49
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UNA REGLA DE ESTRATEGIA (NO SOLO PARA JUGADORES)

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

MARCO ARIELI HERRERA VALDEZ

DIRECTOR DE TESIS: MAT. LUIS ALBERTO BRISEÑO AGUIRRE

1997

VNIVERSDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"Una Regla de Estrategia (No Sólo para Jugadores)"

realizado por Herrera Valdez Marco Ariell

con número de cuenta 8932513-9 **, pasante de la carrera de** Actuario

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Mat. Luis Alberto Briseño Aguirre
Propietario	Dr. Manuel Jesús Falconi Magaña
Propietario	M. en C. María del Pilar Alonso Reyes
Suplente	Dr. Javier Páez Cárdenas
Suplente	Dr. Miguel Angel García Alvarez

Consejo Departamental de Matemáticas

Dr. Manuel Jesús Falconi Magaña

Una Regla de Estrategia (No Solo Para Jugadores)

Marco Arieli Herrera Valdez.

Reconocimientos

Este trabajo representa un pequeño logro dentro de un largo trayecto durante el cual, las personas mencionadas a continuación tuvieron una participación significativa.

Antes que a nadie quiero agradecer a mi familia todo el cariño, comprensión y apoyo de cualquier tipo que siempre recibí de ellos para realizar mis actividades:

Eréndira V. e Ignacio H., César H., Irma C. y Joel V., Irma V., Alejandra H. y Gilberto V., Antonio del P., Erika y Fabiola V., Abilio H., Elvira R.

A mis amigos por su complicidad, cariño y otras significativas razones:

Emilio A., Ernesto S., Antonio J., Yusen L., Humberto V., Gerardo C., Angel M., Luis C., Jerónimo C., Armando S., Tatiana S., Omar À., Emiliano P., Rafael D., Hugo y Francisco V., Julio M., Julio R., Sergio A., Cristobal F., César M., Canek F., Antonio J., Elsa P., Claudia C., Gabriela C., Socorro M., Larissa C., Benjamín E., Luis B., Igor P., David E., Alfredo A., Bruno A., Galo R., Antonio C., Fabiola y Fanny J., Bernardo P., Francisco C., Rafael H., Gerardo A., Gabriela E., Gabriela A., David G., Marco M., Alejandro B., Enrique S.

A los Cóndores de la U.N.A.M. por una infinidad de razones que contribuyeron con mi desarrollo personal.

A mis profesores consentidos por todo lo que aprendí y espero aprender de ellos, su paciencia, su apoyo:

Luis B. (en especial por su paciencia), Manuel F. (que de la forma más desinteresada me apoyó fuertemente desde el principio, y sin conocerme), Javier P. (por su confianza), Beatriz R. (por sus consejos), Julieta V. (por su amistad), José Antonio G., Carlos H. (por tanto apoyo), Pilar A., Ma. Emilia C. y Miguel Angel G. (por su importante contribución que me aclaró el panorama).

... Y a todos aquellos que han aportado algo para llenar alguna parte de mi vida durante todo este tiempo.

GRACIAS.

Dedicatoria

A Irma Coiro.

Introducción

En el capítulo llamado Fundamentos Matemáticos se hace mención de algunos temas de Probabilidad como la Función Generadora de Momentos, pero sobretodo Esperanza Condicional y Cadenas de Markov, que sirven para demostrar algunos resultados sobre Martingalas. También se mencionan algunos ejemplos.

En el siguiente capítulo, se explica el Problema Clásico de la Ruina del Jugador, así como la Fortuna y Duración esperadas del Juego.

En el capítulo que lleva el nombre "La Regla de Estrategia", se aborda el problema de la ruina del jugador desde el punto de vista de las Martingalas, se usa la función generadora de momentos para obtener aproximaciones de las fórmulas de la probabilidad de éxito del jugador, el tiempo esperado del juego. Tales aproximaciones combinadas son un poco de cálculo implican la siguiente regla llamada **Regla de Estrategia (no solo para jugadores):**

Sea X la estrategia en un juego. Si $E[X] < 0$ entonces es preferible usar la estrategia con la mayor varianza, mientras que en caso en que $E[X] > 0$ la estrategia con la menor varianza es más favorable al jugador.

Donde X es una variable aleatoria con una función de distribución F, representando el pago en un juego, y tal que:

$$E[X] \neq 0 \text{ y } Var[X] < \infty$$

Concluyo con algunos ejemplos de aplicaciones de la Regla, entre los cuales está una solución general para el caso de la Ruleta, que será usado para mostrar el buen comportamiento de la Regla explícitamente.

Planteamiento del problema

Sean $X_i, i = 1, ..., n$ variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.), con una función de distribución acumulativa (f.d.a.) F que representan las ganancias (o pérdidas) del jugador en las primeras n tiradas de un juego (si $X_i > 0$ el jugador gana en la tirada i y pierde si $X_i < 0$). Sea también

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

la fortuna del jugador en el tiempo n. Se toma $S_0 = a$ como la fortuna inicial del jugador.

Ahora considere $P_b(a)$ como la probabilidad de acumular una fortuna b antes de perder la fortuna inicial a. Asimismo, suponga que nuestro jugador puede escoger diferentes estrategias con esperanzas iguales y varianzas diferentes. Cuando se necesite hacer referencia a las variables X_i sin importar el tiempo i, se escribirá sólo X. Se conoce que $P_b(a)$ depende, en general, de toda la función de distribución de X.

Una modificación del Problema Clásico de la Ruina del Jugador puede ser formulada de la siguiente manera en términos de teoría de caminata aleatoria:

El jugador se retira del juego en el tiempo N si ya perdió su fortuna inicial (ruina del jugador) o si acumula una fortuna $b > 0$. La probabilidad $P_b(a)$ de tener éxito es igual a la probabilidad de que la caminata aleatoria S_N alcance un valor mayor o igual que b antes de alcanzar un valor menor o igual a $-a$.

La formulación del problema en términos de la Ruina del Jugador es simple y atractiva, y el esquema provee modelos simples y razonables para varias actividades y fenómenos. (Ejemplos 1-3, adelante).

Ejemplo 1 *Un inversionista en un Mercado de Acciones, va a escoger entre dos tipos de acciones: una está caracterizada por fluctuaciones pequeñas, la otra es muy especulativa. Asuma que el beneficio promedio al invertir en ambos tipos de acciones es el mismo. Comprando y vendiendo la acción, eventualmente trae como resultado una ganancia o pérdida aleatoria. Operaciones subsecuentes resultan en una acumulación de entradas, y la situación puede ser modelada como un juego similar al descrito al principio de esta sección. La Regla implica que en un mercado en caída, "bear market", (cuando el precio promedio de las acciones va para* *abajo) las oportunidades de acumular una fortuna b, antes de perder el capital inicial a son mejores para el inversionista en las acciones especulativas. En un mercado alcista, "bull market" (cuando el precio promedio de las acciones está ganando valor), mercar con acciones que tienen una tendencia estable a la alza tiene una probabilidad más alta de éxito.*

Ejemplo 2 *En una reserva de agua, los cambios diarios del nivel de agua pueden ser descritos por una variable aleatoria X, midiendo los niveles de agua como cambios a partir de un estado "estandar" en el nivel 0. La acumulación de estos cambios aleatorios podría resultar en cruzar el nivel crítico inferior $-a$ o un nivel superior crítico b. Suponga que en el periodo de tiempo considerado, el cambio promedio diario es negativo. En un año (o un clima) con fluctuaciones pluviales grandes, teniendo la misma precipitación promedio, las oportunidades de cruzar el nivel superior crítico son (de acuerdo con La Regla, y de acuerdo con las observaciones) mucho más altas, que en un año (o un clima) con temperatura estable.*

Ejemplo 3 *Mutaciones en el código genético resultan, en promedio, en una regresión de las características del mutante. Esto parece ser intuitivamente claro porque sólo algunas mutaciones muy específicas elevan las habilidades de supervivencia de las especies. El efecto promedio de una mutación aleatoria parece perjudicar a las especies. Esto concuerda con el Segundo Principio de Termodinámica, i.e. procesos no equilibrados se mueven hacia el estado más probable del sistema. Sean X y Y dos descripciones cuantitativas (en competencia) de los cambios resultantes de mutaciones aleatorias, tales que*

$$\begin{aligned} E[X] &= E[Y] < 0 \\ Var[X] &< Var[Y] \end{aligned}$$

Asuma que la acumulación de cambios hacia el nivel b resulta en nuevas especies de un nivel superior en el árbol evolutivo. Asuma además, que las especies mueren si los cambios se acumulan en la dirección errónea hacia el nivel $-a$. La Regla implica que las oportunidades de un cambio cualitativamente positivo resultante de la acumulación de cambios genéticos subsecuentes son más altas en el caso de una mutación tipo Y con una varianza más alta. Esto corresponde al tipo de mutación que resulta en cambios negativos frecuentemente pequeños, y *mutaciones raras pero significantes en el sentido positivo, que concuerda con la experiencia de los biólogos. Ellos han observado que a menudo faltan las cadenas en los procesos evolucionarios y las transiciones de una especie a otra son a menudo discontinuas. Esto parece corresponder a la pauta del proceso evolucionario que resulta de procesos de mutación Y con varianzas grandes. Sin embargo, hay que recordar que la probabilidad de alcanzar un nivel alto b en un proceso con dirección negativa es muy pequeña. Esto va de acuerdo con la escasez (o tal vez unicidad) de la vida en nuestro universo conocido.*

Capítulo 1

Fundamentos Matemáticos

Sea $X : (\Omega, \sigma, P) \to (\mathbf{R}, \mathbf{B}, \mathbf{P_X})$ v.a. donde para cada $A \in \mathbf{B}$ se toma

$$\mathbf{P_X}[A] = P\left[X^{-1}(A)\right]$$

Sean también $\sigma_X = \sigma\left(A \mid X^{-1}(C) = A, \text{ para algún } C \in \mathbf{B}\right)$, la sub σ-álgebra de σ, generada por la variable aleatoria X, y $\mathfrak{M}_\sigma$ el conjunto de funciones medibles con respecto a σ.

La medida P induce una medida P_{σ_X} cumpliendo que si $A \in \sigma_X$ entonces

$$P_{\sigma_X}[A] = P[A]$$

Se dice que una variable aleatoria $Z \in \mathfrak{M}_{\sigma_X}$ si está definida como $Z : (\Omega, \sigma_X, P_{\sigma_X}) \to (\mathbf{R}, \mathbf{B}, \mathbf{P_Z})$.

Por otro lado, se tiene que la función de distribución F_X de X está dada por

$$F_X(x) = P[X \leq x]$$

asimismo, la función de densidad de X es

$$f_X(x) = P[X = x]$$

1.1 Función generadora de Momentos

Definición 1 *La función generadora de momentos de X se define como*

$$\phi_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int e^{tX} dP(X) \tag{1.1}$$

donde

$$\int e^{tX} dP(X) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f(x)\, dx & \textit{si } X \textit{ es contínua} \\ \sum_x e^{tX} P[X = x] & \textit{si } X \textit{ es discreta} \end{cases}$$

Cuando no haya confusión, se escribirá $\phi(t)$ en lugar de $\phi_X(t)$.

Todos los momentos de X pueden ser obtenidos diferenciando sucesivamente la función 1.1 con respecto a t :

$$\begin{aligned} \phi'_X(t) &= E\left[X e^{tX}\right] \\ \phi''_X(t) &= E\left[X^2 e^{tX}\right] \\ &\vdots \\ \phi^{(n)}(t) &= E\left[X^n e^{tX}\right] \end{aligned}$$

y evaluando en cero

$$\phi^{(n)}(0) = E[X^n] \text{ para } n \geq 1$$

Todo esto bajo el supuesto de que se puede intercambiar el operador de integración por el de diferenciación.

Cuando una función generadora de momentos existe, ésta determina de manera única a la distribución. De esta forma, se puede caracterizar la distribución de probabilidad de una variable aleatoria por medio de su función generadora de momentos.

Ejemplo 4 *Normal* $(0,1)$:

Sea Z una v.a. con f.d. normal estándar.

$$\phi_Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-t)^2+t^2}{2}} dz \\
&= \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \ , \ donde\ y = z-t \\
&= e^{\frac{t^2}{2}}
\end{aligned}$$

Ejemplo 5 *Normal* (μ, σ^2) :

Si Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar y X es una variable aleatoria normal con media μ y varianza σ^2 entonces se puede escribir X como

$$X = \mu + \sigma Z$$

De esta manera

$$\begin{aligned}
E\left[e^{tX}\right] &= e^{t\mu} E\left[e^{t\sigma Z}\right] \\
&= e^{t\mu} \phi_X(t\sigma) \\
&= e^{t\mu} e^{\frac{(t\sigma)^2}{2}} \\
&= e^{t\mu + \frac{(t\sigma)^2}{2}}
\end{aligned}$$

1.2 Esperanza condicional

Sea (Ω, σ, P) un espacio de probabilidad y sea $A \in \sigma$, tal que tal que $P[A] > 0$. La función $P[\cdot \mid A] : \sigma \to [0,1]$ definida por

$$P[B \mid A] = \frac{P[B \cap A]}{P[A]} \text{ para cada } B \in \sigma$$

es una medida de probabilidad definida en (Ω, σ) a partir de P, por lo que $(\Omega, \sigma, P[\cdot \mid A])$ es un espacio de probabilidad. De hecho, se tiene que si X es v.a. definida en (Ω, σ) es integrable con respecto a P, entonces lo es con respecto a $P[\cdot \mid A]$.

Observación 1 *$P[B \mid A]$ es la Probabilidad Condicional de B dado $A \in \sigma$.*

Ahora suponga que $P[A] < 1$, lo que implica que $P[A^C] > 0$. De aquí que $P[B \mid A^C]$ esté también definida para todo $B \in \sigma$. Lo anterior brinda la posibilidad de extender el concepto de probabilidad condicional a una variable aleatoria, vía la función indicadora.

Definición 2 *Tome $B \in \sigma$,*

$$P[B \mid 1_A] = P[B \mid A]\, 1_A + P[B \mid A^C]\, 1_{A^C} \tag{1.2}$$

La definición 1.2 se puede extender a una variable aleatoria discreta arbitraria,

Definición 3 *Sea $A \in \sigma$ y Z definida como $Z : (\Omega, \sigma, P) \to \{z_1, z_2, ...\}$ que cumple que*

$$\begin{aligned} C_j &= \{Z = z_j\} \\ &\Rightarrow P[C_j] = p_j > 0 \\ &\Rightarrow P\left[\bigcup_j C_j\right] = 1 \end{aligned} \tag{1.3}$$

entonces la probabilidad de A dado Z se define como

$$P[A \mid Z] = \sum_j P[A \mid C_j]\, 1_{C_j} \tag{1.4}$$

A continuación se utilizan 1.2 y1.4 para definir el concepto de Esperanza condicional.

Definición 4 *Sea X una v.a. en (Ω, σ, P) tal que $E[X]$ existe y sea $A \in \sigma$ tal que $P[A] > 0$. La esperanza condicional de X dado A se define como*

$$E[X \mid A] = \int_\Omega X dP[\cdot \mid A] \tag{1.5}$$

De 1.5 se observa que la $E[X \mid A]$ se define de forma similar que $E[X]$, sólo que el espacio de probabilidad en el que se define es $(\Omega, \sigma, P[\cdot \mid A])$, es decir, cambia la medida de probabilidad pero se sigue tomando el mismo conjunto y la misma σ-álgebra.

Se desprende de 1.5 una propiedad muy útil de la Esperanza Condicional dado un evento.

Proposición 1 *Sea X una v.a. en (Ω, σ, P) tal que $E[X]$ existe y sea $A \in \sigma$ tal que $P[A] > 0$. Entonces*

$$E[X \mid A] = \frac{E[X 1_A]}{P[A]} \tag{1.6}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} E[X \mid A] &= \int X dP[\cdot \mid A] \\ &= \int_A X dP[\cdot \mid A] + \int_{\Omega \setminus A} X dP[\cdot \mid A] \qquad (1.7) \\ &= \int_A X dP[\cdot \mid A] \\ &= \frac{\int_A X dP}{P[A]} \\ &= \frac{\int_\Omega X 1_A dP}{P[A]} \\ &= \frac{E[X 1_A]}{P[A]} \end{aligned}$$

donde el paso 1.7 es consecuencia de que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus A} X dP[\cdot \mid A] &= \int X 1_{\Omega \setminus A} dP[\cdot \mid A] \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Para preservar la relación entre la probabilidad de un evento y la esperanza de su función indicadora, tome la siguiente definición:

Definición 5 *Sea $B \in \sigma$, la esperanza condicional de 1_B dado Z definida como 1.4, se define*

$$E[1_B \mid Z] = P[B \mid Z]$$

y entonces

$$E[1_B \mid Z] = \sum_j E[1_B \mid C_j] 1_{C_j}$$

$$= \sum_j \frac{E\left[1_B 1_{C_j}\right]}{P\left[C_j\right]} 1_{C_j} \tag{1.8}$$

Note que hasta este momento, las definiciones de esperanza condicional contemplan eventos cuya medida es mayor que cero. Para adecuar las definiciones a un concepto más general de ahora en adelante, adopte la siguiente convención:

Si $P[A] = 0$, entonces se dice que

$$E\left[1_B \mid A\right] = 0 \text{ si } P\left[A\right] = 0$$

de esta forma se pueden incluir en la definición 1.3 los conjuntos C_j para los cuales $P[C_j] = 0$, y no afecta ninguna fórmula previa, ya que deseo manejar variables aleatorias definidas casi seguramente. Además ya se puede tomar la esperanza condicional con respecto a $Z = 1_\Omega$, en cuyo caso todas las esperanzas condicionales se convierten en esperanzas condicionales casi seguramente.

Definition 1 *Sea X v.a. con esperanza finita. Entonces para Z v.a. discreta (como en 1.3), la esperanza condicional de X dada Z*

$$E\left[X \mid Z\right] = \sum_j \frac{E\left[X 1_{C_j}\right]}{P\left[C_j\right]} 1_{C_j} \text{ c.s.} \tag{1.9}$$

Se pueden cambiar esperanzas e integrales libremente con las siguientes reglas:

$$E\left[X\right] = \int_\Omega X dP \text{ y } E\left[X 1_A\right] = \int_A X dP$$

con esto se observa que si $j* = \{j : C_j \cap B \neq \emptyset\}$

$$E\left[X \mid Z\right] 1_B = \sum_{j*} \frac{E\left[X 1_{C_j}\right]}{P\left[C_j\right]} 1_{C_j} \text{ c.s.} \tag{1.10}$$

y tomando integrales de los dos lados, considerando que la suma de un número finito de términos $E\left[X 1_{C_j}\right]$ está dominada por $E\left[|X|\right]$,

$$\begin{aligned}
\int_B E\left[X \mid Z\right] dP &= \int_B \sum_j \frac{E\left[X 1_{C_j}\right]}{P\left[C_j\right]} 1_{C_j} dP \\
&= \int_B \sum_j \frac{E\left[X 1_{C_j}\right]}{P\left[C_j\right]} 1_{C_j} dP \\
&= \int_B \sum_j E\left[X \mid C_j\right] 1_{C_j} dP \\
&= \int_B X dP \qquad (1.11)
\end{aligned}$$

el teorema de convergencia dominada asegura que el lado derecho de la igualdad 1.10 es finito.

A partir de lo anterior se puede extender el concepto de Esperanza Condicional a una σ-álgebra contenida en σ.

Definición 6 *Sea $\{\Omega_n\}_{n\geq 1}$ una partición del conjunto Ω, $\left(\text{i.e. } \bigcup_{n\geq 1} \Omega_n = \Omega\right)$. Sea también $\sigma_0 = \sigma(\Omega_1, \Omega_2, ...)$ la σ-álgebra generada por todos estos conjuntos. Sea también X una v.a. con esperanza finita, entonces*

$$E\left[X \mid \sigma_0\right](\varpi) = E\left[X \mid \Omega_n\right] \text{ si } \varpi \in \Omega_n \qquad (1.12)$$

Un caso particular de esto se da si $\sigma_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, entonces $E\left[X \mid \sigma_0\right] = E\left[X\right]$. De hecho, este caso sirve como base para la extensión antes descrita.

Observación 2 *$E\left[X \mid \sigma_0\right]$ es una función σ-medible, es decir una variable aleatoria en (Ω, σ, P).*

Observación 3 *Note también que*

$$E\left[X \mid \sigma_0\right] = \sum_{n\geq 1} E\left[X \mid \Omega_n\right] 1_{\Omega_n}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\int_\Omega E[X \mid \sigma_0]\, dP &= \int_\Omega \sum_{n\geq 1} E[X \mid \Omega_n]\, 1_{\Omega_n} dP \\
&= \sum_{n\geq 1} \int_\Omega E[X \mid \Omega_n]\, 1_{\Omega_n} dP \\
&= \sum_{n\geq 1} E[E[X \mid \Omega_n]\, 1_{\Omega_n}] \\
&= \sum_{n\geq 1} E[E[X \mid \Omega_n] \mid \Omega_n]\, P[\Omega_n] \qquad (1.13) \\
&= \sum_{n\geq 1} E[X \mid \Omega_n]\, P[\Omega_n] \\
&= E[X] \\
&= \int_\Omega X dP
\end{aligned}$$

(el paso 1.13 es consecuencia de la ecuación 1.6).

Observación 4 *De la observación anterior se infiere que*

$$E[X \mid \sigma_0] = X \ c.d.(\ P_{\sigma_0})$$

donde P_{σ_0} es la medida de probabilidad inducida por P en la σ-álgebra σ_0, es decir

$$P_{\sigma_0}[A] = P[A] \text{ para toda } A \in \sigma_0$$

La siguiente proposición sugiere una equivalencia de la definición 1.12 de Esperanza Condicional dada una σ-álgebra:

Proposición 2 *Sea $\{\Omega_n\}_{n\geq 1}$ es una partición del conjunto Ω, $\left(\bigcup_{n\geq 1} \Omega_n = \Omega\right)$. Sea también $\sigma_0 = \sigma(\Omega_1, \Omega_2, ...)$ la σ-álgebra generada por todos estos conjuntos, entonces*

$$E[X \mid \sigma_0] = \frac{E[X 1_{\Omega_n}]}{P[\Omega_n]} \text{ para cada } n \geq 1$$

Demostración:

$$\begin{aligned} E[X \mid \sigma_0] &= E[X \mid \Omega_n] \ \textit{para cada } n \geq 1 \\ &= \frac{E[X 1_{\Omega_n}]}{P[\Omega_n]} \ \textit{para cada } n \geq 1 \end{aligned}$$

■

De forma general, se da una nueva definición de Esperanza Condicional, en términos del teorema de Radon-Nikodym.

Sean (Ω, σ, P) un espacio de probabilidad, una σ-álgebra $\sigma_0 \subseteq \sigma$, P_{σ_0} la medida inducida por P sobre σ_0. Sea $X : (\Omega, \sigma, P) \rightarrow (\mathbf{R}, \mathbf{B}, \mathbf{P_X})$ una v.a., con $E[|X|] < \infty$. Por el Teorema de Radon-Nikodym, existe una variable aleatoria W que cumple:

(i) W es σ_0-medible.

(ii)Para toda $A \in \sigma_0$.

$$\int_A X dP = \int_A W dP \tag{1.14}$$

Note que W no es única. Pero si W_0 es otra variable aleatoria que cumple con (i) y (ii), entonces $W_0 = W$ casi seguramente.

Definición 7 $E[X \mid \sigma_0]$ *(una versión de la esperanza condicional de X dada σ_0), es cualquier variable aleatoria W satisface (i) y (ii).*

Se dice que W es una versión de $E[X \mid \sigma_0]$.

Para explicar de que manera se aplica el Teorema de Radon-Nikodym, note que

$$\begin{aligned} \int_A X dP_{\sigma_0} &= \int_A X dP \\ &= \int_\Omega X 1_A dP = \lambda[A] \end{aligned}$$

de donde $\lambda[A]$ es una medida finita con signo definida en σ_0, que cumple con que $\lambda \ll P_{\sigma_0}$. Por tanto existe una función $W : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, σ_0-medible tal que 1.14 se cumple.

$E[X \mid \sigma_0]$ es el mejor pronóstico de X a partir de la información que provee σ_0.

Definición 8 *Sea (Ω, σ, P) un espacio de probabilidad donde $\sigma_0 \subseteq \sigma$ es una sub σ-álgebra de σ.*

Sea Y una variable aleatoria en (Ω, σ, P) con esperanza finita. Entonces una versión de la esperanza condicional de Y dada σ_0 ($E[Y \mid \sigma_0]$) es cualquier función en $\mathfrak{M}_{\sigma_0}$ tal que

$$\int_A E[Y \mid \sigma_0]\, dP_{\sigma_0} = \int_A Y dP \text{ para todo } A \in \sigma_0 \tag{1.15}$$

De manera análoga se pueden definir la Probabilidad Condicional de B dado σ_0(ver apéndice).

Si $\sigma_0 = \sigma_X$, entonces la siguiente da una notación alterna que permitirá hablar de la Esperanza Condicional de Y dada una variable aleatoria X.

Definición 9 *Sean X, Y v.a. definidas en Ω tales que $E[Y] < \infty$.*

$$E[Y \mid X] = E[Y \mid \sigma_X] \;\; (\text{con respecto a } P_{\sigma_X}) \tag{1.16}$$

Hay que enunciar un importante teorema para seguir hacia la definición de Esperanza Condicional de Y dada $X = x$:

Teorema 1 *Si X y Z son variables aleatorias tales que $Z \in \mathfrak{M}_{\sigma_X}$, entonces existe $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, tal que*

$$Z = \varphi(X) \tag{1.17}$$

Demostración:

- Primero note que

$$A \in \sigma_X \Leftrightarrow A = X^{-1}(C) = 1_C(X)$$

para alguna $C \in \mathbf{B}$. Por lo que

$$\varphi = 1_C$$

- Ahora, para el caso en el que

$$Z = \sum a_j P(A)$$

una función simple, para $\{A_j\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \sigma_X$ *y son tales que* $A_n = X^{-1}(C_n) = 1_{C_n}(X)$ *para cada* $n \in \mathbf{N}$ *donde* $\{C_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \mathbf{B}$, *entonces*

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n X^{-1}(C_n) \\ &= \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n [1_{C_n}(X)] \\ &= \varphi(X) \end{aligned}$$

– *Después tome*

$$Z = \lim_{n\in\mathbf{N}} Z_n$$

donde $\{Z_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \mathfrak{M}_{\sigma_X}$ *es una familia de funciones simples tales que* $Z_n = \varphi_n(X)$ *para cada* $n \in \mathbf{N}$. *Se sigue que*

$$\begin{aligned} Z &= \lim_{n\in\mathbf{N}} \varphi_n(X) \\ &= \varphi(X) \end{aligned}$$

por lo que el teorema es cierto para cualquier variable aleatoria $Z \in \mathfrak{M}_{\sigma_X}$. ■

y por tanto, usando 1.14 y 1.16 se tiene la siguiente definición:

Definición 10 *La esperanza condicional de* Y *dado* X *(*$E[Y \mid X]$*), es cualquier* ***función*** σ_X*-**medible** que satisfaga*

$$\int_A E[Y \mid X] dP_{\sigma_X} = \int_A Y dP \text{ para cualquier } A \in \sigma_X$$

Además, a partir de 1.16,

$$E[Y \mid X] \in \mathfrak{M}_{\sigma_X}$$

Así que usando el teorema anterior se tiene que existe $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que

$$E[Y \mid X] = \varphi(X) \tag{1.18}$$

de donde se define

$$E[Y \mid X = x] = \varphi(x). \tag{1.19}$$

por lo que otra vez, con base en 1.14, dado un evento $A \in \sigma_X$, se tiene el

Teorema 2 *Sean $X : (\Omega, \sigma, P) \to (\mathbf{R}, \mathbf{B}, \mathbf{P_X})$, $Y : (\Omega, \sigma, P) \to (\mathbf{R}, \mathbf{B}, \mathbf{P_Y})$ v.a. tales que $E[|Y|] < \infty$. La esperanza condicional de Y dada $X = x$ es una función **Borel-medible** que satisface*

$$\int_C E[Y \mid X = x] d\mathbf{P_X}(x) = \int_{X^{-1}(C)} Y(\omega) dP \text{ para todo } C \in \mathbf{B}$$

Demostración:

Tomando en cuenta la definición 1.19, y que

$$A \in \sigma_X \Leftrightarrow A = X^{-1}(C) \text{ para algún } C \in \mathbf{B}$$

$$\begin{aligned}
\int_{X^{-1}(C)} Y dP &= \int_{X^{-1}(C)} E[Y \mid X] dP \\
&= \int_{X^{-1}(C)} \varphi(X) dP \\
&= \int_{\Omega} 1_{X^{-1}(C)} \varphi(X) dP \\
&= \int_{\Omega} 1_C(X) \varphi(X) dP \\
&= \int_{\Omega} (1_C \cdot \varphi)(X) dP \\
&= \int_{\mathbf{R}} (1_C \cdot \varphi)(x) d\mathbf{P_X}(x) \\
&= \int_C \varphi(x) d\mathbf{P_X}(x) \\
&= \int_C E[Y \mid X = x] d\mathbf{P_X}(x)
\end{aligned}$$

■

Se desprenden de manera natural las siguientes propiedades de Esperanza condicional:

Proposición 3 *Sean $X : (\Omega, \sigma, P) \to (\mathbf{R}, \mathbf{B}, \mathbf{P_X})$ v.a. tal que $E[|X|] < \infty$, σ_0 una sub σ-álgebra de σ, entonces se cumple que:*

(i) Si $X \in \mathfrak{M}\sigma_0$, *entonces*

$$E[X \mid \sigma_0] = X, \; P\text{-c.s.}$$

(ii) Si $X = c$, P *-c.s entonces*

$$E[X \mid \sigma_0] = c \; P_{\sigma_0}\text{-c.s.}$$

(iii) Sea Y *v.a. en* (Ω, σ, P) *tal que* $E[|Y|] < \infty$. *Sean* $a, b \in \mathbf{R}$, *entonces*

$$E[aX + bY \mid \sigma_0] = aE[X \mid \sigma_0] + bE[Y \mid \sigma_0] \; P_{\sigma_0}\text{-c.s.}$$

(iv) Como X *es una función* $\mathfrak{M}\sigma$ *medible, se cumple que*

$$E[X \mid \sigma_0] = E[X^+ \mid \sigma_0] - E[X^- \mid \sigma_0] \; P_{\sigma_0}\text{-c.s.}$$

(v) Si X, Y *v.a. en* (Ω, σ, P) *tal que , y* $E[|Y|] < \infty$, *entonces*

$$E[X \mid \sigma_0] \leq E[Y \mid \sigma_0] \; P_{\sigma_0}\text{-c.s.}$$

(vi) Como consecuencia de (v):

$$|E[X \mid \sigma_0]| \leq E[|X| \mid \sigma_0] \; P_{\sigma_0}\text{-c.s.}$$

(vii) Si $\sigma_0, \sigma_1 \subseteq \sigma$ *entonces*

$$E[E[X \mid \sigma_0] \mid \sigma_1] = E[X \mid \sigma_0] \; P_{\sigma_0}\text{-c.s.}$$

y también

$$E[E[X \mid \sigma_1] \mid \sigma_0] = E[X \mid \sigma_0] \; P_{\sigma_0}\text{-c.s.}$$

(viii) Si X *es independiente de* 1_B, *para todo* $B \in \sigma_0$, *entonces*

$$E[X \mid \sigma_0] = E[X] \; P\text{-c.s.}$$

(ix)Sean $0 \leq X_n \leq X_{n+1}$ *para toda* $n \geq 1$, *y* $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ *variables aleatorias con esperanza finita, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n \mid \sigma_0] = E[X \mid \sigma_0], \ P_{\sigma_0}\text{-c.s.}$$

(x)Sea Y *una v.a.* $\in \mathfrak{M}_{\sigma_0}$ *y asuma que* X *y* XY *tienen esperanza finita. Entonces*

$$E[XY \mid \sigma_0] = YE[X \mid \sigma_0, \ P_{\sigma_0}\text{-c.s.}], \ P_{\sigma_0}\text{-c.s.}$$

Demostración:

(i) La prueba está dada en la Observación 3.

(ii) Debido a la unicidad casi seguramente de $E[X \mid \sigma_0]$ *en 1.11.*

(iii) $A \in \sigma_0$

$$\begin{aligned}
\int_A E[aX + bY \mid \sigma_0]\, dP_{\sigma_0} &= \int_A aX + bY dP_{\sigma_0} \\
&= a\int_A X dP_{\sigma_0} + b\int_A Y dP_{\sigma_0} \\
&= a\int_A E[X \mid \sigma_0]\, dP_{\sigma_0} + b\int_A E[Y \mid \sigma_0]\, dP_{\sigma_0} \\
&= \int_A aE[X \mid \sigma_0] + bE[Y \mid \sigma_0]\, dP_{\sigma_0}
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
\int_A E[X \mid \sigma_0]\, dP_{\sigma_0} &= \int_A X dP_{\sigma_0} \\
&= \int_A X^+ dP_{\sigma_0} - \int_A X^- dP_{\sigma_0} \\
&= \int_A E[X^+ \mid \sigma_0]\, dP_{\sigma_0} - \int_A E[X^- \mid \sigma_0]\, dP_{\sigma_0}
\end{aligned}$$

(v)

$$\int_A E[X \mid \sigma_0]\, dP = \int_A X dP \geq \int_A Y dP = \int_A E[Y \mid \sigma_0]\, dP \text{ para toda } A \in \sigma_0$$

Ahora sea $A_0 = \{E[X \mid \sigma_0] < E[Y \mid \sigma_0]\}^C$. *Entonces*

$$\int_{A_0} E[X \mid \sigma_0]\, dP \leq \int_{A_0} E[Y \mid \sigma_0]\, dP$$

por lo que la igualdad se debe dar para este A_0, *por (iii)*

$$\int_{A_0} E[Y \mid \sigma_0] - E[X \mid \sigma_0]\, dP = 0$$

y para este A_0 *el integrando es positivo. Por tanto*

$$P_{\sigma_0}[A_0] = 0$$

(vi) De la desigualdad

$$-|X| \leq X \leq |X|$$

el resultado es inmediato.

$$\int_A E[X \mid \sigma_0]\, dP = \int_A X dP \geq 0$$

por tanto $E[X \mid \sigma_0] \geq 0$, $P\sigma_0$-*c.s.*

(v) Se tiene que para todo $B \in \mathbf{R}$, *y* $A \in \sigma_0$,

$$P\left[\{X \in B\} \bigcap A\right] = P[\{X \in B\}]\, P[A]$$

y por otro lado

$$\int_A X dP = E[X 1_A] = E[X] E[1_A] = \int_A E[X] dP$$

En particular si $X = c$,

$$E[c \mid \sigma_0] = c$$

(vii)$E[X \mid \sigma_0]$ *es* σ_0-*medible y por tanto* σ_1-*medible. El resultado se sigue entonces de (i).*

(viii)Sea $A \in \sigma_0 \subseteq \sigma_1$, *entonces*

$$\int_A E[X \mid \sigma_0]\, dP_{\sigma_0} = \int_A X dP$$

pero $A \in \sigma_1$, lo cual implica que

$$\begin{aligned}\int_A X dP &= \int_A E[X \mid \sigma_1]\, dP_{\sigma_1} \\ &= \int_A E[E[X \mid \sigma_1] \mid \sigma_0]\, dP_{\sigma_0}\end{aligned}$$

Ya que los dos integrandos están en $\mathfrak{M}_{\sigma_0}$,

$$E[E[X \mid \sigma_1] \mid \sigma_0] = E[X \mid \sigma_0], P_{\sigma_0} c.s.$$

(ix) Para toda $n \geq 1$

$$\begin{aligned}0 &\leq X_n \leq X_{n+1} \\ &\Rightarrow 0 \leq E[X_n] \leq E[X_{n+1}], P_{\sigma_1} c.s.\end{aligned}$$

entonces existe $L = \lim_{n\to\infty} E[X_n \mid \sigma_0] \geq 0$ y por tanto para toda $A \in \sigma_0$, el teorema de convergencia monótona garantiza que

$$\lim_{n\to\infty} \int_A E[X_n \mid \sigma_0]\, dP_{\sigma_0} = \int_A L dP_{\sigma_0}$$

y también

$$\lim_{n\to\infty} \int_A X_n dP = \int_A X dP = \int_A E[X \mid \sigma_0]\, dP$$

concluyendo que

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n \mid \sigma_0] = E[X \mid \sigma_0],\ P_{\sigma_0}\text{-c.s.}$$

(x)Primero sea $Y = 1_A$ para $A \in \sigma_0$. Entonces para todo $B \in \sigma_0$ se cumple

$$\begin{aligned}\int_A E[XY \mid \sigma_0]\, dP_{\sigma_0} &= \int_A XY dP \\ &= \int_{A\cap B} X dP \\ &= \int_{A\cap B} E[X \mid \sigma_0]\, dP_{\sigma_0} \\ &= \int_A Y E[X \mid \sigma_0]\, dP_{\sigma_0}\end{aligned}$$

Para generalizar el resultado, se toma Y como una suma de funciones indicadoras en subconjuntos ajenos por pares de A, multiplicadas por una constante adecuada, es decir, como una función simple. Lo anterior se utiliza extendiéndose hasta el caso en que $Y = Y^{+} - Y^{-}$ sea una función medible viéndola como límite de funciones simples no negativas. La prueba entonces quedaría completa. ■

De estas propiedades se puede ver que tratar de obtener una esperanza condicional es en cierta forma, un juego en el que se pronostica y se verifica el pronóstico, de manera formal este proceso consiste en verificar las propiedades de la definición de Esperanza Condicional.

1.3 Cadenas de Markov

Sea $(X_n, \Gamma) = \{X_n : (\Omega, \sigma, P) \to (\Gamma, \sigma_\Gamma, \mathbf{P}) \mid n \in \mathbf{N}\}$ un sistema de v.a.i.i.d. (a Γ se le llama conjunto de estados del sistema). Llamaré X_n estado del sistema en el tiempo n. Muchos sistemas tienen la propiedad de que dados $k, n, m \in \mathbf{N}$, si $k < n < m$, X_k no tiene influencia en X_m, es decir, los estados anteriores a X_n no influyen en el futuro. Esta es la *Propiedad de Markov* y los sistemas con esta propiedad se llaman *Cadenas de Markov*. La propiedad de Markov se ve de manera formal como:

$$P[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_{n+1}] = P[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n] \tag{1.20}$$

donde se simplifica la notación de la siguiente forma

$$P[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n] = P[\{\omega : X_{n+1}(\omega) = x_{n+1}\} \mid \{\omega : X_n(\omega) = x_n\}]$$

Definición 11 *Sea*

$$T[x, y] = P[X_{n+1} = y \mid X_n = x] \tag{1.21}$$

para toda $n \in \mathbf{N}$. T se llama probabilidad de transición de la cadena.

La probabilidad de transición cumple que

$$0 \leq T[x, y] \leq 1$$

y

$$\sum_{y\in\Gamma} T[x,y] = 1, \ \forall x \in \Gamma$$

Se necesitan algunas definiciones para describir mejor las cadenas de Markov.

Definición 12 *Si*

$$P\{X_{n+1} = y \mid X_n = x\} = P[X_{m+1} = y \mid X_m = x] \tag{1.22}$$

para todas $n, m \in \mathbf{N}$ y para todos $x, y \in \Gamma$, entonces la probabilidad de transición es estacionaria (p.t.e.).

La siguiente proposición es consecuencia inmediata de 1.22.

Proposición 4 *Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una cadena de Markov. Si la cadena tiene p.t.e. entonces*

$$P[X_{n+1} = y \mid X_n = x] = T[x,y], \ n \geq 1$$

Demostración:

La prueba se sigue de las definiciones 1.21 y 1.22:

$$\begin{aligned} P[X_{n+1} = y \mid X_n = x] &= P[X_1 = y \mid X_0 = x] \\ &= T[x,y], \ n \geq 1 \end{aligned}$$

■

Ahora, la siguiente definición proporciona información acerca del tiempo que tarda una cadena en llegar a un cierto conjunto de estados.

Definición 13 *Sea $\Upsilon \subseteq \Gamma$. El tiempo de choque de Υ está definido por*

$$N_\Upsilon = \min\{n > 0 \mid X_n \in \Upsilon\}$$

En particular, si $\Upsilon = \{y\}$, entonces N_Υ se denotará como N_y.

Definición 14 *$y \in \Gamma$ es un estado absorbente si*

$$T[y, y] = 1$$

Un estado y es absorbente a partir del momento en que la cadena llega a y, la cadena ya no se mueve de ahí.

En lo subsecuente se tomarán en cuenta sólo cadenas de Markov con p.t.e.

Definición 15 *La función*

$$\pi_0(x) = P[X_0 = x]$$

definida para toda $x \in \Gamma$ se llama distribución inicial de la cadena, y es tal que

$$0 \leq \pi_0(x) \leq 1$$

y

$$\sum_{x \in \Gamma} \pi_0(x) = 1$$

Proposición 5 *Si $T[x, y]$ es la probabilidad de transición de la cadena de Markov $\{X_n\}_{n \geq 1}$, entonces se cumple que*

$$P[X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] = \pi_0(x) \cdot T[x_0, x_1] \cdot ... \cdot T[x_{n-1}, x_n], \ \forall n \in \mathbf{N} \tag{1.23}$$

Demostración:

Por inducción sobre n, se tiene que:

$$\begin{aligned} P[X_0 = x_0, X_1 = x_1] &= P[X_0 = x_0] \, P[X_1 = x_1 \mid X_0 = x_0] \\ &= \pi_0(x_0) \cdot T[x_0, x_1] \end{aligned}$$

Tomando como hipótesis de inducción:

$$P[X_0 = x_0, ..., X_k = x_k] = \pi_0(x_0) \cdot T[x_0, x_1] \cdot ... \cdot T[x_{k-1}, x_k], \forall k \leq n$$

entonces

$$
\begin{aligned}
P[X_0 = x_0, ..., X_{k+1} = x_{k+1}] &= P[X_0 = x_0, ..., X_k = x_k, X_{k+1} = x_{k+1}] \\
&= P[X_0 = x_0, ..., X_k = x_k] \, P[X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_0 = x_0, ..., X_k = x_k] \\
&= \pi_0(x_0) \cdot T[x_0, x_1] \cdot ... \cdot T[x_{k-1}, x_k] \, P[X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_k = x_k] \\
&= \pi_0(x_0) \cdot T[x_0, x_1] \cdot ... \cdot T[x_{k-1}, x_k] \, T[x_k, x_{k+1}]
\end{aligned}
$$

■

1.3.1 Caminatas aleatorias

Definición 16 *Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de v.a.i. con densidad común f, tales que $E[|X_n|] < \infty$, para toda $n \geq 1$. Sean también S_0 una variable aleatoria independiente de la sucesión $\{X_n\}_{n\geq 1}$ y $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, con $n \geq 1$. El proceso $\{S_n\}_{n\geq 0}$ es llamado una caminata aleatoria. A S_0 se le llama estado inicial de la caminata.*

Lema 1 *El proceso $\{S_n\}_{n\geq 0}$ es una cadena de Markov cuya probabilidad de transición está dada por*

$$T[x, y] = f(y - x)$$

Demostración:

Sea π_0 la distribución de S_0, entonces por 1.23, y por inducción

$$
\begin{aligned}
\pi_0(s_0) \, T(s_0, s_1) &= P[S_0 = s_0, S_1 = s_1] \\
&= P[S_0 = s_0, X_1 + s_0 = s_1] \\
&= P[S_0 = s_0, X_1 = s_1 - s_0] \\
&= P[S_0 = s_0] \, P[X_1 = s_1 - s_0] \\
&= \pi_0(s_0) \, f(s_1 - s_0)
\end{aligned}
$$

Suponiendo que el lema se cumple para toda $k < n$

$$\pi_0(s_0) \, T(s_0, s_1) \cdot ... \cdot T(s_{n-1}, s_n) = P[S_0 = s_0, S_1 = s_1, ..., S_{n-1} = s_{n-1}, S_n = s_n]$$

$$= P[S_0 = s_0, X_1 + s_0 = s_1, ..., X_n + s_{n-1} = s_n]$$
$$= P[S_0 = s_0, X_1 = s_1 - s_0, ..., X_n = s_n - s_{n-1}]$$
$$= P[S_0 = s_0] P[X_1 = s_1 - s_0] \cdot ... \cdot P[X_n = s_n - s_{n-1}]$$
$$= \pi_0(s_0) T(s_0, s_1) \cdot ... \cdot T(s_{n-2}, s_{n-1}) f(s_n - s_{n-1})$$
$$\Rightarrow T(s_{n-1}, s_n) = f(s_n - s_{n-1})$$

por lo que

$$T(s_n, s_{n+1}) = f(s_{n-1} - s_n) \ \textit{para toda}\ n \in \mathbf{N}$$

o de forma equivalente

$$P[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n] = f(s_{n-1} - s_n) \ \textit{para toda}\ n \in \mathbf{N}$$

■

Por ejemplo, las caminatas aleatorias pueden modelar un juego, en donde S_n sean las ganancias después de la n-ésima apuesta de un jugador que gana o pierde una unidad en cada apuesta.

1.3.2 Estados recurrentes y transitorios

Sea $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ una cadena de Markov con espacio de estados Γ y probabilidad de transición P.

Sea también

$$P_{zy} = P[N_y < \infty \mid Z_0 = z]$$

la probabilidad de que una cadena de Markov que empieza en el estado z,llegue al estado y en algún momento. En particular P_{yy} es la probabilidad de que partiendo de y, la cadena regrese al estado y.

Definición 17 *Un estado y es llamado recurrente si $P_{yy} = 1$ y transitorio si $P_{yy} < 1$.*

En particular un estado absorbente es un estado recurrente.

1.3.3 Tiempo de paro

Definición 18 *Sea $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión no decreciente de sub σ-álgebras de σ. Una función $N : (\Omega, \sigma, P) \longrightarrow \mathbf{N}$ es llamada un tiempo aleatorio relativo a $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ si el evento $\{N = n\} \in \sigma_n$ para cada $n \in \mathbf{N}$.*

Al conjunto $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ se le llama filtración de σ.

Definición 19 *Si N es un tiempo aleatorio relativo a $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ tal que $P(N < \infty) = 1$, entonces el tiempo N es un tiempo de paro.*

Note que si $\{S_n\}_{n\geq 0}$ representa la fortuna del jugador en cada jugada de un juego, y N es un tiempo de paro para el juego, y el objetivo del jugador es llegar a tener b empezando con un capital inicial a

$$\rho_{ab} = P[S_N = b \mid S_0 = a]$$

Proposición 6 *Si N es un tiempo de paro, entonces $\{N \geq n\} \in \sigma_{n-1}$ si y sólo si $\{N = n\} \in \sigma_n$.*

Demostración:

$$\begin{aligned}\{N \geq n\} &= \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} \{N = j\}\right)^C \\ &= \bigcap_{J=1}^{n-1} \{N = j\}^C \in \sigma_{n-1}\end{aligned}$$

de forma inversa, si $\{N \geq n\} \in \sigma_{n-1}$, entonces

$$\{N = n\} = \{N \geq n\} \cap \{N \geq n+1\}^C$$

■

La proposición anterior es muy importante ya que da información acerca de los eventos en la σ-álgebra para una variable aleatoria que está involucrada con un tiempo de paro. También hay que notar que

$$\{N < n\}^C = \{N \geq n\} \in \sigma_{n-1}$$

A continuación se enuncia un lema conocido como el Principio de Dualidad:

Lema 2 *Si $X_1,...,X_n$ son v.a.i.i.d., entonces $(X_1,...,X_n)$ tiene la misma distribución conjunta que $(X_n,...,X_1)$.*

Demostración:

La validez del principio de dualidad es inmediata ya que las $\{X_n\}_{n\geq 1}$ son v.a.i.i.d.:

$$\begin{aligned} P[X_1 = x_1,...,X_n = x_n] &= P[X_1 = x_1] \cdot ... \cdot P[X_n = x_n] \\ &= P[X_n = x_n] \cdot ... \cdot P[X_1 = x_1] \\ &= P[X_n = x_n,...,X_1 = x_1] \end{aligned}$$

■

Proposición 7 *Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 1$, tales que $E[X] > 0$. Si $N = \min \{n : S_n > 0\}$ entonces $E[N] < \infty$.*

Demostración:

$$\begin{aligned} E[N] &= \sum_{n=0}^{\infty} P[N > n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P[X_1 \leq 0,...,X_1 + ... + X_n \leq 0] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P[X_n \leq 0,...,X_n + ... + X_1 \leq 0] \qquad (1.24) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P[S_n - S_{n-1} \leq 0, S_n - S_{n-2},...,S_n \leq 0] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P[S_n \leq S_{n-1},...,S_n \leq 0] \end{aligned}$$

Una renovación se lleva a cabo en el tiempo n si $S_n \leq S_{n-1},...,S_n \leq 0$. Note que los tiempos entre renovaciones sucesivas son independientes e idénticamente distribuidos heredando *la propiedad de las* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *. Entonces por el resultado obtenido anteriormente*

$$\begin{aligned} E[N] &= \sum_{n=0}^{\infty} P[S_n \leq S_{n-1},...,S_n \leq 0] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P[\textit{Ocurra una renovación en el tiempo } n] \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P[S_n - S_{n-1} \leq 0, S_n - S_{n-2},...,S_n \leq 0] \\ &= 1 + E[\#\ \textit{renovaciones ocurridas}] \end{aligned}$$

Ahora, como $E[X] > 0$, *la ley fuerte de los grandes números nos dice que* $S_n \to \infty$, *por lo que el número de renovaciones que ocurrirán será finito con probabilidad 1.*

De donde

$$E[\#\ \textit{de renovaciones ocurridas}] < \infty$$

y por tanto

$$E[N] < \infty.$$

Sólo resta ver que el paso en 1.24 es cierto. Para tal efecto, note que

$$\begin{aligned} P[X_1 + X_2 \leq z] &= \int P[X_1 \leq z - y]\, dP[X_2 \leq y] \\ &= \int P[X_n \leq z - y]\, dP[X_2 \leq y] \\ &= \int P[X_n \leq z - y]\, dP[X_{n-1} \leq y] \\ &= P[X_n + X_{n-1} \leq z] \end{aligned}$$

que es la aplicación de un teorema de Probabilidad para eventos independientes (ver apéndice).

Los siguientes pasos se aplican sustituyendo $X_n + X_{n-1} + X_3 = Y + X_3$ *y así sucesivamente hasta tener el número de términos necesarios.* ■

Nota 1 *El número de renovaciones ocurridas es infinito si* $F(\infty)$ *la probabilidad de que el tiempo entre renovaciones sucesivas sea finito es igual a 1, o tiene una distribución geométrica con media finita si* $F(\infty) < 1$.

1.4 Martingalas

Sea $\{Z_n, \sigma_n\}_{n\geq 1}$ un proceso estocástico en donde $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ son v.a. y $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ una filtración de σ, donde $\sigma_n = \sigma\{Z_1, Z_2, ..., Z_n\}$ (la σ-álgebra generada por el conjunto $\{Z_1, Z_2, ..., Z_n\}$).

Definición 20 *Un proceso estocástico $\{Z_n, \sigma_n\}_{n\geq 1}$ es una Martingala si cumple que*

(i) $E[|Z_n|] < \infty$, para toda $n \geq 1$,

(ii) $E[Z_{n+1} \mid Z_1, Z_2, ..., Z_n] = Z_n$

Una Martingala es una versión generalizada de un juego justo. Por ejemplo, si la fortuna del jugador después de la n-ésima jugada es Z_n, la definición establece que su fortuna esperada después de la jugada $n+1$ es igual a su fortuna después de la n-ésima jugada no importando lo que pueda haber ocurrido antes.

Observe que la condición (ii) de la definición implica que

$$E[Z_{n+1}] = E[E[Z_{n+1} \mid \sigma_n]] = E[Z_n]$$

y tomando esto en cuenta para cada n se sigue que

$$E[Z_n] = E[Z_1] \text{ para toda } n. \tag{1.25}$$

Definición 21 *Sea N un tiempo aleatorio para el proceso $\{Z_n, n \geq 1\}$ y sea*

$$\overline{Z_n} = \begin{cases} Z_n \text{ si } n \leq N \\ Z_N \text{ si } n > N \end{cases} \tag{1.26}$$

$\{\overline{Z_n},\ n \geq 1\}$ es el proceso parado.

El proceso parado determina una nueva filtración $\{\overline{\sigma_n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ de σ que resulta ser

$$\overline{\sigma_n} = \begin{cases} \sigma_n \text{ si } n \leq N \\ \sigma_N \text{ si } n > N \end{cases}$$

es decir que la información de σ_n es heredada por $\overline{\sigma_n}$ mientras $n \leq N$ (después ya no hay más información porque el proceso se estaciona).

Proposición 8 *Si N es un tiempo aleatorio para la Martingala $\{Z_n, \sigma_n\}_{n\geq 1}$, entonces el proceso parado $\{\overline{Z_n}, \overline{\sigma_n}\}_{n\geq 1}$ es también una Martingala y además $E\left[\overline{Z_n}\right] = E[Z_1]\,\forall n$.*

Demostración:

Sea $I_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \leq N \\ 0 \text{ si } n > N \end{cases}$

Comprobando la definición 1.26, se observa que

$$\overline{Z_n} = \overline{Z_{n-1}} + I_n\left(Z_n - Z_{n-1}\right) \tag{1.27}$$

ya que si $N \geq n$, entonces $\overline{Z_{n-1}} = Z_{n-1}$

$$\overline{Z_n} = \overline{Z_{n-1}} + Z_n - Z_{n-1} = Z_n$$

y si $N < n$, entonces $I_n = 0$, y por otro lado $\overline{Z_{n-1}} = Z_N$, por lo que

$$\overline{Z_n} = Z_N$$

que garantiza la igualdad 1.27. Hay que notar que

$$\{I_n = 1\}^C = \{I_n = 0\} = \{N < n\} \in \sigma_{n-1}$$

Primero

$$\begin{aligned} E\left[\overline{Z_n} \mid \sigma_{n-1}\right] &= E\left[\overline{Z_{n-1}} + I_n\left(Z_n - Z_{n-1}\right) \mid \sigma_{n-1}\right] \\ &= \overline{Z_{n-1}} + I_n E\left[Z_n - Z_{n-1} \mid \sigma_{n-1}\right] \\ &= \overline{Z_{n-1}} + I_n\left(E\left[Z_n \mid \sigma_{n-1}\right] - Z_{n-1}\right) \\ &= \overline{Z_{n-1}} \end{aligned}$$

Ahora, para completar la prueba,

$$\begin{aligned} E\left[\overline{Z_n} \mid \overline{\sigma_{n-1}}\right] &= E\left[E\left[\overline{Z_n} \mid \sigma_{n-1}, \overline{\sigma_{n-1}}\right] \mid \overline{\sigma_{n-1}}\right] \\ &= E\left[E\left[\overline{Z_n} \mid \sigma_{n-1}\right] \mid \overline{\sigma_{n-1}}\right] \end{aligned}$$

$$= E\left[\overline{Z_{n-1}} \mid \overline{\sigma_{n-1}}\right]$$
$$= \overline{Z_{n-1}}$$

por tanto el proceso parado es una Martingala, como

$$E\left[\overline{Z_n}\right] = E\left[\overline{Z_1}\right] \;\; \forall n$$

y $\overline{Z_1} = Z_1$, *entonces*

$$E\left[\overline{Z_n}\right] = E\left[Z_1\right] \;\; \forall n \tag{1.28}$$

■

Suponga que el tiempo aleatorio N es un tiempo de paro, es decir

$$P[N < \infty] = 1 \tag{1.29}$$
$$\Rightarrow \overline{Z_n} \rightarrow Z_N \text{ cuando } n \rightarrow \infty \tag{1.30}$$
$$\Rightarrow E\left[\overline{Z_n}\right] \rightarrow E\left[Z_N\right] \text{ cuando } n \rightarrow \infty \tag{1.31}$$

con probabilidad 1.

Como $E\left[\overline{Z_n}\right] = E\left[Z_1\right]$ para toda $n \geq 1$, 1.31 establece que

$$E\left[Z_N\right] = E\left[Z_1\right] \tag{1.32}$$

de donde es posible concluir que bajo ciertas condiciones de regularidad, 1.31 es válida, a partir de la cual se deduce el siguiente teorema:

Teorema 3 (MIEI) *Si existe una* $M < \infty$ *tal que*

$E\left[|Z_{n+1} - Z_n| \mid \sigma_n\right] < M$ *y se cumple cualquiera de las siguientes tres condiciones,*

(i) La sucesión $\left\{\overline{Z_n}\right\}_{n\geq 1}$ *es uniformemente acotada.*

(ii) $N < \infty$.

(iii) $E\left[N\right] < \infty$,

entonces $E\left[Z_N\right] = E\left[Z_1\right]$.

Demostración:

$$\begin{aligned} E\left[|Z_{n+1}| \mid \sigma_n\right] - |Z_n| &= E\left[|Z_{n+1}| \mid \sigma_n\right] - E\left[|Z_n| \mid \sigma_n\right] \\ &\leq E\left[|Z_{n+1} - Z_n| \mid \sigma_n\right] < M \text{ para alguna } M < \infty \end{aligned}$$

de donde

$$E\left[|Z_{n+1}| \mid \sigma_n\right] \leq |Z_n| + M \text{ para alguna } M < \infty \tag{1.33}$$

Suponga que no es cierta la igualdad 1.32, entonces por contraposición:

No es cierto 1.31 o no es cierto 1.33 (el proceso $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ no sería una Martingala).

Por otro lado, si no se cumple 1.31 entonces no se cumple 1.30, y a su vez esto implica que 1.29 tampoco se cumple.

- Si no se cumple 1.30 que implica que (i) tampoco es cierta. Como tampoco se cumple 1.29 se sigue que (ii) no se cumple, y esto implica que (iii) tampoco. ■

Este teorema establece que en un juego justo, si un jugador usa el tiempo de paro para decidir cuando renunciar, entonces su fortuna inicial es igual a su fortuna inicial esperada. En el sentido de la esperanza, tener un juego exitoso es imposible si una de las condiciones (i), (ii), o (iii) se cumple.

En lo sucesivo, cuando se mencione X, en realidad se está hablando de X_n para cualquier $n \in \mathbf{N}$.

Cuando se tienen tiempos de paro, es posible obtener esperanzas con respecto a procesos parados. Un resultado muy importante relativo a esto es la Ecuación de Wald:

Corolario 1 ***Ecuación de Wald:***

Si $\{X_n\}_{n\geq 1}$, son v.a.i.i.d. con $E\left[|X|\right] < \infty$ y si N es un tiempo de paro con $E[N] < \infty$, entonces

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E\left[N\right] E\left[X\right]. \tag{1.34}$$

Demostración:

Sean $\mu = E\left[X\right]$ y $Z_n = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \mu\right)$. Sea también $\sigma_n = \sigma\left\{Z_1, Z_2, ..., Z_n\right\}$

$$
\begin{aligned}
E[Z_n \mid \sigma_{n-1}] &= \sum_{i=1}^{n} [E(X_i - \mu) \mid \sigma_{n-1}] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} [E(X_i - \mu) \mid \sigma_{n-1}] + E[X_n - \mu \mid \sigma_{n-1}] \\
&= E\left[\sum_{i=1}^{n-1} (X_i - \mu) \mid \sigma_{n-1}\right] \\
&= Z_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Por lo que $\{Z_n, \sigma_n\}_{n\geq 1}$ es una martingala.

Tomemos en cuenta que

$$
Z_{n+1} - Z_n = X_{n+1} - \mu
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
E[|Z_{n+1} - Z_n| \mid \sigma_n] &= E[|X_{n+1} - \mu| \mid \sigma_n] \\
&\leq E[|X_{n+1}|] + \mu
\end{aligned}
$$

así que $E[Z_N] = E[Z_1] = 0$ por el teorema anterior, y además

$$
\begin{aligned}
0 = E[Z_N] = E\left[\sum_{i=1}^{N} (X_i - \mu)\right] &= E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i - N\mu\right] \\
&= E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] - E[N\mu]
\end{aligned}
$$

■

Ejemplo 6 ***Calculo del tiempo esperado para que una secuencia de estados se lleve a cabo:***

Suponga que una sucesión de variables aleatorias discretas independientes e idénticamente distribuidas $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es observada un término cada día. ¿Cuál es el número esperado de resultados que debe ser observado para que una secuencia dada aparezca?.

Sea N el tiempo en el que la secuencia ocurre (N es un tiempo de paro).

De forma más específica, suponga que cada resultado es 0, 1 o 2 con probabilidades $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, *o* $\frac{1}{6}$ *respectivamente, y desea saber el tiempo esperado* $E[N]$ *para que la secuencia 0 2 0 ocurra.*

Por ejemplo, si la sucesión de resultados es 2, 1, 2, 0, 2, 1, 0, 1, 0, 0, 2, 0, entonces $N = 12$.

Para calcular $E[N]$ *imagine una sucesión de jugadores, cada uno con 1 unidad, jugando en un casino de con juegos de apuestas justas. El jugador i comienza apostando en el comienzo del día i y apuesta 1 a que el valor en ese día va a ser igual a 0. Si él gana (por lo que su fortuna sería de 2 unidades), entonces apuesta sus dos unidades a que el siguiente resultado es 2. Si él gana ésta apuesta (esta vez tendría 12 unidades porque* $P[X_2 = 2] = \frac{1}{6}$ *), apuesta a que el siguiente resultado es 0. Entonces cada jugador perderá una unidad si alguna de sus apuestas falla y ganará 23 si tiene éxito en sus tres apuestas. Al principio de cada día, otro jugador empieza a jugar.*

Si Z_n *denota las ganancias totales del casino después del n-ésimo día, entonces* $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ *es una Martingala con media* 0, *ya que todas las apuestas son justas.*

Sea N *el tiempo que tarda la secuencia 0 2 0 en aparecer. Al final del día* N *cada uno de los jugadores* $1, \ldots, N-3$ *habrá perdido 1 unidad, el jugador* $N-2$ *habrá ganado 23, y el jugador* $N-1$ *habrá perdido 1 unidad, el jugador* N *habrá ganado 1 porque la ganancia del día* N *es* 0. *Entonces*

$$\begin{aligned} Z_N &= N - 3 - 23 + 1 - 1 \\ &= N - 26 \end{aligned}$$

y como $E[Z_N] = 0$ *(y es fácil verificar que* $E[N] < \infty$*), por el Teorema (MIEI)*

$$E[N] = 26$$

De la misma forma, se puede calcular el tiempo esperado para que cualquier secuencia de resultados aparezca.

Para tal efecto, suponga ahora que sólo pueden ocurrir 0 y 1, y además

$$p = P[1] = 1 - P[0]$$

(caso análogo a los volados). El tiempo medio para que ocurra {1, 1, 0, 0, 1, 1}, es

$$p^{-4}q^{-2} + p^{-2} + p^{-1}$$

Ejemplo 7 *Sea el tiempo adicional $N_{A|B}$ que pasa entre A y B, cuando éstas ocurren. Regresando al ejemplo anterior, supongamos que $A = \{0,2,0\}$ y $B = \{1,0,0,2\}$ y defina $N_{A|B}$:*

$$N_{A|B} = \min\{k \mid \{0,2,0\} \textit{ es un subconjunto conexo de } \{1,0,0,2,X_1,X_2,...,X_k\}\}$$

Para calcular $E[N_{A|B}]$ imagine que cada día, un jugador empieza apostando a que la subsucesión $A = \{0,2,0\}$ aparece en los primeros tres resultados. Ahora, si los primeros resultados son 1, 0, 0, 2 se sigue que los jugadores 1 y 2 perderían 1 unidad, el jugador 3 ganaría 11 unidades, y el jugador 4 perdería 1 unidad. En el tiempo $4 + N_{A|B}$, las ganancias del casino serían

$$Z_N = 4 + N_{A|B} - 26 = N_{A|B} - 22$$

Como $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ es una Martingala y el casino tiene 8 unidades menos después del cuarto resultado de la sucesión ($Z_4 = -8$), se sigue que

$$E[N_{A|B} - 22] = E[Z_4] = -8$$

Por lo anterior, si N_A es el número de intentos que se necesitan para obtener A, se tiene que

$$E[N_A] = 26, \;\; y \; E[N_{A|B}] = 14$$

Además note que como $A = \{0,2,0\}$ y $B = \{1,0,0,2\}$, se debe cumplir que

$$E[N_{A|B}] = 1 + \frac{1}{2}E[N_A]$$

de forma similar se puede demostrar que

$$E[N_B] = 72 \; y \; E[N_{B|A}] = 72$$

Para calcular la probabilidad de que A ocurra antes que B, sea $M = \min\{N_A, N_B\}$. Entonces

$$\begin{aligned} E[N_A] &= E[M] + E[N_A - M] \\ &= E[M] + E[N_A - M \mid B \text{ antes que } A](1 - P_A) \\ &= E[M] + E[N_{A|B}](1 - P_A) \end{aligned}$$

y

$$E[N_B] = E[M] + P_A E[N_{B|A}]$$

de donde

$$P_A = \frac{E[N_B] + E[N_{A|B}] - E[N_A]}{E[N_{B|A}] + E[N_{A|B}]}$$

por tanto

$$E[M] = E[N_B] - E[N_{B|A}]\frac{E[N_B] + E[N_{A|B}] - E[N_A]}{E[N_{B|A}] + E[N_{A|B}]}$$

Sustituya ahora los valores obtenidos en el ejemplo para obtener

$$\begin{aligned} P_A &= \frac{72 + 14 - 26}{14 + 72} = \frac{30}{43} \\ E[M] &= 72 - 72\left(\frac{30}{43}\right) = \frac{936}{43} \end{aligned}$$

Ejemplo 8 *Para calcular el tiempo esperado N para que una caminata aleatoria llegue a tocar un estado $i > 0$, hay que tomar en cuenta dos casos: Si se tiene que $p > \frac{1}{2}$, y $\sum_{j=1}^{N} X_j = i$, por la ecuación de Wald*

$$\begin{aligned} i &= E[N]E[X] \\ &= E[N]\left[P[X = 1] - P[X = -1]\right] \\ &= E[N](2p - 1) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$E[N] = \frac{i}{2p - 1}$$

Ahora es posible abordar con más detalle el tema de las Caminatas Aleatorias, tomando antes en cuenta el siguiente comentario:

En el problema de la ruina del jugador, los estados $-a$ y b son estados absorbentes y por tanto recurrentes. De hecho, más adelante se verá que $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es una cadena de Markov, y sus estados son recurrentes si $E[X_i] = 0$ para toda i.

Teorema 4 *Sea $\{X_n\}_{n\geq 1} \subset \{0, \pm 1, ..., \pm M\}$ para alguna $M < \infty$.*

Entonces $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es una caminata aleatoria con valor inicial fijo $S_0 = X_0$, definida por

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i,\ n \geq 0$$

es una cadena de Markov recurrente si y sólo si $E[X] = 0$.

Demostración:

Si $E[X] \neq 0$ entonces

$$\lim S_n = \begin{cases} +\infty \text{ si } E[X] > 0 \\ -\infty \text{ si } E[X] < 0 \end{cases}$$

por lo que la cadena es transitoria..

Suponga ahora que $E[X] = 0$ y note que esto implica que $\{S_n, \sigma_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es una Martingala si $\sigma_n = \sigma\{X_1, ..., X_n\}$.

Sean

$$A = \{-M, -(M-1), ..., -1\}$$

y

$$A_j = \{j, j+1, ..., j+M\}$$

y suponga que el proceso empieza en un estado $i \geq 0$, $S_0 = i$. Sea también

$$N = \min\{n \mid S_n \in A \cup A_j\}$$

Por el Teorema MIEI

$$E[S_N] = E[S_o] = i$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} i &= E[S_N \mid S_N \in A]P[S_N \in A] + E[S_N \mid S_N \in A_j]P[S_N \in A_j] \\ &\geq -MP[S_N \in A] + j\,(1 - P[S_N \in A]) \end{aligned}$$

despejando se obtiene que

$$P[S_N \in A] \geq \frac{j-i}{j-M}$$

Entonces,

$$P[\bigcup_{n\geq 1} \{S_n \in A\}] \geq P[S_N \in A] \geq \frac{j-i}{j-M}$$

$$P[\bigcup_{n\geq 1} \{S_n \in A\}\ ]] = \lim_{j\to\infty} \frac{j-i}{j-M} = 1,\ i \geq 0$$

Por otro lado, para ver lo que pasa cuando $i \leq 0$, al tomar $B = \{1, 2, ..., M\}$, se ve de la misma forma que

$$P[\bigcup_{n\geq 1} \{S_n \in B\} \mid \textit{el proceso empezó en } i] = 1, i \leq 0$$

De los dos resultados anteriores se obtiene inmediatamente que

$$P[\bigcup_{n\geq 1} \{S_n \in A \cup B\} \quad \mid \textit{el proceso empezó en } i] = 1, \forall i \in \mathbf{N}$$

Así que $A \cup B$ será visitado un número infinito de veces. Si el proceso fuera transitoria, entonces cualquier conjunto finito de estados sería visitado sólo un número finito de veces y después se alejaría de tal conjunto. Por lo tanto el proceso es recurrente.

■

Capítulo 2

El problema de la ruina

2.1 Planteamiento clásico

Sean $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de v.a.i.i.d. definidas en un espacio de probabilidad (Ω, σ, P), que cumplen que[1] $X_i(\varpi) \neq 0$ para toda $\varpi \in \Omega$ con probabilidades

$$P[X_n(\varpi) > 0] = p = 1 - P[X_n(\varpi) < 0], \quad \in \Omega$$

Tome X_n como el pago en la n-ésima jugada para el jugador en un juego; es decir, el jugador gana la n-ésima tirada si $X_n > 0$, o pierde si $X_n < 0$. El juego es favorable para el jugador si $p > \frac{1}{2}$, desfavorable si $p < \frac{1}{2}$ y justo si $p = \frac{1}{2}$. Por comodidad se tomará $q = 1 - p$.

Por el momento tanto la fortuna del jugador como el monto de sus apuestas serán números enteros.

Sea

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{2.1}$$

la ganancia (o pérdida) total del jugador después de la n-ésima jugada.

[1] Para simplificar la notación se usará $X_n = X_n(\varpi)$ para cada $n \geq 1$.

Ahora, sean $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$, con $\beta \in \{0, b\}$, $b > \alpha$. Tome α como el capital inicial del jugador, y suponga además que el jugador adopta la estrategia de continuar haciendo apuestas cuyo monto es la unidad hasta que su fortuna alcance el valor β (es decir, el jugador pretende acumular una fortuna b o quedar arruinado). Considere también que el juego no empieza si $\alpha = 0$ o si $\alpha = b$, ya que el sentido del juego se pierde, esto es, en el primer caso no hay con que apostar, y en el segundo ya se tiene una fortuna b antes de empezar el juego. Se procede ahora a determinar la probabilidad de que el jugador de llegue a su objetivo (tener b), y también, la probabilidad que tiene el jugador de quedar arruinado (tener 0). Para conseguirlo hay que desarrollar un poco de teoría:

Para empezar, tome $X_n(\omega) \in \{-1, 1\}$ para toda $\omega \in \Omega$, y $\alpha, \beta, n \in \mathbf{N}$, con $\beta \in \{0, b\}$, y los siguientes eventos:

$$A_{\alpha,n} = [\alpha + S_n = \beta,\ 0 < \alpha + S_k \neq \beta, k < n] \tag{2.2}$$

que representan ruina o éxito para el jugador exactamente en el tiempo n dependiendo de β. Si $\beta = b$, entonces $A_{\alpha,n}$ significa éxito para el jugador en el tiempo n. Por otro lado, si $\beta = 0$, entonces $A_{\alpha,n}$ significa la ruina para el jugador en n jugadas exactamente.

Adopte las convenciones siguientes:

- $A_{\alpha,o} = \emptyset$ (el éxito en el tiempo cero es imposible para $0 < \alpha < b$)
- $A_{b,o} = \Omega$ (el éxito en el tiempo cero es seguro para $\alpha = b$),
- $A_{0,n} = \emptyset$, $n \geq 1$, (el juego nunca empieza si $\alpha = 0$).
- $A_{b,n} = \emptyset$, $n \geq 1$, (el juego nunca empieza si $\alpha = b$).

Denote como $P_\beta(\alpha)$ a la probabilidad de que el jugador empezando con un capital α llegue a tener un capital β al finalizar el juego.

Nota 2 *$P_b(a)$ depende, en general, de toda la función de distribución acumulativa F de X.*

Para fines prácticos tome $\beta \in \{0, b\}$ fija, entonces:

$$P_\beta(\alpha) = P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\alpha,n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left[A_{\alpha,n}\right] \tag{2.3}$$

Sean

$$S'_n = \sum_{i=2}^{n+1} X_i$$

y

$$A'_{\alpha,n} = [\alpha + S'_n = \beta, 0 < \alpha + S'_k \neq \beta, k < n]$$

entonces

$$P[X_i = x_i, i \leq n] = P[X_{i+1} = x_i, i \leq n]$$

por independencia y porque la sucesión $\{X_n\}_{n=2}^{\infty}$ es una réplica (probabilísticamente hablando) de la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, más aún,

$$P[(X_1, ..., X_n) \in \mathbf{H}] = P[(X_2, ..., X_{n+1}) \in \mathbf{H}] \text{ para } \mathbf{H} \subset \mathbf{R}^n.$$

Si $\mathbf{H} = \{ (X_1, ..., X_n) \in \mathbf{R}^n \mid \left\{\alpha + \sum_{i=1}^{n} X_i\right\} \subseteq A_{\alpha,n}\}$ se sigue que

$$P[A_{\alpha,n}] = P[A'_{\alpha,n}] \tag{2.4}$$

por otro lado

$$A_{\alpha,n} = \left(\{X_1 = 1\} \cap A'_{\alpha+1,n-1}\right) \cup \left(\{X_1 = -1\} \cap A'_{\alpha-1,n-1}\right)$$

implica que

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n\geq 1} A_{\alpha,n} &= \bigcup_{n\geq 1} \left[\left(\{X_1 = 1\} \cap A'_{\alpha+1,n-1}\right) \cup \left(\{X_1 = -1\} \cap A'_{\alpha-1,n-1}\right)\right] \\
&= \left(\{X_1 = 1\} \cap \bigcup_{n\geq 1} A'_{\alpha+1,n-1}\right) \cup \left(\{X_1 = -1\} \cap \bigcup_{n\geq 1} A'_{\alpha-1,n-1}\right)
\end{aligned}$$

para $n \geq 1$ y $\alpha > 0$. Por 2.5 se ve que

$$P_\beta(\alpha) = P\left[\bigcup_{n\geq 1} A_{\alpha,n}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= P\left[\left(\{X_1 = 1\} \cap \bigcup_{n\geq 1} A'_{\alpha+1,n-1}\right) \cup \left(\{X_1 = -1\} \cap \bigcup_{n\geq 1} A'_{\alpha-1,n-1}\right)\right] \\
&= P[X_1 = 1] P\left[\bigcup_{n\geq 1} A'_{\alpha+1,n-1}\right] + P[X_1 = -1] P\left[\bigcup_{n\geq 1} A'_{\alpha-1,n-1}\right] \\
&= pP_\beta(\alpha+1) + qP_\beta(\alpha-1)
\end{aligned}
$$

que se explica como sigue:

Empezando con un capital α, la probabilidad de alcanzar a tener un capital β, es igual a la probabilidad de que el jugador pierda la primera tirada y tenga éxito en el juego, más la probabilidad de que gane en la primera tirada y tenga éxito en el juego.

En particular, si $\alpha = a$, y $\beta = b$, con $0 \leq a \leq b$, $P_b(a)$ es la probabilidad de tener éxito empezando con a.

Entonces se cumple que

$$
P_b(a) = pP_b(a+1) + qP_b(a-1) \tag{2.5}
$$

que se resuelve a partir de las convenciones tomadas anteriormente, observe que

$$
\begin{aligned}
P_b(0) &= 0 \\
P_b(b) &= 1
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

Sea $\rho = \dfrac{q}{p}$ (que son las oportunidades en contra del jugador), entonces existen constantes A y B (ver apéndice) tales que

$$
P_b(a) = \begin{cases} A + B\rho^a \text{ si } \rho \neq 1 \\ A + Ba \text{ si } \rho = 1 \end{cases} \tag{2.7}
$$

Sustituyendo las condiciones iniciales 2.6 en 2.7, se obtienen los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\rho \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 = A + B \\ 1 = A + B\rho^b \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\rho = 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 = A \\ 1 = A + Bb \end{cases} \tag{2.9}$$

resolviendo para A y B,

$$\rho \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ B = \dfrac{1}{\rho^b - 1} \end{cases}$$

$$\rho = 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 = A \\ B = \dfrac{1}{b} \end{cases}$$

así se obtienen las soluciones:

$$P_b(a) = \begin{cases} \dfrac{\rho^a - 1}{\rho^b - 1}, \, 0 \leq a \leq b, \, \rho \neq 1 \\ \dfrac{a}{b}, \, 0 \leq a \leq b, \, \rho = 1 \end{cases} \tag{2.10}$$

Por otro lado, si $\alpha = a$, y $\beta = 0$, la probabilidad $P_0(a)$ de que el jugador alcance la ruina antes de ganar el juego (alcanzar b), iniciando con un capital a, puede ser calculada de la misma forma que para $P_b(a)$ pero tomando en cuenta las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} P_0(0) &= 1 \\ P_0(b) &= 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

en la ecuación de diferencias

$$P_0(a) = pP_0(a+1) + qP_0(a-1) \tag{2.12}$$

que de nuevo determinan un sistema de ecuaciones para los casos en que $\rho \neq 1$ o $\rho = 1$. El sistema queda como sigue:

$$\rho \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 = A + B \\ 0 = A + B\rho^b \end{cases}$$
$$\rho = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 = A \\ 0 = A + Bb \end{cases}$$

otra vez, resolviendo para A y B,

$$\rho \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} B = \dfrac{1}{1-\rho^b} \\ A = \dfrac{-\rho^b}{1-\rho^b} \end{cases} \tag{2.13}$$
$$\rho = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 = A \\ B = \dfrac{-1}{b} \end{cases} \tag{2.14}$$

se sustituye en 2.7 de donde se obtiene que:

$$P_0(a) = \begin{cases} \dfrac{\rho^b - \rho^a}{\rho^b - 1}, 0 \leq a \leq b, \rho \neq 1 \\ \dfrac{b-a}{b}, 0 \leq a \leq b, \rho = 1 \end{cases} \tag{2.15}$$

De 2.10 y 2.15 se ve que

$$P_b(a) + P_0(a) = 1$$

para toda ρ, por lo que la probabilidad de que el juego continúe por siempre es cero. Esto se sigue de

$$\left(\bigcap_{n\geq 1}\{\omega : 0 \neq a + S_n \neq b\}\right)^C = \bigcup_{n\geq 1}\left(\{\omega : 0 = a + S_n\} \cup \{\omega : b = a + S_n\}\right)$$

que implica que

$$1 = 1 - P\left[\bigcap_{n\geq 1}\{\omega : 0 \neq a + S_n \neq b\}\right]$$

$$\Rightarrow \quad 0 = P\left[\bigcap_{n\geq 1}\{\omega : 0 \neq a + S_n \neq b\}\right]$$

Si se desea analizar el caso en el que $b = a + c$, es decir, que el juego termina favorablemente cuando el jugador tiene una ganancia de c unidades, sólo hace falta sustituir $b = a + c$ en la fórmula 2.10:

$$P_{a+c}(a) = \begin{cases} \dfrac{\rho^a - 1}{\rho^{a+c} - 1}, \; 0 \leq c, \; \rho \neq 1 \\ \dfrac{a}{a+c}, \; 0 \leq c, \; \rho = 1 \end{cases}$$

o de forma equivalente

$$P_{a+c}(a) = \begin{cases} \dfrac{1 - \rho^{-a}}{\rho^c - \rho^{-a}}, \; 0 \leq c, \; \rho \neq 1 \\ \dfrac{a}{a+c}, \; 0 \leq c, \; \rho = 1 \end{cases}$$

Sea

$$F_n = a + S_n \tag{2.16}$$

la fortuna del jugador después de la n-ésima jugada,

Ejemplo 9 *La fortuna inicial del jugador es* $F_0 = \$800$ *y su objetivo es* $F_N = \$1000$. *Si* $p = 1/2$, *su probabilidad de tener éxito es (ver 2.10)*

$$P_{1000}(800) = 0.8$$

note que en la medida en la que la proporción entre F_0 *y* F_N *se disminuya, la probabilidad de éxito del jugador será menor. En la ruleta, jugando a "Rojo y Negro", si en cada jugada* p *representa la probabilidad de tener éxito, esto es*

$$p = \frac{18}{38} \Rightarrow \rho = \frac{20}{18}$$

por lo que (ver 2.10)

$$P_{1000}(800) \approx 7.055079e^{-10}$$

Cabe analizar el caso en que se tiene un capital infinito. Sea

$$\begin{aligned} H_{a,b} &= \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \{F_n = b \mid -a < S_k < c,\ k < n\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \{S_n = c \mid -a < S_k < c,\ k < n\} \end{aligned}$$

el evento en el que el jugador alcanza el éxito en algún momento comenzando con un capital a.

$$\begin{aligned} H_b &= \bigcup_{a\in\mathbf{N}} H_{a,b} = \bigcup_{a\in\mathbf{N}} \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \{S_n = c \mid -a < S_k < c,\ k < n\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \{S_n = c \mid S_k < c,\ k < n\} \end{aligned}$$

Observe que el evento H_b representa que el jugador empiece con un capital ilimitado el juego. Así que la probabilidad de que un jugador con un capital sin límite gane en algún momento c unidades es:

$$\begin{aligned} \lim_{a\to\infty} P_{a+c}(a) &= \lim_{a\to\infty} P(H_{a,b}) \\ &= P(H_b) \end{aligned}$$

de donde

$$P(H_b) = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho^b}, & \rho > 1 \\ 1, & \rho \leq 1 \end{cases} \tag{2.17}$$

El efecto que tiene cambiar el monto de las apuestas puede influir en la probabilidad de éxito para el jugador.

Por ejemplo, cambiar las apuestas a 1/2 de unidad equivaldría a doblar los capitales iniciales. La correspondiente probabilidad de quedar arruinado es obtenida con 2.15 al poner $2a$ como capital inicial y $2b$ como capital total:

Para el caso en que $p = q$ se tiene trivialmente que

$$P_0(2a) = P_0(a)$$

y de hecho para toda $\lambda \in \mathbf{R}$, si $p = q$ entonces

$$P_0(\lambda a) = P_0(a)$$

mientras que si $q \neq p$:

$$\begin{aligned} P_0(2a) &= \frac{\rho^{2b} - \rho^{2a}}{\rho^{2b} - 1} \\ &= \frac{(\rho^b - \rho^a)(\rho^b + \rho^a)}{(\rho^b - 1)(\rho^b + 1)} \\ &= P_0(a)\left(\frac{\rho^b + \rho^a}{\rho^b + 1}\right) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Si $q > p$ entonces la fracción de la derecha es mayor que 1, por lo que $P_0(2a) > P_0(a)$, de donde si las apuestas se doblan manteniendo los capitales iniciales en los mismos montos (que equivale a hacer apuestas unitarias con capitales a la mitad), la probabilidad de que el jugador quede arruinado decrece en el caso en que el juego sea desfavorable. Dicho de forma más simple, entre más agresivas sean las apuestas, hay menor probabilidad de quedar arruinado en un juego desfavorable ($p < 1/2$).

Ejemplo 10 *He aquí una historia que puede parecer sensacional pero en realidad no lo es:*

Cierto hombre solía ir a Monte Carlo de vacaciones todos los años y siempre tenía éxito para recuperar el costo de sus vacaciones, creyendo por tanto que tenía un poder mágico sobre la suerte. Asuma que al empezar a apostar tenía 10 veces lo que ganó al final, las oportunidades de tener éxito en cualquier año eran cercanas a 0.9. La probabilidad de no romper su racha de ganador en 10 años es aproximadamente

$$\left(1 - \frac{1}{10}\right)^{10} \approx e^{-1} \approx 0.37$$

por lo que tener éxito todo el tiempo no es para nada improbable bajo estos supuestos. Más aún, tener alguna falla podría ser considerado como haber tenido una pésima suerte.

2.1.1 Ganancia esperada en un juego

Sea $N : (\Omega, \sigma, P) \rightarrow \mathbf{N}$ el tiempo en el que el juego termina (también es una v.a.),

$$N(\omega) = \min\{n : S_n(\varpi) \in \{-a, c\}\}$$

tome $S : (\Omega, \sigma, P) \rightarrow (\mathbf{R}, \mathbf{B}, \mathbf{P})$una v.a. definida como

$$S(\varpi) = S_{N(\omega)} = \sum_{n \geq 1}^{N(\omega)} X_n(\omega)$$

con $a + c = b$, se sigue entonces que

$$S = \begin{cases} c \text{ si } S_N = c \\ -a \text{ si } S_N = -a \end{cases} \quad \text{para cada } \omega \in \Omega$$

Bajo los supuestos anteriores, S es la ganancia del jugador al terminar el juego, por lo que la **ganancia esperada** es:

$$E(S) = cP_b(a) - aP_0(a) \tag{2.19}$$

que se traduce en

$$E(S) = \begin{cases} c\dfrac{\rho^a - 1}{\rho^b - 1} - a\dfrac{\rho^b - \rho^a}{\rho^b - 1} \text{ si } p \neq q \\ 0 \text{ si } p = q \end{cases}$$

donde la última igualdad se da porque

$$cP_b(a) - aP_0(a) = c\,\frac{a}{a + c} - a\,\frac{c}{a + c} = 0$$

Lo cual quiere decir que un juego "justo" se mantiene justo cuando varían los capitales iniciales y las metas fijadas por los jugadores.

2.1.2 Duración esperada de un juego

Sea

$$N(\omega) = \min\{n : S_n(\varpi) \in \{-a, c\}\}$$

con $b = a + c$.

Sea $D_a = E[N]$ la **duración esperada de un juego** cuando el jugador empieza con un capital a (cabe mencionar que anteriormente se hizo notar que el juego no puede continuar por siempre y por tanto $D_a < \infty$).

Después del primer intento, el juego se encuentra en el punto $a + X_1$, para $0 < a < b$, cualquiera que sea el resultado de X_1. La esperanza condicional de la duración del juego dado el primer intento es

$$\begin{aligned} E[N \mid X_1] &= pE[N \mid X_1 = 1] + qE[N \mid X_1 = -1] \\ &= pD_{a+1} + qD_{a-1} \\ &= D_{a+X_1} \end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$D_a = D_{a+X_1} + 1 = pD_{a+1} + qD_{a-1} + 1, \text{ para } 0 < a < b \tag{2.20}$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} D_0 &= 0 \\ D_b &= 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

lo cual determina una ecuación de diferencias no homogénea.

Si $\rho \neq 1$,al sustituir en la ecuación 2.20 se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
D_a &= \frac{a}{q-p} = p\frac{a+1}{q-p} + q\frac{a-1}{q-p} + 1 \\
&= \frac{a(p+q)+p-q}{q-p} + 1 \\
&= \frac{a+p-q+q-p}{q-p} \\
&= \frac{a}{q-p}
\end{aligned}
$$

Es fácil comprobar que la diferencia Δ_a de dos soluciones de la ecuación 2.20 satisface la ecuación homogénea de diferencias

$$\Delta_a = p\Delta_{a+1} + q\Delta_{a-1}$$

que tiene soluciones de la forma

$$\Delta_a = \begin{cases} A + B\rho^a, \text{ si } \rho = \frac{q}{p} \neq 1 \\ A + Ba, \text{ si } \rho = \frac{q}{p} = 1 \end{cases}$$

(ver apéndice) de donde

$$D_a - \frac{a}{q-p} = A + B\rho^a$$

por lo que las soluciones a 2.20 son de la forma:

$$D_a = \frac{a}{q-p} + A + B\rho^a \text{ para } \rho \neq 1 \tag{2.22}$$

Sustituyendo en las condiciones iniciales 2.21, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
A + B &= 0 \\
A + B\rho^a &= \frac{-a}{q-p}
\end{aligned}
$$

que implica la solución

$$
\begin{aligned}
D_a &= \frac{a}{q-p} - \frac{b}{(q-p)(1-\rho^b)} + \frac{b\rho^a}{(q-p)(1-\rho^b)} \\
&= \frac{a}{q-p} - \frac{b}{q-p}\left(\frac{1-\rho^a}{1-\rho^b}\right) \text{ si } p \neq q
\end{aligned}
$$

Ahora, si $\rho = \frac{q}{p} = 1$, entonces $D_a = -a^2$ es solución de 2.20:

$$
\begin{aligned}
D_a &= \frac{-1}{2}\left((a+1)^2 + (a-1)^2\right) + 1 \\
&= \frac{-1}{2}\left(2a^2+2\right) + 1 \\
&= -a^2
\end{aligned}
$$

y

$$D_a = -a^2 + A + Ba$$

que tiene que satisfacer las condiciones iniciales

$$
\begin{aligned}
A &= 0 \\
-b^2 + A + Bb &= 0
\end{aligned}
$$

por lo que

$$B - b = 0$$

que determina la solución para 2.20, satisfaciendo las condiciones iniciales 2.21. Por tanto

$$D_a = \begin{cases} a(b-a) \text{ si } p = q \\ \frac{a}{q-p} - \frac{b}{q-p}\left(\frac{1-\rho^a}{1-\rho^b}\right) \text{ si } p \neq q \end{cases} \tag{2.23}$$

otra vez, de forma equivalente y tomando $a + c = b$:

$$D_a = \begin{cases} a(b-a) \text{ si } p = q \\ \frac{c\left(1-\rho^{-a}\right) + a\left(1-\rho^c\right)}{2p-1\left(\rho^c - \rho^{-a}\right)} \text{ si } p \neq q \end{cases}$$

Como ilustración tome el siguiente ejemplo:

Ejemplo 11 *Al jugar a los volados, suponga que dos jugadores que tienen* 500 *unidades cada uno* ($p = \frac{1}{2}$), *por lo que*

$$\begin{aligned} D_a &= 500(1000 - 500) \\ &= 250,000 \end{aligned}$$

(la duración esperada del juego es de 250,000 *intentos, en cambio, si un jugador tiene sólo una unidad y el otro tiene* 1000,

$$D_a = 1000 - 1 = 999$$

la duración promedio del juego es de 999 *intentos.*

Considere ahora los casos en los cuales el jugador tiene un capital inicial infinito ($a \to \infty$), y cuando el adversario es infinitamente rico ($b \to \infty$).

Si el jugador es infinitamente rico ($a \to \infty$), entonces la duración esperada del juego tiende a ser:

si $p \neq q$

$$\lim_{a \to \infty} \frac{a}{q-p} + \frac{1-\rho^a}{q-p}\left(\frac{b}{\rho^b - 1}\right) = \infty$$

y si $p = q$

$$\lim_{a \to \infty} a(b-a) = \infty$$

Si el adversario es infinitamente rico($b \to \infty$), y si $p \geq q$, entonces

$$\frac{a}{q-p} + \frac{1-\rho^a}{q-p} \cdot \lim_{b \to \infty}\left(\frac{b}{\rho^b - 1}\right) = \infty$$

por tanto

$$\lim_{b \to \infty} D_a = \infty$$

Ahora bien, si $p < q$,

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty} D_a &= \frac{a}{q-p} + \frac{1-\rho^a}{q-p}\cdot\lim_{b\to\infty}\left(\frac{b}{\rho^b-1}\right)\\ &= \frac{a}{q-p}\end{aligned}$$

que era de esperarse, ya que en este caso el adversario tiene capital infinito y la probabilidad del juego estrictamente a favor, con lo que la intuición lleva a pensar en que el juego no tiene porque durar mucho.

Ya está preparado el camino para obtener la regla de estrategia que se plantea al principio de esta tesis. En el siguiente capítulo, se dan aproximaciones a las soluciones para el Problema de la Ruina encontradas en este capítulo, pero a partir de Martingalas, y con ello se deduce la regla de estrategia.

Capítulo 3

La Regla de Estrategia

3.1 Descripción del problema:

Sea $X : (\Omega, \sigma, P) \to (\mathbf{R}, \mathbf{B}, \mathbf{P})$ el pago en un juego con una función de distribución F tal que:

$$E[X] \neq 0 \text{ y } Var[X] < \infty$$

En un problema de la Ruina del Jugador con los supuestos del capítulo pasado, suponga que el jugador puede escoger diferentes estrategias con los mismos valores esperados y diferentes varianzas en un juego en el que $\alpha = a$ y $\beta = b$. Después, se obtiene a partir de Martingalas una aproximación $\mathbf{P}_{a,b}$ para la probabilidad $P_b(a)$ y se determina el comportamiento de ésta cuando la estrategia cambia. A partir de esto se obtiene la regla de estrategia.

3.2 Caminata Aleatoria: Aproximación por Martingalas

El clásico Problema de la Ruina del Jugador puede ser formulado en términos de caminata aleatoria:

Sean $\{X_n\}_{n\geq 1}$ v.a.i.i.d. distintas de cero, tales que

$$\begin{aligned} P[X_n &> 0] = p \\ P[X_n &< 0] = q \end{aligned}$$

Sea X_n el premio que un jugador obtiene en la n-ésima jugada de un juego (si $X_n > 1$ es ganancia, si $X_n < 0$ es pérdida) con

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

como la ganancia (o pérdida) acumulada por el jugador en las primeras n tiradas del juego.

Ahora suponga que $\mu = E[X] \neq 0$. Dadas $b = a + c > a > 0$, $c > 0$. Calcularé $\mathbf{P}_b(a)$ la probabilidad de que $a + S_n$ alcance un valor mayor o igual que b antes de alcanzar un valor menor o igual a 0.

Sea $\theta \neq 0$ la única raíz de la ecuación

$$\phi(\xi) = E[e^{\xi X}] = 1 \tag{3.1}$$

Es fácil ver que θ existe cuando la función generadora de momentos de X es finita y

$$\begin{aligned} P(X &> 0) > 0 \\ P(X &< 0) > 0 \end{aligned}$$

Para empezar a desarrollar un poco de la teoría necesaria, será conveniente considerar una versión modificada de la ecuación 3.1 tomando logaritmos de los dos lados

$$\psi(\xi) = \ln(E[e^{\xi X}]) = 0 \tag{3.2}$$

Sean :

(i)$Z_n \equiv e^{\theta S_n}$ con $\theta \neq 0$ que satisfaga 3.2

(ii)N un tiempo de paro para S_n (que por consecuencia también lo es para Z_n)

$$\begin{aligned} N &= \min\{n \mid a + S_n \geq b, S_n \leq -a\} \\ &= \min\{n \mid S_n \geq c, S_n \leq -a\} \end{aligned}$$

Proposición 9 *Suponga que se cumplen las condiciones 3.2. Entonces se cumple que:*

1. *Z_n es producto de v.a.i. tales que $E[Z_n] = 1$.*

2. Además, $\{Z_n, \sigma_n\}_{n\geq 1}$ es una martingala donde $\sigma_n = \sigma\{X_1, ..., X_n\}$.

3. Como consecuencia de 1 y 2,

$$E[Z_N] = 1 \tag{3.3}$$

Demostración:

1. Tome en cuenta que como $\{X_j\}_{j\geq 1}$ son v.a.i., entonces lo mismo ocurre para $\{e^{\theta X_j}\}_{j\geq 1}$, además $E\left[e^{\theta X_j}\right] = 1$ para toda $j \geq 1$, por tanto

$$\begin{aligned} E[Z_n] &= E\left[e^{\theta Sn}\right] \\ &= E\left[e^{\theta X_1} \cdot ... \cdot e^{\theta Xn}\right] \\ &= E\left[e^{\theta X_1}\right] \cdot ... \cdot E\left[e^{\theta Xn}\right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Note que $e^{\theta Sn}$ depende de la información proporcionada por σ_n

$$\begin{aligned} E[Z_n \mid \sigma_{n-1}] &= E[e^{\theta Sn} \mid \sigma_{n-1}] \\ &= E[e^{\theta Sn-1} e^{\theta Xn} \mid \sigma_{n-1}] \\ &= e^{\theta Sn-1} E[e^{\theta Xn} \mid \sigma_{n-1}] \\ &= Z_{n-1} \end{aligned}$$

3. Por otro lado

$$\begin{aligned} E[|Z_{n+1} - Z_n| \mid \sigma_n] &= E\left[\left|e^{\theta Sn}\right| \left|e^{\theta X_{n+1}} - 1\right| \mid \sigma_n\right] \\ &= e^{\theta Sn} E\left[\left|e^{\theta X_{n+1}} - 1\right| \mid \sigma_n\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entonces existe $M < \infty$, tal que

$$E[|Z_{n+1} - Z_n| \mid \sigma_n] < M$$

además, con base en el Teorema MIEI, se cumple que

$$E[N] < \infty$$

entonces

$$E[Z_n] = E[Z_{n-1}]$$

para toda $n \geq 1$, y en particular

$$E[Z_N] = E[Z_1]$$

$$E[Z_N] = 1$$

■

Tomando en cuenta 3.3,

$$\begin{aligned} E[Z_N] &= 1 \\ &= E[e^{\theta S_N} \mid S_N \geq c]P[S_N \geq c] + E[e^{\theta S_N} \mid S_N \leq -a](1 - P[S_N \geq c]) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Usando la parte derecha de la ecuación anterior, se pueden derivar las siguientes fórmulas para $P_b(a)$ (la probabilidad de una terminación exitosa de un juego).

$$P_b(a) = \frac{1 - e^{-\theta a}}{e^{\theta c} - e^{-\theta a}} + \varepsilon_F(a, b) \tag{3.5}$$

donde

$$\begin{aligned} \varepsilon_F(a,b) &= -\frac{(E[e^{\theta S_N} \mid S_N \geq c] - e^{\theta c})P_b(a) + (E[e^{\theta S_N} \mid S_N \leq -a] - e^{-\theta a})(1 - P_b(a))}{e^{\theta b} - e^{-\theta a}} \\ &= \frac{w_F(a,b)}{e^{\theta c} - e^{\theta a}} \end{aligned}$$

con

$$w_F(a,b) = -u_F(c)P_b(a) - v_F(a)(1 - P_b(a))$$

$$
\begin{aligned}
u_F(c) &= E[e^{\theta S_N} \mid S_N \geq c] - e^{\theta c} \\
&> e^{\theta c} - e^{\theta c} = 0 \\
v_F(a) &= E[e^{\theta S_N} \mid S_N \leq -a] - e^{-\theta a} \\
&< e^{-\theta a} - e^{-\theta a} = 0
\end{aligned}
$$

por lo que

$$u_F(c) \cdot v_F(a) \leq 0$$

y por tanto,

$$\mid \varepsilon_F(a,b) \mid \leq \frac{\max(\mid u_F(b) \mid, \mid v_F(a) \mid)}{\mid e^{\theta b} - e^{-\theta a} \mid}$$

además,

$$
\begin{aligned}
u_F(c) &= 0 \Rightarrow \varepsilon_F(a,b) \geq 0 \\
v_F(a) &= 0 \Rightarrow \varepsilon_F(a,b) \leq 0
\end{aligned}
$$

A menudo se puede prescindir del error $\varepsilon_F(a,b)$: Si se niega el exceso por sobrejuego provocado cuando la fortuna final del jugador pasa de los niveles $-a$ o b, se obtienen las siguientes aproximaciones:

$$
\begin{aligned}
E[e^{\theta S_N} &\mid S_N \geq c] \approx E[e^{\theta S_N} \mid S_N = c] \\
&= e^{\theta c}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[e^{\theta S_N} &\mid S_N \leq -a] \approx E[e^{\theta S_N} \mid S_N = -a] \\
&= e^{-\theta a}
\end{aligned} \qquad (3.6)
$$

Por 3.4 y 3.6 se obtiene que

$$1 \approx e^{\theta c} P_b(a) + e^{-\theta a} \left(1 - P_b(a)\right) \tag{3.7}$$

despejando, se obtiene la aproximación $\mathbf{P}_{a,b}$ para $P_b(a)$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{a,b} &= \frac{1 - e^{-\theta a}}{e^{\theta c} - e^{-\theta a}} \\ &\approx P_b(a) \end{aligned} \tag{3.8}$$

También es posible aproximar $E[N]$ negando el exceso por sobrejuego ,

$$\begin{aligned} E[S_N] &= E[S_N \mid S_N \geq c]\mathbf{P}_{a,b} + E[S_N \mid S_N \leq -a](1 - \mathbf{P}_{a,b}) \\ E[S_N &\mid S_N \geq c] \approx c \\ E[S_N &\mid S_N \leq -a] \approx -a \end{aligned}$$

por lo que

$$E[S_N] \approx c\mathbf{P}_{a,b} - a(1 - \mathbf{P}_{a,b}) \tag{3.9}$$

sustituyendo en la ecuación de Wald

$$E[S_N] = E[N] \cdot E[X] \tag{3.10}$$

$$E[N] \approx \frac{c\mathbf{P}_{a,b} - a(1 - \mathbf{P}_{a,b})}{E[X]} \tag{3.11}$$

Usando la aproximación $\mathbf{P}_{a,b}$, se obtiene

$$E[N] \approx \frac{c\left(1 - e^{-\theta a}\right) - a\left(e^{\theta c} - 1\right)}{\left(e^{\theta c} - e^{-\theta a}\right) E[X]} \tag{3.12}$$

Observación 5 *Los resultados 3.7-3.12 coinciden con los obtenidos en el capítulo anterior.*

Observación 6 *Si se da un vistazo al problema de la ruina restringido a que*

$$X_n = \begin{cases} 1 \text{ con probabilidad } p \\ -1 \text{ con probabilidad } q = 1 - p \end{cases}$$

con a y b enteros ($\varepsilon_F(a,b) = 0$, es decir, que no hay error por sobrejuego), y sea $\rho = \dfrac{q}{p}$ (estas son las oportunidades en contra del jugador), con $q > p$, note que

$$\begin{aligned} E[\rho^X] &= \rho P[X > 0] + \frac{1}{\rho} P[X < 0] \\ &= \frac{qp}{p} + \frac{qp}{q} \\ &= q + p \\ &= 1 \end{aligned}$$

Basándose en esto, tome $e^\theta = \rho$ (así que $E[e^{\theta X}] = 1$). Entonces se cumplen 3.7-3.12 de donde

$$\begin{aligned} P_b(a) &= \frac{\rho^a - 1}{\rho^b - 1} \\ &= \frac{\rho^a - 1}{\rho^{a+c} - 1} \\ &= \frac{1 - \rho^{-a}}{\rho^c - \rho^{-a}} \\ &= \frac{1 - e^{-\theta a}}{e^{\theta c} - e^{-\theta a}} \\ &= \mathbf{P}_{a,b} \end{aligned}$$

donde $\rho = \dfrac{q}{p} \neq 1$, además

$$\begin{aligned} E[N] &= \frac{c(1 - \rho^{-a}) - a(\rho^c - 1)}{(\rho^c - \rho^{-a})[2p - 1]} \\ &= D_a \end{aligned}$$

por lo que las aproximaciones son exactas y concuerdan con los resultados obtenidos anteriormente.

A partir de lo anterior es posible formular rápidamente una aproximación para comparar el desarrollo de estrategias **X** para el juego correspondientes a sucesiones $\{X_n\}_{n\geq 1}$ donde las X_n tienen esperanzas iguales y varianzas distintas.

3.3 La Regla de Estrategia

La Probabilidad de éxito $P_b(a)$ dada por 3.5 es importante para cualquier caracterización de la calidad de la estrategia **X**. Por otro lado, las aproximaciones al tiempo esperado del juego $E[N]$ y al capital esperado del jugador en la n-ésima jugada $E[S_N]$ son funciones de $\mathbf{P}_{a,b}$, razón por la cual el enfoque estará sobre $\mathbf{P}_{a,b}$.

Recuerde que las fórmulas 3.7-3.12 son aproximadas dado el efecto que resulta de pasarse de $b = a + c$ o $-a$. La aproximación es una consecuencia de suponer que la fortuna final del jugador se iguala a b en caso de tener éxito y $-a$ en caso de quedar arruinado, sin importar el monto de las apuestas.

Con los supuestos anteriores, tome por un momento la hipótesis de que $E[X] < 0$ (el juego es desfavorable).

Para calcular cotas para $P[S_N \geq c]$ (el juego termina exitosamente para el jugador), usando la aproximación $\mathbf{P}_{a,b}$, se obtiene

$$E\left[e^{\theta S_N} \mid S_N \geq c\right] P[S_N \geq c] + E\left[e^{\theta S_N} \mid S_N \leq -a\right] P[S_N \leq -a] = 1$$

que implica

$$E\left[e^{\theta S_N} \mid S_N \geq c\right] \mathbf{P}_{a,b} = E\left[e^{\theta S_N} \mid S_N \geq c\right] P[S_N \geq c] \leq 1$$

ya que

$$E\left[e^{\theta S_N} \mid S_N \leq -a\right] P[S_N \leq -a] \geq 0$$

Como $E[X] < 0$, y $\theta \neq 0$, entonces $\theta > 0$ (ver capítulo anterior), por tanto

$$E\left[e^{\theta S_N} \mid S_N \geq c\right] \mathbf{P}_{a,b} \leq 1$$

$$e^{\theta c} \leq E\left[e^{\theta S_N} \mid S_N \geq c\right]$$

$$e^{\theta c}\mathbf{P}_{a,b} \leq 1$$

de donde

$$\mathbf{P}_{a,b} \leq e^{-\theta c}$$

Los supuestos anteriores implican que 3.2 es una función convexa con raíz $\theta \neq 0$. Tomando la expansión de Taylor de ψ alrededor de cero se tiene:

$$\psi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!}\psi^{(n)}(0)$$

que hasta el término $n = 2$ queda como

$$\psi(\xi) = \sum_{n=1}^{2} \frac{\xi^n}{n!}\psi^{(n)}(0) + \varepsilon$$

Desarrollando

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\psi(\xi) = \frac{1}{E[e^{\xi X}]}\frac{\partial}{\partial\theta}\int e^{\xi x}P[e^{\xi X} = e^{\xi x}]dx = \frac{1}{E[e^{\theta X}]}\frac{\partial}{\partial\xi}\int e^{\xi x}P[X = x]dx$$

ya que $e^{\xi X} = e^{\xi x}$ si y sólo $X = x$, así

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\psi(\xi) = \frac{1}{E[e^{\xi X}]}\int xe^{\xi x}P[X = x]dx$$

y por otra parte

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\psi(\xi) &= \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{E[e^{\xi X}]}\int xe^{\xi x}P[X = x]dx\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{E[e^{\xi X}]}\right)\int xe^{\xi x}P[X = x]dx + \frac{1}{E[e^{\xi X}]}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\int xe^{\xi x}P[X = x]dx\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{E[e^{\xi X}]}\right)\int xe^{\xi x}P[X = x]dx + \frac{1}{E[e^{\xi X}]}\int x^2e^{\xi x}P[X = x]dx \\
&= -\frac{1}{E^2[e^{\xi X}]}\left(\int xe^{\xi x}P[X = x]dx\right)^2 + \frac{1}{E[e^{\xi X}]}\int x^2e^{\xi x}P[X = x]dx
\end{aligned}$$

evaluando en $\xi = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi}\psi(0) &= E[X] \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\psi(0) &= -E^2[X] + E[X^2] = Var[X] \end{aligned}$$

por lo que

$$\psi(\xi) = \xi \cdot E[X] + \frac{\xi^2}{2} \cdot Var[X] + \varepsilon \tag{3.13}$$

Sin tomar en cuenta ε en la expresión 3.13 la siguiente aproximación $\overline{\theta}$ a la raíz $\theta \neq 0$ de la ecuación $\psi(\xi) = \ln E[e^{\xi X}]$ se obtiene resolviendo ecuación cuadrática

$$0 = \overline{\theta} \cdot E[X] + \frac{\overline{\theta}^2}{2} \cdot Var[X]$$

de donde

$$\overline{\theta} = -\frac{2 \cdot E[X]}{Var[X]} \tag{3.14}$$

Si el error en la expansión 3.13 de ψ es pequeño, entonces la aproximación 3.14 es bastante buena.

Observación 7 *Resalta el hecho de que si X tiene una distribución normal, entonces ψ es una función cuadrática y $\varepsilon = 0$ en 3.13 es igual a cero, por lo que la aproximación $\overline{\theta}$ de θ es exacta en este caso.*

A continuación se enuncian algunos lemas que permitirán obtener la regla de estrategia:

Lema 3 *Para cualesquiera $a, c > 0$, la función γ dada por*

$$\gamma(\theta) = \frac{1 - e^{-a\theta}}{e^{c\theta} - e^{-a\theta}} \tag{3.15}$$

es decreciente.

Demostración:

Primero note que

$$
\begin{aligned}
\gamma(\theta) &= \frac{1-e^{-a\theta}}{e^{c\theta}-e^{-a\theta}} \\
&= \frac{e^{a}-1}{e^{(a+c)\theta}-1}
\end{aligned}
$$

sean entonces $a = m$ y $a + c = M$,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}\gamma(\theta) &= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{e^{m\theta}-1}{e^{M\theta}-1}\right) \\
&= \frac{me^{m\theta}\left(e^{M\theta}-1\right) - Me^{M\theta}\left(e^{m\theta}-1\right)}{\left(e^{M\theta}-1\right)^2}
\end{aligned}
$$

como el denominador es siempre positivo, hay que demostrar que el numerador es negativo, desarrollando,

$$
\begin{aligned}
me^{m\theta}\left(e^{M\theta}-1\right) - Me^{M\theta}\left(e^{m}-1\right) &= me^{m\theta}e^{M\theta} - me^{m\theta} - Me^{M\theta}e^{m} + Me^{M\theta} \\
&= (m-M)\,e^{m\theta}e^{M\theta} - me^{m\theta} + Me^{M\theta} \\
&= e^{M\theta}\left[(m-M)\,e^{m\theta} - M\right] - me^{m\theta}
\end{aligned}
$$

como

$$
\begin{aligned}
(m-M)\,e^{m\theta} &< 0 \\
y\ -M &< 0
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\frac{d}{d\theta}\gamma(\theta) \leq 0
$$

lo que implica que γ es decreciente. ■

Note que $\gamma(\theta) = \mathbf{P}_{a,b}$.

Lema 4 *Sean X_i con $i = 1,2$, variables aleatorias definidas en (Ω, σ, P_i), con función de distribución F_i, y raíz θ_i para la ecuación 3.1, y $\bar{\theta}_i$ las aproximaciones dadas por 3.14. Entonces* *la desigualdad*

$$\gamma(\bar{\theta}_2) - \gamma(\bar{\theta}_1) \geq [\gamma(\theta_1) - \gamma(\bar{\theta}_1)] + \varepsilon_1 - [\gamma(\theta_2) - \gamma(\bar{\theta}_2)] - \varepsilon_2 \tag{3.16}$$

se cumple si y sólo si

$$\begin{aligned} \gamma(\bar{\theta}_2) &\geq \gamma(\bar{\theta}_1) \\ P_{2b}(a) &\geq P_{1b}(a) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Demostración: *Observe que 3.5 se puede reescribir como*

$$P_{ib}(a) = \gamma(\bar{\theta}_i) + [\gamma(\theta_i) - \gamma(\bar{\theta}_i)] + \varepsilon_i, i = 1, 2$$

entonces

$$\begin{aligned} P_{2b}(a) - P_{1b}(a) &= \gamma(\bar{\theta}_2) + [\gamma(\theta_2) - \gamma(\bar{\theta}_2)] + \varepsilon_2 - (\gamma(\bar{\theta}_1) + [\gamma(\theta_1) - \gamma(\bar{\theta}_1)] + \varepsilon_1) \\ &= [\gamma(\bar{\theta}_2) - \gamma(\bar{\theta}_1)] + [\gamma(\theta_2) - \gamma(\bar{\theta}_2) + \varepsilon_2] - [\gamma(\theta_1) - \gamma(\bar{\theta}_1) + \varepsilon_1] \\ &= \gamma(\bar{\theta}_2) - \gamma(\bar{\theta}_1) \end{aligned}$$

de donde se cumple 3.16 si y sólo si

$$[\gamma(\bar{\theta}_2) - \gamma(\bar{\theta}_1)] + [\gamma(\theta_2) - \gamma(\bar{\theta}_2) + \varepsilon_2] - [\gamma(\theta_1) - \gamma(\bar{\theta}_1) + \varepsilon_1] \geq 0$$

si y sólo si

$$\begin{aligned} 0 &\leq \gamma(\bar{\theta}_2) - \gamma(\bar{\theta}_1) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq P_{2b}(a) - P_{1b}(a) \end{aligned}$$

■

Teorema 5 *Sean X y Y las ganancias aleatorias del jugador tales que $E[X] = \mu = E[Y] \neq 0$ y $Var[X] < Var[Y]$.*

Más aún, sean F y G las funciones de distribución de X y Y respectivamente, con θ_F y θ_G las correspondientes raíces distintas de cero de la ecuación 3.2 son únicas. Entonces

(a) Si $\mu < 0$, el error por sobrejuego es despreciable y la expansión de Taylor 3.13 es suficientemente adecuada en el caso de X y Y. Es decir, si la desigualdad

$$\gamma\left(-2\frac{\mu}{Var[Y]}\right)-\gamma\left(-2\frac{\mu}{Var[X]}\right) \geq \left[\gamma(\theta_F)-\gamma\left(-2\frac{\mu}{Var[X]}\right)\right]+\varepsilon_F(a,b) - \left[\gamma(\theta_G)-\gamma\left(-2\frac{\mu}{Var[Y]}\right)\right]-\varepsilon_G(a,b) \quad (3.18)$$

se cumple, entonces $P_{Fa,b} \leq P_{Ga,b}$;

(b) Si $\mu > 0$, el error por sobrejuego es prescindible y la expansión de Taylor 3.13 es suficientemente adecuada en el caso de θ y Y. Dicho de otra forma, si la desigualdad

$$\gamma\left(-2\frac{\mu}{Var[X]}\right)-\gamma\left(-2\frac{\mu}{Var[Y]}\right) \geq \left[\gamma(\theta_G)-\gamma\left(-2\frac{\mu}{Var[Y]}\right)\right]+\varepsilon_G(a,b) - \left[\gamma(\theta_F)-\gamma\left(-2\frac{\mu}{Var[X]}\right)\right]-\varepsilon_F(a,b) \quad (3.19)$$

se cumple, entonces $P_{Fa,b} \geq P_{Ga,b}$;

Demostración: *El resultado se sigue fácilmente del lema anterior aplicado al caso de F y G respectivamente, notando que:*

si $\mu < 0$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{-2\mu}{Var[X]} &\geq \frac{-2\mu}{Var[Y]}\\ &\Rightarrow \gamma\left(-2\frac{\mu}{Var[X]}\right) \leq \gamma\left(-2\frac{\mu}{Var[Y]}\right)\\ &\Rightarrow P_{Fa,b} \leq P_{Ga,b}\end{aligned}$$

y $\mu > 0$ implica que

$$\begin{aligned}\frac{-2\mu}{Var[X]} &\leq \frac{-2\mu}{Var[Y]}\\ &\Rightarrow \gamma\left(-2\frac{\mu}{Var[X]}\right) \geq \gamma\left(-2\frac{\mu}{Var[Y]}\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad P_{F_{a,b}} \geq P_{G_{a,b}}$$

■

Concluyo esta sección con algunas observaciones.

Observación 8 *Los términos izquierdos en las desigualdades 3.18 y 3.19 son positivos, mientras que los lados derechos son frecuentemente muy pequeños, de forma que ambas desigualdades se cumplen casi siempre. Recuerde que en el caso de que X y Y tengan función de distribución normal, las expresiones del lado derecho de 3.18 y 3.19 igualan a cero y si*

$$\mu_F(c) = 0 \text{ y } \mu_G(c) = 0$$

o

$$v_F(a) = 0 \text{ y } v_G(a) = 0$$

entonces los errores $\epsilon_F(a,b)$ y $\epsilon_G(a,b) = 0$ tienen los mismos signos.

Al final de este capítulo se observa en casos típicos que la aproximación $P_{a,b}$ es correcta, razón por la cual el teorema anterior se llama *Regla de Estrategia (no sólo para jugadores)*. La regla puede ser formulada como sigue:

> *Si $E[X] < 0$ entonces la estrategia con la mayor varianza es superior, mientras que en caso de que $E[X] > 0$ la estrategia con la menor varianza es más favorable para el jugador.*

Interpretar La Regla es fácil:

Si $\mu < 0$ entonces el jugador tiene muy poca oportunidad de tener una secuencia de resultados en los cuales un número suficientemente grande le sean favorables de manera que se incremente su fortuna por arriba del valor b. Esto orilla al jugador a buscar grandes ganancias mientras tira, es decir, adoptar la estrategia con la varianza mayor.

Si $\mu > 0$, entonces la situación es la opuesta y es mejor jugar pacientemente una estrategia con varianza pequeña, así el tiempo y la paciencia recompensan al jugador.

Observación 9 *Si los valores a y b son grandes comparados con valores de las posibles ganancias para el jugador en una sola jugada, entonces uno puede reemplazar la variable aleatoria original X con una suma de sus realizaciones consecutivas e independientes. Como la suma puede ser considerada como distribuida normal (aproximadamente), y como la aproximación de Taylor 3.13 es exacta en el caso normal, se puede esperar que la aproximación 3.14 sirva en aplicaciones típicas..*

Observación 10 *La expansión de Taylor 3.13 es tomada en cero, para poder aplicarla es importante que se alcance una aproximación adecuada de $\psi(\theta)$ en $\overline{\theta}$. La fórmula 3.14 indica que θ está en la vecindad de cero cuando $E[X]$ es cercana a 0. Entonces la oportunidad de obtener una buena aproximación crece en juegos con ganancias por jugada cercanas a cero.*

Por otra parte el modelo estocástico correspondiente a la forma de jugar descrita parece adecuarse a numerosos mecanismos biológicos y económicos, de donde sale el uso de las palabras "no sólo para jugadores" en el título. Como los procesos no-equilibrados (con esperanza distinta de cero) que ocurren en el mundo real y que no están lejos de su estado de equilibrio, al tomar en cuenta los procesos en los que la esperanza sea cercana a cero, la Regla de Estrategia funciona ordenando distintas "estrategias de juego" con respecto a sus varianzas.

Observación 11 *Cambiar apuestas corresponde a multiplicar la variable aleatoria X por una constante $s > 0$, la ecuación 3.14 implica que la nueva aproximación $\overline{\theta_s}$ cumple que*

$$\overline{\theta_s} = -\frac{2s\mu}{s^2 Var(X)} = \frac{1}{s} \cdot \overline{\theta} \tag{3.20}$$

Por otro lado, la función $\gamma(\theta)$ es decreciente, al multiplicar las apuestas por s resulta que,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu < 0 \text{ y } s > 1 \\ o \\ \mu > 0 \text{ y } s < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{\theta_s} < \overline{\theta}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}_{sa,b} > \mathbf{P}_{Fa,b}$$

y

$$\left.\begin{cases} \mu < 0 \ y \ s < 1 \\ o \\ \mu > 0 \ y \ s > 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \overline{\theta_s} > \overline{\theta}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}_{sa,b} < \mathbf{P}_{Fa,b}$$

que se traduce en un incremento de la aproximación de la probabilidad de éxito $\mathbf{P}_{Fa,b}$ *cuando se tiene un juego desfavorable y se incrementa el monto de las apuestas, o por el contrario con un juego favorable y se apuesta de forma más moderada:*

Para incrementar la probabilidad de ganar en un juego: a menor esperanza de ganar en cada tirada, mayor el monto de la apuesta y viceversa.

3.4 Ruleta

En esta sección se consideran con detalle diferentes estrategias de apuesta en la Ruleta. Se encuentra una solución general exacta para la probabilidad de una exitosa acumulación de capital $b = a + c \geq 0$ antes de perder el capital inicial $a \geq 0$. A su vez, se utiliza esta solución para mostrar los rangos de parámetros a y b para los cuales la Regla de Estrategia se aplica[1]. Considere estrategias X_k, $k = 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18$ en la ruleta con

$$X_k = \frac{36}{k} - 1 \text{ con probabilidad } \frac{k}{37}, \tag{3.21}$$

$$X_k = -1 \text{ con probabilidad } 1 - \frac{k}{37} \tag{3.22}$$

En cada juego el jugador que aplica la estrategia X_k escoge k diferentes números del conjunto $\{0, ..., 36\}$ y pone una ficha con valor unitario a cada uno de esos números. Él pierde una ficha con probabilidad $\frac{k}{37}$ por cada número escogido que no haya sido el ganador. Si por el contrario, el número ganador es uno de los que escogió, él es premiado con fichas de $\frac{36}{k} - 1$ unidades. La

[1] Casinos de todo el mundo podrían tener reglas que difieran un poco de las consideradas en esta sección. Las diferencias podrían dar como resultado conclusiones diferentes a las obtenidas en este trabajo. Más aún, es posible ver que la Regla de Estrategia no es válida en el caso de la Ruleta considerado para a o b pequeños.

esperanza para todas las estrategias

$$\begin{aligned}
\mu &= E[X_k] \\
&= \left(\frac{36}{k}-1\right)\frac{k}{37}-\left(1-\frac{k}{37}\right) \\
&= \frac{k}{37}\left(\frac{36}{k}\right)-1 \\
&= -\frac{1}{37}
\end{aligned}$$

mientras que la varianza depende de k

$$\begin{aligned}
Var[X_k] &= E\left[(X_k-\mu)^2\right] \\
&= \left(\frac{36}{k}-1+\frac{1}{37}\right)^2\frac{k}{37}+\left(-1+\frac{1}{37}\right)^2\left(1-\frac{k}{37}\right) \\
&= \left(\frac{36}{k}+\frac{-36}{37}\right)^2\frac{k}{37}+\left(\frac{-36}{37}\right)^2\left(1-\frac{k}{37}\right) \\
&= 36^2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{37}\right)^2\frac{k}{37}+\left(\frac{-36}{37}\right)^2\left(1-\frac{k}{37}\right) \\
&= 36^2\left(\frac{37-k}{37k}\right)^2\frac{k}{37}+\left(\frac{36}{37}\right)^2\left(\frac{37-k}{37}\right) \\
&= \left(\frac{36}{37}\right)^2\left[\left(\frac{37-k}{k}\right)^2\frac{k}{37}+\left(\frac{37-k}{37}\right)\right] \\
&= \left(\frac{36}{37}\right)^2(37-k)\left[\left(\frac{37-k}{k^2}\right)\frac{k}{37}+\frac{1}{37}\right] \\
&= \left(\frac{36}{37}\right)^2(37-k)\left(\frac{37-k+k}{37k}\right) \\
&= \left(\frac{36}{37}\right)^2(37-k)\left(\frac{1}{k}\right) \\
&= \left(\frac{36}{37}\right)^2\left(\frac{37}{k}-1\right)
\end{aligned}$$

Ejemplo 12 *Para mencionar algunas estrategias clásicas cubiertas por el esquema anterior, note que las opciones* $k = 1, 2, 3, 4, 6, 12$ *y* 18 *corresponden a estrategias populares permitidas en casinos, llamadas:*

Diamantes Recto (Strait) para $k = 1$, *Separados (Split) para $k = 2$,*

Callejeros (Street) para $k = 3$,

Cuadrados (Square) para $k = 4$,

En línea (Line) para $k = 6$,

En columna (Column) para $k = 12$,

Negros (Black) para $k = 18$.

Jugar al Diamante Negro (o al Diamante Rojo, Par, Impar, Passe, Manque. etc.) en el esquema anterior corresponde a la estrategia X_{18}. Note que en la práctica, la estrategia X_k puede ser jugada al poner k fichas en k diferentes números y sólo considerar el valor de las k fichas como una unidad para cualquier[2] k. Para hacer más fácil la comparación de diferentes estrategias, tomé la restricción a estrategias que impliquen tener una con ganancia entera en cada jugada

$$w_k = \frac{36}{k} - 1$$

de forma que el jugador puede poner (en el caso de la estrategia X_k) una ficha en k números distintos que él escoge.

Para detallar más lo anterior, sean $w, a, \beta \in \mathbf{N}$, y tome un juego Γ 3.4 con las siguientes características:

— N un tiempo de paro definido por

$$N = \min\{n : F_n = \beta\}, \text{ con } \beta \in \{0, b\}$$

donde F_n es la fortuna del jugador en el tiempo n.

Suponiendo que:

— $F_0 = a$ es la fortuna inicial del jugador, con $a \geq 0$,

— $F_N = \beta$ es la fortuna final del jugador tomando en cuenta que si $\beta = 0$, el juego termina con la ruina del jugador, y si $\beta = b$ con $b = a + c > a$,el juego termina exitosamente.

[2] *Para $k = 1, 2, 3, 4, 6, 12$ y 18 los premios X_k son enteros y los resultados del Teorema se aplican. Para otros enteros k, el Corolario que a continuación se enuncia presenta una buena aproximación a la solución exacta, la cual es un poco más complicada y no es discutida en esta sección.*

— w es el número de fichas que el jugador podría ganar o perder en cada juego, $w \in \{-1, m\}$.

— En cada jugada

$$P[w = m] = p = \frac{k}{37} \text{ (gana } m \text{ fichas)}$$

$$P[w = -1] = q = 1 - \frac{k}{37} \text{ (pierde una ficha)}$$

El teorema siguiente aporta un resultado que corrobora el trabajo realizado con anterioridad.

Teorema 6 *Tome un juego Γ definido como en 3.4, entonces la probabilidad de tener un juego favorable para el jugador ($F_N = b$) está dada por*

$$\mathbf{P}_{a,b} = \begin{cases} 0 \textit{ para } a \leq 0 \\ 1 \textit{ para } a \geq b \\ \mathbf{P}_{a,b} = 1 - q^a \textit{ si } c \leq m+1 \\ \mathbf{P}_{[b-m+i],b} = 1 - q^{j+1}\left[\dfrac{\rho^b - \rho^{a-j+1}}{\rho^b - 1}\right] \textit{ para } j = 1, ..., m-1 \textit{ si } c \geq m+1 \end{cases} \tag{3.23}$$

Demostración:

Considere $\mathbf{P}_{a,b}$ como la probabilidad de que el jugador concluya el juego con al menos b fichas, tomando las siguientes condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{a,b} &= 0 \textit{ para } a \leq 0 \\ \mathbf{P}_{a,b} &= 1 \textit{ para } a \geq b \end{aligned} \tag{3.24}$$

Hay que considerar dos casos:

1er. caso:

Si $c \leq m+1$ (el juego termina la primera vez que el jugador gana una tirada siempre y cuando no esté arruinado) entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{a,b} &= 1 - q^a \\ &= 1 - (1-p)^a \end{aligned} \tag{3.25}$$

que es la probabilidad de que el jugador no pierda las primeras a tiradas, para $a = 0, ..., b-1$.

2o. caso: *$c \geq m+1$(el juego no necesariamente termina la primera vez que el jugador gana una tirada), entonces la solución es consecuencia de la siguiente relación recurrente para $1 \leq a \leq b-m$*

$$\mathbf{P}_{a,b} = p \cdot \mathbf{P}_{a+m,b} + q \cdot \mathbf{P}_{a-1,b} \tag{3.26}$$

Otra vez, considere dos casos:

Caso 2a: *$a+m > b$ (el juego termina si el jugador gana en la primera tirada) entonces $\mathbf{P}_{a+m,b} = 1$ que implica*

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{a,b} &= p + q \cdot \mathbf{P}_{a-1,b} \\
1 - \mathbf{P}_{a,b} &= 1 - p - q \cdot \mathbf{P}_{a-1,b} \\
&= q \cdot (1 - \mathbf{P}_{a-1,b}) \\
&\Rightarrow \mathbf{P}_{a,b} = 1 - q \cdot [1 - \mathbf{P}_{a-1,b}] && (3.27) \\
&\Rightarrow \mathbf{P}_{a,b} = 1 - q^2 \cdot [1 - \mathbf{P}_{a-2,b}] \\
&\Rightarrow \mathbf{P}_{a,b} = 1 - q^j \cdot [1 - \mathbf{P}_{a-j,b}] \text{ para } 0 < j \leq a && (3.28)
\end{aligned}$$

Caso 2b: *$1 \leq a \leq b-m$ (aunque el jugador gane en la primera tirada el juego no termina), es de la forma*

$$\mathbf{P}_{a,b} = A + B\rho^a \tag{3.29}$$

donde $\rho \neq 1$ es la única solución de la ecuación

$$E[\rho^w] = p \cdot \rho^m + q \cdot \rho^{-1} = 1 \tag{3.30}$$

La función 3.29 es una solución de la ecuación lineal de diferencias 3.26 (que por cierto es creciente en a). Observe que

Para $a = 1$ se tiene que $\mathbf{P}_{a-1,b} = 0$, se sigue que

$$\mathbf{P}_{1,b} = p\mathbf{P}_{m+1,b}$$

y entonces por 3.29

$$A + B\rho = p(A + B\rho^{m+1}) \tag{3.31}$$

mientras que para $a = b - m$, *3.26 implica que* $\mathbf{P}_{a+m,b} = 1$, *de donde*

$$\mathbf{P}_{b-m,b} = p + q\mathbf{P}_{b-m-1,b}$$

y así

$$A + B\rho^{b-m} = p + q(A + B\rho^{b-m-1}) \tag{3.32}$$

Además, por las condiciones 3.24, la ecuación 3.26 conduce a lo siguiente:

$$\begin{aligned} & A + B = 0 \\ & A + B\rho^{b} = 1 \\ \Rightarrow \quad & B = \frac{1}{\rho^{b} - 1} \\ & A = -\frac{1}{\rho^{b} - 1} \end{aligned} \tag{3.33}$$

Por 3.29 y 3.33 se obtiene la parte que falta de la solución para $1 \leq a \leq b - m$,

$$\mathbf{P}_{a,b} = \frac{\rho^{a} - 1}{\rho^{b} - 1} \tag{3.34}$$

por 3.27, 3.28 y 3.34 se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{a,b} &= 1 - q^{j+1} \cdot [1 - \mathbf{P}_{a-j+1,b}] \ \textit{para } 0 < j < a \\ &= 1 - q^{j+1} \cdot \left[1 - \frac{\rho^{a-j+1} - 1}{\rho^{b} - 1}\right] \\ &= 1 - q^{j+1} \cdot \left[\frac{\rho^{b} - 1 - (\rho^{a-j+1} - 1)}{\rho^{b} - 1}\right] \\ &= 1 - q^{j+1} \cdot \left[\frac{\rho^{b} - 1 - (\rho^{a-j+1} - 1)}{\rho^{b} - 1}\right] \\ &= 1 - q^{j+1} \cdot \left[\frac{\rho^{b} - \rho^{a-j+1}}{\rho^{b} - 1}\right] \end{aligned}$$

entonces

$$\mathbf{P}_{[b-m+j],b} = 1 - q^{j+1} \cdot \left[\frac{\rho^b - \rho^{a-j+1}}{\rho^b - 1}\right] \quad para\ m < b$$

porque

$$\begin{aligned} 0 &< j < b - m + j \\ &\Rightarrow 0 < b - m \\ &\Rightarrow m < b \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned} 0 &< b - m + j < b \\ &\Rightarrow j < m \end{aligned}$$

lo que implica

$$\mathbf{P}_{[b-m+j],b} = 1 - q^{j+1} \cdot \left[\frac{\rho^b - \rho^{a-j+1}}{\rho^b - 1}\right] \quad para\ 0 < j < m \tag{3.35}$$

■

Corolario 2 *La probabilidad de terminar un juego de Ruleta exitosamente usando la estrategia X_k está dada por 3.23, donde*

$$\begin{aligned} b &= c + a \\ p &= \frac{k}{37} \\ w &= \frac{36}{k} - 1 \end{aligned}$$

Si $E[X_k] = \mu < 0$ en la Ruleta, entonces la Regla implica que son esperadas probabilidades más altas de acumular una fortuna b antes de perder la fortuna inicial a para las estrategias X_k con varianza mayor, es decir con menor k. Entonces la mejor estrategia es cuando $k = 1$.

La figura 1 muestra las gráficas de aproximaciones de la probabilidad de éxito $P_{a,b}$ para diferentes k. Para efectos prácticos, las funciones graficadas varían de 0 a 200 con respecto a c, y tienen valor fijo $a = 40$ (el capital final es seis veces mayor que el capital inicial). Las gráficas para los otros valores de a muestran comportamientos similares y coinciden con la Regla de Estrategia.

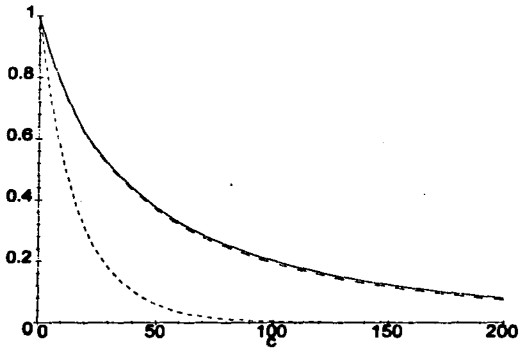

Figura 1.

Es importante hacer notar la gran diferencia entre estrategias para $k = 1$(línea sólida), $k = 4$ (línea cortada) y $k = 18$ (línea punteada) correspondientes a estrategias llamadas Diamante Recto, Cuadrado y Negro, respectivamente. La estrategia de Diamante Negro está bajo las reglas presentes y para b ya sea moderada o grande, una de las peores entre las consideradas. Las estrategias con $k = 18$ corresponden al clásico problema de la Ruina del Jugador y por ende ya son consideradas clásicas en la literatura.

Nota 3 *La observación 4 implica que como el valor esperado de una sola jugada es negativo, la probabilidad aproximada* $\mathrm{P}_{a,b}$ *de ganar incrementa cuando el jugador incrementa las apuestas.*

Debe ser cuidadoso con la última conclusión, porque el efecto por sobrejuego podría dominar para a y b pequeñas, y hacer que la conclusión de la Regla sea incorrecta. Un efecto de este tipo puede ser visto en la Figura 4 para valores pequeños de b.

Otra característica importante del juego de Ruleta puede ser observada usando la aproximación 3.12 del tiempo esperado del juego y tomando el límite

$$\lim_{b \to \infty} E[N] = -\frac{a}{E[X]}$$

asumiendo que a está fija. El límite puede ser fácilmente visto en gráficas y admite una fácil interpretación: con un incremento de b, la ruina del jugador predomina rápidamente, y entonces el tiempo esperado del juego está determinado por la fortuna inicial del jugador y no depende de ninguna estrategia en particular. No obstante, es impresionante la rapidez con que se alcanza esta cota superior para $E[N]$ con un incremento de b mientras que se juega la estrategia Diamante Negro, mientras que la convergencia es más lenta con la estrategia Diamante Recto.

Conclusiones

Como ya se ha visto, en este trabajo se aborda el Problema de la Ruina del Jugador desde la forma clásica, y después desde un punto de vista de Martingalas, y hay un énfasis en la coincidencia de las fórmulas para la probabilidad de éxito, la duración esperada del juego, y algunos otros detalles involucrados con el problema.

Asimismo, en el capítulo anterior, la aproximación Martingala descrita proporciona herramienta para un manejo más fácil de los elementos que se tienen en un juego o cualquier situación que pueda modelarse de esta forma. Ya se ha visto con algunos ejemplos que hay campos como la Biología, Física, Finanzas u otros en donde se pueden aplicar los resultados obtenidos.

El trabajo desarrollado en esta tesis puede servir como paso base para desarrollar investigación en Probabilidad y aplicarla en áreas donde los modelos concuerden con las hipótesis planteadas para la aproximación, facilitando cálculos. La Regla permite decidir entre distintas situaciones, aportando una caracterización de las distintas estrategias que pueden adoptarse en un juego. Dicha caracterización es planteada en términos de las varianzas de estrategias con medias iguales, dando de esta forma, un algoritmo de decisión en el cual se puede basar un jugador para optimizar el juego a su favor. Al volver al campo de las aplicaciones, la optimización conduce a mejores resultados dependiendo del área de la que se trate.

Apéndice

Definición 22 *Sea* $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ *un espacio medible y sea* μ *una medida definida en este espacio. Entonces* μ *es una medida* σ*-finita si existe una sucesión* $\{\mathbf{A}_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{M}$ *tal que*

$$\mathbf{X} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{A}_n$$

y que

$$\mu[\mathbf{A}_n] < \infty \textit{ para todo } n \in \mathbf{N}$$

Definición 23 *Sea* $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ *un espacio medible y sean* μ *y* η *dos medidas con signo definidas en este espacio. Se dice que* η *es absolutamente continua con respecto a* μ $(\eta \ll \mu)$ *si y sólo si* $\mu[\mathbf{A}] = 0$ *implica que* $\eta[\mathbf{A}] = 0$ *para cada* $\mathbf{A} \in \mathbf{M}$.

Teorema 7 (Radon-Nikodym) *Sea* $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ *un espacio medible y* μ *una medida* σ*-finita con signo definida en este espacio.*

Entonces para cada medida η *definida en* $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ *tal que* $\eta \ll \mu$ *existe* $f : \mathbf{X} \to \mathbf{R}^{\#}$ *integrable tal que para cada* $\mathbf{A} \in \mathbf{M}$

$$\eta[\mathbf{A}] = \int_{\mathbf{A}} f d\mu$$

Además la función f *es única* μ*-c.d.*

Cuando las medidas del Teorema de Radon-Nikodym son positivas se obtiene el recíproco.

Teorema 8 *Sea* $(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ *un espacio medible y* μ *una medida* σ*-finita definida en este espacio. Sea* $f : \mathbf{X} \to \mathbf{R}^{\#}$ *integrable no negativa. Defínase para cada* $\mathbf{A} \in \mathbf{M}$

$$\eta[\mathbf{A}] = \int_{\mathbf{A}} f d\mu$$

Entonces η es una medida positiva en $(\mathbf{X},\mathbf{M})$ y además $\eta \ll \mu$.

Definición 24 *Sean $X : (\Omega,\sigma,P) \to (\mathbf{R},\mathbf{B},\mathbf{P})$ una v.a., entonces $\mathbf{P}:\mathbf{B}\to\mathbf{R}$ definida como*

$$\mathbf{P}[C] = P\left[X^{-1}(C)\right]$$

es la probabilidad inducida a partir de la variable aleatoria X.

Con las condiciones anteriores se deduce el siguiente teorema.

Definición 25 *La probabilidad condicional*

$$P[A \mid X = x]$$

*es definida como una función **Borel-medible** que satisface la igualdad*

$$P\left[A \cap X^{-1}(C)\right] = \int_C P[A \mid X = x]\mathbf{P}(dx) \text{ para todo } C \in \mathbf{B} \tag{3.36}$$

Demostración: *La prueba se sigue del teorema de Radon-Nikodym.* ■

Se puede ver a $P[A \mid X]$ como una variable aleatoria aplicando el Teorema de Cambio de Variable para integrales de Lebesgue a 3.36:

Teorema 9 *Sea $X : (\Omega,\sigma,P) \to (\mathbf{R},\mathbf{B},\mathbf{P})$ una v.a., entonces la probabilidad condicional de $A \in \sigma$ dado X es **función σ-medible**, que cumple*

$$P\left[A \cap X^{-1}(C)\right] = \int_{X^{-1}(C)} P[A \mid X]dP \text{ para todo } C \in \mathbf{B}$$

Teorema 10 *Sean X_1 y X_2 v.a.i. con distribuciones u y v respectivamente. Si $h : R(X_1, X_2) \to \mathbf{R}$ es una función tal que $h \geq 0$ o $E\left[|h(X_1,X_2)|\right] < \infty$, entonces*

$$E\left[|h(X_1,X_2)|\right] = \int\int h(x_1,x_2)\,u(dx_1)\,v(dx_2)$$

Si $h = 1_{(X_1+X_2\leq z)}$ *entonces*

$$\begin{aligned} E\left[|h(X_1,X_2)|\right] &= P\left[X_1+X_2\leq z\right] \\ &= \int\int 1_{(X_1+X_2\leq z)}u(dx_1)\,v(dx_2) \\ &= \int P\left[X_1+x_2\leq z\right]v(dx_2) \\ &= \int P\left[X_1\leq z-x_2\right]v(dx_2) \end{aligned}$$

Proposición 10 *Suponga que a y b son enteros tales que $a<b$. Suponga que x_n está definida para $a\leq n\leq b$ y satisface que*

$$x_n = px_{n+1}+qx_{n-1} \tag{3.37}$$

para $a<n<b$ donde p y q son positivos y $p+q=1$.Sea $\rho=\frac{q}{p}$, la solución general de la ecuación 3.37 tiene la forma

$$x_n = \begin{cases} A+B\rho^n \text{ para } a\leq n\leq b, \text{ si } p\neq q \\ A+Bn \text{ para } a\leq n\leq b, \text{ si } p=q \end{cases} \tag{3.38}$$

Demostración:

Suponga que los valores x_{n_1} y x_{n_2} están dados, donde $a\leq n_1<n_2\leq b$. Note que

$$\rho=1 \text{ o } \rho\neq 1$$

Para cada caso, queda determinado un sistema de ecuaciones que siempre tiene solución para A y B:

$$\begin{aligned} \rho &\neq 1 \Rightarrow \begin{cases} A+B\rho^{n_1}=x_{n_1} \\ A+B\rho^{n_2}=x_{n_2} \end{cases} \\ \rho &= 1 \Rightarrow \begin{cases} A+Bn_1=x_{n_1} \\ A+Bn_2=x_{n_2} \end{cases} \end{aligned} \tag{3.39}$$

tiene solución :

$$
\begin{array}{l}
\rho \neq 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = \dfrac{x_{n_2} - x_{n_1}}{\rho^{n_2} - \rho^{n_1}} \\ A = x_{n_1} - \dfrac{(x_{n_2} - x_{n_1})\,\rho^{n_1}}{\rho^{n_2} - \rho^{n_1}} = x_{n_2} - \dfrac{(x_{n_2} - x_{n_1})\,\rho^{n_2}}{\rho^{n_2} - \rho^{n_1}} \end{array} \right. \\
\rho = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = \dfrac{x_{n_2} - x_{n_1}}{n_2 - n_1} \\ A = x_{n_1} - \dfrac{x_{n_2} - x_{n_1}}{n_2 - n_1} n_1 = x_{n_2} - \dfrac{x_{n_2} - x_{n_1}}{n_2 - n_1} n_2 \end{array} \right.
\end{array}
\tag{3.40}
$$

Tome $n_1 = a$ *y* $n_2 = a + 1$, *entonces*

$$
\begin{array}{l}
\rho \neq 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = \dfrac{x_{a+1} - x_a}{\rho^{a+1} - \rho^a} \\ A = x_a - \dfrac{(x_{a+1} - x_a)\,\rho^a}{\rho^{a+1} - \rho^a} = x_{a+1} - \dfrac{(x_{a+1} - x_a)\,\rho^{a+1}}{\rho^{a+1} - \rho^a} \end{array} \right. \\
\rho = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = x_{a+1} - x_a \\ A = x_a - (x_{a+1} - x_a)\,a = x_{a+1} - (x_{a+1} - x_a)\,(a+1) \end{array} \right.
\end{array}
\tag{3.41}
$$

Las correspondientes A y B obtenidas en 3.41 satisfacen 3.38 para $n = a$:

$$
\begin{aligned}
x_a &= \left\{ \begin{array}{l} x_a - \dfrac{(x_{a+1} - x_a)\,\rho^a}{\rho^{a+1} - \rho^a} + \dfrac{x_{a+1} - x_a}{\rho^{a+1} - \rho^a}\rho^n \;\; si\ p \neq q \\ x_a - (x_{a+1} - x_a)\,a + (x_{a+1} - x_a)\,n \;\; si\ p = q \end{array} \right. \\
&= \left\{ \begin{array}{l} x_a \;\; si\ p \neq q \\ x_a - (x_{a+1} - x_a)\,(n - a) \;\; si\ p = q \end{array} \right. \\
&= \left\{ \begin{array}{l} x_a \;\; si\ p \neq q \\ x_a \;\; si\ p = q \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

y para $n = a + 1$

$$
\begin{aligned}
x_a &= \left\{ \begin{array}{l} x_{a+1} - \dfrac{(x_{a+1} - x_a)\,\rho^{a+1}}{\rho^{a+1} - \rho^a} + \dfrac{x_{a+1} - x_a}{\rho^{a+1} - \rho^a}\rho^{a+1} \;\; si\ p \neq q \\ x_a - (x_{a+1} - x_a)\,(a+1) + (x_{a+1} - x_a)\,n \;\; si\ p = q \end{array} \right. \\
&= \left\{ \begin{array}{l} x_{a+1} \;\; si\ p \neq q \\ x_{a+1} - (x_{a+1} - x_a)\,(n - a - 1) \;\; si\ p = q \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

por inducción se concluye que A y B satisfacen 3.38 para toda $n \in \mathbf{N}$. *Por otro lado, susti-*

tuyendo en 3.37:

$$\begin{aligned}\rho &\neq 1 \Rightarrow A + B\rho^n = x_n = px_{n+1} + qx_{n-1}\\ &= p\left(A + B\rho^{n+1}\right) + (1-p)\left(A + B\rho^{n-1}\right)\\ &= Ap + B\rho^{n+1}p + A + B\rho^{n-1} - Ap - B\rho^{n-1}p\\ &= A + B\rho^{n-1}\left(\rho^2 p + 1 - p\right)\\ &= A + B\rho^{n-1}\left(\rho q + q\right)\\ &= A + B\rho^{n-1}q\left(\frac{q+p}{p}\right)\\ &= A + B\rho^n\end{aligned}$$

y en el otro caso

$$\begin{aligned}\rho &= 1 \Rightarrow A + Bn = x_n = px_{n+1} + qx_{n-1}\\ &= p\left[A + B(n+1)\right] + (1-p)\left[A + B(n-1)\right]\\ &= Ap + B(n+1)p + A + B(n-1) - Ap - B(n-1)p\\ &= A + B\left[(n+1)p + n - 1 - (n-1)p\right]\\ &= A + B\left[(n+1-n+1)p + (n-1)\right]\\ &= A + B\left[2p + n - 1\right]\\ &= A + Bn\end{aligned}$$

de modo que 3.38 satisface 3.37 para toda $n \in \mathbf{N}$. De hecho, la ecuación 3.37 y dos valores dados n_1 y n_2 son suficientes para determinar todas las x_n.

Por tanto, si x_n está definida para $a \leq n < \infty$ y satisface 3.37 para $a < n < \infty$ entonces hay constantes A y B tales que 3.38 se cumple para toda $a \leq n < \infty$.

Definición 26 *Una función ϕ en un intervalo abierto I no necesariamente acotado es* convexa *si*

$$\phi\left(tx + (1-t)y\right) \leq t\phi(x) + (1-t)\phi(y) \tag{3.42}$$

para $x, y \in I$ y $0 \leq t \leq 1$.

Proposición 11 *Sea ϕ una función convexa definida en un intervalo abierto no necesariamente acotado I, y sean $p_1, ..., p_n \in \mathbf{R}$ tales que*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

entonces

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \phi(x_i) \tag{3.43}$$

Demostración:

Por inducción sobre n y utilizando la convexidad de ϕ, el paso base está probado. Ahora suponga que para todo $k \leq n$ la proposición se cumple. Utilizando otra vez la convexidad de ϕ, y que $\sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1$

$$\begin{aligned}
\phi\left(\sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i\right) &= \phi\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i + p_{n+1} x_{n+1}\right) \\
&\leq \phi\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) + \phi(p_{n+1} x_{n+1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} p_i \phi(x_i) + \phi(p_{n+1} x_{n+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} p_i \phi(x_i)
\end{aligned}$$

■

Proposición 12 *Si ϕ tiene derivada continua, no decreciente ϕ' en I, entonces ϕ es convexa. De hecho, si $a < b < c$, entonces*

$$\frac{\phi(b) - \phi(a)}{b - a} \leq \frac{\phi(c) - \phi(b)}{c - b} \tag{3.44}$$

el promedio de ϕ' en (a, b) es a lo más el promedio en (b, c).

Demostración:

$$\frac{\phi(b) - \phi(a)}{b - a} \leq \frac{1}{b - a}\int_a^b \phi'(s)\, ds$$

$$
\begin{aligned}
&\le \phi'(b) \\
&\le \frac{1}{c-b}\int_b^c \phi'(s)\,ds \\
&= \frac{\phi(c)-\phi(b)}{c-b}
\end{aligned}
$$

■

Corolario 3 *La desigualdad 3.44 se reduce a*

$$(c-b)\,\phi(b) \le (c-b)\,\phi(a) + (b-a)\,\phi(c) \tag{3.45}$$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
\frac{\phi(b)-\phi(a)}{b-a} &\le \frac{\phi(c)-\phi(b)}{c-b} \\
(c-b)\,(\phi(b)-\phi(a)) &\le (b-a)\,(\phi(c)-\phi(b)) \\
(c-b)\,\phi(b) &\le (c-b)\,\phi(a) + (b-a)\,\phi(c) - (b-a)\,\phi(b) \\
&\le (c-b)\,\phi(a) + (b-a)\,\phi(c)
\end{aligned}
$$

■

Observación 12 *La ecuación 3.45 es la ecuación 3.42 con* $x = a$, $y = c$, $t = \dfrac{c-b}{c-a}$

Lema 5 (Desigualdad de Jensen) *Sea* X *una variable aleatoria definida en un espacio* (Ω, σ, P), *tal que* $E[X] < \infty$, *y sea* f *una función convexa, entonces*

$$E[f(X)] \ge f(E[X])$$

Demostración: *Utilizando 3.42 el resultado es inmediato.* ■

Corolario 4 *Si* $\theta \neq 0$ *satisface la ecuación*

$$E[e^{\theta X}] = 1$$

entonces la desigualdad de Jensen implica que

$$0 < \theta \tag{3.46}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \ln 1 &= \ln E[e^{\theta X}] \geq \ln e^{\theta E[X]} \\ &\Rightarrow 0 > \theta E[X] \\ &\Rightarrow 0 < \theta \end{aligned}$$

■

Bibliografía

Kozek, Andrzej S. (1993). A Rule of Thumb (Not Only) for Gamblers. Stochastic Processes and their Applications 55 (1995), 169-181. Elsevier.

Billingsley, P. (1979). Probability and Measure. Wiley, Nueva York.

Durret, R. (1991). Probability, Theory and Examples. Duxbury Press. Belmont, California.

Feller, W. (1966). An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. II. Wiley. Nueva York.

Galambos, J. (1995). Advanced Probability Theory. Dekker. New York.

Kaigh, W.D. (1979). An Attrition Problem of Gambler's Ruin. The Mathematics Magazine, 52, págs.22-25.

Ross, S.M. (1983). Stochastic Processes. Wiley. New York.

Uspensky, J.V. (1937). Introduction to Mathematical Probability. McGraw-Hill. Nueva York, Londres.