

39
2ej



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**FASES DE BERRY EN OPTICA.
FASES DE BERRY POR INTERFEROMETRIA
OPTICA CON HACES DE LUZ POLARIZADA**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
F I S I C O
P R E S E N T A
YURI NAHMAD MOLINARI



DIR. DE TESIS: M. en C. MARCELA DOLORES GREYHER GONZALEZ



MEXICO, D. F. **FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR**

1997

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: **Fases de Berry en Óptica.**
por Interferometría Óptica con haces de luz polarizada.

realizado por Yuri Kanna Molinari

con número de cuenta 0552700-2 pasante de la carrera de Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

Propietario

Propietario

Suplente

Suplente

M. en C. ANGELA DOLores GREYNER GONZALEZ

DR. NEIL CHARLES BRUCE JAVISON

DR. SALVADOR CARLOS CUEVAS GARDONA

DR. MARIA ANABELI SANCHEZ TREVINO

DR. HAYD VILLAGRA MONTA

Manuel Brutt
Neil Bruce

Angela Dolores Greyner Gonzalez
Yuri Kanna Molinari

Consejo Departamental de Física:

DR. ROBERTO ALEJANDRO REALSOLINI VILLALBA

DUARTE

A mis padres Sara y Salomón

A Lenita

Agradecimientos

Debo agradecer a mis asesores Enrique López Moreno y a Marcela Grether, no solo por el gran esfuerzo y dedicación que dedicaron para orientarme en la elaboración de este trabajo, sino también por su apoyo incondicional y sus enseñanzas además de académicas, de un profundo contenido humano. Les agradezco haberme ofrecido su amistad y la oportunidad de iniciarme en el trabajo científico con su colaboración.

Les agradezco a la Dra. Araceli Gongora, y a los Doctores Neil Bruce, Salvador Cuevas y Mayo Villagran las críticas y comentarios, que ayudaron a que este trabajo fuera mas claro y tomara forma definitiva.

La mayor parte del equipo utilizado para los experimentos, así como la computadora donde se realizaron los cálculos y la edición de este trabajo, se pudo obtener gracias al apoyo del proyecto "UNAM-PAPIME-7" (1995-1996) del Laboratorio de Óptica de la Facultad de Ciencias.

A mi camarada Alejandro Valderrama le agradezco toda la invaluable ayuda que me presto en cuestiones técnicas y por su amistad y tiempo.

Indice

1	Resumen.	1
	Capítulo 1. Polarización.	2
	1.1 Las ecuaciones de Maxwell y las ondas electromagnéticas	2
	1.1.1 Vectores de Jones.	10
	1.1.2 La esfera de Poincaré.	15
	1.1.3 Los parámetros de Stokes.	18
	1.2 La matriz de coherencia.	20
	1.3 Estados de polarización del fotón.	26
	1.4 Dispositivos de polarización. Representación matricial.	29
	1.4.1 Matrices de Mueller	31
2	Capítulo 2. Interferometría.	36
	2.1 Interferencia de dos ondas.	36
	2.2 Estados de polarización elípticos mutuamente ortogonales.	39
	2.3 Interferómetros.	42
	2.4 Interferómetros de división del frente de onda.	42
	2.5 Interferómetros de división de la amplitud.	43
3	Capítulo 3. Coeficientes de Fresnel.	48
	3.1 Reflexión en dieléctricos.	48
	3.2 Reflexión en metales.	52
	3.2.1 Matrices de reflexión y ecuaciones de Fresnel.	53
4	Capítulo 4. Fase de Berry.	55
	4.1 La aproximación adiabática.	55
	4.2 Fase de Berry.	59
	4.2.1 Fórmula general del factor de fase.	59
	4.2.2 Degeneraciones.	65
	4.2.3 Espines en campos magnéticos.	69

5	Capítulo 5. Fases de Berry en óptica.	74
	5.0 Observación de fases de Berry por interferometría óptica.	74
	5.1 Rotación del plano de polarización como una manifestación de las fases de Berry.	75
	5.2 Fases de Berry por interferometría Mach-Zehnder.	80
	5.2.1 Manifestaciones de la fase topológica de Berry para el fotón.	83
	5.2.2 Un cálculo clásico.	86
	5.2.3 Observaciones.	91
	5.3 Mach-Zehnder plano.	104
6	Capítulo 6. Conclusiones.	107
	Referencias.	108

Resumen

En éste trabajo se analizan fases de Berry por interferometría óptica con haces de luz polarizada y por medio de una configuración de tres espejos, haciendo dos diferentes tipos de cálculos teóricos; el primero considera la evolución de la dirección del espín del fotón en la esfera unitaria de todas las posibles direcciones de propagación. El segundo tipo de cálculo es del tipo de Jones (matricial), e involucra las ecuaciones de Maxwell y todas las condiciones de frontera que los experimentos imponen. Finalmente se contrastan los resultados teóricos y experimentales (mediciones fotométricas), hallándose en acuerdo, con lo que se muestra la naturaleza geométrica de estas fases de un modo alternativo a los presentados en la literatura.

Capítulo 1

Polarización

En este capítulo se presentan algunas de las descripciones más importantes de los estados de polarización, tales como la de los vectores de Stokes y Jones, la matriz de coherencia, y la Esfera de Poincaré. Estas descripciones, con cualidades y ventajas complementarias, son equivalentes y a lo largo del texto se hará uso de varias de ellas. Los fundamentos de la luz polarizada se encuentran en las leyes de Maxwell del electromagnetismo y así dedicamos en la primera sección un breve repaso de éstas.

1.1 Las ecuaciones de Maxwell y las ondas electromagnéticas

El estado de excitación que se produce debido a la presencia de cargas eléctricas en el espacio, constituye lo que se conoce como el campo electromagnético. Este está representado por dos vectores, \mathbf{E} y \mathbf{B} , llamados el vector eléctrico y el vector de inducción magnética, respectivamente.

Las derivadas espaciales y temporales de los vectores del campo se relacionan por las ecuaciones de Maxwell, las cuales se cumplen en cada punto donde las propiedades físicas del medio sean continuas. En el sistema internacional de unidades se escriben de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

donde ϵ_0 y μ_0 son respectivamente la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del vacío; cuyos valores son:

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{m}^{-3} \text{Kg}^{-1} \text{s}^4 \text{A}^2$$

$$\mu_0 = 1.256 \times 10^{-6} \text{mKg}^2 \text{s}^{-2} \text{A}^{-2}$$

una situación peculiar ocurre en el caso de que siendo $\rho = \mathbf{J} = \mathbf{0}$, se tiene $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \neq \mathbf{0}$, $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq \mathbf{0}$, es decir en ausencia de cargas existen campos electromagnéticos variables. Estos campos constituyen las ondas electromagnéticas que estudiamos a continuación. Haciendo $\rho = \mathbf{J} = \mathbf{0}$ en las ecuaciones de Maxwell se tiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.8)$$

Aquí nos será de utilidad introducir el potencial vector \mathbf{A} y el potencial escalar ϕ . Cualquier \mathbf{A} que cumpla la condición

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.9)$$

satisface la ecuación 1.2, y substituyendo en 1.3 tenemos

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0}$$

y esto indica que el vector entre paréntesis debe de ser el gradiente de un escalar ($\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$).

Por tanto

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \quad (1.10)$$

donde hemos introducido un signo menos pues sera de utilidad posteriormente. Finalmente podemos escribir

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (1.11)$$

Así las expresiones 1.9 y 1.11 nos dan a \mathbf{E} y \mathbf{B} en función de las nuevas variables.

Es fácil demostrar que estas nuevas variables no están unívocamente determinadas, es decir, se pueden elegir de muchas formas sin que \mathbf{E} y \mathbf{B} varíen. Para mostrarlo, basta considerar para cualquier escalar f la expresión

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f \quad (1.12)$$

De aquí que \mathbf{A}' y \mathbf{A} satisfacen ambos la ecuación 1.9 pues obteniendo el rotacional de 1.12 se obtiene

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \underbrace{\nabla \times \nabla f}_{=0}$$

y por otra parte si hacemos uso de 1.11 y 1.12

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla \frac{\partial f}{\partial t}\right) - \nabla \phi = -\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla \left(\phi - \frac{\partial f}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla \phi' \quad (1.13)$$

es decir, \mathbf{E} tampoco varía si se toma junto con 1.12 a ϕ' de la forma

$$\phi' = \phi - \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.14)$$

La invariancia de \mathbf{E} y \mathbf{B} ante las transformaciones 1.12 y 1.14, permite elegir con suficiente libertad para que las ecuaciones resulten lo más simple posible. También resulta útil (como veremos más adelante) aplicar una condición más restrictiva, la llamada norma de Coulomb que impone a los potenciales satisfacer además

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \nabla^2 \phi = -4\pi\rho \quad (1.15)$$

Utilizando estas condiciones, las ecuaciones 1.9 y 1.11, en ausencia de cargas ($\rho = \mathbf{J} = 0$), quedan como:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

y además, considerando la ecuación

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

obtenemos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \partial \mathbf{A}}{\partial t \partial t} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

si ahora se tiene en cuenta que

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

(donde c coincide con la velocidad de la luz en el vacío) y haciendo uso de la norma de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ finalmente se obtiene

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0, \phi = 0, \quad (1.16)$$

que para el potencial vectorial tiene la estructura de una ecuación de onda. De forma análoga los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} satisfacen el mismo tipo de ecuación de onda. Basta aplicar los operadores " $\nabla \times$ " y " $-\frac{\partial}{\partial t}$ " para obtener

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0$$

que representan una perturbación electromagnética en el vacío propagándose con velocidad c . La óptica estudia estas ondas electromagnéticas en la banda angosta de frecuencias que van desde los 3.84×10^{14} hertz hasta aproximadamente 7.69×10^{14} Hz. La cantidad observable es la irradiancia, que es la energía que fluye a través de un área unitaria por unidad de tiempo en promedio temporal, y es proporcional al cuadrado de los campos. Es decir:

$$\begin{aligned} I &= \overline{\frac{c}{\mu_0} \langle \mathbf{B}^2 \rangle} \\ I &= c \epsilon_0 \langle \mathbf{E}^2 \rangle \end{aligned} \quad (1.17)$$

donde los corchetes indican un promedio temporal.

Ondas vectoriales

Consideremos una onda plana que se propaga a lo largo del eje-Z, es decir en la dirección del vector $\vec{k} = (0, 0, 1)$ esto significa que las parciales respecto a x e y son nulas y por lo tanto podemos escribir el operador nabla como

$$\nabla \equiv \left[0, 0, \frac{\partial}{\partial z} \right] = \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.18)$$

En estas condiciones la ecuación de onda 1.16 y la condición de Coulomb se escribirán

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(z,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_z(z,t)}{\partial z} = 0, \quad \phi = 0 \quad (1.20)$$

de donde se sigue inmediatamente que

$$\frac{\partial^2 A_z(z,t)}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 A_z(z,t)}{\partial t^2} = 0$$

y al integrar esta última ecuación respecto del tiempo se obtiene

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} = ctte(z)$$

donde $ctte(z)$ es una función de z constante en el tiempo (independiente de este) y usando 1.9 y 1.11 para encontrarlas componentes en dirección "Z" de los campos, obtenemos

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \Rightarrow E_z(z,t) = ctte(z) \quad (1.21)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \vec{k} \times \frac{\partial \mathbf{A}(z,t)}{\partial z} \Rightarrow B_x(z,t) = 0 \quad (1.22)$$

El campo E_z es constante en el tiempo por lo que lo podemos igualar a cero pues no afecta a la onda (variable en el tiempo); y del mismo modo hacemos $A_z = 0$ pues tampoco afecta al resultado físico. final. Esto quiere decir que los campos de la onda (variables) carecen de componente en la dirección de propagación (eje-Z) y, por tato, las ondas electromagnéticas son transversales, esto es que el vector eléctrico (magnético) de la onda tiene aún tiene dos grados de libertad en el plano perpendicular a la dirección de propagación. Al determinar como se mueve el vector eléctrico en este plano se determina el estado de polarización de la onda. Así podemos escribir

$$\mathbf{E} \cdot \vec{k} = \mathbf{B} \cdot \vec{k} = 0 \quad (1.23)$$

esta relación expresa la "transversalidad" de los campos, es decir, muestra que el vector de campo eléctrico y el vector de campo magnético están sobre un plano normal a la dirección de propagación dada por el vector \vec{k} .

Por otra parte, si se utiliza el argumento de una onda plana ($z - ct$) tendremos que $\mathbf{A}(z,t) = \mathbf{A}(u) = \mathbf{A}(z - ct)$ con $u = z - ct$, y si se tiene en cuenta que:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} = \frac{d\mathbf{A}}{du}$$

los campos se pueden escribir en la siguiente forma

$$\mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{A}}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{d\mathbf{A}}{du} \quad (1.24)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}(u) = \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \times \mathbf{A}(u) = \vec{k} \times \frac{d\mathbf{A}}{du} \frac{\partial u}{\partial z} = \vec{k} \times \frac{d\mathbf{A}}{du} = \frac{1}{c} \vec{k} \times \mathbf{E} \quad (1.25)$$

y de estas ecuaciones se obtienen inmediatamente

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \vec{k} \times \mathbf{E} \quad (1.26)$$

$$\mathbf{E} = -c \vec{k} \times \mathbf{B} \quad (1.27)$$

y tambien

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{E} \quad (1.28)$$

en estas últimas tres ecuaciones hay que recordar que el argumento de \mathbf{B} y \mathbf{E} es $z - ct$, es decir solo son validas para ondas planas. De las ecuaciones 1.26, 1.27 y 1.28, podemos concluir que los vectores \mathbf{B} , \mathbf{E} y \vec{k} , son mutuamente ortogonales.

Como el vector de Poynting para ondas planas se escribe como:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c\mu_0} E^2 \vec{k} = c\epsilon_0 E^2 \vec{k} \quad (1.29)$$

y como la densidad de energía de una onda electromagnetica esta dada por (ver Born and Wolf sec1.1(31)):

$$W = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) = \epsilon_0 E^2 \quad (1.30)$$

Entonces el vector de Poynting se puede reescribir como

$$\mathbf{S} = cW \vec{k} \quad (1.31)$$

y esta ecuación puede ser interpretada como el flujo de energía radiante. La llamada irradiancia es el promedio temporal del modulo del vector \mathbf{S} ó $I = \langle |\mathbf{S}| \rangle$.

Onda electromagnética plana armonica

El vector eléctrico de una onda plana monocromática puede ser descrito en términos de :

$$\begin{aligned} \vec{E}_x &= iE_{0x} \cos(kz - \omega t) \\ \vec{E}_y &= \hat{y} E_{0y} \cos(kz - \omega t + \epsilon) \end{aligned} \quad (1.32)$$

y como

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_x(z, t) + \mathbf{E}_y(z, t) \quad (1.33)$$

si $\epsilon = \pm 2n\pi$ es decir las componentes están desfasadas un múltiplo par de 2π entonces $\mathbf{E} = (iE_{ox} + jE_{oy}) \cos(kz - \omega t)$ que es un estado de polarización lineal, pero si $\epsilon = \pm n\pi$ es decir las componentes están desfasadas 180° entonces $\mathbf{E} = (iE_{ox} - jE_{oy}) \cos(kz - \omega t)$ la luz sera linealmente polarizada pero el plano de polarización estará rotado 90° .

Ahora bien si $E_{ox} = E_{oy} = E_o$ y $\epsilon = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ tendremos luz circular derecha $|D\rangle$ o $|+\rangle$ pues en este caso;

$$\mathbf{E} = E_o (i \cos(kz - \omega t) + j \sin(kz - \omega t)) \quad (1.34)$$

pero si como en el caso anterior $E_{ox} = E_{oy} = E_o$ y ahora $\epsilon = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ producirá luz circular izquierda $|L\rangle$ o $|-\rangle$ es decir

$$\mathbf{E} = E_o (i \cos(kz - \omega t) - j \sin(kz - \omega t)) \quad (1.35)$$

pues se tiene que $\cos(kz - \omega t - \frac{\pi}{2} + 2n\pi) = \sin(kz - \omega t)$

y $\cos(kz - \omega t + \frac{\pi}{2} + 2n\pi) = -\sin(kz - \omega t)$.

Para analizar el caso mas general de luz elípticamente polarizada consideremos

$$\mathbf{E}_x = iE_{ox} \cos(kz - \omega t) \quad \rightarrow \quad \frac{E_x}{E_{ox}} = i \cos(kz - \omega t) \quad (1.36)$$

$$\mathbf{E}_y = jE_{oy} \cos(kz - \omega t + \epsilon) \quad \rightarrow \quad \frac{E_y}{E_{oy}} = j(\cos(kz - \omega t) \cos \epsilon - \sin(kz - \omega t) \sin \epsilon) \quad (1.37)$$

así tomando solo las componentes vectoriales y no sus direcciones tenemos que:

$$\frac{E_y}{E_{oy}} - \frac{E_x}{E_{ox}} \cos \epsilon = (\cos(kz - \omega t) \cos \epsilon - \sin(kz - \omega t) \sin \epsilon) - \cos(kz - \omega t) \cos \epsilon \quad (1.38)$$

por lo que:

$$\frac{E_y}{E_{oy}} - \frac{E_x}{E_{ox}} \cos \epsilon = -\sin(kz - \omega t) \sin \epsilon \quad (1.39)$$

y elevando al cuadrado obtenemos

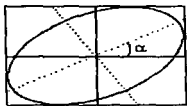


Figura 1.1: Polarización elíptica

$$\left(\frac{E_y}{E_{oy}} - \frac{E_x}{E_{ox}} \cos \epsilon\right)^2 = \left(1 - \left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)^2\right) \sin^2 \epsilon \quad (1.40)$$

pues

$$\sin^2(kz - \omega t) = 1 - \cos^2(kz - \omega t) \quad \text{y} \quad \left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)^2 = \cos^2(kz - \omega t) \quad (1.41)$$

así:

$$\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2 - 2\frac{E_y}{E_{oy}} \cdot \frac{E_x}{E_{ox}} \cos \epsilon + \left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)^2 \cos^2 \epsilon = \sin^2 \epsilon - \left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)^2 \sin^2 \epsilon \quad (1.42)$$

$$\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)^2 (\sin^2 \epsilon + \cos^2 \epsilon) - 2\frac{E_y}{E_{oy}} \cdot \frac{E_x}{E_{ox}} \cos \epsilon = \sin^2 \epsilon \quad (1.43)$$

Esta es la ecuación de una elipse que forma un ángulo α tal que

$$\tan 2\alpha = \frac{2E_{ox}E_{oy}\cos\epsilon}{E_{ox}^2 - E_{oy}^2} \quad (1.44)$$

ver fig 1.1. si $\alpha = 0$ es decir $\epsilon = \pm \frac{\pi}{2} (2n+1) \rightarrow \cos \epsilon = 0$ y $\sin \epsilon = 1$ y así

$$\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)^2 (\sin^2 \epsilon + \cos^2 \epsilon) - 2\frac{E_y}{E_{oy}} \cdot \frac{E_x}{E_{ox}} \cos \epsilon = \sin^2 \epsilon \quad (1.45)$$

se convierte en una ecuación mucho mas familiar que es

$$\frac{E_y^2}{E_{oy}^2} + \frac{E_x^2}{E_{ox}^2} = 1 \quad (1.46)$$

en donde si $E_{ox} = E_{oy}$ se convierte en un círculo y si $\epsilon = 2m\pi$ o $\epsilon = (2m + 1)\pi$ la elipse degenera en una recta de la forma [1]

$$E_y = \pm \frac{E_{oy}}{E_{ox}} E_x. \quad (1.47)$$

1.1.1 Vectores de Jones

Consideremos el vector eléctrico

$$\mathbf{E}(z, t) = \begin{bmatrix} \bar{E}_x \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z + \delta_x) \\ \bar{E}_y \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z + \delta_y) \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

como conocemos que las componentes de los campos oscilan senoidalmente con el tiempo a la misma frecuencia, la información temporal puede suprimirse y usando notación de fasores, tendremos

$$\mathbf{E}(z) = e^{-i\frac{2\pi z}{\lambda}} \begin{bmatrix} \bar{E}_x e^{i\delta_x} \\ \bar{E}_y e^{i\delta_y} \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

para restaurar la forma original se multiplica por $e^{i\omega t}$ y se toma la parte real, recuperando la dependencia en t .

Tomando el campo en un plano transversal a la dirección de propagación, digamos $z = 0$ tenemos

$$\mathbf{E}(0) = \begin{bmatrix} \bar{E}_x e^{i\delta_x} \\ \bar{E}_y e^{i\delta_y} \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

para restaurar la dependencia espacial basta multiplicar por $e^{-i\frac{2\pi z}{\lambda}}$. Así el vector de Jones se escribirá en notación simplificada

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

con $E_x = |E_x| e^{i\delta_x}$; $E_y = |E_y| e^{i\delta_y}$

La intensidad se obtiene multiplicando el vector de Jones por su adjunto $I = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^\dagger$ y estará normalizado si $1 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^\dagger$.

De un vector de Jones es posible determinar la elipse que en general describe el vector eléctrico de la onda, si multiplicamos por $e^{i\omega t}$ y tomamos la parte real recuperando la dependencia temporal. Las componentes que resulten serán de la forma

$$|E_x| \cos(\omega t + \delta_x), |E_y| \sin(\omega t + \delta_y)$$

que son las ecuaciones paramétricas de una elipse.

Una base ortonormal para los estados de polarización consiste en dos vectores de Jones $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\}$ tales que

$$\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^\dagger = \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1^\dagger = 0 \quad y \quad \mathbf{E}_1^\dagger \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2^\dagger \mathbf{E}_2$$

por ejemplo

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}; \quad \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \right\} \quad (1.52)$$

son tres posibles bases para los posibles estados de polarización.[12]

La matriz de rotación

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

y su inversa $\mathbf{R}^{-1}(\alpha) = \mathbf{R}(-\alpha)$ pueden aplicarse sobre un vector para describirlo desde un sistema primado rotado un ángulo α ó $-\alpha$ cabe señalar que la irradiancia es un invariante bajo rotaciones.

Si expresamos cada vector de la base $\{\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y\}$ como combinación lineal de los elementos de la base $\{\mathbf{E}_l, \mathbf{E}_r\}$ podremos encontrar la matriz de cambio de representación y su inversa.

$$\mathbf{E}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{E}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{E}_l = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

Así

$$\mathbf{E}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{E}_l + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{E}_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

$$\mathbf{E}_y = \frac{i}{\sqrt{2}} \mathbf{E}_l - \frac{i}{\sqrt{2}} \mathbf{E}_r = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

y tendremos

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_l \\ E_r \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

o

$$\mathbf{E}_{xy} = \mathbf{F}\mathbf{E}_{lr} \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_{lr} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{E}_{xy}$$

con

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^\dagger$$

por lo que \mathbf{F} es unitaria.

Un vector de Jones en la representación cartesiana puede ser escrito en términos de una base arbitraria $\{\mathcal{E}_u, \mathcal{E}_v\}$ no necesariamente normal u ortogonal como una combinación lineal

$$\mathbf{E}_{xy} = E_u \mathcal{E}_u + E_v \mathcal{E}_v \quad (1.58)$$

con E_u y E_v números complejos. Así escribimos explícitamente \mathcal{E}_u y \mathcal{E}_v como combinación lineal de \mathbf{E}_x y \mathbf{E}_y

$$\mathcal{E}_u = f_{11}\mathbf{E}_x + f_{21}\mathbf{E}_y \quad (1.59)$$

$$\mathcal{E}_v = f_{12}\mathbf{E}_x + f_{22}\mathbf{E}_y \quad (1.60)$$

$$\mathcal{E}_u = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{pmatrix}; \quad \mathcal{E}_v = \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \end{pmatrix} \quad (1.61)$$

Es decir, la matriz $\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$ relaciona ambas representaciones de la siguiente manera.

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_u \\ E_v \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

o mas concisamente

$$\mathbf{E}_{xy} = \mathbf{F}\mathbf{E}_{uv} \quad (1.63)$$

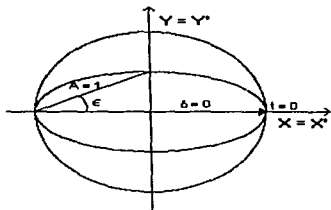


Figura 1.2: Vector eléctrico con polarización elíptica

Ahora bien si $\{\mathcal{E}_u, \mathcal{E}_v\}$ forman una base ortonormal

$$\mathcal{E}_u = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}; \quad \mathcal{E}_v = \begin{pmatrix} -n^* \\ m^* \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad m^*m + n^*n = 1 \quad (1.64)$$

pues de esta forma

$$\mathcal{E}_u \mathcal{E}_v = [m^*, n^*] \begin{bmatrix} -n^* \\ m^* \end{bmatrix} = -m^*n^* + m^*n^* = 0 \quad (1.65)$$

$$\mathcal{E}_v \mathcal{E}_u = [-n, m] \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = -mn + mn = 0 \quad (1.66)$$

es decir se satisfacen las condiciones de ortonormalidad.

Si los sistemas $X-Y$ y $X'-Y'$ coinciden, la representación de un vector de Jones con amplitud unitaria ($A=1$), fase nula ($\delta = 0$), acimut cero ($\theta = 0$), y ángulo de elipticidad ϵ esta dada por ver figura 1.2

$$\mathbf{E}_{x'y'} = \begin{pmatrix} \cos \epsilon \\ i \sin \epsilon \end{pmatrix} \quad (1.67)$$

si multiplicamos este estado por $Ae^{i\delta}$ estamos cambiando la amplitud a A , y la posición del vector eléctrico al tiempo t a una posición que esta a un ángulo respecto al semieje mayor

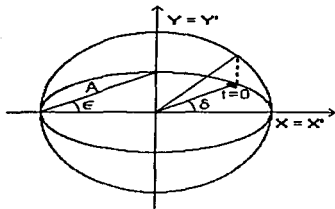


Figura 1.3:

de la elipse de $\arctan(\tan \epsilon \tan \delta)$ es decir formarían un ángulo δ si fuera circular, pero el segmento $\tan \delta$ será mas pequeño en un factor $\frac{2}{\pi}$ debido a la elipticidad es decir en un factor $\tan \epsilon$. ver fig. 1.3

$$E_{x'y'} = Ae^{i\delta} \begin{pmatrix} \cos \epsilon \\ i \sin \epsilon \end{pmatrix} \quad (1.68)$$

Y ahora agregaremos el acimut θ aplicando la matriz de rotación

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

y obteniendo

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = Ae^{i\delta} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \epsilon - i \sin \theta \sin \epsilon \\ \sin \theta \cos \epsilon + i \cos \theta \sin \epsilon \end{pmatrix} \quad (1.69)$$

Este es el vector de Jones que construiría si conozco la amplitud, la fase, el acimut. y la elipticidad de la onda, es decir, si conozco completamente su estado de polarización (ver fig.1.4).

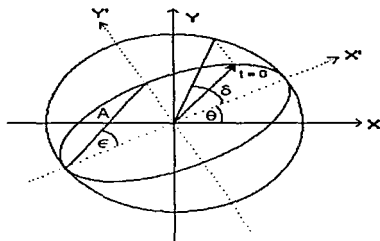


Figura 1.4: Parámetros que determinan el estado más general de polarización

1.1.2 La esfera de Poincaré.

En coordenadas cartesianas los posibles estados de polarización de una onda monocromática se pueden representar en términos de los parámetros de Stokes definidos por;

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \langle \tilde{E}_x^2(t) \rangle + \langle \tilde{E}_y^2(t) \rangle \\
 S_1 &= \langle \tilde{E}_x^2(t) \rangle - \langle \tilde{E}_y^2(t) \rangle \\
 S_2 &= \langle 2\tilde{E}_x(t)\tilde{E}_y(t)\cos[\delta_y(t) - \delta_x(t)] \rangle \\
 S_3 &= \langle 2\tilde{E}_x(t)\tilde{E}_y(t)\sin[\delta_y(t) - \delta_x(t)] \rangle
 \end{aligned} \tag{1.70}$$

Como el vector de Jones que consideramos es

$$\mathbf{E}_{x,y} = \begin{bmatrix} \tilde{E}_x(t) e^{i\delta_x(t)} \\ \tilde{E}_y(t) e^{i\delta_y(t)} \end{bmatrix} \tag{1.71}$$

rotaremos $\frac{\pi}{4}$ aplicándole

$$\mathbb{R}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{1.72}$$

lo que da

$$\begin{pmatrix} E_{\frac{\pi}{4}} \\ E_{\frac{3}{4}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} E_x - E_y \\ E_x + E_y \end{pmatrix} \quad (1.73)$$

como vemos de las ecuaciones 1.70 la diferencia entre las intensidades de las componentes horizontal y vertical es precisamente S_1

$$S_1 = \langle \bar{E}_x^2(t) \rangle - \langle \bar{E}_y^2(t) \rangle \quad (1.74)$$

La diferencia entre las intensidades de las componentes linealmente polarizadas a lo largo de $\frac{\pi}{4}$ y $-\frac{\pi}{4}$ es

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle (E_x + E_y)(E_x + E_y)^* \rangle - \frac{1}{2} \langle (E_x - E_y)(E_x - E_y)^* \rangle &= I_{\frac{\pi}{4}} - I_{-\frac{\pi}{4}} = \\ &= 2 \langle \text{Re}(E_x^* E_y) \rangle = 2 \langle \bar{E}_x \bar{E}_y \cos[\delta_y(t) - \delta_x(t)] \rangle = S_2 \end{aligned} \quad (1.75)$$

Lo que muestra al parametro S_2 como una medida de la preferencia de la onda a estar en un estado $|\frac{\pi}{4}\rangle$ si $S_2 > 0$ ó en un estado $|\frac{-\pi}{4}\rangle$ si $S_2 < 0$. De igual manera usando la matriz que relaciona las representaciones circular y cartesiana en la forma

$$\mathbf{E}_l = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{E}_{xy}$$

que es

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad (1.76)$$

obtendremos

$$\begin{pmatrix} E_l \\ E_r \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} E_x + iE_y \\ E_x - iE_y \end{pmatrix} \quad (1.77)$$

y análogamente si tomamos la diferencia entre las intensidades derecha e izquierda obtenemos

$$\begin{aligned} I_r - I_l &= \frac{1}{2} \langle (E_x - iE_y)(E_x - iE_y)^* \rangle - \frac{1}{2} \langle (E_x + iE_y)(E_x + iE_y)^* \rangle = \\ &= 2 \langle \text{Re}(-iE_x^* E_y) \rangle = 2 \langle \bar{E}_x \bar{E}_y \sin[\delta_y(t) - \delta_x(t)] \rangle = S_3 \end{aligned} \quad (1.78)$$

Ecuación que muestra la preferencia de el estado de polarización \bar{E} , a estar en un estado $|+\rangle$ ó en un estado $|-\rangle$

Para luz completamente polarizada la razón de las amplitudes así como la diferencia de fase de ambas componentes permanecen constantes. Es decir

$$\frac{\bar{E}_x}{\bar{E}_y} = ctte \quad [\delta_y(t) - \delta_x(t)] = ctte \quad (1.79)$$

y como de la ecuación 1.69 el vector eléctrico se puede escribir

$$\begin{aligned} E_x(t) e^{i\delta_x(t)} &= A(t) e^{i\delta}(t) (\cos \theta \cos \epsilon - i \sin \theta \sin \epsilon) \\ E_y(t) e^{i\delta_y(t)} &= A(t) e^{i\delta}(t) (\sin \theta \cos \epsilon + i \cos \theta \sin \epsilon) \end{aligned} \quad (1.80)$$

Donde hemos mantenido θ y ϵ constantes y hemos hecho fluctuar en el tiempo la amplitud y una fase global. Substituyendo en las definiciones de S_i tendremos

$$\begin{aligned} S_0 &= S_0 \\ S_1 &= S_0 \cos 2\theta \cos 2\epsilon \\ S_2 &= S_0 \sin 2\theta \cos 2\epsilon \\ S_3 &= S_0 \sin 2\epsilon \end{aligned} \quad (1.81)$$

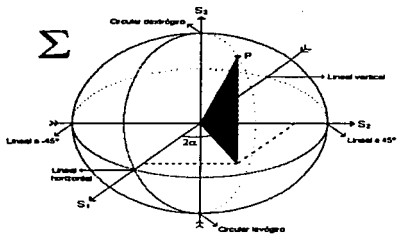
donde $S_0 = \langle A^2(t) \rangle$ y fácilmente se verifican las relaciones

$$S_0 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (1.82)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{S_2}{S_1} \quad (1.83)$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} \arcsin \frac{S_3}{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \quad (1.84)$$

Así $\{S_1, S_2, S_3\}$ son las coordenadas cartesianas de un punto sobre una esfera de radio S_0 cuyas coordenadas esféricas asociadas son $\{S_0, 2\theta, 2\epsilon\}$ que representan la intensidad total, el acimut de la elipse y la excentricidad de esta respectivamente. La esfera antes mencionada recibe el nombre de esfera de Poincaré (ver fig 1.5). Originalmente Poincaré represento primero a los estados de polarización como puntos del plano complejo, y la esfera de Poincaré resulta entonces de tomar la esfera proyectiva asociada con este.



La Esfera de Poincaré

Figura 1.5:

1.1.3 Los parámetros de Stokes

Dados cuatro filtros; F_0 isotrópico; F_1 lineal horizontal; F_2 lineal a 45° ; F_3 circular derecho (+) (opaco a estados izquierdos (-)). Se miden las irradiancias a través de estos cuatro filtros obteniendo I_0 ; I_1 ; I_2 ; I_3 . Y a partir de estas medidas se definen los parámetros de Stokes como

$$S_0 = 2I_0$$

$$S_1 = 2I_1 - 2I_0$$

$$S_2 = 2I_2 - 2I_0$$

$$S_3 = 2I_3 - 2I_0$$

Observemos que S_0 es simplemente la irradiancia incidente, S_1 refleja una tendencia a asemejarse a un estado de polarización lineal horizontal (si $S_1 > 0$) ó a un estado vertical (si $S_1 < 0$). S_2 implica una tendencia a asemejarse a un estado lineal a $+45^\circ$ (si $S_2 > 0$) ó

a -45° (si $S_2 < 0$). Y finalmente S_3 revela una tendencia a ser un estado circular derecho (si $S_3 > 0$) ó izquierdo (si $S_3 < 0$) ó ninguno de estos si $S_3 = 0$, así podemos representar los vectores de Stokes en términos de los parámetros normalizados

$$S_0 = \frac{I_o}{S_0} = 1$$

$$S_1 = \frac{I_1}{I_o} - 1$$

$$S_2 = \frac{I_2}{I_o} - 1$$

$$S_3 = \frac{I_3}{I_o} - 1$$

en donde es como si experimentásemos con un haz de irradiancia unitaria y tenemos el vector de Stokes que representa el estado de polarización del sistema dado por:

$$S = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}; \quad \text{para luz natural} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \text{para luz lineal horizontal} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{para luz vertical} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \text{lineal a} +45 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \text{lineal a} -45 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{circular derecha} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \text{circular izquierda} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

En donde la primera componente que es la irradiancia siempre valdrá uno, cumpliéndose:

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$$

Que en términos de las componentes normalizadas es la ecuación de la esfera unitaria en el espacio de parámetros de Stokes ó esfera de Poincarè. así si tomamos a la irradiancia como el promedio temporal del cuadrado de la amplitud del vector eléctrico, tendremos que para luz completamente polarizada los parámetros de Stokes están dados por:

$$S_0 = \langle E_{ox}^2 \rangle + \langle E_{oy}^2 \rangle$$

$$S_1 = \langle E_{ox}^2 \rangle - \langle E_{oy}^2 \rangle$$

$$S_2 = \langle 2E_{ox}E_{oy} \cos \epsilon \rangle$$

$$S_3 = \langle 2E_{ox}E_{oy} \sin \epsilon \rangle$$

si hacemos el cambio de coordenadas $E_{x'} = E_x \cos \alpha + E_y \sin \alpha$; $E_{y'} = E_y \cos \alpha - E_x \sin \alpha$ así a y b son los semiejes de la elipse $a^2 + b^2 = E_{ox}^2 + E_{oy}^2$ y $\mp ab = E_{ox}E_{oy} \sin \epsilon$ la excentricidad χ esta dada por $\tan \chi = \mp \frac{b}{a}$. y haciendo uso de estas definiciones obtenemos las ecuaciones de transformación de coordenadas rectangulares a esféricas, mismas que nos permiten interpretar a cualquier estado de polarización como un punto sobre la esfera de Poincarè., dadas por:

$$S_1 = S_0 \cos 2\chi \cos 2\alpha$$

$$S_2 = S_0 \cos 2\chi \sin 2\alpha$$

$$S_3 = S_0 \sin 2\chi$$

y las relaciones[1]

$$\tan 2\alpha = \frac{S_1}{S_2} \quad , y \quad \tan 2\chi = \frac{S_3}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}} \quad (1.85)$$

1.2 La matriz de coherencia

Por definición una onda monocromática es completamente polarizada, esto es, la punta del vector eléctrico rota sobre una circunferencia ó una elipse. Para una onda linealmente polarizada la elipse degenera en una línea recta. Para luz no polarizada (natural), el estado de polarización cambia de manera aleatoria respecto al tiempo. Las ondas polarizadas y no polarizadas son casos extremos y en general se presenta luz parcialmente polarizada, así la punta del vector eléctrico no se mueve ni completamente regular ni de manera totalmente irregular. Aquí nos restringiremos al estudio de luz cusimonocromática, es decir $\Delta\nu \ll \nu_0$.(experimentalmente se uso luz láser).

Sean $E_x(r,t)$ y $E_y(r,t)$ las representaciones de las componentes X e Y de los campos reales, formaremos el siguiente vector columna

$$\mathbf{E}(r,t) = \begin{pmatrix} E_x(r,t) \\ E_y(r,t) \end{pmatrix} \quad (1.86)$$

así el adjunto del vector $\mathbf{E}(r,t)$ es el vector renglón:

$$\mathbf{E}^\dagger(r,t) = (E_x^*(r,t), E_y^*(r,t)) \quad (1.87)$$

y con estos dos vectores definimos la matriz de coherencia

$$\mathbf{J} = \langle \mathbf{E}(r,t) \mathbf{E}^\dagger(r,t) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} E_x(r,t) \\ E_y(r,t) \end{pmatrix} (E_x^*(r,t), E_y^*(r,t)) \right\rangle \quad (1.88)$$

$$\Rightarrow \mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix} \quad (1.89)$$

con:

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \langle E_x(r,t), E_x^*(r,t) \rangle \\ J_{xy} &= \langle E_x(r,t), E_y^*(r,t) \rangle \\ J_{yx} &= \langle E_y(r,t), E_x^*(r,t) \rangle \\ J_{yy} &= \langle E_y(r,t), E_y^*(r,t) \rangle \end{aligned} \quad (1.90)$$

(aquí los braquets solo representan el promedio temporal.)

Los elementos J_{xy} y J_{yx} miden la correlación entre las componentes X e Y del vector eléctrico en un punto. Como $J_{xy} = J_{yx}$ la matriz es Hermitiana ó autoadjunta, es decir $\mathbf{J} = \mathbf{J}^\dagger$. Análogamente al grado complejo de coherencia se introduce la siguiente cantidad que mide el grado de coherencia entre las componentes del campo en un punto $\mu_{xy} = \frac{J_{xy}}{\sqrt{J_{xx}J_{yy}}}$. Es usada la matriz de coherencia \mathbf{J} pues sus elementos son susceptibles de ser medidos como veremos mas adelante. Podemos aquí hacer notar que el campo eléctrico total en un punto es $\mathbf{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j}$ en donde la intensidad se calcula como

$$I = \frac{1}{2} \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \rangle = \frac{1}{2} \langle E_x \cdot E_x^* \rangle + \frac{1}{2} \langle E_y \cdot E_y^* \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr } \mathbf{J} \quad (1.91)$$

es decir 2Irradiancia = traza de \mathbf{J} y las cantidades $\frac{1}{2} J_{xx}$ y $\frac{1}{2} J_{yy}$ representan las intensidades correspondientes a las componentes X e Y del campo. Consideremos ahora el siguiente experimento:

Primero introducimos un retardo de fase de δ en la dirección Y del campo respecto de la componente X por medio de un compensador.

Segundo este haz es enviado a través de un polarizador lineal orientado a un ángulo θ con respecto del eje-X, en tal caso el vector eléctrico a lo largo de la dirección inclinada a un ángulo θ con el eje-X es: $E = E_x \cos \theta + E_y \sin \theta$. Luego entonces la intensidad es

$$I(\theta, \delta) = \frac{1}{2} \langle E \cdot E^* \rangle = \frac{1}{2} J_{xx} \cos^2 \theta + \frac{1}{2} J_{yy} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} (J_{xy} e^{-i\delta} + J_{yx} e^{i\delta}) \cos \theta \sin \theta$$

$$\Rightarrow I(\theta, \delta) = \frac{1}{2} J_{xx} \cos^2 \theta + \frac{1}{2} J_{yy} \sin^2 \theta + (J_{xx} J_{yy})^{\frac{1}{2}} |\mu_{xy}| \cos \theta \sin \theta \cos(\varphi_{xy} - \delta) \quad (1.92)$$

en donde usamos $\mu_{xy} = \frac{J_{xy}}{\sqrt{J_{xx} J_{yy}}}$, y $\mu_{yx} = |\mu_{xy}| e^{i\varphi_{xy}}$

Observe que $I(\theta, \delta)$ depende de los diversos elementos de la matriz de coherencia \mathbf{J} . En la práctica usaremos la ecuación 1.92 para determinar J_{xx} , J_{yy} , J_{xy} , J_{yx} determinando la intensidad $I(\theta, \delta)$ para un conjunto de seis diferentes valores de θ y de δ

1.- Obtenemos ahora la matriz de coherencia para un haz no polarizado. La luz no polarizada se caracteriza por el hecho de que $I(\theta, \delta)$ es constante e independiente de θ y de δ por lo que en este caso las componentes E_x y E_y no están correlacionadas, es decir $\mu_{xy} = 0$ ó $J_{xy} = J_{yx} = 0$

Si I es la intensidad total, luego $2I = J_{xx} + J_{yy} = 2J_{xx} = 2J_{yy}$ y la matriz de coherencia de un haz no polarizado es:

$$\mathbf{J} = I \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.93)$$

es decir es múltiplo de la unidad.

2.- Ahora consideremos un campo monocromatico, es decir un haz completamente polarizado. Sean:

$$\begin{aligned} E_x &= e_x \exp[2\pi i \nu_0 t + i\psi_x] \\ E_y &= e_y \exp[2\pi i \nu_0 t + i\psi_y] \end{aligned} \quad (1.94)$$

donde e_x, e_y, ψ_x, ψ_y son constantes independientes del tiempo. por lo que en este caso la matriz de coherencia resulta ser.

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} e_x^2 & e_x e_y \exp[i(\psi_x - \psi_y)] \\ e_x e_y \exp[-i(\psi_x - \psi_y)] & e_y^2 \end{pmatrix} \quad (1.95)$$

podemos observar que $\det \mathbf{J} = 0$. Consideremos ahora un campo cuasimonocromático dado por

$$E_x = e_x \exp [2\pi i \nu_0 t + i\psi_x(t)]$$

$$E_y = e_y \exp [2\pi i \nu_0 t + i\psi_y(t)]$$

donde e_x, e_y, ψ_x, ψ_y son funciones que varían lentamente con el tiempo, si la diferencia temporal es tal que la razón de $e_x(t)$ a $e_y(t)$ y la diferencia de fase $[\psi_x(t) - \psi_y(t)]$ son constantes (independientes del tiempo) entonces la luz debe estar polarizada y en este caso $\det \mathbf{J}$ también se anula (por ejemplo si un haz monocromático es pasado por un polarizador resultara un haz como el descrito), por tanto la matriz de coherencia para radiación completamente polarizada satisface la condición $\det \mathbf{J} = J_{xx}J_{yy} - |J_{xy}|^2 = 0$ [15, Ghatak] Encontraremos a continuación las matrices de coherencia que representan una onda lineal y una onda circularmente polarizada respectivamente. Si la luz está linealmente polarizada, y el vector eléctrico forma un ángulo θ con el eje X entonces

$$E_x = a \cos \theta \exp(2\pi i \nu_0 t + i\varphi)$$

$$E_y = a \sin \theta \exp(2\pi i \nu_0 t + i\varphi)$$

donde a y φ son constantes independientes del tiempo por lo que en este caso la matriz de coherencia resulta ser

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} a^2 \cos^2 \theta & a^2 \cos \theta \sin \theta \\ a^2 \cos \theta \sin \theta & a^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.96)$$

y como la intensidad de la onda es igual a $\frac{1}{2}a^2$ podemos reescribir

$$\mathbf{J} = 2\mathbf{I} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.97)$$

y podemos obtener para luz polarizada

$$\begin{array}{ll} \text{a lo largo del eje X } (\theta = 0); & \text{del eje Y;} \\ \mathbf{J} = 2\mathbf{I} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{J} = 2\mathbf{I} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad (1.98)$$

Para luz circular derecha podemos escribir

$$\begin{aligned} E_x &= a' \exp(2\pi i \nu_0 t + i\varphi) \\ E_y &= ia' \exp(2\pi i \nu_0 t + i\varphi) \end{aligned} \quad (1.99)$$

de donde obtenemos

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} a'^2 & -ia'^2 \\ ia'^2 & a'^2 \end{pmatrix} = \mathbf{I} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad (1.100)$$

ya que

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \langle E_x E_x^* \rangle = \langle a' e^{i(2\pi\nu_0 t + \varphi)} (a' e^{-i(2\pi\nu_0 t + \varphi)}) \rangle = a'^2 e^0 = a'^2 \\ J_{xy} &= \langle E_x E_y^* \rangle = \langle a' e^{i(2\pi\nu_0 t + \varphi)} (-ia' e^{-i(2\pi\nu_0 t + \varphi)}) \rangle = -ia'^2 e^0 = -ia'^2 \\ J_{yx} &= \langle E_y E_x^* \rangle = \langle ia' e^{i(2\pi\nu_0 t + \varphi)} (a' e^{-i(2\pi\nu_0 t + \varphi)}) \rangle = ia'^2 e^0 = ia'^2 \\ J_{yy} &= \langle E_y E_y^* \rangle = \langle ia' e^{i(2\pi\nu_0 t + \varphi)} (-ia' e^{-i(2\pi\nu_0 t + \varphi)}) \rangle = -i^2 a'^2 e^0 = +a'^2 \end{aligned}$$

pues $a'^2 = 2\mathbf{I}'$ ó $\mathbf{I}' = \frac{a'^2}{2}$ y tenemos que

$$E_x = a' e^{i(2\pi\nu_0 t + \varphi)} = a' e^{i(kt + \varphi)} = a' (\cos(kt + \varphi) + i \sin(kt + \varphi)) \quad \square$$

Medición de los elementos de \mathbf{J}

La versatilidad de la matriz de coherencia se debe a que sus elementos son susceptibles de ser medidos. Dada una onda, observemos que si se introduce un cambio en la fase δ en la componente Y relativa a la componente X, y si pasamos la radiación a través de un polarizador lineal inclinado un ángulo θ con la dirección de transmisión: la intensidad $I(\theta, \delta)$ es

$$I(\theta, \delta) = \frac{1}{2} J_{xx} \cos^2 \theta + \frac{1}{2} J_{yy} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} J_{xy} e^{-i\delta} \cos \theta \sin \theta + \frac{1}{2} J_{yx} e^{i\delta} \cos \theta \sin \theta \quad (1.101)$$

por medio de seleccionar valores específicos de θ y de δ y haciendo seis medidas, los elementos de la matriz de coherencia se pueden determinar.

Así tenemos

$$\begin{aligned} J_{xx} &= 2I(0, 0) \\ J_{yy} &= 2I\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ J_{xy} &= \left[I\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) - I\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right) \right] + i \left[I\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) - I\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ J_{yx} &= \left[I\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) - I\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right) \right] - i \left[I\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) - I\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (1.102)$$

J_{xx} mide la tendencia a ser un estado horizontal, J_{yy} la tendencia a ser vertical, J_{xy} consta de dos partes, la primera mide la tendencia a ser lineal a $\pm 45^\circ$ y la segunda a ser circular derecha. Por último J_{yx} también consta de dos partes, la primera es idéntica a la de arriba, y la segunda mide la tendencia a ser luz circular izquierda.

Por lo tanto por medio de un polarizador lineal y un compensador. (una lámina de cuarto de onda sería suficiente ya que en todos los casos $\delta = 0$ ó $\delta = \frac{\pi}{2}$) podemos determinar la matriz de coherencia con solo medir $I(\theta, \delta)$ para los siguientes valores.

$I_1(0, 0)$ tan solo el polarizador lineal con el eje de transmisión horizontal EJE-X

$I_2(\frac{\pi}{2}, 0)$ tan solo el polarizador lineal con el eje de transmisión vertical EJE-Y

$I_3(\frac{\pi}{4}, 0)$ tan solo el polarizador lineal con el eje de transmisión a $+45^\circ$ 1^{er} cuadrante

$I_4(\frac{3\pi}{4}, 0)$ tan solo el polarizador lineal con el eje de transmisión a -45° 2^o cuadrante

$I_5(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ el polarizador a $+45^\circ$ y la lámina de cuarto onda con su eje rápido horizontal

$I_6(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ el polarizador a -45° y la lámina de cuarto onda con su eje rápido horizontal

Entenderemos por horizontal y vertical a las componentes paralela y perpendicular al plano de incidencia también llamados eigen-estados de polarización o eigen-polarizaciones.

Además los parámetros de Stokes y los elementos de la matriz de coherencia se relacionan por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} S_0 &= J_{xx} + J_{yy} \\ S_1 &= J_{xx} - J_{yy} \\ S_2 &= J_{xy} + J_{yx} \\ S_3 &= i(J_{xy} - J_{yx}) \end{aligned}$$

o en forma matricial

$$\begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & +i & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{xx} \\ J_{yy} \\ J_{yx} \\ J_{xy} \end{pmatrix}$$

por lo que las distintas representaciones son equivalentes.

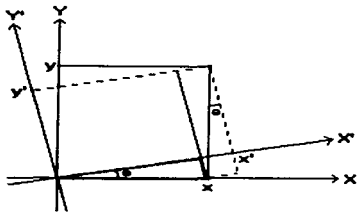


Figura 1.6: Sistemas rotados de ejes cartesianos

1.3 Estados de polarización del fotón

El fotón es un sistema de dos estados, pues para describirlo debemos dar, en primer lugar su momentum vectorial, para un fotón libre su frecuencia queda determinada por su momentum.

No obstante, existe también la propiedad llamada polarización. En la teoría clásica describimos la luz en términos de un vector eléctrico que oscila horizontal o verticalmente; estas dos clases de luz se llaman luz polarizada en la dirección X y en la dirección Y respectivamente. Luz polarizada en cualquier otra dirección se obtiene superponiendo dos campos de distintas amplitudes en X y en Y, o si se toman las componentes X' e Y' desfasadas 90° se obtiene un campo eléctrico que gira (- luz elípticamente polarizada-).

Supondremos ahora que tenemos un solo fotón. no hay campo que podamos discutir en la misma forma. Debe haber por lo tanto dos clases distintas de fotones. Así podemos describir la polarización de un fotón como un sistema de dos estados. Un fotón puede estar en el estado $|X\rangle$ o en el estado $|Y\rangle$ y podemos tomar $|X\rangle$ e $|Y\rangle$ como los estados base de un fotón de momentum dado que apunta hacia nosotros (dirección Z). Las ecuaciones de cambio de coordenadas de un sistema rotado un ángulo θ con respecto a otro se deducen directamente del dibujo 1.6 y son

$$\begin{aligned} |X'\rangle &= |X\rangle \cos\theta + |Y\rangle \sin\theta \\ |Y'\rangle &= |Y\rangle \cos\theta - |X\rangle \sin\theta \end{aligned} \quad (1.103)$$

para un fotón en el estado $|X'\rangle$ que atraviesa un analizador en la dirección $|X\rangle$ la amplitud de que un fotón en el estado $|X\rangle$ este también en el estado $|X'\rangle$ es $\langle X | X'\rangle$ y la probabilidad es el cuadrado del valor absoluto de esta amplitud. Es decir $\langle X | X'\rangle = \langle X | X\rangle \cos\theta + \langle X | Y\rangle \sin\theta$ pero como $\langle X | X\rangle = 1$ y $\langle X | Y\rangle = 0$ ya que es una base ortonormal. Así $\langle X | X'\rangle = \cos\theta$ y la probabilidad será $I = \cos^2\theta$ que hemos denotado con I pues es la irradiancia que es nuestro único observable. Así hemos deducido la ley de Malus (resultado clásico) de nuestra descripción cuántica. Sean los estados derecho e izquierdo de polarización dados como sigue:

$$\begin{aligned} |D\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|X\rangle + i|Y\rangle) \\ |I\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|X\rangle - i|Y\rangle) \end{aligned} \quad (1.104)$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \langle D | D\rangle &= \frac{1}{2}(|X\rangle + i|Y\rangle)(\langle X| - i\langle Y|) \\ &= \frac{1}{2}[\langle X | X\rangle + i(\langle X | Y\rangle - \langle Y | X\rangle) + \langle Y | Y\rangle] = 1 \end{aligned} \quad (1.105)$$

y

$$\begin{aligned} \langle D | I\rangle &= \frac{1}{2}(|X\rangle - i|Y\rangle)(\langle X| - i\langle Y|) \\ &= \frac{1}{2}[\langle X | X\rangle - i(\langle X | Y\rangle - \langle Y | X\rangle) - \langle Y | Y\rangle] = 0 \end{aligned} \quad (1.106)$$

ahora sumando y restando $|D\rangle$ e $|I\rangle$ obtendremos $|X\rangle$ e $|Y\rangle$

$$|D\rangle + |I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}2|X\rangle \Rightarrow |X\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|D\rangle + |I\rangle) \Rightarrow |X\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|D\rangle + |I\rangle) \quad (1.107)$$

$$|D\rangle - |I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}2i|Y\rangle \Rightarrow |Y\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}(|D\rangle - |I\rangle) \quad (1.108)$$

es fácil pasar de una base a la otra y para luz circularmente polarizada no habrá diferencia desde un sistema rotado. En un sistema girado un ángulo θ $|D'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|X'\rangle + i|Y'\rangle)$ y substituyendo las ecuaciones de transformación obtenemos

$$\begin{aligned}
 |D'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|X\rangle \cos \theta + |Y\rangle \sin \theta + i|Y\rangle \cos \theta - i|X\rangle \sin \theta] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|X\rangle (\cos \theta - i \sin \theta) + |Y\rangle (\sin \theta + i \cos \theta)] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|X\rangle (\cos \theta - i \sin \theta) + i|Y\rangle (\cos \theta - i \sin \theta)] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \theta - i \sin \theta) [|X\rangle + i|Y\rangle]
 \end{aligned} \tag{1.109}$$

$$|D'\rangle = e^{-i\theta} \frac{1}{\sqrt{2}} [|X\rangle + i|Y\rangle] \tag{1.110}$$

pues

$$\cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta} \tag{1.111}$$

y como

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [|X\rangle + i|Y\rangle] = |D\rangle \tag{1.112}$$

podemos concluir que

$$|D'\rangle = e^{-i\theta} |D\rangle \tag{1.113}$$

y de manera completamente análoga se obtiene

$$|I'\rangle = e^{-i\theta} |I\rangle \tag{1.114}$$

es decir que la descripción desde un sistema rotado un ángulo θ tan solo introduce un factor de fase $e^{-i\theta}$ que se puede entender como una descripción adelantada o atrasada según este factor [10]. Siguiendo esta misma línea, si tenemos un estado lineal, digamos $|X\rangle$, al rotarlo un ángulo θ obtendremos otro estado lineal dado por:

$$\cos \theta |X\rangle + \sin \theta |Y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta (|D\rangle + |I\rangle) + \sin \theta (|D\rangle + |I\rangle) \tag{1.115}$$

que reagrupando da

$$\cos \theta |X\rangle + \sin \theta |Y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|D\rangle (\cos \theta - i \sin \theta) + |I\rangle (\cos \theta + i \sin \theta)) \tag{1.116}$$

y recordando que $e^{\pm i\theta} = (\cos \theta \pm i \sin \theta)$ obtenemos:

$$\cos \theta |X\rangle + \sin \theta |Y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\theta} |D\rangle + e^{i\theta} |I\rangle) = \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}} (|D\rangle + e^{i2\theta} |I\rangle) \tag{1.117}$$

es decir que si originalmente el estado $|X\rangle$ estaba dado por $(|D\rangle + |I\rangle)$ al rotar este estado un ángulo θ las componentes $|D\rangle$ e $|I\rangle$ se desfasaran un ángulo de 2θ entre si además de un factor de fase global.

1.4 Dispositivos de polarización. Representación matricial.

Se entiende por dispositivo de polarización todo aquel que, interpuesto en el camino de una onda, genera a su salida un estado de polarización definido. Sea $|E_p\rangle$ dicho estado (normalizado), característico del dispositivo de polarización o polarizador y $|E\rangle$ el estado de polarización incidente. El estado $|E'\rangle$ resultante coincidirá con $|E_p\rangle$ excepto en el modulo que vendrá dado por la proyección de $|E\rangle$ sobre $|E_p\rangle$ es decir, [4]

$$|E'\rangle = \langle E_p | E \rangle |E_p\rangle \quad (1.118)$$

Expresión que aparece mas clara si se escribe como un operador actuando sobre $|E\rangle$

$$|E'\rangle = |E_p\rangle \langle E_p | E_p\rangle \quad (1.119)$$

Aquí se observa que el dispositivo de polarización desempeña el papel de un operador $|E_p\rangle \langle E_p|$ que al operar sobre el estado $|E\rangle$ lo transforma en el estado $|E'\rangle$. Utilizando la representación de Jones basada en los vectores complejos, es fácil comprobar que la correspondencia entre $|E\rangle$ y $|E'\rangle$ a través de $|E_p\rangle \langle E_p|$ es una correspondencia lineal, de modo que una vez elegida una base de representación en el espacio de estados, por ejemplo $|P_x\rangle$, $|P_y\rangle$ al dispositivo representado por el operador le corresponderá una cierta matriz P en la forma usual. En efecto, usando el convenio de Einstein para sumar sobre índices repetidos tendremos.

$$\begin{aligned} |E\rangle &= \alpha_i |P_i\rangle \\ |E_p\rangle &= p_i |P_i\rangle \\ |E'\rangle &= \alpha'_i |P_i\rangle \end{aligned} \quad (1.120)$$

y aplicando $|E'\rangle = |E_p\rangle \langle E_p | E\rangle$ tendremos

$$\alpha'_i |P_i\rangle = |E'\rangle = \langle E_p | E \rangle |E_p\rangle = p_j^* \alpha_j p_i |P_i\rangle \quad (1.121)$$

pues $\langle E_p | E \rangle = \sum_j p_j^* a_j$ (producto punto), y

$$|E_p\rangle = p_i |F_i\rangle$$

de modo que $a_i' = p_j^* a_j p_i = p_i p_j^* a_j$

o bien en forma explícita

$$\begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 p_1^* & p_1 p_2^* \\ p_1 p_1^* & p_2 p_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 p_1 p_1^* + a_2 p_1 p_2^* \\ a_1 p_2 p_1^* + a_2 p_2 p_2^* \end{bmatrix} \quad (1.122)$$

es decir

$$|E_p\rangle \langle E_p| \Rightarrow \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 p_1^* & p_1 p_2^* \\ p_1 p_1^* & p_2 p_2^* \end{bmatrix} \quad (1.123)$$

por lo tanto la matriz \mathbf{P} o matriz de Jones correspondiente al polarizador es simplemente la representación matricial. del operador $|E_p\rangle \langle E_p|$ que proyecta cualquier estado sobre $|E_p\rangle$. Es inmediato comprobar que la matriz \mathbf{P} es idempotente ($\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$) y Hermitiana ($\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{P}_{ji}^*$).

A continuación presentamos algunos ejemplos sencillos de matrices que representan dispositivos de polarización. Primero obtendremos la matriz de Jones asociada a un polarizador lineal $|F_\theta\rangle = \cos \theta |F_x\rangle + \sin \theta |F_y\rangle$ en la base $\{|F_x\rangle, |F_y\rangle\}$ esto es

$$|F_\theta\rangle \langle F_\theta| \Rightarrow \mathbf{P}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (1.124)$$

así mismo podemos usar las ecuaciones de cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|X\rangle + i|Y\rangle) \\ |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|X\rangle - i|Y\rangle) \end{aligned} \quad (1.125)$$

$$\begin{aligned} |X\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle) \\ |Y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle - |-\rangle) \end{aligned} \quad (1.126)$$

en donde también es usual escribir

$$|D\rangle = |+\rangle; |J\rangle = |-\rangle; |X\rangle = |F_x\rangle; |Y\rangle = |F_y\rangle; |\theta\rangle = |F_\theta\rangle$$

$$|X\rangle = \begin{bmatrix} E_{ox} e^{i\varphi_x} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad |Y\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{oy} e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} \quad (1.127)$$

para representar $|\theta\rangle$ en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ es decir

$$\begin{aligned} |F_\theta\rangle &= \cos\theta |F_x\rangle + \sin\theta |F_y\rangle = \frac{\cos\theta}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle) - i \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} (|+\rangle - |-\rangle) \\ |F_\theta\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos\theta - i \sin\theta) |D\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos\theta + i \sin\theta) |I\rangle \end{aligned}$$

$$|F_\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{-i\theta} |D\rangle + e^{i\theta} |I\rangle] \quad (1.128)$$

es decir

$$|F_\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} \end{bmatrix} \quad (1.129)$$

es el vector de Jones en la representación o base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.

Así en esta base $\mathbf{P}_\theta = |F_\theta\rangle \langle F_\theta|$ estará dada por

$$\mathbf{P}_\theta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\theta} & e^{-i\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & e^{-2i\theta} \\ e^{2i\theta} & 1 \end{bmatrix} \quad (1.130)$$

que es el operador de proyección \mathbf{P}_θ en la dirección θ en la representación $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.

La matriz de Jones asociada a un dispositivo que produce luz circularmente polarizada dextrógira $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|X\rangle + i|Y\rangle)$ en la base $\{|X\rangle, |Y\rangle\}$ es

$$|+\rangle \langle +| = \hat{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \\ & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \quad (1.131)$$

1.4.1 Matrices de Mueller

En 1943 H Mueller diseñó otra forma matricial, de representar los dispositivos de polarización que permite trabajar con los vectores de Stokes para luz incoherente, siguiendo exactamente el mismo razonamiento se obtienen las matrices de Mueller

$$\langle E' \rangle = \langle E_p | E \rangle |E_p\rangle = |E_p\rangle \langle E_p | E \rangle \quad (1.132)$$

por ejemplo

$$|Y\rangle\langle Y| = \hat{P}_Y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.133)$$

$$|+\rangle\langle +| = \hat{D} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.134)$$

y así sucesivamente. A continuación presentamos una tabla en donde se muestran las matrices de los principales dispositivos de polarización

Dispositivos de polarización y su
representación matricial

<p>polarizador lineal horizontal</p> <p>Jones</p> $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ <p>Mueller</p> $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	<p>polarizador lineal vertical</p> <p>Jones</p> $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ <p>Mueller</p> $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	<p>polarizador lineal a $+45^\circ$</p> <p>Jones</p> $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ <p>Mueller</p> $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
<p>polarizador lineal a $+45^\circ$</p> <p>Jones</p> $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ <p>Mueller</p> $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	<p>lamina de cuarto de onda eje rapido vertical</p> <p>Jones</p> $e^{i\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ <p>Mueller</p> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	<p>lamina de cuarto de onda eje rapido vertical</p> <p>Jones</p> $e^{i\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ <p>Mueller</p> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
<p>polarizador circular derecho</p> <p>Jones</p> $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ <p>Mueller</p> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	<p>polarizador circular izquierdo</p> <p>Jones</p> $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ <p>Mueller</p> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	<p>El espejo metálico Se propone en el texto</p>

Vectores de Stokes y Jones

	$ X\rangle$	$ Y\rangle$	$ +45^\circ\rangle$
S t o k e s	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
J o n e s	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

	$ -45^\circ\rangle$	$ +\rangle$	$ -\rangle$
S t o k e s	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
J o n e s	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix}$

Un último dispositivo que no es estrictamente un polarizador es la lamina birrefringente, pues el estado de polarización que produce a la salida depende del estado entrante, es decir no hay un estado de polarización característico asociado con dicho dispositivo.

Para un estado de polarización $|X\rangle$ a la entrada de la lamina, el estado de polarización a la salida estará determinado por el desfase espacial ϕ_x que se puede escribir como

$$\phi_x = kh = k_0 n_x h = \frac{\omega}{c} \frac{c}{v_x} h = \frac{\omega}{v_x} \quad (1.135)$$

el signo positivo de ϕ_x queda determinado por la definición de (r,t) fase usada en $E(r,t) = E_0 e^{i(k \cdot r - \omega t)}$, al aumentar Z , kz es positivo es decir, a la salida se tendrá $|X\rangle = e^{i\phi_x} |X\rangle$

analogamente para un estado ala entrada de la lamina se tendrá a la salida de la misma $|Y\rangle = e^{i\phi_y} |Y\rangle$ con $\phi_y = k_o n_y h$. Para una onda incidente en un estado genérico de polarización de la forma

$$|E\rangle = a |X\rangle + b |Y\rangle \quad (1.136)$$

se tendrá a la salida

$$|E'\rangle = ae^{i\phi_x} |X\rangle + be^{i\phi_y} |Y\rangle = e^{i\phi_x} (a |X\rangle + be^{i\delta} |Y\rangle) \quad (1.137)$$

donde se ha tomado

$$\delta = \phi_y - \phi_x = k_o h (n_y - n_x) \quad (1.138)$$

y ahora tenemos que en términos de la base $\{|X\rangle, |Y\rangle\}$ se puede escribir

$$|E'\rangle = e^{i\phi_x} \begin{bmatrix} a \\ be^{i\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{bmatrix} \quad (1.139)$$

por lo tanto la matriz asociada a la lamina birrefringente es

$$|E'\rangle = e^{i\phi_x} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{bmatrix} \quad (1.140)$$

el factor $e^{i\phi_x}$ afecta solo a la fase global pero no al estado de polarización, cuando $\delta = \frac{\pi}{2}$ la lamina se llama de cuarto de onda puesto que las componentes $|X\rangle, |Y\rangle$ se desfasan en $\frac{1}{4}$, si $\delta = \pi$ se denomina de media onda pues las componentes $|X\rangle, |Y\rangle$ se desfasan en $\frac{1}{2}$ etc.

Capítulo 2

Interferometría

2.1 Interferencia de dos ondas

La intensidad de luz I se define como el promedio temporal de la cantidad de energía que cruza en una unidad de tiempo una unidad de área perpendicular a la dirección del flujo de la energía. para una onda plana tendremos

$$I = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \langle \mathbf{E}^2 \rangle = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \langle \mathbf{H}^2 \rangle \quad (2.1)$$

Puesto que comparamos intensidades en el mismo medio tomaremos la cantidad $\langle \mathbf{E}^2 \rangle$ como una medida de la intensidad. Aquí trataremos lo concerniente a campos monocromaticos y representaremos el vector eléctrico en la forma (ver [1])

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[\mathbf{A}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{A}^*(\mathbf{r})e^{i\omega t} \right] \quad (2.2)$$

Aquí \mathbf{A} es un vector con componentes rectangulares cartesianas

$$A_x = a_1(\mathbf{r})e^{ig_1(\mathbf{r})}, \quad A_y = a_2(\mathbf{r})e^{ig_2(\mathbf{r})}, \quad A_z = a_3(\mathbf{r})e^{ig_3(\mathbf{r})}. \quad (2.3)$$

con $a_i, g_i, i = 1, 2, 3$. funciones reales. Para una onda plana homogénea las amplitudes a_i son constantes, en tanto las funciones de fase g_i son de la forma $g_i(\mathbf{r}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \delta_j$ donde \mathbf{k} es el vector de propagación y las δ_j s son constantes de fase que especifican el estado de polarización. multiplicando $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[\mathbf{A}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{A}^*(\mathbf{r})e^{i\omega t} \right]$ por sí misma obtenemos

$$\mathbf{E}^2 = \frac{1}{4} \left[\mathbf{A}^2 e^{-2i\omega t} + \mathbf{A}^*{}^2 e^{2i\omega t} + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* \right] \quad (2.4)$$

donde tomando el promedio temporal sobre un intervalo largo comparado con el período $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle = \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{A}^* = \frac{1}{2} (|A_x|^2 + |A_y|^2 + |A_z|^2) = \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \quad (2.5)$$

suponga ahora que dos ondas monocromáticas \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 se superponen en algún punto P. El campo eléctrico total en P es $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, así pues

$$\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2 + 2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \quad (2.6)$$

y entonces la intensidad total en P es

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{J}_{12} \quad (2.7)$$

donde $\mathbf{I}_1 = \langle \mathbf{E}_1^2 \rangle$, $\mathbf{I}_2 = \langle \mathbf{E}_2^2 \rangle$, y

$$\mathbf{J}_{12} = 2 \langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle \quad (2.8)$$

es el término de interferencia.

Sean \mathbf{A} y \mathbf{B} las amplitudes complejas de las dos ondas donde

$$\begin{aligned} A_x &= a_1 e^{i\theta_1}, A_y = a_2 e^{i\theta_2}, A_z = a_3 e^{i\theta_3} \\ B_x &= b_1 e^{i\theta_1}, B_y = b_2 e^{i\theta_2}, B_z = b_3 e^{i\theta_3} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Las fases (reales) g_i y h_i de las dos ondas en general serán diferentes (pues las ondas viajan hasta P por caminos diferentes) pero si las condiciones experimentales son tales que se introduce una misma diferencia de fase δ entre las componentes correspondientes, tendremos.

$$g_1 - h_1 = g_2 - h_2 = g_3 - h_3 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta S$$

Donde ΔS es la diferencia de caminos ópticos para las dos ondas desde su fuente común hasta P, y λ_0 es la longitud de onda en el vacío. En términos de \mathbf{A} y \mathbf{B}

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 &= \frac{1}{4} (\mathbf{A} e^{-i\omega t} + \mathbf{A}^* e^{i\omega t}) \cdot (\mathbf{B} e^{-i\omega t} + \mathbf{B}^* e^{i\omega t}) \\ &= \frac{1}{4} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} e^{-2i\omega t} + \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{B}^* e^{2i\omega t} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^* + \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

así entonces

$$J_{12} = 2 (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) = \frac{1}{2} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^* + \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{B})$$

$$= a_1 b_1 \cos(g_1 - h_1) + a_2 b_2 \cos(g_2 - h_2) + a_3 b_3 \cos(g_3 - h_3) \quad (2.11)$$

esto es

$$J_{12} = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \cos \delta \quad (2.12)$$

cuando $(g_1 - h_1) = (g_2 - h_2) = (g_3 - h_3) = \delta$

Esta expresión muestra la dependencia del término de interferencia en las amplitudes componentes y en la diferencia de fase entre las dos ondas. Para que el patrón de interferencia que corresponde a la ecuación anterior sea observable, una condición necesaria es que la diferencia de fase permanezca constante en el tiempo, esto implica que las fuentes que interfieren necesitan ser coherentes, es por esto que se usa una misma onda y se separa ya sea en amplitud o en frente de onda, produciendo dos fuentes o haces mutuamente coherentes. En la derivación de esta última ecuación no se hizo uso de la teoría electromagnética y en particular, no se usó el hecho de la transversalidad de las ondas. Arago y Fresnel hicieron un estudio exhaustivo de las condiciones bajo las cuales la interferencia de luz polarizada ocurre, encontrando las leyes que resumimos a continuación:

a) Dos estados lineales ortogonales coherentes no pueden interferir.

b) Dos estados lineales coherentes y paralelos interfieren en la misma forma que la luz natural.

c) Dos estados lineales ortogonales constitutivos de la luz natural no pueden interferir para formar un patrón fácilmente observable aunque se giren para alinearlos. Este último punto es comprensible ya que esos estados lineales son incoherentes.

De aquí se concluyó que las vibraciones luminosas tenían que ser transversales. Esta conclusión se verifica fácilmente de

$$J_{12} = 2 (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) = \frac{1}{2} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^* + \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{B}) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \cos \delta. \quad (2.13)$$

Supongamos las dos ondas propagándose en la dirección Z y permítase que el vector eléctrico de la primera onda está en el plano X-Z y el de la segunda en el Y-Z. Luego $a_2 = 0$, $b_1 = 0$. y el término de interferencia es

$$J_{12} = a_3 b_3 \cos \delta \quad (2.14)$$

. Puesto que las observaciones de Arago y Fresnel muestran que ninguna interferencia tiene lugar bajo estas circunstancias, debemos concluir que $a_3 = b_3 = 0$. esto es que los vectores eléctricos de las dos ondas deben ser perpendiculares a la dirección Z. Así las ondas luminosas resultan ser transversales en perfecto acuerdo con la teoría electromagnética.

Veremos ahora la intensidad resultante de superponer dos ondas propagandose en la dirección Z y que son linealmente polarizadas con sus vectores eléctricos \mathbf{E} oscilando en la dirección X . Entonces $a_2 = a_3 = b_3 = 0$ y con

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle = \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{A}^* = \frac{1}{2} (|A_x|^2 + |A_y|^2 + |A_z|^2) = \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \quad (2.15)$$

$$\text{y } \mathbf{I}_1 = \langle \mathbf{E}_1^2 \rangle, \quad \mathbf{I}_2 = \langle \mathbf{E}_2^2 \rangle, \text{ y}$$

$$\mathbf{J}_{12} = 2 \langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \cos \delta \quad (2.16)$$

tenemos que $\mathbf{I}_1 = \frac{1}{2} a_1^2$, $\mathbf{I}_2 = \frac{1}{2} b_1^2$ y

$$\mathbf{J}_{12} = a_1 b_1 \cos \delta = 2 \sqrt{\mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2} \cos \delta. \quad (2.17)$$

y como la intensidad total viene dada por $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{J}_{12}$ entonces $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + 2\sqrt{\mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2} \cos \delta$. Evidentemente habrá máximos de intensidad

$$\mathbf{I}_{\max} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + 2\sqrt{\mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2} \quad \text{cuando } |\delta| = 0, 2\pi, 4\pi, \dots \quad (2.18)$$

y mínimos de intensidad

$$\mathbf{I}_{\min} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 - 2\sqrt{\mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2} \quad \text{cuando } |\delta| = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots \quad (2.19)$$

En el caso especial cuando $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2$ tenemos que

$$\mathbf{I} = 2\mathbf{I}_1 (1 + \cos \delta) = 4\mathbf{I}_1 \cos^2 \frac{\delta}{2} \quad (2.20)$$

y la intensidad varía entre su valor máximo $\mathbf{I}_{\max} = 4\mathbf{I}_1$ y su valor mínimo $\mathbf{I}_{\min} = 0$.

La misma fórmula usaremos para analizar luz no-polarizada tratando la componente X y la componente Y por separado y luego sumando las intensidades resultantes.

2.2 Estados de polarización elípticos mutuamente ortogonales

Imaginemos dos ondas que se propagan en la dirección Z . Y sean A y B sus amplitudes complejas, donde

$$A_x = a_1 e^{ig_1} \quad A_y = a_2 e^{ig_2} \quad (2.21)$$

$$B_x = b_1 e^{ih_1} \quad B_y = b_2 e^{ih_2} \quad (2.22)$$

si obtenemos como arriba el termino de interferencia, encontramos

$$J_{12} = a_1 b_1 \cos(g_1 - h_1) + a_2 b_2 \cos(g_2 - h_2) \quad (2.23)$$

las fases g_1, h_1, g_2, h_2 pueden ser diferentes en general por tener una diferencia original o por haber recorrido diferentes longitudes de camino óptico sobre sus trayectorias.

Las diferencias de fase

$$\delta_1 = g_1 - h_1$$

$$\delta_2 = g_2 - h_2$$

pueden considerarse suma de dos contribuciones

$$\delta_1 = \delta + \delta'_1$$

$$\delta_2 = \delta + \delta'_2$$

Donde δ es la diferencia de fase que solo depende de la diferencia camino óptico de ambos brazos. Así

$$J_{12} = a_1 b_1 \cos(\delta + \delta'_1) + a_2 b_2 \cos(\delta + \delta'_2)$$

En el caso de que $\delta'_1 = \delta'_2 = 0$ se sigue la forma usual del termino de interferencia en la ecuación de Arago-Fresnel.

A continuación escribiremos una definición clásica de estados ortogonales de polarización elíptica. Dos estados de polarización **A** y **B** son ortogonales cuando

$$a_1 b_1 = a_2 b_2$$

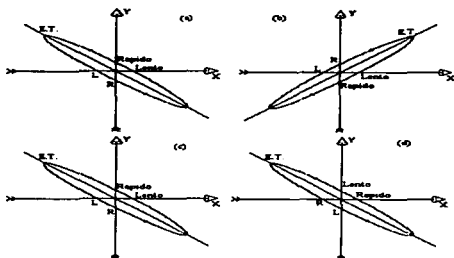


Figura 2.1: Distintos estados de polarización

$$\delta_1 - \delta_2 = (2m + 1)\pi \quad \text{con} \quad m \in \mathbb{Z}$$

Así el término de interferencia J_{12} se anula para dos ondas cuyas amplitudes complejas \mathbf{A} y \mathbf{B} , satisfagan las ecuaciones anteriores. Los haces que se muestran en la figura 2.1 a) y b) satisfacen

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = b_1 = b_2 = a \\ g_1 &= \alpha & g_2 &= \alpha + \frac{\pi}{2} + \gamma \\ h_1 &= \alpha + \delta & h_2 &= \alpha + \delta + \pi + \frac{\pi}{2} + \gamma \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde γ es un pequeño exceso de retardo respecto al retardo de $\frac{\pi}{2}$ entre ambas componentes, de aquí tenemos que:

$$\delta_1 - \delta_2 = \pi$$

Es así que estos dos estados satisfacen la definición clásica de estados de polarización elípticos ortogonales dada arriba, por lo que no habrá interferencia observable. En cambio para los campos de la figura 2.1 en c) y d)

$$\begin{aligned}
 a_1 &= a_2 = b_1 = b_2 = a; \\
 g_1 &= \alpha; & g_2 &= \alpha + \frac{\pi}{2} + \gamma; \\
 h_1 &= \alpha + \frac{\pi}{2} + \gamma + \delta & h_2 &= \alpha + \delta.
 \end{aligned}$$

de donde

$$\delta_1 - \delta_2 = \pi - 2\gamma$$

por lo que no son ortogonales y darán lugar a la aparición de un patrón de interferencia. En donde, como anteriormente, hemos definido a γ como un pequeño retardo de fase en exceso a los π radianes.

2.3 Interferómetros

Existen dos tipos de dispositivos para observar interferencia, por división del frente de onda o por división de la amplitud. En el primer caso se usan porciones del frente de onda primario bien sea directamente como fuentes para emitir ondas secundarias, o conjuntamente con sistemas ópticos para producir fuentes virtuales de ondas secundarias, estas ondas secundarias entonces se hace que se encuentren para interferir. En el caso de división de la amplitud la onda primaria es dividida en dos segmentos, los cuales viajan por distintos caminos antes de recombinarse e interferir. Dentro de los dispositivos de división del frente de onda están por ejemplo la doble rendija de Young, el doble espejo y el biprisma de Fresnel, o el espejo de Lloyd. Pero son los interferómetros de división de la amplitud sobre los que pondremos nuestra atención ya que entre estos se encuentra el Mach-Zendher que es objeto central en nuestro estudio.

2.4 Interferómetros de división del frente de onda.

Como mencionamos anteriormente, en este tipo de dispositivos se utilizan porciones del frente de onda primario para producir dos o más fuentes mutuamente coherentes de ondas secundarias, mismas que se harán interferir para producir el patrón observable. Quizá la mas importante demostración experimental de la naturaleza ondulatoria de la luz sea la experiencia con el interferometro de doble rendija ideado por Young que revisamos muy brevemente basándonos en la figura 2.2.

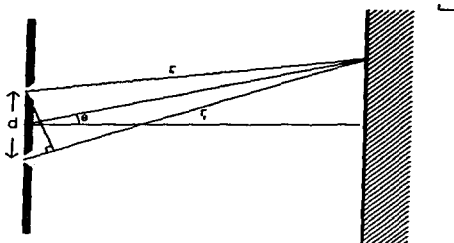


Figura 2.2: Doble rendija de Young

La diferencia de camino óptico de $\overline{S_1P}$ respecto de $\overline{S_2P}$ se obtiene de $r_1 - r_2 = d \sin \theta$. así la diferencia de fase está dada por $k(r_1 - r_2)$ ó $\delta = d \sin \theta$ que es

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} d \sin \theta \quad (2.25)$$

Esta sera la fase mas importante en el termino de interferencia

$$J_{12} = 2 \langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle = \frac{1}{2} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^* + \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{B})$$

$$= a_1 b_1 \cos(g_1 - h_1) + a_2 b_2 \cos(g_2 - h_2) + a_3 b_3 \cos(g_3 - h_3)$$

ó

$$J_{12} = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \cos \delta \quad (2.26)$$

si las fases anteriores son iguales.

2.5 Interferómetros de división de la amplitud

Los interferómetros de división de la amplitud por lo general utilizan espejos semiplateados para separar el haz incidente en dos haces al transmitirse parte de la onda y

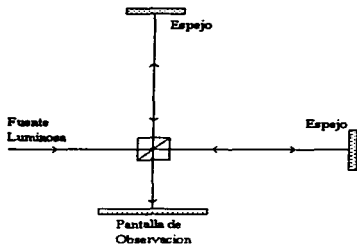


Figura 2.3: Interferómetro de Michelson y Morley

reflejarse parte de esta . Por supuesto las amplitudes de las ondas transmitida y reflejada serán menores que la original y es así que uno puede decir que la amplitud ha sido dividida. Existen muchos dispositivos para observar interferencia por división de la amplitud, quizá el más famoso de estos instrumentos sea el interferómetro de Michelson por su relación con la teoría especial de la relatividad y la existencia del éter luminífero. Un esquema de este interferómetro se muestra en la figura 2.3. Una variante de este dispositivo es el interferómetro Mach-Zehnder (MZI) en donde los caminos por donde viajan las ondas han sido separados. Este consta de dos divisores de haz : el primero para separar el haz incidente , y el segundo para reunir los dos haces emergentes y así hacerlos interferir y dos espejos totalmente reflectores. Dado que los caminos son separados es relativamente difícil de alinear, pero esta cualidad le hace ser un instrumento muy versátil que encuentra un gran número de aplicaciones. Así es usado para medir el índice de refracción de líquidos y gases o en la observación de variaciones en la densidad de flujo de gases dentro de cámaras, túneles de viento, etc. Un ejemplo interesante es el Scillya II usado en Los Alamos en el estudio de reacciones termonucleares . En la figura 2.4 se muestra una configuración elemental de este interferómetro.

Considerando dos ondas planas linealmente polarizadas, podemos hacer un

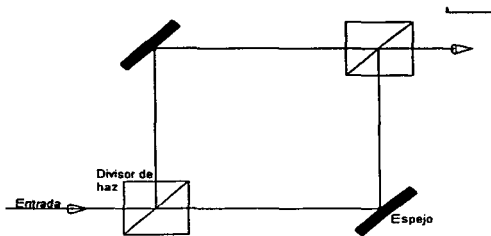


Figura 2.4: Interferómetro Mach-Zehnder convencional

tratamiento sencillo de los efectos de interferencia que tienen lugar en el interferómetro Mach-Zehnder. Tomemos la primera onda propagándose en la dirección Z , entonces su vector eléctrico está dado por:

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = u_1 A_1 \cos(kz - \omega t) \quad (2.27)$$

con A_1 la amplitud de la onda, y u_1 un vector unitario en la dirección de polarización de la onda.

Si la segunda onda se propaga en una dirección ligeramente distinta, dada por θ y ϕ ; que son los ángulos usuales polar y acimutal. Entonces su vector eléctrico está dado por

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = u_2 A_2 \cos(kz \cos \theta + kx \sin \theta \cos \phi + ky \sin \theta \sin \phi - \omega t) \quad (2.28)$$

Y como por el principio de superposición el campo eléctrico total en cualquier punto está dado por

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) \quad (2.29)$$

y la intensidad total, por

$$I = B \overline{(\mathbf{E}_t \cdot \mathbf{E}_t)} \quad (2.30)$$

con B una constante de proporcionalidad. Así, haciendo el álgebra y tomando el promedio temporal tenemos

$$I(x, y, z) = \frac{B}{2} \left\{ A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \cos [kz (\cos \theta - 1) + kx \sin \theta \cos \phi + ky \sin \theta \sin \phi] \right\} \quad (2.31)$$

si reescribimos esta última ecuación usando las intensidades de las ondas individuales $I_1 = \frac{B}{2} A_1^2$; $I_2 = \frac{B}{2} A_2^2$ y evaluando en el plano $z = 0$ (pantalla de observación) se obtiene

$$I(x, y, z) = I_1 + I_2 + 2(I_1 I_2)^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \cos [k \sin \theta (x \cos \phi + y \sin \phi)] \quad (2.32)$$

Todos los elementos observables de las franjas de interferencia se manifiestan en esta última ecuación. Donde es claro que la distancia entre máximos es

$$\Delta d = \frac{2\pi}{k \sin \theta} = \frac{\lambda}{\sin \theta} \quad (2.33)$$

la orientación de las franjas esta dada por ϕ y la visibilidad puede definirse como el cociente entre la amplitud del termino de modulación entre el termino "directo"

$$V = \frac{2(I_1 I_2)^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{I_1 + I_2} \quad (2.34)$$

la visibilidad es pobre si las polarizaciones. son ortogonales ($\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \ll 1$) y/o si el cociente $\frac{I_2}{I_1}$ esta lejos de 1. El caso óptimo de $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 1$ y $I_1 = I_2$ da como resultado visibilidad 1 (intensidad cero en el mínimo).

En la figura 2.5 analizaremos la geometría del patrón de interferencia. En la figura se muestran las dos ondas planas propagandose en diferentes direcciones, y superponiéndose sobre la pantalla de observación. Las franjas resultantes deben ser líneas rectas perpendiculares al plano de la figura.2.5

$$\overline{I} = \Delta d = \frac{\lambda}{\sin \theta} \quad (2.35)$$

en el esquema se ha exagerado θ que es el ángulo que se ha rotado el segundo divisor de haz con el fin de que no aparezca una sola franja ocupando todo el campo.

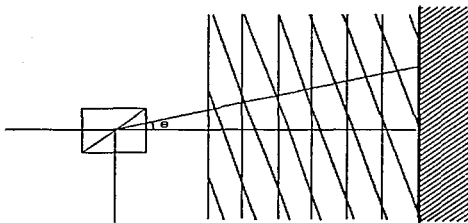


Figura 2.5: Geometría del patrón de interferencia en un Mach-Zehnder

Capítulo 3

Coeficientes de Fresnel.

3.1 Reflexión en dieléctricos

Analicemos una onda plana monocromática que incide en la interfase de dos medios. por ser monocromática tiene la forma:

$$E_i = E_{0i} \exp \{i(k_i \cdot r - \omega_i t)\}$$

o más simplemente

$$E_i = E_{0i} \cos(k_i \cdot r - \omega_i t).$$

Supongamos a E_{0i} constante en el tiempo es decir es una onda linealmente polarizada. Aquí tanto el origen en el espacio como en el tiempo son arbitrarios. Entonces sin hacer suposiciones acerca de sus direcciones, frecuencias, amplitudes o fases, podemos escribir las ondas reflejada y transmitida como

$$E_r = E_{0r} \cos(k_r \cdot r - \omega_r t + \epsilon_r). \quad (3.1)$$

y

$$E_t = E_{0t} \cos(k_t \cdot r - \omega_t t + \epsilon_t). \quad (3.2)$$

Aquí ϵ_r y ϵ_t son constantes de fase relativas a E_i , que se introducen debido a que la posición del origen no es única.

La condición de frontera que se debe de imponer al campo eléctrico \mathbb{E} en la interfase, es que su componente tangente a esta, sea continua a través de ella. Entonces ya que \hat{u}_n es el vector unitario normal a la interfase

$$\hat{u}_n \times \mathbb{E}_i + \hat{u}_n \times \mathbb{E}_r = \hat{u}_n \times \mathbb{E}_t \quad (3.3)$$

ó

$$\hat{u}_n \times \mathbb{E}_{0i} \cos(k_i \cdot r - \omega_i t) + \hat{u}_n \times \mathbb{E}_{0r} \cos(k_r \cdot r - \omega_r t + \epsilon_r) = \hat{u}_n \times \mathbb{E}_{0t} \cos(k_t \cdot r - \omega_t t + \epsilon_t). \quad (3.4)$$

Esta relación se debe mantener en cualquier instante y en todo punto de la interfase. Consecuentemente $\mathbb{E}_i, \mathbb{E}_r, \mathbb{E}_t$ deben tener la misma dependencia funcional en la posición y en el tiempo, lo que implica

$$(k_i \cdot r - \omega_i t) |_{int} = (k_r \cdot r - \omega_r t + \epsilon_r) |_{int} = (k_t \cdot r - \omega_t t + \epsilon_t) |_{int} \quad (3.5)$$

Como esto debe ser cierto en todo instante los coeficientes del tiempo deben ser iguales, obteniéndose

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t \quad (3.6)$$

Además

$$(k_i \cdot r) |_{int} = (k_r \cdot r + \epsilon_r) |_{int} = (k_t \cdot r + \epsilon_t) |_{int} \quad (3.7)$$

donde r termina en la interfase. Los valores de ϵ_r y ϵ_t corresponden a una posición dada del origen y entonces ellos permiten que la relación sea válida independientemente de esa ubicación. De los dos primeros términos obtenemos

$$[(k_i - k_r) \cdot r] |_{int} = \epsilon_r \quad (3.8)$$

Esta expresión indica que el punto extremo de r barre el plano de la interfase. Del hecho de que $(k_i - k_r)$ no tiene componente en el plano de la interfase, es decir $\hat{u}_n \times (k_i - k_r) = 0$, concluimos que

$$k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r \quad (3.9)$$

y por consiguiente tenemos la ley de la reflexión, es decir

$$\theta_i = \theta_r \quad (3.10)$$

Como antes teníamos que

$$(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})|_{int} = (\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} + \epsilon_t)|_{int} \quad (3.11)$$

es decir

$$[(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_t) \cdot \mathbf{r}]|_{int} = \epsilon_t \quad (3.12)$$

y por consiguiente $(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_t)$ es también normal a la interfase. Entonces \mathbf{k}_i , \mathbf{k}_r , \mathbf{k}_t y $\hat{\mathbf{u}}_n$ son coplanares. De forma semejante, las componentes tangenciales de \mathbf{k}_i y \mathbf{k}_t deben ser iguales y en consecuencia

$$k_i \sin \theta_i = k_t \sin \theta_t \quad (3.13)$$

Pero como las frecuencias incidente y transmitida son iguales, multiplicando ambos lados por $\frac{c}{v_i}$ obtenemos la ley de Snell.

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t \quad (3.14)$$

Consideremos ahora una onda electromagnética que incide en la interfase de dos medios cualesquiera y con un estado de polarización arbitrario, para determinar las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida, descompondremos el vector eléctrico de la onda incidente en sus componentes normal y paralela al plano de incidencia para estudiar estos dos casos por separado y analizar cualquier onda en términos de estas dos componentes. Así tendremos que considerarlos siguientes dos casos.

Caso 1.- \mathbf{E} perpendicular al plano de incidencia.

La teoría electromagnética establece que debe satisfacerse la continuidad de las componentes tangenciales a la interfase de los vectores \mathbf{E} y \mathbf{H} . Esto es.

$$\mathbf{E}_{or} + \mathbf{E}_{ot} = \mathbf{E}_{it} \quad (3.15)$$

así como

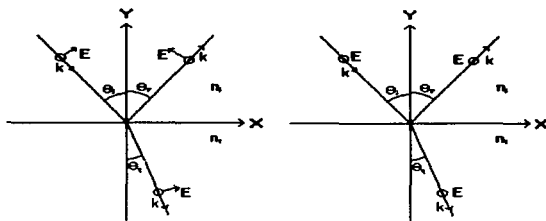


Figura 3.1: Vector eléctrico en una interfase; componentes paralela y ortogonal

$$-\frac{1}{\mu_i} B_i \cos \theta_i + \frac{1}{\mu_r} B_r \cos \theta_r = -\frac{1}{\mu_t} B_t \cos \theta_t \quad (3.16)$$

donde $B_i = \frac{1}{v_i} E_i$, $B_r = \frac{1}{v_r} E_r$, $B_t = \frac{1}{v_t} E_t$, con $v_i = v_r$ y $\theta_i = \theta_r$,
lo que implica

$$\frac{1}{\mu_i v_i} (E_i - E_r) \cos \theta_i = \frac{1}{\mu_t v_t} E_t \cos \theta_t \quad (3.17)$$

ó

$$\frac{n_i}{\mu_i} (E_{oi} - E_{or}) \cos \theta_i = \frac{n_t}{\mu_t} E_{ot} \cos \theta_t \quad (3.18)$$

y como $E_{oi} + E_{or} = E_{ot}$ y lo mismo para cada componente, entonces.

$$r_s = \left(\frac{E_{or}}{E_{oi}} \right)_s = \frac{\frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_t - \frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i}{\frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_t + \frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i} \quad (3.19)$$

pero si $\mu_i \approx \mu_t \approx \mu_o$ obtenemos

$$r_s = \left(\frac{E_{or}}{E_{oi}} \right)_s = \frac{n_t \cos \theta_t - n_i \cos \theta_i}{n_t \cos \theta_t + n_i \cos \theta_i} \quad (3.20)$$

y

$$t_s = \left(\frac{E_{ot}}{E_{oi}} \right)_s = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \quad (3.21)$$

que son los coeficientes de Fresnel de reflexión y transmisión de la componente perpendicular del campo al plano de incidencia.

Caso 2.-E paralelo al plano de incidencia.

Para que la componente tangencial a la interfase de \mathbf{E} sea continua se necesita que

$$E_{oi} \cos \theta_i - E_{or} \cos \theta_r = E_{ot} \cos \theta_t \quad (3.22)$$

y

$$\frac{1}{\mu_i V_i} E_{oi} - \frac{1}{\mu_r V_r} E_{or} = \frac{1}{\mu_t V_t} E_{ot} \quad (3.23)$$

de donde análogamente se obtiene

$$r_p = \left(\frac{E_{or}}{E_{oi}} \right)_p = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \quad (3.24)$$

y

$$t_p = \left(\frac{E_{ot}}{E_{oi}} \right)_p = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \quad (3.25)$$

en donde usamos el hecho de que $\mu_i = \mu_r$ y $\theta_i = \theta_r$.

3.2 Reflexión en metales.

En la solución de la ecuación de onda obtenemos el análogo del número de onda k que es α y se define el índice de refracción complejo por analogía con la solución para dieléctricos de la siguiente forma. $\alpha = \frac{\omega}{c} N$ que es la relación para dieléctricos [3], así introduciendo el índice de refracción complejo \tilde{n} obtendremos $\alpha = \frac{\omega}{c} \tilde{n}$ con $\tilde{n} = n + i\kappa$. tenemos que

$$n + i\kappa = c \sqrt{\epsilon \mu + \frac{i\sigma}{\omega}} \quad (3.26)$$

y elevando al cuadrado e igualando partes real e imaginaria

$$2n\kappa\omega = c^2 \sigma \mu \quad (3.27)$$

$$n^2 + \kappa^2 = c^2 \epsilon \mu \quad (3.28)$$

Así la reflexión en metales se puede tratar usando las mismas expresiones de los coeficientes de Fresnel hallados anteriormente r_p y r_s , y si consideramos una interfase vacío metal (no ferromagnético) entonces $\mu \simeq \mu_0$ y al generalizar las ecuaciones de Fresnel debemos tomar el índice de refracción complejo haciendo $N_i = 1$, $N_t = \tilde{n}$. lo que implica

$$r_p = \left(\frac{E_{or}}{E_{oi}} \right)_p = \frac{\cos \theta_t - \tilde{n} \cos \theta_i}{\tilde{n} \cos \theta_i + \cos \theta_t} \quad (3.29)$$

$$r_s = \left(\frac{E_{or}}{E_{oi}} \right)_s = \frac{\cos \theta_i - \tilde{n} \cos \theta_t}{\cos \theta_i + \tilde{n} \cos \theta_t} \quad (3.30)$$

El índice de refracción \tilde{n} es complejo por lo que heredará este mismo carácter al ángulo θ_t pues este y el ángulo de incidencia se relacionan por la ley de Snell como sigue.

$$\sin \theta_t = \frac{\sin \theta_i}{\tilde{n}} = \frac{\sin \theta_i}{n + i\kappa} \quad (3.31)$$

por lo que el coseno estará dado por:

$$\cos \theta_t = \left(1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{(n + i\kappa)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.32)$$

en conclusión

$$r_p = \frac{\left(1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{(n + i\kappa)^2} \right)^{\frac{1}{2}} - (n + i\kappa) \cos \theta}{\left(1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{(n + i\kappa)^2} \right)^{\frac{1}{2}} + (n + i\kappa) \cos \theta} \quad (3.33)$$

$$r_s = \frac{\cos \theta - (n + i\kappa) \left(1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{(n + i\kappa)^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\cos \theta + (n + i\kappa) \left(1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{(n + i\kappa)^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.34)$$

3.2.1 Matrices de reflexión y ecuaciones de Fresnel

Si identificamos las componentes paralela y perpendicular al plano de incidencia con las componentes vertical y horizontal respectivamente, entonces podemos hacer uso del cálculo de Jones para definir la "matriz de reflexión"¹ como:

¹Los elementos de matriz fuera de la diagonal son cero para dielectricos isotrópicos y distintos de cero en el caso de cristales anisotrópicos.

$$M_r = \begin{bmatrix} r_p e^{i\phi_p} & 0 \\ 0 & r_s e^{i\phi_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -r_p & 0 \\ 0 & r_s \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

por lo que el vector de Jones de luz reflejada estará dado por:

$$\begin{bmatrix} -r_p & 0 \\ 0 & r_s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

donde $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ es el vector de Jones de la luz incidente. Los valores de r_p y r_s son funciones del ángulo de incidencia y están dados por las ecuaciones de Fresnel que como hemos visto son:

$$r_s = \frac{\cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \quad (3.37)$$

$$r_p = \frac{-n^2 \cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{n^2 \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \quad (3.38)$$

En la base $\{|P\rangle, |S\rangle\}$ tenemos que

$$|P'\rangle = R_p |P\rangle = r_p e^{i\phi_p} |P\rangle + 0 |S\rangle$$

$$|S'\rangle = R_s |S\rangle = r_s e^{i\phi_s} |S\rangle + 0 |P\rangle$$

así un vector $|E\rangle = a |P\rangle + b |S\rangle$ se transforma en $|E'\rangle = M_r |E\rangle$ donde la matriz esta dada por :

$$M_r = \begin{bmatrix} r_p e^{i\phi_p} & 0 \\ 0 & r_s e^{i\phi_s} \end{bmatrix}$$

Capítulo 4

Fase de Berry

En 1984 M. V. Berry, dedujo la existencia de un nuevo factor de fase para sistemas cuánticos cuyo Hamiltoniano evoluciona, adiabáticamente, y cíclicamente en el espacio de parámetros de los cuales depende. La no-integrabilidad de este factor lo hace ser observable por medio de interferencia.

En este capítulo estudiaremos primero la aproximación adiabática, herramienta indispensable para entender la fase de Berry. A continuación estudiaremos algunos ejemplos de esta fase, para finalmente, estudiarla en interferometría óptica.

4.1 La aproximación adiabática

En la aproximación adiabática nosotros esperamos con fundamentos físicos que las soluciones de la ecuación de Schrödinger, se puedan aproximar por medio de eigenfunciones estacionarias del Hamiltoniano instantáneo. Así una eigenfunción particular en un instante dado evolucionaría continuamente hasta la eigenfunción correspondiente a un tiempo posterior. [13]

Es decir que si para un sistema cuántico se satisface la ecuación

$$\hat{H}(t) u_n(t) = E_n(t) u_n(t) \quad (4.1)$$

en todo instante de tiempo donde el Hamiltoniano varía muy lentamente, entonces es de esperarse que si el sistema está en un eigenestado no-degenerado $u_n(0)$ con energía $E_n(0)$ en $t = 0$, se encontrará en un eigenestado $u_n(t)$ con energía $E_n(t)$ al tiempo t . Así mismo

es importante estimar, en que grado esta expectativa no se satisface y si es que aparecen otros estados en la expansión de Ψ en términos de las u_n 's.

La ecuación de Shrödinger dependiente del tiempo es

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}(t) \Psi(t) \quad (4.2)$$

Entonces si $\hat{H}(t)$ varía muy lentamente, deberíamos esperar que una buena aproximación a su solución se encuentre resolviendo la ecuación de Shrödinger para cada instante asumiendo que \hat{H} es constante e igual a su valor instantáneo $\hat{H}(\theta)$ con θ el valor de t en el que queremos evaluar \hat{H} . Las funciones de onda estacionarias, obtenidas haciendo $t = \theta = ct/e$, deberían satisfacer

$$\hat{H}(\theta) u_n(\theta) = E_n(\theta) u_n(\theta) \quad (4.3)$$

Uno espera ahora, que si \hat{H} es una función que varía lentamente con θ , una buena solución aproximada a la ecuación de Shrödinger será

$$\Psi_n = u_n(r, t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_a^t E_n(\theta) d\theta} \quad (4.4)$$

Esto significa que la variación espacial de la función de onda al tiempo t , es aquella eigenfunción instantánea de $\hat{H}(t)$ cuyo valor propio instantáneo esta dado por $E_n(t)$.

Para probar que la de arriba es una buena aproximación cuando el Hamiltoniano varía lentamente, es decir si $\frac{\partial \hat{H}}{\partial t}$ es pequeña. Notemos que las Ψ_n forman un conjunto ortonormal, así podemos expresar la función correcta Ψ en términos de una serie de funciones Ψ_n con coeficientes a_n que en general serán funciones del tiempo.[14]

$$\Psi = \sum_n a_n(t) u_n(r, t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_a^t E_n(\theta) d\theta} \quad (4.5)$$

Substituyendo en la ecuación de Shrödinger dependiente del tiempo y haciendo uso de la ecuación de valores propios obtenemos:

$$i\hbar \sum_n \left[\dot{a}_n u_n + a_n \dot{u} + a_n u_n (i\hbar)^{-1} E_n \right] e^{-\frac{i}{\hbar} \int_a^t E_n(\theta) d\theta} = \sum_n a_n u_n E_n e^{-\frac{i}{\hbar} \int_a^t E_n(\theta) d\theta} \quad (4.6)$$

donde con \dot{a}_n se denota la derivada temporal del n-esimo coeficiente de la serie. De esta última ecuación se puede cancelar el término del lado derecho, dando

$$\sum_n \left[\dot{a}_n u_n + a_n \dot{u} \right] e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\theta) d\theta} = 0 \quad (4.7)$$

multiplicando por $u_m^* e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_m(\theta) d\theta}$, integrando sobre todo el espacio y considerando que u_m es un conjunto ortonormal ($(u_m | u_n) = \delta_{mn}$), obtenemos

$$\dot{a}_m + \sum_n a_n \int u_m^* \frac{\partial u_n}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\theta) d\theta} d^3 r = 0 \quad (4.8)$$

o en notación de Dirac

$$\dot{a}_m = - \sum_n a_n \langle u_m | \dot{u}_n \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\theta) - E_m(\theta) d\theta} \quad (4.9)$$

una expresión para $\langle u_m | \dot{u}_n \rangle$ se puede encontrar derivando la ecuación de valores propios respecto al tiempo

$$\frac{\partial H}{\partial t} u_n + H \frac{\partial u_n}{\partial t} = \frac{\partial E_n}{\partial t} u_n + \frac{\partial u_n}{\partial t} E_n \quad (4.10)$$

multiplicando por u_m^* e integrando sobre todo el espacio

$$\int u_m^* \frac{\partial H}{\partial t} u_n d^3 r + \int u_m^* H \frac{\partial u_n}{\partial t} d^3 r = \int u_m^* \frac{\partial E_n}{\partial t} u_n d^3 r + E_n \int u_m^* \frac{\partial u_n}{\partial t} d^3 r \quad (4.11)$$

como H es Hermitiano, en el segundo sumando podemos operar sobre u_m^* en vez de sobre $\frac{\partial u_n}{\partial t}$ y usar $\hat{H} u_n = E_n u_n$. Además el primer sumando del lado derecho desaparecerá pues $\frac{\partial E_n}{\partial t}$ es una constante y u_m es ortogonal a u_n .

$$\int u_m^* \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} u_n d^3 r + \int u_m^* E_m \frac{\partial u_n}{\partial t} d^3 r = \frac{\partial E_n}{\partial t} \int u_m^* u_n d^3 r + E_n \int u_m^* \frac{\partial u_n}{\partial t} d^3 r \quad (4.12)$$

o

$$\int u_m^* \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} u_n d^3 r = (E_n - E_m) \int u_m^* \frac{\partial u_n}{\partial t} d^3 r \quad (4.13)$$

que en notación de Dirac se escribe

$$\left\langle u_m \left| \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} \right| u_n \right\rangle = (E_n - E_m) \langle u_m | \dot{u}_n \rangle \quad (4.14)$$

o despejando

$$\langle u_m | \overset{\circ}{u}_n \rangle = \frac{\langle u_m | \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} | u_n \rangle}{E_n - E_m} \quad (4.15)$$

También requerimos conocer $\langle u_n | \overset{\circ}{u}_n \rangle$; para lo cual diferenciamos la condición de ortonormalidad $\langle u_n | u_n \rangle = 1$ respecto del tiempo, lo que da

$$\langle u_n | \overset{\circ}{u}_n \rangle + \langle \overset{\circ}{u}_n | u_n \rangle = 0 \quad (4.16)$$

Como los sumandos de esta expresión son conjugados el uno del otro, deben de ser imaginarios puros, y podemos escribir $\langle u_n | \overset{\circ}{u}_n \rangle = i\alpha(t)$ donde $\alpha(t)$ es real. Ahora cambiamos la fase de u_n en $\gamma(t)$ lo que es permisible pues las fases de las eigenfunciones son arbitrarias en cada instante. Para la nueva eigenfuncion

$$u'_n \equiv u_n e^{i\gamma(t)}; \quad \overset{\circ}{u}'_n = \left(\overset{\circ}{u}_n + u_n i \dot{\gamma} \right) e^{i\gamma(t)} = \overset{\circ}{u}_n e^{i\gamma(t)} + u'_n i \dot{\gamma}(t) \quad (4.17)$$

$$\langle u'_n | \overset{\circ}{u}'_n \rangle = \left(\langle u_n | \overset{\circ}{u}_n \rangle + \langle u_n | u_n \rangle i \dot{\gamma} \right) e^{i\gamma(t)} = i(\alpha + \dot{\gamma}) e^{i\gamma(t)} \quad (4.18)$$

donde la selección de fase

$$\dot{\gamma}(t) = - \int^t \alpha(\theta) d\theta \quad (4.19)$$

hace que $\langle u'_n | \overset{\circ}{u}'_n \rangle = 0$ pues $\dot{\gamma}(t) = -\alpha(t)$ y

$$\langle u'_n | \overset{\circ}{u}'_n \rangle = i(\alpha + \dot{\gamma}) = 0 \quad (4.20)$$

Así elegiremos todas las fases en esta forma, y omitiremos las primas. Haciendo $E_n - E_m = \hbar\omega_{nm}$ y substituyendo en

$$\dot{a}_m = - \sum_n a_n \langle u_m | \overset{\circ}{u}_n \rangle e^{-i \int^t E_n(\theta) - E_m(\theta) d\theta} \quad (4.21)$$

obtenemos de 4.15

$$\dot{a}_m = - \sum_{n \neq m} \frac{a_n}{\hbar\omega_{nm}} \langle u_m | \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} | u_n \rangle e^{-i \int^t \omega_{nm}(\theta) d\theta} \quad (4.22)$$

Ahora podemos estimar \hat{a}_n si consideramos $a_n, \omega_{nm}, u_n, \frac{\partial \hat{H}}{\partial t}$ momentáneamente constantes en el tiempo, y si asumimos que el sistema se encuentra en el estado m en $t = 0$. Entonces podemos poner $a_n = \delta_{nm}$ y obtener

$$\hat{a}_m \simeq (\hbar\omega_{nm})^{-1} \left\langle u_m \left| \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} \right| u_n \right\rangle e^{i\omega_{nm}t} \quad (m \neq n) \quad (4.23)$$

que se integra para dar

$$a_m \simeq (\hbar\omega_{nm}^2)^{-1} \left\langle u_m \left| \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} \right| u_n \right\rangle (e^{i\omega_{nm}t} - 1) \quad (m \neq n) \quad (4.24)$$

Esta última ecuación muestra que la amplitud de probabilidad para otro estado diferente al inicial, oscila en el tiempo y no muestra un incremento sostenido durante periodos largos en tanto el Hamiltoniano cambie en cantidades finitas.

4.2 Fase de Berry

Si en un sistema cuantico su Hamiltoniano \hat{H} describe un medio estático, y este medio y por tanto su Hamiltoniano \hat{H} es lentamente alterado, se sigue del teorema adiabático que a cada instante el sistema estará en un eigenestado del Hamiltoniano instantáneo. En particular si el Hamiltoniano es regresado a su forma original, el sistema regresará a su estado original salvo por un factor de fase. Este factor de fase es observable por interferencia. Si el sistema se separa en dos, y uno de ellos se hace evolucionar ciclicamente mientras que el Hamiltoniano del otro se mantiene constante para después recombinarlos y producir un patrón de interferencia.[5]

4.2.1 Formula general del factor de fase

Permitásenos cambiar el Hamiltoniano variando los parametros $\mathbf{R} = (x, y, \dots)$ de los cuales depende. Entonces el sistema evolucionará sobre una trayectoria $\mathbf{R}(t)$ entre los tiempos $t = 0$ y $t = T$. Si $\mathbf{R}(T) = \mathbf{R}(0)$ la trayectoria la llamaremos circuito y la denotaremos por C donde para aplicar la aproximación adiabática, T debe ser grande. Dadas estas condiciones el estado $|\Psi(t)\rangle$ evoluciona de acuerdo con la ecuación de Shrödinger 4.2

$$i\hbar \left| \dot{\Psi}(t) \right\rangle = \hat{H}(\mathbf{R}(t)) |\Psi(t)\rangle \quad (4.25)$$

En cada instante una base natural consiste de eigenestados $|n(\mathbf{R})\rangle$ de $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{R})$ para $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ que satisfacen

$$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{R}) |n(\mathbf{R})\rangle = E_n(\mathbf{R}) |n(\mathbf{R})\rangle \quad (4.26)$$

con energías $E_n(\mathbf{R})$. Esta ecuación de valores propios no implica relación entre las fases de los eigenestados $|n(\mathbf{R})\rangle$ en diferente \mathbf{R} . Cualquier selección de fase (diferenciable) puede hacerse, resultando $|n(\mathbf{R})\rangle$ univaluada en el dominio paramétrico que incluya C .

Adiabaticamente un sistema preparado en uno de estos estados $|n(\mathbf{R}(0))\rangle$ evolucionará con $\hat{\mathbf{H}}$ y llegará al estado $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$ al tiempo t .

Como habíamos visto en la ecuación 4.4

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\mathbf{R}(\theta)) d\theta} e^{i\gamma_n(t)} |n(\mathbf{R}(t))\rangle \quad (4.27)$$

La primera exponencial es el conocido factor de fase dinámico. Aquí la segunda exponencial es el objeto principal de nuestro interés pues al calcular la forma de este habremos encontrado la fase de Berry. Es crucial destacar que esta fase es *no-integrable*; es decir γ_n no puede ser escrita como función de \mathbf{R} y en particular no es univaluada para valores iguales de \mathbf{R} que provengan de valores distintos de t , i.e. $\gamma_n((\mathbf{R}(T))) \neq \gamma_n((\mathbf{R}(0)))$ a pesar de que $\mathbf{R}(T) = \mathbf{R}(0)$.

La función $\gamma_n(t)$ se determina a partir de la condición de que $|\Psi(t)\rangle$ satisface la ecuación de Schrödinger, y por sustitución directa de 4.27 en 4.25 o 4.2 obtenemos

$$i\hbar \left| \dot{\Psi}(t) \right\rangle = \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{R}(t)) |\Psi(t)\rangle \quad (4.25)$$

sabíamos que $|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\mathbf{R}(\theta)) d\theta} e^{i\gamma_n(t)} |n(\mathbf{R}(t))\rangle$ (ver 4.27), y derivando obtenemos

$$\left| \dot{\Psi}(t) \right\rangle = -\frac{i}{\hbar} E_n e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\mathbf{R}(\theta)) d\theta} e^{i\gamma_n(t)} |n(\mathbf{R}(t))\rangle + i \dot{\gamma}_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\mathbf{R}(\theta)) d\theta} e^{i\gamma_n(t)} |n(\mathbf{R}(t))\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\mathbf{R}(\theta)) d\theta} e^{i\gamma_n(t)} \left| \dot{n}(\mathbf{R}(t)) \right\rangle$$

o más brevemente

$$\left| \dot{\Psi}(t) \right\rangle = \left[-\frac{i}{\hbar} E_n + i \dot{\gamma}_n(t) \right] |\Psi(t)\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\mathbf{R}(\theta)) d\theta} e^{i\gamma_n(t)} \left| \dot{n}(\mathbf{R}(t)) \right\rangle \quad (4.28)$$

por lo que

$$i\hbar \left| \dot{\Psi}(t) \right\rangle = \left[E_n - \hbar \dot{\gamma}_n(t) \right] |\Psi(t)\rangle + i\hbar e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\mathbf{R}(\theta)) d\theta} e^{i\gamma_n(t)} \left| \dot{n}(\mathbf{R}(t)) \right\rangle \quad (4.29)$$

y substituyendo 4.27 en la ecuación de eigenvalores $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{R}) |n(\mathbf{R})\rangle = E_n(\mathbf{R}) |n(\mathbf{R})\rangle$ (ver 4.26 o 4.1), obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}} |\Psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\mathbf{R}(\theta)) d\theta} e^{i\gamma_n(t)} \hat{\mathbf{H}} |n(\mathbf{R}(t))\rangle \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\mathbf{R}(\theta)) d\theta} e^{i\gamma_n(t)} E_n(\mathbf{R}) |n(\mathbf{R}(t))\rangle = E_n |\Psi(t)\rangle \end{aligned} \quad (4.30)$$

igualando 4.29 con 4.30 se obtiene

$$\hbar \dot{\gamma}_n(t) |\Psi\rangle = i\hbar e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\mathbf{R}(\theta)) d\theta} e^{i\gamma_n(t)} \left| \dot{n}(\mathbf{R}(t)) \right\rangle$$

$$\dot{\gamma}_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\mathbf{R}(\theta)) d\theta} e^{i\gamma_n(t)} |n(\mathbf{R}(t))\rangle = i e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\mathbf{R}(\theta)) d\theta} e^{i\gamma_n(t)} \left| \dot{n}(\mathbf{R}(t)) \right\rangle$$

$$\dot{\gamma}_n(t) |n(\mathbf{R}(t))\rangle = i \left| \dot{n}(\mathbf{R}(t)) \right\rangle \quad (4.31)$$

pero como al derivar con respecto al tiempo $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$, haciendo uso de la regla de la cadena, obtenemos

$$\left| \dot{n}(\mathbf{R}(t)) \right\rangle = |\nabla_{\mathbf{R}} n(\mathbf{R}(t))\rangle \cdot \dot{\mathbf{R}}(t) \quad (4.32)$$

entonces

$$\dot{\gamma}_n(t) |n(\mathbf{R}(t))\rangle = i |\nabla_{\mathbf{R}} n(\mathbf{R}(t))\rangle \cdot \dot{\mathbf{R}}(t) \quad (4.33)$$

multiplicando por la izquierda por $\langle n(\mathbf{R}(t)) |$

$$\dot{\gamma}_n(t) \langle n(\mathbf{R}(t)) | n(\mathbf{R}(t)) \rangle = i \langle n(\mathbf{R}(t)) | \nabla_{\mathbf{R}} n(\mathbf{R}(t)) \rangle \cdot \dot{\mathbf{R}}(t) \quad (4.34)$$

así

$$\dot{\gamma}_n(t) = i \langle n(\mathbf{R}(t)) | \nabla_{\mathbf{R}} n(\mathbf{R}(t)) \rangle \cdot \dot{\mathbf{R}}(t) \quad (4.35)$$

que integrando en el tiempo da

$$\int_0^T \dot{\gamma}_n(t) dt = i \int_0^T \langle n(\mathbf{R}(t)) | \nabla_{\mathbf{R}} n(\mathbf{R}(t)) \rangle \cdot \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} dt \quad (4.36)$$

si t va de cero a T entonces $\mathbf{R}(t)$ recorre todo el circuito C por lo que $\gamma_n(C)$ esta dada por la integral

$$\gamma_n(C) = i \oint_C \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} n(\mathbf{R}) \rangle \cdot d\mathbf{R} \quad (4.37)$$

en el espacio de parametros, y es independiente de como el circuito es recorrido. (siempre que sea recorrido lentamente tal y como el teorema adiabático lo requiere). Esta integral es el cambio geométrico de fase, y el cambio total de estado alrededor de todo el circuito C esta dado por

$$|\Psi(T)\rangle = e^{i\gamma_n(C)} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T E_n(\mathbf{R}(\theta)) d\theta} |\Psi(0)\rangle \quad (4.38)$$

Si derivamos la condición de ortogonalidad $\langle n | n \rangle = 1$ obtendremos

$\langle n | \nabla n \rangle = - \langle \nabla n | n \rangle$ pero un complejo es igual al negativo de su conjugado solo si es imaginario puro. Esto es $a + bi = -(a - bi) \Leftrightarrow a = 0$ por lo que $\gamma_n(C)$ es real. Para evaluar la integral 4.37 debemos transformarla en una integral sobre una superficie cualquiera soportada sobre C en el espacio de parametros. (para usar calculo vectorial ordinario se considerara tridimensional al espacio de parametros pero todos los cálculos son susceptibles de ser generalizados a un mayor numero de dimensiones).

Aplicando el teorema de Stokes (ver por ejemplo Marsden -Cálculo vectorial) a la ecuación 4.37 obtenemos

$$\gamma_n(C) = - \text{Im} \iint \nabla \times \langle n | \nabla n \rangle \cdot ds \quad (4.39)$$

y haciendo uso de las identidades vectoriales $\nabla \times \varphi \mathbf{F} = \varphi \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \varphi \times \mathbf{F}$ así como $\nabla \times \nabla \varphi = 0$ es posible ver que

$$\begin{aligned} \nabla \times \langle n | \nabla n \rangle &= \langle n | \nabla \times | \nabla n \rangle + \langle \nabla n | \times | \nabla n \rangle \\ \nabla \times \langle n | \nabla n \rangle &= \langle \nabla n | \times | \nabla n \rangle \end{aligned} \quad (4.40)$$

ahora si tomamos ∇n en la representación de las $|m\rangle$ y tomamos el producto cruz con el adjunto de $| \nabla n \rangle$. es decir con $\langle \nabla n |$. obtenemos

$$| \nabla n \rangle = \sum_m |m\rangle \langle m | \nabla n \rangle$$

$$\langle \nabla n | \times | \nabla n \rangle = \sum_m \langle \nabla n | \times | m \rangle \langle m | \nabla n \rangle = \sum_m \langle \nabla n | m \rangle \times \langle m | \nabla n \rangle \quad (4.41)$$

pero si en esta suma $m = n$, el producto cruz da como resultado un número real, por lo que podemos excluir de la suma estos términos ya que solo nos interesa la parte imaginaria. Así hemos llegado a la expresión

$$\nabla \times \langle n | \nabla n \rangle = \langle \nabla n | \times | \nabla n \rangle = \sum_{m \neq n} \langle \nabla n | m \rangle \times \langle m | \nabla n \rangle \quad (4.42)$$

por lo cual podemos escribir

$$\gamma_n(C) = -\text{Im} \iint d\mathbf{s} \cdot \langle \nabla n | \times | \nabla n \rangle \quad (4.43)$$

6

$$\gamma_n(C) = -\text{Im} \iint d\mathbf{s} \cdot \sum_{m \neq n} \langle \nabla n | m \rangle \times \langle m | \nabla n \rangle \quad (4.44)$$

Los elementos de matriz fuera de la diagonal se obtienen de la ecuación de eigenvalores 4.26 o 4.1

$$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{R}) |n(\mathbf{R})\rangle = E_n(\mathbf{R}) |n(\mathbf{R})\rangle$$

derivando

$$\nabla \hat{\mathbf{H}} |n\rangle + \hat{\mathbf{H}} |\nabla n\rangle = \nabla E_n |n\rangle + E_n |\nabla n\rangle$$

multiplicando por la izquierda por $\langle m |$ se obtiene

$$\langle m | \nabla \hat{\mathbf{H}} |n\rangle + \langle m | \hat{\mathbf{H}} |\nabla n\rangle = \langle m | \nabla E_n |n\rangle + \langle m | E_n |\nabla n\rangle = \nabla E_n \langle m | n \rangle + E_n \langle m | \nabla n \rangle \quad (4.45)$$

pero como $\langle m | E_m = \langle m | \hat{\mathbf{H}}$ y $\langle m | n \rangle = \delta_{mn}$ entonces tendremos que

$$\begin{aligned} \langle m | \nabla \hat{\mathbf{H}} |n\rangle + \langle m | E_m |\nabla n\rangle &= E_n \langle m | \nabla n \rangle \\ \langle m | \nabla \hat{\mathbf{H}} |n\rangle &= E_n \langle m | \nabla n \rangle - E_m \langle m | \nabla n \rangle \end{aligned}$$

6

$$\langle m | \nabla n \rangle = \frac{\langle m | \nabla \hat{H} | n \rangle}{E_n - E_m} \quad (4.46)$$

y análogamente

$$\langle \nabla n | m \rangle = \frac{\langle n | \nabla \hat{H} | m \rangle}{E_n - E_m} \quad (4.47)$$

con $m \neq n$. Entonces $\gamma_n(C)$ puede ser expresado como

$$\gamma_n(C) = - \iint_a ds \cdot \mathbf{V}_n(\mathbf{R}) \quad (4.48)$$

donde

$$\mathbf{V}_n(\mathbf{R}) = \text{Im} \sum_{m \neq n} \frac{\langle m(\mathbf{R}) | \nabla \hat{H}(\mathbf{R}) | n(\mathbf{R}) \rangle \times \langle n(\mathbf{R}) | \nabla \hat{H}(\mathbf{R}) | m(\mathbf{R}) \rangle}{(E_n(\mathbf{R}) - E_m(\mathbf{R}))^2} \quad (4.49)$$

En estas ecuaciones la dependencia en $|\nabla n\rangle$ ha sido eliminada, y así hemos evitado evaluar directamente la ecuación 4.37 pues esto requeriría una base localmente univaluada de $|n\rangle$. Pero en la ecuación 4.49 ya no es necesario elegir $|m\rangle$ y $|n\rangle$ univaluados en el espacio de parámetros. Cualquier solución de la ecuación de eigenvalores de 4.26 es aceptable sin afectar el valor de $\mathbf{V}_n(\mathbf{R})$.

Como podemos observar comparando las ecuaciones 4.48 y 4.39

$$\gamma_n(C) = - \text{Im} \iint_a \nabla \times \langle n | \nabla n \rangle \cdot ds = - \iint_a ds \cdot \mathbf{V}_n(\mathbf{R}) \quad (4.50)$$

se observa que $\mathbf{V}_n(\mathbf{R})$ es el rotacional del vector $\langle n | \nabla n \rangle$ y este ciertamente depende de la selección de fase del (univaluado) vector propio $|n(\mathbf{R})\rangle$. La dependencia en la fase es del siguiente tipo, si cambiamos

$$|n\rangle \xrightarrow{\text{por}} e^{i\mu(\mathbf{R})} |n\rangle$$

entonces cambiaremos

$$\langle n | \xrightarrow{\text{por}} \langle n | e^{-i\mu(\mathbf{R})}$$

y consecuentemente

$$|\nabla n\rangle \xrightarrow{\text{por}} i \nabla \mu e^{i\mu} |n\rangle + e^{i\mu} |\nabla n\rangle$$

así tendremos que

$$\langle n | \nabla n \rangle \longrightarrow e^{i\mu} e^{-i\mu} (i \langle n | n \rangle \nabla \mu + \langle n | \nabla n \rangle)$$

es decir

$$\langle n | \nabla n \rangle \longrightarrow \langle n | \nabla n \rangle + i \nabla \mu \quad (4.51)$$

por lo que el vector no es único pero su rotacional si lo es ya que $\nabla \times \nabla \varphi = 0$.

El vector $\mathbf{V}_n(\mathbf{R})$ es análogo a un campo magnético en el espacio de parámetros, cuyo potencial vectorial es $\text{Im} \langle n | \nabla n \rangle$.

4.2.2 Degeneraciones

El denominador de energía en la ecuación 4.49 muestra que si el circuito C cae cerca de un punto \mathbf{R}^* en el espacio de parámetros en el cual el estado n esta involucrado en una degeneración, entonces $\mathbf{V}_n(\mathbf{R})$ y por tanto $\gamma_n(C)$, están dominados por los términos m correspondientes a los otros estados involucrados. Aquí consideraremos la situación mas común en la cual la degeneración involucra tan solo dos estados, que denotaremos "+ " y "- " , donde $E_+(\mathbf{R}) \geq E_-(\mathbf{R})$ para \mathbf{R}^* cercana a \mathbf{R} , $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{R})$ puede ser desarrollado en serie de Taylor hasta primer orden en $\mathbf{R} - \mathbf{R}^*$, para expresar $\mathbf{V}_+(\mathbf{R})$ como a continuación

$$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{R}) = \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{R}^*) + (\mathbf{R} - \mathbf{R}^*) \cdot \nabla \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{R}) |_{\mathbf{R}=\mathbf{R}^*} + \dots$$

cuyo gradiente sera

$$\nabla \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{R}) = \underbrace{\nabla \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{R}^*)}_{=0} + \nabla (\mathbf{R} - \mathbf{R}^*) \cdot \nabla \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{R}) |_{\mathbf{R}^*} + \underbrace{\nabla (\nabla \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{R}^*))}_{=0} + \dots$$

es decir

$$\nabla \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{R}) = \nabla \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{R}^*)$$

como el denominador del término degenerado se anula este término domina sobre los demás de la suma, y obtenemos de la ecuación 4.49

$$\mathbf{V}_+(\mathbf{R}) = \text{Im} \frac{\langle +(\mathbf{R}) | \nabla \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{R}^*) | -(\mathbf{R}) \rangle \times \langle -(\mathbf{R}) | \nabla \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{R}^*) | +(\mathbf{R}) \rangle}{(E_+(\mathbf{R}) - E_-(\mathbf{R}))^2} \quad (4.52)$$

Sin pérdida de generalidad podemos marcar el cero de energía y nuestro origen en el espacio de parámetros de manera que $E_{\pm}(\mathbf{R}) = 0$ y $\mathbf{R}^* = 0$. $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{R}^*)$ puede representarse por una matriz Hermitiana de 2×2 acoplando los dos estados. La matriz mas general que satisfaciendo estos requisitos depende de tres parámetros (X, Y, Z) (los que tomaremos como componentes de \mathbf{R}) puede ser llevada por medio de una transformación lineal ala siguiente forma estandard.

$$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Z & X - iY \\ X + iY & -Z \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

los eigenvalores son obtenidos resolviendo la ecuación de eigenvalores $\hat{\mathbf{H}}|\pm\rangle = E_{\pm}|\pm\rangle$. esto es resolviendo

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} Z & X - iY \\ X + iY & -Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

que implica resolver el sistema

$$Z + \frac{\beta}{\alpha}(X - iY) = 2\lambda \quad (4.54)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}(X + iY) - Z = 2\lambda \quad (4.55)$$

de 4.54 tenemos que $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2\lambda - Z}{(X - iY)}$ ó $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{X + iY}{2\lambda - Z}$ que al substituir en 4.55 da $\frac{X + iY}{2\lambda - Z}(X + iY) - Z = 2\lambda$ ó $X^2 + Y^2 = 4\lambda^2 - Z^2$ y finalmente $\lambda = \pm \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}$ lo que puede resumirse como

$$E_{+}(\mathbf{R}) = -E_{-}(\mathbf{R}) = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}H$$

La forma de la ecuación 4.53 ha sido escogida para explotar el hecho de que

$$\nabla \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} \bar{\sigma} \quad (4.56)$$

esto es resultado de que

$$\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \quad (4.57)$$

y

$$\nabla \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} \nabla \begin{pmatrix} Z & X - iY \\ X + iY & -Z \end{pmatrix} = (\partial_x \hat{\mathbf{H}}, \partial_y \hat{\mathbf{H}}, \partial_z \hat{\mathbf{H}}) \quad (4.58)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \hat{\sigma} \quad (4.59)$$

donde $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ son las matrices de espín de Pauli y componentes del operador-vector de espín $\hat{\sigma}$.

Para evaluar los elementos de matriz de la ecuación 4.53, se hará uso ventajoso de la isotropía del espín para lo cual se rotarán temporalmente los ejes de tal forma que coincidan las direcciones del vector \mathbf{R} y el eje-Z. Si tomamos el producto $\mathbf{R} \cdot \hat{\sigma}$ obtendremos

$$\mathbf{R} \cdot \hat{\sigma} = X \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + Z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z & X - iY \\ X + iY & -Z \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

que es esencialmente $\hat{\mathbf{H}}$ de la ecuación 4.53 pero si \mathbf{R} esta apuntando en la dirección del eje-Z $X = Y = 0$ y $Z = 1$ es decir el Hamiltoniano de 4.53 será

$$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

y tendremos que los eigenestados de espín satisfarán

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} A \\ -B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A \\ \lambda B \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

si

$$\begin{aligned} \lambda = 1 & \Rightarrow A = 1, B = 0 \\ \lambda = -1 & \Rightarrow A = 0, B = 1 \end{aligned} \quad (4.63)$$

pues además $A^2 + B^2 = 1$ así definimos los eigenestados de espín

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

y de aquí encontramos las relaciones $(\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_x |+\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |-\rangle \\
 \bar{\sigma}_y |+\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = +i |-\rangle \\
 \bar{\sigma}_x |+\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = + |+\rangle \\
 \bar{\sigma}_x |-\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |+\rangle \\
 \bar{\sigma}_y |-\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} = -i |+\rangle \\
 \bar{\sigma}_x |-\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - |-\rangle
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

ó en forma abreviada

$$\bar{\sigma}_x |\pm\rangle = |\mp\rangle, \quad \bar{\sigma}_y |\pm\rangle = \pm i |\mp\rangle, \quad \bar{\sigma}_z |\pm\rangle = \pm |\pm\rangle \tag{4.66}$$

Con estos ejes rotados podemos calcular la ecuación 4.52 de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_+ (\mathbf{R}) &= Im \frac{\langle +(\mathbf{R}) | \frac{1}{2} \bar{\sigma} | -(\mathbf{R}) \rangle \times \langle -(\mathbf{R}) | \frac{1}{2} \bar{\sigma} | +(\mathbf{R}) \rangle}{(E_+(\mathbf{R}) - E_-(\mathbf{R}))^2} \\
 &= Im \frac{\frac{1}{4} \langle +(\mathbf{R}) | (\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z) | -(\mathbf{R}) \rangle \times \langle -(\mathbf{R}) | (\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z) | +(\mathbf{R}) \rangle}{(\frac{1}{2} R_+ + \frac{1}{2} R_-)^2}
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

y calculando el determinante que define el producto cruz obtenemos

$$\mathbf{V}_+ (\mathbf{R}) = (V_{x+}, V_{y+}, V_{z+}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \langle + | \bar{\sigma}_x | - \rangle & \langle + | \bar{\sigma}_y | - \rangle & \langle + | \bar{\sigma}_z | - \rangle \\ \langle - | \bar{\sigma}_x | + \rangle & \langle - | \bar{\sigma}_y | + \rangle & \langle - | \bar{\sigma}_z | + \rangle \end{vmatrix} \tag{4.68}$$

ó recordando que $\langle \pm | \pm \rangle = 1$, $\langle \pm | \mp \rangle = 0$

$$\begin{aligned}
 V_{x+} &= Im \frac{\frac{1}{4} (\langle + | \bar{\sigma}_y | - \rangle) (\langle - | \bar{\sigma}_z | + \rangle) - (\langle - | \bar{\sigma}_y | + \rangle) (\langle + | \bar{\sigma}_z | - \rangle)}{4R^2} \\
 &= Im \frac{-i(+)(+) - (-)(-)}{4R^2} = 0
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned}
 V_{y+} &= Im \frac{\frac{1}{4} (+|\widehat{\sigma}_x|-) (-|\widehat{\sigma}_x|+) - (-|\widehat{\sigma}_x|+) (+|\widehat{\sigma}_x|-)}{R^2} \\
 &= Im \frac{-(-|-)(+|-) + (+|+)(-|-)}{4R^2} = 0
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned}
 V_{z+} &= Im \frac{\frac{1}{4} (+|\widehat{\sigma}_x|-) (-|\widehat{\sigma}_x|+) - (-|\widehat{\sigma}_x|+) (+|\widehat{\sigma}_x|-)}{R^2} \\
 &= Im \frac{(+|+)(-|-) + (-|-)(+|+)}{4R^2} = \frac{2}{4R^2} = \frac{1}{2R^2}
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

y regresando a un sistema de ejes no rotado (dirección arbitraria)

$$\mathbf{V}_+(\mathbf{R}) = \frac{\mathbf{R}}{2R^3} \tag{4.72}$$

pero la ecuación 4.48 muestra que este es el flujo a través de la superficie soportada sobre C del campo "magnético" de un monopolo de magnitud $\frac{1}{2}$ localizado en la degeneración (el origen).

$$\gamma_n(C) = - \iint_A \frac{\mathbf{R} \cdot d\mathbf{s}}{2R^3} = -\frac{1}{2} \Omega(C) \tag{4.73}$$

donde $\Omega(C)$ es el ángulo sólido subtendido por C desde la degeneración (elegida en el origen).

$$\Omega(C) = \iint_A \frac{dA \cos \theta}{r^2} = \iint_A \frac{r \cdot dA}{r^3} \tag{4.74}$$

por lo que el factor de fase geométrico asociado con C es

$$e^{i\gamma_n(C)} = e^{\mp \frac{1}{2} i \Omega(C)} \tag{4.75}$$

4.2.3 Espines en campos magnéticos

Una partícula con espín s (entero o semientero) interactúa con un campo magnético \mathbf{B} vía el Hamiltoniano (ver Quantum mechanics-Cohen-Tannoudji p.p1232)

$$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{B}) = \kappa \hbar \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{S}} \tag{4.76}$$

donde κ es una constante que involucra la razón giromagnética, y $\hat{\mathbf{S}}$ es el operador vectorial de espín con $2s + 1$ eigenvalores n con espaciamiento entero y que caen entre $-s$ y s . Los eigenvalores son

$$E_n(\mathbf{B}) = \kappa \hbar B n \tag{4.77}$$

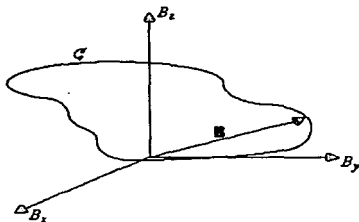


Figura 4.1: Un circuito en el espacio de campo magnético

Consideraremos a las componentes de \mathbf{B} como los parámetros de \mathbf{R} en el análisis previo. Y calculando el cambio de fase $\gamma_n(C)$ de un eigenestado $|n, s(\mathbf{B})\rangle$ de \hat{S} en la dirección paralela a la de \mathbf{B} , así \mathbf{B} será lentamente cambiado (y el espín rotado) alrededor de un circuito C .

Dado que el vector $\mathbf{V}_n(\mathbf{B})$ está expresado por la ecuación 4.49 que en este caso es

$$\mathbf{V}_n(\mathbf{B}) = \text{Im} \sum_{m \neq n} \frac{\langle n | \nabla \hat{H} | m \rangle \times \langle m | \nabla \hat{H} | n \rangle}{(E_m - E_n)^2} \quad (4.78)$$

y como $\hat{H}(\mathbf{B}) = \kappa \hbar \mathbf{B} \cdot \hat{S}$ 4.76 implica que

$$\hat{H}(\mathbf{B}) = \kappa \hbar \left(B_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot B_y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot B_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \quad (4.79)$$

$$= \kappa \hbar \begin{pmatrix} B_x & B_x - i B_y \\ B_x + i B_y & -B_x \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

y como hemos considerado a las componentes de \mathbf{B} como los parámetros de \mathbf{R} en el análisis previo, obtenemos

$$\nabla_{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{B}) = \kappa \hbar \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = \kappa \hbar \hat{\mathbf{S}} \quad (4.81)$$

de tal forma que haciendo uso de la ecuación de eigenvalores 4.77, obtenemos

$$\mathbf{V}_n(\mathbf{B}) = \frac{Jm}{(\kappa \hbar B)^2} \sum_{m \neq n} \frac{\kappa \hbar \langle n, s(\mathbf{B}) | \hat{\mathbf{S}} | m, s(\mathbf{B}) \rangle \times \kappa \hbar \langle m, s(\mathbf{B}) | \hat{\mathbf{S}} | n, s(\mathbf{B}) \rangle}{(m-n)^2} \quad (4.82)$$

Para evaluar los elementos de matriz de \mathbf{V}_n de nuevo rotaremos los ejes coordenados temporalmente de forma tal que el eje-Z apunte en la dirección de \mathbf{B} y empleando las siguientes generalizaciones de las ecuaciones 4.66 que son los operadores de ascenso y descenso de momento angular [16]¹.

$$\begin{aligned} (\hat{s}_x + i\hat{s}_y) |n, s\rangle &= [s(s+1) - n(n+1)]^{\frac{1}{2}} |n+1, s\rangle \\ (\hat{s}_x - i\hat{s}_y) |n, s\rangle &= [s(s+1) - n(n-1)]^{\frac{1}{2}} |n-1, s\rangle \\ \hat{s}_z |n, s\rangle &= n |n, s\rangle \end{aligned} \quad (4.83)$$

de las relaciones 4.83 se puede ver claramente que solo estados con $m = n \pm 1$ estarán acoplados con $|n\rangle$ en la ecuación 4.82. Y del determinante que define los numeradores de esa ecuación que es

$$\begin{vmatrix} i & \hat{j} & \hat{k} \\ \langle n, s | \hat{s}_x | n \pm 1, s \rangle & \langle n, s | \hat{s}_y | n \pm 1, s \rangle & \langle n, s | \hat{s}_z | n \pm 1, s \rangle \\ \langle n \pm 1, s | \hat{s}_x | n, s \rangle & \langle n \pm 1, s | \hat{s}_y | n, s \rangle & \langle n \pm 1, s | \hat{s}_z | n, s \rangle \end{vmatrix} \quad (4.84)$$

se deriva que las componentes V_x y V_y de \mathbf{V}_n son cero pues involucrarán elementos fuera de la diagonal de V_z que esta en su propia representación debido a la elección de ejes que hemos hecho. Es decir contienen elementos tales como $\langle n, s | \hat{s}_x | n \pm 1, s \rangle$ que son cero pues \hat{s}_x es diagonal. Por lo anterior solo nos resta calcular la componente en la dirección \hat{k} que es

¹Basta que un operador satisfaga las propiedades de conmutación de "producto cruz"

$$[\hat{A}_1, \hat{A}_2] = i\hbar \epsilon_{12k} \hat{A}_k$$

es decir $A_x A_y - A_y A_x = i\hbar A_z$ e igual para las demás componentes. Que de manera compacta se escribe

$$\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{A}} = i\hbar \hat{\mathbf{A}}$$

$$V_x = \frac{fm}{B^2} \sum_{m=n\pm 1} \frac{\langle n, s | \hat{s}_x | n \pm 1, s \rangle \langle n \pm 1, s | \hat{s}_y | n, s \rangle - \langle n \pm 1, s | \hat{s}_x | n, s \rangle \langle n, s | \hat{s}_y | n \pm 1, s \rangle}{(n \pm 1 - n)^2} \quad (4.85)$$

para lo cual debemos encontrar $\langle n \pm 1, s | \hat{s}_y | n, s \rangle$ y $\langle n \pm 1, s | \hat{s}_x | n, s \rangle$, esto es posible si sumamos (restamos) las dos primeras ecuaciones 4.83 y el resultado lo multiplicamos por la izquierda por $\langle n \pm 1, s |$ así

$$\begin{aligned} \langle n \pm 1, s | \hat{s}_x | n, s \rangle &= \frac{1}{2} [s(s+1) - n(n \pm 1)]^{\frac{1}{2}} \\ \langle n \pm 1, s | \hat{s}_y | n, s \rangle &= \mp \frac{1}{2} [s(s+1) - n(n \pm 1)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.86)$$

finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{fm}{B^2} \langle n | \hat{s}_x | n+1 \rangle \langle n+1 | \hat{s}_y | n \rangle - \langle n | \hat{s}_y | n+1 \rangle \langle n+1 | \hat{s}_x | n \rangle \\ &+ \langle n | \hat{s}_x | n-1 \rangle \langle n-1 | \hat{s}_y | n \rangle - \langle n | \hat{s}_y | n-1 \rangle \langle n-1 | \hat{s}_x | n \rangle = \frac{-m}{B^2} \end{aligned} \quad (4.87)$$

y regresando al sistema de ejes de orientación arbitraria, tenemos:

$$\mathbf{V}_n(\mathbf{B}) = \frac{n\mathbf{B}}{B^3} \quad (4.88)$$

y haciendo uso de la ecuación 4.48 se ve que la fase de Berry $\gamma_n(C)$ es el flujo a través de C del campo magnético de un monopolo de magnitud $-n$ localizado en el origen del "espacio de campo magnético". Entonces el factor de fase geométrico está dado por:

$$e^{i\gamma_n(C)} = e^{in\Omega(C)} \quad (4.89)$$

donde $\Omega(C)$ es el ángulo sólido subtendido por C desde $\mathbf{B} = 0^2$ y de aquí, que.

$$\gamma_n(C) = -n\Omega(C) \quad (4.90)$$

De la ecuación 5.3 se sigue que cualquier cambio de fase puede producirse por medio de hacer variar \mathbf{B} alrededor de un circuito adecuado. Para fermiones (n semientero)[11], una vuelta completa de \mathbf{B} (una rotación que haga $\Omega = 2\pi$) produce un factor de fase -1 . Y en el caso especial $n = \frac{1}{2}$ esto muestra que el cambio de signo de espinores y el cambio

²Cabe remarcar que γ_n depende únicamente del eigenvalor n de la componente de espín en la dirección de \mathbf{B} y no del espín s de la partícula. Así γ_n es insensible al grado de degeneración $2s+1$ en $\mathbf{B} = 0$ (ver la tercera ecuación 4.83).

de signo de las funciones de onda, tienen el mismo origen matemático. Para bosones (n entero), una vuelta completa de \mathbf{B} produce un factor de fase $+1$. Para producir un cambio de signo es necesario usar diferentes circuitos; si $n = 1$, por ejemplo, variando \mathbf{B} alrededor de un cono de semiángulo 60° nos da $\Omega = \gamma = \pi$ y por tanto el factor de fase -1 .

Berry propone originalmente un experimento para probar las predicciones contenidas en la ecuación 5.3 y es como sigue. Un haz de partículas monoenergético (monocromático) y polarizado con eigenestado de espín n paralelo a un campo magnético \mathbf{B} es dividido en dos. A lo largo de una trayectoria \mathbf{B} es mantenido constante, a lo largo de la otra trayectoria \mathbf{B} se mantiene constante en magnitud pero su dirección se varía lentamente (en comparación con la frecuencia de precesión dinámica) alrededor de un circuito C el cual subtende un ángulo sólido Ω . El campo será producido por un dispositivo que permita cambiar Ω . Finalmente los haces serán recombinados y el ritmo de cuentas será medido por un detector como función de Ω . El factor de fase dinámico ($e^{i \int_0^T E_n(R(t)) dt}$) de la ecuación ?? es igual para ambos haces debido a que la energía $E_n(\mathbf{B})$ en la ecuación 4.77 es insensible a la dirección de \mathbf{B} (en ambos brazos B permanece constante). Habrá entonces adicionalmente un factor de fase de propagación, el cual puede hacerse uno ajustando la longitud de camino (óptico) de uno de los haces cuando $\Omega = 0$. las franjas resultantes serán consecuencia del factor de fase geométrico de Berry.

Si C es un circuito que forma un cono de semiángulo θ , el ángulo sólido $\Omega(C)$ será $\Omega = 2\pi(\cos \theta - 1)$ y recordando de la ecuación 4.90 que $\gamma_n(C) = -n\Omega$ entonces la intensidad máxima predicha será según la ecuación 2.20

$$I_{\max}(\theta) = 4I_1 \cos^2 [n\pi(1 - \cos \theta)] \quad (4.91)$$

y el contraste estará dado por

$$I(\theta) = \frac{I_{\max}}{4I_1} = \cos^2 [n\pi(1 - \cos \theta)] \quad (4.92)$$

que es el observable susceptible de ser medido.

Capítulo 5

Fases de Berry en óptica

5.0 Observación de fases de Berry por interferometría óptica

La observación de fases de Berry en interferometría Mach-Zehnder suscitó un debate acerca de como debían de interpretarse ciertos eventos y de si una descripción clásica con las adecuadas condiciones a la frontera sería suficiente para explicar las observaciones. Se hizo patente que quedaban por realizarse observaciones concisas y metódicas que permitieran discernir, de entre una complicada fenomenología, la relación entre los efectos cuánticos y los clásicos, y explicar en términos de la teoría disponible dicha fenomenología. Así, el objetivo del presente trabajo es de realizar un análisis experimental más completo del experimento de Chiao *et.al.* [7], introduciendo distintos estados de polarización, bien determinados, a la entrada del interferómetro. En nuestro análisis incluimos varias configuraciones del interferómetro Mach-Zehnder para involucrar fases geométricas tan grandes como π rad o tan pequeñas como 0 rad. En este capítulo también se incluye un estudio de un sistema de tres espejos [9], los cuales transportan un rayo por un camino tridimensional alabeado, siendo este sistema la versión discreta del experimento con una fibra óptica helicoidal, con la que se logró la primera observación de este fenómeno. Para estos sistemas ópticos se incluye aquí un estudio de los efectos geométricos tanto desde la perspectiva de la teoría de Berry, incluyendo el cálculo de la fase geométrica midiendo el ángulo sólido que se genera por la evolución de la dirección de propagación del fotón; como en la perspectiva clásica de Maxwell, donde se realiza un cálculo de vectores de Jones, se incluyen las condiciones de frontera para los campos al reflejarse en las superficies de los espejos, se construyen las matrices de coherencia, y de esta manera se predice un efecto geométrico

adicional, ausente cuando la luz se propaga en un plano, y así se explican nuevos efectos en el patrón de interferencia, ó en la ley del transporte paralelo del vector de polarización.

Finalmente, se incluye un breve comentario acerca del origen de los dispositivos arriba considerados. En los primeros estudios de fases de Berry en óptica, Chiao [8] analiza la actividad óptica global o topológica de una fibra óptica fabricada con un material que no presenta actividad óptica ni fotoelasticidad, que es arrollada helicoidalmente, y es debido a este arrollamiento, que la fibra hace rotar el plano de polarización de un haz de luz linealmente polarizado un ángulo proporcional al ángulo sólido subtendido por el vector de dirección de el haz sobre la esfera de todas las posibles direcciones de espín del fotón al ir cambiando la dirección de propagación del haz conforme este avanza en su recorrido por la fibra. Además Chiao propone un interferómetro cuyos brazos estén constituidos por fibras ópticas arrolladas con helicidades opuestas. Las dificultades prácticas inherentes a un dispositivo de esta naturaleza le llevan a proponer el interferómetro Mach-Zehnder tridimensional cuya configuración se considera en este capítulo, y en el que se han puesto arreglos de espejos que substituyen las fibras originalmente sugeridas. Con el objeto de simplificar el análisis, Chiao evita usar algún estado de polarización particular a la entrada del interferómetro, debido a que el seguimiento de uno de tales estados no es trivial involucrando un factor dinámico, lo cual hace difícil mostrar la existencia de una fase geométrica.

5.1 Rotación del plano de polarización como una manifestación de las fases de Berry

La rotación del plano de polarización de un haz de luz que recorre una fibra óptica arrollada en forma helicoidal fue la primera manifestación de la fase de Berry reportada [7]. Este experimento fue analizado críticamente por Berry quien inscribió este y otros experimentos no dentro del marco de su teoría general; en donde era necesario dar el Hamiltoniano, así como satisfacer los requerimientos de adiabaticidad, si no en el contexto de la teoría clásica, en donde el hecho de que la fibra fuera recorrida a la velocidad de la luz (procesos no adiabáticos), o que se dieran reflexiones que invirtieran la helicidad (procesos antiadiabáticos), no tenía relevancia ni contradecía el marco teórico. Es decir que estas fases de naturaleza topológica pueden ser calculadas considerando; a) El ángulo sólido subtendido en el espacio de parámetros por el eigenestado que describe al sistema, o

bien, b) Tomando en cuenta todas las condiciones a la frontera que la topografía del dispositivo experimental le imponga al problema. En la carta enviada por Berry a "Nature", Berry propone hacer el tratamiento electromagnético completo de un haz que sufre tres reflexiones metálicas o tres reflexiones totales internas en dieléctricos, y observar que si se introduce un estado de polarización lineal este rotará un ángulo que depende tan solo de la geometría del dispositivo y no depende en lo absoluto de factores dinámicos, como podrían ser; la actividad óptica del medio o la longitud de onda de la luz empleada. Aquí haremos el seguimiento de la evolución de una onda electromagnética representada por un vector de Jones, que sufre tres reflexiones metálicas, siempre formando ángulos de incidencia de 45° , de tal forma que después de la primera reflexión, el haz se dirige hacia los otros dos espejos los cuales forman un elevador de haz, que eleva el haz en dirección perpendicular al primer plano de incidencia, para finalmente emerger en la misma dirección con la que viajaba originalmente pero en sentido contrario. Como podemos ver de la figura 5.1 cada reflexión define un plano de referencia que es el plano de incidencia en base al cual representaremos al vector de Jones por sus componentes; paralela y perpendicular respecto de este plano, e indicaremos con un subíndice del vector si esta representación es referida al primero, segundo o tercer espejo (plano de incidencia) respectivamente. Al sufrir el haz una reflexión, el vector que lo describe será transformado por la aplicación de una matriz de reflexión como la propuesta en la sección 3.3. Es así como después de las reflexiones sucesivas usaremos las siguientes transformaciones. La primera transformación es la aplicación de la matriz de espejo al vector del haz incidente.

$$\begin{pmatrix} r_p e^{i\phi_p} & 0 \\ 0 & r_s e^{i\phi_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ S \end{pmatrix}_{E_1} = \begin{pmatrix} r_p e^{i\phi_p} P \\ r_s e^{i\phi_s} S \end{pmatrix}_{E_1}$$

Como el plano de incidencia del primer espejo es ortogonal al plano de incidencia del segundo espejo, la componente paralela al primer plano será ortogonal al segundo plano y la ortogonal al segundo será paralela al primero. Por lo que habrá que invertir las componentes del vector saliente del primer espejo para representarlo desde el plano de incidencia del segundo espejo. Esto es:

$$\begin{pmatrix} r_p e^{i\phi_p} P \\ r_s e^{i\phi_s} S \end{pmatrix}_{E_1} \longrightarrow \begin{pmatrix} r_s e^{i\phi_s} S \\ r_p e^{i\phi_p} P \end{pmatrix}_{E_2}$$

donde los subíndices de los vectores indican a que plano de incidencia o espejo se refiere la descripción. Y este último vector debe de ser transformado por una matriz idéntica a la

que representaba al espejo uno dada previamente, de tal forma que

$$\begin{pmatrix} r_s e^{i\phi_s} S \\ r_p e^{i\phi_p} P \end{pmatrix}_{E_2} \xrightarrow{E_2} \begin{pmatrix} r_s r_p e^{i(\phi_s + \phi_p)} S \\ r_s r_p e^{i(\phi_p + \phi_s)} P \end{pmatrix}_{E_2}$$

pero nuevamente los planos de incidencia d e los espejos segundo y tercero son ortogonales por lo que las componentes del vector saliente del segundo espejo deberán de ser invertidas para representar al vector entrante al tercer espejo descrito respecto al tercer plano de incidencia.

$$\begin{pmatrix} r_p r_s e^{i(\phi_s + \phi_p)} S \\ r_s r_p e^{i(\phi_p + \phi_s)} P \end{pmatrix}_{E_2} = r_s r_p e^{i(\phi_p + \phi_s)} \begin{pmatrix} S \\ P \end{pmatrix}_{E_2} \longrightarrow r_s r_p e^{i(\phi_p + \phi_s)} \begin{pmatrix} P \\ S \end{pmatrix}_{E_3}$$

que por medio de la tercera superficie reflectora se transforma en

$$r_s r_p e^{i(\phi_p + \phi_s)} \begin{pmatrix} P \\ S \end{pmatrix}_{E_3} \xrightarrow{E_3} r_s r_p e^{i(\phi_p + \phi_s)} \begin{pmatrix} r_p e^{i\phi_p} P \\ r_s e^{i\phi_s} S \end{pmatrix}_{E_3}$$

pero el primer y tercer planos de incidencia son ortogonales, por lo que este vector emergente es descrito desde el marco de referencia original (componente P a lo largo del eje-Y y componente S a lo largo del eje-Z) como:

$$r_s r_p e^{i(\phi_p + \phi_s)} \begin{pmatrix} r_s e^{i\phi_s} S \\ r_p e^{i\phi_p} P \end{pmatrix}_{E_1}$$

pero como en una buena aproximación para un buen conductor $\phi_s - \phi_p = 180^\circ$, tenemos que:

$$r_s r_p e^{i(\phi_p + \phi_s)} \begin{pmatrix} r_s e^{i\phi_s} S \\ r_p e^{i\phi_p} P \end{pmatrix}_{E_1} \simeq r_s r_p e^{i(\phi_p + 2\phi_s)} \begin{pmatrix} -r_s S \\ r_p P \end{pmatrix}_{E_1} \quad (5.1)$$

que esencialmente es una transformación del tipo $(x, y) \longrightarrow (-y, x)$, que es una rotación de 90° si consideramos, como es el caso, que $r_s \simeq r_p$ ya que para el aluminio r_s y r_p difieren en menos del 2%. Así el vector saliente está rotado noventa grados respecto al vector entrante puesto que cada una de sus componentes rotó $\frac{\pi}{2}$ en el mismo sentido (a favor de las manecillas del reloj) respecto a la dirección de propagación del haz, lo que da como resultado que el vector de Jones cambie sus componentes s , p por las nuevas $-p$, s , que es precisamente una transformación de rotación por un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ radianes.

El ángulo sólido subtendido por el vector de espín sobre la esfera unitaria de todas las posibles direcciones de espín al sufrir las tres reflexiones de espejo se ve en la figura

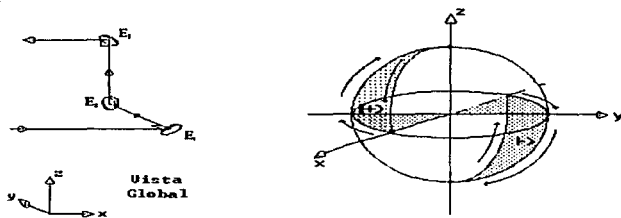


Figura 5.1: Evolución de un haz al reflejarse en los tres espejos E_1 , E_2 y E_3 y el ciclo que describe sobre la esfera unitaria de todas las posibles direcciones de espín

5.1. Donde para un estado positivo, la dirección original de propagación es a lo largo del eje-X, luego de reflejarse en el primer espejo cambia su helicidad y su dirección por lo que ahora apunta en dirección del vector (0,-1,0), después de reflejarse en el segundo espejo, nuevamente cambia de dirección y de helicidad, por lo que ahora apunta en dirección del eje-Z o a lo largo de (0,0,1), y finalmente, después de la tercera reflexión, emerge en la dirección original de propagación, pero en sentido contrario, apuntando sobre (1,0,0), donde ya hemos considerado la inversión del espín por la reflexión. Por lo tanto el ángulo sólido subtendido por un fotón inicialmente positivo es de $\frac{\pi}{2}$ y así la fase geométrica asociada con este fotón será de:

$$\gamma_+ = -\frac{\pi}{2}$$

En cambio para un fotón negativo la fase asociada sera de

$$\gamma_- = +\frac{\pi}{2}$$

Considerando estas fases geométricas, si introducimos un estado lineal de polarización dado por la combinación lineal de estados circulares positivos y negativos dada por:

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle)$$

entonces después de sufrir las tres reflexiones se habrá convertido en

$$|x'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\frac{\pi}{2}} |+\rangle + e^{+i\frac{\pi}{2}} |-\rangle)$$

pero como $e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} \pm i \sin \frac{\pi}{2} = \pm i$ entonces

$$|x'\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}} (|+\rangle + e^{-i\pi} |-\rangle)$$

y en este caso en que la simetría de los valores de las fases hacen que los factores de fase sean complejos conjugados el uno del otro, al calcular la probabilidad de que un estado saliente preserve la polarización entrante tendremos

$$|\langle x | x' \rangle|^2 = \cos^2 [\gamma_+] = \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \right] = 0$$

es decir los estados entrante y saliente son ortogonales. Así hemos calculado la rotación del plano de polarización de dos maneras distintas; En la primera, no es necesario considerar la teoría general de fases de Berry, si no solamente consideramos la teoría electromagnética y todas las condiciones a la frontera que implica el dispositivo. En la segunda forma de

calcular la rotación del plano de polarización, seguimos la evolución de la dirección del espín en la esfera de sus posibles direcciones, y seguimos a Berry y a Chiao, calculando el ángulo sólido subtendido en dicha esfera. En ambos casos obtenemos los resultados que experimentalmente son fácilmente observables. Demostrando así que existe una relación entre los resultados clásicos y cuánticos que es de naturaleza puramente geométrica. Al llevar a cabo este experimento se encontró un perfecto acuerdo con lo previsto, es decir que se observaron estas singulares rotaciones de la polarización por medio de este periscopio de tres espejos. También cambiamos la configuración de este dispositivo de tres espejos rotando el último de los espejos de tal forma que el haz terminara propagándose sobre una trayectoria paralela a la inicial y en el mismo sentido, con lo cual tan solo estaríamos realizando la transformación del vector de Jones de (s, p) a $(p, -s)$ lo que representaría una rotación de $-\frac{\pi}{2}$ radianes, transformación que para un estado de polarización lineal es indistinguible de una rotación de $\frac{\pi}{2}$ radianes, rotación que también fue observada. Para analizar como gira la polarización al introducir un estado lineal arbitrario al sistema de tres espejos, contrastamos los elementos de la matriz de coherencia obtenida de multiplicar el vector de Jones emergente dado por la ecuación 5.1 por su adjunto, contra las medidas fotométricas de estos elementos de matriz para cada ángulo de la polarización lineal entrante. De este procedimiento se obtuvieron los resultados, que para mayor claridad, presentamos en la figura 5.2. en donde solo encontramos diferencias considerables en la amplitud de la parte imaginaria de J_{xy} , diferencias que se pueden explicar en términos de los errores introducidos al considerarlos valores reportados en la bibliografía para los coeficientes de reflexión y desfase (ver [4, pag.197]), ya que no sabemos si nuestros espejos obedecen a estos parámetros.

5.2 Fases de Berry por interferometría Mach-Zehnder

Al reproducir este experimento, resulta sorprendente en primera instancia ver emerger un resultado exclusivamente cuántico que choca con nuestras expectativas sensiblemente clásicas. Esto es que al introducir luz no polarizada al interferómetro, e intentar ver el patrón de interferencia, ningún patrón es observable (esto solo sucede cuando $\theta = 45^\circ$ es decir $\gamma = \pi$). Más al colocar un polarizador antes de la pantalla de observación aparece con toda claridad el patrón que clásicamente cabría esperar. Al hacer girar este polarizador, las franjas se desvanecen, avanzan, y reaparecen en una posición corrida media onda. Así

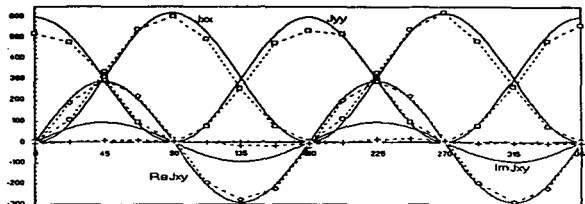


Figura 5.2: Elementos de la matriz de coherencia; Teoría y Experimento "Vs" ángulo del estado de polarización lineal en la entrada

surge de manera natural la necesidad de estudiar esta fenomenología en términos de la teoría disponible, explicarla y relacionar con claridad la fase topológica con las fases dinámicas debidas a las reflexiones, y diferenciar estas de las debidas a la diferencia de camino óptico. A continuación describiremos el proceso que llevamos a cabo para hacer este estudio de "estados de polarización y fases de Berry en interferometría Mach-Zehnder".

El dispositivo experimental usado es mostrado en la figura 5.3. Es decir es un interferómetro Mach-Zehnder cuya mitad dibujada en la parte superior del diagrama esta en un plano nueve centímetros debajo del plano en el cual se encuentra la otra mitad (dibujada en la parte inferior de la figura). Los haces de luz que viajan por los brazos α y β son llevados del plano inferior al superior por medio de los elevadores de haz B_1 y B_2 respectivamente; que consisten cada uno de dos espejos (con articulaciones en dos ejes) de primera superficie reflectora de aluminio (Oriol mod. 44120). Se utilizan además los dos espejos E_1 y E_2 (Oriol mod. 44150) montados sobre sendos postes elevadores y mesas rotadoras (Melles Griot mod. 07pca007, y 07trt502 respectivamente). Se han elegido como divisores de haz D_1 y D_2 a los cubos divisores Melles Griot mod. 03bsl44 por que poseen una película antirreflejante que evita producir otros patrones distintos al que se desea observar, pero principalmente

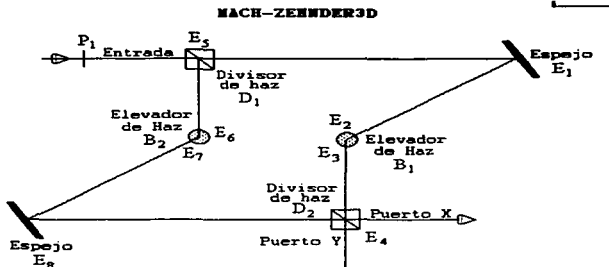


Figura 5.3: Esquema del Interferómetro Mach-Zehnder tridimensional

por que al ser no polarizante, las transmitancias ortogonal y paralela difieren en menos de tres porciento para la longitud de onda usada, de 432nm . El polarizador P_1 (Melles Griot07hpr001) esta montado sobre un rotador con motor, controlado a distancia (Oriol 13147), lo que nos permitió realizar las observaciones y tomar las medidas con relativa facilidad (de haber contado con una tarjeta de video o con un convertidor de analógico a digital, habrían permitido un registro mas refinado y exhaustivo de la información, así como un enorme ahorro de tiempo). El láser (NECG165261) fue montado junto con el polarizador P_1 sobre una mesa óptica aislada de las vibraciones (Ealing-226670) separada de la mesa óptica Oriol sobre la cual fueron montados todos los demás dispositivos de los cuales consiste el interferómetro. El láser se encuentra a 190cm del primer cubo divisor de haz, lo que nos obliga a ser muy cuidadosos con la alineación. Finalmente a la salida del interferómetro se colocó un ocular con retícula (Ealing10X) movida por micrometro, a manera de expansor de haz, seguido de los filtros lineales, circulares, u homogéneos que sean requeridos para la medición particular que se lleve a cabo. Más allá de los filtros se colocan los instrumentos de detección, que en nuestro caso fueron; una cámara minolta x-700, una

cámara de video sony slv-x37, un fotómetro tectronix j-16 con fotocelda cosenocorregida, y un fotómetro pasco-8020 con un haz de fibras ópticas de diámetro 2.3mm como colector de luz. Siempre colocamos los instrumentos de detección fuera de la segunda mesa óptica, pues las distancias propicias para una óptima detección así como la manipulación de los instrumentos hacían esto necesario ya sea para no perturbar el experimento, o para poder hacer la detección desde la distancia requerida. Se puso especial cuidado en la alineación del interferómetro, así como en mantener lo más próximas entre sí las longitudes de camino óptico de ambos brazos. Se puso "a ceros" los ejes de transmisión de los polarizadores, es decir se hizo coincidir el cero de las monturas rotables con una marca determinada, cuando el eje de transmisión se encontraba paralelo al plano de la mesa. Esto lo hicimos usando el ángulo de polarización o ángulo de Brewster para reflexión en superficies dieléctricas. Además se determinó el eje rápido de la lámina retardadora de un cuarto de onda de mica (Melles Griot 02wrm001), para poder determinar el sentido levógiro, o dextrógiro de la luz al construir los filtros necesarios.

5.2.1 Manifestaciones de la fase topológica de Berry para el fotón.

El fotón es un bosón de masa en reposo nula. Su helicidad $s \cdot k$, donde s es el operador de espín, y k es un vector unitario en la dirección de su propagación, solamente puede ser $+1$, ó -1 . La pregunta fundamental que motiva a este como a otros trabajos es, como puede el fotón adquirir una fase de Berry. Predicción esta, que como hemos visto es sorprendentemente universal, y por tanto en óptica también debe manifestarse.

Chiao ?? en principio reemplaza en el ejemplo estudiado por Berry; de "espines en campos magnéticos" (ver sección 4.4), la dirección del campo magnético (B_x, B_y, B_z) -con el que el fotón no se acopla- por la dirección de propagación del fotón (k_x, k_y, k_z) , la cual, en cambio, puede ser afectada por cambios en el medio externo, tales como variaciones en el índice de refracción o reflexiones, del mismo modo en que era cambiada la dirección del campo magnético. En contraste con un bosón masivo de espín uno, el espín del fotón solo puede seguir la dirección de k , así la masa cero del fotón garantiza que su helicidad se mantendrá con uno de los dos valores, $+1$ ó -1 .

La invariancia de la helicidad del fotón, implica que el eigenestado de espín del fotón $|k, \sigma\rangle$ satisface

$$s \cdot k |k, \sigma\rangle = \sigma |k, \sigma\rangle \quad (5.2)$$

donde \mathbf{k} es el vector de propagación, y $\sigma = \pm 1$ es el eigenvalor de espín o número cuántico de helicidad. Este es por tanto un problema formalmente idéntico al problema de espines en campos magnéticos estudiado en la sección 5.4 ver las ecuaciones 4.76 y 4.77

$$k\hbar\mathbf{B} \cdot \mathbf{s} |n, s\rangle = k\hbar B n |n, s\rangle$$

como se demostró la fase geométrica esta dada por

$$\gamma(C) = -n\Omega(C) \quad (5.3)$$

donde $\Omega(C)$ es el ángulo sólido subtendido por la curva C respecto al origen del espacio de parámetros. Esta fase como hemos visto, se interpreta como el flujo de campo magnético de un monopolo de intensidad $-n$ situado en el origen del espacio de parámetros (donde hay una degeneración). Consideremos la evolución del estado de espín de un fotón que viaja por alguno de los brazos del interferómetro (ver fig. 5.3). El fotón cambia su dirección de propagación en cada reflexión, y además (para superficies perfectamente conductoras), invierte su helicidad; la cual no cambia si el fotón se transmite a través de un cubo divisor de haz. Para cada fotón, dado un brazo del interferómetro, tenemos una curva C proyectada por el eigenestado de espín sobre la esfera unitaria Σ de todas las posibles direcciones de propagación del fotón, en el espacio de configuración tridimensional ordinario. El circuito $C_{\alpha+}$ es el resultado de proyectar el eigenestado de espín del fotón $|+\rangle$, sobre la esfera Σ conforme el fotón se propaga por el brazo α del interferómetro. Un fotón $|+\rangle$ entra al interferómetro a lo largo del eje-X y la proyección de su espín cae en el punto A sobre Σ (ver fig.5.4a). Luego de ser transmitido a través del divisor de haz D_1 , su dirección permanece constante y por tanto su proyección permanece sobre el punto A. Bajo la reflexión en el espejo E_1 el fotón cambia ambas, su helicidad y dirección; un vector de dirección apropiado es entonces $(-\cos\theta, -\sin\theta, 0)$ y, debido a la reflexión, el punto B en la figura 5.4a resulta la nueva proyección del espín sobre Σ , cuyas coordenadas son $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$. Luego el fotón viaja del espejo E_1 al elevador de haz B_1 , el cual contiene a los dos espejos E_2 (inferior) y E_3 (superior). El fotón va de E_2 a E_3 . Después de la reflexión en el espejo E_2 , el fotón viaja en la dirección del eje-Z, y la proyección del espín cambia al punto C: $(0, 1, 0)$ sobre Σ . El espejo E_3 refleja al fotón en la dirección negativa del eje-Y, pero la proyección del espín es sobre el punto D: $(0, 1, 0)$ sobre Σ (fig.5.4a). Finalmente el divisor de haz D_2 refleja al fotón sobre su dirección original de propagación, cerrando el circuito sobre Σ pasando a través de B, conforme la proyección de espín va de D a A. Entonces, el circuito cerrado $C_{\alpha+}$

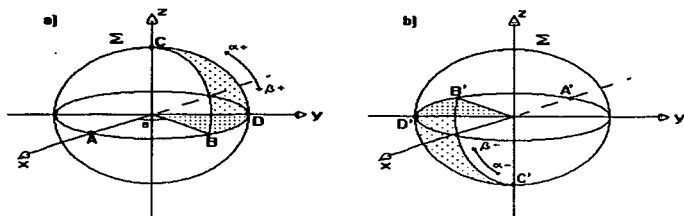


Figura 5.4: Evolución del espín sobre la esfera unitaria de las posibles direcciones de espín esta formado por los puntos ABCDA, los cuales subtenden el triángulo esférico BCD. Si consideramos el circuito $C_{\beta+}$ correspondiente a un fotón (+) propagándose a través del brazo β del interferómetro, este se construye en una forma análoga al caso previo, resultando el circuito cerrado sobre Σ ; ADCBA, que subtende el mismo triángulo esférico BCD sobre Σ , pero en este caso la trayectoria es recorrida en sentido contrario al correspondiente para $C_{\alpha+}$. En la figura 5.4b) se muestran los circuitos $C_{\alpha+}$ y $C_{\alpha-}$ obtenidos de manera completamente análoga a como se obtuvo $C_{\alpha+}$. Si Ω es el ángulo sólido que cualquiera de estos circuitos subtende desde el centro de la esfera Σ . C representa una evolución cíclica del eigenestado de espín del cual adquiere, luego de un ciclo completo, una fase de Berry (Aharonov-Andan) de:

$$\gamma_{i\sigma} = \Omega(C_{i\sigma}), \quad i = \alpha, \beta : \sigma = +, -;$$

donde σ es la helicidad del fotón.

Ahora consideremos la relación entre el ángulo sólido $\Omega(C_{i\sigma})$, y el ángulo θ referente a la configuración geométrica del interferómetro. Para cada brazo $C_{i\sigma}$ traza un triángulo esférico con dos de sus vértices sobre el ecuador y el tercero sobre uno de los polos de la esfera Σ (ver fig.5.4a y 5.4b). En acuerdo con el teorema de Gauss Bonnet, la suma de los ángulos internos en un triángulo esférico es igual a $\pi + \Omega(C_{i\sigma})$. Y entonces para nuestro triángulo

$C_{1\sigma}$:

$$|\Omega(C_{1\sigma})| = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

Por lo que un fotón adquiere un factor de fase adicional $\gamma_{1\sigma}$ el cual no existe en un interferómetro plano convencional. A la salida del interferómetro fotones de igual helicidad adquieren diferencias de fase geométricas

$$\Delta\gamma_+ = \gamma_{\alpha+} - \gamma_{\beta+} \quad \text{y} \quad \Delta\gamma_- = \gamma_{\alpha-} - \gamma_{\beta-}$$

de

$$\begin{aligned} \Delta\gamma_+ &= -\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ \Delta\gamma_- &= +\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \end{aligned}$$

de acuerdo con la siguiente tabla

$\gamma_{1\sigma}$	+)	−)
α	$-\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$+\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
β	$+\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$-\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

Así a través de un filtro cuya mitad superior permite pasar estados |+), y cuya mitad inferior solo permite el paso de estados |−), colocado a la salida del interferómetro, se observaran los corrimientos de fase descritos anteriormente como un desplazamiento del patrón superior (|+)) respecto del patrón inferior (|−)) tal y como se aprecia en la figura 5.5. Cabe hacer mención de que para variar el ángulo θ , fue necesario rearmar el interferómetro y repetir la alineación para cada valor de θ , (ver la figura 5.3)

5.2.2 Un cálculo clásico

Si representamos una onda electromagnética como un vector de Jones con componentes perpendicular y paralela al plano de incidencia de una superficie reflectora metálica, entonces estas componentes serán transformadas según las ecuaciones de Fresnel para metales dadas anteriormente. Si representamos estos coeficientes que son números complejos en términos de un factor de amplitud y un factor de fase entonces podemos representar el proceso de reflexión de una onda electromagnética en una superficie metálica por la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} P' \\ S' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_p e^{i\phi_p} & 0 \\ 0 & r_s e^{i\phi_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_p e^{i\phi_p} P \\ r_s e^{i\phi_s} S \end{bmatrix}$$

Interferogramas para estados positivos (parte superior)
y negativos (parte inferior), para tres distintas configuraciones

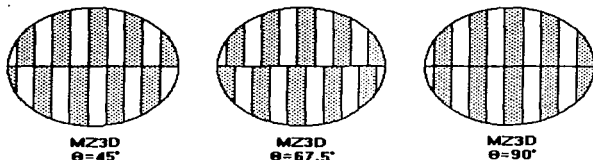


Figura 5.5: Interferogramas observados

en donde un vector de Jones en la base $\{|P\rangle, |S\rangle\}$ se transforma en otro por medio de una matriz de espejo. Nos interesa estudiar los cambios de fase y de amplitud de las componentes de un estado particular después de sufrir las reflexiones sucesivas que ocurren en cada brazo del interferómetro Mach-Zehnder-3D sobre el que trabajamos. Haremos el cálculo para la configuración del interferómetro en que $\theta = 45^\circ$, y además como en nuestro experimento se introduce un estado de polarización lineal a la entrada, entonces el vector de Jones entrante será

$$\begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix}$$

en donde ϕ es el ángulo que forman el plano de vibración y el plano de incidencia ¹. para esta configuración especial del interferómetro tan solo intervienen dos ángulos de incidencia sobre los espejos, éstos son $i = 22.5^\circ$ e $i = 45^\circ$; y para estos ángulos, los factores de

¹Cuando $\phi = 0$ el plano de vibración es paralelo al plano de la mesa (banco óptico), y es el mismo plano que el primer plano de incidencia.

amplitud y fase de los coeficientes de Fresnel están dados por [4]

$$\begin{aligned} \phi_{p45} &= 28^\circ & R_{p45} &= .90 \\ \phi_{s45} &= 190^\circ & R_{s45} &= .93 \\ \phi_{p22.5} &= 18^\circ & R_{p22.5} &= .92 \\ \phi_{s22.5} &= 195^\circ & R_{s22.5} &= .92 \end{aligned}$$

en donde hay que tomar en cuenta que $r_p^2 = R_p$ y de manera semejante las otras componentes.

Analizando la figura 5.3, que muestra esquemáticamente el interferómetro, podemos seguir las evoluciones de un par de haces que recorren en cada uno de los brazos α y β . Así para el brazo α el primer plano de incidencia es el plano $X - Y$, que es ortogonal al segundo plano de incidencia que es vertical y forma un ángulo diedro θ con el plano $X - Z$ y un ángulo $\frac{\pi}{2} - \theta$ con el tercer plano de incidencia que es el plano $Y - Z$ y este a su vez es ortogonal al cuarto y último plano de incidencia que nuevamente es paralelo al plano $X - Y$. En tanto que para el brazo β el primer² PI es el $X - Y$; que es ortogonal al segundo PI o plano $Y - Z$, y este a su vez forma un ángulo de $\frac{\pi}{2} - \theta$ con el tercer PI; mismo que es ortogonal al cuarto y último PI que es nuevamente el plano $X - Y$.

Hagamos entonces los cálculos para el brazo α en donde se presentan las siguientes transformaciones

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} P \\ S \end{bmatrix}_{E_1} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} r_{p22.5} e^{i\phi_{p22.5}} P \\ r_{s22.5} e^{i\phi_{s22.5}} S \end{bmatrix}_{E_1} \\ &= \begin{bmatrix} r_{s22.5} e^{i\phi_{s22.5}} S \\ r_{p22.5} e^{i\phi_{p22.5}} P \end{bmatrix}_{E_2} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} r_{p45} e^{i\phi_{p45}} r_{s22.5} e^{i\phi_{s22.5}} S \\ r_{s45} e^{i\phi_{s45}} r_{p22.5} e^{i\phi_{p22.5}} P \end{bmatrix}_{E_2} \\ &= \begin{bmatrix} r_{p45} e^{i\phi_{p45}} r_{s22.5} e^{i\phi_{s22.5}} S \sin \theta + r_{s45} e^{i\phi_{s45}} r_{p22.5} e^{i\phi_{p22.5}} P \cos \theta \\ r_{p45} e^{i\phi_{p45}} r_{s22.5} e^{i\phi_{s22.5}} S \cos \theta + r_{s45} e^{i\phi_{s45}} r_{p22.5} e^{i\phi_{p22.5}} P \sin \theta \end{bmatrix}_{E_3} \xrightarrow{E_3} \\ & \begin{bmatrix} r_{p45}^2 e^{i2\phi_{p45}} r_{s22.5} e^{i\phi_{s22.5}} S \sin \theta + r_{p45} e^{i\phi_{p45}} r_{s45} e^{i\phi_{s45}} r_{p22.5} e^{i\phi_{p22.5}} P \cos \theta \\ r_{s45} e^{i\phi_{s45}} r_{p45} e^{i\phi_{p45}} r_{s22.5} e^{i\phi_{s22.5}} S \cos \theta + r_{s45}^2 e^{i2\phi_{s45}} r_{p22.5} e^{i\phi_{p22.5}} P \sin \theta \end{bmatrix}_{E_3} \\ & \xrightarrow{E_4} \begin{bmatrix} r_{s45} e^{i\phi_{s45}} r_{p45} e^{i\phi_{p45}} r_{s22.5} e^{i\phi_{s22.5}} S \cos \theta + r_{s45}^2 e^{i2\phi_{s45}} r_{p22.5} e^{i\phi_{p22.5}} P \sin \theta \\ r_{p45} e^{i\phi_{p45}} r_{s45} e^{i\phi_{s45}} r_{p22.5} e^{i\phi_{p22.5}} P \cos \theta + r_{p45}^2 e^{i2\phi_{p45}} r_{s22.5} e^{i\phi_{s22.5}} S \sin \theta \end{bmatrix}_{E_4} \end{aligned}$$

²Abreviaremos con PI "plano de incidencia"

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{l} r_{p45} e^{i\phi_{p45}} r_{p45}^2 e^{i2\phi_{p45}} r_{p22.5} e^{i\phi_{p22.5}} S \cos \theta + r_{p45} e^{i\phi_{p45}} r_{p45}^2 e^{i2\phi_{p45}} r_{p22.5} e^{i\phi_{p22.5}} P \sin \theta \\ r_{s45} e^{i\phi_{s45}} r_{p45}^2 e^{i2\phi_{p45}} r_{p22.5} e^{i\phi_{p22.5}} S \sin \theta + r_{p45} e^{i\phi_{p45}} r_{p45}^2 e^{i2\phi_{p45}} r_{p22.5} e^{i\phi_{p22.5}} P \cos \theta \end{array} \right]_{E_4} \\ & \left[\begin{array}{l} r_{p22.5} r_{s45} r_{p45}^2 e^{i(2\phi_{p45} + \phi_{s45} + \phi_{p22.5})} S \cos \theta + r_{p22.5} r_{p45}^2 e^{i(2\phi_{p45} + \phi_{p45} + \phi_{p22.5})} P \sin \theta \\ r_{p22.5} r_{s45} r_{p45}^2 e^{i(2\phi_{p45} + \phi_{s45} + \phi_{p22.5})} S \sin \theta + r_{p22.5} r_{p45}^2 e^{i(2\phi_{p45} + \phi_{p45} + \phi_{p22.5})} P \cos \theta \end{array} \right] \rightarrow \\ & r_{s45} r_{p45} e^{i(\phi_{p45} + \phi_{s45})} \left[\begin{array}{l} r_{p22.5} r_{p45} e^{i(\phi_{p45} + \phi_{p22.5})} S \cos \theta + r_{p22.5} r_{s45} e^{i(\phi_{s45} + \phi_{p22.5})} P \sin \theta \\ r_{p22.5} r_{p45} e^{i(\phi_{p45} + \phi_{p22.5})} S \sin \theta + r_{p22.5} r_{s45} e^{i(\phi_{s45} + \phi_{p22.5})} P \cos \theta \end{array} \right] \end{aligned}$$

y al substituir el vector de Jones de un estado linealmente polarizado se obtiene

$$\frac{r_{s45} r_{p45} e^{i(\phi_{p45} + \phi_{s45})}}{4} \left[\begin{array}{l} r_{p22.5} r_{p45} e^{i(\phi_{p45} + \phi_{p22.5})} \sin \phi \cos \theta + r_{p22.5} r_{s45} e^{i(\phi_{s45} + \phi_{p22.5})} \cos \phi \sin \theta \\ r_{p22.5} r_{p45} e^{i(\phi_{p45} + \phi_{p22.5})} \sin \phi \sin \theta + r_{p22.5} r_{s45} e^{i(\phi_{s45} + \phi_{p22.5})} \cos \phi \cos \theta \end{array} \right]$$

que es el vector de Jones transformado por el brazo α , y donde aparece el factor $\frac{1}{4}$ debido a que dos de las reflexiones se llevan a cabo en cubos divisores de haz los cuales solo dejan pasar (reflejarse) $\frac{1}{2}$ de la luz incidente³.

Haciendo un calculo semejante para el brazo β se obtienen las siguientes transformaciones

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{l} P \\ S \end{array} \right]_{E_5} \xrightarrow{E_5} \left[\begin{array}{l} r_{p45} e^{i\phi_{p45}} P \\ r_{s45} e^{i\phi_{s45}} S \end{array} \right]_{E_5} \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{l} r_{s45} e^{i\phi_{s45}} S \\ r_{p45} e^{i\phi_{p45}} P \end{array} \right]_{E_6} \xrightarrow{E_6} \left[\begin{array}{l} r_{p45} e^{i\phi_{p45}} r_{s45} e^{i\phi_{s45}} S \\ r_{s45} e^{i\phi_{s45}} r_{p45} e^{i\phi_{p45}} P \end{array} \right]_{E_6} \\ & \rightarrow r_{p45} e^{i\phi_{p45}} r_{s45} e^{i\phi_{s45}} \left[\begin{array}{l} S \sin \theta + P \cos \theta \\ S \cos \theta + P \sin \theta \end{array} \right]_{E_7} \xrightarrow{E_7} \\ & r_{p45} e^{i\phi_{p45}} r_{s45} e^{i\phi_{s45}} \left[\begin{array}{l} r_{p45} e^{i\phi_{p45}} (S \sin \theta + P \cos \theta) \\ r_{s45} e^{i\phi_{s45}} (S \cos \theta + P \sin \theta) \end{array} \right]_{E_7} \\ & \rightarrow r_{p45} e^{i\phi_{p45}} r_{s45} e^{i\phi_{s45}} \left[\begin{array}{l} r_{s45} e^{i\phi_{s45}} (S \cos \theta + P \sin \theta) \\ r_{p45} e^{i\phi_{p45}} (S \sin \theta + P \cos \theta) \end{array} \right]_{E_8} \xrightarrow{E_8} \\ & r_{p45} e^{i\phi_{p45}} r_{s45} e^{i\phi_{s45}} \left[\begin{array}{l} r_{p22.5} e^{i\phi_{p22.5}} r_{s45} e^{i\phi_{s45}} (S \cos \theta + P \sin \theta) \\ r_{p22.5} e^{i\phi_{p22.5}} r_{p45} e^{i\phi_{p45}} (S \sin \theta + P \cos \theta) \end{array} \right]_{E_8} \end{aligned}$$

³Un cubo divisor de haz como los usados tiene transmitancia y reflectancia cuyas componentes paralela y perpendicular difieren en menos del 2% (ver el catalogo de Melles Griot)

que para luz linealmente polarizada a un ángulo ϕ da

$$r_{p45} e^{i\phi_{p45}} r_{s45} e^{i\phi_{s45}} \begin{bmatrix} r_{p22,5} e^{i\phi_{p22,5}} r_{s45} e^{i\phi_{s45}} (\sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta) \\ r_{s22,5} e^{i\phi_{s22,5}} r_{p45} e^{i\phi_{p45}} (\sin \phi \sin \theta + \cos \phi \cos \theta) \end{bmatrix}_{E_{\alpha}}$$

o de manera compacta

$$\frac{1}{4} r_{p45} r_{s45} e^{i(\phi_{s45} + \phi_{p45})} \begin{bmatrix} r_{p22,5} r_{s45} e^{i(\phi_{s45} + \phi_{p22,5})} (\sin(\phi + \theta)) \\ r_{s22,5} r_{p45} e^{i(\phi_{p45} + \phi_{s22,5})} (\cos(\phi - \theta)) \end{bmatrix}$$

que es el haz emergente transformado por el brazo β del interferómetro. Ahora podemos obtener la matriz de coherencia de los haces emergentes por uno y otro brazos del interferómetro. Como habíamos mencionado los elementos de esta matriz son susceptibles de ser medidos, por lo que estos resultados serán contrastados con los resultados experimentales. Además a partir de las expresiones para los vectores de Jones de los haces emergentes es posible calcular el producto punto de estos que esencialmente es el término de interferencia

$$V = \frac{2(I_{\alpha} I_{\beta})^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_{\alpha} \cdot \mathbf{u}_{\beta}}{I_{\alpha} + I_{\beta}} \quad (5.4)$$

La matriz de coherencia para la luz proveniente del brazo α es (ver la ecuación 2.55)

$$\frac{r_{s45} r_{p45} e^{i(\phi_{p45} + \phi_{s45})}}{4} \begin{bmatrix} r_{s22,5} r_{p45} e^{i(\phi_{p45} + \phi_{s22,5})} \sin \phi \cos \theta + r_{p22,5} r_{s45} e^{i(\phi_{s45} + \phi_{p22,5})} \cos \phi \sin \theta \\ r_{s22,5} r_{p45} e^{i(\phi_{p45} + \phi_{s22,5})} \sin \phi \sin \theta + r_{p22,5} r_{s45} e^{i(\phi_{s45} + \phi_{p22,5})} \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$J_{xx} = \frac{1}{16} r_{s45}^2 r_{p45}^2 (r_{s22,5}^2 r_{p45}^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + r_{p22,5}^2 r_{s45}^2 \cos^2 \phi \sin^2 \theta + 2r_{s22,5} r_{p45} r_{p22,5} r_{s45} \cos(\phi_{p45} + \phi_{s22,5} - \phi_{s45} - \phi_{p22,5}) \sin \phi \cos \phi \sin \theta \cos \theta)$$

$$J_{xy} = \frac{1}{16} r_{s45}^2 r_{p45}^2 (r_{s22,5} r_{p45} e^{i(\phi_{p45} + \phi_{s22,5})} \sin \phi \cos \theta + r_{p22,5} r_{s45} e^{i(\phi_{s45} + \phi_{p22,5})} \cos \phi \sin \theta) \times (r_{s22,5} r_{p45} e^{-i(\phi_{p45} + \phi_{s22,5})} \sin \phi \sin \theta + r_{p22,5} r_{s45} e^{-i(\phi_{s45} + \phi_{p22,5})} \cos \phi \cos \theta)$$

$$J_{yx} = \frac{1}{16} r_{s45}^2 r_{p45}^2 (r_{s22,5} r_{p45} e^{i(\phi_{p45} + \phi_{s22,5})} \sin \phi \sin \theta + r_{p22,5} r_{s45} e^{i(\phi_{s45} + \phi_{p22,5})} \cos \phi \cos \theta) \times (r_{s22,5} r_{p45} e^{-i(\phi_{p45} + \phi_{s22,5})} \sin \phi \cos \theta + r_{p22,5} r_{s45} e^{-i(\phi_{s45} + \phi_{p22,5})} \cos \phi \sin \theta)$$

$$J_{yy} = \frac{1}{16} r_{s45}^2 r_{p45}^2 ((r_{s22,5}^2 r_{p45}^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + r_{p22,5}^2 r_{s45}^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta + 2r_{s22,5} r_{p45} r_{p22,5} r_{s45} \cos(\phi_{p45} + \phi_{s22,5} - \phi_{s45} - \phi_{p22,5})) \sin \phi \cos \phi \sin \theta \cos \theta)$$

ahora para el brazo β la matriz de coherencia que le corresponde es

$$J_{xx} = \left(\frac{1}{16} r_{p4s}^2 r_{s4s}^2 \right) r_{p22,s}^2 r_{s4s}^2 \sin^2 (\phi + \theta)$$

$$J_{xy} = \left(\frac{1}{16} r_{p4s}^2 r_{s4s}^2 \right) r_{p22,s} r_{s4s} r_{s22,s} r_{p4s} e^{i(\phi_{s4s} + \phi_{p22,s} - \phi_{p4s} - \phi_{s22,s})} (\sin (\phi + \theta)) (\cos (\phi - \theta))$$

$$J_{yz} = \left(\frac{1}{16} r_{p4s}^2 r_{s4s}^2 \right) r_{s22,s} r_{p4s} r_{p22,s} r_{s4s} e^{-i(\phi_{s4s} + \phi_{p22,s} - \phi_{p4s} - \phi_{s22,s})} (\sin (\phi + \theta)) (\cos (\phi - \theta))$$

$$J_{yy} = \left(\frac{1}{16} r_{p4s}^2 r_{s4s}^2 \right) r_{s22,s}^2 r_{p4s}^2 \cos^2 (\phi - \theta)$$

El producto punto de los vectores de Stokes salientes es proporcional a la visibilidad del patrón de interferencia, puesto que esta va como el producto punto de los vectores unitarios en las respectivas direcciones de polarización de las dos ondas. Y como hemos visto a partir de los elementos de la matriz de coherencia se pueden obtener los vectores de Stokes y a partir de estos la visibilidad, así pues, se puede predecir la visibilidad del patrón como función de ϕ por medio de este cálculo de Jones, resultado que mostraremos mas adelante.

5.2.3 Observaciones

Una vez instalado el interferómetro, procedimos a estudiar el patrón de interferencia dados los distintos estados de polarización a la entrada del interferómetro, como a continuación describimos.

Primero colocamos la fibra óptica (haz de fibras) del detector, sobre un punto fijo en la pantalla de observación, e hicimos girar el ángulo de polarización de la luz entrante; por medio de rotar el polarizador P_1 , con lo que obtuvimos una variación cosenoidal de la intensidad en ese punto fijo, tal y como si las franjas del patrón desfilaran ante este punto (ver figura 5.6).

Como segundo paso, analizamos el cambio en la visibilidad al variar el ángulo de polarización de un estado lineal entrante; aprovechando el pequeño diámetro de la sonda, la cual colocamos sobre un máximo del patrón y luego en un mínimo adyacente, registrando las medidas para obtener el valor de la visibilidad usando la definición corrientemente usada, y repitiendo esto para cada nuevo valor del ángulo de polarización a la entrada. De donde resulta que la visibilidad casi se anulaba para cuatro valores en una vuelta completa de P_1 , presentando mínimos de alrededor del 10%, debidos principalmente, al diámetro de la

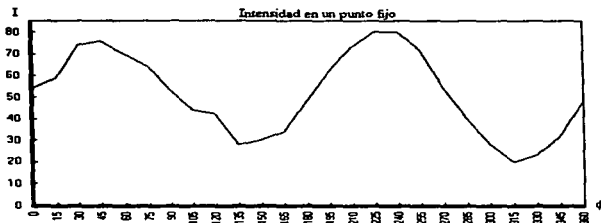


Figura 5.6: Intensidad en un punto fijo "Vs" ϕ

sonda, así como a las reflexiones espureas, reflexiones múltiples y dispersión en los distintos componentes del interferómetro. En la figura 5.7 se muestran los resultados.

Para determinar si se presentaba un desfile de franjas, se midió la posición de un máximo de intensidad respecto a la retícula del expansor, al variar ϕ . Encontrándose que no había un desfile continuo y suave de las franjas, si no que las franjas del patrón, cambiaban de posición de máximos por mínimos de manera abrupta, es decir sin pasar por posiciones intermedias. Estos "saltos" ocurrían en el momento en que la visibilidad se anulaba. Esto es, que un máximo del patrón se encontraba sobre la retícula durante el primer cuarto de vuelta, pero hacia el final de este primer cuarto de vuelta la visibilidad disminuía hasta anularse justo a los noventa grados. En seguida, la visibilidad nuevamente se incrementaba permitiéndonos observar que donde antes se hallaba un máximo ahora se encontraba un mínimo de intensidad, y que este mínimo ocuparía su sitio sobre la retícula durante el siguiente cuarto de vuelta, dando lugar al comienzo de un nuevo ciclo en todo semejante al recién descrito. En la gráfica de la figura 5.8, se muestra la posición de un máximo respecto de la retícula contra ϕ . Cabe señalar que no es la retícula la que se desplaza, si no es el patrón el que lo hace, quedándose fija la retícula.

Esta observación nos permitió concluir que; ningún desfile ocurría, que los cambios en la posición del patrón, se daban de modo abrupto, que el cambio de la intensidad del punto

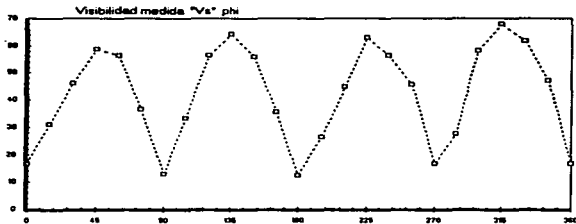


Figura 5.7: Visibilidad "Vs" ϕ

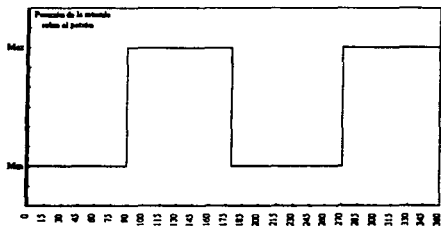


Figura 5.8: Posición de la retícula sobre el patrón de interferencia "Vs" ϕ

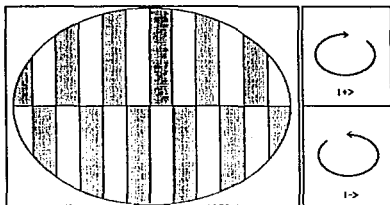


Figura 5.9: Dibujo del interferograma observado a través de un filtro circular derecho (superior) e izquierdo (parte inferior)

fijo se debía al cambio en la visibilidad, y no a un posible desfile de franjas. Además, un registro videograbado, reproducido en cámara rápida (y solo en cámara rápida), permitió observar un pequeño vaivén (del orden de un cuarto de onda), que al parecer tiene un carácter anómalo, esto es, que no se debe a la geometría del interferómetro, puesto que esta no cambia al introducir los distintos estados de polarización (rotando el ángulo de polarización), ni tampoco es explicable en términos de los componentes individuales del interferómetro.

Debido a la fase de Berry, al introducir luz no polarizada al interferómetro; cuando sus brazos se configuran con $\theta = 45^\circ$ ver figura 5.3. la visibilidad es nula, pues en este caso, el patrón formado por luz $|+\rangle$, y el formado por luz $|-\rangle$, difieren en media onda (tienen una fase de Berry de π radianes), por lo que los máximos de un patrón ocupan el lugar de los mínimos del otro patrón. Haciendo que la visibilidad se anule (ver la figura 5.9). La visibilidad será mejor, cuando la fase de Berry sea cercana a $2n\pi$ (con $n \in \mathbf{Z}$), por lo que cabe preguntarse si los cambios descritos en la visibilidad están o no asociados con posibles cambios en la fase de Berry.

Para determinar si la fase de Berry permanecía constante o no al variar ϕ , construimos un

filtro cuya mitad superior solo permitía el paso de estados de polarización circulares positivos, y cuya mitad inferior solo permitía el paso de estados negativos. Con este dispositivo, fuimos capaces de observar directamente la fase geométrica entre estados $|+\rangle$, y estados $|-\rangle$, al proyectar sobre la pantalla ambos estados simultáneamente. El resultado fue que la fase observada es "casi" constante. Esto quiere decir, que con una observación gruesa, ningún cambio se observa, pero al video filmar la proyección de ambos patrones simultáneos conforme hacíamos variar ϕ , y reproducir el video en cámara rápida, una variación abrupta; del orden de un cuarto de onda, se hace patente. Soslayaremos este comportamiento anómalo que, esperamos, sea objeto de un estudio posterior, y consideraremos el resultado de la observación gruesa o en "cámara normal". Es decir que la fase geométrica permanece constante.

Como hemos mencionado con anterioridad, luz lineal que incide sobre una superficie metálica, en general, es reflejada como luz elípticamente polarizada. y con un par de estados mutuamente ortogonales o casi ortogonales, ninguna o casi ninguna interferencia tiene lugar. Hemos descartado ya que el cambio en la visibilidad, se debiera a variaciones en la fase de Berry, por lo que podemos confiar en que este cambio es ocasionado únicamente por la ortogonalidad de los haces involucrados. Una primera aproximación en la caracterización de los estados de polarización, se obtiene midiendo con un analizador la posición en la que se presentan los mínimos de irradiancia transmitida de cada brazo. Esta primera aproximación la mostramos gráficamente, y además mostramos la diferencia de las posiciones angulares para las cuales se dan los mínimos mencionados.

Al observar la gráfica (fig. 5.10), y compararla con la figura 5.7, se puede observar que la diferencia $\delta_{\min\alpha} - \delta_{\min\beta}$ sigue aproximadamente a la visibilidad, lo que refuerza a la ecuación 5.4, y se hace patente la necesidad de determinar completamente el estado de polarización de los haces emergentes; es decir, los elementos de la matriz de coherencia respectiva de cada haz.

Las medidas de los elementos de la matriz de coherencia se hacen midiendo las intensidades dadas en el conjunto de ecuaciones 2.67 a 2.69. En la figura 5.11 presentamos las medidas de estos seis valores de la irradiancia para cada haz, así como el cálculo de los correspondientes elementos de matriz. En el apéndice se pueden ver en forma tabular además de estos, los parámetros de Stokes, y el producto punto de los vectores de Stokes de ambos brazos como función del ángulo de polarización a la entrada.

A continuación presentamos en forma gráfica la comparación entre los valores calculados

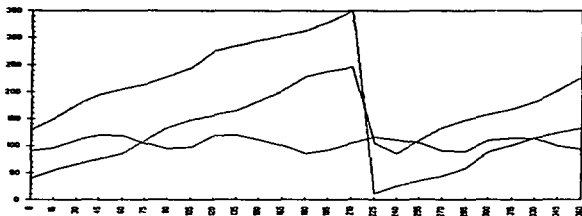


Figura 5.10: Posición de los mínimos con un analizador a la salida del interferómetro "Vs" ángulo de polarización lineal en la entrada del interferómetro ϕ . (Efecto tijera)

β	Δ_{120}	Δ_{150}	$Re\Delta_{120}$	$Im\Delta_{120}$	Δ_{120}	Δ_{150}	$Re\Delta_{150}$	$Im\Delta_{150}$
0	67	62	-46.7	-19.6	83.6	76.2	60.2	27.7
22.5	101	28	-49.8	4.8	43	107	21.9	45.1
45	110.4	9.8	-28.5	26.8	21.4	112	-26.3	37.7
67.5	104.2	24.8	11.9	31.6	33.2	104.2	-62.7	6.8
90	65	59	43.2	18	67	72	-61.4	-25.4
112.5	29	98.4	48.1	-5.5	107.2	38.8	-22.9	-45.6
135	13.4	122	25	-25.5	118.2	23.4	26	-34.8
157.5	24.8	101	-13.9	-33.2	117	40.4	62.2	-6.8
180	58.4	65	-49.4	-19.9	79.4	69.8	59.4	27.8
202.5	99.2	29.4	-53.5	4.9	39.8	99	22	48.1
225	115.2	10	-25.8	25.8	22.4	121	-26.7	36.5
247.5	105.6	25.6	11.3	31.4	31.6	101	-59.6	7.1
270	64.4	63.4	45.9	19.3	68.6	71	-60.3	-27.7
292.5	30.4	106	49	-5.5	104.6	36.8	-21.4	-42.6
315	132	123.2	23.3	-27.7	120	24	28.1	-36.8
337.5	26.4	102.6	-16.6	-32.9	109.6	38	60.5	-6.3
360	57	64	-45.5	-19.8	80.2	74	59	27.9

Figura 5.11: Elementos de la Matriz de coherencia (en $\mu\pm.05$) "Vs" ϕ

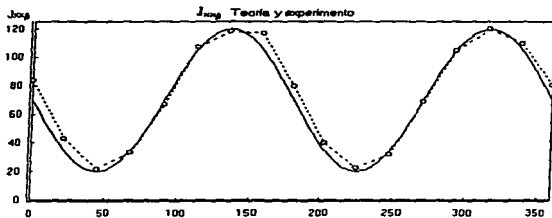


Figura 5.12: J_{xx} "Vs" ϕ Teoría y experimento para el brazo β (ver la quinta columna de la figura 5.11)

teóricamente (línea continua), y los valores medidos, presentados en la tabla 5.11. para los distintos elementos de la matriz de coherencia. En la gráfica se presentan las medidas de J_{xx} emergente por el brazo β y la gráfica de la función calculada en la sección anterior. como se puede observar una gran coincidencia se manifiesta en la figura 5.12, y lo mismo ocurre para los valores calculados y medidos de los otros elementos de la matriz de coherencia. Remitimos al lector a las gráficas que aparecen a continuación, pues la información así presentada habla por si misma. Se presentan por separado las gráficas de las partes real e imaginaria de los elementos fuera de la diagonal, de las matrices de coherencia, por razones de obvia imposibilidad de graficarlos simultáneamente. Y finalmente se presenta el resultado de calcular, usando el programa matemática, el producto punto de los vectores de Stokes que representan a los estados de polarización de los haces emergentes por cada uno de los brazos del interferómetro. De tal manera que es posible comparar la visibilidad medida y la visibilidad que este último cálculo predice. Así hay cuatro mínimos para un ciclo completo: es decir que la visibilidad se anula cuatro veces al rotar el plano de polarización entrante 360° , tanto teórica como experimentalmente.

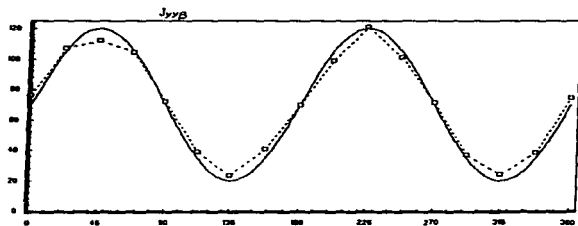


Figura 5.13: J_{yy} "Vs" ϕ Teoría y experimento para el brazo β (sexta columna)

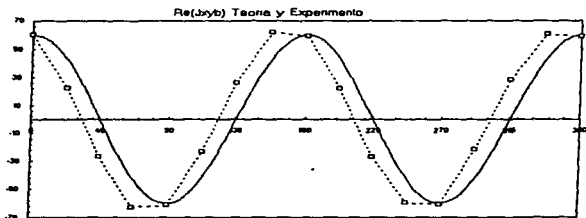


Figura 5.14: Parte real de J_{xy} "Vs" ϕ Teoría y experimento para el brazo β (septima columna)

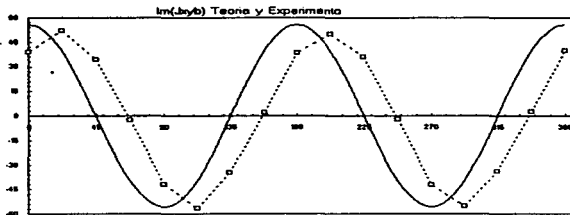


Figura 5.15: Parte imaginaria de J_{xy} "Vs" ϕ Teoría y experimento para el brazo β (octava columna fig. 5.11)

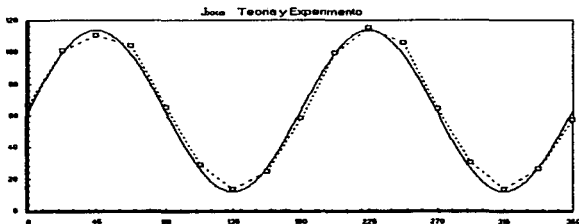


Figura 5.16: J_{xx} "Vs" ϕ Teoría y experimento para el brazo α (primera columna fig. 5.11)

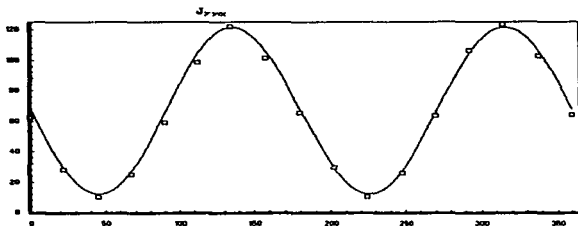


Figura 5.17: J_{yy} "Vs" ϕ Teoría y experimento para el brazo α (segunda columna fig.5.11)

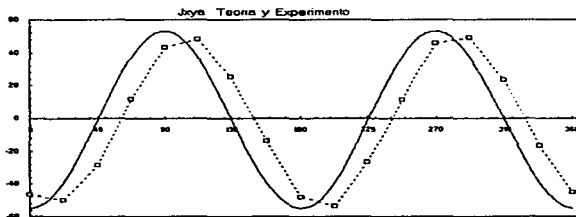


Figura 5.18: Parte real de J_{yy} "Vs" ϕ Teoría y experimento para el brazo α (tercera columna fig. 5.11)

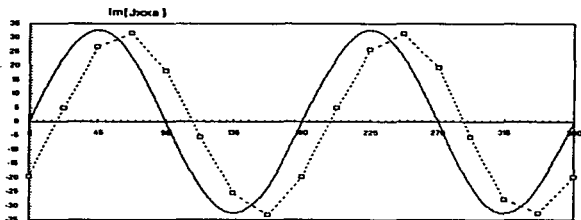


Figura 5.19: Parte imaginaria de J_{xy} "Vs" ϕ Teoría y experimento para el brazo α (cuarta columna fig. 5.11)

Al ver las gráficas que contrastan la teoría y el experimento, vemos que hay un notable acuerdo, en estas gráficas es posible observar que los resultados experimentales adelantan en alrededor de 14° a los valores teóricos previstos para los elementos fuera de la diagonal de la matriz de coherencia. Esto es posible entenderlo debido a que durante la alineación del interferómetro, algunos dispositivos como los elevadores de haz, no tienen una montura que permita leer la posición en la que se encuentran los espejos, lo cual introduce una incerteza en el ángulo sólido de la esfera de direcciones a la que nos hemos referido, de un orden de magnitud semejante al desfase reportado. Y más aún que un notable acuerdo, como a continuación veremos, la teoría clásica predice el corrimiento de fase observado entre los patrones de luz positiva y luz negativa que se muestra en la figura 5.9 (aquí solo se muestra para un ángulo de $\theta = 45^\circ$). De la teoría clásica se deriva la ecuación 2.32 donde u_α y u_β son vectores unitarios que apuntan en la dirección de polarización; nosotros usamos vectores de Stokes normalizados.

$$I(x, y, z) = I_\alpha + I_\beta + 2(I_\alpha I_\beta)^{\frac{1}{2}} u_\alpha \cdot u_\beta \cos[k \sin \theta (x \cos \phi + y \sin \phi)]$$

A la salida del interferómetro colocamos un filtro para luz circular derecha e izquierda que ya hemos descrito; si hacemos una protección algebraica sobre los estados positivos o

negativos de la ecuación 2.32 que describe la irradiancia sobre la pantalla de observación, obtendremos la irradiancia como función de la posición, para los estados positivos o negativos. Con lo que tendremos la predicción clásica de lo que se debería registrar en la pantalla de observación. Para hacer las proyecciones algebraicas hicimos uso de las matrices de proyección que aparecen en la página 32. Pero un análisis de las funciones que representan a los patrones positivo y negativo que son:

$$I_+(x) = I_{a+} + I_{\beta+} + 2(I_{a+}I_{\beta+})^{\frac{1}{2}} u_{a+} \cdot u_{\beta+} \cos [kx \sin \theta]$$

$$I_-(x) = I_{a-} + I_{\beta-} + 2(I_{a-}I_{\beta-})^{\frac{1}{2}} u_{a-} \cdot u_{\beta-} \cos [kx \sin \theta]$$

donde hemos evaluado en $z = 0$ (pantalla de observación), y hemos alineado las franjas verticalmente ($\phi = 0$), y los subíndices \pm , representan sobre que estado de polarización hemos proyectado la irradiancia saliente, nos permite ver que ningún cambio en la dependencia en x entre el patrón positivo y el patrón negativo se da como consecuencia de proyectar sobre los estados de polarización respectivos; lo que indica que clásicamente ningún corrimiento entre los patrones positivo y negativo sería observable. Más sin embargo, el cálculo de los productos interiores; $u_{a+} \cdot u_{\beta+}$ y $u_{a-} \cdot u_{\beta-}$, nos señala un comportamiento que experimentalmente se observa, y que consiste en que la visibilidad de los patrones positivo y negativo, oscila alternadamente al ir variando el ángulo ϕ de polarización de la luz lineal entrante. Esto es que la visibilidad de uno de los patrones disminuye y aumenta sucesivamente, en tanto que la visibilidad del otro patrón, hace lo mismo pero en orden inverso. Es decir, que primero aumenta para luego disminuir. Lo anterior sera mas claro al analizar la gráfica 5.20de la gráfica 5.20 es posible ver que los estados de polarización positivos están desfasados de los estados negativos por una diferencia de fase de $\frac{\pi}{2}$ radianes. Es decir que los máximos del patrón positivo coinciden con los máximos del patrón negativo. Así podemos concluir que por medio de la teoría clásica es posible describir todos los fenómenos observados en el interferometro, si tomamos en cuenta todas las condiciones a la frontera. Incluso el corrimiento de fase que reportaron Chiao y sus colaboradores. Es decir esta es una anholonomia que se puede describir de dos maneras; considerando la teoría clásica y las condiciones a la frontera apropiadas, o calculando el ángulo solido subtendido por la trayectoria que describe el sistema en el espacio de parámetros de los cuales depende el hamiltoniano de dicho sistema. Además ambas formas resultan satisfactorias debido a que el carácter geométrico de esta fase la hace independiente de las propiedades ondulatorias o corpusculares del sistema.

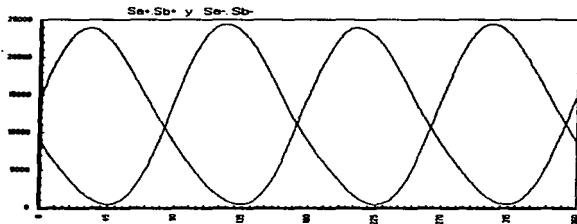


Figura 5.20: Productos interiores $S_{a+} \cdot S_{b+}$ y $S_{a-} \cdot S_{b-}$ (proyectados sobre los eigenestados positivo y negativo) " V_s " ϕ

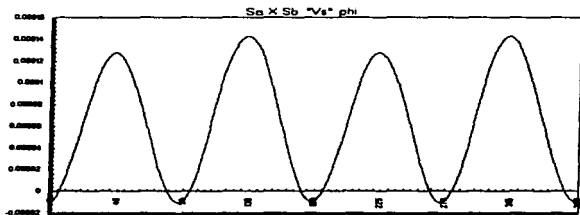


Figura 5.21: Visibilidad dada por el producto interior de los vectores de Stokes " V_s " ϕ (teoría)

5.3 Mach-Zehnder plano

Como un último caso importante para ser analizado, estudiaremos con la misma maquinaria el caso de un interferómetro Mach-Zehnder en un plano, en el cual ninguno de estos efectos topológicos se manifiesta. El análisis de el interferómetro mostrado en la figura 3.3, es muy sencillo pues ambos brazos son indistinguibles en el sentido de que constan de exactamente las mismas transformaciones (reflexiones) y en el mismo orden. Lo anterior hace que un haz sea transformado de igual modo por uno u otro brazo; lo que no ocurre en el interferómetro tridimensional (con $\theta \neq 0$), haciendo que los cambios en la polarización sean iguales en ambos brazos y por tanto los estados de polarización se mantienen paralelos al viajar a través de los sendos brazos del Mach-Zehnder, haciendo que solo fases dinámicas debidas a diferencias de camino óptico se presenten. Pero estas fases actúan de igual modo sobre los estados base constitutivos de la luz polarizada entrante, por lo que al proyectar con el mencionado filtro de estados derechos (parte superior) e izquierdos (parte inferior), la posición de los máximos de ambos patrones coincide para cualquier estado de polarización entrante. A continuación mostramos en la tabla 2 los elementos de matriz de coherencia observados experimentalmente, mismos que siguen el comportamiento previsto por el calculo de Jones correspondiente. En este caso las transformaciones que describen la evolución de un haz de luz por cualquiera de los brazos del interferómetro son:

$$\begin{pmatrix} P \\ S \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{pmatrix} r_p e^{i\phi_p} P \\ r_s e^{i\phi_s} S \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{pmatrix} r_p^2 e^{i2\phi_p} P \\ r_s^2 e^{i2\phi_s} S \end{pmatrix}$$

por lo que los elementos de la matriz de coherencia son:

$$J_{xx} = r_p^4 P^2$$

$$J_{yy} = r_s^4 S^2$$

$$J_{xy} = r_p^2 r_s^2 P S [\cos 2(\phi_p - \phi_s) + i \sin 2(\phi_p - \phi_s)]$$

que para un estado de polarización lineal entrante $\begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$ dan:

$$J_{xx} = r_p^4 \cos^2 \phi$$

$$J_{yy} = r_s^4 \sin^2 \phi$$

$$J_{xy} = r_p^2 r_s^2 \cos \phi \sin \phi [\cos 2(\phi_p - \phi_s) + i \sin 2(\phi_p - \phi_s)]$$

f	Avg	Std	Re. Avg	Im. Avg	Avg	Std	Re. Avg	Im. Avg
0	189	1.6	0.9	5	209	12	1.5	3.1
22.5	161.8	30.8	-60	23	178.6	36.8	-61.2	40.3
45	105	100.2	-87.3	29.1	112.6	110.2	-88.5	56.7
67.5	34.8	154.4	-59.8	16.7	40.2	182.8	-60.4	36.9
90	1.6	175.4	-0.4	-5.5	2.2	218.6	1.5	-4.3
112.5	20.2	154	63.1	-26.3	22.6	187.8	64.7	-44.7
135	78.4	85.2	86.7	-28.2	89.6	109.2	91	-54.7
157.5	146.2	25.2	63.3	-17.1	159.2	31	63.5	-39.4
180	192.4	1.2	1.7	4.9	215	1	1.5	2.7
202.5	171.8	30.6	-62.6	23.7	185.2	32.8	-62.7	43.4
225	103.6	89	-85.2	28.3	113	108.6	-87.3	55.4
247.5	35.8	149.6	-60.3	17	38.8	183	-60.7	37.2
270	1.6	183.6	0.7	-6.2	1.6	222.4	2.1	-4.9
292.5	19.4	146.4	60.8	-24.4	22.4	182.8	64.1	-41.9
315	84.6	90	92.5	-30.1	87.6	102.4	88.3	-58.8
337.5	144.4	24.6	62	-16.4	149.2	28	59	-38.8
360	189.6	1.6	0.7	5.5	198	1	0.6	3.1

Figura 5.22: Elementos de la matriz de coherencia medidos para el M-Z plano (en $\text{lux} \pm .05$).

resultados que concuerdan muy bien con el experimento. Como las siguientes gráficas nos muestran.

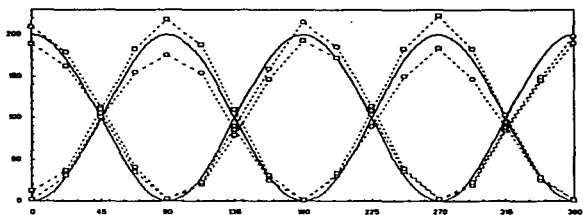


Figura 5.23: Elementos J_{xx} y J_{yy} Teoría y Experimento

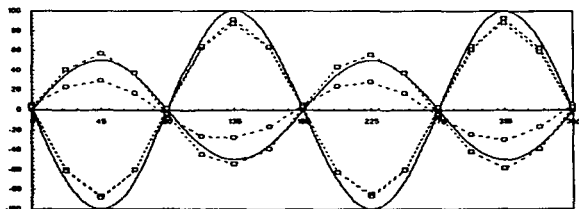


Figura 5.24: Partes real e imaginaria de J_{xy} Teoría (línea continua) y Experimento (línea de trazos), para ambos brazos

Capítulo 6

Conclusiones

Como hemos visto, el cálculo considerado en el que se hace uso de las matrices de reflexión propuestas, coincide notablemente con las observaciones experimentales y nos permite hacer un tratamiento sencillo que incluye todas las condiciones a la frontera adecuadas al dispositivo experimental. Este tratamiento matricial hace posible describir los efectos anholonomicos de cualquier configuración de espejos y describe correctamente las manifestaciones de la fase topologica, tales como, la rotación del plano de polarización o el corrimiento relativo entre los patrones positivo y negativo. El sentido en el que están arrollados los espejos en cada brazo, favorece a los estados $|\pm\rangle$ alternadamente; comportándose el interferómetro mismo como un filtro derecho o izquierdo preferentemente, para algunos estados particulares de polarización entrante. Este fenómeno nos permite entender claramente el porque de las variaciones de la visibilidad de los patrones de interferencia observados. Las dos descripciones son adecuadas; tanto la cuántica en la que es necesario suponer la evolución de el eigenvector de espín sobre la esfera unitaria de todas las posibles direcciones de propagación, como la descripción clásica en donde solo se toman en consideración las ecuaciones de Maxwell y las condiciones a la frontera apropiadas para describir las reflexiones metálicas que tienen lugar en el interferómetro. Este interferómetro o arreglos arrollados de espejos podrían ser utilizados con el fin de rotar el plano de polarización para cualquier aplicación practica, para lo que se requiere un tratamiento algebraico sencillo. Con lo que es posible rotar el plano de vibración por medio de esta actividad óptica global con un dispositivo que consiste tan solo de espejos.

Referencias

- [1] Max Born and Emil Wolf "Principles of Optics", John Wiley, 1979
- [2] Hecht y Zajac, "Optics". Addison-Wesley, 1974
- [3] Daniel Malacara, "Optica Basica". Fondo de Cultura Economica, 1989.
- [4] Cabrera Jose Manuel, *etal*, "Optica Electromagnética". Addison-Wesley 1993.
- [5] M.V. Berry, Proc. R. Soc. Lond. **A392** (1984) 45.
- [6] M. Grether y E. López-Moreno Revista Mexicana de Física **39**, No1(1993) 47-56
- [7] R.Y. Chiao, and Y.S. Wu, J. Phys. Rev. Lett. **57** (1986)933.
- [8] R.Y. Chiao, *etal*, J. Phys. Rev. Lett. **60** (1988)1214.
- [9] M.V. Berry, "Interpreting the anholonomy of coiled light" Nature **326** (19 march, 1987) 277.
- [10] R.P. Feynman, Lectures on Physics vol. III. Adison-Wesley, 1984
- [11] R.P. Feynman, Lectures on Physics vol. III. Adison-Wesley, 1984
- [12] Azzam Bashara, Ellipsometry and Polarized light, North Holand Publishing Co. 1988.
- [13] Shift L. Cuantum mechanics Mc. Graw Hill, 1968.
- [14] Boom, Cuantum Mechanics. Dover publications,1989.
- [15] Ghatak. Optical electronics
- [16] Baym.Cuantum Mechanics. Adison Wesley, 1974.

- [17] M. Kitano, T. Yabuzaki. *Phys. Rev. Lett.* **58** (1987)523.
- [18] D. Pescetti. *AJP*. Volume **40** (1972)735.
- [19] M. V. Berry. *Journal of modern optics* **34** (1987)1401.
- [20] Y. Aharonov and D. Bohm. *Physical Review* **115** (1959)485.
- [21] Barry Simon. *Physical Review Letters* **51** (1983)2167.
- [22] De Smet. *Am. J. Phys.* **62** (1994)246.