

106
201



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

ANALISIS Y CLASIFICACION DE UN
TIPO DE FIGURAS IMPOSIBLES

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
A C T U A R I O
P R E S E N T A :
GERARDO SOUSA AUBERT

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. MA. DE LA PAZ ALVAREZ SCHERER

1997

FACULTAD DE CIENCIAS
SECRETARIA DE CIENCIAS

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central

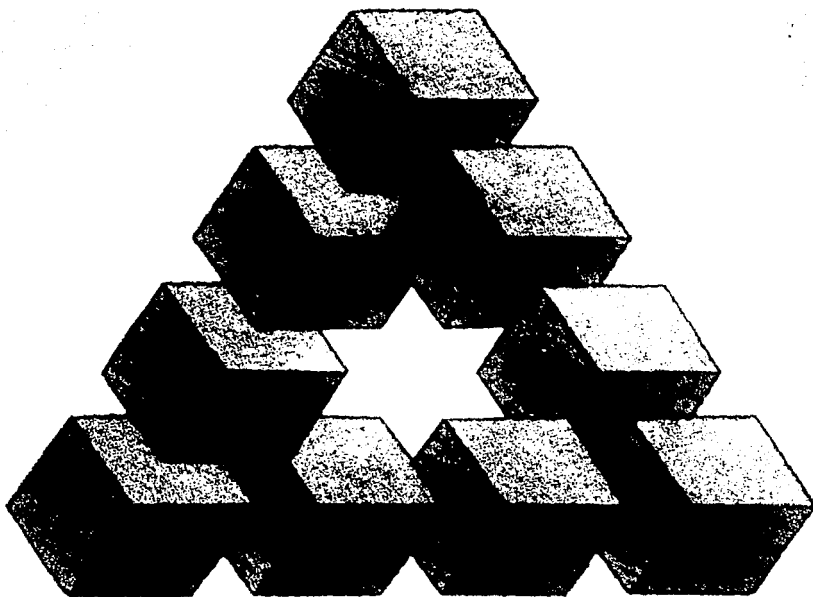


UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Análisis y Clasificación de un Tipo de Figuras Imposibles.

Gerardo Sousa Aubert.
Abril 17, 1997



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

" ANALISIS Y CLASIFICACION DE UN TIPO DE FIGURAS IMPOSIBLES "

realizado por GERARDO SOUSA AUBERT

con número de cuenta 8955146-4 , pasante de la carrera de ACTUARIA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Propietario

Propietario

Suplente

Suplente

DRA. MA. DE LA PAZ ALVAREZ SCHERER

DR. FRANCISCO GONZALEZ ACUÑA

M. en C. ROBERTO TORRES HERNANDEZ

DR. RODOLFO SAN AGUSTIN CHI

DR. ALEJANDRO BRAVO MOLINA

Consejo Departamental de Matemáticas

UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE MATEMÁTICAS

INDICE

INTRODUCCION	5
1 Clasificación de figuras imposibles.	8
1.1 Figuras etiquetables y no-etiquetables.....	11
1.2 Figuras correctas e incorrectas.....	14
1.3 Figuras regulares y no-regulares.....	19
1.4 Figuras corregibles e incorregibles.....	20
1.5 Clasificación.....	21
2 Análisis de un tipo de figuras imposibles.	24
2.1 Construcción y puntos de vista.....	24
2.2 La versión de Kangas del método de Cowan.....	26
2.2.1 Proyecciones.....	26
2.2.2 Reflexiones.....	28
2.3 El método Cowan.....	33
2.4 Una conjetura afortunada.....	39
2.5 Una conjetura no tan afortunada.....	42
CONCLUSIONES	45
BIBLIOGRAFIA	48

INDICE DE FIGURAS

1.-	Figura	A:	Una composición espacial imposible.....	5
2.-	Figura	B:	¿Un Cubo?.....	5
3.-	Figura	C:	Objeto parcialmente posible.....	6
4.-	Figura	1.1:	Triángulo imposible (Penrose y Penrose, 1958).....	8
5.-	Figura	1.2:	Objeto imposible propuesto por Huffman (1971).....	9
6.-	Figura	1.3:	Un marco de cuatro lados.....	10
7.-	Figura	1.4:	Una figura etiquetable.....	11
8.-	Figura	1.5:	Formas básicas de "llenar" subespacios.....	12
9.-	Figura	1.6:	Todas las formas de etiquetar un vértice triedral.....	12
10.-	Figura	1.7:	Lista de Huffman de cruces posibles (Huffman,1971).....	13
11.-	Figura	1.8:	Figuras etiquetables y no etiquetables.....	14
12.-	Figura	1.9:	Objeto y su figura.....	15
13.-	Figura	1.10:	Pistas de distancias.....	16
14.-	Figura	1.11:	¿Un tetraedro?.....	17
15.-	Figura	1.12:	Figuras regulares y no-regulares.....	19
16.-	Figura	1.13:	Clasificación de figuras etiquetables.....	21
17.-	Figura	1.14:	Corrección de las figuras corregibles de la figura 1.8.....	22
18.-	Figura	1.15:	Algunos ejemplos.....	23
19.-	Figura	1.16:	Deformación de Draper (1978).....	23
20.-	Figura	2.1:	Tipos de figuras de esquinas.....	25
21.-	Figura	2.2:	El marco A ² CB.....	25
22.-	Figura	2.3:	Dos figuras distintas de un mismo objeto.....	27

23.- Figura	2.4: El marco B^2C^2 se refleja como B^2C^2 , mientras que AC^3 se refleja como AB^3	29
24.- Figura	2.5: Las cuatro esquinas y sus reflexiones.....	29
25.- Figura	2.6: La casa de los espejos.....	30
26.- Figura	2.7: Equivalencias de figuras (caso 26 tabla 1).....	32
27.- Figura	2.7-A: Equivalencias de figuras bajo los dos métodos (Caso 26 tabla 1).....	36
29.- Figura	2.8: Método de discriminación de Cowan.....	34
30.- Figura	2.9: Disección del marco C^4	35
31.- Figura	2.10: Los marcos $(DC)^2$ y $(AC)^2$	37
32.- Figura	2.11: Otros ejemplos.....	38
33.- Figura	2.12: Las cuatro esquinas y el carril que genera cada una.....	39
34.- Figura	2.13: Equivalencias básicas.....	41
35.- Figura	2.14: El panorama completo: Un marco, su representación por carriles y su mínima expresión.....	42
36.- Figura	3.1: Algunos ejemplos (1.10).....	45
37.- Figura	3.2: Figura correcta de un poliedro que puede ser visto como una forma plana.....	46
38.- Figura	3.3: Objetos imposibles representados por una figura con líneas ocultas y uno representado por una figura con sombras.....	46

INTRODUCCION.

En 1934, el artista sueco Oscar Reutersvard dibujó nueve cubos en una composición espacial imposible (*figura A*). Esta composición da origen a lo que en 1958 publicaron L.S. y R. Penrose como su invento llamado marco triangular imposible en el artículo "*Objetos imposibles - un tipo especial de ilusión óptica*" que fué publicado en el *British Journal of Psychology*. Desde entonces, los objetos imposibles han sido estudiados desde distintos puntos de vista tanto por la ciencia como por el arte que en ellos existe, pero ¿qué es una figura imposible?



Figura A: Una composición espacial imposible.

Cuando alguien observa un dibujo en un papel, puede llegar a interpretarlo como la representación de un objeto tridimensional. Por ejemplo, la mayoría de las personas que observen una figura como la que se muestra en la *figura B*.

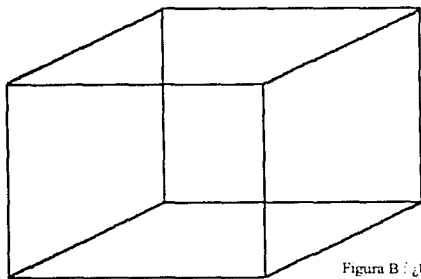


Figura B : ¿Un cubo ?

coincidirían en concluir que representa un cubo o una caja; algunos pocos concluirían que se trata de dos cuadrados unidos por unas líneas diagonales; alguien podría pensar que es un cuadrado rodeado por figuras irregulares planas o darle alguna otra interpretación similar.

Sin embargo, estas últimas interpretaciones son tan válidas como la tridimensional del cubo o caja. De hecho, el dibujo fué hecho partiendo de dos cuadrados y uniéndolos con líneas diagonales, de manera que podríamos considerar que esta es la interpretación correcta, no obstante, la mayoría de las personas que lo vean seguirán pensando que es un cubo o una caja.

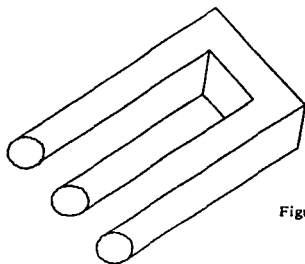


Figura C: Objeto parcialmente posible.

Esta tendencia de la mente humana a interpretar dibujos como objetos tridimensionales puede llevarnos a enfrentar problemas muy interesantes. Por ejemplo, la *figura C* resulta difícil de interpretar dado que sugiere que representa un objeto tridimensional pero parece que el objeto cambia sus propiedades dependiendo de qué parte del objeto se esté observando. Cubriendo el lado izquierdo parece que se trata de un objeto con dos puntas, mientras que cubriendo el lado derecho, parece que se trata de un objeto con tres puntas y no con dos. Viendo completa la figura, se ve un objeto que cambia entre dos y tres puntas. Esta contradicción confunde la mente del observador.

Digamos que las figuras imposibles son las representaciones de formas imposibles de construir. Dibujos perfectos de cosas que no existen, pero que "confunden" nuestra mente entre lo posible, lo parcialmente posible y lo imposible.

Se hará una distinción entre el dibujo que se hace en algún plano y que consta de un conjunto de líneas rectas y/o curvas, y el objeto físico que representan, llamando al primero "*figura*", y al segundo simplemente "*objeto*". De este modo, podemos decir que una "*figura imposible*" es un dibujo que representa un objeto imposible de construir en nuestro mundo pero que, a primera vista, no es claro el por qué de ésta imposibilidad.

Algunos aspectos de interés que motivan el estudio de figuras imposibles se presentan en psicología, donde resulta útil estudiar el fenómeno de la percepción de la mente humana ante las figuras imposibles y las diferentes interpretaciones que cada quien les da; por otro lado, en informática, surge el problema de definir y clasificar cualquier tipo de figuras imposibles de manera que un lector óptico de un robot que construya objetos a partir de ciertos planos pueda fácilmente detectar errores en los diseños, etcétera.

En matemáticas, surgen gran cantidad de aspectos a desarrollar en torno a las figuras imposibles: la clasificación de éstas, que implica el estudio de sus características y propiedades de las mismas; el análisis de las figuras desde diferentes puntos de vista matemáticos como la geometría y la topología; la posible relación entre una figura imposible y un espacio topológico

donde pueda convertirse en posible, las razones geométricas que originan la imposibilidad de construir las en nuestro espacio, etcétera.

1.-Clasificación de figuras imposibles.

Una figura imposible se puede definir como un dibujo que representa un objeto "sólido" imposible de crear en nuestro mundo. Sin embargo, esta es una definición ambigua dado que una misma figura puede representar varios tipos de objetos. Por ejemplo, cuando una persona observa la *figura 1.1* podría "ver" algo compuesto por tres prismas rectangulares conectados mutuamente en ángulos rectos, o algo así como un objeto cuya superficie es plana y oblicua, o bien algo así como un objeto cuya superficie curva, o algo hecho de alambre. El objeto resulta imposible en los dos primeros casos, y posible en los últimos. De modo que la posibilidad o imposibilidad del objeto pareciera depender fundamentalmente de lo que represente en la mente del que observa una figura imposible.

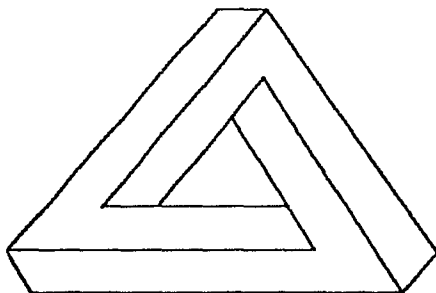


Figura 1.1: Triángulo imposible (Penrose y Penrose, 1958).

Un ejemplo más claro de esto se presenta al observar la *figura 1.2a*. Esta figura fué propuesta por Huffman como una figura imposible. Efectivamente no representa algún objeto delimitado por superficies planas, ya que si fuera la proyección de un objeto delimitado por superficies planas las tres caras laterales (al ser extendidas) deberían tener un punto de intersección en común (ver *figura 1.2b*).

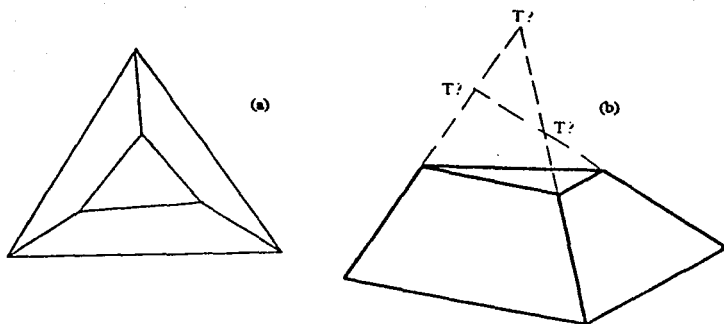


Figura 1.2: Objeto imposible propuesto por Huffman (1971).

Consecuentemente las tres aristas laterales deberían coincidir en un punto en común al ser extendidas, pero no es así. Debe observarse que el objeto se vuelve posible si movemos uno de los vértices junto con sus aristas a una posición adecuada. La imposibilidad del objeto gradualmente va siendo menos visible conforme el vértice se aproxima a su posición correcta.

Por el contrario la *figura 1.1* no puede ser corregida cambiando las posiciones de los vértices. Por lo tanto, diferentes figuras imposibles pueden tener diferentes tipos de imposibilidad y/o diferentes grados de imposibilidad. Así que, antes de estudiar las propiedades de los objetos que representan las figuras imposibles, será necesario encontrar las razones matemáticas que hacen que un objeto imposible sea imposible.

Cowan (1974,1977), Pringle y Cowan (1978), y Térouanne (1980) entre otros, han estudiado las propiedades matemáticas de los poliedros imposibles, pero se han concentrado en los marcos de cuatro lados (como el de la *figura 1.3*), y sus consideraciones no pueden generalizarse fácilmente a otros tipos de objetos representados por figuras imposibles.

Sugilara (1982) propone una condición necesaria y suficiente para saber si una figura representa un poliedro posible, y propone además un esquema matemático para clasificar los objetos representados por figuras imposibles. Consideraremos el universo de todo tipo de objetos sólidos delimitados por superficies planas y estudiaremos varios tipos de imposibilidades que se advierten al tratar de hacer objetos reales a partir de figuras, y clasificaremos los objetos imposibles de acuerdo al tipo de imposibilidad que posean.

Analizaremos las figuras desde un punto de vista puramente matemático. Inclusive el concepto de objetos imposibles se define matemáticamente sin hacer referencia a ningún fenómeno psicológico. Al final del capítulo, se discutirá en forma muy general algunos problemas psicológicos sugeridos por los resultados que vayamos obteniendo.

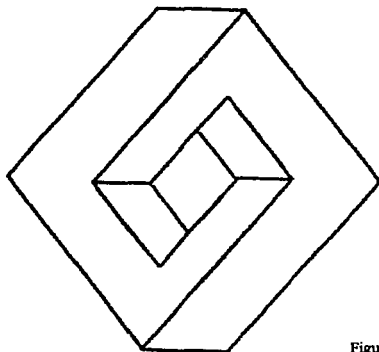


Figura 1.3: Un marco de cuatro lados.

1.1.-Figuras etiquetables y no-etiquetables.

Los objetos a considerar son *poliedros*, esto es, objetos tridimensionales delimitados por superficies completamente planas. Una proyección ortogonal o perspectiva de un poliedro sobre un plano es llamada *una figura*. La proyección de una cara, una arista, y un vértice del poliedro, son llamadas *región*, *línea* y *cruce*, respectivamente. Consideraremos cómo podemos reconstruir un objeto tridimensional a partir de una figura bidimensional.

Antes que nada, tenemos que distinguir dos tipos de figuras: aquellas en que el observador ve objetos tridimensionales, y aquellas en que no se ven más que formas bidimensionales. Con este propósito, utilizaremos el método de etiquetación de Huffman.

Huffman (1971) asignó tres tipos de etiquetas a las líneas de una figura de acuerdo a sus propiedades físicas: una línea con el signo de más (+) representa una arista que forma una cresta con respecto al ojo; una línea con el signo de menos (-) representa una arista que forma un valle, y una línea con una flecha representa una arista que forma la silueta o el contorno de la figura (la dirección de la flecha se determina de manera que ambas caras adyacentes a la arista se encuentren a la derecha de la flecha). En la *figura 1.4*, se muestra un ejemplo de una figura, que no representa un poliedro, etiquetada de esta forma.

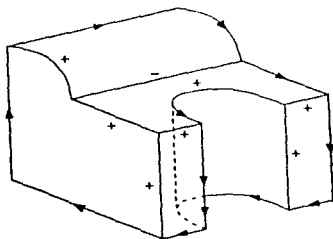


Figura 1.4: Una figura etiquetable.

Un vértice de un poliedro que pertenece exactamente a tres caras del poliedro es llamado *vértice triedral*. En la *figura 1.5*, se pueden apreciar las cuatro formas básicas en las que tres superficies planas pueden formar un vértice de un poliedro. La idea aquí es que tres planos no paralelos entre sí, dividen el espacio en ocho subespacios, que a su vez podemos pensar como "llenos" de algún material sólido o "vacíos"; y así darnos cuenta de que cualquier combinación de estos subespacios "llenos" y/o "vacíos", es equivalente a alguna de las cuatro formas básicas de la *figura 1.5* (esto sin tomar en cuenta el caso en que los ocho subespacios están vacíos, pues no tenemos un poliedro; ni el caso en que los ocho estén llenos, pues el vértice en cuestión se convierte en un punto interior del sólido).

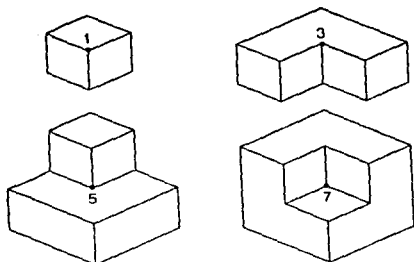


Figura 1.5: Formas básicas de "llenar" subespacios.

Partiendo de las formas de la *figura 1.5*, encontramos las doce diferentes formas en que se pueden etiquetar las aristas adyacentes a un vértice triedral (*figura 1.6*).

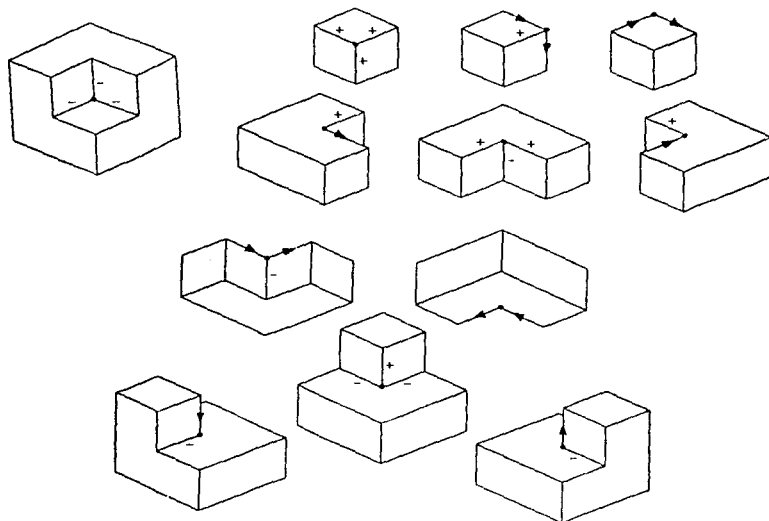


Figura 1.6: Todas las formas de etiquetar un vértice triedral.

a las cuales se agregan cuatro que surgen al considerar los casos en que de las tres aristas incidentes al vértice, dos sean la representación de una misma línea de contorno, y la otra pueda ser etiquetada de cualquiera de las cuatro formas que se muestran en la base de la *figura 1.7*. De esta forma, Huffman encuentra todos los posibles *cruces* que se pueden presentar en figuras de poliedros con vértices triedrales (*figura 1.7*).

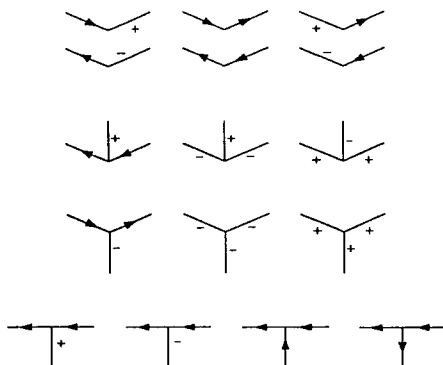


Figura 1.7: Lista de Huffman de cruces posibles (Huffman, 1971).

Con este método, podemos encontrar la estructura del objeto asignando etiquetas a las líneas de una figura de manera que los cruces resultantes sean todos posibles. Cuando no sea posible encontrar la forma adecuada de etiquetar, concluimos que la figura no representa poliedro alguno.

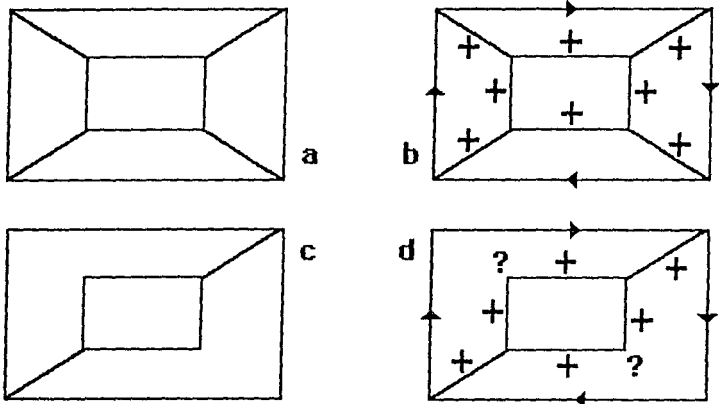


Figura 1.8: Figuras etiquetables y no etiquetables.

La figura 1.8a, se puede etiquetar adecuadamente como se muestra en la figura 1.8b. Mientras que por el contrario, la figura 1.8c no puede tener una etiquetación adecuada: si comenzamos poniendo flechas a las líneas exteriores y continuamos asignando etiquetas a las líneas interiores, caemos en inconsistencias en los cruces marcados con el signo '?' en la figura 1.8d. Con esto en mente, diremos que la figura 1.8a es una figura *etiquetable* y la figura 1.8c es una figura *no-etiquetable*.

En lo que resta del capítulo, consideraremos únicamente figuras etiquetables.

1.2.-Figuras correctas e incorrectas.

Diremos que una figura representa un objeto imposible si la figura es etiquetable pero no representa un poliedro. En esta sección consideraremos un método práctico para discriminar los objetos imposibles de los posibles.

Sean V y F el conjunto de vértices y el de caras de un poliedro respectivamente, y sea R el conjunto de parejas de vértices y caras tales que $(v, f) \in R$ si y solo si el vértice $v \in V$ esta sobre la cara $f \in F$. Sea T el conjunto formado por las ternas (α, β, δ) , donde $\alpha \in V$, $\beta \in V \cup F$ y $\delta \in \{\text{ATRÁS, ADELANTE, PROPIAMENTE ATRAS, PROPIAMENTE ADELANTE}\}$. De modo que la terna $(\alpha, \beta, \text{ATRÁS})$ significa que α tiene la misma

profundidad que β o que puede tener un poco más, es decir, puede estar atrás; y la terna $(\alpha, \beta, \text{PROPIAMENTE ATRAS})$ significa que α está estrictamente atrás que β . Lo mismo, pero invertido, cuando hablemos de ADELANTE y PROPIAMENTE ADELANTE. Diremos que $S^* = (V, F, R, T)$ es una estructura espacial asociada a una figura etiquetada.

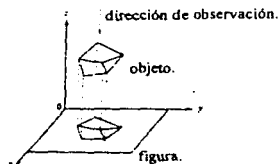


Figura 1.9: Objeto y su figura.

Supongamos que tenemos la proyección ortogonal de un poliedro definido dentro de un sistema (x, y, z) de coordenadas cartesianas, en el plano xy como se muestra en la figura 1.9. Sea (x_i, y_i, z_i) el punto donde se ubica el vértice v_i ($i=1, 2, \dots, n$; donde n es el número de vértices), y sea

$$a_j x + b_j y + z + c_j = 0$$

la ecuación del plano que contiene la cara f_j ($j=1, 2, \dots, m$; donde m es el número de caras).

Entonces, si el vértice v_i está sobre la superficie que contiene la cara f_j , tenemos que

$$a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j = 0,$$

es una ecuación lineal con variables z_i, a_j, b_j, c_j (ya que dada la figura, x_i y y_i son conocidas). Encontrando la ecuación correspondiente para cada pareja de vértices y caras (v_i, f_j) , donde f_j es alguna de las caras que contiene al vértice v_i , podemos formar el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{0},$$

donde \mathbf{w} es el vector de las variables desconocidas, $\mathbf{w} = (z_1 \dots z_n a_1 b_1 c_1 \dots a_m b_m c_m)^T$, y \mathbf{A} es una matriz constante de tamaño $|R| \times (3m + n)$.

En una figura hay muchos detalles que nos sugieren que algunas partes del objeto que representan están más cercanas al ojo que otras.



Figura 1.10: Pistas de distancias.

Consideremos por ejemplo, la figura 1.10a. Como las caras f_j y f_k tienen una arista cóncava en común, el vértice v_i , que está sobre f_k , está más cercano al ojo que la cara f_j (aún cuando extendamos f_j). Esto es, $(v_i, f_j, \text{PROPIAMENTE ADELANTE}) \in T$. En este caso tenemos que:

$$a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j > 0.$$

Podemos obtener desigualdades similares para las distintas ternas $(v_i, f_j, \text{ATRAS, O ADELANTE, O PROPIAMENTE ATRAS, O PROPIAMENTE ADELANTE})$, para las cuales el vértice v_i no pertenece a la cara f_j . En la figura 1.10b, una línea de contorno representa una relación de occlusión que nos dice, por ejemplo, que el vértice v_i que está sobre la cara f_k , está más cercano al ojo que la cara f_j , es decir, $(v_i, f_j, \text{ADELANTE}) \in T$. En éste caso tenemos que:

$$a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j \geq 0.$$

La igualdad se permite dado que f_j y f_k se pueden tocar en v_i . De este modo obtenemos un conjunto de desigualdades similares con las que podemos formar

$$\mathbf{Bw} > \mathbf{0},$$

donde \mathbf{B} es una matriz constante de tamaño $|T| \times (3m + n)$, y la desigualdad se debe a que sus elementos son desigualdades, algunas de las cuales pueden aceptar la igualdad. Ahora podemos formular el siguiente teorema:

TEOREMA 1: Una figura etiquetada representa correctamente un poliedro si y sólo si los sistemas de ecuaciones $\mathbf{Aw} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{Bw} > \mathbf{0}$ tienen soluciones.

Este teorema aporta un método práctico para discriminar objetos imposibles. Las soluciones de estos sistemas de ecuaciones pueden ser consideradas como las soluciones factibles de un problema de programación lineal (Sugihara, 1984).

Aunque los cálculos en que nos basamos para encontrar este teorema parten de la base de que la figura es la proyección ortogonal de un objeto, se puede mostrar que si consideramos la proyección perspectiva llegamos a los mismos resultados (Sugihara 1979). Por lo tanto el Teorema 1 no depende del tipo de proyección de la que provenga la figura.

Consideremos por ejemplo la figura 1.11(a). Nos interesa saber, utilizando el Teorema antes mencionado, si la figura representa un poliedro o no. Lo primero será asignar nombres a los vértices y las caras que forman la figura (figura 1.11(b)); después es necesario etiquetar la figura, por ejemplo, como se muestra en la figura 1.11(c). Para utilizar el Teorema, es necesario conocer las posiciones de los vértices en el plano xy , así que supongamos que las posiciones de los vértices corresponden a los puntos que se muestran en la figura 1.11(d).

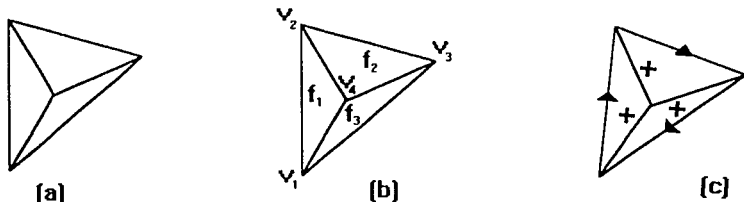


Figura 1.11 : ¿Un tetraedro?

Esto es: $v_1 = (1, 1)$ $v_2 = (1, 5)$ $v_3 = (4, 4)$ $v_4 = (2, 3)$

Sean las ecuaciones de los planos que contienen las caras f_1 , f_2 y f_3 como sigue:

$$f_1 : a_1x + b_1y + c_1 + z = 0$$

$$f_2 : a_2x + b_2y + c_2 + z = 0$$

$$f_3 : a_3x + b_3y + c_3 + z = 0$$

Considerando todas las posibles parejas (v_i, f_j) donde v_i es un vértice que está sobre la superficie que contiene la cara f_j ($i = 1, 2, 3, 4$ y $j = 1, 2, 3$) obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
(v_1, f_1) &: a_1 + b_1 + c_1 + z_1 = 0 \\
(v_1, f_3) &: a_3 + b_3 + c_3 + z_1 = 0 \\
(v_2, f_1) &: a_1 + 5b_1 + c_1 + z_2 = 0 \\
(v_2, f_2) &: a_2 + 5b_2 + c_2 + z_2 = 0 \\
(v_3, f_2) &: 4a_2 + 4b_2 + c_2 + z_3 = 0 \\
(v_3, f_3) &: 4a_3 + 4b_3 + c_3 + z_3 = 0 \\
(v_4, f_1) &: 2a_1 + 3b_1 + c_1 + z_4 = 0 \\
(v_4, f_2) &: 2a_2 + 3b_2 + c_2 + z_4 = 0 \\
(v_4, f_3) &: 2a_3 + 3b_3 + c_3 + z_4 = 0
\end{aligned}$$

Esto nos permite formar el sistema de matrices $\mathbf{Aw} = \mathbf{0}$, donde

$$\mathbf{w} = (z_1, z_2, z_3, z_4, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3)^T \text{ y}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

Lo siguiente es considerar el conjunto T de "profundidades relativas" entre los vértices del conjunto V y los elementos de $V \cup F$. Esto es:

$$T = \{(v_3, f_1, \text{PROPIAMENTE ATRAS}), (v_1, f_2, \text{PROPIAMENTE ATRAS}), \\
(v_2, f_3, \text{PROPIAMENTE ATRAS}), (v_1, v_4, \text{PROPIAMENTE ATRAS}), \\
(v_4, v_2, \text{PROPIAMENTE ADELANTE}), (v_4, v_3, \text{PROPIAMENTE ADELANTE})\}$$

Con éste conjunto, generamos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
(v_3, f_1) &: -4a_1 - 4b_1 - c_1 - z_4 > 0 \\
(v_1, f_2) &: -a_2 - b_2 - c_2 - z_1 > 0 \\
(v_2, f_3) &: -a_3 - 5b_3 - c_3 - z_2 > 0 \\
(v_1, v_4) &: -z_1 > -z_4 \\
(v_2, v_4) &: -z_2 > -z_4 \\
(v_3, v_4) &: -z_3 > -z_4
\end{aligned}$$

Esto nos permite formar el sistema de matrices $\mathbf{Bw} > \mathbf{0}$, donde

$$\mathbf{w} = (z_1, z_2, z_3, z_4, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3)^T \text{ y}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -4 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema formado por las ecuaciones $Aw = 0$ y por las inecuaciones $Bw > 0$ tiene soluciones. Por ejemplo, podemos verificar fácilmente que:

$$\begin{aligned} z_1 &= 4 & a_1 &= -3 & b_1 &= 0 & c_1 &= -1 \\ z_2 &= 4 & a_2 &= \frac{3}{5} & b_2 &= \frac{9}{5} & c_2 &= -\frac{68}{5} \\ z_3 &= 4 & a_3 &= 3 & b_3 &= -3 & c_3 &= -4 \\ z_4 &= 7 \end{aligned}$$

es una solución del sistema, y de acuerdo con el Teorema 1, la figura etiquetada que se muestra en la figura 1.11(b), representa un poliedro.

1.3.-Figuras regulares y no-regulares.

Tanto la figura 1.12a como la 1.12b representan correctamente un poliedro, con la diferencia de que la 1.12a permanece correcta cuando movemos suavemente cualquiera de sus vértices (junto con las líneas correspondientes) en cualquier dirección, mientras que la 1.12b se vuelve incorrecta si movemos los vértices de manera que al prolongar las líneas 1, 2 y 3 no se tenga un punto de intersección en común. (Obsérvese que, dado que la cara superior, la derecha y la izquierda tienen un punto en común en el espacio, las líneas 1, 2 y 3 deben tener un punto de intersección en el plano de la figura para que ésta represente un poliedro correctamente).



Figura 1.12 : Figuras regulares y no regulares.

Llamaremos *regulares* a las figuras que permanecen correctas cuando movemos suavemente cualquiera de sus vértices, y *no-regulares* a aquellas que se pueden volver incorrectas cuando movemos ligeramente alguno de sus vértices. Formalizaremos éste concepto de la siguiente manera:

Sean V y F el conjunto de vértices y el de caras de un poliedro respectivamente, y sea R el conjunto de parejas de vértices y caras tales que $(v, f) \in R$ si y solo si el vértice $v \in V$ esta sobre la cara $f \in F$. Diremos que la terna $S = (V, F, R)$ es una *estructura de incidencias* de un poliedro. Diremos también que una estructura de incidencias $S = (V, F, R)$ es *regular*

si, dados los diferentes vértices que generan la matriz constante \mathbf{A} , dibujados de manera que generen las superficies de F , el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{0}$ tiene soluciones tales que incluyan todas las caras del conjunto F . Una figura con una estructura de incidencias regular representa una configuración de superficies planas correctamente. Cabe resaltar que la definición de regularidad depende de la igualdad $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{0}$ y no de la desigualdad $\mathbf{B}\mathbf{w} > \mathbf{0}$, y como consecuencia toda figura regular no necesariamente representa un poliedro correctamente.

Sea X un subconjunto de F y sea $V(X)$ el conjunto de los vértices que están en al menos una de las caras de X para todo $X \subseteq F$, y sea $R(X)$ el conjunto de los elementos de R que tienen caras en común con X ; esto es

$$V(X) = \{v \mid v \in V, (\{v\} \times X) \cap R \neq \emptyset\}$$

$$R(X) = R \cap (V \times X).$$

Teorema 2: Una estructura de incidencias $S = (V, F, R)$ es regular si y sólo si $\mu_S(X) \geq 0$ para toda $X \subseteq F$ tal que $|X| \geq 2$, donde

$$\mu_S(X) = |V(X)| + 3|X| - |R(X)| - 4.$$

Utilizando éste teorema podemos saber (sin resolver el sistema $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{0}$) cuándo la figura tiene una estructura de incidencia regular y cuándo no. Si consideramos, por ejemplo, la estructura de incidencia $S = (V, F, R)$ de la figura 1.12b, tenemos que hay 9 vértices, 4 caras y 18 pares ordenados distintos de vértice-cara; esto es: $|V| = 9$; $|F| = 4$; $|R| = 18$. Así que tenemos que $\mu_S(F) = 9 + (3 \times 4) - 18 - 4 = -1$ y por lo tanto la figura es no-regular, mientras que la figura 1.11(b) sí es regular pues:

i) Si $X = F$, entonces $|V| = 4$, $|X| = 3$, $|R| = 9$ y por lo tanto $\mu_S(F) = 4 + (3 \times 3) - 9 - 4 = 0$ y,

ii) Si $X = \{f_1, f_2\}$, entonces $|V| = 4$, $|X| = 2$, $|R| = 6$ y por lo tanto $\mu_S(F) = 4 + (3 \times 2) - 6 - 4 = 0$.

Lo mismo para los demás $X \subseteq F$ y por lo tanto la figura 1.11(b) es regular.

1.4.-Figuras corregibles e incorregibles.

Otra aproximación en la clasificación de figuras se basa en el criterio de corregibilidad. Se dice que una figura es *corregible* si es correcta o puede ser corregida moviendo ligeramente los vértices (con sus respectivas líneas), e *incorregible* en cualquier otro caso. Un movimiento ligero de vértices significa que la figura preserva su estructura en términos de la teoría de gráficas y preserva también la propiedad de que un ángulo que se forma entre dos líneas adyacentes sea menor o mayor que π . Intuitivamente, un movimiento ligero, analizando cada vértice por separado, equivale a cambiar los ángulos entre las caras adyacentes al vértice o a cambiar la posición del ojo sin cambios drásticos en el sentido de que una cara visible se vuelva invisible o una invisible se vuelva visible.

La figura 1.2a es una figura *corregible* porque se vuelve correcta si movemos uno de los vértices de manera que las tres aristas que conectan el triángulo interior con el triángulo exterior tengan un punto en común (al ser extendidas). Por otro lado, la figura 1.1 es una figura *incorregible* ya que los motivos de su imposibilidad no pueden ser solucionados nada más por los movimientos de las posiciones de los vértices.

1.5.-Clasificación.

Hemos considerado las figuras desde cuatro puntos de vista: cuando son o no son etiquetables, correctas, regulares y corregibles. Combinando estos puntos de vista, obtenemos un esquema para la clasificación de figuras que representan objetos imposibles que se muestra en la figura 1.13.

Las figuras etiquetables son clasificadas de dos maneras. Primero se clasifican en *regulares* y *no-regulares* de acuerdo a si sus estructuras de incidencia son regulares o no. Esta regularidad se evalúa fácilmente utilizando el *teorema 2*. En segundo, las figuras etiquetables se clasifican en figuras *corregibles* e *incorregibles* dependiendo de si se pueden corregir con movimientos ligeros de sus cruces o no. Por último, las figuras corregibles pueden ser figuras *correctas* o *incorrectas* de acuerdo al *teorema 1*. De manera que las figuras etiquetables se dividen en seis categorías. Y como un objeto imposible es representado por una figura etiquetable e incorrecta, podemos clasificar los objetos imposibles dentro de sólo cuatro categorías.

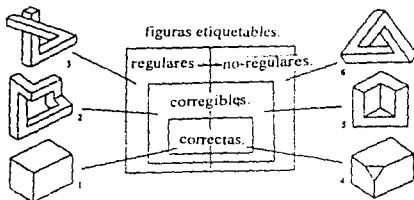


Figura 1.13 : Clasificación de figuras etiquetables

En la figura 1.13 se presentan ejemplos de figuras que pertenecen a cada una de estas seis categorías. Nótese que tanto 1, 2 y 3 tienen una estructura de incidencias regular aunque 2 y 3 no son correctas.

Podemos entender las incorrecciones de ésta figura 2 de la siguiente manera (ver figura 1.14a). Sea ρ la intersección de la cara f_1 y la línea l_0 (la posición de ρ en la figura plana puede obtenerse como la intersección de las líneas l_0 y l_1). Sea L_ρ la recta que pasa por ρ y es perpendicular a la figura plana. Y sean z_1, z_2, z_3 las coordenadas en z donde la recta L_ρ corta respectivamente las caras (extendidas) f_1, f_2 y f_3 . Recordemos que se supone la figura sobre el plano xy , y la dirección positiva del eje z rumbo al observador como se muestra en

la figura 1.9. Por lo tanto, un valor grande de z implica que el punto está más cerca del ojo. En este caso tenemos que $z_1 > z_2$ debido a que f_1 y f_2 comparten la arista convexa l_2 . Igualmente tenemos que $z_2 > z_3$ debido a que f_2 y f_3 comparten la arista convexa l_3 . Por otra parte se tiene que ρ está en las caras (extendidas) f_1 y f_3 (ya que ρ está sobre l_0 y l_0 esta sobre f_3), y por lo tanto $z_1 = z_3$, lo cual es una contradicción. Entonces, la figura 2 de la figura 1.13 es una figura incorrecta. En la figura 1.14b se muestra un ejemplo de una corrección a esta figura. Aquí, ρ se encuentra por abajo de l_3 en el dibujo plano y de aquí que la arista convexa l_3 dé la desigualdad $z_2 < z_3$, lo cual no tiene contradicción alguna.

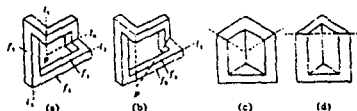


Figura 1.14 : Corrección de las figuras corregibles de la figura 1.8.

La figura 3 de la figura 1.13 es incorregible debido a que a menos que hagamos cambios drásticos que incluyan intercambios de partes visibles con invisibles, la figura no puede ser corregida.

Las figuras 4, 5 y 6 de la figura 1.13, tienen estructuras de incidencias no-regulares. La figura 5 no es correcta ya que la cara superior y la frontal deberían tener sólo una línea en común y como podemos ver en la figura 1.14c, las dos líneas que se forman entre estas caras no son colineales. Sin embargo, puede ser corregida como se muestra por ejemplo en la figura 1.14d. La figura 6 no es correcta y no puede ser corregida debido a que sus incorrecciones se deben principalmente a desigualdades contradictorias ocasionadas por aristas obstruidas y la contradicción no se puede salvar aún cuando las posiciones de los vértices sean ligeramente modificadas.

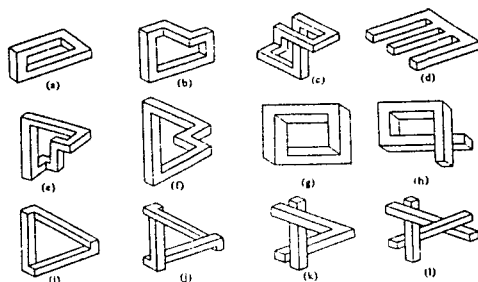


Figura 1.15 : Algunos ejemplos.

La figura 1.15 muestra algunos ejemplos que han interesado a los psicólogos. Desde el punto de vista matemático, estas incluyen varias categorías de figuras: Las figuras (a), (b), (f), (g) e (i) son no-regulares e incorregibles; las figuras (c), (j), (k) y (l) son regulares y correctas; la figura (d) es no-etiquetable; la (e) es una figura regular, incorrecta y corregible; y la figura (h) es regular e incorregible. [Draper (1978) muestra que la figura (i) se puede corregir encogiendo el agujero central hasta desaparecerlo (ver figura 1.16). Sin embargo, esta figura no se considera corregible bajo nuestra definición, ya que la deformación de Draper no preserva la estructura de la figura en términos de la teoría de gráficas, pues los cruces en forma de T se unen en uno].

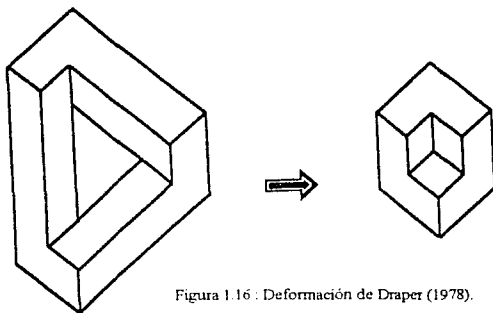


Figura 1.16 : Deformación de Draper (1978).

2.-Análisis de un tipo de figuras imposibles.

Restringiremos ahora nuestro estudio a las figuras con forma de marcos cuadrangulares que representan objetos tanto posibles como imposibles. Estas figuras se forman únicamente con líneas rectas y cada una de sus cuatro esquinas consideradas por separado representan poliedros correctamente. Clasificaremos estas figuras para saber cuántas representan objetos distintos, utilizando la versión de Kangas del método de Cowan que consta de dos criterios diferentes que se complementan entre sí. Partiremos de la construcción de un objeto (o marco) cuadrangular en R^3 , y las diferentes figuras con que puede ser representado. Finalmente compararemos nuestros resultados con los obtenidos por Cowan (1977) junto con un breve análisis de sus métodos.

2.1.-Construcción y puntos de vista.

Existen varios criterios equivalentes para la clasificación de los marcos de cuatro lados. El que vamos a utilizar, consiste en clasificar primero el tipo de esquinas que pueden aparecer al dibujar un marco de cuatro lados. Es importante observar que dada la figura de una esquina, siempre es posible obtener el objeto que ésta representa en nuestro espacio. De manera que todos los tipos de esquinas posibles a presentarse en nuestro estudio son fácilmente identificadas. Para esto comenzamos por construir un marco de cuatro lados en el espacio Euclidiano (R^3). Lo primero es tomar un cuadrado en algún plano, por ejemplo el xy , y luego considerar una vecindad ε (plana) alrededor del cuadrado obteniendo así un cuadrado "engordado" al que llamaremos *anillo* y denotaremos por la letra Δ . Sean Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 los lados exteriores del anillo, y q_1, q_2, q_3 y q_4 los interiores. Después escogemos un intervalo I que cruce el plano que contiene el anillo formando un ángulo de 90° , y por último, tomamos el producto $\Delta \times I$ obteniendo así el marco de cuatro lados posible en R^3 .

Ahora diremos que cualquier punto de $R^3 \setminus (\Delta \times I)$ es un *punto de vista* del objeto, y distinguimos dos clases de puntos de vista: los *especiales*, que son aquellos en los que al "ver" el objeto perdemos de vista ambos *costados* de alguna esquina, es decir, perdemos de vista tanto a $\{Q_i\} \times I$, como a $\{q_i\} \times I$ para alguna $i = 1, 2, 3, 4$; y los *normales*, que son aquellos que no son especiales.

Los puntos de vista especiales quedan contenidos en los planos "engordados" que generan cada uno de los lados de Δ y en el plano "engordado" donde se generó Δ . Si consideramos únicamente los puntos de vista normales, tenemos R^3 menos un sólido que divide el espacio en conjuntos (*componentes*) de puntos de vista normales que llamaremos *puntos de vista equivalentes*, esto es, que desde cualquier punto de vista de la componente, vemos exactamente las mismas partes del objeto.

Observando el objeto desde cada una de estas componentes de puntos de vista equivalentes, nos damos cuenta que la figura que representa una esquina puede verse de cuatro formas diferentes, esto es que de todas las componentes donde observamos una esquina, solo

obtenemos cuatro figuras diferentes que distinguiremos con las letras A, B, C y D (ver fig. 2.1).

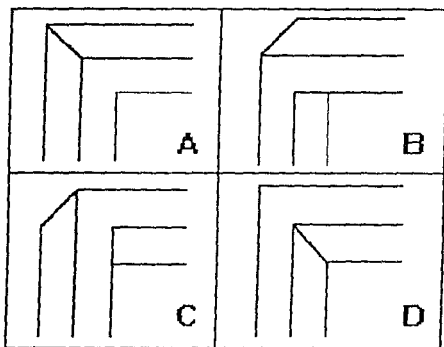


Figura 2.1: Tipos de figuras de esquinas.

Clasificadas las esquinas, nos interesa saber cuántos marcos diferentes de cuatro lados podemos formar, esto es, cuántas palabras de cuatro letras podemos formar con las letras A, B, C y D, entendiendo que cada letra representa una esquina que será colocada a continuación de la otra en el sentido de las manecillas del reloj. Por ejemplo, las palabras ACBA, A^2CB , BA^2C y CBA^2 , representan el mismo marco (fig. 2.2). Esto lo denotaremos con el símbolo \sim , de manera que en este caso podemos decir que $A^2CB \sim CBA^2$, etcétera.

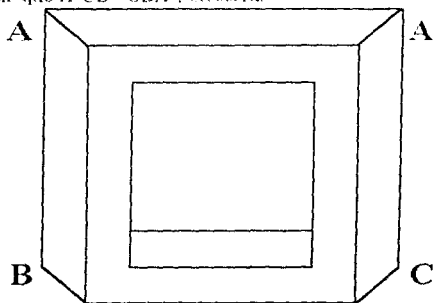


Figura 2.2: El marco A^2CB .

Una forma de hacer el cálculo de todas estas palabras es la siguiente.

- o Para el caso en que las cuatro esquinas sean diferentes, tenemos que un mismo marco es representado por cuatro palabras, por lo tanto tenemos $\frac{4!}{4} = 6$ casos distintos.
- o Con dos esquinas adyacentes iguales y las otras dos distintas, es claro que tenemos $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ casos distintos.
- o Con dos esquinas no adyacentes iguales y las otras dos distintas tenemos $4 \cdot \binom{3}{2} = 12$ casos.
- o Con dos esquinas adyacentes iguales y las otras dos también iguales, hay $\binom{4}{2} = 6$ casos.
- o Con dos no adyacentes iguales y las otras dos también iguales, hay $\binom{4}{2} = 6$ casos.
- o Con tres esquinas iguales, claramente hay $4 \cdot 3 = 12$ casos.
- o Con cuatro iguales, hay 4 casos.

En total son 70 figuras distintas las que se pueden formar.

2.2.-La versión de Kangas del método de Cowan.

Lo siguiente será saber si algunas de estas 70 figuras representan un mismo objeto, para lo cual emplearemos dos criterios:

2.2.1.-Proyecciones.

El primero lo llamamos "proyecciones", debido a que tomaremos en cuenta que una figura que representa un objeto dado puede surgir como la proyección de dicho objeto sobre algún plano, así que si nos fijamos en la proyección del objeto sobre dos planos paralelos distintos que, dado un punto de vista, se consideren uno antes del objeto y otro después, la figura obtenida en ambos planos resulta equivalente. Considerando una sola esquina como el objeto de estudio, escogemos un punto de vista que nos permita verla como del tipo A; es claro que la proyección de esta esquina sobre cualquier plano paralelo localizado entre ella y el punto de vista da como resultado una figura del tipo A. luego se observa que la proyección sobre cualquier plano paralelo posterior al objeto da como resultado una figura del tipo D, por lo tanto, bajo este criterio, un marco que utilice una esquina del tipo A, es equivalente a uno que utilice una del tipo D en el lugar correspondiente. Por ejemplo, es claro que las figuras A^4 y D^4 representan el mismo objeto (ver figura 2.3). Utilizaremos la letra ρ para indicar estas equivalencias, de modo que en el ejemplo basta con decir que $A^4 \rho D^4$.

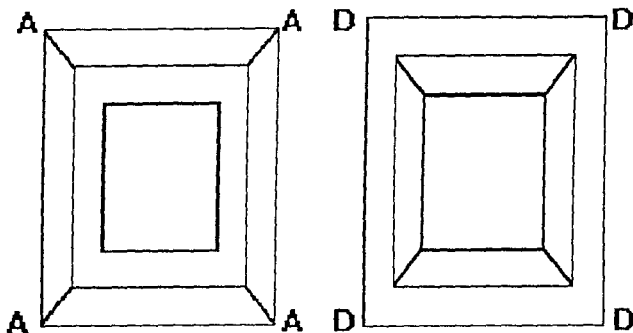


Figura 2.3: Dos figuras distintas de un mismo objeto.

Considerando de nuevo la esquina sola y los cuatro puntos de vista diferentes que existen, tenemos que $A\rho D$, $B\rho C$, $C\rho B$ y $D\rho A$. Ahora podemos aplicar ρ a cada una de las 70 figuras de nuestro estudio obteniendo los siguientes resultados:

o 4 esquinas distintas:

$ABCD \rho DCBA$ $ACBD \rho DBCA$ $ABDC \rho DCAB$ (Obs.- $ABDC \sim DCAB$) $ACDB \rho DBAC$ (Obs.- $ACDB \sim DBAC$)
--

o 2 iguales adyacentes y 2 distintas:

$A^2BC \rho D^2CB$ $A^2BD \rho D^2CA$ $A^2CB \rho D^2BC$ $A^2DB \rho D^2AC$ $A^2CD \rho D^2BA$ $A^2DC \rho D^2AD$	$B^2AC \rho C^2DB$ $B^2AD \rho C^2DA$ $B^2CA \rho C^2BD$ $B^2DA \rho C^2AD$ $B^2CD \rho C^2BA$ $B^2DC \rho C^2AB$
--	--

o 2 iguales no adyacentes y 2 distintas:

$ABAC \rho DCDB$ $ABAD \rho DCDA$ $ACAD \rho DBDA$	$BABC \rho CDCB$ $BABD \rho CDCA$ $BCBD \rho CBCA$
--	--

o 2 iguales adyacentes y 2 iguales:

$$\begin{array}{l} A^2B^2 \rho D^2C^2 \\ A^2C^2 \rho D^2B^2 \\ A^2D^2 \rho D^2A^2 \text{ (Obs.-} A^2D^2 \sim D^2A^2) \\ B^2C^2 \rho C^2B^2 \text{ (Obs.-} B^2C^2 \sim C^2B^2) \end{array}$$

o 2 iguales no adyacentes y 2 iguales:

$$\begin{array}{l} (AB)^2 \rho (DC)^2 \\ (AC)^2 \rho (DB)^2 \\ (AD)^2 \rho (DA)^2 \text{ (Obs.-} (AD)^2 \sim (DA)^2) \\ (BC)^2 \rho (CB)^2 \text{ (Obs.-} (BC)^2 \sim (CB)^2) \end{array}$$

o 3 iguales:

$$\begin{array}{|l} A^3B \rho D^3C \\ A^3C \rho D^3B \\ A^3D \rho D^3A \end{array} \quad \begin{array}{|l} B^3A \rho C^3D \\ B^3C \rho C^3B \\ B^3D \rho C^3A \end{array}$$

o 4 iguales:

$$\begin{array}{|l} A^4 \rho D^4 \\ B^4 \rho C^4 \end{array}$$

Esto quiere decir que en general, un objeto es representado por dos figuras diferentes (de las 70), excepto en los 6 casos en que se hace la observación de que ambas figuras son en realidad la misma, lo cual nos da un total de $\frac{70-6}{2} = 32$ clases de equivalencia bajo ρ , y por lo tanto, las 70 palabras (figuras) no representan más de 38 objetos distintos. Esta es sólo la primera cota.

2.2.2.-Reflexiones

El segundo criterio consiste en tomar en cuenta que una figura al ser reflejada en un espejo da como resultado algunas veces otra figura distinta que, claramente, representa al mismo objeto. En la parte superior de la *figura 2.4* se presenta un caso en el que un marco, al ser reflejado, da como resultado el mismo marco, mientras que en la parte inferior, se presenta un marco que, al ser reflejado, da como resultado un marco diferente.

Esta equivalencia de figuras bajo la *reflexión* la denotaremos con la letra \mathfrak{R} . Analizando este fenómeno para cada esquina, tenemos que $A\mathfrak{R}A$, $B\mathfrak{R}C$, $C\mathfrak{R}B$ y $D\mathfrak{R}D$ (*fig. 2.5*).

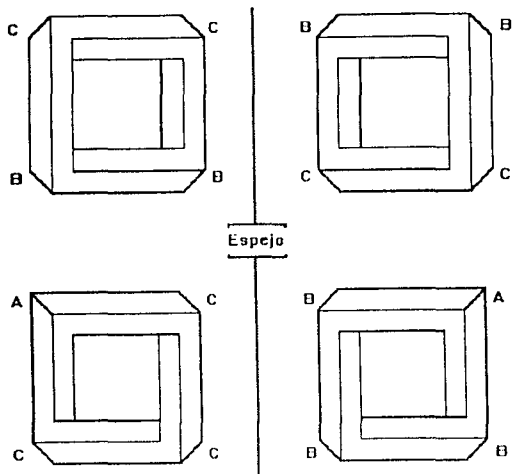


Figura 2.4 : El marco $C^2 B^2$ se refleja como $B^2 C^2$, mientras que $A C^3$ se refleja como $A B^3$.

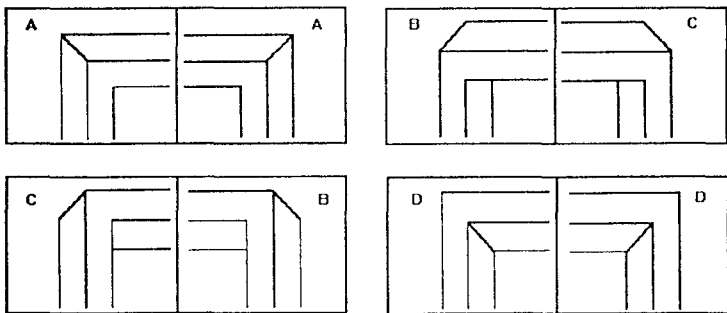


Figura 2.5: Las cuatro esquinas y sus reflexiones.

Luego para saber cuáles figuras de nuestro estudio son equivalentes debemos observar que no basta con hacer las sustituciones correspondientes de esquinas (letras), sino que hay que considerar que tras esta sustitución, la figura nueva esta siendo descrita por una palabra "leída" en el sentido opuesto a las manecillas del reloj, por lo tanto basta con leer la palabra nueva de derecha a izquierda para tener la palabra adecuada que representa la figura correspondiente. Por ejemplo, podemos ver en la *figura 2.6* que $ABCD \Re ADBC$, pero si sólo sustituyéramos ordenadamente las letras de $ABCD$ por las correspondientes bajo la reflexión, obtenemos la palabra $ACBD$, que leída de derecha a izquierda dice $DBCA$, lo cual concuerda con el resultado (pues $DBCA \sim ADBC$).

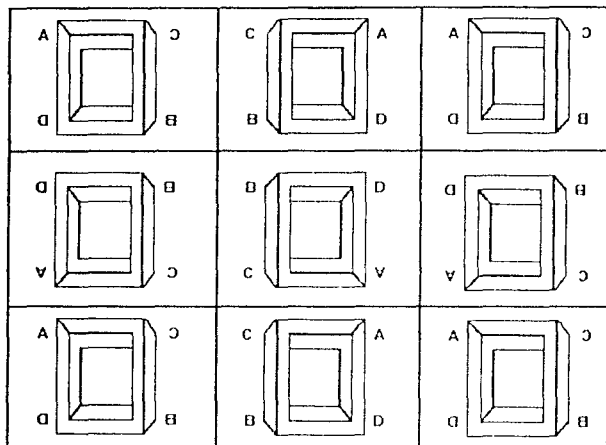


Figura 2.6: La casa de los espejos.

Observamos que tanto la relación ρ como la \Re son cada una simétricas, y por lo tanto un mismo objeto es representado, bajo este criterio, por dos figuras diferentes excepto en los casos en que el reflejo de una figura sea ella misma. De este modo encontramos las siguientes equivalencias bajo \Re :

o 4 esquinas distintas:

$ABCD \Re ADCB$ $ACBD \Re ADCB$ $ABDC \Re ABDC$ (Obs.- $ABDC \sim ABDC$) $ACDB \Re ACDB$ (Obs.- $ACDB \sim ACDB$)
--

o 2 iguales adyacentes y 2 distintas:

$A^2BC \Re A^2BC$ (Obs.- $A^2BC \sim A^2BC$) $A^2BD \Re A^2DC$ $A^2CB \Re A^2CB$ (Obs.- $A^2CB \sim A^2CB$) $A^2DB \Re A^2CD$ $B^2AC \Re C^2BA$ $B^2AD \Re C^2DA$ $B^2CA \Re C^2AB$ $B^2DA \Re C^2AD$ $B^2CD \Re C^2DB$ $B^2DC \Re C^2BD$ $D^2BC \Re D^2BC$ (Obs.- $D^2BC \sim D^2BC$) $D^2BA \Re D^2AC$ $D^2CB \Re D^2CB$ (Obs.- $D^2CB \sim D^2CB$) $D^2AB \Re D^2CA$
--

o 2 iguales no adyacentes y 2 distintas:

$ABAC \Re ABAC$ (Obs.- $ABAC \sim ABAC$) $ABAD \Re ACAD$ $BABC \Re CBAC$ $BABD \Re CACD$ $BCBD \Re BCDC$ $DBDC \Re DBDC$ (Obs.- $DBDC \sim DBDC$) $DBDA \Re DADC$

o 2 iguales adyacentes y 2 iguales:

$A^2B^2 \Re A^2C^2$ $B^2D^2 \Re C^2D^2$ $B^2C^2 \Re B^2C^2$ (Obs.- $B^2C^2 \sim B^2C^2$) $A^2D^2 \Re A^2D^2$ (Obs.- $A^2D^2 \sim A^2D^2$)
--

o 2 iguales no adyacentes y 2 iguales:

$(AB)^2 \Re (AC)^2$ $(BD)^2 \Re (CD)^2$ $(AD)^2 \Re (AD)^2$ (Obs.- $(AD)^2 \sim (AD)^2$) $(BC)^2 \Re (BC)^2$ (Obs.- $(BC)^2 \sim (BC)^2$)
--

- o 3 iguales:

$A^3B \mathfrak{R} A^3C$
$A^3D \mathfrak{R} A^3D$ (Obs.- $A^3D \sim A^3D$)
$D^3A \mathfrak{R} D^3A$ (Obs.- $D^3A \sim D^3A$)
$D^3B \mathfrak{R} D^3C$
$B^3A \mathfrak{R} C^3A$
$B^3C \mathfrak{R} C^3B$
$B^3D \mathfrak{R} C^3D$

- o 4 iguales:

$A^4 \mathfrak{R} A^4$ (Obs.- $A^4 \sim A^4$)
$B^4 \mathfrak{R} C^4$
$D^4 \mathfrak{R} D^4$ (Obs.- $D^4 \sim D^4$)

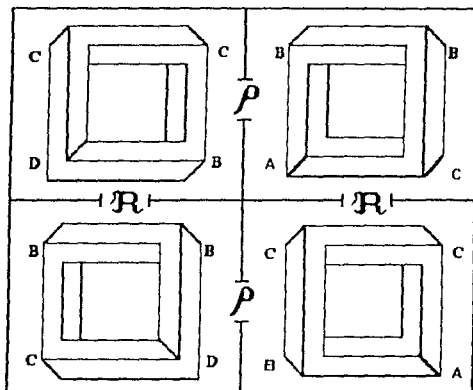
Teniendo así un total de $\frac{70-16}{2} = 27$ clases de equivalencia bajo \mathfrak{R} , y por lo tanto un total no mayor a 43 objetos distintos, que a pesar de ser una cota superior a la antes obtenida, no significa que el trabajo sea inútil, ya que para obtener la lista final de las palabras (figuras) que representan objetos diferentes y saber así cuántos de estos existen, tomaremos en cuenta tanto las clases de equivalencia para ρ como las de \mathfrak{R} .

Por ejemplo, las palabras B^2CA , B^2DC , C^2AB y C^2BD representan al mismo objeto, ya que $B^2CA \mathfrak{R} C^2AB \rho B^2DC \mathfrak{R} C^2BD \rho B^2CA$. Esto se puede abreviar así:

$C^2AB \rho B^2DC$
$\mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}$
$B^2CA \rho C^2BD$

(ver figura 2.7), de modo que en la siguiente lista se tienen las 70 palabras, sus equivalencias y el total de objetos distintos que representan (si alguna palabra es equivalente a sí misma bajo ρ y/o bajo \mathfrak{R} , estos símbolos no aparecen).

Figura 2.7:
Equivalencias de figuras (caso 26 tabla 1).



Lista final de objetos diferentes:

1. - $ACDB$	2. - $(BC)^2$	3. - B^2C^2
4. - $ABDC$	5. - A^2D^2	6. - $(AD)^2$
7. - $A^2CB \rho D^2BC$	8. - $A^4 \rho D^4$	9. - $A^2BC \rho D^2CB$
10. - $ABAC \rho DCDB$	11. - $A^3D \rho D^3A$	12. - $B^2AD \rho C^2DA$
13. - $BABD \rho CDCA$	14. - $B^3C \rho C^3B$	15. - $B^4 \rho C^4$
16. - $B^2DA \rho C^2AD$	17. - $(AB)^2 \rho (DC)^2$ $\mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}$ $(AC)^2 \rho (DB)^2$	18. - $BAHC \rho CDCB$ $\mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}$ $CBCA \rho BCBD$
19. - $B^2AC \rho C^2DB$ $\mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}$ $C^2BA \rho B^2CD$	20. - $A^3B \rho D^3C$ $\mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}$ $A^3C \rho D^3B$	21. - $A^2DB \rho D^2AC$ $\mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}$ $A^2CD \rho D^2BA$
22. - $A^2B^2 \rho D^2C^2$ $\mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}$ $A^2C^2 \rho D^2B^2$	23. - $B^3A \rho C^3D$ $\mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}$ $C^3A \rho B^3D$	24. - $ABCD \rho DCBA$ $\mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}$ $DBCA \rho ACBD$
25. - $ABAD \rho DCDA$ $\mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}$ $ACAD \rho DBDA$	26. - $B^2CA \rho C^2BD$ $\mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}$ $C^2AB \rho B^2DC$	27. - $A^2DC \rho D^2AD$ $\mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}$ $A^2BD \rho D^2CA$

TABLA 1

De estas 27 representaciones de objetos diferentes, podemos construir solamente 4 (los correspondientes a los números 1, 2, 7 y 8), teniendo así un total de 23 objetos imposibles diferentes.

2.3.-El método Cowan.

Por otra parte, Cowan (1974) y Cowan (1977), partiendo de los cuatro tipos de figuras de esquinas diferentes, define un algoritmo para generar todas las figuras de marcos de cuatro lados diferentes que se pueden dibujar. Suponiendo que una vez que se escoja la primera esquina, la segunda (que puede ser cualquiera de las 4 [fig. 2.8]) se colocará inmediatamente después en el sentido de las manecillas del reloj y así sucesivamente las siguientes dos (observe que este método puede utilizarse para generar figuras de cualquier cantidad de esquinas).

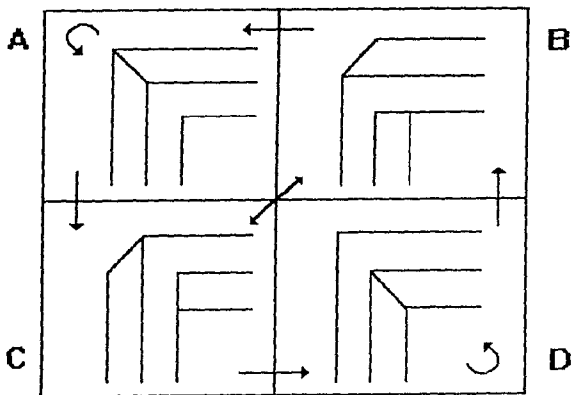


Figura 2.8: Método de discriminación de Cowan.

Finalmente cuidando de no contabilizar las posibles rotaciones en el plano de un mismo marco, se encuentra que hay 70 dibujos diferentes de marcos cuadrangulares. Antes de preguntarse cuántos objetos diferentes representan estas 70 figuras, aporta un ingenioso método para generar una figura posible: observando la figura 2.8, coloca unas flechas entre las diferentes figuras de las esquinas con la idea de que, una vez escogida cualquier esquina con que se desea comenzar, la figura representa un objeto posible si es generada con figuras que se encuentren siguiendo el sentido de las flechas. Hay que tener en cuenta que la última esquina, debe ser tomada no solo siguiendo una flecha, sino además, de manera que exista una flecha entre ella y la figura de la esquina inicial. Si en algún momento de la construcción, uno va en sentido contrario de alguna de las flechas, se genera entonces una figura imposible. A este método lo llamaremos *método de la figura 2.8 de Cowan*.

Las "bandas" o "paredes" de cualquiera de los lados que se forman por dos esquinas respetando las flechas de la figura 2.8, parecen paralelas a la página. Si la dirección de cualquier flecha es ignorada, entonces las "paredes" de los lados así formados adquieren características dignas de ser cuidadosamente analizadas.

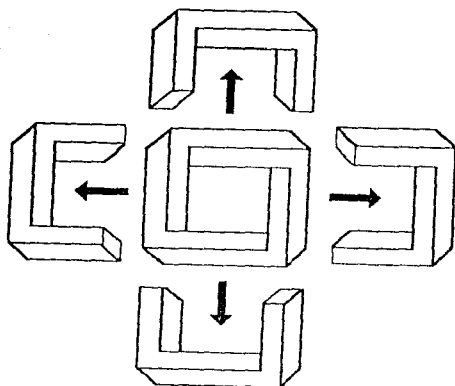


Figura 2.9: Diseción del marco C^4 .

En la figura 2.9, se presenta la diseción de la figura C^4 en el conjunto exhaustivo de parejas de esquinas con un nuevo lado. Hay dos interpretaciones perceptuales o cognitivas que se imponen:

(1) *Los tres segmentos son completamente paralelos a una misma superficie bidimensional.* En este caso, todos los lados mantienen su integridad con respecto al plano, pero se aprecian lados imposibles como si tuvieran un cuarto de giro que en realidad es una ilusión, ya que un lado real con un cuarto de giro estaría formado por aristas helicoidales.

(2) *Los tres segmentos están a lo largo de las coordenadas cartesianas (x , y , z), y se perciben como incrustadas en tres dimensiones.* En este caso, no hay ilusión respecto al cuarto de giro en los lados imposibles, ya que estos lados se ven como proyecciones dentro de la tercera dimensión. Sin embargo, cuando se incorporan los elementos para formar la figura del marco, la integridad de los elementos con respecto al espacio tridimensional en el que se supone se encuentran se pierde. Siguiendo, por ejemplo, las cuatro porciones "desbaratadas" del marco, perceptualmente, en el sentido de las manecillas del reloj, parece que uno se va moviendo continuamente hacia el interior de la hoja. Repitiendo este ejercicio en la figura del marco, se encontrará que, tras una aparente excursión continua hacia el interior de la hoja, el nivel del punto de partida nunca fué abandonado.

Cowan basa la organización de los diferentes marcos en ciertas propiedades que se pueden considerar como variables independientes de un experimento perceptual. Partiremos nuevamente de las cuatro figuras diferentes de esquinas que habíamos encontrado (figura 2.8).

La primera y la más sencilla es llamada operación unidad y se describe con la letra u . Cuando utilizamos u , no le hacemos nada a la figura, de manera que permanece sin cambios.

Cada esquina tiene una inversa. Las esquinas A y D son inversas a si mismas respectivamente, y las esquinas B y C son inversa la una de la otra (fig. 2.5). La inversa de una figura posible o imposible se determina reemplazando cada esquina por su inversa e invirtiendo el orden de sus elementos (como lo hicimos bajo \mathcal{R}). La operación inversa de una figura es denotada como operación i , y cumple con que $ii=u$ (fig. 2.6).

Se definen dos operaciones más: la o y la e . Estas operaciones cumplen con las siguientes propiedades: $oo=u$, $ee=u$, y $oe=co=i$. Se puede observar que estas cuatro operaciones con estas propiedades forman un grupo aditivo. Examinaremos en primer lugar la operación o , sin embargo, parece adecuado incluir nuevamente aquí la figura 2.7 con la intención de poder hacer una rápida comparación entre las operaciones ρ y \mathcal{R} de Kangas y las operaciones u , i , o y e de Cowan. Llamaremos a ésta figura la figura 2.7-A.

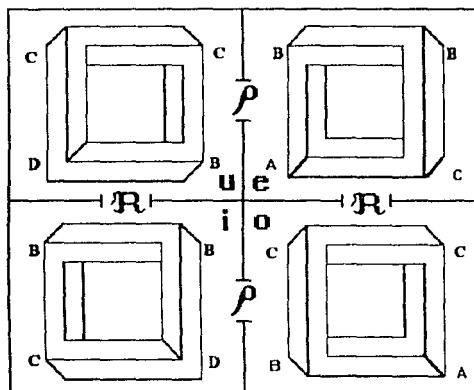


Figura 2.7-A: Equivalencias de figuras bajo los dos métodos (caso 26 tabla 1).

Para encontrar la inversa, sustituíamos B por C y viceversa, y no hacíamos sustituciones para A y D. Bajo la operación o , intercambiamos A con D (y D con A) dejando B y C sin cambio alguno. Al igual que la operación inverso, esta operación invierte el orden de las esquinas. El resultado, es el lado opuesto o el anverso de la figura. Por ejemplo, DCDC es el anverso de ACAC (figura 2.10).

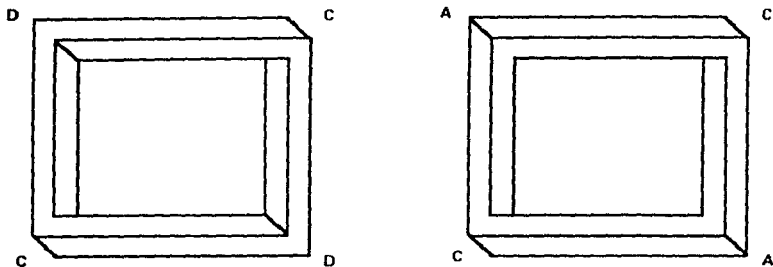


Figura 2.10: Los marcos $(DC)^2$ y $(AC)^2$

Esta equivalencia es considerada sólo en forma indirecta por la versión de Kangas. En el ejemplo, observe que $DCDC \cong DBDB \rho ACAC$ o bien, por el otro lado, $DCDC \rho ABAB \cong ACAC$ (Tabla 1. Núm.17). En ambos casos se concluye que $DCDC$ representa el mismo objeto que $ACAC$.

Si aplicamos secuencialmente en cualquier orden las operaciones i y σ , obtenemos el equivalente a la operación e . Esta transformación se puede describir así: tomamos el objeto y lo volteamos de manera que podamos ver mejor su interior. Esta vuelta no se refiere a cortar un agujero en la superficie y luego sacar el interior de la figura por el agujero como si fuera una erupción, sino simplemente intercambiar la mitad de atrás con la de adelante. Este procedimiento rompe las reglas de la topología diferencial (Phillips 1966). Pero como resulta útil, Cowan decide utilizarlo y dejar a los topólogos diferenciales que reconcilien estas diferencias.

Como era de esperarse, las conclusiones son las mismas: Del total de figuras diferentes de cuatro lados que se pueden construir con las cuatro figuras diferentes de una esquina, cada marco representando un objeto, se tiene que solo existen 27 objetos diferentes. Esta conclusión es equivalente a decir: El total de figuras diferentes de cuatro lados que se pueden construir con las cuatro figuras diferentes de esquinas, se pueden clasificar en 27 clases de equivalencia. La ventaja de expresar de esta última forma la clasificación de los marcos, es que consideramos todos los factores únicamente en el plano. Hablar de los objetos que representan todas estas figuras es hablar de algunos objetos imposibles de formar en nuestro universo, y antes de hacer esto, desearíamos encontrar un método aún mejor para clasificar los marcos, de manera que podamos considerar marcos de tres lados, de cinco, de seis, etcétera

(ver figura 2.11, donde además se presenta una figura imposible de un solo lado que, al igual que las de dos lados, no puede ser dibujada sólo con líneas rectas y por lo tanto no serán consideradas en nuestro estudio), saber rápidamente cuántas clases de equivalencia hay para cada caso, y, lo más importante, saber cuántas de ellas y cuáles representan objetos posibles de construir en nuestro espacio. Cabe aclarar que las esquinas de un marco formado por n lados ($n \geq 3$) se obtienen partiendo de un polígono de n lados, engordándolo y levantándolo como lo hicimos al principio del capítulo para $n = 4$, y por lo tanto, las cuatro figuras diferentes de esquinas que se obtienen, tienen un ángulo que permite formar los marcos de n lados adecuadamente.

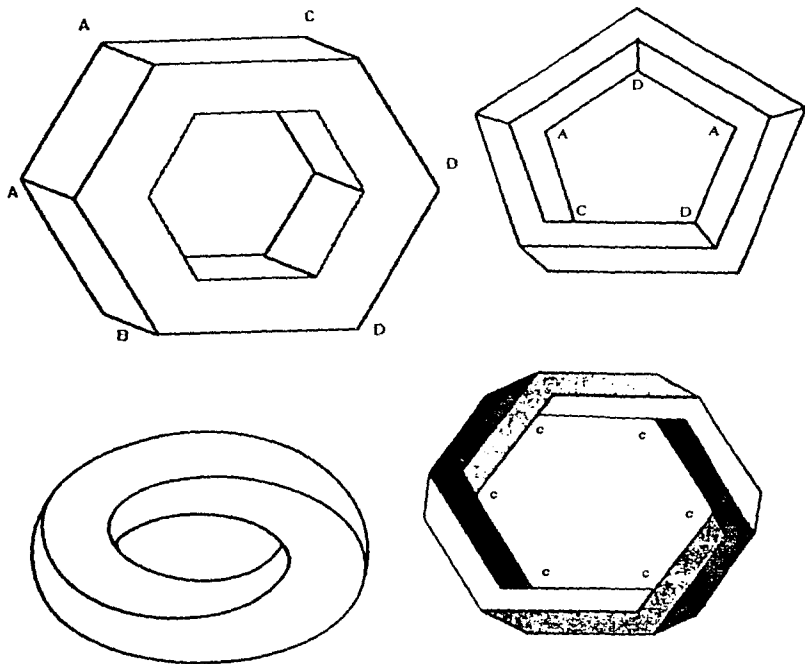


Figura 2.11: Otros ejemplos.

Dos conjeturas surgen en torno a estas dos cuestiones (Kangas: Notas de clase). La primera sirve para distinguir un marco de n lados ($n \geq 3$) posible de uno imposible, y da origen a un teorema que permite hacer dicha distinción y probar la veracidad de la conjetura. La segunda, pretende encontrar rápidamente el número de objetos diferentes que representan todos los marcos de n lados. Sin embargo, esta última conjetura no tiene un final tan afortunado, pues como veremos, Kangas hace unas propuestas basándose principalmente en la experiencia y en la intuición, y resulta difícil argumentar la idea. No obstante, se hará mención de la conjetura, y se mencionará un caso más, aparte del de cuatro lados que ya tenemos en la Tabla 1.

2.4.-Una conjetura afortunada.

Tomemos nuevamente la figura de una esquina, ahora como un conjunto de vértices y aristas, recordando que estas esquinas formarán un marco al ser colocadas una después de otra en el sentido de las manecillas del reloj, y pongamos nombre a los vértices iniciales (que serán los mismos que los finales de la última esquina con que se forme el marco) y a los finales (que serán los mismos que los iniciales de la segunda esquina con que se forme el marco). Consideremos ahora las posibles trayectorias que relacionen un vértice inicial con uno final y, utilizando el hecho de que siempre existe una trayectoria que une los vértices iniciales extremos (derecho e izquierdo de acuerdo a la posición en que están en la figura 2.8), con los vértices finales extremos (inferior y superior respectivamente), transformamos la figura de una esquina en la que resulta de alinear respectivamente estos vértices junto con sus aristas correspondientes (ver figura 2.12).

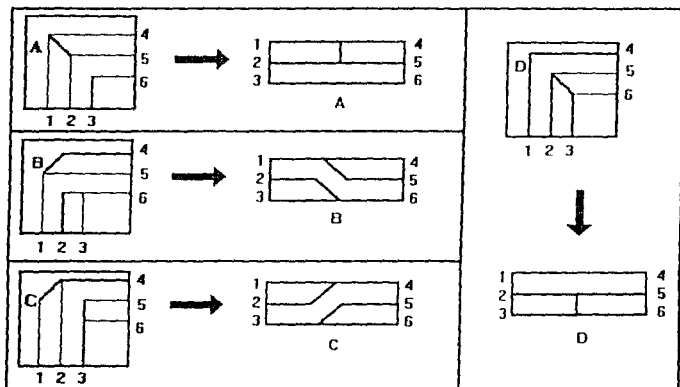


Figura 2.12: Las cuatro esquinas y el carril que genera cada una.

Por construcción, tenemos que hay cuatro de estas nuevas figuras diferentes, cada una con el nombre de la esquina que la origina. Estas figuras las llamaremos *carriles*, de manera que ahora contamos con los carriles A, B, C y D, para generar nuevas agrupaciones de carriles que a su vez llamaremos también carriles.

Cada carril cuenta con tres vértices iniciales y tres finales. Considerando el rectángulo que contiene estos seis vértices, los lados superior e inferior son parte de la figura como habíamos visto, y los lados izquierdo y derecho servirán como auxiliares para definir un pegado que consiste en hacer cada uno de los puntos del lado derecho en el mismo punto simétrico, respecto a la vertical que parte el carril en dos partes iguales, del lado izquierdo. De manera que en la *figura 2.12*, para cada carril tenemos que los vértices 1 y 4 son en realidad el mismo vértice bajo este pegado. Lo mismo sucede con los vértices 2 y 5, y con 3 y 6.

Ahora caminaremos por los carriles. Llamamos *carril superior* al que se forma entre los vértices iniciales superior y medio (1 y 2 en la *figura 2.12*), y *carril inferior* al que se forma entre los vértices medio e inferior (2 y 3 en la *figura 2.12*). Si comenzamos a caminar por el carril superior de A, topamos con "pared" a medio camino, y no podemos seguir de frente. Pero si lo hacemos por el carril inferior, podemos seguir de frente todo el tiempo que así lo deseemos. Del mismo modo, si comenzamos a caminar por el carril superior en C, también topamos con pared a medio camino, y si lo hacemos por el carril inferior, llegamos hacia la parte final del rectángulo por la parte superior, lo cual nos lleva inevitablemente a topas con pared (tras cruzar la línea "de pegado"). Las características de B y D son las mismas que para C y A respectivamente, pero invirtiendo los carriles superiores de las primeras por los inferiores de las segundas y viceversa. Como cada uno de estos carriles *básicos* tiene una caracterización diferente y única, podemos asociar estas características, con las que presenta un carril formado por dos carriles básicos diferentes y obtener así las siguientes equivalencias (ver *figura 2.13*):

1.- $CB = A$

2.- $DB = B$

3.- $AC = C$

4.- $BC = D$

5.- $AA = A$

6.- $DD = D$

Del mismo modo, podemos combinar estas seis igualdades para simplificar lo más posible cualquier combinación, de cualquier tamaño, de carriles. Dicho de otra forma, dado cualquier arreglo, de cualquier tamaño, de letras A, B, C y D, buscaremos, mediante estas seis igualdades, reducirla a su mínima expresión. Denotando ésta mínima expresión de una figura x por $(ME)_x$, formulamos el siguiente teorema:

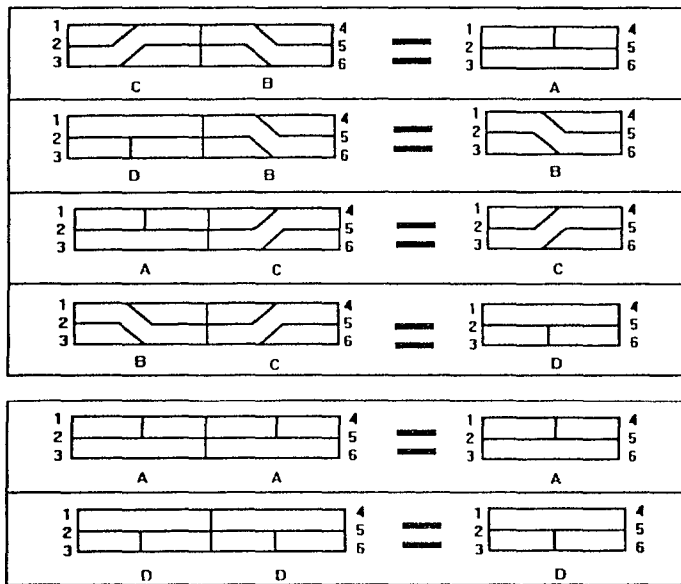


Figura 2.13: Equivalencias básicas.

Teorema 3: Una figura x , formada con n esquinas ($n \geq 3$) del tipo A , B , C o D , es posible si y solo si $(ME)_x = A$ o bien, $(ME)_x = D$.

Recordando un poco la construcción que hicimos de un marco en R^3 al principio de este capítulo, encontramos la base de la demostración de este teorema, ya que existe una relación entre dicha construcción y este teorema: El hecho de que $(ME)_x = A$ o D es equivalente, en un marco de cuatro lados, a decir que x contiene un *anillo* Δ , totalmente contenido en un plano, y el resto del objeto que representa se encuentra antes o después de dicho plano, pero no en ambas partes. De este modo puede construirse el objeto y por lo tanto, es posible. Generalizar esto es fácil, pues el *anillo* puede ser considerado de n número de lados con $n \geq 3$.

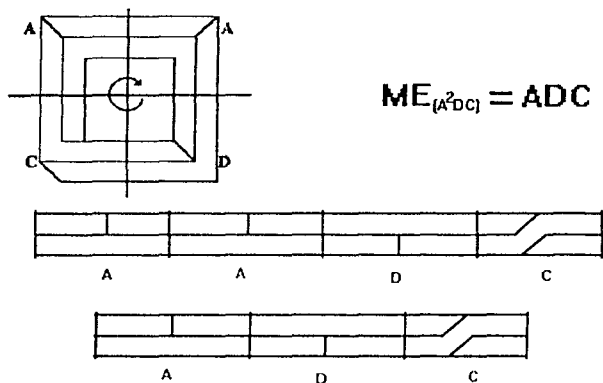


Figura 2.14: El panorama completo: Un marco, su representación por cariles y su mínima expresión.

En la figura 2.14 se muestra el marco A^2DC , que da origen al carril A^2DC cuya mínima expresión $(ME)_{A^2DC} = ADC$ y por lo tanto es un marco imposible de construir en nuestro espacio Euclidiano.

Otros tres ejemplos tomados de la figura 2.11:

$$\begin{aligned} (ME)_{(AD)^2C} &= (AD)^2C \\ (ME)_{A^2CD^2B} &= A \\ (ME)_{C^6} &= C^6. \end{aligned}$$

lo cual quiere decir que tanto el pentágono $(AD)^2C$ como el hexágono C^6 son imposibles, mientras que el hexágono A^2CD^2B es posible.

2.5.-Una conjetura no tan afortunada.

Por lo que respecta al número ξ de objetos diferentes o mejor dicho, a las ξ clases de equivalencia para marcos de n lados con $n \geq 3$, Kangas propone que $\xi = 3^{n-1}$. Para verificar esto, se puede pensar en hacer una inducción sobre n , distinguiendo los casos de n par de los de n impar, pues tienen propiedades diferentes. En lo personal, trataría primero el problema como un problema de coloración de teoría de gráficas de la siguiente manera:

Considerando cada marco como un *ciclo* en el cual cada vértice equivale a una esquina, y suponiendo que disponemos de cuatro colores para hacer una coloración por vértices, nos

interesa saber cuántas coloraciones diferentes podemos formar. Recordemos que un *ciclo* es una cadena alternante de vértices y aristas que inicia y termina con un mismo vértice. En este caso, las aristas serán consideradas en el sentido de las manecillas del reloj, y los colores son los tipos de esquina A, B, C y D. Las coloraciones diferentes serán aquellas que tengan diferente orden secuencial de los colores sin importar desde que vértice se comience a recorrer el ciclo; si existe un vértice a partir del cual dicha secuencia sea igual a alguna otra antes considerada, diremos que la coloración es equivalente y por lo tanto no se contabilizará.

Aplicamos ahora las sustituciones de ρ y de \mathfrak{R} con que empezamos el capítulo, a las cadenas de letras (colores) que obtuvimos para cada ciclo, y de esta manera encontramos el número total ξ de las clases de equivalencia de los marcos de n lados.

En el caso de $n = 4$, efectivamente se tiene que $\xi = 27 = 3^4 - 1$. Sin embargo, para $n = 3$, se obtuvo que $\xi = 10 \neq 3^3 - 1$.

Esto es:

- o Si las tres esquinas son distintas, tenemos $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3} = 8$ casos distintos.
- o Para dos esquinas iguales y una diferente, hay $4 \cdot 3 = 12$ casos.
- o Finalmente, encontramos 4 casos en los que las tres esquinas son iguales.

En total son 24 figuras diferentes las que se pueden formar.

De acuerdo al criterio de *proyecciones* (sección 2.2.1), obtenemos los siguientes resultados:

- o 3 esquinas distintas:

ABC ρ DCB
ABD ρ DCA
ACD ρ DBA
ACB ρ DBC

- o 2 iguales y una distinta:

A ² B ρ D ² C	B ² A ρ C ² D
A ² C ρ D ² B	B ² C ρ C ² B
A ² D ρ D ² A	B ² D ρ C ² A

- o 3 iguales:

A ³ ρ D ³
B ³ ρ C ³

Esto significa que las 24 figuras diferentes no representan más de 12 objetos distintos. Esta es sólo la primera cota.

Aplicando el criterio de reflexión (sección 2.2.2) tenemos:

o 3 esquinas iguales:

ABC	\mathfrak{R}	ABC	(Obs.-ABC \sim ABC)
ABD	\mathfrak{R}	ADC	
ACD	\mathfrak{R}	ADB	
ACB	\mathfrak{R}	ACB	(Obs.-ACB \sim ACB)
BCD	\mathfrak{R}	CDB	(Obs.-BCD \sim CDB)
CBD	\mathfrak{R}	CBD	(Obs.-CBD \sim CBD)

o 2 iguales y una distinta:

A ² B	\mathfrak{R}	A ² C	
A ² D	\mathfrak{R}	A ² D	(Obs.-A ² D \sim A ² D)
B ² A	\mathfrak{R}	C ² A	
B ² C	\mathfrak{R}	C ² B	
B ² D	\mathfrak{R}	C ² D	
D ² A	\mathfrak{R}	D ² A	(Obs.-D ² A \sim D ² A)
D ² B	\mathfrak{R}	D ² C	

o 3 iguales:

A ³	\mathfrak{R}	A ³	(Obs.-A ³ \sim A ³)
B ³	\mathfrak{R}	C ³	
D ³	\mathfrak{R}	D ³	(Obs.-D ³ \sim D ³)

Teniendo así un total de $\frac{24-8}{2} = 8$ clases de equivalencia bajo \mathfrak{R} , y por lo tanto un total no mayor a 16 objetos diferentes.

Recordemos que la lista final de objetos diferentes se obtiene combinando ambos criterios, de manera que obtenemos la siguiente lista:

1.-ABC ρ DCB	2.-ACB ρ DBC
3.-A ² D ρ D ² A	4.-A ³ ρ D ³
5.-ABD ρ ADC	6.-ACD ρ ADB
7.-B ² C ρ C ² B	8.-B ³ ρ C ³
A ² B ρ D ² C	B ² A ρ C ² D
9.- $\mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}$	10.- $\mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}$
A ² C ρ D ² B	C ² A ρ B ² D

TABLA 2

CONCLUSIONES.

Hemos discutido varios tipos de imposibilidades que poseen los objetos imposibles y hemos establecido un esquema matemático para clasificar algunos objetos imposibles. Como hemos tratado las figuras imposibles matemáticamente, hemos podido aclarar algunos aspectos de los objetos imposibles que no han sido discutidos explícitamente en los estudios psicológicos: la pregunta de cuándo una figura representa un objeto correctamente y cuándo no, carece de sentido a menos que definamos claramente nuestro objeto de estudio. Hay varios tipos de imposibilidades aún dentro de un mismo universo de objetos imposibles. Hasta aquí, nuestros resultados sugieren, por ejemplo, las siguientes direcciones de investigación:

En primera, es necesario caracterizar el tipo de figuras de acuerdo a la idea de una forma tridimensional que represente en la mente del que la observa. Este tipo es similar al tipo de las figuras etiquetables, pero no es igual. Por ejemplo, la figura 3.2d, es no-etiquetable, y sin embargo sugiere una forma tridimensional en la mente del que la observa. Por otro lado, la figura 3.1a generalmente no parece representar una forma tridimensional aunque bien puede representar correctamente un poliedro como el de la figura 3.1b. Metzger (1953) afirma que los observadores sólo ven lo más simple de las formas bidimensionales y de las tridimensionales. Sin embargo, el concepto de "lo más simple" no es claro. Parece que sería útil desarrollar un nuevo concepto de algo así como "localmente etiquetable" para enfrentar este problema.

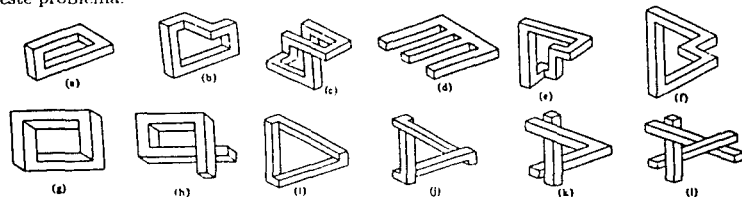


Figura 3.1: Algunos ejemplos (1.10).

(Nota: Esta figura 3.1, es exactamente igual que la figura 1.14 del capítulo 1, y se ha incluido nuevamente aquí para facilitar su localización.)

El segundo problema es que cómo le hace un observador para reconocer el tipo de objeto cuando ve una figura. Dado que las figuras 3.2j, k y l están clasificadas como correctas en nuestro esquema, pero son consideradas como figuras de objetos imposibles por Draper (1978). Esto se debe a que el tipo de objeto que el observador asume (cuando ve estas figuras) no es el de los poliedros sino el de los objetos compuestos por prismas rectangulares mutuamente conectados en ángulos rectos.

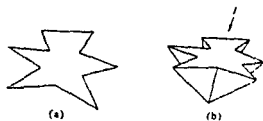


Figura 3.2: Figura correcta de un poliedro que puede ser visto como una forma plana.

En tercer lugar, parece posible definir un cálculo cuantitativo de imposibilidades en figuras corregibles. Las imposibilidades en las figuras corregibles se vuelven gradualmente invisibles conforme los cruces son llevados a sus posiciones correctas. Por lo tanto, sería interesante encontrar un cálculo cuantitativo de imposibilidades en términos de la percepción visual del ser humano.

Cuarto: dado que los objetos imposibles se definen generalmente por figuras de las aristas visibles de los objetos, podemos también considerar cosas imposibles definidas por figuras con líneas ocultas o con sombras. Ejemplos de esto se muestran en la figura 3.3, donde las zonas rayadas representan sombras. La figura 3.3a no es correcta debido a que las líneas 1 y 3 son paralelas y consecuentemente la línea 2 debería también ser paralela a ellas, pero no lo es. En forma similar, la figura 3.3b no es correcta ya que las líneas 1, 2 y 3 son paralelas y consecuentemente la línea 4 debería también ser paralela a ellas, pero no lo es. La figura 3.3c es imposible por que la sombra que está sobre la superficie se prolonga sobre las caras en dirección opuesta al espectro de luz. Como el método de etiquetación de Huffman fue generalizado para figuras con sombras por Waltz (1975) y para figuras con líneas ocultas por Sugihara (1978), podemos aplicar nuestro esquema para clasificar este tipo de figuras: las figuras 3.3a y b son no-regulares, incorrectas y corregibles; la figura 3.3c es no-regular e incorregible.

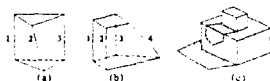


Figura 3.3: Objetos imposibles representados por figuras con líneas ocultas y uno representado por una figura con sombras.

En quinto lugar, recordemos que la solución de los problemas de robótica radica en gran medida en el uso adecuado de modelos fundamentalmente geométricos, que se complementan con descriptores físicos (densidad, color, reflectancia, entre otros). Estos modelos tienen la propiedad de ser útiles para las diversas actividades del robot en el aspecto de la acción y de la percepción. Gordillo (1994), señala que para el desarrollo de las habilidades básicas de movilidad y percepción, ilustradas respectivamente por los problemas de planificación de trayectorias libres y el reconocimiento de objetos, se requiere una alta capacidad de razonamiento que se traduce en la utilización de técnicas de Geometría Computacional e Inteligencia Artificial.

BIBLIOGRAFIA.

Cowan Thaddeus M. (1974). *The Theory of Braids and the Analysis of Impossible Figures*. Journal of Mathematical Psychology 11, pages 190-212.

Cowan Thaddeus M. (1977). *Organizing the properties of impossible figures*. Perception, 1977, volume 6, pages 41-56.

Draper Stephen W. *The Penrose triangle and a family of related figures*. Perception, 1978, volume 7, pages 283-296.

Ernst Bruno. *Un mundo de figuras imposibles*. Benedikt Taschen Verlag Berlin GmbH, 1991.

Fink Kevin. *Impossible Figures in Perceptual Psychology*. Pitzer Psychology 106-Perception. Prof. Palmer. December 1991.

Francis G. A Topological Picturebook. Chapter 4: *The Impossible Trubar*.

Gordillo Moscoso J.L. (1994). *Robótica: Reinventando la inteligencia*. Soluciones Avanzadas No. 13, sept. 1994. Centro de Inteligencia Artificial-ITESM.

Huffman D.A. (1971). *Impossible objects as nonsense sentences*. Machine Intelligence, volume 6. Eds B. Meltzer, D. Michie (Edinburgh: Edinburgh University Press) pages 295-323.

Kangas Steve. Apuntes para la elaboración de ésta tesis, 1995.

Kim Scott E. Hypergraphics-Visualizing complex relationships in art, science and technology. Chapter 11: *An Impossible Four-Dimensional Illusion*. Ed. David Brisson. AAAS Selected Symposia Series 24 Westview Press 1978.

Kulpa Zenon. *Are Impossible Figures Possible?*. Signal Processing 5 (1983) 201-220. North-Holland Publishing Company.

Metzger W. (1953). *Gesetze des Sehens*. Frankfurt am Main: Waldemar Kramer.

Nalwa Vishujit. *A Guided Tour of Computer Vision*. Addison-Wesley Publishing, 1993.

Penrose Roger. *On the Cohomology of Impossible Figures*. Pergamon Press Ltd. 1992 ISAST.

Phillips A. (1966). *Turning a surface inside out*. Scientific American 214, pages 112-120.

Sugihara Kokichi (1979). *Studies on Mathematical Structures of Line Drawings of Polyhedra and Their Applications to Scene Analysis*. Researches of Electrotechnical Laboratory No. 800.

Sugihara Kokichi (1982). *Classification of impossible Objects*. Perception, 1982, volume 11, pages 65-74.

Sugihara Kokichi (1984). *An Algebraic Approach to Shape-from-Image Problems*. Artificial Intelligence 23 (1984) pages 59-95.

Térouanne Eric. *On a Class of "Impossible" Figures: A New Language for a New Analysis*. Journal of Mathematical Psychology 22, pages 24-47 (1980).