



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**LA EVOLUCION DE LA ONDA INTERNA EN LA
ECUACION DE BENJAMIN-ONO VIA LAS LEYES
DE CONSERVACION.**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A :
GILBERTO FLORES REYNA

DIRECTOR DE TESIS: DRA. MARIA DEL CARMEN JORGE Y JORGE.



1997

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrin Basile
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
La evolución de la onda interna en la ecuación de Benjamin-Ono vía las leyes de conservación

realizado por Gilberto Flores Reyna

con número de cuenta 8852866-7, pasante de la carrera de Matemático.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

Dra. María del Carmen Jorge y Jorge

Propietario

Dr. Antonmaria Minzoni Alessio

Propietario

Dr. Gustavo Cruz Pacheco

Suplente

Dr. José Julio Emilio Herrera Velázquez

Suplente

Dr. Pablo Padilla Longoria

Consejo Departamental de Matemáticas

Dr. Marcel Falconi Magaña

**La evolución de la onda interna
en la ecuación de Benjamin-Ono
vía las leyes de conservación**

Gilberto Flores Reyna

Contenido

Prefacio	i
1 La ecuación de Korteweg-de Vries y la ecuación de Benjamin-Ono	1
1.1 Introducción	1
1.2 La relación de dispersión para una onda interna en un fluido estratificado de profundidad finita	2
1.3 Límite cuando la capa superior crece infinitamente y límite cuando decrece a cero	11
1.4 La ecuación de Benjamin-Ono y la ecuación de Korteweg-de Vries	17
2 La evolución de la onda interna y la radiación desprendida por ella	23
2.1 Introducción	23
2.2 La solución exacta	27
2.3 Las leyes de conservación	30
2.4 El sistema de ecuaciones de los parámetros sin masa y momento de la radiación	33
2.5 La masa de la radiación	43
2.6 El sistema de ecuaciones de los parámetros considerando la masa y el momento de la radiación	46
2.7 La consistencia del sistema y su integrabilidad	52
Conclusiones	67
Apéndice A	68
Apéndice B	71
Apéndice C	73
Referencias	79

Prefacio

En nuestro planeta existen sistemas, tales como la atmósfera y el fondo del océano, formados por diferentes estratos en profundidades muy grandes. Las ondas que se forman en el interior de ellos tienen una gran similitud con los fenómenos que se presentan en las ondas formadas en la superficie de los fluidos. En general las ecuaciones que las describen tienen términos no lineales y términos de dispersión.

Al estudiar la ecuación más simple para una onda no lineal

$$u_t + cuu_x = 0, \quad u = u(x, t), \quad c = \text{constante},$$

descubrimos que en algunos casos, dependiendo de la condición inicial, la solución puede llegar a ser multivaluada en alguna parte de su dominio. En su correlación con el mundo físico, vemos que este fenómeno matemático corresponde al movimiento de las ondas de agua que, como las olas, llegan a un cierto punto en donde comienzan a envolverse en sí mismas, atenuarse y luego desaparecer. Pero no todas las ondas de agua presentan este comportamiento.

Las soluciones de ecuaciones del tipo

$$u_t + cuu_x + \mathcal{L}(u) = 0,$$

donde $\mathcal{L}(u)$ representa un término de dispersión, no evolucionan en funciones multivaluada. Esto se debe a que el balance entre la no linealidad y la dispersión impide que la solución se vuelva multivaluada trayendo como consecuencia una atenuación de la onda de una forma diferente. A este respecto, un fenómeno singular mostrado ya en experimentos físicos y numéricos es aquél que produce la onda al avanzar e ir desprendiendo tras sí una cola de ondas de amplitudes más pequeñas de manera que a tiempos suficientemente grandes se obtiene un tren de ondas completamente estable. Cada una de estas pequeñas ondas se conocen como solitones y aquélla parte de la onda que no evoluciona en solitón se conoce como radiación.

El propósito de este trabajo es tratar de estudiar este último fenómeno para las ondas que se generan en el interior de los fluidos estratificados de profundidad infinitamente

grande. La ecuación de Benjamin-Ono es la que describe la evolución de este tipo de ondas. Esta ecuación fue establecida por primera vez por H. Ono en 1975. A partir de ecuaciones como la conservación de masa, la ecuación de Bernoulli y las ecuaciones de los fluidos que provienen de las leyes de Newton, Ono dedujo la ecuación para ondas en fluidos estratificados de gran profundidad perturbando un estado base. A manera de introducción en el Capítulo 1 deduciremos esta ecuación e ilustraremos la relación que ella tiene con la ecuación de Korteweg-de Vries, que es una de las más conocidas ecuaciones no lineales y la que describe la evolución de las ondas sobre la superficie de los fluidos. La deducción de la ecuación de Benjamin-Ono y la ecuación de Korteweg-de Vries la haremos a partir de la relación de dispersión de una onda en fluidos de profundidad finita y por medio de un operador de dispersión.

En el Capítulo 2 estudiaremos la evolución de la onda interna del fluido. La principal dificultad en el análisis de la evolución de este tipo de ondas consiste en modelar la formación de solitones detrás del pulso inicial. W. L. Kath y N. F. Smyth utilizaron las leyes de conservación de masa y de momento para conocer la evolución de las soluciones de la ecuación de Korteweg-de Vries. Nosotros utilizaremos esas ideas para conocer cómo evoluciona la onda interna en los fluidos estratificados de gran profundidad. El punto central consiste en introducir parámetros adecuados cuya evolución en el tiempo nos permitan estudiar la evolución de la onda. La conservación de cantidades como la masa total y el momento total nos proporcionarán una plataforma a partir de la cual podremos estudiar la formación de solitones detrás del pulso inicial. El análisis lo haremos de una forma gradual considerando primero el pulso inicial y después el pulso inicial y la radiación desprendida.

Para la realización de esta tesis he contado con la ayuda de varias personas que con sus críticas y sus sugerencias me han ayudado a mejorarla. Por supuesto, todo error que ésta pueda contener es sólo responsabilidad mía. Agradezco enormemente a los doctores María del Carmen Jorge, Gustavo Cruz, Antonmaría Minzoni y Pablo Padilla del Departamento de Matemáticas y Mecánica del Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y Sistemas, UNAM, y al doctor Julio Herrera del Departamento de Física y Matemáticas Aplicadas del Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM, su tiempo en la revisión de este trabajo y sus valiosas sugerencias para mejorarlo. En particular a la doctora Jorge por haberme asesorado en el desarrollo del mismo. También deseo agradecer al doctor Noel F. Smyth de la Universidad de Edimburgo por ayudarme a entender el caso KdV, a Fundación UNAM por la beca otorgada dentro del Programa de Becas para Tesis de Licenciatura en Proyectos de Investigación (diciembre de 1995 a febrero de 1997) y al Departamento de Matemáticas y Mecánica por las facilidades que me ha otorgado.

Cd. Universitaria,
Agosto de 1997.

G. F. R.

Capítulo 1

La Ecuación de Korteweg-de Vries y la Ecuación de Benjamin-Ono

1.1 Introducción

Una gran parte del avance en el conocimiento de la propagación de ondas no lineales y dispersivas se debe al estudio de las ondas de agua y sobre todo a la ecuación de movimiento de las ondas superficiales de aguas poco profundas, conocida como la ecuación de Korteweg-de Vries (Ecuación KdV):

$$u_t + \alpha uu_x + \delta u_{xxx} = 0.$$

Esta ecuación ha sido ampliamente estudiada y ha señalado nuevos caminos en las matemáticas e impulsado el desarrollo de otros tantos. Una muestra de esto es el impulso que el descubrimiento de los solitones y el desarrollo del método de dispersión inversa le han dado a las matemáticas y a algunas áreas de la física. Por su riqueza y su simplicidad esta ecuación se ha establecido como una de las más conocidas ecuaciones de ondas no lineales.

Algunas de las relaciones entre KdV y otras ecuaciones se evidencian, sobre todo, por el contexto físico en el que las ondas surgen. A este respecto en este capítulo mostraremos la estrecha relación que existe entre la ecuación KdV y la ecuación de Benjamin-Ono a través de su origen físico y de la relación de dispersión, que en muchos casos define los diversos tipos de onda.

La relación de dispersión es uno de los conceptos básicos en el estudio de la propagación de las ondas, pues vincula de una forma muy simple las variables intrínsecas de una onda, como son el número de onda y la frecuencia, con las variables físicas relevantes del medio como son, por ejemplo, la densidad y la viscosidad.

En contraste con KdV que gobierna el movimiento de las ondas superficiales, la

ecuación de Benjamin-Ono (Ecuación BO):

$$u_t + \alpha u u_x + \frac{3}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(y)}{y-x} dy = 0.$$

gobierna el movimiento de ondas internas en fluidos estratificados de gran profundidad. A las ondas internas se les llama así porque se forman en el interior de los fluidos estratificados y no en su superficie.

La deducción de la ecuación KdV se atribuye a Diederik Johannes Korteweg y a Gustav de Vries [1895], aunque actualmente se sabe que ya se encontraba en algunos artículos anteriores a 1895 que habían sido publicados por Joseph Valentin Boussinesq [Miles, 1981]. Por otra parte, las ondas internas en fluidos estratificados fueron estudiadas extensamente por Brooke Benjamin durante muchos años obteniendo la forma exacta de las ondas internas aún sin conocer su ecuación de movimiento [Benjamin, 1967], la cual fue encontrada por Hiroaki Ono en 1973 [Ono, 1973].

La ecuación KdV tiene importantes aplicaciones en física y es posible que la ecuación BO tenga algunas aplicaciones en los estudios acerca del océano y de la atmósfera terrestre. En este capítulo pretendemos deducir ambas ecuaciones a partir de la relación de dispersión dentro del contexto de los fluidos estratificados.

1.2 La relación de dispersión para una onda interna en un fluido estratificado de profundidad finita

Como ocurre siempre en los estudios de problemas físicos, comenzaremos estudiando un movimiento idealizado dentro de un contexto físico idealizado. Así, estudiaremos sólo bidimensionalmente el movimiento de una onda que se propaga en la dirección del eje x dentro de un fluido estratificado verticalmente por dos fluidos irrotacionales, inmiscibles, incompresibles y de densidad ρ , que tomaremos como

$$\rho(y) = \begin{cases} \rho_1 & \text{en } -h_1 < y \leq \eta \\ \rho_2 & \text{en } \eta \leq y < h_2 \end{cases},$$

donde ρ_1 y ρ_2 son constantes positivas; $\eta = \eta(x, t)$ es la elevación de la superficie de la onda respecto a la línea de estabilidad $y = 0$ al tiempo t sobre el punto x .

Con objeto de que las oscilaciones de la onda ocurran en el fluido de la capa inferior vamos a suponer que las dos densidades ρ_1 y ρ_2 son tales que

$$\rho_1 > \rho_2.$$

Además vamos a suponer que los dos fluidos están confinados en un canal cuyas únicas fronteras son los planos rígidos horizontales $y = -h_1$ y $y = h_2$, donde h_1 y h_2 son

constantes positivas, tal como se muestra en la figura 1. Así las variables espaciales están dentro del dominio:

$$\begin{aligned} -\infty < x < \infty \\ -h_1 < y < h_2. \end{aligned}$$



Figura 1: h_1 y h_2 finitos.

Para obtener la relación de dispersión de una onda interna comenzamos observando que al suponer que el fluido es irrotacional en una región simplemente conexa se deduce que existe un potencial de velocidades $\phi = \phi(x, y, t)$. Esto es existe ϕ tal que

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (1.1)$$

donde u es la componente horizontal de la velocidad \vec{V} del fluido y v es la componente vertical de la misma.

Por otra parte, de la segunda ley de Newton tenemos que la fuerza por unidad de volumen es

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} \quad (1.2)$$

donde \vec{F} es la densidad de fuerza. La fuerza está compuesta por la suma del gradiente de la presión hidrostática y el gradiente de la fuerza gravitacional:

$$\vec{F} = -\nabla(P(x, y)) - \nabla(g\rho y) \quad (1.3)$$

donde $\nabla(f)$ denota el gradiente de la función f para las variables espaciales. Sustituyendo (1.3) en (1.2)

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla(P + g\rho y).$$

Entonces

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = -\nabla(P + gpy), \quad (1.4)$$

donde $d\vec{V}/dt$ tiene componentes

$$(u_1, v_1) = (\partial u / \partial t + \vec{V} \cdot \nabla u, \partial v / \partial t + \vec{V} \cdot \nabla v).$$

De la fórmula

$$\nabla(F \cdot G) = (F \cdot \nabla)G + (G \cdot \nabla)F + F \times \text{rot}(G) + G \times \text{rot}(F),$$

donde $\text{rot}(G)$ es el rotacional de la función G , obtenemos

$$\nabla(\vec{V} \cdot \vec{V}) = 2(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} + 2\vec{V} \times \text{rot}(\vec{V}).$$

Como el fluido es irrotacional entonces $\text{rot}(\vec{V}) = 0$ por tanto

$$(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = \frac{1}{2}\nabla(\vec{V} \cdot \vec{V}). \quad (1.5)$$

Sustituyendo (1.5) en (1.4) obtenemos

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(\vec{V} \cdot \vec{V}) \right) + \nabla(P + gpy) = 0.$$

Como $\vec{V} = -\nabla(\phi)$ entonces

$$\rho \left(-\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}\nabla(u^2 + v^2) \right) + \nabla(P + gpy) = 0.$$

Por tanto

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{P}{\rho} + gy = \text{Constante}$$

Involucrando la constante con la función ϕ obtenemos

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{P}{\rho} + gy = 0. \quad (1.6)$$

que es conocida como la **fórmula de Bernoulli** para el flujo de un fluido en dos dimensiones.

En nuestro problema supondremos que los movimientos del fluido son muy pequeños de modo que podemos despreciar los cuadrados de las componentes de la velocidad. Así (1.6) puede ser reducido a

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + gy = 0. \quad (1.7)$$

Por otra lado como el fluido conserva su masa en todo tiempo entonces la densidad ρ y la velocidad $\vec{V} = (u, v)$ satisfacen la ecuación de continuidad para un fluido compresible

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

donde $\text{div}(\rho \vec{V})$ denota la divergencia en las variables espaciales de la función $\rho \vec{V}$. Esta ecuación se obtiene estudiando el cambio en el tiempo de la masa de una unidad de volumen [por ejemplo véase Rahman, p. 17 y sigs.].

Ya que la densidad ρ es constante la ecuación de continuidad se reduce a

$$\text{div}(\vec{V}) = 0$$

y de aquí que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Entonces, usando (1.1), vemos que ϕ satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \quad (1.8)$$

Como las fronteras del fluido son rígidas, entonces v es nula sobre las mismas de modo que ϕ satisface las condiciones de Neumann en la frontera:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad y = -h_1 \quad \text{y} \quad y = h_2. \quad (1.9)$$

Ahora trataremos de establecer las condiciones del potencial en la interfase.

Definimos como ϕ_1 al potencial de velocidad en la capa inferior y como ϕ_2 al potencial en la capa superior. Esto es,

$$\phi(x, y, t) = \begin{cases} \phi_1(x, y, t) & \text{en} \quad -h_1 < y \leq \eta \\ \phi_2(x, y, t) & \text{en} \quad \eta \leq y < h_2 \end{cases}. \quad (1.10)$$

Como ϕ es continua en $y = \eta$ por eso tomamos $\phi_1 = \phi_2$ en la interfase.

Puesto que la presión hidrostática es continua en la superficie de la onda entonces de (1.7) tenemos que

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - g y_1 \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} - g y_2 \right)$$

donde $-h_1 < y_1 < \eta$ y $\eta < y_2 < h_2$, o equivalentemente

$$g(\rho_2 y_2 - \rho_1 y_1) = \rho_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t}. \quad (1.11)$$

Tomando el límite cuando y tiende a η obtenemos

$$g(\rho_2 - \rho_1)\eta = (\rho_2 - \rho_1) \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{y=\eta} \quad (1.12)$$

es decir

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{y=\eta} \quad (1.13)$$

Establezcamos entonces una condición de frontera libre tomando $y = 0$ para ϕ en la ecuación (1.13):

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{y=0} \quad (1.14)$$

Por otra parte, definimos ζ como

$$\zeta(t, x, y) = \eta(t, x) - y.$$

En la interfase $y = \eta$ tendremos que

$$\zeta(t, x, y) = 0.$$

Luego

$$\frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

Por la regla de la cadena

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0.$$

Como $u = dx/dt$ y $v = dy/dt$ entonces

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0$$

por tanto

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} - v = 0.$$

En términos del potencial de velocidades

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0. \quad (1.15)$$

Linealizando

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

Tomando $y = 0$ en la función ϕ tenemos una segunda condición en la interfase:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (1.16)$$

En resumen, tenemos la ecuación de Laplace para el potencial de velocidades

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.8)$$

con condiciones en la frontera

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad y = -h_1 \quad \text{y} \quad y = h_2 \quad (1.9)$$

y condiciones en la interfase

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{y=0} \quad (1.14)$$

y

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (1.16)$$

Enseguida trataremos de encontrar la forma del potencial de velocidades y ella nos ayudará a encontrar la forma de la velocidad de fase, es decir, de la relación de dispersión.

Por tratarse de una propagación de onda, la forma de ϕ es la de una función armónica en x y en t . De aquí que podemos tomar ϕ con la forma de un modo normal:

$$\phi(x, y, t) = Q(y) \mathbf{e}^{i(kx - \omega t)} \quad (1.17)$$

donde k representa el número de onda y ω representa la frecuencia de la onda.

De la ecuación (1.8) se deduce que Q satisface

$$Q'' - k^2 Q = 0.$$

La solución general de esta ecuación es

$$Q(y) = A \cosh(ky) + B \sinh(ky) \quad (1.18)$$

donde A y B son constantes.

De las condiciones de frontera (1.9) se tiene que

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = Q'(y) \mathbf{e}^{i(kx - \omega t)} = 0$$

en $y = -h_1$ y en $y = h_2$. Por tanto en esos valores de y se tiene que

$$Q'(y) = 0.$$

Luego por (1.18) se tiene

$$kA \operatorname{senh}(ky) + kB \cosh(ky) = 0$$

en $y = -h_1$ y $y = h_2$.

Para $y = -h_1$ tenemos

$$-kA \operatorname{senh}(kh_1) + kB \cosh(kh_1) = 0.$$

Definimos D_1 como

$$D_1 = B \cosh(kh_1) = A \operatorname{senh}(kh_1)$$

de modo que

$$A = \frac{D_1}{\operatorname{senh}(kh_1)} \quad \text{y} \quad B = \frac{D_1}{\cosh(kh_1)}.$$

Sustituyéndolos en (1.18) se tiene

$$\begin{aligned} Q(y) &= \frac{D_1}{\operatorname{senh}(kh_1)} \cosh(ky) + \frac{D_1}{\cosh(kh_1)} \operatorname{senh}(ky) \\ &= \frac{D_1}{\operatorname{senh}(kh_1) \cosh(kh_1)} [\cosh(ky) \cosh(kh_1) + \operatorname{senh}(ky) \operatorname{senh}(kh_1)] \\ &= \frac{D_1}{\operatorname{senh}(kh_1) \cosh(kh_1)} \cosh k(y + h_1) \end{aligned}$$

por tanto para la capa inferior nos queda

$$Q(y) = A_1 \cosh k(y + h_1) \tag{1.19}$$

donde

$$A_1 = \frac{D_1}{\operatorname{senh}(kh_1) \cosh(kh_1)}.$$

Análogamente para la capa superior se obtiene

$$Q(y) = A_2 \cosh k(y - h_2) \tag{1.20}$$

donde

$$A_2 = -\frac{D_2}{\operatorname{senh}(kh_2) \cosh(kh_2)}$$

y

$$D_2 = B \cosh(kh_2) = -A \operatorname{senh}(kh_2).$$

Sustituyendo (1.19) y (1.20) en (1.17)

$$\phi(x, y, t) = \begin{cases} \phi_1 = A_1 \cosh k(y + h_1) \mathcal{E}^i(kx - wt), & -h_1 < y \leq \eta \\ \phi_2 = A_2 \cosh k(y - h_2) \mathcal{E}^i(kx - wt), & \eta \leq y < h_2 \end{cases} \tag{1.21}$$

donde el dominio de y es tomado de acuerdo a (1.10). Usando (1.21) de (1.14) tenemos que

$$\eta = \lim_{y \rightarrow 0} \begin{cases} -\frac{1}{g} i\omega A_1 \cosh k(y + h_1) \mathcal{E}^{i(kx - wt)}, & -h_1 < y \leq \eta \\ -\frac{1}{g} i\omega A_2 \cosh k(y - h_2) \mathcal{E}^{i(kx - wt)}, & \eta \leq y < h_2 \end{cases}$$

Tomando el límite cuando $y \rightarrow 0$ se obtiene

$$\eta = \begin{cases} -\frac{1}{g} i\omega A_1 \cosh(kh_1) \mathcal{E}^{i(kx - wt)}, & -h_1 < y \leq 0 \\ -\frac{1}{g} i\omega A_2 \cosh(kh_2) \mathcal{E}^{i(kx - wt)}, & 0 \leq y < h_2 \end{cases} \quad (1.22)$$

Como en la superficie $y = \eta$ las dos soluciones en (1.22) deben coincidir, entonces podemos definir a la constante a como

$$a = \frac{1}{g} i\omega A_1 \cosh(kh_1) = \frac{1}{g} i\omega A_2 \cosh(kh_2).$$

Esto nos permite reescribir η de una forma más simple como

$$\eta = -a \mathcal{E}^{i(kx - wt)}. \quad (1.23)$$

Por otra parte, sustituyendo (1.23) en (1.16) se obtiene

$$i\omega a \mathcal{E}^{i(kx - wt)} = -\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=0}.$$

Usando los valores de ϕ mostrados en (1.21) se obtiene

$$i\omega a \mathcal{E}^{i(kx - wt)} = -\lim_{y \rightarrow 0} \begin{cases} kA_1 \sinh k(y + h_1) \mathcal{E}^{i(kx - wt)}, & h_1 < y \leq \eta \\ kA_2 \sinh k(y - h_2) \mathcal{E}^{i(kx - wt)}, & \eta \leq y < h_2. \end{cases}$$

Tomando el límite cuando $y \rightarrow 0$ se obtiene

$$i\omega a \mathcal{E}^{i(kx - wt)} = \begin{cases} -kA_1 \sinh(kh_1) \mathcal{E}^{i(kx - wt)}, & h_1 < y \leq 0 \\ kA_2 \sinh(kh_2) \mathcal{E}^{i(kx - wt)}, & 0 \leq y < h_2. \end{cases}$$

Cancelando la exponencial se llega a

$$i\omega a = \begin{cases} -kA_1 \sinh(kh_1), & h_1 < y \leq 0 \\ kA_2 \sinh(kh_2), & 0 \leq y < h_2. \end{cases} \quad (1.24)$$

Una buena aproximación a la ecuación (1.12) es

$$g(\rho_2 - \rho_1)\eta = \left[\rho_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right]_{y=0}.$$

Usando (1.21) y (1.23)

$$-g(\rho_2 - \rho_1) \mathfrak{E}^i(kx - wt) = \left[-\rho_2 i\omega A_2 \cosh k(y - h_2) \mathfrak{E}^i(kx - wt) + \rho_1 i\omega A_1 \cosh k(y + h_1) \mathfrak{E}^i(kx - wt) \right]_{y=0}.$$

Cancelando la función exponencial y evaluando en $y = 0$ se obtiene

$$-ag(\rho_2 - \rho_1) = i\omega(-\rho_2 A_2 \cosh(kh_2) + \rho_1 A_1 \cosh(kh_1)),$$

es decir

$$ag(\rho_1 - \rho_2) = i\omega(\rho_1 A_1 \cosh(kh_1) - \rho_2 A_2 \cosh(kh_2)). \quad (1.25)$$

De (1.24) se sigue que, en $y = 0$,

$$-kA_1 \operatorname{senh}(kh_1) = kA_2 \operatorname{senh}(kh_2).$$

Entonces

$$A_2 = -\frac{A_1 \operatorname{senh}(kh_1)}{\operatorname{senh}(kh_2)}.$$

Sustituyéndolo en (1.25) se obtiene

$$ag(\rho_1 - \rho_2) = i\omega A_1 (\rho_1 \cosh(kh_1) + \rho_2 \operatorname{senh}(kh_1) \coth(kh_2)).$$

Multiplicando por $i\omega$ y dividiendo entre $\operatorname{senh}(kh_1)$

$$\frac{i\omega a g(\rho_1 - \rho_2)}{\operatorname{senh}(kh_1)} = -\omega^2 A_1 (\rho_1 \coth(kh_1) + \rho_2 \coth(kh_2)),$$

pero de (1.24) se tiene que

$$-kA_1 = \frac{i\omega a}{\operatorname{senh}(kh_1)}.$$

Entonces

$$-kA_1 g(\rho_1 - \rho_2) = -\omega^2 A_1 (\rho_1 \coth(kh_1) + \rho_2 \coth(kh_2)),$$

y finalmente, despejando ω^2 se obtiene la relación de dispersión para una onda interna de profundidad finita

$$\omega^2 = \frac{k g(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 \coth(kh_1) + \rho_2 \coth(kh_2)}.$$

Como $\rho_1 > \rho_2$ entonces w^2 está bien definida si

$$\rho_1 \coth(kh_1) + \rho_2 \coth(kh_2) > 0.$$

De la relación de dispersión obtenemos fácilmente la velocidad de fase ($c = w/k$):

$$c(k) = \left(\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 k \coth(kh_1) + \rho_2 k \coth(kh_2)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.26)$$

1.3 Límite cuando la capa superior crece infinitamente y límite cuando decrece a cero

La relación de dispersión juega un papel muy importante en el estudio de las ondas no lineales ya que es ella quien, por lo general, define los diferentes tipos de onda. En la sección anterior encontramos la relación de dispersión de una onda interna en un canal de altura finita evitando tocar los casos extremos como lo son las alturas infinitamente grande e infinitamente pequeña (véase las figuras 2 y 3). Ahora trataremos estos casos y veremos cómo la relación de dispersión cambia cualitativamente mostrando de esta manera dos tipos de onda diferentes a la primera. Esto se ilustrará por medio de los primeros términos en la serie de Taylor de la velocidad de fase c para ondas muy largas (es decir para números de onda k cercanos a cero).

En relación a la altura del fluido en esta sección sólo trataremos el caso cuando la altura de la capa superior varía (véase la figura 2). Cabe decir que éste y otros casos tales como aquellos donde la altura de ambas capas varía o donde la altura de las capas es finita, pero las fronteras son libres, fueron estudiadas por Benjamin en su artículo de 1967.

1.3.1 El caso cuando la altura de la capa superior crece infinitamente

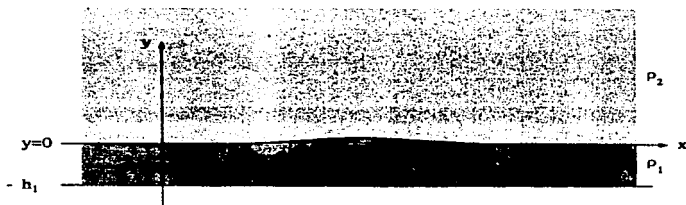
Cuando la altura de la capa superior aumenta, la longitud de la onda también aumenta, o equivalentemente, el número de onda se hace más pequeño ya que, si λ denota la longitud de onda,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

De la desigualdad

$$kh_1 < kh_2$$

fácilmente podemos obtener la proporción entre las dimensiones de la altura de los fluidos y las dimensiones de la longitud de la onda estableciendo así el dominio de la longitud de

Figura 2: $kh_2 \rightarrow \infty$.

onda:

$$h_1 < \lambda < h_2.$$

Para mantener esta proporción en esta sección analizaremos el caso de la profundidad infinitamente grande de la capa superior haciendo tender kh_2 a infinito. (Y no a h_2 solamente, como era de esperarse.)

Consideremos la velocidad de fase:

$$c(k) = \left(\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 k \coth(kh_1) + \rho_2 k \coth(kh_2)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.26)$$

No es difícil mostrar que (véase Apéndice A)

$$\lim_{kh \rightarrow \infty} k \coth(kh) = |k|. \quad (1.27)$$

Usando esto vemos que en el límite cuando kh_2 tiende a ∞ obtenemos

$$c(k) = \left(\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 k \coth(kh_1) + \rho_2 |k|} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.28)$$

En vista de que la función valor absoluto es discontinua en $k = 0$, trataremos de obtener una aproximación de c en $k \approx 0$, aproximándonos tanto por el lado derecho como por el izquierdo. Por esta razón, en adelante al hablar de derivadas de c respecto a k en $k = 0$ nos estaremos refiriendo a límites laterales.

De (1.28) y haciendo uso del siguiente límite (véase Apéndice A)

$$\lim_{k \rightarrow 0} k \coth(kh) = \frac{1}{h} \quad (1.29)$$

Figura 3: $kh_2 \rightarrow 0$.

obtenemos el valor para c en $k = 0$ al que denotaremos por C_0 :

$$C_0 = \left(\frac{gh_1(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.30)$$

Como g, h_1, ρ_1 y $(\rho_1 - \rho_2)$ son números positivos, entonces C_0 está bien definida.

Por otra parte, como $|k| = k \operatorname{sgn}(k)$ para $k \neq 0$ donde $\operatorname{sgn}(k)$ es la función signo de k que toma el valor 1 si k es positivo y -1 si k es negativo, se tiene de (1.28) que

$$c'(k) = \frac{1}{2} \left(\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 k \coth(kh_1) + \rho_2 |k|} \right)^{-\frac{1}{2}} \times \left\{ -\frac{g(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 \coth(kh_1) - \rho_1 h_1 k \operatorname{csch}^2(kh_1) + \rho_2 \operatorname{sgn}(k))}{(\rho_1 k \coth(kh_1) + \rho_2 |k|)^2} \right\}.$$

Reordenando los términos obtenemos

$$c'(k) = -\frac{1}{2} \left(\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 k \coth(kh_1) + \rho_2 |k|} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left\{ \frac{\rho_1 (\coth(kh_1) - h_1 k \operatorname{csch}^2(kh_1)) + \rho_2 \operatorname{sgn}(k)}{\rho_1 k \coth(kh_1) + \rho_2 |k|} \right\}.$$

Tomando el límite de $c(k)$ cuando k tiende a cero, usando (1.29) y la siguiente propiedad (véase Apéndice A),

$$\lim_{k \rightarrow 0} \{ \coth(kh) - hk \operatorname{csch}^2(kh) \} = 0, \quad (1.31)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} c'(0) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{gh_1(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\rho_2 h_1 \operatorname{sgn}(k)}{\rho_1} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} C_0 \left\{ \frac{\rho_2 h_1}{\rho_1} \operatorname{sgn}(k) \right\} \\ &= -\frac{\rho_2 h_1}{2\rho_1} C_0 \operatorname{sgn}(k). \end{aligned}$$

Entonces una aproximación de $c(k)$ para $kh_2 \rightarrow \infty$ es

$$\begin{aligned} c(k) &= c(0) + c'(0)k + \dots \\ &= C_0 - \frac{\rho_2 h_1}{2\rho_1} C_0 \operatorname{sgn}(k) k + \dots \\ &= C_0 \left\{ 1 - \frac{\rho_2 h_1}{2\rho_1} |k| \right\} + \dots \end{aligned}$$

Si denotamos a γ_0 por

$$\gamma_0 = \frac{\rho_2 h_1}{2\rho_1}.$$

entonces podemos escribir la velocidad de fase de una manera aproximada como

$$c(k) = C_0(1 - \gamma_0|k|), \quad (1.32)$$

donde C_0 es

$$C_0 = \left(\frac{gh_1(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.30)$$

Observamos que tanto γ_0 como C_0 son números positivos.

Esta velocidad de fase corresponde entonces a la velocidad de fase de una onda interna en un fluido de profundidad infinitamente grande. Más adelante esta aproximación a la velocidad nos ayudará a obtener la ecuación de Benjamin-Ono.

1.3.2 El caso cuando la altura de la capa superior decrece a cero

En la velocidad de fase

$$c(k) = \left(\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 k \coth(kh_1) + \rho_2 k \coth(kh_2)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.26)$$

tomamos el límite cuando kh_2 tiende a cero. Lo que pretendemos hacer en esta sección es aproximar la velocidad de fase de la onda interna cuando la altura de la capa superior es muy pequeña. Como las fronteras $y = h_1$ y $y = h_2$ son rígidas, entonces físicamente h_2 no debe ser cero pues ello indicaría que la onda no puede existir ya que la frontera superior aplastaría a la onda. Por esta razón tomaremos el límite cuando kh_2 tiende a cero, teniendo presente que esto es sólo una aproximación a $kh_2 = 0$. Esto también nos lleva a despreciar el valor de la densidad de la capa superior cuando kh_2 tiende a cero, pues la capa superior que queda es demasiado pequeña en relación a la altura de la capa inferior. Por esta razón, como en el límite (1.29),

$$k\rho_2 \coth(kh_2) \rightarrow 1, \quad \text{cuando } k\rho_2 \rightarrow 0, \text{ y } kh_2 \rightarrow 0.$$

Entonces, cuando kh_2 tiende a cero,

$$c(k) = \left(\frac{g\rho_1}{\rho_1 k \coth(kh_1) + 1} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.33)$$

Evaluando en $k = 0$ y usando (1.29) se obtiene

$$c(0) = \left(\frac{g\rho_1 h_1}{\rho_1 + h_1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

y definimos este valor como C_1 , es decir,

$$C_1 = \left(\frac{g\rho_1 h_1}{\rho_1 + h_1} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.34)$$

Como g, ρ_1 y h_1 son números positivos entonces C_1 está bien definida.

Por otra parte, derivando (1.33) se obtiene

$$\begin{aligned} c'(k) &= \frac{1}{2} \left(\frac{g\rho_1}{\rho_1 k \coth(kh_1) + 1} \right)^{-\frac{1}{2}} \left\{ -g\rho_1^2 \frac{\coth(kh_1) - h_1 k \operatorname{csch}^2(kh_1)}{(\rho_1 k \coth(kh_1) + 1)^2} \right\} \\ &= -\frac{\rho_1}{2} \left(\frac{g\rho_1}{\rho_1 k \coth(kh_1) + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\coth(kh_1) - h_1 k \operatorname{csch}^2(kh_1)}{\rho_1 k \coth(kh_1) + 1} \right\} \\ &= -\frac{\rho_1}{2} c(k) \left\{ \frac{\coth(kh_1) - h_1 k \operatorname{csch}^2(kh_1)}{\rho_1 k \coth(kh_1) + 1} \right\}. \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando k tiende a cero, y usando las propiedades (1.29) y (1.31), se tiene que

$$c'(0) = 0.$$

La segunda derivada nos da

$$c''(k) = -\frac{\rho_1}{2} c'(k) \left\{ \frac{\coth(kh_1) - h_1 k \operatorname{csch}^2(kh_1)}{\rho_1 k \coth(kh_1) + 1} \right\} - \frac{\rho_1}{2} c(k) \left\{ \frac{1}{(\rho_1 k \coth(kh_1) + 1)^2} \right\} \times \\ \left\{ 2h_1 (h_1 k \operatorname{csch}^2(kh_1) \coth(kh_1) - \operatorname{csch}^2(kh_1)) (\rho_1 k \coth(kh_1) + 1) - \right. \\ \left. \rho_1 (\coth(kh_1) - h_1 k \operatorname{csch}^2(kh_1))^2 \right\}.$$

Tomando el límite cuando k tiende a cero y usando (1.29), (1.31) y el siguiente límite (véase Apéndice A)

$$\lim_{k \rightarrow 0} \{ h k \operatorname{csch}^2(kh) \coth(kh) - \operatorname{csch}^2(kh) \} = \frac{1}{3}$$

se tiene que

$$c''(0) = -\frac{\rho_1}{2} c'(0) \left\{ \frac{0}{\rho_1/h_1 + 1} \right\} - \frac{\rho_1}{2} c(0) \left(\frac{h_1}{\rho_1 + h_1} \right)^2 \times \left\{ \frac{2h_1}{3} \left(\frac{\rho_1 + h_1}{h_1} \right) \right\} \\ = -\frac{\rho_1 h_1}{3} \left(\frac{h_1}{\rho_1 + h_1} \right) C_1 \\ = -\frac{h_1}{3g} \left(\frac{g\rho_1 h_1}{\rho_1 + h_1} \right) C_1 \\ = -\frac{h_1}{3g} C_1^3.$$

Por tanto

$$c''(0) = -\frac{h_1}{3g} C_1^3.$$

Luego una aproximación tipo serie de Taylor de $c(k)$ para $kh_2 \rightarrow 0$ es

$$c(k) = c(0) + c'(0)k + c''(0)k^2 + \dots \\ = C_1 - \frac{h_1}{3g} C_1^3 k^2 + \dots \\ = C_1 \left(1 - \frac{h_1 C_1^2}{3g} k^2 \right) + \dots$$

Si denotamos por γ_1 al valor

$$\gamma_1 = \frac{h_1 C_1^2}{3g},$$

entonces podemos escribir la aproximación de la velocidad de fase c como

$$c(k) = C_1(1 - \gamma_1 k^2). \quad (1.35)$$

donde

$$C_1 = \left(\frac{g\rho_1 h_1}{\rho_1 + h_1} \right)^{1/2}.$$

Observamos que tanto γ_1 como C_1 son números positivos.

Esta expresión es una aproximación a la velocidad de fase de una onda que se mueve sobre la superficie de un fluido. Ella nos ayudará a encontrar la ecuación de Korteweg-de Vries en la siguiente sección.

1.4 La ecuación de Benjamin-Ono y la ecuación de Korteweg-de Vries

En esta sección mostraremos cómo construir una ecuación diferencial a partir de una relación de dispersión. En particular, a partir de la relación de dispersión de la onda interna obtendremos las ecuaciones BO y KdV.

Consideremos la ecuación

$$u_t + C_1 u_x + \gamma_1 C_1 u_{xxx} = 0. \quad (1.36)$$

Proponemos

$$u(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} \quad (1.37)$$

como solución de la ecuación, donde k es el número de onda, ω es la frecuencia y A es la amplitud. De (1.37) tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -i\omega u, \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ik u, \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = ik^3 u. \quad (1.40)$$

Sustituyendo esos valores en (1.36) obtenemos

$$i\omega u - ikC_1 u + \gamma_1 ik^3 C_1 u = 0.$$

Esto implica que

$$\omega - kC_1 + \gamma_1 k^3 C_1 = 0,$$

de modo que

$$w - kC_1(1 - \gamma_1 k^2) = 0.$$

Sea G la función

$$G(w, k) = w - kC_1(1 - \gamma_1 k^2).$$

Vemos entonces que con objeto de satisfacer la ecuación (1.36) una condición ha de cumplirse:

$$G(w, k) = 0.$$

Esta es la relación de dispersión que expresa la física del problema.

Como observamos en las ecuaciones (1.38) a (1.40) cada elemento $\partial/\partial t$ produce un elemento $-iw$ y cada $\partial/\partial x$ produce un elemento ik . Esto muestra claramente el vínculo entre la ecuación y la relación de dispersión. De esta forma es lógico pensar que si se conoce la relación de dispersión se puede conocer la ecuación.

Enseguida mostraremos como construir una ecuación diferencial a partir de una relación de dispersión. Denotamos a \mathcal{F} como la transformada de Fourier

$$\mathcal{F}(f; k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) e^{-ik\zeta} d\zeta.$$

Tomamos K como la transformada inversa de Fourier de la función $c(k)$

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{ikx} dk. \quad (1.41)$$

Entonces

$$c(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) e^{-ik\zeta} d\zeta.$$

Haciendo $\zeta = x - \xi$ tendremos

$$c(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) e^{-ik(x - \xi)} d\xi.$$

Entonces

$$\frac{w}{k} = e^{-ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) e^{ik\xi} d\xi.$$

Luego

$$-w e^{ikx} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) k e^{ik\xi} d\xi = 0.$$

Multiplicando por iAe^{-iwt} obtenemos

$$-i w A e^{i(kx - wt)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) i k A e^{i(k\xi - wt)} d\xi = 0.$$

Sustituyendo la forma (1.37) en ella obtenemos

$$u_t(x, t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) u_\xi(\xi, t) d\xi = 0. \quad (1.42)$$

De esta forma, a partir de la velocidad de fase podemos construir la ecuación (1.42).

En la deducción de la condición (1.16) despreciamos el término $(\partial\phi/\partial x)(\partial\eta/\partial x)$ en (1.15) con objeto de obtener una condición de frontera para la elevación de la onda. Podemos ahora retomar este tipo de no linealidad incluyendo un término de la forma uu_x en la ecuación (1.42) para establecer una ecuación más general, a saber.

$$u_t + \alpha uu_x + \mathcal{L}(u; x) = 0 \quad (1.43)$$

donde

$$\mathcal{L}(u; x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) u_\xi(\xi, t) d\xi,$$

$u = u(x, t)$ representa el desplazamiento de la onda, el núcleo $K(x)$ es una función dada y α es un número real diferente de cero. En adelante supondremos que $u(x, t)$ es absolutamente integrable y se anula como $1/x^2$ cuando $|x|$ tiende a infinito. Esta ecuación fue establecida por Benjamin en su artículo de 1968 [Benjamin, p. 563]. (Véase también Whitham, p. 363 y sigs.)

Usando la definición de la transformada de Fourier podemos reescribir (1.41) como

$$K(x) = \mathcal{F}^{-1}(c; x) \quad (1.44)$$

donde \mathcal{F}^{-1} denota la transformada inversa de Fourier.

Ahora trataremos de obtener las ecuaciones que gobiernan el movimiento de las ondas en el interior de los fluidos estratificados de profundidad infinita y en la superficie de aguas poco profundas, en otras palabras obtendremos la ecuación de Benjamin-Ono y la ecuación de Korteweg-de Vries. Para esto nos serán de gran ayuda los límites (1.32) y (1.35) que obtuvimos en la sección anterior. Partiendo de la ecuación (1.43) y utilizando ciertas propiedades de la transformada de Fourier obtendremos, en el caso $kh_2 \rightarrow \infty$, la ecuación BO, y en el caso $kh_2 \rightarrow 0$, la ecuación KdV.

Comenzaremos considerando solamente $\mathcal{L}(u; x)$. Aplicando la transformada de Fourier obtenemos

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}(u; x); k) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) u_\xi(\xi, t) d\xi; k\right). \quad (1.45)$$

Si definimos la convolución de las funciones f y g como

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi) g(\xi) d\xi$$

entonces podemos reescribir (1.45) como

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}(u; x); k) = \mathcal{F}(K = u_x; k).$$

Aplicando el teorema de convolución se obtiene

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}(u; x); k) = \mathcal{F}(K; k)\mathcal{F}(u_x; k).$$

Por (1.44), $K(x) = \mathcal{F}^{-1}(c; x)$, entonces

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}(u; x); k) = c(k)\mathcal{F}(u_x; k). \quad (1.46)$$

1.4.1 La ecuación de Benjamin-Ono

Como probamos en la sección 1.3, $c(k) = C_0(1 - \gamma_0|k|)$ es una aproximación a la velocidad de fase para las ondas internas en fluidos de gran profundidad. Sustituyendo en la ecuación (1.46) se obtiene

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}(u; x); k) = C_0\mathcal{F}(u_x; k) - \gamma_0 C_0|k|\mathcal{F}(u_x; k).$$

Como $|k| = k \operatorname{sgn}(k)$ para $k \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{L}(u; x); k) &= C_0\mathcal{F}(u_x; k) - \gamma_0 C_0 k \operatorname{sgn}(k)\mathcal{F}(u_x; k) \\ &= C_0\mathcal{F}(u_x; k) - \gamma_0 C_0 i(-ik) \operatorname{sgn}(k)\mathcal{F}(u_x; k). \end{aligned}$$

Usando la conocida propiedad

$$\mathcal{F}(f'(x); k) = -ik\mathcal{F}(f(x); k), \quad (1.47)$$

válida para funciones continuas, absolutamente integrables en todos los reales y con derivadas seccionalmente continuas y también absolutamente integrables, obtenemos

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}(u; x); k) = C_0\mathcal{F}(u_x; k) - \gamma_0 C_0 i \operatorname{sgn}(k)\mathcal{F}(u_{xx}; k).$$

Como (véase Apéndice B)

$$i \operatorname{sgn}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{F}\left(\frac{1}{x}; k\right)$$

entonces

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}(u; x); k) = C_0\mathcal{F}(u_x; k) - \gamma_0 C_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{F}\left(\frac{1}{x}; k\right) \mathcal{F}(u_{xx}; k),$$

y por el teorema de convolución se obtiene

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}(u; x); k) = C_0\mathcal{F}(u_x; k) - \gamma_0 C_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{F}\left(\frac{1}{x} * u_{xx}; k\right).$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier obtenemos

$$\mathcal{L}(u; x) = C_0 u_x(x, t) - \gamma_0 C_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{x} * u_{xx} \right) (x, t),$$

y escribiendo la convolución en forma integral se tiene

$$\mathcal{L}(u; x) = C_0 u_x - \frac{\gamma_0 C_0}{\pi} \wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_{\xi\xi}(\xi, t)}{x - \xi} d\xi \quad (1.48)$$

donde \wp denota el valor principal de Cauchy en la singularidad $\xi = x$ (véase Apéndice C).

Sustituyendo (1.48) en (1.43) se obtiene

$$u_t + \alpha u u_x + C_0 u_x + \frac{\gamma_0 C_0}{\pi} \wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_{\xi\xi}(\xi, t)}{\xi - x} d\xi = 0. \quad (1.49)$$

Como $c(k)$ es igual a C_0 en una primera aproximación, entonces si movemos nuestro sistema de coordenadas a esta velocidad, es decir, si tomamos $u = u(\zeta, t)$ con $\zeta = x - C_0 t$ se tiene que

$$\begin{aligned} u_x &= u_\zeta \\ u_t &= -C_0 u_\zeta + u_t. \end{aligned}$$

Con esto (1.49) se simplifica tomando la forma

$$u_t + \alpha u u_\zeta + \frac{\gamma_0 C_0}{\pi} \wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_{\xi\xi}(\xi, t)}{\xi - (\zeta + C_0 t)} d\xi = 0, \quad (1.50)$$

o bien, ya que $u_x = u_\zeta$, podemos reescribir la ecuación (1.50) como

$$u_t + \alpha u u_x + \frac{\gamma_0 C_0}{\pi} \wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_{\xi\xi}(\xi, t)}{\xi - x} d\xi = 0$$

que es la ecuación de Benjamin-Ono. Usando la propiedad (C.4) del Apéndice C y haciendo

$$\beta = \gamma_0 C_0$$

—nótese que β es un número positivo— podemos reescribir esta ecuación como

$$u_t + \alpha u u_x + \beta \mathcal{H}_{xx}(u; x) = 0, \quad (1.51)$$

donde

$$\mathcal{H}(u; x) = \frac{1}{\pi} \wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(y)}{y - x} dy.$$

Ono [1975] dedujo esta ecuación de una forma diferente, perturbando las ecuaciones de la mecánica de fluidos a partir de un estado base y realizando un proceso de capa límite.

1.4.2 La ecuación de Korteweg-de Vries

Sustituyendo $c(k) = C_1(1 - \gamma_1 k^2)$ —que es la aproximación a la velocidad de fase de una onda sobre la superficie de un fluido de profundidad pequeña— en (1.46) se obtiene

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}(u; x); k) = C_1 \mathcal{F}(u_x; k) - \gamma_1 C_1 k^2 \mathcal{F}(u_x; k).$$

Utilizando la propiedad (1.47),

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}(u; x); k) = C_1 \mathcal{F}(u_x; k) + \gamma_1 C_1 \mathcal{F}(u_{xxx}; k).$$

Luego

$$\mathcal{L}(u; x) = C_1 u_x(x, t) + \gamma_1 C_1 u_{xxx}(x, t). \quad (1.52)$$

Sustituyendo (1.52) en (1.43) se obtiene

$$u_t + \alpha u u_x + C_1 u_x + \gamma_1 C_1 u_{xxx} = 0.$$

Análogo al caso anterior, haciendo $\zeta = x - C_1 t$ se llega a la ecuación KdV

$$u_t + \alpha u u_x + \gamma_1 C_1 u_{xxx} = 0.$$

Así como en el caso de la ecuación BO, la ecuación KdV puede ser deducida a partir de las ecuaciones de movimiento de los fluidos usando perturbaciones.

Capítulo 2

La evolución de la onda interna y la radiación desprendida por ella

2.1 Introducción

Como ya se mencionó en el capítulo anterior, R. E. Davis y A. Acrivos [1967] realizaron experimentos para conocer cómo se propaga la onda interna en un fluido estratificado. Ellos realizaron estos experimentos en un tanque de vidrio transparente de 2.5 metros de largo, 40 centímetros de altura y 10 centímetros de ancho. La mitad inferior del tanque se llenó de agua salada con una densidad que oscilaba entre los 1.05 y 1.17 gr/cm^3 , la capa superior de agua natural, y entre estas capas se formó, como consecuencia de las diferentes densidades, una capa de un centímetro en la cual la densidad variaba de manera continua. Para diferenciar las dos capas y poder visualizar el movimiento de la onda se agregó una pequeña mezcla de tolueno y carbón tetraclorhídrico matizado con un tinte de aceite rojo todos ellos insolubles en agua. No señalaremos los demás detalles técnicos que ellos describen. En este experimento se muestra claramente que las ondas internas pueden ser **solitones**, que se definen como las ondas que al interactuar conservan su forma. Es ilustrativo de un solitón las características que ellos describen en su reporte¹ :

Perhaps the most remarkable feature of the type of solitary wave under study was the ease with which it could be generated. Almost any disturbance of the density gradient layer would produce a wave of this type, mixed with other wave motions of a transient nature . . . The waveshape [in the figure 4], which appears to be asymmetric only because the marker drops were not placed uniformly throughout the density gradient layer, underwent no change, other than a gradual attenuation of amplitude, as the wave propagated down the tank. As would be expected of a wave motion, the fluid velocities as-

¹ Las figuras que ellos mencionan aparecen en la página 26.

sociated with this disturbance were less than the propagation velocity. The motion was extremely two-dimensional with no noticeable velocity parallel to the wave front and without significant interaction with the walls of the wave tank. Waves of this type were found to reflect off the end of the tank without losing much of their energy and two waves travelling in opposite directions would pass through each other and travel on without further change of shape. [Davis y Acrivos, p. 604.]

Ellos también descubren y nos ilustran gráficamente el fenómeno que nos ocupa. Cuando la onda interna no es un solitón entonces ésta sufre un rompimiento de su forma, atenuándose y generando en su propagación una cola de ondas más pequeñas que se conoce como radiación:

In contrast, the wave depicted in figure 5, although of only slightly greater amplitude than that shown in figure 4, had a character entirely different from that treated in the theoretical analysis. In such waves the waveshape was not steady and semiperiodic waves were seen being shed behind the main disturbance. In addition, the fluid velocity at the centre of the wave was found to be approximately equal to the propagation velocity, giving to the motion the appearance of a 'lump' of fluid moving through the region of varying density . . . However, as viscous dissipation and the unsteady semiperiodic waves extract energy from the main motion, such lumps decayed to small-amplitude waves of the type pictured in figure 4. [Davis y Acrivos, pp. 604-605.]

En este capítulo analizaremos la evolución de una onda interna arbitraria que no es un solitón, y veremos cómo ésta forma la radiación y con ella a los solitones. Para ello utilizaremos el método de ecuaciones aproximadas desarrollado por W. L. Kath y N. F. Smyth [1995] quienes lo utilizaron para analizar la evolución de la ecuación KdV. Ellos compararon sus resultados con los obtenidos por el método de dispersión inversa obteniendo una gran concordancia entre ambos resultados.

La piedra angular de este método reside en que las leyes de conservación nos ayudan a determinar cómo se distribuyen la masa y el momento iniciales en dos partes: una asociada con el pulso principal y la otra asociada con la radiación desprendida, la cual dará lugar a la gestación de otro u otros solitones. Estos últimos se formarán de acuerdo al tamaño del pulso inicial.

En este capítulo sólo se estudiará la formación de una segunda onda y se podrá ver cuán importante es el uso de una expresión aproximada para la velocidad del pulso principal, pues el comportamiento de las soluciones será muy sensible a la expresión usada para esta velocidad.

Comenzaremos este capítulo estableciendo la forma de los solitones de la ecuación BO (Secc. 2.2) para luego establecer las leyes de conservación de masa y de momento (Secc.

2.3). Enseguida estableceremos un sistema de ecuaciones que nos indican cómo evolucionan los parámetros cuando no se considera ni la masa ni el momento de la radiación (Secc. 2.4). Después analizaremos la masa de la radiación (Secc. 2.5) para luego establecer el sistema de ecuaciones cuando la masa y el momento son tomados en cuenta (Secc. 2.6). Después analizaremos los puntos críticos del sistema (Secc. 2.7) y finalmente daremos una condición necesaria para que se forme el segundo solitón (Secc. 2.8).



FIGURA 4.



FIGURA 5.

2.2 La solución exacta

Como lo mostramos en el Apéndice C la transformada de Hilbert de una función racional de la forma $ab^2/(x^2 + b^2)$ es otra función racional, a saber

$$\mathcal{H}\left(\frac{ab^2}{x^2 + b^2}; \zeta\right) = -\frac{ab\zeta}{\zeta^2 + b^2}.$$

Además sus derivadas son también funciones racionales como lo mostraremos más adelante. Esto sugiere buscar una solución de este tipo para la ecuación BO. Fue T. B. Benjamin [1967] quien encontró por primera vez la forma de la onda solitaria para un fluido estratificado de profundidad infinita:

$$u(x, t) = \frac{a}{\left(\frac{x - ct}{b}\right)^2 + 1}, \quad (2.1)$$

o de manera equivalente

$$u(x, t) = \frac{ab^2}{(x - ct)^2 + b^2}, \quad (2.2)$$

donde a , b y c son constantes diferentes de cero, $-\infty < x < \infty$ y $t > 0$.

En esta sección mostraremos que (2.2) es, en efecto, solución de la ecuación de Benjamin-Ono (Ecuación BO):

$$u_x + \alpha uu_x + \beta \mathcal{H}_{xx}(u; x) = 0 \quad (2.3)$$

donde α y β son constantes dadas, β es una constante positiva, $u = u(x, t)$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$ y

$$\mathcal{H}(u; x) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(y)}{y - x} dy.$$

Con objeto de garantizar la existencia de la transformada de Hilbert de u y de sus derivadas de los primeros órdenes supondremos que ellas son medibles y absolutamente integrables y que tienden a cero cuando $|x|$ tiende a ∞ . Además supondremos que $\mathcal{H}(u; x)$ y sus derivadas de orden superior tienden a cero bajo el mismo límite. (cf. Apéndice C.)

Para demostrar que (2.2) es solución de la ecuación de Benjamin-Ono cambiaremos las variables x y t a una sola, con objeto de obtener una ecuación algebraica. Dado que la ecuación BO representa el desplazamiento de una onda, entonces podemos vincular x y t en la variable $\zeta = x - ct$ la cual representa sólo una traslación de la coordenada espacial a la velocidad c .

Sustituyendo $\zeta = x - ct$ en (2.2) se obtiene

$$u(x, t) = \frac{ab^2}{\zeta^2 + b^2}$$

y con esto se tiene que

$$u_t = \frac{2ab^2c\zeta}{(\zeta^2 + b^2)^2} \quad (2.4)$$

$$u_x = -\frac{2ab^2\zeta}{(\zeta^2 + b^2)^2}. \quad (2.5)$$

Por otra parte de la ecuación (C.14) del Apéndice C se obtiene

$$\mathcal{H}_{xx} \left(\frac{ab^2}{y^2 + b^2}; \zeta \right) = -ab \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{\zeta}{\zeta^2 + b^2} \right\}.$$

Desarrollando las derivadas parciales del lado derecho y simplificando los términos obtenemos

$$\mathcal{H}_{xx} \left(\frac{ab^2}{y^2 + b^2}; \zeta \right) = 2ab \frac{3b^2\zeta - \zeta^3}{(\zeta^2 + b^2)^3}. \quad (2.6)$$

Sustituyendo los valores (2.4), (2.5) y (2.6) en (2.3) se tiene que

$$u_t + \alpha u u_x + 3\mathcal{H}_{xx}(u; x) =$$

$$\frac{2ab^2c\zeta}{(\zeta^2 + b^2)^2} + \alpha \left(\frac{ab^2}{y^2 + b^2} \right) \left(-\frac{2ab^2\zeta}{(\zeta^2 + b^2)^2} \right) + 2\beta ab \frac{3b^2\zeta - \zeta^3}{(\zeta^2 + b^2)^3}.$$

Factorizando el término común se obtiene

$$u_t + \alpha u u_x + \beta \mathcal{H}_{xx}(u; x) = \frac{2ab\zeta}{(\zeta^2 + b^2)^3} \{ bc(\zeta^2 + b^2) - \alpha ab^3 + \beta(3b^2 - \zeta^2) \},$$

y simplificando los términos de la derecha se llega a

$$u_t + \alpha u u_x + \beta \mathcal{H}_{xx}(u; x) = \frac{2ab\zeta}{(\zeta^2 + b^2)^3} \{ (bc - \beta)\zeta^2 + b^2(bc - \alpha ab + 3\beta) \}. \quad (2.7)$$

Como $u(x, t)$ es una solución no trivial de la ecuación BO, entonces $ab \neq 0$. De esta forma el lado derecho de (2.7) será igual a cero para toda ζ en el dominio sólo si

$$(bc - \beta)\zeta^2 + b^2(bc - \alpha ab + 3\beta) = 0,$$

es decir, sólo si

$$bc - \beta = 0$$

y

$$bc - \alpha ab + 3\beta = 0.$$

La sustitución de la primera en la segunda nos da

$$ab = \frac{4\beta}{\alpha}. \quad (2.8)$$

Como

$$b = \frac{\beta}{c} \quad (2.9)$$

entonces

$$a = \frac{4c}{\alpha}. \quad (2.10)$$

Como α , β y c son constantes dadas entonces a y b quedan determinadas por las dos últimas ecuaciones.

En suma

$$u(x, t) = \frac{ab^2}{(x - ct)^2 + b^2} \quad (2.2)$$

es solución de la ecuación de Benjamin-Ono (2.3) sólo si las constantes a y b cumplen con (2.9) y (2.10). Más adelante retomaremos estos valores cuando analicemos la ecuación BO con condiciones iniciales.

De la representación (2.2) es claro que $|a|$ es una medida de la amplitud de la onda, y si definimos la anchura de una onda como la distancia entre los dos puntos, donde ocurren los cambios de concavidad, entonces es también fácil ver que $|b|$ es una medida de la anchura de la onda. Si a es positiva o negativa tendríamos una onda con la cresta hacia arriba o bien con la cresta hacia abajo respectivamente.

Cuando esas constantes cumplen con (2.9) y (2.10) y si c es positiva entonces (2.2) representa una onda que se desplaza hacia la derecha a velocidad constante y sin cambiar de forma en su viaje. En otras palabras, (2.2) es el **solitón de la ecuación de Benjamin-Ono** y en lo sucesivo nos referiremos a esta solución como la **solución exacta**. Esta onda decae como $1/x^2$; así su caída es más lenta que la de otras ondas como la de KdV, que es una onda que decae en forma exponencial. Esta característica hizo que también se le llamara **onda algebraica**. En la figura 6 se muestra un ejemplo de estas ondas.

Por otro lado, de (2.10) se tiene que

$$c = \frac{\alpha a}{4}. \quad (2.11)$$

Esto indica que la velocidad del solitón es directamente proporcional a la amplitud de la onda de manera que a **mayor amplitud mayor velocidad**.

Como la velocidad puede ponerse en términos de la amplitud (o bien de la anchura) entonces a y b son los únicos parámetros de la solución necesarios para determinar la condición de un solitón. Siendo α y β los parámetros de la ecuación BO entonces el solitón está absolutamente determinado por la relación (2.8):

$$ab = \frac{4\beta}{\alpha}. \quad (2.8)$$

Si tomamos b positivo entonces, de (2.8), a y α deben tener el mismo signo (recordemos que β es positivo). Esto implica que, si $b > 0$, el signo de α determina si la cresta del solitón está hacia arriba o hacia abajo.

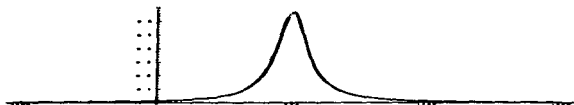


Figura 6: Gráfica de $u = ab^2/(x^2 + b^2)$ con valores adimensionales $a = 2/3$ y $b = 70$ (Es decir $c = 1$, $\alpha = 6$ y $\beta = 70$). Nótese la diferencia en las escalas. Esto nos indica que la amplitud de la onda es demasiado pequeña en relación a su anchura.

2.3 Las leyes de conservación

Puesto que en las secciones siguientes estudiaremos la evolución de una onda interna a partir de un pulso inicial, entonces es relevante para ese estudio saber si toda la masa y el momento iniciales siguen conservándose conforme transcurre el tiempo. Por esa razón aunque existen infinitas cantidades invariantes asociadas a la ecuación BO, en esta sección sólo encontraremos las dos primeras, que representan la invariancia de la masa y del momento.

Vamos a suponer que u se comporta como $1/x^2$; en consecuencia esto garantiza que

$$\int_{-\infty}^{\infty} u \, dx \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \, dx$$

convergen uniformemente [Courant y John, I, p. 307]. Además supondremos que u_t y $(u^2)_t$ son seccionalmente continuas en $t > 0$ y que

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_t \, dx \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} (u^2)_t \, dx$$

convergen uniformemente de modo que [Courant y John, II, pp. 467-468]

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_t \, dx = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u \, dx$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u^2)_t dx = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx.$$

2.3.1 La conservación de masa

Definimos la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} u dx$$

como la masa del sistema.

Dado que

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_t dx$$

entonces, integrando la ecuación de Benjamin-Ono (2.3) en la variable espacial x de $-\infty$ a ∞ , se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u dx = - \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha u u_x + \beta \mathcal{H}_x(u; x)] dx \quad (2.12)$$

$$= -\alpha \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_{-\infty}^{\infty} - \beta [\mathcal{H}_x(u; x)]_{-\infty}^{\infty}. \quad (2.13)$$

Puesto que u y $\mathcal{H}_x(u; x)$ tienden a cero cuando $|x|$ tiende a ∞ , se tiene

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u dx = 0. \quad (2.14)$$

Entonces (2.14) implica que

$$\int_{-\infty}^{\infty} u dx = \text{Constante respecto al tiempo } t, \quad (2.15)$$

es decir, la masa se conserva.

2.3.2 La conservación de momento

Ahora trataremos de establecer la conservación de momento. Se define el momento del sistema como la velocidad del centro de masa multiplicada por la masa total, es decir

$$\text{Momento} = \frac{d x_{cm}}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u dx \quad (2.16)$$

donde x_{cm} representa el centro de masa.

Como

$$x_{cm} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xu \, dx}{\int_{-\infty}^{\infty} u \, dx}$$

entonces, puesto que la masa es constante,

$$\frac{dx_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xu \, dx}{\int_{-\infty}^{\infty} u \, dx}. \quad (2.17)$$

De modo que, por (2.16) y (2.17),

$$\text{Momento} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} xu \, dx.$$

Por tanto

$$\text{Momento} = \int_{-\infty}^{\infty} xu_t \, dx. \quad (2.18)$$

Observamos que, multiplicando la ecuación BO por x e integrando,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} xu_t \, dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha xu u_x + \beta x \mathcal{H}_{xx}(u; x)] \, dx \\ &= - \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x(u^2)_x \, dx - \beta \int_{-\infty}^{\infty} x \mathcal{H}_{xx}(u; x) \, dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes el lado derecho

$$\int_{-\infty}^{\infty} xu_t \, dx = - \frac{\alpha}{2} \left\{ [xu^2]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \, dx \right\} - \beta \left\{ [x \mathcal{H}_x(u; x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_x(u; x) \, dx \right\}.$$

Si suponemos que, al igual que u y $\mathcal{H}(u; x)$, $\mathcal{H}_x(u; x)$ decae tan rápidamente como $1/x^2$ se tendrá que

$$\int_{-\infty}^{\infty} xu_t \, dx = \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \, dx. \quad (2.19)$$

Por tanto, sustituyendo (2.19) en (2.18),

$$\text{Momento} = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u^2 \, dx. \quad (2.20)$$

Ahora trataremos de establecer la invariancia de esta cantidad.

Multiplicamos por u a la ecuación BO para obtener

$$uu_t + \alpha u^2 u_x + \beta u \mathcal{H}_{xx}(u; x) = 0,$$

que puede reescribirse como

$$\left(\frac{1}{2}u^2\right)_t + \alpha \left(\frac{1}{3}u^3\right)_x + \beta u \mathcal{H}_{xx}(u; x) = 0.$$

Integrando respecto a x de $-\infty$ a ∞ se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}u^2\right)_t dx = -\frac{\alpha}{3} [u^3]_{-\infty}^{\infty} - \beta \int_{-\infty}^{\infty} u \mathcal{H}_{xx}(u; x) dx. \quad (2.21)$$

Como $u \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}u^2\right)_t dx = -\beta \int_{-\infty}^{\infty} u \mathcal{H}_{xx}(u; x) dx.$$

Integrando por partes la integral de la derecha

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}u^2\right)_t dx = -\beta \left\{ [u \mathcal{H}_x(u; x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u_x \mathcal{H}_x(u; x) dx \right\}. \quad (2.22)$$

Por la propiedad (C.8) de la transformada de Hilbert (véase Apéndice C) se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_x \mathcal{H}_x(u; x) dx = 0. \quad (2.23)$$

Como u y $\mathcal{H}_x(u; x)$ tienden a cero cuando $|x|$ tiende a ∞ y de (2.23) en (2.22) se sigue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}u^2\right)_t dx = 0.$$

Entonces

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}u^2 dx = 0,$$

es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}u^2 dx = \text{Constante respecto al tiempo } t. \quad (2.24)$$

Luego (2.20) y (2.24) nos indican que el momento se conserva.

2.4 El sistema de ecuaciones de los parámetros sin masa y momento de la radiación

Para diferenciar a la radiación de la onda que los generó llamaremos *onda principal* a esta última.

Ahora trataremos de estudiar este fenómeno proponiendo como perfil de la onda principal una expresión compuesta por parámetros que dependen del tiempo y trataremos

de estudiar cómo cambian estos parámetros conforme la onda avanza. Esto lo haremos observando los cambios de la masa y del momento. Como un primer análisis no nos vamos a ocupar de la radiación que se desprende. (Eso se estudiará más adelante, en la Sección 2.6.)

Para estudiar la evolución de la onda interna tomaremos un pulso inicial que tenga la forma de la solución exacta como punto de arranque de la onda: así pues tomaremos el pulso inicial como

$$u(x, 0) = \frac{AB^2}{x^2 + B^2}, \quad (2.25)$$

donde A es una constante diferente de cero y B es una constante positiva.

Vamos a suponer que el pulso inicial se propaga desprendiendo en su avance una pequeña cantidad de radiación. Esto nos sugiere buscar una solución para u de la siguiente manera

$$u = u_0 + u_1, \quad (2.26)$$

donde u_1 es desconocida y u_0 tiene la forma de la solución exacta,

$$u_0(\theta) = \frac{ab^2}{\theta^2 + b^2} \quad (2.27)$$

donde

$$\begin{aligned} a &= a(t), \quad b = b(t), \\ \theta &= x - \xi(t), \\ V(t) &= \xi'(t) \end{aligned}$$

y tales que en el tiempo $t = 0$ se tiene que

$$a(0) = A, \quad b(0) = B, \quad u_1(x, 0) = 0. \quad (2.28)$$

Con el propósito de facilitar los cálculos vamos a restringir nuestro análisis suponiendo $b(t)$ positiva para toda t . En concordancia con esta restricción decidimos tomar B positiva en (2.25). (Véase pie de página de la página 35.)

De (2.27) podemos ver que u_0 tiene amplitud máxima cuando $\theta = 0$. Así $x = \xi(t)$ representa la posición de más alta amplitud de la onda (véase la figura 7) y $V(t)$ representa su velocidad.

Para determinar la evolución de u_0 necesitamos determinar la evolución de los parámetros a , b y V conjuntamente con una aproximación para u_1 .

Ahora trataremos de establecer una ecuación para el cambio de la masa de la onda principal sin involucrar la masa de la radiación.

De la ecuación BO vemos que

$$u_t + \left[\frac{\alpha}{2} u^2 + \beta \mathcal{H}_x(u; x) \right]_x = 0. \quad (2.29)$$



Figura 7

Por otra parte como la velocidad de fase (1.32) de la onda es muy cercana a una velocidad constante C_0 , podemos hacer una traslación de ella para obtener una velocidad C_r relativa a esa velocidad constante C_0 , es decir.

$$C_r = C - C_0.$$

Esta velocidad C_r la podemos interpretar como la velocidad de fase de la radiación. De aquí que la velocidad de grupo C_g de la radiación es

$$C_g = \frac{d}{dk}(kC_r).$$

Entonces

$$C_g = \frac{d}{dk}(-\gamma_0 C_0 |k|k).$$

por tanto

$$C_g = -2\gamma_0 C_0 |k|k.$$

Como las constantes γ_0 y C_0 son positivas, esto nos indica que la velocidad de grupo de la radiación es decreciente. En consecuencia la masa que se desprende de la onda principal se aleja de ella gradualmente hacia $-\infty$. Entonces para tiempos suficientemente grandes podemos suponer que adelante del pulso principal y en una pequeña vecindad atrás de ella, u_1 decae a cero. Supongamos entonces que u_1 es cero a partir de $x = \xi(t)$. En consecuencia $u = u_0$ adelante de ξ .

Para poder estudiar solamente la masa de la onda principal integramos (2.29) en x de ξ a ∞ (véase la figura 7) para obtener

$$\int_{\xi}^{\infty} u_{01} dx = - \left[\frac{\alpha}{2} u_0^2 + \beta \mathcal{H}_x(u_0; x) \right]_{\xi}^{\infty}.$$

Por otra parte, usando la fórmula (C.15) del Apéndice C se obtiene ²

$$\mathcal{H}(u_0; x) = - \frac{ab\theta}{\beta^2 + b^2}. \quad (2.30)$$

² Obsérvese que si permitiéramos que b fuese negativo esta integral cambiaría de signo (cf. Apéndice C). Esto nos llevaría a considerar diferentes casos pues varias integrales de este tipo aparecerán más adelante. Esta es la razón principal por la que hemos decidido estudiar sólo el caso $b(t)$ positivo para toda t .

De aquí que

$$\mathcal{H}_x(u_0; x) = -ab \frac{b^2 - \theta^2}{(\theta^2 + b^2)^2} \quad (2.31)$$

y ésta es una función que se anula cuando x tiende a $\pm\infty$.

Luego de (2.27) y (2.31) se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^{\infty} u_{0t} dx &= - \left[\frac{\alpha}{2} \left(\frac{ab^2}{\theta^2 + b^2} \right)^2 - \beta ab \frac{b^2 - \theta^2}{(b^2 + \theta^2)^2} \right]_{\xi}^{\infty} \\ &= \frac{\alpha}{2} a^2 - \beta ab^{-1}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Por otra parte, por la fórmula de Leibniz vemos que

$$\frac{d}{dt} \int_{\xi}^{\infty} u_0 dx = \int_{\xi}^{\infty} u_{0t} dx - \xi' u_0|_{x=\xi}.$$

En consecuencia

$$\int_{\xi}^{\infty} u_{0t} dx = \frac{d}{dt} \int_{\xi}^{\infty} u_0 dx + \xi' u_0|_{x=\xi}.$$

es decir

$$\int_{\xi}^{\infty} u_{0t} dx = \frac{d}{dt} \int_{\xi}^{\infty} \frac{ab^2}{\theta^2 + b^2} dx + aV. \quad (2.33)$$

La integral de la derecha toma el valor

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{ab^2}{\theta^2 + b^2} dx = \frac{\pi}{2} ab.$$

Sustituyéndolo en (2.33) se tiene

$$\int_{\xi}^{\infty} u_{0t} dx = \frac{\pi}{2} \frac{d}{dt} (ab) + aV.$$

Este último valor en (2.32) nos da

$$\frac{\pi}{2} \frac{d}{dt} (ab) + aV = \frac{\alpha}{2} a^2 - \beta ab^{-1}$$

luego

$$\frac{\pi}{2} \frac{d}{dt} (ab) = \alpha a^2 - 2\beta ab^{-1} - 2aV. \quad (2.34)$$

Así hemos encontrado la primera ecuación para las tres variables a , b y V . Necesitamos otras dos.

Enseguida consideraremos la conservación de momento.

En la ecuación BO multiplicamos por u

$$uu_t + \alpha u^2 u_x + \beta u \mathcal{H}_{xx}(u; x) = 0. \quad (2.35)$$

Como

$$(u \mathcal{H}_x(u; x))_x = u_x \mathcal{H}_x(u; x) + u \mathcal{H}_{xx}(u; x),$$

entonces

$$u \mathcal{H}_{xx}(u; x) = (u \mathcal{H}_x(u; x))_x - u_x \mathcal{H}_x(u; x).$$

Sustituyendo esta última ecuación en la ecuación (2.35) se tiene que

$$uu_t + \alpha u^2 u_x + \beta (u \mathcal{H}_x(u; x))_x - \beta u_x \mathcal{H}_x(u; x) = 0.$$

Luego

$$\left(\frac{1}{2}u^2\right)_t + \left(\frac{\alpha}{3}u^3 + \beta u \mathcal{H}_x(u; x)\right)_x - \beta u_x \mathcal{H}_x(u; x) = 0. \quad (2.36)$$

Integrando respecto a x de $-\infty$ a ∞ se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}u^2\right)_t dx + \left[\frac{\alpha}{3}u^3 + \beta u \mathcal{H}_x(u; x)\right]_{-\infty}^{\infty} - \beta \int_{-\infty}^{\infty} u_x \mathcal{H}_x(u; x) dx = 0.$$

Como u y $\mathcal{H}_x(u; x)$ decaen a cero cuando x tiende a $\pm\infty$ se llega a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}u^2\right)_t dx - \beta \int_{-\infty}^{\infty} u_x \mathcal{H}_x(u; x) dx = 0. \quad (2.37)$$

Por otra parte,

$$\frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}(u_0 + u_1)^2 = \frac{1}{2}u_0^2 + u_0 u_1 + \frac{1}{2}u_1^2$$

y de aquí que

$$\int \frac{1}{2}u^2 dx = \int \frac{1}{2}u_0^2 dx + \int u_0 u_1 dx + \int \frac{1}{2}u_1^2 dx. \quad (2.38)$$

Como ya hemos visto que u_1 es casi cero en una vecindad de la onda principal, entonces los términos $u_0 u_1$ y $u_1^2/2$ lo son también en una vecindad de la onda principal de modo que, muy cercanamente,

$$\int \frac{1}{2}u^2 dx = \int \frac{1}{2}u_0^2 dx.$$

Pero si la región de estudio no está restringida a puntos cercanos a la onda principal entonces el término u_1^2 puede dar una contribución al momento (2.38) si la región llegara a ser lo suficientemente grande.

A pesar de esto, si despreciamos el término u_1 en la conservación del momento y en consecuencia tomamos $u = u_0$ en (2.37) se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}u_0^2\right)_t dx - \beta \int_{-\infty}^{\infty} u_{0x} \mathcal{H}_x(u_0; x) dx = 0.$$

Por la propiedad (C.8) de la transformada de Hilbert (véase Apéndice C), vemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{0x} \mathcal{H}_x(u_0; x) dx = 0. \quad (2.39)$$

Luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} u_0^2\right)_t dx = 0.$$

Por tanto

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u_0^2 dx = 0. \quad (2.40)$$

Por otra parte, de la forma (2.27) se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0^2 dx = a^2 b^4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(\theta^2 + b^2)^2}.$$

Usando el teorema de los residuos se puede ver fácilmente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(\theta^2 + b^2)^2} = \frac{\pi}{2b^3}.$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0^2 dx = \frac{\pi}{2} a^2 b. \quad (2.41)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (2.40) y cancelando las constantes se tiene que

$$\frac{d}{dt}(a^2 b) = 0. \quad (2.42)$$

Esta ecuación expresa la evolución del momento asociado a la onda principal pero no del momento asociado a la radiación. Más adelante incluiremos ésta.

Las ecuaciones (2.34) y (2.42) nos ayudan a determinar a las variables a , b pero no a la variable V . Ahora buscaremos una ecuación para esta variable.

Como vimos en la sección 2.3

$$\text{Momento} = \frac{dx_{cm}}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u dx. \quad (2.43)$$

Puesto que el momento y la masa son constantes, entonces forzosamente la velocidad del centro de masa es constante. De aquí que no podemos determinar la velocidad V por medio de la velocidad del centro de masa, ya que ésta es invariante. Entonces multiplicamos la ecuación BO por xu para obtener

$$xuu_t + \alpha xu^2 u_x + \beta xu \mathcal{H}_{xx}(u; x) = 0,$$

o equivalentemente

$$x \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_t + c_0 x \left(\frac{1}{3} u^3 \right)_x + \beta x u \mathcal{H}_{xx}(u; x) = 0.$$

Integrando

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} x u^2 dx + \frac{c_0}{3} \int_{-\infty}^{\infty} x (u^3)_x dx + \beta \int_{-\infty}^{\infty} x u \mathcal{H}_{xx}(u; x) dx = 0.$$

Aproximando u por u_0 obtenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} x u_0^2 dx + \frac{c_0}{3} \int_{-\infty}^{\infty} x (u_0^3)_x dx + \beta \int_{-\infty}^{\infty} x u_0 \mathcal{H}_{xx}(u_0; x) dx = 0. \quad (2.44)$$

Ahora calcularemos cada una de estas integrales. Como $\theta = x - \xi(t)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} x u_0^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \theta u_0^2 d\xi + \xi \int_{-\infty}^{\infty} u_0^2 d\xi.$$

Usando (2.41) se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} x u_0^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \theta u_0^2 d\xi + \xi \left(\frac{\pi}{2} a^2 b \right). \quad (2.45)$$

Por el teorema del residuo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta u_0^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2 b^4 \theta}{(\theta^2 + b^2)^2} d\xi = 0. \quad (2.46)$$

Entonces, sustituyendo (2.46) en (2.45),

$$\int_{-\infty}^{\infty} x u_0^2 dx = \frac{\pi}{2} a^2 b \xi. \quad (2.47)$$

Para la segunda integral de (2.44), integrando por partes se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} x (u_0^3)_x dx = [x u_0^3]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u_0^3 dx.$$

Luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} x (u_0^3)_x dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^3 b^6}{(\theta^2 + b^2)^3} d\xi.$$

Como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(\theta^2 + b^2)^3} = \frac{3\pi}{8b^5},$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(u_0^3)_x dx = -\frac{3\pi}{8}a^3b. \quad (2.48)$$

Por último

$$\int_{-\infty}^{\infty} xu_0\mathcal{H}_{xx}(u_0; x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \theta u_0\mathcal{H}_{xx}(u_0; x) dx + \xi \int_{-\infty}^{\infty} u_0\mathcal{H}_{xx}(u_0; x) dx.$$

Integrando por partes la segunda integral de la derecha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} xu_0\mathcal{H}_{xx}(u_0; x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \theta u_0\mathcal{H}_{xx}(u_0; x) dx + \xi [u_0\mathcal{H}_x(u_0; x)]_{-\infty}^{\infty} - \xi \int_{-\infty}^{\infty} u_0x\mathcal{H}_x(u_0; x) dx.$$

Por (2.39) y como u_0 y $\mathcal{H}_x(u_0; x)$ tienden a cero cuando x tiende a $\pm\infty$ (véase las ecuaciones (2.27) y (2.31)), entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} xu_0\mathcal{H}_{xx}(u_0; x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \theta u_0\mathcal{H}_{xx}(u_0; x) dx. \quad (2.49)$$

Usando (2.31) obtenemos

$$\mathcal{H}_{xx}(u_0; x) = 2ab \frac{3b^2\theta - \theta^3}{(\theta^2 + b^2)^3}. \quad (2.50)$$

Sustituyendo (2.27) y (2.50) en el lado izquierdo de (2.49) se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} xu_0\mathcal{H}_{xx}(u_0; x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \theta \left(\frac{ab^2}{\theta^2 + b^2} \right) \left(2ab \frac{3b^2\theta - \theta^3}{(\theta^2 + b^2)^3} \right) dx.$$

Desarrollando el producto se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} xu_0\mathcal{H}_{xx}(u_0; x) dx = 6a^2b^5 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta^2 dx}{(\theta^2 + b^2)^4} - 2a^2b^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta^4 dx}{(\theta^2 + b^2)^4}.$$

Usando el teorema de los residuos se puede ver que estas dos últimas integrales toman los valores

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta^2 dx}{(\theta^2 + b^2)^4} &= \frac{\pi}{16b^5} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta^4 dx}{(\theta^2 + b^2)^4} &= \frac{\pi}{16b^3}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} xu_0\mathcal{H}_{xx}(u_0; x) dx = 6a^2b^5 \left(\frac{\pi}{16b^5} \right) - 2a^2b^3 \left(\frac{\pi}{16b^3} \right).$$

Simplificando se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} x u_0 \mathcal{L}_{xx}(u_0; x) dx = \frac{\pi}{4} a^2. \quad (2.51)$$

Sustituyendo (2.47), (2.48) y (2.51) en la ecuación (2.44) se tiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi}{2} a^2 b \xi \right) + \frac{\alpha}{3} \left(-\frac{3\pi}{8} a^3 b \right) + \beta \left(\frac{\pi}{4} a^2 \right) = 0.$$

Simplificando,

$$\frac{\pi}{4} \frac{d}{dt} (a^2 b \xi) - \frac{\alpha \pi}{8} a^3 b + \frac{\pi \beta}{4} a^2 = 0.$$

Desarrollando la primera derivada y factorizando algunos términos se obtiene

$$\frac{\pi}{4} \frac{d}{dt} (a^2 b) \xi + \frac{\pi}{4} a^2 b V - \frac{\pi}{4} a^2 b \left(\frac{\alpha}{2} a - \beta b^{-1} \right) = 0.$$

Usando (2.42) se obtiene

$$\frac{\pi}{4} a^2 b V - \frac{\pi}{4} a^2 b \left(\frac{\alpha}{2} a - \beta b^{-1} \right) = 0.$$

Por tanto,

$$V = \frac{\alpha}{2} a - \beta b^{-1}. \quad (2.52)$$

Observamos que si $a \rightarrow 4c/\alpha$ y $b \rightarrow \beta/c$, entonces $V \rightarrow c$, es decir, si u tiende a la solución exacta entonces V tiende a la velocidad de la solución exacta como es de esperarse (cf. Sección 2.2).

Hemos encontrado entonces tres ecuaciones que gobiernan la evolución de la onda con condición inicial (2.25):

$$\pi \frac{d}{dt} (ab) = \alpha a^2 - 2\beta a b^{-1} - 2aV \quad (2.34)$$

$$\frac{d}{dt} (a^2 b) = 0 \quad (2.42)$$

$$V = \frac{\alpha}{2} a - \beta b^{-1}. \quad (2.52)$$

La sustitución de (2.52) en (2.34) nos lleva a

$$\frac{d}{dt} (ab) = 0,$$

y esto en (2.42) nos lleva a

$$\frac{da}{dt} = 0.$$

Esta ecuación nos dice que la altura de la onda principal no cambia. Por tanto no podemos tomar a la expresión (2.52) como un buen valor de la velocidad, pues nos lleva a resultados que no expresan el fenómeno real. Por eso es natural pensar en otra aproximación para V . Como el sistema debe ser válido cuando la solución esté muy cercana a la solución exacta, entonces el valor de V debe aproximarse a

$$V = \frac{\alpha a}{4}, \quad (2.53)$$

en la medida en que la solución se acerque a la solución exacta tal como lo ilustramos en la Sección 2.2. De aquí que $V = \alpha a/4$ es un buen sustituto para la velocidad en el sistema de ecuaciones. Así, el sistema que mejor aproxima a la solución es (2.34), (2.42) y (2.53).

La ecuación (2.34) expresa el cambio de la masa de la onda principal; (2.42), el momento de la onda principal y (2.53) la velocidad de la onda principal. Tenemos tres ecuaciones para tres incógnitas (a , b y V).

Observamos que (2.42) nos indica que el momento de la onda principal no cambia. Entonces tenemos que $a^2 b = \text{Constante}$, y de las condiciones iniciales (2.28) se tiene que

$$a^2 b = A^2 B.$$

Con esta ecuación podemos obtener una aproximación de la amplitud de la solución exacta. Si u fuera la solución exacta en todo tiempo, entonces $a = 4c/\alpha$ y $b = \beta/c$ y así

$$\left(\frac{4c}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\beta}{c}\right) = A^2 B.$$

Luego

$$\left(\frac{4c}{\alpha}\right) \left(\frac{4\beta}{\alpha}\right) = A^2 B$$

o equivalentemente

$$a \frac{4\beta}{\alpha} = A^2 B.$$

por tanto

$$a = \frac{\alpha A^2 B}{4\beta},$$

y ésta es una aproximación a la amplitud de la solución exacta. Puesto que A y B están determinadas por la condición inicial y como α y β lo están también porque son constantes ya dadas en la ecuación BO entonces a es una constante bien determinada.

2.5 La masa de la radiación

Ahora trataremos de ver qué ocurre con la masa que se desprende de $u(x, 0)$ cuando este pulso inicial avanza. Como ya hemos visto que la masa se conserva trataremos de encontrar el balance que existe entre u_0 y u_1 . La figura 5 nos indica que la radiación tiene amplitud muy pequeña comparada con la onda principal además de que la amplitud de ambas tiende a cero cuando la variable espacial tiende a infinito. Supondremos entonces que la amplitud máxima de u_1 es muy pequeña y así despreciaremos sus productos de segundo orden y mayores.

Introducimos la forma $u = u_0 + u_1$ dentro de la ecuación (2.3)

$$(u_0 + u_1)_t + \alpha(u_0 + u_1)(u_0 + u_1)_x + \beta \mathcal{H}_{xx}(u_0 + u_1; x) = 0.$$

Desarrollando se obtiene

$$u_{0t} + u_{1t} + \alpha(u_0 u_{0x} + u_0 u_{1x} + u_{0x} u_1 + u_1 u_{1x}) + \beta \mathcal{H}_{xx}(u_0; x) + \beta \mathcal{H}_{xx}(u_1; x) = 0.$$

Como u_1 es de amplitud pequeña podemos despreciar el término $u_1 u_{1x}$. Entonces

$$u_{1t} + \alpha(u_0 u_{1x} + u_{0x} u_1) + \beta \mathcal{H}_{xx}(u_1; x) = -u_{0t} - \alpha u_0 u_{0x} - \beta \mathcal{H}_{xx}(u_0; x).$$

Luego

$$u_{1t} + \alpha(u_0 u_1)_x + \beta \mathcal{H}_{xx}(u_1; x) = -u_{0t} - \alpha \left(\frac{1}{2} u_0^2 \right)_x - \beta \mathcal{H}_{xx}(u_0; x). \quad (2.54)$$

Para poder estudiar la masa de la onda integramos en la variable x de $-\infty$ a ∞ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{1t} dx + [\alpha u_0 u_1 + \beta \mathcal{H}_{xx}(u_1; x)]_{-\infty}^{\infty} = - \int_{-\infty}^{\infty} u_{0t} dx - \left[\frac{\alpha}{2} u_0^2 + \beta \mathcal{H}_{xx}(u_0; x) \right]_{-\infty}^{\infty}. \quad (2.55)$$

De las ecuaciones (2.27) y (2.31) vemos que u_0 y $\mathcal{H}_x(u_0; x)$ tienden a cero cuando $|x|$ tiende a infinito. Entonces (2.55) se reduce a

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{1t} dx + [\alpha u_0 u_1 + \beta \mathcal{H}_{xx}(u_1; x)]_{-\infty}^{\infty} = - \int_{-\infty}^{\infty} u_{0t} dx. \quad (2.56)$$

Análogo a lo que ocurre con u_0 y $\mathcal{H}_x(u_0; x)$, si suponemos que u_1 y $\mathcal{H}_x(u_1; x)$ tienden a cero cuando $|x|$ tiende a infinito, de (2.56) tendremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{1t} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} u_{0t} dx. \quad (2.57)$$

Por otra parte, considerando la forma (2.27) tenemos que la integral de u_0 sobre un intervalo infinito converge uniformemente para cada t [véase Courant & John, I, p. 326] y como el integrando es una función continua en t , entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{0t} dx = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u_0 dx.$$

Si suponemos que esto también se cumple para u_1 , de (2.57) tendremos que

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u_1 dx = - \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u_0 dx. \quad (2.58)$$

Como u_0 , es decir la onda principal, pierde masa conforme transcurre el tiempo, entonces la razón de cambio de la masa de u_0 es negativa, es decir

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u_0 dx < 0,$$

y de (2.58) se tiene que

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u_1 dx > 0.$$

Entonces la masa perdida por u_0 es ganada por u_1 . Esto implica que u_1 representa la radiación que se desprende de la onda principal tal y como lo esperábamos.

Sin embargo la masa de la radiación no se encuentra necesariamente concentrada alrededor de algún punto, y de hecho vamos a demostrar que una cantidad de masa permanece muy lejos de la onda principal. Esa masa perdida puede ser estimada de la siguiente manera:

Hagamos $u_1 = u_1(\theta)$. Ya que

$$\frac{d}{dx}() = \frac{d}{d\theta}(),$$

entonces de (2.54) se tiene

$$\frac{du_1}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + \alpha \frac{d}{d\theta}(u_0 u_1) + \beta \frac{d^2}{d\theta^2} \mathcal{H}(u_1; \theta) = -u_0 t - \alpha \left(\frac{1}{2} u_0^2 \right)_\theta - \beta \gamma \mathcal{L}_{\theta\theta}(u_0; x). \quad (2.59)$$

Puesto que $d\theta/dt = -V$, (2.59) puede escribirse como

$$-V \frac{du_1}{d\theta} + \alpha \frac{d}{d\theta}(u_0 u_1) + \beta \frac{d^2}{d\theta^2} \mathcal{H}(u_1; \theta) = -u_0 t - \alpha \left(\frac{1}{2} u_0^2 \right)_\theta - \beta \gamma \mathcal{L}_{\theta\theta}(u_0; \theta). \quad (2.60)$$

Integrando (2.60) respecto a θ ,

$$-Vu_1 + \alpha u_0 u_1 + \beta \frac{d}{d\theta} \mathcal{H}(u_1; \theta) = - \int u_0 t d\theta - \frac{\alpha}{2} u_0^2 - \beta \gamma \mathcal{L}_\theta(u_0; \theta) + C, \quad (2.61)$$

donde C es la constante de integración.

De (2.27) se obtiene fácilmente

$$u_0 t = \frac{a^2 b^2 + 2ab\theta}{\theta^2 + b^2} + \frac{2ab^2 V \theta}{(\theta^2 + b^2)^2} - \frac{2ab^2 V}{(\theta^2 + b^2)^2}.$$

Sustituyendo este valor en (2.61) obtenemos

$$\begin{aligned}
 & -Vu_1 + \alpha u_0 u_1 + \beta \frac{d}{d\theta} \mathcal{H}(u_1; \theta) = \\
 & -C_1 \int \frac{d\theta}{\theta^2 + b^2} - C_2 \int \frac{\theta d\theta}{(\theta^2 + b^2)^2} + C_3 \int \frac{d\theta}{(\theta^2 + b^2)^2} - \frac{\alpha}{2} u_0^2 - \beta \mathcal{H}_e(u_0; \theta) + C \quad (2.62)
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 C_1 &= a'b^2 + 2abb', \\
 C_2 &= 2ab^2V', \\
 C_3 &= 2ab^3b'.
 \end{aligned}$$

Llevando a cabo la integración y sustituyendo (2.27) y (2.31) en (2.62) obtenemos

$$\begin{aligned}
 & -Vu_1 + \alpha u_0 u_1 + \beta \frac{d}{d\theta} \mathcal{H}(u_1; \theta) = \\
 & -C_1 \left\{ \frac{1}{b} \arctan \left(\frac{\theta}{b} \right) \right\} - C_2 \left\{ \frac{-1}{2(\theta^2 + b^2)} \right\} + C_3 \left\{ \frac{\theta}{2b^2(\theta^2 + b^2)} + \frac{1}{2b^4} \arctan \left(\frac{\theta}{b} \right) \right\} \\
 & - \frac{\alpha}{2} \frac{a^2 b^4}{(\theta^2 + b^2)^2} + \beta ab \frac{b^2 - \theta^2}{(\theta^2 + b^2)^2} + C. \quad (2.63)
 \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando θ tiende a ∞ se obtiene

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \left[-Vu_1 + \alpha u_0 u_1 + \beta \frac{d}{d\theta} \mathcal{H}(u_1; \theta) \right] = -C_1 \left\{ \frac{\pi}{2b} \right\} + C_3 \left\{ \frac{\pi}{4b^4} \right\} + C.$$

Suponiendo que $d\mathcal{H}(u_1; \theta)/d\theta$ es cero en $\pm\infty$ se llega a

$$-Vu_1|_{\infty} = -\frac{\pi}{4b^4} (2b^3 C_1 - C_3) + C.$$

Como deseamos que u_1 sea cero en ∞ —es decir que adelante de la onda no haya masa— entonces debemos tener que

$$C = \frac{\pi}{4b^4} (2b^3 C_1 - C_3).$$

Por otra parte, si con este valor de C se toma el límite en (2.63) cuando θ tiende a $-\infty$ se tiene que

$$-Vu_1|_{-\infty} = -C_1 \left\{ -\frac{\pi}{2b} \right\} + C_3 \left\{ -\frac{\pi}{4b^4} \right\} + C,$$

es decir

$$-Vu_1|_{-\infty} = \frac{\pi}{4b^4} (2b^3 C_1 - C_3) + C.$$

Sumándole el valor de C se obtiene

$$-Vu_1|_{-\infty} = \frac{\pi}{2b^4} (2b^3C_1 - C_3).$$

Sustituyendo los valores de las constantes C_1 y C_3 se tiene

$$\begin{aligned} -Vu_1|_{-\infty} &= \frac{\pi}{2b^4} (2b^3(a'b^2 + 2abb') - 2ab^3b') \\ &= \frac{\pi}{b} (a'b^2 + 2abb' - ab'). \end{aligned}$$

Por tanto

$$u_1|_{-\infty} = -\frac{\pi}{bV} \{a'b^2 + 2abb' - ab'\},$$

y por (2.53) se tiene que

$$u_1|_{-\infty} = \frac{4\pi}{\alpha ab} \{ab' - 2abb' - a'b^2\}. \quad (2.64)$$

Este valor representa una parte de la masa desprendida del pulso inicial (hasta el tiempo t) y que se encuentra dispersa muy atrás de la onda. Lo definimos como u_∞ , es decir

$$u_\infty = u_1|_{-\infty}.$$

2.6 El sistema de ecuaciones de los parámetros considerando la masa y el momento de la radiación

Es claro que el sistema de ecuaciones establecido en la Sección 2.4 puede ser mejorado tomando en consideración la masa y el momento de la radiación. A través de la ecuación (2.42) el sistema nos muestra que el momento de la onda principal es constante. Considerando la pérdida de momento podemos esperar que el momento de la onda principal ya no sea constante. De esta forma podemos encontrar un sistema de ecuaciones que aproximen mejor la evolución de la onda principal y que también nos ayuden a predecir la formación de una segunda onda.

En el caso de la masa, en la sección anterior, vimos que existe un balance entre la masa de la onda principal y la masa de la radiación. En otras palabras estudiar el cambio de la masa de la onda principal es equivalente a estudiar el cambio de la masa de la radiación.

Así sea $M \equiv M(t)$ la masa de la radiación:

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} u_1 dx. \quad (2.65)$$

Por (2.27) y (2.58), tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dt} &= -\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u_0 dx \\ &= -\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ab^2}{\theta^2 + b^2} dx.\end{aligned}$$

Usando el teorema de los residuos se puede demostrar fácilmente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ab^2}{\theta^2 + b^2} dx = \pi ab. \quad (2.66)$$

Entonces

$$\frac{dM}{dt} + \pi \frac{d}{dt}(ab) = 0. \quad (2.67)$$

Para poder estudiar el momento asociado a la radiación vamos a suponer que la masa que se desprende de la onda principal se encuentra concentrada en una misma región, es decir, vamos a suponer que la masa perdida u_{∞} se encuentra concentrada alrededor del punto $x = -L(t)$ (como se muestra en la figura 8) y que se mueve atrás de la onda principal a una distancia fija de ella, es decir, que el punto $x = -L(t)$ se mueve a la misma velocidad que la onda principal. En otras palabras, vamos a suponer que

$$u|_{-L} = u_{\infty} \quad \text{y} \quad (-L)' = V.$$



Figura 8

Antes de abordar la ecuación de conservación de momento trataremos de establecer una aproximación al cambio de la masa de la radiación en términos de estas nuevas variables.

Muy cercanamente

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} u_1 dx = \int_{-\infty}^{-L} u dx.$$

Por conservación de masa

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u dx = 0.$$

Entonces

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{-L} u \, dx + \frac{d}{dt} \int_{-L}^{\infty} u \, dx = 0.$$

Por tanto

$$\frac{dM}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_{-L}^{\infty} u \, dx. \quad (2.68)$$

De modo que para estudiar el cambio de la masa de la radiación sólo basta estudiarla de $-L$ a ∞ .

Integrando la ecuación BO de $-L$ a ∞ en x se obtiene

$$\int_{-L}^{\infty} u_t \, dx + \left[\frac{\alpha}{2} u^2 + \beta \mathcal{H}_x(u; x) \right]_{-L}^{\infty} = 0.$$

Suponiendo que u y $\mathcal{H}_x(u; x)$ tienden a cero cuando x tiende a infinito, se obtiene

$$\int_{-L}^{\infty} u_t \, dx - \frac{\alpha}{2} u_{\infty}^2 - \beta \mathcal{H}_x(u; x) \Big|_{x=-L} = 0.$$

Despreciando los valores cuadráticos de u_{∞} y suponiendo que $\mathcal{H}_x(u; x)$ es muy pequeño en $x = -L$

$$\int_{-L}^{\infty} u_t \, dx = 0.$$

Por la regla de Leibniz

$$\frac{d}{dt} \int_{-L}^{\infty} u \, dx = \int_{-L}^{\infty} u_t \, dx - (-L)' u \Big|_{-L}.$$

Luego

$$\frac{d}{dt} \int_{-L}^{\infty} u \, dx + (-L)' u \Big|_{-L} = 0.$$

En consecuencia

$$\frac{d}{dt} \int_{-L}^{\infty} u \, dx = -V u_{\infty}. \quad (2.69)$$

De (2.68) y (2.69) tenemos entonces

$$\frac{dM}{dt} = V u_{\infty}. \quad (2.70)$$

Ahora calcularemos el momento asociado a la radiación. Integrando de $-L$ a ∞ la ecuación de conservación de momento (2.36):

$$\int_{-L}^{\infty} \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_t \, dx + \left[\frac{\alpha}{3} u^3 + \beta u \mathcal{H}_x(u; x) \right]_{x=-L}^{\infty} - \beta \int_{-L}^{\infty} u_x \mathcal{H}_x(u; x) \, dx = 0.$$

Por tanto

$$\int_{-L}^{\infty} \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_t dx - \frac{\alpha}{3} u^3 - \beta u_{\infty} \mathcal{H}_x(u; x) \Big|_{x=-L} - \beta \int_{-L}^{\infty} u_x \mathcal{H}_x(u; x) dx = 0.$$

Suponiendo que los términos de orden cúbico en u_{∞} y $\mathcal{H}_x(u; x) \Big|_{x=-L}$ son cero, entonces

$$\int_{-L}^{\infty} \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_t dx - \beta \int_{-L}^{\infty} u_x \mathcal{H}_x(u; x) dx = 0. \quad (2.71)$$

Como en $-L < x < \infty$, u_t es casi cero entonces podemos aproximar la integral de la derecha como

$$\int_{-L}^{\infty} u_x \mathcal{H}_x(u; x) dx = \int_{-L}^{\infty} u_{0x} \mathcal{H}_x(u_0; x) dx.$$

Usando los valores (2.27) y (2.31) se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{\infty} u_x \mathcal{H}_x(u; x) dx &= \int_{-L}^{\infty} \left(-\frac{2ab^2\theta}{(\theta^2 + b^2)^2} \right) \left(-ab \frac{b^2 - \theta^2}{(\theta^2 + b^2)^2} \right) dx \\ &= 2a^2b^5 \int_{-L}^{\infty} \frac{\theta dx}{(\theta^2 + b^2)^4} - 2a^2b^3 \int_{-L}^{\infty} \frac{\theta^3 dx}{(\theta^2 + b^2)^4}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Para conocer el valor de la última integral de la derecha observamos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\theta^2}{4(\theta^2 + b^2)^3} \right) &= \frac{\theta}{2(\theta^2 + b^2)^3} - \frac{3\theta^3}{2(\theta^2 + b^2)^4} \\ &= \frac{\theta^3 + b^2\theta}{2(\theta^2 + b^2)^4} - \frac{3\theta^3}{2(\theta^2 + b^2)^4} \\ &= -\frac{\theta^3}{(\theta^2 + b^2)^4} + \frac{b^2\theta}{2(\theta^2 + b^2)^4}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{\theta^3}{(\theta^2 + b^2)^4} = -\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\theta^2}{4(\theta^2 + b^2)^3} \right) + \frac{b^2\theta}{2(\theta^2 + b^2)^4}.$$

Integrando:

$$\int_{-L}^{\infty} \frac{\theta^3 dx}{(\theta^2 + b^2)^4} = - \left[\frac{\theta^2}{4(\theta^2 + b^2)^3} \right]_{-L}^{\infty} + \frac{b^2}{2} \int_{-L}^{\infty} \frac{\theta dx}{(\theta^2 + b^2)^4}. \quad (2.73)$$

Sustituyendo (2.73) en (2.72) se obtiene

$$\int_{-L}^{\infty} u_x \mathcal{H}_x(u; x) dx = 2a^2b^5 \int_{-L}^{\infty} \frac{\theta dx}{(\theta^2 + b^2)^4} + \frac{a^2b^3}{2} \left[\frac{\theta^2}{(\theta^2 + b^2)^3} \right]_{-L}^{\infty} - a^2b^3 \int_{-L}^{\infty} \frac{\theta dx}{(\theta^2 + b^2)^4}$$

$$\begin{aligned}
 &= a^2 b^3 \int_{-L}^{\infty} \frac{\theta dx}{(\theta^2 + b^2)^4} + \frac{a^2 b^3}{2} \left[\frac{\theta^2}{(\theta^2 + b^2)^3} \right]_{-L}^{\infty} \\
 &= a^2 b^3 \left[-\frac{1}{6(\theta^2 + b^2)^3} \right]_{-L}^{\infty} + \frac{a^2 b^3}{2} \left[\frac{\theta^2}{(\theta^2 + b^2)^3} \right]_{-L}^{\infty} \\
 &= -\frac{1}{6ab} \left[\frac{a^3 b^6}{(\theta^2 + b^2)^3} \right]_{-L}^{\infty} + \frac{1}{2ab^3} \left[\frac{a^3 b^6 \theta^2}{(\theta^2 + b^2)^3} \right]_{-L}^{\infty}.
 \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
 \int_{-L}^{\infty} u_x \mathcal{H}_x(u; x) dx &= -\frac{1}{6ab} [u^3]_{-L}^{\infty} + \frac{1}{2ab^3} [u^3 \theta^2]_{-L}^{\infty} \\
 &= \frac{1}{6ab} u_{\infty}^3 - \frac{1}{2ab^3} u_{\infty}^3 \theta_L^2
 \end{aligned}$$

donde θ_L es el valor de θ en $x = -L$. Despreciando los valores cúbicos de u_{∞} se tiene que

$$\int_{-L}^{\infty} u_x \mathcal{H}_x(u; x) dx = 0. \quad (2.74)$$

Sustituyendo (2.74) en (2.71) se obtiene

$$\int_{-L}^{\infty} \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_t dx = 0. \quad (2.75)$$

Por otra parte, como $L = L(t)$,

$$\frac{d}{dt} \int_{-L}^{\infty} \frac{1}{2} u^2 dx = \int_{-L}^{\infty} \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_t dx - (-L)' \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_{-L},$$

entonces

$$\int_{-L}^{\infty} \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_t dx = \frac{d}{dt} \int_{-L}^{\infty} \frac{1}{2} u^2 dx + (-L)' \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_{-L}.$$

Por (2.75) tenemos que

$$\frac{d}{dt} \int_{-L}^{\infty} \frac{1}{2} u^2 dx + (-L)' \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_{-L} = 0.$$

Ya que $(-L)' = V$, entonces

$$\frac{d}{dt} \int_{-L}^{\infty} \frac{1}{2} u^2 dx = -\frac{1}{2} V u_{\infty}^2.$$

Usando (2.70) se tiene que

$$\frac{d}{dt} \int_{-L}^{\infty} \frac{1}{2} u^2 dx = -\frac{1}{2V} \left(\frac{dM}{dt} \right)^2. \quad (2.76)$$

Esta expresión es una aproximación a la razón de cambio del momento asociado a la onda principal y a la radiación. Si la velocidad la tomamos positiva, el lado derecho de (2.76) es una cantidad negativa que representa la pérdida de momento de la onda principal y de la radiación.

Para poder escribir (2.76) en términos de las variables a y b solamente, tomamos el momento como (cf. p. 37)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u_0^2 dx,$$

entonces por (2.41) se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u^2 dx = \frac{\pi}{4} a^2 b.$$

Luego

$$\int_{-\infty}^{-L} \frac{1}{2} u^2 dx + \int_{-L}^{\infty} \frac{1}{2} u^2 dx = \frac{\pi}{4} a^2 b. \quad (2.77)$$

Entre $-\infty$ y $-L$ la pérdida de momento es pequeña de modo que podemos tomar

$$\int_{-\infty}^{-L} \frac{1}{2} u^2 dx = 0.$$

En (2.77) esta aproximación nos da

$$\int_{-L}^{\infty} \frac{1}{2} u^2 dx = \frac{\pi}{4} a^2 b. \quad (2.78)$$

Sustituyendo (2.78) en (2.76) se obtiene

$$\frac{\pi}{4} \frac{d}{dt}(a^2 b) = -\frac{1}{2V} \left(\frac{dM}{dt} \right)^2.$$

Usando (2.53)

$$\frac{\pi}{4} \frac{d}{dt}(a^2 b) = -\frac{2}{\alpha a} \left(\frac{dM}{dt} \right)^2.$$

Por tanto

$$\frac{d}{dt}(a^2 b) = -\frac{8}{\alpha \pi a} \left(\frac{dM}{dt} \right)^2. \quad (2.79)$$

Luego el sistema que gobierna la evolución de la solución de la ecuación BO con condición inicial (2.25) y que toma en cuenta la pérdida de momento de la radiación y de la onda principal, es:

$$\pi \frac{d}{dt}(ab) = \alpha a^2 - 2\beta ab^{-1} - 2aV \quad (2.34)$$

$$\frac{dM}{dt} + \pi \frac{d}{dt}(ab) = 0 \quad (2.67)$$

$$\frac{d}{dt}(a^2b) = -\frac{8}{\alpha\pi a} \left(\frac{dM}{dt}\right)^2 \quad (2.79)$$

$$V = \frac{\alpha a}{4} \quad (2.53)$$

2.7 La consistencia del sistema y su integrabilidad

Por las aproximaciones que se hicieron, el sistema de arriba no puede describir exactamente lo que ocurre con la onda interna y con la radiación. Enseguida trataremos de determinar qué tan congruente es el sistema anterior con los hechos reales y con lo que él predice.

De la ecuación de conservación de masa (2.67) (y de la forma como la dedujimos) podemos ver que $\pi(ab)$ es la masa de la onda principal. Si interpretamos a la masa de una onda como el área que forma bajo la curva en un plano bidimensional entonces esto indica que la masa de la onda es cercana al área encerrada por el rectángulo de altura $|a|$ y ancho $|b|$ como lo muestra la figura 9. Es decir el cambio en la masa de la onda principal en todo tiempo es cercana al valor de la cantidad $|ab|$. Esto nos indica que considerar ab como un sólo parámetro puede ayudarnos a comprender las predicciones del fenómeno modelado por nuestro sistema. Tomemos entonces un nuevo parámetro $y(t)$ definido como

$$y(t) = a(t)b(t).$$

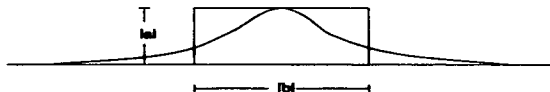


Figura 9: La masa de la onda principal es cercana a $y = ab$.

Cambiamos ahora las ecuaciones del sistema a este nuevo parámetro. Sustituyendo (2.53) en (2.34) obtenemos

$$\pi \frac{d}{dt}(ab) = \alpha a^2 - 2\beta ab^{-1} - 2a \left(\frac{\alpha a}{4}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\alpha a^2}{2} - 2\beta ab^{-1} \\
 &= a^2 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{2\beta}{ab} \right).
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dt}(ab) = \frac{a^2}{\pi} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{2\beta}{ab} \right).$$

Sustituyendo ab por y la ecuación anterior es ahora

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a^2}{\pi} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{2\beta}{y} \right).$$

Por tanto

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a^2}{2\pi y} (\alpha y - 4\beta). \quad (2.80)$$

Por otra parte, sustituyendo (2.67) en (2.79) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(a^2 b) &= -\frac{8}{\alpha \pi a} \left(-\pi \frac{d}{dt}(ab) \right)^2 \\
 &= -\frac{8\pi}{\alpha a} \left(\frac{d}{dt}(ab) \right)^2.
 \end{aligned}$$

Escribiendo la ecuación en términos de y ,

$$\frac{d}{dt}(ay) = -\frac{8\pi}{\alpha a} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2.$$

Desarrollando la derivada de la izquierda.

$$a \frac{dy}{dt} + y \frac{da}{dt} = -\frac{8\pi}{\alpha a} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2.$$

Entonces

$$y \frac{da}{dt} = -\frac{dy}{dt} \left(a + \frac{8\pi}{\alpha a} \frac{dy}{dt} \right).$$

Por tanto

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{\alpha a y} \frac{dy}{dt} \left(\alpha a^2 + 8\pi \frac{dy}{dt} \right). \quad (2.81)$$

Sustituyendo (2.80) en (2.81),

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{1}{\alpha y} \frac{a^2}{2\pi y} (\alpha y - 4\beta) \left(\alpha a^2 + 8\pi \frac{a^2}{2\pi y} (\alpha y - 4\beta) \right) \\ &= -\frac{a}{2\alpha\pi y^2} (\alpha y - 4\beta) \left(\alpha a^2 + \frac{4a^2}{y} (\alpha y - 4\beta) \right) \\ &= -\frac{a^3}{2\alpha\pi y^3} (\alpha y - 4\beta) (\alpha y + 4(\alpha y - 4\beta)) \\ &= -\frac{a^3}{2\alpha\pi y^3} (\alpha y - 4\beta) (5\alpha y - 16\beta). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{da}{dt} = -\frac{a^3}{2\alpha\pi y^3} (\alpha y - 4\beta) (5\alpha y - 16\beta). \quad (2.82)$$

De manera que el sistema (2.34), (2.67), (2.79) y (2.53) se reduce a

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a^2}{2\pi y} (\alpha y - 4\beta), \quad (2.80)$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{a^3}{2\alpha\pi y^3} (\alpha y - 4\beta) (5\alpha y - 16\beta), \quad (2.82)$$

donde $y = ab$.

Como $a(t)$ representa la amplitud de la onda entonces a es diferente de cero. Por tanto los puntos de equilibrio del sistema (2.80) y (2.82) están dados por $y = y_0$ tal que

$$\alpha y_0 - 4\beta = 0.$$

es decir

$$y_0 = \frac{4\beta}{\alpha}.$$

Esa condición determina la línea de puntos de equilibrio:

$$ab = \frac{4\beta}{\alpha},$$

con a un número real arbitrario diferente de cero. Esta última es la condición de un solitón como lo mostramos en la Sección 2.2 (cf. ecuación (2.8)).

Ahora trataremos de determinar el tipo de estabilidad asociado a la línea de equilibrio $y = y_0$. Sean

$$F(y, a) = \frac{a^2}{2\pi y}(\alpha y - 4\beta),$$

$$G(y, a) = -\frac{a^3}{2\alpha\pi y^3}(\alpha y - 4\beta)(5\alpha y - 16\beta).$$

Tomemos $a = a_0$ un punto arbitrario diferente de cero. El desarrollo en series de Taylor alrededor de (y_0, a_0) nos da

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}_{(y_0, a_0)} + \begin{pmatrix} F_y & F_a \\ G_y & G_a \end{pmatrix}_{(y_0, a_0)} \begin{pmatrix} y - y_0 \\ a - a_0 \end{pmatrix} + \dots$$

Derivando se obtiene

$$F_y = \frac{2\beta a^2}{\pi y^2}$$

$$F_a = \frac{a}{\pi y}(\alpha y - 4\beta)$$

$$G_y = -\frac{a^3}{2\alpha\pi y^4}[\alpha y(5\alpha y - 16\beta) + 5\alpha y(\alpha y - 4\beta) - 3(\alpha y - 4\beta)(5\alpha y - 16\beta)]$$

$$G_a = -\frac{3a^2}{2\alpha\pi y^3}(\alpha y - 4\beta)(5\alpha y - 16\beta).$$

Evaluándolos en (y_0, a_0) se obtiene

$$F_y = \frac{\alpha^2 a_0^2}{8\pi\beta},$$

$$F_a = 0,$$

$$G_y = -\frac{\alpha^3 a_0^3}{32\pi\beta^2},$$

$$G_a = 0.$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ a \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} y - y_0 \\ a - a_0 \end{pmatrix} + \dots$$

donde \mathbf{A} es la matriz jacobiana

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2 a_0^2}{8\pi\beta} & 0 \\ -\frac{\alpha^3 a_0^3}{32\pi\beta^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Linealizando nos quedamos con

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ a \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} y - y_0 \\ a - a_0 \end{pmatrix}.$$

Para conocer localmente el comportamiento de la solución del sistema analizamos los valores propios λ que son la solución de la ecuación

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0,$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad y $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ denota el determinante de la matriz $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$.

Es fácil ver que los valores y vectores propios son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0, & \vec{V}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \lambda_2 &= \frac{\alpha^2 a_0^2}{8\pi\beta}, & \vec{V}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4\beta} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como λ_2 es un número positivo, la línea $y = y_0$ es de puntos de equilibrio inestables. Cada punto es un nodo de inflexión (véase la figura 10).

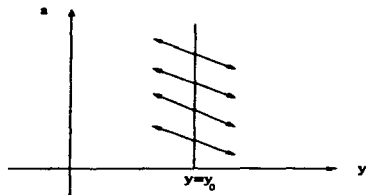


Figura 10: Inestabilidad. Caso α positivo.

En suma, sin importar el signo de α y de a , la línea $y = y_0$ es una línea de inestabilidad. En pocas palabras, el sistema nos está mostrando que la onda principal nunca llegará a ser un solitón. Sin embargo esto no corresponde al fenómeno que estamos tratando de modelar. Esta incongruencia nos sugiere revisar las aproximaciones que se hicieron. En la ecuación (2.34) observamos que la masa de la onda principal está directamente relacionada con la velocidad y en consecuencia la variable $y = a\phi$ también está relacionada con la velocidad. Recordemos que en la Sección 2.4 la expresión

$$V = \frac{\alpha}{2}a - \beta b^{-1} \quad (2.52)$$

nos condujo a otra inconsistencia: la amplitud de la onda principal no cambiaba con el tiempo. Esto nos llevó a tomar otra aproximación para la velocidad, a saber, la velocidad del solitón:

$$V = \frac{\alpha a}{4} \quad (2.53)$$

La inestabilidad del sistema parece indicar que la velocidad del solitón no es una buena aproximación para estudiar la formación del mismo ya que se decide por una dependencia de la amplitud sin tomar en cuenta el ancho. Proponemos ahora una expresión para la velocidad que mantenga la relación funcional mostrada en (2.52)

$$V = (1 + p\mu)\alpha a - (\gamma + q\mu)\beta b^{-1}, \quad (2.83)$$

con la condición de que si ab satisface (2.8), entonces se obtiene la velocidad del solitón, es decir

$$V = \frac{\alpha a}{4} \quad \text{si} \quad ab = \frac{4\beta}{\alpha}$$

para toda μ .

Ahora determinaremos los parámetros p, q, γ y μ de acuerdo con esa condición.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha a}{4} &= [(1 + p\mu)\alpha a - (\gamma + q\mu)\beta b^{-1}]_{ab=4\beta/\alpha} \\ &= (1 + p\mu)\alpha a - (\gamma + q\mu)\beta \left(\frac{4\beta}{\alpha a}\right)^{-1} \\ &= (1 + p\mu)\alpha a - (\gamma + q\mu)\left(\frac{\alpha a}{4}\right) \\ &= (4 + 4p\mu - \gamma - q\mu)\left(\frac{\alpha a}{4}\right). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$4 + 4p\mu - \gamma - q\mu = 1. \quad (2.84)$$

En particular si $\mu = 0$ tendremos

$$4 - \gamma = 1.$$

Por tanto

$$\gamma = 3. \quad (2.85)$$

Sustituyéndolo en (2.84) obtenemos

$$4p\mu - q\mu = 0.$$

En consecuencia, si $\mu \neq 0$,

$$q = 4p. \quad (2.86)$$

Sustituyendo (2.85) y (2.86) en (2.83) obtenemos

$$V = (1 + p\mu)\alpha a - (3 + 4p\mu)\beta b^{-1}.$$

Por simplicidad escogemos $p = 1$, entonces

$$V = (1 + \mu)\alpha a - (3 + 4\mu)\beta b^{-1}. \quad (2.87)$$

Para poder determinar un rango de validez aceptable para la variable μ debemos hacer dos observaciones: Si μ tomara el valor $\mu = -3/4$, tendríamos que

$$1 + \mu = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad 3 + 4\mu = 0,$$

entonces este valor de μ en (2.87) nos llevaría otra vez a tomar la velocidad del solitón $V = \alpha a/4$. Por otra parte si μ tomara el valor $\mu = -1/2$, tendríamos que

$$1 + \mu = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad 3 + 4\mu = 1,$$

y en (2.87) regresaríamos al valor $V = \alpha a/2 - \beta b^{-1}$. Por lo tanto, para evitar tomar valores de V que han mostrado no ser congruentes con los hechos físicos, escogemos μ como

$$-\frac{1}{2} < \mu.$$

Con (2.87) como nueva aproximación para la velocidad y tal que $\mu > -1/2$, de la ecuación (2.34) obtenemos

$$\begin{aligned} \pi \frac{d}{dt}(ab) &= \alpha a^2 - 2\beta ab^{-1} - 2a[(1 + \mu)\alpha a - (3 + 4\mu)\beta b^{-1}] \\ &= \alpha a^2 - 2\beta ab^{-1} - 2(1 + \mu)\alpha a^2 + 2(3 + 4\mu)\beta ab^{-1} \\ &= (1 - 2 - 2\mu)\alpha a^2 + (6 + 8\mu - 2)\beta ab^{-1} \\ &= -(1 + 2\mu)\alpha a^2 + 4(1 + 2\mu)\beta ab^{-1} \\ &= (1 + 2\mu)(4\beta ab^{-1} - \alpha a^2) \\ &= (1 + 2\mu)a^2 \left(\frac{4\beta}{ab} - \alpha \right). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{d}{dt}(ab) = \frac{(1 + 2\mu)a^2}{\pi} \left(\frac{4\beta}{ab} - \alpha \right).$$

Haciendo $y = ab$,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(1+2\mu)a^2}{\pi} \left(\frac{4\beta}{y} - \alpha \right).$$

Entonces

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(1+2\mu)a^2}{\pi y} (4\beta - \alpha y). \quad (2.88)$$

Por otra parte, sustituyendo (2.88) en (2.81) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{1}{\alpha a y} \frac{(1+2\mu)a^2}{\pi y} (4\beta - \alpha y) \left(\alpha a^2 + 8\pi \frac{(1+2\mu)a^2}{\pi y} (4\beta - \alpha y) \right) \\ &= -\frac{(1+2\mu)a}{\alpha \pi y^2} (4\beta - \alpha y) \left(\frac{\alpha a^2 y}{y} + \frac{8(1+2\mu)a^2}{y} (4\beta - \alpha y) \right) \\ &= -\frac{(1+2\mu)a^3}{\alpha \pi y^3} (4\beta - \alpha y) (\alpha y + 8(1+2\mu)(4\beta - \alpha y)). \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{da}{dt} = -\frac{(1+2\mu)a^3}{\alpha \pi y^3} (4\beta - \alpha y) (\alpha y + 8(1+2\mu)(4\beta - \alpha y)). \quad (2.89)$$

El sistema (2.34), (2.67), (2.79) y (2.87) se reduce entonces al sistema

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(1+2\mu)a^2}{\pi y} (4\beta - \alpha y), \quad (2.88)$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{(1+2\mu)a^3}{\alpha \pi y^3} (4\beta - \alpha y) (\alpha y + 8(1+2\mu)(4\beta - \alpha y)), \quad (2.89)$$

donde $y = ab$ y $\mu > -1/2$.

Puesto que $1+2\mu$ es positivo y a es diferente de cero, entonces, una vez más, los únicos puntos de equilibrio del sistema están determinados por la línea $y = y_0$ con

$$y_0 = \frac{4\beta}{\alpha}.$$

Enseguida estudiaremos su estabilidad. Sea $S = (1+2\mu)$ y sean

$$F(y, a) = \frac{S a^2}{\pi y} (4\beta - \alpha y),$$

$$G(y, a) = -\frac{S a^3}{\alpha \pi y^3} (4\beta - \alpha y) (\alpha y + 8S(4\beta - \alpha y)).$$

Derivamos F y G respecto a sus variables con objeto de construir la matriz jacobiana

$$F_y = -\frac{Sa^2}{\pi y^2}(4\beta - \alpha y) - \frac{\alpha Sa^2}{\pi y}.$$

$$F_a = \frac{2Sa}{\pi y}(4\beta - \alpha y).$$

$$G_y = \frac{3Sa^3}{\alpha\pi y^4}(4\beta - \alpha y)(\alpha y + 8S(4\beta - \alpha y)) + \frac{\alpha Sa^3}{\alpha\pi y^3}(\alpha y + 8S(4\beta - \alpha y)) \\ - \frac{\alpha Sa^3}{\alpha\pi y^3}(4\beta - \alpha y)(1 - 8S),$$

$$G_a = -\frac{3Sa^2}{\alpha\pi y^3}(4\beta - \alpha y)(\alpha y + 8S(4\beta - \alpha y)).$$

Evaluando en (y_0, a_0) , donde a_0 es un número arbitrario diferente de cero, se obtiene

$$F_y = -\frac{\alpha^2 Sa_0^2}{4\pi\beta},$$

$$F_a = 0,$$

$$G_y = \frac{\alpha^3 Sa_0^3}{16\pi\beta^2},$$

$$G_a = 0.$$

Por lo tanto la matriz jacobiana es

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha^2 Sa_0^2}{4\pi\beta} & 0 \\ \frac{\alpha^3 Sa_0^3}{16\pi\beta^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que los valores y vectores propios son

$$\lambda_1 = 0, \quad \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = -\frac{(1+2\mu)\alpha^2 a_0^2}{4\pi\beta}, \quad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\alpha a_0}{4\beta} \end{pmatrix}.$$

Dado que $1 + 2\mu$ y β son números positivos, entonces λ_2 es un número negativo. Por tanto $y = y_0$ es una línea de equilibrio estable y cada uno de sus puntos es un nodo de inflexión. En otras palabras, cualquiera que sea la condición inicial y cualquiera que sea el signo de α y el signo de a , el pulso inicial llegará a ser un solitón (véase la figura 11).

Sin embargo la masa ab la estamos tomando positiva y como b es siempre positivo esto nos fuerza a considerar sólo a positivo. Puesto que

$$ab = \frac{4\beta}{\alpha}$$

en la línea de equilibrio, entonces esto nos fuerza también a tomar sólo α positivo.³

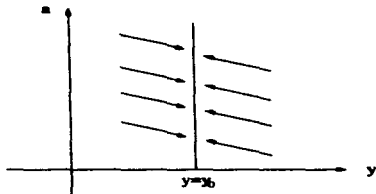


Figura 11: Estabilidad.

Un hecho notable del sistema (2.88) y (2.89) es que es integrable. Para puntos que no son parte de la línea de equilibrio podemos dividir la ecuación (2.89) entre (2.88) y aplicar la regla de la cadena para obtener

$$\frac{da}{dy} = -\frac{a}{\alpha y^2} (\alpha y + 8(1 + 2\mu)(4\beta - \alpha y)),$$

o equivalentemente

$$\frac{da}{dy} = -\frac{a}{\alpha y^2} (32(1 + 2\mu)\beta - (7 + 16\mu)\alpha y). \quad (2.90)$$

³Cabe mencionar que tomar α positivo siempre puede ser posible a través de un cambio de variable. Supongamos que α es un número negativo en la ecuación de Benjamin-Ono

$$u_t + \alpha u u_x + \beta \mathcal{H}_{xx}(u; x) = 0.$$

Cambiamos u por $-u$:

$$-u_t + \alpha u u_x - \beta \mathcal{H}_{xx}(u; x) = 0.$$

Entonces multiplicando por -1 obtenemos

$$u_t - \alpha u u_x + \beta \mathcal{H}(u) = 0$$

reescribiendo $-\alpha$ por α tenemos ahora un número positivo.

Luego

$$\int \frac{da}{a} = - \int \left(\frac{32(1+2\mu)\beta}{\alpha y^2} - \frac{(7+16\mu)}{y} \right) dy + C$$

donde C es la constante de integración. Entonces

$$\ln |a| = \frac{32(1+2\mu)\beta}{\alpha y} + (7+16\mu) \ln |y| + C.$$

Por tanto

$$a = C y^{7+16\mu} \exp \left(\frac{32(1+2\mu)\beta}{\alpha y} \right). \quad (2.91)$$

Sustituyendo (2.91) en (2.90) vemos que

$$\frac{da}{dy} = - \frac{C}{\alpha} y^{5+16\mu} \left(32(1+2\mu)\beta - (7+16\mu)\alpha y \right) \exp \left(\frac{32(1+2\mu)\beta}{\alpha y} \right).$$

Analizando la segunda derivada, es fácil ver que a tiene un mínimo y_{\min} en

$$y_{\min} = \frac{32(1+2\mu)\beta}{(7+16\mu)\alpha}$$

el cual estará en nuestra región de estudio $a > 0$ sólo si

$$- \frac{7}{16} < \mu.$$

Como

$$- \frac{1}{2} < - \frac{7}{16},$$

entonces esta condición establece una nueva cota inferior para el parámetro μ :

$$- \frac{7}{16} < \mu.$$

Con esta última condición es fácil probar que

$$y_0 < y_{\min}.$$

para toda $\mu > -7/16$.

Supongamos que $\mu = 0$. La gráfica del plano fase (figura 12 y figura 13) nos muestra que si la masa inicial AB es mayor que y_0 entonces la onda principal evolucionará perdiendo masa y disminuyendo su amplitud hasta alcanzar el punto y_{\min} a partir del cual comenzará a crecer su amplitud sin dejar de perder masa hasta estabilizarse en un solitón. Por otra parte si la masa inicial de la onda es menor que y_0 , entonces ésta tomará masa del medio que lo circunda formando una depresión que tiene masa negativa (véase la figura 14) al tiempo que disminuye su amplitud hasta que llegue a estabilizarse en un solitón.

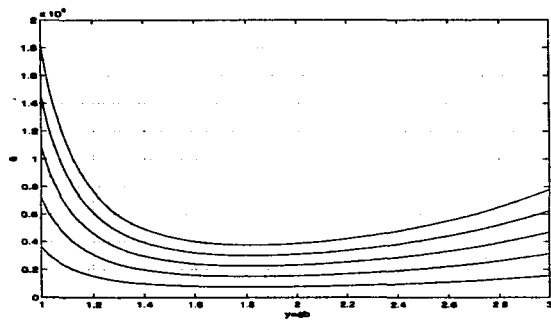


Figura 12: Caso $\mu = 0$, $\beta = 2$, $\alpha = 5$, $y_0 = 1.60$ y $y_{min} = 1.83$.

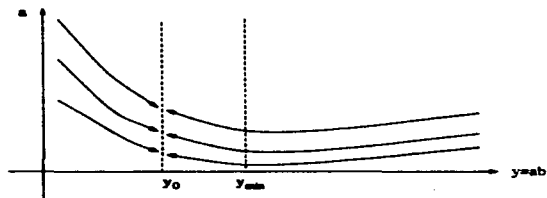


Figura 13: ab = Masa y a = Amplitud.

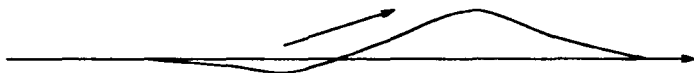


Figura 14: Masa negativa detrás de la onda.

En el caso en que AB es mayor que y_0 la masa desprendida por la onda principal es radiada hacia $-\infty$ puesto que la radiación tiene velocidad de grupo negativa.

El análisis anterior nos llevó a la conclusión de que la onda principal tenderá a un solitón independientemente de sus condiciones iniciales. Esto nos indica que su masa llegará a ser estable a partir de algún tiempo. En el caso particular en que AB sea mayor que y_0 tendremos que la masa de la radiación dejará de crecer cuando esto ocurra. Esa es la condición para que un segundo solitón comience a formarse.

El cambio en la gráfica del plano fase para otros valores de α y β positivos no tiene una gran diferencia. Considerar α mayor que β o viceversa es irrelevante. Todas ellas siguen mostrando el mismo comportamiento de la onda, como se muestra en las figuras 15 (A) y 15 (B). Lo mismo ocurre con valores de μ distintas de cero. En la figura 16 se muestra el caso $\mu = 2$.

La consistencia de los resultados depende de la forma que se adopte para aproximar la velocidad. Esto es de esperarse ya que el acoplamiento del pulso inicial con la radiación es a través de la fase y ésta está determinada por la velocidad. Desde luego el proceso de formación y estabilidad depende fuertemente del papel que juega la radiación.

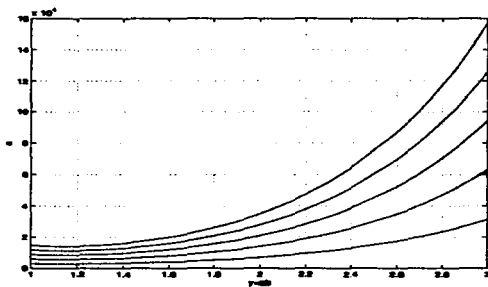


Figura 15 (A): Caso $\mu = 0$, $\alpha = 8$, $\beta = 2$, $y_0 = 1$ y $y_m = 1.14$.

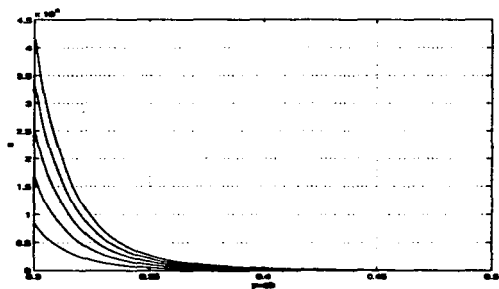


Figura 15 (B): Caso $\mu = 0$, $\alpha = 8$, $\beta = 2$, $y_0 = 1$ y $y_m = 1.14$.

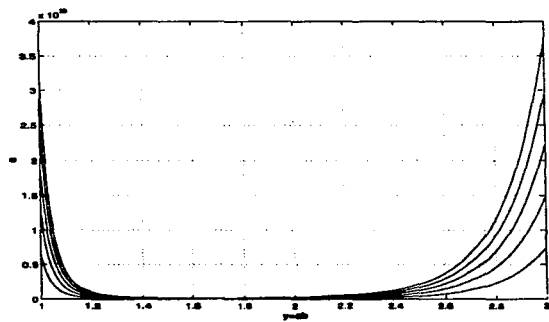


Figura 16: Caso $\mu = 2$, $\alpha = 5$, $\beta = 2$, $y_0 = 1.6$ y $y_{min} = 1.64$.

Conclusiones

Partiendo de la condición inicial:

$$u(x, 0) = \frac{A^2 B}{x^2 + B^2}$$

donde A y B son constantes arbitrarias, B positivo, hemos mostrado cómo las leyes de conservación de masa y de momento asociadas a la ecuación de Benjamin-Ono:

$$u_t + \alpha u u_x + \beta \mathcal{H}_{xx}(u; x) = 0$$

nos ayudan a determinar cómo se forman los solitones durante el viaje de la onda principal.

Para esto supusimos que la onda principal evoluciona con la forma

$$u_0(x, t) = \frac{a(t)^2 b(t)}{x^2 + b(t)^2}.$$

Por simplicidad restringimos nuestro análisis al caso b positivo. Un estudio acerca del valor b negativo podría ilustrar si ambos casos, positivo y negativo, predicen el mismo tipo de resultados. De las leyes de conservación de masa y de momento establecimos un sistema de ecuaciones que describen la evolución de los parámetros asociados al pulso inicial. Con objeto de analizar la formación de solitones nos percatamos que la predicción de la formación de los mismos está fuertemente relacionada con la velocidad que la onda principal posea, por esta razón determinamos una región de valores de la velocidad que nos permite analizar la formación de solitones.

La parte más notable de este estudio es que obtuvimos un sistema de ecuaciones de evolución que es integrable. El análisis cualitativo del sistema a través de la amplitud y de la masa nos permitió mostrar cómo, independientemente de la masa inicial, la onda interna perderá o tomará masa hasta llegar a estabilizarse en el tipo de onda que se conoce como solitón, según si su masa inicial es mayor o menor que la masa del solitón la cual está determinada por los coeficientes de la ecuación de Benjamin-Ono.

Apéndice A

Límites

En este apéndice incluimos las demostraciones de los límites usados en la Sección 1.3 del Capítulo 1. Todos ellos se demuestran utilizando la regla de L'Hospital para la forma indeterminada $0/0$.

$$A) \lim_{kh \rightarrow \infty} k \coth(kh) = |k| \quad \text{si } k \neq 0.$$

Demostración:

$$\lim_{kh \rightarrow \infty} k \coth(kh) = \lim_{kh \rightarrow \infty} k \frac{\cosh(kh)}{\sinh(kh)} = \lim_{kh \rightarrow \infty} k \frac{e^{kh} + e^{-kh}}{e^{kh} - e^{-kh}}.$$

Los casos $k > 0$ y $k < 0$ pueden ser arreglados de la siguiente manera:

$$\lim_{kh \rightarrow \infty} k \frac{e^{kh} + e^{-kh}}{e^{kh} - e^{-kh}} = \begin{cases} \lim_{kh \rightarrow \infty} k \frac{1 + e^{-2kh}}{1 - e^{-2kh}} & \text{si } k > 0 \\ \lim_{kh \rightarrow \infty} k \frac{e^{2kh} + 1}{e^{2kh} - 1} & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

Tomando el límite cuando kh tiende a infinito se obtiene

$$\lim_{kh \rightarrow \infty} k \coth(kh) = \begin{cases} k & \text{si } k > 0 \\ -k & \text{si } k < 0 \end{cases}.$$

Por tanto

$$\lim_{kh \rightarrow \infty} k \coth(kh) = |k|.$$

$$B) \lim_{k \rightarrow 0} k \coth(kh) = \frac{1}{h} \text{ si } h \neq 0.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} k \coth(kh) &= \lim_{k \rightarrow 0} k \frac{\cosh(kh)}{\sinh(kh)} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \cosh(kh) \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\sinh(kh)}. \end{aligned}$$

El primer límite de la última igualdad es

$$\lim_{k \rightarrow 0} \cosh(kh) = 1$$

y por la regla de L'Hospital el segundo límite de la última igualdad existe y es

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\sinh(kh)} = \frac{1}{h}.$$

Por tanto

$$\lim_{k \rightarrow 0} k \coth(kh) = \frac{1}{h}.$$

$$C) \lim_{k \rightarrow 0} \{ \coth(kh) - kh \operatorname{csch}^2(kh) \} = 0 \text{ para } h \neq 0.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \{ \coth(kh) - kh \operatorname{csch}^2(kh) \} &= \lim_{k \rightarrow 0} \left\{ \frac{\cosh(kh)}{\sinh(kh)} - \frac{kh}{\sinh^2(kh)} \right\} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\cosh(kh) \sinh(kh) - kh}{\sinh^2(kh)}. \end{aligned}$$

Aplicando la regla de L'Hospital a la última igualdad se obtiene

$$\lim_{k \rightarrow 0} \{ \coth(kh) - kh \operatorname{csch}^2(kh) \} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{h \sinh^2(kh) + h \cosh^2(kh) - h}{2h \sinh(kh) \cosh(kh)}.$$

Y otra vez aplicando la regla de L'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \{ \coth(kh) - kh \operatorname{csch}^2(kh) \} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{2h \sinh(kh) \cosh(kh) + 2h \cosh(kh) \sinh(kh)}{2h \cosh^2(kh) + 2h \sinh^2(kh)} \\ &= \frac{0}{2h}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\lim_{k \rightarrow 0} \{ \coth(kh) - kh \operatorname{csch}^2(kh) \} = 0.$$

$$D) \lim_{k \rightarrow 0} \{ kh \operatorname{csch}^2(kh) \coth(kh) - \operatorname{csch}^2(kh) \} = \frac{1}{3} \quad \text{para } h \neq 0.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \{ kh \operatorname{csch}^2(kh) \coth(kh) - \operatorname{csch}^2(kh) \} &= \lim_{k \rightarrow 0} \left\{ \frac{kh \cosh(kh)}{\operatorname{senh}^3(kh)} - \frac{1}{\operatorname{senh}^2(kh)} \right\} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \left\{ \frac{kh \cosh(kh) - \operatorname{senh}(kh)}{\operatorname{senh}^3(kh)} \right\}. \end{aligned}$$

Usando la regla de L'Hospital en la última igualdad se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \{ kh \operatorname{csch}^2(kh) \coth(kh) - \operatorname{csch}^2(kh) \} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-h \cosh(kh) + h \cosh(kh) + kh^2 \operatorname{senh}(kh)}{3h \operatorname{senh}^2(kh) \cosh(kh)} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{kh}{3 \operatorname{senh}(kh) \cosh(kh)}. \end{aligned}$$

Y usando otra vez la regla de L'Hospital se obtiene

$$\lim_{k \rightarrow 0} \{ kh \operatorname{csch}^2(kh) \coth(kh) - \operatorname{csch}^2(kh) \} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{h}{3(h \cosh^2(kh) + h \operatorname{senh}^2(kh))}$$

Por tanto

$$\lim_{k \rightarrow 0} \{ kh \operatorname{csch}^2(kh) \coth(kh) - \operatorname{csch}^2(kh) \} = \frac{1}{3}.$$

Apéndice B

La transformada de Fourier de la función $1/x$

En este apéndice demostraremos la identidad

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{F}\left(\frac{1}{\zeta}; k\right) = i \operatorname{sgn}(k)$$

que fue utilizada en las secciones 1.4 y 1.5 del Capítulo 1.

Demostración:

Por definición

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\zeta}; k\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\zeta}}{\zeta} d\zeta,$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{1}{\zeta}; k\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{ik\zeta}}{\zeta} d\zeta + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{ik\zeta}}{\zeta} d\zeta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-ik(-\zeta)}}{(-\zeta)} d(-\zeta) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{ik\zeta}}{\zeta} d\zeta. \end{aligned}$$

Cambiando la variable ζ por $-\zeta$ en la primera integral, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{1}{\zeta}; k\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{ik\zeta} - e^{-ik\zeta}}{\zeta} d\zeta \\ &= \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k\zeta)}{\zeta} d\zeta. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Si $k > 0$ entonces

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k\zeta)}{\zeta} d\zeta = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k\zeta)}{k\zeta} d(k\zeta). \quad (\text{B.2})$$

Esta última integral es fácil de conocer usando el teorema del residuo. Sea $x = k\zeta$. Consideremos

$$I = \wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx,$$

donde \wp es el valor principal de Cauchy (véase Apéndice C). Entonces

$$I = \pi i \text{ (Residuo del integrando sobre el eje } x) = \pi i. \quad (\text{B.3})$$

Por otra parte

$$\operatorname{Im} I = \wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx.$$

Por la continuidad de $\operatorname{sen}(x)/x$ en $x = 0$ se tiene que

$$\wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx.$$

Como el integrando es par entonces

$$\operatorname{Im} I = 2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx.$$

Por tanto, de (B.3)

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{B.4})$$

Sustituyendo (B.4) en (B.2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k\zeta)}{\zeta} d\zeta = \frac{\pi}{2},$$

y sustituyendo este último valor en (B.1) obtenemos

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\zeta}; k\right) = \left(\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\right) \left(\frac{\pi}{2}\right) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (\text{B.5})$$

En el caso $k < 0$ se puede escribir

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k\zeta)}{\zeta} d\zeta = - \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(-k\zeta)}{-k\zeta} d(-k\zeta).$$

Por tanto, en este caso,

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\zeta}; k\right) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (\text{B.6})$$

En conclusión, de (B.5) y (B.6)

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{F}\left(\frac{1}{\zeta}; k\right) = i \operatorname{sgn}(k).$$

Apéndice C

La transformada de Hilbert

En el caso de la ecuación BO en el Capítulo 1 surgió de una forma natural la integral

$$\frac{1}{\pi} \wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_{\xi\xi}(\xi, t)}{\xi - x} d\xi.$$

Esta integral es sólo la aplicación a $u_{\xi\xi}$ de una integral más general conocida como la transformada de Hilbert que se acostumbra denotar por

$$\mathcal{H}(f; x) = \frac{1}{\pi} \wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t - x} dt,$$

donde \wp denota el valor principal de Cauchy en el polo $t = x$ que se define como

$$\wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t - x} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{x-\epsilon} \frac{f(t)}{t - x} dt + \int_{x+\epsilon}^{\infty} \frac{f(t)}{t - x} dt \right\}.$$

Dentro de la teoría de la transformada de Hilbert uno de los teoremas de existencia nos asegura que si f está en $L(-\infty, \infty)$, es decir si f es medible y absolutamente integrable, entonces $\mathcal{H}(f; x)$ existe para casi todos los valores de x [Titchmarsh, p. 132]. Como estamos trabajando con u que es una función medible y absolutamente integrable, entonces este teorema nos garantiza la existencia de la transformada de Hilbert para u .

Para determinar la transformada inversa de Hilbert observamos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(f; x) &= \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}} \wp \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left\{ -\frac{\sqrt{2\pi}}{x-t} \right\} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \wp \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(x-t)} \right\} dt. \end{aligned}$$

Entonces

$$\mathcal{H}(f; x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \wp \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt$$

donde

$$g(x) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}x}.$$

Por tanto

$$\mathcal{H}(f; x) = (f * g)(x).$$

Aplicando la transformada de Fourier en ambos términos de la ecuación anterior y usando el teorema de convolución obtenemos.

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}(f; x); k) = \mathcal{F}(f; k)\mathcal{F}(g; k).$$

Como (véase Apéndice B)

$$i \operatorname{sgn}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{F}\left(\frac{1}{x}; k\right),$$

es decir,

$$\mathcal{F}(g; k) = -i \operatorname{sgn}(k),$$

entonces

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}(f; x); k) = \mathcal{F}(f; k) \{-i \operatorname{sgn}(k)\}.$$

En consecuencia

$$\mathcal{F}(f; k) = \{i \operatorname{sgn}(k)\} \mathcal{F}(\mathcal{H}(f; x); k).$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f; k) &= -\mathcal{F}(g; k) \mathcal{F}(\mathcal{H}(f; x); k) \\ &= -\mathcal{F}(g * \mathcal{H}(f; x); k). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} f(x) &= -(g * \mathcal{H}(f; t))(x) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-t) \mathcal{H}(f; t) dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(x-t)}\right) \mathcal{H}(f; t) dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{H}(f; t)}{t-x} dt. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$f(x) = -\mathcal{H}(\mathcal{H}(f; t); x),$$

de aquí que la transformada inversa de Hilbert es

$$\mathcal{H}^{-1}(f) = -\mathcal{H}(f).$$

Algunas de las propiedades básicas de la transformada de Hilbert son

$$\mathcal{H}(f(a+t); x) = \mathcal{H}(f(t); a+x) \quad (\text{C.1})$$

$$\mathcal{H}(f(at); x) = \mathcal{H}(f(t); ax), \quad a > 0 \quad (\text{C.2})$$

$$\mathcal{H}(f(-at); x) = -\mathcal{H}(f(t); -ax), \quad a > 0 \quad (\text{C.3})$$

$$\mathcal{H}\left(\frac{df}{dt}(t); x\right) = \frac{d}{dx}\mathcal{H}(f(t); x) \quad (\text{C.4})$$

$$\mathcal{H}(tf(t); x) = x\mathcal{H}(f(t); x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \quad (\text{C.5})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathcal{H}(g; x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(f; x)g(x) dx \quad (\text{C.6})$$

que, claro, se demuestran a partir de la definición.

De la propiedad (C.6) vemos que, si $f = g$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathcal{H}(f; x) dx = 0. \quad (\text{C.7})$$

Usando (C.4) y (C.7) vemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\mathcal{H}'(f; x) dx = 0. \quad (\text{C.8})$$

Una función que ocupa un papel central en el estudio de la ecuación BO es la función

$$f(x) = \frac{ab^2}{x^2 + b^2}$$

donde a es una constante diferente de cero y b es una constante positiva. Su importancia reside en que su transformada de Hilbert es una función racional como lo es $f(x)$, y eso lo probaremos enseguida.

Por definición

$$\mathcal{H}\left(\frac{ab^2}{x^2 + b^2}; \zeta\right) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ab^2 dx}{(x^2 + b^2)(x - \zeta)}. \quad (\text{C.9})$$

Para encontrar el valor de esta integral extendemos sus variables al campo de los números complejos: Sea

$$J = \int_C \frac{ab^2 dz}{(z - bi)(z + bi)(z - \zeta)}$$

donde z es un número complejo y C es el contorno compuesto de dos semicírculos y dos segmentos de recta como lo muestra la figura A.

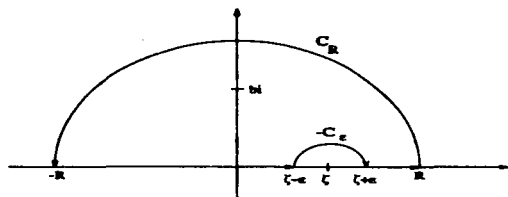


Figura A: Integración de contorno en el plano complejo.

Si llamamos C_R a la semicircunferencia que va de R a $-R$, y $-C_\epsilon$ a la semicircunferencia que va de $\zeta - \epsilon$ a $\zeta + \epsilon$ entonces podemos reescribir la integral J como

$$J = \int_{C_R} + \int_{-R}^{\zeta - \epsilon} + \int_{-\zeta + \epsilon}^R + \int_{\zeta + \epsilon}^R$$

Para z en C_R tenemos que

$$|z - \zeta| > |z| - |\zeta| = |R - \zeta| = R - |\zeta| > 0,$$

de aquí que

$$\frac{1}{|z - \zeta|} < \frac{1}{R - |\zeta|}. \quad (\text{C.10})$$

Por otra parte,

$$|z^2 + b^2| > ||z|^2 - |b|^2| = |R^2 - b^2| = R^2 - b^2 > 0$$

luego

$$\frac{1}{|z^2 + b^2|} < \frac{1}{R^2 - b^2}. \quad (\text{C.11})$$

Usando (C.10) y (C.11) tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{ab^2 dz}{(z^2 + b^2)(z - \zeta)} \right| &< \int_{C_R} \frac{|ab^2| dz}{|z^2 + b^2||z - \zeta|} \\ &< \int_{C_R} \frac{|a|b^2 dz}{(R^2 - b^2)(R - |\zeta|)}. \end{aligned}$$

En consecuencia cuando R tiende a infinito

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} \frac{ab^2 dz}{(z^2 + b^2)(z - \zeta)} \right| = 0.$$

por tanto

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{ab^2 dz}{(z^2 + b^2)(z - \zeta)} = 0. \quad (\text{C.12})$$

Por otra parte, como ζ es un polo simple de J entonces cuando ϵ tiende a cero se tiene (véase Marsden, p. 311)

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-C_\epsilon} \frac{ab^2 dz}{(z^2 + b^2)(z - \zeta)} &= -\pi i \text{ (Residuo del integrando en } \zeta) \\ &= -\pi i \left(\frac{ab^2}{\zeta^2 + b^2} \right). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-C_\epsilon} \frac{ab^2 dz}{(z^2 + b^2)(z - \zeta)} = -\frac{ab^2 \pi i}{\zeta^2 + b^2}. \quad (\text{C.13})$$

Por otra parte, considerando la integral sobre todo el contorno C se obtiene, por el teorema del residuo,

$$\begin{aligned} J &= 2\pi i \text{ (Residuo del integrando en } bi) \\ &= 2\pi i \left(\frac{ab^2}{2bi(bi - \zeta)} \right) \\ &= \frac{abr}{bi - \zeta} \\ &= -\frac{abr(\zeta + bi)}{\zeta^2 + b^2}. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\int_{C_R} + \int_{-R}^{\zeta - \epsilon} + \int_{-C_\epsilon} + \int_{\zeta + \epsilon}^R = -\frac{abr(\zeta + bi)}{\zeta^2 + b^2}.$$

Finalmente, tomando los límites cuando R tiende a infinito y cuando ϵ tiende a cero y usando (C.12) y (C.13) obtenemos

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ab^2 dx}{(x^2 + b^2)(x - \zeta)} - \frac{ab^2 \pi i}{\zeta^2 + b^2} = -\frac{abr(\zeta + bi)}{\zeta^2 + b^2}.$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ab^2 dx}{(x^2 + b^2)(x - \zeta)} &= \frac{ab^2 \pi i}{\zeta^2 + b^2} - \frac{abr(\zeta + bi)}{\zeta^2 + b^2} \\ &= -\frac{abr\zeta}{\zeta^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ab^2 dx}{(x^2 + b^2)(x - \zeta)} = -\frac{ab\zeta}{\zeta^2 + b^2}, \quad (\text{C.14})$$

es decir, sustituyendo (C.14) en (C.9),

$$\mathcal{H} \left(\frac{ab^2}{x^2 + b^2}; \zeta \right) = -\frac{ab\zeta}{\zeta^2 + b^2}. \quad (\text{C.15})$$

En el caso en que b fuese negativo tendríamos un cambio de signo en la integral porque, en este caso, el contorno C se recorrería en sentido contrario a como lo hemos hecho.

Como ya lo mencionamos, observamos que la transformada de Hilbert de la función racional

$$f(x) = \frac{ab^2}{x^2 + b^2}$$

es otra función racional.

Además del libro de Titchmarsh, el lector interesado en la transformada de Hilbert puede consultar también, por ejemplo, H. Hochstadt (contiene algunos ejemplos de aplicaciones de la transformada) y I. N. Sneddon (contiene una concisa y clara sección de la transformada de Hilbert).

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Referencias

- Benjamin, T. B.**, *Internal waves of permanent form in fluids of great depth*, *J. Fluid Mech.*, **29**, pp. 559-592 (1967).
- Courant, R. y John, F.**, *Introduction to calculus and analysis - Volume I*, Springer-Verlag, New York, 1989.
- Courant, R. y John, F.**, *Introduction to calculus and analysis - Volume II*, Springer-Verlag, New York, 1989.
- Davis, R. E., y Acrivos, A.**, *Solitary internal waves in deep water*, *J. Fluid Mech.*, **29**, pp. 593-607 (1967).
- Hochstadt, H.**, *Integral equations*, John Wiley & Sons., New York, 1973.
- Kath, W. L. y Smyth, N. F.**, *Soliton evolution and radiation loss for the Korteweg-de Vries equation*, *Phys. Rev. E*, **51**, pp. 661-670 (1995).
- Korteweg, D. J., y de Vries, G.**, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, *Phil. Mag.*, **39**, pp. 422-443 (1895).
- Marsden, J. E. y Hoffman, M. J.**, *Basic Complex Analysis*, Second Edition, W. H. Freeman & Co., New York, 1987.
- Miles, J. W.**, *The Korteweg-de Vries equation: a historical essay*, *J. Fluid Mech.*, **108**, pp. 131-147 (1981).
- Ono, H.**, *Algebraic solitary waves in stratified fluids*, *J. Phys. Soc. of Japan*, **39**, pp. 1082-1091 (1975).
- Rahman, M.**, *Water waves*, Oxford University Press, Oxford, 1994.
- Sneddon, I. N.**, *The use of integral transforms*, McGraw-Hill, New York, 1972.
- Titchmarsh, E. C.**, *Introduction to the theory of Fourier Integrals*, Third edition (First edition, 1937). Chelsea, New York, 1986.

Whitham, G. B., *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley- Interscience Series of Texts, Monographs, and Tracts, John Wiley and Sons, New York, 1974.