39
2cj.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORIA DEL POTENCIAL. FRONTERA DE MARTIN.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

A R M A N D O   S O L A R E S   R O J A S

DIRECTOR DE TESIS: MAT. LUIS ALBERTO BRISEÑO AGUIRRE

1 9 9 7

VNIVERSDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

TEORIA DEL POTENCIAL. FRONTERA DE MARTIN

realizado por ARMANDO SOLARES ROJAS

con número de cuenta 8832725-7 , pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	MAT. LUIS ALBERTO BRISEÑO AGUIRRE
Propietario	DR. JAVIER PAEZ CARDENAS
Propietario	DR. MANUEL JESUS FALCONI MAGAÑA
Suplente	DR. FERNANDO BRAMBILA PAZ
Suplente	DR. GUILLERMO GRABINSKY STEIDER

Consejo Departamental de Matemáticas

DR. MANUEL FALCONI MAGAÑA

TEORÍA DEL POTENCIAL.

Frontera de Martin.

Armando Solares Rojas.

Dedicatoria:

A mis padres.

Agradecimientos:

A Luis y Julieta por su dirección y su apoyo.

A Marco, Hugo, Mirna y Guilmer por toda su ayuda.

Indice

INTRODUCCIÓN

La *teoría del potencial* es una parte del análisis matemático surgida de la física.

Analíticamente una *fuerza* es una función vectorial $\overrightarrow{E}$ sobre puntos del espacio $\mathbb{R}^3$.

Cuando una fuerza está definida en todo punto de una región del espacio decimos que tenemos un *campo de fuerzas*.

En física se llama *campo de fuerzas conservativo* a aquél donde el *trabajo* W efectuado entre dos puntos P y P_0 es independiente de la trayectoria que se sigue. Es decir:

$$W(P, P_0) = \int_{\Gamma} \overrightarrow{E}\, ds = \int_{\Gamma} \nabla\phi\, ds = \phi(P) - \phi(P_0)$$

donde ϕ es una función escalar con segundas derivadas parciales definida sobre puntos del espacio $\mathbb{R}^3$ *(la función de potencial)*, Γ es cualquier curva en $\mathbb{R}^3$ que va de P_0 a P , sobre ella calculamos la *integral de línea*.

Esta condición equivale a que el *laplaciano* de la función potencial se anule:

$$\nabla^2\phi = 0$$

Ejemplos de campos conservativos son el gravitacional y el electrostático.

PERIODO ANTIGUO

Podemos decir que la *Teoría del potencial* nace con los trabajos de Newton sobre gravitación (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*).

Hasta 1800 la teoría del potencial se reducía a estudios de electrostática y atracción gravitacional. Alrededor de 1820, Poisson soluciona la ecuación de Laplace através de una integral sobre la bola. Poco más tarde, en 1828, comienza el estudio de la función de Grëen para la bola. Y finalmente, en 1840, Gauss publica una memoria capital donde plantea (para $\mathbb{R}^3$) tres problemas fundamentales:

◇ El *problema del equilibrio* (llamado más tarde de Robin) que consiste en buscar sobre la superficie $\sum$ (superficie cerrada dada) de un conductor la distribución de cargas que hace que el potencial sea constante sobre $\sum$.

◇ El *problema del balayage* (llamado así por Poicaré). A partir de ciertas cargas dadas en un conductor ϖ (región dada) hay que encontrar las cargas en la superficie conductora $\sum$ (superficie cerrada dada) que producen el mismo potencial sobre $\sim \varpi$.

El balayage es la traducción a la matemática del fenómeno de inducción electrostática, donde las cargas interiores a la superficie conductora conectada a tierra $\sum$, hacen "aparecer", sobre la superficie, cargas cuyo potencial exterior anula el potencial exterior de las cargas interiores.

◇ El *problema de Dirschlet* (llamado así por Riemann) consiste en encontrar dentro de la región ϖ una función armónica, solución de la ecuación de Laplace, que tome en la frontera los valores de una función real continua y finita dada.

La unicidad de una solución se deriva del *principio del máximo* para las funciones armónicas, sin embargo la existencai de una tal solución es mucho más difícil de establecer.

Para la solución de estos problemas se introdujo la noción, inspirada en la física, de *potencial* (newtoniano):

$$U^{\mu} = \int \frac{d\mu(y)}{\|x-y\|}$$

y de *integral de energía* de medidas $\mu \geq 0$:

$$\int U^{\mu}\, d\mu(y)$$

Sin embargo, Gauss no considera mas que medidas absolutamente continuas (respecto a la de Lebesgue), y considera que las integrales de energía alcanzan siempre su mínimo para alguna μ_0 .

La insuficiencia de rigor, debida a la falta del concepto de medida "general" y a la falta de la integral de Radon, provocó que los problemas de Robin y del balayage fueran dejados de lado.

Para el problema de Dirichlet se desarrollan métodos como el *método de balayage de Poicaré* (1887).

Sin embargo todas las soluciones rigurosas del problema de Dirichlet comprendían restricciones sobre la frontera del dominio; estas parecían estar más ligadas a los métodos empleados o a la multiplicidad de las solucionse que al dominio.

En 1910 Zaremba señalo que estas restricciones eran inevitables en el caso de haber un *punto de frontera aislado* y Lebesgue (1912) señalo lo mismo para un dominio cuyo complemento tiene un punto "conveniente" (problema de la *espina de Lebesgue*).

SEGUNDO PERIÓDO (*Introducción de la medida de Radon y del concepto de capacidad).*

La *integral de Radón* es un instrumento clave en la teoría del potencial. Permite introducir potenciales distintos a los newtonianos.

La *capacidad*, inspirada en los problemas de electrostática, fue introducida por Wiener (1924) para "precisar" el rol de medida (en adelante se trabajaría con funciones que tuvieran cierta propiedad en todas partes excepto en un conjunto de capacidad cero).

Las diferencias entre el caso de $\mathbf{R}^2$ y el de $\mathbf{R}^3$, se manifestaron por dos tipos de capacidades: la newtoniana y la logarítmica.

Así surgió el concepto de *función de Green G* de una región (siempre que existiera) y de su potencial de Green :

$$\int G(x,y)\,d\mu(y) \quad (\mu \geq 0)$$

La introducción de la *función de Green G* de una región provocó:

i) Que el concepto de capacidad fuera generalizado para conjuntos G_δ por Choquet y Brelot.

ii) El *teorema de representación de Riesz* (1930): Toda función sobrearmónica puede representarse por la suma de un potencial de Green más su función máximo minorante armónico.

Mientras tanto se mantenía la imposibilidad de resolver, en general, el problema de Dirichlet.

Paralelamente a los trabajos de Riesz, Lebesgue y Wiener dividieron al estudio del problema Dirichlet en dos partes:

i) Una solución generalizada, que siempre existe si la función de frontera es continua.

ii) El estudio del comportamiento a la frontera de esta solución. De aquí surge la noción de *punto-fronteraregular.*

Wiener introdujo la solución de dos maneras (1925); la más importante de ellas se basó en el método aplicado por Perron (1923) para resolver el problema clásico: H_f es la solución generalizada para una función f de frontera continua. Entonces se dice que f es resolutiva.

Brelot demuestra que la resolutividad equivale a la integrabilidad (1939).

APORTACIONES RECIENTES.

En la búsqueda de una representación integral de las funciones armónicas positivas, como la de Poisson, M. S. Martin (en 1941) introdujo importantes consideraciones topológicas. Para toda función armónica positiva existe una representación única, dada por la integral de la *función de Martin* respecto a una medida definida sobre la frontera de la región.

Más receientemente, hacia 1958, Hunt introduce la interpretación probabilística a la teoría del potencial, a través de los procesos de Markov.

Otros trabajos importantes en la concepción probabilística se deben a: Doob, Lévy y Meyer.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Usaremos las siguientes definiciones (en el **Apéndice** se hace una revisión más detallada de algunos de estos conceptos):

◇ R es un abierto del espacio euclidiano n-dimensional E^n .

◇ Si $x, y \in E^n$ su producto escalar es:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

donde $x = (x_1, ..., x_n)$ y $y = (y_1, ..., y_n)$.

◇ $v = (v_1, ..., v_n)$ es una función vectorial cuyas componentes v_j tienen primeras derivadas parciales continuas en una vecindad de $\overline{R} \subset E^n$.

◇ La *divergencia* de la función vectorial v está definida como:

$$div\, v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}$$

◇ $\vec{n}(x)$ es el *vector normal unitario* (exterior) a la superficie ∂R en el punto $x \in \partial R$.

◇ Si u es una función definida en una vecindad de $\overline{R} \subset E^n$y tiene segundas derivadas parciales continuas, el *laplaciano* de u es:

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

◇El *gradiente* de u queda definido como:

$$grad\, u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

◇ *Teorema de la divergencia:*

$$\int_R div\, v\, dx = \int_{\partial R} (v, \hat{n})\, d\sigma$$

De las definiciones anteriores encontramos que:

$$div\,(u \cdot v grad\, v) = u\,\Delta v + (grad\, u, grad\,)$$

y aplicando a esta igualdad el teorema de la divergencia:

$$\int_R u\,\Delta v\; dx \;+\; \int_R (grad\, u, grad\, v)\; dx$$

$$= \int_{\partial R} u(grad\, v,\; \hat{n})\; d\sigma$$

Como las primeras parciales de v son continuas sabemos que $D_{\hat{n}} v = (grad\, v, \hat{n})$ y entonces

$$u\,(grad\, v, \hat{n}) = u\, D_{\hat{n}} v$$

sustituyendo en la última integral obtenemos que:

$$\int_R u\,\Delta v\; dx \;+\; \int_R (grad\, u, grad\, v)\; dx$$

$$= \int_{\partial R} u\, D_{\hat{n}} v\; d\sigma$$

◇ Intercambiando u por v en cada paso del proceso anterior y restando los resultados se obtiene la *Identidad de Green:*

$$\int_R (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\; dx = \int_{\partial R} (u\, D_{\hat{n}} v - v\, D_{\hat{n}} u)\; d\sigma$$

◇ Sea $B \subset E^n$.

Una función $f : B \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ es $\sigma-$*integrable* o *integrable con respecto de la medida de superficie* si:

$$\int_R f(x)\, d\sigma(x) < +\infty$$

◇ Sea μ una medida sobre los borelianos del conjunto $B \subset E^n$.

Una propiedad se cumple *casi en todas partes con respecto a la medida* μ (μ–*c.t.p.*) en el conjunto B si se cumple en todo B excepto en un subconjunto $A \subset B$ tal que $\mu(A) = 0$.

Si esta medida es la de Lebesgue diremos simplemente *casi en todas partes* (*c.t.p.*).

◇ Sea $B \subset E^n$.

Una función $f : B \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ es *semicontinua inferior* (*s.c.i.*) en $x \in B$ si:

$$f(x) = \lim \inf_{\substack{y \to x \\ y \in D}} f(y)$$

Y es *semicontinua superior* (*s.c.s.*) en $x \in B$ si:

$$f(x) = \lim \sup_{\substack{y \to x \\ y \in D}} f(y)$$

◇ Sea $B \subset E^n$ .Sea $f : B \to [-\infty, +\infty]$.

Decimos que una sucesión creciente de funciones $\{f_j\}$ *converge a* f *por la izquierda* si:

$$f_j \leq f \quad \text{para toda } j$$

$$\lim_{j \to \infty} f_j(x) = f(x) \quad \text{para cada } x \in B$$

y escribimos:

$$f_j \uparrow f$$

Análogamente decimos que una sucesión decreciente de funciones $\{f_j\}$ *converge a* f *por la derecha* y escribimos:

$$f_j \downarrow f$$

◇ Una sucesión de numérica $\{c_j\} \subset (-\infty. + \infty)$ *converge por la izquierda* a c si:

$$c_j \leq c \quad \text{para toda } j$$

$$\lim_{j \to \infty} c_j = c$$

y escribimos:

$$c_j \uparrow c$$

Análogamante se define *convergencia por la derecha.*

1.1 FUNCIONES ARMÓNICAS

En esta sección estableceremos dos herramientas básicas de la teoría del potencial: *La integral de Poisson*, que nos permite representar a una función armónica en una bola a través de su integral sobre la frontera de la bola. Y el *principio del máximo* para funciones armónicas.

DEFINICIÓN

Una función real u definida en E^n de segundas derivadas parciales continuas es llamada una *función armónica* si:

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } E^n$$

Los siguientes son ejemplos de funciones armónicas:

a) Las partes real e imaginaria de las funciones analíticas de variable compleja son funciones armónicas:

Sean $z = x + iy$ y $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Sabemos que si f es analítica, entonces tiene derivadas de todos los órdenes y además u y v satisfecen las *condiciones de Cauchy-Rieman:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Calculando el laplaciano obtenemos:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial v^2}{\partial x \partial y} = 0$$

b)La *función armónica fundamental con polo en y* es una función armónica definida por:

para $n = 2$:

$$u_y(x) = \begin{cases} +\infty\,, & \text{si } x = y \\ -\log\|x-y\|\,, & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

para $n \geq 3$:

$$u_y(x) = \begin{cases} +\infty\,, & \text{si } x = y \\ \left(\frac{1}{\|x-y\|^{n-2}}\right), & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Cuando $y = 0$ esta función no es otra cosa que la solución fundamental del siguiente problema en ecuaciones diferenciales ordinarias definido para la función dos veces diferenciable f y con $r \in (-\infty, +\infty)$:

$$f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = 0, \qquad r > 0$$

$$\lim_{r \to \infty} f(r) = 0$$

Llameremos a este tipo de problemas *problemas con valores a la frontera.*

Esta ecuación diferencial de segundo orden surge de problemas físicos de campos conservativos con simetría radial (como el de un cuerpo en el campo gravitacional de un planeta, o el de una carga puntual en el campo eléctrico de un conductor esférico cargado).

El primer miembro de la ecuación es el laplaciano en coordenadas polares de una función , la f , que depende solamente de $r = \|x\|$, es decir, de una función con simetría radial. (Ver el **Apéndice**).

1.1.1 El principio del promedio

Teorema 1 (Teorema integral de Gauss) *Si h es armónica en una vecindad de la cerradura de la bola B, entonces:*

$$\int_{\partial B} D_n h \, d\sigma = 0$$

Demostración:

Basta poner $v = 1$ y $u = h$ en la identidad de Green. ■

DEFINICIÓN

◇ La *superficie de la esfera* de dimensión n y de radio ρ es :

$$\sigma_n(\rho) = \rho^{n-1}\sigma_n(1)$$

Y $\sigma_n(1)$ es la superficie de la esfera de radio 1 :

$$\sigma_n(1) = \begin{cases} \left(\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}!}\right) \text{ si } n \text{ es par} \\ \\ \left(\dfrac{2^{\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-2)}\right) \text{ si } n \text{ es impar, } n > 1 \end{cases}$$

Usaremos simplemente σ_n para denotar a $\sigma_n(1)$.

◇ El *volumen de la esfera* de n dimensiones y radio ρ es:

$$v_n(\rho) = \rho^n\, v_n(1) = \rho^n \frac{\sigma_n(1)}{n}$$

Usaremos simplemente v_n para denotar a $v_n(1)$.

Teorema 2 *Si u tiene segundas derivadas parciales continuas en una vecindad de la cerradura de la bola $B = B_{y,\rho}$ con centro en y y radio ρ, entonces:*

(i) Para $n = 2$ y $x \in B$ tenemos que:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B} [(-\log\|x-z\|)\, D_{\hat{n}}u - u\, D_{\hat{n}}(-\log\|x-z\|)]\; d\sigma(z)$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_B [\Delta u\,(-\log\|x-z\|)]\; dz$$

(ii) Para $n \geq 3$ y $x \in B$:

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_n \times (n-2)}\int_{\partial B}\left(\|x-z\|^{-n+2}\, D_{\hat{n}}u - u\, D_{\hat{n}}^{-n+2}\,\|x-z\|\right)\, d\sigma(z)$$

$$-\frac{1}{\sigma_n \times (n-2)}\int_B \Delta u\, \|x-z\|^{-n+2}\; dz$$

con $z \in \overline{B}$.

Demostración:

(i) Consideremos una $x \in B$ fija y definamos a la función $v(z) = -log\|x - z\| = -log\, r$ con $r = \|x - z\|$ para $z \neq x$.

Definida de esta manera v es armónica en $E^2 \sim \{x\}$.

Tomemos δ tal que $\overline{B}_{x,\delta} \subset B_{y,\rho}$ y sea el abierto $R = B_{y,\rho} \sim \overline{B}_{x,\delta}$. Usando la identidad de Green obtenemos:

$$\int_R (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\ dz = \int_{\partial R} (u\,D_{\hat{n}} v - v\,D_{\hat{n}} u)\ d\sigma(z)$$

y como v es armónica en R y $\partial R = B_{y,\rho} \cup B_{x,\delta}$, obtenemos la ecuación (a):

$$\text{(a)} \qquad -\int_R v\,\Delta u\ dz \;=\; \int_{\partial B_{y,\rho}} (u\,D_{\hat{n}} v - v\,D_{\hat{n}} u)\ d\sigma(z) - \int_{\partial B_{x,\delta}} (u\,D_{\hat{n}} v - v\,D_{\hat{n}} u)\ d\sigma(z)$$

Para que $v\,\Delta u$ sea integrable sobre $B_{y,\rho}$ es suficiente que v lo sea, pues Δu es acotada en $B_{y,\rho}$.

Si hacemos una transformación a coordenadas esféricas con polo en x (ver el **Apéndice**) , obtenemos que para $\delta < 1$:

$$\int_{B_{x,\delta}} |v|\ dz \leq 2\pi \int_0^r r\ \log \frac{1}{r}\ dr$$

Como $lim_{r \to 0}\, r \log\left(\frac{1}{r}\right) = 0$, entonces la función $v\,\Delta u$ es integrable en $B_{x,\delta}$. Además $v\,\Delta u$ es integrable en R . Por lo tanto $v\,\Delta u$ es integrable en $B_{y,\rho}$.

Haciendo $\delta \to 0$ obtenemos:

$$\lim_{\delta \to 0} \int_R v\,\Delta u\ dz \;=\; \int_{\partial B_{y,\rho}} v\,\Delta u\ dz$$

Consideremos ahora el miembro derecho de (a). La primera integral no depende de δ, por lo tanto sólo necesitamos revisar la segunda integral.

$$\begin{aligned} |D_{\hat{n}} u| &= |(\hat{n}, grad\ u)| \leq \|\hat{n}\|\ \|grad\ u\| \\ &= \|grad\ u\| = \left(\sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Como las primeras parciales $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ son acotadas en $\overline{B}_{y,\delta}$, entonces $D_{\hat{n}} u$ es acotada en $\partial B_{x,\delta}$ por una constante m .

Para δ suficientemente pequeña tenemos que:

$$\left|\int_{\partial B_{x,\delta}} v\, D_{\vec{n}} u\; d\sigma(z)\right| \leq m \int_{\partial B_{x,\delta}} \log\frac{1}{r}\; d\sigma(z) = 2\pi m\delta \log\frac{1}{\delta}$$

Y, ya que $\delta \log\left(\frac{1}{\delta}\right) \longrightarrow 0$ cuando $\delta \longrightarrow 0$, entonces:

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\partial B_{x,\delta}} v\, D_{\vec{n}} u\, d\sigma(z) = 0$$

Consideremos ahora el límite:

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\partial B_{x,\delta}} u\, D_{\vec{n}} v\; d\sigma(z)$$

Si $z \in \partial B_{x,\delta}$ entonces $v(z) = -\log r$ y la derivada normal de v es la derivada respecto a r. Por lo tanto $D_{\vec{n}} v(z) = -r^{-1}$. De esta manera obtenemos:

$$\int_{\partial B_{x,\delta}} u\, D_{\vec{n}} v\; d\sigma(z) \;=\; -\frac{1}{\delta} \int_{\partial B_{x,\delta}} u\; d\sigma(z)$$

La integral de la derecha es el promedio de la función continua u sobre $\partial B_{x,\delta}$ y tiene límite $-2\pi\, u(x)$ cuando $\delta \longrightarrow 0$. Es decir:

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\partial B_{x,\delta}} u\, D_{\vec{n}} v\; d\sigma(z) = -2\pi\, u(x)$$

Tomando el límite cuando $\delta \longrightarrow 0$ en (a) obtenemos:

$$-\int_B v\, \Delta u\; dz = \int_{\partial B} (u\, D_{\vec{n}} v - v\, D_{\vec{n}} u)\;\; d\sigma(z) + 2\pi\, u(x)$$

La prueba de (ii) es análoga poniendo a $v(z) \;=\; \|z - x\|^{-n+2}$. ■

Ahora podemos enunciar la *propiedad del promedio* para funciones armónicas:

Teorema 3 *Si h es armónica en una vecindad de la cerradura de la bola $B = B_{y,\rho}$, entonces el valor de h en el centro de la bola es igual a su promedio calculado sobre la frontera de la bola.*

Demostración:

Para $n \geq 3$.

Por el teorema anterior tenemos que:

$$h(y) = \frac{1}{\sigma_n \times (n-2)} \int_{\partial B} \left(\|y - z\|^{-n+2} D_{\vec{n}} h - h\, D_{\vec{n}} \|y - z\|^{-n+2}\right)\; d\sigma(z)$$

ya que $\Delta u = 0$ en $\overline{B}$.

Pero si $z \in \partial B$, entonces:

$$\|y - z\|^{-n+2} = \rho^{-n+2}$$

y además:

$$D_{\hat{n}} \|y - z\|^{-n+2} = D_{\hat{n}} r^{-n+2}|_{r=\rho} = -(n-2)\rho^{-n+1}$$

Sustituyendo esto en la integral anterior y usando el TEOREMA 1 obtenemos:

$$h(y) = \frac{\rho^{-n+2}}{\sigma_n(n-2)} \int_{\partial B} D_{\hat{n}} h \, d\sigma(z) + \frac{\rho^{-n+1}}{\sigma_n} \int_{\partial B} h \, d\sigma(z)$$

$$= \frac{\rho^{-n+1}}{\sigma_n} \int_{\partial B} h \, d\sigma(z)$$

■

Teorema 4 *Si h es armónica en la bola $B = B_{y,\rho}$, el valor de h en el centro y es igual al promedio de h sobre toda la bola.*

Demostración:

Introduciendo coordenadas esféricas (θ, r) relativas al polo y (ver el **Apéndice**) tenemos que:

$$\frac{1}{v_n(\rho)} \int_B h \, dx = \frac{1}{v_n(\rho)} \int_0^\rho r^{n-1} \left(\int_{\|\theta\|=1} h(\theta, r) \, d\sigma(\theta) \right) dr$$

Si $\|\theta\| = 1$, entonces (θ, r) es un punto de $\partial B_{y,r}$.

La integral dentro del paréntesis es la integral de una función armónica sobre la esfera de radio r relativa a la medida de superficie de masa total :

$$\int_{\|\theta\|=1} d\sigma(\theta) = \sigma_n(\|\theta\| = 1) = \sigma_n(1) = \sigma_n$$

Del teorema anterior sabemos que, para cualquier bola $B_{y,r} \subset B_{y,\rho}$, el valor de h en el centro de la bola resulta ser el promedio calculado sobre la frontera (ya que h es armónica en $B_{y,r}$). Usando las nuevas coordenadas (θ, r) y notando que y sigue siendo el centro de la bola $\|\theta\| = 1$ y que la supericie de la bola $\|\theta\| = 1$ es $\sigma_n(1) = \sigma_n$, tenemos que:

$$h(y) \quad = \quad \frac{1^{-n+1}}{\sigma_n(\|\theta\| = 1)} \int_{\|\theta\|=1} h(\theta, r) \, d\sigma(\theta)$$

$$= \frac{1^{-n+1}}{\sigma_n} \int_{\|\theta\|=1} h(\theta, r)\, d\sigma(\theta)$$

$$= \frac{1}{\sigma_n} \int_{\|\theta\|=1} h(\theta, r)\, d\sigma(\theta)$$

de donde:

$$\int_{\|\theta\|=1} h(\theta, r)\, d\sigma(\theta) = \sigma_n\, h(y)$$

De esta manera el promedio de h sobre B es:

$$\frac{1}{v_n(\rho)} \int_B h\, dx = \frac{1}{v_n(\rho)} \int_0^\rho r^{n-1}\, \sigma_n(1)\, h(y)\, dr$$

$$= \frac{\sigma_n(1)\, h(y)}{v_n(\rho)\, \rho^n} \int_0^\rho r^{n-1}\, dr$$

$$= \frac{\sigma_n(1)\, h(y)}{v_n(\rho)} \frac{\rho^n}{n}$$

Y, como $v_n(\rho) = \dfrac{\rho^n\, \sigma_n(1)}{n}$:

$$\frac{1}{v_n(\rho)} \int_B h\, dx = h(y)$$

■

DEFINICIONES

◇ **Sea la bola $B = B_{y,\rho}$.**

Sea u una función integrable con respecto a la medida de superficie en ∂B.

Se define:

$$L(u : y, \rho) = \frac{1}{\sigma_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B} u\, d\sigma$$

◇ **Sea u Lebesgue-integrable en B .**

Se define:

$$A(u : y, \rho) = \frac{1}{v_n\, \rho^n} \int_B u\, dx$$

A partir de los dos teoremas anteriores se establece el *principio del promedio* para funciones armónicas:

Si h es armónica en el abierto R , entonces $h(y) = L(u : y, \rho) = A(u : y, \rho)$ siempre que $\overline{B}_{y,\rho} \subset R$.

1.1.2 La integral de Poisson

Teorema 5 *Si h es armónica en una vecindad de la cerradura de la bola $B = B_{y,\rho}$, y $x \in B$, y $x \neq y$, entonces:*

(i) Para $n = 2$

$$h(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B} h\, D_{\hat{n}}\left(\log\frac{\|y-x\|\ \|z-x^*\|}{\rho\,\|z-x\|}\right) d\sigma(z);$$

(ii) Para $n \geq 3$

$$h(x) = -\frac{1}{\sigma_n(n-2)}\int_{\partial B} h\, D_{\hat{n}}\left(\frac{1}{\|z-x\|^{n-2}} - \frac{\rho^{n-2}}{\|y-x\|^{n-2}}\frac{1}{\|z-x^*\|^{n-2}}\right) d\sigma(z),$$

donde x^* es el inverso de x con respecto a $\partial B_{y,\rho}$.

Demostración:

Probemos (i). Para el caso $n = 2$.

Sabemos que si h es armónica en una vecindad de la cerradura de $B = B_{y,\rho}$ y $x \in B$, entonces:

$$\text{(b)} \qquad h(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B} \left[(\log\|z-x\|)\, D_{\hat{n}}h - h\, D_{\hat{n}}(\log\|z-x\|)\right] d\sigma(z)$$

ya que $\Delta h = 0$.

Consideremos a la integral del miembro derecho como función de x.

Sea x^* el *inverso* de x con respecto a la esfera $\partial B_{y,\rho}$. Tomemos a $z \in \partial B$. Sea ϕ el ángulo entre $z - y$ y $x - y$. Entonces tenemos que:

$$\|z-x^*\|^2 = \rho^2 + \|x^*-y\|^2 - 2\rho\ \|x^*-y\|\cos\phi$$

$$\|z-x\|^2 = \rho^2 + \|x-y\|^2 - 2\rho\ \|x-y\|\cos\phi$$

y como x^* es el *inverso* de x podemos remplazar a $\|x^*-y\|$ por $\rho^2/\|x-y\|$ en las ecuaciones anteriores y encontramos que:

$$\|z-x^*\|^2 = \frac{\rho^2\,\|z-x\|^2}{\|x-y\|^2}$$

siempre que $z \in \partial B$.

Como $x^* \notin \overline{B}$ entonces $-\log\|z-x^*\|$ es armónica en una vecindad de $\overline{B}$ y tenemos por la identidad de Green que:

$$\text{(c)} \qquad 0 = -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B} \left[(\log\|z-x^*\|)\, D_{\hat{n}}h - h\, D_{\hat{n}}(\log\|z-x^*\|)\right] d\sigma(z)$$

Si modificamos la ecuación anterior usando el TEOREMA 1 obtenemos:

$$\text{(d)} \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B}\left[-\log\left(\frac{\|y-x\|}{\rho}\right)\right] D_{\bar{n}}h\, d\sigma(z) = 0$$

ya que el factor entre corchetes es constante. Además:

$$D_{\bar{n}}\left[-\log\left(\|y-x\|\ \|z-x^*\|\ /\rho\right)\right] = D_{\bar{n}}\left[-\log\|z-x^*\|\right]$$

porque $\log(\|y-x\|\ /\rho)$ es una constante.

De lo anterior y de (c) y (d) se sigue que:

$$\text{(e)} \qquad 0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B}\left[-\log\left(\frac{\|y-x\|\ \|z-x^*\|}{\rho}\right) D_{\bar{n}}h \right.$$
$$\left. -h\, D_{\bar{n}}(-\log\frac{\|y-x\|\ \|z-x^*\|}{\rho})\right] d\sigma(z)$$

Sumando (b) y (e) obtenemos:

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B}\left[-\log\left(\frac{\|y-x\|\ \|z-x^*\|}{\rho\,\|z-x\|}\right) D_{\bar{n}}h - h\, D_{\bar{n}}(-\log\frac{\|y-x\|\ \|z-x^*\|}{\rho\,\|z-x\|})\right] d\sigma(z)$$

siempre que $x \in B$.

Para cada $x \in B$ sabemos que $x^* \notin \overline{B}$ y que:

$$\text{(f)} \qquad \frac{\|y-x\|\ \|z-x^*\|}{\rho\,\|z-x\|} = 1$$

para toda $z \in \partial B$. De manera que el logaritmo se anula. Es importante notar que tomamos la derivada normal (evaluada para $z \in \partial B$) del logaritmo de esta función, considerando su dominio para $z \in B$. De donde concluímos (i).

Probemos ahora (ii).

Siguiendo los pasos de la prueba de (i) se remplaza en (b) $-\log\|z-x\|$ por $\|z-x\|^{n-2}$.

Luego se toma a x^* igual al inverso de x . De esta manera obtenemos en (c) a $\|z-x\|^{n-2}$ en lugar de $-\log\|z-x\|$. Multiplicando ambos miembros de la igualdad que corresponde a (c) por una constante

α y restando el resultado a la correspondiente a (b) se obtiene:

$$h(x) = -\frac{1}{\sigma_n(n-2)} \int_{\partial B} \left[\left(\frac{1}{\|z-x\|^{n-2}} - \alpha \frac{1}{\|z-x^*\|^{n-2}} \right) D_{\bar{n}} h \right.$$

$$\left. - h\, D_{\bar{n}} \left(\frac{1}{\|z-x\|^{n-2}} - \alpha \frac{1}{\|z-x^*\|^{n-2}} \right) \right] d\sigma(z)$$

Sea $\alpha = (\rho /\ \|x - x^*\|)$. Usando las propiedades del inverso de x, tenemos que:

$$\alpha = \frac{\rho^{n-2}}{\|y-x\|^{n-2}} = \frac{\|z-x^*\|^{n-2}}{\|z-x\|^{n-2}}$$

para toda $z \in \partial B$ .De esta manera la primera parte del integrando se anula en ∂B y ontenemos (ii). ∎

Teorema 6 (Fórmula integral de Poisson) *Si h es armónica en la cerradura de la bola $B = B_{y,\rho}$ y $x \in B$, entonces:*

$$h(x) = \frac{1}{\sigma_n \rho} \int_{\partial B} \frac{\rho^2 - \|y-x\|^2}{\|z-x\|^n} h(z)\, d\sigma(z)$$

Demostración:

Tomemos $y = 0$ en las igualdades del teorema anterior. Sabemos que la derivada normal de una función f es:

$$D_n f = (\bar{n}, grad\, f)$$

El vector normal unitario exterior a la superficie $\partial B_{y,\rho}$ en $z \in \partial B$ es:

$$\frac{z}{\|z\|} = \frac{z}{\rho}$$

Sea $x \in B_{0,\rho}$ fija, $x \neq 0$ y sea x^* el inverso de x. Tenemos que:

$$grad \log \|z - x\| = \frac{z - x}{\|z - x\|^2}$$

Si $z \in \partial B_{0,\rho}$ entonces:

$$grad \left(\log \frac{\|x\|}{\rho} \frac{\|z - x^*\|}{\|z - x\|} \right) = grad \log(\frac{\|x\|}{\rho})$$

$$+ grad \log \|z - x^*\| - grad \log \|z - x\|$$

$$= \frac{z - x^*}{\|z - x^*\|^2} - \frac{z - x}{\|z - x\|^2}$$

Por lo tanto para $z \in \partial B_{0,\rho}$:

$$D_n \left(\log \frac{\|x\|}{\rho} \frac{\|z - x^*\|}{\|z - x\|} \right) = \left(\frac{z}{\rho}, \frac{z - x^*}{\|z - x^*\|^2} - \frac{z - x}{\|z - x\|^2} \right)$$

Además, como x^* es el inverso de x , entonces:

$$x^* = \frac{\rho^2}{\|y - x\|^2} x$$

es decir

$$\frac{\|x\|}{\rho} \frac{\|z - x^*\|}{\|z - x\|} = 1$$

Efectuando las operaciones y simplificando obtenemos que:

$$D_n \left(\log \frac{\|x\|}{\rho} \frac{\|z - x^*\|}{\|z - x\|} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\rho^2 - \|x\|^2}{\|z - x\|^2}$$

para $z \in \partial B_{0,\rho}$. ■

DEFINICIÓN

La *fórmula integral de Poisson* es:

$$IP(\mu, B)(x) = \frac{1}{\sigma_n \rho} \int_{\partial B} \frac{\rho^2 - \|y - x\|^2}{\|z - x\|^n} \, d\mu(z)$$

donde $B = B_{y,\rho}$, μ es una carga ∂B .

Si μ es absolutamente continua respecto a la medida de superficie en ∂B , entonces por el *Teorema* *de Radon-Nikodym* (ver el **Apéndice**) para cada boreliano $M \subset \partial B$ tenemos que:

$$\mu(M) = \int_M f(z)\, d\sigma(z)$$

para alguna f función integrable en ∂B.

Por lo tanto escribiremos:

$$IP(\mu, B) = IP(f, B)$$

OBSERVACIÓN

$IP(f, B)$ es armónica.

Teorema 7 *Si h es armonica en el abierto R, entonces todas las derivadas parciales de h son armónicas en R.*

Demostración:

Si $y \in R$, $\overline{B} = \overline{B}_{y,\rho}$, y $x \in B$, entonces:

$$h(x) = \frac{1}{\sigma_n \rho} \int_{\partial B} \frac{\rho^2 - \|y - x\|^2}{\|z - x\|^n}\, h(z)\, d\sigma(z)$$

Como h tiene primeras derivadas parciales continuas entonces:

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(x) = \frac{1}{\sigma_n \rho} \int_{\partial B} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\rho^2 - \|y - x\|^2}{\|z - x\|^n} \right) h(z)\, d\sigma(z)$$

Calculando las derivadas parciales y usando el *Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue* (ver el **Apéndice**), se puede demostrar que $\frac{\partial h}{\partial x_j}$ es continua en B (gracias a que h tiene primeras derivadas parciales continuas tenemos primero que:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\rho^2 - \|y - x\|^2}{\|z - x\|^n} \right) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\rho^2 - \|y - x_0\|^2}{\|z - x_0\|^n} \right) \quad \text{cuando} \quad x \longrightarrow x_0$$

y luego que para cada x la función $\left| \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\rho^2 - \|y - x\|^2}{\|z - x\|^n} \right) \right|$ alcanza su máximo M en $\overline{B}$. Además la función constante M es integrable respecto a la medida de superficie en B).

De la misma manera se obtiene el resultado correspondiente para las derivadas de parciales de todos los demás órdenes.

Como B puede ser cualquier bola con cerradura en R entonces las derivadas parciales de h de todos los ordenes son continuas en R. Ahora, como h es armónica tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2} \right) = 0 \quad \text{en } R$$

y derivando conrespecto a x_j obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2} = 0 \qquad \text{en } R \text{ para cada } j$$

Ahora, sabemos de lo anterior que las terceras derivadas parciales son continuas en R , entonces podemos intercambiar el orden de la derivación:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \frac{\partial h}{\partial x_j} = 0 \quad \text{en } R \quad \text{para cada } j$$

Como $\frac{\partial h}{\partial x_j}$ tiene segundas derivadas parciales continuas en R , $\frac{\partial h}{\partial x_j}$ es armónica en R . Análogamente para las derivadas de ordenes superiores. ■

Teorema 8 (Picard) *Si h es una función armónica en E^n y está acotada inferior o superiormente, entonces h es una función constante.*

Demostración:

Si h es armónica, $-h$ lo es. Consideremos entonces que h está acotada inferiormente. Consideremos también $h \geq 0$ (ya que la suma de una función armónica y una constante es armónica). Sean x y y puntos distintos y sean las bolas $B_{x,\delta}$ y $B_{y,\epsilon}$ tales que $B_{y,\epsilon} \supset B_{x,\delta}$.

Sabemos que:

$$v_n \delta^n h(x) = \int_{B_{x,\epsilon}} h(z)dz \leq \int_{B_{y,\epsilon}} h(z)\, dz = v_n \epsilon^n h(y)$$

y entonces:

$$h(x) \leq \frac{\epsilon^n}{\delta^n} h(y)$$

Tomemos δ y $\epsilon \longrightarrow 0$ de manera tal que $\epsilon / \delta \longrightarrow 1$.

Entonces:

$$h(x) \leq h(y)$$

Pero x y y son arbitrarios, por lo que podemos obtener también:

$$h(y) \leq h(x)$$

y por lo tanto h es constante. ∎

1.1.3 El principio del máximo

De la fórmula de Poisson se desprende que si una función armónica es cero en la frontera de una bola, entonces es cero en toda la bola. Esta observación se puede generalizar.

DEFINICIÓN

Una función u definida en un abierto conexo R cumple el *principio de máximo* si el $\sup_{x\in R} u(x)$ no se alcanza en R excepto si u es constante.

Y cumple el *principio del mínimo* si el $\inf_{x\in R} u(x)$ no se alcanza en R excepto si u es constante.

Teorema 9 *Si u es continua en un abierto conexo R y para cada $x \in R$ existe una $\delta_x > 0$ tal que $u(x) = L(u : x, \delta)$ siempre que $\overline{B}_{x,\delta} \subset B_{x,\delta_x} \subset R$, entonces u cumple los principios del máximo y del mínimo.*

Demostración:

Sea $M = \{x : u(x) = \sup_{y\in R} u(y), x \in R\}$.

Como u es continua, entonces M es un subconjunto cerrado relativo a R.

Sea $x \in M$, entonces existe una δ_x tal que $u(x) = L(u : x, \delta)$ siempre que $\delta < \delta_x$.

Consideremos a una $y \in B_{x,\delta_x}$ y sea $\delta_0 = \|y - x\| < \delta_x$.

Como $u(x) = L(u : x, \delta_0)$ entonces:

$$L(u(x) - u : x, \delta_0) = \frac{1}{\sigma_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B_{x,\delta_0}} (u(x) - u) \, d\sigma = 0$$

Pero si $x \in M$, entonces $u(x) - u \geq 0$ en $\partial B_{x,\delta_0}$ y tenemos que $u(x) - u = 0$ casi en todas partes con respecto a la medida de superficie (σ−c.t.p.) en $\partial B_{x,\delta_0}$.

Por la continuidad de u , tenemos que $u = u(x)$ en $\partial B_{x,\delta_0}$ y, en particular, $u(y) = u(x)$.

Por lo tanto $y \in M$ y $B_{x,\delta_x} \subset M$ y entonces M es abierto en R . De esta manera, usando la conexidad de R , encontramos que $M = \emptyset$ ó $M = R$. En el primer caso el $\sup_{x\in R} u(x)$ no se alcanza en R , en el segundo u es constante. ■

DEFINICIÓN

Sea R un subconjunto abierto de E^n y sea f una función en R *localmente integrable* (ver el **Apéndice**).

Sea $d(x, \sim R)$ la distancia de $x \in R$ a $\sim R$ (ver el **Apéndice**).

Si $\delta > 0$, se definen:

$$R_\delta = \{x \in R : d(x, \sim R) > \delta\}$$

$$f_\delta(x) = A(f : x, \delta) \ , \ x \in R_\delta$$

1.1.4 El problema clásico de Dirichlet

Sean R un subconjunto abierto no vacío de E^n con cerradura compacta y sea f una función real definida en ∂R.

El *problema clásico de Dirichlet* consiste en:

Hallar una función harmónica h en R tal que $\lim_{\substack{y \to x \\ y \in R}} h(y) = f(x)$ para toda $x \in \partial R$.

Este problema no tiene solución en todos los casos, incluso cuando R es una bola (por ejemplo cuando la función de la frontera f es discontinua).

Sin embargo, como veremos, si la solución existe para R abierto conexo y no vacío con cerradura compacta y si f es una función continua, entonces, como veremos, es única.

OBSERVACIÓN

Si f es Borel-medible en ∂B e integrable respecto a la medida de superficie en ∂B y si $h = IP(f, B)$ en B , entonces para $x_0 \in \partial B$ tenemos que:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B}} \sup h(x) \leq \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \partial B}} \sup f(x)$$

y además:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B}} \inf h(x) \geq \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \partial B}} \inf f(x)$$

Lema 1 *Sea f Borel-medible en ∂B , integrableen ∂B respecto a la medida de superficie y continua en $x_0 \in \partial B$.*

Si $h = IP(f, B)$ en B , entonces:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in B}} h(x) = f(x_0)$$

Demostración:

Aplicando la observación anterior obtenemos:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in B}} \sup h(x) \leq f(x_0)$$

Y como $IP(-f,B) = -IP(f,B)$, tenemos que:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in B}} \sup(-h(x)) \leq -f(x_0)$$

es decir:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in B}} \inf h(x) \geq f(x_0)$$

Por lo tanto $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in B}} h(x)$ existe y es igual a $f(x_0)$. ∎

Teorema 10 (Schwartz) ***El problema clásico de Dirichlet tiene solución para la bola B y una función continua f .***

La solución está dada por $IP(f,B)$.

Demostración:

Sea $B = B_{y,\rho}$.

Dada f continua en ∂B hay que encontrar una función h armónica en B tal que $\lim_{\substack{z\to x \\ z\in B}} h(z) = f(x)$ para toda $x \in \partial B$.

Sabemos que $IP(f,B)$ es armónica en B . Del LEMA 1 obtenemos el valor deseado de la solución en la fontera. ∎

COROLARIO

Sea u continua en el abierto R .

Si para cada $x \in R$ tenemos que $u(x) = L(u : x, \delta)$ para δ suficientemente pequeña, entonces u es armónica en R.

1.2 FUNCIONES SOBREARMÓNICAS

En esta sección describiremos a las funciones sobrearmónicas.

Este tipo de funciones se introdujo históricamente por el estudio de las funciones con segundas derivadas parciales continuas en un abierto R en el cual satisfacen la ecuación de Poisson:

$$\Delta u = -f$$

con f función no negativa en R .

OBSERVACIONES

◇ Si $f \geq 0$ y es integrable respecto a la medida de superficie en $\partial B_{x,\delta}$, entonces $L(f : x, \delta)$ esta definida y es finita; si $f \geq 0$ y no es integrable, entonces $L(f : x, \delta) = \infty$.

◇ Si f es s.c.i. en $\partial B_{x,\delta}$, entonces f está acotada inferiormente en $\partial B_{x,\delta}$ y $L(f : x, \delta)$ está bien definida.

$L(f : x, \delta)$ puede valer $+\infty$ pero no puede valer $-\infty$.

DEFINICIONES

Sea el *abierto* $R \subset E^n$.

Sea la función $u : R \to [-\infty, +\infty]$, u Borel-medible ($[-\infty, +\infty]$ es el conjunto de los reales extendidos).

Decimos que:

(i) u *supera al promedio* (*s.p.*) en $x \in R$ si $L(u : x, \delta)$ está definido y $u(x) \geq L(u : x, \delta)$ siempre que $\partial B_{x,\delta} \subset R$.

(ii) u *supera al promedio* en R si supera al promedio en cada punto de R .

(iii) u *supera localmente al promedio* (*localmente s.p.*) en $x \in R$ si para cada x existe $\delta_x > 0$ tal que $B_{x,\delta_x} \subset R$, $L(f : x, \delta)$ está definido para toda $\delta < \delta_x$ y $u(x) \geq L(u : x, \delta)$ para toda $\delta < \delta_x$.

(iv) u *supera localmente al promedio* en R si supera localmente al promedio en cada punto de R .

DEFINICIÓN

Sea R un subconjunto abierto de E^n .

$\mathcal{L}_R$ es la clase de las funciones que van del abierto R a los reales extendidos y que satisfacen:

(i) u no es idénticamente $+\infty$ en ninguna componente de R .

(ii) $u > -\infty$ en R .

(iii) u es s.c.i. en R .

De esta manera para cualquier $u \in \mathcal{L}_R$, el promedio $L(u : x, \delta)$ está definido siempre que $B_{x,\delta_x} \subset R$, ya que por la semicontinuidad inferior u está acotada inferiormente en ∂B.

DEFINICIÓN *(función sobrearmónica)*

Una función real extendida u es *sobrearmónica* en R si $u \in \mathcal{L}_R$ y u *s. p.* en R .

Teorema 11 *Sea R abierto y conexo.*

Si $u \in \mathcal{L}_R$ y si para cada $x \in R$ existe una δ_x tal que $B_{x,\delta_x} \subset R$ y $u(x) \geq L(u : x, \delta)$ (o $u(x) \geq A(u : x, \delta)$) siempre que $\delta < \delta_x$, entonces u satisface el principio del mínimo.

Demostración:

Supongamos que existe un punto x_0 tal que $u(x_0) = inf_R\, u$.

Como $u \in \mathcal{L}_R$, entonces:

$$-\infty < u(x_0) = inf_R\, u < +\infty$$

Sea $M = \{x : u(x) = inf_R\, u\}$; por la s.c.i de u , M es un subconjunto relativamente cerrado de R . Demostremos que M es abierto.

Consideremos una y cualquiera en M . Por hipótesis sabemos que hay una δ_y tal que $B_{y,\delta_y} \subset R$ y que $u(y) \geq L(u : y, \delta)$ siempre que $\delta < \delta_y$. Supongamos que hay un punto $z \in B_{y,\delta_y} \sim M$.

Sea $\rho = \|y - z\|$. Como tenemos que $y \in M$, entonces $u(y) \leq L(u : y, \delta)$. Es decir:

$$u(y) = L(u : y, \delta)$$

o equivalentemente:

$$L(u - u(y) : y, \rho) = 0$$

Como $u - u(y) \geq 0$ en $\partial B_{y,\rho}$, entonces $u - u(y) = 0$ respecto a la medida de superficie en $\partial B_{y,\rho}$. Pero como $u(z) > u(y)$, debe habeer una α tal que $u(z) > \alpha > u(y)$. Por la s.c.i. de u hay una vecindad de z , U_z , tal que $u > \alpha > u(y)$ en $U_z \cap \partial B_{y,\rho}$.

Ahora, $\partial B_{y,\rho}$ tiene medida de superficie positiva, entonces $u - u(y) > 0$ en un conjunto de medida positiva; tenemos una contradicción.

Por lo tanto $B_{y,\delta_y} \subset R$, es decir M es abierto. Entonces $M = \emptyset$ ó $M = R$ por la conexidad de R . Por lo tanto si u alcanza su ínfimo, entonces es constante en R . ■

COROLARIO

Si u es sobrearmónica en el abierto y conexo R , entonces u satisface el principio del mínimo en R .

Si R es un abierto acotado, u es sobrearmónica y $\liminf_{\substack{z \to x \\ z \in R}} u(z) \geq 0$ para toda $x \in \partial R$, entonces $u \geq 0$ en R .

Demostración:

Se sigue directamente de la definición de función sobrearmónica y del TEOREMA 11 que u satisface el principio del mínimo.

Para probar la segunda afirmación es suficiente probar que $u \geq 0$ en cada componente de R ; asumamos que R es conexo. Supongamos que existe un punto $y \in R$ tal que $u(y) < 0$, entonces u no es una función constante. Definamos la función v en $\overline{R}$ por:

$$v(x) = \lim \inf_{\substack{z \to x \\ z \in R}} u(z) \quad x \in \overline{R}$$

De esta manera v es s.c.i.en $\overline{R}$, $v \geq 0$ en ∂R y $v(y) < 0$.

Como v es s.c.i. en $\overline{R}$, debe alcanzar su mínimo en $\overline{R}$, de hecho en R. pero esto contradice al principio del mínimo. Por lo tanto $u \geq 0$ en R. ■

Teorema 12 *Sea u sobrearmónica en el abierto R y sea W un subconjunto abierto de R con cerradura compacta tal que $\overline{W} \subset R$.*

Si h es continua en $\overline{W}$ y armónica en W, y $u \geq h$ en ∂W, entonces $u \geq h$ en W .

Demostración:

Si h tiene estas propiedades, entonces se heredan a cada componente de W . Tomemos entonces a W conexo.

Consideremos a la función $u - h$ en $\overline{W}$.

En ∂W , tenemos que $u - h \geq 0$. Ahora, como h es armónica en W, $u - h$ es sobrearmónica en W y, por el corolario anterior, no alcanza su ínfimo en W , de hecho lo alcanza en ∂W .

Y como $u - h \geq 0$ en ∂W obtenemos que $u - h \geq 0$ en $\overline{W}$. ■

Teorema 13 *Una función real extendida $u \in \mathcal{L}_R$ es sobrearmónica en el abierto R si u tiene la siguiente propiedad:*

> **(P)** *Sea W un subconjunto abierto de R con cerradura compacta $\overline{W} \subset R$. Si h es continua en $\overline{W}$ y armónica en W y si $u \geq h$ en ∂W, entonces $u \geq h$ en W .*

Demostración:

Sea ℓ_R la clase de las funciones sobrearmónicas en R , de acuerdo con la definición de función sobrearmónica.

Sea ℓ'_R la clase de las funciones $u \in \mathcal{L}_R$ que satisfacen (P).

Por el TEOREMA 12 $\ell_R \subset \ell'_R$.

Queremos mostrar que $\ell'_R \subset \ell_R$.

Consideremos a una $u \in \ell'_R$ y a una $\overline{B}_{x,\delta} \subset R$. Como u es s.c.i. y $u \geq h$ en $\partial B_{x,\delta}$, entonces hay una sucesión creciente $\{\phi_j\}$ de funciones continuas en $\partial B_{x,\delta}$ tal que $\phi_j \uparrow u$ en $\partial B_{x,\delta}$ (ver el **Apéndice**).

Sea la función:

$$h_j = \begin{cases} \phi_j \text{ en } \partial B_{x,\delta} \\ \\ IP(\phi_j, B_{x,\delta}) \text{ en } B_{x,\delta} \end{cases}$$

De esta manera h_j es continua en $\overline{B}_{x,\delta}$, armónica en $B_{x,\delta}$ y $u \geq \phi_j = h_j$ en $\partial B_{x,\delta}$.

Como u satisface (P), entonces $u \geq h_j$ en $B_{x,\delta}$.

Por lo tanto:

$$u(x) \geq h_j(x) = IP(\phi_j, B_{x,\delta})(x) = L(\phi_j : x, \delta)$$

Ahora, como $\phi_j \uparrow u$ en $\partial B_{x,\delta}$, entonces $u(x) \geq L(u : x, \delta)$ por el *Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.*

Concluímos que $\ell'_R \subset \ell_R$. ■

OBSERVACIÓN

De los teoremas 11 y 12 tenemos que u es sobrearmónica si y sólo si satisface la propiedad (P).

Teorema 14 *Si R es un abierto, $u \in \mathcal{L}_R$, y u supera localmente al promedio en R , entonces u es sobrearmónica en R .*

Demostración:

Sea W un subconjunto abierto de R con cerradura compacta $\overline{W} \subset R$ y sea h continua en $\overline{W}$, armónica en W y tal que $u \geq h$ en ∂W .

Consideremos que W es conexo.

Tomemos a la función $u - h$ la cual es s.c.i. en $\overline{W}$ y alcanza su ínfimo en $\overline{W}$.

Como h cumple la propiedad del promedio en R , entonces $u - h$ supera al promedio en R . Usando el TEOREMA 11 y el hecho de que $u \geq h$ en ∂W , tenemos que $u - h$ no puede alcanzar su ínfimo en ningún punto de W. Por lo tanto $u - h \geq 0$ en W . ■

Regresando a la ecuación de Poisson teemos el siguiente resultado:

Lema 2 *Sea el abierto $R \subset E^n$.*

Si u tiene segundas derivadas parciales continuas en R y $\Delta u \leq 0$ en R , entonces $u(x) \geq L(u : x, \delta)$ siempre que $\overline{B}_{x,\delta} \subset R$.

Demostración:

Supongamos que $\Delta u < 0$ en $\overline{B} = \overline{B}_{x,\delta} \subset R$.

Sea la función:

$$h = \begin{cases} u \text{ en } \partial B \\ \\ IP(u, B) \text{ en } B \end{cases}$$

Por la manera en que h está definida resulta ser continua en $\overline{B}$ y armónica en B .

Si mostramos que $u \geq h$ en B , habremos concluído la demostración ya que:

$$u(x) \geq h(x) = IP(u, B) = L(u : x, \delta)$$

Consideremos a la función $w = u - h$. Tenemos que:

$$\Delta w = \Delta u - \Delta h < 0 \quad \text{en } B$$

y además $w = 0$ en ∂B y es continua en $\overline{B}$.

Supongamos que w alcanza su mínimo en $\overline{B}$ en el punto x_0 .

Si $x_0 \in B$, entonces:

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}\right|_{x_0} \geq 0, \; i = 1, \ldots, n$$

y tendríamos $\Delta w(x_0) \geq 0$ lo que sería una contradicción.

Por lo tanto $w = u - h \geq 0$ en $\overline{B}$ y $u \geq h$ en $\overline{B}$.

Ahora supongamos que $\Delta u \leq 0$ en B .

Sea $q(x) = \|x\|^2$, entonces $\Delta q = 2n$. Para cada en $\epsilon > 0$, se tiene que:

$$\Delta(u - \epsilon q) = \Delta u - \epsilon\, \Delta q < 0 \quad \text{en } R$$

Por el caso anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} u(x) - \epsilon q(x) \quad &\geq \quad L(u - \epsilon q : x, \delta) = \\ L(u \quad &: \quad x, \delta) - \epsilon L(q : x, \delta) \end{aligned}$$

Haciendo $\epsilon \rightarrow 0$ obtenemos:

$$u(x) \geq L(u : x, \delta)$$

■

1.2.1 Propiedades de las funciones sobrearmónicas

Teorema 15 *Sea R abierto, $u \in \mathcal{L}_R$.*

Si para cada $x \in R$ hay una $\delta_x > 0$ tal que $B_{x,\delta_x} \subset R$ y $u(x) \geq A(u : x, \delta)$ siempre que $\delta < \delta_x$, entonces u es sobrearmónica en R.

Además si u es sobrearmónica en R y $x \in R$, entonces $u(x) \geq A(u : x, \delta)$ siempre que $B_{x,\delta} \subset R$.

Demostración:

Sea $u \in \mathcal{L}_R$ con las hipótesis de la primera afirmación.

Tomemos a W un abierto con ceradura compacta $\overline{W} \subset R$ y a una función h continua en $\overline{W}$, armónica en W y tal que $u \geq h$ en ∂W . Consideremos a W conexo.

Aplicando el TEOREMA 11 obtenemos que $u - h$ satisface el principio del mínimo en W . Ahora, como $u - h$ es s.c.i. en $\overline{W}$ y $u > h \geq 0$ en ∂W, entonces, por el principio del mínimo, $u - h \geq 0$ en W. Por lo tanto u es sobrearmónica en R .

Supongamos ahora que u es sobrearmónica en R . Sean $x \in R$, y $B_{x,\delta_x} \subset R$. Mostremos que $u(x) \geq A(u : x, \delta)$.

La desigualdad es trivial si $u = +\infty$.

Consideremos entonces que $u(x) < +\infty$. Sabemos que $u(x) \geq L(u : x, \rho)$ para $0 < \rho < \delta$. De ahí se sigue:

$$\sigma_n\, \rho^{n-1}\, u(x) \geq \int_{\partial B_{x,\rho}} u(z)\, d\sigma(z) \quad \text{si } 0 < \rho < \delta$$

Integrando esta desigualdad sobre el intervalo $(0, \delta)$ tenemos que:

$$\frac{\sigma_n \delta^n}{n} u(x) > \int_0^\delta \int_{\partial B_{x,\rho}} u(z)\, d\sigma(z)\, d\rho = \int_{B_{x,\delta}} u(z)\, dz$$

y sustituyendo $v_n = \frac{\sigma_n}{n}$, concluímos:

$$u(x) \geq A(u : x, \delta)$$

siempre que $B_{x,\delta} \subset R$. ■

Teorema 16 *Si u es sobrearmónica en el abierto R , entonces es finita casi en todas partes (c.t.p.) en R respecto a la medida de Lebesgue y es Lebesgue integrable en cada compacto* $K \subset R$.

Demostración:

Demostremos que u es finita c.t.p. en cada componente de R .

Consideremos a R conexo.

Sabemos que u no es idénticamente $+\infty$, de ahí que existe cuando menos un punto en R donde u es finita.

Consideremos al siguiente conjunto:

$$M = \{x \in R : u \text{ es finita casi en todas partes en } B_{x,\delta} \subset R \text{ para alguna } \delta > 0\}$$

M no es vacío ya que cuando menos existe un punto donde u es finita. Además, usando el TEOREMA 15, tenemos que u es finita c.t.p. en cada bola contenida en R con centro en ese punto (de otra manera u valdría $+\infty$ es ese punto).

Veamos que M es abierto.

Sea $x \in M$. Sabemos que existe $\delta > 0$ tal que u es finita c.t.p. en $B_{x,\delta} \subset R$. Tomemos a una $y \in B_{x,\delta}$ y a la bola $B_{y,\rho}$, tal que $2\rho = \min\{\|y-x\|, \delta - \|y-x\|\}$. De estya manera $B_{y,\rho} \subset B_{x,\delta}$ y u es finita c.t.p. en $B_{y,\rho}$, es decir, $y \in M$. Por lo tanto M es abierto.

Veamos ahora que M es cerrado relativo a R .

Sea $\{x_i\}$ una sucesión en M convergente a $x \in R$. Como R es abierto, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B_{x,\epsilon} \subset R$. Tomemos a i tal que $x_i \in B_{x,\frac{\epsilon}{2}}$. Usando el hecho de que $x_i \in M$, encontramos una $\delta > 0$, tal que u es finita c.t.p. en $B_{x_i,\delta}$. En particular u es finita c.t.p. en el conjunto $B_{x_i,\delta} \cap B_{x,\frac{\epsilon}{2}}$, el cual tiene medida de Lebesgue no nula. Tomemos ahora a $z \in B_{x_i,\delta} \cap B_{x,\frac{\epsilon}{2}}$ tal que $u(z) < +\infty$. Por el TEOREMA 15 u es finita c.t.p. en $B_{x,\frac{\epsilon}{2}} \subset R$.

Ahora, como $x \in B_{x,\frac{\delta}{2}}$, entonces existe una bola $B_{x,\rho} \subset B_{x,\frac{\delta}{2}}$ en la cual u es finita c.t.p. Por lo tanto $x \in M$, es decir, M es relativamente cerrado.

Por la conexidad de M concluímos que $M = R$.

Entonces, a cada $x \in M = R$ le corresponde una bola $B_{x,\delta_x} \subset R$ en la cual u es finita c.t.p. Estas bolas forman una cubierta de $R \subset E^n$ y una cantidad numerable de estas bolas es suficiente para cubrir a R. Como u es finita c.t.p. en una cantidad numerable de abiertos que cubren a R, entonces es finita c.t.p. en R.

Probemos ahora que u es Lebesgue integrable en cada compacto $K \subset R$.

Cubramos a K con una cubierta finita de bolas $B_{x_i,\delta_i} \subset R$ con centro x_i y radio δ_i. Como u es finita c.t.p. en bolas arbitrariamente pequeñas que contengan a cada x_i podemos considerar que $u(x_i) < +\infty$.

Tenemos entonces:

$$A(u : x_i, \delta_i) \leq u(x_i) < +\infty$$

Ahora, como u está acotada inferiormente en $\cup \overline{B}_{x_i,\delta_i}$ podemos considerar que $u \geq 0$ ahí. Entonces tenemos que:

$$-\infty < \int_K u(x)\,dx \leq \sum \int_{B_{x_i,\delta_i}} u(x)\,dx \leq \sum v_n \delta^n u(x_i) < +\infty$$

y por lo tanto u es integrable en K. ∎

Teorema 17 *Sea B una bola tal que $\overline{B} \subset R$. Si u es sobrearmónica en R, entonces:*

(i) u es integrable respecto de la medida de superficie en ∂B.

(ii) $IP(u, B)$ es armónica en B.

(iii) $u \geq IP(u, B)$ en B.

Demostración:

Demostremos primero (i).

Consideremos que $u \geq 0$ en ∂B. Como u es s.c.i. en ∂B, entonces existe una sucesión $\{\phi_j\}$ de funciones continuas no negativas en ∂B tal que $\phi_j \uparrow u$ en ∂B.

Sea la función:

$$v_j = \begin{cases} IP(\phi_j, B), \text{ en } B \\ \\ \phi_j \text{ en } \partial B \end{cases}$$

Como $u \geq v_j = \phi_j$ en ∂B, entonces v_j es armónica en B y v_j es continua en $\overline{B}$, además tenemos que $u \geq v_j$ en B.

Ahora $\{v_j\}$ es una sucesión creciente de funciones armónicas en B y entonces $v = \lim_{j\to\infty} v_j$ es idénticamente $+\infty$ o armónica en B. Como u es finita c.t.p. en R y $u \geq v$, tenemos que v es armónica en B.

Se sigue del teorema de la convergencia monótona que:

$$v = IP(u,B)(x) = L(u:x,\delta)$$

y u es integrable respecto a la medida de superficie en ∂B. ■

Lema 3 *Sea u sobrearmónica en el abierto R y sea $\overline{B}_{x,\delta} \subset R$.*

Sea $B = B_{x,\delta}$.

Definamos a la función:

$$v = \begin{cases} IP(u,B), \text{ en } B \\ \\ u, \text{ en } R \sim B \end{cases}$$

Resulta entonces que $u \geq v$ en R, que v es armónica en B y que v es sobrearmónica en R.

Demostración:

La integral de Poisson $IP(u,B)$ está definida y $v \leq u$ en B por el TEOREMA 16.

Claramente $u \geq v$ en R y v es armónica en B.

Demostremos ahora que v es s.c.i. y que supera al promedio en ∂B.

Sea $y \in \partial B$. Sabemos de la OBSERVACIÓN empleada en el LEMA 1 que:

$$\lim_{\substack{z\to y\\ z\in B}} \inf v(z) \geq \lim_{\substack{z\to y\\ z\in \partial B}} \inf u(z) \geq \lim_{\substack{z\to y\\ z\in R}} \inf u(z) = u(y) = v(y)$$

Y usando que $v = u$ en $R \sim B$ obtenemos que:

$$\lim_{\substack{z\to y\\ z\in R\sim B}} \inf v(z) = \lim_{\substack{z\to y\\ z\in R\sim B}} \inf u(z) \geq \lim_{\substack{z\to y\\ z\in R}} \inf u(z) = u(y) = v(y)$$

Por lo tanto:

$$\lim_{\substack{z\to y\\ z\in R}} \inf v(z) \geq v(y)$$

y v es s.c.i. en y.

Mostremos ahora que v es hiperarmónica en $y \in \partial B$.

Supongamos que $\overline{B}_{y,\rho} \subset R$. Entonces:

$$v(y) = u(y) \geq L(u : y, \rho) \geq L(v : y, \rho),$$

ya que $u \geq v$ en R . Obviamente v supera localmente al promedio y es s.c.i. en $R \sim \partial B$

Por lo tanto v es sobrearmónica en R . ∎

OBSERVACIÓN

Si u es sobrearmónica en el abierto R , entonces

$$u(x) = \lim \inf_{\substack{y \to x \\ y \in R \\ y \neq x}} u(y) \qquad \text{para } x \in R$$

1.2.2 Aproximación de funciones sobrearmónicas

Lema 4 *Si u es sobrearmónica en el abierto R , $x \in R$ y $\delta_x = d(x, \sim R)$ (la distancia de $x \in R$ a $\sim R$), entonces $L(u : x, \delta)$ y $A(u : x, \delta)$ son funciones de δ monótonas decrecientes en $[0, \delta_x)$ y continuas para $\delta = 0$.*

Además $A(u : x, \delta)$ es continua en $[0, \delta_x)$.

Demostración:

Tomemos una δ_1 tal que $0 \leq \delta \leq \delta_1 \leq \delta_x$.

Definamos a la función h en B_{x,δ_1} por $h = IP(u, B_{x,\delta_1})$.

De esta manera, por el TEOREMA 17, $u \geq h$ en B_{x,δ_1} .

Como $\overline{B}_{x,\delta} \subset B_{x,\delta_1}$ y h es armónica en B_{x,δ_1} , entonces:

$$L(u : x, \delta) \geq L(h : x, \delta) = h(x) = L(u : x, \delta_1)$$

Por lo tanto $L(u : x, \delta)$ es monótona decreciente en $[0, \delta_x)$.

Ahora, como u es s.c.i. en x , el conjunto $\{y : u(y) > u(x) - \epsilon\}$ resulta ser una vecindad de x para cada $\epsilon > 0$ (Kolmogorov) y entonces:

$$L(u : x, \delta) \geq L(u(x) - \epsilon : x, \delta) = u(x) - \epsilon$$

para δ suficientemente pequeña.

Pero u es sobrearmónica en R , entonces:

$$u(x) \geq L(u : x, \delta)$$

De donde, para cada $\epsilon > 0$:

$$u(x) \geq L(u : x, \delta) \geq u(x) - \epsilon$$

para δ suficientemente pequeña.

Si tomamos el límite cuando $\delta \downarrow 0$ encontramos que para toda $\epsilon > 0$:

$$u(x) \geq \lim_{\delta \downarrow 0} L(u : x, \delta) \geq u(x) - \epsilon$$

Es decir $L(u : x, \delta) \uparrow u(x)$ cuando $\delta \downarrow 0$.

Ahora, para cualquier $\delta \leq \delta_1 < \delta_x$, $A(u : x, \delta)$ es finita y tenemos que:

$$A(u : x, \delta) = \frac{1}{v_n \delta^n} \int_{B_{x,\delta}} u(z)\, dz$$

$$= \frac{1}{v_n \delta^n} \int_0^\delta \rho^{n-1} \left(\int_{\|\theta = 1\|} u(x + \rho\theta)\, d\sigma(\theta) \right) d\rho$$

$$= \frac{\sigma^n}{v_n \delta^n} \int_0^\delta \rho^{n-1}\, L(u : x, \delta)\, d\rho$$

Por lo tanto $\rho^{n-1} L(u : x, \delta)$ es integrable en $[0, \delta_1]$.

Sabemos quela integral indefinida de una función integrable es absolutamente continua (Ver el **Apéndice**). De aquí que $A(u : x, \delta)$ sea continua en $(0, \delta_1)$. La última ecuación nos da una representación de $A(u : x, \delta)$, para cualquier intervalo cerrado $[a, b] \subset (0, \delta_x)$, como el producto de dos funciones acotadas absolutamante continuas en $[a, b]$. Por lo tanto $A(u : x, \delta)$ es absolutamante continua en $[a, b]$. (Ver el **Apéndice**).

Esto implica que $A(u : x, \delta)$ es diferenciable c.t.p. en $(0, \delta_x)$ (un teorema demostrado por Lebesgue afirma que la derivada de una integral indefinida existe y es igual al integrando c.t.p.).(Ver el **Apéndice**).

Entonces, para casi toda $\delta \in (0, \delta_1)$, tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial \delta} A(u : x, \delta) = \frac{\sigma^n}{v_n \delta^n}\; L(u : x, \delta) - \frac{n\sigma^n}{v_n \delta^{n+1}} \int_0^\delta \rho^{n-1}\, L(u : x, \delta)\, d\rho$$

y, ya que $v_n = \dfrac{\sigma_n}{n}$, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial\delta} A(u : x, \delta) = \frac{n}{\delta}\,[L(u : x, \delta) - A(u : x, \delta)]$$

Ahora, como $L(u : x, \delta)$ es monótona decreciente en $(0, \delta)$ entonces:

$$A(u : x, \delta) = \frac{\sigma^n}{v_n\,\delta^n} \int_0^\delta \rho^{n-1}\, L(u : x, \delta)\, d\rho$$

$$\geq \frac{\sigma^n}{v_n\,\delta^n} \left(\int_0^\delta \rho^{n-1}\, d\rho \right) L(u : x, \delta)$$

$$= L(u : x, \delta)$$

y entonces $\dfrac{\partial}{\partial\delta} A(u : x, \delta) \leq 0$ para casi toda $\delta \in (0, \delta_x)$.

Si $0 < a < \delta$ tenemos que:

$$A(u : x, \delta) - A(u : x, a) = \int_0^\delta \left(\frac{\partial}{\partial\delta} A(u : x, \rho) \right) d\rho$$

es decir $A(u : x, \delta)$ es una función monótona decreciente de δ en $(0, \delta_x)$.

Además, como:

$$A(u : x, 0) = u(x) \geq A(u : x, \delta) \geq L(u : x, \delta)$$

para toda $\delta \in (0, \delta_x)$, concluímos que $A(u : x, \delta)$ es monótona decreciente en $[0, \delta_x]$ y continua por la derecha en 0 .(Ver el **Apéndice**).. ■

De acuerdo con este resultado podemos definir:

$$L(u : x, 0) = A(u : x, 0) = u(x)$$

Veamos ahora que si promediamos una función sobrearmónica sobre una bola de radio dado obtenemos una función sobrearmónica "más suave" (derivable respecto a δ y continua para $\delta = 0$) a expensas de hacer ligeramente más pequeña la región.

DEFINICIÓN

Si R es un abierto y $\alpha > 0$ definimos al conjunto:

$$R_\alpha = \{y : d(y, \sim R) > \alpha\}$$

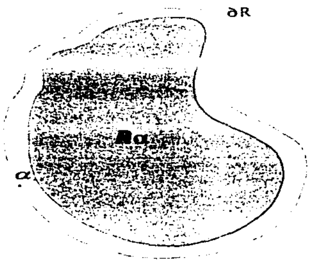

Figura 1-1: El conjunto R_α

Teorema 18 *Sea u sobrearmónica en el abierto R y sea $u_\delta(x) = A(u : x, \delta)$ para $x \in R_\delta$.*
Entonces u_δ es sobrearmónica en R_δ para cada δ y $u_\delta \uparrow u$ cuando $\delta \downarrow 0$ para cada $x \in R_\delta$.
Si además u es armónica en el abierto $U \subset R$, entonces u_δ es armónica en U_δ para cada δ

Demostración:

La continuidad de u_δ en U_δ se sigue de la de la definicón de u_δ como una intergral.

Supongamos que $\delta, \rho > 0$ y que $x \in R_{\delta+\rho}$.

Se puede demostrar, usando la desigualdad del triángulo, que $R_{\delta+\rho} \subset (R_\delta)_\rho$ y que $R_{\delta+\rho} \subset (R_\rho)_\delta$.
De aquí que $B_{x,\rho} \subset R_\delta$ y $B_{x,\delta} \subset R_\rho$. Por lo tanto $A(u_\delta : x, \rho)$ y $A(u_\rho : x, \delta)$ están bien definidas.

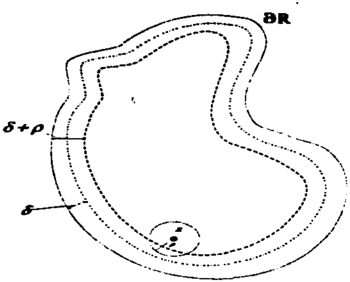

Figura 1-2: La vecindad de x

Usando el teorema de Fubini tenemos:

$$A(u_\delta : x, \rho) = \frac{1}{v_n\rho^n}\int_{B_{x,\rho}} u_\delta(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{v_n\rho^n}\int \chi_{B_{x,\rho}}(y)\left(\int \chi_{B_{y,\delta}}(z)\, u(z)\, dz\right) dy$$

$$= \frac{1}{v_n^2\rho^n\delta^n}\int u(z)\left(\int \chi_{B_{x,\rho}}(y)\,\chi_{B_{y,\delta}}(z)\, dy\right) dz$$

De lo anterior tenemos que $z \in B_{y,\delta}$ si y solo si $y \in B_{z,\rho}$. Entonces la integral dentro del último paréntesis es el volumen de $B_{y,\delta} \cap B_{x,\rho}$, el cual es una función simétrica de δ y ρ . Es decir, $A(u_\delta : x, \rho)$ es una función simétrica de δ y ρ para $x \in R_{\delta+\rho}$.

Consideremos ahora cualquier $x \in R_\delta$ y escojamos una r tal que $x \in R_{\delta+r}$.

Entonces $x \in R_{\delta+r} \subset R_{\delta+\rho}$ para toda $\rho < r$ y para toda $\rho < r$ tenemos que:

$$A(u_\delta : x, \rho) = A(u_\rho : x, \delta) \leq A(u : x, \delta) = u_\delta$$

Por lo tanto, usando el TEOREMA 15, concluímos que u_δ es sobrearmónica en R_δ .

La afirmación de que $u_\delta \uparrow u$ se sigue del LEMA 4.

Por otro lado, si u es armónica en el abierto U, entonces $u_\delta(x) = A(u : x, \delta) = u(x)$ para $x \in U_\delta$ y u_δ es armónica en U_δ. ■

Teorema 19 *Sea u sobrearmónica en R y sea V un abierto con cerradura compacta $\overline{V} \subset R$.*

Entonces existe una sucesión creciente $\{v_j\}$ de funciones sobrearmónicas en V con segundas derivadas parciales continuas tal que $u = \lim_{j\to\infty} v_j$ para cada $x \in V$.

Demostración:

Sea $3\delta = d(\overline{V}, \sim R)$ y sea $\{\delta_j\}$ sucesión decreciente en $(0, \delta)$ con $\lim_{j\to\infty} \delta_j = 0$.

Para cualquier $\rho > 0$ y cualquier función sobrearmónica w en R, definamos a w_ρ en R_ρ por:

$$w_\rho = A(w : x, \rho)$$

Sea j fija.

Por el teorema anterior sabemos que u_{δ_j} es sobrearmónica y que $u_{\delta_j} \le u$ en R_{δ_j}.

Usando nuevamente el teorema anterior tenemos que $(u_{\delta_j})_{\delta_j}$ es sobrearmónica y $(u_{\delta_j})_{\delta_j} \le u_{\delta_j} \le u$ en $(R_{\delta_j})_{\delta_j}$.

Análogamante (usando el mismo teorema) obtenemos que $((u_{\delta_j})_{\delta_j})_{\delta_j}$ es sobrearmónica y que $((u_{\delta_j})_{\delta_j})_{\delta_j} \le (u_{\delta_j})_{\delta_j} \le u_{\delta_j} \le u$ en $\left((R_{\delta_j})_{\delta_j}\right)_{\delta_j} \supset V$.

Definamos a la función $v_j = ((u_{\delta_j})_{\delta_j})_{\delta_j}$ en $\left((R_{\delta_j})_{\delta_j}\right)_{\delta_j}$.

Por la manera en que se definió v_j es sobrearmónica y tiene segundas derivadas parciales continuas en V.

Ahora, por el LEMA 4, $w_{\delta_j} \le w_{\delta_{j+1}}$ en R_{δ_j} para cualquier función sobrearmónica w en R.

Entonces:

$$v_j = ((u_{\delta_j})_{\delta_j})_{\delta_j} \le ((u_{\delta_{j+1}})_{\delta_j})_{\delta_j}$$

$$\le ((u_{\delta_{j+1}})_{\delta_{j+1}})_{\delta_j}$$

$$\le ((u_{\delta_{j+1}})_{\delta_{j+1}})_{\delta_{j+1}} = v_{j+1}$$

en $\left((R_{\delta_j})_{\delta_j}\right)_{\delta_j} \supset V$ y la sucesión $\{v_j\}$ es monótona creciente en V.

De la misma manera, como $w_{\delta_j} \le w_{\delta_{j+k}}$ en R_{δ_j} para cualquier función sobrearmónica w en R y enteros positivos j, k, tenemos:

$$((u_{\delta_{j+k}})_{\delta_j})_{\delta_j} \le ((u_{\delta_{j+k}})_{\delta_{j+k}})_{\delta_{j+k}} = v_{j+k}$$

en $\left((R_{\delta_{j+k}})_{\delta_j}\right)_{\delta_j}$.

Usando que $u_{\delta_{j+k}} \uparrow u$ en R cuando $k \uparrow \infty$, encontramos que, en $\left(R_{\delta_j}\right)_{\delta_j}$, $((u_{\delta_{j+k}})_{\delta_j})_{\delta_j} \to (u_{\delta_j})_{\delta_j}$ cuando $k \to \infty$.

De lo anterior obtenemos que $(u_{\delta_j})_{\delta_j} \leq \lim_{k\to\infty} v_k$ en $\left(R_{\delta_j}\right)_{\delta_j}$.

Repitiendo el mismo argumento dos veces, obtenemos que $u \leq \lim_{k\to\infty} v_k$ en R.

Como $v_k = ((u_{\delta_k})_{\delta_k})_{\delta_k} \leq u$ en $\left((R_{\delta_k})_{\delta_k}\right)_{\delta_k}$, entonces:

$$\lim_{k\to\infty} v_k \leq u \quad \text{en } R$$

Es decir, $u = \lim_{k\to\infty} v_k$ en R.

La sucesión deseada se obtiene restringiendo estas v_j a V. ■

Teorema 20 *Sea K un subconjunto compacto de R.*

Sea u sobrearmónica en el abierto R y armónica en $R \sim K$.

Entonces existe una sucesión creciente de funciones sobrearmónicas $\{u_j\}$ en R tal que:

(i) cada u_j tiene segundas derivadas parciales continuas en R.

(ii) $\lim_{j\to\infty} u_j = u$ para cada $x \in R$.

(iii) si V es cualquier vecindad de K con cerradura compacta $\overline{V} \subset R$, entonces $u_j = u$ en $R \sim \overline{V}$ para j suficientemente grande.

Demostración:

Sea $6\delta = d(K, \sim R)$ y sea $\{\delta_j\}$ sucesión decreciente en $(0, \delta)$ con $\lim_{j\to\infty} \delta_j = 0$.

Para cada j tenemos que $K \subset R_{3\delta_j}$ y $\partial R_{3\delta_j} \subset R \sim K$. Entonces para cada j tenemos que $((u_{\delta_j})_{\delta_j})_{\delta_j} = u$ en una vecindad de $\partial R_{3\delta_j}$.

Definamos a la función:

$$u_j = \begin{cases} ((u_{\delta_j})_{\delta_j})_{\delta_j} \text{ en } R_{3\delta_j} \\ \\ u \text{ en } R \sim R_{3\delta_j} \end{cases}$$

Como $((u_{\delta_j})_{\delta_j})_{\delta_j}$ es sobrearmónica en $R_{3\delta_j}$ y es igual a u en una vecindad de $\partial R_{3\delta_j}$, entonces cada u_j es sobrearmónica en R, tiene segundas parciales continuas en R y $u_j = u$ en $R \cap (\sim K)_{3\delta_j}$.

Además, como en la demostración del teorema anterior, se obtiene que $u_j \uparrow u$ en R.

Ahora, sea V un vecindad de K con cerradura compacta $\overline{V} \subset R$.

Para j suficientemente grande tenemos que:

$$R \cap (\sim K)_{3\epsilon_j} \supset R \sim \overline{V}$$

y entonces:

$$u_j = u \quad \text{en} R \sim \overline{V}$$

$\blacksquare$

Capítulo 2

FUNCIONES Y POTENCIALES DE GREEN

Consideremos nuevamente el problema de Dirichlet.

Si el abierto R es la bola $B_{x,\rho}$ sabemos, del capítulo anterior, que existe una función armónica v_x (que depende del centro de la bola: x) tal que:

$$v_x = -\frac{1}{\|x-z\|^{n-2}} \qquad \text{para } z \in \partial R$$

es decir, que cumple:

$$\frac{1}{\|x-z\|^{n-2}} + v_x = 0 \qquad \text{para } z \in \partial R$$

Para encontrar tal función basta aplicar la fórmula integral de Poisson:

$$v_x = IP(-\frac{1}{\|x-z\|^{n-2}}, R)$$

En este capítulo generalizamos este resultado.

En la búsqueda de la representación integral de una función armónica sobre el abierto R desarrollaremos la teoría de las *funciones de Green*. Veremos que el método anterior funciona si y solo si el problema de Dirichlet correspondiente a la función de frontera:

$$f_x(z) = \frac{1}{\|x - z\|^{n-2}}, \text{ para } z \in \partial R$$

puede ser resuelto para cada $x \in R$.

Consideraremos entonces a las funciones de la forma:

$$\frac{1}{\|x - z\|^{n-2}} + v_x$$

con v_x armónica en R .

Usando la identidad de Green se puede demostrar que:

Si h es armónica en una vecindad de la cerradura de un abierto acotado R de frontera suave, entonces para $x \in R$ y $n \geq 3$ tenemos:

$$h(x) = \frac{1}{\sigma_n(n-2)} \int_{\partial R} \left[\frac{1}{\|x - z\|^{n-2}} \, D_{\hat{n}} \, h - h \, D_{\hat{n}} \left(\frac{1}{\|x - z\|^{n-2}} \right) \right] d\sigma(z)$$

Además, en la deducción de la fórmula de Poisson se buscó una función armónica v_x que dependiera de $x \in R$ (el centro de la bola $B_{x,\rho}$), que fuera armónica en una vecindad de $\overline{R}$ y tal que la siguiente integral se anulara:

$$0 = \frac{1}{\sigma_n(n-2)} \int_{\partial R} (v_x \, D_{\hat{n}} \, h - h \, D_{\hat{n}} \, v_x) \, d\sigma(z)$$

Sumando estas dos últimas ecuaciones obtenemos la siguiente representación integral para h :

$$h(x) = \frac{1}{\sigma_n(n-2)} \int_{\partial R} \left[\left(\frac{1}{\|x - z\|^{n-2}} + v_x \right) D_{\hat{n}} \, h - h \, D_{\hat{n}} \left(\frac{1}{\|x - z\|^{n-2}} + v_x \right) \right] d\sigma(z)$$

Introduzcamos ahora a las funciones de Green:

2.1 FUNCIONES DE GREEN

DEFINICIÓN *(Función de Green para la bola)*

Sea $B = B_{y,\rho}$.

Sea x^* el inverso de x con respecto a la bola B .

(i) Si $n = 2$ entonces

$$G_B(x,z) = \begin{cases} \log \dfrac{\|y-x\|}{\rho} \dfrac{\|z-x^*\|}{\|z-x\|}, & \text{para } z \in B \sim \{x\}\,, \quad x \neq y \\[2ex] \log \dfrac{\rho}{\|z-y\|}, & \text{para } z \in B \sim \{x\}\,, \quad x = y \\[2ex] +\infty, & \text{para } z = x \end{cases}$$

con x^* el inverso de x con respecto a ∂B .

(ii) Si $n \geq 3$ entonces

$$G_B(x,z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\|z-x\|^{n-2}} - \left(\dfrac{\rho}{\|x-y\|}\right)^{n-2} \dfrac{1}{\|z-x^*\|^{n-2}}, & \text{para } z \in B \sim \{x\}\,, \quad x \neq y \\[2ex] \dfrac{1}{\|z-y\|^{n-2}} - \dfrac{1}{\rho^{n-2}}, & \text{para } z \in B \sim \{x\}\,, \quad x = y \\[2ex] +\infty, & \text{para } z = x \end{cases}$$

Notemos que, en el caso $n = 3$, si $x = y$ tenemos que nuestra v_x es:

$$v_x = -\frac{1}{\rho^{n-2}}$$

OBSERVACIÓN

$G_B(x,z)$ es continua para $x = y$.

Demostración:

Veámoslo para $n = 2$ (el caso $n \geq 3$ se puede probar de manera análoga).

Sabemos que x^* no está definida para $x = y$, ya que por definición:

$$x^* = y + \frac{\rho^2}{\|x-y\|^2}(x-y),$$

sin embargo tomando el límite cuando $x \to y$ tenemos:

$$\frac{\|y-x\|}{\rho}\frac{\|z-x^*\|}{\|z-x\|} = \frac{\|y-x\| \left\|(z-y) - \dfrac{\rho^2}{\|x-y\|^2}(x-y)\right\|}{\rho\,\|z-x\|}$$

$$\to \frac{\rho}{\|z-y\|}$$

Es decir:

$$G_B(y,z) = \lim_{x \to y} G_B(x,z) \qquad z \in B \sim \{y\}$$

■

Usando la definición de función de Green la representación integral del TEOREMA 5 del Capítulo 1 puede expresarse de la siguiente manera:

Si h es armónica en una vecindad de la cerradura de $B = B_{y,\rho}$ y $x \in B$, entonces:

$$h(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B} h(z)\, D_{\hat{n}} G_B(x,z)\, d\sigma(z) \qquad \text{para } x \neq y \text{ y } n = 2$$

Notemos que cuando $x = y$ y $z \in \partial B$, entonces tenemos que:

$$D_{\hat{n}}\, G_B(y,z) = D_{\hat{n}} \log \frac{\rho}{\|z-y\|} = D_r \log \frac{\rho}{r}\bigg|_{r=\rho} = -\frac{1}{\rho}$$

y por lo tanto:

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B} h(z)\, d\sigma(z)$$

Es decir, como ya sabíamos, el valor de h en el centro: $h(y)$ es, en este caso, el promedio de la la función sobre la esfera ∂B .

Para $n \geq 3$ se obtiene análogamente que si h es armónica en una vecindad de $\overline{B}$ entonces:

$$h(x) = -\frac{1}{\sigma_n(n-2)}\int_{\partial B} h(z)\, D_{\hat{n}} G_B(x,z)\, d\sigma(z) \qquad x \in B$$

Y si usamos a la integral de Poisson, podemos entonces escribir:

$$IP(\mu, B) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} D_{\bar{n}} G_B(x, z)\, d\mu(z) & n = 2 \\ \frac{1}{\sigma_n(n-2)} \int_{\partial B} D_{\bar{n}} G_B(x, z)\, d\mu(z) & n \geq 3 \end{cases}$$

Lema 1 *Sea G la función de Green de B.*

Entonces se cumplen:

(i) G_B es simétrica en $B \times B$.

(ii) Para cada $x \in B$, $G_B(x, \cdot)$ es estrictamente positiva en B.

(iii) Para cada $x \in B$, $G_B(x, \cdot)$ es sobrearmónica en B.

(iv) $\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in B}} G_B(x, z) = 0$ para toda $z_0 \in \partial B$ y $x \in B$.

Demostración:

Probémoslo para $n = 2$ (el caso $n \geq 3$ se puede probar de manera análoga).

◇ Demostremos que $\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in B}} G_B(x, z) = 0$ para toda $z_0 \in \partial B$ y $x \in B$.

Para el caso en que $x \neq y$ es inmediato usando la continuidad de la función logaritmo y la definición de x^* ya que si $z_0 \in \partial B$ entonces:

$$\frac{\|y - x\|}{\rho} \frac{\|z_0 - x^*\|}{\|z_0 - x\|} = 1$$

y entonces tenemos que $\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in B}} G_B(x, z) = 0$.

El caso en que $x = y$ es inmedidato de la continuidad de la función logaritmo y de que:

$$\frac{\rho}{\|z - y\|} \longrightarrow 1 \quad \text{cuando } z \longrightarrow z_0 \text{ , } z_0 \in \partial B$$

◇ Demostremos la simetría (i).

Sea $B = B_{y,\rho}$.

Si $x = y = z$, entonces $G_B(x, z) = G_B(z, x) = +\infty$.

Si $x = y$ y $z \in B \sim \{x\}$, entonces $G_B(x, z) = \log\left(\frac{\rho}{\|z - x\|}\right)$ y además:

$$G_B(z, x) = \log \frac{\|y - z\|}{\rho} \frac{\|x - z^*\|}{\|x - z\|} = \log \frac{\|x - z^*\|}{\rho} = \log \frac{\rho}{\|x - z\|} = G(x, z)$$

Consideremos ahora a $x \neq y$, $z \neq y$, y $z \in B \sim \{x\}$.

Sea ϕ el ángulo entre la recta que une x^* y y (o la que une x con y), y la recta que une z con y (o la que una x^* con y). Usando la ley de los cosenos se obtiene:

$$\|y-x\|^2\,\|z-x^*\|^2 = \|z-y\|^2\,\|y-x\|^2 + \rho^4 - 2\rho^2\,\|z-y\|\,\|y-x\|\,\cos\phi$$

De la misma manera se llega a que:

$$\|y-z\|^2\,\|x-z^*\|^2 = \|x-y\|^2\,\|y-z\|^2 + \rho^4 - 2\rho^2\,\|x-y\|\,\|y-z\|\,\cos\phi$$

Entonces

$$G_B(x,z) = \log\frac{\|y-x\|}{\rho}\frac{\|z-x^*\|}{\|z-x\|} = \log\frac{\|y-z\|}{\rho}\frac{\|x-z^*\|}{\|x-z\|} = G_B(z,x)$$

◇ Calculando el laplaciano se demuestra que $G_B(x,\cdot)$ es sobrearmónica.

◇ Del COROLARIO al TEOREMA 11 del Capítulo 1 se demuestra que $G_B(x,\cdot)\geq 0$ en B.

Como $G_B(x,\cdot)$ satisface el principio del mínimo, no puede ser cero en ningún punto de B, ya que sería entonces idénticamente cero. ■

Teorema 1 *Si u tiene segunda parciales continuas en una vecindad de la cerradura de la bola $B = B_{y,\rho}$, entonces:*

(i) para $x \in B$ y $n = 2$:

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B} u(z)\,D_{\hat{n}}G_B(x,z)\,d\sigma(z) - \frac{1}{2\pi}\int_B G_B(x,z)\,\Delta u(z)\,dz$$

(ii) para $x \in B$ y $n \geq 3$:

$$u(x) = -\frac{1}{\sigma_n(n-2)}\int_{\partial B} u(z)\,D_{\hat{n}}G_B(x,z)\,d\sigma(z)$$

$$-\frac{1}{\sigma_n(n-2)}\int_B G_B(x,z)\,\Delta u(z)\,dz$$

Demostración:

Probemos el teorema para $n = 2$.

Supongamos que $x \neq y$.

Sea v_x :

$$v_x(z) = \log\left(\frac{\|y-x\|\,\|z-x^*\|}{\rho}\right)$$

Si aplicamos la identidad de Green a las funciones u y v_x obtenemos que:

$$-\int_B v_x\,\Delta u\,dz = \int_{\partial B}(u\,D_{\hat{n}}\,v_x - v_x\,D_{\hat{n}}\,u)\;d\sigma(z)$$

ya que $\Delta v_x = 0$ en B.

Igualando a cero obtenemos:

$$0 = \int_{\partial B}(v_x\,D_{\hat{n}}\,u - u\,D_{\hat{n}}\,v_x)\;d\sigma(z) - \int_B v_x\,\Delta u\,dz$$

Sumando esta ecuación con el inciso (i) del TEOREMA 2 del Capítulo 1 (sobre la representación de una función con segundas derivadas parciales continuas) obtenemos:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B}\left[\left(\log\frac{\|y-x\|}{\rho}\frac{\|z-x^*\|}{\|z-x\|}\right)D_{\hat{n}}u - u\,D_{\hat{n}}\left(\log\frac{\|y-x\|}{\rho}\frac{\|z-x^*\|}{\|z-x\|}\right)\right]d\sigma(z)$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_B \Delta u\left(\log\frac{\|y-x\|}{\rho}\frac{\|z-x^*\|}{\|z-x\|}\right)dz$$

Ahora, si $z \in \partial B$ sabemos por la inversión que:

$$\frac{\|y-x\|}{\rho}\frac{\|z-x^*\|}{\|z-x\|} = 1$$

Entonces tenemos que para $x \in B \sim \{y\}$:

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B} u(z)\,D_{\hat{n}}G_B(x,z)\,d\sigma(z) - \frac{1}{2\pi}\int_B G_B(x,z)\,\Delta u(z)\,dz$$

Para el caso de $x = y$ basta repetir la demostración anterior definiendo a $v_x = \log\rho$. ∎

DEFINICIÓN

Sea μ es una carga en B (ver el **Apéndice**).

El *potencial de Green* de μ es la función definida por:

$$u(x) = \int_B G_B(x,z)\,d\mu(z) \qquad x \in B$$

a condición de que la integral este definida en B .

COROLARIO

Si u tiene segundas derivadas parciales continuas en una vecindad de $\overline{B}$, entonces u es la suma de una función armónica en B y el potencial de Green de carga μ en B.

TEOREMA *(Bôcher)*

Sea V una vecindad de $x_0 \in E^n$ y sea h armónica y no negativa en $V \sim \{x_0\}$.

Entonces se cumple una de las dos siguientes afirmaciones:

(i) h puede definirse en x_0 de manera que sea armónica en V,

(ii) existe una constante $c > 0$ tal que:

$$h = c\, u_{x_0} + v$$

donde v es armónica en V y u_{x_0} es la armónica fundamental con polo en x_0.

Teorema 2 *Sea $0 < \delta < \rho$.*

Si h es continua en $\overline{B}_{z,\rho} \sim B_{z,\delta}$, armónica en el interior y $h = 0$ en $\partial B_{z,\rho}$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que h tiene una extensión armónica a $B_{z,\rho+\epsilon} \sim \overline{B}_{z,\delta}$.

Demostración:

Para $n = 2$.

Podemos considerar a $h \geq 0$ en $\overline{B}_{z,\rho} \sim B_{z,\delta}$, ya que como h es continua en $\partial B_{z,\delta}$. Entonces la función definida por:

$$v_\alpha(x) = h(x) + \alpha \log(\rho \backslash \|x - z\|)\,,\ x \in \overline{B}_{z,\rho} \sim B_{z,\delta}$$

es estrictamente positiva en $\partial B_{z,\delta}$ para α suficiente mente grande, cero en $\partial B_{z,\rho}$, y armónica en $B_{z,\rho} \sim \overline{B}_{z,\delta}$.

Por lo tanto, por el principio del mínimo, $v_\alpha > 0$ en $B_{z,\rho} \sim B_{z,\delta}$ para alguna α.

Si v_α puede extenderse armónicamente sobre $\partial B_{z,\rho}$, entonces h también ya que $\alpha \log(\rho \backslash \|x - z\|)$ es armónica en $\sim \overline{B}_{z,\delta}$.

Consideremos entonces que $h \geq 0$ en $\overline{B}_{z,\rho} \sim B_{z,\delta}$.

Sea y cualquier punto de $\partial B_{z,\rho}$. Consideremos la inversión relativa a $\partial B_{y,2\rho}$ (ver el Apéndice).

Bajo esta inversión la bola $B_{z,\rho}$ se mapea en el semiplano R con ∂R tangente a $B_{z,\rho}$.

Además $B = B_{z,\delta}$ se mapea en la bola B^* con cerradura $\overline{B^*} \subset R$. y $B_{z,\rho} \sim \overline{B}_{z,\delta}$ en $R \sim \overline{B^*}$.

La *transformada de Kelvin* (ver el Apéndice) h^* de h es continua en $R \sim B^*$, es armónica en $R \sim \overline{B^*}$ y es cero en ∂R.

Nótese que $h \geq 0$.

Restrinjamos h^* a $R \sim \overline{B^*}$.

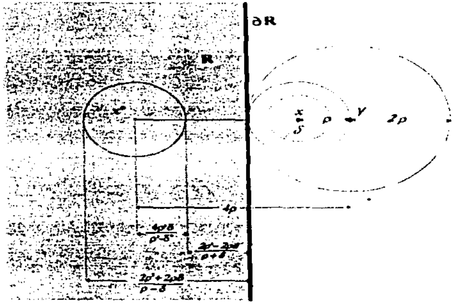

Figura 2-1: La inversión con respecto de $\partial B_{y,2\rho}$.

Se puede demostrar (Helms) que h^* tiene una extensión armónica, definida en base a su reflexión sobre ∂R (que denotaremos también como h^*), sobre $E^n \sim (\overline{B^*} \cup (\overline{B^*})^r)$, donde $(\overline{B^*})^r$ es la reflexión de $\overline{B^*}$ sobre ∂R.

Nótese que $\sim (\overline{B^*})^r$ se mapea bajo la inversión en una bola conteniendo a $\overline{B}_{x,\rho}$ en su interior, y que $h^* \leq 0$ en $(R \sim \overline{B^*})^r$.

Entonces existe una $\epsilon > 0$ tal que $B_{x,\rho+\epsilon}$ es un subconjunto de la imagen de $\sim \overline{B^*}^r$ bajo la inversión.

Sea h^{**} la restricción de la transformada de Kelvin de h^* a $B_{x,\rho+\epsilon} \sim \overline{B}_{x,\rho} \sim \{y\}$ (y no es la imagen de ningún punto de $E^n \sim (\overline{B^*} \cup \overline{B^*}^r)$). Entonces h^{**} es una extensión armónica de h a $B_{x,\rho+\epsilon} \sim \overline{B}_{x,\delta} \sim \{y\}$.

Como $h^* \leq 0$ en $(R \sim \overline{B^*})^r$, entonces $h^{**} \leq 0$ en $B_{x,\rho+\epsilon} \sim \overline{B}_{x,\rho}$.

Como $\lim_{\substack{z \to y \\ z \in B_{x,\rho} \sim \overline{B}_{x,\delta}}} h(z) = 0$, h^{**} es acotada superiormente en $W \sim \{y\}$ para alguna vecindad W de y .

Se sigue del TEOREMA 1 (de este capítulo) que $h^{**} = w + c\,u_y$ en $W \sim \{y\}$ para alguna constante $c \leq 0$ y alguna función armónica w en W .

Ahora, $c = 0$ ya que de otra manera tendríamos que $\lim_{\substack{z \to y \\ z \in B_{x,\rho} \sim \overline{B}_{x,\delta}}} h^{**}(z) = -\infty$. Entonces h^{**} puede definirse en y de manera que sea armónica en W y por lo tanto h puede ser extendida armónicamente a $B_{x,\rho+\epsilon} \sim \overline{B}_{x,\delta}$. ■

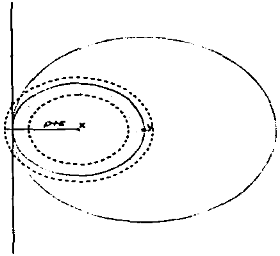

Figura 2-2: El conjunto $B_{x,\rho+\epsilon}$.

2.1.1 Función de Green para regiones

Los resultados que hemos obtenido para las funciones de Green definidas sobre bolas pueden ser extendidos a regiones.

DEFINICIÓN

Sea R un subconjunto abierto de E^n . Denotemos a los reales extendidos $[-\infty, +\infty]$ por $\mathbb{R}^*$.

Sea $x \in R$.

Sea u_x la función armónica fundamental en R con polo en x .

(En la siguiente definición $h_x(\cdot)$ es cualquier función armónica en R y depende de $x \in R$ y $\nu_x(\cdot)$ es cualquier función sobrearmónica no negativa en R y depende de $x \in R$).

Una *función de Green* para el abierto R es una función G_R :

$$G_R : R \times R \longrightarrow \mathbb{R}^*$$

con las siguientes propiedades:

(i) $G_R(x, \cdot) = u_x + h_x$ en R y para cada $x \in R$.

(ii) $G_R \geq 0$ en $R \times R$.

(iii) Si para $x \in R$ la función ν_x es sobrearmónica no negativa en R y es la suma de la armónica fundamental con polo en $x : u_x$, más otra función sobrearmónica cualquiera, entonces $\nu_x \geq G_R(x, \cdot)$.

Es decir, para cada $x \in R$ una función de Green $G_R(x, \cdot)$ es el mínimo en la clase de las funciones sobrearmónicas no negativas de la forma $u_x + w_x$, donde $w_x(\cdot)$ es sobrearmónica en R y depende de $x \in R$, y $u_x(\cdot)$ es la armónica fundamental en R con polo en x .

Teorema 3 *La función de Green G_R para el abierto R es única (si ella existe).*

Demostración:

Sea G'_R otra función de Green para R. Por la propiedad (iii) de la definición de función de Green, $G_R \geq G'_R$ y $G'_R \geq G_R$. ■

Enunciemos algunos resultados importantes para las funciones de Green definidas en un abierto R (que no necesariamente es una bola):

◇ Sean R abierto con función de Green G_R y B una bola tal que $x \in B$ y $\bar{B} \subset R$. Entonces $G_R(x, \cdot)$ está acotada fuera de B.

◇ E^2 no tiene función de Green .

◇ Sea R abierto de E^n. Entonces R tiene función de Green si tiene una de las siguientes características:

(i) Si $n > 2$. En este caso $G_R(x, y) = u_x(y)$ la armónica fundamental con polo en x .

(ii) Si $n = 2$ y R es acotado.

(iii) Si $n = 2$ y R es subconjunto de un conjunto que tenga función de Green.

De hecho si A tiene función de Green G_A y A_0 es una componente de A, entonces

$$G_{A_0} = G_A|_{A_0 \times A_0}$$

Además

$$G_A(x, y) = 0, \text{ si } x \in A_0 \text{ y } y \in A \sim A_0$$

(iv) Si R es no denso en todas partes en E^2 o si es no conexo en E^2.

◇ Si $R_1 \subset R_2$ son abiertos con funciones de Green G_{R_1} y G_{R_2}, entonces $G_{R_1} \leq G_{R_2}$ en $R_1 \times R_1$.

◇ Si R tiene función de Green, entonces $G_R(x, y) = G_R(y, x)$ para todas $x, y \in R$.

En particular $G_R(\cdot, y)$ es armónica en $R \sim \{y\}$ para cada $y \in R$.

◇ Si R tiene función de Green G_R, entonces G_R es continua en $R \times R$. Si $\overline{B}_{x,\delta} \subset R$, entonces $L(G_R(\cdot, z) : x, \delta)$ es una función continua de $z \in R$.

Ejemplo 1 (Las im0xel genes electrost0xel ticas) *La función de Green se introdujo, en la búsqueda de soluciones del Problema de Dirichlet, por el estudio de las funciones del tipo:*

$$\frac{1}{\|x - z\|^{n-2}} + v_z$$

para $x \in R$, v_z *es armónica en* R *(y depende de* x*)* *y* $z \in \partial R$.

Entonces el problema se reduce a encontrar a v_z para determinar completamente a la función de Green.

El *Método de las imágenes electrostáticas* es usado en física para determinar a la función de Green de algunas regiones. Aquí obtendremos las funciones de Green para la bola y para el disco através de este método.

Supongamos que tenemos una superficie conductora cerrada Σ conectada a *tierra*, es decir, con potencial cero (*ver ejemplo de potencial*). Si ponemos una carga puntual en el interior de Σ esta carga induce cargas en el conductor de tal manera que el potencial total de la carga puntual y de las cargas inducidas vale cero en Σ.

FUNCIÓN DE GREEN PARA LA ESFERA ($n = 3$).

Tomemos a $x = M_0$, a $z = P$ y a $\|P - M_0\| = r$.

En electrostática la función de Green:

$$G(M_0, P) = \frac{1}{r} + v_{M_0}$$

representa el potencial en el punto P generado por una carga puntual situada en M_0 dentro de la superficie conductora Σ.

El primer término $\frac{1}{r}$ resulta ser el potencial generado por la presencia de la carga en el punto M_0.

El segundo término v_{M_0} representa el potencial inducido en el conductor Σ.

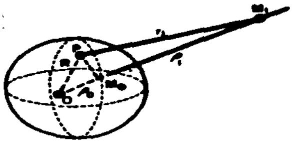

Figura 2-3: Función de Green para la bola en E^3 .

El método considera a este potencial como si fuera generado por cargas situadas fuera de Σ. Bajo las condiciones de que $\nabla^2 v_{M_0} = 0$ y, para que el potencial total se anule en Σ, $v_{M_0}|_\Sigma = -\frac{1}{r}$.

De esta manera podemos decir que la determinación de la función de Green se reduce a encontrar el potencial inducido.

Supongamos que nuestra esfera está centrada en el origen O y tiene radio R.

Coloquemos una carga puntual en M_0.

Sea $\rho_0 = \|M_0 - O\|$.

Tomemos una carga exterior en M_1 de manera que M_0 y M_1 sean colineales y que, si $\rho_1 = \|M_1 - O\|$, se cumpla la relación:

$$\rho_0 \, \rho_1 = R^2$$

Es decir, M_1 es el conjugado de M_0.

Sea P cualquier punto sobre la esfera. Sean $r_0 = \|P - M_0\|$ y $r_1 = \|P - M_1\|$.

Los triángulos OPM_0 yOPM_1 son semejantes ya que tienen un ángulo común y los lados adyacentes a este ángulo son proporcionales:

$$\frac{\rho_0}{R} = \frac{R}{\rho_1}$$

Entonces podemos escribir:

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{\rho_0}{R} = \frac{R}{\rho_1}$$

De esta manera la función armónica $v = -\frac{R}{\rho_0 \, r_1}$ toma los mismos valores que la función $\frac{1}{r_0}$ en la esfera. v representa el potencial de una carga de valor $-\frac{R}{\rho_0}$ situada en el punto M_1.

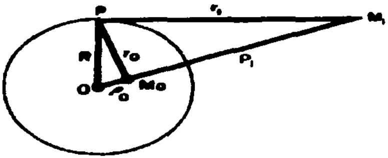

Figura 2-4: Función de Green para el disco

Es decir, la función:

$$G(M_0, P) = \frac{1}{r_0} - \frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_1}$$

es la función de Green para la esfera.

FUNCIÓN DE GREEN PARA LA CIRCUNFERENCIA ($n = 2$).

En este caso la función de Green debe ser de la forma

$$\ln\frac{1}{r} + v$$

Siguiendo nuevamente el método de las imágenes electrostáticas, colocamos una carga en M_1 de manera que sea el conjugado de M_0 y luego consideramos a P cualquier punto sobre la circunferencia.

De esta manera encontramos que

$$G(M_0, P) = \ln\frac{1}{r_0} - \ln\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_1}$$

2.2 POTENCIALES DE GREEN

Físicamente una función potencial representa la energía por unidad de masa (o de carga) en un punto de E^n debido a una distribución de masa (o de carga) en el espacio.

En esta sección se obtendrá un teorema de representación para funciones sobrearmónicas en base a los potenciales de Green: el *teorema de Riez*.

De la sección anterior se desprende que si u es sobrearmónica con segundas derivadas parciales continuas en una vecindad de la cerradura de la bola $B = B_{y,\rho} \subset E^n$ y $n \geq 3$, entonces para $x \in B$ tenemos que u puede escribirse como:

$$
\text{(a)} \quad
\begin{aligned}
u(x) = & -\frac{1}{\sigma_n \times (n-2)} \int_{\partial B} u(z)\, D_{\hat{n}} G_B(x,z)\, d\sigma(z) \\
& -\frac{1}{\sigma_n \times (n-2)} \int_B G_B(x,z)\, \Delta u(z)\, dz
\end{aligned}
$$

El primer término del miembro derecho de (a) es $IP(u, B)$ y representa una función armónica en B.

Recordando que $G(x,\cdot) = u_x + h_x$, donde h_x es una función armónica en B, el segundo término del lado derecho de (a) puede escribirse:

$$
\text{(b)} \qquad \frac{1}{\sigma_n \times (n-2)} \int_B u_x(z)\, \Delta u(z)\, dz - \frac{1}{\sigma_n(n-2)} \int_B h_x(z)\, \Delta u(z)\, dz
$$

En esta sección se demostrará que el primer término de la ecuación (b) es precisamente el potencial por unidad de masa en el punto x debido a la distribución de masa de densidad Δu sobre B y que el segundo término es una función armónica en B.

Es decir, se demostrará que una función sobrearmónica u con segundas parciales continuas se puede representar como la suma de una función armónica más una "función potencial".

2.2.1 Potenciales de Green

DEFINICIÓN

Sea R un subconjunto abierto de E^n con función de Green G. Si μ es una carga en R, entonces la función:

$$
G\mu(x) = \int_R G(x,y)\, d\mu(y)
$$

es el *potencial de Green* de μ si está definida $\forall x \in R$.

Si μ es una medida en R y $G\mu$ es sobrearmónica en R, entonces $G\mu$ es llamado el *potencial* de μ.

Lema 2 *Sea μ una medida en el abierto R y sea G la función de Green de R (si ésta existe). Entonces $G\mu$ es sobrearmónica o idénticamente $+\infty$ en cada componente de R.*

Demostración:

Sea $\{U_j\}$ una sucesión creciente de subconjuntos de R con cerraduras compactas $\overline{U}_j \subset R$ tal que $R = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$.

Para cada $x \in R$ definamos:

$$G_j^*(x,\cdot) = \min\,[G(x,\cdot), j]$$

$$u_j(x) = \int_{U_j} G_j^*(x,y)\, d\mu(y)$$

Como μ es una medida de Borel entonces $\mu(U_j) \leq \mu(\overline{U}_j) \leq +\infty$.

Usando la simetría de la función de Green G y la continuidad (extendida) de $G(x,\cdot)$ en R , tenemos que $G(x_i,\cdot) \to G(x,\cdot)$ cuando $x_i \to x$ .La G_j^* herada esta propiedad.

Ahora, como G_j^* está acotada por j , usando el *Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue,* obtenemos que cuando $x_i \to x$:

$$u_j(x_i) = \int_{U_j} G_j^*(x_i,y)\, d\mu(y)$$

$$\to \int_{U_j} G_j^*(x,y)\, d\mu(y) = u_j(x)$$

Por lo tanto cada u_j es continua en R .

Ahora, como $U_j \uparrow R$ y $G_j^*(x,\cdot) \uparrow G(x,\cdot)$ cuando $j \to \infty$, usando el *Teorema de la convergencia monótona* obtenemos que $u_j \uparrow G\mu$ cuando $j \to \infty$ .Es decir, $G\mu$ es el límite de una sucesión creciente de funciones continuas.

Por lo tanto es s.c.i. en R .

Usando nuevamente la simetría de G, obtenemos que $G(\cdot,y)$ es sobrearmónica en R para cada y.

Ahora para cada $\overline{B}_{x,\delta} \subset R$:

$$L(G\mu : x,\delta) = L\left(\int_R G(\cdot,y)\, d\mu(y) : x,\delta\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma_n \delta^{n-1}} \int_{\partial B_{x,\delta}} \left(\int_R G(z,y)\, d\mu(y)\right)\, d\sigma(z)$$

y como G es continua en $R \times R$, podemos aplicar el teorema de Fubini:

$$L(G\mu : x, \delta) = \int_R L(\int_R G(\cdot, y) : x, \delta)\, d\mu(y)$$

$$\leq \int_R G(x,y)\, d\mu(y) = G\mu(x)$$

En conclusión $G\mu$ es no negativa en R, es s.c.i. en R y supera al promedio en R, por lo tanto sobrearmónica en cualquier componente en la que no sea idénticamente $+\infty$. ∎

Lema 3 *Sea el abierto R con función de Green G .*

Si μ es una medida en R tal que $\mu(R) < +\infty$ y $\mu(B) = 0$ para alguna bola $\overline{B} \subset R$, entonces $G\mu$ es sobrearmónica en la componente de R que contiene a B.

Demostración:

Sea x el centro de la bola B .

Sabemos que $G(x, \cdot)$ es acotado fuera de B.

Como $\mu(B) = 0$, entonces:

$$G\mu(x) = \int_R G(x,y)\, d\mu(y) = \int_{R-B} G(x,y)\, d\mu(y) < +\infty$$

Por lo tanto $G\mu$ no es idénticamente $+\infty$ en la componente de R que contenga a B.

Además, por el lema anterior, $G\mu$ es sobrearmónica ahí. ∎

Teorema 4 *Sea el abierto R con función de Green G.*

Si μ es una medida en R tal que $\mu(R) < +\infty$, entonces $G\mu$ es un potencial.

Demostración:

Consideremos conexo a R .

Tomemos una $x \in R$ cualquiera y una bola $B = B_{x,\delta}$ con $\overline{B} \subset R$.

Podemos entonces descomponer a μ como:

$$\mu = \mu|_B + \mu|_{R\sim B}$$

donde $\mu|_B$ y $\mu|_{R\sim B}$ son medidas que se anula en $R \sim B$ y B respectivamente.

Es claro que $G\mu = G\,\mu|_B + G\,\mu|_{R\sim B}$.

Como $\mu|_{R\sim B}(B) = 0$ y $\mu|_{R\sim B}(R) < +\infty$, entonces $G\,\mu|_{R\sim B}$ es sobrearmónica en R.

Por otro lado, ya que $\overline{B} \subset R$,entonces existe una bola cerrada $\overline{B}_1 \subset R \sim \overline{B}$ tal que $\mu|_B(B_1) = 0$.

Como $\mu|_B(R) < +\infty$,tenemos que $G\,\mu|_B$ es sobrearmónica en R.

Usando el hecho de que la suma de funciones sobrearmónicas es sobrearmónica, obtenemos que $G\mu = G\,\mu|_B + G\,\mu|_{R\sim B}$ es sobrearmónica.

Supongamos que R no es conexo, y sea $R = \cup_j R_j$, donde $\{R_j\}$ es la colección de las componentes de R.

Sea $\mu_j = \mu|_{R_j}$. Entonces $\mu_j(R_j) < +\infty$ Sabemos que la función de Green G_{R_j} para R_j es precisamente la restricción de G a $R_j \times R_j$.

Como $G(x,\cdot)$ se anula fuera de la componente que contiene a x , entonces para $x \in R_j$ tenemos que:

$$G\mu(x) = \int_R G(x,y)\,d\mu(y) = \int_{R_j} G(x,y)\,d\mu(y) = G_{R_j}\mu_j(x)$$

Por lo que se demostró má arriba, $G_{R_j}\mu_j$ es sobrearmónica en R_j y por lo tanto $G\mu$ es sobrearmónica en cada R_j . ■

DEFINICIÓN

Sea μ una medida con soporte compacto sobre E^2 .

El *potencial logarítmico* de μ sobre E^2 es:

$$U^\mu(x) = -\int_{E^2} \log\|x-y\|\; d\mu(y) \qquad \text{para } x \in E^2$$

Sea μ una medida con soporte compacto sobre E^n .

El *potencial newtoniano* de μ sobre E^n es:

$$U^\mu(x) = \int_{E^n} \frac{1}{\|x-y\|^{n-2}}\,d\mu(y) \qquad x \in E^n$$

OBSERVACIÓN

Ambos potenciales son sobrearmónicos.

OBSERVACIÓN

Si R es un abierto con función de Green G_R y si μ es una medida con soporte compacto en R , entonces U^μ y $G_R\mu$ difieren en R por una función armónica.

Esto se sigue de la ecuación:

$$G_R\mu(x) = \int u_x(y)\, d\mu(y) + \int h_x(y)\, d\mu(y)$$

donde $G_R(x,\cdot) = u_x + h_x$ en R . Se verá que la segunda integral es armónica.

DEFINICIÓN

Sea el abierto R .

Sea u una función sobrearmónica $u : R \to B$.

Sea la función armónica $h : R \to B$.

Se dice que h es *minorante armónico* de u si:

$$h \leq u \qquad \text{en } R$$

Se dice que η es un *mayor minorante armónico* (*m.m.a.*) de u si:

$$\eta \leq h \qquad \text{en } R \text{ para toda } h \text{ minorante armónico de } u$$

TEOREMA

Sea R abierto con función de Green G y sea $G\mu$ el potencial de una medida μ .

Entonces el m.m.a. de $G\mu$ es cero.(Helms).

COROLARIO

Si R es un abierto con función de Green G y el potencial $G\mu$ de una medida μ es armónico en R, entonces μ es la medida cero.

Teorema 5 *Sea R abierto con función de Green G .*

Sea μ una medida en R .

Si $G\mu$ es el potencial de μ , entonces $G\mu$ es armónico en cualquier conjunto abierto de medida μ cero.

Demostración:

Sea U un subconjunto abierto no vacío de R tal que $\mu(U) = 0$.

Entonces para cualquier $x \in R$ tenemos que:

$$G\mu(x) = \int_R G(x,y)\,d\mu(y) = \int_{R\sim U} G(x,y)\,d\mu(y)$$

Supongamos que $\overline{B}_{x,\delta} \subset U$. Usando el *teorema de Fubini*:

$$A(G\mu : x,\delta) = A\left(\int_{R\sim U} G(\cdot,y)\,d\mu(y) : x,\delta\right)$$

$$= \int_{R\sim U} A\left(G(\cdot,y) : x,\delta\right)\,d\mu(y)$$

Ahora, para $y \in R \sim U$, sabemos que $G(\cdot,y)$ es armónica en U .

Por otro lado, como $\overline{B}_{x,\delta} \subset U$, entonces $A\left(G(\cdot,y) : x,\delta\right) = G(x,y)$ y

$$A(G\mu : x,\delta) = \int_{R\sim U} G(x,y)\,d\mu(y) = G\mu(x)$$

Como $G\mu$ es localmente integrable, tenemos que $G\mu$ es continua en U.

Por lo tanto $G\mu$ es armónica en U. ■

OBSERVACIÓN

Sean U y V abiertos de E^n , sea μ una medida de en U, y sea H una función no negativa en $U \times V$.

Si se cumplen las tres siguientes condiciones:

(i) $H(\cdot,y)$ es continua en U para cada $y \in V$,

(ii) $H(x,\cdot)$ es armónica en V para cada $x \in U$,

(iii) $h(y) = \int_U H(x,y)\,d\mu(x) < +\infty$.

Entonces h es armónica en V .

Teorema 6 *Sea R un abierto con función de Green G_R .*

Sea S un subconjunto abierto de R con función de Green G_S .

Y sean μ una medida en R , tal que $\mu(R \sim S) = 0$ y $G_R\mu$ potencial.

Entonces hay una función armónica no negativa h en S tal que:

$$G_R\mu = G_R\,\mu|_S + h \qquad \text{en } S$$

Demostración:

Como $S \subset R$ entonces $G_S \leq G_R$ en $S \times S$.

Entonces para cada $x \in S$ tenemos que:

$$G_R \, \mu|_S \,(x) = \int_S G_S(x,y)\, d\mu(y) \leq \int_S G_R(x.y)\, d\mu(y) = G_R\mu(x)$$

De aquí se sigue que $G_R \, \mu|_S$ es un potencial.

Ahora, debido a que $G_R\mu$ es sobrearmónica , tenemos que es finita c.t.p. en S .

Entonces se cumple, excepto quizás para un subconjunto de S de medida cero, que:

$$G_R\mu(x) - G_R \, \mu|_S \,(x) = \int_S [G_R(x,y) - G_S(x,y)]\, d\mu(y)$$

Además sabemos que $G_R(x,y) = u_x(y) + h_x(y)$ y $G_S(x.y) = u_x(y) + h'_x(y)$ donde h_x y h'_x son armónicas en R y S respectivamente.

Como $G_R(x.y)$ y $u_x(y)$ son simétricas, entonces $h_x(y)$ junto con $h'_x(y)$ son simétricas.

Por lo tanto, para $x \neq y$, tenemos que

$$G_R(x,y) - G_S(x,y) = H_y(x) \geq 0$$

donde $H_y(x)$ es la función simétrica $h_x(y) - h'_x(y)$.

Hay que notar que $H_y(\cdot)$ es armónica en S para cada $y \in S$ y que, para cada $x \in S$, $H_y(x)$ es armónica en S y por lo tanto continua en S.

Supongamos que $\overline{B}_{x,\delta} \subset S$. Entonces:

$$A\,(G_R(\cdot,y) - G_S(\cdot,y) : x,\delta) = A(H_y : x,\delta) = H_y(x)$$

y aplicando el teorema de Fubini obtenemos que:

$$+\infty > A\,(G_R\mu - G_S \, \mu|_S : x,\delta) = \int_S A\,(G_R(\cdot,y) - G_S(\cdot,y) : x,\delta)\; d\mu(y)$$

$$= \int_S A\,(H_y : x,\delta)\; d\mu(y)$$

$$= \int_S H_y(x)\, d\mu(y)$$

Por la observación anterior esta última integral es armónica.

Escribamos la igualdad anterior de la siguiente manera:

$$A\,(G_R\mu : x,\delta) = A\,(G_S\ \mu|_S : x,\delta) + \int_S H_y(x)\ d\mu(y)$$

Sabemos que los promedios tienden a $G_R\mu(x)$ y $G_R\ \mu|_S\,(x)$ respectivamente cuando $\delta \downarrow 0$. Por lo tanto obtenemos:

$$G_R\mu(x) = G_R\ \mu|_S\,(x) + \int_S H_y(x)\ d\mu(y) \qquad \text{en } S$$

■

Teorema 7 *Sea R abierto con función de Green G. Si $G\mu$ es el potencial de la medida μ y es armónico en el abierto $W \subset R$, entonces $\mu(W) = 0$.*

Demostración:

Como $G\mu$ puede descomponerse:

$$G\mu = G\ \mu|_W + G\ \mu|_{R\sim W}$$

y $G\ \mu|_{R\sim W}$ es armónica en W (por el TEOREMA 25), entonces $G\ \mu|_W$ resulta ser armónica en W .

Además por el teorema anterior

$$G\ \mu|_W = G_W\ \mu|_W + h$$

donde G_W es la función de Green para W y h es armónica en W .

Esto implica que $G_W\ \mu|_W$ es armónica en W .

Sabemos que si A es un abierto con función de Green G, y el potencial $G\mu$ de una medida μ es armónico, entonces μ es la medida cero.

Por lo tanto $\mu|_W = \mu(W) = 0$. ■

Ejemplo 2 (El potencial gravitacional) *Un campo de fuerzas conservativo es aquel donde el trabajo W efectuado entre dos puntos P y P_0 es independiente de la trayectoria que se sigue. Es decir:*

$$W(P,P_0) = \int_\Gamma \vec{E}\ ds = \int_\Gamma \nabla\phi\, ds = \phi(P) - \phi(P_0)$$

donde ϕ es la función de potencial, Γ es cualquier curva que va de P_0 a P sobre la cual estamos calculando la integral de línea.

Esta condición equivale a que el laplaciano de la función potencial se anule:

$$\nabla^2\phi = 0$$

Ejemplos de campos conservativos son el gravitacional y el electrostático.

POTENCIAL NEWTONIANO ($n = 3$).

En el caso de elementos atrayéndose o repeliéndose de a cuerdo con la *Ley de Newton* (**Kellogg**) el potencial se define como el trabajo efectuado por el campo de fuerza (en el caso de campos conservativos el campo $\overrightarrow{E} = \nabla\phi$) para acercar un elemento desde el infinito hasta el punto P (en este caso P_0 es el punto al infinito).

Y se fija $\phi(P_0 = \infty) = 0$.

La Ley de Newton del inverso de los cuadrados dice precisamente que el campo de fuerza $\overrightarrow{E}$ sobre un elemento unitario situado en $P(x, y, z)$ debido a otro elemento en $Q(\xi, \eta, \zeta)$ es:

$$\overrightarrow{E} = \kappa\frac{\widehat{r}}{r^2}$$

donde $r = \left\|\overrightarrow{P-Q}\right\|$, $\widehat{r} = \dfrac{\overrightarrow{P-Q}}{r}$ (es decir es el vector unitario) y κ es una constante que queda definida por el tipo de campo y la magnitud del elemento en Q .

Es fácil ver que el potencial ϕ que genera este campo es:

$$\phi = \kappa\frac{1}{r}$$

para ello calculamos el gradiente de ϕ :

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \kappa\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\right)\\ &= \kappa\left(\frac{\xi - x}{r^3}, \frac{\eta - y}{r^3}, \frac{\zeta - z}{r^3}\right)\\ &= \kappa\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\overrightarrow{P-Q}}{r} = \kappa\frac{1}{r^2}\cdot\widehat{r} = \overrightarrow{E}\end{aligned}$$

2.2.2 Descomposición de Riez de funciones sobrearmónicas

De acuerdo con el *Teorema de descomposición de Riez* toda función sobrearmónica no negativa puede representarse como la suma de un potencial más una función armónica.

Teorema 8 (Teorema de reciprocidad) *Sea R un abierto de E^n con función de Green G y sean μ, ν dos medidas en los subconjuntos de Borel de R.*

Entonces:

$$\int_R G\mu \, d\nu = \int_R G\nu \, d\mu$$

Demostración:

Usando el teorema de Fubini y la simetría de la función de Green tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_R G\mu \, d\nu &= \int_R \left(\int_R G(x,y) \, d\mu(y)\right) d\nu(x)\\ &= \int_R \left(\int_R G(x,y) \, d\nu(x)\right) d\mu(y)\\ &= \int_R \left(\int_R G(y,x) \, d\nu(x)\right) d\mu(y)\\ &= \int_R G\nu(y) \, d\mu(y)\end{aligned}$$

■

TEOREMA

Dada u función sobrearmónica en el abierto R, y dado W subconjunto abierto de R con cerradura compacta $\overline{W} \subset R$, existe una única medida μ en W tal que $u = G_W\mu + h$, donde h es el mayor minorante armónico de u en W. **(Brelot)**

Teorema 9 (*Teorema de descomposición de Riesz*) *Sea R un abierto de E^n con función de Green G y sea u una función sobrearmónica en R.*

Entonces existe una única medida ν en R tal que si W es un subconjunto abierto con cerradura compacta en R, y

$$u = G_W \, \nu|_W + h_W$$

donde h_W es el mayor minorante armónico de u en W.

Si además $u \geq 0$ en R , entonces

$$u = G\nu + h$$

donde h es el mayor minorante armónico de u en R .

Demostración:

Sea $\{R_j\}$ una sucesión creciente de conjuntos abiertos con cerraduras compactas en R tal que $R = \cup_j R_j$.

Sean ν_j y h_j una medida y una función armónica, respectivamente, en R_j .

Por la observación anterior sabemos que $u = G_{R_j}\nu_j + h_j$ en R_j .

Por otro lado en **Helms** se demuestra que ν_j y ν_{j+k} coinciden en los subconjuntos de Borel de R_j para toda $k \geq 1$.

Si M es un subconjunto de Borel de R , entonces $\{\nu_j(R_j \cap M)\}$ es una sucesión no decreciente y podemos definir

$$\nu(M) = \lim_{j\to\infty} \nu_j(R_j \cap M)$$

Si extendemos a ν_j de manera que sea cero en $\sim R_j$, entonces ν resultará ser el límite de una sucesión creciente de medidas y, por lo tanto, es una medida (ver el **Apéndice**).

Si M es un subconjunto de Borel de R_j, entonces:

$$\nu_j(R_j \cap M) = \nu_j(M) = \nu_{j+k}(M) = \nu_{j+k}(R_{j+k} \cap M) \qquad \text{para } k \geq 1$$

y por lo tanto $\nu(M) = \nu_j(M)$ .Es decir $\nu_j = \nu|_{R_j}$.

Ahora, sea W un abierto con cerradura compacta $\overline{W} \subset R$ y sea $u = G_W\ \nu|_W + h_W$ la descomposición de la observación anterior.

Sea j_0 tal que $W \subset R_j$ para toda $j \geq j_0$ y consideremos sólo esas j's.

Como $u = G_{R_j}\nu_j + h_j$ en R_j con h_j armónica en R_j y $G_{R_j}\nu_j = G_{R_j}\ \nu_j|_W + G_{R_j}\ \nu_j|_{R_j \sim W}$, con este último potencial armónico en W, entonces:

$$u = G_{R_j}\ \nu_j|_W + h'_j$$

con h'_j armónica en W .

Comparando $G_{R_j}\ \nu_j|_W$ con $G_W\ \nu_j|_W$, tenemos que u puede escribirse:

$$u = G_W\ \nu_j|_W + h''_j$$

con h''_j armónica en W .

Se sigue de la unicidad de la representación de u en W que $\nu_W = \nu_j|_W = \nu|_W$.

Ahora supongamos que $u \geq 0$ en R .

Entonces $u = G_{R_j}\ \nu|_{R_j} + h_j$ en R_j con h_j armónica ahí.

Como $G_{R_j} \leq G_{R_{j+1}}$ en $R_j \times R_j$, para $x \in R_j$ tenemos que:

$$G_{R_j}\ \nu|_{R_j}(x) = \int_{R_j} G_{R_j}(x,y)\, d\nu(y)$$

$$\leq \int_{R_{j+1}} G_{R_{j+1}}(x,y)\, d\nu(y) = G_{R_{j+1}}\ \nu|_{R_{j+1}}(x)$$

y entonces la sucesión $\left\{G_{R_{j+k}}\ \nu|_{R_{j+k}}\right\}$ es creciente en R_j .

Se aquí se sigue, tomando los máximos minorantes armónicos, que $h_j \geq 0$.

La sucesión $\{h_{j+k}\}_{k\geq 1}$ es una sucesión decreciente de funciones armónicas no negativas en R_j cuyo límite existe y es armónico enR_j .

Podemos por lo tanto definir una función armónica $h = \lim_{k\to\infty} h_{j+k}$ en R_j , para toda j. Se sigue que $u = G\nu + h$ en R .

Como el mma de $G\nu$ es la función cero, entonces h es el mma de u . ■

COROLARIO

Sea R abierto con función de Green G .

Una función sobrearmónica positiva u definida en R es potencial de una medida si y sólo si su m.m.a es cero.

Veamos ahora un teorema que muestra que las discontinuidades de un potencial pueden ser removidas "quitando" una pequeña parte de la medida.

TEOREMA *(Evans y Vasilesco)*

Sea R abierto con función de Green G , sea μ una medida con soporte compacto $K \subset R$, y sea $v = G\mu$.

Si $v|_K$ es continua en $x_0 \in K$, entonces v es continua en x_0.

Teorema 10 *Sea R un abierto con función de Green G y sea μ una medida con soporte compacto $K \subset R$ tal que $G\mu < +\infty$ en K .*

Entonces dada $\epsilon > 0$ existe un conjunto compacto $C \subset K$ tal que:

(i) $\mu(K \sim C) < \epsilon$

(ii) $G\,\mu|_C < +\infty$ *en* C

(iii) $G\,\mu|_C$ *es continua en* R .

Demostración:

Consideremos el potencial $G\mu$.

Por el *teorema de Luzin* (ver el **Apéndice**), dada $\epsilon > 0$ existe un compacto $C \subset K$ tal que $\mu(K \sim C) < \epsilon$ y tal que la restricción de $G\mu$ a C es continua en C .

Pongamos $G\mu = G\,\mu|_C + G\,\mu|_{K\sim C}$.

Ahora, por su definición $G\,\mu|_{K-C}$ es s.c.i., entonces $G\,\mu|_C = G\mu - G\,\mu|_{K\sim C}$ resulta ser s.c.s. en C cuando está restringida a C .

También por su definición $G\,\mu|_C$ es s.c.i. en C . Por lo tanto $G\,\mu|_C$ restringida a C es continua en C .

Usando el *teorema de Evans y Vasilesco*, se concluímos que $G\,\mu|_C$ es continua en C .

Por lo tanto, ya que $G\,\mu|_C$ es armónica en $R \sim C$, tenemos que $G\,\mu|_C$ es continua en R . ∎

OBSERVACIÓN

Si R es un abierto con función de Green G y si f es una función acotada Lebesgue integrable en R , entonces Gf es continua en R .

Entre las propiedades de los potenciales de Green para R una región, podemos destacar las siguientes:

◇ Si μ es una medida con soporte compacto K en una bola B , entonces el $\lim_{x\to x_0} G_B\mu(x) = 0$ para toda $x_0 \in \partial B$.

◇ Sea R abierto y conexo con función de Green G y con medida de Lebesgue finita (para $n = 2$ pedimos que R esté acotado).

Si f es una función acotada medible en R y si $\lim_{\substack{x\to z_0\\ x\in R}} G(x, z_0) = 0$ para alguna $z_0 \in R$, entonces:

$$\lim_{\substack{x\to z_0\\ x\in R}} Gf(x) = 0$$

DEFINICIÓN

El *laplaciano generalizado* de una función u definida en el abierto R está dado por:

$$\tilde{\Delta} u = \lim_{\delta\downarrow 0}\, 2n\, \frac{L(u : x, \delta) - u(x)}{\delta^2}$$

Si u tiene segundas derivadas parciales continuas entonces $\Delta u = \tilde{\Delta} u$.

◇ Sea κ_n la constante definida por:

$$\kappa_n = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = 2 \\ \sigma_n & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

Si R es un abierto con función de Green G y f es una función acotada, continua y Lebesgue-integrable en R, entonces la ecuación generalizada de Laplace:

$$\widetilde{\Delta} u = -\kappa_n f$$

tiene solución $u = Gf$.

◇ Si u es continua en el abierto R y $\widetilde{\Delta} u = 0$ en R, entonces u es armónica en R.

Capítulo 3

CAPACIDAD Y BALAYAGE

3.1 CAPACIDAD

La *capacidad* es un concepto más adecuado que el de medida para el estudio de la teoría del potencial. En esta sección se estudiarán los conjuntos "nulos" (de capacidad nula) desde el punto de vista del potencial.

3.1.1 Conjuntos polares

DEFINICIÓN

Un conjunto $Z \subset E^n$ es un *conjunto polar* si existe un abierto $U \supset Z$ y una función u sobrearmónica en U tal que $u = +\infty$ en Z .

Ejemplos de conjuntos polares:

1) Sea x_0 un punto fijo de E^n .

El conjunto $\{x_0\}$ es polar ya que u_{x_0} la armónica fundamental con polo en x_0 es sobrearmónica en E^n y $+\infty$ en $\{x_0\}$.

2) Sea $\{x_j\}$ una sucesión de puntos distintos en E^3 .

El conjunto $Z = \{x_1, x_2, \ldots\}$ es polar.

Sea $u(x) = \sum c_j \|x - x_j\|^{-1}$ tal que las c_j se escogen de manera que $c_j > 0$ y la serie converja para $x \in \sim Z$ .Definida de esta manera u resulta ser sobrearmónica en E^3 y $u = +\infty$ en Z .

3) Un segmento de línea I en E^2 no es un conjunto polar.

Supongamos que existiera una función u sobrearmónica en una vecindad de I y $u = +\infty$ en I . Como la sobrearmonicidad es invariante ante rotaciones podríamos formar un cuadrado de lado igual a $I_1 \subset I$

tal que u fuera sobrearmónica en una vecindad del cuadrado y $u = +\infty$ sobre sus lados . Pero, por el *Teorema del máximo*, tendríamos una contradicción.

4) Un segmento de línea I en E^3 es un conjunto polar.

Consideremos a la función:

$$v(x) = \int_I \frac{1}{\|x - z\|}\, d\mu(z), \quad x \in E^3 \ \ y \ \ \mu \text{ la medida de Lebesgue unidimensional}$$

Se puede demostrar (Kellogs) que $v = +\infty$ en el segmento de línea que va de $(0,0,0)$ a $(1,0,0)$.

Teorema 1 *Si $Z \subset E^n$ es un conjunto polar, entonces su medida (n-dimensional) de Lebesgue de Z es cero.*

Demostración:

Sea u sobrearmónica en un abierto $U \supset Z$ y $+\infty$ en Z .

Por el TEOREMA 16 sabemos que u es finita c.t.p., entonces Z tiene necesariamente medida de Lebesgue cero. ■

Teorema 2 *Si $Z \subset E^2$ es un conjunto polar, entonces existe una función sobrearmónica u en E^2 tal que $u = +\infty$ en Z .*

Demostración:

Sea U vecindad de Z en la cual está definida la función sobrearmónica v tal que $v = +\infty$ en Z . Podemos considerar que $v \geq 0$ en U (si es necesario remplazamos a U por el abierto $U \cap \{y : v(y) > 0\}$).

Sea $U_j = U \cap B_{0,j}$. Entonces tenemos que $Z = \bigcup_j (U_j \cap Z)$.

Consideremos que cada U_j es no vacío.

Como $U_j \subset E^2$ es acotado, entonces tiene función de Green G_{U_j} .

Usando el *Teorema de descomposición de Riez* tenemos que existe una medida ν_j ,asociada con v , tal que:

$$v = G_{U_j}\nu_j + h_j$$

donde h_j es armónica en U_j .

Como $v = +\infty$ en $U_j \cap Z$, tenemos que $G_{U_j}\nu_j = +\infty$ en $U_j \cap Z$. Y como $U_j \subset B_{0,j}$, entonces $G_{U_j}\nu_j \leq G_{B_{0,j}}\nu_j$.

En consecuencia $G_{B_{0,j}}\nu_j$ es $+\infty$ en $U_j \cap Z$.

Definamos a la función:

$$w_j(x) = \int_{B_{0,j}} \log \frac{2j}{\|x - y\|}\, d\nu_j(y)$$

(Es decir w_j es el potencial logarítmico de ν_j excepto por una constante y, por lo tanto, w_j es sobrearmónica en E^2).

Definida de esta manera $w_j = +\infty$ en $U_j \cap Z$ ya que:

$$\log \frac{2j}{\|x-y\|} \geq G_{B_{0,j}} \text{ si } x, y \in B_{0,j}$$

y $G_{B_{0,j}} \nu_j = +\infty$ en $U_j \cap Z$.

En resumen tenemos que:

(i) w_j es sobreramónica en E^2 .

(ii) $w_j \geq 0$ en $B_{0,j}$.

(iii) $w_j = +\infty$ en $U_j \cap Z$.

Como cada w_j es finita c.t.p. en $B_{0,1}$ entonces existe un punto $x_0 \in B_{0,1}$ tal que $-\infty < w_j(x_0) < +\infty$ para toda j .

Consideremos la serie $\sum b_j w_j(x_0)$ tomando las b_j's de manera que sean positivas y la serie converja.

Definamos a $u = \sum b_j w_j$ en E^2 .

Entonces $u = +\infty$ en Z . Mostremos que u resulta ser sobrearmónica en E^2 o, equivalentemente, que u es sobrearmónica en cada $B_{0,j}$.

Sea k un entero positivo fijo.

Para $j \geq k$, tenemoe que $w_j \geq 0$ en $B_{0,j} \supset B_{0,k}$.

Consideremos la siguiente descomposición de u :

$$u(x) = \sum_{j=1}^{k-1} b_j w_j(x) + \sum_{j=k}^{\infty} b_j w_j(x) \; x \in B_{0,k}$$

La suma finita es sobrearmónica ya que las b_j's son positivas.

Las colas de las series forman una sucesión creciente de funciones sobrearmónicas no negativas (en $B_{0,k}$) y sabemos que el límite es idénticamente $+\infty$ o sobrearmónico en $B_{0,k}$.

Como la serie es finita para $x_0 \in B_{0,1} \subset B_{0,k}$ podemos concluir que la serie es sobrearmónica en $B_{0,k}$.

■

Teorema 3 *Sea $Z \subset E^n$ con $n \geq 3$.*

Si Z es un conjunto polar y G es la función de Green para E^n, entonces existe una medida μ en E^n tal que el potencial $G\mu$ es $+\infty$ en Z.

Demostración:

Por hipótesis hay un abierto $U \supset Z$ y una función sobrearmónica en U con $v = +\infty$ en Z .

Consideremos que $v \geq 0$ en U .

Sea ν la medida asociada a v y a U por el teorema de Riez, $v = G_U\,\nu + h$, donde G_U es la función de Green para U y h es armónica en U extendamos ν a E^n poniendo $\nu(\sim U) = 0$.

Sea $\{U_j\}$ una sucesión creciente de abiertos no vacíos con cerraduras compactas tal que

$$E^n = \bigcup_j U_j$$

y sea $\{G_j\}$ la sucesión correspondiente de funciones de Green.

Si $\nu_j = \nu|_{U_j}$, entonces $\nu_j(U_j) = \nu(U_j) < +\infty$ para cada j .

Ahora extendemos ν_j a E^n poniendo $\nu_j(\sim U_j) = 0$.

Si ponemos $v_j = G\,\nu_j$, entonces $v_j \geq 0$ y v_j es sobrearmónica, ya que $\nu_j(E^n) = \nu_j(U_j) < +\infty$.

Consideremos la siguiente representación de v :

$$v = G_U\,\nu + h = v = G_U\,\nu_j + G_U\,\;\nu|_{U - U_j} + h$$

y $\nu|_{U \sim U_j}$ vale cero para U_j .

Así podemos escirbir a v :

$$v = G_U\,\nu_j + h_j^*$$

en U_j con h_j^* armónica en U_j .

Usando el TEOREMA 5 del Capítulo 2 tenemos que $G_U \nu_j = G_{U_j}\,\nu_j + h_j^{**}$ en U_j .

Por otro lado como $v = +\infty$ en $U_j \cap Z$, entonces $G_U\,\nu_j = +\infty$ en $U_j \cap Z$, de donde tenemos que $G_{U_j}\,\nu_j = +\infty$ en $U_j \cap Z$.

De la misma manera $v_j = G_U\,\nu_j \geq G_{U_j}\,\nu_j = +\infty$ en $U_j \cap Z$ de donde obtenemos que $v_j = +\infty$ en $U_j \cap Z$.

Sea y un punto fijo de U_1 tal que $v_j(y) < +\infty$ para toda j y sea $\{c_j\}$ una sucesión de números positivos tal que $\sum c_j v_j(y)$ converge. Definamos $u = \sum c_j v_j$.

Como las v_j's son funciones sobrearmónicas no negativas y $u(y) < +\infty$, siguiendo los pasos de la demostración del teorema anterior, obtenemos que u es sobrearmónica no negativa en E^n y $u = +\infty$ en Z .

Finalmente, usando el *Teorema de descomposición de Riesz*, llegamos a que hay una medida μ en E^n y una función armónica h tales que

$$u = G\mu + h$$

Como $u = +\infty$ en Z , entonces $G\mu = +\infty$ en Z. ■

Ya sabemos que los conjuntos polares tienen medida de Lebesgue cero. Ahora describamos más detalladamente su "tamaño".

COROLARIO

Si Z es polar, entonces su intersección con cualquier esfera tiene medida de supuerficie cero.

Demostración:

Sabemos que existe una función sobrearmónica u tal que $u = +\infty$ en Z .

Tomemos una bola cualquiera B y consideremos $Z \cap \partial B$.

Como u es integrable con respecto a la medida de superficie en ∂B , entonces $Z \cap \partial B$ tiene necesariamente medida superficial cero. ■

OBSERVACIÓN

Bajo ciertas condiciones las funciones sobrearmónicas se pueden extender sobre conjuntos polares:

◇ Sea R es un abierto y Z es un polar de cerrado relativo a R .

Si u es una función sobrearmónica en $R \sim Z$ y localmente inferiormente acotada (ver el **Apéndice**) en R , entonces tiene una extensión única a R .

◇ Como consecuencia de lo anterior, si h es una función armónica en $R \sim Z$ y localmente acotada en R , entonces h tiene una única extensión armónica h^* a R .

3.2 BALAYAGE

En esta sección estudiamos el concepto de *balayage*, propuesto por Poincaré para resolver el problema de Dirichlet. El *balayage* es un proceso de "suavización" de una función sobrearmónica.

DEFINICIÓN

Sea R un abierto de E^n con función de Green G .

Sea ℓ_R la clase de las funciones sobrearmónicas en R y sea u una función sobrearmónica no negativa en R .

Si E es un subconjunto de R se define la siguiuente familia de funciones:

$$\Phi_E^u = \{v \in \ell_R : v \geq 0 \text{ en } R,\ v \geq u \text{ en } E\}$$

Se define la *réduite* o función reducida de u relativa a R como:

$$\mathcal{R}_E^u(x) = \inf_{x \in R} \{v(x) : v \in \Phi_E^u\}$$

A pesar de que $\mathcal{R}_E^u$ es el ínfimo sobre una familia de funciones sobrearmónicas, no es necesariamente una función sobrearmónica.(Como ejemplo tenemos a la armónica fundamental con polo en 0 . Si $R = E^3$ y $E = \{0\}$. $\mathcal{R}_E^u = +\infty$ en E y 0 en $R \sim E$).

La familia Φ_E^u no es vacía ya que $u \in \Phi_E^u$. Además $0 \leq \mathcal{R}_E^u \leq u$.

Entonces $\mathcal{R}_E^u > -\infty$ y $\mathcal{R}_E^u$ no puede ser $+\infty$ en ninguna componente de R ya que está mayorada por u (es decir, $\mathcal{R}_E^u \leq u$, por su definición).

Veamos que $\mathcal{R}_E^u$ es hiperarmónica en R .

Si $v \in \Phi_E^u$, entonces:

$$v(x) \geq L(v : x, \delta)$$

$$\geq L(\mathcal{R}_E^u : x, \delta)$$

siempre que $\overline{B}_{x,\delta} \subset R$ (si $\mathcal{R}_E^u$ es medible).

Ahora, el conjunto $\{v(x) : v \in \Phi_E^u\}$ está acotado inferiormente por $L(\mathcal{R}_E^u : x, \delta)$. Y si $\overline{B}_{x,\delta} \subset R$ entonces:

$$\mathcal{R}_E^u = \inf_{v \in \Phi_E^u} v(x) \geq L(\mathcal{R}_E^u : x, \delta)$$

En resumen sólo hace falta la s.c.i. para que $\mathcal{R}_E^u$ sea sobrearmónica.

DEFINICIONES

◇ Una familia Ψ de funciones definidas en R es *dirigida por la izquierda* si para cada par $u, v \in \Psi$ existe $w \in \Psi$ tal que $u \geq w$ y $v \geq w$.

◇ Una familia Ψ de funciones sobrearmónicas en R es *saturada* si:

(i) $u, v \in \Psi \Longrightarrow \min\{u, v\} \in \Psi$.

(ii) $u \in \Psi \Longrightarrow u^* \in \Psi$ con u^* definida de la siguiente manera:

$$u^* = \begin{cases} u & \text{en } R \sim B \\ \\ IP(u, B) & \text{en B} \end{cases} \qquad \text{para alguna bola } B \text{ tal que } \overline{B} \subset R$$

OBSERVACIONES

◇ Si Ψ es una familia saturada de funciones sobrearmónicas en el abierto R , entonces el $\inf_{u\in\Psi} u$ es una función idénticamente igual a $-\infty$ o armónica en cada componete de R.

◇ Si u es una función real extendida en $D \subset E^n$, la regularización inferior $\widehat{u}$ de u definida como:

$$\widehat{u}(x) = \liminf_{\substack{y\to x\\ y\in D}} u(y) \qquad x \in \overline{D}$$

es una función s.c.i.

◇ Φ^u_E es una familia saturada de funciones en $R \sim \overline{E}$.

Lema 1 *La regularización inferior* $\widehat{R}^u_E$ *de* R^u_E *es sobrearmónica en* R.

Además, $\widehat{R}^u_E$ *y* R^u_E *cumplen las siguientes propiedades:*

(i) $u \geq R^u_E \geq \widehat{R}^u_E \geq 0$ *en* R.

(ii) $u = R^u_E$ *en* E .

(iii)$u = R^u_E = \widehat{R}^u_E$ *en el interior de* E.

(iv) $R^u_E = \widehat{R}^u_E$ *en* $R \sim \overline{E}$ *y son armónicas en* $R \sim \overline{E}$.

Demostración:

(i), (ii), (iii) son triviales.

Que $\widehat{R}^u_E$ sea sobrearmónica en R se sigue de la observación anterior.

Probemos (iv).

Si R^u_E es armónica en $R \sim \overline{E}$, entonces R^u_E es continua en $R \sim \overline{E}$ y concluímos que $R^u_E = \widehat{R}^u_E$ en $R \sim \overline{E}$.

Y como Φ^u_E es una familia saturada de funciones sobrearmónicas en $R \sim \overline{E}$, entonces $\widehat{R}^u_E$ es armónica en R . ■

De acuerdo con lo anterior $\widehat{R}^u_E$ difiere de R^u_E sólo en la frontera de E .

Además sabemos que en esos puntos $R^u_E > \widehat{R}^u_E$.

DEFINICIÓN

La función $\widehat{R}^u_E$ es el *balayage* o *regularización inferior* (en R) de u respecto a E .

OBSERVACIÓN

Sean u y v funciones sobrearmónicas no negativas en R .

Se cumplen las siguientes afirmaciones:

(i) $E \subset F \subset R \Longrightarrow \widehat{R}^u_E \leq \widehat{R}^u_F$.

(ii) $u \le v \Longrightarrow \widehat{R}_E^u \le \widehat{R}_E^v$.

(iii) $\lambda > 0 \Longrightarrow \widehat{R}_E^{\lambda u} = \lambda \widehat{R}_E^u$.

(iv) $\widehat{R}_E^{u+v} \le \widehat{R}_E^u + \widehat{R}_E^v$.

(v) K compacto$\subset R \Longrightarrow \widehat{R}_K^u$ es un potencial.

Demostración:

Sea $E \subset F$. Entonces $\Phi_F^u \subset \Phi_E^u$ y tenemos que $R_E^u \le R_F^u$.

(i) Se obtiene tomando la regularización inferior de ambos lados de la desigualdad; (ii) y (iii) se obtienen de manera similar.

Ahora, si $f \in \Phi_E^u$ y $g \in \Phi_E^v$, entonces $f + g \in \Phi_E^{u+v}$ y $\widehat{R}_E^{u+v} \le R_E^{u+v} \le f + g$.

Fijemos a g .

Calculando el promedio:

$$A\left(\widehat{R}_E^{u+v} : x, \delta\right) \le A\left(f : x, \delta\right) + A(g : x, \delta) \le f(x) + A(g : x, \delta)$$

siempre que $\overline{B}_{x,\delta} \subset R$.

Considerando al ínfimo sobre $f \in \Phi_E^u$ tenemos:

$$A\left(\widehat{R}_E^{u+v} : x, \delta\right) \le R_E^u + A(g : x, \delta)$$

Como los promedios son continuos en $R_\delta = \{y : d(y, \sim R) > 0\}$, entonces al tomar el límite cuando $\delta \downarrow 0$ obtenemos que

$$\widehat{R}_E^{u+v}(x) \le \widehat{R}_E^u(x) + g(x)$$

Si hacemos lo mismo para g , obtenemos finalmente

$$\widehat{R}_E^{u+v}(x) \le \widehat{R}_E^u(x) + \widehat{R}_E^v$$

Para demostrar (v) debemos mostrar que el m.m.a. de $\widehat{R}_K^u$ es cero.

Primero tomemos a u acotada.

Sea R_0 cualquier componente de R y sea $x_0 \in R_0$.

Sabemos que la función de Green en R_0 es $G(x_0, \cdot)|_{R_0}$ y que el m.m.a. de $G(x_0, \cdot)|_{R_0}$ es la función cero.

Como $G(x_0, \cdot)$ es sobrearmónica en R_0 y estrictamente positiva ahí, tiene un ínfimo estrictamente positivo en $R_0 \cap K$. Entonces para alguna $\lambda > 0$ tenemos que $\lambda G(x_0, \cdot)$ mayora a u en $R_0 \cap K$ y la función:

$$w = \begin{cases} \lambda G(x_0, \cdot) & \text{en } R_0 \\ \\ u & \text{en } R \sim R_0 \end{cases}$$

pertenece a Φ_K^u; entonces $0 \leq \widehat{\mathcal{R}}_K^u \leq \mathcal{R}_K^u \leq \lambda G(x_0, \cdot)$ en R_0 .

Por lo tanto el m.m.a. de $\widehat{\mathcal{R}}_K^u\Big|_{R_0}$ es cero para cualquier R_0 componente de R . Es decir el m.m.a. de $\widehat{\mathcal{R}}_K^u$ es cero en R .

Consideremos ahora que u es no acotada en K .

Por el *Teorema de descomposición de Riez* sabemos que u se puede expresar como $u = v + h$ donde v es un potencial y h es armónica en R .

Ahora, como $0 \leq \widehat{\mathcal{R}}_K^v \leq \mathcal{R}_K^v \leq v$ y v es un potencial, entonces $\widehat{\mathcal{R}}_K^v$ es un potencial. Y usando la primera parte de la demostración $\widehat{\mathcal{R}}_K^h$ es un potencial ya que h está acotada en K .

Sabemos del inciso (iv) que $\widehat{\mathcal{R}}_K^u \leq \widehat{\mathcal{R}}_K^v + \widehat{\mathcal{R}}_K^h$, y como la suma de dos potenciales es un potencial, entonces concluímos que $\widehat{\mathcal{R}}_K^u$ es un potencial. ■

OBSERVACIÓN

Usando al balayage se puede demostrar que si $Z \subset E^n$ es un conjunto polar y $x_0 \notin Z$, entonces existe una función sobrearmónica $v = +\infty$ en Z y $v(x_0) < +\infty$.

Como consecuencia de esta observación se encuentra que hay funciones sobrearmónicas finitas y discontinuas ($u = v \wedge (v(x_0) + 1)$).

3.2.1 Capacidad y potencial capacitario

DEFINICIÓN

Se dice que un abierto $R \subset E^n$ es *admisible* si:

(i) tiene función de Green

(ii) existe un conjunto polar Z, $Z \subset \partial R$, tal que $\lim_{y \to z \in \partial R \sim Z} G\mu(y) = 0$ para toda medida μ con soporte compacto en R .

Tomemos la réduite de la función constante 1 con respecto al compacto $K \subset R$.

Denotemos a $\mathcal{R}_K^1$ y a $\widehat{\mathcal{R}}_K^1$ por W_K y V_K respectivamente.

De los teoremas anterioires sabemos que:

(i) $1 \geq W_K \geq V_K \geq 0$ en R

(ii) V_K es potencial en R

(iii) $W_K = 1$ en K

(iv) $1 = W_K = V_K$ en el interior de K

(v) $W_K = V_K$ en $R \sim K$ y son armónicas en $R \sim K$

(vi) $\lim_{y \to z \in \partial R \sim Z} V(y) = 0$ excepto posiblemente para z's en un subconjunto polar de ∂R . Y en el caso de que R sea un subconjunto no acotado de E^n con $n \geq 3$, $\lim_{\|y\| \to +\infty} V_K(y) = 0$.

Lema 2 *V_K es el potencial de una medida con soporte compacto en ∂K.*

Demostración:

Por (ii) sabemos que V_K es potencial de una medida en R . es decir $V_K = G\mu$.

Ahora, V_K es armónico en $R \sim \partial K$ por (iv) y (v), entonces usando el TEOREMA 6 del Capítulo 2 obtenemos que $\mu(R \sim \partial K) = 0$. ∎

Lema 3 *V_K es el mayor potencial de las medidas μ con soporte compacto en K tales que $G\mu \leq 1$ en R .*

Demostración:

Sea μ una medida con esas características.

Como R es admisible, entonces $\lim_{y \to z \in \partial R} G\mu(y) = 0$ excepto posiblemente para z en un subconjunto polar Z de ∂R (en caso de que R sea un subconjunto no acotado de E^n con $n \geq 3$, $\lim_{\|y\| \to +\infty} G\mu(y) = 0$).

Sea $u = G\mu$.

Como $u \leq 1$ en R , entonces $\lim_{\substack{y \to z \in \partial K \\ y \in R \sim K}} u(y) \leq 1$.

Consideremos a una $v \in \Phi^1_K$ y a la función $v - u$.

Como $v \geq 1$ en K y s.c.i. en R , entonces:

$$\lim_{\substack{y \to z \in \partial(R \sim K) \\ y \in R \sim K}} \inf \left[v(x) - u(y)\right] \geq 0$$

excepto posiblemente para $z \in Z$. (Esta desigualdad se conserva para R un subconjunto no acotado de E^n con $n \geq 3$ cuando $\|y\| \to +\infty$ y $y \in R \sim K$) .

Como $v \geq 0$ y $u \leq 1$ en R , $v - u$ es acotada inferiormente en R . Como u es armónica en $R \sim K$, $v - u$ es sobrearmónica en $R \sim K$.

En Helms se demuestra, que con estas condiciones, entonces $v - u \geq 0$ en $R \sim K$. Como $v \geq 1 \geq u$ en K , $v \geq u$ en R para toda $v \in \Phi^1_K$.

Por lo tanto $W_K = \mathcal{R}^1_K \geq u$ en R y, ya que u es s.c.i. en R , entonces $V_K = \widehat{W}_K \geq \hat{u}$ en R . ■

DEFINICIONES

Sea K subconjunto compacto del admisible R .

◇ Llamamos a V_K el *potencial capacitario* de K .

◇ A la medida única μ_K para la cual $V_K = G\mu_K$ la llamamos la *distribución capacitaria* para K .

◇ La *capacidad* de K relativa al admisible R , denotada por $\mathcal{C}(K)$, está definida como

$$\mathcal{C}(K) = \mu_K(K)$$

con $\mathcal{C}(\emptyset) = 0$.

◇ El *mapeo capacitario* es la transformación que a cada compacto K le asigna la función W_K

Consideraremos ahora a $V_K(x)$ y $W_K(x)$ como funciones del compacto $K \subset R$ con R y x fijos (aunque no escribiremos la variable x).

OBSERVACIÓN

Consideremos a W_K como una función del compacto $K \subset R$.

W_K tiene las siguientes propiedades:

(i) Monotonía: $K_1 \subset K_2 \Longrightarrow W_{K_1} \leq W_{K_2}$.

(ii) El *mapeo capacitario* $K \rightarrow W_K$ es continuo por la derecha:

> Sea K es un compacto contenido en R . Para toda $\epsilon > 0$ existen un abierto U tal que si $K \subset K_1 \subset U$ para K_1 compacto, entonces $W_{K_1} - W_K < \epsilon$.

(Equivalentemente si $\{K_j\}$ es una sucesión decreciente de conjuntos compactos, entonces $W_{K_j} \downarrow W_{\cap K_j}$)

(iii) Subaditividad fuerte: $W_{K_1 \cup K_2} + W_{K_1 \cap K_2} \leq W_{K_1} + W_{K_2}$.

Lema 4 *Si K es un subconjunto compacto del admisible R , entonces la capacidad de K (relativa a R) está dada por:*

$$\mathcal{C}(K) = \sup\{\mu(K) : G\mu(K) \leq 1 \text{ en } R,\ \mu \text{ medida con soporte en } K\}$$

Demostración:

Sea U un abierto con cerradura compacta tal que $K \subset U \subset \overline{U} \subset R$ y sea $v = V_{\overline{U}}$.

Sabemos que v es el potencial de una medida ν y que $v = G\nu = 1$ en K.

Sean μ_1 y μ_2 dos medidas con soporte compacto en K tales que $G\mu_1 \leq G\mu_2 \leq 1$ en R.

Usando el teorema de reciprocidad (TEOREMA 7 del Capítulo 2) obtenemos que:

$$\mu_1(K) = \int_K 1\, d\mu_1 = \int G\nu\, d\mu_1 = \int G\mu_1\, d\nu \leq \int G\mu_2\, d\nu = \mu_2(K)$$

Si μ es una medida de soporte compacto en K y $G\mu \leq 1$ en R, entonces usando el LEMA 3 (de este capítulo) tenemos que $G\mu \leq V_K = G\mu_K$.

Por lo tanto $\mu(K) \leq \mu_K(K) = \mathcal{C}(K)$. ■

3.2.2 Capacidad de Choquet

Ahora se extenderá el concepto de capacidad a conjuntos no compactos (conjuntos de Borel y conjuntos analíticos) de manera similar al proceso de construcción de la medida de Lebesgue.

OBSERVACIÓN

La función $\mathcal{C}$ finita y no negativa definida sobre la clase de conjuntos compactos K del admisible R, tiene las siguientes propiedades:

(i) $\mathcal{C}(\emptyset) = 0$ y $K_1 \subset K_2 \Longrightarrow \mathcal{C}(K_1) \leq \mathcal{C}(K_2)$.

(ii) Si $\{K_j\}$ es una sucesión decreciente de conjuntos compactos y $K = \cap K_j$, entonces $\mathcal{C}(K) = \lim_{j \to \infty} \mathcal{C}(K_j)$.

(iii) $\mathcal{C}(K_1 \cup K_2) + \mathcal{C}(K_1 \cap K_2) \leq \mathcal{C}(K_1) + \mathcal{C}(K_2)$.

Demostración:

La afirmación (i) se sigue de la propiedad de monotonía de la función W_K.

Demostremos (ii).

Sea U un abierto con cerradura compacta tal que $K_1 \subset U \subset \overline{U} \subset R$.

Si ν denota la distribución capacitaria de $\overline{U}$, entonces $V_{\overline{U}} = G\nu$ y ν tiene soporte en ∂U.

Además, $G\nu = 1$ en U y también en cada K_j.

Es claro que $V_{K_j} = W_{K_j}$ en $\partial U \subset R \sim K_j$.

Usando el teorema de reciprocidad y el hecho de que ν tiene soporte en ∂U obtenemos:

$$\mathcal{C}(K_j) = \int G\nu\, d\mu_{K_j} = \int G\mu_{K_j}\, d\nu$$

$$= \int V_{K_j}\, d\nu$$

$$= \int W_{K_j}\, d\nu$$

Debido a la continuidad por la derecha del *mapeo capacitario* ($K \to W_K$) tenemos que $W_{K_j} \downarrow W_K$ y entonces:

$$\mathcal{C}(K_j) \to \int W_K\, d\nu = \int V_K\, d\nu = \int G\mu_K\, d\nu = \int G\nu\, d\mu_K = \mathcal{C}(K)$$

Probemos (iii).

Sea U un abierto con cerradura compacta $\overline{U} \subset R$ que contenga a $K_1 \cup K_2$ y sea ν la distribución capacitaria para $\overline{U}$.

Usando el teorema de reciprocidad y el hecho de que ν tiene soporte en $\partial U \subset R \sim (K_1 \cup K_2)$ obtenemos:

$$\mathcal{C}(K_1 \cup K_2) + \mathcal{C}(K_1 \cap K_2) = \int G\nu\, d\mu_{K_1 \cup K_2} + \int G\nu\, d\mu_{K_1 \cap K_2}$$

$$= \int G\mu_{K_1 \cup K_2}\, d\nu + \int G\mu_{K_1 \cap K_2}\, d\nu$$

$$= \int (V_{K_1 \cup K_2} + V_{K_1 \cap K_2})\, d\nu$$

$$= \int (W_{K_1 \cup K_2} + W_{K_1 \cap K_2})\, d\nu \leq \int (W_{K_1} + W_{K_2})\, d\nu$$

$$= \int (V_{K_1} + V_{K_2})\, d\nu$$

Pasando a los potenciales y aplicando nuevamente el teorema de reciprocidad obtenemos (iii). ∎

DEFINICIONES

◇ Sea $E \subset R$.

La *capacidad interior* de E se define por:

$$\mathcal{C}_*(E) = \sup \{ \mathcal{C}(K) : K \text{ compacto}, K \subset E \}$$

Si E es compacto, entonces $\mathcal{C}_*(E) = \mathcal{C}(E)$.

Se puede demostrar que $\mathcal{C}_*$ es una función real extendida, monótona en el sentido:

$$E \subset F \Longrightarrow \mathcal{C}_*(E) \leq \mathcal{C}_*(F)$$

y no negativa sobre la clase de todos los subconjutos de R con $\mathcal{C}_*(\emptyset) = \mathcal{C}(\emptyset) = 0$.

◇ Sea $E \subset R$.

La *capacidad exterior* de E , denotada por $\mathcal{C}^*(E)$, se define por:

$$\mathcal{C}^*(E) = \inf \{ \mathcal{C}_*(U) : U \text{ abierto, } U \supset E\}$$

Se puede demostrar que $\mathcal{C}^*$ es una función monótona no negativa definida sobre la clase de los subconjuntos de R .

◇ Un subconjunto E de R es *capacitable* si $\mathcal{C}_*(E) = \mathcal{C}^*(E)$ en cuyo caso el valor común es la *capacidad* $\mathcal{C}(E)$.

Lema 5 *Los subconjuntos abiertos y los subconjuntos compactos de R son capacitables.*

Demostración:

Que los abiertos sean capacitables es inmediato de la definición.

Ahora, sea K un compacto.

Sabemos que $\mathcal{C}_*(K) = \mathcal{C}(K)$. Debido a la continuidad por la derecha del *mapeo capacitario* tenemos que dada $\epsilon > 0$ existe un abierto U tal que si $K \subset K_1 \subset U$ entonces $\mathcal{C}(K_1) - \mathcal{C}(K) < \epsilon$, donde K_1 es compacto.

Por otro lado, gracias a que:

$$\mathcal{C}(K) = \mathcal{C}_*(K) \leq \mathcal{C}_*(U) = \sup_{K_1 \subset U} \mathcal{C}(K_1) \leq \mathcal{C}(K) + \epsilon$$

entonces para cualquier abierto V tal que $K \subset V \subset U$ tenemos

$$\mathcal{C}_*(K) \leq \mathcal{C}_*(V) \leq \mathcal{C}_*(U)$$

y entonces:

$$\mathcal{C}(K) = \mathcal{C}_*(K) \leq \inf_{V \supset K} \mathcal{C}_*(V) \leq \mathcal{C}_*(U) \leq \mathcal{C}(K) + \epsilon$$

Pero, como el miembro de la mitad es $\mathcal{C}^*(K)$ y ϵ es arbitraria, concluímos que

$$\mathcal{C}(K) = \mathcal{C}_*(K) = \mathcal{C}^*(K)$$

■

DEFINICIONES

◇ Un subconjunto de un *espacio de Hausdorff (ver el* **Apéndice**) es un *$\mathcal{K}_\sigma$-conjunto* si es unión numerable de conjuntos compactos.

Un subconjunto de un espacio de Hausdorff es un *$\mathcal{K}_{\sigma\delta}$-conjunto* si es intersección numerable de $\mathcal{K}_\sigma$ conjuntos.

◇Un subconjunto $E \subset E^n$ es un conjunto *$\mathcal{K}$-analítico* si existe un espacio de Hausdorff compacto X , un $\mathcal{K}_{\sigma\delta}$-subconjunto D de X y un mapeo continuo f de D a E .

En particular los subconjuntos compactos de E^n son K-analíticos (basta tomar a f como el mapeo identidad de un compacto en sí mismo y a $X = E^n$).

OBSERVACIÓN

La clase $\mathcal{K}$ de los subconjuntos $\mathcal{K}$-analíticos del abierto R es cerrada bajo uniones e intersecciones y contiene a los borelianos de R .

Teorema 4 (Choquet) *Los subconjuntos $\mathcal{K}$-analíticos del abierto R son capacitables.*

Demostración:

Sea E un subconjunto $\mathcal{K}$- analítico de R contenido en un compacto C tal que $C \subset R$.

Debemos mostrar que $\mathcal{C}^*(E) = \sup\{\mathcal{C}^*(K) : K \text{ compacto}, K \subset E\}$.

Como E es $\mathcal{K}$-analítico, entonces existe un espacio de Hausdorff compacto X , un $\mathcal{K}_{\sigma\delta}$-subconjunto D de X y un mapeo continuo $f : D \to E$ tal que $f(D) = E$.

Sea $\Gamma \subset D \times C \subset X \times C$ la gráfica de f .

Entonces $E = P_r\Gamma$, donde P_r es la proyección continua de $X \times C$ sobre C .

Además como D es un $\mathcal{K}_{\sigma\delta}$-subconjunto de X , entonces $D \times C$ es un $\mathcal{K}_{\sigma\delta}$-subconjunto de $X \times C$.

Mostremos que Γ es relativamente cerrada en $D \times C$.

Sea la sucesión de puntos de Γ definida por $\{(x_n, f(x_n)) : n \in \mathbf{N}\}$ que converja al punto $(x, e) \in D \times C$.

Como $x_n \to x$, entonces por continuidad $f(x_n) \to f(x)$.

Además sabemos que $f(x_n) \to e$ y que C es Hausdorff, entonces $f(x) = e$ y $(x, e) \in \Gamma$.

Es decir Γ es cerrada relativa a $D \times C$.

Por lo tanto existe un subconjunto cerrado de $X \times C$ tal que Γ es la intersección de él con $D \times C$.

Tomemos este subconjunto cerrado de $X \times C$, como $\bar{\Gamma}$ la cerradura de Γ en $X \times C$ ($\Gamma = \bar{\Gamma} \cap (D \times C)$)

Como $\bar{\Gamma}$ es cerrada y $D \times C$ es un $\mathcal{K}_{\sigma\delta}$-subconjunto de $X \times C$, entonces Γ es un $\mathcal{K}_{\sigma\delta}$-subconjunto de $X \times C$.

Para el conjunto $\Sigma \subset X \times C$, definamos

$$\phi^*(\Sigma) = \mathcal{C}^*(P_r\Sigma)$$

Usando la unicidad de la proyección $P_r : X \times C \to C$ se puede demostrar que ϕ^* es una capacidad exterior sobre los subconjuntos de $X \times C$, que Γ es ϕ^*-capacitable y que entonces $E = P_r\Gamma$ es capacitable.

Ahora, consideremos a E subconjunto $\mathcal{K}$-analítico de R .

Sabemos que $E \subset \cup C_j$ donde los C_j's son subconjuntos compactos de R .

Sea $E_j = E \cap C_j$. Entonces $E = \cap E_j$ y $\mathcal{C}^*(E) = \sup_j \mathcal{C}^*(E_j)$.

Consideremos a una $\lambda > 0$ tal que $\mathcal{C}^*(E) > \lambda$.

Entonces existe una j_0 tal que $\mathcal{C}^*(E_{j_0}) > \lambda$.

Como E_{j_0} es un conjunto $\mathcal{K}$-analítico contenido en el compacto $C_{j_0} \subset R$, entonces E_{j_0} es capacitable y existe un compacto $K \subset E_{j_0}$ tal que $\mathcal{C}^*(K) > \lambda$.

Por lo tanto:

$$\mathcal{C}^*(E) = \sup \{ \mathcal{C}^*(K) : K \text{ compacto, } K \subset E \}$$

y E es capacitable. ■

Enunciemos algunos resultados importantes que caracterizan por su capacidad a los conjuntos polares:

◇ (*Cartan*) Un subconjunto de un conjunto admisible R es polar si y solo si tiene capacidad cero.

◇ (*Evans*) Si Z es un subconjunto polar compacto del conjunto admisible R con función de Green G , entonces existe una medida μ tal que $G\mu = +\infty$ en Z y $G\mu < +\infty$ en $R \sim Z$.

◇ Sea M un subconjunto de Borel del admisible R con función de Green G y sea μ una medida en R con $\mu(M) > 0$ tal que $G\mu$ está acotada en R.

Entonces M no es un conjunto polar.

◇ (*Cartan*) Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones sobrearmónicas acotada inferiormente en R.

Entonces $v = \inf \{u : u \in \mathcal{F}\}$ difiere de su regularización inferior $\hat{v}$ a lo más en un conjunto polar.

Si E es un subconjunto del abierto R y u es una función sobrearmónica no negativa en R, entonces la reduite $\mathcal{R}^u_E$ difiere del balayage $\widehat{\mathcal{R}}^u_E$ a lo más en un subconjunto polar de ∂E.

Ejemplo 1 (Capacidad electrost0xe1tica) *Ciertos materiales metálicos tienen la propiedad de que las cargas eléctricas se pueden mover libremente en él bajo la influencia de un campo de fuerza eléctrica.*

Tales materiales son llamados *conductores.*

Sea B_1 un conductor rodeado de una superficie conductora S_2, la cual está conectada a tierra (es decir: $\phi|_{S_2} = 0$). Inicialmente S_2 está descargada. Pongamos una carga e en B_1 y veamos lo que pasa.

La carga en B_1 induce una carga en S_2 (es decir, las cargas de S_2 se reacomodan debido a la presencia de la carga en B_1). Esta reorganización de cargas concluye cuando se alcanza el equilibrio (es decir, cuando la fuerza eléctrica neta sobre cada carga es cero).

Obtenemos entonces un campo $\overrightarrow{E}$ en E^3 con potencial ϕ tal que:

$$\phi(x) = \int_{S_1} \frac{w_1\, d\sigma}{r} + \int_{S_2} \frac{w_2\, d\sigma}{r}$$

donde $r = \|x - \xi\|$ es la distancia de un punto $x \in E^3$ a un punto ξ en alguna de las dos superficies, $w_1\, d\sigma$ y $w_2\, d\sigma$ son las funciones (continuas) de distribución superficial de carga en S_1 y S_2 respectivamente.

Ahora llevamos a S_2 al infinito. Supongamos que entonces ϕ converge a un límite ϕ_∞ tal que:

i) ϕ_∞ es armónica en E^3 fuera de S_1 .

ii) $\phi_\infty = 0$ en ∞ .

iii) ϕ_∞ es una constante en S_1 .

iv)$\phi_\infty = \displaystyle\int_{S_1} \frac{d\mu_\infty(\xi)}{r}$ donde μ_∞ es la distribución de la carga e en S_1 ($\displaystyle\int_{S_1} d\mu_\infty(\xi) = e$).

DEFINICIÓNES

- ϕ_∞ es el *potencial de equilibrio* para B_1 correspondiente a la carga e.
- μ_∞ es la *distribución de equilibrio* correspondiente.
- $\phi_\infty|_{S_1} = V_\infty$.

Se puede demostrar que V_∞ es proporcional a e :

$$\exists \text{ una constante } C_\infty \text{ tal que } e = C_\infty \cdot V_\infty$$

- C_∞ es la *capacidad* de B_1.

CAPACIDAD DE UN CAPACITOR ESFÉRICO.

Sea B_1 la bola cerrada con centro en el origen y radio a .

Sea e la carga en B_1 .

Por simetría la distribución de equilibrio μ_∞ sobre ∂B_1 debe ser uniforme con respecto al área, es decir $\mu_\infty = w\, d\sigma$ con w una constante.

De hecho como:

$$e = \int_{\partial B_1} w\, d\sigma = 4\pi a^2 w$$

entonces:

$$w = \frac{e}{4\pi a^2}$$

Por lo tanto el potencial de equilibrio es:

$$\phi_\infty(x) = w \int_{|\xi|=a} \frac{d\sigma}{|x-\xi|}$$

Nuevamente usando la simetría, tenemos que ϕ_∞ es invariante ante rotaciones. Por lo tanto existe una función f de una variable tal que:

$$\phi_\infty(x) = f(|x|)$$

Por otro lado sabemos que el laplaciano en coordenadas esféricas (ver el **Apéndice**) de una función con simetría radial es:

$$\nabla^2 \phi_\infty = \nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\left(f'(r)\, r^2\right)'$$

donde $r = |x|$.

Pero como ϕ es armónica fuera y dentro de la esfera ∂B_1 , tenemos que:

$$f'(r)\, r^2 = \begin{cases} A & \text{si } r > a \\ \\ B & \text{si } r < a \end{cases}$$

para ciertas A y B constantes.

Resolviendo la ecuación diferencial obtenemos que:

$$f(r) = \begin{cases} -\dfrac{A}{r} + A_1 & \text{si } r > a \\ \\ -\dfrac{B}{r} + A_2 & \text{si } r < a \end{cases}$$

Determinemos A_1 y A_2 .

Como $\phi_\infty = 0$ en ∞ , entonces $A_1 = 0$. Además ϕ_∞ es continua en cero, entonces $B = 0$. Y en $|x| = a$ tenemos que $-\frac{A}{a} = A_2$.

En resumen:

$$f(r) = \begin{cases} -\dfrac{A}{r} & \text{si } r > a \\ \\ -\dfrac{A}{a} & \text{si } r < a \end{cases}$$

es decir:

$$\phi_\infty(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{|x|} & \text{si } |x| > a \\ \\ \dfrac{c}{a} & \text{si } |x| < a \end{cases}$$

con c una constante.

Además:

$$\phi_\infty(0) = w \int_{|\xi|=a} \frac{d\sigma}{|\xi|} = \frac{e}{4\pi a^2} \cdot \frac{4\pi a^2}{a} = \frac{e}{a}$$

de donde concluímos que $c = e$.

Entonces:

$$\phi_\infty(x) \begin{cases} \dfrac{e}{|x|} & \text{si } |x| \geq a \\ \\ \dfrac{e}{a} & \text{si } |x| \leq a \end{cases}$$

(ϕ_∞ es efectivamente un potencial de equilibrio).

Como $\phi_\infty = \frac{e}{a}$ en ∂B_1 encontramos que la capacidad de B_1 es:

$$C_\infty = a$$

Capítulo 4

EL PROBLEMA GENERALIZADO DE DIRICHLET

Sea R un subconjunto abierto acotado y no vacío de E^n.

Sea f una función real extendida definida en ∂R.

> El *problema generalizado de Dirichlet* consiste en construir una función armónica h en R correspondiente a la función de frontera f.

Sabemos que aún en el caso en el que R es una bola el problema de Dirichlet no tiene necesariamente solución, por ejemplo si f es una función discontinua en la frontera.

En este capítulo construímos una solución formal para el problema de Dirichlet a través del *método de Perron-Wiener-Brelot* . Luego estudiaremos la relación entre la solución obtenida y la función de frontera; esto nos lleva a considerar los conceptos de *puntos regulares de frontera* y de *medida armónica*.

4.1 EL MÉTODO DE PERRON-WIENER-BRELOT

El siguiente método soluciona el problema generalizado de Dirichlet para la función de frontera f . Es llamado método *Perron-Wiener-Brelot* (PWB):

DEFINICIONES

◇ Una función real extendida u es *hiperarmónica* (*hipoarmónica*) en R si es sobrearmónica (subarmónica) o idénticamente $+\infty$ ($-\infty$) en cada componente de R.

◇ La *clase superior de funciones* $\mathcal{U}_f$ de la función f en ∂R está definida por:

$$\mathcal{U}_f = \begin{array}{c}\{u : u \text{ hiperarmónica en } R\ ,\ \liminf_{\substack{y \to x \\ y \in R}} u(y) \geq f(x) \text{ para toda } x \in \partial R\ , \\ u \text{ acotada inferiormente en } R\}\end{array}$$

La *clase inferior* $\mathcal{L}_f$ determinada por f es:

$$\mathcal{L}_f = \begin{array}{c}\{u : u \text{ hipoarmónica en } R\ ,\ \limsup_{\substack{y \to x \\ y \in R}} u(y) \leq f(x) \text{ para toda } x \in \partial R\ , \\ u \text{ acotada superiormente en } R\}\end{array}$$

◇ La *solución superior* del problema generalizado de Dirichlet para la función de frontera f es:

$$\overline{H}_f(x) = \inf_{x \in R} \{u(x) : u \in \mathcal{U}_f\}$$

La *solución inferior* correspondiente es:

$$\underline{H}_f(x) = \sup_{x \in R} \{u(x) : u \in \mathcal{L}_f\}$$

Notemos algunas propiedades para las componentes de R .

Sean W una componente de R , $\mathcal{U}^W_{f|\partial W}$ la clase superior y $\overline{H}^W_f$ la solución superior relativas a la componente W.

Veamos que $\mathcal{U}^W_{f|\partial W} = \mathcal{U}_f|_W = \{u|_W : u \in \mathcal{U}_f\}$.

Tomemos una $u \in \mathcal{U}^W_{f|\partial W}$.

Sea la función u^* definida por:

$$u^* = \begin{cases} u & \text{en } W \\ +\infty & \text{en } R \sim W \end{cases}$$

Definida de esta manera $u^* \in \mathcal{U}_f$ y $u = u^*|_W$. Es decir $\mathcal{U}^W_{f|\partial W} \subset \mathcal{U}_f|_W$.

Ahora tomemos a $u \in \mathcal{U}_f$ y a una $x \in \partial W$. Entonces $x \in \partial R$ y:

$$\lim \inf_{\substack{y \to x \\ y \in W}} u(y) \geq \lim \inf_{\substack{y \to x \\ y \in R}} u(y) \geq f(x)$$

Por lo tanto $u|_W \in \mathcal{U}^W_{f|\partial W}$ y $\mathcal{U}_f|_W \subset \mathcal{U}^W_{f|\partial W}$.

De lo anterior se sigue que $\overline{H}^W_{f|\partial W} = \overline{H}_f|_W$.

Es decir es suficiente considerar sólo a las componentes de R .

Lema 1 *$\overline{H}_f$ y $\underline{H}_f$ son idénticamente $+\infty$, idénticamente $-\infty$ o armónicas en cada componente de R.*

Demostración:

Consideremos a R conexo.

Si $\mathcal{U}_f$ contiene sólo a la función idénticamente $+\infty$, entonces $\overline{H}_f = +\infty$.

Supongamos que $\mathcal{U}_f$ contiene una función no idénticamente $+\infty$ en R .

Entonces $\overline{H}_f = \inf\{u : u \in \mathcal{U}_f \text{ , } u \text{ sobrearmónica en } R\}$.

Demostremos que el conjunto de las funciones sobrearmónicos de $\mathcal{U}_f$ forma una familia saturada. De esta manera $\overline{H}_f$ será o idénticamente $-\infty$ o armónica en R .

Sean u_1 y u_2 dos miembros sobrearmónicos de $\mathcal{U}_f$.

Si $x \in \partial R$, entonces:

$$\lim \inf_{\substack{y \to x \\ y \in R}} (\min\{u_1(y), u_2(y)\}) \geq f(x)$$

Como u_1 y u_2 están inferiormente acotadas, también $\min\{u_1, u_2\}$ está acotada.

Por lo tanto $\min\{u_1, u_2\} \in \mathcal{U}_f$.

Ahora, si u es un miembro sobrearmónico de $\mathcal{U}_f$ y B es una bola $\overline{B} \subset R$, tenemos que la función definida por:

$$u^* = \begin{cases} IP(u, B) & \text{en } B \\ \\ u & \text{en } R \sim B \end{cases}$$

es un miembro sobrearmónico de $\mathcal{U}_f$.

Y como u^* es sobrearmónica en R , tenemos que:

$$\lim \inf_{\substack{y \to x \\ y \in R}} u^*(y) = \lim \inf_{\substack{y \to x \\ y \in R}} u(y) \geq f(x) \qquad \text{para toda } x \in R$$

Además u está acotada inferiormente por la misma constante que acota a u .

Por lo tanto los miembros sobrearmónicos de $\mathcal{U}_f$ forman una familia saturada. ■

DEFINICIÓN

Si $\overline{H}_f = \underline{H}_f$ y ambas son armónicas en R, entonces f es llamada *función frontera resolutiva* y $H_f = \overline{H}_f = \underline{H}_f$ es llamada la *solución generalizada de Dirichlet* para f.

Cuando el contexto no se preste a confusión, diremos simplemente que f es *resolutiva*.

Lema 2 *Sea R un subconjunto de E^n abierto y acotado.*

Si $f = g$ en ∂R excepto quizás en un subconjunto polar de ∂R , entonces:

$$\begin{aligned} \overline{H}_f &= \overline{H}_g \\ \underline{H}_f &= \underline{H}_g \end{aligned}$$

en R .

Demostración:

Consideremos a $x \in R$.

Sea la función sobrearmónica v tal que $v = +\infty$ en el subconjunto de ∂R donde $f \neq g$ y $v(x) < +\infty$.

Como R es acotado podemos considerar que v es positiva ahí.

Sean $u \in \mathcal{U}_f$ y $\epsilon > 0$, entonces $u + \epsilon v$ pertenecerá a $\mathcal{U}_f$ y a $\mathcal{U}_g$.

Por lo tanto, como $\overline{H}_g(x) \leq u(x) + \epsilon v(x)$ para toda $\epsilon > 0$ entonces $\overline{H}_g(x) \leq u(x)$.

Ahora como u puede ser cualquier función en $\mathcal{U}_f$, obtenemos que:

$$\overline{H}_g(x) \leq \overline{H}_f(x)$$

El argumento anterior es simétrico. De manera que se obtiene la igualdad. ∎

Teorema 1 *Sea R un abierto acotado de E^n.*

Si f es acotada en ∂R y existe una función armónica h en R tal que $\lim_{\substack{y \to x \\ y \in R}} h(y) = f(x)$ para toda $x \in \partial R$, entonces f es resolutiva y $H_f = h$.

Demostración:

Como f es acotada entonces h también por el principio del mínimo.

Entonces h pertenece a $\mathcal{U}_f$ y a $\mathcal{L}_f$ y $\overline{H}_f \leq h \leq \underline{H}_f$. .

Por lo tanto $\overline{H}_f = h = \underline{H}_f$ y como h es armónica, entonces f es frontera resolutiva.

En particular, si h es armónica en una vecindad del compacto ∂R y se aplica el método PWB a $h|_{\partial R}$, entonces la solución es la deseada. ∎

OBSERVACIÓN

Sea R un abierto acotado de E^n.

Sean f y g son funciones reales extendidas definidas en ∂R.

Y sea c un número real cualquiera.

Las funciones frontera resolutivas forman una clase lineal:

(i) Si $f = c$ en ∂R , entonces f es resolutiva y $H_f = c$ en R.

(ii) $\overline{H}_{f+c} = \overline{H}_f + c$ y $\underline{H}_{f+c} = \underline{H}_f + c$.

Además, si f es resolutiva, entonces $f + c$ es resolutiva y $H_{f+c} = H_f + c$.

(iii) Si $c > 0$, entonces $\overline{H}_{cf} = c\overline{H}_f$ y $\underline{H}_{cf} = c\underline{H}_f$.

Además, si f es resolutiva, entonces cf es resolutiva y $H_{cf} = cH_f$.

(iv) Si $f \leq g$, entonces $\overline{H}_f \leq \overline{H}_g$ y $\underline{H}_f \leq \underline{H}_g$.

(v) $\overline{H}_{-f} = -\overline{H}_f$ y si f es resolutiva, entonces $-f$ es resolutiva y $H_{-f} = -H_f$.

(vi) $\overline{H}_{f+g} \leq \overline{H}_f + \overline{H}_g$ y $\underline{H}_{f+g} \geq \underline{H}_f + \underline{H}_g$.

Además si f y g son resolutivas, entonces $f + g$ es resolutiva y $H_{f+g} = H_f + H_g$.

Lema 3 *Sea R un abierto acotado de E^n.*

Si $\{f_j\}$ es una sucesión de funciones frontera resolutivas que converge uniformemente a f , entonces f es frontera resolutiva y H_{f_j} converge uniformemente a H_f.

Demostración:

Si $\|f_j - f\| < \epsilon$, entonces $f < f_j + \epsilon$ y $\overline{H}_f \leq \overline{H}_{f_j} + \epsilon$.

Análogamente $\overline{H}_f \geq \overline{H}_{f_j} - \epsilon$.

Por lo tanto:

$$\|\overline{H}_f - \overline{H}_{f_j}\| = \|\overline{H}_f - H_{f_j}\| < \epsilon$$

y la sucesión $\{H_{f_j}\}$ converge uniformemente a $\overline{H}_f < +\infty$.

Del mismo modo se obtiene que $\{H_{f_j}\}$ converge uniformemente a $\underline{H}_f$..

Entonces $\overline{H}_f = \underline{H}_f$ y f es resolutiva. ∎

OBSERVACIÓN

Sea $\{f_j\}$ es una sucesión creciente de funciones frontera. Sea $f = \lim_{j\to\infty} f_j$ y $\overline{H}_{f_1} > -\infty$ en R .

Entonces $\overline{H}_f = \lim_{j\to\infty} \overline{H}_{f_j}$.

Si además $\{f_j\}$ es una sucesión de funciones frontera resolutivas, entonces $\overline{H}_f = \underline{H}_f$ y f es resolutiva si $\overline{H}_f$ (o $\underline{H}_f$) es finita.

Lema 4 *Si u es una función subarmónica acotada en el abierto acotado R tal que $f(x) = \lim_{y\to x} u(y)$ existe para toda $x \in \partial R$, entonces f es una función frontera resolutiva.*

Demostración:

Como f es acotada, tenemos que $\overline{H}_f$ y $\underline{H}_f$ están acotadas. Entonces $\overline{H}_f$ y $\underline{H}_f$ son armónicas.

Claramente $u \in \underline{\mathcal{L}}_f$ y $u \leq \underline{H}_f$. .

Entonces $\liminf_{y \to x} \underline{H}_f(y) \geq \liminf_{y \to x} u(y) = f(x)$ para toda $x \in \partial R$ y por lo tanto $\underline{H}_f \in \mathcal{U}_f$.

Entonces tenemos que $\underline{H}_f \geq \overline{H}_f$, pero sabemos que $\underline{H}_f \leq \overline{H}_f$.

Es decir, $\underline{H}_f = \overline{H}_f$ y f por lo tanto es resolutiva. ■

OBSERVACIÓN

Sea K un compacto de E^n y sea f una función continua en K .

Dada $\epsilon > 0$, existe una función u que es diferencia de dos funciones continuas subarmónicas definidas en una bola que contiene a K tal que $\sup_{x \in K} |f(x) - u(x)| < \epsilon$.

Teorema 2 (*Wiener*) *Si f es una función continua definida sobre la frontera ∂R del abierto acotado R, entonces f es resolutiva.*

Demostración:

Usaremos el hecho de que ∂R es compacto.

Por la observación anterior sabemos que dada una bola $B \supset \partial R$, existe una función u , que es diferencia de dos funciones w y v continuas y subarmónicas en B, y que aproxima a f uniformemente en ∂R .

Por el LEMA 4 (de este capítulo) $v|_{\partial R}$ y $w|_{\partial R}$ tenemos que son resolutivas. Entonces la función $u|_{\partial R} = v|_{\partial R} - w|_{\partial R}$ es resolutiva.

Y como $u|_{\partial R}$ aproxima a f uniformemente en ∂R , usando el LEMA 3 (de este capítulo) concluímos que f es resolutiva. ■

Este resultado nos dice que cada función frontera continua f determina a una función armónica H_f definida en el abierto acotado R.

Para tales funciones frontera tenemos que:

$$lim_{\substack{y \to x \\ y \in R}} H_f(y) = f(x)$$

en casi todos los puntos $x \in \partial R$.

4.2 LA MEDIDA ARMÓNICA

Sea R abierto acotado. Considérese el *espacio de Banach* (ver el **Apéndice**) $C(\partial R)$ de las funciones continuas en el compacto ∂R con la norma de $f \in C(\partial R)$ dada por $\| f \| = \sup |f(x)|$.

Como ya vimos, del teorema anterior, cada $f \in C(\partial R)$ determina una función armónica H_f. En particular si x es un punto fijo de R, entonces cada $f \in C(\partial R)$ determina a un número real $H_f(x)$.

Consideremos ahora al mapeo $L_x : C(\partial R) \to E^1$ definido por:

$$L_x(f) = H_f(x)$$

Este mapeo resulta ser una funcional lineal positiva en $C(\partial R)$. Y, como consecuencia del *teorema de representación de Riez para funcionales lineales acotadas continuas* (ver el **Apéndice**), existe una medida unitaria única μ_x en los subconjuntos de Borel de ∂R tal que:

$$H_f(x) = L_x(f) = \int f \, d\mu_x \quad \text{para } x \in R \,,\; f \in C(\partial R)$$

OBSERVACIONES

Sea $\mathcal{F}_0$ la colección de compactos de ∂R.

$\mathcal{F}_0$ es cerrado bajo intersecciones finitas y contiene a ∂R.

Un sistema $\mathcal{G}$ de subconjuntos de ∂R es llamado un *d-sistema* si:

(i) $\partial R \in \mathcal{G}$,

(ii) Si $E, F \in \mathcal{G}$, con $E \subset F$ entonces $F \sim E \in \mathcal{G}$,

(iii) y si para toda $\{E_j\}$ sucesión creciente se subcunjuntos de $\mathcal{G}$, se tiene que $\bigcup_j E_j \in \mathcal{G}$.

Sea $d(\mathcal{F}_0)$ el d-sistema más pequeño que contenga a $\mathcal{F}_0$. Sea $\sigma(\mathcal{F}_0)$ la σ-álgebra más pequeña que contenga a $\mathcal{F}_0$.

Se puede demostrar que $d(\mathcal{F}_0) = \sigma(\mathcal{F}_0)$.

Lema 5 *Si f es una función Borel-medible acotada inferiormente (o superiormente) en ∂R, entonces* $\overline{H}_f = \underline{H}_f = \int f \, d\mu_x$ *para toda $x \in R$.*

Demostración:

Sea $\mathcal{F}_0$ como se definió arriba (como R es acotado los compactos son los cerrados).

Si $C \in \mathcal{F}_0$, entonces que existe una sucesión $\{f_j\}$ de funciones continuas no negativas en ∂R tal que $f_j \downarrow \chi_C$ (χ_C es la función característica de C) con $0 \leq f_j \leq 1$ para cada j.

De la observación al LEMA 3 (de este capítulo) tenemos que χ_C es una función frontera resolutiva y entonces:

$$H_{\chi_C}(x) = \int \chi_C d\mu_x \quad \text{si } x \in R$$

Sea $\mathcal{G}$ la colección de conjuntos $E \subset \partial R$ tales que χ_E es resolutiva y $H_{\chi_E}(x) = \int \chi_E \, d\mu_x$ para $x \in R$ .Por el último resultado sabemos que $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{G}$.

Ahora, como $\chi_{\partial R} = 1$ y las funciones constantes son resolutivas entonces $\partial R \in \mathcal{G}$.

Supongamos que $E, F \in \mathcal{G}$ con $E \subset F$. Entonces $\chi_{F\sim E} = \chi_F - \chi_E$,y como χ_F y χ_E son resolutivas, entonces $\chi_{F\sim E}$ es resolutiva.

Por lo tanto tenemos que:

$$H_{\chi_{F\sim E}}(x) = H_{\chi_F}(x) - H_{\chi_E}(x) = \int \chi_F \, d\mu_x - \int \chi_E \, d\mu_x = \int \chi_{F\sim E} \, d\mu_x$$

Es decir que $\mathcal{G}$ es cerrado bajo diferencia propias.

Ahora supongamos que E_j es una sucesión creciente en $\mathcal{G}$ y sea $E = \bigcup_j E_j$.

De la observación del LEMA 3 tenemos que χ_E es resolutiva y:

$$H_{\chi_E}(x) = \lim_{j\to\infty} H_{\chi_{E_j}}(x) = \lim_{j\to\infty} \int \chi_{E_j} \, d\mu_x = \int \chi_E \, d\mu_x \qquad x \in R$$

Es decir, $\mathcal{G}$ es cerrado bajo uniones de sucesiones crecientes.

Por lo tanto $\mathcal{G}$ es un d-sistema que contiene a $\mathcal{F}_0$.

Entonces $\mathcal{G} \supset d(\mathcal{F}_0)$ y $\mathcal{G}$ contiene a los subconjuntos de Borel de ∂R de ahí que la función característica de todo subconjunto de Borel de ∂R sea resolutiva.

Entonces cualquier *función simple* Borel-medible χ en ∂R es resolutiva con $H_\chi(x) = \int \chi d\mu_x$, $x \in R$ (*ya* que puede ser aproximada uniformemente por combinaciones lineales de funciones caractrerísticas).

Y si f es una función Borel-medible no negativa en ∂R , entonces existe una sucesión $\{f_j\}$ de funciones simples Borel-medibles tal que $0 \leq f_j \leq f$ y $f_j \uparrow f$. Usando otra vez la observación al LEMA 3 y el *Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue* obtenemos que:

$$\underline{H}_f(x) = \overline{H}_f(x) = \lim_{j\to\infty} H_{f_j}(x) = \lim_{j\to\infty} \int f_j \, d\mu_x = \int f \, d\mu_x \qquad x \in R$$

Si f está acotada sólo inferiormente por α , entonces aplicamos el resultado a $f - \alpha$. ■

Sea f Borel medible en ∂R y sea W una componente de R.

Entonces f es resolutiva con respecto a R y $f|_{\partial W}$ es resolutiva respecto a W con soluciones de Dirichlet H_f^R y $H_{f|_{\partial W}}^W$ respectivamente.

Sabemos que $H_f^R = H_{f|_{\partial W}}^W$ en W . De ahí que el valor de $H_f = H_f^R$ en un punto $x \in W$ es independiente de los valores de f en $\partial R \sim \partial W$.

Por lo tanto $\mu_x(\partial R \sim \partial W) = 0$ para toda $x \in W$. Esto es, cada μ_x tiene soporte en la frontera de la componente que contiene a x .

Usando el mismo argumento tenemos que μ_x^W es la medida armónica relativa a x y a W, entonces μ_x^W es la restricción de μ_x a ∂W . ■

OBSERVACIÓN

La clase $\mathcal{F}_x$ de los conjuntos de la forma $(E \sim N) \cup (N \sim E)$, donde E es un subconjunto de Borel de ∂R y N es un subconjunto de Borel de ∂R de μ_x-medida cero, es una σ-álgebra de subconjuntos de ∂R.

Sea $\mathcal{F}$ la más pequeña de estas σ-álgebras. ($\mathcal{F}$ incluye a los subconjuntos de Borel de ∂R).

Como cada μ_x tiene una extensión única a $\mathcal{F}_x$ lo mismo es cierto para $\mathcal{F}$.

Denotamos a la extensión de μ_x a $\mathcal{F}$ por μ_x.

DEFINICIONES

◇ Los conjuntos en $\mathcal{F}$ son llamados *$\mu-$medibles* y las funciones reales extendidas relativas a $\mathcal{F}$ son llamadas *funciones μ-medibles*.

◇ La medida μ_x en $\mathcal{F}$ es llamada la *medida armónica* relativa a R y a x .

◇ Una función f , que sea μ-medible en ∂R , se dice que es *μ-integrable* si es integrable con respecto a cada μ_x, $x \in R$.

Teorema 3 (Brelot) *Sea R un abierto acotado.*

Una función de frontera f es resolutiva si y sólo si es μ-integrable. En este caso

$$H_f(x) = \int f \, d\mu_x$$

para toda $x \in R$.

4.3 LOS PUNTOS-FRONTERA REGULARES

DEFINICIÓNES

◇ Un punto $x \in \partial R$ es un *punto-frontera regular* si:

$$\lim_{y \to x} H_f(x) = f(x) \qquad \text{para toda } f \in C(\partial R)$$

En caso contrario x es un *punto frontera irregular.*

Cuando el contexto no se preste a confusión , diremos simplemente que x es *regular.*

◇ R es una *región regular* (o *Dirichlet*) si todo punto de ∂R es regular.

◇ Una función w es una *barrera* en $x \in \partial R$ si w está definida en $W \cap R$ para alguna vecindad W de x y si cumple las siguientes condiciones:

(i) w es sobrearmónica en $W \cap R$

(ii) $w > 0$ en $W \cap R$

(iii) $\lim_{\substack{y \to x \\ y \in W \cap R}} w(y) = 0$.

OBSERVACIONES

◇ *(Bouligand)* Sea R un abierto acotado.

Existe una barrera en $x \in \partial R$ si y sólo si hay una función positiva armónica h en R tal que:

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in R}} h(y) = 0$$

y:

$$\lim \inf_{\substack{y \to x' \\ y \in R}} h(y) > 0$$

para toda $x' \in \partial R$, con $x \neq x'$.

◇ Sea R un abierto acotado.

(i) Si f está acotada superiormente en ∂R y hay una barrera en x, entonces

$$\lim \sup_{\substack{y \to x \\ y \in R}} \overline{H}_f(y) \leq \lim \sup_{\substack{y \to x \\ y \in \partial R}} f(y)$$

(ii) Si f está acotada inferiormente en ∂R y hay una barrera en x, entonces

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in R}} \inf H_f(y) \geq \lim_{\substack{y \to x \\ y \in \partial R}} \inf f(y)$$

◇ De la observación anterior se desprende otro resultado importante:

Sea R un abierto acotado tal que existe una barrera en $x \in \partial R$, si f es acotada en ∂R y continua en x, entonces

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in R}} \overline{H}_f(y) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in R}} \underline{H}_f(y) = f(x)$$

Teorema 4 *Sea R abierto acotado.*

Un punto $x \in \partial R$ es un punto frontera regular si y sólo si hay una barrera en x.

Demostración:

La suficiencia se desprende directamente de la definición de punto frontera regular y de la última de las observaciones.

Demostremos la necesidad.

Supongamos que x es un punto frontera regular.

Definamos a la función:

$$m(y) = \|y - x\| \qquad y \in R$$

Definida de esta manera $H_m(y) \geq \|y - x\|$ y H_m resulta ser una barrera en x si $\lim_{y \to x} H_m(y) = 0$.

Pero como x es un punto frontera regular y m es continua en ∂R entonces tenemos que:

$$\lim_{y \to x} H_m(y) = m(x) = 0$$

■

Los siguientes son criterios de regularidad de un punto en términos de la naturaleza geométrica del abierto R.

Lema 6 *Si x es un punto frontera regular para el abierto acotado R y R_0 es un subconjunto abierto de R tal que $x \in \partial R_0$, entonces x es punto frontera regular para R_0.*

Demostración:

Basta notar que una barrera para R también es barrera para R_0. ■

Teorema 5 (*Poincaré*) *Sea R un abierto acotado.*

Si $x \in \partial R$ y existe una bola B tal que $B \cap R = \emptyset$ y $x \in \partial B$, entonces x es un punto frontera regular.

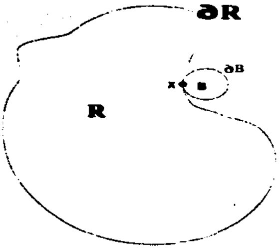

Figura 4-1: La bola tangente

Demostración:

Tomemos una bola contenida en R y tangente a ∂R en x; podemos considerar que $\partial B \cap \partial R = \{x\}$.

Si $B = B_{y,\rho}$, existe una constante c tal que $u_y + c = 0$ (u_y la función armónica fundamental con polo en y) en ∂B . La función $w = -(u_y + c)$ es una barrera en x. Por lo tanto x es un punto-frontera regular. ∎

Lema 7 ***Si x es un punto-frontera regular para el abierto acotado $R \subset E^2$ con la propiedad de que hay un segmento de recta $I \subset\sim R$ con x como extremo, entonces x es un punto-frontera regular.***

Demostración:

Consideremos a x como un numero complejo.

Sea $B = B_{x,\delta}$ una bola tal que $I \cap \partial B \neq \emptyset$ y $\delta < 1$.

La función $\log(z - x)$ puede definirse de manera continua en $B \sim I$ tomando la rama a la largo del rayo que comienza en x y en la dirección de I.

Sea la función w definida por:

$$w(z) = -\operatorname{Re}\left[\frac{1}{\log(z-x)}\right] = -\frac{\log|z-x|}{|\log(z-x)|^2}$$

Definida de esta manera w es sobrearmónica en $R \cap B$ ya que es la parte real de una función analítica en $R \cap B$ y $w > 0$ en $R \cap B$.

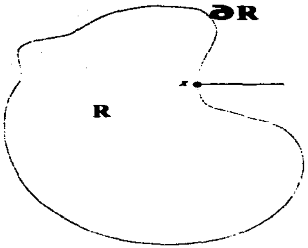

Figura 4-2: El segmento de recta

Es fácil ver que $\lim_{\substack{z\to x \\ z\in \overline{R}\cap B}} w(z) = 0$ y, por lo tanto, w es una barrera en x. ∎

El lema anterior se puede extender pidiendo la existencia de un continuo l (en vez de la existencia de un segmento de recta).

TEOREMA *(Lebesgue)*

Teorema 6 *Si x es un punto-frontera para el abierto acotado $R \subset E^2$ con la propiedad de que hay un continuo de puntos $l \subset \sim R$ con $x \in l$, entonces x es un punto-frontera regular.*

En particular si R es un conexo simple, entonces es una región regular.

El siguiente resultado elimina la dependencia de las dimensiones.

Teorema 7 (*Zaremba*) *Sea el abierto acotado $R \subset E^n$ $(n \geq 2)$.*

Si $x \in \partial R$ y hay un cono sólido y cerrado truncado contenido en $\sim R$ con vértice en x , entonces x es un punto-frontera regular.

Demostración:

Aunque el cono esté contenido en $\sim R$ puede ser que toque en más de un punto a ∂R .Reduciendo el ángulo del cono podemos asumir que sólo intersecta a ∂R en $\{x\}$.

Sea C_x dicho cono sólido cerrado con vértice x tal que para alguna $\rho > 0$, $C_x \cap \overline{B}_{x,\rho} \cap R = \emptyset$

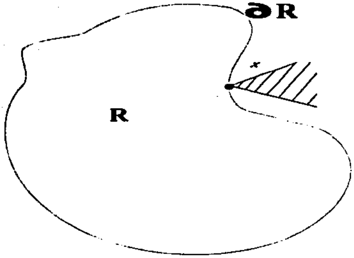

Figura 4-3: El cono truncado

Sea $R_0 = R \cup (B_{x,\rho} \sim C_x)$.

Entonces x es un punto-frontera de $R_0 \supset R$.

Si mostramos que x es un punto-frontera regular para R_0, tendríamos, usando el LEMA 7 del Capítulo 4, que es regular para R.

Para mostrar que x es regular para R_0 es suficiente mostrar que hay una función sobrearmónica positiva w en $B_{x,\rho} \sim C_x$ para la cual $\lim_{\substack{y \to x \\ y \in B_{x,\rho} \sim C_x}} w(y) = 0$. En otras palabras, es suficiente probar que x es regular para $B_{x,\rho} \sim C_x$.

Consideremos que $R = B_{x,\rho} \sim C_x$.

Sea la función:

$$m(y) = \|y - x\| \qquad y \in \partial R$$

Como en la prueba del TEOREMA 4.7 tenemos que $H_m(z) \geq \|z - x\| > 0$ para $z \in \partial R$.

Como H_m es armónica en R , sólo necesitamos mostrar que $\lim_{\substack{z \to x \\ z \in R}} H_m(z) = 0$.

Por el TEOREMA 8, todos los puntos frontera de R, excepto quizás x , son regulares. Como m es una función-frontera continua tenemos que:

$$\lim_{\substack{z \to y \\ z \in R}} H_m(z) = \|y - x\| \qquad y \in \partial R \sim \{x\}$$

Sea $R_2 = \{x + 2(y - x) : y \in R\}$ y sea $r(y) = \|y - x\|$ para $y \in \partial R_2$.

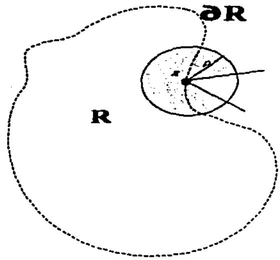

Figura 4-4: La vecindad del cono

Consideremos la solución de Dirichlet H_r correspondiente a la región R_2 y a la función de frontera r. Claramente $m = \rho$ en $\partial R \cap \partial B_{x,\rho}$ y $r = 2\rho$ en $\partial R_2 \cap \partial B_{x,2\rho}$.

Definamos a la función u en $\overline{R}_2 \sim \{x\}$ por:

$$u(y) = \begin{cases} H_r(y), & y \in R_2 \\ r(y) = \|y - x\|, & y \in \partial R_2 \sim \{x\} \end{cases}$$

y otra función v en $\overline{R} \sim \{x\}$ por:

$$v(y) = u(x + 2(y - x))$$

En $\partial R_2 \cap \partial B_{x,2\rho}$ tenemos que $u = 2\rho$.

Además $v = 2\rho$ en $\partial R \cap \partial B_{x,\rho}$. Como u satisface el principio del máximo en R_2 entonces $u \leq \alpha' < \alpha = 2\rho$ en $\partial R \cap \partial B_{x,\rho}$.

Si incremantamos α' la desigualdad no se afecta siempre que $\alpha' < \alpha$.

Consideremos entonces que $\alpha'/\alpha > \frac{1}{2}$. Entonces $u \leq \alpha' < \alpha$ en $\partial R \cap \partial B_{x,\rho}$. En el resto de $\partial R \sim \{x\}$. tenemos que $u = \left(\frac{1}{2}\right) v < \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right) v$, o sea $u < \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right) v$ en $\partial R \sim \{x\}$. Usando que $u - \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right) v$ es armónica en R y que $\limsup_{\substack{z \to y \\ z \in R}} \left[u - \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right) v\right] \leq 0$ para toda $y \in \partial R \sim \{x\}$, se puede demostrar que

$u - \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)v \leq 0$ en R.
Entonces

$$u(y) \leq \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)u\,(x + 2(y - x)) = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)u(2y - x) \qquad y \in R$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\limsup_{\substack{y \to x \\ y \in R}} u(y) \leq \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right) \limsup_{\substack{y \to x \\ y \in R}} u(2y - x) = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right) \limsup_{\substack{y \to x \\ y \in R}} u(y)$$

Y, como $\alpha'/\alpha < 1$, entonces:

$$\limsup_{\substack{y \to x \\ y \in R}} u(y) = \limsup_{\substack{y \to x \\ y \in R}} H_r(y) = 0$$

Esto se cumple independientemente de $\rho > 0$, por lo tanto $\lim_{\substack{z \to x \\ z \in R}} H_m(z) = 0$. ∎

Capítulo 5

FRONTERA DE MARTIN

Se sabe que una función armónica positiva en una bola puede ser expresada por la integral de Poisson a través de una medida definida sobre la frontera de la bola. La *Teoría de la Frontera de Martin* generaliza estos resultados.

Sea R abierto conexo $R \subset E^n$ y sea h una función armónica positiva sobre R.

Sea $\widehat{\mathcal{R}}^h_{R_j}$ el balayage de h.

Considérese la sucesión creciente de abiertos $\{R_j\}$ con cerraduras compactas $\overline{R}_j \subset R$ tal que $R = \cup R_j$.

De las propiedasdes del balayage tenemos que $h = \widehat{\mathcal{R}}^h_{R_j}$ en R_j. Ahora como $\overline{R}_j \subset R$ y $\overline{R}_j$ es compacto sabemos, también de las propiedades del balayage, que existe una medida μ_j sobre R tal que:

$$\widehat{\mathcal{R}}^h_{\overline{R}_j}(x) = \int_R G(y,x)\, d\mu_j(y) \qquad x \in R$$

Y como $\widehat{\mathcal{R}}^h_{\overline{R}_j} = h$ armónica en $int\,(\overline{R}_j) = R_j$ y, nuevamente usando las propiedades del balayage tenemos que $\widehat{\mathcal{R}}^h_{\overline{R}_j}$ es armónica en $R \sim \overline{R}_j$. Por lo tanto, usando el TEOREMA 5 del Capítulo 2, encontramos que μ_j tiene soporte en ∂R_j.

Pero, como demostramos a continuación $\widehat{\mathcal{R}}^h_{R_j} = \widehat{\mathcal{R}}^h_{\overline{R}_j}$.

Si h es armónica positiva y $_R$ es el conjunto de las funciones sobrearmónicas entonces:

$$\Phi^h_E = \{v \in {}_R : v \geq 0 \text{ en } R,\ v \geq h \text{ en } E\}$$

$$\mathcal{R}^h_E = \inf\{v \in \Phi^h_E\} = h$$

O sea $\mathcal{R}^h_{R_j} = h$ en R, de la misma manera se obtiene que $\mathcal{R}^h_{\overline{R}_j} = h$ en R. Entonces $\mathcal{R}^h_{R_j} = \mathcal{R}^h_{\overline{R}_j}$ y

$\widehat{R}^h_{R_j} = \widehat{R}^h_{R_j}$ en R.

De esta manera tenemos que:

$$\widehat{R}^h_{R_j}(x) = \int_{\partial R_j} G(y,x)\, d\mu_j(y) \qquad x \in R,\ sop_{\mu_j} \subset \partial R_j$$

Considérese ahora a $x \in R$ fija.

Como la función de Green se anula en la frontera se puede decir que:

$$G(y,x) \longrightarrow 0 \text{ cuando } j \longrightarrow \infty \quad y \in \partial R_j$$

de esta manera necesariamente $\mu_j \longrightarrow \infty$ para mantener el valor de $\widehat{R}^h_{R_j}$.

Entonces $\{\mu_j\}$ sería no acotada y no se esperaría que existiera algún límite μ para las μ_j 's.

Sin embargo Martin propuso lo siguiente:

Sea $x_0 \in R_1$ fija. Sabemos que para $x \in R$ y $y \in \partial R_j$:

$$\widehat{R}^h_{R_j}(x) = \int_{\partial R_j} \frac{G(y,x)}{G(y,x_0)}\, G(y,x_0)\, d\mu_j(y)$$

$$= \int_{\partial R_j} M(x,y)\, d\mu_j^*(y)$$

donde

$$M(x,y) = \frac{G(y,x)}{G(y,x_0)}$$

y y $\forall E$ boreliano de R, $E \subset R$ tenemos:

$$\mu_j^*(E) = \int_E G(y,x_0)\, d\mu_j(y)$$

Hay que notar que $\{\mu_j^*\}$ es acotada, ya que:

$$\mu_j^*(R) = \int_R G(y,x_0)\, d\mu_j(y) = \widehat{R}^h_{R_j}(x_0) = h(x_0) < \infty$$

Entonces se puede definir el $w^* - \textit{límite}$ de las μ_j^* 's como μ. (Ver El **Apéndice**)

Ahora, $sop_{\mu_j} \subset \partial R_j$ y sop_{μ_j} se "expande" con $j \longrightarrow \infty$.La teoría de la Frontera de Martin considerará un conjunto compacto R_M^*, tal que $R \subset R_M^*$, donde las funciones $M(\cdot,x)$ sean extendidas continuamente.

De manera que se tenga:

$$h(x) = \int_{\partial R^*_M} M(y,x)\,d\mu(y)$$

5.1 LA FONTERA DE MARTIN

Sea R abierto conexo $R \subset E^n$ con función de Green G. La conexidad implica que $G > 0$ en $R \times R$. Considérese que el punto al infinito pueda pertenecer a ∂R pero no a R.

Se define:

$$\Sigma(R) = \{f : R \to [-\infty, +\infty] \text{ tal que } f \text{ es continua de manera extendida}\}$$

DEFINICIÓN

R^* es una *compactificación* de R si:

i) R es un subconjunto denso de R^*

ii) La topología correspondiente restringida a R coinicide con la original

$\Delta = R^* \sim R$ se llama la *frontera ideal* de R relativa a R^*.

DEFINICIÓN

Sea $\mathcal{F} \subset \Sigma(R)$. Una compactificación $R^*_{\mathcal{F}}$ de R es una $\mathcal{F}-$*compactificación* si:

i) Cada $f \in \mathcal{F}$ tiene una extensión continua f^* en $R^*_{\mathcal{F}}$.

ii) f^* y f separan puntos de $\Delta_{\mathcal{F}} = R^*_{\mathcal{F}} \sim R$ (es decir, si $x, y \in \Delta_{\mathcal{F}}$ con $x \neq y$, entonces $f^*(x) \neq f^*(y)$).

Afortunadamente existe un teorema que garantiza la existencia de ESTAS compactificaciones.

TEOREMA. *(Constantinescu, Cornea)*

Si $\mathcal{F} \subset \Sigma(R)$, entonces R tiene una única $\mathcal{F}-$*compactificación*, salvo un homeomorfismo.

El desarrollo de la teoría de Martin requiere de cotas para las razones del tipo $\dfrac{\widehat{R}^w_V}{\widehat{R}^1_V}$, donde V es un abierto $V \subset R$ y w es una función sobrearmónica en V. Estas cotas se obtienen en función de las cotas de w en $\partial \dot{V}$.

Sea $F \subset R$, F abierto y no polar.

Sea $V = R \sim F$.

Si $w \in {}^{+}_{R}$ se define:

$$w_V = \begin{cases} w \text{ en } \partial F \\ \\ 0 \text{ en } \partial R \end{cases}$$

De esta manera si $w|_{\partial F}$ es una función continua y acotadad en ∂F, entonces w_V está acotada en ∂V, y w_V es resolutiva para V con solución de Dirichlet $H^V_{w_V}$.

Sabemos que $\widehat{\mathcal{R}}^w_F = H^V_{w_V}$ en V.

Como F no es polar ∂F tampoco lo es, y algún punto $x \in \partial F$ debe ser punto regular de frontera para V (de otro modo no existirían barreras en x).

Ahora, por el TEOREMA 9 del Apéndice:

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in V}} \widehat{\mathcal{R}}^1_F(x) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in V}} H^V_{1_V}(x) = 1 \qquad \text{para } x \text{ en } V$$

entonces $\widehat{\mathcal{R}}^1_F > 0$ en V.

Si $a \leq w \leq b$ en ∂F, entonces $1a \leq w_V \leq 1b$ y tenemos:

$$aH^V_{1_V} = H^V_{a1_V} \leq H^V_{w_V} \leq H^V_{b1_V} = bH^V_{1_V} \qquad \text{en } V$$

entonces:

$$a\widehat{\mathcal{R}}^1_F \leq \widehat{\mathcal{R}}^w_F \leq b\widehat{\mathcal{R}}^1_F \qquad \text{en } V$$

$$a \leq \frac{\widehat{\mathcal{R}}^w_F}{\widehat{\mathcal{R}}^1_F} \leq b \qquad \text{en } V$$

Lema 1 *Si K es compacto con $K \subset R$, W es una vecindad de K con $\overline{W} \subset R$, y $x_0 \in K$, entonces*

$$\sup\left\{\frac{G(y,x)}{G(y,x_0)} : x \in K,\ y \in R \sim W\right\} < \infty$$

Demostración:

Sea U una vecindad de K tal que $F = \overline{U} \subset W$.

Entonces F no es polar.

Ahora G es continua en $\partial F \times K$, además $G > 0$. Es decir existen constantes $a, b > 0$ tales que $a \leq G(y,x) \leq b$ en $\partial F \times K$.

Sean $x \in K$ fija y $V = R \sim F$.

Demostraremos que $\widehat{\mathcal{R}}^{G(\cdot,x)}_F = G(\cdot,x)$ en V.

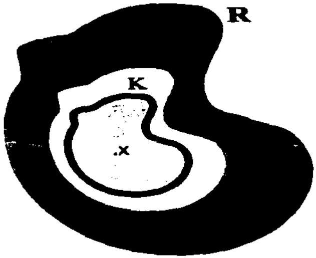

Figura 5-1: La acotación

Si $y \in \partial F$, entonces $\lim_{\substack{z \to y \\ z \in V}} G(z,x) = G(y,x)$; si $y \in \partial R$, entonces $\lim_{\substack{z \to y \\ z \in V}} G(z,x) = 0$ excepto quizás en un conjunto polar.

Entonces tenemos que:

$$\lim_{\substack{z \to y \\ z \in V}} H^V_{G_V(\cdot,x)}(z) = G(y,x) \ y \in \partial F \text{ excepto quizás en un polar}$$

y

$$\lim_{\substack{z \to y \\ z \in V}} H^V_{G_V(\cdot,x)}(z) = 0 \ y \in \partial R \text{ excepto quizás en un polar}$$

de donde se obtiene:

$$\lim_{\substack{z \to y \\ z \in V}} \left[H^V_{G_V(\cdot,x)}(z) - G(z,x) \right] = 0 \ y \in \partial V \text{ excepto quizás en un polar}$$

Sabemos que $G(\cdot,x)$ está acotadad fuera de toda bola con centro en x, entonces la expresión entre corchetes está acotada en V.

Como además esta expresión es armónica en V, entonces es idénticamente cero en V por el COROLARIO (*Bouligand*) al LEMA 6 del Apéndice. Es decir:

$$G(\cdot,x) = H^V_{G_V(\cdot,x)} = \widehat{R}_F^{G(\cdot,x)} \qquad \text{en } V$$

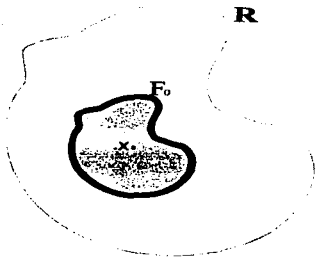

Figura 5-2: El conjunto F_0

Sustituyendo en la desigualdad que encontramos más arriba obtenemos:

$$0 < \frac{G(\cdot,x)}{G(\cdot,x_0)} = \frac{\widehat{R}_F^{G(\cdot,x)}}{\widehat{R}_F^{G(\cdot,x_0)}} = \frac{\widehat{R}_F^{G(\cdot,x)}}{\widehat{R}_F^1}\,\frac{\widehat{R}_F^1}{\widehat{R}_F^{G(\cdot,x_0)}} \leq \frac{b}{a} \quad \text{para } x_0 \in R$$

■

DEFINICIÓN

Sea $x_0 \in R$ fija. Se define α_0 de manera que:

$$F_0 = \{y \in R : G(y,x_0) \geq \alpha_0\}$$

sea compacto.

Ahora, $F_0 \neq \emptyset$ ya que $x_0 \in F_0$.

Por la s.c.i. de G se tiene que F_0 es cerrado. Y ya que existe una bola que contiene a x_0 tal que $G(\cdot,x_0)$ está acotada fuera de esa bola, se tiene que F_0 está acotado.

DEFINICIÓN

$\Phi : (-\infty,+\infty) \longrightarrow (-\infty,\alpha_0+\frac{1}{2})$ es una función tal que

i) $\Phi \in C^2(-\infty,+\infty)$

ii) $\Phi(t) = \begin{cases} t, \ t \leq \alpha_0 \\ \\ \alpha_0 + \frac{1}{2}, \ t \geq \alpha_0 + 1 \end{cases}$

iii) $\Phi''(t) \leq 0$

Demostremos que $u(y) = \Phi\left(G(y, x_0)\right)$ es sobrearmónica en R.

Por la manera en que está definida $\Phi\left(G(\cdot, x_0)\right)$ es constante en una vecindad de x_0, entonces es sobrearmónica ahí.

Si $x \neq x_0$, entonces:

$$\Delta u = \Phi'\left(G(\cdot, x_0)\right) \Delta G(\cdot, x_0) + \Phi''\left(G(\cdot, x_0)\right) \left(\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} G(\cdot, x_0) \right]^2 \right)$$

Como $G(\cdot, x_0)$ es armónica en $R \sim \{x_0\}$, $\Delta u \leq 0$ en $R \sim \{x_0\}$.

Por lo tanto $\Phi\left(G(\cdot, x_0)\right)$ es sobrearmónica en R.

Ahora como $\Phi \in \mathcal{C}^2$ y $\Phi\left(G(\cdot, x_0)\right)$ es constante en una vecindad de x_0, entonces $\Phi\left(G(\cdot, x_0)\right)$ tiene segundas derivadas parciales continuas.

Hay que notar también que $\Phi\left(G(y, x_0)\right) = G(y, x_0)$ si $y \notin F_0$.

DEFINICIÓN

Sea el conjunto:

$$M = \left\{ f \in \sum(R) : f = \frac{G(\cdot, x)}{\Phi\left(G(\cdot, x_0)\right)} \text{ para alguna } x \in R \right\}$$

La M-compactificación de R : R^*_M, es la *compactificación de Martin*.

$\Delta_M = R^*_M \sim R$ es la *frontera de Martin*.

Ahora dada $y \in R$ se toma:

$$k(y, \cdot) = \frac{G(y, \cdot)}{\Phi\left(G(y, x_0)\right)}$$

Esta función tiene extensión continua a R^*_M para cada $x \in R$. Es decir, $\lim_{\substack{z \to y \\ z \in R}} k(z, x)$ para $x \in R$ está definida para cada $y \in \Delta_M$.

DEFINICIÓN

Sea $x \in R$, para cada $y \in \Delta_M$ se define:

$$K(y,x) = \begin{cases} k(y,x) \ y \in R \\ \\ \lim_{\substack{z \to y \\ z \in R}} k(z,x) \ y \in \Delta_M \end{cases}$$

$K(y,\cdot)$ es la *función de Martin con polo* y .

Lema 2 *Sea $K(y,\cdot)$ la función de Martin con polo y .*

a) Si C es un compacto $C \subset R$ y F es cerrado $F \subset R_M^* \sim C$, entonces:

$$\sup\{K(y,x) : x \in C \ \ y \ y \in F\} < +\infty$$

b) Para cada $y \in \Delta_M$ $K(y,\cdot)$ es armónica en R.

c) $K > 0$ y continua de manera extendida en $R_M^* \times R$.

Demostración:

◇ Probemos primero (a).

Sea el abierto $W \subset R$ con $\overline{W} \subset R$ tal que $C \subset W$.

Es suficiente probar que $\sup\{K(y,x) : x \in C \text{ y } y \in R_M^* \sim W\} < +\infty$, es decir tomemos $F = R_M^* \sim W$.

Sea el abierto V tal que $\overline{V} \subset R$ y $F_0 \subset V$. Para cada $y \in R \sim V$ tenemos que:

$$K(y,x) = \frac{G(y,x)}{\Phi\left(G(y,x_0)\right)} = \frac{G(y,x)}{G(y,x_0)}$$

entonces pore el LEMA 1 (de este capítulo):

$$\sup\{K(y,x) : x \in C \text{ y } y \in (F \sim V) \cap R\} < +\infty$$

Como $K(y,x)$ es continua en $(F \cap \overline{V}) \times C$ entonces:

$$\sup\left\{K(y,x) : x \in C \text{ y } y \in \left(F \cap \overline{V}\right) \cap R\right\} < +\infty$$

por lo tanto:

$$\sup\{K(y,x) : x \in C \text{ y } y \in F \cap R\} < +\infty$$

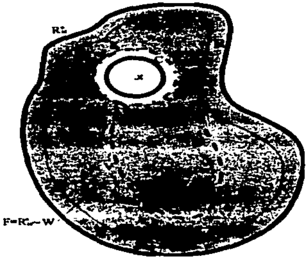

Figura 5-3: Otra acotación

Ahora, si $x \in C$ y $y \in \Delta_M$, entonces:

$$K(y,x) = \lim_{\substack{z \to y \\ z \in R \sim W}} K(z,x)$$

y entonces (por lo anterior $K(z,x)$ está acotada en $(F \cap R) \times C$) tenemos que K está acotadad en $F \times C$.

◇ Demostremos (b).

Sean los abiertos V, W tales que $\overline{V}, \overline{W} \subset R$ y $\overline{W} \subset V$.

Sea la sucesión $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subset R \sim V$ tal que $\lim_{n \to \infty} y_n = y$.

Por el inciso anterior las $K(y_n, \cdot)$ están uniformemente acotadas.

Además como $W \subset V$ tenemos que las $K(y_n, x) = \dfrac{G(y_n, x)}{\Phi\left(G(y_n, x_0)\right)}$ son funciones armónicas de $x \in W$.

Como $K(y, \cdot) = \lim_{n \in \mathcal{U}} K(y_n, \cdot)$ en W, entonces $K(y, \cdot)$ es armónica en W .

◇ Consideremos ahora a (c).

Como $K(y,x) = \dfrac{G(y,x)}{\Phi\left(G(y,x_0)\right)}$ en $R \times R$, tenemos que $K(\cdot,\cdot)$ es continua en $R \times R$.

Demostremos que $K(y', x')$ es continua para $(y', x') \in \Delta_M \times R$.

Sean los abiertos V, W tales que $\overline{V}, \overline{W} \subset R$ y $x' \in W \subset \overline{W} \subset V$. Consideremos $K(y, \cdot)$ como función sobre W para $y \in R^*_M \sim V$.

Entonces $\{K(y, \cdot) : y \in R^*_M \sim V\}$ es una familia de funciones armónicas uniformemente acotadas y

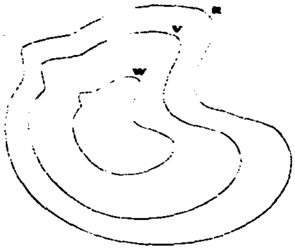

Figura 5-4: La K acotada

por lo tanto una familia equicontinua (Helms). Es decir, $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que:

$$\|x - x'\| < \delta \ ,\ y \in R_M^* \sim V \Longrightarrow |K(y,x) - K(y,x')| < \frac{\epsilon}{2}$$

Ahora, si $\|x - x'\| < \delta$ entonces:

$$|K(y,x) - K(y',x')| < \frac{\epsilon}{2} + |K(y,x') - K(y,x')|$$

para $y \in R_M^* \sim V$.

Como $K(\cdot, x')$ tiene extensión continua a R_M^* entonces:

$$\lim_{(y,x)\to(y',x')} K(y,x) = K(y',x')$$

Concluímos entonces que K es continua en $R_M^* \times R$.

◇ Demostremos que $K(y,\cdot) > 0$ en $R\ \forall y \in R_M^*$.

Si $y \in R \sim F_0$, entonces:

$$K(y,x_0) = \frac{G(y,x_0)}{\Phi(G(y,x_0))} = 1$$

Si $y \in \Delta_M$, entonces $K(y,x_0) = \lim_{\substack{z\to y\\ z\in R\sim F_0}} K(z,x_0) = 1$, y como $K(y,\cdot)$ es armónica en R, entonces $K(y,\cdot) > 0$ en R si $y \in \Delta_M$.

Si $y \in R$, entonces $K(y,x) = \dfrac{G(y,x)}{\Phi\,(G(y,x_0))} > 0$ para $x \in R$. ■

Lema 3 *Si $f \in M$ y f^* es su extensión continua sobre R^*_M, entonces $\exists\, \lambda_1, \lambda_2$ medidas con soportes compactos en R tales que:*

$$f^*(y) = \frac{\displaystyle\int_R K(y,z)\,d\lambda_1(z)}{\displaystyle\int_R K(y,z)\,d\lambda_2(z)} \qquad \text{para } y \in R^*_M$$

Demostración:

Como $f \in M$, para alguna $x \in R$:

$$f(y) = \frac{G(y,x)}{\Phi\,(G(y,x_0))}$$

Sabemos que $\Phi\,(G(y,x_0))$ es sobrearmónica mayor que cero.

Por elección de Φ podemos obtener $\Phi\,(G(y,x_0))$ potencial de una medida λ_2 con soporte compacto; ya que $\Phi\,(G(y,x_0)) = G(y,x_0) > 0$ para $y \in R \sim F_0$, donde F_0 es un compacto.

Sea λ_1 la medida unitaria con soporte $\{x\}$,entonces tenemos que:

$$\text{(a)} \quad f(y) = \frac{\displaystyle\int_R G(y,z)\,d\lambda_1(z)}{\displaystyle\int_R G(y,z)\,d\lambda_2(z)} = \frac{\displaystyle\int_R \left[\frac{G(y,z)}{\Phi\,(G(y,x_0))}\right] d\lambda_1(z)}{\displaystyle\int_R \left[\frac{G(y,z)}{\Phi\,(G(y,x_0))}\right] d\lambda_2(z)}$$

Supongamos que $sop_{\lambda_1}, sop_{\lambda_2} \subset C$, donde C es un compacto y $C \subset R$.

Sea W vecindad de C, $\overline{W} \subset R$.

Usando que K es continua sobre $(R^*_M \sim W) \times C$ y el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, obtenemos que (a) tiene una extensión continua a $R^*_M \sim W$:

$$\text{Si } g_i(y') = \int_R k(y',z)\,d\lambda_i(z) \text{ para } y' \in R \sim W,$$

y si:

$$\gamma_i(y) = \int_R K(y,z)\,d\lambda_i(z) \text{ para } y \in R^*_M \sim W$$

entonces:

$$g_i(y') \to \gamma_i(y) \text{ cuando } y' \to y$$

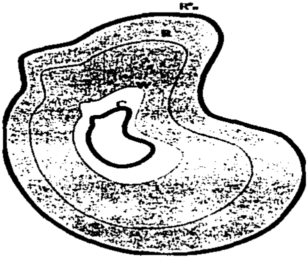

Figura 5-5: La K es continua

Si $y \in W$, $K(y,z) = k(y,z)$ y también vale la convergencia anterior.

Por lo tanto:

$$f^*(y) = \frac{\int_R K(y,z)\, d\lambda_1(z)}{\int_R K(y,z)\, d\lambda_2(z)} \qquad y \in R^*_M$$

■

COROLARIO

Si $y_1, y_2 \in R^*_M$ y $y_1 \neq y_2$, entonces $K(y_1, \cdot)$ y $K(y_2, \cdot)$ no son proporcionales.

DEFINICIÓN

Sea μ medida de Borel en R^*_M .

El *K-potencial de* μ es:

$$K\mu(x) = \int_{R^*_M} K(y,x)\, d\mu(y) \qquad x \in R \text{ (si } K\mu \neq \infty \text{ en } R)$$

OBSERVACIONES

i) K no es simétrica

ii) $K\mu$ es sobrearmónica

Lema 4 *Sea f función sobre R con $sop_f = C$ compacto; y f con segundas derivadas parciales continuas, entonces $\exists\lambda$ carga sobre R con $sop_\lambda = C$ tal que:*

$$f(y) = \int_R K(y,x)\, d\lambda(x)$$

Además $K\mu$ es $\lambda-$ integrable.

Demostración:

Sea $g(y) = f(y)\Phi\left(G(y,x_0)\right)$.

Consideremos la ecuación de Poisson:

$$\tilde{\Delta} u = -\kappa_n(-\frac{\Delta g}{\kappa_n}) \text{ en } R \text{ y con } \kappa_n \text{ constante}$$

Sabemos de las observaciones del Capítulo 2 (Potenciales de Green) que tiene soluciones g y $G\left(-\frac{\Delta g}{\kappa_n}\right) = \int G(x,y)\left(-\frac{\Delta g(x)}{\kappa_n}\right) dx$ con $G\left(-\frac{\Delta g}{\kappa_n}\right)$ continua en R.

Y como $G\left(-\frac{\Delta g}{\kappa_n}\right)$ está acotada en C y es armónica en $\sim C$, obtenemos que está acotada en R.

Además si $x \in \partial R$, tenemos que:

$$\lim_{z\to x} G\left(-\frac{\Delta g}{\kappa_n}\right)(z) = 0$$

ya que Δg se anula en $\sim C$.

Tomemos $v = g - G\left(-\frac{\Delta g}{\kappa_n}\right)$.

Por su definición v es continua en R y $\tilde{\Delta} v = 0$; entonces, usando nuevamente las obsevaciones del Capítulo 2 (Potenciales de Green), v es armónica en R. Además está acotada en R y $\lim_{\substack{z\to x\\ x\in\partial R}} v(z) = 0$.

De lo anterior concluímos que $v = 0$ en R, es decir $g = G\left(-\frac{\Delta g}{\kappa_n}\right)$.

Tomemos $\forall E$ boreliano de R:

$$\lambda(E) = \int_E -\frac{\Delta g(x)}{\kappa_n}\, dx$$

Entonces podemos escribir:

$$f(y) \circledast (G(y, x_0)) = \int_R G(y, x)\, d\lambda(x) \qquad \cdot y \in R$$

y entonces:

$$f(y) = \int_R K(y, x)\, d\lambda(x) \qquad y \in R$$

De esta manera $K\mu$ es $\lambda-$ integrable ya que: $K\mu$ es sobrearmónica. de donde $K\mu$ es integrable en compactos, y λ es una medida acotada absolutamente continua respecto a la de Lebesgue que se anula en $\sim C$. ∎

Lema 5 *Sean μ, ν medidas sobre R^*_M; $K\mu$ y $K\nu$ definidas y tales que $K\mu = K\nu$ entonces:*

$$\mu = \nu \qquad en\ R$$

Demostración:

Sea f continua con soporte compacto y segundas derivadas parciales continuas. Sabemos que f se puede escribir como

$$f(y) = \int_R K(y, x)\, d\lambda(x)$$

Integrando respecto a μ :

$$f\mu = (K\lambda)\,\mu = (K\mu)\lambda = (K\nu)\lambda$$

$$= (K\lambda)\,\nu = f\nu$$

y como es para toda f continua con soporte compacto y segundas derivadas parciales continuas (**Brésis**) entonces:

$$\mu = \nu$$

∎

OBSERVACIÓN

R^*_M es metrizable.

Sea $\{x_j\}_{j\geq 1}$ subconjunto numerable y denso de R se define:

$$\rho(y_1, y_2) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left| \frac{K(y_1, x_j)}{1 + K(y_1, x_j)} - \frac{K(y_2, x_j)}{1 + K(y_2, x_j)} \right|$$

ρ es una métrica en R_M^* compatible con su topología.

5.2 LA REPRESENTACIÓN DE MARTIN

Lema 6 *Sea u sobrearmónica positiva sobre R.*

Sea $F \subset R$, F cerrado con respecto a R.

Entonces $\exists \mu$ medida sobre $\overline{F}$ (cerradura con respecto a R_M^*) tal que:

$$\widehat{R}_F^u = \int_{\overline{F}} K(z,\cdot)\, d\mu(z) \quad \text{en } R$$

Demostración:

Sea $\{F_j\}$ sucesión creciente de subconjuntos de R tal que F_j es compacto $\forall j$ y $F = \cup F_j$.

Usando las propiedades del balayage tenemos que para cada j $\exists \nu_j$ medida con soporte compacto en F_j tal que:

$$\widehat{R}_{F_j}^u = \int G(z,\cdot)\, d\nu_j(z) \quad \text{en } R$$

y podemos escribir:

$$\widehat{R}_{F_j}^u = \int_{F_j} \frac{G(z,\cdot)}{\Phi\,(G(z,x_0))}\, \Phi\,(G(z,x_0))\, d\nu_j(z)$$

Definamos para cada boreliano E de R_M^* la medida:

$$\mu_j(E) = \int_{E\cap R} \Phi\,(G(z,x_0))\, d\nu_j(z)$$

de manera que:

$$\widehat{R}_{F_j}^u = \int_{F_j} K(z,\cdot)\, d\mu_j(z) \quad \text{en } R$$

Ahora tomemos $x_1 \in R$ tal que $u(x_1) < +\infty$.

Como K es continua de manera extendida en $R_M^* \times R$ tenemos que existe β_1 tal que:

$$\beta_1 = \inf_{z\in R_M^*} K(z,x_1) > 0$$

y

$$u(x_1) \geq \widehat{R}_{F_j}^u(x_1) = \int_{F_j} K(z,x_1)\, d\mu_j(z) \geq \beta_1\, \mu_j(F_j) = \beta_1\, \mu_j(\overline{F_j})$$

Por lo tanto para la sucesión $\{\mu_j\}$ existe μ medida sobre R_M^* con soporte en $\overline{F}$ tal que:

$$\mu_j \longrightarrow \mu \;\; \text{en la } w^*\text{-}topología.$$

Usando nuevamente las propiedades del balayage tenemos para la sucesión creciente $\left\{\widehat{R}^{u}_{F_j}\right\}$ que:

$$\lim_{j\to\infty} \widehat{R}^{u}_{F_j} = \widehat{R}^{u}_{F}$$

es decir:

$$\int_{F_j} K(z,\cdot)\, d\mu_j(z) \uparrow \widehat{R}^{u}_{F} \quad \text{cuando } j \to \infty$$

Sin embargo, como la $K(z,\cdot)$ es continua sólo de manera extendida, no sabemos cuál es la realción entre $\widehat{R}^{u}_{F}$ y la μ.

Sean $x \in R$, $\overline{B}_{x,\delta} \subset R$.

Tomemos ν_δ una medida uniformetmente distribuída en $\partial B_{x,\delta}$. Sabemos que $\widehat{R}^{u}_{F_j}$, por ser sobrearmónica positiva, es integrable respecto a la medida de superficie.

$$\int_{\partial B_{x,\delta}} \widehat{R}^{u}_{F_j}(y)\, d\nu_\delta(y) = \int_{\partial B_{x,\delta}} \left[\int_{F_j} K(z,y)\, d\mu_j(z)\right] d\nu_\delta(y) = \int_{F_j} \left[\int_{\partial B_{x,\delta}} K(z,y)\, d\nu_\delta(y)\right] d\mu_j(z)$$

Sea la función $v : R^*_M \longrightarrow \bar{R}^* = [-\infty, +\infty]$ definida por:

$$v(z) = \int_{\partial B_{x,\delta}} K(z,y)\, d\nu_\delta(y) \qquad z \in R^*_M$$

Por las propiedades de continuidad y acotamiento de la K obtenemos, usando el *Teorema de la convergencai dominada de Lebesgue*, que la v es continua en $R^*_M \sim \partial B_{x,\delta}$.

Para $z \in R$ tenemos que:

$$v(z) = \int_{\partial B_{x,\delta}} K(z,y)\, d\nu_\delta(y) = \int_{\partial B_{x,\delta}} \frac{G(z,y)}{\Phi\,(G(z,x_0))}\, d\nu_\delta(y)$$

$$= \frac{L\,(G(z,\cdot) : x, \delta)}{\Phi\,(G(z,x_0))}$$

Sabemos que $L\,(G(z,\cdot) : x,\delta)$ es continua para $z \in \partial B_{x,\delta}$. Por lo tanto es continua en R^*_M.

Ahora podemos concluir, por la convergencia de la μ, que:

$$\int_{\partial B_{x,\delta}} \widehat{R}^{u}_{F_j}(y)\, d\nu_\delta(y) = \int_{F_j} \left[\int_{\partial B_{x,\delta}} K(z,y)\, d\nu_\delta(y)\right] d\mu_j(z) \longrightarrow \int_{\overline{F}} \left[\int_{\partial B_{x,\delta}} K(z,y)\, d\nu_\delta(y)\right] d\mu(z)$$

y como:

$$\int_{\partial B_{x,\delta}} \widehat{R}^{u}_{F_j}(y)\, d\nu_\delta(y) \to \int_{\partial B_{x,\delta}} \widehat{R}^{u}_{F}(y)\, d\nu_\delta(y)$$

entonces:

$$\int_{\partial B_{x,\delta}} \widehat{R}^{u}_{F}(y)\, d\nu_\delta(y) = \int_{F} \left[\int_{\partial B_{x,\delta}} K(z,y)\, d\nu_\delta(y)\right] d\mu(z) = \int_{F} \left[\int_{\partial B_{x,\delta}} K(z,y)\, d\mu(z)\right] d\nu_\delta(y)$$

es decir:

$$\text{(a)} \qquad L\left(\widehat{R}^{u}_{F} : x, \delta\right) = L\,(K\mu, x, \delta)$$

Sabemos que $\widehat{R}^{u}_{F}$ es sobrearmónica.

Para mostrar que $K\mu$ también es sobrearmónica hay que ver que no sea idénticamente $+\infty$.

Sabemos (de las observaciones del Capítulo 3) que si una sucesión de medidas $\{\mu_j\}$ converge en la *w*-topología* a μ entonces se tiene que $G\mu \leq \liminf_{j\to\infty} G\mu_j$. Entonces:

$$u \geq \widehat{R}^{u}_{F} = \lim_{j\to\infty} \widehat{R}^{u}_{F_j} = \lim_{j\to\infty} K\mu_j \geq K\mu$$

Es decir, $K\mu$ es sobrearmónica.

Por lo tanto, tomando en (a) el límite cuando $\delta \to 0$ obtenemos que:

$$\widehat{R}^{u}_{F}(x) = K\mu(x) \quad \forall x \in R$$

■

Si consideramos el caso donde u es sobrearmónica y positiva en R, con $F \subset R$, F cerrado con respecto a R, tenemos, por las propiedades del balayage, que $\exists\mu$ medida sobre $\overline{F}$ tal que:

$$\widehat{R}^{u}_{F} = \int_{\overline{F}} K(z,\cdot)\, d\mu(z) \qquad \text{en } R$$

Pero si $F = R$ entonces $\exists\mu$ medida sobre R^*_M tal que:

$$u = \widehat{R}^{u}_{R} = \int_{R^*_M} K(z,\cdot)\, d\mu(z) \qquad \text{en } R$$

Si además se tiene que h es una función armónica positiva sobre R (es decir $h \in \aleph^+_R$), entonces $\exists\mu$

medida sobre R^*_M tal que:

$$h = \widehat{R}^h_R = \int\limits_{R^*_M} K(z,\cdot)\,d\mu(z) \quad \text{en } R$$

En este caso las μ_j tienen soporte en ∂F_j y por lo tanto μ tiene soporte en Δ_M .

Entonces aplicando el lema anterior tenemos que $\forall h \in \aleph^+_R$ $\exists \mu$ con soporte en Δ_M tal que:

$$h = \int\limits_{\Delta_M} K(z,\cdot)\,d\mu(z) \qquad \text{en } R$$

5.2.1 Unicidad de la medida

Sabemos que toda función armónica positiva definida en un abierto tiene una representación integral dada por la *Representación de Martín.*

Pero esta representación depende de la medida usada en la integral, ¿será una medida única ?

Dada ν medida sobre R^*_M, la función definida por:

$$u(x) = \int_{R^*_M} K(z,x)\,d\nu(z) \qquad \forall x \in R$$

es sobrearmónica y positiva en R .

Considerese el compacto $C \subset R$, entonces $\widehat{R}^u_C$ es un potencial en R y $\exists \nu_C$ medida sobre C tal que:

$$\widehat{R}^u_C = G\nu_C \quad \text{en } R$$

$$\widehat{R}^u_C(x) = \int_C \frac{G(z,x)}{\Phi\,(G(z,x_0))}\,\Phi\,(G(z,x_0))\,d\nu_C(z) \quad x \in R$$

$$= \int_C K(z,x)\,d\nu^K_C(z) \qquad x \in R$$

donde $\forall E$ boreliano de R^*_M se tiene:

$$\nu^K_C(E) = \int_{E\cap R} \Phi\,(G(z,x_0))\,d\nu_C(z)$$

Hay que observar que sop_{ν_C} , $sop_{\nu^K_C} \subset C$, y que si $u \in \aleph^+_R$ entonces sop_{ν_C} , $sop_{\nu^K_C} \subset \partial C$.

Considérese la sucesión de compactos $\{C_j\} \subset R$ tal que $\cup C_j = R$.

Sabemos que para $h \in \aleph_R^+$ tenemos que $\widehat{R}_{C_l}^h \uparrow \widehat{R}_C^h$ en R.

Por el Teorema de Representación de Riez:

$$\widehat{R}_{C_l}^h = \int G(z,\cdot)\, d\mu_{C_l}(z) = \int K(z,\cdot)\; d\mu_{C_l}^K(z)$$

con μ_{C_l} única.

De manera que $\mu_{C_l}^K$ también es única.

Para obtener una representación única sólo falta por demostrar que $\left\{\mu_{C_l}^K\right\}$ tiene un *límite en la w^*-topología*.

Sea C compacto tal que $C \subset R$.

Se define el operador $T_C : \mathcal{C}(R_M^*) \longrightarrow \mathcal{C}(\Delta_M)$ de la siguiente manera:

Para cada $y \in \Delta_M$ sea δ_y una medida unitaria con soporte $\{y\}$. Sea δ_y^K medida definida como sigue:

i) Sea el compacto $C' \subset R_M^*$. Se sabe que $K\delta_y$ es una función sobrearmónica.

Tomando su balayage $\widehat{R}_{C'}^{K\delta_y}$ tenemos que:

$$\widehat{R}_{C'}^{K\delta_y}(x) = K\delta_y(x) = \int_{C'} K(z,x)\, d\delta_y(z) = K(y,x) \qquad \text{si } x \in intC'$$

ii) Sea $C \subset R$ por las propiedades del balayage se sabe que$\exists \mu$ medida sobre R_M^* con soporte $sop_\mu \subset \overline{C}$ (la cerradura se toma respecto a R_M^*)tal que:

$$\widehat{R}_C^{K\delta_y}(x) = \int_{\overline{C}} K(z,x)\, d\mu(z) \qquad \forall x \in R$$

Ahora tomemos a C compacto tal que $x \in int(C) \subset R$.

Entonces, como el balayage de una función coincide con la función misma en el interior del conjunto de referencia, tenemos que:

$$\int_{R_M^*} K(z,x)\, d\delta_y(z) = K\delta_y(x) = \widehat{R}_C^{K\delta_y}(x)$$

$$= \int_{\overline{C}} K(z,x)\, d\mu(z)$$

tomando $\mu = \delta^K_{yC}$, podemos escribir

$$\int_{R^*_M} K(z,x)\, d\delta_y(z) = \int_{\overline{C}} K(z,x)\, d\delta^K_{yC}(z)$$

y el $sop_{\delta^K_{yC}} \subset \partial C$ ya que $\widehat{R}^{K\delta_y}_C(x) = K\delta_y(x) = K(y,x)$ es armónica para $x \in int(C)$ si $y \in \Delta_M$.

DEFINICIÓN

Para cada $f \in \mathcal{C}(R^*_M)$

$$T_C f(y) = \int_{\partial C} f\, d\delta^K_{yC} \quad \text{ para } \; y \in \Delta_M$$

Lema 7 *T_C es un operador lineal acotado de $\mathcal{C}(R^*_M)$ en $\mathcal{C}(\Delta_M)$.*

Además $T_C 1 = 1$ y $\|T_C\| = 1$ si $F_0 \subset int(C)$.

Demostración:

Consideremos el $K-$potencial $K\delta_y(x) = \int_{R^*_M} K(z,x)\, d\delta_y(z) = K(y,x)$ para $y \in \Delta_M$.

$K\delta_y(x) = K(y,x)$ es uniformemente continua en $\Delta_M \times C$ debido a la continuidad de K.

Si $y_0 \in \Delta_M$ y $\epsilon > 0$, entonces existe W_0 una vecindad de y_0 tal que si $y \in \Delta_M \cap W_0$ entonces:

$$|K\delta_y - K\delta_{y_0}| < \epsilon \text{ en } C$$

Sea y_1 un punto fijo de Δ_M y sea $\alpha = \inf_{x\in C} K(y_1,x) > 0$. Además sea $\nu = \alpha^{-1}\delta_{y_1}$.

Entonces:

$$K\nu(x) = \int_{R^*_M} K(z,x)\, \alpha^{-1}\, d\delta_{y_1}(z) = \alpha^{-1} K(y_1,x) \geq 1 \qquad \text{para } x \in C$$

Ahora, para $y \in \Delta_M \cap W_0$, tenemos que $K\delta_y < K\delta_{y_0} + \epsilon K\nu$ y $K\delta_{y_0} < K\delta_y + \epsilon K\nu$ en C.

Usando una vez más las propiedades del balayage (que el balayage de la suma es menor igual a la suma de los balayages y que el balayage es un operador monótono de la función a la cual se aplica) obtenemos:

$$K\delta^K_{yC} \leq K\delta^K_{y_0C} + \epsilon K\nu$$

$$K\delta^K_{y_0C} \leq K\delta^K_{yC} + \epsilon K\nu$$

Supongamos que f tiene soporte compacto y segundas derivadas parciales continuas en R, entonces $\exists\lambda$ carga tal que $f = \int_R K(\cdot,x)\, d\lambda(x)$ en R.

Para esa f tenemos que:

$$\left|\int_{\partial C} f\, d\delta_{yC}^{K} - \int_{\partial C} f\, d\delta_{y_0C}^{K}\right| =$$

$$\left|\int_{\partial C}\left(\int_{R} K(z,x)\, d\lambda(x)\right) d\delta_{yC}^{K}(z) - \int_{\partial C}\left(\int_{R} K(z,x)\, d\lambda(x)\right) d\delta_{y_0C}^{K}(z)\right| =$$

$$\left|\int_{R}\left(K\, d\delta_{yC}^{K}(x)\right) d\lambda(x) - \int_{R}\left(K\, d\delta_{y_0C}^{K}(x)\right) d\lambda(x)\right| \leq$$

$$\epsilon \int_{R} K\nu_{C}^{K}\, d|\lambda| \qquad \text{para } y \in \Delta_M \cap W_0$$

Veamos que $\int_{R} K\nu_C^K\, d|\lambda| < +\infty$ y que es independiente de y .

$\int_{R} K\nu_C^K\, d|\lambda| = \int_{R} \hat{R}_C^{K\nu}\, d|\lambda|$, donde $\hat{R}_C^{K\nu}$ es sobrearmónica y $|\lambda|$ es una medida y por lo tanto la integral es finita.

Ahora,

$$\begin{aligned}\int\limits_{R} K\nu_C^K\, d|\lambda| &= \int\limits_{R}\left(\int\limits_{\hat{R}_M^*} K(z,x)\, \alpha^{-1}\, d\delta_{y_i}\right) d|\lambda|(x) = \\ \alpha^{-1}\int\limits_{R}\left(\int\limits_{\hat{R}_M^*} K(z,x)\, d\delta_{y_i}\right) d|\lambda|(x) &= \alpha^{-1}\int\limits_{R} K(z,x)\, d|\lambda|(x)\end{aligned}$$

Por lo tanto $T_C f$ es continua en Δ_M siempre que f tenga soporte compacto y segundas derivadas parciales continuas.

DEFINICIÓN

Se dice que A es *acotado* si $\exists\, c$ constante tal que:

$$\forall f \in E \text{ se tiene que } \|Af\| \leq c\,\|f\| = c \sup_{x\in Dom_f} |f(x)|$$

La norma del operador A se define por:

$$\|A\| = \inf c$$

Se encuentra que:

$$\|A\| = \sup_{\|f\|\leq 1} \|Af\| = \sup_{f\neq 0} \frac{\|Af\|}{\|f\|}$$

OBSERVACIÓN

Sean E y E_1 espacios normados de funciones.

Sea A operador lineal tal que:

$$A : E \rightarrow E_1$$

Notemos que:

$$|T_C f(y)| = \left| \int_{\partial C} f \, d\delta_{yC}^K \right| \leq \sup_{z \in R_M^*} |f(z)| \int_{\partial C} d\delta_{yC}^K = \|f\| \; T_C 1(y) = \|f\| \; \delta_{yC}^K (R_M^*)$$

Para $y \in \Delta_M$:

$$K(y, x_0) = K\delta_y(x_0) \geq \hat{R}_C^{K\delta_y}(x_0) = \int_{\partial C} K(z, x_0) \, d\delta_{yC}^K(z) \geq \left(\inf_{z \in \partial C} K(z, x_0) \right) \delta_{yC}^K (R_M^*)$$

es decir:

$$\delta_{yC}^K (R_M^*) \leq \frac{\sup_{y \in \Delta_M} K(z, x_0)}{\inf_{z \in \partial C} K(z, x_0)}$$

y como $\sup_{y \in \Delta_M} K(z, x_0) < \infty$ y $\inf_{z \in \partial C} K(z, x_0) > 0$ por el LEMA 6.

Entonces T_C es un operador acotado.

Consideremos ahora a cualquier $f \in \mathcal{C}(R_M^*)$.

Sabemos que $T_C f$ depende sólo de los valores de f en ∂C, entonces podemos suponer que f tiene soporte compacto.

Sea $\{f_j\}$ sucesión de funciones en R_M^* con soportes compactos en R y con segundas derivadas paciales continuas en R tales que $\|f_j - f\| \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$. Como $\|T_C f_j - T_C f\| \leq \delta_{yC}^K (R_M^*) \; \|f_j - f\|$ entonces $T_C f_j \rightarrow T_C f$ uniformemente. Y por lo tanto $T_C f$ es continua en Δ_M.

Por definición $F_0 = \{z \in R : G(z, x_0) \geq \alpha_0\}$.

Supongamos que $F_0 \subset int(C)$.

Entonces si $z \notin F_0$ se tiene que:

$$K(z, x_0) = \lim_{\substack{z' \to z \\ z' \in R \\ z' \notin F_0}} \frac{G(z', x_0)}{\Phi(G(z', x_0))} = \lim_{\substack{z' \to z \\ z' \in R \\ z' \notin F_0}} \frac{G(z', x_0)}{G(z', x_0)} = 1$$

Si $y \in \Delta_M$, usando el hecho de que $x_0 \in F_0 \subset int(C)$, obtenemos:

$$1 = K(y, x_0) = K\delta_y(x_0) = \widehat{R}_C^{K\delta_y}(x_0)$$

$$= \int_{\partial C} K(z, x_0)\, d\delta_{yC}^K(z) = \int_{\partial C} d\delta_{yC}^K(z) = T_C 1(y)$$

$$\geq T_C g(y) \qquad \forall g \text{ tal que } \|g\| \leq 1$$

■

Lema 8 *Sea $\{\mu_x : x \in \Delta_M\}$ una familia de medidas sobre Δ_M tal que $\mu_\cdot(E)$ es medible sobre Δ_M para todo boreliano E de R.*

Sean μ y ν medidas sobre Δ_M tales que $\forall f \in \mathcal{C}(R_M^*)$ se tiene que:

$$\int_{\Delta_M} f\, d\mu = \int_{\Delta_M} \left(\int_{\Delta_M} f\, d\mu_x \right) d\nu(x).$$

Entonces

$$\int_{\partial C} f\, d\mu_C^K = \int_{\Delta_M} \left(\int_{\partial C} f\, d\mu_{xC}^K \right) d\nu(x) \qquad \forall f \in \mathcal{C}(R_M^*)$$

Demostración:

Sea $\mu' = \int_{\Delta_M} \mu_{xC}^K\, d\nu(x)$.

De las propiedades del balayage sabemos que:

$$\int_{\partial C} K(y, \cdot)\, d\mu_{xC}^K(y) = \widehat{R}_C^{K\mu_x}(\cdot) < +\infty$$

casi en todas partes en R. Y como $K(y, \cdot) \wedge j \leq K(y, \cdot)$ obtenemos que:

$$\int_{\partial C} [K(y, \cdot) \wedge j]\; d\mu_{xC}^K(y) \leq \int_{\partial C} K(y, \cdot)\, d\mu_{xC}^K(y) < +\infty.$$

Claramente $\lim_{j \to \infty} [K(y, \cdot) \wedge j] = K(y, \cdot)$. De manera que, usando el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, obtenemos que:

$$\lim_{j \to \infty} \int_{\partial C} [K(y, \cdot) \wedge j]\; d\mu_{xC}^K(y) = \int_{\partial C} K(y, \cdot)\, d\mu_{xC}^K(y)$$

Tomemos ahora a:

$$f_j(x) = \int\limits_{\partial C} [K(y,x) \wedge j] \, d\mu^K_{xC}(y)$$

y tomemos a:

$$f(x) = \int\limits_{\partial C} K(y,x) \, d\mu^K_{xC}(y)$$

Por la parte anterior sabemos que $f_j(x) \to f(x)$ cuando $j \to \infty$.

Además, como el K-potencial $K\eta$ es sobrearmónico cuando no es idénticamente $+\infty$ para η medida, tenemos que f_j y f son sobrearmónicas, y por lo tanto sus integrales respecto de la medida ν son finitas:

$$\int\limits_{\Delta_M} f_j(x) \, d\nu(x), \int\limits_{\Delta_M} f(x) \, d\nu(x) < +\infty$$

Usando nuevamente el Teorema de Lebesgue llegamos a que:

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\Delta_M} \left[\int_{\partial C} [K(y,\cdot) \wedge j] \, d\mu^K_{xC}(y) \right] d\nu(x) = \int_{\Delta_M} \left[\int\limits_{\partial C} K(y,\cdot) \, d\mu^K_{xC}(y) \right] d\nu(x)$$

Entonces:

$$\int_{\partial C} K\mu^K_{xC} \, d\nu(x) = \int_{\Delta_M} \left(\int_{\partial C} K(y,\cdot) \, d\mu^K_{xC}(y) \right) d\nu(x)$$

$$= \lim_{j\to\infty} \int_{\Delta_M} \left(\int_{\partial C} [K(y,\cdot) \wedge j] \, d\mu^K_{xC}(y) \right) d\nu(x)$$

$$= \lim_{j\to\infty} \int_{\Delta_M} [K(y,\cdot) \wedge j] \, d\mu'(x)$$

y usando otra vez el Teorema de Lebesgue:

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\Delta_M} [K(y,\cdot) \wedge j] \, d\mu'(x) = \int\limits_{\Delta_M} K(y,\cdot) \, d\mu'(x),$$

o sea:

$$\int_{\Delta_M} K\mu^K_{xC} \, d\nu(x) = K\mu'$$

Notemos que $K\mu^K_C = K\mu$ y que $K\mu^K_{xC} = K\mu_x$.

Por las propiedades del balayage $K\mu^K_{xC} = \widehat{R}^{K\mu_x}_C$ es igual a $K\mu_x$ en $int\,(C)$. Usando el **TEOREMA 9** del **Apéndice** se obtiene que esta igualdad se mantiene sobre ∂C excepto en los puntos irregulares de frontera de $R \sim C$.

Lo mismo pasa para $K\mu^K_C$ y $K\mu$.

Si $y \in C$ no es un punto irregular de frontera para $R \sim C$ entonces:

$$K\mu'(y) = \int_{\Delta_M} K\mu_{xC}^K(y)\, d\nu(x) = \int_{\Delta_M} K\mu_x(y)\, d\nu(x)$$

$$= \int_{\Delta_M} \left(\int_{\Delta_M} K(z,y)\, d\mu_x(z)\right) d\nu(x)$$

Aplicando nuevamente el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue llegamos a que:

$$\int_{\Delta_M} \left(\int_{\Delta_M} K(z,y)\, d\mu_x(z)\right) d\nu(x) = \lim_{j\to\infty} \int_{\Delta_M} \left(\int_{\Delta_M} [K(z,y)\wedge j]\, d\mu_x(z)\right) d\nu(x)$$

usando la hipótesis y la continuidad de $K(z,\cdot)\wedge j$ para $z \in R_M^*$ obtenemos:

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\Delta_M} \left(\int_{\Delta_M} [K(z,y)\wedge j]\, d\mu_x(z)\right) d\nu(x) = \lim_{j\to\infty} \int_{\Delta_M} [K(z,y)\wedge j]\, d\mu(x)$$

y, una vez más del teorema de Lebesgue, obtenemos:

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\Delta_M} [K(z,y)\wedge j]\, d\mu(x) = K\mu(y)$$

Como $K\mu(y) = K\mu_C^K(y)$, tenemos que $K\mu' = K\mu_C^K$ excepto quizás en un conjunto polar de ∂C.

Del *Teorema de Maria-Frostman* obtenemos que $K\mu' = K\mu_C^K$ en todo R, y por el LEMA 5 tenemos que $\mu' = \mu_C^K$. ■

DEFINICIÓN

Un K-potencial es *extremo* si $K\mu = K\mu_1 + K\mu_2$ para μ_1, μ_2 medidas, implica que $K\mu_1$ es proporcional a $K\mu_2$.

El *conjunto de los puntos frontera mínimos* de la Frontera de Martin se define como:

$$\Delta_1 = \{y \in \Delta_M : K(y,\cdot) = K\delta_y \text{ es extremo}\}$$

Se define también el conjunto $\Delta_0 = \Delta_M \sim \Delta_1$.

Lema 9 *Si $K\mu$ es extremo, entonces el soporte de μ consta de un solo punto $y \in R \cup \Delta_1$.*

Demostración:

Sea $F = sop\mu$, y sea $y \in F$.

Tomemos $U_j = \left\{ z \in R_M^* : \rho(y, z) < \frac{1}{j} \right\}$ para todo j entero positivo.
Tomemos también $\mu_j = \mu|_{U_j}$ y $\nu_j = \mu|_{R_M^* \sim U_j}$.
De manera que $\mu = \mu_j + \nu_j$ y entonces $K\mu = K\mu_j + K\nu_j$.
Como $K\mu$ es extremo, $K\mu_j$ es proporcional a $K\mu$ y existe una medida μ_j' en U_j tal que $K\mu = K\mu_j'$.

Sea $x \in R \sim \{y\}$ tal que $K\mu(x) < +\infty$.
Para j suficientemente grande se tiene que $x \notin U_j$ y, usando la continuidad de K, tenemos que:

$$\inf_{z \in U_j} K(z, x) \geq \frac{1}{2} K(y, x) = \alpha$$

Entonces para j suficientemente grande tenemos que:

$$+\infty \geq K\mu(x) = \int_{U_j} K(z, x)\, d\mu_j'(z) \geq \alpha\mu_j'(U_j) = \alpha\mu_j'(R_M^*)$$

Entonces existe (ver el **Apéndice**), para la sucesión de las μ_j', una medida μ' con soporte $sop_{\mu'} = \{y\}$ y una subsucesión $\{\mu_{j_k}'\}$ tales que:

$$\mu_{j_k}' \longrightarrow \mu' \text{ en la } w^*\text{-}topología$$

$$\text{cuando k} \longrightarrow \infty$$

Tomemos a la subsucesión como la propia sucesión $\{\mu_j'\}$.

Ahora, como $K\mu$ es extremo existe α' tal que $\mu' = \alpha'\delta_y$. Entonces:

$$K\mu_j' \longrightarrow \alpha' K\delta_y$$

(usando la w^*-*convergencia* y el hecho de que $+\infty \geq K\mu$).
Entonces $K\mu = \alpha' K\delta_y = \alpha' K(y, \cdot)$ en $R \sim \{y\}$.

Si existieran $y_1, y_2 \in F$ tales que $y_1 \neq y_2$, tendríamos que $\alpha_1' K(y_1, \cdot) = \alpha_2' K(y_2, \cdot)$ en $R \sim \{y_1, y_2\}$, y por la continuidad de K en todo R.
Pero entonces $K(y_1, \cdot) = \alpha_3' K(y_2, \cdot)$, lo cual es una contradicción. ∎

Lema 10 *i) Si* $y \in \Delta_1$ *y* $\{R_j\}$ *es una sucesión creciente de abiertos de* R *con cerraduras compactas* $C_j = \overline{R}_j \subset R$ *tal que* $\cup R_j = R$, *entonces* $\delta_{yC_j}^K \longrightarrow \delta_y$ *en la* w^*-*topología.*

ii) Sea la sucesión de abiertos $\{R_j\}$ creciente con cerraduras compactas $C_j = \overline{R}_j \subset R$ tal que $\cup R_j = R$. Si $y \in \Delta_M$ y tenemos que $\delta^K_{yC_j} \to \delta_y$ en la w^*-topología , entonces $y \in \Delta_1$.

Demostración:

(i) Sea $y \in \Delta_1$.

Supongamos que $F_0 \subset R_1$.

Sabemos que $\delta^K_{yC_j}(R^*_M) = T_{C_j}1(y)$ para toda j. Entonces existe una medida μ sobre Δ_M y una subsucesión $\left\{\delta^*_{yC_j}\right\}$ de $\left\{\delta^K_{yC_j}\right\}$ tal que $\delta^*_{yC_j} \to \mu$ en la w^*-*topología*.

De ahí que $K\delta^*_{yC_j} \to K\mu$ (por la continuidad de K y el inciso (iii) del LEMA 2); pero como $K\delta^K_{yC_j} = K\delta_y$ en R_j (porque $K\delta^K_{yC_j} = \widehat{R}^{K\delta_y}_{C_j}$ es igual a $K\delta_y$ en $int(C_j) = R_j$), entonces $K\delta^*_{yC_j} = K\delta_y$ en R_j para toda j, y cuando $j \to \infty$ se tiene que $K\delta^*_{yC_j} \to K\delta_y$ en R.

Sabemos que para una sucesión w^*-*convergente* el límite es único, entonces $K\mu = K\delta_y$ en R, y por lo tanto $\mu = \delta_y$ en R.

Es decir $sop_\mu = \{y\}$.

De lo anterior se deduce que $\delta^*_{yC_j} \to \delta_y$.

Resta por demostrar que $\delta^K_{yC_j} \to \delta_y$.

Sabemos que toda subsucesión de $\left\{\delta^K_{yC_j}\right\}$ tiene una subsucesión que converge a δ_y .

Supongamos que $\left\{\delta^K_{yC_j}\right\}$ no converge a δ_y en la w^*-*topología*. Entonces $\exists f \in \mathcal{C}(R^*_M)$ tal que:

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\partial C_j} f\, d\delta^K_{yC_j} \neq \int_{R^*_M} f\, d\delta_y$$

O sea que existe $\left\{\delta^{**}_{yC_j}\right\}$ subsucesióndde $\left\{\delta^*_{yC_j}\right\}$ tal que:

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\partial C_j} f\, d\delta^{**}_{yC_j} = A \neq \int_{R^*_M} f\, d\delta_y$$

Pero sabemos que alguna subsucesión $\left\{\delta^{**}_{yC_j}\right\}$ converge en la w^*-*topología* a δ_y; es decir $A = \int_{R^*_M} f\, d\delta_y$, con lo cual tenemos una contradicción.

(ii) Sea $\delta^K_{yC_j} \to \delta_y$ para alguna sucesión de $\{R_j\}$ definida como arriba. Hay que demostrar que $y \in \Delta_1$, es decir que $K\delta_y$ es extremo.

Supongamos que $K\delta_y = K\mu + K\nu$ para μ, ν medidas sobre R^*_M.

Sabemos que:

$$\widehat{R}_{C_j}^{K\delta_y} = \widehat{R}_{C_j}^{K\mu} + \widehat{R}_{C_j}^{K\nu}$$

$$K\delta_{yC_j}^K = K\mu_{C_j}^K + K\nu_{C_j}^K$$

y usando el **LEMA 5**:

$$\delta_{yC_j}^K = \mu_{C_j}^K + \nu_{C_j}^K$$

Como $\delta_{yC_j}^K$ es convergente, sabemos que (tomando subsucesiones si es necesario) $\exists \mu_0, \nu_0$ medidas tales que:

$$\mu_{C_j}^K \longrightarrow \mu_0 \text{ y } \nu_{C_j}^K \longrightarrow \nu_0 \qquad \text{en la } w^*\textit{-topología}$$

Como $\delta_{yC_j}^K \longrightarrow \delta_y$ en la w^*-*topología*, tenemos que $\delta_y = \mu_0 + \nu_0$. Entonces:

$$K\delta_y = K\mu_0 + K\nu_0 = (\alpha+1)K\mu_0$$

$$= K\left[(\alpha+1)\mu_0\right]$$

Por lo tanto $\delta_y = (\alpha+1)\mu_0$, es decir δ_y es proporcional a μ_0. De la misma manera se concluye que δ_y es proporcional a ν_0.

Por otro lado, sabemos que:

$$\widehat{R}_R^{K\mu} = K\mu = \lim_{j\to\infty} K\mu_{C_j}^K = \lim_{j\to\infty} \widehat{R}_{C_j}^{K\mu} \qquad \text{en } R$$

$$K\mu = \lim_{j\to\infty} K\mu_{C_j}^K = \lim_{j\to\infty} \int_{\partial C_j} K(x,\cdot)\, d\mu_{C_j}^K(x)$$

$$= \int_{R_M^*} K(z,\cdot)\, d\mu_0(z)$$

y sabemos que μ_0 es proporcional a δ_y. Entonces $K\mu$ es proporcional a $K\delta_y$, esto es $K\delta_y$ es extremo. ∎

OBSERVACIÓN

Δ_1 y Δ_0 son borelianos de R_M^* .

Lema 11 *Si μ es una medida sobre Δ_1 y $\{R_j\}$ es una sucesión creciente de abiertos de R con cerraduras compactas $C_j = \overline{R}_j \subset R$ tal que $\cup R_j = R$, entonces $\mu_{C_j}^K \longrightarrow \mu$.*

Demostración:

Consideremos $F_0 \subset R_1$ y que $\|T_{C_j}\| = 1$.

Si $f \in /C(R^*_M)$ entonces $\{T_{C_j} f\}$ es una sucesión de funciones continuas en Δ_M, uniformemente acotadas que converge a f en Δ_1. Entonces por el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y el LEMA 10 tenemos que:

$$\int_{\Delta_1} f\, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_{\Delta_1} T_{C_j} f\, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_{\Delta_1} \left(\int_{\partial C_j} f(z)\, d\delta^K_{yC_j}(z) \right) d\mu(y)$$

Del LEMA 8 sabemos que:

$$\int_{\Delta_1} \left(\int f(z)\, d\delta^K_{yC_j}(z) \right) d\mu(y) = \int_{\partial C_j} f(y)\, d\mu^K_{C_j}(y)$$

entonces:

$$\int_{\Delta_1} f\, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_{\partial C_j} f\, d\mu^K_{C_j}$$

■

DEFINICIÓN

Sea ν una medida sobre Δ_M.

Se dice que una sucesión de funciones medibles $\{f_j\}$ *converge en $\nu-$medida* a f si:

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \lim_{j\to\infty} \nu(\{y \in \Delta_M : |f_j(y) - f(y)| \geq \epsilon\}) = 0$$

OBSERVACIONES

De esta definición de convergencia se desprenden las siguientes observaciones:

Si $f_j \to f$ en *$\nu-$medida* y $g_j \to g$ en *$\nu-$medida* entonces

i) $f_j + g_j \to f + g$.

ii) $\exists \{f_{j_k}\}$ subsucesión de $\{f_j\}$ tal que $f_{j_k} \to f$ *casi en todas partes* (es decir para toda $x \in R^*_M$, excepto en un conjunto de medida cero).

iii) Si $\exists \{h_j\}$ tal que $f_j - h_j \to 0$ en *$\nu-$medida*, entonces $h_j \to f$ en *$\nu-$medida*.

iv) Si$\exists g$ integrable tal que $|f_j| \leq g \; \forall j$, entonces $\lim_{j\to\infty} \int_{\Delta_M} f_j\, d\nu = \int_{\Delta_M} f\, d\nu$.

Teorema 1 *Para cada μ medida sobre Δ_M existe una única medida ν sobre Δ_1 tal que $K\mu = K\nu$.*

Demostración:

La unicidad se demuestra usando el LEMA 11 y el hecho de que el límite de una sucesión w^*-*convergente* es único.

Supongamos que $\exists\, \nu, \nu'$ medidas sobre Δ_1 tales que $K\mu = K\nu = K\nu'$. Usando el LEMA 11 sabemos que si $\{R_j\}$ es una sucesión creciente de abiertos de R con cerraduras compactas $C_j = \overline{R}_j \subset R$ tal que $\cup R_j = R$ entonces $\nu^K_{C_j} \to \nu$ y $\nu'^K_{C_j} \to \nu'$ en la w^*-*topología*.

Es decir, para toda $f \in \mathcal{C}(R^*_M)$ se tiene que:

$$\int_{\Delta_1} f\, d\nu = \lim_{j\to\infty} \int_{\partial C_j} f\, d\nu^K_{C_j}$$

y

$$\int_{\Delta_1} f\, d\nu' = \lim_{j\to\infty} \int_{\partial C_j} f\, d\nu'^K_{C_j}$$

Siguiendo la demostración del LEMA 8 sabemos que a pesar de que la función K es continua de manera extendida las igualdades de arriba se mantienen:

$$\int_{\Delta_1} K\, d\nu = \lim_{j\to\infty} \int_{\partial C_j} K\, d\nu^K_{C_j}$$

y

$$\int_{\Delta_1} K\, d\nu' = \lim_{j\to\infty} \int_{\partial C_j} K\, d\nu'^K_{C_j}$$

Pero sabemos que que $K\mu = K\nu = K\nu'$, entonces:

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\partial C_j} K\, d\nu^K_{C_j} = \int_{\Delta_1} K\, d\nu'$$

y, como el límite de una w^*-*sucesión* es único, concluímos que $\nu = \nu'$.

Consideremos a la sucesión de las $\{C_j\}$.

Supongamos que $F_0 \subset R_1$. Entonces, usando el LEMA 8 y luego el LEMA 7, (ambos de este capítulo) tenemos:

$$\mu^K_{C_j}(R^*_M) = \int_{\partial C_j} 1\, d\mu^K_{C_j} = \int_{\Delta_M} \left(\int_{\partial C_j} 1\, d\delta^K_{yC_j}(z) \right) d\mu(y)$$

$$= \int_{\Delta_M} T_{C_j} 1(y)\, d\mu(y) = \mu(R^*_M)$$

Por lo tanto podemos seleccionar de $\left\{\mu_{C_j}^{K}\right\}$ una subsucesión convergente. Denotémosla de la misma manera.

Tenemos entonces:

$$\mu_{C_j}^{K} \to \nu \text{ en la } w^*\text{-}\textit{topología} \text{ para alguna } \nu \text{ medida sobre } \Delta_M$$

De lo anterior y del hecho de que $\widehat{R}_{C_j}^{K\mu} \uparrow K\mu$ en R (siguiendo también la demostración del LEMA 8) , tenemos que:

$$K\mu = \lim_{j\to\infty} K\mu_{C_j}^{K} = K\nu$$

Si demostramos que $\nu(\Delta_0) = 0$, es decir que $sop_\nu \subset \Delta_1$, concluiremos lo que queremos.

Demostremos que $\nu(\Delta_0) = 0$

Sea el conjunto:

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{C}(R_M^*) : T_{C_j} f \to f \text{ en } \nu - \textit{medida}\}$$

Es decir $\mathcal{F}$ es el conjunto de las funciones continuas en la compactificación de Martin tales que $\forall\epsilon > 0$ se tiene:

$$\lim_{j\to\infty} \nu\left\{y \in \Delta_M : |T_{C_j} f(y) - f(y)| \geq \epsilon\right\} = 0$$

◇ Demostremos que $\mathcal{F} = \mathcal{C}(R_M^*)$.

Claramente $\mathcal{F}$ es un subespacio lineal de $\mathcal{C}(R_M^*)$. (La función constante $1 = T_{C_j}$ $\forall j$ y entonces pertenece a $\mathcal{F}$, al igual que todas las constantes).

◇◇ Veamos que $\mathcal{F}$ es una lattice.

Sean $g_1, g_2 \in \mathcal{F}$. Tomemos a $f = g_1 \wedge g_2$. Como $f \leq g_i$ entonces:

$$T_{C_j} f \leq T_{C_j} g_i$$

y:

$$T_{C_j} f \leq T_{C_j} g_1 + T_{C_j} g_2$$

Por otro lado la sucesión $\{T_{C_j} g_i\}$ está acotada uniformente por $\|g_i\|$ y sabemos que converge en medida a g_i, entonces usando el teorema de convergencia dominada de Lebesgue obtenemos que:

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\Delta_M}(T_{C_j}g_1\wedge T_{C_j}g_2)\;d\nu=\int_{\Delta_M}(g_1\wedge g_2)\;d\nu$$

$$=\int_{\Delta_M}f\,d\nu$$

Además:

$$\int_{\Delta_M}T_{C_j}f\,d\nu=\int_{\Delta_M}\left[\int_{\partial C_j}f(x)\,d\delta^K_{yC_j}(x)\right]\;d\nu(y)$$

$$=\int_{\partial C_j}f\,d\nu^K_{C_j}$$

Ahora, como $K\mu=K\nu$, entonces $K\mu^K_{C_j}=K\nu^K_{C_j}$ y $\mu^K_{C_j}=\nu^K_{C_j}$, entonces usando esto y aplicando nuevamente el LEMA 10 tenemos:

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\Delta_M}|(T_{C_j}g_1\wedge T_{C_j}g_2)-T_{C_j}f|\;d\nu$$

$$=\lim_{j\to\infty}\int_{\Delta_M}(T_{C_j}g_1\wedge T_{C_j}g_2)\;d\nu-\int_{\partial C_j}T_{C_j}f\,d\nu^K_{C_j}$$

$$\int_{\Delta_M}f\,d\nu-\int_{\Delta_M}f\,d\nu=0$$

Por lo tanto $(T_{C_j}g_1\wedge T_{C_j}g_2)-T_{C_j}f\to 0$ en $\mathcal{L}_1$ (es decir en el espacio normado de las funciones Lebesgue-medibles cuyo valor absoluto es integrable). Sabemos que entonces (tomando una subsucesión si es necesario. Ver el **Apéndice**) :

$$(T_{C_j}g_1\wedge T_{C_j}g_2)-T_{C_j}f\to 0\qquad \text{en } \nu-\mathit{medida}$$

Ahora, sabemos que $\forall\epsilon\;\exists N$ tal que si $j\geq N$ entonces :

$$\{y\in\Delta_M:|T_{C_j}g_1(y)-g_1(y)|\geq\epsilon\}<\epsilon$$

y:

$$\{y\in\Delta_M:|T_{C_j}g_2(y)-g_2(y)|\geq\epsilon\}<\epsilon$$

de donde:

$$\{y\in\Delta_M:|(T_{C_j}g_1\wedge T_{C_j}g_2)\;(y)-f(y)|\geq\epsilon\}<\epsilon$$

para la misma N.

Es decir:

$$(T_{C_j} g_1 \wedge T_{C_j} g_2) \to g_1 \wedge g_2 = f \qquad \text{en } \nu - \textit{medida}$$

Por lo tanto:

$$T_{C_j} f \to f \qquad \text{en } \nu - \textit{medida}$$

En conclusión $g_1 \wedge g_2 \in \mathcal{F}$.

or lo tanto $\mathcal{F}$ es una lattice.

◇◇◇ Demostremos que las funciones de $\mathcal{F}$ separan puntos de R^*_M .

Sean $x \in R$, $f \in \mathcal{C}(R^*_M)$ tal que $f = K(\cdot, x)$ fuera de un compacto de R .

Para j suficientemente grande y $y \in \Delta_M$ tenemos que:

$$f(y) = K(y,x) = K\delta^K_{yC_j}(x)$$

$$= \int_{\partial C_j} K(z,x)\, d\delta^K_{yC_j}(z)$$

$$= \int_{\partial C_j} f(z)\, d\delta^K_{yC_j}(z) = T_{C_j} f(y)$$

entonces $T_{C_j} f \to f$ $\nu-c.t.p$ cuando $j \to \infty$. De donde $T_{C_j} f \to f$ en $\nu-$*medida*. Entonces $f \in \mathcal{F}$.

Supongamos ahora que $y_1, y_2 \in \Delta_M$ tales que $y_1 \neq y_2$.

Usando lo anterior, si las funciones de $\mathcal{F}$ no separan puntos de la frontera entonces $K(y_1, x) = K(y_2, x)$. Es decir, tendríamos que serían proporcionales, lo cual es una contrdicción.

Supongamos ahora que $y_1 \neq y_2$ con $y_1 \notin \Delta_M$ y $f \in \mathcal{F}$.

Sabemos que $T_{C_j} f$ depende sólo de los valores de f en ∂C_j , podemos escoger a j_0 tal que $y_1 \in R_{j_0}$ y modificar a f en una vecindad de y_1 sin afectar $\lim_{j\to\infty} T_{C_j} f$ en Δ_M. Si $y_1, y_2 \in R$ obtenemos de la misma manera el resultado análogo.

Por lo tanto las funciones de $\mathcal{F}$ separan puntos de R^*_M.

◇◇◇◇ Demostremos que $\mathcal{F}$ es cerrado.

Usando los resultados anteriores aplicamos el *Teorema de Stone-Weiestrass* (ver el **Apéndice**) y encontramos que $\mathcal{F}$ es denso en $\mathcal{C}(R^*_M)$.

Sea $f \in \mathcal{C}(R^*_M)$ un punto de acumulación de $\mathcal{F}$.

Tomemos una sucesión $\{f_i\}$ en $\mathcal{F}$ uniformemente convergente a f.

Sea $\epsilon > 0$ entonces:

$$\nu\left\{y \in \Delta_M : |T_{C_j} f(y) - f(y)| \geq \epsilon\right\} \leq \nu\left\{y \in \Delta_M : |T_{C_j} (f - f_i)(y)| \geq \tfrac{\epsilon}{3}\right\}$$

$$+\, \nu\left\{y \in \Delta_M : |T_{C_j} f_i(y) - f_i(y)| \geq \tfrac{\epsilon}{3}\right\}$$

$$+\, \nu\left\{y \in \Delta_M : |f_i(y) - f(y)| \geq \tfrac{\epsilon}{3}\right\}$$

y tomamos N tal que $\|f - f_N\| \leq \dfrac{\epsilon}{3}$.

Entonces, como $|T_{C_j} (f - f_N)(y)| \leq \|f - f_N\| \leq \dfrac{\epsilon}{3}$, cuando $i = N$ el primer conjunto y el ultimo (del lado derecho de la desiguaidad) son vacíos. Y obtenemos:

$$\nu\left\{y \in \Delta_M : |T_{C_j} f(y) - f(y)| \geq \epsilon\right\} \leq \nu\left\{y \in \Delta_M : |T_{C_j} f_N(y) - f_N(y)| \geq \frac{\epsilon}{3}\right\} = 0$$

ya que $f_N \in \mathcal{F}$.

Por lo tanto $f \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es cerrado.

En conclusión $\mathcal{F} = \mathcal{C}(R^*_M)$.

Regresemos ahora a la parte inicial de la demostración.

Sea $\mathcal{F}_0$ un subconjunto denso numerable de $\mathcal{C}(R^*_M)$.

Sea $f \in \mathcal{F}_0$.

Como sabemos que convergencia en medida implica que existe una subsucesión convergente c.t.p. (ver el **Apéndice**), podemos considerar que la sucesión $\{T_{C_j} f\}$ converge ν*−c.t.p.* a f (si es necesario tomamos una subsucesión de $\{C_j\}$) . Esto se puede hacer para cada $f \in \mathcal{F}_0$ ya que $\mathcal{F}_0$ es numerable.

Para cada $f \in \mathcal{F}_0$ definamos al conjunto:

$$\Lambda_f = \left\{y \in \Delta_M : \lim_{j \to \infty} T_{C_j} f(y) \neq f(y)\right\}$$

Entonces $\nu(\Lambda_f) = 0$.

En **Helms** se demuestra que:

$$\Delta_1 = \begin{array}{c} \{y \in \Delta_M : T_{C_j} f(y) \to f(y) \text{ cuando } j \to \infty, \\ \text{para } f \text{ en un subconjunto denso numerable de } \mathcal{C}(R^*_M)\} \end{array}$$

Entonces si $y \notin \bigcup_{f \in \mathcal{F}_0} \Lambda_f$ tenemos que $\delta^K_{yC_j} \to \delta_y$ en la w^*-*topología* y usando el LEMA 10 obtenemos que $y \in \Delta_1$ (es decir $y \notin \Delta_0$).

Por lo tanto:

$$\Delta_0 \subset \bigcup_{f \in \mathcal{F}_0} \Lambda_f$$

entonces $\nu(\Delta_0) = 0$.

■

Teorema 2 (Teorema de Representaci0xf3n de Martin) *Si h es una función armónica positiva en R, entonces existe una única medida ν en Δ_1 tal que:*

$$h = \int_{\Delta_1} K(z, \cdot)\, d\nu(z)$$

Demostración: Usando el LEMA 6 tenemos que existe una medida μ en Δ_M tal que $h = K\mu$ y usando el TEOREMA 1 sabemos que existe una medida única ν en Δ_1 tal que $K\mu = K\nu$.

Es decir $h = K\nu$. ■

OBSERVACIÓN

Δ_1 es un subconjunto G_δ de R_M^*.

5.3 EL PROBLEMA DE DIRICHLET PARA R_M^*

El problema de Dirichlet para R_M^* queda enunciado como sigue:

Sea R un subconjunto abierto conexo de E^n.

Sea R_M^* la *compactificación de Martin* de R.

Sea f una función real sobre Δ_M.

Se debe encontrar una función armónica h en R tal que:

$$\lim_{y \to x} h(y) = f(x) \qquad \text{para } x \in \Delta_M$$

El *Método de Perron-Weiner-Brelot* (PWB) se extiende para construir la solución a este problema. Para ello extendamos las definiciones que teníamos antes:

DEFINICIONES

Sea R un subconjunto abierto conexo de E^n (R puede ser no acotado).

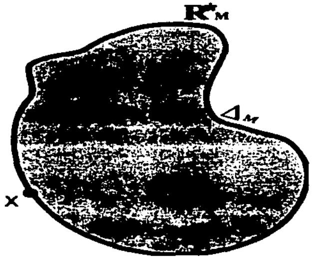

Figura 5-6: El p. de Dirichlet

◇ Se dice que una función u es *hiperarmónica* (*hipoarmónica*) en R si u es igual a $+\infty$ $(-\infty)$ en R o si es sobrearmónica (subarmónica) en R.

◇ La *clase superior* $\mathcal{U}_f$ de la función de frontera f se define por:

$$\mathcal{U}_f = \{u : u \text{ es hiperarmónica en } R \text{ , } u \text{ está acotada inferiormente en } R \text{ y } \liminf_{\substack{y \to x \\ y \in R}} u(y) \geq f(x) \text{ para toda } x \in \Delta_M\}$$

La *clase inferior* $\mathcal{L}_f$ de la función de frontera f se define por:

$$\mathcal{L}_f = \{u : u \text{ es hipoarmónica en } R \text{ , } u \text{ está acotada superiormente en } R \text{ y } \liminf_{\substack{y \to x \\ y \in R}} u(y) \leq f(x) \text{ para toda } x \in \Delta_M\}$$

◇ Las *soluciones inferior* y *superior* $\underline{H}_f$ y $\overline{H}_f$ se definen por:

$$\underline{H}_f = \sup\{u : u \in \mathcal{L}_f\} \quad \text{en } R$$

$$\overline{H}_f = \inf\{u : u \in \mathcal{U}_f\} \quad \text{en } R$$

◇ Si $\underline{H}_f = \overline{H}_f$ y ambas son armónicas se dice que f es *resolutiva*.
Además se denota $H_f = \underline{H}_f = \overline{H}_f$.

◇ u es *semicontinua inferior* (*s.c.i.*) en R^*_M si

$$u(x) = \lim \inf_{\substack{y \to x \\ y \in R^*_M}} u(y) \qquad \forall x \in R^*_M$$

◇ *PRINCIPIO DEL MÍNIMO* (con respecto a R^*_M) para u sobrearmónica en R:

$$\lim \inf_{\substack{y \to x \\ y \in R^*_M}} u(y) \geq 0 \qquad \forall x \in \Delta_M \Longrightarrow u(y) \geq 0 \text{ en } R$$

OBSERVACIONES

En base a estas nuevas definiciones se obtienen las demostraciones de los siguientes resultados generalizados para la *Teoría de Martin* (estas demostraciones son análogas a las del caso de R) :

◇ Si u es sobrearmónica en R entonces satisface el *Principio de mínimo.*

◇ $\overline{H}_f$ es idénticamente $+\infty$ o sobrearmónica en R . $\underline{H}_f$ es $-\infty$ o subarmónica en R.

◇ $\overline{H}_f \leq \underline{H}_f$.

◇ Si $f \in \mathcal{C}(R^*_M)$ entonces f es resolutiva.

Por otro lado sabemos que si E es un cerrado relativo de R, entonces por el LEMA 10 del Apéndice existe una medida μ en $\overline{E}$ (cerradura tomada con respecto a R^*_M) tal que:

$$\widehat{R}^u_E = \int_{\overline{E}} K(z,\cdot)\, d\mu(z) = K\mu(z) \qquad \text{en } R$$

Hay que notar que $\widehat{R}^u_E$ no es necesariamente un potencial (K puede ser armónica en el soporte de μ).

Sabemos también que cada $f \in \mathcal{C}(R^*_M)$ determina a una funcion armónica H_f . Entonces para cada $x \in R$ existe una única medida unitaria μ_x , llamada *medida armónica,* tal que:

$$H_f(x) = \int_{\Delta_M} f\, d\mu_x$$

Lema 12 *Si $y \in \Delta_1$ y U es una vecindad de y, entonces $\widehat{R}^{K(y,\cdot)}_{R\sim U}$ es un potencial.*

Demostración:

Demostremos que m.m.a.$\left(\widehat{R}^{K(y,\cdot)}_{R\sim U}\right) = 0$.

Supongamos que h =m.m.a.$\left(\widehat{R}^{K(y,\cdot)}_{R\sim U}\right) > 0$ en R .

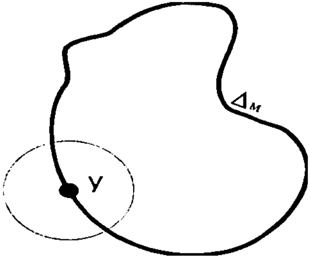

Figura 5-7: El potencial

Entonces por las propiedades del balayage tenemos que:

$$K(y,\cdot) \geq \widehat{R}_{R\sim U}^{K(y,\cdot)} \geq h > 0 \quad \text{en } R$$

y por el Teorema de descomposición de Riesz $\widehat{R}_{R\sim U}^{K(y,\cdot)} = w + h$ en R donde w es un potencial.

Si escribimos a $K(y,\cdot) = h + [K(y,\cdot) - h]$ encontramos por el LEMA 6 que cada término de la derecha es un K-potencial y, como K es extremo, tenemos que h es proporcional a $K(y,\cdot)$.

Es decir:

$$\widehat{R}_{R\sim U}^{K(y,\cdot)} = w + \lambda K(y,\cdot) \qquad \text{en } R$$

con $0 < \lambda \leq 1$.

Pero si $\lambda = 1$ tendríamos que en $R \sim U$:

$$\widehat{R}_{R\sim U}^{K(y,\cdot)} = K(y,\cdot)$$

y como:

$$\widehat{R}_{R\sim U}^{K(y,\cdot)} = \int_{R_M^*\sim U} K(z,\cdot)\, d\mu(z)$$

en $R \sim U$, para alguna mediada en en $R_M^* \sim U$, para alguna mediad.

Además:

$$K(y,\cdot) = \int_{R^*_M} K(z,\cdot)\, d\delta_y(z) \qquad \text{en } R \sim U$$

Pero $sop_\mu \subset R^*_M \sim U$ y $sop_{\delta_y} = \{y\}$, y sabemos que $y \in U$.

Por lo tanto $\lambda \neq 1$.

Ahora, usando nuevamente las propiedades del balayage tenemos:

$$w + \lambda K(y,\cdot) = \widehat{R}^{K(y,\cdot)}_{R\sim U} = \widehat{R}^{w+\lambda K(y,\cdot)}_{R\sim U}$$

$$= \widehat{R}^{w}_{R\sim U} + \lambda \widehat{R}^{K(y,\cdot)}_{R\sim U} = \widehat{R}^{w}_{R\sim U} + \lambda w + \lambda^2 K(y,\cdot)$$

sustituyendo a $\widehat{R}^{w}_{R\sim U} + \lambda w$, que es un potencial (ya que el balayage de un potencial es también un potencial y la suma de potenciales es un potencial), por ϖ podemos escribir:

$$w + \lambda K(y,\cdot) = \varpi + \lambda^2 K(y,\cdot)$$

Entonces, usando la unicidad de la descomposición de Riesz, $\lambda = \lambda^2$. Es decir $\lambda = 0$.

Por lo tanto m.m.a.$\left(\widehat{R}^{K(y,\cdot)}_{R\sim U}\right) = 0$ y $\widehat{R}^{K(y,\cdot)}_{R\sim U}$ es un potencial. ■

DEFINICIÓN

ℓ^+_R es el conjunto de las funciones sobrearmónicas positivas en R.

Lema 13 *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto (ver el Apéndice).*

Sea μ una medida sobre los subconjuntos de Borel de X.

Si para cada $x \in X$ se cumple que $u_x \in \ell^+_R$ y $u_x(y)$ es una función medible en $X \times R$, entonces la función definida por:

$$u(y) = \int_X u_x(y)\, d\mu(x)$$

es sobrearmónica o es idénticamente $+\infty$ en R .

Demostración:

Demostremos que u es s.c.i.

Usando el *Lema de Fatou* tenemos que $\forall z \in R^*_M$:

$$\liminf_{\substack{z' \to z \\ z' \in R}} u(z') = \liminf_{\substack{z' \to z \\ z' \in R}} \int_X u_x(z')\, d\mu(x)$$

$$= \int_X \left[\liminf_{\substack{z' \to z \\ z' \in R}} u_x(z')\right] d\mu(x)$$

$$= \int_X u_x(z)\, d\mu(x)$$

Es decir u es s.c.i.

Ahora, usando el *Teorema de Fubini* encontramos que:

$$L(u : y, \delta) = \int_{B_{y,\delta}} u(z)\, d\sigma(z)$$

$$= \int_{B_{y,\delta}} \int_X u_x(y)\, d\mu(x)\, d\sigma(z) = \int_X \int_{B_{y,\delta}} u_x(z)\, d\sigma(z)\, d\mu(x)$$

$$= \int_X L(u_x : y, \delta)\, d\mu(x) \leq \int_X u_x(z)\, d\mu(x) = u(y)$$

si $\overline{B}_{y,\delta} \subset R$.

Por lo tanto u es sobrearmónica. ■

DEFINICIÓN

μ es una *medida completa* si $\forall A$ tal que $A \subset B$ donde B es Lebesgue -medible y $\mu(B) = 0$, entonces A es Lebesgue -medible.

Teorema 3 *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto y sea μ medida en X.*

Si se cumplen las siguientes propiedades:

i) para cada $x \in X$, μ_x es una función sobrearmónica no negativa en R,

ii) F es un cerrado relativo a R,

iii) $\int_X u_x(y_0)\, d\mu(x) < +\infty$ para alguna $y_0 \in R$,

entonces

$$\widehat{R}_F^{\int_X u_x\, d\mu(x)} = \int_X \widehat{R}_F^{u_x}\, d\mu(x)$$

Demostración:

Sea λ la medida de Lebesgue (completada) en R .

Demostremos que $\widehat{R}_F^{u_x} = f \quad (\mu \times \lambda)$-*c.t.p.* para alguna f *Borel-medible* en $X \times R$.

Sea Z el conjunto de los *puntos -frontera irregulares* de $R \sim F$.

Por el LEMA 5 del Apéndice sabemos que Z es un subconjunto polar de $\partial(R \sim F)$ y, usando el TEOREMA 1 del capítulo 3 sabemos que Z es subconjunto de un conjunto polar D que es G_δ .

Consideremos entonces que $D \subset \partial(R \sim F)$.

Sabemos que $\widehat{R}_F^{u_x}(y) = u_x(y)$ para cada $y \in F \sim D$ y que $\widehat{R}_F^{u_x}(y)$ es Borel-medible en $X \times (F \sim D)$.

Sea $\mu_y^{R\sim F}$ la medida armónica realtiva a $y \in R \sim F$ y sea:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{f \text{ Borel medibles en } X \times R : f \geq 0 \text{ y tal que la función} \\ \widetilde{f}(x,y) &= \int_{\partial R} f(x,z)\, d\mu_y^{R\sim F}(z) \text{ es Borel-medible}\} \end{aligned}$$

Si f es continua y acotada sabemos (de los resultados del capítulo anterior) que entonces $\widetilde{f}(x,\cdot)$ es armónica en $R \sim F$ para cada $x \in X$ y, usando el *Teorema de Lebesgue de la convergencia dominada,* tenemos que $\widetilde{f}(\cdot,y)$ es continua en X para cada $y \in R \sim F$.

Es decir $\widetilde{f}$ es continua por separado en cada entrada y por lo tanto Borel-medible en $X \times (R \sim F)$.

Ahora $\mathcal{F}$ es cerrada bajo límites monótonos.

Si $\{\overline{g}_n\}$ es una sucesión monótona de funciones de $\mathcal{F}$, entonces por continuidad tenemos que:

$$\widetilde{g}_n(x,y) = \int_{\Delta_M} g_n(x,z)\, d\mu_y^{R\sim F}(z) < +\infty \;\; \forall n$$

Usando el *Teorema de la convergencia monótona* (ver el **Apéndice**)obtenemos que $\exists g \in \mathcal{F}$ tal que $g_n \to g$ cuando $n \to \infty$.

La funciones características χ_C de compactos $C \subset X \times (R \sim F)$ están en $\mathcal{F}$:

$$\widetilde{\chi}_C(x,y) = \int_{\Delta_M} \chi_C(x,z)\, d\mu_y^{R\sim F}(z) = \mu_y(C)$$

y $\mu_y \in \mathcal{F}$ por ser sobrearmónica en R (es integrable).

Para demostrar que si A es un subconjunto de Borel de $X \times (R \sim F)$ entonces $\chi_A \in \mathcal{F}$ se aproxima a A por una sucesión creciente de compactos.

Por otro lado sabemos que toda función s Borel-medible en $X \times (R \sim F)$ se puede aproximar uniformemente por funciones simples (y éstas por combinaciones lineales de funciones características). Entonces toda función Borel-medible $s \in \mathcal{F}$.

En particular, como $u_x(z)$ es Borel-medible en $X \times R$ entonces $u_x(z) \in \mathcal{F}$ y además:

$$\widehat{R}_F^{u_x}(y) = \int_{\Delta_M} u_x(z)\, d\mu_y^{R\sim F}(z) \qquad y \in R \sim F$$

es medible en $X \times (R \sim F)$.

Por lo tanto $\widehat{R}_F^{u_x}(y)$ es Borel-medible en $X \times (R \sim D)$ con $\mu(D) = 0$.

Entonces $\widehat{R}_F^{u_x}(y) = f \qquad (\mu \times \lambda)$-*c.t.p.* para alguna f *Borel-medible* en $X \times R$.

Es decir, $\widehat{R}_F^{u_x}(y)$ es medible en la *clase completada* de los conjuntos $(\mu \times \lambda)$-*medibles.*

Con todo lo anterior ya podemos aplicar el *Teorema deFubini.*

Sabemos que $\int_X u_x\, d\mu(x)$ es sobrearmónica en R . Tiene sentido entonces calcular su balayage. Como:

$$\widehat{R}_F^{\int_X u_x\, d\mu(x)}(y) = \int_X u_x(y)\, d\mu(x) \text{ en } F \sim Z$$

y:

$$\widehat{R}_F^{u_x}(y) = u_x(y) \quad \text{ en } F \sim Z$$

entonces:

$$\widehat{R}_F^{\int_X u_x\, d\mu(x)}(y) = \int_X \widehat{R}_F^{u_x}(y)\, d\mu(x) \quad \text{ en } F \sim Z$$

Ahora, si $y \in R \sim F$ aplicando Fubini obtenemos:

$$\int_X \widehat{R}_F^{u_x}(y)\, d\mu(x) = \int_X \left(\int_{\Delta_M} u_x(z)\, d\mu_y^{R\sim F}(z) \right) d\mu(x)$$

$$= \int_{\Delta_M} \left(\int_X u_x(z)\, d\mu(x) \right) d\mu_y^{R\sim F}(z) =$$

$$= \widehat{R}_F^{\int_X u_x\, d\mu(x)}(y)$$

Por lo tanto:

$$\widehat{R}_F^{\int_X u_x \, d\mu(x)} = \int_X \widehat{R}_F^{u_x} \, d\mu(x) \qquad \text{en } R \sim F$$

Sabemos que el lado izquierdo de esta ecuación es sobrearmónico en R (por ser un balayage). Si demostramos que el derecho es también sobrearmónico en R obtendremos la igualdad en todas partes en R (ya que se puede demostrar, usando la *s.c.i.* , que si dos funciones sobrearmónicas son iguales *c.t.p.* excepto quizás en un conjunto de medida cero entonces son iguales en *todas partes*. **Helms**).

Usando nuevamente el *Lema de Fatou* encontramos que $\int_X \widehat{R}_F^{u_x} \, d\mu(x)$ es s.c.i. para $y \in R \sim F$.

Aplicando ahora el *Teorema de Fubini* en el cálculo del promedio de $\int_X \widehat{R}_F^{u_x} d\mu(x)$, obtenemos que si $\overline{B}_{y,\delta} \subset R$ entonces :

$$A\left(\int_X \widehat{R}_F^{u_x} \, d\mu(x) : y, \delta\right) = \int_X A\left(\widehat{R}_F^{u_x} : y, \delta\right) \, d\mu(x)$$

$$\leq \int_X \widehat{R}_F^{u_x}(y) \, d\mu(x)$$

Por lo tanto $\int_X \widehat{R}_F^{u_x} \, d\mu(x)$ es sobrearmónica en R , y entonces

$$\widehat{R}_F^{\int_X u_x \, d\mu(x)} = \int_X \widehat{R}_F^{u_x} \, d\mu(x) \qquad \text{en } R$$

■

OBSERVACIÓN

$\widehat{R}_F^{\int_X u_x \, d\mu(x)}$ es un potencial si cada $\widehat{R}_F^{u_x}$ es un potencial.

DEFINICIÓN

Sea la *representación de Martin* de la función constante 1 :

$$1 = \int_{\Delta_1} K(x, \cdot) \, d\chi(x)$$

donde χ es la medida única en Δ_1 asociada a 1 por el *Teorema de Martin*.

Usaremos a la medida χ como *medida de referencia.*

Teorema 4 (Brelot) *Cada $f \in \mathcal{C}(R_M^*)$ es resolutiva con solución generalizada dada por:*

$$H_f = \int_{\Delta_1} f\, K(z,\cdot)\, d\chi(z) \qquad en\ R$$

Demostración:

Sea f una función continua en R_M^* tal que $0 \le f \le 1$. Para cada entero positivo j y para los enteros i tales que $0 \le i \le j$ definimos:

$$E_i = \left\{ y \in \Delta_1 : \frac{i}{j} - \frac{1}{2j} \le f(y) \le \frac{i}{j} + \frac{1}{2j} \right\}$$

$$F_i = \left\{ y \in \Delta_1 : f(y) \le \frac{i-1}{j} \right\} \cup \left\{ y \in \Delta_1 : f(y) \ge \frac{i+1}{j} \right\}$$

$$h_i = \int_{E_i} K(z,\cdot)\, d\chi(z) = \int_{\Delta_1} K(z,\cdot)\, d\chi_i(z)$$

donde $\chi_i(E) = \chi(E \cap E_i)$ para todos los subconjuntos de Borel $E \subset \Delta_M$.

Como χ tiene soporte en Δ_M , entonces cada h_i es armónica en R .

Por la manera en que están definidos $E_i \subset R_M^* \sim \overline{F}_i$ y entonces $R_M^* \sim \overline{F}_i$ es una vecindad de E_i.

Usando al teorema anterior obtenemos que:

$$\widehat{R}_{F_i}^{h_i} = \int_{\Delta_1} \widehat{R}_{F_i}^{K(z,\cdot)}\, d\chi_i(z)$$

Para $z \in sop_{\chi_i}$, usando al LEMA 12, $\widehat{R}_{F_i}^{K(z,\cdot)}$ es un potencial y, usando a la observación del teorema anterior, $\widehat{R}_{F_i}^{h_i}$ también es un potencial.

Por otro lado, ya que $\dfrac{i-1}{j} \le f \le \dfrac{i+1}{j}$ en $R \sim F_i$ y $h_i \ge 0$ encontramos:

$$\frac{i-1}{j}\left(h_i - \widehat{R}_{F_i}^{h_i}\right) \le f\, h_i \le \frac{i+1}{j} h_i + \widehat{R}_{F_i}^{h_i} \quad \text{en } R \sim F_i \text{ y con } 0 \le i \le j$$

Además sabemos que $\widehat{R}_{F_i}^{h_i} = h_i$ en F_i (excepto quizás en un subconjunto polar de F_i), entonces la desigualdad anterior se cumple para R (excepto quizás en un subconjunto polar). Se demuestra usando continuidad que esta desigualdad se cumple en *todas partes* en R . Y como se cumple para todas las i's tales que $0 \le i \le j$ entonces:

$$\sum_{i=1}^{j} \frac{i-1}{j}\left(h_i - \widehat{R}_{F_i}^{h_i}\right) \le f \sum_{i=1}^{j} h_i \le f \sum_{i=0}^{j} h_i \le \sum_{i=0}^{j}\left(\frac{i+1}{j} h_i + \widehat{R}_{F_i}^{h_i}\right) \quad \text{en } R \qquad \text{(a)}$$

pero $\sum_{i=0}^{j} h_i = \sum_{i=0}^{j}\left(\int_{E_i} K(z,\cdot)\, d\chi(z)\right) = 1$, ya que i va de 0 a j y en ese intervalo $\bigcup E_i = \Delta_1$, entonces

$$\sum_{i=1}^{j} \frac{i-1}{j}\left(h_i - \widehat{R}_{F_i}^{h_i}\right) \le f \le \sum_{i=0}^{j}\left(\frac{i+1}{j} h_i + \widehat{R}_{F_i}^{h_i}\right) \qquad \text{en } R$$

Vemos que $\sum_{i=1}^{j} \frac{i-1}{j}\left(h_i - \widehat{R}_{F_i}^{h_i}\right)$ es subarmónica ya que h_i es armónica y, como $\widehat{R}_{F_i}^{h_i}$ es sobrearmónica, entonces $-\widehat{R}_{F_i}^{h_i}$ es subarmónica.

Por lo tanto $\sum_{i=1}^{j} \frac{i-1}{j}\left(h_i - \widehat{R}_{F_i}^{h_i}\right)$ pertenece a $\underline{\mathcal{L}}_f$.

Análogamente $\sum_{i=0}^{j}\left(\frac{i+1}{j} h_i + \widehat{R}_{F_i}^{h_i}\right)$ es sobrearmónica y pertenece a $\overline{\mathcal{U}}_f$.

Entonces tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{j} \frac{i-1}{j} h_i - \sum_{i=1}^{j} \frac{i-1}{j} \widehat{R}_{F_i}^{h_i} \le \underline{H}_f \le \overline{H}_f \le \sum_{i=0}^{j} \frac{i+1}{j} h_i + \sum_{i=0}^{j} \widehat{R}_{F_i}^{h_i} \qquad \text{en } R$$

Ahora tomemos el m.m.a. (el m.m.a. de una suma es la suma de los m.m.a.):

$$\sum_{i=1}^{j} \frac{i-1}{j} h_i \le \underline{H}_f \le \overline{H}_f \le \sum_{i=0}^{j} \frac{i+1}{j} h_i \qquad \text{en } R$$

ya que cada $\widehat{R}_{F_i}^{h_i}$ es un potencial.

De aquí obtenemos:

$$0 \le \overline{H}_f - \underline{H}_f \le \sum_{i=0}^{j} \frac{2}{j} h_i = \frac{2}{j} \qquad \text{en } R \text{ y para todo entero positivo } j$$

Por lo tanto f es resolutiva.

Si f es una función continua en Δ_M tiene una extensión continua a todo R_M^* . Y como la multiplicación por constantes no afecta la resolutividad podemos considerar que $0 \le f \le 1$ y aplicar el resultado anterior.

Por lo tanto toda $f \in \mathcal{C}(R_M^*)$ es resolutiva.

Ahora, para cada f tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{j} \frac{i-1}{j} \int_{E_i} K(z,\cdot)\, d\chi(z) \leq H_f \leq \sum_{i=0}^{j} \frac{i+1}{j} \int_{E_i} K(z,\cdot)\, d\chi(z)$$

y de (a) tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{j} \frac{i-1}{j} \int_{E_i} K(z,\cdot)\, d\chi(z) \leq \int_{\Delta_1} f\, K(z,\cdot)\, d\chi(z) \leq \sum_{i=0}^{j} \frac{i+1}{j} \int_{E_i} K(z,\cdot)\, d\chi(z)$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\left| H_f - \int_{\Delta_1} f\, K(z,\cdot)\, d\chi(z) \right| \leq \frac{2}{j} \quad \forall j \text{ entero positivo}$$

es decir:

$$H_f = \int_{\Delta_1} f\, K(z,\cdot)\, d\chi(z)$$

■

Ejemplo 1 (La espina de Lebesgue) *Tomemos a la bola abierta $B_{0,1} \subset E^3$ de radio $r = 1$ centrada en el origen O .*

Sea R el abierto:

$$R = B_{0,1} \sim \hat{E}$$

donde $\hat{E}$ es el segmento de línea:

$$\hat{E} = \{(0,0,\zeta) : 0 \leq \zeta \leq 1\}$$

Tomemos una medida de densidad definida sobre $\hat{E}$ tal que $\rho(x) = x$.
Su potencial Newtoniano u es calculado en un punto (x, y, z) fuera del segmento es:

$$u(x,y,z) = \int \frac{\zeta\, d\zeta}{[x^2 + y^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

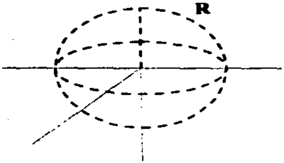

Figura 5-8: La espina

Se encuentra que $u(0,0,0)=1$, pero u es infinito en cualquier otro punto del conjunto $\{(0,0,\zeta):0<\zeta\leq 1\}$

.

Por lo tanto $(0,0,0)$ es un punto irregular de frontera (**Brelot**).

Entonces hay cuando menos una función-frontera $\gamma \in C(\partial R)$ tal que $\lim_{y\to(0,0,0)} H_\gamma(y) \neq \gamma((0,0,0))$. La integral de Poisson de la función γ no puede ser empleada para resolver el problema de Dirichlet correspondiente.

Resolvamos el problema usando la teoría de Martin.

Consideremos primero el problema para $R = B_{0,1}$.

● La *compactificación de Martin* de $R = B_{0,1}$ es la bola cerrada $\overline{B}_{0,1}$.

Es compactificación ya que $B_{0,1}$ es un subconjunto denso de $\overline{B}_{0,1}$ y la topología de $\overline{B}_{0,1}$ coincide en $B_{0,1}$ con la topología original ($\tau_{\overline{B}_{0,1}}\big|_{B_{0,1}} = \tau_{B_{0,1}}$).

Y la compactificación es de Martin porque las funciones f de la forma:

$$f = \frac{G(\cdot,x)}{\Phi\left(G(\cdot,x_0)\right)} \quad \text{para alguna } x \in B_{0,1}$$

tiene extensión continua.

Sea G la función de Green del abierto $B_{0,1}$.

Para ver que las f 's tiene extensión continua a $R^*_M = \overline{B}_{0,1}$ hay que demostrar que para los puntos $y \in \Delta_M = \partial B_{0,1}$:

$$\lim_{\substack{y'\to y\\ y'\in B_{0,1}}} \frac{G(y',x)}{\Phi\left(G(y',x_0)\right)}$$

existe.

Sabemos que $\Phi(G(y',x_0)) = G(y',x_0)$ fuera de un compacto de referencia $\mathbb{F}_0 \subset B_{0,1}$. Como $\mathbb{F}_0$ es de referencia podemos considerar que $\mathbb{F}_0 \subset B_{0,1}$. Por lo tanto el problema se reduce a demostrar que para los puntos $y \in \Delta_{M}$:

$$\lim_{\substack{y' \to y \\ y' \in B_{0,1}}} \frac{G(y',x)}{G(y',x_0)}$$

existe.

Para ello demostremos el siguiente lema:

LEMA (*Regla de L'Hôpital para la derivada direccional*).

Sean $F, H \in \mathbb{C}^1(\overline{B}_{0,1})$.

Si se cumplen para $y \in \partial B_{0,1}$:

i) $F(y) = H(y) = 0$

ii) $D_{\vec{s}}F(y), D_{\vec{s}}H(y) \neq 0$ *(donde* $D_{\vec{s}}$ *es el operador derivada direccional en la dirección* $\vec{s}$ *)*

entonces el límite aproximándose en la dirección $\vec{s}$ *por puntos* y' *de* $B_{0,1}$:

$$\lim_{y' \underset{\vec{s}}{\to} y} \frac{F(y')}{H(y')} = \frac{D_{\vec{s}}F(y)}{D_{\vec{s}}H(y)}$$

Demostración:

$$\lim_{y' \underset{\vec{s}}{\to} y} \frac{F(y')}{H(y')} = \lim_{h \to 0} \frac{F(y+\vec{s}h)}{H(y+\vec{s}h)} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(y+\vec{s}h) - F(y)}{H(y+\vec{s}h) - H(y)} = \frac{D_{\vec{s}}F(y)}{D_{\vec{s}}H(y)}$$

■

Sabemos que G tiene una extensión continua a $R^*_M = \overline{B}_{0,1}$. Denotemos a esta extensión de la misma manera.

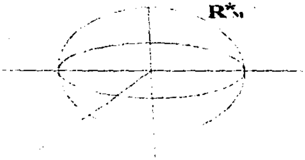

Figura 5-9: La bola rellena

Como $\lim_{y' \to y} G(y', z) = 0 \ \forall \, y \in \partial B_{0,1}$ y $D_{\hat{n}} G = P$ con P el *kernel de Poisson* ($P \neq 0$ en $\partial B_{0,1}$), entonces si $\hat{n}$ es el vector en la dirección normal

$$\lim_{y' \xrightarrow[\hat{n}]{} y} \frac{G(y', x)}{G(y', x_0)} = \frac{D_{\hat{n}} G(y, x)}{D_{\hat{n}} G(y, x_0)}$$

y $\dfrac{D_{\hat{n}} G(y, x)}{D_{\hat{n}} G(y, x_0)}$ es continua para $x \in B_{0,1}$ y $y \in \partial B_{0,1}$.

Por lo tanto

$$\lim_{\substack{y' \xrightarrow[\hat{n}]{} y \\ y' \in B_{0,1}}} \frac{G(y', x)}{\Phi\left(G(y', x_0)\right)}$$

existe (y de hecho es una función continua) para $x \in B_{0,1}$ y $y \in \partial B_{0,1}$. Usando la continuidad de $\dfrac{G(y', x)}{\Phi\left(G(y', x_0)\right)}$ para y' proximos a la frontera concluímos que $\lim_{\substack{y' \to y \\ y' \in B_{0,1}}} \dfrac{G(y', x)}{\Phi\left(G(y', x_0)\right)}$ existe.

◆ El conjunto de puntos minimales extremos Δ_1 es precisamente $\partial B_{0,1}$.

Sabemos que $\Delta_1 \subset \Delta_M = \partial B_{0,1}$. Falta por demostrar que $\Delta_M = \partial B_{0,1} \subset \Delta_1$.

Para ello consideremos la siguientes definiciones (**Brelot**):

◇ La función u es *armónica minimal* en la región R si:

i) $u \geq 0$

ii) $\forall \, v$ armónica tal que $v \geq 0$, $v \leq u$ entonces $v = \alpha u$ en R .

TEOREMA Toda función u armónica minimal en R tal que $u \neq 0$ es proporcional a cierta $K(y_u, \cdot)$. (**Brelot**).

◇ En base al teorema anterior se define el siguiente conjunto:

$$\Delta_1^* = \left\{ \begin{array}{c} y \in \Delta_M : \alpha K(y, \cdot) = u \\ \text{para cierta u armónica minimal en la región } R \text{ tal que } u \neq 0 \end{array} \right\}$$

De estas definiciones se deriva que dada $y \in \Delta_M$ entonces $K(y, \cdot)$ es armónica minimal si y sólo si $y \in \Delta_1^*$:

Si $K(y, \cdot)$ es armónica minimal entonces $y \in \Delta_1^*$, ya que $K(y, \cdot) = 1 \cdot K(y, \cdot)$.

Si $y \in \Delta_1^*$ entonces por definición $\exists$ u armónica minimal en R ($u \neq 0$) tal que $\alpha K(y, \cdot) = u$. Despejando $K(y, \cdot)$ tenemos que $K(y, \cdot) = \frac{u}{\alpha}$. Claramente $\frac{u}{\alpha}$ es armónica .Veamos ahora que $\frac{u}{\alpha}$ es minimal:

Sea v armónica tal que $v \geq 0$ y $v \leq \frac{u}{\alpha}$ .Despejando u tenemos que $\alpha v \leq u$, pero αv es armónica , entonces $\exists \beta$ tal que $\alpha v = \beta u$ en R debido a la minimalidad de u. Es decir,

$$v = \beta \frac{u}{\alpha} = \beta K(y, \cdot)$$

Por lo tanto $K(y, \cdot)$ es armónica minimal.

Demostremos ahora que:

TEOREMA. $\Delta_1^* \subset \Delta_1$.

Demostración:

Sea $y \in \Delta_1^*$, es decir $K(y, \cdot)$ es armónica minimal. Queremos demostrar que $K(y, \cdot) = K\delta_y$ es un *potencial extremo*. Sean μ_1 y μ_2 medidas en R_M^*. Supongamos que en R :

$$K(y, \cdot) = K\delta_y = K\mu_1 + K\mu_2$$

hay que demostrar que el potenical $K\mu_1$es proporcional al potencial $K\mu_2$.

Por ser potenciales $K\mu_1$ y $K\mu_2$ tienen representaciones através del Teorema de Riesz:

$$\begin{aligned} K\mu_1 &= G\mu_1^* + h_1 \\ K\mu_2 &= G\mu_2^* + h_2 \end{aligned}$$

Y entonces:

$$K(y,\cdot) = K\delta_y = G\mu_1^* + h_1 + G\mu_2^* + h_2$$

Ahora, tomando el máximo minorante armónico (mma) tenemos que:

$$K(y,\cdot) = h_1 + h_2$$

ya que el mma de una suma es la suma de los mm-armónicos, el mma de un potencial es la función cero y el mma de una función armónica es ella misma.

La última igualdad implica que en R :

$$G\mu_1^* + G\mu_2^* = 0$$

es decir, en R tenemos que:

$$G\mu_1^* = -G\mu_2^*$$

pero como R es conexo, sabemos que $G > 0$ y μ_1^* y μ_2^* son medidas ($\mu_1^*, \mu_2^* \geq 0$), entonces

$$G\mu_1^* = G\mu_2^* = 0$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned} K\mu_1 &= h_1 \\ K\mu_2 &= h_2 \end{aligned}$$

Ahora, usando la minimalidad de $K(y,\cdot)$ y la igualdad $K(y,\cdot) = h_1 + h_2$, tenemos que:

$$K(y,\cdot) \geq h_i \quad \text{para } i = 1,2$$

entonces existen α_1 y α_2 tales que:

$$\begin{aligned} K(y,\cdot) &= \alpha_1 h_1 \\ K(y,\cdot) &= \alpha_2 h_2 \end{aligned}$$

Es decir h_1 y h_2 son proporcionales, de donde $K\mu_1$ y $K\mu_2$ son proporcionales.

En conclusión $y \in \Delta_1$. ■

Ahora demostremos que si $\Delta_1^* \neq \emptyset$, entonces $\Delta_M = \partial B_{0,1} \subset \Delta_1^*$.

Tomemos una $y_1 \in \partial B_{0,1}$ tal que $y_1 \in \Delta_1^*$. Hay que demostrar que entonces todos los demás puntos de la frontera de la bola están en Δ_1^* .

Sea $y_2 \in \partial B_{0,1}$ y sea v una función armónica tal que:

$$K(y_2, x') \geq v(x') \quad \text{para } x' \in B_{0,1}$$

Sabemos que:

$$K(y_2, x') = \frac{1 - \|x'\|^2}{\|y_2 - x'\|}$$

para $y_2 \in \partial B_{0,1}$ y $x' \in B_{0,1}$.

Tomemos la rotación θ tal que $y_1 = \theta(y_2)$. Como las rotaciones mantienen distancias tenemos que:

$$K(y_2, x') = \frac{1 - \|x'\|^2}{\|y_2 - x'\|} = \frac{1 - \|x\|^2}{\|y_1 - x\|} = K(y_1, x)$$

donde $x' = \theta(x)$. Entonces

$$K(y_2, x') = K(y_1, x) \geq v(x') \quad \text{con } x' \in B_{0,1}$$

es decir

$$K(y_1, x) \geq v(x') = v(\theta(x)) = v \circ \theta\,(x) \quad \text{para } x \in B_{0,1}$$

Pero $K(y_1, \cdot)$ es minimal y $v \circ \theta$ es armónica, entonces $\exists\, \alpha$ tal que $\alpha K(y_1, \cdot) = v \circ \theta$ en $B_{0,1}$ .Es decir:

$$\begin{aligned} \alpha K(y_2, x') &= \alpha K(y_1, x) = v \circ \theta\,(x) \\ &= v(x') \end{aligned}$$

Por lo tanto $K(y_2, \cdot)$ es minimal.

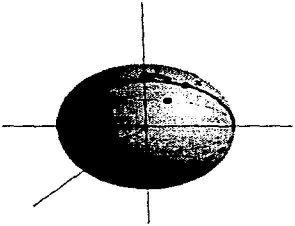

Figura 5-10: La bola rotada

Entonces tenemos que si $\Delta_1^* \neq \emptyset$, entonces $\Delta_M = \partial B_{0,1} \subset \Delta_1^* \subset \Delta_1 \subset \Delta_M$. En conclusión si $\Delta_1^* \neq \emptyset$, entonces $\Delta_M = \partial B_{0,1} = \Delta_1^* = \Delta_1$.

◆ Sea $g = \gamma|_{\partial B_{0,1}}$.

Dada esta función de frontera $g \in C(\partial B_{0,1})$ existe la solución del problema de generalizado de Dirichlet obtenida atravês del *Método de PWB :*

$$H_g = \int_{\partial B_{0,1}} g(y)\, K(y,\cdot)\, d\chi(y)$$

para K la función de Martin y χ la medida única sobre Δ_1 correspondiente por el *teorema de Brelot* .

Encontremos a K y a χ .

Por una parte sabemos este problema se puede solucionar (a la manera clásica) por la integral de Poisson:

$$h = c \int_{\partial B_{0,1}} D_{\vec{n}}\, G(y,\cdot) g(y)\, d\sigma(y)$$

donde $c = -\dfrac{1}{\sigma_n(n-2)}$.

Usando el TEOREMA 10 del Capítulo 4 sabemos que, como $\lim_{\substack{y \to x \\ y \in B_{0,1}}} h(y) = g(x) \quad \forall x \in \partial B_{0,1}$,entonces $H_g = h$.

Entonces

$$\int_{\partial B_{0,1}} g(y)\, K(y,\cdot)\, d\chi(y) = c \int_{\partial B_{0,1}} D_{\bar{n}}\, G(y,\cdot) g(y)\, d\sigma(y)$$

Por otro lado sabemos que la medida de referencia χ viene dada por la representación de la función constante 1 através del *teorema de Martin* :

$$1 = \int_{\partial B_{0,1}} K(y,\cdot)\, d\chi(y) \quad \text{ en } B_{0,1}$$

Y para la misma función 1 tenemos, sustituyendo g por 1, que:

$$\text{(a)} \qquad 1 = c \int_{\partial B_{0,1}} D_{\bar{n}}\, G(y,\cdot)\, d\sigma(y) \quad \text{ en } B_{0,1}$$

gracias a la representación integral de Poisson.

Entonces basta ver que pasa con:

$$\int_{\partial B_{0,1}} K(y,\cdot)\, d\chi(y) = c \int_{\partial B_{0,1}} D_{\bar{n}}\, G(y,\cdot)\, d\sigma(y)$$

Además sabemos por definición que para $y \in \Delta_M$:

$$K(y,\cdot) = \lim_{\substack{y' \to y \\ y' \in B_{0,1}}} \frac{G(y',x)}{\Phi\left(G(y',x_0)\right)}$$

la cual, para y' próximos a la frontera, queda :

$$\frac{G(y',x)}{\Phi\left(G(y',x_0)\right)} = \frac{G(y',x)}{G(y',x_0)}$$

Entonces para y' s en $B_{0,1}$ (próximos a la frontera) tenemos que:

$$\text{(b)} \qquad \int_{\partial B_{0,1}} \left[\lim_{y' \to y} \frac{G(y',x)}{\Phi\left(G(y',x_0)\right)}\right] d\chi(y) = c \int_{\partial B_{0,1}} D_{\bar{n}}\, G(y,\cdot)\, d\sigma(y)$$

Usando nuevamente el lema anterior y la continuidad de $\dfrac{G(y',x)}{G(y',x_0)}$ (G denota también a la extensión continua sobre Δ_M) encontramos que :

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_{0,1}}\left[\lim_{y'\to y}\frac{G(y',x)}{\Phi\left(G(y',x_0)\right)}\right]d\chi(y) &= \int_{\Delta_1}\left[\lim_{y'\to y}\frac{G(y',x)}{G(y',x_0)}\right]d\chi(y)\\ &= \int_{\partial B_{0,1}}\left[\frac{D_{\bar n}\,G(y,x)}{D_{\bar n}\,G(y,x_0)}\right]d\chi(y)\end{aligned}$$

es decir:

$$K(y,\cdot)=\frac{D_{\bar n}\,G(y,x)}{D_{\bar n}\,G(y,x_0)} \qquad \text{en } \overline{B}_{0,1}$$

Regresando a la ecuación (b) tenemos que:

$$\int_{\partial B_{0,1}}\left[\frac{D_{\bar n}\,G(y,x)}{D_{\bar n}\,G(y,x_0)}\right]d\chi(y)=c\int_{\partial B_{0,1}}D_{\bar n}\,G(y,\cdot)\,d\sigma(y)$$

Ahora, $sop_\chi\subset\overline{B}_{0,1}$ y χ está determinada por:

$$\text{(c)}\qquad 1=\int_{\partial B_{0,1}}\left[\frac{D_{\bar n}\,G(y,x)}{D_{\bar n}\,G(y,x_0)}\right]d\chi(y)$$

Definamos a la medida χ^* por:

$$\chi^*(E)=\int_{\partial B_{0,1}}\frac{d\chi(y)}{D_{\bar n}\,G(y,x_0)}$$

para todo$E$ boreliano de $\partial B_{0,1}$. De esta manera χ^* es absolutamente continua respecto a χ y (usando el *Teorema de Radon Nikodym*) obtenemos la *derivada de Radon* de ambos lados:

Entonces podemos escribir:

$$\text{(d)}\qquad d\chi^*=\frac{d\chi}{D_{\bar n}\,G(y,x_0)}$$

para $y\in\partial B_{0,1}$.

Además podemos escribir a (c) de la siguiente manera:

$$(\text{f}) \qquad 1 = \int_{\partial B_{0,1}} D_{\bar{n}}\, G(y,x)\, d\chi^*(y) \qquad \text{en } B_{0,1}$$

Entonces χ^* es absolutamente continua respecto a σ, y por el *Teorema de Radon-Nikodym* tenemos que:

$$\chi^*(E) = \int_E \theta(z)\, d\sigma(z) \qquad \text{para alguna } \theta \text{ medible sobre } \partial B_{0,1}$$

Veamos ahora quién es χ^*.

Igualando (a) y (f) temonos que:

$$c \int_{\partial B_{0,1}} D_{\bar{n}}\, G(y,\cdot)\, d\sigma(y) = \int_{\partial B_{0,1}} D_{\bar{n}}\, G(y,\cdot)\, d\chi^*(y) \qquad \text{en } B_{0,1}$$

y obtenemos la *derivada de Radon* de ambos lados:

$$D_{\bar{n}}\, G(y,\cdot)\, d\sigma = D_{\bar{n}}\, G(y,\cdot)\, d\chi^*$$

en $B_{0,1}$ para los borelianos de $\partial B_{0,1}$ y $y \in B_{0,1}$. Y como $D_{\bar{n}}\, G(y,\cdot) \neq 0$ en $B_{0,1}$ para $y \in \partial B_{0,1}$ entonces:

$$(\text{e}) \quad \sigma = \chi^* \qquad \text{en los borelianos de } \partial B_{0,1}$$

En conclusión, de (d) y (e) tenemos que:

$$\chi(E) = \int_E D_{\bar{n}}\, G(y,x_0) d\sigma(y)$$

para todo$E$ boreliano de $\partial B_{0,1}$.

Ahora, para ver que $\overline{B}_{0,1}$ es la *compactificación de Martin* de $B_{0,1} \sim \hat{E}$ falta mostrar que las funciones f de la forma:

$$f = \frac{G(\cdot,x)}{\Phi\,(G(\cdot,x_0))} \qquad \text{para alguna } x \in B_{0,1}$$

tienen extensión continua sobre $\check{E}$. Pero $\dfrac{G(\cdot,x)}{\Phi(G(\cdot,x_0))}$ es continua en $B_{0,1}$ (y finita fuera de $\mathbf{F}_0$), entonces estas f 's tiene extensión continua sobre $\check{E}$.

Finalmente empleando el LEMA 2 del Capítulo 4 encontramos que la solución al problema generalizado de Dirichlet para la función de frontera $g \in C(\partial B_{0,1})$ coincide con la solución para $\gamma \in C(\partial R)$:

$$H_g = H_\gamma$$

ya que $\gamma = g$ excepto en el conjunto polar $\check{E}$ (g puede definirse arbitramente en $\check{E}$).

De esta manera queda resuelto el *problema de Dirichlet para la espina de Lebesgue en* E^3. Hay que notar que la solución de este problema no depende de la dimensión. Por lo tanto el problema queda resuelto para la dimensión $n \geq 2$.

Apéndice A

El problema de Dirichlet para regiones no acotadas.

Sea $\Delta \notin E^n$. Se define E^n_Δ por:

$$E^n_\Delta = E^n \cup \{\Delta\}$$

La nueva topología es:

$$\tau_{E^n_\Delta} = \tau_{E^n} \cup \{A : A = E^n_\Delta \sim C, C \text{ compacto de } E^n\}$$

E^n_Δ resulta ser entonces un espacio topológico, de hecho un espacio métrico compacto.
Sea $R \subset E^n_\Delta$.

DEFINICIÓN

Una función u definida en los reales extendidos $[-\infty, +\infty]$ es *sobrearmónica* en R si:

i) es sobrearmónica en $R \sim \{\Delta\}$

ii) y además tenemos que si $\Delta \in R$ entonces u es *s.c.i.* en Δ , y

$$u(\Delta) \geq L(u : x_0, \delta)$$

$\forall x_0, \forall \delta$ tales que $\sim B_{x_0,\delta} \subset R$.

A.1 El problema exterior de Dirichlet

LEMA 1

Sea h una función armónica en $E^n \sim \overline{B}_{y,\rho}$, continua en $E^n \sim B_{y,\rho}$ tal que $\lim_{x \to \Delta}$ existe y es α . Entonces si $x \in E^n \sim \overline{B}_{y,\rho}$ tenemos que:

$$h(x) = \frac{1}{\sigma_n \rho} \int_{\partial B_{y,\rho}} \frac{\|y - x\|^2 - \rho^2}{\|z - x\|^n} h(z)\, d\sigma(z)$$

$$-\frac{\alpha \rho^{n-2}}{\|x - y\|^{n-2}} + \alpha$$

Además si $\alpha = L(h : y, \rho)$, entonces $L(h : y, r) = \alpha \quad \forall r > \rho$.

DEFINICIÓN

Sea f una función Borel-medible sobre $\partial B_{y,\rho}$ es integrable respecto a la medada de superficie.

La *integral de Poisson* de f relativa a $E^n \sim B_{y,\rho}$ es:

i) si $x \in E^n \sim \overline{B}_{y,\rho}$:

$$IP(f, \sim B_{y,\rho})(x) = \frac{1}{\sigma_n \rho} \int\limits_{\partial B_{y,\rho}} \left[\frac{\|y - x\|^2 - \rho^2}{\|z - x\|^n} + \frac{1}{\rho^{n-2}} - \frac{1}{\|x - y\|^{n-2}} \right] \times f(z)\, d\sigma(z)$$

ii) si $x = \Delta$:

$$IP(f, \sim B_{y,\rho})(\Delta) = \frac{1}{\sigma_n \rho} \int\limits_{\partial B_{y,\rho}} \frac{f(z)}{\rho^{n-2}}\, d\sigma(z)$$

TEOREMA 1

Si f es Borel-medible en $\partial B_{y,\rho}$ entonces $h = IP(f, \sim B_{y,\rho})(x)$ es armónica en $E^n_\Delta \sim B_{y,\rho}$ y si $x \in \partial B_{y,\rho}$. entonces:

$$\lim \sup_{\substack{z \to x \\ z \in \sim B_{y,\rho}}} h(z) \le \lim \sup_{\substack{z \to x \\ z \in \sim B_{y,\rho}}} f(z)$$

Y si f es continua en $x \in \partial B_{y,\rho}$ entonces:

$$\lim_{\substack{z \to x \\ z \in \sim B_{y,\rho}}} h(z) = f(x)$$

TEOREMA 2

Si u es sobrearmónica en R abierto y conexo de E^n_Δ , entonces satisface el *Principio del mínimo* en R .

Además, si $\liminf_{z\to x} u(z) \geq 0 \ \forall\, x \in \partial R$, entonces $u(z) \geq 0$ en R .

COROLARIO

Si u es sobrearmónica en E^n_Δ , entonces u es una función constante.

A.2 Problema de Dirichlet para regiones no acotadas

LEMA 2

Sea u sobrearmónica en $R \subset E^n_\Delta$. Sea W abierto tal que $\overline{W} \subset R$.

Si u es continua en $\overline{W}$, armónica en W y $u \geq h$ en ∂W entonces $u \geq h$ en W .

DEFINICIÓN

El conjunto $E \subset E^n_\Delta$ es *polar* si $\forall\, x \in E$ corresponde W una vecindad de x y una función sobrearmónica v en W tal que $v = +\infty$ en $E \cap W$.

TEOREMA 3

$\{\Delta\}$ es un subconjunto polar de E^2_Δ , pero no es polar de E^n_Δ para $n \geq 3$.

Un polar de E^n_Δ para $n \geq 3$ es lo "mismo" que para E^n . Pero un polar de E^2_Δ puede contener a Δ .

Si R es un abierto y conexo de E^n_Δ y $\sim R$ no es polar entonces $R \sim \{\Delta\}$ tiene función de Green y cuando menos una función sobrearmónica positiva no constante.

DEFINICIONES

Sea $f : \partial R \longrightarrow [-\infty, +\infty]$

La *clase superior* es:

$$\mathcal{U}_f = \{\ u \text{ hiperarmónica} : \liminf_{z\to y} u(z) \geq f(x)\ \forall\, x \in \partial R$$
$$\text{y } u \text{ está acotada inferiormente en } R\ \}$$

La *clase inferior* es:

$$\mathcal{L}_f = \{\ u \text{ hipoarmónica} : \limsup_{z\to y} u(z) \leq f(x)\ \forall\, x \in \partial R$$
$$\text{y } u \text{ está acotada superiormente en } R\ \}$$

La *solución superior* es:

$$\overline{H}_f = \inf\{u : u \in \mathcal{U}_f\}$$

La *solución inferior* es:

$$\underline{H}_f = \sup\{u : u \in \mathcal{L}_f\}$$

f es *resolutiva* si $\overline{H}_f = \underline{H}_f$ y ambas son armónicas.

OBSERVACIONES

◇ $\overline{H}_f \leq \underline{H}_f$.

◇ Si $u \in \mathcal{U}_f$ y $v \in \mathcal{L}_f$, entonces $u \geq v$ en R .

TEOREMA 4

$\overline{H}_f$ es idénticamente $+\infty$ o es armónica en cada componente de R . Análogamente para $\underline{H}_f$.

LEMA 3

Sea R abierto de E^n_Δ y $\sim R$ no polar.

Si $\{f_j\}$ es una sucesión de funciones resolutivas que converge uniformemente a f , entonces f es resolutiva y la sucesión $\{H_{f_j}\}$ converge uniformemente a H_f .

LEMA 4

Sea R abierto de E^n_Δ y $\sim R$ no polar.

Si u es sobrearmónica positiva en R tal que $f(x) = \lim_{z\to x} u(z)$ existe para toda $x \in \partial R$, entonces f es una función-frontera resolutiva.

TEOREMA 5

Sea R abierto de E^n_Δ y $\sim R \neq \emptyset$.

Si $f \in \mathcal{C}(\partial R)$ entonces f es resolutiva.

A.3 Comportamiento en la frontera

DEFINICIONES

$x \in \partial R$ es un *punto-frontera regular* si:

$$\lim_{z\to x} H_f(z) = f(x) \quad \forall f \in \mathcal{C}(\partial R)$$

Se dice que w función sobrearmónica positiva es una *barrera* en $x \in \partial R$ si está definida en $W_x \cap R$ para alguna vecindad W_x de x y si:

$$\lim_{z \to x} w(z) = 0$$

LEMA 5

Sea R abierto de E^n_Δ y $\sim R \neq \emptyset$. El conjunto de los puntos -frontera irregulares de R es un conjunto polar.

LEMA 6

Sea R abierto de E^n_Δ y $\sim R$ no es polar . Si $Z \subset \partial R$ es polar, entonces existe una función sobrearmónica positiva en R tal que:

$$\lim_{z \to x} v(z) = +\infty \ \forall x \in Z$$

COROLARIO *(Bouligand)*

Sea R abierto de E^n_Δ y $\sim R$ no es polar .

Sea h función armónica positiva sobre R tal que $\lim_{y \to x} h(y) = 0$ para toda $x \in \partial R$ excepto quizás en un polar, entonces $h = 0$ en R .

LEMA 7

Sea R abierto de E^n_Δ y $\sim R$ no es polar y sea $\overline{B}_{y,\rho}$.

Si f es acotada en ∂R entonces:

$$\overline{H}_f = \inf\{ u \ : u \text{ sobrearmónica en } R \text{ , } u \text{ está acotada inferiormente en } R \text{ y}$$
$$\liminf_{z \to y} u(z) \geq f(x) \ \forall x \in \partial R \text{ que sean puntos regulares de } R \sim \overline{B}_{y,\rho}\}$$

TEOREMA 6

Sea R abierto de E^n_Δ y $\sim R$ no es polar.

Si $f \in \mathcal{C}(\partial R)$ entonces f es resolutiva.

De esta manera, como en el **Capítulo IV**, llegamos al concepto de medida armónica.

DEFINICIONES

Para cada $x \in R$ sabemos que existe, gracias al Teorema de representación de Riesz, una medida de

Borel en ∂R unitaria μ_x tal que:

$$H_f(x) = \int f\, d\mu_x$$

Esta medida es llamada *medida armónica* relativa a x y a R .

f es $\mu_\cdot$- *integrable* si $\int |f|\, d\mu_x < +\infty$ para alguna x en cada componente de R .

TEOREMA 7

Sea R abierto de E^n_Δ y $\sim R$ no es polar.

f es resolutiva si y sólo si es $\mu_\cdot$- integrable y, entonces, tenemos que:

$$H_f(x) = \int f\, d\mu_x \;\forall x \in R$$

TEOREMA 8

Sea R abierto de E^n_Δ y $\sim R$ no es polar. Sea μ_y una medida armónica asociada a $y \in R$.

Si $Z \subset \partial R$ y es polar entonces $\mu_y(Z) = 0 \;\forall y \in R$.

OBSERVACIONES

◇ Un punto regular para $R \sim \overline{B}_{y,\rho}$ es regular también para R .

Sea R abierto de E^n con función de Green G . Si $\Delta \in \partial R$ y $\Delta \notin R$, entonces:

◇ si $\Delta \in \sim R$, $\sim R$ es no polar ($n \geq 3$).

◇ $E^n_\Delta \sim R$ es no polar ($n = 2$).

TEOREMA 9

Sea R abierto de E^n con función de Green G .

Sea u sobrearmónica positiva en R . Sea F subconjunto cerrado (relativo) de R . Entonces:

$$\widehat{R}^u_F(y) = u(y) \;\; y \in F$$

excepto quizás para las $y \in \partial F \cap R$ que sean punto irregulares para $R \sim F$.

Además $\widehat{R}^u_F = H^{R\sim F}_{u_0}$ en $R \sim F$ donde u_0 se define por:

$$u_0 = \begin{cases} u \;\text{ en } \partial F \cap R \\ \\ 0 \;\text{ en } \partial R \cap \partial(R \sim F) \end{cases}$$

Apéndice B

Definiciones, ecuaciones y teoremas

B.1 La unicidad de la solución

DEFINICIÓN

Sea R el *semi-espacio*, es decir

$$R = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_n > 0\}$$

Sea c un número real y f una función acotada Lebesgue-medible definida en el plano ∂R .

Se define $IP(c, f, R)$ por:

$$IP(c, f, R) = cx_n + \frac{2x_n}{\sigma_n} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{\|z - x\|^n} dz$$

TEOREMA 10

Si f es una función acotada Lebesgue-medible definida en ∂R y c es un número real, entonces $IP(c, f, R)$ es armónica en R .

Si f es continua en $z_0 \in \partial R$ entonces

$$\lim_{x \to z_0} IP(c, f, R)(x) = f(z_0)$$

Además

$$\frac{IP(c, f, R)(x)}{\|x\|} \to c \quad \text{cuando } \|x\| \to +\infty \quad \text{positivamente sobre el eje-}x_n$$

B.2 Definiciones

◇ Sea R un subconjunto del espacio euclidiano E^n . Sea ρ la medida en E^n .

Sea $x \in E^n$.

La *distancia de x a R* queda deifnida por:

$$\rho(R, x) = \inf_{a \in R} \{\rho(a, x)\}$$

Sea $S \subset E^n$.

La *distancia de S a R* es:

$$\rho(R, S) = \inf_{\substack{a \in R \\ b \in S}} \{\rho(a. x)\}$$

◇ Un *espacio de Hausdorff* es un espacio topológico T que verifica el segundo axioma de separabilidad o axioma de Hausdorff:

> Para dos cualesquiera puntos x, y del espacio T existen vecindades de cada punto: O_x, O_y , de intersección vacia.

Un *espacio de Banach* es un espacio normado completo. Es decir, un espacio normado en el que toda sucesión de Cauchy es convergente.

◇ La *función f* es *real extendida* si va de su dominio a $\mathbf{R}^*=[-\infty, +\infty]$.

◇ Sea la función f real extendida con dominio $D \subset E^n$.

Para cada $y \in E^n$ sea Θ_y el conjunto de todas las vecindades de y .

Sea $F \subset D$ y sea $x \in \overline{F}$.

Se define el *límite inferior* de f como:

$$\lim \inf_{\substack{z \to x \\ z \in F}} f(z) = \sup_{O_x \in \Theta_x} \left[\inf_{y \in F \cap O_x} f(z) \right]$$

Se define el *límite superior* por:

$$\lim \sup_{\substack{z \to x \\ z \in F}} f(z) = \lim_{O_x \in \Theta_x} \left[\sup_{y \in F \cap O_x} f(z) \right]$$

◇ Sea la función f real extendida con dominio $D \subset E^n$.

Se dice que f es *semicontinua inferior* en $x \in D$ si:

$$f(x) = \lim \inf_{\substack{z \to x \\ z \in D}} f(z)$$

o, equivalentemente, si para toda $\epsilon > 0$ existe una vecindad de x , O_x , tal que:

$$f(z) > f(x) - \epsilon \qquad \forall z \in O_x$$

Se dice que f es semicontinua superior en $x \in D$ si:

$$f(x) = \limsup_{\substack{z \to x \\ z \in D}} f(z)$$

o, equivalentemente, si para toda $\epsilon > 0$ existe una vecindad de x , O_x , tal que:

$$f(z) < f(x) + \epsilon \qquad \forall z \in O_x$$

Las fucniones semicontinuas inferiores están inferiormente acotadas, alcanzan su mínimo en compactos y pueden ser proximadas inferiormente, en compactos, por funciones continuas.

◇ Una transformación de E^n en E^n es una *inversión* en una esfera de radio r y centro y : $\partial B_{y,r}$, si a todo punto $x \in E^n$ le corresponde un punto x^* tal que:

(i) x^* está situado sobre la línea que une al punto y con x

(ii) su distancia al punto y está dada por la relación:

$$\|x - y\| \ \|x^* - y\| = r^2$$

Estas dos características para la inversión se resumen con la ecuación:

$$x^* = y + \frac{r^2}{\|x - y\|}(x - y) \qquad (x \neq y)$$

◇ Sea $y \in E^n$, y sea la bola $B_{y,r}$.
Sea R un abierto de $E^n \sim \{y\}$ y sea R^* la imagen de R bajo la inversión respecto a $\partial B_{y,r}$.
Sea la función f^* definida en R^* .
La transformada de Kelvin de f^* se define por:

$$f(x) = \frac{r^{n-2}}{\|x - y\|^{n-2}} \ f^* \left(y + \frac{r^2}{\|x - y\|}(x - y) \right)$$

Resulta que esta transformación preserva positividad y armonicidad.
◇ Sea R subconjunto abierto de $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.
Sea la función $f : R \to (-\infty, +\infty)$. Sea $x \in R$.

El *límite por la izquierda (derecha)* de f en x es:

$$\lim_{\substack{y \to x^+ \\ y \in R}} f(y) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in R \\ y \geq x}} f(y)$$

Análogamente se define el *límite por la izquierda.*

◇ Sea R subconjunto abierto de $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$.

Una función $f : R \to (-\infty, +\infty)$ es *continua por la derecha* en $x \in R$ si:

$$\lim_{\substack{y \to x^+ \\ y \in R}} f(y) = f(x)$$

Análogamente se define la *continuidad por la izquierda.*

◇ Sea R un subconjunto abierto de E^n .

Sea χ la función característica definida sobre los subconjuntos de R .

Una función $f : R \to \mathbf{R}^*$ es *localmente integrable* si el producto $f\chi_K$ es integrable para todo compacto $K \subset R$.

◇ Sea R un subconjunto abierto de E^n .

Sea la una μ y μ_F dos medida sobre R .

Se dice que μ_F es *absolutamente continua* respecto a μ si μ_F se anula en cuanquier subconjunto de R que tenga medida μ cero.

◇ Sea R un subconjunto abierto de E^n .

Sea μ una medida sobre R .

Sea la familia de todos los abiertos $(O_i)_{i \in I}$, $O_i \subset R$ tales que para toda $i \in I$

$$\mu(O_i) = 0$$

Se define $O = \bigcup_{i \in I} O_i$.

(Si μ es $\sigma-$aditiva entonces $\mu(O) = 0$).

El *soporte* de μ es el conjunto:

$$sop\, \mu = R \sim O$$

Si $sop\, \mu$ es un conjunto compacto (de R) se dice que μ tiene oporte compacto.

◇ Sea el espacio euclidiano E^n . Consideremos un $\sigma-$ anillo de conjuntos definido sobre él.

Una *carga* es una función σ - aditiva definida sobre el $\sigma-$ anillo.

El concepto de carga es una generalización del concepto de medida σ - aditiva. Podemos decir que una medida es una carga no negativa.

◇ Sea X un espacio. Sea $\{\mu_j\}$ una sucesión de cargas sobre los borelianos de X.

Se dice que μ_j *converge en la w^*-topología* a la carga μ si para toda función f continua con soporte compacto:

$$\lim_{j\to\infty} \int f\, d\mu_j = \int f\, d\mu$$

◇ Sea $B_{x,\rho}$ la bola n-dimensional con centro en x y radio ρ.

Una medida ν_ρ uniformemente distribuída en $\partial B_{x,\rho}$ es de la forma:

$$\nu_\rho(E) = c_{\nu_\rho} \int_{\partial B_{x,\rho}} d\sigma(x)$$

para cierta constante c_{ν_ρ} y para todo boreliano E del espacio. (σ es la medida de superficie.)

◇ Sea $x = (x_1, ... x_n) \in E^n$. Sea $\|x\| = r$.

La *transformación de coordenadas rectangulares en coordenadas esféricas* está dada por:

$$(x_1, ..., x_n) \longrightarrow (\theta_1, ... \theta_{n-1}, r)$$

Donde $\theta_1 = \frac{x_1}{r}$, ..., $\theta_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{r}$, $r = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$.

El jacobiano de esta transformación es:

$$\left|\frac{\partial(x_1, ..., x_n)}{\partial(\theta_1, ... \theta_{n-1}, r)}\right| = \frac{r^{n-1}}{(1 - \theta_1^2 - ... - \theta_{n-1}^2)^{\frac{1}{2}}}$$

◇ Sea $y \in E^n$.

Sea el conjunto de Borel $\sum \subset \partial B_{y,\rho} \cap \{(x_1, ..., x_n) : x_n - y_n \geq 0\}$.

Sea $\sum_n = \{(x_1, ..., x_{n-1}, 0) : (x_1, ..., x_n) \in \sum\}$.

Para cada $x \in \partial B_{y,\rho}$ sea $\gamma(x)$ el ángulo entre el eje x_n y el vector normal exterior a $\partial B_{y,\rho}$.

Se define la *medida de superficie* del conjunto $\sum$ como:

$$\sigma(\textstyle\sum) = \displaystyle\int \cdots \int_{\Sigma_n} \sec \gamma(x)\, dx_1 ... dx_{n-1}$$

La integral de una función Borel medible definida en $\partial B_{y,\rho}$ respecto a la medida de superficie se denota por:

$$\int_{\partial B_{y,\rho}} f(x)\, d\sigma(x)$$

B.3 Ecuaciones

◇ ***Relación entre la integral de volumen y la integral de superficie:***

Sea R un abierto de E^n .

Sea f una función de R en $\mathbb{R}$.

Sea la bola $B_{0,\rho} \subset R$.

$$\int_{B_{0,\rho}} f(x)\,dx = \int_0^{\rho} r^{n-1} \left(\int_{\|\theta\|=1} f(\theta, r)\, d\sigma(\theta) \right) dr$$

◇ **El *laplaciano en esféricas.***

Sea R un abierto de E^3 .

Sea la función $u : R \longrightarrow \mathbb{R}$ con segundas derivadas parciales .

Sea la transformación de coordenads rectangulares a coordenadas esféricas:

$$(x, y, z) \longrightarrow (\theta, \phi, r)$$

dada por: $x = r\, sen\theta \cos\phi$, $y = r\, sen\theta\, sen\phi$, $z = r \cos\theta$.

El laplaciano de u en esféricas es:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\, sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta\, \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\, sen^2\theta}\frac{\partial u}{\partial \phi} = 0$$

Y si la función tiene simetría esférica el laplaciano se redduce a:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{du}{dr}\right) = 0$$

B.4 Teoremas

Sea R un abierto de E^n .

Sea f una función integrable tal que $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$.

El conjunto $\mathbf{L}_1(R)$ es el espacio de las funciones Lebesgue integrables en R . Se define la norma en $\mathbf{L}_1(R)$ por:

$$\|f\|_{\mathbf{L}_1} = \int |f(x)|\, dx$$

◇ **Teorema de la convergencia monótona (Beppo Levi):**

Sea $\{f_n\}$ una sucesión creciente de funciones en $\mathbf{L}_1(R)$ tal que:

$$\sup_n \int f_n \, dx < +\infty$$

Entonces $f_n(x)$ converge c.t.p. en R a un límite finito denotado por $f(x)$.
Además $f \in \mathbf{L}_1(R)$ y:

$$\|f_n - f\|_{\mathbf{L}_1} \rightarrow 0$$

◇ **Lema de Fatou:**

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones en $\mathbf{L}_1(R)$ tal que:
(i) para toda n, $f_n \geq 0$
(ii) $\sup_n \int f_n \, dx < +\infty$
entonces tenemos que la función $f = \lim\inf_{n\to\infty} f_n$ está en $\mathbf{L}_1(R)$ y

$$\int f \, dx \leq \lim\inf_{n\to\infty} \int f_n \, dx$$

◇ **Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue:**

Sea $\{f_n\}$ una sucesión creciente de funciones en $\mathbf{L}_1(R)$. Supongamos que:

(i) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ c.t.p. en R .

(ii) existe una función $g \in \mathbf{L}_1(R)$ tal que para toda n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ en R .

Entonces $f \in \mathbf{L}_1(R)$ y:

$$\|f_n - f\|_{\mathbf{L}_1} \rightarrow 0$$

◇ **Teorema de Radon Nikodym:**

Sea μ una medida σ -aditiva definida en una σ -álgebra de conjuntos del espacio euclidiano E^n .
Sea Φ una carga definida en conjuntos μ - medibles.
Entonces existe una función f en E^n integrable respecto a μ tal que:

$$\Phi(A) = \int_A f(x) \, d\mu$$

para cada A que sea μ -medible.

Esta función llama derivada de la carga Φ respecto a la medida μ , y se escribe:

$$f = \frac{d\Phi}{d\mu}$$

Una *funcional* es una función F de espacio lineal (o vectorial) $\mathbf{L}$ a $\mathbf{R}$.

El *espacio de las funciones continuas* en el intervalo $[a,b] \subset \mathbf{R}$ se denota $\mathbf{C}[a,b]$.

◇ **Teorema de Riesz de representación de funcionales lineales continuas:**

Sea F una funcional lineal continua en el espacio $\mathbf{C}[a,b]$.

Entonces F puede representarse en la forma:

$$F(f) = \int_a^b f(x)\, d\phi(x)$$

donde ϕ es una función de variación acotada (y la integral es una integral de Stieltjes).

◇ **Teorema de Luzin:**

Sea X un espacio localmente compacto de Hausdorf dotado de una medida μ.

Sea la función f con soporte compacto y $\mu-$integrable.

Entonces para toda $\epsilon > 0$ existe una función continua con soporte compacto en X tal que:

$$\mu\{x : f(x) \neq g(x)\} < \epsilon$$

◇ **Teorema de Stone-Weiestrass:** *(Bartle)*

◇ **Teoremas:**

Sea $[a,b]$ un intervalo de $\mathbf{R}$.

Sea la función $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, f Lebesgue integrable .

☐ La función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \qquad x \in [a,b]$$

es absolutamente continua.

☐ (*Lebesgue*) La derivada de una función $f = F'$ absolutamente continua en R es integrable en R y:

$$\int_a^x f(t)\, dt = F(x) - F(a) \qquad x \in [a,b]$$

☐ La suma, la diferencia y el producto de funciones absolutamente continuas son funciones absolutamente continuas.

Sea μ una carga en E^n .

(i) Sabemos que existen μ tiene descomposición

$$\mu = \mu^+ - \mu^-$$

donde μ^+ y μ^- son medidas en E^n .

(ii) La *variación total* de μ es:

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^-$$

(iii) Sea F boreliano de E^n . Se define la *norma* de μ :

$$\|\mu\| = \sup_F (|\mu|(F))$$

□ Sea $\{\mu_j\}$ una sucesión de cargas sobre los borelianos del espacio euclidiano E^n tal que:

$$\|\mu_j\| \leq k \qquad \forall j$$

Entonces $\exists \mu$ carga sobre los borelianos de E^n tal que:

$$\|\mu\| \leq k$$

y:

$$\{\mu_j\} \to \mu \qquad \text{en la } w^* - \text{topología}$$

□ La *convergencia de una sucesión de funciones en* $\mathcal{L}_1$ implica que existe una subsucesión convergente $\nu - c.t.p.$ (casi en todas partescon respecto a la medida ν), y esto a su vez la convergencia en $\nu -$ *medida*.

Bibliografía

[1] **Bartle, R.** *Funtional Analisys*. New York, John Wiley and sons

[2] **Bartle, R.** *The elements of integration and Lebesgue mesure*. New York, John Wiley and sons. 1996.

[3] **Brelot, M.** *Élements de la theorie classique du potentiel*. Paris, Centre de Documentation Universitaire. 1969.

[4] **Brelot, M.** *Les étapes et les aspects multiples de la théorie du potentiel*. Paris. 1972.

[5] **Brézis, H.** *Analyse fonctionelle*. Masson Editeur, Paris, 1983.

[6] **Briseño, L.A. y M.E. Caballero.** *Notas de Teoría del Potencial*. Sociedad Matemática Mexicana, México. (Por publicarse).

[7] **Courant, R. y F. John.** *Introduction to calculus and analysis*. Vols I y II. New York, John Wiley and sons. 1996.

[8] **Falconi, M.** *Teoría de capacidad*. Publicaciones del Dpto de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, México.

[9] **Hewitt, E. y K. Stromberg.** *Real and Abstract Analysis*. New York, Springer-Verlag. 1965.

[10] **Helms, L.L.** *Introduction to potential theory*. New York, John Wiley and sons. 1969.

[11] **Kellogg, O.D.** *Foundations of potential theory*. Berlin, Springer. 1929

[12] **Kolmogorov, A.N. y S.V. Fomin.** *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*. Moscú, Mir, 1975.

[13] **Tikhonov, A.N. y A.A. Samarskii.** *Equations of Mathematical Physics*. New York, Dover. 1963.

[14] **Wermer, J.** *Potential Theory*. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Springer-Verlag. 1974.