ABHG en el cual se colocan tres triángulos rectángulos, los cuales Erastóstenes representaba en realidad por marcos rectangulares –con sus diagonales, ACD, AEF y AGH– que pueden deslizarse, sobre rieles separados, a todo lo largo del marco e incluso sobreponerse unos a otros.

Para encontrar dos medias proporcionales entre $a$ y $b$ ($a < b$) primero se colocan las rectas AG y BH a una distancia AB = $a$, después se localiza K sobre HG de tal modo que HK = $b$, para finalmente "jugar" moviendo los triángulos hasta que los puntos del dibujo A, I, J y K queden alineados. En esta situación I y J corresponden a la intersección de las diagonales E'H y C'F con la recta AK.

Por la semejanza de los triángulos ADI, IFJ, JHK se tienen las igualdades

$$AB/AD = ID/IF = JF/JH$$

y

$$AD/ID = IF/JF = JH/KH$$

$$\Rightarrow (AB/AD) \cdot (AD/ID) = (ID/IF) \cdot (IF/JF) = (JF/JH) \cdot (JH/KH)$$

$$\Rightarrow AB/ID = ID/JF = JF/KH$$

De este modo ID y JF son la primera y segunda medias proporcionales entre $a$ y $b$ ($a < b$).

La demostración puede generalizarse para mostrar que un aparato con $n + 1$ triángulos puede ser utilizado para encontrar $n$ medias proporcionales.

Esta idea adquiere relevancia a fines del siglo XVI, cuando un musicólogo llamado Gioseffo Zarlino, anterior a Descartes, escribe sobre la relación entre la consonancia musical y las medias proporcionales, y explica que la octava musical en un instrumento de cuerdas se compone de doce semitonos que resultan ser los sonidos producidos por las doce medias proporcionales entre un segmento de cuerda de longitud dada y su mitad. Menciona también que las medias proporcionales no pueden ser construidas con regla y compás pero sí con el *mesolabium* de Erastóstenes. El libro escrito por Zarlino es retomado por Descartes quien con base en él publica una monografía titulada "*Compendium Musicae*", misma que aparece en 1618.

Lo que interesa e importa sobre este punto es que el compás múltiple, que en *La Geometría* sirve para trazar curvas de complejidad creciente y, de hecho, se muestra como la justificación para aceptar el uso de esas curvas en geometría, resulta haber sido diseñado para resolver, de manera general, el problema de la construcción de medias proporcionales en un contexto de consonancias musicales.

El uso de medios mecánicos para resolver problemas geométricos entusiasmó a Descartes, quien continuó trabajando en la resolución de los problemas clásicos y, apoyado una vez más en las posibilidades de los aparatos mecánicos, en 1619 construye un trisector de ángulos (figura 2.4).

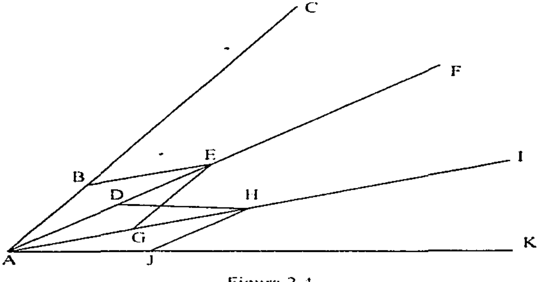



Figura 2.4

Este artefacto (figura 2.4) consiste en cuatro varillas AC, AF, AI y AK a las cuales se les colocan bisagras BE, DH, GE y JH, respectivamente, fijas en los puntos B, D, G y J y en los otros extremos sujetas a anillos que pueden deslizarse por las varillas correspondientes conforme el ángulo CAK crece o decrece. Los segmentos AB, AD, AG, AJ, BE, DH, GE y JH son todos de la misma magnitud. Para trisectar el ángulo dado se hacen coincidir sus lados con las varillas AC y AK, obteniendo la trisección en cualquiera de los ángulos CAF, FAI o IAK.

Estos últimos ángulos son iguales debido a que los triángulos ABE, AGE, ADH y AJH son congruentes, ya que ABE y AGE tienen sus tres lados iguales, AGE, ADH tiene dos ángulos y un lado iguales y AGH y AJH tienen sus tres lados iguales.

El rango de variabilidad del ángulo CAK es desde 0 hasta $\pi$, lo cual se debe a que el aparato no puede llegar a ángulos negativos porque las varillas no pueden traspasarse una a la otra y, cuando el ángulo vale $\pi$ los puntos D y E coinciden al igual que H y G, por lo que los anillos no pueden seguir deslizándose por las varillas para agrandar el ángulo.

Descartes advirtió la posibilidad de generalizar este aparato para dividir ángulos dados en un mayor número de partes añadiendo más varillas, es decir estaba consciente de haber inventado un método para dividir ángulos en $n$ partes iguales.

Del mismo modo que con el compás múltiple, con el que resuelve el problema para un número arbitrario de medias proporcionales entre dos magnitudes dadas, aquí realiza también una importante construcción generalizada, cuestión que no era muy usual entre los matemáticos o científicos de la época.

## 2.3. Resolución de ecuaciones cúbicas

Poco después de la invención del trisector de ángulos, Descartes se enfoca en la resolución de ecuaciones cúbicas y afirma poder resolver, con ayuda de su compás múltiple, aquéllas de los tipos

1) $x^3 = \pm ax \pm b$

2) $x^3 = \pm ax^2 \pm b$ ($a$, $b$, $c$, reales positivos)

3) $x^3 = \pm ax^2 \pm bx \pm c$

que en realidad abarcan, en lo que se refiere al valor de las raices, a todas las ecuaciones polinómicas de tercer grado, ya que si consideramos la ecuación general $px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ ($p$, $q$, $r$, $s \in \Re$, $p \neq 0$), ésta tiene las mismas raices que la ecuación $x^3 + (q/p)x^2 + (r/p)x + s/p = 0$ ($p$, $q$, $r$, $s \in \Re$, $p \neq 0$), la cual puede escribirse de la forma $x^3 = (-b/a)x^2 + (-c/a)x + (-d/a)$.

Descartes, con su espíritu generalizador, incluye tipos de ecuaciones que los matemáticos de la época excluían ya que carecían de raíces positivas. Estos eran

$$1)\ x^3 = -ax - b$$

$$2)\ x^3 = -ax^2 - b \qquad (a, b, c, \text{ reales positivos})$$

$$3)\ x^3 = -ax^2 - bx - c.$$

La afirmación de Descartes es hecha sin tener la completa certeza de su veracidad, pues en realidad sólo había resuelto algunos de los casos particulares con el uso de su compás múltiple.

Al resolver el problema de la duplicación del cubo, resuelve también la ecuación cúbica $x^3 = 2a^3$ y se le ocurre que todas las ecuaciones cúbicas pueden ser resueltas encontrando medias proporcionales. En esto Descartes se equivoca y comete errores en la resolución de las ecuaciones, pero avanza mucho en lo que se refiere a los planteamientos que aparecerán en *La Geometría* y puede resolver algunos casos particulares. Por ejemplo, resuelve satisfactoriamente la ecuación $x^3 = x + b$ mediante el siguiente procedimiento:

Utilizando el compás múltiple, tomemos $AB = 1$ y $AX_1 = x$. En el compás tenemos que

$$AB/AX_1 = AX_1/AX_2 = AX_2/AX_3 = \cdots \tag{2.2}$$

a lo cual $AX_2 \cdot AB = AX_1 \cdot AX_1 \Rightarrow AX_2 = x^2$, del mismo modo $AX_3 \cdot AX_1 = AX_2 \cdot AX_2 \Rightarrow AX_3 \cdot x = x^2 \cdot x^2 \Rightarrow AX_3 = x^3$. Repitiendo el procedimiento obtenemos que la igualdad (2.2) puede escribirse como

$$1/x = x/x^2 = x^2/x^3 = \cdots$$

Pero fijándonos en el compás podemos ver que $X_1X_3 = AX_3 - AX_1 = x^3 - x$, de tal modo que si el compás es abierto hasta que $X_1X_3 = b$, se habrá resuelto la ecuación $x^3 - x = b$ tomando el valor $x = AX_1$, lo que implica que se satisface la ecuación inicial $x^3 = x + b$.

Sin embargo, comete errores muy graves pensando, por ejemplo, que la ecuación $x^3 = 7x + 14$ puede resolverse simplificándola en $1/7\, x^3 = x + 2$ y resolviendo $x^3 = x + 2$ para después multiplicar las raíces por 7, lo cual evidentemente es un error ya que elimina sin más el coeficiente del término cúbico alterando los valores de las raíces.

Otro error es el de no percatarse que el término independiente en la ecuación $x^3 = x + b$ debe ser positivo, ya que es la diferencia $AX_3 - AX_1$. No tiene sentido que $b$ tome valores negativos porque al abrir el compás sólo toma en cuenta su magnitud y el resultado no es distinto al de los valores positivos.

Dejando de lado estas omisiones, lo cierto es que las posibilidades que Descartes lograba percibir para su compás lo llevaron a pensar, como lo comenta en su carta a Isaac Beckman (26 de marzo, 1619) que este instrumento le abría la senda hacia "una ciencia completamente nueva ... que resuelva con generalidad toda suerte de problemas para cantidades de cualquier género" [A.T., X, pp. 156-157].

El logro de Descartes es haberse dado cuenta que la representación de las raíces de una ecuación cúbica era equivalente ya fuera a la trisección del ángulo o a la duplicación del cubo. El crédito de descubrir esto por primera vez corresponde a Viète, quien lo señalo en su *Supplementum geometricae* (1593) (Boyer, *Analytic Geometry*, 64). Sin embargo, la notación utilizada por Descartes, seguramente tomada de el *Algebra* de Clavius –texto que estudió en La Flèche– indica que para esta época no conocía el trabajo de Viète, ya que el sistema de notación de éste es muy superior al de Clavius.

Parecía maravilloso que este instrumento trazara curvas que correspondían a las razones geométricas simples contenidas en –o en las que se traducían– las ecuaciones. Dicho en pocas palabras, el compás múltiple de Descartes traducía las ecuaciones cúbicas en relaciones espaciales bien definidas, lo que permitía afirmar que se estaba frente a una generalización de un paso alcanzado precisamente por el pensamiento griego –la generalización de la aritmética– y que este caso se podría describir como la geometrización del álgebra

## 2.4. Aritmética y Geometría

Los errores a los que se refiere la sección anterior, son graves, pero quedan opacados ante la magnitud de la empresa que Descartes se proponía: encontrar un método práctico para la resolución de algunas clases de ecuaciones cúbicas. Gracias a su compás múltiple (también llamado por algunos compás proporcional) Descartes se encuentra a la entrada del estudio de una "ciencia del todo nueva" (como él la llamaba) a la que consideraba como una empresa "increíblemente ambiciosa".

Como se lee en la misma carta a Beckman que ya se mencionó, esta ciencia consiste, según Descartes, en la resolución general de problemas que se formulen con cantidades discretas y continuas. Con esto en mente, establece una analogía entre la geometría (cantidad continua) y la aritmética (cantidad discreta) al afirmar que la aritmética se compone en su totalidad (esto parece ser la intención de lo que suponía Descartes) de los siguientes tres tipos de problemas:

1) Los que se pueden resolver con números racionales.
2) Los que sólo se pueden resolver mediante números irracionales.
3) Los que no se pueden resolver y sólo se puede suponer su solución.

y que la geometria está compuesta solamente por los siguientes problemas:

1) Los que se pueden resolver con rectas y círculos.
2) Los que sólo se pueden resolver mediante curvas producidas por un movimiento continuo único o movimientos subordinados los unos a los otros, como los trazados por su compás múltiple y otros aparatos similares.
3) Los que no se pueden resolver mas que con curvas generadas por movimientos no subordinados unos a otros y que, con seguridad, son sólo imaginarios.

Afirma que no cree que existan problemas geométricos que queden fuera de estos tres tipos y que él habrá de mostrar qué problemas pueden resolverse y de qué manera, con lo cual, después de un trabajo humano casi infinito, apenas quedará algo que descubrir en geometría.

Es importante notar que Descartes se propone resolver los problemas geométricos por analogía con los procedimientos aritméticos y no, como se supone a menudo, algebrizar la geometría, cuestión que hoy día es una consecuencia no planeada por él.

El hecho de que piense, con casi plena seguridad, que todos los problemas se reducen a los casos que enumera tiene que ver con los planteamientos de las matemáticas de la época y las cuestiones que se daban por válidas alrededor de ella.

A principio del siglo XVII continuaban vigentes los textos matemáticos clásicos de Euclides, Apolonio y Arquímedes. En ellos se establecía la existencia de dos tipos de proposiciones matemáticas que son los teoremas y los problemas. Los primeros se demostraban y los segundos se construían probando que la construcción cumplía con las propiedades requeridas.

En los *Elementos* de Euclides se encuentran sólo construcciones con regla y compás, lo cual solía ser tomado como estándar, mientras en las *Colecciones Matemáticas* de Papo se establece la siguiente división en tres partes de los problemas geométricos:

a) Planos, si se construían con regla y compás.
b) Sólidos, si se construían con cónicas.
c) Lineales, si se requería de curvas más complicadas.

Esta línea de pensamiento de alguna manera es retomada por Descartes en su clasificación, misma que sólo cambia en la generalización de las cónicas a curvas de grado algebraico superior. Dentro de su clasificación de los problemas geométricos señala que no debe existir diferencia entre las líneas geométricas y las mecánicas, como los griegos lo consideraban, sino que unas son tan válidas como las otras. Menciona que la recta y el círculo finalmente son trazados con instrumentos que no son más precisos que su compás múltiple y define lo geométrico como aquéllo preciso y exacto.

Al considerar estos antecedentes resulta claro que para Descartes la solución de los problemas geométricos es una construcción realizada con curvas, no un procedimiento algebraico. La solución es válida en tanto puede construirse o hacerse de alguna manera similar a las construcciones euclideanas: el álgebra, que es usada como herramienta cuando es necesario, queda como eso, como una herramienta.

Aquí es donde, para resolver los problemas geométricos del segundo tipo, entra el compás múltiple como constructor de curvas (figura 2.5).

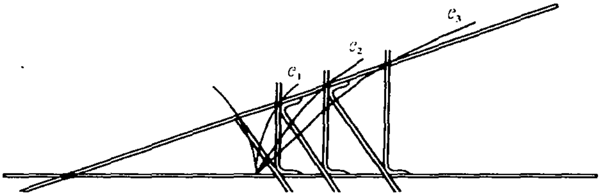



Figura 2.5

Este aparato y la forma en que traza curvas al abrirse es para Descartes tan válido y claro como un compás normal, pero además considera que no es necesario construirlo y usarlo. En realidad, según él, para la resolución de problemas basta con imaginar (ver, para un significado de la imaginación, el capítulo 3 de esta tesis) que la curva es trazada y considerar sus propiedades. Posiblemente esto no era más que una reminiscencia del experimento imaginado –*secundum imaginationem*– al que tanta referencia hacen los filósofos naturales del siglo XIV (Murdoch, "Intellectual factors", 280-289).

Por otra parte, es claro que las curvas son generadas mediante un movimiento único o movimientos subordinados los unos a los otros, ya que al abrir el compás ese movimiento basta para que la primera regleta empuje a la segunda, la segunda a la tercera y así sucesivamente, todos los movimientos dependiendo del primero.

Al enunciar los problemas del tercer tipo, los que no se pueden resolver mas que con curvas generadas por movimientos no subordinados unos a otros, Descartes da como ejemplo la cuadratriz (figura 2.6).

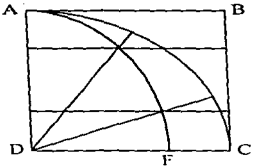



Figura 2.6

Para obtener esta curva trazamos el cuadrado ABCD y deslizamos verticalmente el lado AB a una velocidad uniforme desde su posición hasta DC. Además giramos, con centro en D y en el sentido de las manecillas del reloj, el lado DA, también a una velocidad circular uniforme hasta DC. Los movimientos deben comenzar y terminar al mismo tiempo para que la cuadratriz quede determinada por los puntos de intersección de las dos rectas en movimiento (sin incluir el punto F).

Las velocidades de los movimientos de AB y DB no pueden ajustarse entre sí debido a que no es posible determinar el cociente de manera racional, ya que la relación entre los movimientos involucra una recta y un arco de circunferencia, lo que implica que el cociente contiene a $\pi$ como factor, que no es racional, produciendo así un resultado irracional. No es posible entonces supeditar un movimiento al otro.

Al parecer Descartes conocía el procedimiento inventado por Clavius para construir la Cuadratriz, presentado en su *Comentario sobre Euclides*. Clavius localiza puntos de la curva mediante la bisección consecutiva del cuadrante de círculo y del segmento AD. Primero biseca el cuadrante y el segmento, vuelve a bisecar las 2 partes obtenidas para tener 4 y después 8, hasta que en el paso $n$ obtiene $2^n$ puntos de la curva mediante la intersección de las dos rectas mostradas en la figura 2.6. Aunque es posible obtener una cantidad tan grande de puntos sobre la curva como se quiera, no existe una forma de trazarla continuamente, y por tanto no le parece a Descartes como una construcción válida. Esto resulta curioso porque en *La Geometría*, para construir la conchoide, se utiliza un procedimiento también de localización de puntos y la curva no es en realidad trazada.

## 2.5. Curvas y ecuaciones

Hasta el momento –1619– no existe para Descartes una relación íntima o fundamental entre las ecuaciones y las curvas. Sólo ha encontrado un aparato que traza las curvas que él considera aceptables, las cuales caracteriza como las generadas por un movimiento único o por movimientos subordinados.

Por otra parte, al establecer una analogía entre la aritmética y la geometría, una como el espacio de las cantidades discretas y la otra como el de las cantidades continuas, Descartes necesita romper con la idea de representar $x^2$ como una superficie y $x^3$ como un sólido, como era usual, ya que ello no le permite representar magnitudes correspondientes a potencias mayores. Es necesario interpretar el resultado de las operaciones con segmentos como segmentos de nuevo, de la misma forma que ocurre con los números. De hecho, *La Geometría* comienza con la construcción de las operaciones aritméticas (+, −, ÷, × y raíz cuadrada) para segmentos utilizando regla y compás, cuestión que en un inicio parece no tener una razón de ser, pero que en realidad, por sencillo que parezca, es el planteamiento basal de toda la obra y el paso fundamental en la simplificación de la representación algebraica de curvas.

Para entender la transición de la idea cartesiana, es aconsejable repasar las nociones sobre curvas que Euclides había heredado a la geometría de principios del siglo XVI. La forma en que se definían las curvas en la antigüedad griega, sobre todo las cónicas, era mediante sus propiedades, y nunca por una ecuación –pues no existía nada semejante al álgebra– aunque podemos considerar que está prácticamente implícita. Por ejemplo, la parábola se definía a través del siguiente procedimiento:

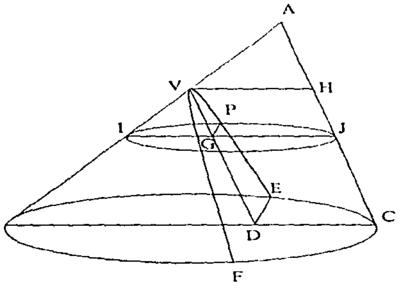



Figura 2.7

Tómese el cono circular recto u oblicuo ABC, A el vértice, B y C puntos diametralmente opuestos en la circunferencia de la base del cono, y un punto V sobre AB desde donde se traza VD paralela a AC y con D en BC. A continuación, trácese EDF perpendicular a BC y sobre la base del cono. Considérese la curva FVE resultante del corte del plano VEF con la superficie del cono.

Si tomamos un punto P arbitrario sobre la curva FVE y trazamos PG paralela a DE y JI paralela a BC por G, tenemos que los triángulos VGI y ACB son semejantes, de donde obtenemos

$$IG/VG = BC/AC. \tag{2.3}$$

Por otra parte, los puntos I, J y P se encuentran situados sobre una circunferencia con G sobre el diámetro IJ y con GP perpendicular a éste (figura 2.8).

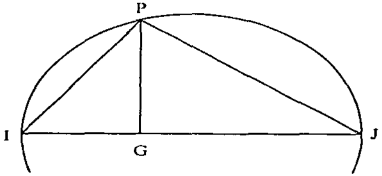



Figura 2.8

Los triángulos IGP y PGJ son similares por tener los tres ángulos iguales, ya que los ángulos IGP, JGP y IPJ son rectos. Así, tenemos que

$$PG/IG = JG/PG \tag{2.4}$$

y multiplicando las igualdades (2.3) y (2.4) tenemos

$$(PG/IG) \cdot (IG/VG) = (JG/PG) \cdot (BC/AC) \iff PG/VG = (BC \cdot JG)/(AC \cdot PG)$$

pero JG = HV, y como AVH es semejante a ABC tenemos que

$$HV/VA = BC/BA \Rightarrow HV = (VA \cdot BC)/BA$$

$$\Rightarrow (PG)^2 = r\, VG \tag{2.5}$$

con $r = ((BC)^2 \cdot AV)/(AC \cdot BA)$, que es el *latus rectum* y, además, es una constante.

Así pues, cualquier curva que satisface la propiedad (2.5) para todo punto P en ella era, para los griegos, una parábola.

Para nosotros, la diferencia entre definir la parábola como los griegos o por la ecuación $x^2 = ry$ es, en principio, sólo una cuestión de notación. La equivalencia entre las dos definiciones no nos presenta un problema porque damos por construidos automáticamente los ejes cartesianos, cuestión que para el siglo XVII representaría algo completamente nuevo.

Regresando a las medias proporcionales: dados $a$ y $b$ es posible encontrar, usando el compás múltiple, $x$ y $y$ tales que

$$a/x = x/y = y/b$$

lo que implica también las siguientes tres ecuaciones

a) $x^2 = ay$
b) $y^2 = bx$
c) $xy = ab$

mismas que representan tres curvas, dos parábolas y una hipérbola, respectivamente.

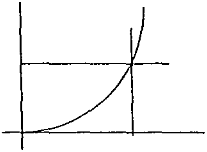


Figura 2.9

De lo anterior se puede concluir que si se toma el compás múltiple AB = $a$, al irlo abriendo $AX_1$ tomará el valor de $x$ y $AX_2$ el valor de $y$ que satisfacen la ecuación a). Así pues, el compás de Descartes traduce o convierte una ecuación en dos movimientos subordinados uno al otro, mismos que determinan pares de segmentos que satisfacen la ecuación. Si estos movimientos son asociados a rectas que se deslizan con ciertas velocidades sobre dos ejes perpendiculares, siendo ambas paralelas al eje por el cual no se deslizan (figura 2.9), entonces las intersecciones de las rectas, similarmente a la construcción de la cuadratriz, determinarán los puntos de la curva, en este caso de la parábola.

No existe certeza de que este razonamiento haya sido el que llevó a Descartes a relacionar las curvas con sus ecuaciones. Sin embargo, no es difícil que así hubiera sido. Para reforzar esta hipótesis y justificar la razón por la que se toman ejes a los que se refiere la curva, analicemos la construcción de Menaecmo para hallar dos medias proporcionales (figura 2.10), misma que ya que era conocida por Descartes, pues aparece en el comentario que hace Eutocio de los primeros cuatro libros de *Las Cónicas* de Apolonio, publicado por Federico Commandino en 1516 (Bologna). Esta publicación tuvo una gran difusión entre el medio académico europeo.

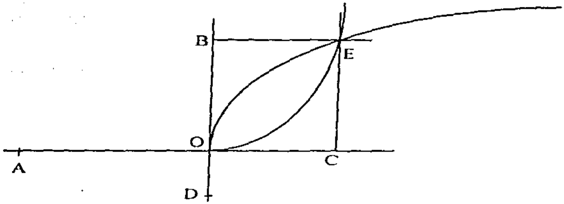



Figura 2.10

Sean OA y OD (OD < OA) los segmentos entre los cuales se quieren hallar las medias proporcionales y colóquense sobre dos líneas perpendiculares como lo indica la figura 2.10. Tomando como lado recto OD trácese una parábola con vértice O y eje OB; también con lado recto OA trácese una parábola con vértice O y eje OC. Las parábolas habrán de intersecarse en E, desde donde se bajarán las perpendiculares a AO y DO en B y C, respectivamente.

De este modo, como el punto E pertenece a las dos curvas, entonces

$$(OB)^2 = OA \cdot OC \quad \& \quad (OC)^2 = OD \cdot OB \quad <=> \quad OA/OB = OB/OC \quad \& \quad OB/OC = OC/OD$$

$$<=> \quad OA/OB = OB/OC = OC/OD.$$

Lo cual significa que OB y OC eran las medias proporcionales buscadas.

Algo muy importante de destacar es que para Descartes había curvas que tenían ecuaciones, pero no a la inversa. Las ecuaciones no necesariamente daban lugar a curvas.

En términos generales, lo que Descartes descubre es que el meollo de las operaciones con su compás radica en que éstas corresponden a la manipulación de magnitudes proporcionales, y que por ende el compás múltiple podría ser utilizado para resolver cualquier asunto reducible a un problema sobre magnitudes proporcionales. Parece que para 1619 Descartes comenzaba a darse cuenta que el manejo de magnitudes proporcionales –bajo la forma de longitudes de segmentos– que representaban números o variables numéricas denotadas mediante símbolos, así como las medias proporcionales buscadas en los casos geométricos, podrían todas ellas ser representadas con su compás. Esto empujaba a Descartes a contemplar a las matemáticas en términos del compás múltiple, haciendo que su nuevo propósito fuera, como lo señala Schuster, "el intentar reescribir las ecuaciones como proporciones y luego acomodarlas bajo la arquitectura del compás" (Schuster, *Scientific Revolution*, 146, citado en Gaukroger, *Descartes*, 99).

## 2.6. La construcción de ecuaciones y la clasificación de las curvas

Cerca de 1620 Descartes descubre que es posible encontrar dos medias proporcionales utilizando una parábola y un círculo de ciertas dimensiones y en ciertas posiciones, aunque no da a conocer la demostración hasta muchos años después.

Considerando entonces que dos medias proporcionales pueden hallarse mediante una ecuación cúbica, como se menciona páginas atrás, y mediante la intersección de una parábola con un círculo, Descartes conjetura la posibilidad de resolver ecuaciones de tercero y cuarto grado de manera general mediante un procedimiento similar.

Por 1628 este descubrimiento y la idea surgida a partir de él habían madurado hasta adquirir la misma forma con la que aparecen en *La Geometría*, donde muestra cómo reducir ecuaciones de tercero y cuarto grado a las formas

$$x^3 = \pm\, apx \pm a^2$$

$$x^4 = \pm\, apx^2 \pm a^2qx \pm r$$

mismas que pueden ser "construidas" (en el sentido de lo dicho en la sección "2.4. Aritmética y Geometría" de este capítulo; ver también el capítulo 3 de esta tesis) intersecando un círculo y una parábola. Por ejemplo, la ecuación $x^4 = apx^2 - a^2qx + r$, con a = 1, se resuelve mediante la siguiente construcción (Figura 2.11).

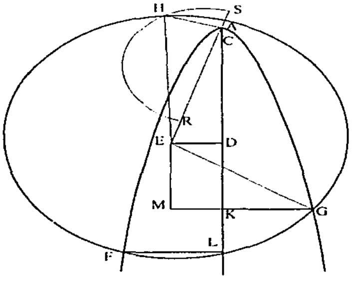



Figura 2.11

Trácese la parábola FAG con eje AC, tomando AC = $\frac{1}{2} a = \frac{1}{2}$ como su *latus rectum*. Tómese D en AC (del mismo lado de A que C) tal que CD = $\frac{1}{2} p$. Trácese DE perpendicular a AC tal que DE = $\frac{1}{2} q$. Tómese R en AE (del mismo lado de A que E) tal que AR = $r$ y también S (del lado contrario de A que E) tal que AS = $a$ = 1. Trácese un circulo con diámetro RS y dibújese la perpendicular a RS por A que cortará al circulo en H. Con radio EH y centro en E trácese un círculo que intersecará a la parábola en G y F y al eje de la parábola en L. Trazamos también las líneas auxiliares MK, paralela a DE, y EM paralela a DK. Resulta que GK es la raíz positiva de la ecuación y FL corresponde en magnitud a la negativa.

*Demostración*

Se demuestra sólo que GK es la raiz positiva. El que FL también es raíz se comprueba de manera semejante. Sean GK = $x$, AK = $y$. La parábola satisface la ecuación $x^2 = y$, por lo que tenemos

$$\mathrm{DK} = \mathrm{AK} - \mathrm{AD} = x^2 - (\mathrm{AC} + \mathrm{CD}) = x^2 - \tfrac{1}{2} p - \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \ (\mathrm{DK})^2 = (\mathrm{EM})^2 = x^4 - px^2 - x^2 + \tfrac{1}{4} p^2 + \tfrac{1}{2} p + \tfrac{1}{4}$$

como DE = KM = $\frac{1}{2} q$, sucede que

$$(\mathrm{GM})^2 = (\mathrm{GK} + \mathrm{MK})^2 = x^2 + qx + \tfrac{1}{4} q^2$$

y como EMG es rectángulo, por el teorema de Pitágoras

$$(\mathrm{EG})^2 = (\mathrm{EM})^2 + (\mathrm{GM})^2 = x^4 - px^2 + qx + \tfrac{1}{4} q^2 + \tfrac{1}{4} p^2 + \tfrac{1}{2} p + \tfrac{1}{4},$$

como EAD es también rectángulo

$$(\mathrm{EA})^2 = (\mathrm{AD})^2 + (\mathrm{DE})^2 = (\tfrac{1}{2} p + \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4} q^2.$$

Además $(\mathrm{AH})^2 = \mathrm{AR} \cdot \mathrm{AS}$ (por la proposición 13 del Libro VI de Euclides, que también se obtiene directamente de la igualdad (2.4) anterior), pero AS = 1 y AR = $r$, por lo que se tiene que $(\mathrm{AH})^2 = r$.

Como EAH es rectángulo,

$$(\mathrm{EH})^2 = (\mathrm{EA})^2 + (\mathrm{AH})^2 = \tfrac{1}{4} q^2 + \tfrac{1}{2} p^2 + \tfrac{1}{2} p + \tfrac{1}{4} + r.$$

Como EG = EH por ser ambos radios, $(\mathrm{EG})^2 = (\mathrm{EH})^2$, si y sólo si

$$x^4 - px^2 + qx + \tfrac{1}{4} q^2 + \tfrac{1}{4} p^2 + \tfrac{1}{2} p + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} q^2 + \tfrac{1}{2} p^2 + \tfrac{1}{2} p + \tfrac{1}{4} + r \quad \Leftrightarrow \quad x^4 = px^2 - qx + r$$

Q.E.D.

Al meditar sobre este descubrimiento, Descartes se da cuenta que es de la mayor trascendencia, ya que, a su parecer, ha encontrado "el secreto universal de la solución mediante líneas geométricas de todas las ecuaciones de tercer o cuarto grado". Tal cual lo reporta Isaac Beeckman en su Journal (A.T., X, p. 344).

Además de lo anterior, el descubrimiento de la construcción de medias proporcionales con un círculo y una parábola influyó en la idea de Descartes respecto a cómo clasificar las curvas. Para él las curvas eran geométricas, como se dice más atrás, si se trazaban mediante un movimiento único o por movimientos subordinados y, dentro de las geométricas, clasificaba como "simples" las que se trazaban con facilidad, las que podían trazarse "clara y distintamente", para utilizar términos a los que se recurre en el *Discurso del Método*. Poco después se da cuenta que, aunque las curvas que traza su compás múltiple son simples en el sentido anterior, dichas curvas poseen ecuaciones complicadas. Esto podemos verlo al encontrar las ecuaciones respectivas.

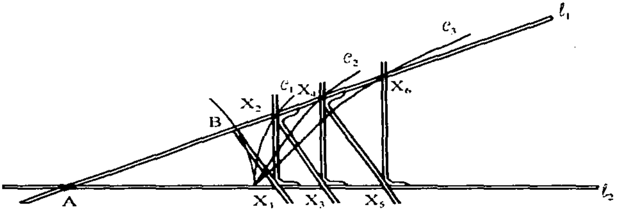



Figura 2.12

En la figura 2.12, si tomamos AB = $a$ constante, $AX_1 = x$, $X_1X_2 = y$ y $AX_2 = z$, podemos encontrar la ecuación de la curva $\mathcal{C}_1$ que traza el punto $X_2$ al deslizarse por $\ell_1$ conforme se abre el compás en los ejes coordenados $x$ y $y$.

Tenemos pues que $ABX_1$ y $AX_1X_2$ son, como ya sabíamos, similares por lo que

$$AX_1/AB = AX_2/AX_1 \quad <=> \quad x/a = z/x \quad => \quad z = x^2/a$$

Pero como $AX_1X_2$ es rectángulo se cumple el teorema de Pitágoras, por lo que

$$(AX_2)^2 = (AX_1)^2 + (X_1X_2)^2 \quad => \quad z^2 = x^2 + y^2 \quad => \quad (x^2/a)^2 = x^2 + y^2 \quad => \quad x^4 = a^2\,(x^2 + y^2)$$

que es la ecuación de $\mathcal{C}_1$ expresadas en coordenadas cartesianas.

Mediante procedimientos similares se obtiene que la ecuación de $\mathcal{C}_2$ es $x^8 = a^2 (x^2 + y^2)^3$ y la de $\mathcal{C}_3$ es $x^{12} = a^2 (x^2 + y^2)^5$, de donde resulta evidente que las curvas no quedan determinadas por una ecuación simple y que la complejidad crece conforme se aumenta el número de regletas en el compás múltiple.

En un principio el problema de que las curvas "simples" no lo fueran algebraicamente no es importante para Descartes, ya que lo importante era que las curvas pudieran trazarse y no que tuvieran asociada una ecuación. Pero al escribir *La Geometría* la situación ya no es la misma, es necesario resolver problemas de construcción de ecuaciones y por ello Descartes señala que es necesario utilizar las curvas de menor grado y que complejidad posible. Al respecto dice:

> "Por las curvas más simples debemos entender no sólo las que se describen más fácilmente o las que facilitan la construcción o demostración del problema propuesto, sino, sobre todo, las que son del tipo más simple que pueda usarse para determinar la cantidad tras la que se anda." (Descartes, *La Geometría*, 155)

Por el "tipo más simple" entendemos el grado algebraico más bajo y por "determinar la cantidad tras la que se anda" se refiere a resolver la ecuación polinómica planteada.

Contrario a lo que se piensa actualmente, las ecuaciones y las curvas no son para Descartes lo mismo, no hay una equivalencia total. Las ecuaciones quedan más que otra cosa como herramientas para la clasificación y "construcción" de problemas geométricos, que son en realidad problemas de resolución de ecuaciones. Por otra parte, las curvas aceptables en geometría deben tener una ecuación, todos sus puntos deben de poder ser asociados a una coordenación rectangular mediante un número finito de operaciones algebraicas; pero nunca define que toda ecuación algebraica dé por resultado una curva aceptable geométricamente. La razón por la que esto ocurre es que lo más importante en términos de una curva era poder trazarla, es decir, encontrar un aparato o un modo para hacerlo.

## 2.7. El problema de Papo y las curvas aceptables en *La Geometría*

El problema de Papo era de la mayor importancia en la época de Descartes. Para analizarlo dejaremos de lado los antecedentes y entraremos directo a *La Geometría*, donde el autor presenta su solución, la cual considera como una prueba de que su "método" era correcto y superior a los conocidos.

El problema de Papo se plantea del siguiente modo. Dadas $n$ líneas rectas y un punto C, se deben dibujar líneas desde C formando ángulos dados con las líneas dadas. Para $n = 3$ las líneas trazadas desde C deben satisfacer que el producto de dos de ellas y el cuadrado de la tercera guarden una cierta razón dada. Para $n > 3$, si n es par, el producto de $n/2$ líneas desde C debe guardar una razón dada con el producto de las otras $n/2$ líneas; si $n$ es impar, el producto de $(n + 1)/2$ líneas desde C debe guardar una razón dada con el producto de las otras $(n - 1)/2$ líneas. El problema se resuelve al hallar el lugar de los puntos C que satisfacen las condiciones.

Se sabe que Descartes resolvió el problema de Papo durante el invierno de 1631-1632, pero la solución original no se conoce[1]. La primera referencia que se tiene es la que aparece ya en *La Geometría*, donde presenta una solución para $n$ líneas dadas que se obtiene mediante la generalización de una construcción para el caso de cuatro líneas (figura 2.13).

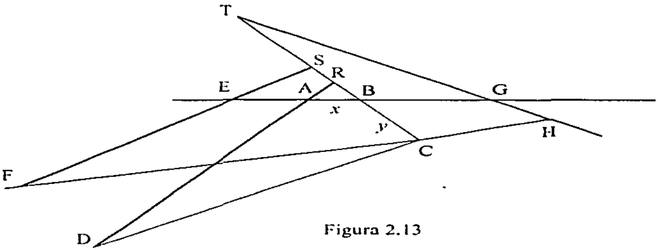



Figura 2.13

Un bosquejo de esta construcción es el siguiente. Dadas las líneas AB, AD, EF y GH, supóngase que se ha encontrado un punto C que satisface las condiciones del problema, de tal modo que los ángulos CBA, CDA, CFE y CHG tienen cada uno un valor predeterminado y tal que

$$CB \cdot CF = CD \cdot CH$$

Descartes comenta que el hecho de que la razón entre los productos CB · CF y CD · CH sea diferente de 1 no complica en lo más mínimo la construcción.

Es importante notar que B habrá de variar si C cambia de posición. Así, toma $x$ = AB, $y$ = BC y señala que todos los ángulos en el dibujo son fijos por lo que es posible expresar a las líneas trazadas desde C como

$$CD = (czy + bcx)/z^2; \quad CF = (ezy + dek + dex)/z^2; \quad CH = (gzy + fgl - fgx)/z^2; \quad CB = y$$

con $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, $k$, $l$, $z$ fijos.

Entonces, al hacer CB · CF = CD · CH tenemos

---

[1] El problema de Papo le fue propuesto a Descartes por Jacobus Golius, su profesor de matemáticas en la Universidad de Leiden. El interés de Golius por el trabajo de Apolonio, en particular su teoría de las cónicas, lo llevó a estudiar los comentarios de Papo a dicho trabajo.

$$y^2 = ((cfglz - dckz^2)y - (dez^2 + cfgz - bcgz)xy + bcfglx - bcfgx^2) / ez^3 - cgz^2$$

Comenta Descartes que para cualquier número de líneas dadas, la distancia de C a éstas (respetando las condiciones del problema) siempre podrá expresarse como $x$ multiplicada por una cantidad conocida más $y$ por otra cantidad conocida más una cantidad fija, por lo que la ecuación anterior siempre podrá ser determinada, aunque irá aumentando de grado conforme aumente el número de líneas dadas.

Volviendo al caso de cuatro líneas, afirma que, dependiendo de los valores relativos de las constantes, el lugar geométrico de C es una recta, un círculo o una de las tres cónicas restantes (parábola, elipse o hipérbola). Las rectas y el círculo se determinan sin problema y para las cónicas encuentra el *latus rectum*, *latus transversum*, eje y vértices, según sea el caso, con lo que pueden ser trazadas.

Así, para cuatro líneas el problema de Papo es resuelto dentro de los estándares, ya que la curva buscada puede ser en efecto trazada. En cambio, para más de cuatro líneas, lo que se hacía era tomar un valor arbitrario de $y$, es decir un punto en el segmento BC, para entonces determinar $x$ geométricamente y obtener un punto de la curva. Repitiendo este procedimiento es posible determinar tantos puntos como se quiera, pero siempre en un número finito, lo que produce entonces que el problema no haya sido resuelto de la manera que Descartes consideraba correcta debido a que la curva no era trazada, sino que era determinada por puntos de modo similar al de la cuadratriz (figura 2.6).

Para profundizar en este asunto, en *La Geometría* Descartes analiza dos casos particulares del problema para el caso de cinco líneas. En estos casos consideran cuatro líneas paralelas con separaciones uniformes cortadas por una transversal en ángulo recto. En uno de los casos muestra que la curva es la parábola de tercer grado –conocida como la "parábola cartesiana"– que es construida previamente en el mismo libro mediante el movimiento combinado de una parábola y de una recta. Esta curva puede ser trazada mecánicamente. En el otro caso se remite a la construcción por puntos señalada más arriba.

De este modo Descartes no encuentra otra salida más que admitir construcciones por puntos, pero no admite todas. Por ejemplo, sigue sin admitir construcciones como la de la cuadratriz y la de la espiral arquimedeana debido a que, a diferencia de las curvas válidas, éstas son obtenidas a partir de puntos especiales y por ello no es posible determinarlas en su totalidad. En la cuadratriz, por ejemplo, los puntos que pueden determinarse son aquellos correspondientes sólo a porciones racionales del cuarto de arco o del lado del cuadrado (ver figura 2.6), quedando fuera todos los correspondientes a porciones irracionales. Esto debido a que los desplazamientos de la línea horizontal debían estar sincronizados con el movimiento del radio que va trazando el círculo, de manera que cuando se escoge un punto sobre la vertical éste deberá corresponder a una cierta división (racional) de la línea y la misma le corresponderá al ángulo que se ha desplazado el radio.

**Por otra parte, en las construcciones válidas todos los puntos de la curva pueden ser determinados sin importar su ubicación en la misma. Esto es más claro al observar la siguiente construcción por puntos de la conchoide (figura 2.14).**

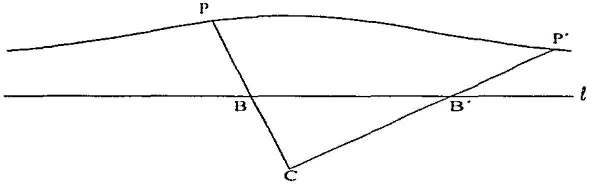



Figura 2.14

La curva tiene la propiedad de que dado un punto fijo C y una recta $l$, la magnitud del segmento que va de un punto P arbitrario hasta la intersección de PC y $l$ es constante, es decir PB = P'B' para cualquier par de puntos P, P' en la curva.

Descartes explica que las curvas que se pueden construir determinando "indiferentemente" sus puntos son las mismas que se pueden trazar a su vez por movimientos regulares y continuos, por lo que no deben ser excluidas de la geometría. Sin embargo no establece una prueba de esta equivalencia entre curvas, si bien es intuitivamente evidente que así sucede.

Algunas de estas curvas construidas por puntos, como los óvalos que tienen la importante propiedad de hacer que los rayos de luz converjan en un punto determinado, son presentadas en *La Geometría*.

Después de definir las curvas geométricas como las trazadas por movimientos únicos o subordinados, o también como las construidas por la determinación arbitraria de sus puntos, introduce además las trazadas con la ayuda de cuerdas.

El método de construcciones con cuerdas es presentado en *La Optica*, escrita en 1632, donde retoma la manera en la que los jardineros solían dibujar elipses e hipérbolas. La forma de trazar la elipse, por ejemplo, se reduce a tomar una cuerda atada en círculo y colocar dos estacas fijas, A y B, que estarán separadas por una distancia menor a un medio del largo total de la cuerda (figura 2.15). La cuerda se coloca alrededor de las estacas, se tensa con otra estaca en P y ésta se mueve, trazando así la curva.

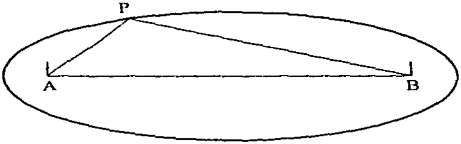



Figura 2.15

La construcción se basa en la propiedad, exclusiva de la elipse, de que la suma de las distancias de todo punto P en la curva a los puntos fijos (focos) A y B es constante, es decir $PA + PB = c$, donde $c$ es la longitud total de la cuerda menos AB.

Otro ejemplo es la construcción del óvalo (figura 2.16) mencionado unos párrafos atrás, que se presenta en *La Geometría* donde, tomando puntos fijos F, K, G y colocando una regla que gire apoyándose en F y con su otro extremo en E, se atan los extremos de una cuerda en E y G pasando por K. La cuerda es tensada sobre la regla con la pluma que al moverse habrá de trazar el óvalo.

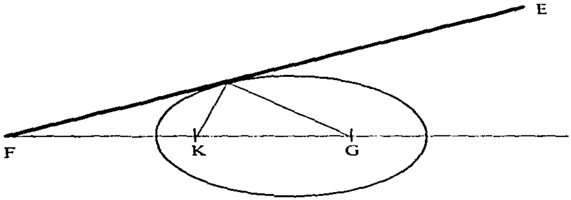



Figura 2.16

Para concluir, hay que comentar que lo que finalmente es importante para Descartes, con respecto a la aceptabilidad de las curvas en geometría, es la existencia y la posibilidad de determinar una razón medible, como lo señala al clasificar los problemas geométricos. Sólo las curvas usadas para resolver problemas de los tipos 1 y 2 son las aceptables. Es necesario poder hallar las proporciones exactas, es decir racionales, entre líneas curvas y rectas que se combinen para trazar las curvas.

# Capítulo 3

# Las *Reglas para la Dirección del Espíritu*. La búsqueda de la *mathesis universalis*

## 3.1. Algunos antecedentes históricos

Durante su estancia en París, de 1626 a 1628, Descartes conoció a destacados científicos, estudiosos, teólogos y gente del mundo literario. Entabló amistad con Jean-Luis Guez Balzac y con algunos hombres de pensamiento radical y antiaristotélico, en una época en que la subversión contra la Iglesia se castigaba con cárcel, destierro o la hoguera y, del mismo modo, las tesis antiaristotélicas eran también sancionadas y los textos en los que aparecían eran mandados a destruir.

Llega el punto en que, ahí en París, a Descartes le nace una obsesión tal por la búsqueda de la verdad en la naturaleza, que no puede dedicarse a otra cosa distinta y no puede llevar relaciones normales con la gente. Decide retirarse a Holanda y estar solo para ponerse a trabajar.

En 1628, antes de irse, Descartes comenta a Beeckman que en los últimos 9 años ha hecho grandísimos progresos en la aritmética y en la geometría y que cuenta con

1) Un método científico universal
2) Un álgebra "general"
3) Una nueva forma de hallar medias proporcionales
4) Una solución general a todas las ecuaciones de tercero y cuarto grado
5) La ley correcta de la refracción

Sin embargo no escribe nada de esto todavía. Al parecer, Descartes en el punto 1) se refiere a las *Reglas para la Dirección del Espíritu*, obra que ya tenía bosquejada pero que escribió en el retiro y que sería publicada póstumamente. Los puntos 2), 3) y 4) se refieren a temas que incluirá en *La Geometría*.

## 3.2. Las reglas cartesianas

Como se menciona en el capítulo 2 de esta tesis, la generalización de resultados es un factor muy importante y el verdadero genio del pensamiento geométrico cartesiano. Descartes tiene la capacidad de generalizar resultados a partir de la solución de problemas particulares.

Aristóteles consideraba que la actividad intelectual genuina se caracteriza por la operación mental que lleva de lo particular a lo universal y que esta operación de generalización sólo puede ser percibida, no es posible analizarla ni siquiera describirla adecuadamente.

Por el contrario, Descartes, con gran optimismo, escribe las *Reglas para la Dirección del Espíritu* que han de explicar cómo es que mediante la intuición se llega a resultados verdaderos.

El libro de Descartes, como se menciona al final de la regla XII, iba a constar de las siguientes tres partes:

1) Proposiciones simples.
2) Cuestiones que se entienden bien.
3) Cuestiones que no se entienden bien.

Descartes estaba en ese momento pisando terrenos inexplorados y en realidad no tenía mucha idea de lo que hacía, al grado que la obra no fue concluida, llegando hasta la regla XXI y sólo enunciando las tres últimas.

El objetivo de la primera sección del libro es preparar al espíritu para que pueda intuir las proposiciones simples de forma clara y distinta. Descartes afirma que el verdadero conocimiento sólo puede estar basado en verdades indudables, pero éstas se pueden ver únicamente si miramos en la dirección correcta, es decir, si aplicamos el método correcto. Debemos reducir lo complejo a lo simple y mostrar cómo se unen las proposiciones en una cadena deductiva identificando todos los eslabones de una sola vez. También es necesario ejercitarnos para captar claramente las naturalezas simples o las esencias genuinas mediante el análisis de materias simples y proceder siempre, en todo, de manera ordenada.

Descartes percibe con claridad de que sus reglas no volverán a la gente más inteligente, pero piensa que podrán ayudarle a utilizar su intelecto de la manera más provechosa, siendo ello su motivación.

Cuando años después escribe el *Discurso del Método* Descartes concluye que sus reglas pueden reducirse a los cuatro preceptos de evidencia, división, orden y exhaustividad siguientes:

1) A nada debe asentirse, a menos que sea evidentemente verdadero.

2) Cada materia sujeta a inquisición debe dividirse en partes tan pequeñas como sea posible y debe tratarse cada una por separado.

3) Cada parte ha de abordarse por orden, las más simples primero.

4) Ninguna parte ha de omitirse en la explicación del todo.

La segunda parte del libro indica cómo hay que proceder para resolver aquéllo cuyo significado es claro, es decir, se entiende bien, pero cuya solución no podemos encontrar. Para lo anterior, dice Descartes, es necesario prescindir de toda noción superflua y aspirar a la simplicidad y el orden. Como se ve, está procediendo de manera similar a lo expuesto en las primeras doce reglas.

La cuestión importante y la conexión con *La Geometría* es el hecho de que Descartes considera que no existe ningún problema en transferir sus reglas abstractas a la materia real, aunque indica que será necesario utilizar la imaginación, entendiendo por ésta nuestro recurso para idear imágenes. Afirma que habremos de visualizar formas y figuras, pero la información que no sea inmediatamente pertinente a la cuestión deberá guardarse en símbolos abstractos.

Las reglas, llevadas al terreno de lo práctico son, en esencia, lo que aparece en el primer libro de *La Geometría* cuando el autor se refiere al modo de llegar a una ecuación polinomial a partir de un problema. Este procedimiento, que es explicado con más detalle en la sección "4.3. Los planteamientos y resultados de Descartes sobre la construcción de ecuaciones", es el siguiente:

1) Las cantidades conocidas son denotadas con las primeras letras del alfabeto $a$, $b$, $c$, ... y las desconocidas con las últimas $x$, $y$, $z$,... (Precepto de evidencia).

2) Se determinan las relaciones mutuas obviando la distinción entre cantidades conocidas y desconocidas, es decir, se escriben tantas ecuaciones como cantidades desconocidas se tengan. (Precepto de división).

3) Se emplean las cuatro operaciones (aritméticas) básicas.

4) Se hallan dos ecuaciones que contengan la misma incógnita.

5) Se simplifica cuando sea posible, es decir, se van eliminando incógnitas (Aunado a los dos anteriores, equivale al precepto de orden el precepto de exhaustividad está implícito).

Algo importante para comentar es que Descartes está siempre pensando en la aplicación de sus reglas o preceptos a las matemáticas, que considera son una propedéutica de la filosofía. Los jesuitas pensaban que aprender latín o griego permitía ordenar y comandar efectivamente los pensamientos y que sus gramáticas eran la realización de la lógica. Influenciado por ellos, Descartes piensa que las matemáticas son un modelo de pensamiento claro, convincente y sin ambigüedad; opina que de llegar a ser diestro en las matemáticas, se dominará la técnica de la intuición clara y de la deducción rigurosa que abre las puertas del conocimiento.

En su búsqueda de la verdad Descartes advierte que la aritmética y la geometría ofrecen más certidumbre que otras disciplinas por los siguientes dos motivos

1) Su objeto es puro y simple.
2) Sus deducciones son claras y rigurosas.

En la regla II, donde habla de que hay que ocuparse únicamente de lo certero e indudable y no de lo probable, afirma que "entre las disciplinas [científicas] ya conocidas sólo la Aritmética y la Geometría están libres de todo defecto de falsedad e incertidumbre ..." (Descartes, *Reglas*, 70).

En la regla IV, comenta que cualquier *mathesis universalis*, como es el caso de las matemáticas, debe incluir estas características. El comentario surge a propósito del esquema mediante el cual Descartes enlaza una expresión algebraica con el funcionamiento del compás múltiple.

En esta misma sección Descartes comenta que se encuentra intrigado sobre las razones que hicieron que los antiguos griegos concedieran tanta importancia a las matemáticas, siendo que su legado consistía las más de las veces de cálculos y demostraciones que eran bastante triviales. Tal situación le llevó a especular sobre si no sería que los antiguos dominaban un cierto *corpus* matemático muy diferente del que hoy (en la época de Descartes) se conoce y del cual no nos llegó nada escrito. Estaba convencido de que las semillas de ciertas verdades básicas están implantadas en la mente humana, y que dichas semillas dieron lugar a frutos maravillosos en la época dorada de las matemáticas griegas, pero que, desafortunadamente, se han echado a perder en los tiempos modernos (siglo XVII) debido a los diarios y constantes errores a los que nos vemos sometidos (A. T., X, p. 376). Rastros de estas "verdaderas matemáticas" le parece que eran visibles en los trabajos de Papo y de Diofanto, y que si no encontramos más de ellos en sus obras es porque con algo de perversidad ocultaron este tipo de matemáticas, como se sabía que lo hacían algunos inventores pues "temían que sus métodos, por ser tan fáciles y sencillos, serían despreciados si eran transmitidos; así que para ganar nuestra admiración lo que nos mostraron como frutos de sus métodos fueron algunas verdades estériles demostradas con argumentos ingeniosos, en lugar de proporcionarnos el método, el cual habría desvanecido nuestra admiración. En nuestro tiempo algunos hombres dotados de ingenio han intentado revivir este método, porque me parece que es el que se conoce como 'álgebra'..." (A. T., X, pp. 376-379) .

Cuando Descartes se ocupó de este asunto con más cuidado, dice haberse dado cuenta de que la preocupación única de las matemáticas es ocuparse de cuestiones relacionadas con el orden y la medida, y que no le importa si la medida en cuestión se ocupa de números, formas, sonidos o cualquier otra cosa. Esto lo llevó a intuir que "debería existir una ciencia general que explicara cualquier asunto relacionado con el orden o la medida, sin importar cuál era el tema con el que se vinculaban, y que esta ciencia debería ser llamada *mathesis universalis* –un término venerable con un significado bien establecido–, ya que abarca todo lo que permite que esas otras ciencias fueran tenidas como ramas de la matemática ... hasta este día he dedicado todas mis energías a esta *mathesis universalis* para con ello poder ser capaz de enfrentar ciencias más avanzadas..."

La idea de una *mathesis universalis* ya tenía una larga historia en el siglo XVII (Crapulli, *Mathesis Universalis*). Esta noción parece remontarse a personajes como Aristóteles y a Proclo aunque la fuente más confiable de ser la indicadora de esta suerte de renacimiento fue el matemático belga Adrianus Romanus, quien en la segunda parte de su *Apologia pro Archimede* (1597) desarrolló con detalle la idea de una *mathesis universalis*. Retomada por Descartes, donde se dice que "exhibe los medios para resolver todas las dificultades que surgen en las ciencias matemáticas y demuestra que el intelecto humano no puede ir más allá en estas cuestiones" (Gaukroger, *Descartes*, 101).

## 3.3. La intuición y la deducción

Para Descartes, como lo expone en la regla III, la única manera de adquirir el conocimiento es mediante la intuición o la deducción. Define la intuición como "la concepción de una mente pura y atenta tan fácil y distinta, que en absoluto quede duda alguna sobre aquello que entendemos; o, lo que es lo mismo, la concepción no dudosa de una mente pura y atenta que nace de la sola luz de la razón ..." (Descartes, *Reglas*, 75), de donde podríamos interpretar que es la actividad propia de la mente, el razonamiento sobre lo que se percibe, la identificación de lo evidente, pero no la "visión", que era la interpretación anterior a Descartes de la palabra intuición.

La deducción es definida como "todo aquello que se sigue necesariamente de otras cosas conocidas con certeza." (Descartes, *Reglas*, 76) y permite que muchas cosas verdaderas, que no son evidentes en sí, "sean deducidas a partir de principios verdaderos conocidos mediante un movimiento continuo e ininterrumpido del pensamiento que intuye con transparencia cada cosa en particular" (Descartes, *Reglas*, 76). De no existir la deducción no podríamos dar por verdadero más que lo que es directamente intuido sin poder ir más allá de lo evidente. En este sentido, la deducción es equiparable con el procedimiento de obtención de un teorema, al cual se llega desde los axiomas, que pueden interpretarse como verdades evidentes, mediante inferencias lógicas. Podemos tomar a la deducción como el razonamiento que permite enlazar los eslabones de una cadena del principio hasta el fin.

Una vez que el pensamiento logra intuir con transparencia la cadena deductiva, sin ayuda de la memoria y eliminando la incertidumbre que ésta provoca, la deducción en cuestión, según Descartes, se convierte en una intuición. Esto ocurre al acelerar cada vez más el recorrido de los eslabones de la cadena, hasta poderlos ver todos juntos en un simple y único destello de la intuición.

Si analizamos las demostraciones cartesianas que aparecen en *La Geometría*, podemos ver que este paso de deducción a intuición es, en cierto sentido, necesario para comprenderlas y asimilarlas. De algún modo, tanto las demostraciones cartesianas como las modernas, que son comparables en su rigor lógico y formalidad, requieren para su verdadera comprensión la identificación clara y precisa de la cadena de implicaciones, y no debe haber la más mínima duda en cada paso de la argumentación. En breve, debemos de poder ver la demostración de principio a fin en un sólo recorrido.

## 3.4. Las naturalezas simples

Los objetos propios del acto de la intuición son definidos por Descartes como "naturalezas simples". Descartes dice que "estas naturalezas simples son evidentes por sí mismas y no contienen nunca falsedad alguna". Son divididas en tres tipos:

1) "Puramente intelectuales", como el saber, el dudar, el ignorar y el desear.
2) "Puramente materiales", exclusivas de los cuerpos físicos, como la forma, la extensión y el movimiento.
3) "Aquéllas comunes tanto a las intelectuales como a las materiales" como los conceptos de existencia, unidad, dirección, etc., y relaciones como pueden ser "si dos cosas son iguales a una tercera, serán iguales entre si"

Las naturalezas simples son clasificadas de este modo debido a que Descartes piensa que es el secreto principal de su método, como lo menciona en la regla VI. Advierte que las clasificaciones deben realizarse en tanto las cosas pueden conocerse unas a partir de otras. En la regla XII menciona que las cosas simples son las que no pueden descomponerse en cosas más simples como por ejemplo la figura, la extensión y el movimiento; también subraya que se ocupará únicamente de las cosas que pueden ser percibidas por el intelecto.

Aquí queda claro que, para Descartes, las naturalezas simples son las que no se deducen de otras, son las iniciales en cualquier cadena deductiva, vienen a jugar el papel de lo que para nosotros son los axiomas.

También en la regla XII, Descartes explica, entre otras cosas, que la percepción tiene lugar "del mismo modo que la cera recibe la figura del sello" (Descartes, *Reglas*, 118); tomándolo de una forma literal, indica que la imagen, figura o sensación que reciben los sentidos es inmediatamente transmitida al sentido común, quién la impresiona en la imaginación. Esta última, también llamada fantasía, es definida como "una verdadera parte del cuerpo y de una magnitud tal que sus diversas partes pueden asumir figuras distintas entre sí, y que suelen conservarlas durante mucho tiempo: es lo que se llama entonces memoria" (Descartes, *Reglas*, 120).

Entonces, como el verdadero conocimiento –dice Descartes– resulta de la intuición aplicada a una naturaleza simple, en el entorno matemático, que es el de verdadero interés cartesiano, tenemos que el propósito es estudiar las relaciones o proporciones de las magnitudes en general, para poder expresarlas en términos de ecuaciones (Ver el capítulo 1 de esta tesis). Al trabajar con magnitudes, entramos en los dominios de la extensión (una magnitud es una forma de extensión), que es una naturaleza simple de las catalogadas como "puramente materiales", pero además la extensión puede ser percibida en tanto se presenta en los cuerpos, de donde Descartes afirma que la magnitud se conoce en la extensión corpórea de la imaginación. De hecho, dice que un cuerpo extenso que no puede ser imaginado, tampoco podrá ser concebido.

Descartes define la extensión como "lo que quiera que sea que tenga longitud, anchura y profundidad", y al respecto dice que "no hay nada que nuestra imaginación perciba más fácilmente". La materia y la extensión no son identificadas por Descartes como lo mismo, pero al escribir *El Mundo* (Descartes, *El Mundo*), unos años después, considera la equivalencia.

## 3.5. Las operaciones aritméticas básicas

En busca de la simplicidad, la claridad y la intuición, en la regla XVIII Descartes pasa a representar las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división mediante líneas y superficies. Hay que notar que esta regla es la última que es explicada, las restantes son solamente enunciadas.

La suma y resta de segmentos son definidos de manera trivial. La suma consiste en la ubicación contigua de los segmentos sobre una recta de tal modo que ambos sólo coincidan en un punto. Como ejemplo, en la figura 3.1, se suman AB y BC, dando como resultado AC (2 + 3 = 5).

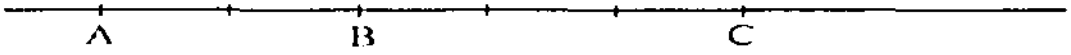



Figura 3.1

La resta es determinada colocando los dos segmentos con uno de los extremos comunes y de tal modo que el menor quede contenido en el mayor. El resultado estará dado por el segmento que une a los extremos no comunes de los dos segmentos iniciales. Descartes no se preocupa del signo del segmento resultante, le interesa sólo la magnitud. En la figura 3.2 se encuentra la diferencia entre AB y AC, dando como resultado BC (3 – 2 = 1).

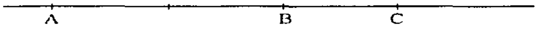



Figura 3.2

Para la multiplicación, se toman como base dos segmentos, que son las magnitudes $a$ y $b$ a multiplicar, y se construye el rectángulo correspondiente $ab$ (figura 3.3).

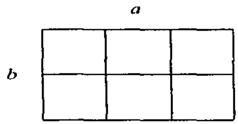


Figura 3.3

Para continuar multiplicando la magnitud resultante por otra cantidad, digamos $ab$ por $c$, Descartes dice que "conviene imaginar $ab$ como una línea" para entonces construir el rectángulo de lados $ab$ y $c$.

La división es definida de manera inversa a la multiplicación, partiendo de que la magnitud que se dividirá es un rectángulo y el divisor es uno de sus lados.

El paso en la imaginación, de superficie a longitud, sabemos que no es del todo trivial en términos geométricos. Descartes indica que habrá de mostrar cómo se puede pasar de una magnitud representada por una línea a un rectángulo, de un rectángulo a una línea o a otro rectángulo, uno de cuyos lados sea conocido. Esta construcción ya no es realizada, justo ahí termina la regla décimo octava, pero la respuesta podemos encontrarla al inicio de *La Geometría* donde define las operaciones aritméticas con segmentos.

En la misma regla, Descartes hace referencia a la extracción de raíces, las cuales considera son divisiones en las que el divisor está dado por una relación en la que intervienen las medias proporcionales. Como se mencionó en el capítulo 2 de esta tesis, si encontramos la media proporcional $x$, entre 1 y $a$, entonces

$$1/x = x/a \quad <=> \quad x^2 = \pm a \quad <=> \quad x = \sqrt{a}\ ,$$

con lo que tendremos resuelto el problema de extracción de la raíz cuadrada. Las raíces cúbicas se obtienen encontrando 2 medias proporcionales entre la unidad y la magnitud inicial, tomando la primera de éstas como la magnitud buscada.

Como sabemos, estos resultados son obtenidos y demostrados por Descartes con ayuda del compás múltiple (ver capítulo 2 de esta tesis), lo que nos lleva a pensar que, al no ser éstos intuitivamente claros para la imaginación, pueden ser la causa, o al menos parte, de la abrupta interrupción en la escritura de las *Reglas para la Dirección del Espíritu*.

El objetivo de Descartes no es establecer una representación gráfica de las operaciones, más bien es mostrar que pueden ser concebidas clara y distintamente.

¿Qué otra forma que sea más válida y evidente se puede dar a la representación de operaciones matemáticas que hacerlo mediante longitudes de líneas? Sin embargo, y aunque resulte sorprendente, es esta cuestión la que provoca que el planteamiento cartesiano empiece a tambalearse.

Las especulaciones cartesianas sobre la naturaleza del álgebra irrumpen en *Las Reglas* a propósito de una discusión sobre el papel que tiene la imaginación en la adquisición del conocimiento. Antes de que escribiera esta sección, esto es, alrededor de 1626[1], es evidente que Descartes había avanzado en su manera de concebir los números. En la vieja matemática griega la aritmética era una forma de *geometría métrica* (Unguru, "Greek Mathematics", 67-114). Esto resulta evidente del intento aristotélico de dotar de una base conceptual y metafísica a la noción de número que se manejaba en su época, y que consiste en construir a los números como longitudes de línea (de carácter puramente intelectual), sujetos en cuanto a su manipulación a todas las características de las manipulaciones de longitudes de líneas reales. (Gaukroger, "Aristotle", 187-197). Por ello cuando Aristóteles y otros matemáticos griegos hablan de números en una dimensión, o de números bidimensionales o planos, o de números tridimensionales o sólidos, lo que entienden es precisamente eso.

La geometría no sólo presta su notación a la aritmética, y ningún matemático griego o alejandrino habla de que los números sólo son *representados geométricamente*. Para constatar esto podemos acudir a un texto típico, los *Elementos*, y ver cómo las proporciones aritméticas están planteadas en términos de longitudes de líneas, no porque sea así que se representan a los números, sino porque esto es lo que son.

Si se considera el caso de la multiplicación, si $a$, $b$ y $c$ son segmentos de línea, el producto $ab$ es un rectángulo y $abc$ es un sólido, y bajo esta lógica no podemos multiplicar más de tres números pues esto rebasaría el número de dimensiones disponibles. Esta restricción en lo que se refiere a la noción de número guardaba un paralelo en cuanto a restricciones tanto en la aritmética como en la geometría, en la primera cuando se trataba de calcular un cierto número y en la segunda cuando se buscaba construir una cierta figura. Esto en función de que para un matemático de la antigüedad resolver un problema consistía en calcular un número si el problema era aritmético, o construir una figura si éste era geométrico.

[1] Descartes escribe las *Reglas para la Dirección del Espíritu* en dos periodos, uno que data de 1619-1620 - las primeras 11 reglas- y el otro de 1626-1628.

Por si no fuera suficiente, sólo los números naturales tenían carta de aceptabilidad. Los números negativos eran considerados números imposibles. Posibles salidas a este embrollo fueron contempladas por los griegos, pero sólo alcanzaron la calidad de técnicas auxiliares (Kliein, *Origin of Algebra*).

Es en la regla XVI que Descartes elimina esta restricción:

> "Debe señalarse que mientras el matemático usualmente denota cada magnitud mediante una pluralidad de unidades o mediante un número, lo que hacemos es abstraernos de los números mismos, al igual que como lo hicimos antes [regla XIV] en la que se refiere a figuras geométricas... Lo hacemos así ... para asegurarnos que las partes del problema que constituyen la dificultad esencial permanezcan siempre identificadas y no son obscurecidas por números sin uso alguno. Por ejemplo, si el problema consiste en encontrar la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos lados son 9 y 12, el aritmético dirá que ésta es $\sqrt{225}$ o 15. Pero nosotros escribiremos $a$ y $b$ en lugar de 9 y 12 y encontraremos que la base es $\sqrt{a^2+b^2}$. En esta forma las dos partes $a$ y $b$, que los números asimilan en una sola, son mantenidas diferenciadas." (A. T., X, pp. 455-456).

En lo que se refiere a la multiplicación y su cambio de dimensionalidad, Descartes señala que:

> "... debemos darnos cuenta de que aquellas proporciones que forman una sucesión continua deben ser entendidas en términos de un cierto número de relaciones; otros intentan expresar estas proporciones en términos algebraicos ordinarios mediante diferentes dimensiones y formas. A la primera la llaman *raíz*, a la segunda *cuadrado*, a la tercera *cubo*, me han confundido... tales nombres deberían ser abandonados pues confunden nuestro pensamiento. Si bien una magnitud puede ser llamada cúbica o bicuadrática, no debe ser presentada ante la imaginación mediante otra cosa que no sea una línea o una superficie... lo que se requiere hacer notar por encima de todo, es que la raíz, el cuadrado, el cubo... son sólo magnitudes en proporción continua, siempre tomando como referencia la unidad arbitrariamente escogida y de las que se habló en la regla anterior." (A. T., X, pp. 456-457).

En este caso, cuando al cubo de $a$ se le escribe como $a^3$ no es porque represente una figura tridimensional, sino porque es generado mediante proporciones enlazadas de la forma

$$1 : a = a : a^2 = a^2 : a^3.$$

Sobre estos detalles llama la atención Descartes, señalando que en establecer este tipo de diferencia es que radica el contraste entre el "Aritmético" que no entiende bien lo que hace y queda satisfecho con encontrar el resultado, y el que está consciente de cómo proceder para alcanzar un conocimiento evidente y que es producto de la *scientia*.

Lo que aparentemente sucedía, y no hay manera de verificarlo mediante otra fuente que no sean las *Reglas para la Dirección del Espíritu* pues Descartes no dejó otros escritos matemáticos de ese periodo, es que comenzaba a considerar tanto a la geometría como a la aritmética en términos de una teoría de ecuaciones, mostrando con ello una percepción de lo que era una estructura matemática que sobresale al pensamiento de cualquier matemático de su época. Tal y como lo concebía Descartes, el poder del álgebra radicaba en su eficiencia como técnica para resolver problemas, y a esto es a lo que identificaba con el antiguo arte del análisis, ya mencionado en el primer capítulo de esta tesis. El método consiste en construir cantidades desconocidas a partir de las conocidas, recurriendo a un simbolismo que permite enlazarlas de manera sistemática mediante ventajas respecto de los métodos geométricos tradicionales, y Descartes estaba convencido de que las demostraciones algebraicas mostraban, de manera transparente, la etapa por la que se transitaba durante la resolución del problema.

Sin embargo, el propio procedimiento algebraico portaba dentro de sí el germen de su debilidad. Así lo descubriría el mismo Descartes, como lo atestigua Beeckman en su diario, con fecha octubre de 1628, donde reporta el procedimiento cartesiano para resolver un problema algebraico usando longitudes de línea y superficies planas. Resulta que el problema en cuestión lo lleva sólo a obtener la raíz positiva, no así la negativa en tanto que ésta no admite representación alguna en términos de longitudes de líneas. La situación se complica si además hubiera que considerar números irracionales, pues éstos tampoco podrían ser "construidos", violando así el requisito de "claridad y distinción" que debería caracterizar a la solución de un problema.

Además estaba el hecho de que si bien las *Reglas para la Dirección del Espíritu* no permiten establecer un modelo para las matemáticas, se vieron también afectadas al tratar otros temas como son el problema de las cualidades secundarias y de los colores, la naturaleza del sonido y la atracción del imán, todos ellos problemas relacionados con la física (Turró, *Descartes*, 285-289).

Estos tropiezos sin duda afectaron a Descartes, para quien el interés por las matemáticas disminuyó notablemente a partir de este momento. Aún cuando en la década de 1630 retornó a algunos problemas de índole matemática, éstos ya no lo entusiasmaron. Su trabajo fundamental como matemático estaba casi terminado y como prueba de ello está que durante una visita a Beeckman en Dordrecht (octubre de 1628) le comentó a este último que "no tenía nada más que descubrir en aritmética y geometría". Meses después le escribió a Mersenne diciéndole que estaba cansado de las matemáticas y que no se ocuparía de resolver los problemas que éste le proponía. Descartes abandonaba momentáneamente las matemáticas para iniciar la escritura de *Le Monde*. Era la primavera de 1630 y Descartes se justificaba diciendo que lo que le acontecía era algo así como si al estar construyendo una cosa resultara con que le llegaran a uno inmensas e inesperadas riquezas, entonces la situación cambiaría drásticamente y el edificio que había venido construyendo sería ahora demasiado pequeño para los nuevos posibilidades y necesidades.

# Capítulo 4

# Newton como lector de *La Geometría*. La construcción de ecuaciones como método general

A pesar del desencanto por parte de Descartes respecto del papel que pensó jugarían las matemáticas en su empeño por alcanzar la *mathesis universalis*, lo cierto es que sus aportaciones matemáticas poco a poco comenzaron dar frutos. De ello da cuenta la siguiente sección y el resto del capítulo de esta tesis.

## 4.1. La técnica de construcción de ecuaciones

Entre 1650 y 1750, después de la publicación y difusión de *La Geometria* de Descartes, la llamada "construcción de ecuaciones" se presenta tanto como un tema que aparece frecuentemente en los textos de álgebra como un área de investigación matemática. A la fecha ya no es estudiada, y sin embargo debemos colocarla, dentro de la evolución de las matemáticas de la época, como parte del surgimiento del estilo analítico que deja atrás a las concepciones geométricas clásicas sobre objetos matemáticos y operaciones.

La construcción de ecuaciones (notación y terminología modernas) consiste en lo siguiente: dada una ecuación polinomial en una variable

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

realizar una construcción geométrica mediante la cual se obtengan segmentos de recta cuyas magnitudes sean las raíces del polinomio.

Para esto hay que considerar que $P$ es irreductible, es decir, no existen polinomios $U$ y $V$, de grado menor que $P$, tales que se cumpla alguna de las siguientes dos condiciones:

$$1)\ \ P(x) = U(x)\cdot V(x)$$

$$2)\ \ P(x) = U(V(x)).$$

Si alguna de las condiciones se cumpliera, entonces sería posible resolver el problema hallando las raíces de ecuaciones de grado menor, con lo que la situación se simplificaría. En caso de cumplirse 1) el problema se remite a resolver por separado las dos ecuaciones

$$U(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad V(x) = 0.$$

Si se cumple 2), se resuelve primero $U(y) = 0$, que tendrá a $r_1, r_2, \ldots, r_k$, por raices, para después resolver $V(x) - r_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Una vez que se sabe que $P$ es irreductible, se deben encontrar dos curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ tales que las abcisas de sus puntos de intersección sean las raíces de $P$. Para esto, suponiendo el problema resuelto, si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ están representadas por las ecuaciones

$$E(x, y) = 0 \qquad \text{y} \qquad F(x, y) = 0$$

respectivamente, entonces las abcisas (o las ordenadas) de $E \cap F$ serán las raíces de la ecuación resultante

$$R_{E,F}(x) = 0$$

a la que se llega cuando se despeja $y$ (o $x$) de $E$ (o $F$) y se sustituye en $F$ (o $E$) quedando $x$ (o $y$) eliminada.

Para esto, se deben cumplir las siguientes dos condiciones:

1) Las raíces de $P(x)$ deben ser también raíces de $R_{E,F}(x)$, esto es $P(x) = CR_{E,F}(x)$, con $C$ una constante o un polinomio en $x$.

2) Las curvas deben ser geométricamente aceptables y lo más simples (en el sentido cartesiano) posible. (Descartes, *The Geometry*, 389-395)

Un ejemplo de lo anterior y que retoma la discusión iniciada en la sección 2.6 de esta tesis es la construcción (figura 4.1) que da Descartes para la ecuación

$$x^3 + px + q = 0,$$

donde toma

$$P(x) = x^3 + px + q,$$

$\mathcal{C}_1$ la parábola con vértice en el origen y *latus rectum* = 1, dada por la ecuación

$$E(x, y) = y - x^2 = 0$$

(nótese que el sentido positivo apunta hacia abajo) y $\mathcal{C}_2$ el círculo con centro en $(-q/2, 1/2 - p/2)$ y $r^2 = (q/2)^2 + (p/2 - 1/2)^2$ que pasa por el origen y está dado por la ecuación

$$F(x, y) = y^2 + (p - 1)y + x^2 + qx = 0 \iff (x + q/2)^2 + (y + p/2 - 1/2)^2 = (q/2)^2 + (p/2 - 1/2)^2$$

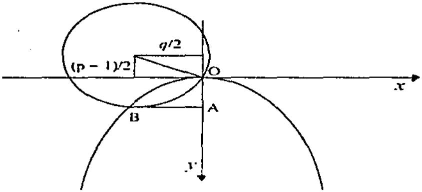



Figura 4.1

Al tomar un circulo y una parábola se satisface la condición 2) sobre las curvas geométricas aceptables y, para Descartes, simples también. Así pues, al tomar $y = x^2$ de $E$ y sustituir en $F$ tenemos que

$$R_{E,F}(x) = (x^2)^2 + (p-1)x^2 + x^2 + qx = x^4 + px^2 + qx = x(x^3 + px + q) = 0,$$

con lo que el problema queda resuelto cumpliendo con la condición 1) y dado que el segmento AB satisface la ecuación original.

El ánimo de resolver una ecuación mediante una construcción geométrica es encontrar, en acto, las magnitudes buscadas de manera exacta. Si bien es posible encontrar algebraicamente las raíces de polinomios, el cálculo aritmético en esos casos se reduce a una aproximación racional de la magnitud o a una representación mediante operaciones indicadas. En cambio, una construcción geométrica es, de manera ideal, completamente exacta.

Es importante notar que las condiciones 1) y 2) no restringen demasiado la elección de los grados de las dos curvas de la construcción. De hecho si $n$ es el grado de $P$, mientras $n$ tome valores mayores, es posible tomar parejas distintas de curvas con grados $p$ y $q$ siempre que $pq \geq n$, pero $n \geq p(q-1)$ y $n \geq q(p-1)$, con lo cual se cumple con la condición 2) respecto a la simplicidad de las curvas. Este punto es tratado por Newton como se anota más adelante en este mismo capítulo.

Algebraicamente, la construcción de ecuaciones es un problema de eliminación inversa, funciona de forma contraria a la eliminación directa, donde a partir de $E$ y $F$ se encuentra $R$, suponiendo el problema ya resuelto: en este caso es necesario encontrar $E$ y $F$ a partir de $P$ de tal forma que $P(x) = CR_{E,F}(x)$, con $C$ una constante o un polinomio en $x$.

## 4.2. Técnicas para la determinación de las ecuaciones que corresponden a las curvas en una construcción

Algo que no puede pasar desapercibido es que cuando Descartes construye ecuaciones no explica cómo es que ha encontrado las curvas necesarias para ello, se limita a exhibir la construcción y presentar una demostración de la validez de ésta última. Sin embargo, a partir de estas demostraciones no es trivial deducir el método usado para realizar las construcciones. Autores posteriores a Descartes desarrollaron y publicaron técnicas para encontrar ecuaciones $E(x, y) = 0$ y $F(x, y) = 0$ correspondientes a las curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, mediante las cuales se construye una ecuación dada $P(x)$, obteniendo primero la resultante $R_{E,F}(x) = 0$ como se ha explicado. Estas técnicas se dividen en tres clases que pueden ser llamadas "técnica de coeficientes indeterminados", "técnica de inserción" y "técnica geométrica".

### *Técnica de coeficientes indeterminados*

Consiste en escoger las curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, dejando indeterminados los coeficientes de sus ecuaciones $E(x, y) = 0$ y $F(x, y) = 0$, después con base en argumentos geométricos o algebraicos se encuentra la ecuación de las abcisas (o las ordenadas) de los puntos de intersección de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. Como los puntos de intersección dependen de los parámetros de $E$ y $F$, éstos podrán entonces ser fijados con lo que las curvas quedarán determinadas.

Un ejemplo de esta técnica es explicado en la nota de van Schooten a la edición en latín de *La Geometría* de 1659 con respecto a la construcción de ecuaciones de tercer y cuarto grado (Bos, *Arguments on Motivation*, 346). En la nota se explica que, dada una ecuación de cuarto grado, si se escoge resolverla por medio de un círculo y una parábola, los parámetros involucrados serán el *latus rectum* $a$ de la parábola, las coordenadas AD = $b$ y DE = $c$ del centro E del círculo y su radio $d$ (figura 4.2). El vértice y el eje de la parábola no son variables y estarán dados por A y AD, respectivamente.

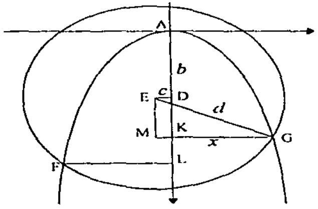



Figura 4.2

Si el eje $y$ es AD y el eje $x$ su perpendicular por A, entonces tomando $x$ = GK, como la ordenada del punto de intersección G de las curvas, tenemos que por pertenecer a la parábola se cumplirá

$$AK = y = x^2/a.$$

Con respecto al círculo, por el teorema de Pitágoras como $d$ es la hipotenusa del triángulo EMG,

$$d^2 = EG^2 = EM^2 + MG^2 = (x^2/a - b)^2 + (x + c)^2$$

con lo cual se obtiene una ecuación que involucra a $x$ y a todos los parámetros. Al desarrollarla

$$d^2 = (x^2/a - b)^2 + (x + c)^2 \quad <=> \quad x^4/a^2 - 2bx^2/a + b^2 + x^2 + 2cx + c^2 - d^2 = 0$$

$$<=> \quad x^4 + (a^2 - 2ab)x^2 + 2a^2cx + a^2(b^2 + c^2 - d^2) = 0$$

$$<=> \quad x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

con $p = a^2 - 2ab$, $q = 2a^2c$ y $r = a^2(b^2 + c^2 - d^2)$.

Así, para construir la ecuación de cuarto grado dada, primero debemos reducirla mediante la eliminación de su segundo término. La eliminación del segundo término, si existe, en la ecuación

$$x^4 + jx^3 + kx^2 + lx + m = 0$$

se hace, como explica Descartes, mediante la sustitución $z = x - j/4$, lo que produce una nueva ecuación de cuarto grado en $z$ con las mismas raíces.

Una vez eliminado el segundo término se tendrá una ecuación de la forma

$$x^4 - apx^2 + a^2qx - a^3r = 0$$

donde $a$ es tomado como la unidad o cualquier otro valor positivo pero, en este caso, con signo negativo (ver Teorema de modificación de coeficientes en polinomios al final del capítulo). Con ello se pueden determinar los parámetros para la construcción como

$$-ap = a^2 - 2ab \quad \& \quad a^2q = 2a^2c \quad <=> \quad -p = a - 2b \quad \& \quad q = 2c \quad <=> \quad b = (a + p)/2 \quad \& \quad c = q/2$$

$$-a^3r = a^2(b^2 + c^2 - d^2) \quad <=> \quad -ar = b^2 + c^2 - d^2 \quad <=> \quad d^2 = b^2 + c^2 + ra$$

$$<=> \quad d = \sqrt{\frac{(a-p)^2}{4} + \frac{q^2}{4} + ra}\,.$$

## *Técnica de inserción*

Dado $P(x)$ se escoge una curva $\mathcal{C}_1$ cuya ecuación sea de la forma

$$f_1(x) = f_2(x, y) \qquad \text{es decir} \qquad E(x, y) = f_1(x) - f_2(x, y)$$

(comúnmente se escoge $y = x^n$, como hace Newton en algunas de sus construcciones pero con los símbolos $x$ y $y$ invertidos) para después insertar esta ecuación en $P(x)$, tomando cada término o factor de $P(x)$ que sea igual a $f_1(x)$ y sustituyéndolo por $f_2(x, y)$, lo cual producirá la ecuación $F(x, y) = 0$ que corresponde a la curva $\mathcal{C}_2$. Así, las curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ construyen la ecuación $P(x) = R_{E,F}(x)$, lo cual es claro ya que al efectuar el proceso inverso al de insertar la ecuación en $P(x)$, estaremos en realidad sustituyendo $E$ en $F$ y obteniendo $P$.

En caso de que $E$ y $F$ no permitan realizar satisfactoriamente la inserción, será necesario escoger nuevas curvas $\mathcal{C}_n$ buscando entre las combinaciones de

$$F(x, y) = \alpha E(x, y) + \Sigma\beta_n F_n(x, y) = 0$$

que satisfagan las condiciones requeridas. Para un ejemplo es posible ver las construcciones 4, 5 y 6 más adelante.

## *Técnica geométrica*

Esta técnica, que funciona para problemas hasta de cuarto grado, consiste en interpretar la ecuación como un problema geométrico. Dada la ecuación en $x$ se introduce un segunda variable $y$, de tal modo que la ecuación sea equivalente a dos o tres proporciones válidas simultáneamente entre segmentos que son lineales en $x$ y $y$. Cada proporción define una cónica que puede servir como una curva de la construcción.

Por ejemplo, para construir la ecuación $x^3 = px + q$, primero se plantea en términos de las proporciones

$$p : x^2 = x : (x + q/p)$$

y tomando $y$ como la media proporcional entre $x$ y $(x + q/p)$, tenemos

$$\sqrt{p} : x = x : y = y : (x + q/p)$$

que da lugar a las siguientes tres igualdades

$$1)\ x^2 = \sqrt{p}\, y$$
$$2)\ y^2 = x\,(x + q/p)$$
$$3)\ xy = \sqrt{p}\,(x + q/p)$$

que representan una parábola y dos hipérbolas que intersecadas una con cualquiera de las otras dos construyen la ecuación inicial.

## 4.3. Los planteamientos y resultados de Descartes sobre la construcción de ecuaciones

Se menciona en las primeras líneas del libro I de *La Geometría*:

> "Todo problema en geometría puede ser fácilmente reducido a términos tales que el conocer las magnitudes de ciertas líneas rectas es suficiente para su construcción."

Partiendo entonces de que solucionar un problema geométrico es hallar ciertas magnitudes, la construcción de ecuaciones es el paso final mediante el cual el problema es resuelto y las magnitudes son encontradas. Si bien en algunos casos las raíces de una ecuación pueden hallarse algebraicamente, ello no se considera válido. Es decir, no entra en los estándares ya que no es un procedimiento geométrico. Es necesario, como se menciona en el capítulo 2, contar con una construcción geométrica que determine los segmentos buscados.

La forma que Descartes propone para llegar a una ecuación polinomial a partir de un problema es la siguiente. Primero el problema es planteado algebraicamente, las cantidades conocidas son denotadas con las primeras letras del alfabeto $a$, $b$, $c$, ... y a las desconocidas con las últimas $x, y, z, \ldots$, para después escribir tantas ecuaciones como cantidades desconocidas se tengan. Para llegar a una primera ecuación polinomial, se van eliminando incógnitas sustituyendo una ecuación en otra hasta, finalmente, obtener la última en términos de una sola incógnita. Descartes plantea, en su libro III, técnicas algebraicas para simplificar las ecuaciones, generalmente eliminando el segundo término de la ecuación, con lo que la construcción es simplificada.

Descartes clasifica los problemas por el grado de la ecuación polinomial, que correspondería a $P$ en la sección anterior. Trabaja con las ecuaciones hasta de grado seis, muestra como se reducen algebraicamente a formas estándar y determina las construcciones que darán lugar a las raíces de estas formas. Si la ecuación es de grado 1 o 2, el problema es plano y puede resolverse por medio de regla y compás. Si $P$ es de grado 3 o 4 entonces se trata de un problema sólido que se resuelve intersecando un círculo y una parábola. Para problemas de grado 5 y 6, que nombra "supersólidos", procede a intersecar la "parábola cartesiana" (mencionada en el capítulo 2) con un círculo.

Aunque no continúa analizando los casos de grados mayores, ni enuncia específicamente un resultado general para cualquier grado en la ecuación polinomial, afirma que con lo que él ya ha mostrado es posible deducir un método general para construcciones de grados superiores.

Muy seguramente este método consiste en tomar ecuaciones de grado $2n-1$ y $2n$ y resolverlas ambas intersecando un círculo y una curva $\mathcal{C}_n$ de grado $n$. La forma de obtener $\mathcal{C}_n$ es tomando $\mathcal{C}_2$

como la parábola, $\mathcal{C}_3$ como la "parábola cartesiana", para entonces construir $\mathcal{C}_n$ a partir del movimiento combinado de $\mathcal{C}_{n-1}$ y una regla de la misma forma que $\mathcal{C}_3$ se construye a partir de $\mathcal{C}_2$. Lo anterior dará lugar a una ecuación resultante de grado $2n$.

## 4.4. *La teoría y construcción de ecuaciones* de Newton

De 1665 a 1666 Newton escribe dentro de su "Waste Book" un capítulo titulado "La teoría y construcción de ecuaciones", mismo que está compuesto de dos parágrafos.

### *La resolución mejorada de ecuaciones afectadas*

Este es el primer parágrafo y presenta un ejemplo concreto de un método numérico para encontrar raíces de ecuaciones polinomiales ya reducidas, es decir, ecuaciones de las cuales se ha eliminado el segundo término del polinomio, tal y como Descartes hacía también. Este método, eminentemente numérico, bien podría utilizarse en una computadora, ya que consiste en determinar, mediante iteraciones, una sucesión de racionales que Newton expresa decimalmente, y que habrá de converger a una de las raíces de la ecuación siempre que se tome como punto de inicio un valor cercano a ésta.

En este primer punto Newton no se refiere al trabajo de Descartes. A cambio discute cómo puede ser mejorado el método numérico de Oughtred para el cálculo mediante logaritmos de raíces de polinomios[1]. De hecho, se tiene conocimiento de que años más tarde inventa un artefacto que realiza estos cálculos logarítmicos. Evidentemente este método numérico no tiene relación alguna con los trabajos de Descartes.

### *La construcción geométrica de ecuaciones*

Este parágrafo entra de lleno sobre los resultados de *La Geometría* y se divide a su vez en secciones que se encuentran identificadas por anotaciones que ubicaba al margen del texto.

**La resolución de problemas planos mediante el círculo**

En esta sección presenta las siguientes tres construcciones.

*Construcción 1*

Primero propone una forma, que podemos considerar como mejorada o quizá más detallada con respecto a la de Descartes, para resolver la ecuación $yy - ay + bb = 0$ (en nuestra notación $yy = y^2$,

---

[1] A fines de 1664 Newton se había entregado con pasión a estudiar los textos que estaban a la vanguardia del conocimiento matemático de su época: *La Geometría* de Descartes con los comentarios de van Schooten, las *Miscellanee* de este último, las obras de Viète, el *Algebra* de Oughtred y la *Arithmetica infinitorum* de Wallis (Mamiani, *Introducción a Newton*, 33).

$bb = b^2$) y dice que si la raiz de $b^2$, es decir $b$, es conocida, se puede proceder como hace Descartes (p. 303, libro I de *La Geometría*), si no, es necesario extraer dicha raíz primero partiendo de una ecuación de la forma $yy - py + q = 0$. Realiza entoñces la siguiente construcción (figura 4.3).

Tómense $ln = p/2$ (aquí el texto tiene un error, pone $q/2$ en vez de $p/2$), $lg = (q-1)/2$, $gs = (q+1)/2$. Trácense un círculo con centro en $n$ y radio $ln$ y otro con centro en $g$ y radio $gs$. Trazando la perpendicular a $ln$ por $l$, que cortará al círculo con centro $g$ en $m$, es posible trazar la paralela a $ln$ por $m$ que cortará al círculo de centro $n$ en $q$ y $r$. De este modo, $mq$ y $mr$ son las raíces buscadas.

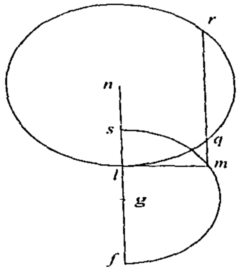


Figura 4.3

En esta primera construcción Newton no va más allá de añadir la extracción de la raiz cuadrada del término independiente $q$ de la ecuación para que así el valor de $lm$ sea $\sqrt{q}$. La operación de raíz cuadrada es definida por Descartes (p. 298, libro I de *La Geometría*). Para extraer la raiz de $z$ toma un segmento FH de longitud $z + 1$, con $GH = z$ (figura 4.4), localiza K el punto medio de AB y traza un círculo con centro K y radio KF, que es precisamente como Newton procede.

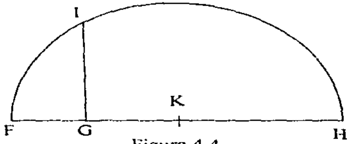


Figura 4.4

Podriamos pensar que el propósito de Newton al modificar la construcción original de una manera sutil, más de forma que de fondo, no es sino una cuestión de rigor y formalismo matemático, de no dejar detalles por precisar y obtener una construcción geométrica de principio a fin.

Para verificar la validez de esta construcción de la ecuación $yy - py - q = 0$ es posible remitirnos a la demostración de Descartes, que presenta junto con su construcción, o podemos basarnos en la siguiente demostración analítica de tipo moderno, en la que como primer paso se demuestra la validez de la construcción geométrica de la raíz cuadrada, misma que Descartes enuncia pero no demuestra.

*Demostración*

Para demostrar la validez de la construcción de la raíz cuadrada (figura 4.5), tomemos el origen en el punto K, KH como el eje $x$ y KL como el eje $y$.

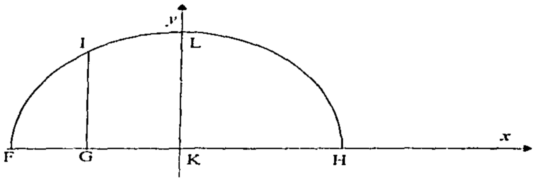



Figura 4.5

De este modo, como $z$ = HG y FG = 1, entonces KF = $(z + 1)/2$ y la ecuación del círculo es

$$x^2 + y^2 = ((z + 1)/2)^2$$

y la ecuación de la recta GI es

$$x = (z - 1)/2.$$

Así, el punto de intersección estará dado por

$$((z - 1)/2)^2 + y^2 = ((z + 1)/2)^2 \iff y^2 = ((z + 1)/2)^2 - ((z - 1)/2)^2 = 2z/4 + 2z/4 = z$$

$$\iff y = \sqrt{z}$$

Q.E.D.

Con el resultado anterior, es claro que en la figura 4.3, como $ls = gs - gl = 1$ y $lf = gd + gl = q$, el valor del segmento $lm$ es, como Newton dice, $\sqrt{q}$ .

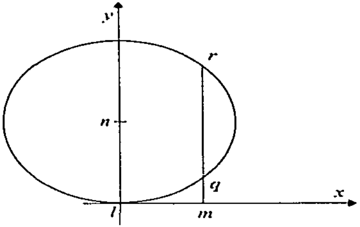


Figura 4.6

De esta forma, si a partir de la figura 4.3 tomamos el origen de coordenadas en $l$, $lm$ como el eje $x$ y $ln$ como el eje $y$ (figura 4.6) tenemos que la ecuación de la recta $qr$ es

$$x = \sqrt{q}$$

y la ecuación del círculo es

$$x^2 + (y-(p/2))^2 = p^2/4.$$

Los puntos de intersección estarán dados por

$$q + (y-(p/2))^2 = p^2/4 \quad <=> \quad y^2 - py + q + p^2/4 = p^2/4$$

$$<=> \quad y^2 - py + q = 0 \quad <=> \quad yy - py + q = 0.$$

Q.E.D.

En esta construcción, aunque Newton no lo menciona pero Descartes sí, hay que considerar que $p$ y $q$ son reales positivos, $p > 0$ y $q \geq 0$. También, que la existencia de las raíces reales queda determinada por la relación de magnitud entre $(p/2)^2$ y $q$. Si $(p/2)^2 < q$, entonces la recta no cortará al círculo, las raíces serán imaginarias. Si $(p/2)^2 = q$, existe una sola raíz de multiplicidad dos, a saber $p/2$, dado que la recta será tangente al círculo. Si $(p/2)^2 > q$, la recta cortará al círculo en dos puntos y se tendrán dos raíces reales distintas.

*Construcción 2*

Para continuar, Newton plantea dar solución a la ecuación general de segundo grado $yy \aleph py \aleph q = 0$ (donde $\aleph$ significa $\pm$ ) mediante la siguiente construcción (figura 4.7).

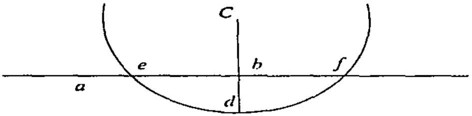



Figura 4.7

Sobre la línea *af*, tómese $ab = \aleph p/2$ y trácese la perpendicular a *af* por *b* y tómese *d* en esa recta de tal modo que $db = c$ sea una cantidad arbitraria $(c \neq 0)$[2]. A partir de *d* y en dirección hacia *b*, tómese *C* en *db* tal que $dC = (pp \aleph\ 4q + 4cc)/8c$, nótese que entonces también $dC = pp/8c \aleph\ q/2c + c/2$. Con centro en el punto *C* trácese un círculo de radio *dC*, que cortará a *ab* en *e* y *f*. Así, *ae* y *af* son las raíces de la ecuación. Newton considera los segmentos como orientados, lo que aclara en un ejemplo posterior.

Comenta además que por ser *c* arbitraria, se tiene la ventaja de poder hacer la diferencia entre *dC* y *db* tan pequeña como se quiera, con lo cual los cortes del círculo y la recta quedarán claramente definidos. No habrá el problema de que la recta y el círculo se intersequen en ángulos muy pequeños, con lo cual sería difícil localizar el punto de intersección con precisión, y no se requiere tampoco trazar un círculo demasiado grande.

Newton no incluye la demostración de su construcción, de hecho no escribe demostración alguna en todo su trabajo. Las demostraciones son presentadas, con notación y terminología modernas, a lo largo de este capítulo.

*Demostración*

Tomamos el eje $x$ como la paralela a *db* por *a* y el eje $y$ como la paralela a *ab* por *C* (figura 4.8). Así, considerando que es necesario anteponer los signos de $p$ y $q$, dado que siempre son positivos, la ecuación de la recta será

$$x = bC = dC - db = p^2/8c \mp q/2c + c/2 - c$$

y la del círculo

[2] Newton utiliza la letra *c* tanto para denotar una cantidad como un punto. Para evitar confusiones, aquí la cantidad es denotada con minúscula y el punto con mayúscula.

$$x^2 + (y - (p/2))^2 = (p^2/8c \mp q/2c + c/2)^2.$$

Así, los puntos de intersección de la recta y el círculo estarán dados por

$$(dC - c)^2 + (y \pm (p/2))^2 = (dC)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (dC)^2 - 2(dC)c + c^2 + (y \pm (p/2))^2 = (dC)^2$$

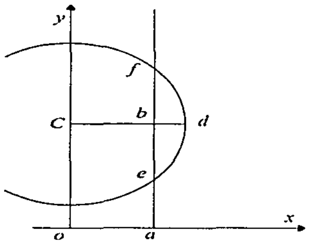



Figura 4.8

$$\Leftrightarrow \quad (y \pm (p/2))^2 + c^2 - 2c\,(p^2/8c \mp q/2c + c/2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 \pm py + p^2/4 + c^2 - p^2/4 \pm q - c^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 \pm py \pm q = 0$$

Q.E.D.

Para ilustrar esta última construcción Newton resuelve las ecuaciones $yy + 6y - 9 = 0$ y $yy = 8$. Para la primera toma $dC = 9/c + c/2$ (figura 4.9). A partir de su propia fórmula $p = 6$ y $q = 9 \Rightarrow dC = (36 + 36 + 4c^2)/8c = 72/8c + 4c^2/8c = 9/c + c/2$. Luego fija el valor $c = 6$, con lo que $dC = 3/2 + 3 = 4\frac{1}{2}$ y toma $ab = -\frac{1}{2}p = -3$, $db = c = 6$. Apunta que $dC = 4\frac{1}{2} = \frac{3}{4}c$. Trazando el círculo con centro en $c$ y radio $dC$ que cortará a la recta $ab$ en $e$ y $f$, al igual que antes las raíces son $ae$ y $af$.

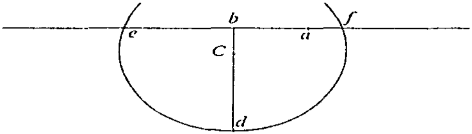



Figura 4.9

Comenta que $af$ es positiva y $ae$ negativa y que cualquiera que hubiere sido la elección de $c$, 1, 2 o 4 el resultado sería el mismo.

Geométricamente vemos que la apreciación sobre los signos de las raíces es correcta si consideramos los segmentos orientados. Por su parte, algebraicamente tenemos que las raíces son $y = -3 \pm 3\sqrt{2}$, con lo cual verificamos el resultado sobre los signos.

Para la segunda ecuación, que es $yy = 8$ (figura 4.10), se tiene que $dC = 4/c + c/2$, si se toma $c = 2$ entonces $dC = 3$.

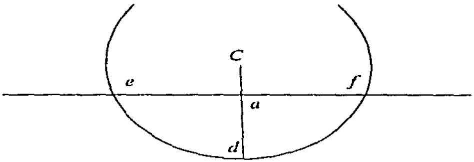



Figura 4.10

Como $p$ está faltando, toma $ab = 0$ y $ad = c = 2$. Al trazar el círculo las raíces serán $ae$ y $af$.

Newton señala que si $dC$ es negativo o no mayor que $ad/2$ el círculo no cortará a la recta, por lo que las raíces serán imaginarias.

Esto en efecto es cierto también para el caso general, pero aceptando la igualdad, donde tendríamos que para que las raíces de la ecuación sean reales se debe cumplir $dC \geq db/2$. En el caso de la igualdad la ecuación tiene una sola raíz de multiplicidad dos.

*Demostración*

$$dC \geq db/2 \quad \Leftrightarrow \quad p^2/8c \mp q/2c + c/2 \geq c/2$$

$\Leftrightarrow \quad p^2/8c + q/2c \geq 0$ cuando la ecuación tiene a $q$ con signo negativo

$\&\quad p^2/8c - q/2c \geq 0$ cuando la ecuación tiene a $q$ con signo positivo

como $c \neq 0$ podemos eliminarla y tomar $q$ incluyendo su signo, con lo que tenemos

$$p^2/4 - q \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 - 4q \geq 0$$

Entonces hemos llegado a que la condición $dC \geq ab/2$ es equivalente a que el discriminante de la ecuación cuadrática no sea negativo. Por lo tanto tendremos dos raíces reales en el caso de la desigualdad estricta y una en el caso de la igualdad.

Q.E.D.

Mediante esta construcción, que ilustra con dos ejemplos, es que Newton logra alcanzar un grado de generalización mayor al de Descartes. La construcción de Newton resuelve todas las ecuaciones de segundo grado en una incógnita, a diferencia de la debida a Descartes, quien recurre a tres construcciones distintas, también con regla y compás, correspondiendo cada una de las siguientes ecuaciones:

$$1)\ z^2 = az + b^2$$

$$2)\ y^2 = -ay + b^2$$

$$3)\ z^2 = az - b^2$$

abarcando así todos los casos posibles.

La construcción de Newton tiene la ventaja adicional de poder tomar la circunferencia de tamaños distintos y definir más claramente los puntos de intersección que determinan las raíces, como él mismo lo comenta.

En estas dos primeras construcciones, Newton lleva a cabo una especie de perfeccionamiento de las construcciones cartesianas.

*Construcción 3*

Con un buen entendimiento del ánimo de la construcción de ecuaciones que, como se menciona en la página 61 de esta tesis, consiste en encontrar en acto las magnitudes exactas de las raíces de ecuaciones polinomiales mediante una construcción geométrica, Newton presenta un procedimiento alternativo al respecto. Con este procedimiento habrá de resolver, "utilizando únicamente rectas" (cosa que no es tan exacta porque se requiere el trazo de perpendiculares y por tanto el uso de un compás), las ecuaciones cuadráticas de la forma $yy = 2ay + b \Leftrightarrow yy - 2ay - b = 0$ pero con $a$ y $b$ racionales arbitrarios (positivos, negativos o cero), por lo que es general para todas las ecuaciones de segundo grado con ese tipo de coeficientes y que tienen raíces reales. El procedimiento de Newton, que incluye incluso algunos ejemplos explicativos, es el siguiente.

Las raíces de la ecuación $yy = 2ay + b$ están dadas por $y = a \pm \sqrt{aa + b}$. De este modo, primero se divide $aa + b$ en una suma de números cuadrados (enteros) con la menor cantidad posible de sumandos. Esto se hace restando primero el cuadrado más grande posible de $aa + b$, para luego sacar el cuadrado más grande que se pueda del residuo y repetir la operación hasta llegar a cero.

Por ejemplo, si la ecuación es $yy + 2y + 4 = 0$, se tiene $y = 1 \pm \sqrt{5}$. Se toma 5 y se le extrae 4 que es un cuadrado, el residuo 1 también es un cuadrado. Entonces se procede a trazar el triángulo rectángulo $abc$ (figura 4.11) con $ab = 2 = \sqrt{4}$ y $bc = 1 = \sqrt{1}$. Así, $ac = \sqrt{5}$ y sumando $da$, de longitud 1, a $ac$, se tiene que $dc = y = 1 + \sqrt{5}$.

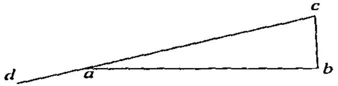



Figura 4.11

Otro ejemplo es $yy - 4y + 34 = 0$, que tiene sus raíces dadas por $y = -2 \pm \sqrt{38}$, misma que puede hallarse descomponiendo $38 = 36 + 1 + 1$ y construyendo (figura 4.12) los triángulos rectángulos $ade$ y $aec$ de tal forma que $ad = 6 = \sqrt{36}$, $de = ec = 1 = \sqrt{1}$.

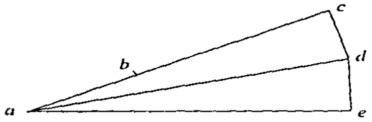



Figura 4.12

Posteriormente, se resta $ab$ de longitud 2 a $ac$ para que $bc = y = -2 \pm \sqrt{38}$.

Para finalizar con esta construcción comenta que en caso de que las raíces de una ecuación estuvieran dadas por $y = 6 + \sqrt{\frac{15}{7}} = 6 + \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{7}}$ es posible encontrar $\sqrt{15}$ y $\sqrt{7}$ como antes y resolver el problema.

La evidencia de que este procedimiento es en realidad muy sencillo, se basa en usar repetidamente el teorema de Pitágoras y aplicar la operación de adición y sustracción de segmentos.

En principio, si no consideramos el comentario previo a la construcción, nos podría parecer que Newton está completamente fuera de lugar y que su propuesta no tiene relación con la construcción geométrica de ecuaciones, pero el procedimiento que presenta es muy claro e intuitivo y es compatible con la idea de encontrar las magnitudes exactas geométricamente, pero tiene la gran limitante de remitirse a coeficientes racionales o, al menos, a ecuaciones con discriminante racional.

**La construcción de problemas sólidos y lineales**

En esta sección, breve en texto, pero extensa en información, Newton plantea que los problemas sólidos pueden ser resueltos intersecando una parábola y un círculo como Descartes hace en *La Geometría* (en la página 39 de esta tesis se presenta la construcción para problemas de cuarto grado). Sin entrar en mayor profundidad, valida por el momento la construcción cartesiana para problemas de tercero y cuarto grado, aunque toca el tema a fondo más adelante.

Afirma también que los problemas de grado cinco o seis expresados por

$$y^6 + py^5 + qy^4 + ry^3 + sy^2 + ty + u = 0$$

pueden resolverse mediante un circulo y las siguientes curvas de tercer grado:

1) $y^3 - byy - cdy + bcd + dxy = 0$ o $y^3 - byy + bcd + dxy = 0$, si $pp < 4q$ y $q$, $v$ son positivos, como Descartes explica (Libro III de *La Geometría*).

2) $y^3 + byy - hx = 0$, si en la ecuación $pp = 4q$.

3) $y^3 + byy + gy - hx = 0$, de forma general.

4) $y^3 + gy - hx = 0$. con $s$ positivo y $p = 0$.

5) $y^3 + d + fyx = 0$, cuando $p = 0$, $q$ y $v$ son positivos.

Los parámetros de las curvas habrán de ser fijados al resolver el problema.

Newton no proporciona argumentos que den validez a sus afirmaciones (2 a 5), por lo que a continuación se presenta la demostración del caso 3), que por ser de carácter general, es el más importante.

*Demostración*

Utilizando la técnica de inserción, sea

$$P(y) = y^6 + py^5 + qy^4 + ry^3 + sy^2 + ty + u = 0$$

y tomando la curva

1) $$y^3 + by^2 + gy - hx = 0 \quad <=> \quad hx = y^3 + by^2 + gy$$

la insertamos en $P(y)$ del siguiente modo. Primero calculamos

$$(hx)^2 = h^2x^2 = y^6 + 2by^5 + (2g + b^2)y^4 + bgy^3 + gy^2$$

y afectando únicamente el término $y^6$ de $P(y)$, es decir, efectuando la inserción sólo en el primer término de la ecuación, tenemos

$$h^2x^2 + (p - 2b)y^5 + (q - 2g - b^2)y^4 + (r - bg)y^3 + (s - g)y^2 + ty + u = 0$$

pasando entonces al segundo

$$h^2x^2 + h(p - 2b)xy^2 + (q - 2g - b^2)y^4 + (r - bg)y^3 + (s - g - b)y^2 + (t - g)y + u = 0,$$

al tercero

$$h^2x^2 + h(p - 2b)xy^2 + h(q - 2g - b^2)xy + (r - bg)y^3 + (s - g - 2b)y^2 + (t - 2g)y + u = 0,$$

y para finalizar al cuarto llegamos a

2) $$h^2x^2 + h(p - 2b)xy^2 + h(q - 2g - b^2)xy + h(r - bg)x + (s - g - 3b)y^2 + (t - 3g)y + u = 0.$$

Para que ésta sea la ecuación de un círculo, basta que tomemos en la ecuación 1)

$$b = p/2, \qquad g = ½\, q - p^2/8 \qquad \text{y} \qquad h = \sqrt{(s - g - 3b)}$$

lo que causa que

$$h(p - 2b) = 0, \qquad h(q - 2g - b^2)xy = 0 \qquad \text{y} \qquad h^2 = (s - g - 3b)$$

con lo que la ecuación 2) toma la forma

$$\alpha x^2 + \alpha y^2 + \beta x + \gamma y + \delta = 0$$

que corresponde a un círculo.

Q.E.D.

De nueva cuenta, Newton muestra un procedimiento general para construir problemas de grado 6. Este procedimiento, en principio, no parece ser generalizable a problemas de grado 5 y así poder resolver todos los problemas lineales. Pero si revisamos las operaciones que Newton aplica en la última sección de su trabajo, podemos ver que multiplicando la ecuación original de grado 5 por $x - k$ se obtiene una ecuación de grado 6 (que puede ser resuelta) y de la cual sólo tenemos que cancelar una de las raíces con valor $k$ para obtener las soluciones buscadas. Así, podemos ver que, con esa consideración, este método es general para resolver problemas lineales.

**Una regla general mediante la cual se puede resolver cualquier problema**

A pesar de haber dedicado la sección anterior a mostrar cómo se resuelven problemas lineales aplicando un método único, aquí Newton logra una mayor generalización: formula una regla para resolver cualquier problema de construcción de ecuaciones sin importar el grado del mismo.

Para esto toma la curva $a^2x = y^3$, y afirma que con ella es posible realizar la construcción de cualquier ecuación (de grado mayor a cuatro).

*Construcción 4*

Toma $a = 1$, grafica $x = y^3$ como *cadce* (figura 4.13), con $ab = x$ y $bc = y$ como ejes. A manera de ejemplo, se propone resolver la ecuación reducida de noveno grado

$$y^9 + my^7 + ny^6 + py^5 + qy^4 + ry^3 + syy + ty + v = 0,$$

en la cual $m$, $n$, $p$, $q$, $r$, $s$, $y$ y $v$ son cantidades conocidas con signo, es decir, pueden ser positivas o negativas.

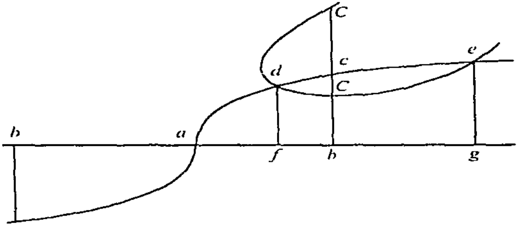



Figura 4.13

Para esto grafica también la curva $CdCe$ a partir de la ecuación

$$x^3 + myxx + nxx + pyyx + qyx + rx + syy + ty + v = 0$$

y baja las perpendiculares desde los puntos de intersección de las curvas al eje $x = ab$, mismas que serán las raíces de la ecuación de noveno grado. Newton no realiza la demostración, quizá debido a su simplicidad, pero podemos realizar una para corroborar que el resultado es en efecto correcto.

*Demostración*

Los puntos de intersección de *cadce* y *CdCe* estarán dados al sustituir

$$x = y^3 \quad \text{en} \quad x^3 + myx^2 + nx^2 + py^2x + qyx + rx + sy^2 + ty + v = 0$$

del siguiente modo

$$(y^3)^3 + my(y^3)^2 + n(y^3)^2 + py^2(y^3) + qy(y^3) + ry^3 + sy^2 + ty + v = 0$$

$$<=> \quad y^9 + my^7 + ny^6 + py^5 + qy^4 + ry^3 + sy^2 + ty + v = 0.$$

Q.E.D.

*Construcción 5*

Newton continúa con otro ejemplo: utilizando también $x = y^3$, construye la ecuación reducida de décimo grado

$$y^{10} + my^8 + ny^7 + py^6 + qy^5 + ry^4 + sy^3 + tyy + vy + w = 0.$$

pero tomando esta vez *CdCe* como $x^4 + myx^3 + nx^3 + pyyxx + qyxx + rxx + syyx + tyx + vx + wyy = 0$ o como $yx^3 + myyxx + nyxx + pxx + qyyx + ryx + sx + tyy + vy + w = 0$.

*Demostración*

En el primer caso, los puntos de intersección de *cadce* y *CdCe*, como en la demostración anterior, estarán dados al sustituir

$$x = y^3 \quad \text{en} \quad x^4 + myx^3 + nx^3 + py^2x^2 + qyx^2 + rx^2 + sy^2x + tyx + vx + wy^2 = 0$$

del siguiente modo

$$(y^3)^4 + my(y^3)^3 + n(y^3)^3 + py^2(y^3)^2 + qy(y^3)^2 + r(y^3)^2 + sy^2(y^3) + ty(y^3) + v(y^3) + wy^2 = 0$$

$$<=> \quad y^{12} + my^{10} + ny^9 + py^8 + qy^7 + ry^6 + sy^5 + ty^4 + vy^3 + wy^2 = 0$$

$$<=> \quad y^2 \cdot (y^{10} + my^8 + ny^7 + py^6 + qy^5 + ry^4 + sy^3 + ty^2 + vy + w) = 0.$$

En el segundo caso, los puntos de intersección de *cadce* y *CdCe*, como en la demostración anterior, estarán dados al sustituir

$$x = y^3 \quad \text{en} \quad yx^3 + my^2x^2 + nyx^2 + px^2 + qyx + ryx + sx + ty^2 + vy + w = 0$$

del siguiente modo

$$y(y^3)^3 + my^2(y^3)^2 + ny(y^3)^2 + p(y^3)^2 + qyy(y^3) + ry(y^3) + s(y^3) + ty^2 + vy + w = 0$$

$$<=> y^{10} + my^8 + ny^7 + py^6 + qy^5 + ry^4 + sy^3 + ty^2 + vy + w = 0.$$

Q.E.D.

En esta segunda construcción, en el primer caso, la ecuación resultante es un producto de la ecuación original y otro factor, a diferencia de la construcción 4 o del segundo caso, en que se obtiene exactamente la ecuación original. Este es un procedimiento completamente válido en términos de las condiciones 1) y 2) de la construcción de ecuaciones, que dice que las raíces de $P(x)$ deben ser también raíces de $R_{E,F}(x)$, esto es, $P(x) = CR_{E,F}(x)$, con $C$ una constante o un polinomio en $x$, y también en cuanto a la aceptabilidad y simpleza de las curvas. La aceptabilidad se cumple ya que las curvas tienen una ecuación algebraica y la simpleza de

$$x^4 + myx^3 + nx^3 + pyyxx + qyxx + rxx + syyx + tyx + vx + wyy = 0$$

y

$$yx^3 + myyxx + nyxx + pxx + qyyx + ryx + sx + tyy + vy + w = 0$$

podemos considerarla igual ya que ambas curvas son de grado 4.

*Construcción 6*

Newton muestra un último ejemplo en el que utilizando también $x = y^3$, construye la ecuación general de décimo grado

$$y^{10} + ly^9 + my^8 + ny^7 + py^6 + qy^5 + ry^4 + sy^3 + tyy + vy + w = 0$$

pero con *CdCe* como a) $x^4 + lyyx^3 + myx^3 + nx^3 + pyyxx + qyxx + rxx + syyx + tyx + vx + wy^2 = 0$, como b) $yx^3 + lx^3 + myyxx + nyxx + pxx + qyyx + ryx + sx + tyy + vy + w = 0$ o también como c) $yyx^3 + lyx^3 + myx^3 + nyyxx + pyxx + qx^2 + ryyx + syx + tx + vyy + wy = 0$.

*Demostración*

Si consideramos directamente la sustitución de la ecuación de *cadce* en las de *CdCe* tenderemos lo siguiente.

Para el caso a),

$$(y^3)^4 + ly^2(y^3)^3 + my(y^3)^3 + n(y^3)^3 + py^2(y^3)^2 + qy(y^3)^2 + r(y^3)^2 + sy^2(y^3) + ty(y^3) + v(y^3) + wy^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad y^{12} + ly^{11} + my^{10} + ny^9 + py^8 + qy^7 + ry^6 + sy^5 + ty^4 + vy^3 + wy^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad y^2 \cdot (y^{10} + ly^9 + my^8 + ny^7 + py^6 + qy^5 + ry^4 + sy^3 + ty^2 + vy + w) = 0.$$

Para b),

$$y(y^3)^3 + l(y^3)^3 + my^2(y^3)^2 + ny(y^3)^2 + p(y^3)^2 + qy^2(y^3) + ry(y^3) + s(y^3) + ty^2 + vy + w = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad y^{10} + ly^9 + my^8 + ny^7 + py^6 + qy^5 + ry^4 + sy^3 + ty^2 + vy + w = 0.$$

Y para c),

$$y^2(y^3)^3 + ly(y^3)^3 + my(y^3)^3 + ny^2(y^3)^2 + py(y^3)^2 + q(y^3)^2 + ry^2(y^3) + sy(y^3) + ty + vy^2 + wy = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad y^{11} + ly^{10} + my^9 + ny^8 + py^7 + qy^6 + ry^5 + sy^4 + ty^3 + vy^2 + wy = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad y \cdot (y^{10} + ly^9 + my^8 + ny^7 + py^6 + qy^5 + ry^4 + sy^3 + ty^2 + vy + w)$$

Q.E.D.

Para continuar, Newton hace el comentario de que si las ecuaciones a resolver tienen un grado menor, algunos de sus términos finales o intermedios son eliminados o son de grado mayor a diez, entonces la ecuación de la curva *CdCe* puede encontrarse de la misma manera que en los ejemplos anteriores (construcciones 4 a 6), "observando el orden de la progresión".

Menciona que existen tres curvas "diversas" mediante las cuales cualquier problema puede ser resuelto. Serán tres a menos que algunas de ellas resulten ser iguales y la más simple es la que debe ser escogida para la construcción.

Estas curvas diversas pueden apreciarse claramente en la construcción 6, son las curvas a), b) y c) que, aunque son todas de grado 4, producen que la ecuación resultante sea de grado 10, 11 o 12, respectivamente. Podemos entonces ver que Newton al decir que las curvas diversas son "iguales" se refiere sólo al grado de las mismas.

Dice, a manera de enunciación de su regla general para construcciones con $x = y^3$, que las ecuaciones de grado 2 y 3 se resolverán trazando líneas rectas, las de grados 4, 5 y 6 con secciones cónicas, las de grados 7, 8 y 9 mediante curvas de tercer grado, las de grados 10, 11 y 12 mediante curvas de cuarto grado, etcétera.

Es claro que, en lo que va de esta sección, Newton muestra un procedimiento que es generalizable para ecuaciones polinomiales de cualquier grado, y que es equiparable a lo que Descartes presenta al final de *La Geometría*, donde no enuncia una regla general sino que sugiere que se induzca a partir de ejemplos particulares. Newton pasa a generalizar un procedimiento mediante un llamado al sentido común y no mediante una demostración. Una prueba, en la que además se aclara la existencia y caracterización de las curvas diversas, es la siguiente.

***Demostración de la posibilidad de construir ecuaciones de grado n utilizando la curva $x = y^3$***

Primero una definición y un resultado que serán utilizados.

**Definición**

Para esta demostración en particular, la función entera $r(i)$ (i = 0, 1 ,2 ..., $n$), estará dada por

$$r(i) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \equiv 0 \pmod 3 \\ 1, & \text{si } i \equiv 1 \pmod 3 \\ 2, & \text{si } i \equiv 2 \pmod 3 \end{cases} .$$

**Resultado 1**

$$([\, i / 3 \,] \cdot 3) + r(i) = i,$$

donde $[\, x \,]$ es la parte entera de $x$.

Para demostrar la validez del resultado, analicemos por casos.

Si $i \equiv 0 \bmod (3)$ => $([\, i / 3 \,] \cdot 3) = i$ & $r(i) = 0$ => $([\, i / 3 \,] \cdot 3) + r(i) = i$.

Si $i \equiv 1 \bmod (3)$ => $([\, i / 3 \,] \cdot 3) = i - 1$ & $r(i) = 1$ => $([\, i / 3 \,] \cdot 3) + r(i) = i$.

Si $i \equiv 2 \bmod (3)$ => $([\, i / 3 \,] \cdot 3) = i - 2$ & $r(i) = 2$ => $([\, i / 3 \,] \cdot 3) + r(i) = i$.

Q.E.D.

Entrando en la demostración, tomemos $E(x, y) = x - y^3 = 0$ y sea $P(y)$ el polinomio de grado $n$ arbitrario ($n \geq 3$)

$$P(y) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y + a_0 = 0.$$

Es posible definir $F_{P(y)}(x, y)$a partir de $P(y)$ del siguiente modo.

Se sustituyen los $n + 1$ términos de $P(y)$, siendo éstos $a_i y^i$ son sustituidos por $x^{[i/3]} \cdot y^{r(i)}$ ($n \geq i \geq 0$).

Así, $E(x, y)$ y alguna de las tres ecuaciones siguientes, que son de hecho las curvas diversas, construyen geométricamente a $P(y)$.

1) $F_{P(y)}(x, y) = a_n (x^{[n/3]} \cdot y^{r(n)}) + a_{n-1} (x^{[(n-1)/3]} \cdot y^{r(n-1)}) + \cdots + a_2 y^2 + a_1 y + a_0 = 0$

2) $F_{yP(y)}(x, y) = a_n (x^{[(n+1)/3]} \cdot y^{r(n+1)}) + a_{n-1} (x^{[n/3]} \cdot y^{r(n)}) + \cdots + a_2 y^3 + a_1 y^2 + a_0 y = 0$

3) $F_{y^2P(y)}(x, y) = a_n (x^{[(n+2)/3]} \cdot y^{r(n+2)}) + a_{n-1} (x^{[(n+1)/3]} \cdot y^{r(n+1)}) + \cdots + a_2 y^4 + a_1 y^3 + a_0 y^2 = 0$

ya que sustituyendo $x = y^3$ en $F_{P(y)}(x, y)$ y aplicando el resultado 1, tenemos que

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y + a_0 = 0$$

con $F_{yP(y)}(x, y)$ llegamos a

$$y\,(a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y + a_0) = 0$$

y para finalizar, con $F_{y^2P(y)}(x, y)$ obtenemos

$$y^2\,(a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y + a_0) = 0.$$

Con lo que la ecuación $P(y) = 0$ es construida.

Q.E.D.

De las curvas diversas 1), 2) y 3) que pueden participar en la demostración, la que produzca la ecuación de menor grado que resuelva el problema será la que se tome para la construcción, como señala Newton. Estas curvas no pueden llegar a coincidir en caso alguno ya que los primeros términos de las ecuaciones $x^{[n/3]} \cdot y^{r(n)}$, $x^{[(n+1)/3]} \cdot y^{r(n+1)}$ y $x^{[(n+2)/3]} \cdot y^{r(n+2)}$ no pueden nunca ser iguales ya que la suma de los grados de $x$ y $y$ debe ser $n$, $n+1$ y $n+2$ respectivamente.

*Construcción 7*

Para continuar con su sección, Newton construye la ecuación de grado trece

$$y^{13} + ly^{12} + ny^{10} + py^{9} + qy^{8} + ry^{7} + sy^{6} + ty^{5} + vy^{4} + wy^{3} + ayy + by + c = 0$$

intersecando $y^4 = x$ con

$$yx^3 + lx^3 + nyyxx + pyxx + qxx + ry^3x + syyx + tyx + vx + wy^3 + ayy + by + c = 0$$

que como podemos ver es correcta ya que al sustituir $x = y^4$ en esta ultima ecuación, tenemos

$$y(y^4)^3 + l(y^4)^3 + ny^2y(y^4)^2 + py(y^4)^2 + q(y^4)^2 + ry^3(y^4) + sy^2(y^4) + ty(y^4) + v(y^4) + wy^3 + ay^2 + by + c = 0$$

que es igual a la ecuación original.

Este es un ejemplo en el que Newton pretende hacer ver que la regla general para construir ecuaciones utilizando la curva $x = y^3$ es extensible a otros grados de $y$, en este caso a $y^4$, con lo que da la idea de que se puede utilizar cualquier curva del tipo $x = y^n$, siempre que la ecuación a construir tenga un grado suficientemente grande. Esto de hecho es cierto, y para demostrarlo se puede fácilmente generalizar la demostración anterior hecha para el caso $n = 3$.

**Por medio de qué líneas debe resolverse un problema**

Newton dice que si se toma el número cuadrado (entero) mayor inmediato al grado de la ecuación planteada, ésta podrá ser resuelta por curvas que tendrán grados menores o iguales a la raíz del número cuadrado tomado, y que el producto de los grados de las curvas será mayor o igual, pero nunca menor, al grado de la ecuación inicial. Añade que el número de puntos en los que dos curvas pueden cortarse nunca podrá ser mayor al producto de los grados de las ecuaciones de las mismas, pero que si tendrá que ser igual, excepto por las raíces imaginarias.

Aqui Newton está presentando el resultado más importante de todo este capítulo dedicado a la construcción de ecuaciones. Advierte que el producto de los grados de las curvas es el que determina el grado de las ecuaciones que pueden ser construidas con ellas. Una ecuación de grado $n$ puede construirse, según esto con curvas apropiadas de grados $a$ y $b$ tales que $ab \geq n$.

De aquí se deduce fácilmente lo que dice al principio de la sección, que una ecuación de grado $n$ puede ser resuelta por curvas de grados $a$ y $b$ tales que $ab \leq k$, donde $k^2$ es el entero cuadrado mayor (o igual) inmediato a $n$.

Sin embargo, acerca del número de puntos en los que las curvas se cortarán, Newton está olvidando la posibilidad de la existencia de raíces reales múltiples en un polinomio. Puede darse el caso, como se apuntó atrás –por ejemplo al resolver una ecuación cuadrática, mediante un círculo y una recta–, que cuando el discriminante es 0, la recta es tangente a la circunferencia, es decir, la corta en un solo punto y la raíz tiene multiplicidad dos. Hay que recordar que justo antes de entrar a la construcción de ecuaciones cuadráticas por medio de triángulos rectángulos, Newton señala que las raíces serán imaginarias cuando $dc \not> ad/2$ , es decir, cuando el discriminante no sea mayor que cero, dejando fuera el caso en que es cero y la raíz es múltiple.

Volviendo al resultado importante, la sección continúa con un formato similar a la siguiente tabla, donde relaciona el grado de la ecuación con las curvas más simples que pueden siempre utilizarse para construirla.

| **Si la ecuación es de un grado no mayor a** | **Puede resolverse por la intersección de (pero no por curvas más simples)** |
|---|---|
| 2 | Dos líneas rectas o una línea recta y una sección cónica |
| 4 | Dos secciones cónicas |
| 6 | Una sección cónica y una curva de tercer grado |
| 9 | Dos curvas de tercer grado |
| 12 | Una curva de tercer y otra de cuarto grados |
| 16 | Dos curvas de cuarto grado |

⋮

En la tabla no es muy claro a qué se refiere Newton al decir que las ecuaciones hasta de grado dos se resuelven intersecando dos rectas. Quizá se refiera a las ecuaciones lineales o a la construcción 3 que se basa en triángulos rectángulos, pero en realidad no es claro.

Newton señala que esta consideración (la de la tabla) dividirá a los problemas en clases, pero que no siempre resultará sencillo resolver un problema de grado alto mediante las curvas más simples (las indicadas en la tabla) ya que éstas deberán de todas formas ser definidas con antelación. Así, frecuentemente es más conveniente utilizar una curva compleja y otra sencilla, por ejemplo, un problema de grado 16 puede quizá ser resuelto más fácilmente por una curva de grado 6 y otra de grado 3.

Lo que Newton trata en esta sección se relaciona directamente con lo que aparece al final del libro III de *La Geometría*, donde Descartes propone, como método general para construir ecuaciones, el intersecar un círculo con una curva de grado $n$ para resolver los problemas de grado $2n-1$ y $2n$. Si bien esto es aceptado por Newton, Descartes no propone otra alternativa, planteando que siempre se habrá de usar un círculo. Sería difícil pensar que Descartes no está al tanto de que una ecuación puede ser resuelta por cualesquiera dos curvas, siempre que el producto de los grados de las mismas sea mayor o igual al grado de la ecuación.

Esta situación nos hace reflexionar sobre el papel especial que Descartes le da al círculo. Si bien la geometría cartesiana es una extensión de la geometría de regla y compás a curvas más sofisticadas y de grados algebraicos mayores, cuál es la razón que lleva a Descartes a seguir conservando el círculo para sus construcciones. Si no lo hace, ¿su geometría no tendrá ya relación o similitud con la geometría clásica? De hecho, podríamos pensar que en realidad el círculo permanece y la recta se transforma en curvas, primero en la parábola, después en la "parábola cartesiana", luego en $\mathcal{C}_3$, etcétera. Puede haber algo de perfección o divinidad en el círculo como apuntaban algunos de los antiguos. Newton viene a desmistificar, o si no al menos a considerar indistinto, el uso del círculo con respecto a las demás curvas algebraicas.

Por otra parte, Newton plantea una interpretación distinta sobre la simpleza relativa de los pares de curvas usados en construcciones. Para Descartes, una ecuación de grado 36 se construiría, por ejemplo, con un círculo y una curva de grado 18, que serían las más simples. Para Newton lo más simple sería usar dos curvas de grado 6.

Este punto sobre la simpleza de pares de curvas no es muy bien definido por Descartes en *La Geometría*. Es posible saber cuando una curva es más simple que otra comparando sus grados, como lo había planteado Descartes, pero al tener pares de curvas, como en el ejemplo del párrafo anterior, saber cuál par es más simple es subjetivo. En principio la respuesta sería que dos curvas de grado 6 constituyen un par más simple que una curvas de grado 2 (en particular el círculo) y otra de grado 18.

Las dos curvas de grado seis nos permitirán realizar una construcción algebraicamente más sencilla si utilizamos el método general de Newton, que nos llevaría a tomar la curva $x = y^6$ y obtener mediante la técnica de inserción, a partir del polinomio de grado 36, la otra curva de sexto grado, para después realizar la construcción de la ecuación intersecando las dos curvas.

Sin embargo, en lo que se refiere al trazado, no contamos con un procedimiento geométrico o un aparato para realizar el trazado de cualquier curva de grado 6, mientras que el círculo se traza con el compás y la curva de grado dieciocho puede ser trazada como Descartes lo propone.

Así, podemos concluir que las construcciones de Newton son algebraicamente simples, comparadas con las construcciones cartesianas, y dejan de lado los mecanismos para el trazado de las curvas que intervienen en ellas. La parte algebraica comienza a tomar fuerza mientras que el espíritu geométrico, en cuanto a precisión y exactitud ideal, pasa a un segundo lugar en el esquema de Newton.

En lo que resta de este capitulo, se tratarán los ejemplos concretos que presenta Newton sobre cómo utilizar esta regla general que ha establecido, además de algunos procedimientos particulares muy útiles.

## Cómo los problemas planos son resueltos con la parábola

*Construcción 8*

Partiendo de la curva $x = yy$, Newton procede a construir la ecuación

$$yy + ky + l = 0$$

Toma (figura 4.14) $ag = l$, $gf = k$ y $fh = 1$ = *latus rectum* de la parábola. Traza $gh$ tal que interseque a la parábola en $d$ y $e$ para que, trazando las perpendiculares al eje $gc$, $db$ y $ec$ sean las raíces buscadas.

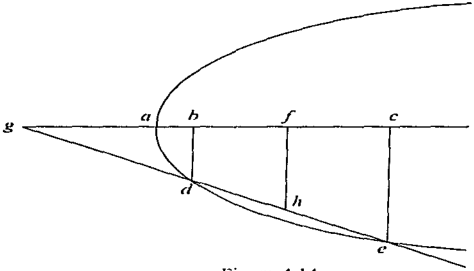


Figura 4.14

Las raíces serán positivas si sus segmentos no se ubican entre $g$ y $fh$, negativas de lo contrario.

Newton está considerando la ecuación general con $k$ y $l$ números cualesquiera. Esto es un avance respecto de lo hecho por Descartes, quien se ocupa de este problema considerando a $k$ y a $l$ exclusivamente positivos.

*Demostración*

El origen de coordenadas debe ser situado en el vértice de la parábola, el eje $x$ será la recta $ac$ en esa dirección ya que la ecuación de la parábola es $x = y^2$. El eje $y$ será la paralela a $fh$ por $a$. La ecuación de la recta $gh$ es

$$ky + x + l = 0$$

Así, al intersecar la recta y la parábola tendremos

$$ky + y^2 + l = 0 \quad <=> \quad y^2 + ky + l = 0$$

Los signos de las raíces están dados como dice Newton, ya que trabaja con segmentos orientados.

Q.E.D.

Otra forma de realizar la demostración es aplicando la regla general de Newton. Tal como se hizo para $x = y^3$, tenemos que, dadas $y^2 + ky + l = 0$ y $x = y^2$, construimos las curvas diversas

$$1)\ x + ky + l = 0$$

$$2)\ xy + kx + ly = 0$$

y tomamos 1) por ser la de menor grado, para intersecar la parábola con ésta y llegar, como ya se vio, a la ecuación original.

**Cómo los sólidos *son resueltos con la parábola***

*Construcción 9*

Para resolver un problema de cuarto grado, Newton indica que primero se elimina el término de grado 3 para obtener la ecuación

$$y^4 + lyy + my + n = 0$$

y, con la parábola $x = yy$ ya trazada (figura 4.15), se toman $ae = ½$, $ep = ½\, l$ y $pq = ½\, m$. Se traza $af$ perpendicular a $ap$ y tal que $af = aq$ y también se dibuja $fk$ paralela a $ap$, siendo $k$ el punto de intersección de esta recta con la parábola, desde donde se toma $kh = n$. Para finalizar se traza $hr$ perpendicular a $ap$ que cortará a la parábola en $w$, de donde se traza, con centro en $q$ y radio $wr$, el círculo $tsm$.

Newton abre un paréntesis para indicar que $ar = (1 - 2l + ll + mm - 4n)/4$, por lo que se puede también proceder a trazar la perpendicular $rw$ directamente y trazar el círculo.

Así, trazando las perpendiculares desde los puntos de intersección de la parábola y el círculo a la recta $ap$ se obtendrán las raíces de la ecuación, que en este caso son $nm$ y $tv$. Las raíces serán positivas si los puntos de corte están del lado opuesto a $q$ con respecto al segmento $ap$ y si $m$ es positivo.

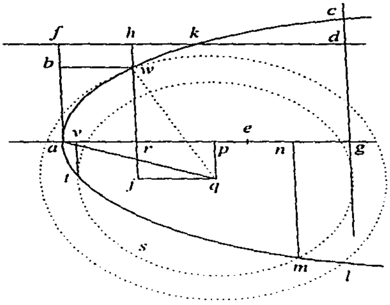



Figura 4.15

*Demostración*

La ecuación de la parábola es $x = y^2$, el eje $y$ es $ap$ y el eje $x$ es $af$. Como $ae = \frac{1}{2}$, $ep = \frac{1}{2} l$, $ap = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} l$ con $pq = \frac{1}{2} m$, tenemos que las coordenadas del centro del círculo son $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} l, -\frac{1}{2} m)$. Para calcular el cuadrado del radio, $fk = af^2 = aq^2 = (\frac{1}{2}m)^2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}l)^2$, de donde $fh = ar = wr^2 = (\frac{1}{2} m)^2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} l)^2 - n = m^2/4 + l^2/4 - l/2 + \frac{1}{4} - n = (1 - 2l + ll + m^2 - 4n)/4$, como Newton indica en su paréntesis.

Así, la ecuación del círculo entonces estará dada por

$$(x + \tfrac{1}{2} l - \tfrac{1}{2})^2 + (y + \tfrac{1}{2} m)^2 = (1 - 2l + l^2 + m^2 - 4n)/4$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 + l^2/4 + \tfrac{1}{4} + lx - x - l/2 + y^2 + my + m^2/4 - \tfrac{1}{4} + l/2 - l^2/4 - m^2/4 + n = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 + lx - x + y^2 + my + n = 0$$

y al sustituir $x = y^2$, se tiene

$$\Longleftrightarrow \quad (y^2)^2 + l(y^2) - (y^2) + y^2 + my + n = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad y^4 + ly^2 + my + n = 0$$

y como el eje $x$ es $af$, en esa dirección, las raíces serán positivas cuando el punto de intersección se ubique en el semiplano $x > 0$.

Q.E.D.

*Construcción 10*

Newton resuelve la ecuación cúbica

$$y^3 + kyy + ly + m = 0.$$

Primero la multiplica por $y - k = 0$ para obtener

$$y^4 - ky^3 + ky^3 - kkyy + lyy - kly + my + km = 0$$

$$<=> \quad y^4 + (l - kk) + yy\,(m - kl)\,y + km = 0$$

y, también sobre la figura 4.15, toma $ae = ½$, $ep = (l - kk)/2$ y $pq = (m - kl)/2$, para trazar $fk$ paralela a $ae$ con $af = aq$ (la nueva $aq$) y se toma $k$ en $fk$ tal que $fd = km$ (el producto de coeficientes de la ecuación) para trazar la perpendicular a $fk$ por $d$, que cortará a $ap$ en $g$ y a la parábola en $c$. Entonces, con radio $cg$ y centro en $q$ traza el círculo $wl$.

Otra forma de trazar el círculo es la siguiente. Como $k$ es una raíz de

$$y^4 + (l - kk) + yy\,(m - kl)\,y - km = 0$$

tomando $ab$ perpendicular a $ar$ de manera que $k = ab$ y trazando por $b$ la paralela a $ae$ que cortará la parábola en $w$ (lo cual puede ser también hecho tomando desde un principio $ar = kk$, ya que $ar = (ab)^2$ por estar $w$ en la parábola) trazamos el círculo con centro en $q$ y radio $wq$.

Trazando las perpendiculares desde los puntos de intersección de la parábola y el círculo a la recta $ap$ se obtendrán las raíces. Todas, excepto $wr = k$, serán raíces de la ecuación inicial

$$y^3 + kyy + ly + m = 0$$

debido a que $k$ es sólo raíz de la ecuación de cuarto grado.

*Demostración*

La ecuación de la parábola es $x = y^2$, el eje $y$ es $ap$ y el eje $x$ es $af$. Como $ae = ½$, $ep = (l - k^2)/2$, $pq = (m - kl)/2$ y $ap = ae - ep = (1 - l + k^2)/2$, tenemos que las coordenadas del centro del círculo son $((1 - l + k^2)/2, -(m - kl)/2)$. Para calcular el cuadrado del radio, $fk = af^2 = aq^2 = (1 - l + k^2)^2/4 + (m - kl)^2/4$ y como $kd = mk$,

$$cg^2 = ag = fk + kd = (1 - l + k^2)^2/4 + (m - kl)^2/4 + mk$$

$$\iff \quad cg^2 = (1 - l + k^2)^2/4 + (m - kl)^2/4 + mk$$

$$= (1 + l^2 + k^4 - 2l + 2k^2 - 2lk^2)/4 + (m^2 - 2klm + l^2k^2)/4 + 4mk/4$$

$$= (k^4 + (2 - 2l + l^2)k^2 + (4m - 2lm)k + m^2 + l^2 - 2l + 1)/4$$

El procedimiento alternativo que propone Newton funciona debido a que de antemano se sabe que $k$ es una raíz del polinomio de cuarto grado, lo que obliga a que el círculo y la parábola se intersequen en $w$ de coordenadas $(k^2, k)$. De todas formas, algebraicamente tenemos que, al trazar el triángulo rectángulo $jqw$ (cuestión adicional al dibujo de Newton), $wj = (2k + m - kl)/2$ y $jq = (1 - l + kk)/2 - k^2$, con lo que el cuadrado del radio será $qw^2 = wj^2 + jq^2$, es decir

$$qw^2 = (2k + m - kl)^2/4 + ((1 - l + k^2)/2 - k^2)^2 = (k(2 - l) + m)^2/4 + (1 - l - k^2)^2/4$$

$$= (k^2(2 - l)^2 + 2km(2 - l) + m^2 + 1 + l^2 + k^4 - 2l - 2k^2 + 2lk^2)/4$$

$$= (k^4 + (2 - 2l + l^2)k^2 + (4m - 2lm)k + m^2 + l^2 - 2l + 1)/4$$

$$\implies cg^2 = qw^2 \quad \iff |cg| = |qw| .$$

Los dos procedimientos llevan a un círculo con el mismo radio y el mismo centro. Podemos entonces escribir la ecuación del círculo como

$$(x - (1 - l + k^2)/2)^2 + (y + (m - kl)/2)^2 = (k^4 + (2 - 2l + l^2)k^2 + (4m - 2lm)k + m^2 + l^2 - 2l + 1)/4$$

$$\iff \quad x^2 - (1 - l + k^2)/2)^2 + (y + (m - kl)/2)^2 = (k^4 + (2 - 2l + l^2)k^2 + (4m - 2lm)k + m^2 + l^2 - 2l + 1)/4$$

$$\iff \quad x^2 + l^2/4 + k^4/4 + 1/4 + lx - k^2x - x - lk^2/2 - l/2 + k^2/2 + y^2 + m^2/4 + k^2l^2/4 + my - kly - klm/2 = k^4/4 + k^2/2 - lk^2/2 + l^2k^2/4 + km - lmk/2 + m^2/4 + l^2/4 - l/2 + 1/4$$

$$\iff \quad x^2 + lx - k^2x - x + y^2 + my - kly = km$$

y sustituyendo $x = y^2$ llegamos a

$$(y^2)^2 + l(y^2) - k^2(y^2) - y^2 + y^2 + my - kly = km$$

$$\iff \quad y^4 + (l - k^2)y^2 (m - kl)y - km = 0.$$

Así, si esta ecuación es dividida entre $y - k$, para el caso en que $k$ no puede ser raíz del polinomio, tendremos

$$y^3 + ky^2 + ly + m = 0$$

Q.E.D.

Una vez terminada esta construcción, Newton, afirma que si en la ecuación se toma $k = 0$, entonces la operación sería mucho más corta, ya que $ae = ½$, $ep = l/2$, $pq = m/2$ y el radio del circulo sería $aq$.

Esto es en efecto cierto ya que $ae = ½$, $ep = (l - kk)/2$ y $pq = (m - kl)/2$ para el caso general; y como $kd = 0$ entonces $af = cg = aq$ es el radio del círculo. Tomar $k = 0$ simplifica la construcción y es posible trazar el círculo en un menor número de pasos.

*Construcción 12*

Para finalizar esta sección, veremos el análisis de Newton del caso en que el primer término de la ecuación cúbica se pierde transformándose en

$$y^2 + ky + l = 0.$$

Mediante la intersección de la parábola y un círculo (figura 4.16) el problema se resuelve tomando $ae = ½$, $e\pi = l/2$, $\pi p = kk/2$ y $pq = kl/2$, para entonces trazar el círculo con centro $q$ y radio $aq$. Las raíces de la ecuación estarán dadas por las magnitudes de las perpendiculares a $ap$ bajadas desde los puntos de intersección de la parábola y el círculo, por ejemplo $vt$, a excepción de una que sea igual a $k$.

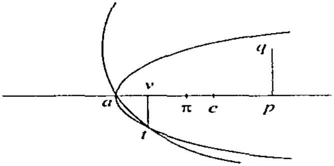



Figura 4.16

*Demostración*

La ecuación de la parábola es $x = y^2$, el eje $x$ es $ap$ y el eje $y$ es la paralela a $pq$ que pasa por $a$. Hay que tomar $\pi p = k^2/2$. Para que $ap = ae - e\pi + \pi p = ½ - l/2 + k^2/2$ y $pq = kl/2$. Las coordenadas del centro del círculo son $((1-l+k^2)/2, kl/2)$ y el radio al cuadrado del mismo será $((1-l+k^2)/2)^2 + (kl/2)^2$, por lo que la ecuación del círculo puede escribirse como

$$(x-((1-l+k^2)/2)^2+(y-kl/2)^2=((1-l+k^2)/2)^2+(kl/2)^2$$

$$\iff \quad x^2-x(1-l+k^2)+y^2-kly=0$$

y sustituyendo $x = y^2$

$$(y^2)^2-(y^2)(1-l+k^2)+y^2-kly=0 \quad \iff \quad y^4-(k^2-l)y^2-kly=0$$

$$\iff \quad (y^2-ky)(y^2+ky+l)=0$$

De esta forma, los puntos de intersección del círculo y la parábola determinan tanto las raíces de

$$y^2-ky=0 \qquad \text{como las de} \qquad y^2+ky+l=0.$$

Pero las raíces de la primera ecuación son cero y $k$, por lo tanto las ordenadas de los puntos de intersección del círculo y la parábola, a excepción del origen y uno de ellos de valor $k$, corresponden a las raíces de la ecuación inicial.

Q.E.D.

**Construcciones realizadas por la parábola de la segunda clase $x = y^3$**

*Construcción 13*

Dada la línea "torcida", dice Newton, cuya ecuación es $x = y^3$ (figura 4.17), para resolver la ecuación

$$y^3+ly+m=0$$

llamemos $ad = x$, $dg = y$, o $ac = -x$, $ce = -y$, y tomemos $ab = m$, $bd = l$ y $df = 1$, con $df$ perpendicular a $bd$.

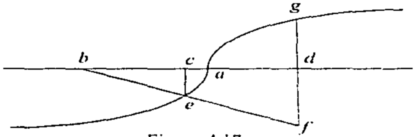



Figura 4.17

Si $bf$ es prolongada indefinidamente en ambas direcciones, las perpendiculares a $bd$ bajadas desde los puntos de intersección de la curva y la recta, como $e$ por ejemplo, serán las raíces de la ecuación $y^3 + ly + m = 0$. (Al parecer Newton se equivoca y escribe $y^3 + byy + m = 0$ en toda la construcción.) Las raíces serán positivas o negativas dependiendo del valor de $y$ en el punto que las determina. En el dibujo, $ce$ es negativa ya que $y$ también lo es (en este caso se considera positiva la dirección hacia arriba).

*Demostración*

El origen está en $a$ y la ecuación de la recta es

$$x = -ly - m,$$

que al sustituirla en $x = y^3$, o a la inversa, tenemos

$$y^3 = -ly - m \quad <=> \quad y^3 + ly + m = 0.$$

Q.E.D.

*Construcción 14*

También dada $x = y^3$ (figura 4.18) con los mismos ejes y origen es posible resolver la ecuación

$$yy + ky + l = 0,$$

multiplicándola primero por $y - k$, para obtener

$$y^3 + (l - kk)y - kl = 0,$$

y llamando $ab = kl$, $b\delta = l$, $\delta d = kk$ y $df = 1$, con $df$ perpendicular a $ad$, tracemos la recta $fb\lambda$.

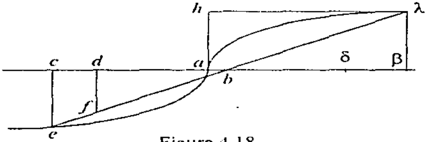



Figura 4.18

La recta puede también trazarse tomando $ab = kl$, y $ah = k$, $ah$ perpendicular a $da$, para trazar $h\lambda$, paralela a $ad$, hasta que interseque a la curva, es decir hasta que $h\lambda = k^3$, para entonces trazar la recta $\lambda bfe$.

Finalmente, como en todas las construcciones, las perpendiculares bajadas desde los puntos de intersección de la recta y la curva a $ad$ serán las raíces de

$$y^3 + (l - kk)y - kl = 0,$$

por lo que todas ellas, excepto $\beta\lambda = k$, serán las raíces de la ecuación $yy + ky + l = 0$.

*Demostración*

La recta puede ser trazada, según Newton, de dos formas. De la primera, $ab = kl$ lo que nos da la abcisa al origen y $db = \delta d - b\delta = -l + k^2$ y $fd = -1$, por lo que la pendiente con respecto a $y$ será $-(l - k^2)$, lo que da lugar a que la ecuación de la recta sea

$$x = -(l - k^2)y + kl,$$

De la segunda manera, la abcisa al origen es también $ab = kl$, y la pendiente con respecto a $y$ está dada por $b\beta/\beta\lambda$, con $b\beta = h\lambda - ab = k^3 - kl$ y $\beta\lambda = k$, esto es $(k^3 - kl)/k = k^2 - l = -(l - k^2)$.

Así, hemos verificado que de las dos formas propuestas se obtiene la misma recta.

Ahora, la intersección de la recta y la curva estará dada por

$$x = -(l - k^2)y + kl \quad \& \quad x = y^3$$

$$\iff y^3 = -(l - k^2)y + kl$$

$$\iff y^3 + (l - k^2)y - kl = 0$$

que al dividirla entre $y - k$ será

$$yy + ky + l = 0,$$

Donde $y = k = \beta\lambda$ es una de las raíces de la ecuación de tercer grado, pero no de la inicial.

Q.E.D.

Aunque Newton no lo apunta, es claro que las raíces de la ecuación serán positivas si la ordenada del punto que las determina es positiva.

*Construcción 15*

Para resolver la ecuación de cuarto grado

$$z^4 + az^3 + bzz + cz + d = 0$$

Newton indica que debe usarse un círculo (y también la curva $x = y^3$). Entonces multiplicándola por

$$zz - az + aa - b = 0$$

obtenemos

$$z^6 + (a^3 + c - 2ab)z^3 + (a^3b - b^2 - ca + d)zz + (ca^2 - ad - bc)z + a^2d - bd = 0$$

que es de la forma

$$z^6 + mz^3 + nzz + pz + q = 0,$$

donde $n$ debe ser positivo. Si no lo fuera, es necesario aumentar o disminuir las raíces de la ecuación inicial y repetir de nuevo la operación hasta obtener una ecuación de la misma forma pero con $n$ positiva. Entonces, dividiendo la ecuación entre $\sqrt[4]{n}$ (que en realidad es dividir cada uno de los términos de la ecuación entre $\sqrt[4]{n^{(6-g)}} = \left(n^{1/4}\right)^{(6-g)}$, donde $g$ es el grado del término, lo cual Newton no enuncia claramente, ver el Teorema de modificación de coeficientes en polinomios más adelante), tenemos[3]

$$z^6 + \frac{m}{\sqrt{n\sqrt{n}}}\, z^3 + zz + \frac{p}{n\sqrt[4]{n}}\, z + \frac{q}{n\sqrt{n}} = 0\,.$$

Tomando (figura 4.19) $\quad ab = \dfrac{m}{2\sqrt{n\sqrt{n}}}, \quad bc = \dfrac{p}{2n\sqrt[4]{n}} \quad$ y con radio $\quad cd = \sqrt{\dfrac{mmn + pp - 4nq}{4nn\sqrt{n}}}$

trazamos el círculo $dk$, con lo que las perpendiculares desde los puntos de intersección del círculo y la curva, como son $hd$ y $ok$, multiplicados por $\sqrt[4]{n}$, serán las raíces de la ecuación.

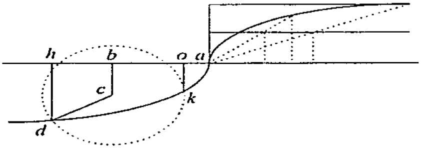



Figura 4.19

[3] Por ejemplo: para el caso del término $z^3$ resulta que $g = 3$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(n^{1/4})^{6-3}} = \frac{1}{(n^{1/4})^{3}} = \frac{1}{n^{3/4}} = \frac{1}{(n^{3/2})^{1/2}} = \frac{1}{(n\, n^{1/2})^{1/2}} = \frac{1}{(n\sqrt{n})^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{n\sqrt{n}}}$$

*Demostración*

Esta vez Newton cambia $y$ por $z$, con lo que la curva será $x = z^3$. El origen será $a$, $ba$ el eje $x$ y para este caso el eje $z$ será la paralela a $cb$ por $a$, con lo que de la asignación de valores de $ab$, $bc$ y $cd$ tenemos que la ecuación del círculo es

$$\left(x + \frac{m}{2\sqrt{n\sqrt{n}}}\right)^2 + \left(z + \frac{p}{2n\sqrt[4]{n}}\right)^2 = \frac{m^2 n + p^2 - 4nq}{4n^2\sqrt{n}}$$

$$<=> \quad \left(x + \frac{m}{2n^{3/4}}\right)^2 + \left(z + \frac{p}{2n^{5/4}}\right)^2 = \frac{m^2 n + p^2 - 4nq}{4n^{5/2}}$$

$$<=> \quad x^2 + \frac{m}{n^{3/4}}x + \frac{m^2}{4n^{3/2}} + z^2 + \frac{p}{n^{5/4}}z + \frac{p^2}{4n^{5/2}} = \frac{m^2 n}{4n^{5/2}} + \frac{p^2}{4n^{5/2}} - \frac{nq}{n^{5/2}}$$

$$<=> \quad x^2 + \frac{m}{n^{3/4}}x + z^2 + \frac{p}{n^{5/4}}z = -\frac{nq}{n^{5/2}}\,,$$

donde al sustituir $x = z^3$ tenemos

$$z^6 + \frac{m}{n^{3/4}}z^3 + z^2 + \frac{p}{n^{5/4}}z + \frac{nq}{n^{5/2}} = 0$$

$$<=> \quad z^6 + \frac{m}{\sqrt{n\sqrt{n}}}z^3 + zz + \frac{p}{n\sqrt[4]{n}}z + \frac{q}{n\sqrt{n}} = 0\,.$$

Ahora, la forma de llegar de

$$z^6 + m z^3 + n zz + p z + q = 0.$$

a

$$z^6 + \frac{m}{\sqrt{n\sqrt{n}}}z^3 + zz + \frac{p}{n\sqrt[4]{n}}z + \frac{q}{n\sqrt{n}} = 0$$

es multiplicando cada término de la primera ecuación por

$$\frac{1}{\sqrt[4]{n^{(6-g)}}} = \frac{1}{\left(n^{1/4}\right)^{(6-g)}}$$

donde $g$ es el grado del término, es decir

$z^6$ debe sustituirse por $\quad \dfrac{z^6}{\sqrt[4]{n^{(6-6)}}} = \dfrac{z^6}{\left(n^{1/4}\right)^0} = z^6$ ,

$mz^3$ debe sustituirse por $\quad \dfrac{mz^3}{\sqrt[4]{n^{(6-3)}}} = \dfrac{mz^3}{\left(n^{1/4}\right)^3} = \dfrac{mz^3}{n^{3/4}} = \dfrac{mz^3}{\sqrt{n\sqrt{n}}}$ ,

$nz^2$ debe sustituirse por $\quad \dfrac{nz^2}{\sqrt[4]{n^{(6-2)}}} = \dfrac{nz^6}{\left(n^{1/4}\right)^4} = z^2$ ,

$pz$ debe sustituirse por $\quad \dfrac{pz}{\sqrt[4]{n^{(6-1)}}} = \dfrac{pz}{\left(n^{1/4}\right)^5} = \dfrac{pz}{n^{5/4}}$ y

$q$ debe sustituirse por $\quad \dfrac{q}{\sqrt[4]{n^{(6-0)}}} = \dfrac{q}{\left(n^{1/4}\right)^6} = \dfrac{q}{n^{3/2}} = \dfrac{q}{n\sqrt{n}}$.

De este modo, las ecuaciones cumplen con la hipótesis del Teorema de modificación de coeficientes en polinomios, que se presenta al terminar la demostración, por lo que al multiplicar las raíces de

$$z^6 + \frac{m}{\sqrt{n\sqrt{n}}}\, z^3 + zz + \frac{p}{n\sqrt[4]{n}}\, z + \frac{q}{n\sqrt{n}} = 0$$

por $\sqrt[4]{n}$ , obtendremos las raíces de

$$z^6 + m z^3 + n zz + p z + q = 0.$$

Pero hasta el momento, sólo hemos demostrado la construcción de las raíces de

$$z^6 + m z^3 + n zz + p z + q = 0$$

y no de la ecuación original

$$z^4 + az^3 + bzz + cz + d = 0.$$

De esta forma, hay que considerar que las raíces de

$$zz - az + aa - b = 0$$

que son $z = \dfrac{a \pm \sqrt{-3a^2 - 4b}}{2}$ deben ser excluidas para así obtener sólo las raíces buscadas.

Q.E.D.

***Teorema de modificación de coeficientes en polinomios***

Para un polinomio arbitrario de grado $n$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

dado $c \neq 0$, es posible definir

$$P_c(x) = a_n x^n + a_{n-1}cx^{n-1} + \cdots + a_1 c^{n-1}x + a_0 c^n = 0.$$

Entonces, $x_0$ es una raíz arbitraria de $P(x)$, esto es $P(x_0) = 0$, sí y sólo si $cx_0$ es una raiz de $P_c(x)$.

*Demostración*

$P_c(x)$ se construye a partir de $P(x)$, sustituyendo cada término $a_k x^k$ en $P(x)$ por $a_k c^{n-k} x^k$, por lo que

$$P_c(cx_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k c^{n-k} (cx_0)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k c^{n-k} c^k x_0^k = \sum_{k=0}^{n} a_k c^n x_0^k = c^n \sum_{k=0}^{n} a_k x_0^k = c^n P(x_0) = 0$$

Q.E.D.

# Epílogo y conclusiones

La fama de Descartes descansa sobre muchos pilares. Uno de ellos, por sus repercusiones posiblemente el más importante para la ciencia moderna, fue *La Geometría*. Su valor como un texto que presenta métodos para resolver problemas es inapreciable. A través de sus páginas se descubren las maravillas del pensamiento cartesiano que, frente a las murallas impuestas por el espíritu geométrico de la Grecia clásica, planteó construcciones –es decir soluciones– nuevas y aceptables que dieron cuenta de tantos problemas que aguardaban por quien supiera proporcionar un solución matemáticamente aceptable. Los criterios cartesianos de claridad y simplicidad dieron la pauta en el desarrollo de métodos analíticos que en manos de Euler, Monge, Lagrange y Lacroix se convirtieron en la estrategia que presentaron los libros de texto para resolver los problemas de la matemática del siglo XVIII.

Sin duda, *La Geometría* (1637) es el libro del siglo XVII que más influyó en la matemática de su época, si no por otra cosa, porque marca el inicio de la geometría analítica, si bien el enfoque con tal nombre se usa para la resolución de problemas fue elaborado por sus herederos intelectuales en el transcurso del siguiente siglo. *La Geometría* enseña cómo resolver problemas presentando casos cuyas correctas y claras formas de solución validaban el procedimiento propuesto por Descartes. Puede suceder que no nos interesen los problemas particulares que resuelve, lo que sí no podemos negar es la fortaleza de un álgebra generalizada. Sus logros son evidentes en lo que después de él crecería más allá de meros avances en notación algebraica, como teoría de ecuaciones, geometría analítica, cálculo, la concepción de Lagrange de que el álgebra es el estudio de sistemas de operaciones generalizadas, entre otros.

El impacto que tuvo *La Geometría* entre sus contemporáneos fue inmediato: Florimond Debeaune y Frans van Schooten publicaron comentarios y aclaraciones a muchos de los pasajes crípticos de Descartes (escritos así, con toda intención, según comenta Marco Panza en tono un tanto bromista, pues Descartes desecha burlarse de algunos de sus contemporáneos, en especial de Roverbal, a quien no considera a la altura de su ingenio). Otro texto memorable, aunque no muy conocido en la actualidad, es el de Jan de Witt, *Los Elementos de las Curvas*, igualmente inspirado en *La Geometría*, y en el que sistematiza la geometría analítica. Los comentarios de van Schooten, en su segunda edición (1659-1661), son una lectura obligada para quienes analizan la matemática cartesiana. Esta obra ofreció el marco del cual surgió el *Treatise of Algebra both Historical and practical* (1685) y la *Arithmetica infinitorum* de John Wallis. Este autor, al igual que James

Gregory y Christopher Wren, bajo la inspiración de Descartes recurrieron a métodos algebraicos para avanzar en el tratamiento de problemas de tangentes y, como ya lo había sugerido Descartes, del cálculo de áreas.

De hecho hubo quien lograra lo que Descartes había declarado imposible de realizar: rectificar los arcos de algunas curvas. A principios de la década de 1660 Newton se ocupó de los trabajos de Wallis y de Descartes, en la edición de Schooten y, aprovechando las ideas de Barrow –su maestro en Cambridge– y Gregory, dio inicio a la serie de trabajos que culminarían en el cálculo (Westfall, *Never at Rest*, 105-137).

Descartes también sirvió de inspiración a Leibniz, quien para 1674 ya leía *La Geometría*, interesado en los procedimientos algebraicos que ahí se planteaban. No es sorprendente encontrar que en 1677 Liebniz escribía, durante una etapa empeñada en la búsqueda de un método general sustentado en el manejo de símbolos que le permitiesen encontrar la verdad: "Si pudiéramos encontrar caracteres o signos adecuados para expresar nuestros pensamientos de manera tan clara y precisa como la aritmética expresa los números o el análisis geométrico la línea, podríamos, en cualquier asunto que pudiera manejarse por la vía del razonamiento, lograr lo que se ha alcanzado en aritmética y en geometría" (Wiener, *Leibniz*, 15).

Este entusiasmo por lo que un método inspirado en el manejo algebraico podía alcanzar era compartido por Condoreit, quien creía que podía crearse o descubrirse un método que sirviera como instrumento universal, aplicable a cualquier combinación de ideas, que hiciera que el progreso en la solución de cualquier problemática sujeta a los designios de la inteligencia humana fuera algo tan factible como el de las matemáticas.

Todo lo anterior significa que, por fortuna, quienes leyeron al Descartes de *La Geometría* no se vieron invadidos por el desencanto cartesiano a raíz de las fallas que surgieron en el edificio metodológico que construía bajo la forma de las *Reglas para la Dirección del Espíritu*. Ciertamente éste fue el caso entre los matemáticos, más interesados en los logros efectivos de los métodos algebraico-geométricos presentados por Descartes y, en particular por el tema de la construcción de ecuaciones, mismo que en el periodo 1650-1690 alcanzó los rasgos de una teoría coherente. A ello contribuyera, además de la edición de van Schooten de *La Geometría*, el *Mesolabum* (la 2ª edición de 1668) de Sluse y los *Nouveaus Elements* (1679) de De La Hire. En su obra, Sluse incluyó construcciones de ecuaciones de grados tres y cuatro mediante todo tipo de combinaciones de cónicas. Estas construcciones las presentó y demostró tanto por la vía geométrica como por la analítica, como se hizo en la sección 4.2 de esta tesis. Por su parte, De La Hire presentó lo que se considera el primer libro de texto que trata la construcción de ecuaciones de grado arbitrario y para lo cual recurrió al método de inserción que también es presentado en la misma sección de esta tesis. Las técnicas empleadas por estos autores pronto tuvieron una gran difusión, apareciendo también en el *Algebra* (1685) de Wallis, la *Mathesis enucleata* (1689) de Sturm, el *Traité analytique des sections* *coniques et de leur usage pour la resolution des équations dans les probleme tant determinez qu' indéterminez* (1707) del Marqués de L'Hospital y, notoriamente, la *Arithmetica universalis* (1707) de Newton.

En todos los textos mencionados en el párrafo anterior lo relevante es el énfasis que ponían en las técnicas algebraicas –sobretodo para los casos de grado superior a 5–, a saber, en la de inserción y en la de coeficientes indeterminados.

Sobre la cuestión había cierta unanimidad acerca de las ventajas que el álgebra ofrecía para resolver el problema. La duda flotaba, sin embargo, sobre el asunto de cuáles podrían considerarse las curvas más simples que, además de ser construidas, dieran cuenta del problema. En otras palabras, la simplicidad geométrica radicaba en la expresión algebraica o en la forma de la curva. Descartes no es muy claro al respecto, simplemente afirma que el criterio de simplicidad radica en el grado de la ecuación, entre menor sea el grado, más simple será la curva.

Resolver este asunto acerca de la aceptabilidad no resultó algo sencillo. De hecho nunca fue resuelto. Las posiciones iban desde la de Fermat, para quien constituía una ofensa en contra de la geometría más pura el utilizar curvas demasiado complicadas para resolver algún problema, en lugar de usar algunas más simples y por ende más adecuadas. Como lo señala Bos (*History of Mathematics*, 30), la geometría era presentada como un territorio en el que no cabían ciertas prácticas o como una persona a la que se le ofendía si no se respetaba su pureza. Esto da una medida de lo puntillosos que eran los matemáticos al considerar ciertas cuestiones que rayaban en lo filosófico.

Newton, quien dedicó no pocos esfuerzos al asunto de la construcción de ecuaciones, también hizo consideraciones de carácter matemático sobre el asunto:

> "No es la ecuación sino su descripción lo que da lugar a la curva geométrica... no es la simplicidad de su ecuación sino la facilidad de su descripción que principalmente indica que una línea debe ser admitida [como participante] en la construcción de problemas... la disyuntiva es si, como lo hacían los antiguos, se excluyen de la geometría todas las líneas excepto la recta y el círculo y posiblemente las cónicas, o si se admiten todas según la simplicidad de su descripción."(*Mathematical Papers*, Vol. 5, 425-427).

Por otra parte, seguía sin resolverse la cuestión de la compatibilidad o, si se va más allá, de la equivalencia de los enfoques algebraico y geométrico para la resolución de problemas. El pensamiento de Newton se puede resumir diciendo que para él el álgebra no es la panacea que iluminará las cuestiones pendientes en geometría. Consideraba al álgebra como una herramienta excelente, pero inadecuada para dilucidar cuestiones de métodos y de criterios de veracidad en geometría. Newton criticó tanto los supuestos cartesianos sobre el uso del álgebra en la geometría como que la construcción de curvas fuera una cuestión algebraica y que simplicidad de las curvas radicara en qué tan bajo era el grado de su ecuación.

Al respecto el trabajo de Newton sobre la construcción de ecuaciones constituye, globalmente, una crítica a Descartes. En el único de los tratados que se analiza en esta tesis, de los cuatro que Newton dedicó al asunto[1], ya aparecen resultados que posteriormente serían encontrados y publicados por De La Hire y L'Hospital en textos ya mencionados previamente. No es posible abundar sobre el contenido de los escritos newtonianos que no fueron tratados en este trabajo y sólo me limito a mencionar que la idea principal de Newton es postular la posibilidad de admitir ciertos movimientos que dan lugar a curvas y hacer de ellas el sustento para otras dos construcciones que se añadirían a las euclideanas. Estas construcciones son la llamada *neusis* por los griegos de los tiempos clásicos, y el trazo de elipses. En vista de que la *neusis* es equivalente a trazar una conchoide (o concoide), se puede decir que Newton agregó postulados mediante los cuales, junto con la recta y el círculo, la conchoide y la elipse pasaban a ser, para la geometía, curvas aceptables por su construcción.

A pesar de que esto permitió a Newton alcanzar más resultados en cuanto a la solución de problemas, la vía abierta no le satisfacía del todo. Así lo expresa en sus *Lecturas Lucasianas sobre álgebra*, que resumen el contenido de los cursos que bajo dicho título impartió en Cambridge en el periodo 1682-1684. En dicha obra, después de aclarar en que consistía la geometría de los antiguos, y de situarse al lado de Arquímedes para justificar el uso de la conchoide para la "construcción de problemas sólidos", declara que:

> "Sin embargo, si alguien piensa de manera diferente, deseo que sepa que mi preocupación inmediata no es que una construcción sea geométrica, sino que sea cualquiera mediante la cual pueda aproximarme numéricamente a las raíces de ecuaciones." (*Mathematical Papers*, Vol. 5, 429).

Sin duda, era éste un criterio utilitarista. No podía ser de otra manera. Para 1705 Newton seguía convencido de la necesidad de mantener "pura y sin contaminación" a la geometría de los antiguos.

Paradójicamente, este área de trabajo matemático que tanto prometía pronto dejo de ser tema de investigación. Para 1750 pocos, o quizá nadie, se ocupaban de ella. ¿Qué había sucedido? La respuesta radica en la debilidad que el mismo Newton, entre otros, habían detectado: la "construcción de ecuaciones" tuvo su origen en la búsqueda de soluciones en el ámbito de la geometría. En términos puramente algebraicos resulta un absurdo. Como lo señala Bos: si un problema consiste de dos polinomios con una incógnita, ¿Por qué debería ser que su solución se

[1] Las otras tres obras son: un manuscrito de 1670, otro de 1705 -ambos sin publicar hasta hace pocos años- y la *Arithmetica Universalis* (publicada en 1705). La última fue redactada entre 1683 y 1684.

plantee en términos de dos ecuaciones con dos incógnitas? Conforme se avanzaba en la edificación de una teoría, las técnicas para encontrar curvas para la construcción de la ecuación se volvieron cada vez más algebraicas.

Sin embargo, el origen y significado geométrico de la problemática, además de los criterios de adecuación geométrica –la simplicidad de las curvas–, no lograba ser traducida de manera natural al campo del álgebra. Esta contradicción fue, a fin de cuenta, la causa de su desaparición.

Este fue, en breve, un paseo de los orígenes y las fuentes de las que surgió la geometría cartesiana hasta el final del camino que tenía como meta generar un método que resolviera el problema de la "construcción de ecuaciones".

Hilando alrededor de esta temática, a lo largo de los cuatro capítulos de esta tesis se intentó presentar algunas de las disputas matemáticas y las no tan matemáticas, los métodos en su aspecto técnico y aplicado, y lo que todo ello significó para el avance –si cabe decirlo– hacia la ciencia que es la nuestra.

Del análisis de los antiguos al análisis cartesiano y de ahí al newtoniano, se presentó el nacimiento, el auge y, finalmente, el agotamiento de lo que desde nuestra perspectiva se podría clasificar como un programa de trabajo que se constituyó a partir de los planteamientos expuestos por Descartes en *La Geometría*.

# Bibliografía


Bacon, Fracis. *Novum Organum*. La Gran Restauración. Trad. de M. A. Granada. Madrid: Alianza Editorial, 1985.

Bos, H. J. M., *Arguments on Motivation in the Rise and Decline of a Mathematical Theory ; the "Construction of Equations", 1637 – ca. 1750, Archive for History Exact Sciences*. Vol. 30, 1984, pp. 331-380.

Bos, H. J. M., "On the representation of curves in Descartes' Geometry". *Archive for History Exact Science*. 24, 1981, pp. 295-338.

Bos, H. J. M., "The concept of Construction and the Representation of Curves in XVII$^{th}$-Century Mathematics". *History of Mathematics*, Vol VII, American Mathematical Society & London Mathematical Society, 1993.

Boyer, Charles. B. "Analysis: Notes on the evolution of a subject and a name". *Math Teacher* XLVII, 1954, pp. 450-462.

Boyer, Charles. B. *History of Analytic Geometry*. Princeton: Princeton University Press, 1988.

Crapulli, G. *Mathesis Universalis: genesi di un'idea nel XVI secolo*. Rome, 1969.

Descartes, René.

*Œuvres de Descartes, Publiées par Charles Adam & Paul Tannery*, Paris: Librairie Philosophique J. Vrin., 1996.

*La géometrie* (uno de los ensayos en) *Discours de la méthode*. Laiden 1637 (pp. 297-413); facsimile and translation in: D. E. Smith & M. L. Latham (eds) *The Geometry of René Descartes*. New York: Dover, 1954.

*Geometria à Renato Descartes anno 1637 Gallicè edita* (ed. F. van Schooten) Leiden 1649.

*Geometria à Renato Descartes anno 1637 Gallicè edita* (ed. F. van Schooten, enlarged edition, 2 vols.) Amsterdam 1659-1661. (Ediciones porteriores: Amsterdam 1683, Frankfurt/M 1695, con notas de Jakob Bernoulli).

*Reglas para la Dirección del Espiritu*. Madrid: Alianza Editorial, 1984.

*El Mundo o Tratado de la Luz.* Trad. de Laura Benitez. México: UNAM, Instituro de Investigaciones Filosóficas, 1986.

Graukroger, Stephen. *Descartes. An intellectual Biography.* Oxford: Clarendon Press, 1995.

Graukroger, Stephen. "Aristotle. An Intellegible Matter", en *Phroenesis*, 25, (1980), 187-197.

Klein, Jacob. *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra.* Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

Knorr. Wilbur. *The Ancient Tradition of Geometric Problems.* Boston: Birkhäuser, 1986. (También existe una edición de Ed. Dover)

Mamiani, M. *Introducción a Newton.* Madrid: El Libro de Bolsillo. Alianza Editorial, 1995.

Murdoch, J. "From Social into Intellectual Factors: An aspect of the Unitary Character of Late Medieval Lerning". En J. Murdoch y E. Sylla, eds. *The Cultural Context of Medieval Learning.* (Dordrecht/Boston, 1975), pp. 280-289.

Newton, I., "The theory and construction of equations (1665-1666)". En *The Mathematical Papers of Isaac Newton.* De. D. T. Whiteside. Cambridge University Press (1967-1981), pp. 489-540.

Rodis-Lewis, Geneviére. *Descartes. Biografía.* Barcelona: Ediciones Península, 1996.

Rossi, Paolo. *Clavis Universalis. El arte de la memoria y la lógica combinatoria de Lulio a Liebniz.* México: Fondo de Cultura Económica, 1989.

Shea, William R. *La magia de los números y el movimiento. La carrera científica de Descartes.* Trad. De J. P. Campos Gómez. Madrid: Alianza Editorial, 1993.

Turró, Salvio. *Decartes. Del hermetismo a la nueva ciencia.* Barcelona: Anthropos, 1985.

Unguru, Sabetai. "On the need to rewrite the History of Greek Mathematics", *Archive for History Exact Sciences.* Vol. 15 (1975/1976), pp. 67-114.

Viète Fraçois. *The Analytic Art. Nine studies in Algebra, Geometry and Trygonometry from the Opus Restitutae Mathematicae Analiseos, seu Algebrā Novā.* Trans. By Witmer, Ken: Kent University Press, 1983.

Weiner, P.(ed.). *Leibniz: Selections.* New York: Scribner's, 1951.

Westfall, Richard S. *Never at Rest. A Biography of Isaac Newton.* Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

Yates, Frances. "El Arte de Raimundo Lulio: aproximación a través de su teoría de elementos". En *Ensayos Reunidos* I. México: Fondo de Cultura Económica, 1990, pp. 23-142.

Yates, Frances. "Lulio y el lulismo". En *Ensayos Reunidos* II. México: Fondo de Cultura Económica, 1991, pp. 149-159.

# Indice