

00365  
5  
21



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

*División de Estudios de Posgrado*

**EL TEOREMA DE SULLIVAN A PARTIR DE  
LOS MAPEOS CUASICONFORMES**

**T E S I S**  
Que para obtener el grado académico de  
**MAESTRO EN CIENCIAS**  
**(MATEMATICAS)**

**p r e s e n t a**

**FERNANDO RENE) MARTINEZ ORTIZ**

**Director de Tesis: DR. GUILLERMO JAVIER FRANCISCO SIENRA LOERA**

1997

**TESIS CON  
FALLA DE ORICEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **A Luis Enrique Gutiérrez García**

**q.e.p.d.**

*Pues dentro de estas páginas aparecen tu pasión por la Geometría, por la música, por la poesía, por la Vida e incluso por la misma Muerte de una manera que sólo tú comprendes. Es esta la expresión de aquella promesa y de aquellos viajes mágicos que durante tanto tiempo nos mantuvieron unidos...*

**A Soledad Olivares Merese**

*Por esa Luna Llena de reflejos plateados que aparece detrás de tu sonrisa.*

**A Mizcalli**

*Porque el calor de tu corazón y tu amistad expresado de trece maneras diferentes me ha enfrentado a mis miedos y a mis sentimientos mostrándome a cada momento lo inútil de aquello que, tontamente, yo creí esencial.*

**A mis padres**

*Por el soplo de Vida depositado en este ser.*

**A Gabriela y Ximena**

*Por el Amor y la Honestidad con que me acercaron a una nueva forma de vida.*

**A los profesores José Alfredo Amor, Sylvia de Neymet, Fabio Miranda, Sílvia Madrigal, Ana Irene Ramírez, Rafael Rojas, Guillermo Sison y Carlos Torres**

*Porque este trabajo es producto de su paciencia, su pasión por las Matemáticas y su manera de enseñarlas.*

## Prefacio

A principios de siglo se comenzaron a clasificar tanto cualitativa como cuantitativamente las componentes del conjunto de Fatou de un mapeo racional con el trabajo independiente de los matemáticos franceses Julia y Fatou. En dicho trabajo ellos estudiaron los dominios atractores, superatractores y parabólicos. Este estudio fue complementado por Siegel y Herman quienes encontraron dos tipos de componentes de Fatou distintos a los anteriores: discos de Siegel y anillos de Herman, respectivamente. Estos cinco tipos diferentes de comportamiento de los dominios de Fatou ocurren cuando los dominios son eventualmente periódicos (y son los únicos tipos de comportamiento posibles para tales dominios); así cualquier tipo distinto a los anteriores tendría que aparecer en un dominio errante (un dominio  $W$  tal que  $R^n(W) \neq R^m(W)$  para cualesquiera enteros  $n$  y  $m$  con  $n \neq m$ ). Ya Fatou había conjeturado que los dominios errantes no existen para mapeos racionales, sin embargo tal afirmación no fue probada sino hasta 1985 por Dennis Sullivan.

Este trabajo está encaminado a hacer una revisión de la demostración del Teorema de Sullivan. Consideramos que tal revisión resulta importante puesto que la demostración de dicho teorema descansa en la Teoría de Mapeos Cuasiconformes la cual no era, hasta 1985, una herramienta indispensable en el estudio de los Sistemas Dinámicos Complejos, esta herramienta ahora tan necesaria no se encuentra desarrollada más que someramente en los distintos textos de Dinámica Compleja; de esta manera el presente trabajo intenta conectar la Teoría de Mapeos Cuasiconformes con la demostración del Teorema de Sullivan en forma clara y entendible.

Con este objetivo en mente dividimos el presente trabajo en tres capítulos. En el Capítulo Uno se desarrolla una gran parte de la Teoría de Mapeos Cuasiconformes con el fin de obtener

de manera sencilla el teorema fundamental para poder acceder a la demostración del Teorema de Sullivan, es decir el Teorema del Mapeo de Riemann Medible; dicho teorema afirma que si  $G$  y  $G'$  son dominios simplemente conexos conformemente equivalentes y  $k$  es una función medible en  $G$  tal que  $\sup_{z \in G} |k(z)| < 1$ , entonces existe un mapeo cuasiconforme de  $G$  en  $G'$  cuya dilatación compleja coincide con  $k$  casi dondequiera.

En el Capítulo Dos se introducen primeramente algunos conceptos básicos que aparecen al estudiar la dinámica que producen los mapeos racionales, en particular algunas propiedades de los conjuntos de Julia y Fatou. Por último se estudia más en detalle el comportamiento de las componentes del conjunto de Fatou bajo la acción del mapeo racional que las genera.

En el Capítulo Tres se conjuntan los resultados de los primeros dos capítulos obteniéndose la demostración del Teorema de Sullivan.

# Índice

<b>1</b>	<b>Mapeos Cuasiconformes.</b>	<b>3</b>
1.1	Mapeos Conformes y el Módulo de un Cuadrilátero. . . . .	4
1.1.1	El Teorema del Mapeo de Riemann. . . . .	4
1.1.2	Cuadriláteros. . . . .	5
1.2	Aproximación Geométrica a los Mapeos Cuasiconformes. . . . .	8
1.2.1	Definición Geométrica de los Mapeos Cuasiconformes. . . . .	8
1.2.2	Una Nueva Caracterización del Módulo de un Cuadrilátero. . . . .	11
1.2.3	Longitud Extrema. . . . .	13
1.2.4	Desigualdad de Rengel. . . . .	15
1.2.5	Continuidad del Módulo. . . . .	17
1.3	Teoremas de Convergencia para Mapeos Cuasiconformes. . . . .	22
1.3.1	Criterio de Normalidad para Familias de Mapeos Cuasiconformes. . . . .	23
1.3.2	Una Clasificación de las Funciones Límite. . . . .	23
1.3.3	Funciones Cuasiasimétricas. . . . .	27
1.4	Definición Analítica de los Mapeos Cuasiconformes. . . . .	40
1.4.1	Continuidad Absoluta sobre Rectas. . . . .	40
1.4.2	El Cociente de Dilatación. . . . .	47
1.4.3	La Ecuación de Beltrami. . . . .	52
1.4.4	Convergencia de Funciones $\kappa$ -cuasiconformes. . . . .	53
1.5	El Teorema del Mapeo de Riemann Medible. . . . .	58
<b>2</b>	<b>Dinámica Compleja.</b>	<b>63</b>

2.1	La Dinámica de los Mapas Racionales. . . . .	64
2.2	Conjuntos de Julia y de Fatou. . . . .	72
2.3	Estructura del Conjunto de Fatou. . . . .	79
3	Periodicidad Eventual de las Componentes del Conjunto de Fatou: Teorema de Sullivan. . . . .	83
3.1	Lemas Auxiliares. . . . .	86
3.2	El Teorema de Sullivan. . . . .	112



## Capítulo 1

# Mapeos Cuasiconformes.

Los mapeos cuasiconformes (con los que trataremos en este Capítulo) resultan ser una generalización directa de los mapeos conformes de donde resultará importante para nuestro estudio hacer una breve revisión de algunos teoremas para mapeos conformes que utilizaremos como base para la demostración de algunas propiedades de los mapeos cuasiconformes. No daremos aquí las demostraciones de dichos teoremas para no desviarnos de nuestro objetivo fundamental en este Capítulo: El Teorema del Mapeo de Riemann Medible.

En la primer sección se enuncian el Teorema de Liouville y el Teorema del Mapeo de Riemann, siendo este último uno de los resultados importantes sobre el cual se construye una gran parte del presente trabajo. Se da la definición de un cuadrilátero y se muestra cómo éste puede ser mapeado conformemente sobre un rectángulo de manera que el mapeo conforme envía vértices del cuadrilátero en esquinas del rectángulo.

En la segunda sección se definen los mapeos cuasiconformes a partir de cuadriláteros y se obtiene la desigualdad de Reugel, desigualdad que nos permite demostrar el Teorema de Removibilidad de un Arco Analítico el cual afirma que si un dominio es  $k$ -cuasiconforme en un dominio  $G$ , lo sigue siendo aún sobre el dominio  $G - C$  con  $C$  un arco analítico contenido en  $G$ .

En la sección tercera el objetivo fundamental es probar el Teorema de Unión utilizando funciones cuasianálíticas, en especial el hecho de que una función cuasianálítica en el eje real se pueda extender a un mapeo cuasiconforme del semiplano superior en sí mismo.

En la sección cuarta se demuestra que un mapeo cuasiconforme es absolutamente continuo sobre rectas, a partir de este hecho se pueden definir el cociente de dilatación y la dilatación compleja; definidos tales conceptos podemos demostrar el Teorema del Mapeo de Riemann Medible para funciones escalonadas utilizando una solución repetida del Teorema de Unión probado en la sección anterior y después utilizando un proceso de límite demostrarlo para cualquier función medible.

## 1.1 Mapeos Conformes y el Módulo de un Cuadrilátero.

### 1.1.1 El Teorema del Mapeo de Riemann.

El primer problema con el que nos enfrentamos es el de saber, dados dos dominios, si resultan ser conformemente equivalentes; es decir, si existe un mapeo conforme de uno sobre el otro. A este respecto, el siguiente teorema (Teorema de Liouville) nos proporciona una respuesta en el sentido de que el plano complejo no es conformemente equivalente a cualquier dominio acotado.

**Teorema de Liouville.**- Si  $f$  es entera y existe una constante  $M$  tal que  $|f'(z)| \leq M$  para toda  $z \in \mathbb{C}$  entonces  $f$  es constante.

Por otra parte el Teorema del Mapeo de Riemann cataloga como conformemente equivalentes a todos los dominios simplemente conexos contenidos propiamente en el plano complejo  $\mathbb{C}$ .

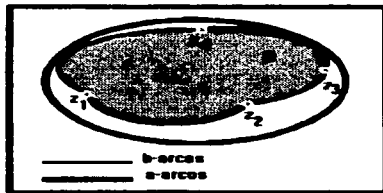
**Teorema del Mapeo de Riemann.**- Sea  $G$  un dominio simplemente conexo con  $G$  contenido propiamente en  $\mathbb{C}$ , entonces  $G$  es conformemente equivalente al disco unitario abierto  $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ .

Añi, en realidad tenemos tres clases de equivalencia de dominios simplemente conexos conformemente equivalentes en la esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$ , con representantes:

- La esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .
- El plano complejo  $\mathbb{C}$ .
- El disco unitario  $\Delta$ .

### 1.1.2 Cuadriláteros.

**Definición.**- Dada una región  $\Omega$ , decimos que una región de Jordan  $Q$  es un *cuadrilátero* en  $\Omega$  si  $\bar{Q} \subset \Omega$  y hay asignada una sucesión  $z_1, z_2, z_3, z_4$  de puntos en la frontera de  $Q$ . Los puntos  $z_i, i = 1, \dots, 4$  son llamados los *vértices del cuadrilátero*; dichos vértices dividen a la frontera de  $Q$  en cuatro arcos de Jordan. Los arcos  $\widehat{z_1 z_2}$  y  $\widehat{z_3 z_4}$  son llamados los *a-arcos* y los otros dos arcos, los *b-arcos*.



Utilizando el Teorema del Mapeo de Riemann se puede mapear de manera conforme cualquier cuadrilátero  $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$  sobre un cuadrilátero  $Q'(-\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2})$  cuya frontera es el eje real,

donde  $0 < k < 1$ , empleando un mapeo  $\phi$  tal que  $\phi(z_1) = -\frac{1}{k}$ ,  $\phi(z_3) = -1$ ,  $\phi(z_4) = 1$  y  $\phi(z_2) = \frac{1}{k}$  como veremos a continuación:

Dado el cuadrilátero  $Q$ , se puede suponer utilizando el Teorema del Mapeo de Riemann sobre un cuadrilátero  $Q'(a, z_2', z_3', b)$  cuya frontera es el eje real enviando vértices a vértices y empleando una transformación de Möbius podemos suponer que  $z_2' = -1$  y  $z_3' = 1$ .

A través de una nueva transformación de Möbius  $\varphi$  deseamos obtener  $\varphi(a) = -\varphi(b)$ ,  $\varphi(1) = 1$ , y  $\varphi(-1) = -1$ , claramente  $\varphi$  debe ser hiperbólica; para obtenerla hagamos  $\psi(z) = \frac{z+1}{z-1}$ , transformación que envía  $-1$  a  $0$  y  $1$  a  $\infty$ . Observemos que  $\psi$  es su propia inversa.

En este caso una transformación de Möbius hiperbólica es de la forma  $Rz$ , así nuestro problema se reduce a encontrar una  $R$  tal que  $\psi^{-1}(R\psi(a)) = -\psi^{-1}(R\psi(b))$ . Para encontrar dicha  $R$  necesitamos conocer bajo qué condiciones  $\psi^{-1}(u) = -\psi^{-1}(v)$ ; es decir, bajo qué condiciones ocurre que

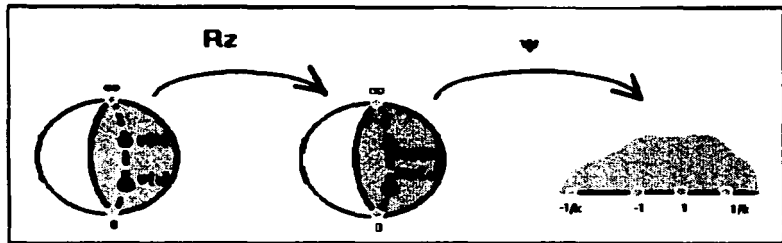
$$\frac{u+1}{u-1} = -\frac{v+1}{v-1}$$

y esto sucede cuando

$$\begin{aligned}(u+1)(v-1) &= -(v+1)(u-1) \\ 2uv-2 &= 0 \\ u &= \frac{1}{v}\end{aligned}$$

de donde la  $R$  que buscamos debe ser tal que  $R\psi(a) = \frac{1}{R\psi(b)}$ .

$$\text{Así } R = \frac{1}{\sqrt{\psi(a)\psi(b)}} \quad (\text{Ver figura})$$



**Ejemplo.** Sea  $Q(i, -i, -1, 1)$  un cuadrilátero formado por el disco unitario y los vértices mencionados y sea  $\varphi(z) = \frac{z+1}{z-1} \cdot \frac{1+z}{1-z}$ , así, tenemos que  $\varphi(-1) = 0$ ,  $\varphi(-i) = \infty$ ,  $\varphi(1) = 1$  y  $\varphi(i) = \frac{1}{2}$ . De esto último tenemos que  $R = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}$  es decir,  $R = \sqrt{2}$ .

Verifiquemos ahora que este valor de  $R$  funciona:

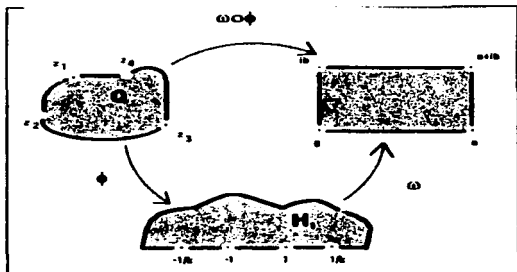
$$\psi(\sqrt{2}) = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = -\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = -\psi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \triangleq$$

Por otra parte la función

$$\omega(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{((1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2))}}$$

mapea el cuadrilátero  $Q'(-\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2})$  conformemente sobre un rectángulo de manera que  $\omega$  mapea los vértices de  $Q'$  en las esquinas del rectángulo (A este mapeo lo llamaremos el mapeo canónico de  $Q$  cuando las esquinas del rectángulo sean  $0, a, a+ib, ib$ ).

Haciendo la composición  $\omega \circ \psi$  tenemos que cualquier cuadrilátero  $Q$  puede ser mapeado conformemente sobre un rectángulo donde los vértices de  $Q$  son mapeados a las esquinas del rectángulo.



Tomando  $a =$  longitud del segmento  $[\omega \circ \phi(z_1), \omega \circ \phi(z_2)]$  (la imagen de un  $a$ -arco) y  $b =$  longitud de la imagen de un  $b$ -arco bajo  $\omega \circ \phi$ , definimos el *módulo del cuadrilátero*  $Q$  como

$$m(Q) = \frac{a}{b}$$

Así, dos cuadriláteros son conformemente equivalentes si y sólo si poseen el mismo módulo.

Definimos al *cuadrilátero conjugado de*  $Q$ , en símbolos  $Q^*$ , como el mismo  $Q$  pero permutando los  $a$ -arcos por los  $b$ -arcos y de esta manera tenemos que

$$m(Q^*) = \frac{b}{a} = m(Q)^{-1}$$

## 1.2 Aproximación Geométrica a los Mapeos Cuasiconformes.

### 1.2.1 Definición Geométrica de los Mapeos Cuasiconformes.

Sea  $\Omega$  un dominio y  $\phi$  un homeomorfismo que preserve orientación de  $\Omega$  en  $\mathbb{C}$ . Supongamos que un cuadrilátero  $Q$  tal que  $\bar{Q} \subset \Omega$  es mapeado mediante  $\phi$  en un cuadrilátero  $Q'$  entonces a la razón  $\frac{m(Q')}{m(Q)}$  se le denomina *dilatación de  $Q$  bajo  $\phi$* .

**Ejemplo.-** Sean  $\Omega = \{x + iy : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ ,  $\phi(z) = 2z + \bar{z}$  un homeomorfismo y  $Q = \{x + iy : \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, \frac{1}{4} < y < \frac{3}{4}\}$  con vértices en  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i, \frac{3}{4} + \frac{1}{4}i, \frac{3}{4} + \frac{3}{4}i, \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$ ; en este caso tenemos  $m(Q) = 1$  y  $m(Q') = 3$  así la dilatación de  $Q$  bajo  $\phi$  es  $3$ .  $\triangle$

El número

$$K(\Omega) = \sup_{\bar{Q} \subset \Omega} \frac{m(Q')}{m(Q)}$$

nos proporciona la *dilatación maximal de  $\phi$  en el dominio  $\Omega$* .

**Observación.-**  $K(\Omega)$  es al menos 1 ya que si  $Q$  es tal que  $\bar{Q} \subset \Omega$  lo mismo es cierto para  $Q'$ , de donde

$$K(\Omega) \geq \max \left\{ \frac{m(Q')}{m(Q)}, \frac{m(Q)}{m(Q')} \right\} \geq 1$$

Podemos ahora definir a los mapeos cuasiconformes utilizando las nociones anteriores.

**Definición.-** Un homeomorfismo  $\phi$  que preserve orientación del dominio  $\Omega$  es llamado *cuasiconforme* si su dilatación maximal  $K(\Omega)$  es finita. Si  $K(\Omega) \leq k < \infty$ , entonces  $\phi$  será llamado *k-cuasiconforme*.

Algunas propiedades de fácil verificación son:

1. La inversa de un mapeo  $k$ -cuasiconforme es  $k$ -cuasiconforme.
2. La composición de un mapeo  $k_1$ -cuasiconforme y un mapeo  $k_2$ -cuasiconforme es un

mapa  $k_1 k_2$ -conformante.

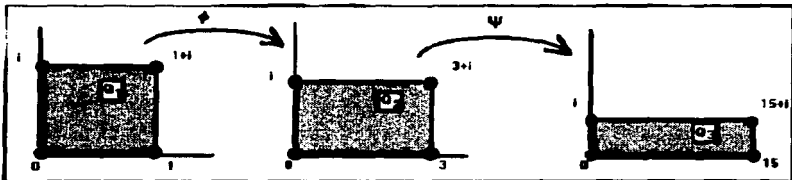
**Demostración.**— (1) Ya que para cada  $Q$ , su dilatación está dada por el cociente  $\frac{m(Q')}{m(Q)}$ , observando que  $m(Q'') = m(Q')^{-1}$  obtenemos que la dilatación de  $Q''$  bajo el mapa inverso resulta ser:

$$\frac{m(Q'')}{m(Q''')} = \frac{m(Q)^{-1}}{m(Q')^{-1}} = \frac{m(Q')}{m(Q)}$$

de donde, claramente,  $K(\Omega) = K(\Omega')$ .

(2) Sea  $\circ = \varphi \circ \psi$  tal que  $\varphi$  es  $k_1$ -conformante y  $\psi$  es  $k_2$ -conformante. Tomando un cuadrilátero  $Q$  en  $\Omega$  (el dominio de  $\circ$ ) entonces  $\psi$  lo mapea en el cuadrilátero  $Q'$ , así  $\frac{m(Q')}{m(Q)} \leq k_2$ . Ahora  $\varphi$  mapea  $Q'$  en  $Q''$ , de aquí que  $\frac{m(Q'')}{m(Q')} \leq k_1$ . Por lo tanto  $\frac{m(Q'')}{m(Q)} \cdot \frac{m(Q')}{m(Q')} \leq k_1 k_2$ , es decir,  $\frac{m(Q'')}{m(Q)} \leq k_1 k_2$ , como era deseado. ◊

**Ejemplo.**— Sean  $\circ(z) = 2z + \bar{z}$  y  $\psi(z) = 3z + 2\bar{z}$ , entonces  $\psi \circ \circ(z) = 8z + 7\bar{z}$ . Sean los cuadriláteros  $Q_1(0, 1, 1 + i, i)$  con arcos paralelos a los ejes,  $Q_2 = \psi(Q_1)$  y  $Q_3 = \psi \circ \circ(Q_1)$  (ver figura).



Los módulos son  $m(Q_1) = 1$ ,  $m(Q_2) = 3$  y  $m(Q_3) = 15$  de donde la dilatación de  $Q_1$  bajo  $\circ$  es 3, la dilatación de  $Q_2$  bajo  $\psi$  es 5 y la dilatación de  $Q_1$  bajo  $\psi \circ \circ$  es 15, es decir, el producto de las dos primeras dilataciones. ◻



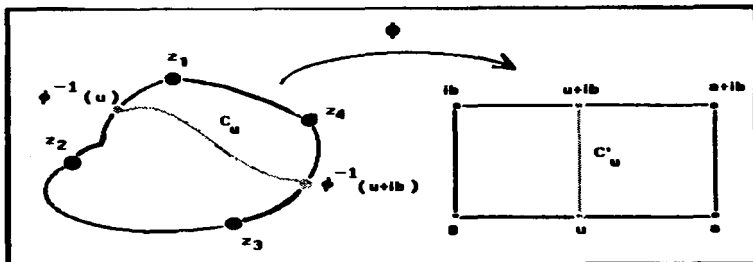
### 1.2.2 Una Nueva Caracterización del Módulo de un Cuadrilátero.

Nuestro objetivo es dar una nueva caracterización del módulo de un cuadrilátero que no dependa de los mapeos conformes.

Sea  $Q$  un cuadrilátero y  $\phi$  su mapeo canónico (conforme) sobre el rectángulo  $R(0, a, a+ib, ib)$ . Con la posible excepción del punto al infinito tenemos  $J_\phi(z) = |\phi'(z)|^2$  para toda  $z$  en el interior de  $Q$ . En consecuencia, podemos obtener el área de  $R$  utilizando la expresión

$$\iint_Q |\phi'(z)|^2 dx dy = ab$$

Ya que  $m(Q) = \frac{a}{b} = \frac{a^2}{ab}$ , necesitamos obtener una representación (en forma de integral) de  $b^2$ . En este sentido, consideremos los segmentos verticales  $C_u = \{u + iv : 0 < v < b\}$  en el rectángulo  $R$  y sus preimágenes  $\phi^{-1}(C_u) = C_u$ , donde los puntos extremos de  $C_u$  (obtenidos al extender  $C_u$  a la frontera de  $Q$ ) se encuentran sobre cada uno de los dos  $a$ -arcs del cuadrilátero  $Q$ . Observemos además que  $C_u \cap C_{u'} = \emptyset$  siempre que  $u \neq u'$  incluso en la frontera puesto que la extensión del mapeo conforme  $\phi$  a la frontera de  $Q$  resulta ser un homeomorfismo.



Claramente, la longitud de cualquier segmento imagen  $C'_u$  de  $C_u$  es  $b$ , es decir

$$\int_{C'_u} |\phi'(z)| |dz| = \int_{C_u} |dw| = b$$

donde  $w = u + iv$ .

Nosotros consideraremos ahora una clase  $C$  de arcos de Jordan abiertos tal que  $C_u \in C$  para toda  $u$  con  $0 < u < a$ .  $C$  debe cumplir

1. Toda  $C \in C$  se encuentra en el interior de  $Q$  y tiene un punto extremo sobre cada  $a$ -arco de  $Q$ .
2.  $C$  contiene a todos los arcos  $C_u$ .
3.  $C$  consiste de arcos lo suficientemente regulares para que se puedan realizar todas las integraciones subsiguientes.

De esta manera tenemos que si  $C \in C$

$$\int_C |\phi'(z)| |dz| \geq b$$

donde la igualdad sucede para todos los arcos  $C_u$ . Así, obtenemos

$$b^2 = \left( \inf_{C \in C} \int_C |\phi'| |dz| \right)^2.$$

Utilizando los cálculos anteriores obtenemos la representación deseada del módulo de un cuadrilátero  $Q$  en la forma

$$m(Q) = \frac{\iint_Q |\phi'|^2 dx dy}{\left( \inf_{C \in C} \int_C |\phi'| |dz| \right)^2}$$

esta representación aún depende del mapeo conforme  $\phi$ , por esta razón necesitamos tomar una clase más amplia de funciones  $\rho$  no-negativas que contenga a la derivada  $|\phi'|$  y que sean lo suficientemente continuas para que las siguientes integraciones puedan ser realizadas.

### 1.2.3 Longitud Extrema.

Daremos una nueva caracterización del módulo de un cuadrilátero que no dependa en su definición de mapeos conformes. Esta aproximación se obtiene a partir de considerar una "longitud mínima promedio" de una familia de curvas, dicha longitud será llamada longitud extrema de la familia de curvas, la cual es invariante bajo mapeos conformes y casi-invariante bajo mapeos cuasiconformes.

Sea  $\Gamma$  una familia de curvas en el plano donde para cada  $\gamma \in \Gamma$  se tiene que  $\gamma$  es una unión finita de arcos abiertos, arcos cerrados ó curvas cerradas y todo subarco cerrado será rectificable.

Diremos que una función  $\rho$  con dominio el plano complejo  $\mathbb{C}$  es *permisible* si satisface

1.  $\rho \geq 0$  y es medible;
2.  $A(\rho) = \iint_{\mathbb{C}} \rho^2 dx dy \neq 0, \infty$ .

Para tal  $\rho$  definimos la función

$$L_{\gamma}(\rho) = \begin{cases} \int_{\gamma} \rho |dz| & \text{si } \rho \text{ es medible sobre } \gamma \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definimos ahora

$$L(\rho) = \inf_{\gamma \in \Gamma} L_{\gamma}(\rho)$$

y, finalmente, la longitud extrema  $\lambda(\Gamma)$  de la familia de curvas  $\Gamma$  como

$$\lambda(\Gamma) = \sup_{\rho} \frac{L(\rho)^2}{A(\rho)}$$

para toda  $\rho$  permisible.

**Ejemplo.**— Como un caso particular tomemos  $\Gamma$  como el conjunto de todos los arcos en un rectángulo cerrado  $R$  que unen a los  $a$ -arcos de  $R$ . Así, para cualquier  $\rho$

$$\int_0^b \rho(x + iy) dy \geq L(\rho)$$

y

$$\iint_R \rho dx dy \geq aL(\rho)$$

de donde obtenemos

$$a^2 L(\rho)^2 \leq ab \iint_R \rho^2 dx dy \leq ab A(\rho)$$

La primera desigualdad se obtiene aplicando la desigualdad de Schwarz y la segunda desigualdad se obtiene observando que estamos integrando sólo sobre  $R$  y no sobre todo  $C$ .

De las desigualdades anteriores obtenemos

$$\frac{L(\rho)^2}{A(\rho)} \leq \frac{b}{a}$$

de aquí que  $\lambda(\Gamma) \leq \frac{b}{a}$ . Sin embargo, tomando

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{en } R \\ 0 & \text{fuera de } R \end{cases}$$

tenemos

$$L(\rho) = b$$

$$A(\rho) = ab$$

así  $\lambda(\Gamma) \geq \frac{b}{a}$ . Por lo tanto tenemos que  $\lambda(\Gamma) = \frac{b}{a}$ , es decir

$$m(R) = \lambda(\Gamma)^{-1} \cdot \Delta$$

De donde hemos obtenido que el módulo de un rectángulo (en realidad el módulo de cualquier cuadrilátero, ver Lehto) se puede definir en términos de la longitud extrema de cierta familia de curvas las cuales cumplen que sus puntos extremos se encuentran en los  $a$ -arcs del rectángulo (cuadrilátero), como

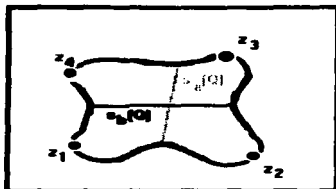
$$m(Q) = \inf_{\rho} \frac{A(\rho)}{L(\rho)^2}.$$

#### 1.2.4 Desigualdad de Rengel.

Nuevamente tomando  $\rho = 1$  en  $Q$  y  $\rho = 0$  fuera de  $Q$ , tenemos que  $L_1(\rho) = L(\gamma)$  es la longitud euclidiana de  $\gamma$ , donde  $\gamma$  pertenece a la familia de curvas que tiene sus puntos extremos en los  $a$ -arcs de  $Q$ , y para hacer referencia al cuadrilátero  $Q$ , denotaremos a  $A(\rho)$  como  $A(Q)$  (el área euclidiana del cuadrilátero  $Q$ ). Llamamos a

$$s_a(Q) = \inf_{\gamma \in \Gamma} L(\gamma)$$

la distancia entre los  $a$ -arcs de  $Q$ . La distancia entre los  $b$ -arcs se define análogamente.



De esta forma obtenemos la siguiente desigualdad (Desigualdad de Rengel):

$$\frac{(s_n(Q))^2}{A(Q)} \leq m(Q) \leq \frac{A(Q)}{(s_n(Q))^2}.$$

**Demostración.-** La segunda desigualdad es clara al observar que

$$\frac{A(Q)}{(s_n(Q))^2} \in \left\{ \frac{A(\rho)}{L(\rho)^2} : \rho \text{ es permisible} \right\},$$

la primera por el mismo motivo si tenemos en cuenta que  $m(Q) = \frac{1}{m(Q^*)}$  y  $m(Q^*) \leq \frac{A(Q)}{(s_n(Q))^2}$ .  $\diamond$

**Ejemplo.-** Sea  $Q(0, a, a + ib, ib)$  con arcos paralelos a los ejes, ya que  $s_n(Q) = a$ ,  $s_n(Q) = b$  y  $A(Q) = ab$ , al aplicar la desigualdad de Rengel obtenemos

$$\frac{a^2}{ab} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{ab}{b^2}$$

lo cual es obvio y da pista para la siguiente:

**Observación.-** La igualdad sucede en ambos casos si y sólo si  $Q$  es un rectángulo.  $\triangle$

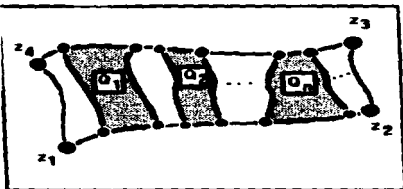
Una consecuencia de la desigualdad de Rengel resulta ser el Lema de Monotonía del Módulo:

**Lema 1.1.-** Sean  $Q_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , cuadriláteros sin puntos interiores en común y con cerraduras contenidas en la cerradura de un cuadrilátero  $Q$ . Si los  $a$ -arcs de toda  $Q_n$  están

contenidos uno en cada  $\alpha$ -arco de  $Q$ , entonces

$$\sum_n m(Q_n) \leq m(Q)$$

Si  $Q$  es un rectángulo, entonces la igualdad sucede aquí si y sólo si todo  $Q_n$  es un rectángulo y  $\sum_n A(Q_n) = A(Q)$ .



**Demostración.**- Por la invariancia conforme del módulo, podemos suponer que  $Q$  es el rectángulo  $R(0, m(Q), m(Q) + i, i)$ . Entonces  $s_\alpha(Q_n) \geq 1$  y, por lo tanto, por la desigualdad de Rengel tenemos que  $m(Q_n) \leq \frac{A(Q_n)}{(s_\alpha(Q_n))^2} \leq A(Q_n)$ , así

$$\begin{aligned} \sum m(Q_n) &\leq \sum A(Q_n) \\ &\leq A(Q) \\ &= m(Q). \end{aligned}$$

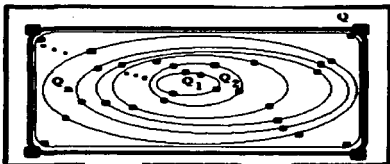
Si  $Q$  es un rectángulo, la primera desigualdad resulta ser igualdad por la observación y la segunda por la hipótesis  $\sum_n A(Q_n) = A(Q)$ .  $\diamond$

### 1.2.5 Continuidad del Módulo.

**Definición.**- Sea  $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de cuadriláteros con arcos  $a_1^n, b_1^n, a_2^n$  y  $b_2^n$ . Decimos

que la sucesión  $Q_n$  converge al cuadrilátero  $Q$  desde el interior si cumple

1.  $\overline{Q_n} \subset \overline{Q}$  para toda  $n$ ; y
2. Para toda  $\epsilon > 0$  existe una  $n_\epsilon$  tal que para  $n \geq n_\epsilon$  todo punto de  $a_i^n$  y  $b_i^n$  ( $i = 1, 2$ ) está a una distancia en la métrica esférica menor que  $\epsilon$  de los lados correspondientes  $a_i$  y  $b_i$  de  $Q$ .



**Lema 1.2.-** Si la sucesión  $Q_n$  de cuadriláteros converge al cuadrilátero  $Q$  desde el interior, entonces

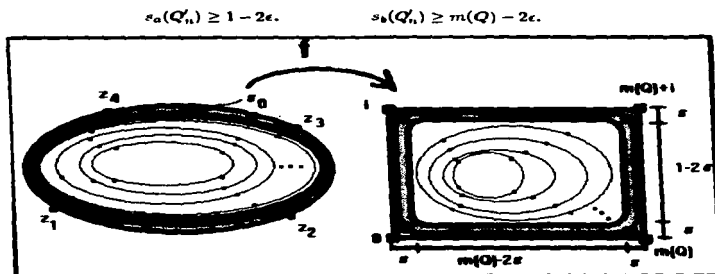
$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(Q_n) = m(Q).$$

**Demostración.-** Observemos primero que el mapeo canónico  $f$  de  $Q$  sobre el rectángulo  $R = R(0, m(Q), m(Q) + i, i)$  es uniformemente continuo en  $\overline{Q}$  ya que  $\overline{Q}$  es compacto. Esto es, para  $z_1, z_2 \in \overline{Q}$ , tenemos

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\sigma(z_1, z_2) < \delta} \sigma(f(z_1), f(z_2)) = 0.$$

donde  $\sigma(z_1, z_2)$  es la distancia esférica de  $z_1$  a  $z_2$ . Por lo tanto, tenemos que  $f(Q_n) = Q_n$  convergen a  $R$  desde el interior. Así para todo  $\epsilon$  con  $0 < \epsilon < \min \left\{ \frac{1}{3}, \frac{m(Q)}{3} \right\}$  corresponde una  $n_\epsilon$  tal que para toda  $n \geq n_\epsilon$ , todo lado de  $Q_n$  se encuentra en una banda cerrada de amplitud  $\epsilon$ , con el lado correspondiente de  $R$  en su frontera. Así





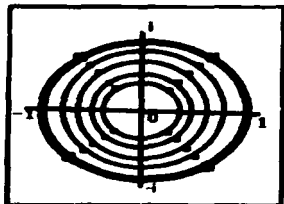
Ya que  $A(Q_n) \leq m(Q)$ , la desigualdad de Rengel proporciona

$$\frac{(m(Q) - 2\epsilon)^2}{m(Q)} \leq m(Q_n) \leq \frac{m(Q)}{(1 - 2\epsilon)^2}.$$

Como el mapeo canónico es conforme, tenemos  $\lim_{n \rightarrow \infty} m(Q_n) = m(Q)$ , y el Lema queda así demostrado.  $\diamond$

Utilizando el Teorema del Mapeo de Riemann, tenemos que existe  $\varphi$  mapeando cualquier cuadrilátero  $Q$  conformemente sobre un cuadrilátero consistente del disco unitario  $\Delta$  y los vértices  $z_1, z_2, z_3$  y  $z_4$ . Aproximemos este último cuadrilátero con los cuadriláteros definidos por los discos  $|z| < 1 - \frac{1}{n}$  y los vértices  $(1 - \frac{1}{n})z_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Ya que la inversa de  $\varphi$  es uniformemente continua en  $|z| \leq 1$ , las preimágenes  $Q_n = \varphi^{-1}(Q_n)$  convergen a  $Q$  desde el interior. La frontera de toda  $Q_n$  es una curva analítica; tales cuadriláteros serán denominados analíticos, es decir, el siguiente Lema ocurre:

**Lema 1.3.-** Todo cuadrilátero  $Q$  es el límite de una sucesión de cuadriláteros analíticos cuyas cerraduras están contenidas en  $Q$  y convergiendo a  $Q$  desde el interior.



**Lema 1.4.**- Sea  $\varphi$  un homeomorfismo que es  $k$ -cuasiconforme en el interior de un cuadrilátero  $Q$  y supongamos que  $\varphi$  mapea  $Q$  en  $Q'$ , entonces  $m(Q') \leq km(Q)$ .

**Demonstración.**- Tomando la sucesión de cuadriláteros dada en el Lema 1.3 tenemos, utilizando el Lema 1.2 que  $m(Q_n) = m(Q)$  y que  $m(\varphi(Q_n)) = m(Q')$ . Ya que la desigualdad  $m(\varphi(Q_n)) \leq km(Q_n)$  sucede para toda  $n$ , la dilatación de  $Q$  es a lo más  $k$  y tenemos así el resultado deseado.  $\diamond$

Un resultado importante que nosotros usaremos es el siguiente Teorema que, esencialmente, nos permite remover un arco analítico de un dominio  $G$  de manera que la dilatación maximal no cambia.

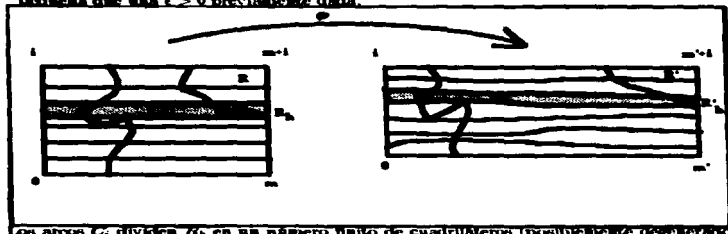
**Teorema 1.5.**- Sea  $\varphi$  un homeomorfismo de un dominio  $G$  y  $C$  un arco analítico cerrado que se encuentra en  $G$  con la posible excepción de sus puntos extremos, entonces tenemos que  $K(G) = K(G - C)$ .

**Demonstración.**- Ya que el conjunto de todos los cuadriláteros cuya cerradura está contenida en  $G$  contiene al conjunto de todos los cuadriláteros cuya cerradura está contenida en  $G - C$ , tenemos que, claramente,  $K(G) \geq K(G - C)$ . Supongamos que  $K(G - C) = k < \infty$ ; así, dado un cuadrilátero  $Q$ ,  $\bar{Q} \subset G$ , cuyo mapeo canónico tiene una extensión conforme a un dominio conteniendo a  $\bar{Q}$ , basta probar que la dilatación de  $Q$  bajo  $\varphi$  es a lo más  $k$ . Utilizando

los mapas canónicos, podemos suponer que  $Q$  es el rectángulo  $R(0, m, m+i, i)$  y que su imagen  $\varphi(Q)$  es el rectángulo  $R'(0, m', m'+i, i)$ . Sean  $C_1, \dots, C_k$  arcos analíticos cerrados disjuntos en  $\bar{R}$ ; así, tenemos que la dilatación maximal de  $\varphi$  en  $R - \bigcup_{i=1}^k C_i$  es a lo más  $k$ . Tenemos que mostrar que  $m' \leq km$ .

Si un  $C_i$  no es un segmento horizontal, puede ser dividido en un número finito de arcos que intersectan a cualquier recta horizontal a lo más una vez. Así, dividimos  $R$  mediante rectas horizontales en rectángulos  $R_h(iy_{h-1}, m + iy_{h-1}, iy_h, iy_h)$  donde  $h = 1, \dots, p$  y  $y_0 = 0 < y_1 < \dots < y_p = 1$  de manera que las siguientes condiciones se cumplan:

1. Para cualesquiera  $h$  y  $j$ , el conjunto  $R_h \cap C_i$  es una unión finita de arcos uniendo los lados horizontales de  $R_h$ .
2. Para toda  $h$  la suma de los diámetros de las componentes de  $\varphi(R_h \cap (\bigcup C_i))$  es más pequeña que una  $\epsilon > 0$  previamente dada.



Los arcos  $C_i$  dividen  $R_h$  en un número finito de cuadriláteros (posiblemente degenerados)

$R_{h_j}$  (ver fig.), cuyos lados horizontales serán tomados como  $\alpha$ -arcos. Denotando las imágenes de los cuadriláteros  $R_h$  y  $R_{h_j}$  mediante  $R'_h$  y  $R'_{h_j}$  tenemos que si  $s_{h_j}$  es la distancia entre los  $b$ -arcos de  $R_{h_j}$ , entonces se sigue de la condición (2) de arriba que

$$\sum_j s_{h_j} > m' - \epsilon.$$

Por otra parte, aplicando la desigualdad de Rengel a  $R'_{h_j}$  obtenemos

$$m(R'_{h_j}) \geq \frac{s_{h_j}^2}{A(R'_{h_j})}.$$

Así, por la desigualdad de Schwarz, deducimos que

$$\sum_j m(R'_{h_j}) \geq \frac{(\sum_j s_{h_j})^2}{\sum_j A(R'_{h_j})} > \frac{(m' - \epsilon)^2}{A(R'_h)}. \quad (1.1)$$

Por el Lema 1.4,  $m(R'_{h_j}) \leq km(R_{h_j})$  ya que ningún punto de los arcos  $C_1, \dots, C_n$  se encuentra en el interior de  $R_{h_j}$ . Así, por la monotonía del módulo tenemos

$$\sum_j m(R'_{h_j}) \leq km(R_h) = \frac{km}{y_h - y_{h-1}}.$$

y, utilizando (1.1)

$$\frac{y_h - y_{h-1}}{km} < \frac{A(R'_h)}{(m' - \epsilon)^2}$$

Sumando sobre  $h$ , obtenemos

$$\frac{1}{km} < \frac{m'}{(m' - \epsilon)^2}$$

y, ya que  $\epsilon$  fue arbitrario, obtenemos  $m' \leq km$ , como era deseado.  $\diamond$

### 1.3 Teoremas de Convergencia para Mapas Cuasiconformes.

### 1.3.1 Criterios de Normalidad para Familias de Mapas Cuasiconformes.

**Definición.-** Una familia  $\Phi$  de mapas es normal en un dominio  $G$  si toda sucesión  $\{f_n\}$  de mapas  $f_n \in \Phi$  contiene una subsucesión que converge uniformemente sobre todo subconjunto compacto de  $G$ .

El siguiente teorema nos proporciona una serie de criterios para chequear si una familia de mapas cuasiconformes es normal en un dominio  $G$ . No daremos su demostración, sin embargo ésta puede ser encontrada en Lehto (p.p. 68-73).

**Teorema 1.6.-** Una familia  $\Phi$  de mapas  $k$ -cuasiconformes sobre un dominio  $G$  es normal si existe un número  $d > 0$  tal que una de las siguientes condiciones es satisfecha:

1. Todo mapeo  $\varphi \in \Phi$  omite dos valores cuya distancia esférica es mayor que  $d$ .
2. Todo mapeo  $\varphi \in \Phi$  omite un valor  $\alpha$  y en dos puntos toma valores tales que las distancias  $\sigma(\varphi(x_i), \alpha)$ ,  $i = 1, 2$ , son mayores que  $d$ .
3. Todo mapeo  $\varphi \in \Phi$  toma valores en tres puntos  $x_1, x_2, x_3 \in G$  tales que las distancias  $\sigma(\varphi(x_i), \varphi(x_j))$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $i \neq j$ , son mayores que  $d$ .

En particular,  $\Phi$  es normal si todos los mapeos  $\varphi \in \Phi$  omiten dos puntos.

**Ejemplo.-** Sea  $\varphi_n(z) = 2z + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\bar{z}$ . Claramente la familia  $\{\varphi_n\}$  es normal sobre cualquier dominio acotado, en particular sobre el dominio  $\{x + iy : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$  utilizando cualquiera de las condiciones anteriores.  $\Delta$

### 1.3.2 Una Clasificación de las Funciones Límite.

El siguiente teorema nos proporciona una clasificación de las funciones límite de una sucesión de mapas  $k$ -clásicoconformes del dominio  $G$ .

**Teorema 1.7.-** Si  $\varphi_n$  es una sucesión de mapas  $k$ -clásicoconformes del dominio  $G$  y  $\varphi_n$  converge en casi dondequiera en  $G$  a una función límite  $\varphi$ , entonces  $\varphi$  es una función continua no constante, ó es un mapa de  $G$  sobre dos puntos, ó es una función constante.

**Demostración.-** Sea  $\varphi_n$  una sucesión de mapas  $k$ -clásicoconformes sobre  $G$  que tiende a una función límite  $\varphi$  en un subconjunto denso  $E$  de  $G$ . Entonces podemos distinguir los siguientes tres casos:

A) La función límite  $\varphi$  toma al menos tres valores en  $E$ . Entonces existen tres puntos distintos  $a_1, a_2, a_3 \in E$  para los cuales  $\varphi(a_1), \varphi(a_2)$  y  $\varphi(a_3)$  son valores distintos dos a dos. Así todas las distancias  $\sigma(\varphi_n(a_i), \varphi_n(a_j)), i \neq j$ , son mayores que una cota positiva fija (el mínimo de las distancias); por el criterio (3) de normalidad, la familia  $\{\varphi_n\}$  resulta ser normal en  $G$ , es decir, converge uniformemente en todo subconjunto compacto de  $G$  y la función límite  $\varphi$  es, en consecuencia, continua en  $G$ .

B) Es posible que la función límite  $\varphi$  asuma exactamente dos valores  $\varphi(a_1) = c_1$  y  $\varphi(a_2) = c_2$  en  $E$ . Entonces por los criterios de normalidad, la familia  $\{\varphi_n\}$  es una familia normal en  $G$  con excepción de uno de los puntos  $a_1, a_2$ . Así  $\varphi_n$  es coconvergente en  $G$  y uniformemente convergente en todo subconjunto compacto de  $G - \{a_2\}$ . La función límite es, en consecuencia, continua en  $G$  excepto en  $a_2$ . Ya que sólo asume dos valores en  $E$ , se sigue que, en  $G$ ,  $\varphi(x) = c_1$  para  $x \neq a_2$  y  $\varphi(a_2) = c_2$ , esto es, la función límite toma uno de sus dos valores en sólo un punto de  $G$ .

C) En este caso  $\varphi(x) = c$  para toda  $x \in E$ . Sin embargo, la sucesión no necesariamente converge en  $G$ .  $\diamond$

**Ejemplo.-** Los mapas  $(2n - 1)$ -clásicoconformes  $\varphi_n(z) = z + (1 - \frac{1}{n})z^2$  convergen uniformemente

mente al mapeo  $\varphi(z) = z + \bar{z}$  el cual no es un homeomorfismo.

**Ejemplo.-** Los mapeos 3-cuasi-conformes  $\varphi_n(z) = 2z + (1 - \frac{1}{n})\bar{z}$  convergen uniformemente al mapeo 3-cuasi-conforme  $\varphi(z) = 2z + \bar{z}$ .

**Teorema 1.8.-** Si los mapeos  $k$ -cuasi-conformes  $\varphi_n$  del dominio  $G$  convergen uniformemente a un homeomorfismo  $\varphi$  de  $G$  en todo subconjunto compacto de  $G$ , entonces  $\varphi$  es  $k$ -cuasi-conforme.

**Demostración.-** Sea  $Q, \tilde{Q} \subset G$ , un cuadrilátero; por el Lema 1.3,  $Q$  es el límite de una sucesión  $Q_n$  de cuadriláteros analíticos convergiendo a  $Q$  desde el interior. Para alguna  $j_0$  tenemos que para toda  $j \geq j_0$ ,  $\varphi_j(Q_n)$  está contenida en  $\varphi(Q)$ , y obtenemos  $\varphi_n(Q_n) \subset \varphi(Q)$  seleccionando una subsecuencia adecuada. Ya que los mapeos  $\varphi_n$  convergen uniformemente en  $\tilde{Q}$  al mapeo  $\varphi$ , y éste es uniformemente continuo, los cuadriláteros  $\varphi_n(Q_n)$  convergen a  $\varphi(Q)$  desde el interior. Así, tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} m(\varphi_n(Q_n)) = m(\varphi(Q))$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} m(Q_n) = m(Q)$ . Ya que  $m(\varphi_n(Q_n)) \leq km(Q_n)$  sucede para toda  $n$ , tenemos que

$$m(\varphi(Q)) \leq km(Q). \diamond$$

Las funciones límite obtenidas en el caso (A) del teorema 1.7 son en realidad funciones  $k$ -cuasi-conformes; este resultado está dado por el siguiente teorema:

**Teorema 1.9.-** La función límite  $\varphi$  de una sucesión  $\varphi_n$  de mapeos  $k$ -cuasi-conformes en  $G$  es una constante, un mapeo de  $G$  sobre dos puntos, ó un mapeo  $k$ -cuasi-conforme.

**Demostración.-** El único caso a considerar es, claramente, el caso (A) del Teorema 1.7. Así, sabemos que la sucesión  $\varphi_n$  converge uniformemente en todo subconjunto compacto de  $G$ . Además, es suficiente mostrar que  $\varphi$  es inyectiva sobre  $G$ ; ya que, de esta manera,  $\varphi$  resulta ser un homeomorfismo y, por el Teorema 1.8,  $\varphi$  es  $k$ -cuasi-conforme.

Supongamos que  $\varphi$  no es inyectiva en  $G$ , es decir, existen  $a, b \in G$  distintos tales que  $\varphi(a) = \varphi(b)$ . Entonces ocurren las siguientes afirmaciones:

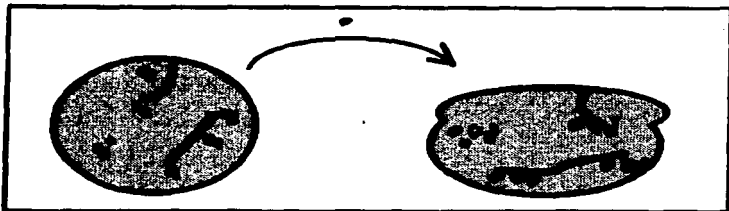
**Afirmación 1.-** Toda vecindad de  $a$  contiene puntos  $z \neq a$  para los cuales  $\varphi(z) = \varphi(a)$ .

*Demostración de la afirmación 1:* Sea  $\epsilon > 0$  tal que  $\sigma(a, b) > \epsilon$  y sean el círculo  $C_\epsilon = \{z : \sigma(z, a) = \epsilon\}$  junto con su interior contenidos en  $G$ . La curva  $\varphi_n(C_\epsilon)$  separa  $\varphi_n(a)$  y  $\varphi_n(b)$  para toda  $n$ . El mínimo de  $\sigma(\varphi_n(z), \varphi_n(a))$  sobre  $C_\epsilon$  es igual a  $\sigma(\varphi(b), \varphi(a)) = 0$ . Por lo tanto, existe  $z \neq a$  en la bola de radio  $\epsilon$  y centro en  $a$  tal que  $\varphi(z) = \varphi(a)$ . Así, hemos demostrado la afirmación 1.

**Afirmación 2.-** Todo punto  $a_0 \in G$  posee una vecindad  $U(a_0) \subset G$  en la cual  $\varphi$  es, ó inyectiva, ó una constante.

*Demostración de la afirmación 2:* Elegimos una vecindad  $U(a_0) = \{z : \sigma(z, a_0) < r\} \subset G$  tal que  $\sigma(\varphi_n(z), \varphi_n(a_0)) < \frac{\pi}{4}$  para toda  $n$  y  $z \in U(a_0)$  (equicontinuidad de  $\{\varphi_n\}$ ). Si  $U(a_0)$  no posee la propiedad requerida podemos entonces elegir tres puntos  $z_1, z_2, z_3 \in U(a_0)$  tales que  $\varphi(z_1) \neq \varphi(z_2) = \varphi(z_3)$ . Unimos ahora  $z_1$  y  $z_2$  mediante un arco de Jordan  $C_1$  y  $z_3$  con la frontera de  $U(a_0)$  mediante un arco  $C_2$  tal que  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$  y se encuentran dentro de  $U(a_0)$  con excepción de un punto extremo de  $C_2$ . Así  $B = U(a_0) - (C_1 \cup C_2)$  es un anillo y el dominio  $\varphi_n(B)$  se encuentra en el disco  $\sigma(w, \varphi_n(a_0)) < \frac{\pi}{4}$  y separa  $\varphi_n(z_1)$  y  $\varphi_n(z_2)$  de  $\varphi_n(z_3)$  y el círculo  $\sigma(w, \varphi_n(a_0)) = \frac{\pi}{4}$ . Cuando  $n \rightarrow \infty$ , tenemos  $\lim \sigma(\varphi_n(z_2), \varphi_n(z_3)) = 0$ ,  $\lim \sigma(\varphi_n(z_1), \varphi_n(z_3)) > 0$  y los diámetros de las componentes frontera de  $\varphi_n(B)$  no son menores que  $\sigma(\varphi_n(z_1), \varphi_n(z_3))$  para toda  $n$ ; de aquí tenemos que  $\lim m(\varphi_n(B)) = 0$ . Por otra parte  $m(\varphi_n(B)) \geq \frac{m(B)}{k}$  por la  $k$ -cuasiconformalidad de  $\varphi_n$ ; de esta contradicción obtenemos la afirmación 2. Así, hemos obtenido una nueva contradicción de las afirmaciones 1 y 2.  $\diamond$





### 1.3.3 Funciones Cuasimétricas.

**Definición.-** Sea  $\varphi$  una función continua estrictamente creciente definida sobre un intervalo  $I$  del eje real;  $\varphi$  es  $k$ -cuasimétrica en  $I$  si y sólo si existe una constante positiva  $k$  tal que

$$\frac{1}{k} \leq \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{\varphi(x) - \varphi(x-t)} \leq k$$

para  $x, x-t, x+t \in I$  y  $t > 0$ .  $\varphi$  es llamada cuasimétrica en  $I$  si  $\varphi$  es  $k$ -cuasimétrica en  $I$  para alguna  $k$ .

**Ejemplo.-** La función  $f(x) = ax + b$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , es 1-cuasimétrica sobre el eje real pues

$$1 \leq \frac{a(x+t) + b - (ax + b)}{ax + b - (a(x-t) + b)} = \frac{at}{at} = 1 \leq 1 \triangle$$

**Lema 1.10.-** Un mapeo  $\varphi$   $k$ -cuasiconforme de un dominio  $G$  es uniformemente Hölder continuo con exponente  $\frac{1}{k}$  en todo subconjunto compacto de  $G$ .

No daremos la demostración de este hecho aquí sin embargo ésta puede ser encontrada en Lehto (p.p. 70-71).

**Teorema 1.11.**- Sea  $\varphi$  una función que es continua, estrictamente creciente y  $\rho$ -cuasimétrica en el eje real, entonces existe un mapeo cuasiconforme  $\phi$  del semiplano superior sobre sí mismo con valores en la frontera  $\phi(x) = \varphi(x)$  y una dilatación maximal menor que una cota que depende de  $\rho$ .

**Demostración.**- La función

$$\phi = u + iv = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{i}{2}(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(1 + i)(\alpha - i\beta)$$

donde

$$\alpha(x, y) = \int_0^1 \varphi(x + ty) dt, \quad \beta(x, y) = \int_0^1 \varphi(x - ty) dt \quad (1.2)$$

está definida y es continua en el plano total finito  $z = x + iy$ . Ya que  $\varphi$  es estrictamente creciente,  $\phi$  envía todo el semiplano superior  $y > 0$  en el semiplano superior  $v > 0$ . En el eje real  $\phi(x) = \varphi(x)$ , y en los puntos conjugados tenemos  $\phi(\bar{z}) = \bar{\phi}(z)$ .

Tenemos que probar que  $\phi$  es un mapeo cuasiconforme del plano finito. Entonces el dominio imagen consistirá del plano total finito y se sigue de lo anterior que  $\phi$  mapea el semiplano superior sobre sí mismo y tiene los valores frontera  $\varphi(x)$ .

Notemos mostramos primero que  $\phi$  es un homeomorfismo del plano finito. Es suficiente probar que  $\phi$  asume todo valor en no más que un punto (inyectividad).

Sean  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  dos puntos tales que  $\phi(z_1) = \phi(z_2)$ . Se sigue de lo anterior que  $z_1$  y  $z_2$  se encuentran en el mismo semiplano acotado por  $y = 0$ . Ya que  $\phi(\bar{z}) = \bar{\phi}(z)$  podemos suponer que  $y_1$  y  $y_2$  son positivos.

Escribimos (1.2) en la forma

$$\alpha(x, y) = \frac{1}{y} \int_x^{x+y} \varphi(\xi) d\xi, \quad \beta(x, y) = \frac{1}{y} \int_{x-y}^x \varphi(\xi) d\xi \quad (1.3)$$

Vemos que los valores medios de  $\varphi$  son iguales sobre los intervalos  $(x_1, x_1 + y_1)$  y  $(x_2, x_2 + y_2)$  así como en  $(x_1 - y_1, x_1)$  y  $(x_2 - y_2, x_2)$ . Ya que  $\varphi$  es estrictamente creciente, uno de los intervalos mencionados primero debe estar contenido en el otro, y lo mismo sucede para los otros dos. Si, por ejemplo,  $x_2 \geq x_1$  se sigue que  $x_2 + y_2 \leq x_1 + y_1$ , y  $x_2 - y_2 \leq x_1 - y_1$ . Esto implica que  $x_1 = x_2$ , de donde  $\phi$  es un homeomorfismo.

Finalmente mostramos que  $\phi$  es cuasiconforme en el semiplano superior. Utilizaremos el hecho de que un homeomorfismo  $\varphi$  es cuasiconforme si el cociente  $D = \frac{(|\phi_x| + |\phi_y|)}{(|\phi_x| - |\phi_y|)}$  está acotado en dicho dominio (Lehto p.p 17-18). De (1.3) se sigue que  $\alpha$  y  $\beta$  son continuamente diferenciables y tienen derivadas parciales

$$\begin{aligned} \alpha_x(x, y) &= \frac{1}{y}(\varphi(x+y) - \varphi(x)), \\ \alpha_y(x, y) &= \frac{1}{y}(\varphi(x+y) - \alpha(x, y)), \\ \beta_x(x, y) &= \frac{1}{y}(\varphi(x) - \varphi(x-y)), \\ \beta_y(x, y) &= \frac{1}{y}(\varphi(x-y) - \beta(x, y)), \end{aligned}$$

Ya que  $\varphi$  es estrictamente creciente tenemos

$$\alpha_x > 0, \beta_x > 0, \alpha_y > 0, \beta_y < 0 \quad (1.4)$$

El Jacobiano  $J = \frac{(\alpha_y \beta_x - \alpha_x \beta_y)}{2}$  de  $\phi$  es, en consecuencia, positivo. Así, todos los puntos del semiplano superior son regulares para  $\phi$ .

Para obtener una cota superior para el cociente de dilatación  $D = \frac{(|\phi_x| + |\phi_y|)}{(|\phi_x| - |\phi_y|)}$  de  $\phi$  escribimos

$$\begin{aligned}
 D &\leq \frac{(|\phi_x|^2 + |\phi_y|^2)}{(|\phi_x|^2 - |\phi_y|^2)} \\
 &= \frac{\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \beta_x^2 + \beta_y^2}{\alpha_x \beta_x - \alpha_y \beta_y} \\
 &= \frac{\alpha_x \beta_x}{-\alpha_y \beta_y} \cdot \frac{\beta_x + \frac{\alpha_x^2}{\alpha_x \beta_x} + \frac{\beta_y}{\beta_y} + \frac{\beta_y^2}{\alpha_y \beta_x}}{-\frac{\beta_x}{\beta_y} + \frac{\alpha_x}{\alpha_y}}
 \end{aligned}$$

Para estimar las derivadas parciales de  $\alpha$  y  $\beta$  hacemos uso de que  $\varphi$  es  $\rho$ -cassimétrica. De

$$\varphi(x+y/2) - \varphi(x) \leq \rho(\varphi(x+y) - \varphi(x+y/2))$$

se sigue que

$$\varphi(x+y) - \varphi(x) \leq (1+\rho)(\varphi(x+y) - \varphi(x+y/2))$$

Entre  $\alpha_x$  y  $\alpha_y$  tenemos en consecuencia la doble desigualdad

$$\begin{aligned}
 \alpha_x(x,y) &> \alpha_y(x,y) = \frac{1}{y} \int_0^1 (\varphi(x+y) - \varphi(x+ty)) dt \\
 &\geq \frac{1}{2y} (\varphi(x+y) - \varphi(x + \frac{1}{2}y)) \geq \frac{\alpha_x(x,y)}{2(1+\rho)}
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

En la misma forma obtenemos

$$\beta_x(x,y) > -\beta_y(x,y) \geq \frac{1}{2y} (\varphi(x - \frac{1}{2}y) - \varphi(x-y)) \geq \frac{\beta_x(x,y)}{2(1+\rho)} \tag{1.6}$$

Y se sigue de la  $\rho$ -cassimetría de  $\varphi$  que

$$\frac{\beta_x}{\rho} \leq \alpha_x \leq \rho \beta_x \tag{1.7}$$

Considerando las estimaciones (1.5-1.7) deducimos de (1.4) que

$$D(z) \leq 8\rho(1 + \rho)^2 \quad (1.8)$$

Por lo tanto,  $\phi$  es cuasiconforme en el semiplano superior.

Para completar la demostración, concluimos de la propiedad de simetría  $\phi(\bar{z}) = \overline{\phi(z)}$  que (1.8) sucede en el semiplano inferior también. Por el Teorema de Rensuivibilidad de un arco analítico (Teorema 1.15)  $\phi$  es, en consecuencia, un mapeo cuasiconforme del plano total con una dilatación maximal menor ó igual que  $8\rho(1 + \rho)^2$ .  $\diamond$

**Ejemplo.-** Sea  $\varphi(x) = ax + b$ ,  $a > 0$  entonces siguiendo la notación del teorema anterior tenemos

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) &= \int_0^1 [a(x + ty) + b] dt = (ax + b)t + \frac{ayt^2}{2} \Big|_0^1 \\ &= ax + b + \frac{a}{2}y. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \int_0^1 [a(x - ty) + b] dt = (ax + b)t - \frac{ayt^2}{2} \Big|_0^1 \\ &= ax + b - \frac{a}{2}y. \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\phi(z) = u + iv = \frac{1}{2}(2ax + 2b) + \frac{i}{2}ay = ax + b + \frac{i}{2}ay$$

claramente, en el eje real

$$\varphi(x) = \phi(x)$$

y

$$\phi(\bar{z}) = ax + b + \frac{i}{2}a(-y) = ax + b - \frac{i}{2}ay = \overline{\phi(z)}.$$

Además

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \frac{a}{2}z + \frac{a}{2}\bar{z} + b \\ &= \frac{a}{2}z + \frac{a}{4}(z + \bar{z}) + b \\ &= \frac{3a}{4}z + \frac{a}{4}\bar{z} + b\end{aligned}$$

el cual es cuasiconforme.  $\triangle$

Sea  $\varphi$  una función  $k$ -cuasimétrica sobre el eje real. Por el Teorema 1.11 existe un mapeo cuasiconforme  $\phi$  del semiplano superior sobre sí mismo con los valores en la frontera  $\varphi(x)$ . El mapeo puede ser extendido al plano total por reflexión, y se sigue del Lema 1.10 que  $\phi$ , y en consecuencia  $\varphi$ , son uniformemente Hölder continuas con respecto a la métrica esférica.

En todo subconjunto compacto del plano finito la razón de las distancias euclidianas y esférica es acotada. Ya que  $\varphi(\infty) = \infty$ ,  $\varphi$  debe satisfacer la condición

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < C_1 |x - y|^{q_1} \quad (1.9)$$

en todo intervalo acotado  $I$  donde  $0 < q_1 \leq 1$  depende sólo de  $k$  mientras que la constante finita también depende de  $I$  y de la función  $\varphi$ .

Para estimar  $|\varphi(x)|$  para valores grandes de  $|x|$  notemos que la inversa de  $\varphi$  es también cuasimétrica y, en consecuencia, Hölder continua con respecto a la métrica esférica. Ya que la distancia esférica entre  $x$  e  $\infty$  es del mismo orden que  $\frac{1}{|x|}$  para  $x$  grande, corresponde para todo  $r > 0$  un  $C_2$  finito tal que

$$\frac{1}{|x|} < \frac{C_2}{|\varphi(x)|^{q_2}} \quad (1.10)$$

sucede para  $|x| > r$ , donde  $0 < q_2 \leq 1$ . Es fácil ver que  $q_2$  también depende sólo de  $k$ .

Si finalmente tomamos dos números reales  $x, y$  tales que  $y$  pertenece a un intervalo acotado  $I$  y  $x$  es arbitrario, entonces se sigue de (1.9) y (1.10) que

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < C(|x - y|^{q_1} + |x - y|^{\frac{1}{q_2}}) \quad (1.11)$$

donde  $C$  depende de  $I$  y  $\varphi$ .

Sea  $\varphi$  una función  $k$ -cuasimétrica en el eje real. Para todo entero positivo  $n$  introduzcamos la integral

$$\varphi_n(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_n \varphi(r) e^{-n(r-s)^2} dr,$$

donde

$$\epsilon_n = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nr^2} dr \right)^{-1} = \sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

Se sigue de la desigualdad (1.11) que esta integral converge uniformemente en todo subconjunto compacto del plano finito y define una función analítica  $\varphi_n$  de la variable compleja  $z$ .

Propiedades de las funciones  $\varphi_n$  :

- La restricción de  $\varphi_n$  al eje real es  $k$ -cuasimétrica pues tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x+t) - \varphi_n(x) &= c_n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(r) e^{-n(r-(t+x))^2} dr - c_n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(r) e^{-n(r-x)^2} dr \\
&= c_n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{-n(u-(t+x))^2} du - c_n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{-n(u-x)^2} du \\
&= c_n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t+r) e^{-nr^2} dr - c_n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+r) e^{-nr^2} dr \\
&= c_n \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x+t+r) - \varphi(x+r)) e^{-nr^2} dr
\end{aligned}$$

para cualesquiera  $x$  y  $t$  reales. Ya que  $\varphi$  es  $k$ -cuasimétrica, tenemos

$$\begin{aligned}
c_n \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x+t+r) - \varphi(x+r)) e^{-nr^2} dr &\leq c_n \int_{-\infty}^{\infty} k(\varphi(x+r) - \varphi(x-t+r)) e^{-nr^2} dr \\
&= k c_n \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x+r) - \varphi(x-t+r)) e^{-nr^2} dr \\
&= k(\varphi_n(x) - \varphi_n(x-t))
\end{aligned}$$

la otra desigualdad es análoga.

• La derivada de  $\varphi_n$  es positiva para todo punto del eje real. En efecto, para  $x$  real tenemos:

$$\begin{aligned}
\varphi_n'(x) &= 2nc_n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(r)(r-x) e^{-n(r-x)^2} dr \\
&= 2nc_n \left( \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(r)(r-x) e^{-n(r-x)^2} dr - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)(r-x) e^{-n(r-x)^2} dr \right) \\
&= 2nc_n \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(r) - \varphi(x))(r-x) e^{-n(r-x)^2} dr
\end{aligned}$$

La última expresión de aquí es positiva ya que  $\varphi(x)$  es creciente.



- Cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $\varphi_n(x)$  converge uniformemente a  $\varphi(x)$  sobre todo segmento acotado del eje real.

Si  $x$  se encuentra en un intervalo acotado  $I$ , entonces por (1.11)

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| &= c_n \left| \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x+r) - \varphi(x)) e^{-nr^2} dr \right| \\ &\leq c_n \int_{-n^{-\frac{1}{2}}}^{n^{-\frac{1}{2}}} |\varphi(x+r) - \varphi(x)| e^{-nr^2} dr + 2c_n C \int_{n^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} (r^n + r^{\frac{1}{2}}) e^{-nr^2} dr \end{aligned}$$

La primera igualdad se obtiene al observar que

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} c_n \varphi(u) e^{-n(u-x)^2} du - \varphi(x) \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} c_n \varphi(x+r) e^{-nr^2} dr - c_n \varphi(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nr^2} dr \right| \\ &= c_n \left| \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x+r) - \varphi(x)) e^{-nr^2} dr \right| \end{aligned}$$

Ya que  $\varphi$  es uniformemente continua en todo intervalo acotado, la primera integral a la derecha tiende uniformemente a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ . Esto también es verdadero para la segunda integral como vemos de la siguiente desigualdad válida para  $q > 0$  y  $n > (\frac{3}{2})^2$ :

$$\begin{aligned} \int_{n^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} r^q e^{-nr^2} dr &= \int_{n^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-nr^2 + q \log r} dr \\ &\leq \int_{n^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} \frac{2nr - \frac{q}{2}}{2n\frac{1}{2} - qn\frac{1}{2}} e^{-nr^2 + q \log r} dr \\ &= n^{-\frac{1}{2}} \cdot (2n\frac{1}{2} - 2n\frac{1}{2})^{-1} e^{-n\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

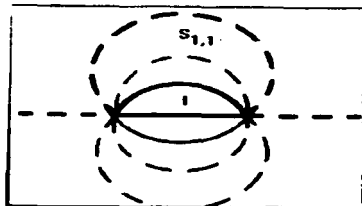
La última igualdad se obtiene al hacer el cambio de variable  $u = -nr^2 + q \log r$ .

**Teorema de Unión.**- Sea  $\varphi$  una función cuasianálitica en el eje real. Entonces los semiplanos superior e inferior pueden ser mapeados conformemente sobre dominios de Jordan disjuntos tales que los valores en la frontera de  $f_1$  y  $f_2$  satisfagan la relación  $f_1(x) = f_2(\varphi(x))$ .

**Demostración.**- Aplicando el proceso de aproximación de la sección anterior podemos realizar la demostración en dos pasos. Primero, supongamos que  $\varphi$  puede ser extendida a una función analítica en el plano finito que tiene las primeras dos propiedades mencionadas anteriormente. Nosotros construimos entonces dos mapeos conformes  $f_1$  y  $f_2$  de los semiplanos superior e inferior, respectivamente, que satisfagan la condición  $f_1(x) = f_2(\varphi(x))$  sobre un intervalo arbitrario dado  $I$ . En el segundo paso una función cuasianálitica arbitraria es aproximada mediante funciones analíticas del tipo anterior y el intervalo  $I$  tiende al eje real.

Así, sea  $\varphi$  analítica en el plano total con las dos primeras propiedades. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $\varphi(I) = I$ . De hecho, si podemos encontrar el mapeo requerido en el caso  $\varphi(I) \neq I$ , sólo necesitamos escribir  $\tilde{\varphi}(x) = a\varphi(x) + b$  con  $a > 0$  y  $b$  escogidos de tal forma que  $\tilde{\varphi}(I) = I$ . Si  $f_1$  y  $f_2$  satisfacen la relación  $f_1(x) = f_2(\tilde{\varphi}(x))$  entonces  $f_1(x) = \tilde{f}_2(\varphi(x))$  donde  $\tilde{f}_2(z) = f_2(az + b)$ .

Para todo  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ , sea  $S_{1,\nu}$  el subdominio del semiplano superior cuya frontera consiste de  $\bar{I}$  y un arco circular que interseca a  $\bar{I}$  en sus puntos extremos en ángulos  $(\frac{\pi}{2})^\nu \pi$ . Sea  $S_{2,\nu}$  la reflexión de  $S_{1,\nu}$  en  $I$ . Desde alguna  $\nu = n$  en adelante los dominios  $S_{1,\nu}$  serán mapeados por  $\varphi$  conformemente sobre un dominio de Jordan encontrándose en el semiplano superior. Si esto no fuera así, existirían en toda  $S_{1,\nu}$ , ó dos puntos  $x_1, x_2$  tales que  $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ , ó un punto  $x$  donde la parte imaginaria de  $\varphi$  no es positiva. Estos puntos tendrían puntos límites en  $\bar{I}$ . Esto lleva a una contradicción ya que  $\varphi$  mapea  $\bar{I}$  topológicamente, y ya que  $\varphi(x) > 0$  implica que todo punto  $x \in \bar{I}$  tiene una vecindad disco cuya mitad superior es mapeada mediante  $\varphi$  conformemente al semiplano superior.



Para  $\nu = n$  definimos dos mapeos conformes  $f_{1,n}$ ,  $f_{2,n}$  de  $S_{1,n}$ ,  $S_{2,n}$  respectivamente, de la siguiente forma:

$$f_{1,n}(z) = \varphi(z) \quad f_{2,n}(z) = z.$$

Entonces  $f_{1,n}$  mapea  $S_{1,n}$  sobre un dominio contenido en el semiplano superior mientras que  $f_{2,n}$  mapea el subdominio  $S_{2,n}$  del semiplano inferior sobre sí mismo. Así los dominios imágenes son dominios de Jordan con intersección vacía; se sigue de la definición de  $f_{1,n}$  y  $f_{2,n}$  que la condición de frontera  $f_{1,n}(x) = f_{2,n}(\varphi(x))$  se satisface en  $I$ .

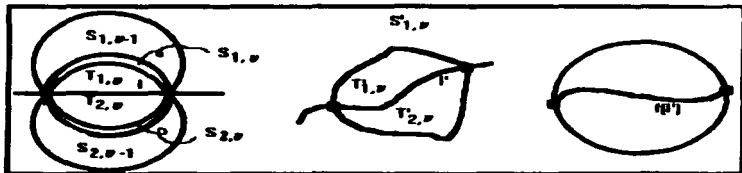
Si lo anterior sucede para  $n = 0$ , entonces  $S_{1,0}$  coincide con el semiplano superior. En este caso especial, el par de funciones  $f_{1,0}$ ,  $f_{2,0}$  es así una solución a nuestro problema. El caso general puede ser reducido a éste en la siguiente forma:

Comenzamos a partir de algún valor de  $\nu$ ,  $\nu \geq 1$ , para el cual existen dos mapeos conformes  $f_{1,\nu} : S_{1,\nu} \rightarrow S'_{1,\nu}$ ,  $f_{2,\nu} : S_{2,\nu} \rightarrow S'_{2,\nu}$  satisfaciendo que  $S'_{1,\nu}$  y  $S'_{2,\nu}$  son dominios de Jordan disjuntos y los valores en la frontera satisfacen  $f_{1,\nu}(x) = f_{2,\nu}(\varphi(x))$  en  $I$ . Si nosotros podemos construir mapeos correspondientes a  $S_{1,\nu-1}$  y  $S_{2,\nu-1}$  repitiendo el proceso  $\nu$  veces llegamos al caso donde los dominios considerados son los semiplanos superior e inferior, respectivamente.

Sea  $T_{1,\nu}$  el subdominio de  $S_{1,\nu}$  cuya frontera consiste de  $I$  y el arco circular  $C_{1,\nu}$  que intersecta

a  $f$  en sus puntos extremos en un ángulo  $(\frac{3}{2})(\frac{3}{2})\pi$ . Denotemos las reflexiones de  $T_{1,\nu}$  y  $C_{1,\nu}$  en  $J$  mediante  $T_{2,\nu}$  y  $C_{2,\nu}$ , respectivamente.

Consideremos a los conjuntos  $D_\nu = T_{1,\nu} \cup J \cup T_{2,\nu}$  y  $D'_\nu = T'_{1,\nu} \cup J' \cup T'_{2,\nu}$ , donde  $T'_{1,\nu} = f_{1,\nu}(T_{1,\nu})$  e  $J'$  denota el arco de Jordan  $f_{1,\nu}(J) = f_{2,\nu}(J)$ .



Entonces  $D'_\nu$  es un dominio simplemente conexo cuya frontera consiste de los arcos de Jordan  $f_{1,\nu}(C_{1,\nu}) = C'_{1,\nu}$ ,  $f_{2,\nu}(C_{2,\nu}) = C'_{2,\nu}$  y sus puntos extremos comunes. El arco de Jordan  $J'$  une estos puntos extremos.

Sea  $f$  un mapeo conforme de  $D'_\nu$  sobre el disco unitario (Teorema del Mapeo de Riemann). Entonces las composiciones  $f_{1,\nu-1} = f \circ f_{1,\nu}$  y  $f_{2,\nu-1} = f \circ f_{2,\nu}$  mapean  $T_{1,\nu}$  y  $T_{2,\nu}$  conformemente sobre dominios de Jordan disjuntos y satisfacen la condición frontera  $f_{1,\nu-1}(x) = f_{2,\nu-1}(\varphi(x))$  sobre  $J$ . Los arcos circulares  $C_{1,\nu}$  y  $C_{2,\nu}$  son mapeados sobre arcos  $f(C'_{1,\nu})$  y  $f(C'_{2,\nu})$  respectivamente, encontrándose sobre la circunferencia del disco unitario. Así,  $f_{1,\nu-1}$  y  $f_{2,\nu-1}$  pueden ser continuados utilizando reflexión a mapeos conformes de  $S_{1,\nu-1}$  y  $S_{2,\nu-1}$ . Los dominios imágenes  $f_{1,\nu-1}(S_{1,\nu-1})$  y  $f_{2,\nu-1}(S_{2,\nu-1})$  son disjuntos y su frontera común consiste de  $f(J)$  y su reflexión en el círculo unitario. Los mapeos  $f_{1,\nu-1}$  y  $f_{2,\nu-1}$  poseen así las propiedades requeridas, y hemos entonces probado el teorema para el caso en que  $\varphi$  sea una función analítica con las dos primeras propiedades mencionadas arriba.

Consideremos ahora el caso general cuando  $\varphi$  es una función  $k$ -cuasimétrica arbitraria

sobre el eje real. Sabemos que podemos aproximar  $\varphi$  mediante una sucesión de funciones analíticas  $\varphi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  satisfaciendo las propiedades mencionadas.

Por la primera parte de la demostración, existen para cada  $n = 1, 2, \dots$  dos mapeos conformes  $f_{n,1}$  y  $f_{n,2}$  que mapean el semiplano superior  $H_1$  y el semiplano inferior  $H_2$  sobre dominios de Jordan disjuntos  $G_{n,1}$  y  $G_{n,2}$ , respectivamente, y satisfacen  $f_{n,1}(x) = f_{n,2}(\varphi(x))$  sobre el intervalo  $I_n = \{x : -n \leq x \leq n\}$ . Usando un mapeo lineal podemos asegurar que  $f_{n,1}(0) = 0$ ,  $f_{n,1}(1) = 1$  y  $f_{n,1}(-1) = -1$ . Mostramos ahora que  $f_{n,1}$  y  $f_{n,2}$  convergen a mapeos conformes cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Ya que todas las funciones  $\varphi_n$  son  $\kappa$ -cuasimétricas sobre el eje real, existen por el Teorema 1.11 automapeos  $k$ -cuasiconformes  $\psi_n$  de  $H_1$  con los valores en la frontera  $\varphi_n(x)$  donde  $k$  es un número que depende de  $\kappa$ , por reflexión, cada  $\psi_n$  puede ser extendido a un mapeo  $k$ -cuasiconforme del plano. Este también será denotado por  $\psi_n$ .

El mapeo  $W_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , definido por la fórmula

$$W_n(z) = \begin{cases} f_{n,1}(x) & \text{si } z \in H_1 \cup I_n \\ f_{n,2}(\psi_n(z)) & \text{si } z \in H_2 \cup I_n \end{cases} \quad (1.12)$$

es un homeomorfismo del dominio  $\bar{H}_n = H_1 \cup I_n \cup H_2$ . Por el Teorema de Removibilidad de Arcos Analíticos se sigue que  $W_n$  es  $k$ -cuasiconforme.

Los mapeos  $W_n$  están definidos en todo dominio acotado  $G$  desde algún  $n = n_0$  en adelante y satisfacen las condiciones de normalización  $W_n(0) = 0$ ,  $W_n(1) = 1$  y  $W_n(-1) = -1$ . Se sigue de los criterios de normalidad, que la familia  $\{W_n : n \geq n_0\}$  es una familia normal en  $G$ . Así, contiene una subsucesión que converge uniformemente a una función límite  $W$  en todo dominio acotado. Por el Teorema 1.8,  $W$  es  $k$ -cuasiconforme. Ya que el punto al infinito es removible,  $W$  puede ser extendido a un mapeo  $k$ -cuasiconforme del plano total.

Como los mapeos  $\psi_n$  y sus inversas  $\psi_n^{-1}$ , convergen sobre el eje real a  $\varphi$  y  $\varphi^{-1}$ , respectiva-

mente, deducimos entonces de los criterios de normalidad que las familias  $\{v_n\}$  y  $\{v_n^{-1}\}$  son normales. Por el Teorema 1.8 hay una subsección tal que cuando  $n \rightarrow \infty$  las tres sucesiones  $W_n, v_n$  y  $v_n^{-1}$  tienden a mapeos  $k$ -cuasiconformes  $W, \psi$  y  $\psi^{-1}$  del plano, la primera convergiendo uniformemente en todo dominio acotado y las dos últimas uniformemente sobre el plano total.

Si escribimos  $W = f_1$ ,  $W \circ v^{-1} = f_2$ , entonces se sigue de (1.12) que  $f_{n,i}$ ,  $i = 1, 2$  converge uniformemente a  $f_i$  cuando  $n \rightarrow \infty$  en todo subconjunto acotado de  $\mathbb{H}_i^+$ . Así, las restricciones de las funciones  $f_1$  y  $f_2$  a  $H_1$  y  $H_2$  son mapeos conformes que mapean  $H_1$  y  $H_2$  sobre los dominios de Jordan disjuntos  $W(H_1)$  y  $W(H_2)$ . Ya que  $\lim \varphi_n(x) = \varphi(x)$  tenemos que

$$f_1(x) = \lim f_{n,1}(x) = \lim f_{n,2}(\varphi(x)) = f_2(\varphi(x))$$

para toda  $x$  real. Así, hemos probado el Teorema de Unión.  $\diamond$

## 1.4 Definición Analítica de los Mapeos Cuasiconformes.

### 1.4.1 Continuidad Absoluta sobre Rectas.

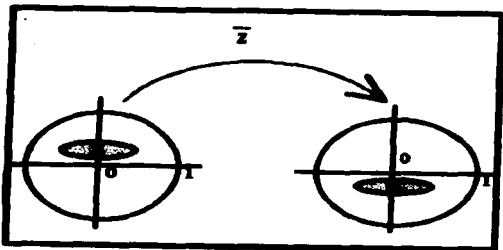
**Definición.-** Sea  $\tau$  una función de conjuntos completamente aditiva definida en la clase de conjuntos de Borel del plano finito y  $\mu$  la medida de Lebesgue. La función  $\tau$  es llamada *absolutamente continua* en un conjunto  $E$  (con respecto a la medida  $\mu$ ) si la siguiente condición es satisfecha: Para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|\tau(B)| < \epsilon$  para todo conjunto de Borel  $B \subset E$  con  $\mu(B) < \delta$ .

**Definición.-** Sea  $f$  un homeomorfismo de  $E$  en  $E'$ , ambos conjuntos de Borel. Claramente la imagen de un conjunto de Borel contenido en  $E$  es medible con respecto a  $\mu$ . Asociamos con el mapeo  $f$  a la función de conjuntos  $\mu_f$  mediante la fórmula:

$$\mu_f(B) = \mu(f(B \cap E))$$

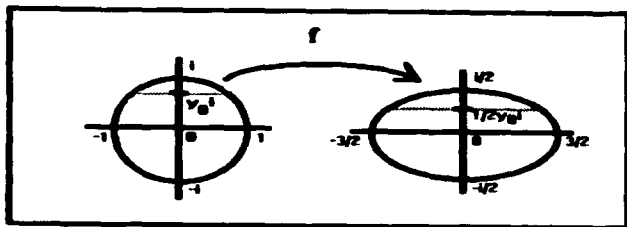
para todo conjunto de Borel  $B$ . Así,  $f$  es *absolutamente continua* si la función de conjuntos  $\mu_f$  es *absolutamente continua* en  $E$ .

**Ejemplo.-** Sea  $f(z) = \bar{z}$  y  $E$  el disco unitario, entonces  $\mu_f(B) = \mu(f(B \cap E)) = \mu(B \cap E)$  y es claro que  $\mu_f$  es *absolutamente continua* con  $\delta = \epsilon$ .



**Definición.-** Una función  $f$  en  $G$  es *absolutamente continua sobre rectas en  $G$  (ACR)* si en todo rectángulo  $R = \{x + iy : a < x < b, c < y < d\}$ ,  $R \subset G$ ,  $f$  es *absolutamente continua* como una función de  $x$  sobre casi todos los segmentos  $I_x = \{x + iy : a < x < b\}$  y como una función de  $y$  sobre casi todos los segmentos  $I_y = \{x + iy : c < y < d\}$ .

**Ejemplo.-** Sea  $f(z) = z + \frac{1}{2}\bar{z}$ . Ya que  $f(x + iy) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}iy$ , si la medida del segmento de recta que une a los puntos dentro del disco unitario  $A$  y  $B$  (ver fig.) es menor que  $\frac{2}{3}\epsilon$  la medida del segmento imagen es menor que  $\epsilon$  y por lo tanto  $f$  es ACR en el disco unitario.  $\Delta$



**Definición.-** Una función  $f$  de valores complejos definida en  $G$  tiene  $L^p$ -derivadas,  $p \geq 1$ , si satisface las siguientes dos condiciones:

1.  $f$  es absolutamente continua sobre rectas.
2. Las derivadas parciales  $f_x, f_y$  pertenecen a  $L^p$  en todo subconjunto compacto de  $G$ .

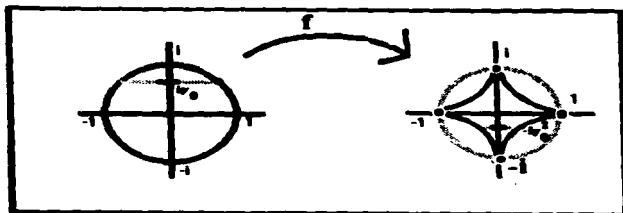
**Ejemplo.-** Sea  $f(z) = z + \frac{1}{2}\bar{z}$ , entonces  $f$  es ACR en el disco unitario y además

$$f_x = \frac{3}{2} \quad f_y = \frac{i}{2}$$

pertenecen a  $L^p$  en todo subconjunto compacto de  $\Delta$ , así  $f$  tiene  $L^p$ -derivadas,  $p \geq 1$ .  $\Delta$

**Ejemplo.-** Sea  $f(x + iy) = x^2 - iy^2$ . Claramente es ACR con  $\delta = \epsilon$  y  $f_x = 2x, f_y = -2iy$  las cuales nuevamente se encuentran en  $L^p, p \geq 1$ , es decir,  $f$  tiene  $L^p$ -derivadas,  $p \geq 1$ .  $\Delta$





**Observación.**- Una función con  $L^1$ -derivadas es también llamada *absolutamente continua* en el sentido de Tonelli.

**Fórmula de Green Generalizada.**- Si  $f$  tiene  $L^1$ -derivadas en  $G$ , entonces

$$\int_{\partial D} f dz = 2i \iint_D f_x dx dy, \quad \int_{\partial D} f d\bar{z} = -2i \iint_D f_y dx dy \quad (1.13)$$

para todo dominio de Jordan  $D$ ,  $\bar{D} \subset G$ , con frontera rectificable

Decimos que un homeomorfismo es *ACR* en un dominio  $G$  si es *ACR* en el sentido anterior en el dominio  $G - \{\infty, f^{-1}(\infty)\}$ . Análogamente decimos que  $f$  tiene  $L^p$ -derivadas en  $G$  si las tiene en  $G - \{\infty, f^{-1}(\infty)\}$ .

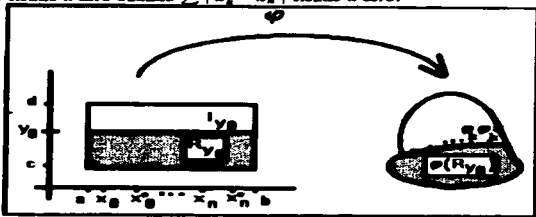
**Lema 1.12.**- Un mapeo cuasiconforme  $\varphi$  de un dominio  $G$  es *ACR* en  $G$ .

**Demostración.**- Sea  $R = \{x + iy : a < x < b, c < y < d\}$  un rectángulo tal que  $\bar{R} \subset G - \{f^{-1}(\infty)\}$ , e  $I_y$  el segmento horizontal  $a < x < b$  con ordenada  $y$ . Tendremos que probar que  $\varphi$  es absolutamente continua sobre casi toda  $I_y$  para  $c < y < d$ .

Para este propósito consideramos el subrectángulo  $R_y$  de  $R$  encontrándonos bajo  $I_y$ , y su

imagen  $\varphi(R_k)$ . El área  $Ar(y)$  de  $\varphi(R_k)$  es una función creciente de  $y$  y, por lo tanto, tiene una derivada finita  $Ar'(y)$  para toda  $y$ ,  $c < y < d$ , excepto para un conjunto de medida lineal cero. Mostramos que  $\varphi$  es absolutamente continua sobre  $I_{\mathbb{R}^2}$ ,  $c < y_0 < d$ , si  $Ar'(y_0)$  existe y es finita.

Sea  $(x_k, x_k^*)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , un sistema arbitrario de subintervalos abiertos que no se traslapan del segmento  $a < x < b$ . Para probar que  $\varphi$  es absolutamente continua en  $I_{\mathbb{R}^2}$ , es suficiente mostrar que la suma  $\sum |\varphi_k^* - \varphi_k|$ , donde  $\varphi_k^* = \varphi(x_k^* + iy_0)$ ,  $\varphi_k = \varphi(x_k + iy_0)$  tiene una cota superior que tiende a cero cuando  $\sum |x_k^* - x_k|$  tiende a cero.



Primero escogemos un  $\delta > 0$  tal que  $y_0 + \delta < d$ . sea  $R_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , un cuadrilátero consistiendo del rectángulo  $\{x + iy : x_k < x < x_k^*, y_0 < y < y_0 + \delta\}$  y sus esquinas. Los dos lados horizontales serán considerados como  $\alpha$ -arcos para  $R_k$ . Entonces

$$m(R_k) = \frac{1}{\delta}(x_k^* - x_k) \quad (1.14)$$

La desigualdad de Rengul nos proporciona la estimación del módulo de la imagen de  $R_k$

$$m(\varphi(R_k)) \geq \frac{(d_k(\delta))^2}{A(\varphi(R_k))} \quad (1.15)$$

donde  $d_k(\delta)$  denota la distancia euclidiana entre los  $\alpha$ -arcos de  $\varphi(R_k)$ , medidos en el plano. Estos lados convergen a los puntos  $\varphi_k$  y  $\varphi_k^*$  cuando  $\delta \rightarrow 0$  y así

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} d_k(\delta) = |\varphi_k^* - \varphi_k|. \quad (1.16)$$

De (1.14) y (1.15) obtenemos las desigualdades

$$\kappa(x_k^* - x_k) \geq \frac{\delta(d_k(\delta))^2}{A(\varphi(R_k))} \quad k = 1, \dots, n$$

donde  $\kappa$  denota la dilatación maximal de  $\varphi$ . Haciendo la sumatoria de estas sobre  $k$  y usando la desigualdad de Schwarz, obtenemos

$$\kappa \sum_{k=1}^n (x_k^* - x_k) \geq \delta \frac{(\sum_{k=1}^n d_k(\delta))^2}{\sum_{k=1}^n A(\varphi(R_k))} \quad (1.17)$$

Ahora hacemos uso de la hipótesis de que la función  $Ar$  introducida previamente tiene una derivada finita en  $y = y_0$ . Ya que

$$Ar(y_0 + \delta) - Ar(y_0) \geq \sum_{k=1}^n A(\varphi(R_k))$$

se sigue de (1.17) que

$$\left(\sum_{k=1}^n d_k(\delta)\right)^2 \leq \kappa \frac{Ar(y_0 + \delta) - Ar(y_0)}{\delta} \sum_{k=1}^n (x_k^* - x_k).$$

Si hacemos  $\delta \rightarrow 0$  esto se convierte por (1.16) en

$$\left(\sum_{k=1}^n |\varphi_k^* - \varphi_k|\right)^2 \leq \kappa Ar'(y_0) \sum_{k=1}^n (x_k^* - x_k)$$

y la continuidad absoluta de  $\varphi$  sobre  $I_{\mathbb{R}^n}$  es probada. Análogamente se puede mostrar que  $\varphi$  es absolutamente continua sobre casi todo segmento vertical  $c < y < d$ , con  $x$  constante, que está contenido en  $R$ .  $\diamond$

**Teorema 1.13.-** Un mapeo  $\kappa$ -cuasiconforme  $\varphi$  del dominio  $G$  es diferenciable y satisface la condición de dilatación

$$\max_{\alpha} | \partial_{\alpha} \varphi(z) | \leq \kappa \min_{\alpha} | \partial_{\alpha} \varphi(z) | \quad (1.18)$$

en casi todo punto  $z$  de  $G$ . Donde  $\partial_{\alpha} \varphi(z_0)$  es la derivada direccional de  $\varphi$  en la dirección  $\alpha$  en el punto  $z_0$ .

Esto sucede ya que un mapeo  $\kappa$ -cuasiconforme  $\varphi$  del dominio  $G$  es absolutamente continuo sobre casi todo segmento en  $G$ , así tiene derivadas parciales finitas casi dondequiera en  $G$  y, por lo tanto, es diferenciable casi dondequiera en  $G$ . Pero la desigualdad (1.18) sucede en todo punto donde  $\varphi$  es diferenciable.  $\diamond$

Tomemos además que el Jacobiano del mapeo  $\varphi$  satisface

$$J(z) = \max_{\alpha} | \partial_{\alpha} \varphi(z) | \min_{\alpha} | \partial_{\alpha} \varphi(z) |$$

en todo punto  $z$  donde  $\varphi$  es diferenciable. La desigualdad (1.18) es entonces equivalente a

$$\max_{\alpha} | \partial_{\alpha} \varphi(z) |^2 \leq \kappa J(z).$$

De aquí y del Teorema 1.13 se sigue que las derivadas parciales de un mapeo  $\kappa$ -cuasiconforme  $\varphi$  de  $G$  satisfacen las desigualdades

$$| \varphi_x(z) |^2 \leq \kappa J(z) \quad | \varphi_y(z) |^2 \leq \kappa J(z) \quad (1.19)$$

casi dondequiera en  $G$ .

Ya que  $J$  es integrable sobre todo subconjunto compacto de  $G - \{\varphi^{-1}(\infty)\}$ . Por (1.19), lo mismo es verdadero para las funciones  $| \varphi_x |^2$  y  $| \varphi_y |^2$ . Por el Lema 1.12  $\varphi$  es ACR en  $G$  y obtenemos:

**Teorema 1.14.-** Un mapeo cuasiconforme de un dominio  $G$  tiene  $L^2$ -derivadas en  $G$ .

### 1.4.3 El Cociente de Dilatación.

Sean  $G$  un dominio y  $\varphi : G \rightarrow G'$  un homeomorfismo que preserve sentidos, con  $\varphi(z) = w$  donde  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ . En un punto  $z_0$ ,  $\varphi$  induce un mapeo de las diferenciales

$$\begin{aligned} du &= u_x dx + u_y dy \\ dv &= v_x dx + v_y dy \end{aligned} \tag{1.20}$$

ó, utilizando la notación compleja

$$dw = \varphi_x dz + \varphi_{\bar{x}} d\bar{x}. \tag{1.21}$$

Ya que

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \frac{1}{2}(u_x + v_y) + \frac{1}{2}i(v_x - u_y) \\ \varphi_{\bar{x}} &= \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{1}{2}i(v_x + u_y) \end{aligned}$$

obtenemos

$$|\varphi_x|^2 - |\varphi_{\bar{x}}|^2 = u_x v_y - v_x u_y = J$$

donde  $J$  representa nuevamente al Jacobiano, el cual es positivo puesto que  $\varphi$  preserva sentidos. Observando que

$$|dw| = |\varphi_x dz + \varphi_{\bar{x}} d\bar{x}| \leq |\varphi_x dz| + |\varphi_{\bar{x}} d\bar{x}|$$

y

$$|dw| = |\varphi_x dz + \varphi_{\bar{x}} d\bar{x}| \geq |\varphi_x dz| - |\varphi_{\bar{x}} d\bar{x}|$$

obtenemos la doble desigualdad

$$(|\varphi_0| - |\varphi_\varepsilon|) |dz| \leq |dw| \leq (|\varphi_0| + |\varphi_\varepsilon|) |dz|$$

donde ambos límites pueden ser alcanzados. En realidad  $(|\varphi_0| + |\varphi_\varepsilon|) = \max_{z_0} |\partial_{\bar{z}} \varphi(z_0)|$  y  $(|\varphi_0| - |\varphi_\varepsilon|) = \min_{z_0} |\partial_{\bar{z}} \varphi(z_0)|$ .

Definimos ahora el cociente de dilatación de  $\varphi$  como

$$D_\varphi(z) = \frac{|\varphi_0| + |\varphi_\varepsilon|}{|\varphi_0| - |\varphi_\varepsilon|} \geq 1$$

el cual nos proporciona la razón entre los ejes mayor y menor de la elipse que produce el mapeo inducido por  $\varphi$  entre los planos  $(dx, dy)$  y  $(du, dv)$  al ser aplicado sobre una circunferencia con centro en el origen.

**Ejemplo.-** Sea  $\varphi(z) = 3z - \bar{z}$  entonces

$$|\varphi_0| = 3, \quad |\varphi_\varepsilon| = |-1| = 1$$

de donde

$$D_\varphi(z) = \frac{3+1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2. \Delta$$

Con frecuencia resulta más conveniente considerar al cociente

$$|\kappa(z)| = \frac{|\varphi_z(z)|}{|\varphi_{\bar{z}}(z)|} < 1$$

al cual está relacionado con  $D_\varphi$  mediante la siguiente fórmula:

$$D_\varphi(z) = \frac{1+|\kappa(z)|}{1-|\kappa(z)|}$$

Como una observación tenemos que el mapeo resulta ser conforme si y sólo si  $D_\varphi = 1$  ó, equivalentemente, cuando  $|\kappa(z)| = 0$ .

En la dilatación compleja

$$\kappa(z) = \frac{\varphi_z}{\varphi_{\bar{z}}}$$

el máximo corresponde a la dirección  $\arg dz = \frac{1}{2} \arg \kappa$ , y el mínimo a la dirección  $\frac{1}{2} \arg \kappa \pm \frac{\pi}{2}$ .

Ejemplo.- Sea  $\varphi(z) = (e^{i\frac{\pi}{4}} + 1)z + \bar{z}$ , en este caso tenemos

$$D_\varphi(z) = \frac{|e^{i\frac{\pi}{4}} + 1| + 1}{|e^{i\frac{\pi}{4}} + 1| - 1} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1} > 1$$

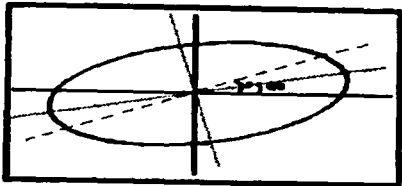
por otra parte

$$|k(z)| = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} < 1$$

y

$$k(z) = \frac{1}{(e^{i\frac{\pi}{4}} + 1)} = \frac{\cos \frac{\pi}{4} + 1 - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}}{2 + \sqrt{2}}$$

y el máximo corresponde a la dirección  $\frac{1}{2} \arctan \frac{-1}{1 + \sqrt{2}} \triangleq$



Queremos ahora determinar la dilatación compleja de un espacio compacto. Con objeto de simplificar la notación utilizaremos el valor intermedio  $\zeta = f(x)$ . Así, tenemos

$$(g \circ f)_x = (g_\zeta \circ f)f_x + (g_\zeta \circ f)f_x$$

$$(g \circ f)_x = (g_\zeta \circ f)f_x + (g_\zeta \circ f)f_x.$$

De donde

$$(g_\zeta \circ f) = \frac{(g \circ f)_x - (g_\zeta \circ f)f_x}{f_x}$$

substituyendo este valor en la segunda igualdad, tenemos

$$(g \circ f)_x = \frac{(g \circ f)_x - (g_\zeta \circ f)f_x}{f_x} \cdot f_x + (g_\zeta \circ f)f_x$$

así, despejando  $(g_\zeta \circ f)$

$$(g_\zeta \circ f) = \frac{(g \circ f)_x f_x - (g \circ f)_x f_x}{f_x f_x - f_x f_x}$$

es decir,

$$(g_\zeta \circ f) = \frac{1}{j} [(g \circ f)_x f_x - (g \circ f)_x f_x]$$

De esta manera obtenemos que

$$\begin{aligned} \kappa_g \circ f &= \frac{g_\zeta'(f(x))}{g_\zeta'(f(x))} \\ &= \frac{(g \circ f)_x f_x - (g \circ f)_x f_x}{(g \circ f)_x f_x - (g \circ f)_x f_x} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{f'_g \left[ (g \circ f)'_z - \frac{(g \circ f)'_z f'_z}{f'_g} \right]}{f'_g \left[ (g \circ f)'_z - \frac{(g \circ f)'_z f'_z}{f'_g} \right]} \\
&= \frac{f'_g}{f'_g} \cdot \left( \frac{(g \circ f)'_z - (g \circ f)'_z \cdot \kappa_f}{(g \circ f)'_z} \right) \cdot \frac{\frac{1}{(g \circ f)'_z}}{\frac{1}{(g \circ f)'_z}} \\
&= \frac{f'_g}{f'_g} \cdot \left( \frac{\kappa_{g \circ f} - \kappa_f}{1 - \kappa_{g \circ f} \kappa_f} \right).
\end{aligned}$$

En el caso  $g$  conforme, tenemos  $\kappa_g = 0$  y entonces

$$\kappa_{g \circ f} - \kappa_f = 0$$

de donde

$$\kappa_{g \circ f} = \kappa_f$$

Este último hecho lo estableceremos de la siguiente manera:

**Teorema de Unicidad.**- Sea  $f : G \rightarrow G'$  un mapeo cuasiconforme con dilatación compleja  $\kappa$ . Entonces todo mapeo cuasiconforme de  $G$  cuya dilatación compleja sea igual a  $\kappa$  casi dondequiera en  $G$  es de la forma  $g \circ f$ , donde  $g$  es un mapeo conforme.

Como una observación, tenemos que si  $f$  es conforme, entonces en general  $\kappa_{g \circ f}$  no es igual a  $\kappa_g$ .

**Ejemplo.**- Sean  $f(z) = 3z + \bar{z}$  y  $g(z) = z^2$  definida esta última en un dominio que no incluya al cero, entonces  $g \circ f(z) = (3z + \bar{z})^2 = 9z^2 + 6z\bar{z} + \bar{z}^2$ . Así las dilataciones complejas son

$$k_g(z) = 0, \quad k_f(z) = \frac{1}{3}, \quad k_{g \circ f}(z) = \frac{6z + 2\bar{z}}{18z + 6\bar{z}} = \frac{1}{3}$$

y, claramente,  $k_{g \circ f} = k_f$ .

Por otro lado  $f \circ g(z) = 3z^3 + \bar{z}^3$  y

$$k_{f \circ g}(z) = \frac{2\bar{z}}{6z} = \frac{\bar{z}}{3z} \neq \frac{1}{3} = k_f(z). \triangle$$

**Ejemplo.** - Sean  $f(z) = 3z + \bar{z}$  y  $g(z) = 2z + \bar{z}$ ; en tal caso tenemos que  $g \circ f(z) = 7z + 5\bar{z}$ . Las dilataciones complejas están dadas por  $k_g(z) = \frac{1}{3}$ ,  $k_f(z) = \frac{1}{3}$  y  $k_{g \circ f}(z) = \frac{5}{7}$ . Utilizando la fórmula de composición obtenemos

$$k_g \circ f(z) = \frac{3}{5} \left( \frac{\frac{5}{7} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3i}} \right) = \frac{1}{2}. \triangle$$

### 1.4.3 La Ecuación de Beltrami.

La definición

$$\varphi_z = \kappa \varphi_{\bar{z}}$$

de la dilatación compleja de un mapeo cuasiconforme  $\varphi$  puede ser interpretada como una ecuación diferencial. Este tipo de ecuación es denominado Ecuación de Beltrami. Claramente, cuando  $\varphi$  es conforme la ecuación de Beltrami se reduce a la ecuación de Cauchy-Riemann  $\varphi_z = 0$ .

Dada una función medible  $\kappa$  con  $\sup_x |\kappa(z)| < 1$  quisiéramos encontrar una  $\varphi$  tal que cumpla la ecuación de Beltrami para dicha  $\kappa$ . Este problema no puede resolverse en general y nuestro objetivo será entonces encontrar las condiciones bajo las cuales lo podamos resolver.

Una función  $\varphi$  es llamada una solución generalizada de la ecuación de Beltrami en el dominio  $G$  si  $\varphi$  es ACR en  $G$  y las derivadas  $\varphi_z$ ,  $\varphi_{\bar{z}}$  satisfacen la ecuación de Beltrami casi dondequiera en  $G$ .

#### 1.4.4 Convergencia de Funciones $k$ -cuasiconformes.

**Definición.-** Sea  $\{\varphi_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  una sucesión de funciones que son localmente integrables en  $G$ . Decimos que la sucesión de funciones  $\varphi_n$  converge débilmente en  $G$  a una función localmente integrable  $\varphi$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_R (\varphi_n - \varphi) dx dy = 0$$

para todo rectángulo horizontal  $R$ ,  $\bar{R} \subset G$ .

**Lema 1.15.-** Sea  $\varphi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  una sucesión de mapeos  $k$ -cuasiconformes de  $G$  que converge uniformemente a una función finita  $\varphi$  sobre subconjuntos compactos de  $G$ . Entonces las derivadas  $(\varphi_n)_x$  y  $(\varphi_n)_y$  convergen débilmente a  $\varphi_x$  y  $\varphi_y$ , respectivamente.

**Demostración.-** Por el Teorema 1.8 tenemos que  $\varphi$  debe ser  $k$ -cuasiconforme ó una función constante, en consecuencia,  $\varphi$  y todos los mapeos  $\varphi_n$  poseen  $L^2$ -derivadas por el Teorema 1.14.

Sea  $R$ ,  $\bar{R} \subset G$ , un rectángulo horizontal arbitrario. Se sigue de la fórmula (1.13) del Teorema de Green Generalizado que

$$\begin{aligned} \iint_R ((\varphi_n)_x - \varphi_x) dx dy &= \frac{i}{2} \int_{\partial R} (\varphi_n - \varphi) d\bar{z}, \\ \iint_R ((\varphi_n)_y - \varphi_y) dx dy &= \frac{1}{2i} \int_{\partial R} (\varphi_n - \varphi) dz. \end{aligned}$$

ya que  $\varphi_n$  tiende uniformemente a  $\varphi$  sobre la frontera de  $R$ , las integrales anteriores convergen a cero.  $\diamond$

**Teorema 1.16.-** Sea  $\varphi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  una sucesión de mapeos  $K$ -cuasiconformes de  $G$  que convergen uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $G$  a un mapeo cuasiconforme  $\varphi$  con

dilatación compleja  $\kappa$ . Si las dilataciones complejas  $\kappa_n(z)$  de  $\varphi_n$  tienden a un límite  $\kappa_\infty(z)$  casi dondequiera en  $G$ , entonces  $\kappa_\infty(z) = \kappa(z)$  casi dondequiera en  $G$ .

**Demostración.**- Podemos suponer que  $G$  y sus imágenes  $\varphi_n(G)$  son dominios finitos (pues  $\{\varphi_n\}$  converge a  $\varphi$  en subconjuntos compactos). Ya que  $\varphi_\xi - \kappa\varphi_\xi = 0$  y  $\varphi_\xi \neq 0$  casi dondequiera en  $G$ , tenemos que probar que

$$\zeta(z) = \varphi_\xi(z) - \kappa_\infty(z)\varphi_\xi(z) = 0$$

para casi toda  $z \in G$ . Escribimos entonces

$$\zeta = [\varphi_\xi - (\varphi_n)_\xi] + [(\varphi_n)_\xi - \kappa_n(\varphi_n)_\xi] + [\kappa_n(\varphi_n)_\xi - \kappa_\infty(\varphi_n)_\xi] + [\kappa_\infty(\varphi_n)_\xi - \kappa_\infty\varphi_\xi]$$

e integramos  $\zeta$  sobre un rectángulo horizontal arbitrario  $R$ ,  $\tilde{R} \subset G$ . Ya que el término en el segundo sumando se hace cero casi dondequiera en  $G$ , obtenemos

$$\iint_R \zeta dx dy = I_{1,n} + I_{2,n} + I_{3,n}$$

donde

$$\begin{aligned} I_{1,n} &= \iint_R (\varphi_\xi - (\varphi_n)_\xi) dx dy \\ I_{2,n} &= \iint_R (\kappa_n - \kappa_\infty)(\varphi_n)_\xi dx dy \\ I_{3,n} &= \iint_R \kappa_\infty((\varphi_n)_\xi - \varphi_\xi) dx dy \end{aligned}$$

por el Lema 1.15 tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{1,n} = 0$$

Además se sigue de la desigualdad de Schwarz y la condición de dilatación  $\max_\alpha |\partial_\alpha \varphi(z)|^2 \leq$

$KJ(z)$  que

$$|I_{3,n}|^2 \leq \iint_R |\kappa_n - \kappa_\infty|^2 dx dy \iint_R |(\varphi_n)_s|^2 dx dy \leq K\mu(\varphi_n(R)) \iint_R |\kappa_n - \kappa_\infty|^2 dx dy.$$

ya que  $\varphi$  es finita en  $G$  y  $\varphi_n$  converge uniformemente a  $\varphi$  en  $R$ ,  $\mu(\varphi_n(R))$  es uniformemente acotada. La integral  $\iint_R |\kappa_n - \kappa_\infty| dx dy$  tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$  por el Teorema de Convergencia de Lebesgue. Así, tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{3,n} = 0.$$

Debido a que la función  $\kappa_\infty$  puede ser aproximada mediante funciones escalonadas uniformemente acotadas  $\psi_h$  con valores constantes en los cuadrados horizontales tales que  $\lim \psi_h = \kappa_\infty$  casi dondequiera en  $R$ . Escribimos entonces

$$I_{3,n} = \iint_R (\kappa_\infty - \psi_h)((\varphi_n)_s - \varphi_s) dx dy + \iint_R \psi_h((\varphi_n)_s - \varphi_s) dx dy.$$

Una nueva aplicación de la desigualdad de Schwarz y el Teorema de Convergencia de Lebesgue muestra que para toda  $\epsilon > 0$  corresponde una  $k_0 > 0$  tal que para  $k = k_0$  y toda  $n$  el valor absoluto de la primera integral de  $I_{3,n}$  es menor que  $\epsilon$ . Por otro lado deducimos, aplicando el Lema 1.15 al número finito de cuadrados en los cuales  $\psi_{h_0}$  tiene un valor constante, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_R \psi_{h_0}((\varphi_n)_s - \varphi_s) dx dy = 0.$$

Así  $I_{3,n}$  también tiende a cero y

$$\iint_R \zeta dx dy = 0. \tag{1.22}$$

Se sigue que  $\zeta$  se hace cero casi dondequiera en  $G$ . Para probar esto primero observamos que todo conjunto abierto  $O \subset G$  puede ser representado en la forma  $(\bigcup R_h) \cup E_0$ , donde los conjuntos  $R_h$ ,  $h = 1, 2, \dots$ , son rectángulos horizontales disjuntos y  $E_0$  es un conjunto de área cero. Así, por (1.22), la integral de  $\zeta$  sobre  $O$  es consecuentemente se hace cero. Si  $A$ ,  $\bar{A} \subset G$  es un conjunto medible arbitrario, podemos construir una sucesión decreciente de conjuntos abiertos  $O_k$ ,  $A \subset O_k$ ,  $\bar{O}_k \subset G$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , tal que  $\lim \mu(O_k - A) = 0$ . Ya que la integral de Lebesgue es absolutamente continua localmente como función de conjuntos, tenemos

$$\iint_A \zeta dx dy = 0 \quad (1.23)$$

para todo conjunto  $A$  medible,  $\bar{A} \subset G$ .

Sea  $\xi$  la parte real de  $\zeta$ . El conjunto  $E = \{z : z \in G, \xi(z) \neq 0\}$  es la unión de los conjuntos  $E_k = \{z : z \in G, \xi(z) > \frac{1}{k}\}$  y  $E_{-k} = \{z : z \in G, \xi(z) < -\frac{1}{k}\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Ya que cada uno de estos conjuntos tiene área cero por (1.23), tenemos que  $\mu(E) = 0$  y así  $\xi$  se hace cero casi dondequiera en  $G$ . En la misma forma podemos mostrar que la parte imaginaria de  $\zeta$  se hace cero casi dondequiera y tenemos la demostración del Teorema.  $\diamond$

**Ejemplo.-** Sea la sucesión  $\varphi_n$  definida mediante

$$\varphi_n(z) = z + \left(4 - \frac{1}{n}\right)z\bar{z} + 5z^2$$

entonces que cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $\varphi_n(z) \rightarrow \varphi(z)$  donde

$$\varphi(z) = z + 4z\bar{z} + 5z^2.$$

Las dilataciones están dadas por

$$k(z) = \frac{4z + 10\bar{z}}{1 + 4\bar{z}}, \quad k_n(z) = \frac{(4 - \frac{1}{n})z + 10\bar{z}}{1 + (4 - \frac{1}{n})\bar{z}}$$

así en este caso tenemos que  $k_n(z) \rightarrow k(z)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .  $\triangle$

**Ejemplo.**— El siguiente es un ejemplo en el que no se cumplen las hipótesis del teorema anterior. Dada una  $\epsilon$  arbitraria,  $0 < \epsilon < 1$ , existe una sucesión de mapas cuasiconformes  $\phi_n$  del cuadrado  $R = \{x + iy : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$  que cumple

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(z) = z$  uniformemente en  $R$ .
- $|k_n(x)| = 1 - \epsilon$  casi dondequiera en  $R$  para toda  $n$ .

Para probar esto dividiremos  $R$  en  $n^2$  cuadrados

$$R_{hk} = \left\{ x + iy : \frac{h-1}{n} < x < \frac{h}{n}, \frac{k-1}{n} < y < \frac{k}{n} \right\}$$

donde  $h, k = 1, \dots, n$ .

Ahora construimos un mapa cuasiconforme  $f_{hk}$  de cada  $R_{hk}$  sobre sí mismo de la siguiente forma: Mapeamos primero  $R_{hk}$  sobre el disco unitario mediante un mapa conforme  $\psi_{hk}$  tal que el punto medio  $x_{hk}$  de  $R_{hk}$  es enviado al origen, después el disco unitario es mapeado sobre sí mismo mediante el mapa  $f(x) = x|x|^{2-\frac{2}{\epsilon}}$  el cual puede ser escrito como  $f(x) = x^{\frac{1}{\epsilon}} \bar{x}^{1-\frac{1}{\epsilon}}$  de donde podemos obtener claramente que  $k_f(x) = (1-\epsilon) \cdot x^{\frac{1}{\epsilon}-1} \bar{x}^{1-\frac{1}{\epsilon}}$  de donde  $f$  es un mapa  $(\frac{2}{\epsilon} - 1)$ -cuasiconforme. Finalmente el disco unitario es mapeado mediante  $\phi_{hk}^{-1}$  sobre  $R_{hk}$ . La dilatación compleja del mapa compuesto  $f_{hk} = \phi_{hk}^{-1} \circ f \circ \psi_{hk}$  tiene entonces el valor absoluto  $1 - \epsilon$  dondequiera excepto en  $x_{hk}$ . Este mapa puede ser extendido a un homeomorfismo de  $\overline{R_{hk}}$  sobre sí mismo y el mapa extendido deja todo punto frontera de  $R_{hk}$  invariante.

Así la fórmula  $\phi_n(x) = f_{hk}(z)$  para  $z \in \overline{R_{hk}}$  define un homeomorfismo  $\phi_n$  de  $R$  sobre sí mismo. Por el Teorema de Removibilidad de un arco analítico se sigue que  $\phi_n$  es cuasiconforme con dilatación maximal  $\frac{2}{\epsilon} - 1$ . Ya que  $\phi_n$  mapea cada  $R_{hk}$  sobre sí mismo tenemos que  $|\phi_n(x) - x| \leq \frac{\sqrt{2}}{n}$  en todo punto  $x \in R$ . Si realizamos la construcción anterior para toda  $n = 1, 2, \dots$ , obtenemos una sucesión  $\phi_n$  con las propiedades requeridas.

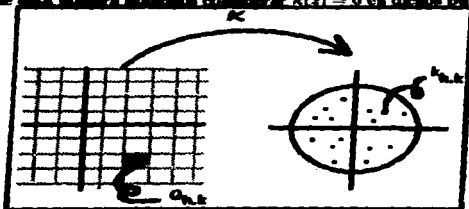
Ya que el mapeo  $M$  tiene dilatación compleja cero dondequiera en  $R$ , la sucesión  $\phi_n$  no resulta ser una buena aproximación.  $\triangle$

## 1.5 El Teorema del Mapeo de Riemann Medible.

Nuestra tarea ahora es probar el Teorema del Mapeo de Riemann Medible el cual estableceremos en la siguiente forma.

**Teorema del Mapeo de Riemann Medible.**— Sean  $G$  y  $G'$  dominios simplemente conexos conformemente equivalentes y  $\kappa$  una función medible en  $G$  con  $\sup_x |\kappa(x)| < 1$ . Entonces existe un mapeo conforme  $\varphi: G \rightarrow G'$  cuya dilatación compleja coincide con  $\kappa$  casi dondequiera. Este mapeo está determinado únicamente con excepción de sus composiciones  $f \circ \varphi$  con cualquier mapeo conforme  $f$  de  $G'$  sobre sí mismo.

**Demostración.**— Consideraremos primero el caso especial cuando  $\kappa$  es una función escalonada. Sea  $N$  el lado formado por los cuadrados  $Q_{h,k} = \{x + iy : (h-1)\delta < x < h\delta, (k-1)\delta < y < k\delta\}$ ,  $h, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , y  $\kappa$  una función escalonada con  $\sup_x |\kappa(x)| < 1$  que tiene un valor constante  $\kappa_{h,k}$  en cada cuadrado  $Q_{h,k}$ . Ya que la dilatación compleja del mapeo requerido coincide con  $\kappa$  sólo casi dondequiera, los valores de  $\kappa$  en los lados de los cuadrados y en el infinito no nos importan, de esta manera podemos considerar  $\kappa(x) = 0$  en dichos puntos.



Para cada cuadrado individual  $Q_{h,k}$  el mapeo  $\gamma_{h,k}$  definido mediante la regla

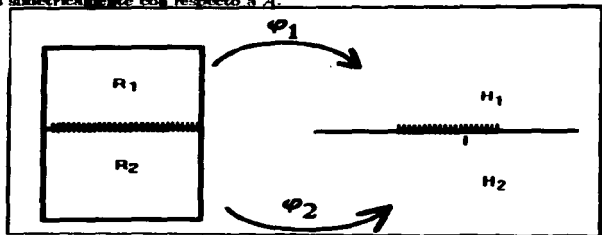


$$|f_{h,k}(z)| = z + \kappa_{h,k} \bar{z}$$

tiene, claramente, la dilatación compleja  $\kappa_{h,k}$  en  $Q_{h,k}$ . Así, debemos ahora resolver el siguiente problema:

Sean  $R_1$  y  $R_2$  dos rectángulos congruentes con intersección vacía y teniendo al segmento abierto  $A$  como un lado común. Sea  $\varphi_i, i = 1, 2$ , un mapeo cuasiconforme de  $R_i$  con la dilatación compleja (no necesariamente constante)  $\kappa_i$ . Se requiere construir un mapeo cuasiconforme del rectángulo  $R = R_1 \cup A \cup R_2$  teniendo la dilatación compleja  $\kappa_i(x)$  para casi toda  $x \in R_i, i = 1, 2$ .

Si  $f$  es conforme, tenemos que los mapeos  $f \circ \varphi_1$  y  $\varphi_1$  tienen la misma dilatación compleja. Así, no hay pérdida de generalidad al suponer que  $\varphi_1(R_1) = H_1$  y  $\varphi_2(R_2) = H_2$  son los semiplanos superior e inferior respectivamente en virtud del Teorema del Mapeo de Riemann. Los mapeos  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  pueden ser extendidos topológicamente a  $\overline{R_1}$  y  $\overline{R_2}$ . Por medio de mapeos conformes adecuados de  $H_1$  y  $H_2$  sobre sí mismos podemos asegurar además que  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  mapean el segmento  $A$  sobre el mismo intervalo  $I$  del eje real y que los puntos  $\varphi_1^{-1}(\infty)$ ,  $\varphi_2^{-1}(\infty)$  están colocados simétricamente con respecto a  $A$ .



Si los mapeos  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  coinciden en  $A$ , el problema ha quedado resuelto. De hecho, el mapeo  $\varphi$  definido mediante

$$\varphi(z) = \begin{cases} \varphi_1(z) & \text{si } z \in R_1 \cup A \\ \varphi_2(z) & \text{si } z \in R_2 \end{cases}$$

resulta ser un homeomorfismo de  $R$  sobre el dominio  $H_1 \cup I \cup H_2$ , y se sigue del Teorema de Renovibilidad de un arco analítico que  $\varphi$  es cuasiconforme.

En el caso general, cuando  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  no necesariamente coinciden en  $A$  construimos dos mapas conformes  $f_1$  y  $f_2$  que mapean  $H_1$  y  $H_2$  sobre dominios de Jordán disjuntos tales que  $f_1 \circ \varphi_1$  y  $f_2 \circ \varphi_2$  tengan los mismos valores frontera en  $A$ . Si escribimos

$$\varphi(z) = \begin{cases} f_1(\varphi_1(z)) & \text{si } z \in R_1 \cup A \\ f_2(\varphi_2(z)) & \text{si } z \in R_2 \end{cases}$$

entonces el mapa  $\varphi$  es un homeomorfismo y nos encontramos nuevamente en el caso anterior, de lo que deducimos que  $\varphi$  es cuasiconforme y, ya que  $f_i \circ \varphi_i$ ,  $i = 1, 2$ , tiene la misma dilatación compleja que  $\varphi_i$ , el problema ha quedado resuelto.

Basta ahora probar la existencia de los mapas conformes auxiliares  $f_1$  y  $f_2$ . La condición de frontera  $f_1 \circ \varphi_1 = f_2 \circ \varphi_2$  sucede en  $A$  si, para toda  $x \in I$ ,  $f_1$  y  $f_2$  satisfacen la ecuación

$$f_1(x) = f_2(\varphi_2(\varphi_1^{-1}(x))).$$

En vista del Teorema de Unión, la existencia de los mapas requeridos  $f_1$  y  $f_2$  se obtiene si probamos que el homeomorfismo  $\psi : I \rightarrow I$ , definido mediante la composición  $\psi(x) = \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x))$  es cuasimétrico. Para este propósito extendemos el mapa cuasiconforme  $\varphi_2$  a  $R_1$  mediante la reflexión en  $A$ . El mapa compuesto  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  está entonces definido en el semiplano superior y lo mapea cuasiconformemente sobre sí mismo, manteniendo fijo el punto al infinito. Sobre  $I$  la función frontera del mapa  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  coincide con  $\psi$  el cual es, en consecuencia, cuasimétrico.

Usando la solución del anterior problema de unión construiremos ahora un mapeo cuasi-conforme con la dilatación compleja prescrita, analizando primero el caso en que la función es escalonada.

Consideremos nuevamente el aro  $N$  y la función escalonada  $\kappa$ . De los cuadrados  $Q_{h,b} \in N$  y sus lados podemos construir una sucesión de rectángulos  $R_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , que satisface las siguientes condiciones:

1.  $R_1$  es uno de los cuadrados  $Q_{h,b}$ .
2.  $R_n$ ,  $n = 2, 3, \dots$ , consiste de  $R_{n-1}$ , un rectángulo congruente a  $R_{n-1}$ , y su lado común.
3.  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$  es el plano finito.

Comenzando con los mapeos afines  $\eta_{h,b}(z) = z + \kappa_{h,b}\bar{z}$  podemos entonces, mediante una solución repetida del problema de unión, construir una sucesión de mapeos cuasiconformes  $\varphi_n : R_n \rightarrow R'_n$  tales que la dilatación compleja de  $\varphi_n$  coincide con  $\kappa$  casi dondequiera en  $R_n$ . Los mapeos  $\varphi_n$  pueden ser normalizados por medio de transformaciones lineales en tal forma que se asuman el valor  $\infty$  y tienen a 0 y a 1 como puntos fijos desde alguna  $n$  en adelante.

Por los criterios de normalidad, la familia  $\{\varphi_n : n \geq m\}$  es normal en  $R_m$ . En consecuencia, para toda  $R_m$  podemos encontrar una subsección  $\varphi_{m,n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , de la sucesión  $\varphi_n$ , convergiendo uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $R_m$ . Estas subsecciones pueden ser escogidas de tal manera que  $\varphi_{m+1,n}$  es una subsección de  $\varphi_{m,n}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . La sucesión diagonal  $\varphi_{1,1}, \varphi_{2,2}, \dots$ , converge uniformemente en todo dominio acotado. En vista de la normalización anterior de los mapeos se sigue que  $\lim \varphi_{n,n}$  es un mapeo cuasiconforme del plano finito sobre sí mismo. Por el Teorema 1.16 la dilatación compleja de  $\varphi$  coincide con  $\kappa$  casi dondequiera en el plano. El problema de existencia queda así resuelto en el caso en que  $\kappa$  es una función escalonada.

Mediante un proceso de límite podemos fácilmente tratar el caso general en el cual  $k$  es una función medible arbitraria con  $\sup |\kappa(s)| < 1$ .  $\kappa$  puede ser aproximado por una sucesión de funciones escalonadas  $\kappa_n$  tales que  $\sup |\kappa_n(s)| \leq \sup |\kappa(s)|$ , y  $\kappa_n(s) \rightarrow \kappa(s)$  casi dondequiera en el plano. Para cada  $\kappa_n$  construimos un mapeo cuasiconforme  $W_n$  del plano finito sobre sí mismo, con dilatación compleja coincidiendo con  $\kappa_n$  casi dondequiera. Si cada  $W_n$  es normalizado de manera que  $W_n(0) = 0$  y  $W_n(1) = 1$ , entonces la familia  $\{W_n\}$  es normal y podemos escoger una subsecuencia uniformemente convergente de  $W_n$  que tiene como función límite a  $W$ , un mapeo cuasiconforme del plano finito. Este puede ser extendido al plano total escribiendo  $W(\infty) = \infty$ . Por el Teorema 1.13 la dilatación compleja de  $W$  coincide casi dondequiera con  $\kappa$ .

Debido al Teorema de Unicidad y al Teorema del Mapeo de Riemann tenemos el resultado deseado.  $\diamond$

## Capítulo 2

# Dinámica Compleja.

En este Capítulo desarrollaremos someramente las ideas esenciales de Dinámica Compleja que utilizaremos para poder entender el mecanismo de la demostración del Teorema de Sullivan el cual es nuestro principal objetivo.

En la primera sección introduciremos los conceptos básicos que aparecen al estudiar la dinámica que producen los mapeos racionales, es decir, daremos las definiciones de puntos del plano cuyo comportamiento al aplicar el mapeo racional una y otra vez es especial; tal es el caso de los puntos fijos, puntos periódicos y puntos críticos.

En la segunda sección veremos algunas de las principales propiedades de los conjuntos de Julia y Fatou del mapeo racional, en especial el que sean conjuntos completamente invariantes bajo dicho mapeo.

En la tercera sección analizaremos más en detalle al conjunto de Fatou y, especialmente, responderemos a la pregunta acerca de cómo son mapeadas las componentes del conjunto de Fatou bajo la acción del mapeo racional.

## 2.1 La Dinámica de los Mapeos Racionales.

**Definición.-** Un mapeo racional es una función de la forma

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde  $P$  y  $Q$  son polinomios no ambos idénticos a la función constante cero. Suponemos además que  $P$  y  $Q$  son coprimos, es decir, no tienen ceros comunes.

**Definición.-** El grado del mapeo racional  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , en símbolos  $\text{grad}(R)$ , queda definido como

$$\text{grad}(R) = \begin{cases} \max\{\text{grad}(P), \text{grad}(Q)\} & \text{si } P \neq 0 \text{ y } Q \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde  $\text{grad}(S)$  es el grado usual de un polinomio  $S$ .

**Ejemplo.-** Considérense los mapeos racionales

$$R_1(x) = \frac{x+2}{x^2-4x+4}$$

$$R_2(x) = \frac{x^3+1}{x}$$

$$R_3(x) = \frac{2x^2-1}{x}$$

$$R_4(x) = \frac{x^3-4x+2}{x}$$

por simple inspección observamos que  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  tienen grado 2 y que  $R_4$  tiene grado 3.  $\Delta$

**Proposición 2.1.-**  $\text{grad}(R \circ S) = \text{grad}(R)\text{grad}(S)$ .

La demostración es un cálculo directo y no será dada aquí.

**Ejemplo.-** Tomando los anillos racionales  $R_2$  y  $R_4$  del ejemplo anterior tenemos que

$$\begin{aligned} R_4 \circ R_2(z) &= \frac{\left(\frac{z^2+1}{z}\right)^2 - 4\left(\frac{z^2+1}{z}\right) + 2}{\left(\frac{z^2+1}{z}\right)} \\ &= \frac{z^2 - z^4 + 2z^2 - z^2 + 1}{z^2(z^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Ya que 0,  $i$  y  $-i$  no son raíces del polinomio  $z^2 - z^4 + 2z^2 - z^2 + 1$  tenemos entonces que el grado de  $R_4 \circ R_2$  es 6, es decir, el producto de los grados de los anillos racionales  $R_4$  y  $R_2$ .  $\Delta$

**Corolario 2.2.-**  $\text{grad}(R^n) = (\text{grad}(R))^n$ .

Donde  $R^n$  queda definida recursivamente mediante

$$\begin{aligned} R^1 &= R \\ R^n &= R \circ (R^{n-1}). \end{aligned}$$

**Definición.-** Dada cualquier función  $f$  no constante y holomorfa cerca del punto  $z_0 \in \mathbb{C}$ , definimos la *valencia de  $f$  en  $z_0$* , en símbolos  $v_f(z_0)$ , como el entero positivo  $k$  determinado de manera única por la condición de que el límite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)^k}$$

existe, es finito y distinto de cero.

**Ejemplo.-** Sea  $f(z) = (z - 1)^3$  y  $z_0 = 1$ , entonces

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z - 1)^3 - 0}{(z - 1)^k}$$

existe, es finito y distinto de cero para  $k = 3$ .

Intuitivamente la valencia de  $f$  en  $a_0$  es el número de soluciones de  $f(z) = f(a_0)$  en  $a_0$ .

**Proposición 2.3.-** Sea  $g$  una función no constante y holomorfa cerca de un punto  $a_0$ .  $f$  una función no constante y holomorfa cerca de  $g(a_0)$ , entonces

$$v_{f \circ g}(a_0) = v_f(g(a_0))v_g(a_0)$$

donde  $a_0$ ,  $g(a_0)$  y  $f(g(a_0))$  están todos en  $\mathbb{C}$ .

**Demostración.-** Ya que  $g$  es holomorfa y no constante cerca de  $a_0$ , existe una vecindad  $V$  de  $a_0$  tal que  $g(z) \neq g(a_0)$  para toda  $z \in V - \{a_0\}$ , y sobre esta vecindad agujerada de  $a_0$  tenemos la identidad

$$\frac{f(g(z)) - f(g(a_0))}{(z - a_0)^{kq}} = \left( \frac{f(g(z)) - f(g(a_0))}{(g(z) - g(a_0))^q} \right) \left( \frac{g(z) - g(a_0)}{(z - a_0)^k} \right)^q$$

donde  $q = v_f(g(a_0))$  y  $k = v_g(a_0)$ . Tomando el límite a ambos lados de la igualdad y observando que el límite de la derecha es finito y distinto de cero, obtenemos

$$v_{f \circ g}(a_0) = v_f(g(a_0))v_g(a_0). \diamond$$

**Observación.-** Tenemos además que  $f$  es biyectiva en alguna vecindad de  $a_0$  si y sólo si  $v_f(a_0) = 1$  (sólo existe una solución de la ecuación  $f(z) = f(a_0)$ ).

**Ejemplo.-** Sea  $g(z) = \frac{z^2}{z+1}$ , entonces  $v_g(0) = 2$  pues  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{z^k(z+1)}$  existe, es finito y distinto de cero cuando  $k = 2$ . Tomando  $f = (z-1)^3$  sabemos que  $v_f(1) = 3$ . Queremos comprobar que  $v_{g \circ f}(1) = 6$ . Así

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^6}{(z-1)^k((z-1)^2+1)}$$



y, ya que  $(z-1)^6$  y  $(z-1)^3 + 1$  no tienen raíces comunes tenemos que para que este límite exista necesitamos  $k = 6 = v_p(f(1))v_p(1)$ .  $\Delta$

**Definición.-** Un punto  $z$  es un *punto fijo* de un mapeo racional  $R$  si  $R(z) = z$ .

**Definición.-** Un punto  $z$  es un *punto periódico* de un mapeo racional  $R$  si  $R^n(z) = z$ .

**Definición.-** Un punto  $z$  es un *punto crítico* de un mapeo racional  $R$  si  $R$  no es inyectivo para cualquier vecindad de  $z$ .

En el ejemplo anterior 1 es un punto crítico de  $f$  y 0 es un punto crítico de  $g$ .

Claramente, si  $R$  no es constante, los puntos críticos  $z$  son los puntos en los cuales  $v_R(z) > 1$ .

**Definición.-** Un punto  $w$  es un *valor crítico* para  $R$  si es la imagen bajo  $R$  de algún punto crítico de  $R$ .

Si  $R$  es de grado  $d$  y  $w$  no es un valor crítico, entonces  $R^{-1}\{w\}$  consiste de  $d$  puntos distintos  $z_1, \dots, z_d$ . Como ninguno de los  $z_j$  es un punto crítico, existen vecindades  $N$  de  $w$ , y  $N_1, \dots, N_d$  de  $z_1, \dots, z_d$  respectivamente, con  $R$  actuando como una biyección de cada  $N_j$  sobre  $N$ . Así, para cada  $j$ , la restricción  $R_j$  del mapeo  $R$  a  $N_j$  tiene una inversa

$$R_j^{-1} : N \rightarrow N_j$$

y nosotros llamamos a éstas las *ramas* de  $R^{-1}$  en  $w$ .

Ya que  $R$  es inyectiva en alguna vecindad de cualquier punto en  $\mathbb{C}$  en la cual  $R'$  no tiene cero ni polo, entonces

$$\sum_{z \in \mathbb{C}} [v_R(z) - 1] < +\infty$$

De esta manera, esta suma nos proporciona el número de raíces múltiples de  $R$ . Además, ya que cuando  $v_R(z) > 1$  tenemos en el punto  $z$  a un punto crítico, esta suma nos proporciona también una cota superior para el número de puntos críticos.

**Teorema (Riemann-Hurwitz).**.- Para cualquier mapa racional  $R$  no constante se cumple:

$$\sum_{z \in \mathbb{C}} [v_R(z) - 1] = 2\text{grad}(R) - 2$$

**Demostración.**.- Podemos suponer, ya que ambos miembros de la igualdad son invariantes bajo conjugación por una transformación de Möbius, que  $R$  cumple las siguientes propiedades:

1.  $R(\infty) = 1$
2.  $R$  tiene polos simples  $z_1, \dots, z_d$  (en  $\mathbb{C}$ )
3.  $v_R(\infty) = 1$ .

donde  $d$  es el grado de  $R$ .

Así, la valencia de  $R$  en  $\infty$ , y en cada  $z_j$ , es uno; por lo tanto, la suma  $\sum_{z \in \mathbb{C}} [v_R(z) - 1]$  tiene el mismo valor que si la suma corre sobre toda  $x \in \mathbb{C} - \{z_1, \dots, z_d\}$ . Para toda  $x$  tal,  $R(x)$  está en  $\mathbb{C}$ , y así, el valor de la sumatoria es el número de ceros de  $R'(x)$ . Escribiendo  $R = \frac{P}{Q}$  en su forma reducida tenemos

$$R'(x) = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{(Q(x))^2}.$$

Nosotros afirmamos que  $R'$  también está en su forma reducida pues, en otro caso, numerador y denominador tendrían un cero en común (el cual debería ser alguna  $z_j$  pues es un cero de  $Q$ ), de donde

$$0 = P'(z_j)Q(z_j) - P(z_j)Q'(z_j)$$

y aquí existen dos posibilidades: si  $P(x_j) = 0$  entonces la contradicción es evidente al observar que  $R$  está en su forma reducida. Si  $Q'(x_j) = 0$  nuevamente aparece la contradicción ya que  $x_j$  es un polo simple de  $Q$ .

Así, el número de curvas de  $R'(z)$  es también el grado de  $P'Q - PQ'$ , ó, equivalentemente, el grado del polinomio  $(Q(z))^2 R'(z)$ .

Ya que  $Q(x)$  es de la forma  $a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_0$  por la propiedad (1), entonces  $\frac{(Q(x))^2}{x^2}$  tiende a un límite finito distinto de cero cuando  $x \rightarrow \infty$ . Además el hecho de que  $v_R(\infty) = 1$  significa que  $R$  es inyectiva en alguna vecindad de  $\infty$  y así

$$R\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + Az + \dots$$

cerca del origen, donde  $A \neq 0$ . Derivando ambos lados de la ecuación y reemplazando  $x$  por  $\frac{1}{z}$ , encontramos que  $x^2 R'(x)$  tiende a un límite finito, distinto de cero en  $\infty$ , de donde

$$\sum [v_R(x) - 1] = 2 \text{grad}(R) - 2. \diamond$$

**Corolario 2.4.-** Un mapeo racional de grado positivo  $d$  tiene a lo más  $2d - 2$  puntos críticos en  $\mathbb{C}$ . Un polinomio de grado positivo  $d$  tiene a lo más  $d - 1$  puntos críticos en  $\mathbb{C}$ .

**Teorema 2.5.-** Un mapeo racional  $R$  satisface alguna condición de Lipachitz

$$\sigma(R(z), R(w)) \leq M \sigma(z, w)$$

sobre el plano complejo.

**Demostración.-** Cuando  $R$  mapea el punto  $z$  a  $R(z)$ , el cambio de escala (medido en la métrica esférica) en  $z$  es la razón

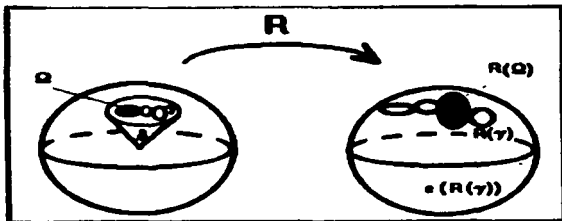
$$\frac{|R'(z)| (1 + |z|^2)}{1 + |R(z)|^2} \quad (2.1)$$

ya que

$$\sigma(z_1, z_2) = \arctan \left| \frac{z_1 - z_2}{1 + \bar{z}_1 z_2} \right|.$$

Probemos entonces que esta función está acotada superiormente, y es suficiente chequear esto cerca de  $\infty$  y de todo polo de  $R$ . Pero  $R$  es como algún término  $(z - z_0)^m$  cerca de cada uno de estos puntos  $z_0$ . Así, el supremo de (2.1) es el mejor valor posible de la constante.  $\diamond$

**Teorema 2.6.** - Sea  $R$  una función racional. Entonces existe  $\delta > 0$  tal que si  $\gamma$  es cualquier curva cerrada de diámetro  $< \delta$  (medido en la métrica esférica), la imagen  $R(\Omega)$  de una componente interior  $\Omega$  de  $\gamma$  no interseca al exterior  $e(R(\gamma))$  de  $R(\gamma)$ .



**Demostración.** - Supongamos que  $R$  es no constante y observemos en este caso que cualquier componente interior  $\Omega$  de  $\gamma$  tiene diámetro (esférico) menor ó igual que el diámetro de  $\gamma$ . De esta manera, si  $M$  es la constante de la condición de Lipchitz del mapeo racional  $R$  dada en el Teorema anterior entonces tenemos

$$\text{diam}(R(\Omega)) \leq M \text{diam}(\gamma).$$

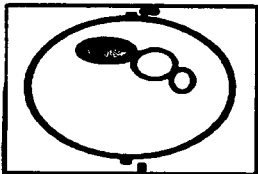
Sea  $\delta$  tal que  $M\delta < \pi$ . Se sigue de aquí que si  $\text{diam}(\gamma) < \delta$  entonces  $R(\Omega)$  tiene diámetro menor que  $\pi$  y, así,  $R(\Omega)$  no puede contener a  $e(R(\gamma))$

Probemos ahora que

$$\partial(R(W)) \subset R(\partial W) \quad (2.2)$$

así, si  $\zeta$  es cualquier punto en  $\partial(R(W))$  entonces  $\zeta$  es el límite de puntos  $R(z_n)$ , donde  $z_n \in W$ . Sin pérdida de generalidad  $z_n \rightarrow z$ , así  $\zeta = R(z)$ , donde  $z$  se encuentra en la cerradura de  $W$ .

Si suponemos  $z \in W$  entonces  $\zeta \in R(W)$ , de lo cual obtenemos una contradicción pues  $R(W)$  es un conjunto abierto y, en realidad, cualquier vecindad de  $\zeta$  interseca al complemento de  $R(W)$  por encontrarse en  $\partial(R(W))$ . De aquí que  $z \in \partial W$ , por lo tanto,  $\zeta \in R(\partial W)$ .



Aplicando (2.2) a  $\Omega$ , obtenemos que

$$\partial(R(\Omega)) \subset R(\partial\Omega) \subset R(\gamma).$$

esto último implica que  $e(R(\gamma))$  y  $\partial(R(\Omega))$  son ajenos. De esta manera se cumple una (y sólo una) de las siguientes posibilidades:

1.  $e(R(\gamma)) \cap R(\Omega) = \emptyset$ ; ó
2.  $e(R(\gamma)) \subset R(\Omega)$ .

Ya que nosotros habíamos probado que (2) no puede ocurrir, entonces tenemos que  $c(R(\gamma)) \cap R(\Omega)$  es vacío.  $\diamond$

## 2.2 Conjuntos de Julia y de Fatou.

Definimos ahora los conjuntos de Julia y Fatou de un mapeo racional  $R$  de la siguiente manera:

**Definición.-** Sea  $R$  una función racional no constante. El *conjunto de Fatou* de  $R$  es el subconjunto abierto maximal de  $\hat{\mathbb{C}}$  sobre el cual la familia  $\{R^n\}$  es normal; el *conjunto de Julia* es el complemento del conjunto de Fatou en  $\hat{\mathbb{C}}$ .

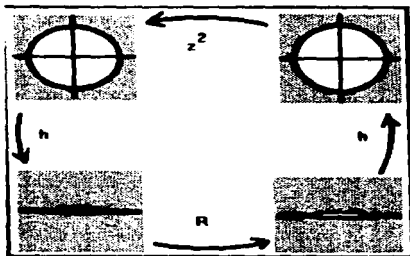
Geoméricamente, el conjunto de Julia es la cerradura del conjunto de puntos repulsivos de  $R$ . (Lennart, Carleson, p.p 55).

**Ejemplos.**

- Sea  $R(z) = z^2$ . Entonces  $R^n(z) = z^{2^n}$  converge a cero en  $\{z : |z| < 1\}$  y a  $\infty$  en  $\{z : |z| > 1\}$ . El conjunto de Julia resulta entonces ser el círculo unitario  $\{z : |z| = 1\}$ .
- Sea  $R(z) = z^2 - 2$ ,  $R : \mathbb{C} - [-2, 2] \rightarrow \mathbb{C} - [-2, 2]$  y tomemos  $h(z) = z + \frac{1}{z}$ , donde  $h : \mathbb{C} - [-2, 2] \rightarrow \{z : |z| > 1\}$  entonces  $h$  es una conjugación entre  $R$  y  $z^2$  puesto que

$$\begin{aligned} R(h(z)) &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 \\ &= z^2 + \frac{1}{z^2} \\ &= h(z^2). \end{aligned}$$

Así  $\lim_{n \rightarrow \infty} R^n(z)$  converge a  $\infty$  para toda  $z$  en  $\mathbb{C} - [-2, 2] \Delta$ .

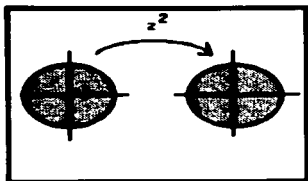


**Definición.** - Si  $g$  es un mapeo de un conjunto  $X$  en él mismo, un subconjunto  $E$  de  $X$  es

1. *Invariante hacia adelante* si  $g(E) = E$ ;
2. *Invariante hacia atrás* si  $g^{-1}(E) = E$ ;
3. *Completamente invariante* si  $g(E) = E = g^{-1}(E)$ .

**Ejemplos.**

- $\mathbb{C}$  es invariante hacia atrás pero no completamente invariante bajo el mapeo  $z \rightarrow \exp z$ .
- Sea  $U$  la componente del conjunto de Fatou que contiene al punto fijo atractor  $-1$  de  $P^2$  donde  $P(z) = z^2 - 1$ .  $U$  es invariante hacia adelante pero no es completamente invariante bajo el mapeo  $P^2$  pues la componente del conjunto de Fatou que contiene a  $1$  también es enviada a  $U$  mediante el mapeo  $P^2$ .
- El disco unitario  $\Delta = \{z : |z| \leq 1\}$  es completamente invariante bajo el mapeo  $z \rightarrow z^2 \Delta$ .



**Observación.**- Si  $g$  es sobre entonces  $g(g^{-1}(E)) = E$  y, en este caso, coinciden 2 y 3.

**Teorema 2.7.**- Sea  $g$  cualquier mapeo abierto continuo de un espacio topológico  $X$  sobre sí mismo y supongamos que  $E$  es completamente invariante, entonces también lo son el complemento de  $E$ ,  $X - E$ ; el interior de  $E$ ,  $E^\circ$ ; la frontera de  $E$ ,  $\partial E$ ; y la cerradura de  $E$ ,  $\bar{E}$ .

**Demostración:**

I.-  $X - E$  es completamente invariante pues

$$g^{-1}(X - E) = g^{-1}(X) - g^{-1}(E) = X - E$$

la última igualdad se da debido a que  $g$  es sobre y  $E$  es completamente invariante.

II.-  $E^\circ$  es completamente invariante ya que como  $g$  es continua en  $X$ ,  $g^{-1}(E^\circ)$  es un subconjunto abierto de  $g^{-1}(E)$ , y así (por invariancia), de  $E$ . Así  $g^{-1}(E^\circ) \subset E^\circ$ . Similarmente, como  $g$  es un mapeo abierto,  $g(E^\circ)$  es un subconjunto abierto de  $E$ , de donde  $g(E^\circ) \subset E^\circ$ . De aquí que

$$E^\circ \subset g^{-1}(g(E^\circ)) \subset g^{-1}(E^\circ)$$

III.-  $\partial E$  es completamente invariante. Sea  $x \in \partial E$ , entonces existen  $x_1, \dots, x_n, \dots \in E$  tales que  $x_n \rightarrow x$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Así  $g(x_1), \dots, g(x_n), \dots$  se encuentran en  $g(E) = E$  (pues  $E$  es



completamente invariante) y, en virtud de la continuidad de  $g$ ,  $g(x_n) \rightarrow g(x)$ . Además, ya que  $g(x_n) \in E$  para toda  $n$  y  $g(x) \notin E^\circ$  por continuidad de  $g$ , tenemos que  $g(x) \in \partial E$ .

IV.-  $\tilde{E}$  es completamente invariante pues  $\tilde{E} = E \cup \partial E$  y entonces

$$\begin{aligned} g(\tilde{E}) &= g(E) \cup g(\partial E) \\ &= E \cup \partial E \\ &= \tilde{E}. \diamond \end{aligned}$$

**Teorema 2.8.-** Sea  $R$  un mapeo racional. Entonces el conjunto de Fatou  $F$  y el conjunto de Julia  $J$  de  $R$  son completamente invariantes bajo  $R$ .

**Demstración.-** Es suficiente probar que  $F$  es completamente invariante en virtud del Teorema 2.7. Además, ya que  $R$  es sobre, basta probar que es invariante hacia atrás, es decir  $R^{-1}(F) = F$ .

$\subseteq$  Sean  $z_0 \in R^{-1}(F)$  y  $w_0 = R(z_0)$ , así,  $w_0 \in F$ . Se sigue que dado cualquier  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $\sigma(w, w_0) < \delta$ , entonces para toda  $n$ ,  $\sigma(R^n(w), R^n(w_0)) < \epsilon$  (por normalidad de la familia  $\{R^n\}$ ). Tenemos además, utilizando la continuidad de  $R$  que existe una  $\rho > 0$  tal que si  $\sigma(z, z_0) < \rho$ , entonces  $\sigma(R(z), w_0) < \delta$ , y así  $\sigma(R^{n+1}(z), R^{n+1}(z_0)) < \epsilon$ .

Esto muestra que  $\{R^{n+1} : n \geq 1\}$  es equicontinua (normal) en  $z_0$  y, claramente, añadirle la función  $R$  no cambia este hecho. Así  $\{R^n : n \geq 1\}$  es equicontinua (normal) en  $z_0 \in R^{-1}(F)$ ; teniendo en cuenta que este conjunto es abierto, deducimos que  $R^{-1}(F) \subseteq F$ .

$\supseteq$  Sea  $z_0 \in F$  y  $w_0 = R(z_0)$ , entonces para toda  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para toda  $n$ , si  $\sigma(z, z_0) < \delta$  entonces  $\sigma(R^{n+1}(z), R^{n+1}(z_0)) < \epsilon$ . El conjunto de toda  $z$  satisfaciendo  $\sigma(z, z_0) < \delta$  es una vecindad abierta  $N$  de  $z_0$ , de aquí que  $R(N)$  es una vecindad abierta de  $w_0$ . Si  $w$  se

encuentra en  $R(N)$  entonces  $w = R(z)$  para alguna  $z \in N$ , así

$$\sigma(R^n(w), R^n(w_0)) = \sigma(R^{n+1}(z), R^{n+1}(z_0)) < \epsilon$$

de donde la familia  $\{R^n\}$  es normal en  $w_0$  y, por lo tanto,  $w_0 \in F$ ; así,  $F \subseteq R^{-1}(F)$ .  $\diamond$

**Proposición 2.9.-** Sea  $f$  un mapeo continuo de un espacio topológico  $X$  sobre sí mismo y supongamos que  $X$  tiene sólo un número finito de componentes  $X_j$ . Entonces para algún entero  $m$ , cada  $X_j$  es completamente invariante bajo  $f^m$ .

**Demostración.-** Sean  $X_1, \dots, X_t$  las componentes de  $X$ . Como cada  $f(X_j)$  es conexo por ser  $f$  continua,  $f$  induce un mapeo  $\tau$  de  $\{1, \dots, t\}$  en sí mismo definido mediante  $\tau(i) = j$ , donde  $f(X_i) \subseteq X_j$ . Como  $f$  es sobre,  $\tau$  también lo es, de esta manera  $\tau$  resulta ser una permutación del conjunto finito de índices, de donde  $\tau$  debe tener orden finito, digamos  $m$ , es decir, para toda  $j$ ,  $f^m(X_j) = X_j$ . Ya que los  $X_j$  son disjuntos dos a dos, tenemos que cada  $X_j$  es completamente invariante bajo  $f^m$ .  $\diamond$

**Teorema 2.10.-** Sea  $R$  un mapeo racional de grado al menos dos y supongamos que un conjunto finito  $E$  es completamente invariante bajo  $R$ . Entonces  $E$  tiene a lo más dos elementos.

**Demostración.-** Supongamos que  $E$  tiene  $k$  elementos. Ya que  $E$  es finito y ya que  $E$  es completamente invariante bajo  $R$ , entonces  $R$  actúa sobre  $E$  como una permutación, de aquí que existe un entero  $q$  tal que  $R^q$  es el mapeo identidad de  $E$  en sí mismo. Si  $R^q$  tiene grado  $d$  entonces la ecuación  $R^q(x) = w$  tiene  $d$  soluciones, y todas se encuentran en  $E$  ( $E$  es completamente invariante) y, utilizando la relación Riemann-Hurwitz tenemos que

$$\begin{aligned} k(d-1) &\leq \sum_{z \in E} (v_R(z) - 1) \\ &= 2d - 2. \end{aligned}$$

como  $d \geq 2$ , tenemos  $k \leq 2$  como era deseado.  $\diamond$

Para dar algunas propiedades importantes del conjunto de Julia necesitamos antes proporcionar la siguiente definición:

**Definición.-** Un punto  $x$  se dice *excepcional* para  $R$  cuando su órbita total  $\{R^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$  sea finita. El conjunto de todos los puntos excepcionales para  $R$  será denotado por  $E(R)$ .

**Ejemplo.-** Sea  $R(x) = \frac{x^3+6x+2}{3(x^2+x+1)}$ , queremos probar que 1 es un punto excepcional de  $R$ . Ya que  $R(1) = 1$ , entonces es claro que  $R^n(1) = 1$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Ahora, las imágenes inversas de 1 se pueden calcular de la siguiente manera:

$$\frac{x^3+6x+2}{3(x^2+x+1)} - 1 = 0$$

es decir

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

ó bien

$$(x-1)^3 = 0$$

de donde  $R^{-1}(1) = 1$  y así, para toda  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $R^n(1) = 1$ , de aquí que 1 es un punto excepcional. En realidad se puede checar mediante un cálculo directo que la transformación  $h(x) = \frac{x+2}{x-1}$  conjugue a  $R$  con el polinomio  $x \rightarrow x^3$ . De esta manera se resulta ser también un punto excepcional para  $R$ .  $\triangle$

**Teorema 2.11.-** Un mapeo racional  $R$  de grado al menos dos tiene a lo más dos puntos excepcionales. Si  $E(R) = \{\zeta\}$ , entonces  $R$  es conjugado a un polinomio con  $\zeta$  correspondiendo a  $\infty$ . Si  $E(R) = \{\zeta_1, \zeta_2\}$ , donde  $\zeta_1 \neq \zeta_2$ , entonces  $R$  es conjugado a algún mapeo  $x \rightarrow x^d$ , con  $d = \text{grad}(R)$  y  $\zeta_1, \zeta_2$  correspondiendo a 0 y  $\infty$ .

**Demonstración.-** Claramente  $E(R)$  es completamente invariante bajo  $R$  y así  $R$  tiene a lo más dos puntos excepcionales. Así, después de una conjugación adecuada, sólo necesitamos considerar los siguientes cuatro posibles casos:

1.  $E(R) = \emptyset$ .
2.  $E(R) = \{\infty\} = \{R^n(\infty) : n \in \mathbb{Z}\}$
3.  $E(R) = \{0, \infty\}$ ;  $\{0\} = \{R^n(0) : n \in \mathbb{Z}\}$  y  $\{\infty\} = \{R^n(\infty) : n \in \mathbb{Z}\}$
4.  $E(R) = \{0, \infty\} = \{R^n(0) : n \in \mathbb{Z}\} = \{R^n(\infty) : n \in \mathbb{Z}\}$

El primer caso no tiene relevancia en nuestra demostración. Si (2) sucede, entonces  $R$  es un polinomio. Si (3) sucede, entonces  $R$  es otra vez un polinomio pero esta vez de la forma  $z \rightarrow az^d$  para algún entero positivo  $d$ . Finalmente, si sucede (4), entonces  $R(0) = \infty$ ,  $R(\infty) = 0$ , y  $R$  tiene todos sus ceros y polos en  $\{0, \infty\}$ , de donde es de la forma  $z \rightarrow az^d$  para algún entero negativo  $d$ . En todos los casos, los puntos excepcionales se encuentran en  $F$  y esto completa la demostración.  $\diamond$

**Corolario 2.11.-** Si  $\text{grad}(R) \geq 2$ , entonces los puntos excepcionales de  $R$  se encuentran en  $F(R)$ .

**Teorema 2.12.-** Sea  $R$  un mapa racional con  $\text{grad}(R) \geq 2$  y supongamos que  $E$  es un subconjunto cerrado completamente invariante de  $\hat{\mathbb{C}}$ . Entonces sucede alguna de las siguientes afirmaciones:

1.  $E$  tiene a lo más dos elementos y  $E \subset E(R) \subset F(R)$ ;
2.  $E$  es infinito y  $J(R) \subset E$ .

**Demonstración.-** Sabemos que  $E$  tiene a lo más dos puntos ó es infinito. Si  $E$  es finito, entonces contiene sólo puntos excepcionales y se tiene el caso (1).

# ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

Supongamos que  $E$  es infinito. Como  $E$  es completamente invariante, también lo es su complemento  $\Omega$ ; así cada  $R^n$  mapea el conjunto abierto  $\Omega$  sobre sí mismo. Debido a esto, tenemos que la familia  $\{R^n\}$  es normal en  $\Omega$  por el Teorema de Montel y así,  $\Omega \subset F$ . Se sigue que  $J$  está contenido en  $E$ .  $\diamond$

**Observación (Propiedad de minimalidad del conjunto de Julia).**- Del teorema anterior tenemos que  $J$  es el más pequeño conjunto completamente invariante, cerrado, con al menos tres puntos.

## 2.3 Estructura del Conjunto de Fatou.

Analizaremos en primer lugar, dentro de la estructura del conjunto de Fatou, a las componentes completamente invariantes de dicho conjunto.

**Teorema 2.13.**- Supongamos que  $grad(R) \geq 2$  y que  $F_0$  es una componente completamente invariante de  $F$ . Entonces

1.  $\partial F_0 = J$ ;
2.  $F_0$  es simplemente conexa ó infinitamente conexa;
3. Todas las demás componentes de  $F$  son simplemente conexas; y
4.  $F_0$  es simplemente conexa si y sólo si  $J$  es conexo.

**Demostración.**- Como  $F_0$  es completamente invariante, también lo es su cerradura  $\bar{F}_0$  y, así, por la minimalidad de  $J$ ,  $J \subset \bar{F}_0$ . Como  $J \cap F_0 = \emptyset$ , concluimos que  $J = \partial F_0$  y tenemos (1).

Para probar (2) supongamos que  $F_0$  es una componente completamente invariante con conectividad finita  $c$  y denotemos a las componentes del complemento de  $F_0$  como  $E_1, \dots, E_c$ . Por la Proposición 2.9, existe un entero  $m$  tal que toda  $E_j$  es completamente invariante bajo  $R^m$  y como  $J$  es infinito, una de las  $E_j$ , digamos,  $E_1$ , es infinita. La minimalidad de  $J(R^m)$  implica que se encuentra en  $E_1$ , y así

$$J(R) = J(R^m) \subset E_1.$$

Sin embargo, por (1) cada  $E_j$  intersecciona a  $J(R)$ ; de aquí que  $c = 1$  y hemos probado (2).

Para probar (3), observemos que de (1),  $J \cup F_0$  es la cerradura de  $F_0$  y, por lo tanto, es conexo. Así las componentes de su complemento son simplemente conexas y como estas componentes son en realidad las componentes de Fatou distintas de  $F_0$ , obtenemos (3). Finalmente (4) se obtiene de (1) y de que un dominio es simplemente conexo si y sólo si su frontera es conexa.  $\diamond$

**Ejemplo.-** Sea  $P(z) = z^3 + c$  donde  $c \in (-2, 0)$  y es tal que

$$(c^3 + c)^3 + c = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4c}).$$

El lado izquierdo aquí es  $P^3(0)$  mientras que el lado derecho es el punto fijo negativo  $\alpha$  de  $P$ .

Sea  $\beta$  el punto fijo positivo, entonces

$$P[-\beta, \beta] = P[0, \beta] = [c, \beta] \subset [-\beta, \beta]$$

y ya que 0 es preperiódico,  $J(P)$  es una dendrita.  $\triangle$

**Corolario 2.14.-** Si  $\text{grad}(R) \geq 2$  y si  $F$  es conexo, entonces sucede alguna de las siguientes afirmaciones:

1.  $F$  es simplemente conexo y  $J$  es conexo; ó
2.  $F$  es infinitamente conexo y  $J$  tiene un número infinito de componentes.

Desearnos generalizar la fórmula de Riemann-Hurwitz para el caso en que  $R: U \rightarrow V$  con  $U$  y  $V$  dominios contenidos en  $\hat{\mathbb{C}}$ . Esto nos permitirá usar dicha fórmula restringiendo el mapeo racional a componentes del conjunto de Fatou.

Sea  $U$  una componente de  $R^{-1}(V)$ , entonces si  $\zeta \in \partial U$ ,  $R(\zeta)$  debe estar en la cerradura de  $V$  y, sin embargo, no puede encontrarse en  $V$  (pues la imagen inversa de un abierto es abierta), de esta manera  $R(\zeta) \in \partial V$ . La contención opuesta, a saber  $\partial V \subset R(\partial U)$  sucede en cualquier caso. Por lo tanto, nos conviene estudiar el mapeo  $R$  de una componente  $U$  de  $R^{-1}(V)$  sobre  $V$  en lugar del mapeo  $R$  de  $U$  sobre  $V$ , donde  $U$  y  $V$  son dominios cualesquiera en  $\hat{\mathbb{C}}$ , pues, en el primer caso

$$\partial V = R(\partial U)$$

Nuestro objetivo es ahora relacionar las características de Euler de dominios  $U$  y  $V$  como arriba. Claramente, dicha relación dependerá de los puntos que no tienen vecindades donde el mapeo  $R$  sea inyectivo, es decir, los puntos críticos de  $R$ ; así, utilizaremos el concepto de valencia  $\nu_R(z)$  definido anteriormente.

**Definición.-** Para cualquier conjunto  $A$ , definimos la *deficiencia total de  $R$  sobre  $A$* , en símbolos  $\delta_R(A)$ , como

$$\delta_R(A) = \sum_{z \in A} (\nu_R(z) - 1)$$

la cual es aditiva, es decir, para conjuntos  $A$  y  $B$  con intersección vacía tenemos

$$\delta_R(A \cup B) = \delta_R(A) + \delta_R(B).$$

**Ejemplo.-** Sea  $R(z) = \frac{1}{z^2-1}$ , entonces  $R'(z) = \frac{-2z}{(z^2-1)^2}$ . Así 0 es el único punto crítico en el disco unitario de donde

$$\begin{aligned}\delta_R(\Delta) &= v_R(0) - 1. \\ \delta_R(\hat{\mathbb{C}} - \Delta) &= v_R(\infty) - 1\end{aligned}$$

y

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{z^2-1} + 1}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{z^2(z^2-1)}$$

el cual existe, es finito y distinto de cero para  $k = 2$ . Así  $\delta_R(\Delta) = 2 - 1 = 1$ . Utilizando la relación de Riemann-Hurwitz tenemos que

$$\delta_R(\Delta) + \delta_R(\hat{\mathbb{C}} - \Delta) = 2 \operatorname{grad}(R) - 2 = 2$$

de aquí que  $v_R(\infty) = 2$  e  $\infty$  también resulta ser un punto crítico de  $R$ .  $\Delta$

**Teorema 2.15.-** Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

1.  $V$  es un dominio acotado por un número finito de curvas de Jordan ajenas dos a dos;
2.  $U$  es una componente de  $R^{-1}(V)$ ; y
3. No hay valores críticos de  $R$  en  $\partial V$ .

Entonces existe un entero  $m$  tal que  $R$  es una cubriente de grado  $m$  de  $U$  sobre  $V$  y



$$\chi(U) + \delta_R(U) = m\chi(V).$$

donde  $\chi(E)$  denota la característica de Euler de  $E$ .

**Demostración.**- Claramente  $U$  es una componente del complemento de  $R^{-1}(\partial V)$ . Para cada  $w \in V$  sea  $S(w)$  el número de soluciones (contando multiplicidades) de la ecuación  $R(z) = w$  en  $U$ .

**Afirmación.**- El mapeo  $S : V \rightarrow \mathbb{Z}$  es continuo.

Para cada punto  $\zeta_j \in U$  que cumpla  $R(\zeta_j) = w$  existe una vecindad  $N_j$  tal que  $R$  es una cubriente de grado  $k$  de  $N_j$  sobre  $R(N_j)$ , donde  $k$  es la valencia de  $R$  en  $\zeta_j$ . Tomamos ahora al conjunto compacto

$$E = \bar{U} - \bigcup_j N_j.$$

entonces el conjunto compacto  $R(E)$  está a una distancia positiva de  $w$ . Así, existe una vecindad abierta  $\mathcal{M}$  de  $w$  ajena a  $R(E)$ . Ahora, para cada punto  $w_1 \in \mathcal{M}$ , las soluciones de  $R(z) = w_1$  deben encontrarse en  $\bigcup_j N_j$  y así encontramos que  $S(w) = S(w_1)$  de donde la función  $S$  es constante sobre  $\mathcal{M}$  y, por lo tanto, continua en  $w$ . Así la afirmación resulta válida.

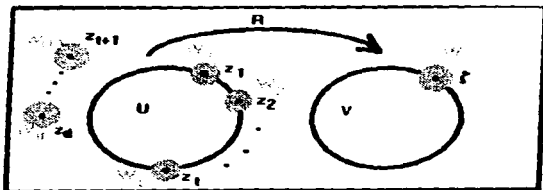
Como  $S$  es continua y su contradominio es  $\mathbb{Z}$ , entonces  $S$  resulta ser constante sobre todo  $V$  ya que  $V$  es conexo. Por tanto, para algún entero  $m$ ,  $R$  es una cubriente de grado  $m$  de  $U$  sobre  $V$ .

Extendemos ahora el resultado anterior al mapeo  $R$  de  $\partial U$  sobre  $\partial V$ ; así, sea  $\zeta \in \partial U$  y  $z_1, \dots, z_d$  las  $d$  preimágenes de  $\zeta$ , con  $d = \text{grad}(R)$ ; hay exactamente  $d$  tales puntos debido a la hipótesis (3).

Ya que ninguna de las  $z_j$  se encuentra en  $U$ , podemos suponer que  $z_1, \dots, z_t$  se encuentran en  $\partial U$ , mientras que  $z_{t+1}, \dots, z_d$  no se encuentran en  $\bar{U}$ .

Elijamos una vecindad  $W$  de  $\zeta$  y, para cada  $j$ , una vecindad  $W_j$  de  $z_j$  con las siguientes propiedades:

- $W_i \cap W_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ ;
- Para  $j \in \{t+1, \dots, d\}$ ,  $W_j \cap \bar{U} = \emptyset$ ;
- $R$  es un homeomorfismo de  $W_j$  sobre  $W$  (denotamos al inverso de éste como  $R_j^{-1}$ ); y
- $W \cap V$  es conexo.



Si  $j \in \{1, \dots, t\}$  entonces  $W_j$  intersecta a  $U$  y  $R$  mapea la intersección en  $W \cap V$ . De aquí que  $R_j^{-1}(W \cap V)$  es un subconjunto conexo de  $R^{-1}(V)$  que intersecta  $U$  y así se encuentra en  $U$ .

Tomando cualquier punto  $\alpha \in W \cap V$ , tenemos que para  $j \in \{1, \dots, t\}$ , el punto  $R_j^{-1}(\alpha)$  se encuentra en  $U$ , de donde  $t \leq m$ .

Por otro lado, para  $j \in \{t+1, \dots, d\}$ ,  $R_j^{-1}(\alpha) \notin U$ ; así que ya que  $m$  es el número de soluciones en  $U$ , se tiene que  $m \leq t$ . De las dos desigualdades obtenemos,  $m = t$ .

El siguiente paso es probar que  $\partial U$  es una unión finita de curvas de Jordan ajenas dos a dos, por (1),  $\partial U$  comprende un número finito de curvas de Jordan; tomamos  $\zeta$  en una de estas curvas, digamos  $\gamma$ , y encontramos las  $m$  distintas ramas  $R_1^{-1}, \dots, R_m^{-1}$  de  $R^{-1}$  definidas cerca de  $\zeta$  tales que  $R_j^{-1}(\zeta) = z_j \in \partial U$ . Ya que por (3) no hay valores críticos de  $R$  en  $\gamma$  tenemos que cada rama puede ser continuada analíticamente alrededor de  $\gamma$ , estas continuaciones llevan a curvas simples cerradas ( $R$  es inyectiva) en  $\partial U$ , y cada curva cubre  $k$  veces (para alguna  $k$ ) una curva en  $\partial U$ .

Finalmente necesitamos probar

$$\chi(U) + \delta_R(U) = m\chi(V),$$

en este sentido, triangulamos la cerradura de  $V$  asegurando que los valores críticos (un número finito) de  $R$  en  $V$  sean vértices de dicha triangulación  $T$ . Así  $T$  tiene  $f$  caras,  $e$  aristas y  $v$  vértices; por definición

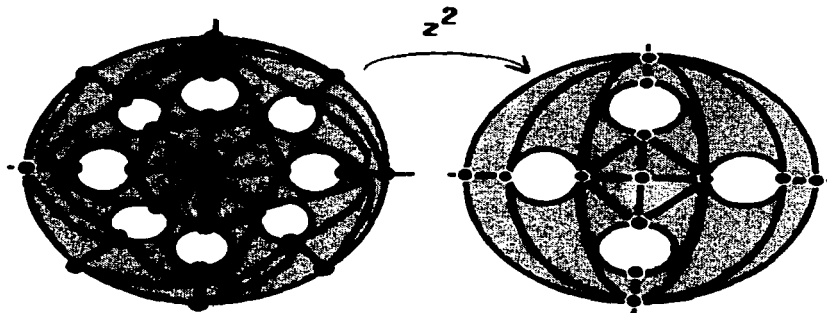
$$\chi(V) = f - e + v$$

Afirmamos que la cubriente de grado  $m$ ,  $R$  de  $U$  sobre  $V$  induce una triangulación  $T_0$  de la cerradura de  $U$  que se obtiene de la siguiente manera: los vértices de  $T_0$  son las imágenes inversas (en la cerradura de  $U$ ) de los vértices en  $T$ , así,  $T_0$  tiene precisamente  $m \cdot v - \delta_R(U)$  vértices. Cada arista de  $T$  se levanta bajo cada rama de  $R^{-1}$  a una arista de  $T_0$ , y como no hay valores críticos de  $R$  en cualquier arista de  $T$ , vemos que  $T_0$  tiene precisamente  $m \cdot e$  aristas. Ya que cada cara  $F$  de  $T$  es simplemente conexa, por el Teorema de Monodromía, cada rama de  $R^{-1}$  es simple-valuada en  $F$  y además mapea  $F$  sobre un subdominio simplemente conexo de  $U$ . Deducimos entonces que  $T_0$  tiene precisamente  $m \cdot f$  caras y, en este caso

$$\begin{aligned}\chi(U) &= m \cdot f - m \cdot e + (m \cdot v - \delta_R(U)) \\ &= m(f - e + v) - \delta_R(U)\end{aligned}$$

$$= m\chi(l^*) - \delta_R(L')$$

que es el resultado deseado.  $\diamond$



$$\begin{aligned} f &= 40 & \chi(U) + 1 &= m(-3) \\ e &= 72 & -7 + 1 &= 2(-3) \\ v &= 25 & -6 &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= 20 & \chi(V) &= -3 \\ e &= 36 & & \\ v &= 13 & & \end{aligned}$$

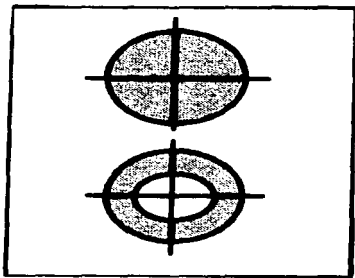
Desgraciadamente, no podemos aplicar el Teorema anterior a las componentes del conjunto de Fatou en general pues la frontera de la mayor parte de éstas no consiste de un número finito de curvas de Jordán; así, para un dominio cualquiera  $D$ , definamos su característica de Euler  $\chi(D)$  como el valor límite de las características de Euler de "subdominios suaves" que "llenan"  $D$ . Definiremos ahora lo que significa un "subdominio suave" de la siguiente manera:

**Definición.**— Sea  $D$  cualquier dominio de la esfera de Riemann. Un subdominio  $\Omega$  de  $D$  se

dice que es un *subdominio regular de  $D$*  si cumple:

1.  $\Omega$  está acotado por una unión finita de curvas de Jordan ajenas dos a dos, digamos  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ , todas encontrándose en  $D$ ; y
2. El complemento de  $\Omega$  consiste de  $n$  discos topológicos, digamos  $W_1, \dots, W_n$  (acotados por  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  respectivamente) y cada  $W_j$  interseca al complemento de  $D$ .

**Ejemplos.** -  $\Delta = \{z : |z| < 1\}$  es un subdominio regular de  $\mathbb{C}$ . Tomando  $D = \mathbb{C}$ , tenemos que el anillo  $\{z : 1 < |z| < 2\}$  no es un subdominio regular de  $\mathbb{C}$  pues  $\{z : |z| < 1\}$  no interseca a  $\infty \cdot \Delta$ .

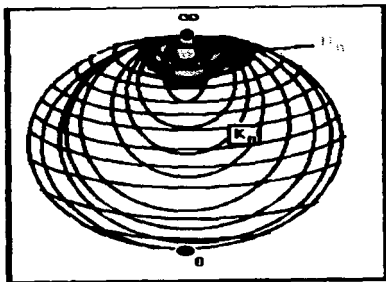


Claramente  $\chi(\Omega)$  está definida para cada subdominio regular  $\Omega$  de  $D$ .

**Lema 2.16.** - Sea  $D$  un subdominio propio de la esfera de Riemann, entonces

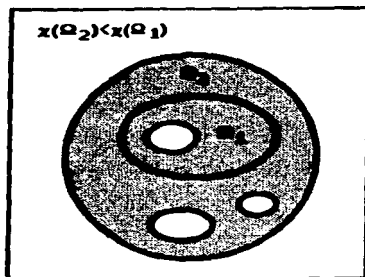
1. Cualquier subconjunto compacto de  $D$  se encuentra en algún subdominio regular de  $D$ ; y
2. Si  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  son subdominios regulares de  $D$ , entonces existe un subdominio regular  $\Omega$  de  $D$  que contiene  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ .

**Demostración.**- Sin pérdida de generalidad supondremos que  $\infty$  está en  $D$ . Sea  $n$  un entero positivo y cubramos el plano con una red cuadrada (incluyendo los ejes), cada cuadrado de diámetro  $\frac{1}{n}$ . Ahora, sea  $K_n$  la unión de aquellos cuadrados cerrados en la red que contienen algún punto del complemento de  $D$ , y sea  $D_n$  la componente del complemento de  $K_n$  que contenga a  $\infty$ . Entonces es fácil ver que  $D_n$  es una sucesión creciente de subdominios regulares de  $D$  cuya unión es  $D$ .



Así, dado cualquier subconjunto compacto  $K$  de  $D$ , la familia  $\{D_n\}$  es una cubierta abierta de  $K$  y por lo tanto, existe una subcubierta abierta finita. Como las  $D_n$  son crecientes con  $n$ , esta colección finita contiene un dominio más grande  $D_m$  y éste contiene a  $K$ , así hemos probado (1). (2) sigue de (1) pues si  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  son subdominios regulares, entonces la unión de sus cerraduras es un subconjunto compacto de  $D$  y, por (1), se encuentra en algún subdominio regular de  $D$ .  $\diamond$

**Lema 2.17.**- Si  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  son subdominios regulares de  $D$  tales que  $\Omega_1 \subset \Omega_2$  entonces  $\chi(\Omega_2) \leq \chi(\Omega_1)$ .



**Demostración.**- Sean  $W_1, \dots, W_n$  las componentes del complemento de  $\Omega_1$  y  $V_1, \dots, V_m$  las componentes del complemento de  $\Omega_2$ . Ya que  $\Omega_2 \subset \Omega_1$ , tenemos

$$V_1 \cup \dots \cup V_m \subset W_1 \cup \dots \cup W_n$$

para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$  escoja un punto  $z_j$  en  $W_j$ , pero no en  $D$ . Como  $z_j$  no está en  $D$ , se encuentra en alguna  $V_k$ , y así  $V_k$  (siendo conexa) se encuentra en  $W_j$ . Se sigue que cada  $W_j$  contiene alguna  $V_k$ , y así  $m \geq n$ . La desigualdad dada ahora sigue como

$$\chi(\Omega_2) = 2 - m \leq 2 - n = \chi(\Omega_1). \diamond$$

Podemos ahora definir  $\chi$  para cualquier subdominio  $D$  de  $\mathbb{C}$  de la siguiente manera:

**Definición.**- Para cualquier subdominio  $D$  de  $\mathbb{C}$  definimos la *característica de Euler* de  $D$ , en símbolos  $\chi(D)$  como

$$\chi(D) = \inf \{ \chi(\Omega) : \Omega \text{ es un subdominio regular de } D \}.$$

Ahora tenemos ya la herramienta necesaria para poder relacionar las características de Euler de cualquier dominio  $U$  y su imagen  $V$  bajo un mapeo. En particular, cuando  $U$  y  $V$  son componentes del conjunto de Fatou de un mapeo racional  $R$ . Esta relación se da en el siguiente

**Teorema 2.18.-** Sean  $F_0$  y  $F_1$  componentes del conjunto de Fatou de un mapeo racional y suponga que  $R$  mapea  $F_0$  en  $F_1$ . Entonces, para algún entero  $m$ ,  $R$  es una  $m$ -cubriente de grado  $m$  de  $F_0$  sobre  $F_1$  y

$$\chi(F_0) + \delta_R(F_0) = m\chi(F_1)$$

**Demostración.-** Ya que  $R(F_0) \subset F_1$ , entonces en realidad sucede que  $R(F_0) = F_1$ . Así,  $F_0$  es una componente de  $R^{-1}(F_1)$ . Como  $R$  es localmente una cubriente de grado  $k$  abierta, el número  $S(w)$  de soluciones de la ecuación  $R(z) = w$  en  $F_0$  es una función continua y, por lo tanto, constante de  $w$  en  $F_1$ ; así, para alguna  $m$ ,  $R$  es una cubriente de grado  $m$  de  $F_0$  sobre  $F_1$ .

Construiremos ahora dos subdominios regulares  $\Omega_0$  y  $\Omega_1$  de  $F_0$  y  $F_1$  respectivamente. Seleccionamos un punto  $w \in F_1$  y construimos una subregión regular  $\Omega_0$  de  $F_0$  que contiene

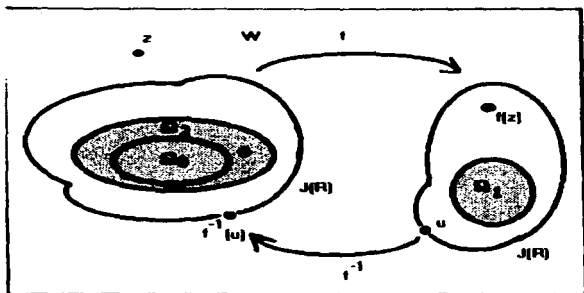
1. Todos los puntos críticos de  $R$  que se encuentran en  $F_0$ ; y
2. Todas las preimágenes  $z_1, \dots, z_m$  de  $w$  que se encuentran en  $F_0$ .

Seleccionamos ahora un subdominio regular  $\Omega_1$  de  $F_1$  que contiene al conjunto compacto  $R(\overline{\Omega_0})$ . Ahora cada una de las componentes de  $R^{-1}(\Omega_1)$  se encuentra en  $F(R)$  y es mapeada mediante  $R$  sobre  $\Omega_1$ . Además, una de dichas componentes, digamos  $\Omega_2$ , contiene al conjunto conexo  $\Omega_0$  que satisface (2), de aquí deducimos que  $\Omega_2$  es la única componente de  $R^{-1}(\Omega_1)$  que intersecta a  $F_0$ ; en otras palabras

$$\Omega_0 \subset \Omega_2 = R^{-1}(\Omega_1) \cap F_0 \subset F_0$$



Afirmamos que  $\Omega_2$  es una subregión regular de  $F_0$ , para verificar esto es suficiente mostrar que cada componente  $W$  del complemento de  $\overline{\Omega_2}$  intersecta  $J(R)$ . Ahora,  $W$  está acotada por alguna curva de Jordan  $\gamma$  (que separa  $W$  de  $\Omega_2$ ) así hay puntos en  $W$  (cercanos a  $\gamma$ ) que son mapeados en alguna componente  $B$  del complemento de  $\overline{\Omega_1}$ . Como  $R^{-1}(B)$  y  $\Omega_2$  son ajenos,  $W$  contiene alguna componente, digamos  $V$ , de  $R^{-1}(B)$ . Sin embargo, como  $\Omega_1$  es una subregión regular de  $F_1$ ,  $B$  contiene algún punto que no se encuentra en  $F_1$ , y así, algún punto de  $J(\overline{R})$ . Se sigue que  $V$ , y así  $W$ , intersectan  $J(\overline{R})$  de manera que  $\Omega_2$  es, en efecto, una subregión regular de  $F_0$ .



Así,  $\Omega_0 \subset \Omega_2 \subset F_0$  y, por lo tanto

$$\chi(\Omega_0) \geq \chi(\Omega_2) \geq \chi(F_0)$$

y de (1)

$$\delta_R(\Omega_0) = \delta_R(\Omega_2) = \delta_R(F_0).$$

Así, por el Teorema 2.15, tenemos

$$\chi(\Omega_0) + \delta_R(F_0) = m\chi(\Omega_1)$$

Dada cualquier  $\alpha$  con  $\alpha > \chi(F_0)$ , escogemos  $\Omega_0$  tal que  $\chi(\Omega_0) < \alpha$ ; entonces lo mismo sucede para  $\chi(\Omega_2)$ , así

$$\alpha + \delta_R(F_0) \geq m\chi(\Omega_1).$$

Para obtener la desigualdad opuesta, tome cualquier  $\Omega_0$ . Entonces por la igualdad  $\chi(\Omega_0) + \delta_R(F_0) = m\chi(\Omega_1)$  y haciendo caso omiso de la elección de  $\Omega_1$ , tenemos (ya que  $\chi(F_0) \leq \chi(\Omega_2)$ )

$$\chi(F_0) + \delta_R(F_0) \leq m\chi(\Omega_1).$$

Ahora, si  $\beta > \chi(F_1)$ , podemos siempre escoger  $\Omega_1$  en el argumento anterior de manera que  $\chi(\Omega_1) < \beta$ , y un argumento similar muestra que

$$\chi(F_0) + \delta_R(F_0) \leq m\chi(F_1).$$

Con lo cual ha quedado probado el Teorema.  $\diamond$

## Capítulo 3

# Periodicidad Eventual de las Componentes del Conjunto de Fatou: Teorema de Sullivan.

Definiremos ahora las posibles clases de componentes de Fatou de la siguiente manera:

**Definición.-** Sea  $\Omega$  una componente del conjunto de Fatou  $F(R)$ , entonces  $\Omega$  es

1. *periódica* si para algún entero positivo  $n$ ,  $R^n(\Omega) = \Omega$ .
2. *eventualmente periódica* si para algún entero positivo  $m$ ,  $R^m(\Omega)$  es periódica.
3. *errante* si los conjuntos  $R^n(\Omega)$ ,  $n \geq 0$  son ajenos dos a dos.

**Ejemplo.-** Sea  $f(x) = x^3 - 1$  y considérense a las componentes del conjunto de Fatou  $F_{-1}$  y  $F_{\sqrt{2}}$  que contienen a  $-1$  y  $\sqrt{2}$  respectivamente. Tenemos entonces que  $F_{-1}$  es periódica ya que  $f(F_{-1}) = F_0$  y  $f(F_0) = F_{-1}$ .  $F_{\sqrt{2}}$  es eventualmente periódica pues  $f(F_{\sqrt{2}}) = F_1$  la cual es periódica.  $\triangle$

En este Capítulo desarrollaremos la demostración del Teorema de Sullivan, es decir, la demostración del teorema que afirma que dada cualquier componente  $\Omega$  del conjunto de Fatou de un mapeo racional  $R$ , la sucesión  $\Omega, R(\Omega), R^2(\Omega), \dots, R^n(\Omega), \dots$ , es eventualmente periódica. De esta manera, para comprender la dinámica de un mapeo racional  $R$  sobre su conjunto de Fatou  $F$  debemos remitirnos a la acción de  $R$  sobre las componentes periódicas de  $F$ .

El Capítulo se encuentra dividido en dos secciones. En la primera desarrollaremos una serie de lemas auxiliares que nos permitirán alcanzar la demostración del Teorema de Sullivan de una manera gradual. A continuación daremos una visión general acerca de cómo se conectan dichos teoremas con el objeto de poder entender su utilidad de una manera más clara dentro de la prueba del Teorema de Sullivan.

En caso de que existiera un dominio errante para  $R$  el Lema 3.2 nos proporciona un dominio errante simplemente conexo  $W$ , así que basta probar que el Teorema de Sullivan ocurre para dominios de este tipo.

En los lemas siguientes se construye un mapeo del espacio de los coeficientes de Beltrami sobre el disco unitario  $\Delta$  al espacio de los mapeos racionales de grado  $grad(R)$  (ver Lema 3.6).

El siguiente paso es definir una serie de mapeos cuasiconformes distintos  $\Psi_T$  con dilataciones complejas  $\mu_T$  del disco unitario en sí mismo, donde  $T$  es un vector en el cubo  $[0, \epsilon_1]^N$  para algunas  $N$  y  $\epsilon_1$ . El Lema 3.9 afirma que existe toda una curva en dicho cubo cuyas dilataciones complejas son todas enviadas a un único mapeo racional mediante el mapeo mencionado en el párrafo anterior, es decir para toda  $t \in [0, 1]$ ,  $\varphi_t R \varphi_t^{-1} = S$ .

Definiendo los mapeos  $\Phi_t = \varphi_0^{-1} \varphi_t$  encontramos que para toda  $t \in [0, 1]$   $\Phi_t$  es el mapeo identidad sobre el conjunto de Julia de  $R$  y mapea cada una de las componentes del conjunto de Fatou de  $R$  sobre sí misma. Así  $\varphi_t(W) = W_0$  es independiente de  $t$  y es conformemente equivalente al disco unitario  $\Delta$  (con  $h$  el mapeo conforme).

En la segunda sección daremos finalmente la demostración del Teorema de Sullivan. Dado un mapeo conforme  $g$  de  $\Delta$  sobre  $W$ , el mapeo  $g^{-1}\Phi_t g$  de  $\Delta$  sobre sí mismo se extiende a la identidad en  $\partial\Delta$  por el Lema 3.8.

Definido los mapeos  $\psi_t = h\varphi_t g$  tenemos, utilizando que  $\Phi_t$  es la identidad sobre  $\partial\Delta$  que  $\psi_0 = \psi_t$ . Como los mapeos  $\Psi_t$  y  $\psi_t$  tienen la misma dilatación compleja, tenemos que  $M_t\Psi_t = M_0\Psi_0$  donde  $M_t$  y  $M_0$  son transformaciones de Möbius; sin embargo  $\Psi_t = \Psi_0$  sobre algún arco abierto por construcción, de aquí que  $M_t = M_0$  y, por lo tanto,  $\Psi_t = \Psi_0$  lo cual resulta ser la contradicción que demuestra que no pueden existir componentes errantes del conjunto de Fatou de un mapeo racional.

### 3.1 Lemas Auxiliares.

Para poder demostrar el Teorema de Sullivan, necesitaremos algunos lemas: El primer Lema afirma que cualquier subconjunto compacto de un dominio errante se "hace pequeño" al iterar el mapeo  $R$  sobre dicho subconjunto, es decir:

**Lema 3.1.-** Supongamos que  $W$  es un dominio errante. Entonces para todo subconjunto compacto  $K$  de  $W$ ,  $\text{diam}\{R^n(K)\} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**Observación.-**  $\text{diam}\{E\}$  denota el diámetro de un conjunto  $E$  con respecto a la métrica esférica.

**Demostración.-** Por contradicción. Supongamos que la afirmación del Lema no ocurre, entonces existe un subconjunto compacto  $K$  de  $W$ , alguna  $\epsilon > 0$  y alguna sucesión  $n_j$  de enteros tales que, para cada  $j = 1, 2, \dots$ ,

$$\text{diam}\{R^{n_j}(K)\} \geq \epsilon \tag{3.1}$$

Ya que  $W \subset F(R)$  tenemos que la familia  $\{R^n\}$  es normal en  $W$ , así existe una subsección de  $R^n$  que converge uniformemente en  $W$  de manera local a alguna función analítica  $g$ : por simplicidad, denotaremos a dicha sucesión  $R^{n_j}$ .

Para poder afirmar que existe un punto  $z \in W$  donde  $g'(z) \neq 0$ , probaremos que  $g$  no es un mapeo constante. Si  $g$  fuera constante, digamos  $g(z) = \alpha$ , para toda  $z \in W$ , entonces  $R^{n_j}$  converge uniformemente a  $\alpha$  en  $K$  y así, para alguna  $j_0$ , se tiene que  $R^{n_j}(K)$  se encuentra en una vecindad de  $\alpha$  de radio  $\frac{\epsilon}{3}$ , para  $j \geq j_0$ . Esto último contradice (3.1). De aquí que  $R^{n_j}$  converge uniformemente a una función  $g$  no constante sobre subconjuntos compactos de  $W$ .

Tomando un punto  $\zeta \in W$  con  $g'(\zeta) \neq 0$ , sea  $C$  un pequeño círculo con centro  $\zeta$  que se encuentre, junto con su interior  $D$ , en  $W$  y tal que  $g(z) \neq g(\zeta)$  cuando  $z$  está en  $C$ . Entonces por la convergencia uniforme para  $j \geq j_0$  tenemos

$$|R^{n_j}(z) - g(z)| < \inf_{w \in C} |g(w) - g(\zeta)| < |g(z) - g(\zeta)|$$

sobre  $C$  y así, por el Teorema de Rouché,  $R^{n_j}(D)$  contiene al punto  $g(\zeta)$ . Esto contradice el hecho de que  $W$  es un dominio errante.  $\diamond$

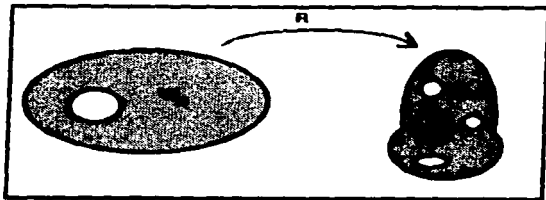
**Lema 3.2.-** Supongamos que  $R$  tiene un dominio errante  $\Omega$ . Entonces, para alguna componente  $W$  de  $F(R)$ , las componentes  $W, R(W), R^2(W), \dots, R^n(W), \dots$ , de  $F(R)$  son ajenas dos a dos, simplemente conexas y no contienen puntos críticos de  $R$ . En particular, cada una es mapeada por  $R$  homeomórficamente sobre la siguiente.

**Demostración.-** En primer lugar, obtendremos una componente  $W$  del conjunto de Fatou que sea un dominio errante de tal manera que la sucesión de dominios  $W, R(W), R^2(W), \dots, R^n(W), \dots$ , no contenga ningún punto crítico de  $R$ . Esto se puede obtener fácilmente al observar que el conjunto de puntos críticos de  $R$  es finito y, ya que las componentes de la sucesión son

ajenas dos a dos por ser  $W$  un dominio errante, para alguna  $N$  suficientemente grande y tomando  $W = R^N(\Omega)$ ,  $W_n = R^n(W)$ , tenemos que si cada  $W_j$  tiene puntos críticos de  $R$  y, claramente,  $W$  conserva la propiedad de  $\Omega$  de ser dominio errante. Así,  $\delta_R(W_n) = 0$  para toda  $n$  y, por lo tanto, usando el Teorema 2.18 obtenemos que

$$\chi(W_n) = m_n \chi(W_{n+1}) \quad (3.2)$$

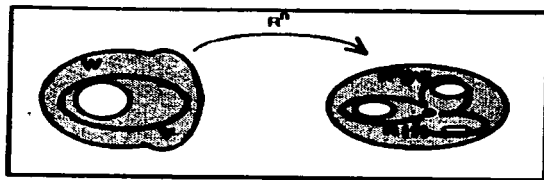
donde  $R$  es una cubierta de grado  $m_n$  de  $W_n$  sobre  $W_{n+1}$ .



Probaremos ahora que  $W$  es simplemente conexo. Esta demostración la haremos por contradicción, de manera que supongamos que  $W$  no es simplemente conexo, en este caso sabemos que debe existir una curva cerrada simple  $\gamma$  en  $W$  que no es homotópicamente trivial en  $W$ , y definimos  $\gamma_n = R^n(\gamma)$ . Ahora

$$R^n : W \rightarrow R^n(W)$$

es un mapeo cubriente no ramificado y, por lo tanto,  $\gamma_n$  no es homotópicamente trivial en  $R^n(W)$  pues, en otro caso, el Teorema de Monodromía nos permitiría levantar la deformación de  $\gamma_n$  en un punto de  $R^n(W)$  a una deformación de  $\gamma$  en un punto de  $W$ .



Por el Teorema 2.6, existe una  $\delta$  tal que para cualquier  $\gamma$  con  $\text{diam}[\gamma] < \delta$ , se cumple que la imagen  $R(\Omega)$  de cualquier componente interior  $\Omega$  de  $\gamma$  no interseca al exterior  $e(R(\gamma))$  de  $R(\gamma)$ . Utilizando el Lema anterior (con  $K = \gamma$ ) tenemos que existe  $m$  tal que para toda  $n \geq m$

$$\text{diam}[\gamma_n] \leq \delta.$$

Así, si  $n \geq m$  entonces  $R$  mapea a la unión de  $\gamma_n$  y sus componentes interiores en la unión de  $\gamma_{n+1}$  y sus componentes interiores. De esta manera la familia  $\{\gamma_n : n \geq 1\}$  es normal en cada componente interior de  $\gamma_m$  y así todas estas componentes se encuentran en  $F(R)$ . Tenemos además que la unión de  $\gamma_m$  y todas sus componentes interiores forma un subconjunto compacto y conexo de  $F(R)$  cuyo complemento es simplemente conexo. Así  $\gamma_m$  es homotópica a un punto en  $F(R)$  y, por lo tanto en  $W_m$ , esto contradice nuestra observación anterior. De este modo tenemos que  $W$  es simplemente conexo.

Supongamos ahora que  $W_k$  es simplemente conexo, por (3.2) tenemos que

$$1 = m_n \chi(W_{k+1})$$

de aquí deducimos que  $\chi(W_{k+1}) = 1$ , es decir,  $W_{k+1}$  es simplemente conexo y  $m_n = 1$ , así,  $R$  es inyectiva y, por lo tanto, es un homeomorfismo, con lo cual el Teorema ha quedado demostrado.  $\diamond$



Retomemos ahora las ideas vertidas en el Capítulo 1 acerca de los Mapeos Cuasiconformes en donde nuestro objetivo fue demostrar el Teorema del Mapeo de Riemann Modible, el cual nos proporciona la existencia de un mapeo cuasiconforme con una dilatación  $\mu$  dada previamente y garantiza un cierto tipo de unicidad, al afirmar que si  $\varphi$  y  $\psi$  son dos soluciones de la Ecuación de Beltrami para una cierta  $\mu$ , entonces  $\varphi \circ \psi^{-1}$  resulta ser un mapeo conforme.

Así, podemos pensar que cada  $\mu$  en  $D$  crea una superficie de Riemann que consta de un dominio  $D$  y la estructura conforme en  $D$  generada por  $\mu$  y definida por el atlas  $A(\mu)$  formado por la familia de todos los mapeos (cartas)  $\varphi : D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  que son cuasiconformes y satisfacen la Ecuación de Beltrami con dilatación compleja  $\mu$  en  $D$ . De esta manera, por la existencia proporcionada en el Teorema del Mapeo de Riemann Modible, tenemos que todo punto  $z$  de  $D$  se encuentra en el dominio de alguna  $\varphi$  tal, y la unicidad garantiza que el mapeo transición entre dos cartas coordinadas diferentes es conforme.

Denotaremos a la superficie de Riemann definida en el párrafo anterior como  $D[\mu]$ , y llamaremos a la estructura, *la estructura  $\mu$ -conforme en  $D$* . En caso de que  $\mu \equiv 0$ , usaremos  $D$  en lugar de  $D[0]$  para denotar a  $D$  con la estructura usual.

Daremos ahora algunas definiciones:

**Definición.-** Sea  $D[\mu]$  una superficie de Riemann, diremos que el mapeo

$$f : D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

es  $\mu$ -analítico en  $D$  si es un mapeo analítico entre las superficies de Riemann  $D[\mu]$  y  $\hat{\mathbb{C}}$  (con la estructura usual).

**Definición.-** Sea  $f$  un mapeo  $\mu$ -analítico, entonces  $f$  es  $\mu$ -conforme en  $D$  si  $f$  es un homeomorfismo.

**Ejemplo.-** El mapeo  $f(z) = z + \frac{1}{3}z^3$  es  $\frac{1}{3}$ -analítico y, por ser un homeomorfismo resulta ser  $\frac{1}{3}$ -conforme en  $\hat{\mathbb{C}}$ .

Trivialmente se desprende de las definiciones anteriores el siguiente Lema:

**Lema 3.3.-** Sea  $\varphi$  un homeomorfismo de  $D$  en  $\hat{\mathbb{C}}$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $\varphi$  es  $\mu$ -conforme en  $D$ ;
2.  $\varphi$  es una carta para  $D[\mu]$ ;
3.  $\varphi : D[\mu] \rightarrow \hat{\mathbb{C}}[0]$  es analítica.

Desamos ahora formular la transferencia de una estructura conforme de un dominio a otro en términos de dilataciones complejas. Supongamos que  $g$  es una biyección de una superficie de Riemann  $X$  sobre un conjunto  $Y$ , entonces podemos utilizar  $g$  para transferir la estructura conforme de  $X$  a  $Y$  de manera única y tal que  $g : X \rightarrow Y$  sea analítica. En términos de coeficientes de Beltrami tenemos:

**Lema 3.4.-** Sean  $\mu$  y  $\nu$  coeficientes de Beltrami en los dominios  $U$  y  $V$  respectivamente y supongamos que  $g$  es un mapeo analítico de  $U$  sobre  $V$ . Entonces, son equivalentes:

1.  $g : U[\mu] \rightarrow V[\nu]$  es analítica; y
2.  $\nu(g(z)) = \left[ \frac{g'(z)}{g'(z_0)} \right] \mu(z)$  casi dondequiera en  $U$ .

**Demostración.-** Sea  $\psi$   $\nu$ -conforme en  $V$ , entonces la Regla de la Cadena para derivadas parciales (que existe casi dondequiera) lleva directamente al hecho de que la dilatación compleja de la composición  $\psi \circ g$  es  $\mu_1$ , donde

$$\mu_1(x) = \left[ \frac{g'(x)}{g'(z)} \right] \nu(g(x)).$$

esto es claro al recordar que

$$\nu(g(x)) = \frac{g_x}{g'_x} \cdot \left( \frac{\mu_1(x) - \mu_g(x)}{1 - \mu_1(x)\mu_g(x)} \right) = \frac{g'(x)}{g'(z)} \cdot \mu_1(x)$$

donde la última igualdad se obtiene del hecho de que  $\mu_g \equiv 0$  casi dondequiera por ser  $g$  analítica.

Así, si (1) ocurre entonces el mapeo compuesto

$$\psi \circ g : U[\mu] \rightarrow V[\nu] \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}[0]$$

es analítico y así,  $\mu$ -conforme en una vecindad de cada  $z \in U$  excepto en un conjunto de puntos aislados. Deducimos que  $\mu = \mu_1$  casi dondequiera en  $U$  y esto es (2).

Si (2) sucede entonces ya que  $\psi$  es  $\nu$ -conforme en  $V$ ,  $\psi \circ g$  es  $\mu$ -conforme en una vecindad de cada  $z \in U$  excepto en un conjunto  $\{x_j\}$  de puntos aislados. Se sigue que  $\nu \circ g$  es analítica en el complemento de  $\{x_j\}$  y así, (como  $g$  es continua en  $U$ ) en  $U$  mismo.  $\diamond$

Este último Lema nos será útil para poder transferir la estructura conforme en dos formas diferentes:

- Tomando  $g$  como un homeomorfismo analítico de  $U$  sobre  $V$  y  $\mu$  un coeficiente de dilatación dado previamente sobre  $U$ , entonces podemos definir  $\nu$  en  $V$  utilizando (2) y, por lo tanto ocurrirá (1) del Lema anterior; es decir, hemos trasladado la estructura de  $U$  a  $V$ .
- Si  $g$  no es inyectiva, el procedimiento anterior puede no ser válido; sin embargo, si además  $\nu$  está dada, podemos definir  $\mu$  utilizando (2) y así nuevamente ocurrirá (1) del Lema anterior, es decir, hemos transferido la estructura de  $V$  sobre  $U$ .

La utilidad de los mapas cuasiconformes para nuestro estudio radica en que al coajugar el mapeo racional  $R$  con un mapeo cuasiconforme  $\varphi$  con dilatación compleja  $\mu$  (es decir,  $\mu$ -conforme), obtenemos un mapeo  $R' = \varphi R \varphi^{-1}$  el cual, en ciertos casos que el siguiente Lema nos permitirá reconocer, resulta ser también un mapeo racional que además hereda propiedades importantes del mapeo racional original  $R$ .

**Lema 3.5.-** Supongamos que  $R$  es un mapeo racional y que  $\varphi$  es un mapeo  $\mu$ -conforme de la esfera de Riemann sobre sí misma. Entonces el mapeo  $\varphi R \varphi^{-1}$  es racional si y sólo si

$$\mu(R(z)) = \left[ \frac{R'(z)}{R'(z)} \right] \mu(z) \quad (3.3)$$

en cualquier punto  $z$  y cuando esto es así,  $\text{grad}(\varphi R \varphi^{-1}) = \text{grad}(R)$ .

**Demostración.-** La condición (3.3) es equivalente a que  $R : \widehat{\mathbb{C}}[\mu] \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}[\mu]$  sea analítica debido a la equivalencia dada por el Lema anterior. Ya que  $\varphi$  es una carta de la superficie de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}[\mu]$  entonces  $R : \widehat{\mathbb{C}}[\mu] \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}[\mu]$  es analítica si y sólo si  $\varphi R \varphi^{-1}$  es un mapeo analítico de la esfera de Riemann sobre sí misma con la estructura usual y, por lo tanto, racional.

Además  $\text{grad}(\varphi R \varphi^{-1}) = \text{grad}(R)$  ya que  $\varphi$  es un homeomorfismo de la esfera de Riemann sobre sí misma y el grado de  $\varphi R \varphi^{-1}$  está dado por la cardinalidad de  $(\varphi R \varphi^{-1})^{-1}\{w\}$  para la mayoría de los puntos  $w$ .  $\diamond$

**Lema 3.6.-** Sea  $R$  un mapeo racional y supongamos que  $W$  cumple que las componentes  $W, R(W), R^2(W), \dots, R^n(W), \dots$ , de  $F(R)$  son ajenas dos a dos, simplemente conexas y no contienen puntos críticos de  $R$ . Entonces cualquier coeficiente de Beltrami  $\mu$  en  $W$  se extiende a un coeficiente de Beltrami en la esfera de Riemann con la propiedad de que si  $\varphi$  es algún mapeo  $\mu$ -conforme de la esfera de Riemann sobre sí misma, entonces  $\varphi R \varphi^{-1}$  es un mapeo racional con el mismo grado que  $R$ .

**Demostración.**- Sea  $\mu$  un coeficiente de Beltrami en  $W$ . Ya que la esfera de Riemann es la unión de los conjuntos completamente invariantes  $[W] = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n(W)$  y su complemento  $K$ , extendéremos  $\mu$  de manera independiente a  $K$  y a  $[W]$ . Definimos así  $\mu \equiv 0$  sobre  $K$ , de donde es claro que (3.3) se satisface ahí.

Ya que el mapeo

$$R : W_n[\mu] \rightarrow W_{n+1}[\mu]$$

es analítico, con  $W_n = R^n(W)$ , por el mismo argumento que en el Lema anterior, tenemos que podemos extender  $\mu$  a  $[W]$ , esta extensión está bien definida puesto que los conjuntos  $W_n$  son ajenos dos a dos.

Así para cualquier componente  $\Omega$  de  $[W]$  el mapeo

$$R : \Omega[\mu] \rightarrow R(\Omega)[\mu]$$

es analítico. Por lo tanto, por el Lema 3.4, la relación (3.3) sucede casi dondequiera en  $[W]$ .  $\diamond$

Nuestro objetivo ahora es comparar los valores en la frontera de dos funciones conjugadas una a otra mediante un mapeo conforme. Así, dado un coeficiente de Beltrami  $\mu$  sobre el disco unitario  $\Delta$  y  $g$  un mapeo conforme de  $\Delta$  sobre un dominio simplemente conexo  $W$  en  $\mathbb{C}$  ( $g$  existe en virtud del Teorema del Mapeo de Riemann), podemos utilizar  $g$  para transferir  $\mu$  a un coeficiente de Beltrami  $\nu$  en  $W$ .

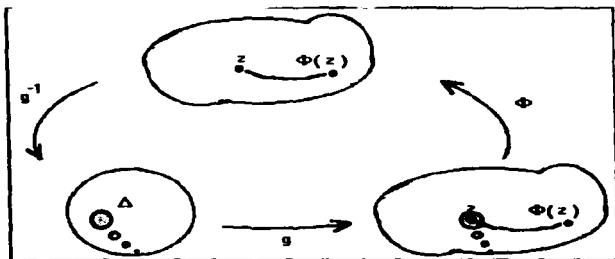
Supongamos que  $\Phi$  es un mapeo  $\mu$ -conforme de  $W$  sobre sí mismo y que  $\Phi$  se extiende a un homeomorfismo de la cerradura de  $W$  sobre sí misma, de manera que sobre la frontera de  $W$ ,  $\Phi$  es el mapeo identidad, entonces el mapeo

$$\varphi = g^{-1} \Phi g$$

es un mapeo  $\mu$ -conforme de  $\Delta$  sobre sí mismo y por lo tanto se puede extender a un homeomorfismo del disco cerrado sobre sí mismo (Ahlfors p.p. 47). Nos interesa ahora conocer el comportamiento de  $\varphi$  en  $\partial\Delta$ . Como en la definición de  $\varphi$  se utiliza el mapeo conforme  $g$ , entonces utilizaremos como herramienta a la función desplazamiento

$$z \rightarrow \rho(\Phi(z), z)$$

donde  $\rho$  es la métrica hiperbólica de  $\Omega$ , la cual existe utilizando el Teorema del Mapeo de Riemann a menos que  $\Omega$  sea conformemente equivalente a  $\mathbb{C}$  ó  $\bar{\mathbb{C}}$ . De esta manera, la propiedad de tener un desplazamiento acotado es invariante bajo conjugación por  $g$  ( $g$  es una isometría), tenemos entonces que  $\Phi$  tiene un desplazamiento acotado en  $W$  si y sólo si  $\varphi$  tiene un desplazamiento acotado en  $\Delta$ . De aquí que  $\varphi = I$  sobre  $\partial\Delta$  ya que  $\varphi(z)$  se encuentra en el disco hiperbólico  $\Delta(z, d)$  con centro  $z$  y algún radio fijo  $d$ , y cuando  $z$  converge a alguna  $\zeta$  sobre  $\partial\Delta$ , el radio euclidiano de  $\Delta(z, d)$  tiende a cero.



Queremos ahora un criterio para que  $\Phi$  tenga una función de desplazamiento acotado en  $W$ , y supondremos que  $\nu$  es un coeficiente de Beltrami en la esfera de Riemann y que  $\Phi$  es un mapeo  $\nu$ -conforme de la esfera de Riemann sobre sí misma. Podemos de aquí obtener un criterio

para que  $\Phi$  tenga una función de desplazamiento acotado con respecto a la métrica cordal en la esfera y convertirlo en un criterio para que  $\Phi$  tenga un desplazamiento hiperbólico acotado en  $W$ . El siguiente Lema nos proporciona el mencionado criterio para la métrica cordal ( $\sigma_0$ ):

**Lema 3.7.-** Para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si el coeficiente de Beltrami  $\nu$  en  $\hat{C}$  satisface  $\|\nu\| < \delta$  entonces  $\sigma_0(F(z), z) < \epsilon$  en  $\hat{C}$  para toda función  $F$  que es un mapeo  $\nu$ -conforme de  $\hat{C}$  sobre sí mismo que fija 0, 1 e  $\infty$ .

**Demostración.-** Supongamos que no ocurre, entonces existe un  $\epsilon > 0$ , una sucesión  $\{F_n\}$  de mapeos  $\nu_n$  conformes y una sucesión  $\{z_n\}$  con las siguientes características:

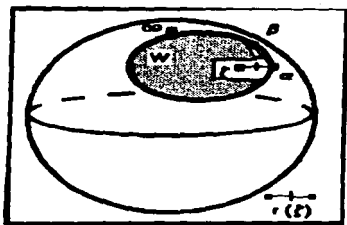
1.  $F_n$  fija 0, 1 e  $\infty$ ;
2.  $\|\nu_n\| < \frac{1}{n}$ ; y
3.  $\sigma_0(F_n(z_n), z_n) \geq \epsilon$ .

(1) y (2) implican que  $F_n \rightarrow I$  uniformemente en  $\hat{C}$  y esto contradice a (3).  $\diamond$

**Lema 3.8.-** Sea  $\rho$  la métrica hiperbólica en un subdominio simplemente conexo  $W$  de  $\hat{C}$ . Sean  $\epsilon_0 = \frac{1}{2}$  y  $\delta_0$  el valor de  $\delta$  correspondiente a  $\epsilon_0$  en el Lema anterior; si el coeficiente de Beltrami  $\nu$  en  $\hat{C}$  satisface  $\|\nu\| < \delta_0$ , entonces  $\rho(\Phi(z), z) < \log 2$  en  $W$  para toda función  $\Phi$  que es un mapeo  $\nu$ -conforme de  $\hat{C}$  sobre sí mismo y que satisface  $\Phi(W) = W$  y  $\Phi = I$  en  $\partial W$ .

**Demostración.-** Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\infty \in \partial W$  ya que el enunciado del Lema es invariante bajo conjugación por un mapeo de Möbius. Tómese  $W, \rho, \nu$  y  $\Phi$  de manera que satisfagan las hipótesis del Lema con  $\|\nu\| < \delta_0$ .

Sea  $\zeta$  en  $W$ , y denotemos mediante  $r(\zeta)$  a la distancia euclídana entre  $\zeta$  y  $\partial W$ ; suponga que ésta es alcanzada en el punto  $\alpha$  en  $\partial W$ ; entonces existe un punto  $\beta$  también en  $\partial W$  tal que  $|\zeta - \alpha| = |\beta - \alpha| = r(\zeta)$  debido al hecho de que tanto  $\alpha$  como  $\infty$  se encuentran en  $\partial W$ .



Definimos entonces a la función  $F$  como

$$F = h\Phi h^{-1}$$

donde  $h$  es la similitud euclidiana

$$h(z) = \frac{z - \alpha}{z - \beta}$$

Claramente,  $F$  es un mapeo  $\nu$ -conforme de  $\hat{\mathbb{C}}$  sobre sí mismo y además puesto que  $h^{-1}(z) = (\beta - \alpha)z + \alpha$  entonces

$$h^{-1}(0) = \alpha \in \partial W$$

$$h^{-1}(1) = \beta \in \partial W$$

$$h^{-1}(\infty) = \infty \in \partial W$$

y por lo tanto, teniendo en cuenta que  $\Phi = I$  en  $\partial W$ ,

$$F(0) = h\Phi h^{-1}(0) = h(\alpha) = 0$$



$$\begin{aligned}
 F(1) &= h\Phi h^{-1}(1) = h(\beta) = 1 \\
 F(\infty) &= h\Phi h^{-1}(\infty) = h(\infty) = \infty
 \end{aligned}$$

es decir,  $F$  fija  $0, 1$  e  $\infty$ ; por el Lema anterior  $\sigma_0(F(z), z) < \frac{1}{8}$  sobre  $\bar{C}$ . Haciendo  $z = h(\zeta)$ , obtenemos

$$\sigma_0(h(\Phi(\zeta)), h(\zeta)) < \frac{1}{8} < \sigma_0(1, 2)$$

y como  $|h(\zeta)| = 1$  esto implica que  $|h(\Phi(\zeta))| \leq 2$ , y, por lo tanto

$$2|h(\Phi(\zeta)) - h(\zeta)| = \sigma_0(h(\Phi(\zeta)), h(\zeta)) \left[ (1 + |h(\Phi(\zeta))|^2)(1 + |h(\zeta)|^2) \right]^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2}$$

De aquí que

$$2 \left| \frac{\Phi(\zeta) - \alpha}{\beta - \alpha} - \frac{\zeta - \alpha}{\beta - \alpha} \right| = 2 \left| \frac{\Phi(\zeta) - \zeta}{\beta - \alpha} \right| < \frac{1}{2}$$

y, por lo tanto

$$|\Phi(\zeta) - \zeta| < \frac{r(\zeta)}{4}$$

Observemos que el disco  $\{z : |z - \zeta| < r(\zeta)\}$  se encuentra en  $W$ , así si  $\rho_0$  denota la métrica hiperbólica de este disco entonces por el Principio de Comparación para la métrica hiperbólica

$$\rho(\Phi(\zeta), \zeta) \leq \rho_0(\Phi(\zeta), \zeta) \leq \log \left( \frac{1 + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \right) \leq \log 2$$

como era deseado.  $\diamond$

Durante este Capítulo hemos construido el siguiente mapeo compuesto

$$\mu \rightarrow \nu \rightarrow \varphi \rightarrow \varphi R \varphi^{-1} \tag{3.4}$$

del espacio de los coeficientes de Beltrami en  $\Delta$  al espacio de mapeos racionales de grado

$grad(R)$  de la siguiente manera:

Suponiendo que  $R$  tiene un dominio errante, por el Lema 3.2 existe una componente  $W$  de  $F(R)$  con las propiedades expresadas en dicho Lema. Ya que  $W$  es simplemente conexo y  $J$  infinito, existe por el Teorema del Mapeo de Riemann una equivalencia conforme  $g$  de  $\Delta$  sobre  $W$ . Si  $\mu$  es un coeficiente de Beltrami en  $\Delta$ , lo transferimos a través de  $g$  en un coeficiente de Beltrami  $\nu$  en  $W$  (Lema 3.4). Dicho coeficiente  $\nu$  será extendido utilizando el Lema 3.6 a todo  $\hat{\mathbb{C}}$ ; resolviendo la Ecuación de Beltrami con coeficiente  $\nu$  a través de la esfera de Riemann obtendremos un mapeo  $\nu$ -conforme  $\varphi$  de la esfera sobre sí misma que cumple que  $\varphi R \varphi^{-1}$  es racional del mismo grado que  $R$  (Lema 3.6). Combinando  $\varphi$  con un mapeo de Möbius podemos suponer que  $\varphi$  fija 0, 1 e  $\infty$  y, así, está únicamente determinado a partir de  $\mu$ .

Tomemos ahora un entero  $N$  satisfaciendo  $N > 4d+2$  (el espacio de los mapeos racionales de grado  $d$ ,  $d = grad(R)$ , teniendo  $4d+2$  grados reales de libertad). Para cada vector  $T$  en el cubo  $[0, \epsilon_1]^N$  (donde  $\epsilon_1$  es un número pequeño todavía a ser escogido) construiremos un coeficiente de Beltrami  $\mu_T$  en  $\Delta$  y un mapeo  $\mu_T$ -conforme  $\Psi_T$  de  $\Delta$  sobre sí mismo.

Divida el intervalo  $[0, 2\pi]$  en  $2N$  arcos iguales y consecutivos  $\sigma_1, \tau_1, \sigma_2, \tau_2, \dots, \sigma_N, \tau_N$  y para cada uno de los arcos  $\sigma_j$  construimos una función  $C^\infty$   $w_j$  sobre  $[0, 2\pi]$  tal que

1.  $w_j(x) > 0$  en el interior de  $\sigma_j$ , mientras que  $w_j(x) = 0$  en otro caso; y
2.  $|w_j'(x)| < \frac{1}{2}$  para toda  $x$  y  $j$ .

Defina el mapeo

$$\Psi_T(z) = z \exp \left[ i \sum_{j=1}^N t_j w_j(\theta) \right]$$

donde  $z = r \exp(i\theta)$ , de  $\Delta$  sobre sí mismo, y que  $\mu_T$  el coeficiente de Beltrami en  $\Delta$  sea la dilatación compleja de  $\Psi_T$ .

Dicha dilatación compleja  $\mu_T$  la podemos calcular en términos de las derivadas parciales:  $\frac{\partial \Psi_T}{\partial x}$  y  $\frac{\partial \Psi_T}{\partial y}$ , así

$$\mu_T(re^{i\theta}) = \frac{e^{2i\theta} \sum_{j=1}^N t_j u_j'(\theta)}{2 + \sum_{j=1}^N t_j u_j'(\theta)} \quad (3.5)$$

y así, para toda  $T$ ,

$$|\mu_T(re^{i\theta})| \leq \frac{\sum_{j=1}^N |t_j u_j'(\theta)|}{2 - \sum_{j=1}^N |t_j u_j'(\theta)|} \leq \frac{Ne_1}{2 - Ne_1}.$$

**Observaciones:**

- (a) Si  $\arg(z)$  se encuentra en alguno de los intervalos  $\tau_j$ , entonces  $\Psi_T(z) = z$ .
- (b) Valores distintos de  $T$  llevan a funciones distintas  $\Psi_T$ .
- (c) Dado cualquier  $\eta$ ,  $\|\mu_T\|_\infty < \eta$  si  $\epsilon_1$  es suficientemente pequeño.

**Lema 3.9.-** Supongamos que  $\eta_0 > 0$ , entonces para cada  $t \in [0, 1]$  existe un coeficiente de Beltrami  $\mu_t$  en  $\Delta$  tal que

1.  $\|\mu_t\| < \eta_0$ ; y
2. La composición (3.4) mapea cada  $\mu_t$  a la misma función racional  $S$ .

Además la construcción de los  $\mu_t$  se puede realizar de manera que para cada  $z$ , el mapeo  $t \rightarrow \varphi_t(z)$  sea continuo sobre  $[0, 1]$ ; donde  $\varphi_t$  es el mapeo que cumple

$$\mu_t \circ \nu_t \circ \varphi_t$$

en la composición (3.4).

**Demostración.-** Dado el coeficiente de Beltrami  $\mu_T$ , sea la composición

$$T \rightarrow \mu_T \rightarrow \nu_T \rightarrow \varphi_T \rightarrow R_T = \varphi_T R \varphi_T^{-1}. \quad (3.6)$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad, conjugando por un mapeo de Möbius adecuado, que  $R$  es tal que

- a)  $R$  tiene a  $a_1, \dots, a_d$  en  $\mathbb{C}$  como ceros distintos.
- b)  $R$  tiene a  $b_1, \dots, b_d$  en  $\mathbb{C}$  como polos distintos.
- c)  $R(0) = 1$ .

Ya que  $\varphi_T$  en (3.6) fija 0, 1 e  $\infty$ , tenemos que  $R_T$  es la única función racional con ceros  $\varphi_T(a_j)$ , polos  $\varphi_T(b_j)$ , y con  $R_T(0) = 1$  y así, nosotros sólo tenemos que mostrar que el mapeo

$$\pi(T) = (\varphi_T(a_1), \dots, \varphi_T(a_d), \varphi_T(b_1), \dots, \varphi_T(b_d))$$

de  $(0, \epsilon_1)^N$  en  $\mathbb{C}^{2d}$  es constante sobre alguna curva. Ya que el mapeo  $T \rightarrow \mu_T(z)$  es  $C^\infty$ , lo mismo es verdadero para  $T \rightarrow \nu_T(z)$  (Ahlfors y Bers), y así, cada uno de los mapeos

$$t \rightarrow \varphi_T(a_j) \quad t \rightarrow \varphi_T(b_j)$$

es  $C^\infty$ . Concluimos que  $\pi$  es un mapeo  $C^\infty$  del cubo abierto  $C = (0, \epsilon_1)^N$  en  $\mathbb{C}^{2d}$ .

El conjunto de puntos donde el rango de  $\pi'$  es maximal, digamos  $k$ , es un subconjunto abierto  $C_0$  de  $C$  (pues el rango de  $\pi'$  es semicontinuo por arriba) y así, la restricción de  $\pi$  a  $C_0$  es un mapeo de rango constante. Por el Teorema de la Función Implícita, la imagen inversa de un punto es una subvariedad de  $C_0$  de dimensión  $N - k > 0$  y, por lo tanto, existe alguna curva en  $C_0$  en la cual  $\pi$  es constante.  $\diamond$

Como consecuencia del Lema anterior tenemos que para toda  $t \in [0, 1]$

$$\varphi_t R \varphi_t^{-1} = S = \varphi_0 R \varphi_0^{-1}$$

así, si tomamos

$$\Phi_t = \varphi_0^{-1} \varphi_t$$

obtenemos que

1.  $\Phi_0(z) = z$  sobre  $\bar{C}$ .
2. Para cada  $t$ , el mapeo  $z \rightarrow \Phi_t(z)$  conmuta con  $R$ .
3. Para cada  $t$ , el mapeo  $z \rightarrow \Phi_t(z)$  es un homeomorfismo de  $\bar{C}$  sobre sí mismo.
4. Para cada  $z$ , el mapeo  $t \rightarrow \Phi_t(z)$  es continuo sobre  $[0, 1]$ .

**Lema 3.10.-** Para cada  $t \in [0, 1]$ ,  $\Phi_t = I$  sobre  $J(R)$ . Además,  $\Phi_t$  mapea cada componente del conjunto  $F(R)$  sobre sí misma.

**Demostración.-** Para  $p = 1, 2, \dots$ , sea  $F_p$  el conjunto de los puntos fijos de  $R^p$ . Si  $z$  está en  $F_p$ , entonces también lo está  $\Phi_t(z)$  por (2); así  $\Phi_t$  mapea cada conjunto finito  $F_p$  en sí mismo. Por la propiedad (4), para cada  $z \in F_p$ , el mapeo  $t \rightarrow \Phi_t(z)$  es un mapeo continuo de  $[0, 1]$  en el conjunto discreto  $F_p$ . De donde  $\varphi_t(z)$  es independiente de  $t$  y, por la propiedad (1), para toda  $t \in [0, 1]$  y toda  $z \in F_p$ ,  $\Phi_t(z) = z$ . De aquí que para cada  $t$ ,  $\Phi_t$  es el mapeo identidad sobre la unión de las  $F_p$ , y así, por (3), también sobre la cerradura de esta unión; dicha cerradura contiene a  $J$  y, de esta manera, la restricción de  $\Phi_t$  a  $J$  es la identidad.

Cada  $\Phi_t$  debe permutar a las componentes de  $F(R)$  pues  $\Phi_t$  es un homeomorfismo de la esfera compleja sobre sí misma. Sea  $F_0$  alguna componente de  $F(R)$  y  $z$  un punto en  $F_0$ . Por la propiedades (1) y (4), la imagen de  $[0, 1]$  bajo el mapeo  $t \rightarrow \Phi_t(z)$  es una curva que se encuentra completamente en  $F_0$ , y así para cada  $t$ ,  $\Phi_t$  debe mapear la componente arbitraria  $F_0$  en ella misma. Con lo cual ha quedado demostrado el Lema.  $\diamond$

### 3.2 El Teorema de Sullivan.

**Teorema de Sullivan.**- Toda componente del Conjunto de Fatou es eventualmente periódica.

**Demostración.**-  $\Phi_t$  mapea cada componente  $F_0$  de  $F(R)$  sobre sí misma, los homeomorfismos  $\varphi_t$  deben mapear  $W$  sobre el dominio simplemente conexo  $W_0 = \varphi_0(W)$ , es decir,  $W_0$  es independiente del valor de  $t \in [0, 1]$ . Así hay una equivalencia conforme  $h$  de  $W_0$  sobre  $\Delta$ .

Por el Lema 3.6 se tiene que el coeficiente de Beltrami  $\mu$  en  $\Delta$  y su extensión a  $\mu$  en  $\hat{C}$  tienen la misma norma  $L^\infty$  y, por el Lema 3.4 tenemos que  $\|\mu\|_\infty = \|\nu\|_\infty$ . Por (1) del Lema 3.9  $\|\nu_t\|_\infty < \eta_0$ , donde  $\mu_t$  es mapeada a  $\nu_t$  en (3.4). Si tomamos  $\eta_0$  lo suficientemente pequeño, podemos asegurar que la dilatación compleja de  $\Phi_t = \varphi_0^{-1}\varphi_t$  tiene norma  $L^\infty$  menor que  $\delta_0$ . Por el Lema 3.8 concluimos que el mapeo  $g^{-1}\Phi_t g$  de  $\Delta$  sobre sí mismo (donde  $g$  es el mapeo conforme de  $\Delta$  sobre  $W$  que se usó para transferir  $\mu_t$  a  $W$ ) tiene una función de desplazamiento acotado y, por lo tanto, se extiende a la identidad en  $\partial\Delta$ .

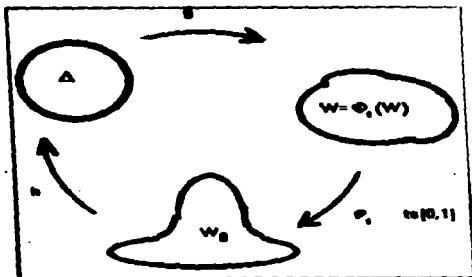
Ya que cada uno de los mapeos es la composición:

$$\Delta \xrightarrow{[\mu_t]} W \xrightarrow{\varphi_t} W_0 \xrightarrow{h} \Delta \{0\}$$

es analítico, obtenemos que  $\psi_t = h\varphi_t g$  es un mapeo  $\mu_t$ -conforme de  $\Delta$  sobre sí mismo y por lo tanto se extiende a un homeomorfismo del disco cerrado sobre sí mismo. Además, en el disco abierto

$$\psi_0^{-1}\psi_t = g^{-1}\Phi_t g,$$

de donde  $\psi_0^{-1}\psi_t = I$  sobre  $\partial\Delta$  y, por lo tanto  $\psi_0 = \psi_t$ .



Ahora, sea  $\psi_t$  algún mapeo  $\mu_t$ -conforme de  $\Delta$  sobre sí mismo. Por la unicidad del Teorema del Mapeo de Riemann Modifiable existe un automorfismo de Möbius  $M_t$  de  $\Delta$  tal que  $\psi_t = M_t \psi_0$ , de donde

$$M_t \psi_t = M_0 \psi_0$$

sobre  $\partial\Delta$ . Sin embargo los mapeos que construimos cumplían  $\psi_t = \psi_0$  sobre algún arco abierto de  $\partial\Delta$  de donde  $M_t = M_0$  y así  $\psi_t = \psi_0$  contradiciendo el hecho de que valores distintos de  $t$  son enviados a mapeos distintos  $\psi_t$ . Así hemos probado el Teorema de Sallivas.  $\diamond$

## Bibliografía

- [Ahl] Ahlfors Lars; *Lectures on Quasiconformal Mappings*. Woodsworth & Brooks. 1987.
- [Bea] Beardon Alan; *Iteration of Rational Functions*. Graduate Texts in Mathematics vol. 132. Springer Verlag. 1991.
- [Car] Carleson Lennart, Gamelin Theodore; *Complex Dynamics*. Springer Verlag. 1993.
- [DeM] De Melo Wellington, van Strien Sebastian; *One-Dimensional Dynamics*. Springer Verlag. 1993.
- [Dev1] Devaney Robert; *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, segunda edición. Addison-Wesley. 1989.
- [Dev2] Devaney Robert (Ed.); *Complex Dynamical Systems. The Mathematics Behind the Mandelbrot and Julia Sets*. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics vol. 49. American Mathematical Society. 1994.
- [For] Forster Alan; *Lectures on Riemann Surfaces*. Springer Verlag. 1990.
- [Kru] Krushkal Samuil; *Quasiconformal Mappings and Riemann Surfaces*. John Wiley & Sons. 1979.
- [Leh] Lehto Olli, Virtanen; *Quasiconformal Mappings in the Plane*. Springer Verlag. 1973.
- [Mar] Marsden Jerrold, Hoffman Michael; *Basic Complex Analysis*, segunda edición. Freeman. 1987.