

24  
2eg.



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE INGENIERÍA**



**ANALIZADOR DE SEÑALES DE AUDIO  
(A.S.A)**

**T E S I S**  
**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**  
**INGENIERO MECÁNICO ELECTRICISTA**  
**AREA ELÉCTRICO ELECTRÓNICA**

**P R E S E N T A N:**  
**JUAN CARLOS BLANCARTE OLVERA**  
**JOSÉ MANUEL GASCA SOTO**  
**RAÚL PÉREZ FUENTES**

**DIRECTOR DE TESIS :**  
**M. en I. LAURO SANTIAGO CRUZ**



**MÉXICO, D.F.**

**1997**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE INGENIERÍA**

**ANALIZADOR DE SEÑALES DE AUDIO  
(A.S.A)**

**T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
INGENIERO MECÁNICO ELECTRICISTA**

**P R E S E N T A N:  
JUAN CARLOS BLANCARTE OLVERA  
JOSÉ MANUEL GASCA SOTO  
RAÚL PÉREZ FUENTES**

**DIRECTOR DE TESIS :  
M. en I. LAURO SANTIAGO CRUZ**

**MÉXICO, D.F.**

**1997**

"Nunca vayas por el camino trazado  
porque sólo conduce hacia donde  
otros han ido"

Alexandre Graham Bell

#### AGRADECIMIENTOS

A nuestro asesor Mtro. Lauro Santiago Cruz, por su comprensión, apoyo y profesionalismo.

Un Reconocimiento y Agradecimiento muy especial al Mtro. Francisco Rodríguez por la orientación brindada en el presente trabajo.

"Dijo el poder al Mundo:  
¡Eres Mío!  
Y el Mundo lo cogió prisionero  
de su trono.  
El amor dijo al Mundo  
¡Soy tuyo!  
Y el Mundo le dio casa libre"

(Tomado de Aforismo Pájaros  
Perdidos de Rabindranath Tagore)

Dedico el presente trabajo a:

Mis padres:  
Miguel y María Esther  
por animarme siempre a superarme  
y darme sus sabios consejos.

A mis hermanos:  
Por su apoyo moral  
en cada momento.

A Javier:  
En quien siempre encontré  
apoyo y nunca negativas ...Gracias  
mi hermano

Azucena:  
Mi compañera. por su apoyo  
incondicional en todo momento.

# ÍNDICE

ÍNDICE.....iv

PRÓLOGO ..... Viii

## I. ACÚSTICA ARQUITECTÓNICA

1.1	Introducción .....	1
1.2	El campo sonoro en recintos .....	2
1.3	Materiales para acondicionamiento y aislamiento acústico .....	3
1.4	Aislamiento acústico .....	4
1.5	Acondicionamiento Acústico .....	8
1.6	Micrófonos .....	12
1.7	Micrófono de carbón .....	13
1.8	Micrófono de cristal .....	14
1.9	Micrófono magnético .....	15
1.10	Micrófono de condensador .....	16
1.11	Diagrama polar de campo .....	17
1.12	Ecuación de un recinto acústico .....	19
	Mecanismo de audición .....	19
	Equipo necesario para ecualizar un recinto .....	22
	Generador de ruido .....	23
	Ecualizador .....	24
	Amplificador .....	24
	Altavoces .....	24
	Micrófono .....	25
	Analizador de audio .....	25
	Métodos para ecualizar un recinto .....	25
	Método a emplear .....	27

## 2.- FILTROS ANALÓGICOS

2.1	Introducción .....	29
2.2	Clasificación de Filtros .....	29
	Filtro analógico paso-bajas .....	31
	Filtro analógico paso-altas .....	34
	Filtro analógico paso-banda .....	37
	Filtro analógico supresor de banda .....	41
2.3	Estabilidad en el dominio de $S$ .....	44
2.4	Técnicas de aproximación de la respuesta real a la ideal en el diseño de filtros analógicos .....	46
2.5	El modelo de Buttervorh .....	47
	Propiedades básicas .....	48
2.6	Transformación de frecuencias .....	50
	Transformación de paso-bajas a paso-bajas .....	51
	Transformación de paso-bajas a paso altas .....	52
	Transformación de paso-bajas a paso-banda .....	53
	Transformación de paso-bajas a supresor de banda .....	55

### 3.- FILTROS DIGITALES

3.1	Introducción .....	58
3.2	Filtro digital.....	58
3.3	Filtros digitales vs analógicos .....	60
3.4	Muestreo.....	61
	Relación de muestreo .....	62
3.5	Formas de los filtros digitales .....	64
3.6	Respuesta de los filtros a un cierto tipo de entrada .....	66
	Entrada impulso .....	66
	Escalón digital.....	66
	Rampa digital.....	66
	Respuesta impulso para un filtro no recursivo digital en general .....	67
	Respuesta impulso para filtros recursivos en general .....	67
3.7	Propiedades de los filtros digitales .....	68
3.8	Combinación de filtros digitales.....	69
3.9	Respuesta en frecuencia de los filtros digitales.....	70
	Respuesta en frecuencia para filtro no-recursivo .....	70
	Respuesta en frecuencia para filtro recursivo .....	71
	Respuesta en frecuencia para filtros en cascada.....	71
	Respuesta en frecuencia de una combinación en paralelo .....	72
3.10	La transformada Z .....	72
	Transformada Z para filtros no-recursivos.....	73
	Transformada Z para filtros recursivos .....	74
3.11	Polos y ceros .....	74
3.12	Estabilidad de los filtros digitales .....	75
3.13	Transformación biilineal .....	76
	Técnica de diseño por transformación biilineal .....	79
3.14	Transformación biilineal por mapeo de polos .....	81
3.15	Diseño del filtro digital .....	84
	Elección del tipo de filtro.....	84
	Elección del tipo de aproximación a emplear .....	85
3.16	Generación de polos.....	86
	Transformación en banda de frecuencia .....	90
	Aplicación de la transformación biilineal .....	90

### 4.- DISEÑO DEL ANALIZADOR DE SEÑALES DE AUDIO

4.1	Introducción .....	96
4.2	Descripción física del sistema .....	97
4.3	Selección de frecuencias .....	98
	El filtro digital.....	98
	Cálculo del orden del filtro .....	100
	Diseño de los filtros .....	101
4.4	Descripción del hardware del sistema .....	101
	Caracterización del micrófono .....	102
	Preamplificador de entrada .....	103

El microprocesador.....	106
Los procesadores digitales de señales DSP.....	106
Los microcontroladores.....	106
Descripción del microprocesador a emplear.....	108
Acumuladores (A, B, D).....	110
Registros indexados (X, Y).....	110
Apuntador de pila (SP).....	110
Contador de programa (PC).....	110
Registro de condición de código (CCR).....	110
Mapeo de memoria.....	110
Convertidor analógico a digital (ADC).....	111
Multiplexor.....	112
Convertidor analógico.....	112
Secuencia de conversión.....	113
Interfaz de salida.....	113
4.5 Descripción del software.....	115
Cálculo de coeficientes.....	115
4.5.6 Memoria de cálculo.....	124
Análisis de respuesta en frecuencia.....	127
Programación del microcontrolador.....	140
Software del sistema.....	159
4.6 Operación del ASA.....	172

## 5.- CONCLUSIONES

### BIBLIOGRAFÍA

### APÉNDICE A

Aislamiento acústico a ruido aéreo.....	A-1
Aislamiento acústico a ruido aéreo de diferentes sistemas ordenados de menor a mayor intensidad (tabla).....	A-1
Aislamiento acústico a ruido aéreo de diferentes sistemas ordenados de menor a mayor espesor (tabla).....	A-2
Aislamiento acústico a ruido aéreo de diferentes sistemas ordenados de menor a mayor intensidad (tabla).....	A-3
Aislamiento acústico a ruido aéreo de diferentes sistemas ordenados por orden alfabético (tabla).....	A-4
Aislamiento acústico a ruido aéreo de diferentes sistemas a las distintas frecuencias ordenadas por orden alfabético (tabla).....	A-5
Coefficientes de absorción sonora.....	A-6
Coefficientes de absorción sonora de diferentes sistemas ordenados de menor a mayor densidad (tabla 1).....	A-6
Coefficiente de absorción sonora de diferentes sistemas ordenados de menor a mayor espesor (tabla 2).....	A-7
Coefficiente de absorción sonora de diferentes sistemas ordenados de menor a mayor valor de NRC (tabla 3).....	A-8
Coefficiente de absorción sonora de diferentes sistemas ordenados alfabéticamente.....	A-9



Coefficiente de absorción sonora de diferentes sistemas a las distintas frecuencias ordenadas por orden alfabético.....	A-10
--	------

## **APÉNDICE B**

Propiedades de los filtros.....	B-1
Superposición.....	B-1
Homogeneidad.....	B-2
Invarianza.....	B-2
Filtros lineales e invariantes con el tiempo.....	B-3
Aplicaciones de los integradores y diferenciadores.....	B-4
Integradores.....	B-4
Diferenciadores.....	B-5

## **APÉNDICE C**

Análisis del amplificador.....	C-1
--------------------------------	-----

## **APÉNDICE D**

Tabla de coeficientes de segundo grado.....	D-1
---	-----

## **APÉNDICE E**

Diagrama eléctrico.....	E-1
-------------------------	-----

# PRÓLOGO

El presente trabajo representó para nosotros un gran reto el iniciar un proyecto en el que desarrolláramos tecnología, que no es más que la transformación de un bien o servicio, y tratar de cubrir con este desarrollo una de las tantas necesidades de nuestro entorno.

Dado que el concepto de tecnología es bastante amplio, procedimos a definir en primera instancia el tipo de tecnología a desarrollar que nos interesó y en la cual nos avocamos, documentando y explicando lo más específicamente nuestra investigación: comprobando que el paquete tecnológico a transmitir fuera viable para el medio en que se utilice, finalmente entrar a su proceso de comercialización.

Al asumir esta responsabilidad, nuestro objetivo se basó en establecer y desarrollar tecnología alternativa, que beneficiará al área de la acústica. Esta inquietud surgió al percatarnos de las necesidades que tiene la radiodifusión, permitiéndonos reconocer que la acústica es una rama de la ingeniería, que no se le ha dado el debido desarrollo, además de que se le ha dado muy poco valor en nuestro país.

Para poder lograr nuestro fin, dimos inicio a nuestra búsqueda de información, que posteriormente seleccionamos y estudiamos minuciosamente para que nos diera los elementos básicos que fundamentarán nuestro objetivo, aunando a esto la experiencia adquirida en el campo profesional. Esta experiencia fue también un elemento básico, ya que nos mostró que existen ciertos sistemas empleados cotidianamente en el análisis del audio, y que debido a su alta tecnología sólo los encontramos en el extranjero; desde luego a precios, a veces, inalcanzables para el comprador. Esta necesidad del demandante nacional fue un motivo más que nos impulsó a interesarnos, aún más, en cómo hacer más accesibles los sistemas de audio para el comprador, que desde luego, cuente con las especificaciones requeridas y que además de todo esto se reproduzcan y mejoren en México según sus necesidades.

Un ejemplo claro de nuestra dependencia con otros países es el equipo que se necesita para acondicionar y/o utilizar un recinto acústico: como lo es la cabina de radiodifusión o un estudio de grabación, ya que dichos sistemas provienen, en su mayoría, de países como son Alemania, Inglaterra, Estados Unidos o Japón, situación que genera un alto precio por el equipo y también nuestra dependencia. Esta teoría sustentó nuestra idea por desarrollar tecnología alternativa en nuestro país. Sustitución respaldada, tanto por el lado profesional como por el técnico: cumpliendo de esta forma nuestro objetivo de lograr una tecnología alternativa.

Lo que sí es importante aclarar, es que definitivamente no es posible, no a corto plazo, que nosotros lleguemos a igualar o perfeccionar los sistemas más sofisticados que hay en el mercado, ya que como es bien sabido por todos nosotros, los extranjeros nos llevan bastantes años de ventaja. Lo que sí podemos hacer y es el fin de nuestra investigación, es enfocarnos a los productos cuyo ciclo de vida estén en su etapa madura; que significa que su tecnología ya es por demás conocida y experimentada. Estas características nos beneficiarían enormemente, pues los obligarían a tener un bajo precio.

Un buen ejemplo de esta propuesta son los sistemas que sirven para analizar las señales de audio; mismos que han sido ampliamente desarrollados y perfeccionados, y esto origina que se encuentren en su etapa madura y por consiguiente, en manos del dominio público, implicando así una fácil adquisición; pero siempre teniendo el excedente del precio, por el único detalle de que son importados.

Nos pareció de relevante importancia el poner el ejemplo arriba citado, ya que ésto lo vivimos en la práctica: pues cabe señalar que dichos sistemas son indispensables para un recinto acústico: motivo por el cual procedimos a elaborar el proyecto de diseñar un analizador que reuniera los parámetros necesarios para construir un prototipo, sustentándolo con la documentación que diera soporte al diseño.

De esta manera invitamos al lector a que conozca nuestro trabajo de Tesis, que su objetivo es el Diseño de un Analizador de Señales de Audio (A. S. A.), basándonos en el desarrollo de una tecnología alternativa para su diseño, usando filtrado digital, implementado en un circuito microcontrolador 68HC11 de Motorola; el cual tiene, entre otras características, el ser un circuito comercial de bajo costo; que afortunadamente es estudiado en la Facultad de Ingeniería de la UNAM, constituyéndonos una razón muy firme para trabajar con él.

El diseño del analizador, así como la propuesta de implementación, servirán como base para constituir un sistema físico, apegado a las necesidades del mercado; sin tener que regresar a comprender todo el sistema, sino únicamente la parte que vaya a ser modificada, lo que desde luego ahorra tiempo de respuesta.

Como mencionamos anteriormente, fue necesario ampliar nuestros conocimientos en acústica, y recordar los ya adquiridos; para poder entender otros temas que son el filtrado digital y el circuito microcontrolador 68HC11, y así poder dar lugar al diseño de nuestro prototipo.

A continuación damos una breve explicación sobre cómo se encuentra organizada la presente propuesta:

En el capítulo 1 se encuentran las nociones básicas para entender mejor el mundo del audio, partiendo del conocimiento en el funcionamiento del oído humano, hasta la equalización de un recinto acústico, proceso en el cual es indispensable el uso de un analizador de señales de audio.

El capítulo 2 damos inicio al diseño del Analizador de Señales de Audio (ASA), partiendo de filtros analógicos y en donde explicamos los diferentes tipos de filtros, así como las aproximaciones que se tienen para llegar a ellos. También se hablará del concepto de estabilidad de los filtros; tema fundamental para el diseño de los mismos.

El capítulo 3 introduce al lector en el mundo de los filtros digitales, debido a lo extenso del tema sólo nos enfocamos a un tipo filtro. Este filtro es el de respuesta impulso infinita IIR; mediante una red recursiva de segundo orden, a partir de una aproximación Butterworth Paso-banda. Dejamos el planteamiento de las ecuaciones que caracterizan a este tipo de filtros, una vez que están implementados.

El capítulo 4 define los parámetros que justifican al ASA. Con los parámetros se podrán obtener los coeficientes que caracterizarán a cada uno de los filtros. Las ecuaciones, características de cada filtro, son analizadas mediante un simulador que comprobará su correcta respuesta en frecuencia. Al tener asegurado su comportamiento en frecuencia es posible diseñar el Hardware y el Software del sistema. Por último describimos su funcionamiento.

Y en el capítulo 5 presentamos las conclusiones finales y aspectos generales de este proyecto.

Nuestra propuesta es que el ASA que se diseñe deberá ser fácilmente modificable en su software, además de poder ser implementado con otro tipo de salida o incluso con otro procesador que no sea el 68HC11. La presente Tesis consiste en representar y fundamentar un proceso que permita diseñar filtros digitales IIR; mediante una red de segundo orden para filtros recursivos de aproximación Butterworth Pasobanda, implementado en un circuito microcontrolador 68HC11. Tal y como lo mencionamos arriba.

Cabe hacer hincapié en que este trabajo es una propuesta de Tecnología Alternativa, que representa una aportación a un proceso, en el que se desarrollará tecnología de audio mexicana; dando respuesta al problema del alto precio que tiene el adquirir un equipo similar proveniente del extranjero. Cumpliendo así nuestra propuesta de Tesis, esperamos despertar el interés del lector en el tema del audio, invitándolo a dar lectura a nuestra Tesis.

Los autores.

# CAPÍTULO 1 ACÚSTICA ARQUITECTÓNICA

## 1.1 INTRODUCCIÓN

La calidad de la audición sonora, o el ambiente acústico necesario para facilitar una escucha determinada, depende de las exigencias de empleo de los recintos; por ejemplo, en teatros, auditorios, estudios de grabación sonora, etc.. los requerimientos de audición son más críticos que en cines, viviendas, oficinas, etc.

Los problemas más importantes que se presentan al tratar de diseñar los diferentes tipos de recintos son los referidos al aislamiento y al acondicionamiento acústico.

El primer punto a considerar consiste en obtener un buen aislamiento del recinto tanto contra el ruido aéreo como contra el ruido estructural. Para ello es necesario tener en cuenta en el momento de diseño las leyes fundamentales del aislamiento acústico, considerando los materiales que se emplean para construir las paredes divisorias, el espesor de las mismas, la existencia de paredes dobles, puertas, ventanas, la perforación de paredes, techo o suelo para servicios básicos, tales como potencia eléctrica, aire acondicionado, cableado de sistemas, junto con conductos ruidosos de sistemas de aire acondicionado.

El segundo punto a tener en cuenta es el de obtener un buen acondicionamiento acústico de los estudios y cabinas de control, para lo cual se tratará internamente las paredes, puertas, ventanas, techo y suelo. También será necesario un grado de difusión acústica uniforme en todos los puntos del mismo, considerando que sus propiedades acústicas se deben a las reflexiones de las ondas acústicas en todas las superficies límites (paredes laterales, suelo y techo), fijándose en que el valor del tiempo de reverberación sea idóneo en cada caso.

La propiedad característica de muchos recintos para la voz, es que cuanto se diga en ellos debe oírse clara y distintamente, y que el timbre de la voz de quienes hablan no varíe. Los recintos para música pretenden transmitir la música con gran calidad.

En el caso de los estudios de televisión y cine, empleados con su peculiaridad de transmitir la imagen y el sonido, en reportajes, crónicas, informes, entrevistas, debates, coloquios, encuestas, etc., se debe concordar la imagen visual con la sonora, dando la impresión en algunos casos de que las personas que transmiten esa información se encuentran en espacios cerrados de características especiales, como son los diferentes escenarios que se montan en los estudios.

Los datos más característicos que deben tenerse en cuenta para obtener un buen diseño de todos los locales son: a) Niveles de ambiente de ruido, LN ; b) Tiempo de reverberación, T; c) Pérdidas de transmisión acústica de paredes, suelos y techos, TL; d) Curvas de criterios de ruido, NC, PNC, NR; e) Curvas de espectro musical, MS; f) Velocidad del aire en los conductos de aire acondicionado, etc.

## 1.2 EL CAMPO SONORO EN RECINTOS

Cuando una fuente sonora emite energía, las ondas sonoras producidas se propagan radialmente en todas las direcciones a partir de ella, y cuando encuentran un obstáculo (superficies interiores), cambian su dirección, es decir, se reflejan.

No existe sin embargo una superficie física que sea un reflector perfecto, sino que o bien se pondrá en movimiento por efecto de la onda incidente, o si tiene estructura porosa, permitirá la propagación de las ondas en el interior del cuerpo material.

Si suceden cualquiera de estos dos procesos, las ondas reflejadas tendrán menos energía que las ondas incidentes, diciéndose que parte de la energía incidente es absorbida por la superficie (figura 1.2.1).

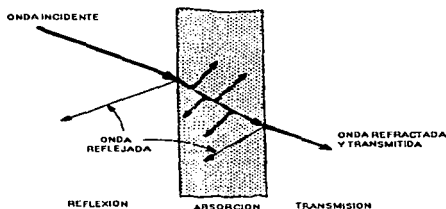


Figura 1.2.1. Reflexión y transmisión de ondas sonoras sobre superficies.

Los materiales absorbentes sonoros son aquellos que reducen el nivel de energía sonora de las múltiples reflexiones sonoras que persisten en el tiempo en un local.

Si la separación en tiempo entre la llegada de la señal directa y la primera reflexión supera un cierto tiempo, aparecerá el fenómeno del eco, ya que el oído no es capaz de sumar las dos señales, sino que las diferencia, lo que supone un fallo acústico.

La naturaleza del campo sonoro, que rodea a una fuente sonora en un recinto, está formado por el campo sonoro directo o libre y por el campo reverberante figura 1.2.2. La inmediata vecindad a la fuente sonora se conoce como campo próximo. La dimensión de este campo es difícil de definir, ya que depende de muchos factores, tales como la frecuencia, dimensiones de la fuente y fases de las superficies radiantes.

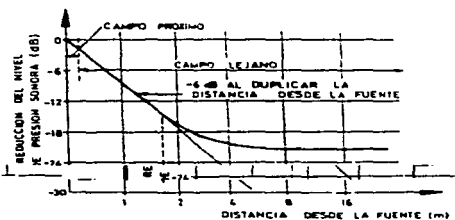


Figura 1.2.2. Descripción del campo sonoro que rodea a una fuente en un recinto reverberante.

En la misma figura observamos la región conocida como campo lejano, para éste el nivel de presión sonora disminuye 6 dB cada vez que la distancia entre la fuente y el punto de observación se duplica, actuando como en el espacio libre.

Si la fuente sonora irradia en un recinto reverberante, se crea un campo reverberante, que se superpone al campo lejano creado por la fuente sonora y que puede hacer desaparecer totalmente al mismo, si el recinto es muy reverberante. El campo reverberante se denomina campo difuso si cumple las siguientes proposiciones:

- 1º Las ondas reflejadas llegan a todos los puntos en el interior del recinto desde diferentes direcciones, siendo todas ellas igualmente probables.
- 2º La energía sonora en un punto del espacio se obtiene sumando aritméticamente los valores medios de las energías de todas las reflexiones que pasan a través de dicho punto.
- 3º La densidad de energía en un instante de tiempo es la misma en cualquier punto del recinto.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, la calidad acústica de un recinto está determinada por la capacidad de absorción acústica de los materiales que recubren sus superficies límites. Esta capacidad de absorción se debe a las pérdidas de energía acústica en la superficie o en el espesor del material, dependiendo de su estructura, densidad, elasticidad y otras propiedades físicas.

### **1.3 MATERIALES PARA ACONDICIONAMIENTO Y AISLAMIENTO ACÚSTICO (Parámetros característicos)**

Los materiales y estructuras acústicas se pueden describir como aquellos que tienen la propiedad de absorber o reflejar una parte importante de la energía de las ondas acústicas que chocan contra ellos. Pueden emplearse para aislar y para acondicionar acústicamente de diferentes maneras, como:

- 1º Estructuras para reducir la transmisión sonora.
- 2º Elementos para barreras y cerramientos.
- 3º Unidades suspendidas individuales.
- 4º Recubrimientos de paredes, suelos y techos.

El aislamiento acústico consiste en impedir la propagación de una señal sonora mediante diferentes obstáculos reflectores, para ello son necesarias paredes duras y pesadas que reflejan el sonido pero no lo absorben. También se puede realizar el amortiguamiento del sonido mediante la absorción del mismo. Es difícil en la realidad conseguir una estructura que refleje todo el sonido sin que absorba una parte del mismo. La pérdida por transmisión  $PT$  indica la capacidad de una pared para absorber las ondas sonoras.

El aislamiento de vibraciones consiste en impedir la propagación de las vibraciones mediante sistemas que vibren en concordancia de fase, es decir con cuerpos de dimensiones pequeñas frente a la longitud de onda. La frecuencia límite entre sonido y vibración de un cuerpo sólido se puede situar alrededor de los 100 Hz.

Las pérdidas de energía acústica en los materiales se pueden caracterizar mediante el coeficiente de absorción acústica  $\alpha$ , entendiendo por tal a la relación entre la energía acústica absorbida por un material y la energía acústica incidente sobre dicho material por unidad de superficie y que puede variar desde un 1 ó 2% al 100% para diferentes materiales.

El coeficiente de absorción acústica de un material depende de la naturaleza del mismo, de la frecuencia de la onda sonora y del ángulo con el que la onda incide sobre la superficie. Ya que el coeficiente de absorción varía con la frecuencia, se suelen dar los mismos a las frecuencias de 125, 250, 500, 1000, 2000 y 4000 Hz (Ver apéndice A).

En general, los materiales acústicos presentan una curva de absorción en función de la anchura de volumen de aire.

Los materiales acústicos comerciales utilizados para recubrir superficies de paredes y techos se pueden clasificar de diferentes formas, dependiendo de las propiedades físicas y estructurales que se consideren.

Las características principales de los materiales absorbentes son:

- a) **Materiales porosos.** Son de estructura granular o fibrosa, siendo importante el espesor de la capa y la distancia entre ésta y la pared. El espesor del material se elige de acuerdo con el valor del coeficiente de absorción deseado, ya que si es demasiado delgado, se reduce el coeficiente de absorción a las bajas frecuencias, mientras que si es muy grueso resulta muy caro.
- b) **Materiales para argamasas.** Son materiales acústicos que se aplican en estado húmedo con paleta o pistola para formar superficies continuas de un espesor deseado. Estos materiales están compuestos de una mezcla de ingredientes secos, a los cuales se les añade un aglutinante líquido.

Los morteros acústicos se aplican normalmente a una capa de cemento o sobre cualquier otro material. La aplicación puede ser en dos o más capas, empleando métodos normales de fratasado, aunque se está utilizando cada vez más el método a pistola.

- c) **Sistemas de paneles metálicos perforados.** Son de aluminio o acero perforado, con un relleno de fibra mineral, siendo este relleno el elemento absorbente del sonido, de unos 3 cm de espesor con un sistema ignífugo.

El relleno se coloca en el panel durante la instalación y se mantiene separado del mismo con una rejilla, con el fin de facilitar las operaciones de limpieza, conservando su absorción acústica.

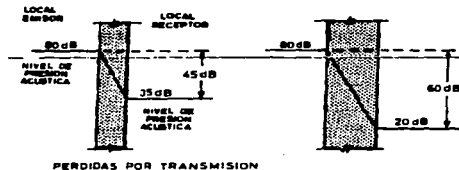
- d) **Sistemas de paneles rígidos.** Estos tienen ventajas artísticas y de construcción frente a los materiales porosos, como son resistencias a los golpes, duración, posibilidad de pintado, barnizado, etc.

- e) **Absorbentes suspendidos.** Se utilizan en algunos recintos, en los que existen pocas superficies susceptibles de colocar materiales absorbentes acústicos. En este caso se suelen emplear unidades de materiales suspendidos libremente en el recinto a cierta distancia de sus superficies límites.

## **1.4 AISLAMIENTO ACÚSTICO**

Se puede definir como aislamiento acústico a ruido aéreo de una pared a la pérdida de energía que experimentan las ondas acústicas al atravesar la pared. En la figura 1.4.1. Se presentan dos ejemplos de aislamiento acústico.





**Figura 1.4.1. Aislamiento acústico específico de un elemento constructivo.**

Una partícula de aire infinitamente próxima a la superficie de una pared se verá forzada a desplazarse al llegar la onda sonora. Esta energía que llega hace vibrar a la superficie sólida y comprime el aire próximo a ella, en la dirección opuesta a dicha pared. Es decir, que una parte de la energía incidente sobre la pared se refleja mientras que otra se transmite.

La parte de energía transmitida hace que se desplacen las partículas del sólido, mientras la perturbación se propaga y otra parte se disipa absorbiéndola el material, por efecto de las fuerzas intermoleculares.

En su propagación por el interior del sólido, la perturbación alcanza la superficie de éste, opuesta a la que recibe la onda inicialmente, y mediante un proceso análogo se irradia nuevamente en forma de sonido aéreo. Es decir, al incidir sobre una pared una onda acústica, se transmitirá parte de la energía de ésta, originándose una vibración mecánica en la pared, que a su vez se transformará en ondas acústicas, con una pérdida de energía debido a las reflexiones y a la absorción interna del material.

Es más difícil aislar los sonidos graves que los agudos, ya que para los sonidos de más de 1000 Hz de frecuencia la longitud de onda será extremadamente pequeña y va disminuyendo a medida que aumenta la frecuencia, por lo que la presión de aire generado por estas frecuencias que alcanza tanto al suelo como a las demás superficies será muy pequeña.

En cambio, para ondas acústicas cuya frecuencia sea del orden de 50 a 1000 Hz, su longitud de onda será grande y a medida que la frecuencia disminuye, la longitud de onda aumenta, y por tanto, la presión acústica ejercida para estas frecuencias sobre las superficies será mayor, por lo que será más fácil la transmisión de estas frecuencias por las paredes.

Se define como aislamiento acústico específico (TL) de un elemento constructivo a la diferencia entre el nivel de intensidad acústica incidente menos el nivel de intensidad acústica transmitida, estando dado en dB:

$$TL = L_{I1} - L_{I2} \quad [\text{dB}] \quad (1.4.1)$$

donde  $L_{I1}$  es el nivel de intensidad acústica incidente y  $L_{I2}$  es el nivel de intensidad acústica transmitida.

El aislamiento acústico bruto al ruido aéreo (D), de un recinto respecto a otro, es la diferencia entre el nivel de presión acústica media en el local ocupado por la fuente sonora, llamado recinto primario o emisor, y el nivel de presión acústica media en el local secundario o receptor, el aislamiento acústico se mide en dB

$$D = L_{p1} - L_{p2} \quad [\text{dB}] \quad (1.4.2)$$

siendo  $L_{p1}$  el nivel de intensidad acústica en el local emisor y  $L_{p2}$  el nivel de intensidad acústica en local receptor.

Mientras que la mejora del aislamiento acústico en 6 dB, que se consigue al duplicar la masa por unidad de superficie de las paredes de una sola capa, compensa el gasto en el caso de paredes de poco peso, esto en las paredes pesadas no es posible.

En la figura 1.4.2., se presenta la gráfica de aislamiento en función de la frecuencia para diferentes zonas.

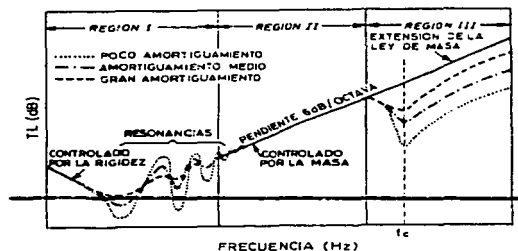


Figura 1.4.2. Aislamiento en función de la frecuencia: zona 1 gobernada por la rigidez y resonancias; zona 2 gobernada por la ley de la masa; zona 3 gobernada por la coincidencia de las ondas.

Al tener que obtener cada vez mayores aislamientos, sin que la masa aumente desproporcionalmente, se emplean sistemas de paredes separadas entre sí, formando un conjunto de elementos múltiples.

El hecho de que con paredes múltiples se obtenga un gran aislamiento con poco peso, es de gran importancia, ya que la limitación de peso es en realidad una condición que se presenta muy frecuentemente en fenómenos de aislamiento.

Una pared doble formada por dos hojas rígidas e indeformables, unidades entre sí por el aire de la cámara que forman o por un dispositivo elástico, comportándose como un conjunto de dos masas  $M_1$  y  $M_2$  separadas por una capa de aire de un determinado espesor  $d$ , representa a bajas frecuencias un sistema masa-muelle-masa, que se puede comparar con un tambor, en el que las masas son las dos membranas del mismo y el muelle el aire encerrado dentro del mismo.

Un sistema de estas características es capaz de vibrar como un tambor, con una frecuencia propia exactamente definida, llamada frecuencia de resonancia  $f_r$ , que es función de las masas mencionadas y del espesor de la capa de aire indicada:

$$f_r = 60\sqrt{(1/d) \times (1/M_1 + 1/M_2)} \quad (1.4.3)$$

Para esta frecuencia, la transmisión de sonido, a través del parámetro, puede ser incluso mayor que si las dos paredes estuviesen rigidamente unidas.

De acuerdo con lo expuesto y teniendo en cuenta a partir de qué frecuencias se desea aislar, debe cuidarse la elección de las dos masas  $M_1$  y  $M_2$ , así como la separación  $d$  entre las mismas, con el fin de que la frecuencia de resonancia del conjunto esté por debajo del margen inferior de frecuencias que se desea aislar.

Un conjunto del tipo descrito para las diferentes frecuencias se comporta de la siguiente forma:

- 1° Para frecuencias inferiores a la frecuencia de resonancia, aun existiendo dos tabiques, se comporta como uno solo de masa  $M_1 + M_2$ , pudiendo transmitirse mayor sonido que si las dos capas están rigidamente unidas.
- 2° Para frecuencias superiores a la de resonancia, cuya longitud de onda sea doble de la separación entre las capas, el aislamiento total será la suma de los aislamientos de las dos capas.
- 3° Para frecuencias comprendidas entre la de resonancia y una frecuencia  $f=340/2d$ , el aislamiento total tendrá en cuenta no sólo los aislamientos de las dos capas sino también las dimensiones de la capa a aislar, la separación entre las mismas y el coeficiente de absorción del material que se coloca entre las dos capas.

El empleo de material absorbente instalado entre las dos capas, bien porque el material tenga un valor reducido del coeficiente de absorción o bien por una mala instalación del mismo, puede originar una reducción importante del aislamiento de la pared, por lo que deben tomarse precauciones para que esto no suceda.

Un segundo tipo de acoplamiento entre capas contiguas de una pared múltiple, a través de la cámara de aire se presenta por ondas estacionarias. Cuando las ondas inciden perpendicularmente, aparece un acoplamiento entre ambas capas, cuando la distancia  $d$  toma los valores  $\lambda/2, \lambda, 3\lambda/2, \dots$  ( $\lambda =$  longitud de onda en el aire). Una forma de disminuir estas resonancias es introducir materiales absorbentes dentro de la cámara de aire (figura 1.4.3).

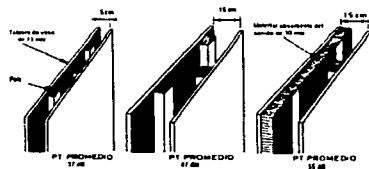


Figura 1.4.3. Ejemplos de diferentes sistemas aislantes formados por varias capas.

Los materiales absorbentes para el amortiguamiento del espacio intermedio entre las dos capas deben colocarse siempre evitando uniones rígidas entre las dos capas.

Si las capas dobles son de cristal como en las ventanas, no se puede colocar el material en el espacio intermedio, por lo que se coloca una capa de material absorbente bastante gruesa en los bordes laterales de la cavidad, amortiguando bastante las ondas estacionarias paralelas a la superficie del cristal. Para evitar la influencia de las ondas estacionarias perpendiculares a la superficie del cristal, es aconsejable colocar ambas superficies de cristal una recta y otra ligeramente inclinada respecto a la anterior. En la figura 1.4.4 se muestra un ejemplo de lo descrito anteriormente.

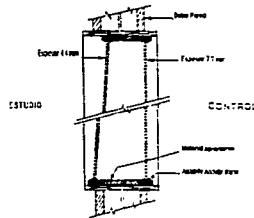


Figura 1.4.4. Plano de un visor acústico colocado en una pared doble.

## 1.5 ACONDICIONAMIENTO ACÚSTICO

Un recinto es un elemento que juega un papel importante en el campo sonoro que una fuente crea en su interior, influyendo sobre la señal que se propaga a través de él:

- 1° Acompañando a la señal básica con unas reflexiones que pueden tomar la forma de eco, alterando su estructura en el tiempo.
- 2° Alterando su color de tono, al introducir cambios en su espectro de frecuencia.
- 3° Incrementando su nivel mediante la energía de las reflexiones.
- 4° Creando diferentes condiciones de recepción en los diferentes puntos del recinto.

Los cambios que un campo sonoro experimenta, si la fuente sonora está situada en un espacio abierto o si se encuentra en el interior de un recinto, pueden ser tanto útiles como perjudiciales, desde el punto de vista de percepción auditiva.

La prolongación que acompaña a cada impulso de una señal sonora irregular (palabra, música, etc.), puede ser útil siempre que su duración sea la correcta, escuchándose la palabra con más claridad y la música con más animación. Si la prolongación es grande, la palabra es ininteligible y la música pierde musicalidad, por lo que la audición se empeora, al tener una calidad inferior.

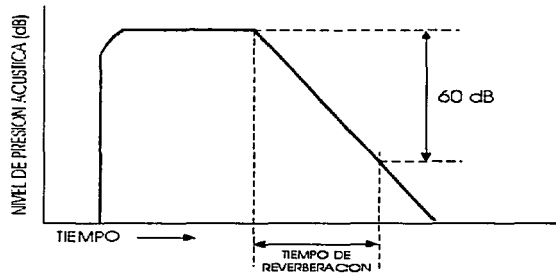
El énfasis de unas frecuencias con respecto a otras produce un cambio en el timbre de la señal originada por la fuente sonora.

Por todo lo expuesto anteriormente, se deduce que es necesario un cuidadoso estudio del campo sonoro creado en un recinto por fuentes sonoras, con el fin de determinar bajo que condiciones, ciertos cambios producidos por un recinto en la señal básica son útiles o perjudiciales, así como determinar que factores tienen influencia sobre la calidad de la palabra y de la música.

Cuando se conecta una fuente sonora en un recinto, como consecuencia de las reflexiones, existe un crecimiento gradual de la energía, posteriormente el aumento de energía cesa después de cierto tiempo, alcanzando la energía en el recinto un valor constante.

Si una vez alcanzado este valor, la fuente sonora deja de emitir, el sonido que recibe el observador no desaparece inmediatamente. Un corto tiempo después de que la fuente ha dejado de emitir, desaparece la onda directa y el observador recibe la energía de la primera onda reflejada, después la segunda, tercera, etc., ondas reflejadas y así sucesivamente, siendo la energía de estas ondas cada vez más pequeña. Después de un cierto intervalo de tiempo, la energía de las ondas que llegan al observador ha disminuido tanto que el oído no puede percibir las y el sonido desaparece.

Si se elige para representar gráficamente esta variación una escala logarítmica, se observa que el proceso de crecimiento es relativamente rápido, mientras que el proceso de descenso es más lento, representando además este gráfico la forma real de escucha del sonido, puesto que el oído no reacciona a la intensidad de la perturbación sino a su valor próximo al logaritmo de esta intensidad (figura 1.5.1).



**Figura 1.5.1. Proceso de crecimiento y disminución de la energía sonora en un recinto.**

El proceso de persistencia y disminución de la energía en un recinto, una vez desconectada la fuente sonora, recibe el nombre de reverberación, y el tiempo que la señal sonora necesita para reducirse hasta el umbral de audición se conoce como tiempo de reverberación.

Se define como tiempo de reverberación normalizado  $T$  en segundos, para una determinada frecuencia o banda de frecuencia, al intervalo de tiempo empleado por la presión acústica en un recinto para que se origine una disminución de 60 dB en el nivel de presión una vez desconectada la fuente sonora.

Se define como coeficiente difuso de absorción sonora  $\bar{\alpha}$ , a la relación entre la energía sonora absorbida por una superficie uniforme y la energía que incide uniformemente sobre dicha superficie. Este coeficiente, definido teniendo en cuenta la gran variedad de ángulos de incidencia de las ondas distribuidas en el recinto, puede caracterizar al mismo, sólo si las superficies que lo forman son suficientemente uniformes en sus propiedades físicas, si no es así, pero ocupan áreas iguales, el coeficiente medio viene expresado por:

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\alpha_i) \quad (1.5.1)$$

siendo  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  los coeficientes difusos de absorción sonora de cada material. Si las unidades de diferentes propiedades físicas ocupan áreas distintas, tendremos:

$$\bar{\alpha} = \alpha_1 \frac{S_1}{S} + \alpha_2 \frac{S_2}{S} + \dots + \alpha_n \frac{S_n}{S} = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n (\alpha_i \times S_i) \quad (1.5.2)$$

donde  $S_1, S_2, \dots$  son las áreas de las distintas unidades no uniformes:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  son los coeficientes difusos de absorción sonora de cada material y  $S$  el área total de las superficies internas del recinto.

La absorción  $A$  es la magnitud que cuantifica la energía extraída del campo acústico, cuando la onda sonora atraviesa un medio determinado, o el choque de la misma con las superficies límites del recinto.

La energía extraída del campo está dada para la absorción a la frecuencia  $f$  por:

$$A_f = \alpha_f \times S \quad (1.5.3)$$

donde  $S$  es el área total de las superficies en  $m^2$ , y  $\alpha_f$  es el coeficiente de absorción sonora del material a la frecuencia  $f$ .

La absorción sonora debida a las superficies límites del local será:

$$A_1 = \bar{\alpha} \times S = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \times S_i) \quad (1.5.4)$$

Si en el interior del recinto existen diferentes objetos y personas, para encontrar la absorción debida a los mismos, multiplicamos la absorción equivalente de un objeto por el número total de objetos que hay en el recinto, es decir:

$$A_2 = \alpha_1 \times n_1 + \alpha_2 \times n_2 + \dots = \sum_{j=1}^n (\alpha_j \times S_j) \quad (1.5.5)$$

donde  $\alpha_j$  es la absorción equivalente de cada elemento y  $n_j$  el número de elementos.

Por consiguiente la absorción total será:

$$A = A_1 + A_2 = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \times S_i) + \sum_{j=1}^n (\alpha_j \times S_j) \quad (1.5.6)$$

siendo el coeficiente medio de absorción sonora:

$$\bar{\alpha} = \frac{A_1 + A_2}{S} = \frac{1}{S} \left( \sum_{i=1}^n (\alpha_i \times S_i) + \sum_{j=1}^n (\alpha_j \times S_j) \right) \quad (1.5.7)$$

La fórmula del tiempo de reverberación de Sabine de un recinto se puede dar a partir de la expresión:

$$T = 0.161 \frac{V}{A} \quad (1.5.8)$$

siendo 0.161 el valor de una constante para una temperatura de 20°C, donde  $V$  es el volumen en  $m^3$  y  $A$  es la absorción total en  $m^2$ , obtenida a partir de  $A = \bar{\alpha} \times S$ , donde  $S$  es el área total de sus superficies interiores y  $\bar{\alpha}$  es el coeficiente de absorción sonora.

La fórmula de Eyring para el tiempo de reverberación, sólo aplicable cuando los coeficientes de absorción sonora son de valores numéricos parecidos para todas las superficies límites, es:

$$T = 0.161 = \frac{V}{-S \ln(1 - \alpha) + 4m \times V} \quad (1.5.9)$$

donde m es el coeficiente de atenuación de energía sonora en el aire, de valor:

$$m = 8.94 \times 10^{-4} \frac{f^2}{\rho_0 \times C^3} \quad (1.5.10)$$

f es el valor de la frecuencia,  $\rho_0$  la densidad del aire y C velocidad del sonido en el aire en condiciones normales de presión y temperatura.

El tiempo de reverberación depende además de la forma del recinto, de las posiciones de la fuente sonora y de los materiales absorbentes, no siendo constante para todas las frecuencias, ya que la absorción sonora tanto en el aire como en las superficies interiores depende de la frecuencia.

Generalmente, con fines prácticos, los cálculos del tiempo de reverberación se hacen en octavas para frecuencias de 125 - 250 - 500 - 1000 - 2000 y 4000 Hz, frecuencias a las que los fabricantes facilitan los coeficientes de absorción de sus productos. Se denomina tiempo de reverberación resultante T<sub>r</sub> al que tiene un recinto secundario cuando está acoplado electroacústicamente con un recinto primario.

Se define como tiempo óptimo de reverberación T<sub>op</sub> al que proporciona la mejor calidad del sonido en un recinto, pudiéndose determinar sólo por métodos experimentales, y dependiendo del uso del recinto, de sus dimensiones, de la naturaleza de la fuente sonora, del tipo de obra musical y de las frecuencias sonoras.

El tiempo de reverberación es el principal criterio para evaluar el comportamiento acústico de un recinto, aunque no el único. En función del empleo que tenga un local, deberá ser el valor de su tiempo de reverberación, así como su variación en función de la frecuencia (figura 1.5.2).

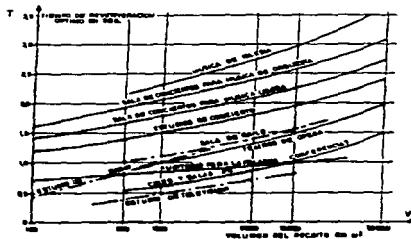


Figura 1.5.2. Variación del tiempo de reverberación con el volumen en recintos considerados con buena acústica, a frecuencias medias.

El volumen de aire en un recinto es un sistema vibratorio complejo, cuyas constantes están distribuidas, con un gran número de frecuencias características.

Los modos normales de vibración se representan como un modo complejo de ondas estacionarias. Si consideramos un recinto en el que el campo sonoro no es uniforme, figura 1.5.3., y la absorción de energía despreciable, al situar una fuente sonora radiante en una de las superficies laterales, la energía que proporciona la fuente sonora se puede suponer soportada por el campo de ondas estacionarias originadas en el

recinto. Las ondas que se propagan según direcciones paralelas a los ejes X, Y, Z, se llaman axiales, cuando son resultados de las reflexiones entre dos superficies paralelas; tangenciales, las que se distribuyen paralelamente a un par de superficies y debido a la reflexión entre dos pares de superficies paralelas; finalmente, se denominan oblicuas a las que se forman debido a la reflexión entre todas las superficies.

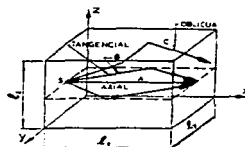


Figura 1.5.3. Ondas axiales, tangenciales y oblicuas.

El valor de las frecuencias características de un local están dadas por la expresión:

$$f_{AXIAL} = \frac{c}{2} = \sqrt{\left(\frac{n_x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_z}\right)^2} \quad (1.5.11)$$

donde  $c$  es el valor de la velocidad del sonido en el aire;  $l_x$ ,  $l_y$  y  $l_z$  son las dimensiones del recinto de forma paralelepípedica rectangular, y  $n_x$ ,  $n_y$  y  $n_z$  pueden tomar los valores 0, 1, 2... A partir de la ecuación 1.5.11 se pueden encontrar los valores de las frecuencias axiales según la dirección  $x$ , para  $n_x = n_y = 0$  para  $n_z = 1, 2, 3, \dots$  de forma análoga para las ondas axiales según otras direcciones.

Para las ondas tangenciales se hace de la forma,  $n_z = 0$  y  $n_x = 1, 2, \dots$  así como  $n_y = 1, 2, \dots$  obteniendo los diferentes valores, mientras que para las ondas oblicuas, los valores que pueden tomar son  $n_x, n_y, n_z = 1, 2, \dots$

Por todo lo expuesto anteriormente, las frecuencias de los modos normales de vibración de un recinto, están agrupadas en un espectro más denso, o sea el campo sonoro en el recinto es más constante, si su longitud, anchura y altura no son iguales ni múltiples una de otras.

La respuesta de un local debe ser lo más neutra posible, y para esto es necesario que el número de frecuencias características sea elevado y su distribución lo más regular posible, ya que si esto no se cumple, para señales complejas (música, palabra), las frecuencias que se encuentren entre dos frecuencias características se verán anuladas por otras que, por coincidir con ellas, serán amplificadas por el fenómeno de la resonancia.

## 1.6 MICRÓFONOS

Los micrófonos son transductores acústicos-eléctricos, es decir, transforman las señales acústicas en señales eléctricas, y por lo tanto, permiten manejar una información acústica con dispositivos electrónicos y modificar deliberadamente sus características.

Un micrófono ideal deberá ser capaz de manejar los niveles de presión sonora de todos los valores, aunque en el caso de señales acústicas es suficiente con manejar un rango de hasta 120 dBs, a partir del umbral de audibilidad 0 dBs (20 micro-Pascales). Deberá manejar en forma lineal todas las frecuencias, aunque en el caso de audio es suficiente con el manejo de frecuencias de 20 a 20000 Hz. Deberá así mismo captar los sonidos procedentes de cualquier dirección, aunque en el caso de señales acústicas algunas veces se prefiere restringir esta característica.



En la práctica todos los micrófonos se apartan en mayor o menor grado de las propiedades enunciadas, aunque se siguen haciendo esfuerzos por lograrlas. Se tienen restricciones en el manejo de las intensidades de la señal, en las frecuencias, principalmente en las bajas y en las altas frecuencias, así como también en el lóbulo direccional deseado.

Las propiedades enunciadas pueden deducirse fácilmente del principio de operación en que se apoyan los micrófonos, en función de ésta se puede establecerse una clasificación:

1. Micrófono de carbón.
2. Micrófono piezo-eléctrico.
3. Micrófono magnético (bobina y cinta).
4. Micrófono de condensador.

## 1.7 MICRÓFONO DE CARBÓN

Históricamente, el primero que se inventó. Está formado por un receptáculo metálico, generalmente de forma cilíndrica, en cuyo interior se encuentran pequeños granulitos de carbón. Uno de sus extremos está cubierto por una lámina delgada, también metálica, pero aislada eléctricamente del cuerpo del micrófono, como se muestra en la figura 1.7.1.

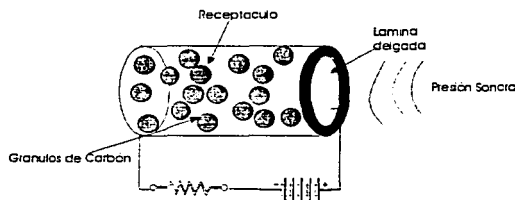
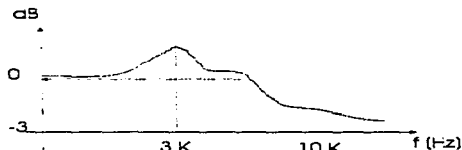


Figura 1.7.1. Micrófono de carbón.

Si los elementos metálicos (receptáculo y cubierta) se conectan a las terminales de una fuente de fuerza electromotriz, el circuito eléctrico se completará a través de los granulitos de carbón, por lo que la corriente en el circuito dependerá de la resistencia que presenten dichos granulitos de carbón, la cual a su vez, dependerá del contacto entre ellos mismos. Es obvio que si se aplica una variación de presión se producirá un cambio en la resistencia de contacto, lo que a su vez producirá un cambio en la corriente que circula en el circuito. Si se intercala una resistencia fija en serie se producirá una diferencia de potencial, que siendo proporcional a la corriente, es a su vez proporcional a la onda acústica que le dio origen.

Debido a que debe haber suficiente energía para mover los granos de carbón, este tipo de micrófono no reacciona ante señales de pequeña intensidad, por lo que requiere presiones sonoras relativamente grandes. Por la misma razón, no responde a señales de alta frecuencia y además muestra una fuerte resonancia en frecuencias del orden de 3 000 Hz, lo que le da una característica particular. Su respuesta en frecuencia típica se muestra en la figura 1.7.2.



**Figura 1.7.2. Respuesta en frecuencia típica del micrófono de carbón.**

Sin embargo, es muy robusto y proporciona señales de muy alta intensidad (del orden de amperes), por lo que tiene aplicaciones específicas, entre las cuales se cuentan: servicio telefónico y empleo como parte de magnavoz (la corriente puede excitar directamente a un altoparlante). Para bloquear la componente de corriente continua que se pudiera presentar en el altoparlante se suele agregar un condensador en serie con la carga.

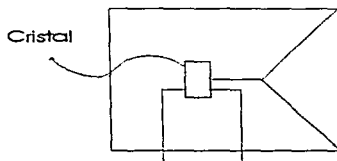
Dentro del área de la grabación profesional su empleo es muy limitado y sólo se llega a utilizar para efectos especiales, por ejemplo, cuando en una radio-novela se quiere simular una conversación telefónica.

La impedancia de este micrófono depende casi exclusivamente de la resistencia del carbón por lo que apenas llega a unas cuantas decenas de ohms.

## 1.8 MICRÓFONO DE CRISTAL

El micrófono de cristal tiene como transductor un elemento piezo-eléctrico, el cual como se sabe, tiene la propiedad de convertir las variaciones de presión en variaciones de fuerza electromotriz, esta transformación se produce en caras diametralmente opuestas entre sí.

En forma esquemática, figura 1.8.1., el micrófono de cristal está formado por un receptáculo, generalmente de plástico, que contiene un diafragma que es el encargado de llevar el cristal y por lo tanto de sensar las variaciones de presión, en donde, en caras diametralmente opuestas aparecen las variaciones de fuerza electromotriz que constituirán la señal deseada.



**Figura 1.8.1. Diagrama esquemático del micrófono de cristal.**

Este micrófono no necesita fuente de alimentación externa, ya que la transformación de energía mecánica en eléctrica se produce por las propiedades del cristal. El cristal puede ser de sal de Rochelle o de algún tipo de cerámica que tenga las mismas propiedades de transformación de energía.

Estos micrófonos son ideales para comunicadores, aparatos auditivos, máquinas de dictado, sistemas de sonorización y muchos otros servicios.

Este micrófono tiene una mejor respuesta en altas frecuencias que el micrófono de carbón, extendiéndose hasta los 7000 u 8000 Hz y su salida en voltaje es considerablemente más alta debido a su impedancia eléctrica que es sumamente elevada, alcanzando varias decenas de miles de ohms. En la figura 1.8.2., se muestra la respuesta en frecuencia típica de un micrófono de cristal.

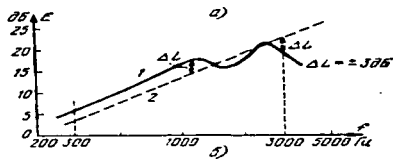


Figura 1.8.2. Respuesta en frecuencia típica de un micrófono de cristal.

## 1.9 MICRÓFONO MAGNÉTICO

Le damos el nombre de micrófonos magnéticos a aquellos transductores acústico-eléctricos, cuyo principio de operación se basa en la generación de fuerzas electromotrices producidas por el corte de líneas de fuerza de un conductor eléctrico.

Si se coloca una bobina dentro del campo magnético de un imán permanente, el movimiento del conductor dentro del campo generará una fuerza electromotriz. Si dicho movimiento es producido por una señal acústica captada por un diafragma, es evidente que la señal eléctrica estará relacionada con el movimiento producido por la señal acústica. El dispositivo está mostrado en forma esquemática en la figura 1.9.1.

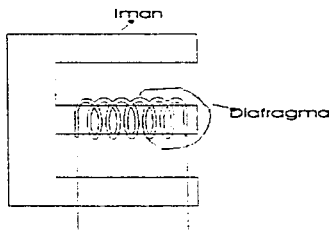
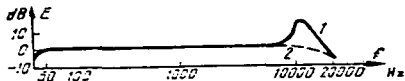


Figura 1.9.1. Diagrama esquemático de un micrófono de bobina móvil.

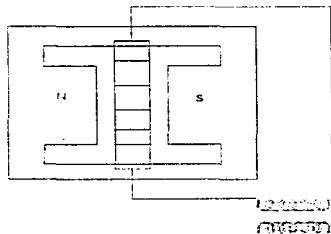
La señal proporcionada por este micrófono dependerá de la fuerza magnética del imán, del número de vueltas de la bobina así como de la señal acústica aplicada. La impedancia dependerá de la inductancia de la bobina y la respuesta en altas frecuencias será dependiente de la masa que se tiene que mover. Esto genera una situación de compromiso, ya que si se quiere una señal alta, se deberá sacrificar la respuesta en altas frecuencias, consecuentemente una mejor respuesta en frecuencia que se consigue reduciendo la masa de la bobina, tiene como consecuencia una menor salida eléctrica. En la figura 1.9.2., se muestra una curva típica de respuesta en frecuencia de este tipo de micrófono que recibe el nombre particular de micrófono de bobina móvil.



**Figura 1.9.2. Respuesta en frecuencia típica de un micrófono de bobina móvil.**

Una variante de este micrófono de bobina móvil es el llamado micrófono de cinta, en el que el diafragma está formado por una delgadísima cinta de aluminio (para reducir la masa), que se sitúa dentro de un campo magnético poderoso. De esta manera, la cinta, al moverse dentro de dicho campo magnético, debido a la aplicación de una señal acústica, genera una fuerza electromotriz. En la figura 1.9.3., se muestra en forma esquemática la disposición de los elementos más importantes del micrófono de cinta.

La impedancia de este micrófono es sumamente reducida, de unos cuantos milésimos de ohm y la fuerza electromotriz producida también es sumamente pequeña, aunque la corriente es relativamente grande.



**Figura 1.9.3. Diagrama esquemático de un micrófono de cinta.**

Estas condiciones hacen que el micrófono de cinta no pueda operarse en su forma natural. Para su empleo se requiere de un transformador de acoplamiento que al mismo tiempo que eleva el voltaje producido eleva la impedancia hasta valores que puedan manejarse con relativa facilidad (250 ohms, fracciones de milivolt).

Estos micrófonos se usan en trabajos profesionales de megafonía, y en estudios de radiodifusión y televisión.

Aunque la masa del diafragma (cinta de aluminio) no es ningún impedimento práctico para responder a altas frecuencias, debido a la bajísima impedancia interna, la corriente generada por el corte de las líneas de fuerza alcanza valores sumamente elevados y genera una fuerza contra-electromotriz que se opone al movimiento del conductor que le da origen, por lo tanto, cuando la frecuencia es alta (mayor de 15000 Hz) se reduce y aun se llega a impedir el movimiento de la cinta, por lo que dicho movimiento está limitado a estos valores.

## 1.10 MICRÓFONO DE CONDENSADOR

En su acepción más general, un condensador está formado por dos conductores separados por un dieléctrico. La capacidad del condensador depende del tamaño de los conductores, la separación entre ellos y del tipo del dieléctrico empleado.

Si los conductores están formados por láminas sumamente delgadas y el dieléctrico es el aire, en una configuración como la mostrada en la figura 1.10.1., y si además una de las placas se deforma debido a la aplicación de una onda acústica, la variación de la posición de la placa ocasionará una variación en la capacidad del condensador, por lo tanto, si se aplica una diferencia de potencial, se producirá una variación en la carga y consecuentemente un transporte de cargas eléctricas, por lo que tendremos un dispositivo que se conoce con el nombre de micrófono de condensador, debido a que la variación de la presión origina una variación de capacidad.

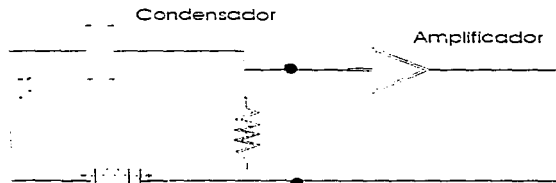


Figura 1.10.1. Diagrama esquemático de un micrófono de condensador.

El micrófono de condensador proporciona una señal sumamente pequeña, debido principalmente a que la capacidad utilizada es de un valor muy bajo, por lo tanto se requiere el empleo de un amplificador que eleve la señal a un nivel fácilmente manejable. Al mismo tiempo, el amplificador opera como un acoplador de impedancias, ya que la impedancia del condensador es sumamente elevada. En la práctica, el amplificador (pre-amplificador) forma parte integral del micrófono.

Este tipo de micrófonos dadas sus características son utilizados en mediciones acústicas como son para equalizar un recinto, medir el tiempo de reverberación entre otros.

Con el empleo del pre-amplificador, el micrófono de condensador puede entregar señales relativamente altas para un micrófono. Una lámina metálica, actuando como membrana, correctamente diseñada permite manejar frecuencias prácticamente de cualquier valor, por lo que es un micrófono de un excelente ancho de banda. En la figura 1.10.2., se muestra la respuesta en frecuencia típica de un micrófono de condensador.

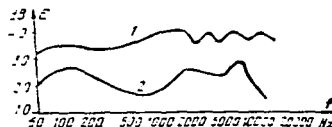
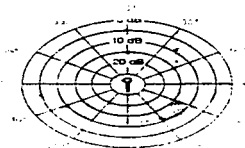


Figura 1.10.2. Respuesta en frecuencia típica de un micrófono de condensador.

## 1.11 DIAGRAMA POLAR DE CAMPO

El diagrama polar de campo es una representación en la que se emplean coordenadas polares, para mostrar la magnitud de una cantidad en una o todas las direcciones, 360 grados alrededor de un punto dado.

Los dibujos polares se usan para mostrar la representación direccional de micrófonos, altavoces y otros elementos que tienen características adicionales, para conocer su patrón de captación. El término diagrama de campo se usa también para denotar las cualidades direccionales; sin embargo, puede usarse cualquier término indistintamente. En algunos casos se usa el término diagrama o característica direccional. El término campo libre indica que el elemento bajo prueba se encuentra en el espacio libre, en un área libre de obstáculos y reflexiones, tal como puede encontrarse en el aire libre o en una cámara anecoica. Las representaciones polares se usan también en la medida de campos magnéticos muchos elementos eléctricos que no tienen propiedades acústicas. En la figura 1.11.1., se muestran dibujos polares o diagramas de campo. En la figura 1.11.1a., se presenta un diagrama de campo para micrófonos del grupo cristal, dinámicos (bobina móvil), de condensador, de carbón eléctrico de frecuencia modulada.



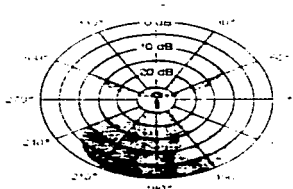
**Figura 1.11.1a. Representación de diagramas de campo.**

En la figura 1.11.1b., se ilustra una representación semi-direccional obtenida con un micrófono de diagrama de campo ajustable. El micrófono es direccional a las frecuencias más altas, pero no es direccional a las frecuencias bajas.



**Figura 1.11.1b. Representación de diagramas de campo omnidireccional.**

La representación bidireccional obtenida con un micrófono de cinta se muestra en la figura 1.11.1c. El micrófono es esencialmente ineficaz para captar lateralmente. Este diagrama se conoce generalmente como diagrama de campo en forma de ocho.



**Figura 1.11.1c. Representación de diagramas de campo bidireccional.**

La representación para un micrófono unidireccional, llamada diagrama cardioide, se muestra en la figura 1.11.1d. Existen micrófonos que permiten variar el diagrama de campo para alcanzar casi cualquier situación y que incluyen de una forma u otra todas las representaciones precedentes.

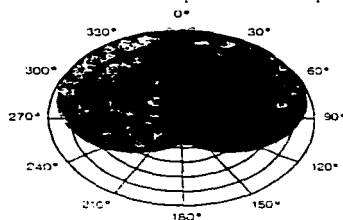


Figura 1.11.1d. Representación de diagramas de campo unidireccional o cardioide

## 1.12 ECUALIZACIÓN DE UN RECINTO ACÚSTICO

La escucha idónea de nuestras melodías preferidas, ya sea en directo o grabadas, no depende solamente de la calidad de la orquesta, del grupo o de la grabación y del equipo de reproducción, sino en gran porcentaje depende del lugar de escucha, de que la sala donde tiene lugar la interpretación esté acondicionada en forma conveniente.

Existen diversos métodos para la ecualización de un recinto, en esta sección se presentan tres y se planteará uno para el uso del analizador de señales de audio, que es el propósito del presente trabajo. Antes de describir dichos métodos es importante recordar algunos conceptos y saber en que forma trabaja el oído humano ya que esto nos ayudará a entender mejor el proceso de ecualización del recinto.

### MECANISMO DE AUDICIÓN

Si en un recinto más o menos silencioso se produce una señal de 1.000 Hz, a un nivel que permita claramente su audición y posteriormente se reduce gradualmente la intensidad, se alcanzará el nivel en el que la señal dejará de escucharse aunque dicho nivel no sea el mismo para todas las personas. A este valor se le llama umbral de audibilidad y para la mayoría de los casos es del orden de 20 micro Pascales ( 0 dBs ).

Para encontrar el límite inferior de audición y el límite superior de audibilidad, se partirá del valor del umbral de audibilidad aplicando la mínima intensidad requerida para que sea audible, entonces si con el valor correspondiente al umbral de audibilidad reducimos la frecuencia, es decir, en lugar de producir 1.000 Hz producimos 950 Hz, percibiremos claramente el cambio de frecuencia, pero si la seguimos reduciendo gradualmente llegará el momento en que dejaremos de percibirla, sin embargo, si aumentamos el nivel de la señal volveremos a escucharla, lo cual significa que para esta nueva frecuencia se requiere de mayor intensidad para que resulte audible.

Si repetimos la prueba, ahora a partir de esta nueva frecuencia encontraremos una situación similar, llegará el momento en que la nueva frecuencia dejará de escucharse y para volverla a oír se requiere un nuevo incremento de señal.

Esta situación puede repetirse varias veces y en cada caso se encontrará que ha medida que se reduce la frecuencia se requiere mayor energía para poder captar la señal, hasta que se llega a una frecuencia en que, por más que se aumente la energía, la señal ya no se percibe. Se dice entonces que se ha llegado al límite inferior de la audición.

Si esta prueba la realizamos nuevamente, pero en lugar de reducir la frecuencia la incrementamos, es decir, pasamos sucesivamente por 1.500 Hz, 2.000 Hz, etc. encontraremos una situación similar a la mencionada anteriormente y entonces habremos llegado al límite superior de audibilidad.

Lo anterior nos indica que nuestro oído tiene un límite para recibir las diferentes frecuencias y que además no las capta todas con la misma intensidad, en otras palabras, el oído tiene un ancho de banda limitado y su respuesta en función de la frecuencia no es lineal.

Supongamos que estamos aplicando una señal de 1.000 Hz, con la mínima intensidad requerida para que sea audible y que para lograr esto aplicamos una potencia de 0.1 W. Ahora, sin cambiar la frecuencia, dupliquemos la intensidad, es decir, pasemos de 0.1 W a 0.2 W. Captaremos claramente el incremento de intensidad, pero si volvemos a incrementar otro 0.1 W, pasando a 0.3 W, se notará un cambio muy ligero en la intensidad. Un nuevo incremento de 0.1 W pasará totalmente desapercibido.

Si la energía aplicada es de 0.5 W, para notar un cambio en la intensidad requiere duplicar la energía, es decir, pasar de 0.5 a 1 W. Los cambios mínimos perceptibles generalmente requieren que la energía se duplique.

Debido a este comportamiento del oído respecto a la intensidad, se utiliza el concepto decibel, de esta manera, los cambios en decibeles representan aproximadamente los cambios en la sensación auditiva.

Estas condiciones están representadas gráficamente en la figura 1.12., conocidas como curvas de Fletcher-Munsin, por haber sido ellos los primeros que hicieron la investigación correspondiente.

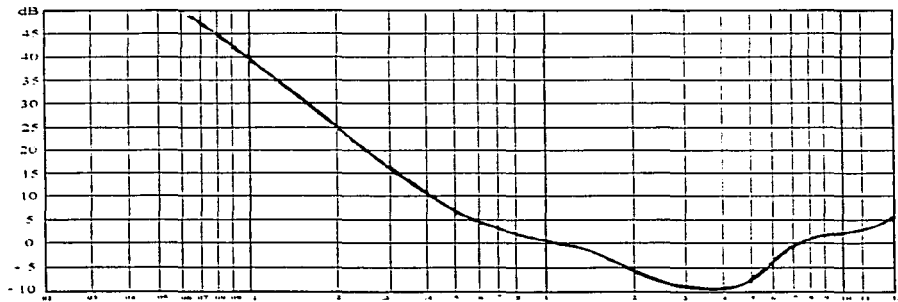


Figura 1.12.1 Representación gráfica de la respuesta en frecuencia del oído

Si queremos encontrar una explicación a este comportamiento debemos analizar la forma en que está constituido el oído humano.



El oído humano, para su estudio, se ha dividido en tres partes que son: oído externo, oído medio y oído interno como se muestra en la figura 1.12.2.

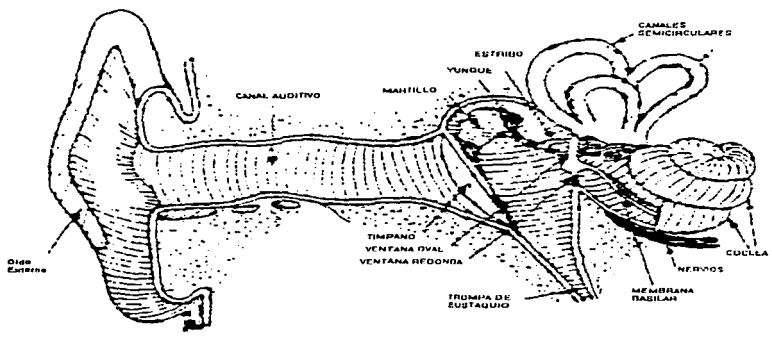


Figura 1.12.2 El oído humano

En la figura 1.12.3, se muestra una representación esquemática del mismo oído mostrando las partes que le componen desde un punto de vista más general.

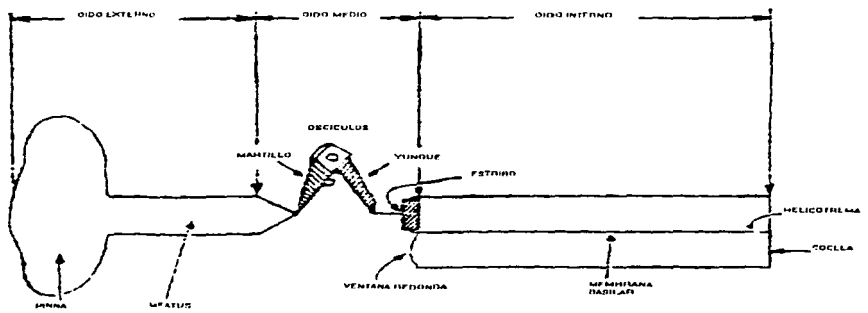


Figura 1.12.3 Diagrama equivalente

El oído externo está formado por el pabellón de la oreja y el conducto auditivo externo. El pabellón de la oreja sirve para conducir las señales acústicas hacia el conducto auditivo externo y así lograr que una mayor cantidad de energía incida en éste. Los primeros sistemas de ayuda auditiva consistían en unos dispositivos de boca ancha cuyo diámetro se iba reduciendo hasta acomodarse en el conducto auditivo externo para llevar una mayor cantidad de energía acústica. En la actualidad, cuando queremos tener una mejor audición, se acostumbra colocar una mano alrededor del pabellón de la oreja para incrementar la cantidad de energía que se recibe.

El conducto auditivo externo es un tubo de aproximadamente 3 cms. lo que lo hace resonante a frecuencias del orden de 3.500 Hz y es el responsable del incremento en la sensibilidad del oído de esta región. Cuando el conducto auditivo externo resuena en otra frecuencia, debido a su configuración particular, se suelen presentar fenómenos en algunas ocasiones desagradable, como en aquellas personas a quienes les es sumamente molesto el sonido del papel celofán en que vienen envueltas algunas golosinas.

El conducto auditivo externo termina en la membrana timpánica y justamente ahí comienza el oído medio.

El oído medio está formado por una cadena de huesillos, que por su forma, han recibido los nombres de: martillo, yunque y estribo. Además el oído medio se comunica al exterior mediante la trompa de Eustaquio, que es un pequeño conducto que termina en la cavidad de las fosas nasales.

Los huesillos son los responsables del comportamiento logarítmico del oído humano, ya que de la superficie de contacto entre el martillo y el yunque, depende la transmisión de energía del oído externo al oído interno y de esta superficie de contacto varía dependiendo de la intensidad de la misma señal, ya que si es débil dicha superficie es mayor cuando la intensidad aumenta. Si la intensidad es muy grande, mayor de 90 dBs, los huesillos se separan y la transmisión se efectúa únicamente por el aire que llena el oído medio con lo que se reduce la cantidad de energía transmitida.

Por su parte, la trompa de Eustaquio sirve para nivelar la presión dentro del oído medio con la presión del exterior y de esta manera sólo las variaciones son captadas por el oído.

El oído medio termina en la ventana oval, en la cual se apoya el estribo, el cual transmite la energía al oído interno.

El oído interno está formado por el caracol, que es un hueso que tiene la forma de un caracol, está lleno de un líquido y dentro de él se encuentran el órgano de Corti. El órgano de Corti es un conjunto de terminales nerviosas, las cuales, cuando reciben una excitación transmitida por el oído medio, vibran de acuerdo a su tamaño, es decir, las grandes detectan las bajas frecuencias, en tanto que las pequeñas siguen las vibraciones de las altas frecuencias. Si la frecuencia es demasiado baja o demasiado alta, no corresponderá a ninguna de las terminales nerviosas y por lo tanto ninguna vibrará. Estas vibraciones generan corriente nerviosas que en el cerebro producen la sensación de sonido.

De esta manera se explica actualmente la característica logarítmica, la respuesta en frecuencia y los límites superior e inferior del oído humano.

## **EQUIPO NECESARIO PARA ECUALIZAR UN RECINTO**

El equipo necesario para efectuar la ecualización de un recinto consta principalmente de un generador de ruido, un ecualizador, un amplificador, un altavoz, un micrófono y un analizador de sonido. A continuación se describirán brevemente dichos elementos.

## GENERADOR DE RUIDO

Uno de los principales componentes del equipo para la medición es el generador de ruido. Para la eualización de un recinto se han utilizado diferentes tipos de generadores, tales como el generador de impulsos, el sinusoidal y el ruido aleatorio.

La señal variable con el tiempo utilizada para medir las características acústicas de un recinto es el impulso. El instrumento utilizado en la realización de estas medidas se denomina Generador de Impulsos y se trata de un emisor de pulsos positivos (similar a una función coseno elevada al cuadrado) de frecuencia variable entre 40 Hz y 10 kHz y con una velocidad de repetición de 0.3 a 10 pulsos por segundo, debido a que el pulso es de corta duración y su periodo es muy pequeño no es posible excitar todos los modos de vibración del recinto, obteniéndose así lecturas ambiguas. La figura 1.12.4 muestra las distintas formas de onda que se obtienen y de las que se puede obtener información importante. Por ejemplo, se puede comparar las polaridades de los altavoces izquierdo y derecho del "woofer" con la del "tweeter". Se pueden estudiar algunos efectos acústicos de la sala como el eco, por vibraciones entre dos superficies paralelas, el eco de las paredes frontales, laterales, etc. Incluso se pueden medir las pérdidas de transmisión.

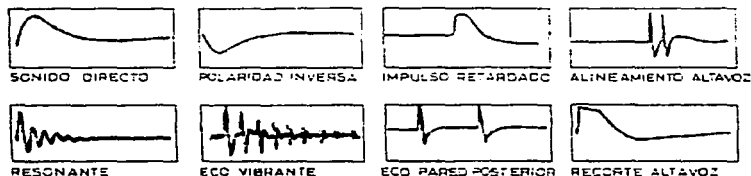


Figura 1.12.4. Diferentes formas de onda

La respuesta en frecuencia de un amplificador se puede medir proporcionando una onda sinusoidal en la entrada, procedente de un generador y midiendo la salida a diferentes frecuencias. Algo parecido puede aplicarse al estudio de un recinto, si bien el método no resulta fácil al no disponer el recinto de "entrada y salida" de señal (como el ejemplo del amplificador). No obstante se puede excitar el volumen del aire del recinto con una fuente sonora (altavoz) y comprobar el resultado con un micrófono situado en cualquier parte del recinto. Con esto se tiene una idea de lo que ocurre entre las terminales de "entrada y salida". A pesar de que estas mediciones tienen un valor limitado, permiten efectuar gráficas de la respuesta en frecuencia de la sala como se muestra en la figura 1.12.5.

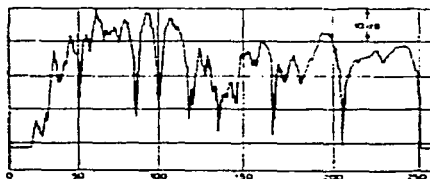


Figura 1.12.5. Respuesta en frecuencia de una sala

Un generador de ruido aleatorio es un dispositivo que produce una señal eléctrica de ruido de gran amplitud. Con la fuente de ruido aleatorio ( ruido rosa o ruido blanco ) se da una mayor veracidad a la lectura ya que las características del ruido rosa son que posee idéntica energía por octava ( el ruido blanco posee igual energía por Hertz ) y proporciona una respuesta plana sobre una gráfica logarítmica que es la usada normalmente en audio. El generador de ruido aleatorio es conectado a un amplificador y las mediciones se realizan con un micrófono omnidireccional que está conectado a un analizador de señales en tiempo real. Este tipo de ruido es útil para realizar ensayos acústicos, de altavoces, micrófonos, filtros, etc.

## **ECUALIZADOR**

En esencia, un ecualizador es un conjunto de filtros de paso banda que cubren el espectro de audiofrecuencia, aumentando o reduciendo el nivel en cada banda modificando la respuesta en frecuencia del sistema hasta conseguir la respuesta total deseada. Amplificar, pues, las zonas de frecuencia donde exista atenuación por el local y atenuar aquéllas en que haya excesiva ganancia sonora nos conduciría, dicho en forma más simple, a la igualación acústica del local. Observemos que la finalidad primordial de la ecualización es corregir las deficiencias acústicas del recinto de escucha, igualando las irregularidades que se presenten y tratando de conseguir que la respuesta total del sistema sea la que nos interesa. Debemos notar aquí que esta respuesta acústica total buscada puede no ser neutra ( es decir, aquélla que proporcione la misma ganancia a cualquier frecuencia ) sino que se deseen obtener ciertas tonalidades específicas acentuando o moderando los modos acústicos del recinto.

## **AMPLIFICADOR**

Las fuentes de señal utilizadas en alta fidelidad ( micrófonos, sintonizadores, etc. ) entregan un nivel de salida muy bajo, comprendido en el rango de los milivolts. Estos niveles resultan, en cualquier caso, insuficientes para excitar a los transductores finales del sistema ( los altavoces ). Si a esto se le une la bajísima sensibilidad de estos transductores, que sólo transforman en energía acústica una mínima parte de la energía recibida y la respuesta logarítmica del oído humano a la intensidad sonora, se explica la necesidad de disponer de un elemento de amplificación. Pero aún más, las peculiaridades de las diversas fuentes de señal, de las salas de escucha y altavoces, así como gustos particulares de cada oyente, obligan no solo a la amplificación de la señal original, sino a su modificación o corrección en muy diversos sentidos.

El dispositivo más común utilizado en la alta fidelidad para realizar todas estas misiones y que constituye el " centro de control " de todo el sistema, recibe el nombre de amplificador integrado. Este elemento reúne, en una pieza, al menos dos aparatos más simples: el pre-amplificador y el amplificador.

## **ALTAVOCES**

El altavoz es el elemento que transforma en señal acústica la señal eléctrica. Es por tanto un transductor electroacústico y el elemento más importante de toda la cadena de alta fidelidad ( Hi-Fi ), por lo que, en el momento de adquirir un equipo, se le debe prestar mayor atención y la mayor parte del presupuesto disponible.

Existen actualmente varios tipos de altavoces: electrodinámicos, electrostáticos, piezoelectrónicos, etc., es muy difícil que un solo altavoz pueda reproducir toda la gama de frecuencias audibles, por lo que se recurre a un sistema de varios altavoces ( a veces de distintos tipos ) con el fin de que cada uno reproduzca la gama de frecuencias apropiadas a sus características. La distribución de las gamas de frecuencias a reproducir la efectúan los filtros divisores de frecuencias que normalmente se hallan en el interior de la caja. También pueden estar intercalados en el amplificador, lo que se conoce por sistema de bi-amplificación, en el que cada altavoz es alimentado por su propio amplificador, que lleva asociado un divisor de frecuencias.

## MICRÓFONO

Los micrófonos como ya hemos visto, transducen una señal acústica a una señal eléctrica. Se hace mención de este elemento por que forma parte del equipo necesario para la ecualización de un recinto, pero éste tema ya ha sido tratado en la sección 1.8 por lo que pasaremos al siguiente elemento.

## ANALIZADOR DE AUDIO

Aunque la medida del tiempo de reverberación no es lo más importante, si resulta un buen comienzo para conocer las características acústicas de un recinto. Existen equipos para realizar dichas mediciones, pero lo más importantes son: el analizador de tiempo real y el sónometro, el primero es un instrumento utilizado en el análisis de la banda de audio y el sónometro es utilizado para la medida de los niveles de intensidad.

## MÉTODOS PARA ECUALIZAR UN RECINTO

La ecualización de un recinto determinado puede realizarse como lo muestra la figura 1.12.6. Un método simple consiste en aplicar una señal de ruido rosa, conveniente filtrada, a un amplificador lineal que alimenta a un altavoz de referencia.

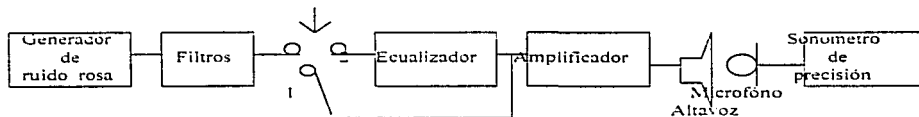


Figura 1.12.6. Primer método de ecualización de un recinto

Con el conmutador en la posición 1 se lee en el sónometro el nivel de presión sonora producido; luego pasando el conmutador a la posición 2, se ajusta el ecualizador hasta obtener en el sónometro el valor deseado. Repitiendo el proceso varias veces hasta cubrir la banda de audiofrecuencia obtendremos el resultado buscado. El conjunto de valores obtenidos con el conmutador en la posición 1 nos dará una idea de la respuesta en frecuencia del recinto.

En la ecualización de un recinto lo ideal es utilizar filtros asociados al generador de ruido aleatorio, que coincida lo más posible con el ecualizador. Incluso, en vez de los filtros, se puede emplear otro ecualizador idéntico, en el que se deje sólo una banda con ganancia máxima y las demas completamente anuladas. Así sabremos, en la posición 1 del conmutador, el nivel de presión sonora que produce dicha banda de frecuencias en nuestro recinto. Repitiendo el proceso en cada una de las bandas tenemos el resultado total. Debemos mencionar, no obstante, algunos de los inconvenientes que presenta este sistema tan aparentemente simple. En primer lugar, por muy bueno que sea el ecualizador, nunca será un filtro de paso banda perfecto, es decir, dejara pasar algo de energía de las bandas adyacentes. Por otra parte, no poseerá igual ganancia en toda la banda, sino que la frecuencia central de la misma será la que, en general, se amplifique o atenúe más. Y por último, el realizar el análisis banda tras banda nos impide observar lo que ocurre al resto del espectro cuando estamos trabajando con determinada zona de frecuencias.

El segundo método se ilustra en la figura 1.12.7., donde nos apoyaremos en un analizador de tiempo real, que es muy útil para estas aplicaciones, en ella se puede apreciar la disposición de los elementos para una ecualización completa del recinto en tiempo real.

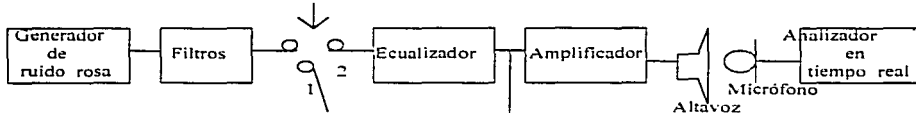


Figura 1.12.7. Segundo método para ecualizar un recinto

La señal del generador se aplica íntegramente al amplificador (sin filtrarla). Ahora, en la posición 1 observamos en el analizador la respuesta del recinto, con sus crestas y valles, antes de la ecualización. Al mover cada mando del ecualizador (posición 2) notaremos el efecto que produce en la respuesta total del sistema. El proceso es mucho más rápido que en el caso anterior y por supuesto, más completo y exacto.

Las posiciones de los controles del ecualizador nos dan la inversa de la curva típica del salón, lo que nos valdrá para futuros trabajos acústicos en el mismo.

Es preciso advertir de las limitaciones de cualquiera de estos dos métodos de ecualización:

- Tanto el sònometro como el micrófono empleados deben de ser de máxima calidad, para que no introduzcan deformaciones adicionales. Ambos transductores han de ser de tipo omnidireccional para que integren el sonido directo con las reflexiones en las superficies del recinto.
- El altavoz de referencia ha de ser igualmente de muy buena calidad en cuanto a la linealidad de respuesta, uniformidad de rendimiento a diversos niveles eléctricos y factor de directividad. En general habrá que introducir una ecualización para que dicho altavoz proporcione respuesta lineal y convendrá poseer la suficiente información sobre su respuesta en cámara anecoica para efectuar las correcciones que puedan necesitarse. De ahora en adelante, cuando hablemos de << altavoz de referencia >> entenderemos que es un transductor electroacústico con estas características de linealidad en respuesta. Lleve o no sistema de ecualización propio para obtener estos fines.
- La respuesta acústica obtenida es válida sólo para las condiciones en que se realiza la prueba, es decir, para el local con las personas, muebles, objetos revestimientos, temperatura, etc., existentes en el momento de la prueba.
- La respuesta es válida para el lugar donde se ha colocado el sònometro o el micrófono. Distintas zonas del local darán distintas respuestas. Será necesario realizar pruebas en diversos puntos para definir la ecualización media a utilizar (o las ecualizaciones particulares por zonas, en sistemas más refinados). En cualquier caso, un ingeniero capacitado puede, salvo en lugares acústicamente indomables, obtener una ecualización suficiente con relativamente pocas medidas.
- La ecualización se ha realizado con el altavoz de referencia. Al colocar los altavoces definitivos en la instalación habrá que compensar la desviación que introduzcan éstos.

Si no tenemos interés en conocer con detalle las características del recinto, basta efectuar un montaje como el de la figura 1.12.8 para hallar la respuesta combinada sistema sala. De esta manera se corrigen incluso las deficiencias de los elementos del sistema y en especial las de los altavoces, que son los componentes más críticos.

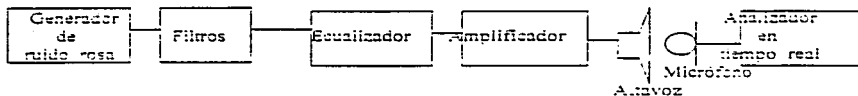


Figura 1.12.8. Tercer método para ecualizar un recinto

Hay que recordar que el ecualizador utilizado para esos fines es un elemento de compensación de irregularidades propias de la combinación sistema/sala, pero no debe emplearse para corregir defectos o carencias intrínsecas de los elementos electroacústicos. No debe, pues, pensarse que un ecualizador va a subsanar los defectos en respuesta en frecuencia de un mal altavoz, al contrario, si intentamos amplificar excesivamente una banda para ocultar tales defectos, lo probable es que solo consigamos aumentar la distorsión y degradar la respuesta del sistema.

En general, conviene conocer primero las características del local y en función de éstas, escoger los altavoces apropiados. Una vez instalados los mismos, hay que verificar el funcionamiento correcto del sistema y ecualizarlo íntegramente.

#### MÉTODO A EMPLEAR

En la figura 1.12.9 se muestra un diagrama de bloques que presenta el método para ecualizar un recinto de audio buscando lograr una respuesta logarítmica entre los 20 Hz y los 20 kHz, suficiente para la escucha de cualquier tipo de música.

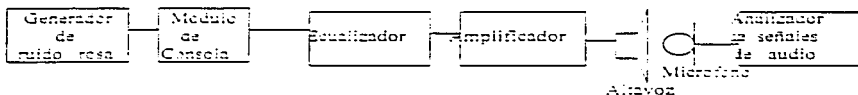


Figura 1.12.9. Diagrama de bloques para la ecualización de un recinto

El método consiste en aplicar una señal de ruido rosa, cuya característica principal es tener la misma intensidad en todas las frecuencias audibles.

El generador de ruido rosa se conecta a un módulo de entrada de la consola a nivel de línea, ya que la consola tiene dos tipos de entrada: entrada para micrófono y entrada de línea, a esta última se le puede conectar equipo periférico como por ejemplo, reproductor de compactos, grabadoras de cassette abierto, tomadoras, etc.

La salida de monitores de la consola se conecta a un ecualizador de 1/3 de octava, el cual se encarga de compensar las deficiencias y excesos en la respuesta en frecuencia del recinto, hasta llevarla a una lectura logarítmica en la zona de espectro sonoro antes especificada, la perilla o potenciómetro ecualizable de la consola se ubica en la posición de 1 kHz en 0 dB, ya que éste es el nivel de calibración de toda consola.

La salida del ecualizador gráfico alimenta a un amplificador con la señal de ruido rosa y se envía a un monitor de campo lejano que se encuentra dentro del recinto.

El sonido del monitor se toma con el micrófono omnidireccional ubicado en un punto del recinto. El micrófono está conectado al analizador de señales de audio, el cual se encarga de analizar la señal muestreada, la salida se observa en pantalla de video del analizador.

Como la medición es válida para el lugar donde se colocó el microfono, será necesario realizar pruebas en diversos puntos para definir la equalización por zonas particulares. En la figura 1.12.10 se muestra el equipo utilizado y las conexiones requeridas para la equalización de un recinto.

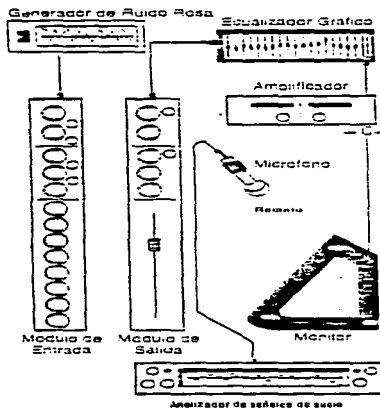


Figura 1.12.10. Equipo utilizado en la equalización de un recinto

Cabe señalar que para lograr un buen resultado en la equalización del recinto es necesario que éste cumpla al menos con las características más indispensables como son: Evitar paredes paralelas (recintos cuadrados) y dependiendo de su uso contar con el material acústico apropiado, es decir la calidad del sonido depende invariablemente de la calidad de los componentes de audio.

En este capítulo se dan conceptos básicos de audio que nos permiten comprender la importancia que tiene el análisis acústico de un recinto así como el papel que juega el analizador de señales de audio dentro de este proceso. El tema de audio es muy amplio, forma parte inclusive de la carrera Ingeniería en otras instrucciones por tal motivo solo hemos vertido los conocimientos suficientes para darnos una idea general acerca de este tema. En el capítulo siguiente seguiremos dando conceptos básicos acerca del filtrado analógico mismos que nos servirán como marco de referencia para entender a los filtros digitales.



# CAPÍTULO 2

## FILTROS ANALÓGICOS

### 2.1 INTRODUCCIÓN

Antes de iniciar el estudio de los filtros digitales es necesario contar con un marco teórico que nos sirva de referencia para abordar los nuevos conceptos presentados en los siguientes capítulos. En este capítulo trataremos conceptos básicos sobre los filtros analógicos; recordaremos la clasificación de los filtros de acuerdo a su respuesta en frecuencia así como el análisis de redes de los mismos para determinar su función de transferencia, también será estudiada su estabilidad, tema fundamental en el diseño de filtros. Finalmente se presentan las técnicas para la aproximación de filtros analógicos paso-bajas de acuerdo al modelo Butterworth y la transformación en frecuencia para convertir a un filtro paso-bajas a cualquier otro tipo de acuerdo a su clasificación en frecuencia.

### 2.2 CLASIFICACIÓN DE LOS FILTROS

Un filtro se puede definir como un dispositivo que se coloca entre las terminales de un circuito eléctrico para modificar las componentes de frecuencia de una señal.

Los filtros se pueden clasificar en las cuatro categorías que siguen, sobre la base de su respuesta en frecuencia:

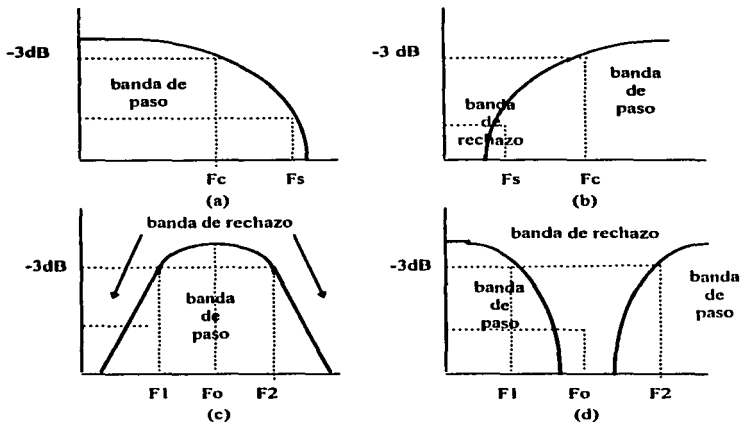
**Filtros paso-bajas.** Este tipo de filtro permite el paso a los componentes de baja frecuencia hasta una frecuencia de corte especificada y presentan una alta atenuación por encima de ese punto de corte.

**Filtros paso-altas.** Este tipo de filtro rechazan las frecuencias que van desde la corriente continua hasta una frecuencia de corte y dejan pasar a los componentes con frecuencia por encima de ese punto de corte.

**Filtros paso-banda.** Este tipo de filtros dejan pasar las frecuencias que se encuentran dentro de una banda específica y rechazan a los componentes con frecuencia fuera de esa banda.

**Filtros de rechazo de banda.** Este tipo de filtros suprimen las frecuencias que se encuentran dentro de una banda específica y dejan pasar a los componentes con frecuencia fuera de esa banda.

Hasta cierto punto, estas descripciones son ideales puesto que en los filtros reales hay una región de transición entre la banda de paso y la banda de supresión. En la Figura 2.2.1 se muestran las curvas típicas de filtros para cada una de las 4 categorías mencionadas.



**Figura 2.2.1. Formas de respuesta de filtros. a) paso-bajas; b) paso-altas; c) paso-banda; d) de rechazo de banda.**

Una segunda clasificación es la que divide a los filtros en analógicos y digitales. Los filtros analógicos se dividen de acuerdo a las características de sus componentes, esto es, si sus componentes son de tipo pasivo, es decir que no proporcionan energía adicional a la que se le entrega, los filtros se denominan como filtros pasivos; por el contrario, si sus componentes son de tipo activo, es decir, que sí proporcionan energía adicional a la que se le entrega, el filtro se denominan como filtros activos. Los avances en los últimos años con respecto a los circuitos integrados han permitido que debido a los bajos costos de éstos se puedan incluir en los filtros. Estos elementos son atractivos por su manejo de bajas frecuencias, además de eliminar inductores y tener siempre posible una ganancia de corriente o voltaje.

Regresando al tipo de respuesta de un filtro, ésta se define a partir de su función de transferencia. Para nuestros fines los sistemas a utilizar serán lineales e invariantes en el tiempo, esto es que cumplen con los principios de homogeneidad y superposición, además de que la salida no se adelanta a la entrada.

A continuación analizaremos las características principales de las redes de los filtros analógicos, considerando los cuatro tipos básicos de filtros: paso-bajas, paso-altas, paso-banda y supresor de banda.

Para estos análisis, en todos los casos, se asume que la entrada es una señal en estado estable, que contiene una combinación lineal de componentes sinusoidales, cuyas amplitudes rms (o pico) son constantes en el tiempo.

Estas consideraciones permiten simplificar la técnica de análisis para ser usada en determinadas respuestas de redes. La técnica general consiste en el análisis de la solución de la ecuación diferencial que representa a la red, para la respuesta transitoria y las combinaciones lineales de la respuesta en estado estable; sin embargo, en esta ocasión utilizaremos un método simplificado para obtener la función de transferencia, este método se describe y utiliza en el siguiente análisis.

## FILTRO ANALÓGICO PASO-BAJAS

El circuito pasivo RCL (resistencia R, capacitor C e inductor L), que se muestra en la Figura 2.2.2, forma un filtro paso-bajas de segundo orden.

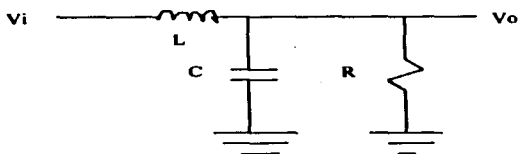


Figura 2.2.2. Circuito de un filtro analógico paso-bajas de segundo orden.

Haciendo el análisis en el dominio de  $s$  de este circuito se tiene que:

$$H(s) = \frac{RII \frac{1}{sc}}{sL + RII \frac{1}{sc}} \quad (2.2.1)$$

desarrollando

$$H(s) = \frac{\frac{R}{SC}}{R + \frac{1}{SC}} \quad (2.2.2)$$

$$H(s) = \frac{R}{SL + \frac{R}{SC} + 1} \quad (2.2.3)$$

$$H(s) = \frac{R}{(SCR + 1)SL + R} \quad (2.2.4)$$

$$H(s) = \frac{R}{S^2 CLR + SL + R} \quad (2.2.5)$$

$$H(s) = \frac{\frac{1}{CL}}{S^2 + S \frac{1}{RC} + \frac{1}{CL}} \quad (2.2.6)$$

de esta forma 2.2.6 es la función de transferencia para el circuito del filtro paso-bajas de segundo orden. La ecuación 2.2.7 es la forma general de la función de transferencia para el filtro paso-bajas de par de polos conjugados complejos

$$H(s) = \frac{H_o \omega \omega^2}{S^2 + \alpha \omega S + \omega^2} \quad (2.2.7)$$

comparando 2.2.6 con 2.2.7 se tiene que:

$$\omega \omega^2 = \frac{1}{CL} \quad (2.2.8)$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{CL}} \quad (2.2.9)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia natural

$$\alpha \omega = \frac{1}{RC} \quad (2.2.10)$$

$$\alpha = \frac{1}{RC \omega} \quad (2.2.11)$$

$$\alpha = \frac{1}{RC \frac{1}{\sqrt{CL}}} \quad (2.2.12)$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{CL}}{RC} \quad (2.2.13)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{L}{R^2 C}} \quad (2.2.14)$$

$\alpha$  es la atenuación y  $H_o=1$  es la amplitud.

Por otra parte H. W. Bode utilizó ampliamente en sus estudios una escala logarítmica para la magnitud de las funciones de red, teniendo como variable a la frecuencia. Por ejemplo, el logaritmo natural de la siguiente función es:

$$G(j\omega) = M(\omega)e^{j\theta(\omega)} \quad (2.2.15)$$

$$\ln G(j\omega) = \ln M(\omega) + j\phi(\omega) \quad (2.2.16)$$

En esta ecuación,  $\ln M(\omega)$  es la ganancia o la ganancia logarítmica en nepers, y  $\phi$  es la función del ángulo en radianes.

La unidad que se acostumbra para la ganancia es el decibel (dB):

$$\text{Ganancia en decibeles} = 20 \log M(\omega) \quad (2..2.17)$$

De la misma forma, la unidad que se acostumbra para el ángulo  $\phi$  es el grado. La conversión a estas unidades se puede lograr mediante las ecuaciones:

$$\text{Número de decibeles} = 8.68 \times \text{número de nepers} \quad (2.2.18)$$

$$\text{Número de grados} = 57.3 \times \text{número de radianes} \quad (2.2.19)$$

Si  $G(s)$  tiene polos y ceros que son conjugados complejos entonces el factor de segundo orden se expresa de la forma

$$G = 1 + 2\xi ST + S^2 T^2 \quad (2.2.20)$$

en donde  $\xi$  es la relación de amortiguamiento 2.2.22

$$2\xi = \alpha \quad (2.2.21)$$

De acuerdo con esto las funciones de magnitud y fase para el caso del filtro paso-bajas son:

$$\xi = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{R^2 C}} \quad (2.2.22)$$

$$M = 10 \log [(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\xi \omega T)^2] \quad (2.2.23)$$

y

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\xi \omega T}{1 - \omega^2 T^2} \quad (2.2.24)$$

donde

$$T = \frac{1}{fc} \quad (2.2.25)$$

En la Figura 2.2.3 se muestra la ganancia para la red paso bajas de segundo orden.

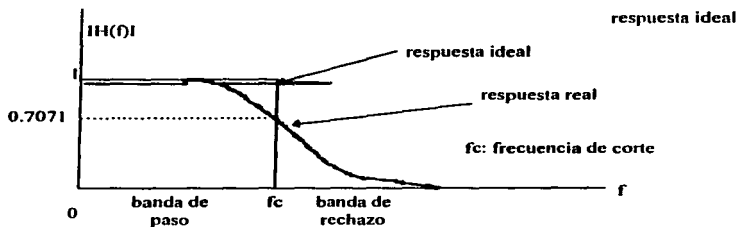


Figura 2.2.3. Ganancia para un filtro analógico paso-bajas.

### FILTRO ANALÓGICO PASO-ALTAS

El circuito pasivo RCL que forma la red de un filtro paso-altas se muestra en la Figura 2.2.4. El análisis de esta red es muy similar al que se hizo del filtro paso-bajas, a continuación presentamos su análisis.

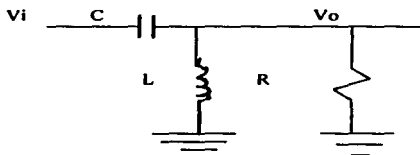


Figura 2.2.4. Circuito de un filtro analógico pasivo paso-altas de segundo orden.

Haciendo el análisis en el dominio de  $s$  de este circuito se tiene que:

$$H(s) = \frac{SLIR}{\frac{1}{SC} + SLIR} \quad (2.2.26)$$

desarrollando

$$H(s) = \frac{SLR}{\frac{SL+R}{1} + \frac{SLR}{SC + SL+R}} \quad (2.2.27)$$

$$H(s) = \frac{S^2 CLR}{SL + R + SC(SLR)} \quad (2.2.28)$$

$$H(s) = \frac{S^2 CLR}{S^2 CLR + SL + R} \quad (2.2.29)$$

$$H(s) = \frac{S^2}{S^2 + S \frac{1}{RC} + \frac{1}{CL}} \quad (2.2.30)$$

de esta forma 2.2.30 es la función de transferencia para el circuito del filtro paso-altas de segundo orden. La ecuación 2.2.31 es la forma general de la función de transferencia para el filtro paso-altas de par de polos conjugados complejos

$$H(s) = \frac{H_0 S^2}{S^2 + \alpha \omega_0 S + \omega_0^2} \quad (2.2.31)$$

comparando 2.2.30 con 2.2.31 se tiene que:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{CL} \quad (2.2.32)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}} \quad (2.2.33)$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia natural,

$$\alpha \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (2.2.34)$$

$$\alpha = \frac{1}{RC \omega_0} \quad (2.2.35)$$

$$\alpha = \frac{1}{RC \frac{1}{\sqrt{CL}}} \quad (2.2.36)$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{CL}}{RC} \quad (2.2.37)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{L}{R^2C}} \quad (2.2.38)$$

$\alpha$  es la atenuación y  $H_0=1$  es la amplitud.

Considerando los estudios de H. W. Bode tenemos, para el caso del filtro paso-altas:

Si  $G(s)$  tiene polos y ceros que son conjugados complejos entonces el factor de segundo orden se expresa de la forma

$$G = 1 + 2\xi ST^2 + ST^2 \quad (2.2.39)$$

en donde  $\xi$  es la relación de amortiguamiento (2.2.41)

$$2\xi = \alpha \quad (2.2.40)$$

$$\xi = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{L}{R^2C}}} \quad (2.2.41)$$

De acuerdo con esto las funciones de magnitud y fase son:

$$M = 1 \log[1 - \omega^2 T^2]^2 + (2\xi\omega T)^2 \quad (2.2.42)$$

y

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\xi\omega T}{1 - \omega^2 T^2} \quad (2.2.43)$$

donde

$$T = \frac{1}{f_c} \quad (2.2.44)$$



La Figura 2.2.5 muestra la curva característica de ganancia para el filtro paso-altas.

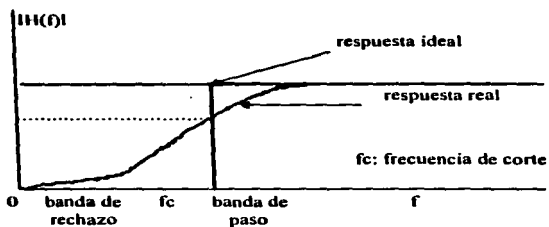


Figura 2.2.5. Ganancia para un filtro analógico paso-altas.

### FILTRO ANALÓGICO PASO-BANDA

El circuito pasivo RCL que forma la red del filtro paso-banda de segundo orden se muestra en la figura 2.2.8, donde la función de transferencia,  $H(s)$ , se obtiene del análisis de la red.

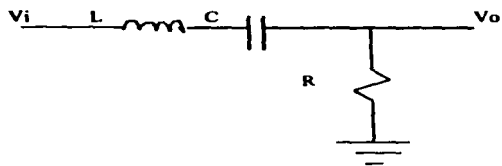


Figura 2.2.8. Circuito de un filtro analógico paso-banda de segundo orden.

Haciendo el análisis en el dominio de  $s$  de este circuito se tiene que:

$$H(s) = \frac{R}{SL + \frac{1}{SC} + R} \quad (2.2.45)$$

desarrollando

$$H(s) = \frac{SCR}{S^2CL + SCR + 1} \quad (2.2.46)$$

$$H(s) = \frac{S \frac{R}{L}}{S^2 + S \frac{R}{L} + \frac{1}{CL}} \quad (2.2.47)$$

de esta forma la ecuación 2.2.47 es la función de transferencia para el circuito del filtro paso-banda de segundo orden. La ecuación 2.2.48 es la forma general de la función de transferencia para el filtro paso-banda de par de polos conjugados complejos

$$H(s) = \frac{H_0 \alpha \omega_0 S}{S^2 + \alpha \omega_0 S + \omega_0^2} \quad (2.2.48)$$

comparando 2.2.47 con 2.2.48 se tiene que:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{CL} \quad (2.2.49)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{CL}} \quad (2.2.50)$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia natural,

$$\alpha \omega_0 = \frac{R}{L} \quad (2.2.51)$$

$$\alpha = \frac{R}{L \omega_0} \quad (2.2.52)$$

$$\alpha = \frac{R}{L \sqrt{CL}} \quad (2.2.53)$$

$$\alpha = \frac{R\sqrt{CL}}{L} \quad (2.2.54)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{R^2 C}{L}} \quad (2.2.55)$$

$\alpha$  es la atenuación y  $H_0=1$  es la amplitud.

Para los filtros paso-banda, nuevamente utilizamos los estudios de H. W. Bode por lo que tenemos que:

Si  $G(s)$  tiene polos y ceros que son conjugados complejos entonces el factor de segundo orden se expresa de la forma

$$G = 1 + 2\xi ST + S^2 T^2 \quad (2.2.56)$$

en donde  $\xi$  es la relación de amortiguamiento (2.2.58)

$$2\xi = \alpha \quad (2.2.57)$$

$$\xi = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R^2 C}{L}} \quad (2.2.58)$$

De acuerdo con esto las funciones de magnitud y fase son:

$$M = 10 \log[(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\xi \omega T)^2] \quad (2.2.59)$$

y

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\xi\omega T}{1 - \omega^2 T^2} \quad (2.2.60)$$

donde

$$T = \frac{1}{f_c} \quad (2.2.61)$$

La Figura 2.2.9 muestra la curva característica de ganancia para el filtro paso-banda.

fc1=frecuencia de corte 1  
fc2=frecuencia de corte 2  
fo=frecuencia central

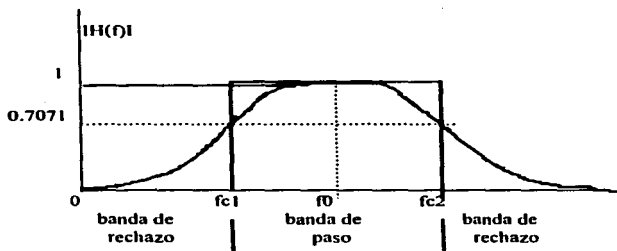


Figura 2.2.9. Gráfica de la ganancia de un filtro analógico paso-banda.

#### FILTRO ANALÓGICO SUPRESOR DE BANDA

La red analógica RCL para un filtro supresor de banda de segundo orden se muestra en la Figura 2.2.6, el análisis de la red y la obtención de la función de transferencia  $H(s)$ , la ganancia  $G(s)$  y la fase  $f(s)$  se presentan a continuación.

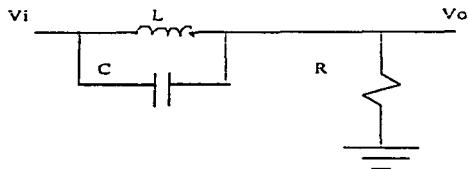


Figura 2.2.6. Circuito de un filtro analógico pasivo supresor de banda.

Haciendo el análisis en el dominio de S de este circuito se tiene que:

$$H(s) = \frac{R}{SL + \frac{1}{SC} - R} \quad (2.2.62)$$

desarrollando

$$H(s) = \frac{R}{R + \frac{SL}{\frac{1}{SC}} - \frac{1}{SC}} \quad (2.2.63)$$

$$H(s) = \frac{R}{\frac{1}{C} + R \left( SL + \frac{1}{SC} \right) - \frac{1}{SC}} \quad (2.2.64)$$

$$H(s) = \frac{R \left( SL - \frac{1}{SC} \right)}{\frac{L}{C} + R \left( SL + \frac{1}{SC} \right)} \quad (2.2.65)$$

$$H(s) = \frac{SLR - \frac{R}{SC}}{\frac{L}{C} + SLR + \frac{R}{SC}} \quad (2.2.66)$$

$$H(s) = \frac{S^2 CLR + R}{S^2 CLR + SL + R} \quad (2.2.67)$$

$$H(s) = \frac{S^2 - \frac{1}{CL}}{S^2 + S \frac{1}{RC} + \frac{1}{CL}} \quad (2.2.68)$$

de esta forma 2.2.68 es la función de transferencia para el circuito del filtro supresor de banda de segundo orden. La ecuación 2.2.69 es la forma general de la función de transferencia para el filtro supresor de banda de par de polos conjugados complejos

$$H(s) = \frac{S^2 + \omega_0^2}{S^2 + \alpha\omega_0^2 S + \omega_0^2} \quad (2.2.69)$$

comparando 2.2.68 con 2.2.69 se tiene que:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{CL} \quad (2.2.70)$$

$$\alpha\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}} \quad (2.2.71)$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia natural.

$$\alpha\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (2.2.72)$$

$$\alpha = \frac{1}{RC\omega_0} \quad (2.2.73)$$

$$\alpha = \frac{1}{RC} \frac{1}{\sqrt{CL}} \quad (2.2.74)$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{CL}}{RC} \quad (2.2.75)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{L}{R^2 C}} \quad (2.2.76)$$

$\alpha$  es la atenuación y  $H_0=1$  es la amplitud.

Para el filtro supresor de banda se tiene que:

Si  $G(s)$  tiene polos y ceros que son conjugados complejos entonces el factor de segundo orden se expresa de la forma

$$G = 1 - 2\xi ST - S^2 T^2 \quad (2.2.77)$$

en donde  $\xi$  es la relación de amortiguamiento 2.2.73

$$2\xi = \alpha \quad (2.2.78)$$

$$\xi = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{R^2 C}} \quad (2.2.79)$$

De acuerdo con esto las funciones de magnitud y fase son:

$$M = 10 \log \left[ (1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\xi \omega T)^2 \right] \quad (2.2.80)$$

y

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\xi\omega T}{1 - \omega^2 T^2} \quad (2.2.81)$$

donde

$$T = \frac{1}{fc} \quad (2.2.82)$$

A partir del análisis anterior es posible observar que la función de transferencia de este tipo de filtro es simplemente la suma de las funciones de transferencia para un paso-bajas y un paso-altas como se esperaba, pues se trata de sistemas lineales e invariantes con el tiempo. En la figura 2.2.7. se muestra la gráfica de ganancia para un filtro analógico supresor de banda.

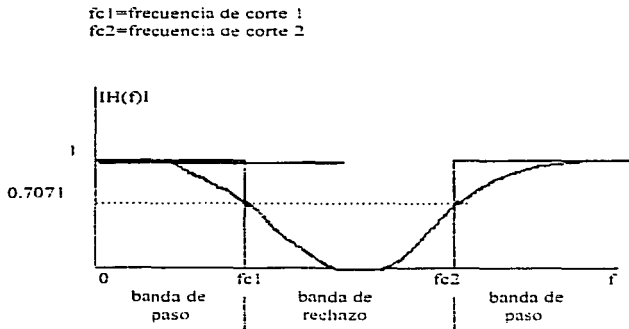


Figura 2.2.7. Gráfica de la ganancia de un filtro analógico supresor de banda.

### 2.3 ESTABILIDAD EN EL DOMINIO DE S

Una de las cuestiones que con frecuencia se debe resolver al analizar un sistema es la referente a la estabilidad del sistema. Evidentemente, este concepto de estabilidad es importante si el sistema se va a operar en cualquier periodo.



La función de transferencia  $H(s)$  de un sistema es la transformada de Laplace de la respuesta  $h(t)$  al impulso. Como se ha visto,  $H(s)$  o  $h(t)$  caracterizan al sistema en el sentido de que, dada  $H(s)$  o  $h(t)$ , se puede saber la salida producida por cualquier entrada. De aquí que, como la estabilidad de un sistema es una característica propia de él, e independiente de la entrada, se puede emplear  $H(s)$  para determinar la estabilidad.

Supóngase que  $H(s)$  es la función de transferencia de un sistema causal e invariable en el tiempo y es igual a la razón de dos polinomios en  $s$ . La transformada de la salida, en función de la entrada y de la función de transferencia está dada por la ecuación 2.3.1

$$Y(s) = \frac{ams^m + am - 1s^{m-1} + \dots + a_0}{bns^n + bn - 1s^{n-1} + \dots + b_0} X(s) \quad (2.3.1)$$

Considérese la respuesta de la ecuación 2.3.1 en el tiempo. Si se desarrolla esta ecuación en fracciones parciales, el polinomio del denominador de  $H(s)$ ,  $bns^n + \dots + b_0$ , se puede factorizar en varios términos, los cuales se explican a continuación.

1. **Polos simples de la forma  $c/(s-a)$ .** Esta forma corresponde a un polo simple en  $s = -a$ . Si  $a$  es positivo, el polo se localiza en el semiplano izquierdo de  $s$ , como se muestra en la Figura 2.3.1. La respuesta en el tiempo correspondiente es  $ce^{-at} u(t)$  y, a medida que  $t$  se incrementa, la respuesta en el tiempo tiende a cero. Si  $a$  es negativa, entonces el polo se localiza en el semiplano derecho de  $s$  y cuando  $t$  se incrementa, la respuesta en el tiempo crece ilimitadamente. Así, un sistema estable debe tener polos de  $H(s)$  real/valuados en el semiplano izquierdo de  $s$ . Los polos simples repetidos que están en el semiplano izquierdo de  $s$ , dan lugar a respuestas en el tiempo amortiguadas exponencialmente.

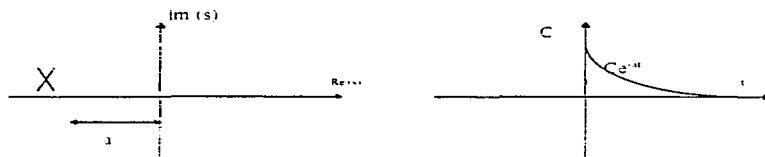


Figura 2.3.1. Respuesta en el tiempo de  $Ce^{-at}$ .

2. **Polos complejos conjugados de la forma  $c/[(s+\alpha)^2 + \omega^2]$ .** Esta expresión se puede factorizar en dos términos

$$\frac{c1}{(S + \alpha - j\omega)} + c \frac{1}{(S + \alpha + j\omega)} \quad (2.3.2)$$

Así, dicha expresión representa un par de polos complejos conjugados. Si  $\alpha$  es positiva, los polos se localizan en el semiplano izquierdo de  $s$ .

La respuesta en el tiempo correspondiente es de la forma  $(ce^{-\alpha t}/\omega)\text{sen } \omega t u(t)$ . Si  $\alpha$  es negativa, los polos se localizan en el semiplano derecho de  $s$  y entonces la función del tiempo es  $(ce^{|\alpha|t}/\omega)\text{sen } \omega t u(t)$ . De nuevo se observa que a los polos del semiplano izquierdo corresponden funciones en el tiempo que tienden a cero cuando  $t$  se incrementa, mientras que a los polos del semiplano derecho corresponden funciones del tiempo que se incrementan ilimitadamente cuando  $t$  crece.

3. **Polos complejos conjugados de la forma  $c/(s^2 + \omega_0^2)$ .** Los términos de esta forma representan polos complejos conjugados en el eje  $j\omega$ . La función del tiempo correspondiente es  $(c/\omega_0)\text{sen}\omega_0 t$ . En este caso no se presenta amortiguamiento exponencial y por tanto la respuesta no tiende a cero cuando  $t$  crece. A primera vista puede parecer que la respuesta en el tiempo no se incrementa cuando se incrementa  $t$ . Sin embargo, si se excita el sistema con una función sinusoidal de la misma frecuencia  $\omega_0$ , entonces se obtendrá un par de polos complejos conjugados y  $Y(s)$  tiene un término de la forma  $[1/(s^2 - \omega_0^2)]^2$ . Este término da lugar a una respuesta en el tiempo

$$(1/2\omega_0^3)(\text{sen}\omega_0 t - \omega_0 \cos\omega_0 t) \quad (2.3.3)$$

que crece ilimitadamente cuando  $t$  se incrementa. Físicamente se está excitando una resonancia natural del sistema con una entrada justa a la frecuencia de resonancia. La salida crece en forma ilimitada porque no existe una pérdida asociada ( $\alpha = 0$ ) a esta forma del sistema. Estas mismas consideraciones se aplican al caso de un polo simple en el origen. Este término da lugar a una función del tiempo que es un escalón. Si se excita este sistema con un escalón, entonces se obtendrá como salida una rampa. Obsérvese que si  $H(s)$  tiene polos repetidos en el eje  $j\omega$ ; entonces se presentan términos de la forma  $[1/(s^2 + \omega_0^2)]^2$  que corresponden a funciones que crecen ilimitadamente.

En resumen, un sistema de parámetros concentrados invariable en el tiempo y causal con función de transferencia  $H(s)$  es estable si:

- 1) Todos los polos de  $H(s)$  están en el semiplano izquierdo de  $s$ .
- 2) El grado del polinomio del denominador de la función  $H(s)$  es mayor o igual al grado del polinomio del numerador.

## 2.4 TÉCNICAS DE APROXIMACIÓN DE LA RESPUESTA REAL A LA IDEAL EN EL DISEÑO DE FILTROS ANALÓGICOS

En este apartado consideraremos las técnicas principales de aproximación a las características de los filtros ideales. Centraremos inicialmente nuestra atención a la situación del filtro paso-bajas. La característica de transmisión ideal para un filtro paso-bajas es mostrada en la Figura 2.4.1.

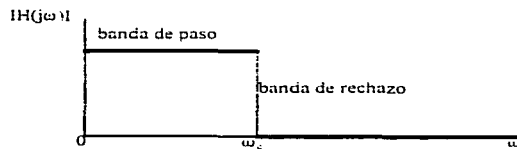


Figura 2.4.1. Filtro paso-bajas ideal.

La amplitud de la función transferencia deseada, para un filtro paso-bajas, es constante para  $\omega = 0$  hasta  $\omega = \omega_c$  y cero para todo  $\omega$  mayor que  $\omega_c$ . Esta característica no es posible realizarla en una red con elementos finitos. La única alternativa es la aproximación a la característica ideal de la respuesta del filtro. De esta forma se tiene que tomar un criterio de aplicación, donde se especifica la máxima atenuación permisible a una banda de frecuencia de interés llamada banda de paso, la atenuación mínima a otra banda de frecuencia llamada banda de rechazo y de la misma forma especificar la selectividad o el intervalo de tolerancia entre estas dos bandas llamada banda de transición.

Para el análisis de la aproximación de los filtros consideremos las cuatro aproximaciones más populares, que son: la aproximación Bessel-Thomson, la aproximación Chebyshev, la aproximación inversa de Chebyshev (elíptica), y la aproximación Butterworth.

La aproximación de Bessel-Thomson da una respuesta plana con respecto a un tiempo de retardo característico. Esta característica es determinante cuando las especificaciones son dadas en términos de tiempo de retardo y desviación máxima en magnitud y/o en tiempo de retardo para una frecuencia dada.

Los filtros con aproximación Chebyshev tienen la propiedad de que la magnitud de la respuesta en frecuencia es en forma de rizo en la banda de paso y monótona en la banda de rechazo o monótona en la banda de paso y en forma de rizo en la banda de rechazo, localiza sus polos en una elipse y para especificar sus características son necesarios dos parámetros, el grado del polinomio de Chebyshev y otro que determina la amplitud del rizo de la banda de paso o de rechazo.

Los filtros con aproximación inversa de Chebyshev o elíptica se caracterizan porque la respuesta en magnitud es de rizo en ambas bandas, de paso y de rechazo. Los filtros elípticos son óptimos en el sentido de que dado un orden y una especificación del rizo realizan rápidas transiciones entre la banda de paso y de rechazo, es decir, los filtros elípticos tienen una estrecha transición en el ancho de banda.

Los filtros con aproximación Butterworth son definidos por la propiedad de que la respuesta en magnitud es plana y máxima en la banda de paso, con lo que respecta a la ubicación de los polos de la aproximación Butterworth estos se localizan en un círculo, simétricamente con respecto a los ejes real e imaginario; además, un solo parámetro es necesario para especificar las características de la aproximación Butterworth, que es el grado del polinomio de Butterworth.

Con base en lo anterior, centraremos nuestra atención al modelo de Butterworth, ya que éste nos da las características que necesitamos en el diseño de los filtros que se implementarán.

## 2.5 EL MODELO DE BUTTERWORTH

Para poder considerar el modelo de Butterworth primeramente se necesita determinar el orden del filtro. El orden de un filtro identifica su pendiente. Para un orden más alto corresponde una pendiente más pronunciada. El orden de un filtro da un incremento en pasos de 6 dB/octava.

Una sola sección de un filtro pasivo tiene una pendiente de 6 dB/octava; esto es, cada doble de frecuencia (octava) anterior a la frecuencia de corte nominal representa una reducción de 6 dB en el nivel de la señal. Todos los filtros pasivos de una sección son filtros de primer orden.

El filtro activo más simple también es un filtro de primer orden con una pendiente de 6 dB/octava. Circuitos más avanzados tienen un orden más alto, en múltiplos de 6 dB/octava. Por ejemplo, un filtro de segundo orden tiene una pendiente de 12 dB/octava, mientras que uno de tercer orden tiene una pendiente de 18 dB/octava. Un filtro Butterworth es diseñado para tener una respuesta muy plana de frecuencia en su banda de paso, para así tener uniformidad en la salida.

La función de transferencia :

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{H_n}{1 + \omega^{2n}} \quad (2.5.1)$$

es conocida como la función de Butterworth de n-ésimo orden.

Al analizar la ecuación 2.5.1 podemos observar que cuando  $n$  tiende a  $\infty$ , la magnitud de la función de Butterworth se aproxima a la magnitud ideal para el filtro paso-bajas. Cuando el orden  $n$  del filtro Butterworth se incrementa, la magnitud de la función se acerca a la unidad en la banda de paso, la banda de transición tiende a desaparecer y la magnitud de la función en la banda de supresión se acerca a cero. De ahí que  $n$  sea un parámetro que cambia según las especificaciones en la banda de paso y la banda de supresión. Es posible hacer otra representación de la ecuación 2.5.1 con la escala vertical dada en dB: donde,

$$|H(j\omega)|_{dB} \approx -10 \log |H(j\omega)|^2 \quad (2.5.2)$$

$$f(\omega) \approx -\angle H(j\omega) \quad (2.5.3)$$

nótese que para  $\omega$  muy pequeña, la fase tiende a ser lineal, especialmente para valores pequeños de  $n$ .

### PROPIEDADES BÁSICAS

Basados en la ecuación 2.5.1, el filtro Butterworth paso-bajas normalizado tiene las siguientes propiedades básicas:

PROPIEDAD 1. Para cada  $n$  tenemos:

$$|H(j0)|^2 = 1, \quad |H(j1)|^2 = 0.5 \quad \text{y} \quad |H(j\alpha)|^2 = 0 \quad (2.5.4)$$

esto implica que la ganancia valuada para  $\omega = 0$  es 1 y que la frecuencia de corte están en 1 rad/seg., a -3 dB de la máxima ganancia.

PROPIEDAD 2. La magnitud de la función de los filtros Butterworth decrecen monótonamente para  $\omega \geq 0$ . Por esto  $|H(j\omega)|$  tiene su máximo valor en  $\omega = 0$ .

PROPIEDAD 3. Las primeras  $(2n-1)$  derivadas de un filtro Butterworth paso-bajas normalizado de  $n$ -ésimo orden son cero para  $\omega = 0$ . Por esta razón los filtros Butterworth son llamados filtros de magnitud máxima plana.

PROPIEDAD 4. La máxima caída en frecuencia de un filtro Butterworth de  $n$ -ésimo orden es de 20ndB decada, como se ilustra en la Figura 2.5.1.

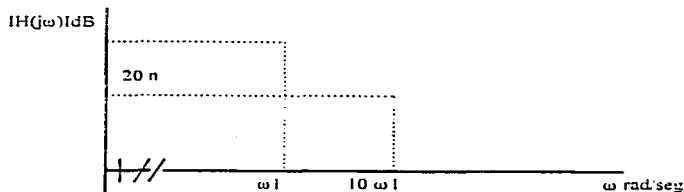


Figura 2.5.1. Máxima caída en frecuencia de un filtro Butterworth de  $n$ -ésimo orden.

La manera en que las especificaciones de un filtro serán dadas en ingeniería son ilustradas por la gráfica de la Figura 2.5.2., en particular esta gráfica corresponde a un filtro paso-bajas, en donde se explican sus requerimientos en función de la atenuación. En la banda de paso, la cual va de  $\omega=0$  hasta  $\omega=\omega_p$ , la atenuación no deberá exceder un valor preasignado de atenuación máxima,  $am_{\max}$ , expresado en dB. Desde  $\omega_p$  hasta  $\omega_s$  se tiene la banda de transición. Así mismo la banda de supresión se extiende desde  $\omega=\omega_s$  hasta  $\omega=\infty$ , en ésta la atenuación no deberá ser menor que  $am_{\min}$ . Con esta información podemos determinar el parámetro  $n$  con el cual se satisface el diseño.

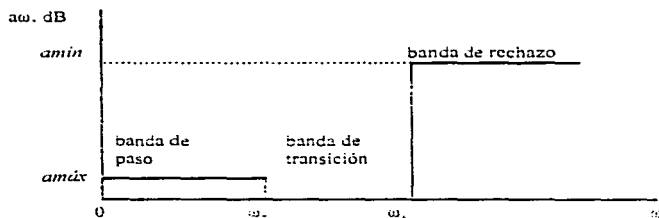


Figura 2.5.2. Especificaciones de un filtro .

Aun cuando la localización de los polos y el polinomio de Butterworth pueden ser fácilmente calculados, resulta muy útil tenerlos fácilmente a la mano. La Tabla 2.5.1 da la localización de los polos para  $n=2$  a  $n=10$ . La Tabla 2.5.2 lista los coeficientes del polinomio de Butterworth, y la Tabla 2.5.3 expresa el polinomio de Butterworth en forma factorizada.

$n$	-			
2	-0.70710678 $\pm j0.70710678$			
3	-0.50000000 $\pm j0.86602540$	-1.00000000		
4	-0.38268343 $\pm j0.92387953$	-0.92387953 $\pm j0.38268343$		
5	-0.30901699 $\pm j0.95105652$	-0.30901699 $\pm j0.58778525$	-1.00000000	
6	-0.25981905 $\pm j0.96592583$	-0.70710678 $\pm j0.70710678$	-0.46592583 $\pm j0.25981905$	
7	-0.22252093 $\pm j0.97492791$	-0.82548980 $\pm j0.78183148$	-0.90096887 $\pm j0.43388374$	-1.00000000
8	-0.19509032 $\pm j0.98078528$	-0.55557023 $\pm j0.83146961$	-0.83146961 $\pm j0.55557023$	-0.98078528 $\pm j0.19509032$
9	-0.17364818 $\pm j0.98480775$	-0.50000000 $\pm j0.86602540$	-0.76604444 $\pm j0.84278761$	-0.93969262 $\pm j0.54202014$
10	-0.15643447 $\pm j0.98768834$	-0.45399050 $\pm j0.89100652$	-0.70710678 $\pm j0.45399050$	-0.39100652 $\pm j0.15643447$

Tabla 2.5.1. Localización de polos de la respuesta normalizada de Butterworth.

n	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9
2	1.414213								
3	2.000000	2.000000							
4	2.613125	3.414213	2.613125						
5	3.236067	5.236067	5.236067	3.236067					
6	3.863703	7.464101	9.141620	7.464101	3.863703				
7	4.493959	10.09783	14.59179	14.59179	10.09783	4.493959			
8	5.125830	13.13707	21.84615	25.68835	21.84615	13.13707	5.125830		
9	5.758770	16.58171	31.16343	41.98638	41.98638	31.16343	16.58171	5.758770	
10	6.392455	20.43172	42.80206	64.88239	74.23342	64.88239	42.80206	20.43172	6.392455

Tabla 2.5.2. Coeficientes del polinomio de Butterworth  $q(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + 1$ .

n	i	Factor
2	1	$s^2 - 1.41421356s + 1$
3	1	$(s-1)(s^2-s-1)$
4	1	$(s^2-0.76536686s-1)(s^2+1.84775907s+1)$
5	1	$(s-1)(s^2-0.61803399s+1)(s^2-0.61803399s-1)$
6	1	$(s^2-0.51763809s+1)(s^2-1.41421356s-1)(s^2-1.93185165s-1)$
7	1	$(s-1)(s^2-0.44504187s+1)(s^2-1.24697960s-1)(s^2-1.80193774s-1)$
8	1	$(s^2-0.39018064s-1)(s^2-1.1114047s-1)(s^2-1.66293922s-1)(s^2-1.96157056s-1)$
9	1	$(s-1)(s^2+0.34729636s+1)(s^2-s+1)(s^2+i.52208889s+1)(s^2+1.87933524s-1)$
10	1	$(s^2-0.31286893s-1)(s^2-0.90798100s-1)(s^2-1.41421356s-1)(s^2-1.78201302s-1)$

Tabla 2.5.3. Factores del polinomio de Butterworth.

## 2.6 TRANSFORMACIÓN DE FRECUENCIAS

En todo el análisis anterior se ha trabajado únicamente con la aproximación a la respuesta ideal del filtro paso-bajas. En esta sección mostraremos que los resultados obtenidos en lo predeterminado para el paso-bajas puede rápidamente ser adaptado para otros casos semejantes, como paso-bajas, paso-banda, supresor de banda o paso-altas, mediante la transformación de la frecuencia variable. Por este medio el diseño se hace en términos de las características de un paso-bajas, y éste se transforma hasta llegar a otra forma de respuesta.

La idea básica es que si pudiéramos encontrar una transformación de frecuencia que mapée la banda de paso y la banda de supresión deseadas a su correspondiente banda de paso y banda de supresión de las características del paso bajas, podríamos resolver el problema equivalente en paso-bajas. Para por último aplicando la transformación inversa podríamos obtener la solución para el problema original.

## TRANSFORMACIÓN DE PASO-BAJAS A PASO-BAJAS

Este proceso es algunas veces llamado escalamiento de frecuencia o normalización de frecuencia.

La función de transferencia del filtro paso-bajas normalizado tiene su frecuencia de corte en 1 rad/seg. Dadas las características del filtro paso-bajas a implementar, y considerando su frecuencia de corte en  $\omega_c$ , lo que tenemos que hacer es sustituir cada  $\omega$  de este filtro en la función de transferencia del filtro paso-bajas normalizado por  $\omega/\omega_c$ . La función de transferencia resultante tendrá su frecuencia de corte en 1.

Con la transformación de frecuencia

Frecuencia del filtro original		Frecuencia del filtro normalizado	
$\omega$	—————	$\omega/\omega_c$	(2.6.1a)

ó

$s$	—————	$s/\omega_c$	(2.6.1b)
-----	-------	--------------	----------

Un capacitor con  $C$  Farads en una frecuencia de corte unitaria tiene en el circuito una impedancia de  $1/sC$ , si éste se transforma para una frecuencia de corte en  $\omega_c$  tiene en una rama del circuito una impedancia de

$$\frac{1}{(s/\omega_c)C} = \frac{1}{s(C/\omega_c)} \quad (2.6.2)$$

lo cual es un capacitor con  $C/\omega_c$  Farads. Por otra parte, un inductor con  $L$  Henries en una frecuencia de corte unitaria tiene en el circuito una impedancia de  $sL$ , y su contraparte con una frecuencia de corte en  $\omega_c$  tiene en el circuito una impedancia de

$$(s/\omega_c)L = s(L/\omega_c) \quad (2.6.3)$$

por tanto es un inductor con  $L/\omega_c$  Henries. Las resistencias y todos los elementos resistivos se mantienen sin cambio bajo la transformación de frecuencias.

<sup>1</sup> Analog and Digital Filters. Harry Y-F Lam, Pag. 278

## TRANSFORMACIÓN DE PASO-BAJAS A PASO-ALTAS

Debido a que las características del filtro paso-bajas son justamente el recíproco de las características del filtro paso-altas, la transformación de frecuencias de un filtro normalizado paso-bajas a un filtro paso-altas con frecuencia de corte en  $\omega_c$  está dada por<sup>2</sup>:

$$\begin{array}{ccc} \text{Frecuencia del filtro} & & \text{Frecuencia del filtro} \\ \text{original} & & \text{normalizado} \\ s & \longrightarrow & \omega_c/s \end{array} \quad (2.6.4)$$

Consideremos el siguiente ejemplo: suponiendo que diseñamos un filtro Butterworth paso-altas de segundo orden con frecuencia de corte en  $\omega_c$ , como lo muestra la Figura 2.6.1.

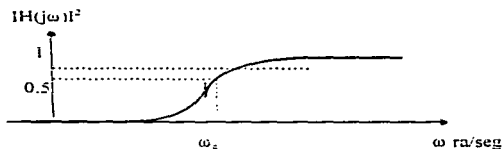


Figura 2.6.1. Magnitud característica del filtro paso-altas.

Empezamos con el prototipo normalizado del filtro Butterworth paso-bajas:

$$HN(s) = \frac{1}{s^2 + s\sqrt{2} + 1} \quad (2.6.5)$$

pero usando la ecuación 2.6.4, obtenemos la función de transferencia que necesitamos

$$HPA(s) = \frac{1}{(\omega_c/s)^2 - \sqrt{2}(\omega_c/s) + 1} = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2} \quad (2.6.5)$$

La transformación de paso-bajas a paso-altas se puede hacer directamente en la red normalizada del filtro paso-bajas  $N_n$  para obtener la red del filtro paso-altas  $N$ . La impedancia de la resistencia no sufre modificación bajo la transformación de frecuencias, no así el inductor  $L_n$  y el capacitor  $C_n$  que bajo la transformación 4.6.4 las impedancias son dadas respectivamente por:

$$Z_L(s) = L_n s = \frac{L_n \omega_c}{s} = \frac{1}{Cs} \quad (2.6.7a)$$

$$Z_C(s) = \frac{1}{C_n s} = \frac{1}{C_n \omega_c / s} = \frac{s}{C_n \omega_c} = L_s \quad (2.6.7b)$$

<sup>2</sup> Analog and Digital Filters, Harry Y-F Lam, Pag. 291



Esto es, una inductancia  $L_n$  en el prototipo normalizado del filtro paso-bajas da lugar a una capacitancia  $C = 1/L_n\omega_c$  en el filtro paso-altas, y una capacitancia  $C_n$  da lugar a una inductancia  $L = 1/C_n\omega_c$ . Las resistencias permanecen sin cambio en la transformación. Estos reemplazos se muestran en la Figura 2.6.2.

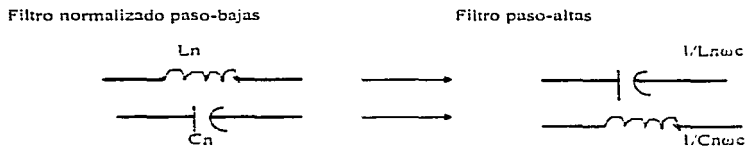


Figura 2.6.2. Reemplazo de elementos en la red

## TRANSFORMACIÓN DE PASO-BAJAS A PASO-BANDA

Para poder diseñar un filtro paso-banda debemos especificar su frecuencia central  $\omega_0$ , y su ancho de banda  $B$ . Una vez que se tienen estos datos se procede a realizar la transformación de frecuencias.

La transformación de frecuencias, la cual se toma de la estructura normalizada del paso-bajas (con una sola banda de paso centrada en  $\omega=0$ ) a un filtro paso-banda (con dos bandas de paso centradas en  $\omega_0$  y  $-\omega_0$ , cada una posee un ancho de banda  $B$ ). Consideremos la transformación explícita<sup>3</sup>

Frecuencia del filtro original	→	Frecuencia del filtro normalizado	
$s$		$\frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs}$	(2.6.8)

donde  $\omega_0$  es la frecuencia central que se desea y  $B$  es el ancho de banda del filtro paso-banda.

La ecuación 2.6.8 tiene las siguientes características importantes:

1. El punto  $\omega=0$  es mapeado como las frecuencias centrales  $\omega_0$  y  $-\omega_0$ . En general, un punto  $x$  es mapeado a dos puntos  $\omega_0/x$  y  $-\omega_0/x$ , excepto cuando  $x=\infty$ . El punto al infinito es mapeado al origen.
2. El eje imaginario positivo {negativo} es mapeado en los intervalos  $(\omega_0, \infty)$ , y  $(-\infty, -\omega_0)$   $\{(0, \omega_0)$  y  $(-\omega_0, 0)\}$ .
3. Sean  $\pm\omega_0/x$  y  $\pm\omega_0/x$  las imágenes de  $x$  y  $-x$  bajo la transformación de la ecuación 2.6.8; entonces

$$\omega_0^2 = \omega_0/x \cdot \omega_0/x \quad (2.6.9)$$

<sup>3</sup> Analog and digital filters. Harry Y-F Lam. Pag. 313

Si sustituimos  $x=1$  en la ecuación 2.5.5. entonces  $\omega_1$  y  $\omega^{-1}$  son las orillas de la banda de paso del filtro paso-banda resultante. De ahí tenemos:

$$B = \omega_1 - \omega^{-1} \quad (2.6.10a)$$

y

$$\omega_0^2 = \omega_1 \omega^{-1} \quad (2.6.10b)$$

una ilustración de las características de la ecuación 2.6.8 se muestran en la Figura 2.6.3.

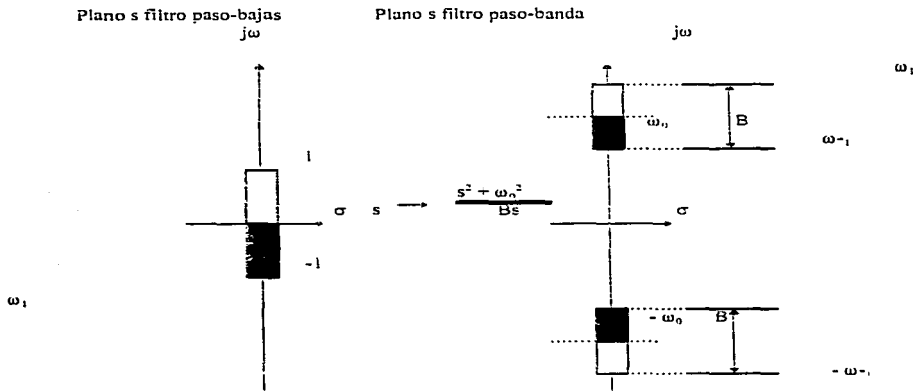


Figura 2.6.3. Características básicas de la transformación a paso-banda.

Con la transformación de paso-bajas a paso-banda, dada por la ecuación 2.6.4, podemos obtener la función de transferencia del paso banda  $H(s)$  desde el prototipo normalizado paso-bajas reemplazando cada  $s$  en la función de transferencia normalizada del filtro paso-bajas por  $(s^2 - \omega_0^2) / Bs$ .

La transformación de paso-bajas a paso-banda se puede hacer directamente en la red normalizada del filtro paso-bajas  $N$  para obtener la red del filtro paso-banda  $N$ . La impedancia de la resistencia no sufre modificación bajo la transformación de frecuencias, no así el inductor  $Ln$  y el capacitor  $Cn$  que bajo la transformación (4.6.8) las impedancias son dadas respectivamente por<sup>4</sup>:

$$Z_L = LnS = Ln \frac{s^2 - \omega_0^2}{Bs} = Ln \frac{s}{B} + Ln \frac{\omega_0^2}{Bs} \quad (2.6.11a)$$

$$Z_C = \frac{1}{CnS} = \frac{Bs}{Cn(s^2 + \omega_0^2)} = \frac{1}{\frac{Cns}{B} + \frac{\omega_0^2 Cn}{Bs}} \quad (2.6.11b)$$

<sup>4</sup> Analog and Digital Filters. Harry Y-F Lam, Pag. 281

Esto es, una inductancia  $L_n$  en el prototipo normalizado del filtro paso-bajas da lugar a una inductancia  $L = L_n/B$  en serie con una capacitancia  $C = B/\omega_c^2 L_n$  en el filtro paso-banda, y una capacitancia  $C_n$  da lugar a una capacitancia  $C = C_n/B$  en paralelo con una inductancia  $L = B/\omega_c^2 C_n$ . Las resistencias permanecen sin cambio en la transformación. Estos reemplazos se muestran en la Figura 2.6.4.

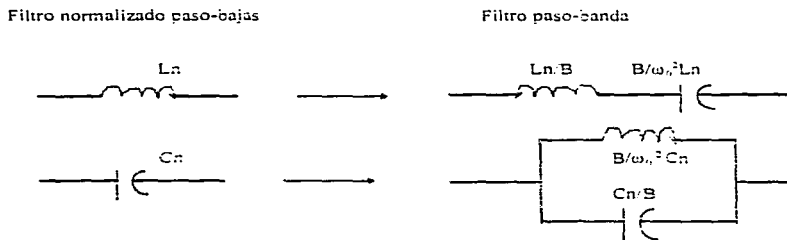


Figura 2.6.4. Reemplazo de elementos en la red.

#### TRANSFORMACION DE PASO-BAJAS A SUPRESOR DE BANDA

Como en el caso del filtro paso-banda, es necesario antes de iniciar el diseño, conocer las especificaciones de la frecuencia central  $\omega_0$ , y su ancho de banda de rechazo B.

Para así utilizando el prototipo normalizado del filtro paso-bajas y empleando la transformación de frecuencias para obtener el modelo final del filtro de rechazo de banda que se desea.

En este caso, la transformación de frecuencias es el inverso de la transformación a paso-banda. Esto es, la transformación de frecuencias para el filtro normalizado paso-bajas a un filtro supresor de banda esta dado por:

Frecuencia del filtro origina.	$s$	→	Frecuencia del filtro normalizado	$\frac{Bs}{s^2 - \omega_0^2}$	(2.6.12)
-----------------------------------	-----	---	--------------------------------------	-------------------------------	----------

donde,  $\omega_0$  es la frecuencia central de la banda de rechazo y B es el ancho de banda de rechazo. Las propiedades básicas de esta transformación se ilustran en la Figura 2.6.5.

5 \* Analog and digital filters. Harry Y-F Lam. Pag. 346

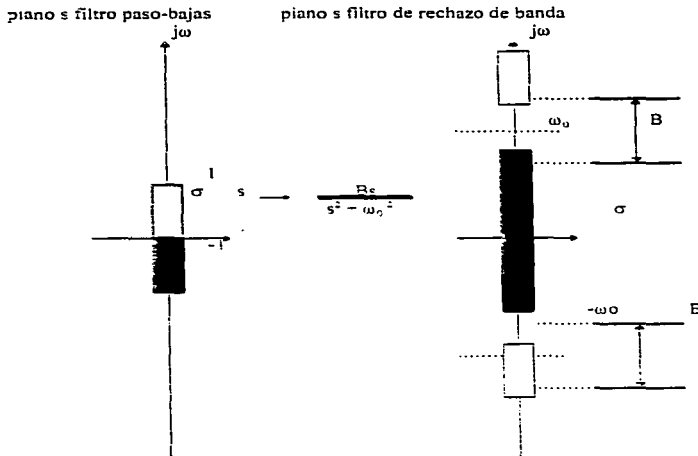


Figura 2.6.5. Propiedades básicas de la transformación de paso-bajas a supresor de banda.

Con la transformación de paso-bajas a de rechazo de banda dada por la ecuación 2.6.12, podemos obtener la función de transferencia del filtro de rechazo de banda  $H(s)$  desde el prototipo normalizado paso-bajas reemplazando cada  $s$  en la función de transferencia normalizada del filtro paso-bajas por  $Bs / (s^2 - \omega_0^2)$ .

De la misma forma que los filtros anteriores se realiza el reemplazo de los elementos de acuerdo a las siguientes ecuaciones<sup>6</sup>:

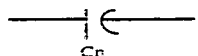
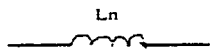
$$Z_L = LnS = Ln \frac{Bs}{S - \omega_0^2} = \frac{1}{\frac{1}{BLns} + \frac{\omega_0^2}{BLns}} \quad (2.6.13a)$$

$$Z_C = \frac{1}{CnS} = \frac{S^2 + \omega_0^2}{BCns} = \frac{i}{BCns} - \frac{\omega_0^2}{BCns} \quad (2.6.13b)$$

Esto es, una inductancia  $Ln$  en el prototipo normalizado del filtro paso-bajas da lugar a una capacitancia  $C = 1/BLn$  en paralelo con una inductancia  $L = BLn\omega_0^2$ , y una capacitancia  $Cn$  da lugar a una inductancia  $L = 1/BCn$  en serie con una capacitancia  $C = BCn/\omega_0^2$  en el filtro de rechazo de banda. Las resistencias permanecen sin cambio en la transformación. Estos reemplazos se muestran en la Figura 2.6.6.

<sup>6</sup> Analog and Digital Filters. Harry Y-F Lam. Pag. 288

Filtro normalizado paso-bajas



Filtro de rechazo de banda

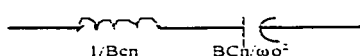
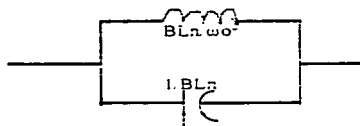


Figura 2.6.6. Reemplazo de elementos en la red

Este capítulo abarca los conceptos básicos sobre filtros analógicos como una herramienta de apoyo para la comprensión de los filtros digitales, los cuales son de fácil uso y comprensión: motivo por el cual su uso se ha difundido ampliamente. Dada la importancia que ha cobrado el uso de los filtros digitales se desarrollará la teoría correspondiente a ellos en el siguiente capítulo.

# CAPÍTULO 3

## FILTROS DIGITALES

### 3.1 INTRODUCCIÓN

El filtro digital ha venido a revolucionar el campo del filtrado, ya que éstos, a diferencia de su contraparte analógica, se basan en simples operaciones aritméticas de suma y multiplicación. Además, en la actualidad, con la tecnología de la computación, es posible tomar a los filtros digitales como una alternativa económica de los filtros analógicos.

Anteriormente las aplicaciones que los filtros digitales tenían eran básicamente para sofisticados sistemas que demandaban las capacidades de los filtros y que por tanto podían absorber su costo, ahora con los grandes avances en las computadoras y la tecnología de circuitos integrados, es posible encontrar una amplia gama de aplicaciones para los filtros digitales a bajo costo y facilidad de diseño.

Los filtros digitales han venido incrementado su popularidad por que cuentan con las siguientes características:

- 1.- Pueden ser implementados mediante un software en una computadora de uso general, lo cual implica que son relativamente fáciles de construir y de probar.
- 2.- Los filtros digitales están solamente basados en operaciones aritméticas, por lo que son extremadamente estables, no pueden cambiar con el tiempo o la temperatura.
- 3.- Son más fáciles de modificar que los filtros analógicos.
- 4.- Son más fáciles de entender.

Esto no significa que el filtro digital sea la respuesta a todos los problemas de filtrado, los filtros analógicos continuarán dominando en el mundo del filtrado. Sin embargo, el filtro digital tenderá a emplearse más por los ingenieros y científicos.

### 3.2 FILTRO DIGITAL

En términos generales, un filtro digital es una caja negra con un grupo de entradas y un grupo de salidas. Esta caja contiene algunas formas de procesamiento que generan salidas desde las entradas, esta definición se representa en la figura 3.2.1.



Figura 3.2.1. Un filtro general.

Existen dos motivos generales por los cuales se desea filtrar:

- 1.- Mejorar la calidad de las entradas.
- 2.- Procesar y/o extraer información de las entradas.

Por ejemplo, en el primer caso, cuando se aplica a electrocardiogramas se quita el ruido muscular para dejar sólo el ruido del corazón. En el segundo caso cuando se aplica a un medidor meteorológico se registran las entradas y después se ofrece la salida para el análisis de los datos.

A continuación se describe con más detalle como opera un filtro digital.

Para describir esto pensemos en una caja registradora, este es probablemente la mejor forma de ejemplificar la forma en que opera un filtro digital. Dicha caja satisface todas las nociones de un filtro: acepta entradas (el precio de cada artículo) y produce una salida (el costo total más el impuesto).

Se puede describir la operación de la caja registradora después de definir las siguientes notaciones:

- 1.- Asignaremos a cada artículo comprado, con un entero que irá de 1 hasta  $k$ . Así el primer artículo tomado tendrá el número uno, el segundo el número dos, y así sucesivamente hasta  $k$  artículos.
- 2.- Es necesario asignar una notación al precio de cada artículo, por lo tanto al  $k$ -ésimo artículo le corresponderá el precio  $X_k$ . Por ejemplo el artículo dos tendrá un precio de  $X_2$  pesos.
- 3.- Debemos asignar a la salida de la caja una notación, a ésta le llamaremos  $y_k$ , que representará el total después de que el  $k$ -ésimo artículo ha sido registrado.

Podemos, ahora, describir la operación de este filtro que es la caja registradora:

La forma básica de la caja registradora sólo suma los precios de todos los artículos para producir un total, pero la salida de la caja registradora está relacionada con las entradas a través de la siguiente ecuación:

$$y_k = X_k + X_{k-1} + X_{k-2} + \dots + X_0 \quad (3.2.1)$$

El gran total, es decir, la cantidad a pagar, es la salida de la caja registradora después de que se ha sumado el último artículo. Entonces se tiene  $k$  artículos, y por tanto el gran total es  $y_k$ .

Es posible expresar la operación en otra notación más compacta, si pensamos que para sacar un nuevo total es necesario sumar el precio del nuevo artículo al total anterior, de la siguiente forma:

$y_k$  es el nuevo total,  $y_{k-1}$  es el total previo, y  $X_k$  es el precio del nuevo artículo, por tanto:

$$y_k = y_{k-1} + X_k \quad (3.2.2)$$

Donde

$$y_{k-1} = X_{k-1} + X_{k-2} + \dots + X_0 \quad (3.2.3)$$

Aplicando el resultado de la ecuación 3.2.3 a la ecuación 3.2.2 se tiene que:

$$y_k = (X_{k-1} + X_{k-2} + \dots + X_0) + X_k \quad (3.2.4)$$

$$y_k = X_{k-1} + X_{k-1} + X_{k-2} + \dots + X_0$$

Al gran total  $y_k$  sólo hace falta agregarle el 15 % del impuesto, que se calcula de la siguiente manera:

$$y_k = 1.15 X_k + 1.15 X_{k-1} + 1.15 X_{k-2} + \dots + 1.15 X_0 \quad (3.2.5)$$

Esta ecuación se puede representar de forma recursiva de la siguiente manera.

$$y_k = y_{k-1} + 1.15X_{k-1} \quad (3.2.6)$$

De esta forma tenemos representado mediante las ecuaciones 3.2.5 y 3.2.6, las operaciones de los filtros digitales en su forma no-recursiva y recursiva respectivamente.

Como se puede observar para la operación de los filtros digitales, sólo se requiere de operaciones aritméticas básicas, lo que facilita su representación matemática, así como el análisis de éstos. A continuación se mencionará las diferencias relevantes que existen entre los filtros digitales y los filtros analógicos.

### 3.3 FILTROS DIGITALES VS ANALÓGICOS

Los filtros analógicos y digitales difieren por la naturaleza de las señales de entrada y salida que tienen: es decir, un filtro analógico procesa entradas analógicas y genera salidas analógicas, mientras que un filtro digital procesa y genera datos digitales. Estas diferencias en los datos de entrada y salida dictan la diferencia en las técnicas de procesamiento. Los filtros analógicos están basados en operaciones matemáticas diferenciales, mientras que los filtros digitales requieren solamente de sumas, multiplicaciones y operaciones para retardar.

En ambos tipos de filtros los datos son representados, normalmente, por una variable independiente y una dependiente. La variable dependiente es el dato y la variable independiente es el orden del dato. Por ejemplo, si se quiere medir la temperatura vs tiempo, la variable dependiente es la temperatura y la independiente es el tiempo.

Podemos decir que las diferencias entre los dos tipos de filtros se encuentran solamente en los datos de la variable independiente. Los datos analógicos se caracterizan por ser la variable independiente continua en el tiempo y los datos digitales tienen una variable independiente discreta. En el ejemplo de la medición de la temperatura cuando la medición es continua el tiempo es continuo.

Algunas veces las diferencias entre los datos analógicos y los digitales pueden ser confusos. Supongamos que alteramos el ejemplo de medir temperatura vs tiempo, y tomamos mediciones de temperatura cada hora en este caso, el comportamiento de la temperatura contra el tiempo es aún analógico, pero los datos de la temperatura contra tiempo son digitales. Esto se debe a que la variable independiente ahora es discreta: 1 hora, 2 horas, .... etc. Con lo anterior podemos decir que es posible convertir un dato analógico a un dato digital, la forma de convertir es restringir la variable independiente y tomar valores discretos, como el ejemplo anterior.

Resumiendo, los datos digitales son caracterizados por tener una variable independiente discreta, algunos datos son naturalmente digitales y todos los datos pueden ser convertidos a digitales con solo restringir las variables independientes. Los datos digitales son numerados por índices, éstos pueden seguir al dato en un parentesis o seguir al dato con un subíndice.

Debido a que la variable independiente es discreta, generalmente se usan índices enteros. Por ejemplo, la temperatura en un cuarto a la primera hora es denotada con  $T(1)$  ó  $T_1$ . Los índices provienen de un orden a los datos, debido a esto los datos digitales son representados como una secuencia ordenada de números. La secuencia puede ser finita, comenzar y terminar en cualquier índice arbitrario.

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_{60} \quad (3.3.1)$$

La forma más general de representar la secuencia de datos es iniciar en menos infinito e ir hacia adelante:



$$\dots X_{-1}, X_0, X_1, \dots$$

$$(3.3.2)$$

Como hemos visto la representación matemática de los datos puede ser denotada de distintas maneras, pero para fines del presente trabajo emplearemos la notación representada en la ecuación 3.3.2.

### 3.- MUESTREO

Muchas de las señales que son procesadas con filtros digitales son originalmente señales analógicas. Estas señales deberán ser convertidas a señales digitales para ser procesadas con un filtro digital. El proceso de convertir una señal es importante, es por esta razón que se debe entender antes de discutir el proceso de filtrado digital.

La figura 3.4.1 muestra la conversión de una señal analógica  $x(t)$ , a una secuencia digital  $X_k$ , la entrada  $x(t)$  es procesada por un convertidor analógico-digital (ADC) para producir una salida digital  $X_k$ .

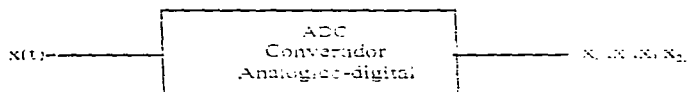


Figura 3.4.1. Conversión de una señal analógica a una señal digital.

Los convertidores analógicos-digitales pueden muestrear una señal analógica tomando muestras de la amplitud de la señal a lo largo de la variable independiente (usualmente tiempo). Al ser muestreada la variable independiente se consigue convertir a una señal analógica con variable independiente continua en una señal analógica de índices discretos, esto es, en una señal digital. La amplitud deberá ser muestreada porque muchos filtros digitales son implementados en computadoras digitales, las cuales no pueden representar números con una precisión arbitraria, antes de que la señal digital sea procesada por la computadora el convertidor analógico-digital deberá transformar los valores diferenciales de voltaje (precisión infinita) a valores de precisión finita. Este proceso es conocido como cuantización.

Entonces, sin la cuantización es imposible representar con precisión los valores de las señales analógicas en la computadora. El ADC usa números que la computadora puede representar y manipular a través de las tablas de verdad. La diferencia entre el dato actual y el valor que es presentado a la computadora es llamado error de cuantización, este causa incertidumbre en la representación que hace la computadora de los datos. Generalmente, la exactitud de la computadora y del ADC son seleccionados con un error de cuantización tan pequeño como el ruido inherente de la señal analógica. Esto permite al diseñador tratar al error de cuantización como ruido e ignorar los efectos de la cuantización. Cuando esto no es posible (generalmente porque el costo de las computadoras o los ADC de alta-precisión no lo permiten), el error de cuantización puede ser un problema y podría degradar el funcionamiento del filtro digital. Para el presente trabajo asumiremos que es posible trabajar con la precisión necesaria, y por tanto podremos ignorar el error de cuantización.

EL ADC muestrea la señal analógica a lo largo de la variable independiente, este muestreo lo realiza al evaluar la señal analógica en valores periódicos de la variable independiente y entonces asigna los valores a los elementos sucesivamente de la secuencia digital. Generalmente, la señal analógica es muestreada en una relación fijada previamente, por tanto, las muestras son igualmente espaciadas a lo largo de la variable independiente.

Denotaremos este espacio como  $T$ , el cual representa el periodo de muestreo. El  $k$ -ésimo elemento de la secuencia digital es la señal analógica cuantizada en  $KT - t_0$ ,

$$X_k = Q\{X(KT + t_0)\} \quad (3.4.1.)$$

Donde el operador  $Q\{ \}$  representa el proceso de cuantización, y  $t_0$  es el valor de la variable independiente cuando el elemento cero fue muestreado. Por ejemplo, si queremos medir la temperatura de un cuarto, podemos decir que iniciaremos las mediciones a las 13:00 hrs del día,  $t_0$ , y haremos evaluaciones, de la temperatura cada 15 minutos,  $T$ .

El proceso de muestreo se ilustra en la figura 3.4.2. Las líneas horizontales denotan los valores de los datos que pueden ser interpretados por una computadora digital (cuantización), y las líneas verticales representan los valores de la variable independiente donde las muestras son tomadas. El  $k$ -ésimo elemento de la secuencia digital es determinado por la intersección de la línea horizontal y la  $k$ -ésima línea vertical en donde se encuentra el valor del dato analógico en el tiempo  $KT$  y  $t_0$ .

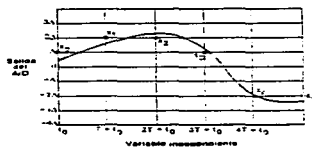


Figura 3.4.2. Proceso de muestreo.

El resultado de la secuencia digital no representa exactamente a la señal analógica porque está tiene valores imprecisos de la amplitud de la señal analógica. Asumiremos que el ADC tiene la suficiente exactitud para ignorar los efectos de la cuantización.

## Relación de muestreo

El periodo de muestreo  $T$ , de una señal o su equivalente, y la relación de muestreo  $1/T$  determinan el número de muestras que se tomarán a lo largo de la variable independiente.

Es fácil inferir que entre más rápido se tomen muestras de una señal analógica mejor será la representación que de ésta se tenga, sin embargo, el emplear esta filosofía para diseñar nos lleva a considerar computadoras y ADC muy costosos, por tanto, es necesario determinar una relación mínima de muestreo que permita representar a una señal analógica. Cabe señalar que existen señales analógicas que varían muy lentamente como la que se muestra en la figura 3.4.3a, y que por tanto pueden ser representadas exactamente con señales digitales muestreadas con un índice bajo de muestreo. Otro tipo de señales pueden variar rápidamente, como la que se muestra en la figura 3.4.3b debido a esto no pueden ser perfectamente representadas con una señal digital, sin embargo, la representación de estas señales demanda una mayor rapidez en el muestreo con el fin de minimizar estas imperfecciones o ambigüedades.

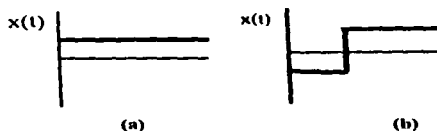


Figura 3.4.3. Dos señales muestreadas donde a) representa una señal constante y b) una señal escalón.

Apoyados en un análisis matemático de funciones seno y coseno, éstas presentan variaciones lentas y rápidas, se ha demostrado<sup>1</sup> que al muestrear señales analógicas cosenoidales se pueda generar una ambigüedad, esto significa que dos señales analógicas de diferentes frecuencias puede generar señales digitales idénticas, por ejemplo, señales analógicas de frecuencias  $\omega$  y  $\omega + 2\pi/T$  respectivamente. Al proceso descrito anteriormente se le conoce como aliasing, porque a través del proceso de muestreo de cosenos a diferentes frecuencias éstos pueden tener la misma identidad digital, es decir, una puede asumir el aliasing de otra. Para prevenir tal aliasing el periodo de muestreo tendrá que ser lo suficientemente pequeño para acomodar las variaciones que tenga la señal analógica.

$$T < \frac{\pi}{|\omega|} \quad (3.4.2)$$

Donde:

T = Período de muestreo  
 $\pi$  = Constante  
 $\omega$  = Frecuencia

De acuerdo al teorema de Nyquist, una señal tendrá que ser muestreada al menos dos veces en un periodo. Si esto no es así, la secuencia digital será interpretada como si procediera de una señal de baja frecuencia.

Se han usado funciones seno y coseno porque este tipo de funciones presentan una forma conveniente de medir que tan rápido una señal cambia con la frecuencia. Sin embargo, las conclusiones anteriores de aliasing pueden ser extendidas a señales arbitrarias, es posible hacer esto porque muchas señales pueden ser representadas como una suma de cosenos y senos.

Se ha demostrado<sup>2</sup> que cualquier componente de una señal con frecuencias mayores que  $\pi/T$  presentará el problema de aliasing por el proceso de muestreo. Por tanto una señal analógica que contiene componentes en alta frecuencia será representado inexactamente por una secuencia digital, porque los componentes de alta frecuencia son duplicados por el muestreo. La regla de muestreo para señales arbitrarias es que la relación de muestreo deberá ser lo suficientemente grande como para acomodar a los componentes de alta frecuencia de la señal.

Al diseñar se deberá asegurar que los componentes que probablemente sean duplicados tengan amplitudes lo suficientemente pequeñas que se pueda ignorar efectivamente el problema de aliasing. Esto generalmente se hace al pasar los datos analógicos a través de un filtro analógico que atenúe los componentes en alta frecuencia antes de ser muestreada la señal. Estos son llamados filtros anti-aliasing, cabe señalar que estos filtros no previenen el aliasing, sólo reducen estas consecuencias.

<sup>1</sup> Williams Charles s. Designing digital filters, capítulo 1, pag 1.13

<sup>2</sup> Williams Charles s. Designing digital filters, capítulo 1, pag 1.24

### 3.5 FORMAS DE LOS FILTROS DIGITALES

Los filtros digitales se pueden clasificar en dos formas básicas: los filtros no-recursivo y los recursivos. Un filtro no-recursivo genera su salida por la simple evaluación de las entradas por su correspondiente constante y finalmente al efectuar la suma de estas evaluaciones nos dará la salida. Las constantes son llamadas coeficientes y éstas determinan el filtro. Un filtro no-recursivo se puede caracterizar mediante la expresión

$$y_k = C_m X_{k-m} + C_{m-1} X_{k-m+1} + \dots + C_0 X_k + \dots C_{m+1} X_{k+m-1} \quad (3.5.1)$$

Donde este filtro calcula la salida,  $y_k$ , desde la entrada,  $X_k$ , y las  $m$  entradas que preceden a  $X_k$ ,  $X_{k-1}, \dots, X_{k-m}$ , y las  $m$  entradas que siguen a  $X_k$ ,  $X_{k+1}, \dots, X_{k+m}$ . La salida es la suma de la entrada  $X_k$  y las  $2m$  entradas (las que preceden y las que siguen a  $X_k$ ). Nótese que las entradas no contribuyen igualmente a la salida. La contribución de cada elemento es decidida por el coeficiente con que cada uno es multiplicado. Si el coeficiente es grande, el elemento en particular puede afectar dramáticamente a la salida. Si el coeficiente es pequeño, el elemento tendrá un efecto proporcionalmente pequeño sobre la salida del filtro. Por ejemplo, si el coeficiente,  $C_m$ , es cero, la entrada,  $X_k$ , no tendrá un efecto sobre  $y_k$ . Sin embargo,  $X_k$  podrá afectar a las futuras salidas  $y_{k+1}$ ,  $y_{k+2}$ , etc.

La notación anterior que describe a un filtro digital no-recursivo es extensa, pero es posible compactar esta definición utilizando el símbolo de sigma para la sumatoria.

$$y_k = \sum_{i=m}^{m+1} C_i X_{k-i} \quad (3.5.2)$$

En la figura 3.5.1 se muestra la representación de un filtro digital no-recursivo.

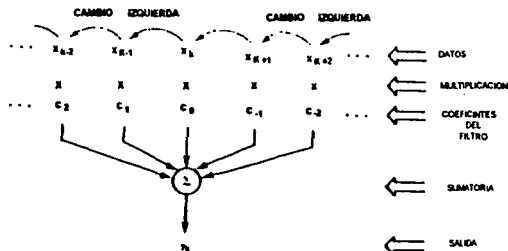


Figura 3.5.1. Filtro digital no-recursivo.

Los datos de entrada  $X_{k-m} \dots X_{k+m}$  son multiplicados por los coeficientes,  $C_m \dots C_m$  y los productos son pasados a lo largo del sumador para generar la salida,  $y_k$ . La siguiente salida,  $y_{k+1}$ , es generada de la misma forma, pero en este caso el dato es movido una posición hacia la izquierda antes que a  $X_k$ . En general los  $m$ -ésimos coeficientes multiplican al  $X_{k+1-m}$  elemento para generar la salida  $y_{k+1}$ , quedando de la siguiente manera:

$$y_{k+1} = \sum_{i=m}^{m+1} C_i X_{k+1-i} \quad (3.5.3)$$

La secuencia de saltos  $X_{k+1}$  es sólo dato de la ecuación 3.5.2 avanzando por un índice. Los únicos cuidados que se deben tener al calcular las salidas es que se están usando los datos correctos de entrada en las multiplicaciones y que los coeficientes sean correctamente calculados.

La segunda forma de un filtro digital es la recursiva. En este caso la salida no es solamente función de las entradas, sino que además también depende de las salidas anteriores. Un filtro digital recursivo es definido como:

$$y_{k+1} = \sum_{i=-m}^m C_i X_{k+1-i} + \sum_{j=1}^n d_j y_{k-j} \quad (3.5.4)$$

La primera suma es la forma del filtro digital no-recursivo. La segunda suma es llamada la porción recursiva del filtro. Esta segunda sumatoria muestra como la salida está relacionada con las entradas pasadas. Los coeficientes recursivos son denotados  $d_j$  y son usados para evaluar las salidas pasadas  $y_{k-j}$ . Cuando todos los coeficientes recursivos son cero, la salida se convierte en un filtro no-recursivo. Por lo tanto los filtros no-recursivos son un caso especial de los filtros recursivos.

La operación del filtro recursivo se ilustra en la figura 3.5.2. El lado izquierdo de la figura es la proporción no recursiva del filtro. El lado derecho es la parte recursiva del filtro. La salida de este filtro es la suma de los lados izquierdo y derecho. Nótese que el lado derecho recibe sus "entradas" desde la salida del filtro.

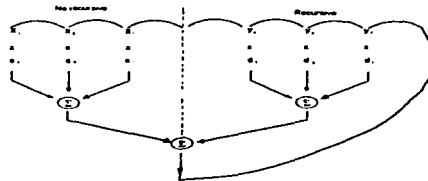


Figura 3.5.2. Filtro digital recursivo.

Estos filtros son implementados de una manera similar que los filtros no-recursivos, toman un índice particular,  $K$ , y calculan la salida para este índice. Sin embargo, la operación de los filtros recursivos es complicada por el hecho de que la salida en el tiempo  $K$  depende de una previa salida así como también de las entradas. Por lo tanto, estos filtros serán operados secuencialmente, y la salida para el índice  $K$  será calculada antes de calcular la salida para el índice  $K+1$ . El problema es: ¿dónde debemos iniciar el cálculo de las salidas?

Para contestar esta pregunta debemos asumir que es necesario considerar condiciones iniciales antes de comenzar los cálculos. Si esto no se hace no sabremos donde comenzar el cálculo. Generalmente se asume que las entradas y salidas con índice negativos son cero. Después de esto deberán calcularse secuencialmente las salidas, debido a que estas serán usadas sucesivamente por las demás salidas del filtro.

Estas son las dos formas que se han considerado. Existen otras (forma lattice), pero estas se encuentran más allá de nuestro enfoque. Sin embargo, la mayoría de los filtros son recursivos o no-recursivos.

### 3.6 RESPUESTA DE LOS FILTROS A UN CIERTO TIPO DE ENTRADA

Es posible calcular la salida de un filtro en particular para cualquier tipo de entrada dada. Pero algunas de estas entradas son más interesantes que otras. En esta sección se introducen tres entradas especiales que definen la salida del filtro como una respuesta a estas entradas: impulso, escalón digital y rampa digital.

#### ***Entrada impulso***

La primera entrada y quizás la más interesante es el impulso. El impulso digital es una entrada que tiene un valor de 1 si el  $k=0$  y 0 de lo contrario. El impulso es definido como sigue:

$$i_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases} \quad (3.6.1)$$

Cuando una entrada impulso es presentada en un filtro la salida es llamada filtro con respuesta impulso.

#### ***Escalón digital***

El escalón digital es 1 para  $k$  positivos (incluyendo cero) y 0 para  $k$  negativos. Este es definido como:

$$s_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases} \quad (3.6.2)$$

Cuando una entrada escalón es presentada en un filtro, la salida del filtro es llamada filtro con respuesta escalón.

#### ***Rampa digital***

La última entrada es la rampa digital. Esta es una secuencia que se incrementa linealmente para  $k$  positivos y es cero para  $k$  negativos.

$$r_k = \begin{cases} k, 0 & k \geq 0 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases} \quad (3.6.3)$$

De la misma forma cuando un filtro presenta una entrada rampa la salida del filtro es llamada filtro con respuesta rampa.

A continuación se presenta la respuesta impulso aplicada a las dos formas generales de los filtros, se presentan únicamente esta respuesta debido a que provee de dos clasificaciones que serán vistas más adelante.

### Respuesta impulso para un filtro no-recursivo digital en general

La respuesta impulso es simplemente la salida del filtro cuando un impulso es aplicado como entrada. Esta respuesta es lo suficientemente importante que merece cambiar nuestro símbolo  $Y_k$ , llamándolo ahora respuesta impulso  $h_k$ . La forma general que toma un filtro no-recursivo es tomado de nuestra definición:

$$h(k) = y(k) = \sum_{i=-n}^m C(i)Y(k-i) \quad X_k = \text{impulso} \quad (3.6.4)$$

La entrada es un impulso, esto significa que:

$$X_k = x_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases} \quad (3.6.5)$$

o

$$X_{k-i} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases} \quad (3.6.6)$$

Por lo tanto cada producto de la suma es cero excepto el producto donde  $k = i$ . La respuesta impulso del filtro no-recursivo es el coeficiente del filtro.

$$h(k) = c(k) \quad (3.6.7)$$

Esta relación entre la respuesta impulso y los coeficientes de un filtro digital no-recursivo hace a la respuesta impulso como una forma natural de describir a estos filtros. Supóngase que se tiene a un filtro digital no-recursivo en una caja negra y se desea medir sus coeficientes. Se puede hacer esto con solo poner un impulso en la entrada y observar su respuesta impulso.

La longitud de porción que no es cero de la respuesta impulso del filtro es dictada por el número de coeficiente que tenga el filtro. Esto es los filtros tendrán a lo más  $2m+1$  coeficiente no cero, y por tanto la respuesta impulso podrá no ser mayor que  $2m+1$ . Por esta razón los filtros no-recursivos son algunas veces llamados filtros de respuesta finita (FIR).

### Respuesta impulso para filtros recursivos en general

La respuesta impulso del filtro recursivo es más compleja. La forma general del filtro recursivo es representada por la ecuación 3.6.8.

$$h(k) = y(k) = \sum_{i=-n}^m c(i)x(k-i) + \sum_{j=1}^n d(j)y(k-j) \quad (3.6.8)$$

$$x(k) = \text{impulso}$$

Usando la misma línea de razonamiento que la anterior podemos notar que solamente los términos  $k=i$  contribuyen a la suma no recursiva:

$$h(k) = c(k) + \sum_{j=1}^n d(j)h(k-j) \quad (3.6.9)$$

Nótese que la respuesta impulso de un filtro recursivo puede permanecer en no cero para todos los índices. La porción recursiva continúa generando una salida después de que los coeficientes  $c(k)$ s son cero. Por lo tanto estos filtros son alguna veces referidos como filtros de respuesta de impulso infinita (IIR).

### 3.7 PROPIEDADES DE LOS FILTROS DIGITALES

Se han seleccionado las formas recursiva y no recursiva porque presentan algunas propiedades que servirán como herramientas para construir y analizar filtros digitales. Esta sección presenta algunas de las propiedades que podrían ser utilizadas en nuestro desarrollo. Consideraremos solamente la forma recursiva, porque la forma no recursiva es un caso especial de ésta.

**SUPERPOSICIÓN:** sea un filtro al cual se le aplica una entrada  $X_k$  y produce una salida  $y_k$ , y otro filtro con una entrada  $u_k$  el cual produce una salida  $v_k$ . Un filtro presenta la propiedad de superposición si y sólo si la entrada de  $X_k + U_k$  genera una salida de  $y_k + v_k$ . La definición se ilustra en la figura 3.7.1.

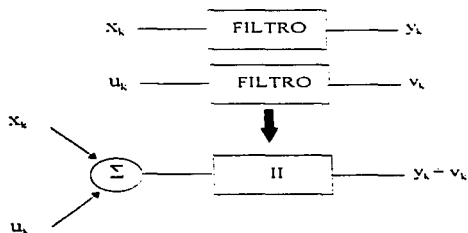


Figura 3.7.1. Propiedades de superposición.

**HOMOGENEIDAD:** sea un filtro con una entrada  $x_k$  el cual genera una salida  $y_k$ . Un filtro presenta homogeneidad si y sólo si a la entrada  $x_k$  lo multiplicamos por una constante  $a$ , de tal forma que  $ax_k$  genera una salida  $ay_k$ . Esta definición se ilustra en la figura 3.7.2.



Figura 3.7.2. Homogeneidad.

**INVARIANTES A LOS CAMBIOS:** sea un filtro con una entrada  $x_k$  el cual genera una salida  $y_k$ . Un filtro presenta esta propiedad si y sólo si al sumar a la entrada  $x_k$  un entero el filtro genera una salida  $y_k + 1$ . Esta definición se ilustra en la figura 3.7.3.





Figura 3.7.3. Filtro invariante a los cambios.

Los filtros que exhiben las propiedades mencionadas se llaman Filtros lineales invariantes con el tiempo. Todos los filtros recursivos poseen estas propiedades, por lo tanto son lineales.

Es importante mantener estas propiedades en mente. Hemos restringido nuestra investigación a filtros digitales lineales, facilitando con esto el diseño y análisis de los filtros que se usarán en el analizador de señales de audio. A continuación mencionaremos las aplicaciones más elementales de este tipo de filtros y que es necesario conocer antes de continuar nuestro trabajo.

### 3.8 COMBINACIÓN DE FILTROS DIGITALES

En muchos casos es conveniente manejar la combinación de filtros digitales. Esto es porque:

- 1.- Algunos sistemas son compuestos por combinaciones de filtros digitales.
- 2.- Algunos esquemas de diseño descomponen a un filtro como la combinación de otros filtros. Cada uno de estos filtros individuales facilitan el diseño del filtro original.
- 3.- Manipular combinaciones de filtros es más práctico para trabajar.

En esta sección solamente son tratadas las combinaciones de filtros en paralelo y cascada. Otro tipo de arreglos son posibles, pero éstos no serán considerados porque no se requieren para el presente trabajo.

Dos filtros en cascada se muestran en la figura 3.8.1. La salida de un filtro sirve como la entrada del otro. La forma de cascada tiene un entrada (la extrema izquierda) y una salida (la extrema derecha). Por tanto los filtros en cascada pueden ser representados como un nuevo filtro equivalente, como se muestra en la línea punteada de la figura 3.8.1.

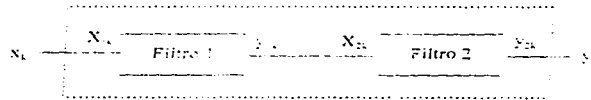


Figura 3.8.1. Combinación de dos filtros en cascada.

La forma en paralelo se muestra en la figura 3.8.2. Ambos filtros tienen una entrada en común, por tanto esta forma tiene solamente una entrada. La salida de los filtros en paralelo es sólo la suma de las salidas individuales de los filtros. Por lo tanto esta forma tiene una sola salida.

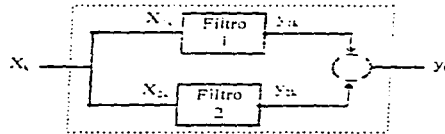


Figura 3.8.2. Combinación de dos filtros en paralelo.

Hasta el momento hemos descrito a los filtros digitales y algunas de sus formas y características generales. Ahora es necesario contar con ciertas herramientas que nos ayudarán a diseñar y analizar a los filtros digitales.

### 3.9 RESPUESTA EN FRECUENCIA DE LOS FILTROS DIGITALES

La respuesta en frecuencia es una abstracción matemática que se empleará para el estudio de los filtros digitales. Ésta nos ayudará a describir el comportamiento en frecuencia de los filtros. El buen manejo de esta abstracción facilitará el análisis y descripción de los filtros digitales.

La respuesta en frecuencia es denotada  $H(\omega)$ , donde  $\omega$  es la frecuencia de la función.

$H(\omega)$  es la función de transferencia y la función de transferencia es una relación de la salida entre la entrada.

#### Respuesta en frecuencia para filtro no-recursivo

Sea un filtro no-recursivo con una entrada de  $x_k = e^{j\omega k}$ .

$$y_k = \sum_{l=-m}^m C_l e^{j[\omega(k-l)]} \quad (3.9.1)$$

Su respuesta en frecuencia será:

$$H(\omega) = \sum_{l=-m}^m C_l e^{-j\omega l} \quad (3.9.2)$$

donde:

$$e^{-j\omega l} = \cos \omega l - j \operatorname{sen} \omega l \quad (3.9.3)$$

$$\operatorname{Re}\{H(\omega)\} = \sum_{l=-m}^m C_l \cos \omega l \quad (3.9.4)$$

$$\operatorname{Im}\{H(\omega)\} = \sum_{l=-m}^m C_l \operatorname{sen} \omega l \quad (3.9.5)$$

Al expresar la función en sus componentes real e imaginario nos facilita expresar la respuesta en frecuencia en términos de magnitud y fase, quedando como sigue:

$$\text{Magnitud: } |H(\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}\{H(\omega)\}^2 + \operatorname{Im}\{H(\omega)\}^2} \quad (3.9.6)$$

$$\text{Fase: } \phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{\operatorname{Im}\{H(\omega)\}}{\operatorname{Re}\{H(\omega)\}} \quad (3.9.7)$$

### Respuesta en frecuencia para filtro recursivo

Considerando la ecuación general de los filtros recursivos con una entrada de  $x_k = e^{j\omega k}$ .

$$y_k = \sum_{l=-m}^m C_l e^{j\omega(l-k)} - \sum_{l=1}^n d_l y_{k-l} \quad (3.9.8)$$

Teniendo como respuesta en frecuencia:

$$H(\omega) = \frac{\sum_{l=-m}^m C_l e^{-j\omega l}}{1 - \sum_{l=1}^n d_l e^{-j\omega l}} \quad (3.9.9)$$

Expresando la respuesta en frecuencia en términos de senos y cosenos tenemos:

$$H(\omega) = \frac{\sum_{l=-m}^m C_l \cos \omega l - j \sum_{l=-m}^m C_l \operatorname{sen} \omega l}{1 - \sum_{l=1}^n d_l \cos \omega l - j \sum_{l=1}^n C_l \operatorname{sen} \omega l} \quad (3.9.10)$$

Esta expresión la podemos expresar en términos de magnitud y fase.

$$|H(\omega)| = \frac{N(\omega) e^{j\phi(\omega)}}{D(\omega) e^{j\delta(\omega)}} = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} e^{j[\phi(\omega) - \delta(\omega)]} \quad (3.9.11)$$

$$\phi(\omega) = \gamma(\omega) - \delta(\omega) \quad (3.9.12)$$

$$|H(\omega)| = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} = \frac{\sqrt{\operatorname{Re}(\omega)^2 - \operatorname{Im}(\omega)^2}}{\sqrt{1 - \operatorname{Re}(\omega)^2 - \operatorname{Im}(\omega)^2}} \quad (3.9.13)$$

### Respuesta en frecuencia para filtros en cascada

La respuesta en frecuencia de un filtro en cascada está definida por el producto de las respuestas individuales:

$$H_{\text{cascada}}(\omega) = H_1(\omega) H_2(\omega) \quad (3.9.14)$$

Y es mostrado en la figura 3.9.1

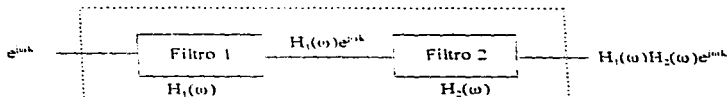


Figura 3.9.1. Combinación de dos Filtros en cascada.

### Respuesta en frecuencia de una combinación en paralelo

La respuesta en frecuencia para una combinación en paralelo es la suma de las respuestas individuales.

$$H_{\text{paralelo}}(\omega) = H_1(\omega) + H_2(\omega) \quad (3.9.15)$$

El cual es ilustrado en la figura 3.9.2.

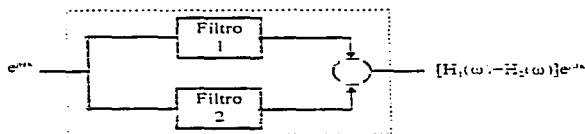


Figura 3.9.2. Combinación de dos Filtros en paralelo.

Los arreglos de filtros en paralelo y cascada son utilizados comúnmente en sistemas de filtrado digital. En muchos casos los filtros son arreglados para funcionar de una forma determinada. En otros casos los filtros son combinados para funcionar como un filtro en particular. Un ejemplo del uso de estas combinaciones de filtros es aquella en la que se realiza un filtrado "al cuadrado".

Los filtros en cascada diseñados de cierta forma generan un filtro cuadrado el cual tiene mejor respuesta en frecuencia que el filtro original. Es llamado "cuadrado" por que la respuesta en frecuencia del filtro se obtiene de multiplicar dos filtros de iguales características obteniéndose por tanto una respuesta en frecuencia al cuadrado.

$$H_{\text{cascada}}(\omega) = H(\omega)H(\omega) \quad (3.9.16)$$

$$H_{\text{cascada}}(\omega) = H^2(\omega)$$

### 3.10 LA TRANSFORMADA Z

La respuesta en frecuencia es la característica más usada de los filtros digitales no-recursivos y recursivos, pero la respuesta en frecuencia se obtiene considerando únicamente entradas senoidales, por lo que es necesario considerar a otro tipo de herramienta que nos permita conocer el comportamiento del filtro con otro tipo de entradas. La transformada Z permite conocer el comportamiento del filtro con otro tipo de entradas. Por ejemplo, aplicaremos una entrada impulso al filtro, para esto vamos a considerar una entrada  $X_k = Z^k$ , donde k es el índice y Z es un numero complejo. Definiremos como transformada Z del filtro a la siguiente ecuación:

$$Z\{hi\} = H_z(Z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} hiZ^{-i} \quad (3.10.1)$$

La transformada Z es la evaluación de la sumatoria de cada una de las respuestas impulso. Nosotros adoptaremos la notación  $H_z(Z)$  para diferenciar la transformada Z de la respuesta en frecuencia del filtro  $H(\omega)$ .

Cabe mencionar que si tenemos la transformada Z de un filtro también tendremos la respuesta en frecuencia de éste. Esto se demuestra al evaluar a Z por el exponente complejo  $e^{-j\omega}$  y la constante C, por el impulso n, quedando como sigue:

$$H_z(Z)\Big|_{z=e^{-j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)(e^{-j\omega})^{-n} \quad (3.10.2)$$

$$H_z(Z)\Big|_{z=e^{-j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\omega}$$

En esta expresión el lado derecho de la igualdad es la respuesta en frecuencia del filtro. Entonces:

$$H(\omega) = H_z(Z)\Big|_{z=e^{-j\omega}} \quad (3.10.3)$$

La respuesta en frecuencia es la transformada Z para  $e^{jn}$ . Como  $e^{jn}$  toma una magnitud de 1 con un ángulo  $\omega$ , la respuesta en frecuencia es la transformada Z a lo largo de un círculo de radio unitario que está centrado en el origen.

Este círculo que en adelante llamaremos círculo unitario y la transformada Z se muestran en la figura 3.10.1. La magnitud de la respuesta en frecuencia es simplemente el valor de  $H_z(Z)$  con  $Z=e^{-j\omega}$ . Nótese que esta evaluación es periódica, el círculo es completamente recorrido cada  $2\pi$  cambios en  $\omega$ .

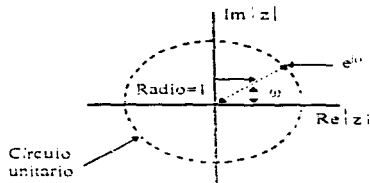


Figura 3.10.1. Círculo unitario en el plano Z.

#### Transformada Z para filtros no-recursivos

Sea la siguiente ecuación general para filtros no-recursivos:

$$y_k = \sum_{r=0}^m C_r X_{k-r} \quad (3.10.4)$$

Su transformada Z será:

$$H_z(Z) = \sum_{r=0}^m C_r Z^{-r} \quad (3.10.5)$$

### Transformada Z para filtros recursivos

Ecuación general para filtros recursivos:

$$y_k = \sum_{i=-m}^m C_i X_{k-i} + \sum_{i=1}^n d_i y_{k-i} \quad (3.10.6)$$

Su transformada Z será:

$$H_z(Z) = \frac{\sum_{i=-m}^m C_i Z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^n d_i Z^{-i}} \quad (3.10.7)$$

En esta ecuación la transformada Z es la relación de dos polinomios en Z. Los coeficientes del numerador son determinados por los coeficientes no-recursivos, y los coeficientes del denominador son los coeficientes recursivos.

### 3.11 POLOS Y CEROS

La transformada Z puede ser representada por un factor de ganancia y unos valores llamados polos y ceros. éstos son una forma más fácil de representar a la transformada como una relación de polinomios.

Los polos de la transformada Z son aquellos valores de Z donde  $H_z(Z)$  es infinito. La transformada Z puede irse a infinito debido a que el denominador sea cero o (polos finitos) el numerador vaya a infinito (polos infinitos). Los ceros de la transformada Z son aquellos valores de Z que causan que  $H_z(Z)=0$ . Esto ocurre cuando el numerador sea cero (ceros finitos) o cuando el denominador vaya a  $\infty$  (ceros infinitos).

La transformada Z es especificada por estos polos y ceros finitos y un factor de ganancia. Denotaremos a los ceros como  $z_m$ , los polos como  $p_n$ , y al factor de ganancia como G. Después de esto podemos expresar la transformada Z como la relación de ceros sobre los polos.

$$H_z(Z) = \frac{G(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n)} \quad (3.11.1)$$

La ecuación anterior es una forma más sencilla de expresar la relación de polinomios. Si efectuamos las multiplicaciones obtendremos la relación del polinomio total.

Para pasar la ecuación  $H_z(Z)$  a ganancia, polos y ceros, es necesario calcular las raíces del numerador para los ceros finitos, para los polos finitos es necesario calcular las raíces del denominador y la ganancia es un factor escalar que se calcula después de haber hecho un arreglo matemático de la ecuación. Desafortunadamente, encontrar estas raíces es muy difícil porque es necesario factorizarlo con un polinomio equivalente.

A menos que el polinomio sea de bajo orden o se encuentre en una forma conveniente, es necesario usar una computadora para calcular las raíces. En la actualidad es accesible contar con un paquete que pueda calcular estas raíces e inclusive representarlos gráficamente.

Como ya se ha dicho los polos y ceros determinan una forma accesible de presentar por medio de una ganancia, polos y ceros a una  $H_z(Z)$  polinomial. El manejo de polo y ceros permite calcular los coeficientes del filtro, a su vez también es posible obtener los polos y ceros a partir de los coeficientes.

Otro beneficio que presentan este tipo de representaciones es que de esta forma es posible trazar a la transformada Z en un plano de dos dimensiones. Excepto por la ganancia del filtro, toda la información de éste se encuentra contenida en los polos y ceros del plano Z. Generalmente se denota a los polos con la marca X y a la ceros con la marca O, así es posible trazar y visualizar a la  $H_z(Z)$ .

### 3.12. ESTABILIDAD DE LOS FILTROS DIGITALES

Una característica que deberá presentar un filtro al diseñarse es que sea estable. Un filtro estable tiene un número máximo de números representables. Cualquier intento por representar un valor mas allá de este máximo dara como resultado una inexactitud. Un filtro inestable tiene el suficiente potencial para generar valores que excederán la capacidad de representación de cualquier filtro; por consiguiente, un filtro inestable, la mayoría de las veces, causara fallas por mal funcionamiento en los sistemas de filtrado.

Se dice que un filtro es estable si cualquier secuencia de entradas continuas (valores-infinitos) produce una secuencia de salida continua. En otras palabras, un filtro inestable puede producir una larga cadena de valores arbitrarios a la salida, aunque se le haya dado una entrada continua de valores. Esto pasa en terminos de valores en los filtros, pero empleando las herramientas mencionadas anteriormente podemos decir que, un filtro es estable si sus polos se encuentran dentro del círculo unitario del plano Z definido en la seccion 3.10, es decir que los polos tengan una magnitud menor que 1.

Basado en las observaciones de "Charles S Williams" se ha encontrado que la estabilidad del filtro puede ser controlado por los polos de la ecuación, los ceros no pueden impactar en la estabilidad del filtro, esto es debido a que la respuesta impulso no crece hasta infinito, los ceros solamente afectan a la respuesta pero por un corto tiempo. Entonces los polos son los que determinan el crecimiento o decaimiento de las respuesta impulso, y por lo tanto son los que determinan la estabilidad del filtro.

Las anteriores observaciones fueron determinadas en filtros de bajo orden, es decir en polinomios sencillos, sin embargo estos resultados pueden extenderse a los filtros de mayor orden, si empleamos técnicas que pueden expresar a estos filtros de mayor orden en terminos de filtros de un polo y un cero y entonces aplicar en ellos las conclusiones de estabilidad.

El proceso que expresa a un filtro en particular en terminos de filtros de menor orden es llamado descomposición; esto es porque el filtro original es descompuesto en filtros de menor orden.

Existen solamente dos formas de descomponer a un filtro. Los filtros pueden ser descompuestos en combinaciones en cascada o combinaciones en paralelo de filtros de bajo orden.

La transformada Z de un filtro conformado por una combinación de filtros en cascada es simplemente el producto de las transformadas Z individuales.

$$H_z(Z) = H_{z_1}(Z)H_{z_2}(Z)\dots H_{z_n}(Z) \quad (3.12.1)$$

La transformada Z de la N combinación de filtros en paralelo es la suma de las transformada Z de cada uno de los filtros.

$$H_z(Z) = H_{z_1}(Z) + H_{z_2}(Z) + \dots + H_{z_n}(Z) \quad (3.12.2)$$

El emplear este tipo de combinaciones para descomponer un filtro requiere de un buen manejo algebraico o de un paquete de computadora que nos ayude a facilitar estos cálculos. Por lo anterior, para el presente trabajo se ha recurrido a emplear esta tipo de programas de computadoras que nos facilitarían el análisis.

Hasta aquí hemos visto que la respuesta en frecuencia puede quedar completamente determinada por las localidades de los polos y ceros. Y de alguna manera se ha visto que es posible "diseñar" un filtro recursivo por la simple visualización del plano  $Z$  y de efectuar los arreglos correspondientes, en los polos y ceros, ubicándolos dentro del círculo unitario para conseguir con esto su estabilidad. Desafortunadamente no es posible diseñar formalmente a un filtro de esta manera, por tanto es necesario contar con una herramienta que nos permita diseñar un filtro digital.

Ahora bien de acuerdo a la forma del filtro ya sea no-recursivo o recursivo, existen técnicas que aproximan a un filtro digital a partir de un filtro analógico.

De tal manera que para diseñar un filtro no-recursivo el método más empleado para aproximar un filtro es por el método de Fourier. Para los filtros recursivos existen dos técnicas conocidas que son la técnica del impulso invariante y la técnica de la transformación bilineal.

Para el diseño del analizador de señales de audio, motivo del presente trabajo, se ha decidido emplear filtros de forma recursiva, ya que un filtro no-recursivo es un caso especial de los filtros recursivos.

Ahora bien, para tener un buen diseño de un filtro digital es necesario una buena aproximación analógica, debemos de tener presente los conceptos de función de transferencia, respuesta en frecuencia y respuesta impulso para estos filtros.

Como se anotó anteriormente, nosotros podemos diseñar un filtro digital aplicando técnicas que aproximen un filtro analógico a un filtro digital. Una de estas aproximaciones para encontrar a un filtro digital es la respuesta impulso, esta es la mejor forma de aproximarse a un filtro analógico. Esta técnica llamada impulso invariante, satisface nuestras necesidades de aproximación, porque los filtros digitales y analógicos tendrán las respuestas impulso muy aproximadas.

A quedado demostrado que esta técnica es muy buena para aproximarse a un filtro analógico<sup>4</sup>, el único inconveniente que presenta es que puede darse al fenómeno de aliasing. Lo que nos lleva a considerar, al diseñar filtros en altas frecuencias, filtros anti-aliasing, para prevenir este fenómeno. O bien se podría utilizar otra técnica de aproximación que no cause aliasing como es el caso de la transformación bilineal que a continuación trataremos.

### 3.13 TRANSFORMACIÓN BILINEAL

La transformación bilineal provee al diseñador de una técnica alternativa de aproximación de filtros analógicos con filtros digitales.

Este método se deriva de la aproximación de una ecuación diferencial de primer orden con una ecuación indiferente.

Esta nueva perspectiva produce una técnica de aproximación que es generalmente más usada que el método del impulso invariante.

---

<sup>4</sup>Williams Charles s, Designing digital filters, capítulo 4, pag 460.



Todos los filtros analógicos lineales invariantes con el tiempo son descritos con una ecuación diferencial orden máximo. Por lo tanto, es factible obtener una ecuación indiferente del mismo orden, pero para facilidad, comenzaremos con una ecuación diferencial de primer orden.

Sea la siguiente una ecuación diferencial de primer orden

$$a \frac{dy(t)}{dt} + by(t) = cx(t) \quad (3.13.1)$$

Donde el operador diferencial se puede representar por:

$$y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} \quad (3.13.2)$$

Sustituyendo la ecuación 3.13.2 en 3.13.1 tenemos que:

$$ay'(t) + by(t) = cx(t) \quad (3.13.3)$$

Esta ecuación define a un filtro analógico con un solo polo en  $-b/a$  y una ganancia de  $c/a$ .

$$H_u(s) = \frac{c}{as + b} = \frac{\frac{c}{a}}{s + \frac{b}{a}} \quad (3.13.4)$$

La ecuación 3.13.3 es una expresión que implica el análisis tanto de  $y(t)$  como de su derivada. Debido a esto expresaremos la ecuación de una forma más sencilla mediante la eliminación de  $y(t)$  y emplear solamente  $y'(t)$ . Para poder hacer esto es necesario expresar  $y(t)$  como la integral  $y'(t)$  mas una condición inicial. De esta forma se da un paso más para obtener la transformación bilineal.

$$y(t) = \int_{t_0}^t y'(\tau) d\tau - y(t_0) \quad (3.13.5)$$

Hemos expresado el filtro como una ecuación integral porque de esta manera será más fácil aproximar a un filtro digital. Un filtro digital opera con datos en múltiplos entero del periodo de muestreo.  $T$ , entonces asignaremos a  $t=KT$  y  $t_0=KT-T$ .

$$y(kT) = \int_{kT-T}^{kT} y'(\tau) d\tau - y(kT-T) \quad (3.13.6)$$

Esta ecuación es muy aproximada a una ecuación indiferente excepto por el operador integral y la derivada. Por tanto es necesario manejar a la integral por medio de aproximaciones, para hacer esto emplearemos la regla del trapecoidal.

$$\int_{kT-T}^{kT} y'(\zeta) d\zeta \approx \frac{T}{2} [y'(kT) + y'(kT-T)] \quad (3.13.7)$$

Recordando que la regla del trapecioide es solamente una aproximación por lo tanto se tendrá una aproximación de una ecuación indiferente.

$$y(kT) \approx \frac{T}{2} [y'(kT) + y'(kT-T)] - y(kT-T) \quad (3.13.8)$$

Esta aproximación es muy próxima a un filtro digital, pero está aún tiene derivadas, por lo tanto es necesario eliminar a las derivadas, para ello regresemos a la ecuación 3.13.3 y reacomodemos la ecuación de tal manera que resolvamos la  $y'(t)$  de la ecuación.

$$y'(t) = \frac{c}{a} x(t) - \frac{b}{a} y(t) \quad (3.13.9)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación 3.13.8.

$$y(kT) \approx \frac{T}{2} \left[ \frac{c}{a} x(kT) - \frac{b}{a} y(kT) + \frac{c}{a} x(kT-T) - \frac{b}{a} y(kT-T) \right] + y(kT-T) \quad (3.13.10)$$

La siguiente ecuación representa la aproximación digital de un filtro analógico de un polo.

$$y(kT) = \frac{Tc}{2a + Tb} x(kT) + \frac{Tc}{2a + Tb} x(kT-T) - \frac{Tb - 2a}{2a + Tb} y(kT-T) \quad (3.13.11)$$

Este filtro tiene como transformada Z

$$H(Z) = \frac{Tc + TcZ^{-1}}{(2a + Tb) + (Tb - 2a)Z^{-1}} \quad (3.13.12)$$

Hemos obtenido un filtro digital de primer orden que se aproxima a un filtro analógico, pero éste no es todo el procedimiento de diseño. El paso final para lograrlo es relacionar a la transformada Z del filtro aproximado con la función de transferencia del filtro analógico. Para lograr esto es necesario arreglar a la transformada Z y poner a ésta,  $H(Z)$ , dentro de la función de transferencia del filtro analógico de primer orden, es decir, los términos en S son cambiados por Z quedando como sigue.

De la expresión 3.13.12 tenemos:

$$H(Z) = \frac{c}{a(\text{funcion de } z) + b} \quad (3.13.13)$$

y:

$$H(Z) = \frac{Tc(1 + z^{-1})}{Tb(1 + z^{-1}) + 2a(1 - z^{-1})} \quad (3.13.14)$$

Dividiendo 3.13.14 entre  $T(1-Z^{-1})$ , tenemos:

$$H(Z) = \frac{c}{a \left[ \frac{z}{T} \left( \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}} \right) \right] + b} \quad (3.13.15)$$

Esta expresión es la función de transferencia del filtro analógico, el operador S se reemplaza por la función de Z, es decir:

$$H(Z) = H_{\omega}(S) \Big|_{s = \frac{z}{T} \left( \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}} \right)} \quad (3.13.16)$$

La ecuación 3.13.16 muestra que un filtro analógico de un solo polo puede ser aproximado a un filtro digital con solo reemplazar a S con la función de Z. Esta relación entre S y Z es la transformación bilineal, la cual puede ser extendida a filtros analógicos de mayor orden con sólo descomponer al filtro analógico en su forma de paralelo (¿ después hacer uso de fracciones parciales para resolverlo).

$$H_{\omega}(s) = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \dots + \frac{A_m}{s-p_m} \quad (3.13.17)$$

Cada uno de estos filtros de un polo puede ser aproximado con la transformación bilineal:

$$H(Z) = \frac{A_1}{\frac{z}{T} \left[ \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}} \right] - p_1} + \frac{A_2}{\frac{z}{T} \left[ \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}} \right] - p_2} + \dots + \frac{A_m}{\frac{z}{T} \left[ \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}} \right] - p_m} \quad (3.13.18)$$

Sin embargo, si ponemos esta transformada Z sobre un denominador común, tendríamos  $H(Z)$  con todas las S reemplazadas con la función bilineal de Z. Por tanto, la función de transferencia no necesita ser descompuesta en su forma en paralelo para aplicar la transformada bilineal. Solamente es necesario hacer la sustitución de:

$$S = \frac{z}{T} \left[ \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}} \right] \quad (3.13.19)$$

Diseñar con la transformación bilineal es generalmente mucho más fácil que hacerlo con el impulso invariante, y como se ha mencionado la transformación bilineal no tiene problemas de aliasing.

Ya que ha sido desarrollada la técnica de transformación bilineal es necesario formalizar el método para poder emplearlo.

#### Técnica de diseño por transformación bilineal

En la aplicación de la técnica de diseño por la transformada bilineal se deberán seguir los siguientes pasos:

- Paso 1:** Encontrar la función de transferencia de un filtro analógico que posee las características que deseamos.
- Paso 2:** Seleccionar la relación de muestreo del filtro digital. La cual denotaremos como T, y estará dada en segundos por muestra.
- Paso 3:** Sustituir la ecuación 3.13.19 en la función de transferencia encontrada en el paso 1.
- Paso 4:** Calcular la transformada Z multiplicando el denominador y el numerador de mayor exponente por  $1-Z^{-1}$  y reacomodar los términos.
- Paso 5:** Es conveniente factorizar la ecuación final para obtener un mejor manejo matemático de la ecuación y de esta forma facilitar el análisis de los resultados. Se emplea antes de reemplazar el operador S por la función de transferencia Z, este método mapea los polos y ceros.

Existe un método alternativo para realizar la transformación bilineal, éste es usado especialmente cuando se tienen los polos y ceros de la función. Este método mapea los polos y ceros con la transformación bilineal es equivalente a mapear la variable S y después sustituirlo por la función de transferencia 3.13.19.

Por ejemplo, considérese un filtro analógico con polos  $p_1$  y ceros  $\zeta_1$ :

$$H_u(S) = \frac{(S - \zeta_1)(S - \zeta_2)\dots}{(S - p_1)(S - p_2)\dots} \quad (3.13.20)$$

Este filtro analógico se aproxima a un filtro digital de la siguiente forma:

$$H(Z) = \frac{\left(\frac{2}{T} \left[ \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}} \right] - \zeta_1\right) \left(\frac{2}{T} \left[ \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}} \right] - \zeta_2\right) \dots}{\left(\frac{2}{T} \left[ \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}} \right] - p_1\right) \left(\frac{2}{T} \left[ \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}} \right] - p_2\right) \dots} \quad (3.13.21)$$

Resolviendo los polos de este filtro y encontrando los valores de Z donde el denominador es cero, en otras palabras, necesitaremos adecuar las soluciones de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\frac{2}{T} \left[ \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}} \right] - p_1 = 0 \quad (3.13.22)$$

Afortunadamente, la transformación bilineal puede ser invertida, de este modo el filtro digital tiene polos en:

$$Z = \frac{2 + p_1 T}{2 - p_1 T} \quad (3.13.23)$$

Un argumento similar puede ser utilizado para los ceros, por tanto el filtro digital tiene ceros en:

$$Z = \frac{2 + \zeta_1 T}{2 - \zeta_1 T} \quad (3.13.24)$$

Por lo tanto los pasos 3 y 4 de nuestro procedimiento para la transformación bilineal puede ser reemplazado por el mapeo de polos y ceros de las ecuaciones 3.13.23 y 3.13.24.

### 3.14 TRANSFORMACIÓN BILINEAL POR MAPEO DE POLOS

En esta sección mostraremos como es posible aproximar a un filtro analógico con un filtro digital por el simple mapeo de los polos y ceros analógicos en el plano Z.

Consideramos un polo analógico en  $S = \tau_a - j\omega_a$ .

Este polo es mapeado a un polo,  $P_z$ , del plano Z, a través de la transformación bilineal.

$$P_z = \frac{2 - (\tau_a - j\omega_a)T}{2 - (\tau_a + j\omega_a)T} \quad (3.14.1)$$

$$P_z = \frac{2 - \tau_a T - j\omega_a T}{2 - \tau_a T - j\omega_a T}$$

Para continuar, es necesario expresar este mapeo dentro del plano Z en términos de magnitud y ángulo.

$$P_z = \sqrt{\frac{(2 - \tau_a T)^2 + (\omega_a T)^2}{(2 - \tau_a T)^2 + (\omega_a T)^2}} \quad (3.14.2)$$

$$\angle = \left( \tan^{-1} \frac{\omega_a T}{2 - \tau_a T} - \tan^{-1} \frac{\omega_a T}{2 - \tau_a T} \right) \quad (3.14.3)$$

Como siguiente paso se analizará la magnitud del polo.

Si  $\tau_a < 0$  significa que la magnitud del numerador es más pequeña que la del denominador, por lo que la magnitud del polo es menor que 1.

Si  $\tau_a = 0$  (el polo se encuentra en el eje  $j\omega$  del plano S): el polo del plano Z tendrá una magnitud = 1. Esto es el circuito unitario.

Si  $\tau_a > 0$ , este mapeado en el plano Z implica que el polo quedará fuera del círculo (la magnitud es mayor que 1).

De acuerdo a las observaciones anteriores podemos concluir que los polos estables del plano S son mapeados en los polos estables del plano Z, los polos en el eje  $j\omega$  son mapeados en el círculo unitario y los polos analógicos inestables son mapeados como polos digitales inestables. Por tanto, la técnica de transformación bilineal mapea al filtro analógico estable en un filtro digital estable, esta propiedad es fundamental, ya que permite obtener filtros digitales estables partiendo de un diseño de filtros analógicos estables.

La expresión para el ángulo del polo del plano Z es más complicado de interpretar. Si tomamos el caso especial de  $\tau_a = 0$  reducimos el ángulo a una forma mucho más simple.

$$\angle p_z \Big|_{\tau_a=0} = \tan^{-1} \frac{\omega_a T}{2} - \tan^{-1} \frac{-\omega_a T}{2} \quad (3.14.4)$$

Pero la tangente inversa es una función impar.

$$\angle p_z \Big|_{\omega=0} = 2 \tan^{-1} \frac{\omega_c T}{2} \quad (3.14.5)$$

Por lo tanto, un polo analógico en el eje  $j\omega$  con una parte imaginaria de  $j\omega_c$  será mapeada como un polo digital en el círculo unitario con un ángulo que tomaremos de la ecuación 3.14.5. Existe una relación no lineal (tangente) entre la componente imaginaria del plano S y el ángulo en el plano Z. Este efecto es ilustrado en la figura 3.14.1. Este fenómeno es llamado frequency warping y es desarrollado a continuación:

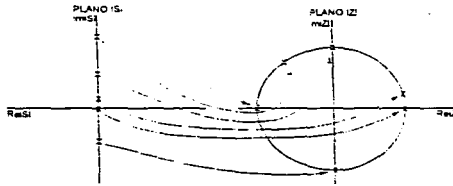


Figura 3.14.1. Mapeo de polos y ceros en el círculo unitario.

Comenzaremos con un filtro analógico con función de transferencia de  $H_a(s)$  y una respuesta en frecuencia de  $H_a(j\omega)$ . Este filtro es aproximado por un filtro digital con una transformada Z de  $H_z(z)$ .

$$H_z(z) = H_a \left( \frac{2}{T} \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \right) \quad (3.14.6)$$

El filtro digital tiene una respuesta en frecuencia de  $H(\omega)$  la cual se obtiene de evaluar la transformada Z con  $Z=e^{j\omega}$

$$H(\omega) = H_z(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = H_a \left( \frac{2}{T} \left( \frac{1-e^{-j\omega}}{1+e^{-j\omega}} \right) \right) \quad (3.14.7)$$

La relación de exponenciales en la ecuación 3.14.7 es sólo otra forma de expresar la tangente de  $\omega/2$ . Por lo tanto las respuesta en frecuencia digital y analógica son relacionadas a través de la ecuación.

$$H(\omega) = H_a \left( j \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2} \right) \quad (3.14.8)$$

Los filtros analógicos y digitales tienen la misma respuesta en frecuencia, excepto que existe una relación no lineal entre las frecuencias mencionada anteriormente. La ecuación 3.14.6 nos dice que la respuesta en frecuencia del filtro digital en  $\omega$  es la respuesta en frecuencia del filtro en  $jZT \tan(\omega/2)$ .

De esta manera las frecuencias analógicas y digital,  $\omega_c$  y  $\omega_d$  respectivamente, son relacionadas a través de la siguiente relación.

$$\omega_u = \frac{2}{T} \tan^{-1} \frac{\omega_d T}{2} \quad (3.14.9)$$

$$\omega_d = 2 \tan^{-1} \frac{\omega_u T}{2} \quad (3.14.10)$$

Esta frecuencia es ilustrada en la figura 3.14.2. La parte (a) muestra la frecuencia analógica como una función de la frecuencia digital (ecuación 3.14.7) y la parte (b) muestra a la fracción digital como una función de la fracción analógica.

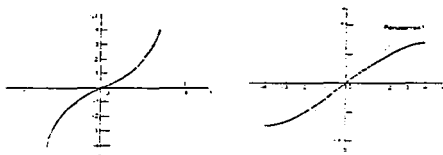


Figura 3.14.2. Relación entre frecuencias analógicas y digitales.

Notar que el rango completo de las frecuencias analógicas  $-\infty$  a  $\infty$ , es mapeado en el rango las fracción digitales  $(-\pi$  a  $\pi)$ . Por lo tanto, este no presenta aliasing y que el rango ha quedado restringido.

Sin embargo, el frequency warping causa una notable distorsión de las altas frecuencias analógicas y de tal forma son mapeados en la respuesta en frecuencia digital. En las bajas frecuencias analógicas (cerca del origen de la figura 3.14.1), la frecuencia digital es siempre una función lineal de la frecuencia analógica; la curva tiene una pendiente de  $T$ .

Pero como la frecuencia analógica es más grande, la pendiente tendrá a incrementarse en mayor proporción, por tanto la respuesta en frecuencia analógica se incrementará comprimiéndose dentro de la respuesta digital. Este efecto puede causar problemas, por que la relación no lineal entre las frecuencia analógica y digital distorsionara la respuesta en frecuencia. Esta distorsión es especialmente notable en altas frecuencias.

No es posible notar esto a simple vista, para podemos prevenir esta distorsión anticipandonos a ella la forma de hacerlo es diseñando filtros analógicos de predistorsión. Estos filtros son diseñados con la distorsión bilineal en mente, para que cuando las frecuencias de distorsión pasen a través de estas la distorsión sea evitada.

Supongamos que se desea diseñar un filtro con una respuesta en frecuencia  $D(\omega)$ . Si iniciamos con un filtro analógico con respuesta en frecuencia  $D(\omega)$ , la transformación bilineal estará distorsionada, por tanto el filtro digital será incorrecto. Pero supongamos que diseñamos un filtro analógico con una respuesta en frecuencia predistorsionada.

$$H_u \left( j \frac{2}{T} \tan^{-1} \frac{\omega}{2} \right) = D(\omega) \quad (3.14.11)$$

Esta equivalencia es la respuesta en frecuencia con distorsión del filtro deseado

$$H_u(j\omega) = D \left( 2 \tan^{-1} \frac{\omega}{2} \right) \quad (3.14.12)$$

Cuando a este filtro analógico predistorcionado 'prewarpea' le es aplicado la transformación bilineal, la predistorción desaparece.

$$H(\omega_u) = H\left(j \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2}\right) = D(\omega) \quad (3.14.13)$$

Es muy difícil que un filtro analógico predistorcione completamente. Para evitar esto los diseñadores mantienen el filtro analógico inalterado, es decir sin predistorcionar y solamente se encuentran en los puntos de rompimiento del filtro. Con esta estrategia, la pendiente del filtro analógico es distorsionada por la transformación bilineal pero los puntos de rompimiento serán correctos. Esta forma de predistorción es más exitosa ya que podemos alterar todos los puntos de rompimiento deseados. Para generar estos puntos de rompimiento podemos recurrir a la tangente del filtro analógico y diseñar un filtro analógico con estos puntos de rompimiento. Este proceso estrecha la frecuencia del filtro analógico, por consiguiente la transformación bilineal comprime a este y conserva los puntos de rompimiento.

$$\omega_u = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2} \quad (3.14.14)$$

Hasta aquí hemos visto los conceptos y herramientas que son necesarios para diseñar un filtro digital y en especial un filtro digital recursivo. Se han dejado las demostraciones en un apéndice para consultarlas en caso necesario. Anora procederemos a diseñar un filtro digital recursivo con las características que necesitamos para implementarlo en nuestro analizador de señales de audio.

### 3.15 DISEÑO DEL FILTRO DIGITAL

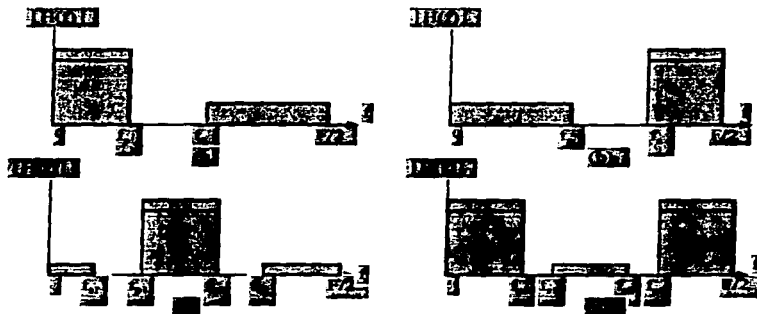
En esta sección se caracterizarán las ecuaciones generales de las secciones anteriores, de tal forma que se tengan ecuaciones específicas para el diseño del filtro digital que se desea obtener, a continuación se enumerara el procedimiento a seguir para dicho diseño.

- 1.- Elección del tipo de filtro.
- 2.- Elección del tipo de aproximación a emplear.
- 3.- Diseño de fórmulas para la generación de los polos analógicos de la aproximación seleccionada.
- 4.- Transformación en banda de frecuencia.
- 5.- Aplicación de la transformación bilineal.
- 6.- Diseño de ecuaciones digitales.

#### Elección del tipo de filtro

Un filtro digital es un sistema discreto en el tiempo que está diseñado para pasar un cierto rango de frecuencias a partir de una señal de entrada, esto es, la función de transferencia forma una "ventana" a través de la cual solamente pasará una porción del espectro de frecuencia de entrada. Basado en la respuesta de la función de transferencia, los filtros son clasificados en cuatro tipos: Paso-bajas (LP), Paso-altas (HP), Paso-banda (BP) y Rechazo de Banda (BR). Las características ideales de la respuesta en frecuencia de los filtros anteriores para  $f \geq 0$  se muestran en la figura 3.15.1. Las áreas sombreadas en las figuras muestran la región de tolerancia de la respuesta en frecuencia a ser aproximada y las frecuencias  $f_p$  y  $f_s$  representan los límites de las frecuencias en las que se deja pasar la banda de frecuencia o se rechaza la banda. Finalmente el rango de  $f_p \leq f \leq f_s$  es redefinido como la banda de transición.





**Figura 3.14.1.** Respuestas idealizada y actualde la magnitud de los filtros, representando sus frecuencias digitales críticas: (a) Filtro paso-bajas, (b) Filtro paso-altas, (c) Filtro paso-banda, (d) Filtro supresor de banda.

Debido a la discontinuidad que existe en las frecuencias de la banda de paso, estas frecuencias ideales no son físicamente realizables. Por lo tanto, es necesario emplear una función de aproximación de un filtro para que con esto se tenga la aproximación a la respuesta ideal. El problema de aproximación para el diseño de un filtro digital, conceptualmente no es diferente que el del diseño de un filtro analógico. La aproximación de un filtro analógico implica la aproximación analítica de las especificaciones del filtro por medio de la función de transferencia deseada. La solución para el problema de aproximación para el diseño de filtros analógicos ha sido desarrollada en el capítulo II e incluye procedimientos para el diseño de filtros Butterworth, Chebyshev y Elípticos.

### **Elección del tipo de aproximación a emplear**

Como se mencionó anteriormente, este tipo de aproximaciones han sido desarrolladas en el capítulo II, por lo tanto mencionaremos las características principales que definen a cada tipo de aproximación.

**Butterworth:** no tiene rizo, pero tiene una amplia región de transición. Este filtro algunas veces es llamado filtro plano máximo.

**Chebyshev:** tiene rizo en una de las regiones de la banda de paso, pero no en ambas. La altura pico a pico del rizo puede ser minimizada de acuerdo al diseño. Este filtro tiene una región de transición más pequeña que la del filtro Butterworth del mismo orden.

**Elíptico:** tiene rizo en ambas regiones banda de paso y la banda de rechazo, este filtro posee la región de transición más estrecha que cualquier otro tipo de filtro del mismo orden y especificación de rizo.

Ahora bien, para seleccionar el tipo de aproximación a emplear es necesario definir las características del filtro que se desea.

Para implementar el analizador de señales se requiere de una serie de filtros que cubran el espectro de frecuencias de audio, cada filtro deberá dejar pasar un rango de frecuencias que no necesariamente debe ser estrecho, es decir, es conveniente que tenga una región de transición amplia de manera que puedan ser captadas

las frecuencias de los extremos del otro filtro, de tal forma que existan traslapes para que de esta manera se capturen y registren todas las frecuencias del espectro de audio. A su vez, también es deseable que en la frecuencia de corte seleccionada se tenga una respuesta plana, ya que se necesita saber con que intensidad se recibe una determinada frecuencia para fines de equalización del recinto.

Por lo anterior, el tipo de aproximación que más se apega a nuestras necesidades es la aproximación Butterworth, ya que como se ha mencionado posee la característica de no tener rizo en las regiones de paso-banda y rechazo de banda y tiene una respuesta máxima plana en la región de la banda de paso a comparación de sus contrapartes (Chebyshev y Elíptico).

El filtro Butterworth tiene solamente dos parámetros de diseño: el orden del filtro (el orden del denominador en la función de transferencia), y la frecuencia de corte del filtro. El orden del filtro es también el número de polos que tendrá el filtro y esto es lo que determina la complejidad del filtro. Las fórmulas básicas para el diseño del filtro son presentadas a continuación.

### 3.16 GENERACIÓN DE POLOS

La función de la magnitud al cuadrado para un filtro Butterworth de N-ésimo orden es de la forma:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2N}} \quad (3.16.1)$$

Donde:

- $\xi^2$  = Escalar constante
- $\omega$  = Frecuencia
- $\omega_p$  = Frecuencia de corte
- N = Orden del filtro.

En la figura 3.16.2 es posible observar que la función es decreciente, donde la máxima respuesta es la unidad en  $\omega=0$ , y que el filtro se aproxima más al ideal de acuerdo a como se incrementa N. Se ha demostrado por medio de la serie de Maclaurin que la primera derivada de este filtro  $H(j\omega)$ , en  $\omega=0$  será cero hasta la  $(2N-1)$  iteración; por tanto se dice que el filtro tiene máxima respuesta plana en la región de paso-banda.

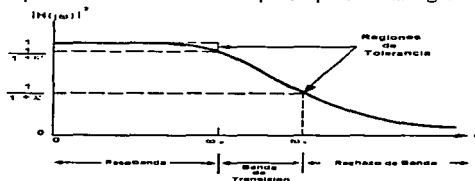


Figura 3.16.2. Filtro Butterworth.

De la figuras 3.16.2 definimos los siguientes parámetros:

Tolerancia en paso-banda:  $|\omega| \leq \omega_p$

$$|H(j\omega)|^2 > \frac{1}{1 + \xi^2} \quad (3.16.2)$$

Tolerancia en rechazo de banda  $|\omega| \geq \omega_s$

$$|H(j\omega)|^2 > \frac{1}{1 + \lambda^2} \quad (3.16.3)$$

Examinado la figura 3.16.2 es posible observar que la respuesta paso-bajas ideal de la figura 3.16.1 se obtiene cuando  $\xi$  se aproxima a cero,  $\omega_s$  se aproxima a  $\omega_p$ , y  $\lambda$  se aproxima a  $\infty$ .

Podemos ahora proceder a determinar el orden de la ecuación dadas las especificaciones del filtro.

Asignemos  $\omega = \omega_p$  en la ecuación 3.16.1 para la ecuación 3.16.3, resolviendo para N, obtenemos:

$$N \geq \frac{\log\left(\frac{\lambda}{\xi}\right)}{\log\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)} \quad (3.16.4)$$

De las ecuaciones 3.16.2 y 3.16.3 obtenemos:

$$\xi = (10^{0.1A_p} - 1)^{0.5} \quad (3.16.5a)$$

$$\lambda = (10^{0.1A_s} - 1)^{0.5} \quad (3.16.5b)$$

Donde:

$A_p$  es la atenuación máxima en paso-banda dada en (+) dB.

$A_s$  es la atenuación mínima en rechazo de banda dada en (-) dB.

Para simplificar la notación, definiremos los parámetros A y  $K_0$  como sigue:

$$A = \frac{\lambda}{\xi} = \left( \frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1A_p} - 1} \right)^{0.5} \quad (3.16.6)$$

$$k_0 = \frac{\omega_p}{\omega_s} \quad (3.16.7)$$

Finalmente el orden de la ecuación para un filtro analógico Butterworth paso-bajas está dado por la tabla 3.16.1 en la que además se muestra el orden para otro tipo de aproximaciones.

APROXIMACIÓN	ECUACION DEL ORDEN DEL FILTRO
BUTTERWORTH	$N \geq \frac{\log A}{\log \frac{1}{k}}$
CHEBYSCHEV	$N \geq \frac{\cosh^{-1} A}{\cosh^{-1} \frac{1}{k}}$
ELÍPTICO	$N \geq \frac{\log 16 A^2}{\log \frac{1}{q}}$
<b>PASO - BAJAS</b>	<b>PASO - ALTAS</b>
$K = K_0 = \frac{\tan\left(\frac{\pi f_c}{F}\right)}{\tan\left(\frac{\pi f_s}{F}\right)}$	$K = \frac{1}{K_0}$
<b>PASO - BANDA</b>	<b>RECHAZO DE BANDA</b>
$K = \begin{cases} K_1 & \text{si } K_e \geq K_s \\ K_2 & \text{si } K_e < K_s \end{cases}$ $K_u = \tan\left(\frac{\pi f_u}{F}\right) - \tan\left(\frac{\pi f_l}{F}\right)$ $K_b = \tan\left(\frac{\pi f_h}{F}\right) - \tan\left(\frac{\pi f_l}{F}\right)$ $K_e = \tan\left(\frac{\pi f_u}{F}\right) - \tan\left(\frac{\pi f_l}{F}\right)$ $K_1 = \frac{K_u \tan\left(\frac{\pi f_u}{F}\right)}{K_b - \tan^2\left(\frac{\pi f_u}{F}\right)}$	$K = \begin{cases} \frac{1}{K_2} & \text{si } K_e \geq K_s \\ \frac{1}{K_1} & \text{si } K_e < K_s \end{cases}$ $K_2 = \frac{K_u \tan\left(\frac{\pi f_u}{F}\right)}{\tan^2\left(\frac{\pi f_u}{F}\right) - K_s}$
<b>DESIGNACIÓN DE PARAMETROS ELÍPTICOS</b>	
$q = q_u + 2q_u^3 + 15q_u^5 + 150q_u^7$	$q_v = \frac{1 - (1 - K^2)}{2[1 + (1 - p)]}$

Tabla 3.16.1. Ecuaciones para el cálculo del orden N de un filtro digital (el parámetro A está dado por la ecuación 3.16.6).

dado

Esta tabla nos proporciona la ecuación que permitirá calcular el orden N para una aproximación Butterworth la cual se presentan a continuación:

$$N \geq \frac{\log A}{\log\left(\frac{1}{K_0}\right)} \quad (3.16.8)$$

Donde:

$$A = \frac{\lambda}{\sigma} = \left(\frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1A_p} - 1}\right)^{0.5} \quad (3.16.6)$$

$$K_A = \tan\left(\frac{\pi f_{p2}}{F}\right) - \tan\left(\frac{\pi f_{p1}}{F}\right)$$

$$K_B = \tan\left(\frac{\pi f_{p1}}{F}\right) - \tan\left(\frac{\pi f_{p2}}{F}\right)$$

$$K_C = \tan\left(\frac{\pi f_{s1}}{F}\right) - \tan\left(\frac{\pi f_{s2}}{F}\right)$$

Donde:

$f_{p1}$  = frecuencia del límite inferior de la banda de paso

$f_{p2}$  = frecuencia del límite superior de la banda de paso

$f_{s1}$  = frecuencia del límite inferior de la banda de rechazo

$f_{s2}$  = frecuencia del límite superior de la banda de rechazo

F = frecuencia de muestreo

$\pi$  = constante

Habiéndose calculado los valores de  $K_A$ ,  $K_B$ ,  $K_C$ , se procederá a calcular  $K_1$  o  $K_2$  según sea el caso, ya que se debe tener en cuenta que si  $K_C \geq K_B$  se calculará  $K_1$ , y si  $K_B$  es mayor que  $K_C$  se calculará  $K_2$ . Dependiendo de cual sea el resultado se encontrará el valor de  $K_0$  que es el valor que faltaba para encontrar el orden del filtro.

Los polos normalizados en el plano S son encontrados al igualar al denominador de la ecuación 3.16.1 a cero. Para normalizar el resultado asignaremos a  $\omega_p = 1$  y  $\xi = 1$ , entonces:

$$1 + \omega^{2N} = 0 \quad (3.16.9)$$

Sustituyendo a  $S=j\omega$ , obtenemos:

$$(-S^2)^N + 1 = 0 \quad (3.16.10)$$

Expresando al término -1 en notación polar para las raíces múltiples tenemos:

$$(-1)^N S^{2N} = e^{j(2k-1)\pi} = -1 \quad K = 1, 2, \dots, N \quad (3.16.11)$$

Ahora la k-ésima raíz para los polos en la mitad izquierda del plano S (condición para la estabilidad en un filtro analógico) puede ser expresada como:

$$S_k = \tau_x + j\omega_k = e^{j(2k+N-1)\frac{\pi}{2N}} = j e^{(2k-1)\frac{\pi}{2N}} \quad (3.16.12)$$

Finalmente, los polos analógicos normalizados para un filtro Butterworth paso-bajas pueden obtenerse de:

$$S_k = -\operatorname{sen}\left(\frac{2k-1}{N}\right)\pi + j \cos\left(\frac{2k-1}{N}\right)\pi \quad (3.16.13)$$

Donde k puede tomar los siguientes valores

$$k = \begin{cases} 1, 2, \dots, \left(\frac{N+1}{2}\right) & \text{para } N \text{ impar} \\ 1, 2, \dots, \frac{N}{2} & \text{Para } N \text{ par} \end{cases}$$

En general, los polos desnormalizados están dados por:

$$S^* k = S_k \omega_p^{-j/k} \quad (3.16.14)$$

### Transformación en banda de frecuencia

En la sección anterior se dejaron planteadas las fórmulas características para el cálculo de polos normalizados en un filtro Butterworth paso-bajas. el siguiente paso es convertir el filtro analógico paso-bajas en un filtro desnormalizado paso-banda.

Se inicia caracterizando un filtro paso-bajas porque es más fácil calcular los polos y de esta manera asegurar la condición de estabilidad. Ahora bien, la conversión que se necesita se puede obtener de la tabla 3.16.2, donde se presentan las transformaciones en banda de frecuencia analógicas que han sido desarrolladas por Harry Y-F Lam y se presentan en el libro Analog and Digital Filters.

TIPO DE FILTRO	Transformación de un filtro analógico normalizado Paso Bajas a un filtro analógico desnormalizado
Paso-Bajas → Paso-Bajas	$S \rightarrow \frac{S}{\omega_u}$
Paso-Bajas → Paso-Altas	$S \rightarrow \frac{\omega_u}{S}$
Paso-Bajas → Paso-Banda	$S \rightarrow \frac{S^2 + \omega_1 \omega_u}{S(\omega_u - \omega_1)}$
Paso-Bajas → Paso-Todo	$S \rightarrow \frac{S(\omega_u - \omega_1)}{S^2 + \omega_1 \omega_u}$

Tabla 3.16.2. Frecuencia analógica banda de transformación.

### Aplicación de la transformación bilineal

Como ya se dijo la transformación bilineal es un mapeo o transformación desde el plano s analógico al plano Z digital. Es decir, cada punto del plano S es mapeado a un único punto del plano Z.

El diseño de un filtro digital y de un filtro analógico usando la transformación bilineal implica el siguiente procedimiento de diseño:

- A) Especificar los parámetros críticos del filtro digital: frecuencias de paso-banda y rechazo de banda en Hz, atenuación en paso-banda y rechazo de banda en dB y la frecuencia de muestreo.
- B) Aplicar la predistorsión a las frecuencias analógicas, según la ecuación:

$$\omega = \tan\left(\frac{\pi f_c}{F}\right) \quad (3.16.15)$$

Donde:

- $f_c$  = frecuencia de corte
- $F$  = frecuencia de muestreo
- $\omega$  = frecuencia predistorsionada

- C) Aplicar la transformación bilineal.

$$S = \frac{2}{T} \left[ \frac{Z-1}{Z+1} \right] \quad (3.16.16)$$

El procedimiento es desarrollado a continuación, donde solamente se caracterizan las ecuaciones, el cálculo de los coeficientes puede realizarse mediante un programa de computadora.

La transformación de pasobajas a paso-banda se obtiene de la tabla 3.16.2 y es:

$$S_1 = \frac{Sb^2 + \omega'_0}{\beta \Delta \omega' Sb} \quad (3.16.17)$$

Donde:

- $S_1$  = Polo analógico Paso-Bajas
- $Sb$  = Polo analógico Paso-Banda
- $\beta$  = Parámetro que caracteriza a la frecuencia

Resolviendo la ecuación 3.16.17 para  $Sb$  obtenemos

$$Sb^2 - \beta \Delta \omega' S_1 Sb + \omega'_0 = 0 \quad (3.16.18)$$

Donde:

- $\omega'_0 = \omega_i \omega_u$
- $\Delta \omega' = (\omega'_u - \omega'_i)$
- $\omega'_u = \tan(\pi f_{pu} / F)$
- $\omega'_i = \tan(\pi f_{pi} / F)$
- $f_{pu}$  = frecuencia alta Paso Banda
- $f_{pi}$  = frecuencia baja Paso Banda

El parámetro  $\beta$  se obtiene de la tabla 3.16.3, especificaciones de frecuencia, y está dada dependiendo de la función y del tipo de aproximación del filtro. El centro geométrico del filtro en Paso-banda está dado por la media geométrica  $\omega_0$ .

La tabla 3.16.4, muestra la ecuación para la transformación de paso-bajas a paso-banda

Aproximación de filtro / tipo	$\beta$
Butterworth BPF	$(10^{0.1A_p} - 1)^{-1/2N}$
Butterworth BSF	$(10^{0.1A_p} - 1)^{1/2N}$
Chebyshev BPF/BSF	1
Elíptico BPF	$K^{-0.5}$
Elíptico BSF	$K^{0.5}$

Tabla 3.16.3 Aproximación de filtros.

Resolviendo la ecuación 3.16.18, para obtener los polos analógicos pasobanda se tiene:

$$S_b = \frac{\beta \Delta \omega'}{2} \left[ S_1 \pm \left( S_1^2 - \frac{4\omega_0'}{(\beta \Delta \omega')^2} \right)^{0.5} \right] \quad (3.16.19)$$

De la ecuación 3.16.19 se puede ver que la transformación de paso-banda mapea cada polo analógico paso-bajas en dos polos analógicos paso-banda. Ahora expresando el polo analógico paso-bajas de la siguiente forma:

$$S_1 = -a_p + jb_p \quad (3.16.20)$$

Donde  $a_p$  es un número positivo, se tiene lo siguiente:

$$S_{hp} = \frac{\beta \Delta \omega'}{2} \left[ -|a_p| + jb_p \pm (-c_1 - j2|a_p|b_p)^{0.5} \right] \quad (3.16.21)$$

Donde se definirá a:

$$c_1 = b_p^2 + \left[ \frac{4\omega_0'}{(\Delta \omega' \beta)^2} \right] - a_p^2 \quad (3.16.22)$$

Teniendo en cuenta que la raíz cuadrada de un número complejo está dada por:

$$(-c_1 + jy)^{0.5} = - \left[ \frac{(c_1^2 + y^2)^{0.5} - c_1}{2} \right]^{0.5} + j \left[ \frac{(c_1^2 + y^2)^{0.5} + c_1}{2} \right]^{0.5} \quad (3.16.23)$$

Donde se definirá a  $y = -2a_p b_p$ . Sustituyendo la ecuación 3.16.23 dentro de la ecuación 3.16.21 se obtiene:

$$S_{hp} = \frac{\beta \Delta \omega'}{2} \left[ -|a_p| + jb_p \pm \left[ - \left( \frac{(c_1^2 + 4a_p^2 b_p^2)^{0.5} - c_1}{2} \right)^{0.5} + j \left( \frac{(c_1^2 + 4a_p^2 b_p^2)^{0.5} + c_1}{2} \right)^{0.5} \right] \right] \quad (3.16.24)$$



Agrupando las partes reales e imaginarias, y resolviendo para  $-a_p$ ,  $-jb_p$ , la predistorción de los polos analógicos paso-banda son expresados de la siguiente manera:

$$S_{hp1} = \frac{\beta\Delta\omega'}{2} \left[ (-|a_p| - c_3) \pm j(b_p + c_4) \right] = a_{hp1} + jb_{hp1} \quad (3.16.25a)$$

$$S_{hp2} = \frac{\beta\Delta\omega'}{2} \left[ (-|a_p| - c_3) \pm j(b_p + c_4) \right] = a_{hp2} + jb_{hp2} \quad (3.16.25b)$$

Donde:

$$c_2 = \left[ c_1^2 + (2a_p b_p)^2 \right]^{0.5} \quad (3.16.26a)$$

$$c_3 = \left( \frac{c_2 - c_1}{2} \right)^{0.5} \quad (3.16.26b)$$

$$c_4 = \left( \frac{c_2 + c_1}{2} \right)^{0.5} \quad (3.16.26c)$$

Donde  $c_1$ , está dado por la ecuación 3.16.22.

Los polos digitales paso-banda pueden ser ahora obtenidos de la transformación bilineal.

$$Z_{p,k} = \frac{1 + S_{hp,k}}{1 - S_{hp,k}} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.16.27)$$

Los polos analógicos de la ecuación 3.16.13 también pueden ser representados como:

$$S_{hp1} = a_{hp1} \pm jb_{hp1} \quad (3.16.28a)$$

$$S_{hp2} = a_{hp2} \pm jb_{hp2} \quad (3.16.28b)$$

Ahora se sustituye la ecuación 3.16.28 dentro de la ecuación 3.16.27, para obtener una forma general para calcular los polos digitales paso-banda, obteniendo como resultado:

$$Z_{p,k} = \frac{1 - (a_{hp,k}^2 + b_{hp,k}^2)}{D_{hp,k}} + j \frac{2b_{hp,k}}{D_{hp,k}} \quad (3.16.29)$$

Donde

$$D_{hp,k} = 1 + 2|a_{hp,k}| + a_{hp,k}^2 + b_{hp,k}^2 \quad (3.16.30)$$

Los coeficientes de segundo orden pueden ser obtenidos a partir de:

$$B_{1,k} = -2 \operatorname{Re} \left[ Z_{p,k} \right] \quad (3.16.31a)$$

$$B_{2,k} = -2 \operatorname{Re} \left[ Z_{p,k} \right]^2 + \operatorname{Im} \left[ Z_{p,k} \right]^2 \quad (3.16.31b)$$

Donde

$$\operatorname{Re}[Z_{bp2,k}] = \frac{1 - (a_{bp2,k}^2 + b_{bp2,k}^2)}{D_{bp2,k}} \quad (3.16.32a)$$

$$\operatorname{Im}[Z_{bp1,k}] = \frac{2b_{bp2,k}}{D_{bp2,k}} \quad (3.16.32b)$$

Los coeficientes del numerador de los filtros digitales están dados por la tabla 3.16.4, que indica cuales deben de ser los valores de los ceros para mantener condiciones de estabilidad.

Coeficiente s	Butterworth / Chebyshev				Elíptico			
	Tipo de filtro				Tipo de filtro			
	LP	HP	BP	BS	LP	HP	BP	BS
$A_{0,k}$	1 (1)	1 (1)	1	1	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1
$A_{1,k}$	2 (1)	-2 (-1)	0	$A_{1,k}$	$A_{1,k}$ (1)	$A_{1,k}$ (-1)	$A_{1,k}$ 0	$A_{1,k}$
$A_{2,k}$	1 (0)	1 (0)	-1	1	1 (0)	1 (0)	1 (-1)	1

Tabla 3.16.4. Coeficientes del numerador de un filtro digital

De la tabla 3.16.4, se obtienen los coeficientes del numerador para los filtro digitales, estos coeficientes son:

$$\begin{aligned} A_{0,k} &= 1 \\ A_{1,k} &= 0 \\ A_{2,k} &= -1 \end{aligned}$$

Finalmente se obtiene la forma de la función de transferencia para un filtro digital Butterworth paso-banda en cascada de segundo orden, cabe señalar que este tipo de combinación minimiza los errores de cuantización, ésta se representa a continuación:

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N/2} C_k H_k(z) \quad (3.16.33)$$

Donde:

$C_k$  = Constante escalar.  
 $H_k(z)$  = Función de transferencia

$$H_k(z) = \frac{1 + A_{1,k}z^{-1} + A_{2,k}z^{-2}}{1 + B_{1,k}z^{-1} + B_{2,k}z^{-2}} \quad (3.16.34)$$

Hasta aquí el proceso de diseño de un filtro digital a comprendido tres pasos:

- 1.- Diseñar un filtro analógico paso-bajas normalizado.
- 2.- Realizar la transformación en frecuencia de un filtro analógico paso-bajas a uno paso-banda desnormalizado
- 3.- Digitalización del filtro.

Pero sin embargo falta un punto muy importante que es la normalización del filtro digital, esto se logra al multiplicar la función de transferencia por un coeficiente escalar que asegurará una ganancia unitaria, es decir (0 dB). Los constantes para normalizar se obtienen al evaluar la función a lo largo de  $Z=e^{j\omega T}$  y resolviendo la ecuación 3.16.34 de acuerdo a los ceros característicos de un filtro Butterworth paso-banda, teniendo como resultado:

$$G_k = \frac{1 - Z^{-2}}{1 - B_{1,k} Z^{-1} + B_{2,k} Z^{-2}} \quad (3.16.35)$$

Donde los límites están dados por:

f = Frecuencia central  
T = Periodo de muestreo

Evaluando tenemos:

$$C_1 = \frac{1}{|G_1|} \quad (3.16.36)$$

$$C_2 = \frac{1}{|G_1 G_2|}$$

$$C_3 = \frac{1}{|G_1 G_2 G_3|}$$

$$C_4 = \frac{1}{|G_1 G_2 G_3 G_4|}$$

Hasta aquí se han presentado los elementos necesarios que caracterizarán a un filtro Butterworth paso-banda, el siguiente paso a realizar es implementar la función de transferencia de acuerdo a sus coeficientes característicos. Para realizar esta implementación es necesario tener a ésta como una ecuación diferencial, por tanto es necesario aplicar la transformada inversa de Z a la ecuación 3.16.34 obteniendo:

$$y_k(nT) = C_k [x(nT) + A_{1,k} x(nT - T) + A_{2,k} x(nT - 2T)] - B_{1,k} x(nT - T) - B_{2,k} x(nT - 2T) \quad (3.16.37)$$

Donde:

$C_k$ : Constantes escalares de segundo orden.  
 $A_{1,k}$  y  $B_{1,k}$ : Coeficientes característicos del filtro.

Esta realización representa la forma canónica de una red digital de segundo orden.

En la capítulo siguiente se procederá a implementar la ecuación característica para cada uno de los filtros que serán utilizados en el diseño del analizador de señales de audio.

# **CAPÍTULO 4 DISEÑO DEL ANALIZADOR DE SEÑALES DE AUDIO**

## **4.1 INTRODUCCIÓN**

En el presente capítulo se tratará el diseño del analizador de señales de audio, tomando en cuenta que el oído humano es capaz de responder sobre un intervalo de aproximadamente 20 Hz a 20 kHz. El oído humano en conjunción con el sistema nervioso, actúa como un analizador de frecuencia de selectividad envidiable. Al tener definidas estas características, se procederá a desarrollar el hardware y software del sistema. En el hardware se desarrollará cada uno de los bloques que forman parte del sistema para ecualizar un recinto de audio. Mediante el software se efectuará una selección de frecuencias que abarque el rango seleccionado, se definirán los parámetros de diseño del filtro digital a emplear, también se realizarán los cálculos que son necesarios para obtener los coeficientes que caracterizaran a cada uno de los filtros que conforman al analizador de señales, cuyas ecuaciones fueron definidas en el capítulo anterior. Una vez habiendo obtenido los coeficientes que caracterizan a cada filtro se realizará un análisis de la respuesta en frecuencia para cada filtro, de tal manera que se esté asegurando que van a cortar en la frecuencia deseada; después de haber asegurado la respuesta en frecuencia para cada filtro se procederá a diseñar el algoritmo que ejecutará el procesamiento de la señal de entrada.

## 4.2 DESCRIPCIÓN FÍSICA DEL SISTEMA

El analizador de señales de audio tendrá la función de analizar las frecuencias emitidas desde un generador de ruido rosa colocado en alguna parte del recinto a equalizar. La figura 4.2.1. muestra el equipo necesario y el método propuesto en el capítulo 1, sección 1.12, para la equalización de un recinto.

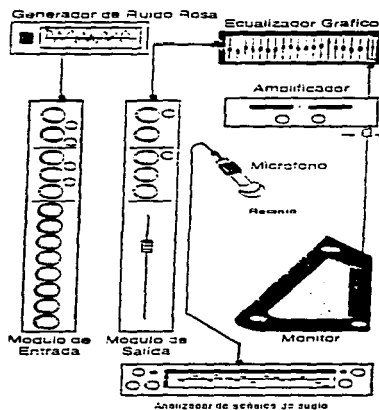


Figura 4.2.1. Método para equalizar un recinto acústico.

Un diagrama a bloques del analizador de señales de audio lo podemos apreciar en la figura 4.2.2.

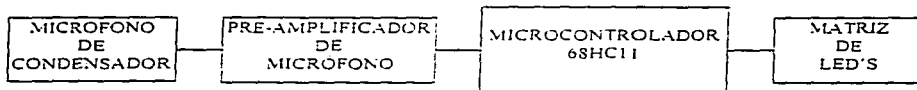


Figura 4.2.2. Diagrama a bloques del analizador de señales de audio.

El analizador de señales de audio debe tener en su etapa de entrada un micrófono omnidireccional, el cual se encargará de sensar la señal emitida desde el generador de ruido rosa. La función específica del micrófono es de convertir la señal audible a señal eléctrica, la cual se encuentra en el rango de los milivoltios (mV).

Posteriormente esta señal debe ser preamplificada a los niveles de voltaje idóneos para poder ser analizada. Para esto la siguiente etapa del prototipo será un preamplificador de entrada, el cual tendrá la

función de amplificar la señal recibida, libre de ruidos ajenos a ésta y con niveles de voltaje del orden de los volts (V), para nuestro caso específico este voltaje deberá tener una amplitud máxima de 5 V.

La siguiente etapa consiste de un convertidor analógico digital (ADC), el cual digitalizará la señal con el fin de poder ser analizada.

En esta parte, y en base a un microcontrolador (MCU), se tomará la señal digitalizada y éste comenzará la adquisición de para todos y cada uno de los filtros seleccionados; como la entrada de datos es constante, la señal entrará a un ciclo de espera en forma de round robin y hasta que una señal haya sido procesada la siguiente señal seleccionada del round robin pasará a ser procesada y así sucesivamente mientras el analizador no sea apagado.

Finalmente los resultados de todo este procesamiento serán desplegados en una matriz de led's en forma de analizador de espectro. En ella se mostrarán los resultados del procesamiento, con las ganancias respectivas para cada una de las frecuencias elegidas.

### 4.3 SELECCIÓN DE FRECUENCIAS

Los ecualizadores gráficos constituyen un método muy sofisticado de control de tonos, en éstos el espectro auditivo se divide en bandas muy angostas, cada una centrada en una frecuencia específica, por lo general basada en intervalos de una octava o de tres octavas. Se dice que es gráfico ya que la posición de los controles proporcionan una indicación gráfica de la forma de la curva de la respuesta seleccionada. Por lo mismo, brindan un excelente método para ecualizar las respuestas de frecuencia del equipo, pues permiten hacer compensaciones para dar coloración acústica.

Esta clase de ecualizadores proporcionan un control de  $\pm 12$  dB sobre octavas centradas en 32, 63, 125, 250, 500, 1 k, 2 k, 4 k, 8 k y 16 kHz.

Como es sabido, el oído humano escucha en promedio de los 30 Hz hasta 16 kHz, pero existen personas que tiene el oído más sensible y por lo tanto el rango de escucha aumenta. Por otra parte, en un equipo profesional de audio se maneja un rango de frecuencias a partir de los 20 Hz hasta los 20 kHz, ésta es una norma establecida por estudios realizados en la sensibilidad del oído humano. Tomando en cuenta lo expuesto anteriormente, la selección de frecuencias centrales para el diseño del filtro digital es la siguiente: 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1 K, 2 K, 4k, 8 k, 16 k y 20 kHz.

#### El filtro digital

Con el fin de ilustrar el comportamiento de un filtro digital presentamos como ejemplo un filtro paso-banda (Butterworth). En la figura 4.3.1 se muestran sus características principales, su banda de paso y su banda de rechazo.

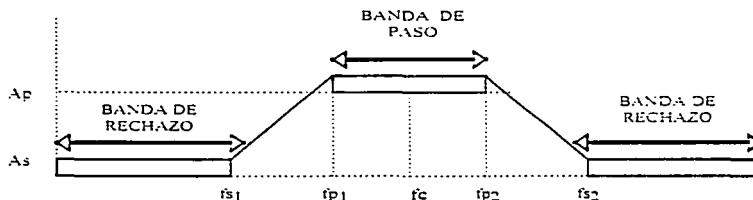


Figura 4.3.1. Filtro Paso-Banda BUTTERWORTH.

Especificación de los parámetros mostrados en la figura:

- $f_c$ : Frecuencia Central.
- $f_{p1}$ : Limite inferior de la banda de paso.
- $f_{p2}$ : Limite superior de la banda de paso.
- $f_{s1}$ : Limite inferior de la banda de rechazo.
- $f_{s2}$ : Limite superior de la banda de rechazo.
- $A_p$ : Atenuación para la banda de paso.
- $A_s$ : Atenuación para la banda de rechazo.

Las regiones de las bandas de transición van desde  $f_{s1}$  a  $f_p$ , y de  $f_p$  a  $f_{s2}$ . El ancho de la región de transición depende del orden del filtro. Esto es, el orden del filtro determina el comportamiento de la pendiente, por ejemplo, para un filtro de orden  $N=20$  la pendiente tiende a ser de un valor alto, por lo contrario con un valor de orden  $N=8$  la pendiente tiende a ser menor. En otras palabras, si el filtro es de orden 20 se tendrá una región de transición con un ancho de banda mínimo, y para un filtro de orden 8 la banda de transición crecerá de acuerdo al aumento de rechazo de banda. Estas características del filtro se analizaron en el capítulo III, también la frecuencia de muestreo y el orden del filtro.

Como ya se mencionó, los filtros que se utilizarán serán filtros Paso-Banda BUTTERWORTH, y la frecuencia central de cada filtro será de una octava entre cada filtro. Lo anterior de acuerdo a las condiciones que se plantearon en el capítulo I, para ecualizar un recinto.

Ahora bien, es necesario definir las bandas de paso y de rechazo para cada filtro, éstas se asignaran cada tercio de octava para que de esta manera se efectúe una buena ecualización en el recinto, en la tabla 4.3.1, se muestran las características de los 12 filtros, como son su frecuencia central, su banda de paso y la banda de rechazo. Además es necesario definir la atenuación máxima que se desea tener en paso-banda  $A_p$ , y la atenuación mínima en rechazo de banda  $A_s$ ; estas atenuaciones lo que nos indican es la calidad del filtro, es decir, si deseáramos un filtro ideal,  $A_p$  sería igual a cero y  $A_s$  sería igual a infinito; dado que esto no es posible para el diseño será necesario definir estos parámetros de tal manera que se tenga una buena calidad en el diseño de nuestros filtros.

FILTRO	BANDA DE PASO				BANDA DE RECHAZO		
	$F_c$	$f_{p1}$	$f_{p2}$	$A_p$	$f_{s1}$	$f_{s2}$	$A_s$
1	20	12 Hz	28 Hz	0.5 dB	2 Hz	38 Hz	35 dB
2	40	32 Hz	48 Hz	0.5 dB	22 Hz	58 Hz	35 dB
3	80	64 Hz	96 Hz	0.5 dB	44 Hz	116 Hz	35 dB
4	160	128 Hz	192 Hz	0.5 dB	88 Hz	232 Hz	35 dB
5	320	256 Hz	384 Hz	0.5 dB	176 Hz	464 Hz	35 dB
6	640	512 Hz	768 Hz	0.5 dB	352 Hz	928 Hz	35 dB
7	1K	852 Hz	1148 Hz	0.5 dB	652 Hz	1348 Hz	35 dB
8	2K	1400 Hz	2600 Hz	0.5 dB	500 Hz	3500 Hz	35 dB
9	4K	3500 Hz	4500 Hz	0.5 dB	3000 Hz	5000 Hz	35 dB
10	8K	6000 Hz	10000 Hz	0.5 dB	4000 Hz	12000 Hz	35 dB
11	16K	13000 Hz	19000 Hz	0.5 dB	9000 Hz	23000 Hz	35 dB
12	20K	18000 Hz	22000 Hz	0.5 dB	15000 Hz	25000 Hz	35 dB

Tabla 4.3.1. Especificaciones de las bandas de paso y de rechazo para los filtros digitales.

En el capítulo III se vio como obtener, de una manera simple, la frecuencia de muestreo,  $T$ , debido a que dicha frecuencia está en función de la frecuencia de corte del último filtro a utilizar; es decir, la frecuencia de muestreo será como mínimo dos veces la frecuencia central del último filtro. Esta frecuencia de muestreo dependerá del procesador que utilizaremos. Por lo tanto, la frecuencia de muestreo que se utilizará será:

$$T = (2 \times 20 \text{ kHz}) = 40 \text{ kHz}$$

Con este valor se está asegurando que la frecuencia central máxima a analizar, 20 kHz, se muestrea al menos dos veces: todo esto con el fin de evitar que dos frecuencias tengan la misma identidad digital.

### **Cálculo del orden filtro**

El orden del filtro se calcula con la ecuación 4.3.1.

$$N > \frac{\log A}{\log\left(\frac{1}{K_0}\right)} \quad (4.3.1)$$

Donde:

$$A = \left(\frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1A_p} - 1}\right)^{0.5} \quad (4.3.2)$$

Y el valor de  $K_0$  se obtiene de la tabla 3.14.1, para una aproximación Butterworth, en dicha tabla se puede observar que el valor de  $K_0$  depende de las condiciones propuestas, es decir:

$$k = \begin{cases} k_1 & \text{si } k_c \geq k_b \\ k_2 & \text{si } k_c < k_b \end{cases}$$

Donde:

$$k_u = \tan\left(\frac{\pi f_p^2}{F}\right) - \tan\left(\frac{\pi f_p^1}{F}\right) \quad (4.3.3)$$

$$k_h = \tan\left(\frac{\pi f_p^1}{F}\right) \tan\left(\frac{\pi f_p^2}{F}\right) \quad (4.3.4)$$

$$k_c = \tan\left(\frac{\pi f_s^1}{F}\right) - \tan\left(\frac{\pi f_s^2}{F}\right) \quad (4.3.5)$$

$$k_1 = \frac{k_u \tan\left(\frac{\pi f_s^1}{F}\right)}{k_h \tan^2\left(\frac{\pi f_s^1}{F}\right)} \quad (4.3.6)$$

$$k_2 = \frac{k_u \tan\left(\frac{\pi f_s^2}{F}\right)}{\tan^2\left(\frac{\pi f_s^2}{F}\right) - k_h} \quad (4.3.6)$$



## Diseño de los filtros

Para diseñar cada uno de los filtros mostrados en la tabla 4.3.1 se tomarán en cuenta las ecuaciones anteriores. Para cada uno de ellos se determinará el valor de  $k_n$  y con ello se conocerá su orden. Por ejemplo para el caso del filtro 1 se tendrán los cálculos siguientes:

$$A = \left( \frac{10^{0.1 \cdot 35}, -1}{10^{0.1 \cdot 0.5} - 1} \right)^{0.5} = 160.9602$$

$$k_a = \tan\left(\frac{\pi \cdot 28}{40,000}\right) - \tan\left(\frac{\pi \cdot 12}{40,000}\right) = 0.0012566$$

$$k_b = \tan\left(\frac{\pi \cdot 28}{40,000}\right) \tan\left(\frac{\pi \cdot 12}{40,000}\right) = 0.0000021$$

$$k_c = \tan\left(\frac{\pi \cdot 2}{40,000}\right) - \tan\left(\frac{\pi \cdot 38}{40,000}\right) = 0.0000005$$

Como  $K_b > k_c$  entonces se calculará  $k_2$

$$k_2 = \frac{0.0012566 \cdot \tan\left(\frac{\pi \cdot 38}{40,000}\right)}{\tan^2\left(\frac{\pi \cdot 38}{40,000}\right) - 0.0000021} = 0.5487356$$

Sustituyendo el valor de A y  $k=k_2$  se encuentra el valor del orden del filtro

$$N > \frac{\log(160.9602)}{\log\left(\frac{1}{0.5487356}\right)}$$

$$N = \frac{2.2067186}{0.2606369}$$

$$N = 8.4666400$$

Con el resultado anterior se puede observar que el orden del filtro es ocho, con estas mismas ecuaciones se pueden calcular el orden para los filtros restantes teniendo como resultado el mismo orden.

## 4.4 DESCRIPCIÓN DEL HARDWARE DEL SISTEMA

En esta parte del capítulo se hará una descripción de cada uno de los bloques que componen a nuestro dispositivo analizador de señales de audio, cada uno de ellos será detallado en forma completa para lograr una mejor comprensión de nuestro sistema.

## CARACTERIZACIÓN DEL MICRÓFONO

Los micrófonos pueden clasificarse, de acuerdo con su diseño físico, como de carbón, condensador, de cinta, bobina móvil, semiconductor, cristal y cerámico. Pueden también clasificarse de acuerdo con sus diagramas polares como omnidireccionales, polidireccionales, superdireccionales y cardioides. Con las características anteriores se puede seleccionar un micrófono para un uso específico, este tema se trató en el capítulo uno.

Para el analizador de señales de audio se seleccionó un micrófono de condensador por cumplir con los requerimientos de medición acústica, a continuación se presenta las características del micrófono.

Micrófono de laboratorio

Tipo: Capacitor.

Diámetro: Media pulgada.

Sensibilidad: 12.5 mV en circuito abierto.

Rango de frecuencia: 5- 20 kHz.

En la figura 4.4.1. se muestran las características de respuesta en frecuencia y de dirección del micrófono.

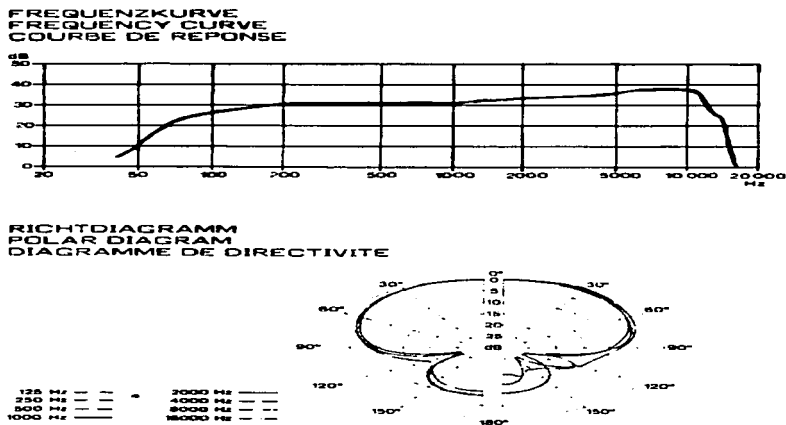


Figura 4.4.1. Características de respuesta en frecuencia y de dirección para el micrófono propuesto.

## PREAMPLIFICADOR DE ENTRADA

El sistema analizador de señales de audio debe de contar con un dispositivo transductor de entrada, el cual tendrá la función de sensar las diferentes señales que se generen de la fuente emisora, con el fin de poder procesarlas y obtener los resultados con aproximaciones lo más cercanas a la realidad.

El caso de aplicaciones de audio, el transductor de entrada generalmente es un micrófono omnidireccional, el cual debe contar con las características apropiadas para la aplicación; el micrófono tendrá la función de convertir las señales recibidas en señales eléctricas; éstas señales siempre serán variaciones de voltaje del rango de los milivoltios ( mV ), por lo que al ser una señal muy pequeña puede ser interferida por ruido y proporcionar los errores en las señales muestreadas.

Entonces se debe tener un dispositivo que se encargue de preamplificar la señal eléctrica y a su vez eliminar la interferencia en la señal, de modo que tengamos una señal fácil de identificar por cualquier otro dispositivo a donde se vaya a enviar la señal. El amplificador operacional Excalibur TLE 2027/2037 de Texas Instruments es un dispositivo ideal para nuestra aplicación, ya que nos ofrece las características mencionadas anteriormente. Las características generales del amplificador operacional son:

- Fabricado con tecnología CMOS
- Bajo voltaje de ruido (  $2 \text{ nV/Hz}$  )
- Mínima distorsión armónica ( 0.001% )
- Ganancia ideal en lazo abierto ( 160 dB )
- Bajo voltaje de offset (  $25 \text{ } \mu\text{V}$  )

En la tabla 4.4.1 se presenta una tabla comparativa del amplificador Excalibur TLE2027/2037 con respecto a otros existentes en el mercado y que también son utilizables en aplicaciones similares. En ella podemos observar como la eficiencia en ancho de banda y slewrate es superior al de los demás amplificadores.

TECNOLOGIA	DISPOSITIVO	ANCHO DE BANDA ( MHz )	SLEWRATE ( $\text{V}/\mu\text{S}$ )	SUMINISTRO DE CORRIENTE ( mA )
Bipolar	$\mu\text{A}741$	1	0.9	1700
	LM324	0.6	0.2	250
Excalibur	TLE2021	2	0.9	200
	TLE2027	15	1.7	3800
	TLE2061	2.1	3.4	280
BiFets	TL051	3.1	18	2700
	TL031	1.1	2.9	200
LinCmos	TLC272	1.7	2.9	1000
	TLC27M2	0.5	0.4	105

Tabla 4.4.1. Comparación de amplificadores.

Datos comparativos de la eficiencia en C. D. del TLE2027/2037 se muestran en la tabla 4.4.2. En ella se puede ver como la eficiencia en C. D. para las diferentes tecnologías son ampliamente superadas por los amplificadores de la familia Excalibur, ya que están diseñados para circuitos de alta precisión que requieren bajo ruido y gran ancho de banda.

Dispositivo	Bipolar	Excalibur		BiFet	LinCmos		Unidades
	$\mu$ A741	TLE2021	TLE2027	TL051A	TLC2201	TLC2652	
VIO	6000	100	25	800	200	1	$\mu$ V
IIB	500	50	90	0.2	0.005	0.01	nA
CMRR	70	100	117	75	90	120	dB
AVD	86	120	140	94	104	135	dB

**Tabla 4.4.2. Comparación de eficiencia en C. D.**

En la tabla 4.4.3 se muestra el error que se presenta al medir el voltaje a la salida del amplificador, en ella observamos como el porcentaje de error del TLE2027 es prácticamente nulo con respecto a los demás, tomando como valor de salida 10 V.

Dispositivo	$\mu$ A741	TLE2021	TLE2027	TL051A	TLC2201	TLC2652	Unidades
ERROR	6.550	0.115	0.030	0.998	0.203	0.00338	%
VOUT	9.345	9.989	9.997	9.900	9.973	9.99960	V

**Tabla 4.4.3. Errores en C.D. relacionados con la aplicación.**

La tabla 4.4.4 muestra la comparación de eficiencia en ruido de los diversos amplificadores puestos a consideración. Esta tabla es de especial interés, ya que el voltaje de ruido es muy pequeño, y esto lo hace especialmente atractivo para el sistema analizador de señales de audio.

Parametro	Bipolar	Excalibur	BiFet	LinCmos	Unidades
	EN5534	TLE2027	TL051	TLC2201	
Ruido en voltaje	3.5	2.5	18	8	nV.Hz
Ruido en corriente	400	4000	10	0.06	fA.Hz
1 F	100	3	100	50	Hz

**Tabla 4.4.4. Comparación de eficiencia en ruido.**

Todas estas tablas nos muestran las ventajas que ofrece el amplificador operacional TLE2027/2037 con respecto a los demás amplificadores existentes en el mercado y que también pueden ser usados en el diseño. Debido a estas razones se ha seleccionado como el amplificador idóneo para nuestra aplicación.

Un preamplificador de entrada es propuesto por Texas Instruments en base a el amplificador operacional TLE2027/2037; el cual tiene una respuesta en corriente alterna que excede el rango dinámico de los 90 dB mejorando notablemente la precisión de la respuesta a la salida del amplificador.

El circuito está basado en una configuración No Inversora, con amplitud máxima a la salida de 5 Volts, de tal forma que pueda ser compatible con convertidores Analógico-Digital de 8 bits.

Los valores de resistencia y capacitancia pueden variar de acuerdo a los valores comerciales, pero éstos no producen gran afectación en la señal. Se recomienda emplear resistencias de precisión con el fin de disminuir el porcentaje de error, los capacitores deben de ser de tantalio para lograr mayor precisión.

La figura 4.4.2 muestra el circuito propuesto como preamplificador de entrada. El análisis de este amplificador se encuentra en el apéndice C.

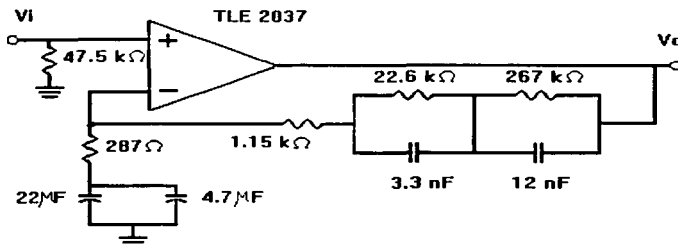


Figura 4.4.2. Circuito preamplificador.

En el circuito propuesto, la resistencia a la entrada no inversora se utiliza para igualar la resistencia de entrada del amplificador operacional, los capacitores sirven como dispositivos de bypass y todos los demás componentes son empleados en la etapa preamplificadora.

La teoría de filtros digitales se basa en simples operaciones aritméticas tales como la suma y la multiplicación, de modo que pueden ser implementados en algún software de algún procesador, el cual se encargará de simularlos para que de esta forma obtengamos el filtrado de una señal a través de un proceso digital. Este procesamiento se realiza mediante la combinación de ciertos dispositivos y circuitos digitales, los cuales se encargan de ejecutar una secuencia programada de operaciones, las cuales son un conjunto de instrucciones almacenadas en la memoria de algún procesador.

Existen diversos circuitos integrados que realizan las funciones descritas anteriormente, los circuitos integrados más comunes son el microprocesador, el microcontrolador (MCU), y los procesadores digitales de señales (DSP), que al interactuar con el hardware adecuado pueden representar físicamente el filtrado de alguna señal analógica mediante un procesamiento digital. A continuación se hará referencia a los circuitos procesadores anteriormente mencionados.

**El microprocesador** viene a ser el reemplazo de un gran número de circuitos integrados en una sola "pastilla", obteniendo con ello un sistema más flexible, con estructuras de información más complejas que simplifican el desarrollo de operaciones a una gran velocidad de procesamiento, el cual es un factor muy importante al momento de procesar grandes volúmenes de información.

Dentro de las características más importantes se pueden destacar que los microprocesadores pueden trabajar con diferentes longitudes de palabra, que van desde 8, 16 y 32 bits. Cabe mencionar que el aumento de bits en la palabra incrementa el número de representaciones de un cierto formato, es decir, para 8 bits se pueden representar 255 diferentes opciones, para 16 bits se tienen 65535 diferentes y para 32 bits se tienen 4294967295 representaciones.

Ahora bien, este aumento en el rango repercute también en su capacidad de carga de datos. Por ejemplo, un circuito de 8 bits puede enviar y recibir datos de 8 bits en una sola transferencia, mientras que uno de 16 bits requiere de 2 operaciones por separado para realizarlo, incrementando así su tiempo de operación. Además de que el software puede ser más eficiente ya que es más fácil de representar y opera con los valores más grandes en los registros de la unidad central de procesamiento (CPU).

**Los procesadores digitales de señales DSP** tienen la característica principal de ejecutar operaciones de multiplicación/acumulación en uno o dos ciclos de máquina, es decir, son excepcionalmente rápidos. La especialización de las arquitecturas involucradas en estos procesadores pueden resultar de la integración de funciones adicionales dentro de los circuitos DSP, de modo que simplifican los requerimientos de apoyo en hardware.

Cuenta con: memoria ROM, mediante la cual transmiten información a través de las líneas de datos y fijan éstas a través de las líneas de direcciones en algún lugar dentro del DSP, y unidad aritmética lógica con registros de operaciones. El registro de instrucciones interactúa con la unidad de datos aritméticos, todo esto es enviado hacia un dispositivo externo vía las líneas de datos externos.

Existen DSPs que realizan operaciones de multiplicación de 16 por 16 bits, dando un total de 31/32 bits de producto. Así como los que cuentan con espacios de memoria arriba de los 65 kB, para ser utilizados como almacenadores de palabras; integraciones aritméticas de 24 por 24 bits o bien tener longitudes de palabra de hasta 32 bits para realizar operaciones aritméticas de punto flotante.

**Los microcontroladores** son originados bajo el concepto de forma de los microprocesadores, estos son tipificados principalmente por ser un procesador que cuenta con bancos de registro, ALU con acumulador, memoria ROM y RAM más grande, bus de multifunciones y puertos de entrada y salida I/O.

Desarrollado antes que los procesadores digitales de señales, los microcontroladores ofrecen características más importantes en cuanto al control de la salida de información, con algoritmos más sencillos, lo cual permite tener aplicaciones en tiempo real. Como características principales de los microprocesadores cabe destacar:

- Tiene memoria de datos y de programas, los cuales se encuentran separadas con el fin de lograr una mejor eficiencia en la ejecución de programas.
- Cuenta con una gran variedad de accesorios, que ayudan al mejor aprovechamiento del microcontrolador, de los cuales se pueden destacar a los convertidores analógico-digital.
- Cuenta con un timer/contador, el cual puede ser configurado para manipular la velocidad del reloj del sistema o las transiciones de entrada en terminal, además de regular el proceso de carga y recarga de los registros mediante interrupciones que se logran al realizar configuraciones internas.

- Puertos de entrada salida con interfase serial. Las cuales pueden ser modo asíncrono (sin reloj), o síncrono (con reloj) en una operación completamente full dúplex (canales independientes de Tx y Rx).
- Puertos de entrada y salida en paralelo, esto le permite tener arreglos de bits multipropósito, que son usados en direccionamientos y acceso de datos cuando el microprocesador trabaja en memoria externa.
- Una mejor unidad aritmético lógica (ALU) provista de registros indexados para la realización de operaciones aritméticas.
- Sistemas de interrupción que son ofrecidos en una o más niveles, así como fuentes de interrupción mascarables.
- Convertidores A/D que operan típicamente por aproximaciones sucesivas y son limitados por su proceso de fabricación y eliminación de ruido.
- Sistemas protectores de tiempo que se encargan de vigilar el software programado y efectuar la función de restablecimiento, en caso de encontrar una falla en el mismo durante la ejecución de un programa.

Para seleccionar el tipo de procesador más adecuado para la implementación física de nuestro dispositivo, es necesario hacer unos breves análisis comparativos de los tres procesadores descritos anteriormente.

En el caso del microprocesador, este es un circuito el cual requiere de un software más elaborado para la ejecución de operaciones aritméticas lineales, necesarias para el filtrado de una señal, aumentando el número de ciclos de máquina que tendría que realizar el microprocesador antes de obtener alguna salida, convirtiéndolo de esta manera en un procesador demasiado lento para realizar aplicaciones en tiempo real. Además el microprocesador requiere de diversos accesorios de hardware para poder realizar las funciones de procesamiento deseado. Un microprocesador requiere de circuitos externos para la entrada de datos y un dispositivo para el despliegue de información a la salida, haciendo de ésta manera el microprocesador una opción de implementación de costo elevado y grandes dimensiones.

Los procesadores digitales de señales DSP, son circuitos hechos especialmente para realizar aplicaciones en tiempo real, ya que cuentan con algoritmos especiales para la ejecución de operaciones aritméticas en línea, en un tiempo extraordinariamente corto. Se encuentra como inconveniente el que los DSP procesan únicamente la señal y requieren de equipo periférico para la adquisición de datos y despliegue de información, elevando de esta forma el costo de producción del dispositivo procesador.

Los circuitos microcontroladores son dispositivos que cuentan con una mayor facilidad para la implementación de operaciones aritméticas, esto debido a que el número de instrucciones empleadas para su programación es mayor a cualquiera de los otros procesadores descritos con anterioridad. Tiene además autonomía de hardware y una mayor eficiencia en el manejo de variables debido a los registros asignados durante el procesamiento de información, además de las estructuras de entrada y salida que ofrecen características sencillas para la implementación de dispositivos externos para adquisición y despliegue de información.

Los microcontroladores cuentan con estructuras de integración y velocidades de procesamiento altas, bajo consumo de potencia y alta inmunidad al ruido, las cuales son características propias de la tecnología CMOS, convirtiéndola de esta forma en un circuito de pequeñas dimensiones y bajo costo.

Tomando en cuenta las características de los procesadores, consideramos que el procesador más adecuado para la implementación física del prototipo deseado es el microcontrolador, ya que es un circuito ideado para desarrollarse en ambientes con un mínimo de componentes asociados a él.

De entre los microcontroladores existentes en el mercado se eligió el microcontrolador **MC68HC11 de Motorola**, el cual reúne las características apropiadas para la implementación física de un procesador de señales. El conocimiento de las características generales del microcontrolador nos han permitido elegir a éste como el más idóneo para el desarrollo de nuestro proyecto.

## **DESCRIPCIÓN DEL MICROPROCESADOR A EMPLEAR**

Los atributos en hardware que posee el microcontrolador MC68HC11 lo convierten en el candidato idóneo para la implementación física de un dispositivo procesador de señales digitales, por lo cual a continuación describiremos algunas características importantes del microcontrolador (MCU). La alta densidad y tecnología HCMOS del MC68HC11, hace que el MCU de 8 bits sea un circuito de alta sofisticación y gran capacidad periférica.

La tecnología HCMOS usada en el microcontrolador combina a un solo circuito de tamaño pequeño, alta velocidad, bajo consumo de potencia y una alta inmunidad al ruido, características propias de la tecnología CMOS. El circuito (MC68HC11A8) cuenta con un sistema de memoria que incluye 8 kbytes de EEPROM y 256 bytes de memoria de acceso directo (RAM). De entre las funciones con las que cuenta el microcontrolador podemos mencionar:

- Convertidor analógico digital A/D de 8 canales, con 8 bits de resolución, una interface de comunicación serial asincrónica (SCI) y una interface de comunicación síncrona (SPI).
- Cuenta con un sistema de auto monitoreo para protegerse de errores en el sistema, un dispositivo de operación exacta (COP) que lo protege contra fallas de software. Un reloj de monitoreo genera un reset en el caso de pérdidas de reloj o ejecuciones demasiado lentas. Un circuito detector de códigos ilegales habilita a una interrupción no mascarable si un código ilegal es detectado.
- Dos modos de operación, WAIT y STOP, se pueden habilitar para el ahorro en el consumo de potencia.
- Cuenta con un diseño totalmente estático que le permite la operación a bajas frecuencias, reduciendo de esta manera el consumo de potencia. La generación de ruido y la susceptibilidad a éste dependen primordialmente de cada sistema y al medio ambiente.

En la figura 4.4.3 se muestra el diagrama de bloques del MC68HC11. Este diagrama muestra al mayor subsistema y como se relacionan las terminales en el MCU. En él se observa cada uno de los componentes básicos del microcontrolador, tales como la unidad de alimentación, el oscilador, memorias y los acumuladores que son parte esencial de nuestro proyecto. En la parte inferior del diagrama se muestra el subsistema en paralelo I/O, las funciones de este subsistema se pierden cuando el MCU opera en modo expandido.



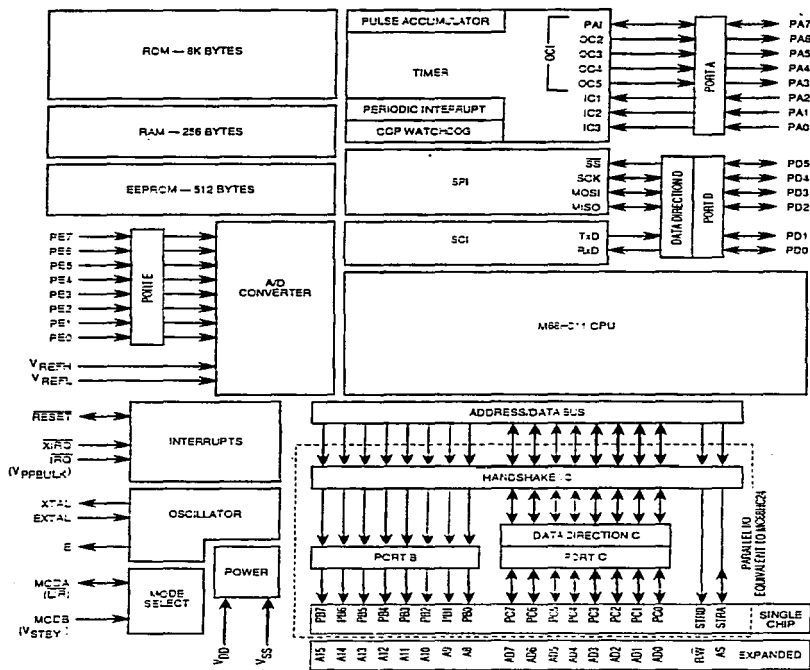


Figura 4.4.3. Diagrama de bloques del MC68HC11.

El software que soporta el MC68HC11 hace del microcontrolador un circuito de fácil programación, con amplios caminos para la manipulación del hardware periférico. Dentro de las características más notables de este procesador podemos mencionar, que es capaz de ejecutar todas las instrucciones de los circuitos M6800 y M6801, además de contar con 90 instrucciones adicionales. A diferencia de otros microcontroladores, el MC68HC11 posee un registro indexado (Y) de 16 bits. Poderosas instrucciones de manipulación de bits son incluidas para manejar cualquier bit o combinación de bits en cualquier localidad de memoria. Dos nuevas instrucciones de división de 16 bits son incluidas e instrucciones de intercambio, que mueven el contenido de un registro indexado para intercambiarlo con el registro (D), el cual contiene un doble acumulador de 16 bits. A continuación se hará referencia a cada uno de los registros de la unidad central de procesamiento (CPU).

## **ACUMULADORES (A, B, D)**

Los acumuladores A y B son registros de propósito general usados para guardar operadores y resultados de cálculos aritméticos o manipulación de datos. Algunas instrucciones tratan a la combinación de estos dos acumuladores de 8 bits como un doble acumulador de 16 bits (acumulador D).

## **REGISTROS INDEXADOS (X, Y)**

Los registros indexados de 16 bits, X y Y, son usados para indexar el modo de direccionamiento. En el modo de direccionamiento indexado, el contenido de los 16 bits del registro indexado son sumados a un offset de 8 bits, el cual es incluido como parte de la instrucción para dar el direccionamiento del operador a ser usado en la instrucción.

## **APUNTADOR DE PILA (SP)**

El MC68HC11 apoya automáticamente a un programa de pila. Esta pila puede estar ubicada en cualquier dirección dentro de los 64 kBytes de espacio de direccionamiento y puede tomar cualquier tamaño dependiendo de la cantidad disponible en el sistema. Otro uso común de la pila o stack pointer (SP) es la de almacenar temporalmente los valores de los registros.

## **CONTADOR DE PROGRAMA (PC)**

El contador de programa es un registro de 16 bits que contiene la dirección de las siguientes instrucciones a ser ejecutadas.

## **REGISTRO DE CONDICIÓN DE CÓDIGO (CCR)**

Este registro contiene cinco registros de entrada, dos bits de interrupción mascarable y un bit de deshabilitación de la instrucción STOP. La explicación en detalle de cada instrucción se puede ver en el manual de referencia del fabricante.

## **MAPEO DE MEMORIA**

Un mapeo de memoria se refiere a la organización de los diferentes tipos de memoria (ó bancos) en base al número de combinaciones del bus de direcciones del MCU, es decir el mapeo de memoria es la ubicación de los bancos de memoria en el rango de direccionamiento del MCU. El mapeo de memoria es determinado por el modo de operación. Existen cuatro modos de operación que determinan el modo de operación en el MC68HC11, éstos son: Modo Simple, Modo Expandido, Modo Especial y Modo Test. Para la realización del presente trabajo sólo nos ocuparemos del modo simple, el cual es un modo normal de operación en la que se tiene disponibilidad de memoria suficiente para la ejecución del software. En el Modo Simple el MCU no tiene direccionamiento externo o bus de datos. Los puertos B y C y las terminales STROBE A (STRA) y B (STRB) son disponibles para propósito general como puertos paralelos de entrada y salida. Los bits de control en el registro CONFIG para las memorias EPROM y EEPROM pueden ser deshabilitados desde el mapeo de memoria. Los 512 Bytes en RAM son mapeados en la dirección (\$0000) después del reset.

La memoria RAM puede ser reemplazada por cualquier otra memoria de 4 kBytes e iniciar en la dirección (\$X000) con sólo escribir el valor apropiado en el registro INIT. Los 64 Bytes del bloque de registros son mapeados en la dirección (\$1000) después del reset. El hardware del MCU tiene las siguientes prioridades: el bloque de registros tienen prioridad sobre la RAM y la RAM tiene prioridad sobre la EPROM. Cuando los 64 Bytes del bloque de registros son mapeados en la misma localidad de memoria de la memoria RAM, una lectura del mapeo dual resulta en el registro, es decir dado que se tiene más prioridad en el bloque

de registros al ser remapeados éstos, el MCU tendría que realizar una doble lectura de los registros; una cuando inicia y la otra que determina las nuevas localidades del bloque de registros. Si la RAM es relocalizada en las localidades de la memoria EPROM, la RAM tiene prioridad sobre la EPROM. Los 512 Bytes de la memoria estática RAM almacenan instrucciones variables y datos temporales. El modo de direccionamiento puede acceder valores a la RAM usando operadores de dirección de un solo bit, salvando espacio en la memoria y ejecutar instrucciones de una programación determinada dependiendo de la aplicación. El contenido de la memoria RAM puede ser preservado durante los períodos en los que el procesador se encuentre inactivo.

Los 12 kBytes de EPROM son habilitados desde fuera por medio del reset y son localizados en las direcciones ( \$D000 - \$FFFF ).

Los 512 Bytes de EEPROM son localizados en la dirección ( \$B600 - \$B7FF ) y tienen el mismo ciclo de lectura que la ROM interna. La EEPROM puede ser programada o borrada por software y una fuente de carga especial ( programador de memorias ) con un voltaje de 5 volts. La figura 4.4.4 muestra el mapeo de memoria para el modo simple.

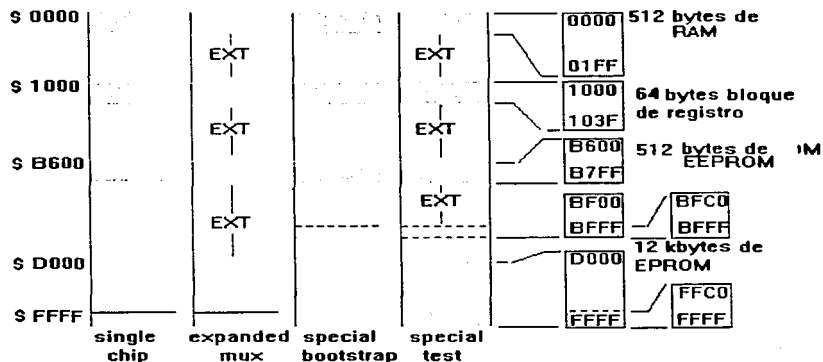


Fig. 4.4.4. Mapeo de memoria.

## CONVERTIDOR ANALÓGICO A DIGITAL (ADC)

El convertidor de analógico a digital (ADC) es un sistema de aproximaciones sucesivas, el cual utiliza la técnica de redistribución de la carga capacitiva para convertir señales analógicas a valores digitales.

El convertidor analógico a digital (ADC) es un sistema de 8 canales, 8bits, convertidor con entrada multiplexada, con una aproximación de  $\pm 1$  con respecto al bit menos significativo, puede ser sincronizado con el reloj del microcontrolador o con un oscilador externo. El ADC consiste de 4 bloques funcionales: el multiplexor, el convertidor analógico, el control digital y el registro de resultados.

En la figura 4.4.5 se muestra un diagrama a bloques del convertidor digital a analógico en donde se muestran sus principales bloques funcionales involucrados

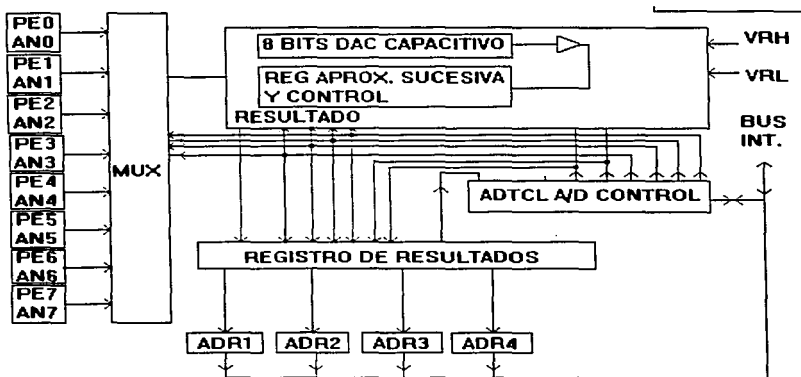


Figura 4.4.5. Diagrama de bloques del convertidor analógico a digital (ADC)

**Multiplexor.** El multiplexor selecciona 1 de 16 entradas para la conversión (PE<sub>x</sub>, ó AN<sub>x</sub>); la selección de la entrada es controlada por el registro ADTCL del convertidor. Las 8 terminales del puerto E están direccionadas para la entrada de las señales analógicas hacia el multiplexor y líneas de señales analógicas adicionales pueden ser enrutadas hacia él.

**Convertidor analógico.** La conversión de una señal analógica seleccionada se lleva a cabo en este bloque. Contiene un arreglo capacitivo digital a analógico (DAC), un comparador y un registro de aproximaciones sucesivas. Cada conversión es una secuencia 8 operaciones de comparación, empezando por el bit más significativo; cada comparación determina el valor de un bit en el registro de aproximación sucesiva (SAR). El arreglo del DAC tiene dos funciones, uno es el muestreo y retención del circuito durante la secuencia de conversión y su segunda función es la de proveer una comparación de voltaje para cada comparación sucesiva.

El resultado de cada comparación sucesiva es almacenada en el SAR. Cuando una secuencia de conversión es completada, el contenido del registro SAR es transferido al registro de resultados apropiado.

**Control digital.** Toda conversión analógica a digital es controlada por bits en el registro ADTCL. Cuando una señal analógica va a ser convertida, el ADTCL indica el estado de la conversión y el control sencillo o continuo de la conversión es optimizado; finalmente el registro de bits ADTCL si las conversiones son optimizadas en simples o múltiples canales.

**Registro de resultados.** Cuatro registros de 8 bits (ADR1 - ADR4) almacenan los resultados de la conversión. Cada uno de estos registros pueden ser accedidos por el procesador la unidad central de procesamiento (CPU). La bandera de conversión finalizada (CCF) indica cuando un dato valido se presenta en el registro de resultados.

**Secuencia de conversión.** Las operaciones de conversión analógica a digital son optimizadas en secuencias de 4 conversiones. Una secuencia de conversión puede ser repetida continuamente o detenerse después de una iteración. La bandera de conversión finalizada (CCF) es colocada después de la cuarta conversión en una secuencia para colocar la disponibilidad de los datos en el registro de resultados. La figura 4.4.6 muestra el tiempo de una secuencia típica. La sincronización es referenciada de al reloj del sistema

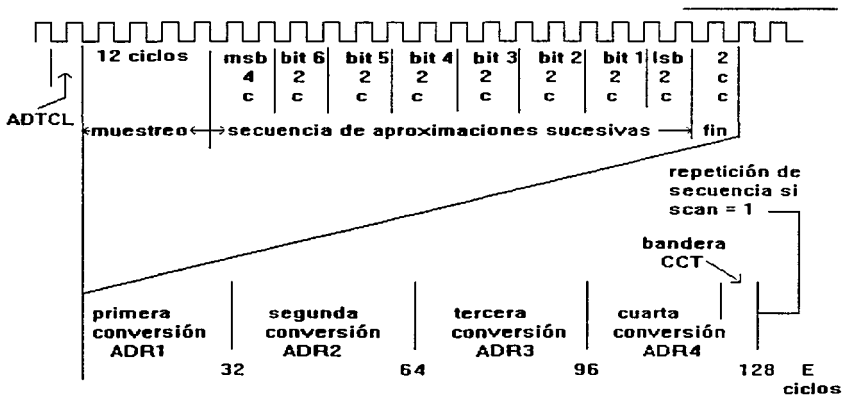


Figura 4.4.6. Secuencia de conversión del ADC

## INTERFAZ DE SALIDA

El sistema analizador de señales de audio debe contar con un dispositivo interfaz de salida que permita observar los resultados de las mediciones que se realicen durante la equalización de un recinto. Para esto la interfaz de salida debe de ser un dispositivo que permita lecturas fáciles de los resultados, para la correcta interpretación de éstos y que permitan tomar las acciones pertinentes para la correcta equalización del recinto.

Una primera opción para el despliegue de resultados es la impresión de datos, que para un experto en acústica le ayudaría a llevar a cabo un análisis a detalle de las condiciones del recinto que se éste equalizando. El inconveniente de este medio de despliegue es la gran cantidad de información que se puede tener en papel, y que a final de cuentas puede resultar contraproducente, ya que el analizador de señales de audio realiza innumerables mediciones del comportamiento del recinto, por lo que después de un rato la enorme cantidad de información podría llegar a confundir al experto en acústica.

Mediante un display alfanumérico se puede tener un despliegue constante de información a través de datos alfanuméricos, que para un experto en acústica le proporciona una idea del comportamiento del recinto, pero necesariamente tendrá que imprimirlos para su análisis, ya que será prácticamente imposible memorizar la gran cantidad de resultados que obtenga, además para una persona que no cuente con los conocimientos adecuados en acústica este despliegue de números y valores raros no tendrán ningún sentido y por consiguiente no sabrá que es lo que realmente está sucediendo con el recinto. Cabe agregar que su uso en este tipo de aplicaciones es nulo.

Con una matriz de led's (conocida comúnmente como analizador de espectro) cualquier persona con conocimientos mínimos de acústica puede darse una idea de la tarea que se está realizando. Este medio de despliegue visual ha tenido gran aceptación en aplicaciones de audio y es el de uso más frecuente, abarcando desde los equipos de sonido caseros hasta los grandes estudios de grabación de audio. Es por esto que para un experto en acústica este tipo de dispositivo le facilita la tarea que está realizando, ya que puede hacer innumerables mediciones y correcciones al recinto con sólo observar el comportamiento de las variaciones en el espectro de frecuencias, mientras el toma las medidas pertinentes para equalizar un recinto, evitando valores confusos e impresiones inútiles para este tipo de aplicación.

Por lo tanto consideramos a la matriz de led's como la interfaz de salida más adecuada para nuestra aplicación, debido a su gran aceptación general y la flexibilidad para la interpretación de nuestros resultados. La figura 4.4.7 nos muestra la configuración propuesta como interfaz de salida.

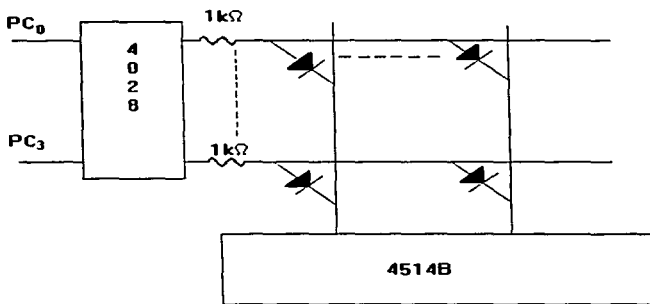


Fig. 4.4.7. Configuración de la matriz de led's.

Esta matriz de led's propuesta emplea decodificadores de 4:16 del tipo 4514B, los cuales tienen la función de direccionar las señales en la matriz: los led's a emplear son de luz roja en forma circular con valores de voltaje de 1.68 V, estos manejan corriente de 50 mA., la cual será suministrada por un decodificador BCD a Decimal del tipo 4028B de baja velocidad que nos asegure que no aparezcan fantasmas en las frecuencias laterales debido a la velocidad de los datos a la salida del microcontrolador. Las resistencias a emplear son de 1 kΩ y tienen la función de limitar el paso de corriente en la matriz de led's.

La figura 4.4.8 nos muestra el aspecto final de la matriz de led's. En ella podemos observar una matriz compuesta de 12 columnas por 8 filas de led's. En las columnas tenemos representadas a las frecuencias que se emplean para el rango audible. Las frecuencias centrales a manejar, separadas entre sí por octavas, son: 20 Hz, 40 Hz, 80 Hz, 160 Hz, 320 Hz, 640 Hz, 1 kHz, 2 kHz, 4 kHz, 8 kHz, 16 kHz y 20 kHz. En las filas se mostrará la ganancia para cada una de las frecuencias representadas en la matriz de led's, teniendo como ganancia mínima -3 dB y como ganancia máxima +0 dB. Cabe señalar que estas características es debido a que la máxima respuesta plana de los filtros será de de ganancia unitaria es decir 0 dB.

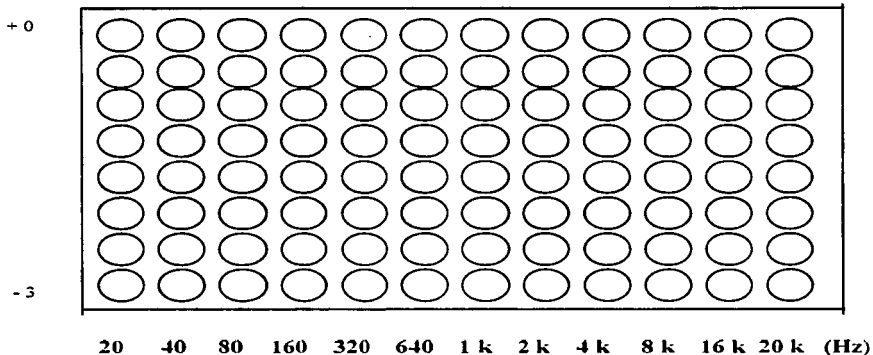


Fig. 4.4.8. Disposición de la matriz de led's.

En ella será posible apreciar la ganancia para todas las frecuencias representadas en el rango audible. La apariencia final será la de un analizador de espectros, el cual es el medio más adecuado para el despliegue de la información de nuestro dispositivo analizador de señales de audio

## 4.5 DESCRIPCIÓN DEL SOFTWARE

En este tema haremos una descripción de todos los procesos involucrados en el sistema a nivel de software, los cuales abarcarán desde el cálculo de los coeficientes hasta los programas propuestos para el funcionamiento del microcontrolador.

### CÁLCULO DE COEFICIENTES

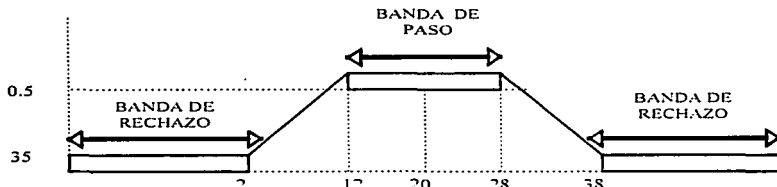
Tomando como base el análisis realizado en el capítulo III, en el que se determinaron las ecuaciones necesarias para el cálculo de los coeficientes de segundo orden, y considerando lo expuesto en el apartado anterior, se procederá a calcular los coeficientes de los filtros digitales. La secuencia de cálculo para los coeficientes de segundo orden será:

- 1.- Cálculo de polos y ceros para un filtro Paso-bajas BUTTERWORTH en el plano S.
- 2.- Transformación bilineal de un filtro Paso-bajas a un filtro Paso-banda.
- 3.- Cálculo de polos y ceros para un filtro Paso-banda BUTTERWORTH en el plano S.
- 4.- Cálculo de polos y ceros para un filtro Paso-banda BUTTERWORTH en el plano Z.
- 5.- Cálculo de coeficientes de segundo orden para un filtro digital.
- 6.- Cálculo de coeficientes de ganancia  $C_N$ .

Como ejemplo del cálculo de coeficientes comenzaremos con el primer filtro, para el cual se calculó el orden anteriormente. Para el diseño de este filtro digital tenemos los siguientes parámetros:

Frecuencia de Muestreo  $F = 40$  kHz.  
 Orden del filtro  $N = 8$ .  
 Frecuencia central  $f_c = 20$ .  
 Banda de paso                      Banda de rechazo  
 $f_{p1} = 12$  Hz                       $f_{s1} = 2$  Hz  
 $f_{p2} = 28$  Hz                       $f_{s2} = 38$  Hz  
 $A_p = 0.5$  dB                       $A_s = 35$  dB

En la figura 4.5.1 se muestra la representación de las características mencionadas anteriormente.



**Figura 4.5.1.** Valores de banda de rechazo, banda de paso, frecuencia central, así como sus valores de atenuación en sus distintas bandas.

Las siguientes ecuaciones nos servirán para encontrar los polos y ceros en el plano S para un filtro BUTTERWORTH paso-bajas, ecuaciones 4.5.1 y 4.5.2.

$$a_{lpk} = -\operatorname{sen}\left[\frac{(2k-1)}{2N}\right]\pi \quad (4.5.1)$$

$$b_{lpk} = \cos\left[\frac{(2k-1)}{2N}\right]\pi \quad (4.5.2)$$

Ahora bien, como se puede observar la ecuación depende de las variables  $k$  y de la constante  $N$ ; es importante recordar que  $k$  está en función de  $N$ , es decir  $K = N/2$ . Por lo tanto, se realizarán  $N/2$  veces las operaciones.



$$a_{ip1k} = -\operatorname{sen}\left[\frac{(2 \times 1) - 1}{2 \times 8}\right]\pi$$

$$a_{ip1k} = -\operatorname{sen}(0.125)\pi$$

$$a_{ip1k} = -0.1951$$

$$b_{ip1k} = \operatorname{cos}\left[\frac{(2 \times 1) - 1}{2 \times 8}\right]\pi$$

$$b_{ip1k} = \operatorname{cos}(0.125)\pi$$

$$b_{ip1k} = 0.9808$$

Estos son los resultados de la primera iteración, y como se puede observar lo único que cambia es el valor de k. Los demás valores de la iteración se presentan en la tabla 4.5.1. Esta tabla proporciona los valores de polos y ceros de un filtro Paso-bajas en el plano S, como se puede apreciar los ceros en su parte real e imaginaria son constantes (0.00), esto se debe a las condiciones de estabilidad que debe cumplir un filtro paso-bajas para su diseño, los polos en su parte real dependen de la ecuación 4.5.1; y para su parte imaginaria dependen de la ecuación 4.5.2.

POLOS Y CEROS EN EL PLANO S PARA UN FILTRO BUTTERWORTH PASO-BAJAS				
K	CEROS		POLOS	
	REAL	IMAGINARIO	REAL	IMAGINARIO
1	0.0000	0.0000	-0.1951	0.9808
2	0.0000	0.0000	-0.5555	0.8314
3	0.0000	0.0000	-0.8314	0.5555
4	0.0000	0.0000	-0.9807	0.1950

Tabla 4.5.1. Valores obtenidos de las iteraciones realizadas, para el cálculo de polos y ceros de un filtro paso-bajas, en su parte real e imaginaria en el plano S.

A continuación se presentan las siguientes ecuaciones que sirven para realizar la transformación bilineal de un filtro paso-bajas a un filtro paso-banda, dicha transformación es necesaria para el diseño de un filtro digital.

$$\beta_{\text{HBP}} = (10^{0.1 \cdot r} - 1)^{0.5 \cdot N} \quad (4.5.3)$$

$$\beta_{\text{HBP}} = (10^{(0.1 \cdot 0.5)} - 1)^{0.5 \cdot 8}$$

$$\beta_{\text{HBP}} = 1.1405$$

$$\omega'_w = \text{tag}(\pi f_{p2} / F) \quad (4.5.4)$$

$$\omega'_w = \text{tag}(\pi \times 28 / 40000)$$

$$\omega'_w = 0.0022$$

$$\omega'_L = \text{tag}(\pi f_{p1} / F) \quad (4.5.5)$$

$$\omega'_L = \text{tag}(\pi \times 12 / 40000)$$

$$\omega'_L = 0.0009$$

$$\Delta'_w = [\omega'_w - \omega'_L] \quad (4.5.6)$$

$$\Delta'_w = [0.0021 - 0.0009]$$

$$\Delta'_w = 0.0013$$

$$\omega'_o = (\omega'_w \times \omega'_L) \quad (4.5.7)$$

$$\omega'_o = (0.0022 \times 0.0009)$$

$$\omega'_o = 0.0000021$$

Por otra parte, las siguientes ecuaciones sirven para el cálculo de los polos en el plano S para un filtro Paso-banda. Las k operaciones estarán en función del valor N, es decir, k=N.

$$C_1 = b_{p1k}^2 + \left[ \frac{4\omega'_o}{[\Delta'_w \beta_{\text{HBP}}]^2} \right] - |a_{p1k}|^2 \quad (4.5.8)$$

$$C_1 = 0.9808^2 + \left[ \frac{4 \times 0.0000021}{[0.0013 \times 1.1405]^2} \right] - |-0.1951|^2$$

$$C_1 = 4.9600$$

$$C_2 = [C_1^2 + [2a_{lp1k} b_{lp1k}]^2]^{0.5} \quad (4.5.9)$$

$$C_2 = [4.9600^2 + [2 \times 0.1951 \times 0.9808]^2]^{0.5}$$

$$C_2 = 4.9747$$

$$C_3 = \left[ \frac{C_2 - C_1}{2} \right]^{0.5} \quad (4.5.10)$$

$$C_3 = \left[ \frac{4.9747 - 4.9600}{2} \right]^{0.5}$$

$$C_3 = 0.0859$$

$$C_4 = \left[ \frac{C_2 + C_1}{2} \right]^{0.5} \quad (4.5.11)$$

$$C_4 = \left[ \frac{4.9747 + 4.9600}{2} \right]^{0.5}$$

$$C_4 = 2.2288$$

Con estas ecuaciones se calculan los polos en el plano S en su parte real e imaginaria. para un filtro paso-banda. Tomando en cuenta los valores obtenidos anteriormente tenemos:

$$a_{hplk} = \frac{\beta_{nnpf} \times \Delta'_{iw}}{2} [-|a_{lp1k}| - C_3] \quad (4.5.12)$$

$$a_{hplk} = \frac{1.1405 \times 0.0013}{2} [-|-0.1951| - 0.08959]$$

$$a_{hplk} = -0.0002$$

$$a_{hplk} = \frac{\beta_{nnpf} \times \Delta'_{iw}}{2} [-|b_{lp1k}| - C_4] \quad (4.5.13)$$

$$a_{hplk} = \frac{1.1405 \times 0.0013}{2} [-|-0.9807| - 2.2288]$$

$$a_{hplk} = 0.0023$$

En la tabla 4.5.2 que se muestra a continuación se presentan los valores de los polos en su parte real e imaginaria, obtenidos de las iteraciones realizadas. Como se observa los ceros en su parte real e imaginaria tienen un valor constante para cumplir las condiciones de estabilidad en el plano S y los polos real e imaginario quedarán determinados por las ecuaciones 4.5.12 y 4.5.13.

POLOS Y CEROS EN EL PLANO S PARA UN FILTRO BUTTERWORTH PASO-BANDA				
K	CEROS		POLOS	
	REAL	IMAGINARIO	REAL	IMAGINARIO
1	0.0000	0.0000	-0.0002	0.0023
2	0.0000	0.0000	-0.0005	0.0021
3	0.0000	0.0000	-0.0007	0.0017
4	0.0000	0.0000	-0.0007	0.0014
5	0.0000	0.0000	-0.0001	-0.0008
6	0.0000	0.0000	-0.0002	-0.0009
7	0.0000	0.0000	-0.0004	-0.0010
8	0.0000	0.0000	-0.0006	-0.0011

**Tabla 4.5.2.** Valores obtenidos para los polos y ceros, del filtro paso-banda en su parte real e imaginaria en el plano S.

Enseguida se presentan las ecuaciones que sirven para calcular los polos en el plano Z de un filtro paso-banda.

$$D_{hp2k} = 1 + 2|a_{hp2k}| + a_{hp2k}^2 + b_{hp2k}^2 \quad (4.5.14)$$

$$D_{hp2k} = 1 + 2|0.0002| + 0.0002^2 + 0.0023^2$$

$$D_{hp2k} = 1.0004$$

$$\operatorname{Re}[Z_{hp1k}] = \frac{1 - [a_{hp2k}^2 + b_{hp2k}^2]}{D_{hp2k}} \quad (4.5.15)$$

$$\operatorname{Re}[Z_{hp1k}] = \frac{1 - [-0.0002^2 + 0.0023^2]}{1.0004}$$

$$\operatorname{Re}[Z_{hp1k}] = 0.9096$$

$$\operatorname{Im}[Z_{hp1k}] = \frac{2b_{hp2k}}{D_{hp2k}} \quad (4.5.16)$$

$$\operatorname{Im}[Z_{hp1k}] = \frac{2 \times 0.0023}{1.0004}$$

$$\operatorname{Im}[Z_{hp1k}] = 0.0046$$

La tabla 4.5.3 muestra los resultados de los polos y ceros en el plano Z. Como se puede observar los ceros en su parte real e imaginaria tienen valores constantes de 1.0 y de 0.0 respectivamente, los cuales son condiciones necesarias para la estabilidad del sistema. Para los polos la parte real e imaginaria variarán de acuerdo a las ecuaciones 4.5.15 y 4.5.16 respectivamente.

POLOS Y CEROS EN EL PLANO Z PARA UN FILTRO BUTTERWORTH PASO-BANDA				
K	CEROS		POLOS	
	REAL	IMAGINARIO	REAL	IMAGINARIO
1	1.0000	0.0000	0.9996	0.0046
2	1.0000	0.0000	0.9988	0.0042
3	1.0000	0.0000	0.9985	0.0035
4	1.0000	0.0000	0.9984	0.0028
5	1.0000	0.0000	0.9998	-0.0017
6	1.0000	0.0000	0.9995	-0.0018
7	1.0000	0.0000	0.9991	-0.0019
8	1.0000	0.0000	0.9987	-0.0022

Tabla 4.5.3. Resultados obtenidos, para los polos y ceros de un filtro paso-banda en su parte real e imaginaria en el plano Z.

Las siguientes ecuaciones permiten calcular la sección de coeficientes de segundo orden del denominador.

$$B_{1,k} = -2 \times \text{Re}[Z_{hp1k}] \quad (4.5.17)$$

$$B_{1,k} = -2 \times 0.9996$$

$$B_{1,k} = -1.9992$$

$$B_{2,k} = -\text{Re}[Z_{hp1k}]^2 + \text{Im}[Z_{hp1k}]^2 \quad (4.5.18)$$

$$B_{2,k} = -0.9996^2 + 0.0046^2$$

$$B_{2,k} = 0.9992$$

La tabla 4.5.4 muestra los resultados de los coeficientes de segundo orden, para un filtro paso-banda. Como se puede observar los coeficientes del numerador son constantes, siendo estos 0.0 y -1.0 para la parte real e imaginaria respectivamente, debido a que éstas son las condiciones necesarias para la estabilidad del sistema. Los coeficientes del denominador variarán de acuerdo a las ecuaciones 4.5.17 y 4.5.18. Dichos coeficientes son de importancia, ya que con estos resultados se realizará una simulación, donde se podrá observar si el filtro cumple con los parámetros de diseño y por otra parte estos mismos resultados se utilizarán en la programación del microcontrolador.

SECCIÓN DE COEFICIENTES DE SEGUNDO ORDEN				
COEFICIENTES NUMERADOR		COEFICIENTES DENOMINADOR		
K	A1	A2	B1	B2
1	0.0000	-1.0000	-1.9992	0.9992
2	0.0000	-1.0000	-1.9977	0.9977
3	0.0000	-1.0000	-1.9969	0.9969
4	0.0000	-1.0000	-1.9968	0.9968
5	0.0000	-1.0000	-1.9996	0.9996
6	0.0000	-1.0000	-1.9990	0.9990
7	0.0000	-1.0000	-1.9983	0.9983
8	0.0000	-1.0000	-1.9974	0.9975

**Tabla 4.5.4. Resultados obtenidos para los coeficientes del numerador y denominador para un filtro paso-banda de segundo orden.**

Este es el procedimiento que se seguirá para el cálculo de los doce filtros digitales propuestos en la sección 4.3. De las cuatro tablas mostradas anteriormente, la más importante es la última, sección de coeficientes de segundo orden, ya que estos valores se utilizarán en la programación del microprocesador, las tablas anteriores sólo son cálculos necesarios para determinar la tabla de los coeficientes de segundo orden, por tal motivo dichas tablas se presentarán en el apéndice D, el cual muestra los resultados obtenidos para cada uno de los filtros seleccionados.

A continuación debemos conocer la ganancia para cada uno de los filtros seleccionados, para esto el factor de ganancia  $G_k$  de cada uno de los coeficientes de segundo orden se calculan de la siguiente manera:

$$G_k = \frac{1 + A_{1,k} Z^{-1} + A_{2,k} Z^{-2}}{1 + B_{1,k} Z^{-1} + B_{2,k} Z^{-2}} \quad (4.5.19)$$

Los valores de A y B se proporcionan en la tabla 4.5.4 y Z está dado por la ecuación 4.5.20.

$$Z = e^{-j2\pi f_c T} = \cos 2\pi f_c T - j \operatorname{sen} 2\pi f_c T \quad (4.5.20)$$

Donde:

$f_c$ : frecuencia central

T: frecuencia de muestreo

Con la caracterización de todos los elementos que intervienen en la ecuación 4.5.19. y como  $A_{1,k}=0$ ,  $A_{2,k}=-1$ , la ecuación 4.5.19 queda de la siguiente manera:

$$G_k = \frac{1 - Z^{-2}}{1 + B_{1,k}Z^{-1} + B_{2,k}Z^{-2}} \quad (4.5.21)$$

Con la ecuación 4.5.21 se sustituirán los valores de los coeficientes de segundo orden para  $K=1$ , hasta 4 y resolviendo la ecuación 4.5.20 tenemos:

$$Z = \cos 2\pi * 20 * 40,000 - j \operatorname{sen} 2\pi * 20 * 40,000 = -1.412$$

$$G_1 = \frac{1 - (-1.412)^{-2}}{1 + (-1.9993)(-1.412)^{-1} + (0.9993)(-1.412)^{-2}} = \frac{0.498}{2.917} = 0.171$$

$$G_2 = \frac{1 - (-1.412)^{-2}}{1 + (-1.9980)(-1.412)^{-1} + (0.9981)(-1.412)^{-2}} = \frac{0.498}{2.916} = 0.171$$

$$G_3 = \frac{1 - (-1.412)^{-2}}{1 + (-1.9973)(-1.412)^{-1} + (0.9973)(-1.412)^{-2}} = \frac{0.498}{2.915} = 0.171$$

$$G_4 = \frac{1 - (-1.412)^{-2}}{1 + (-1.9970)(-1.412)^{-1} + (0.9971)(-1.412)^{-2}} = \frac{0.498}{2.914} = 0.171$$

Estos valores se utilizarán para encontrar cada uno de los factores de ganancia  $C_k$  utilizando las siguientes ecuaciones:

$$C_1 = \frac{1}{|G_1|} \quad (4.5.22)$$

$$C_2 = \frac{1}{|G_1||G_2|} \quad (4.5.23)$$

$$C_3 = \frac{1}{|G_1||G_2||G_3|} \quad (4.5.24)$$

$$C_4 = \frac{1}{|G_1||G_2||G_3||G_4|} \quad (4.5.25)$$

Sustituyendo valores

$$C_1 = \frac{1}{|0.171|} = 5.848$$

$$C_2 = \frac{1}{|0.171||0.171|} = 34.483$$

$$C_3 = \frac{1}{|0.171||0.171|0.171|} = 200.000$$

$$C_4 = \frac{1}{|0.171||0.171|0.171||0.171|} = 1000.000$$

Estos son los factores de ganancia que se deben de multiplicar por cada coeficiente de segundo orden para el filtro I. Los cálculos restantes aparecerán con los coeficientes de segundo orden para los restantes filtros en la memoria de cálculo.

#### 4.5.6 MEMORIA DE CÁLCULO

En la sección 4.3 se realizaron los cálculos para el primer filtro, que tiene como frecuencia de corte  $f_c = 20$  Hz. El cálculo de los filtros restantes se realiza de la misma forma, por tal motivo, se implementará un programa en Pascal, que calculará los valores de los coeficiente de segundo orden para cada filtro, en los que solamente se proporcionarán los valores de la tabla 4.3.1. En el apéndice D se incluye una corrida de dicho programa llamado "Cálculo de filtro". A Continuación se muestra el diagrama de flujo de dicho programa.

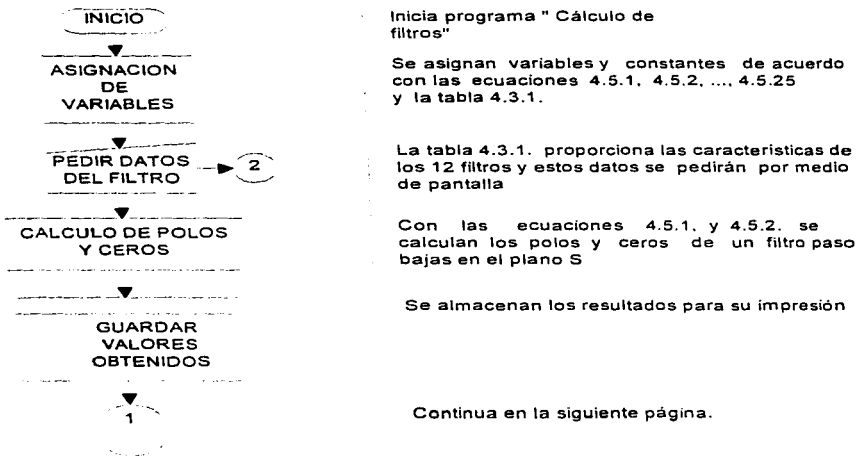


Figura 4.5.2. Diagrama de flujo para el cálculo de filtros digitales. (continua)



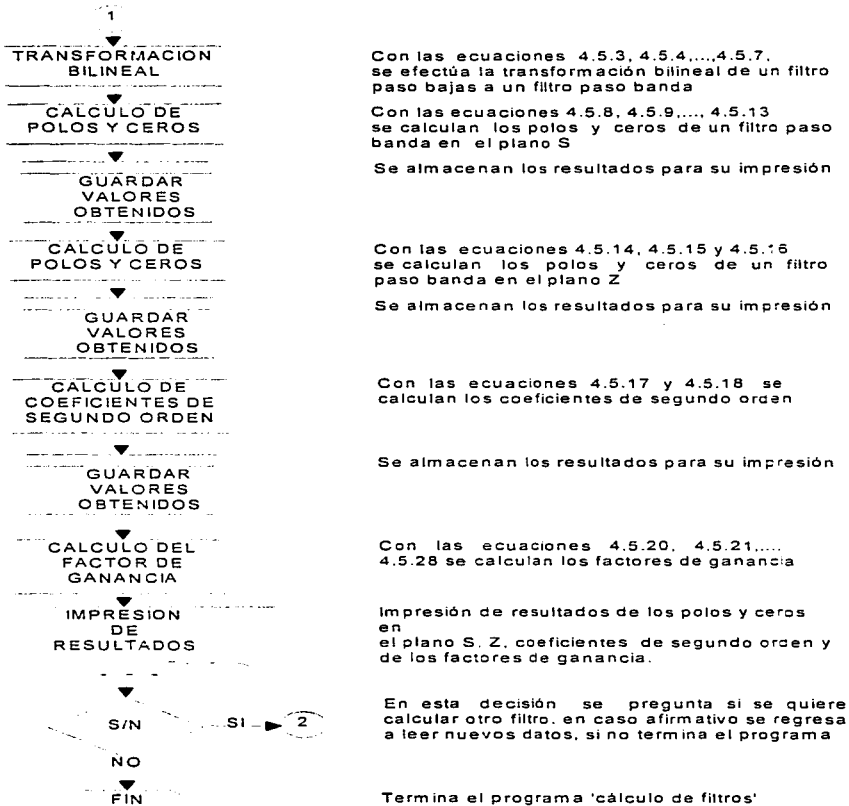


Figura 4.5.2. Diagrama de flujo para el cálculo de filtros digitales.

En la tabla 4.5.5 se presentan los resultados obtenidos mediante el programa desarrollado en PASCAL de los coeficientes de segundo orden para los 12 filtros propuestos.

COEFICIENTES DE SEGUNDO ORDEN						
COEFICIENTES :		NUMERADOR		DENOMINADOR		GANANCIA
K	FILTRO	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	C <sub>1</sub>
1	1	0.0000	-1.0000	-1.9993	0.9993	5.8527
2	1	0.0000	-1.0000	-1.9980	0.9981	34.2359
3	1	0.0000	-1.0000	-1.9973	0.9973	200.2050
4	1	0.0000	-1.0000	-1.9970	0.9971	1170.6365
1	2	0.0000	-1.0000	-1.9993	0.9993	5.8527
2	2	0.0000	-1.0000	-1.9980	0.9981	34.2359
3	2	0.0000	-1.0000	-1.9973	0.9973	200.2050
4	2	0.0000	-1.0000	-1.9970	0.9971	1170.6365
1	3	0.0000	-1.0000	-1.9984	0.9986	5.8507
2	3	0.0000	-1.0000	-1.9960	0.9962	34.1968
3	3	0.0000	-1.0000	-1.9944	0.9946	199.7407
4	3	0.0000	-1.0000	-1.9940	0.9941	1166.4672
1	4	0.0000	-1.0000	-1.9963	0.9973	5.8464
2	4	0.0000	-1.0000	-1.9915	0.9924	34.1116
3	4	0.0000	-1.0000	-1.9885	0.9893	198.7774
4	4	0.0000	-1.0000	-1.9876	0.9883	1157.8735
1	5	0.0000	-1.0000	-1.9907	0.9945	5.8065
2	5	0.0000	-1.0000	-1.9814	0.9845	33.4554
3	5	0.0000	-1.0000	-1.9756	0.9787	191.8489
4	5	0.0000	-1.0000	-1.9741	0.9767	1098.8994
1	6	0.0000	-1.0000	-1.9740	0.9891	5.7779
2	6	0.0000	-1.0000	-1.9560	0.9701	33.1047
3	6	0.0000	-1.0000	-1.9455	0.9578	188.6821
4	6	0.0000	-1.0000	-1.9436	0.9540	1673.9146
1	7	0.0000	-1.0000	-1.9547	0.9880	5.4804
2	7	0.0000	-1.0000	-1.9355	0.9670	29.0548
3	7	0.0000	-1.0000	-1.9244	0.9529	151.3415
4	7	0.0000	-1.0000	-1.9226	0.9476	786.6091
1	8	0.0000	-1.0000	-1.7747	0.9465	5.0749
2	8	0.0000	-1.0000	-1.7086	0.8585	25.0408
3	8	0.0000	-1.0000	-1.6851	0.8067	123.1380
4	8	0.0000	-1.0000	-1.7032	0.7664	607.5460
1	9	0.0000	-1.0000	-1.4785	0.9618	2.7748
2	9	0.0000	-1.0000	-1.4471	0.8963	7.4687
3	9	0.0000	-1.0000	-1.4451	0.8525	20.6335
4	9	0.0000	-1.0000	-1.4693	0.8346	61.6391

Tabla 4.5.5. Coeficientes de segundo orden con su factor de ganancia. (Continua)

COEFICIENTES DE SEGUNDO ORDEN						
COEFICIENTES:		NUMERADOR		DENOMINADOR		GANANCIA
K	FILTRO	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	C <sub>v</sub>
1	10	0.0000	-1.0000	0.0731	0.8669	2.7748
2	10	0.0000	-1.0000	-0.0166	0.6576	7.4687
3	10	0.0000	-1.0000	-0.1658	0.5202	20.6535
4	10	0.0000	-1.0000	-0.3654	0.4589	61.6591
1	11	0.0000	-1.0000	0.3231	0.8508	2.4034
2	11	0.0000	-1.0000	0.1604	0.6297	5.7970
3	11	0.0000	-1.0000	-0.0751	0.5162	15.2609
4	11	0.0000	-1.0000	-0.7959	0.8622	61.1150
1	12	0.0000	-1.0000	0.7922	0.9028	1.7882
2	12	0.0000	-1.0000	0.6467	0.7482	3.2926
3	12	0.0000	-1.0000	0.4664	0.6591	6.6072
4	12	0.0000	-1.0000	0.0321	0.8936	18.8975

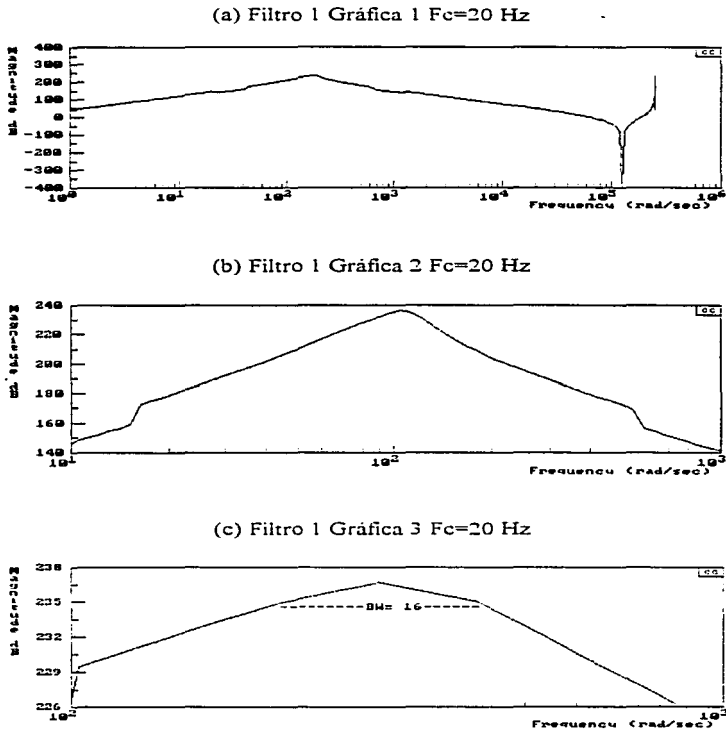
Tabla 4.5.5. Coeficientes de segundo orden con su factor de ganancia.

Como se puede observar en las tablas anteriores los resultados de los coeficientes del numerador son constantes, siendo 0.0 y -1.0 para A<sub>1</sub> y A<sub>2</sub> respectivamente, siendo estos valores condición necesaria para la estabilidad del sistema; los coeficientes del denominador tienen un comportamiento que varía de acuerdo a la frecuencia de corte, para el término B<sub>1</sub> va desde -1.999 para filtro 1 hasta 0.7922 para el último filtro; esta variación se va dando de acuerdo a como se vaya incrementando la frecuencia de corte, es decir para altas frecuencias. El coeficiente B<sub>2</sub> varía desde 0.999 para el filtro 1 hasta 0.4588, comportándose de la siguiente forma: para frecuencias bajas el valor tiende a ser constante y no tiene incrementos significativos, para las frecuencias medias presenta incrementos más significativos y para las altas frecuencias la variación que se presenta es significativa, pero cabe señalar que la variación para este coeficiente no es de varios enteros, como sucede en los coeficientes B<sub>1</sub>, es una variación de sólo décimas, sin llegar a ser unitario.

## ANÁLISIS DE RESPUESTA EN FRECUENCIA

Con los valores de los coeficientes del numerador y del denominador, se proceda a realizar una simulación, que permita observar la respuesta en frecuencia de los doce filtros. Se mostrarán tres gráficas para cada filtro, en las que se observará, primero si el filtro es paso-banda, segundo se realizará un acercamiento de su frecuencia de corte, y la última gráfica mostrará un acercamiento para mostrar su ancho de banda. En las figuras 4.5.3 a 4.5.13 se presenta una simulación para cada filtro. La simulación de la respuesta de los filtros fueron desarrolladas en un paquete llamado CC.

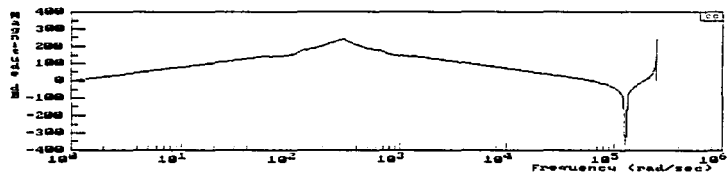
Análisis de respuesta en frecuencia para el filtro 1, con frecuencia central igual a 20 Hz, relación de muestreo igual a 40,000 Hz, figura 4.5.3.



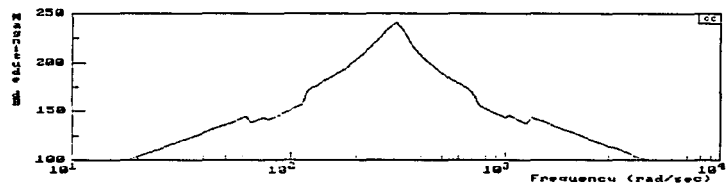
La figura 4.5.3 muestra la respuesta en frecuencia para el filtro 1: a) respuesta en paso banda del filtro 1; b) Frecuencia central de 20 Hz del filtro 1. c) Ancho de banda de 16 Hz para el filtro 1.

Análisis de respuesta en frecuencia para el filtro 2. con frecuencia central igual a 40 Hz, relación de muestreo igual a 40,000 Hz, figura 4.5.4.

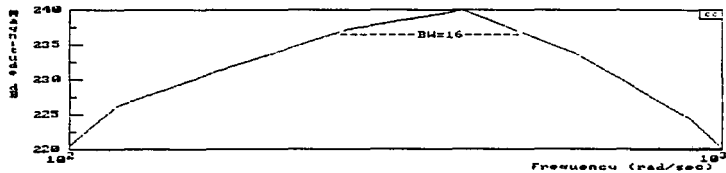
(a) Filtro 2 Gráfica 1  $F_c=40$  Hz



(b) Filtro 2 Gráfica 2  $F_c=40$  Hz



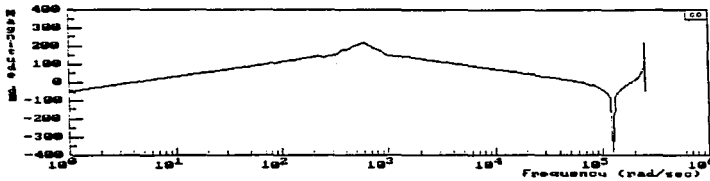
(c) Filtro 2 Gráfica 3  $F_c=40$  Hz



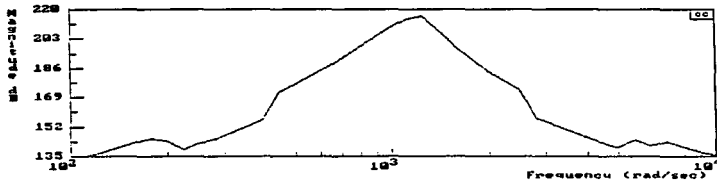
La figura 4.5.4 muestra la respuesta en frecuencia para el filtro 2: a) respuesta en paso banda del filtro 2; b) Frecuencia central de 40 Hz del filtro 2; c) Ancho de banda de 16 Hz para el filtro 2.

Análisis de respuesta en frecuencia para el filtro 3, con frecuencia central igual a 80 Hz, relación de muestreo igual a 40,000 Hz, figura 4.5.5.

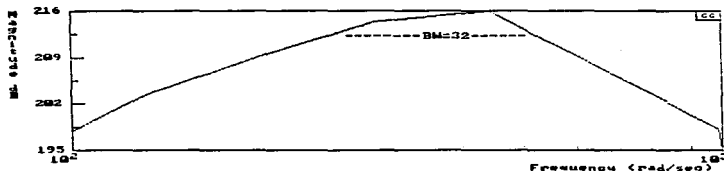
(a) Filtro 3 Gráfica 1  $F_c = 80$  Hz



(b) Filtro 3 Gráfica 2  $F_c = 80$  Hz



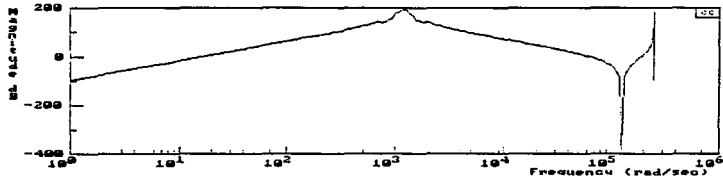
(c) Filtro 3 Gráfica 3  $F_c = 80$  Hz



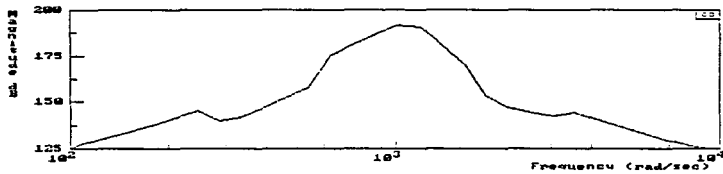
La figura 4.5.5 muestra la respuesta en frecuencia para el filtro 3: a) respuesta en paso banda del filtro 3; b) Frecuencia central de 80 Hz del filtro 3; c) Ancho de banda de 32 Hz para el filtro 3.

Análisis de respuesta en frecuencia para el filtro 4, con frecuencia central igual a 160 Hz, relación de muestreo igual a 40,000 Hz, figura 4.5.6.

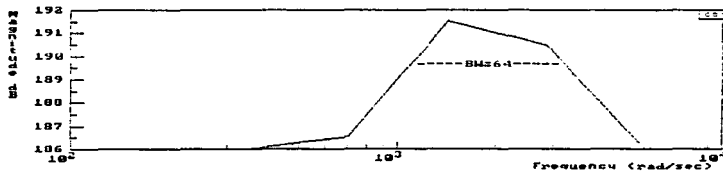
(a) Filtro 4 Gráfica 1  $F_c = 160$  Hz



(b) Filtro 4 Gráfica 2  $F_c = 160$  Hz



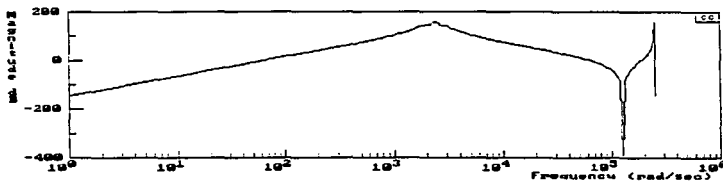
(c) Filtro 4 Gráfica 3  $F_c = 160$  Hz



La figura 4.5.6 muestra la respuesta en frecuencia para el filtro 4: a) respuesta en paso banda del filtro 4; b) Frecuencia central de 160 Hz del filtro 4; c) Ancho de banda de 6.4 Hz para el filtro 4.

Análisis de respuesta en frecuencia para el filtro 5, con frecuencia central igual a 320 Hz, relación de muestreo igual a 40,000 Hz, figura 4.5.7.

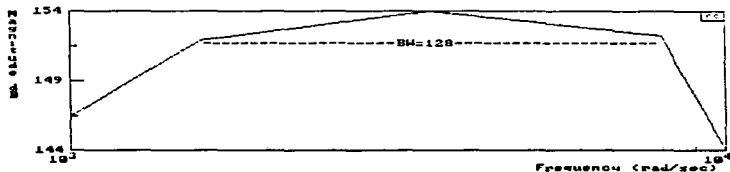
(a) Filtro 5 Gráfica 1  $F_c = 320$  Hz



(b) Filtro 5 Gráfica 2  $F_c = 320$  Hz



(c) Filtro 5 Gráfica 3  $F_c = 320$  Hz

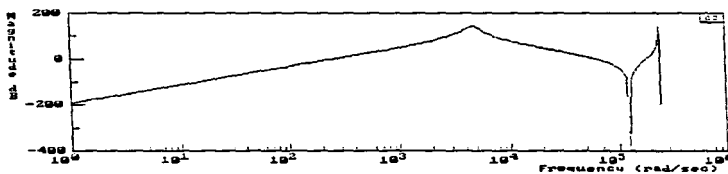


La figura 4.5.7 muestra la respuesta en frecuencia para el filtro 5: a) respuesta en paso banda del filtro 5; b) Frecuencia central de 320 Hz del filtro 5; c) Ancho de banda de 128 Hz para el filtro 5.

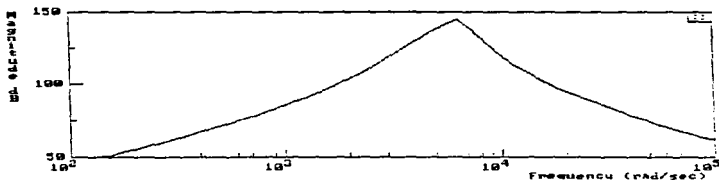


Análisis de respuesta en frecuencia para el filtro 6, con frecuencia central igual a 640 Hz, relación de muestreo igual a 40,000 Hz. figura 4.5.8.

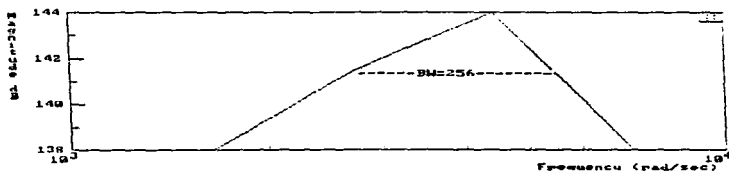
(a) Filtro 6 Gráfica 1  $F_c = 640$  Hz



(b) Filtro 6 Gráfica 2  $F_c = 640$  Hz



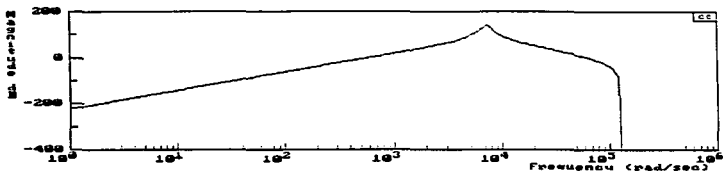
(c) Filtro 6 Gráfica 3  $F_c = 640$  Hz



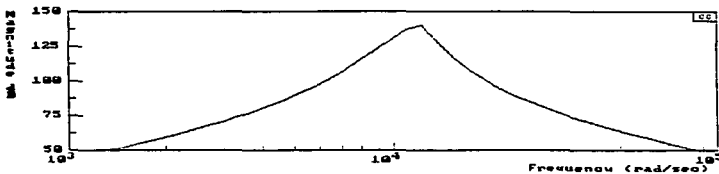
La figura 4.5.8 muestra la respuesta en frecuencia para el filtro 6: a) respuesta en paso banda del filtro 6; b) Frecuencia central de 640 Hz del filtro 6; c) Ancho de banda de 256 Hz para el filtro 6.

Análisis de respuesta en frecuencia para el filtro 7, con frecuencia central igual a 1 KHz, relación de muestreo igual a 40,000 Hz, figura 4.5.9.

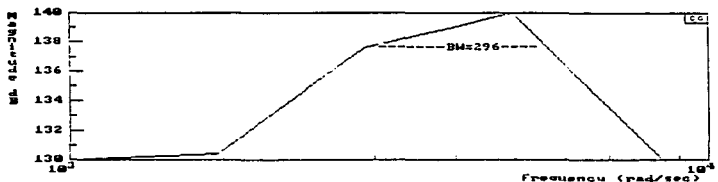
(a) Filtro 7 Gráfica 1  $F_c = 1$  KHz



(b) Filtro 7 Gráfica 2  $F_c = 1$  KHz



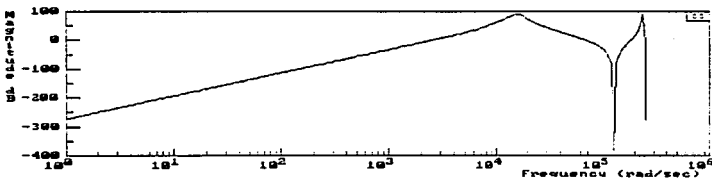
(c) Filtro 7 Gráfica 3  $F_c = 1$  KHz



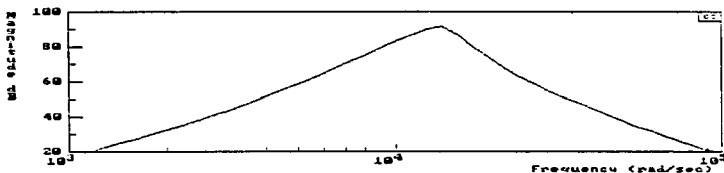
La figura 4.5.9 muestra la respuesta en frecuencia para el filtro 7: a) respuesta en paso banda del filtro 7; b) Frecuencia central de 1 KHz del filtro 7; c) Ancho de banda de 296 Hz para el filtro 7.

Análisis de respuesta en frecuencia para el filtro 8, con frecuencia central igual a 2 KHz, relación de muestreo igual a 40,000 Hz. figura 4.5.10.

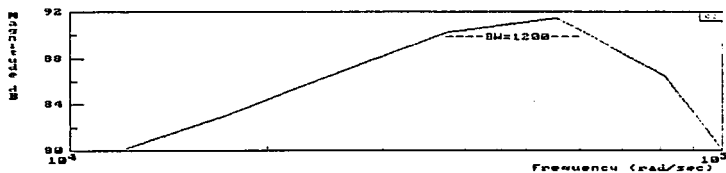
(a) Filtro 8 Gráfica 1  $F_c = 2$  KHz



(b) Filtro 8 Gráfica 2  $F_c = 2$  KHz



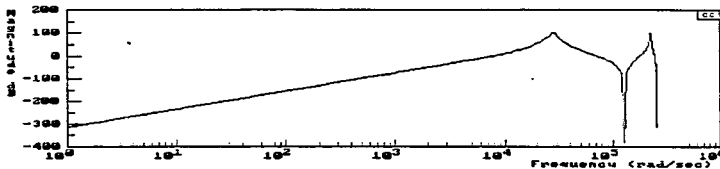
(c) Filtro 8 Gráfica 3  $F_c = 2$  KHz



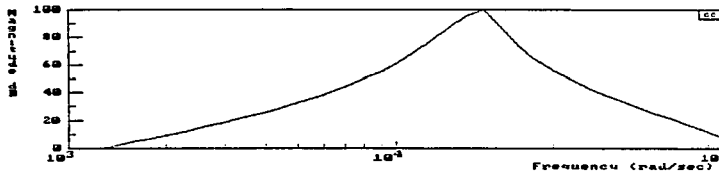
La figura 4.5.10 muestra la respuesta en frecuencia para el filtro 8: a) respuesta en paso banda del filtro 8; b) Frecuencia central de 2 KHz del filtro 8; c) Ancho de banda de 1200 Hz para el filtro 8.

Análisis de respuesta en frecuencia para el filtro 9, con frecuencia central igual a 4 KHz, relación de muestreo igual a 40,000 Hz, figura 4.5.11.

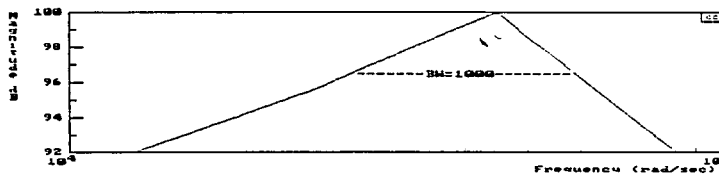
(a) Filtro 9 Gráfica 1  $F_c = 4$  KHz



(b) Filtro 9 Gráfica 2  $F_c = 4$  KHz



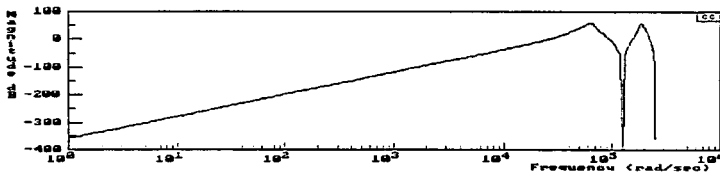
(c) Filtro 9 Gráfica 3  $F_c = 4$  KHz



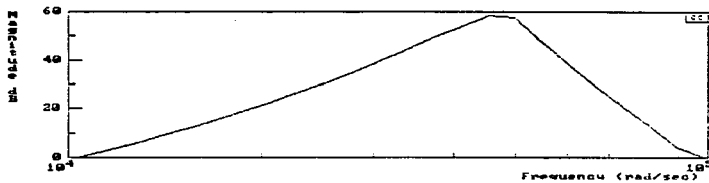
La figura 4.5.11 muestra la respuesta en frecuencia para el filtro 9: a) respuesta en paso banda del filtro 9; b) Frecuencia central de 4 KHz del filtro 9; c) Ancho de banda de 1000 Hz para el filtro 9.

Análisis de respuesta en frecuencia para el filtro 10, con frecuencia central igual a 8 KHz, relación de muestreo igual a 40,000 Hz, figura 4.5.12.

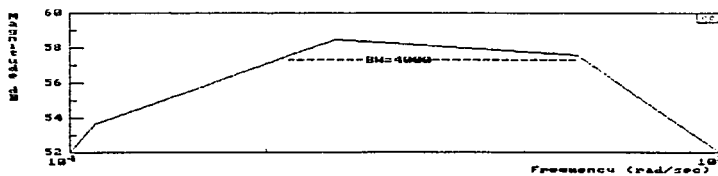
(a) Filtro 10 Gráfica 1  $F_c = 8$  KHz



(b) Filtro 10 Gráfica 2  $F_c = 8$  KHz



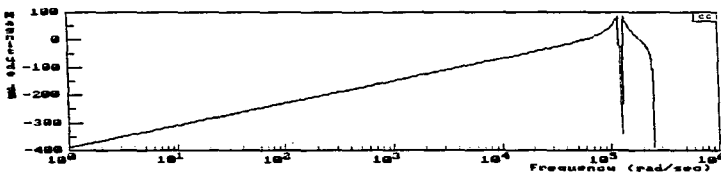
(c) Filtro 10 Gráfica 3  $F_c = 8$  KHz



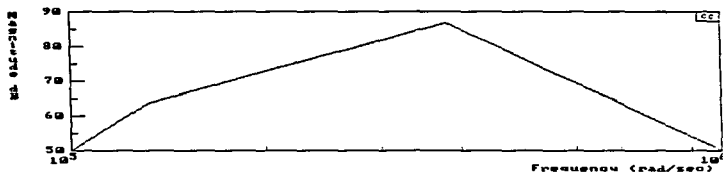
La figura 4.5.12 muestra la respuesta en frecuencia para el filtro 10: a) respuesta en paso banda del filtro 10; b) Frecuencia central de 8 KHz del filtro 10; c) Ancho de banda de 4000 Hz para el filtro 10.

Análisis de respuesta en frecuencia para el filtro 11, con frecuencia central igual a 16 KHz, relación de muestreo igual a 40,000 Hz, figura 4.5.13.

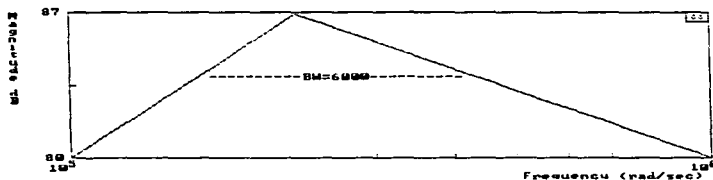
(a) Filtro 11 Gráfica 1  $F_c = 16$  KHz



(b) Filtro 11 Gráfica 2  $F_c = 16$  KHz



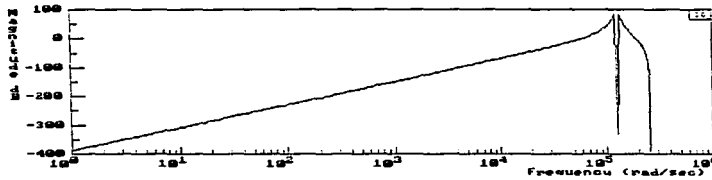
(c) Filtro 11 Gráfica 3  $F_c = 16$  KHz



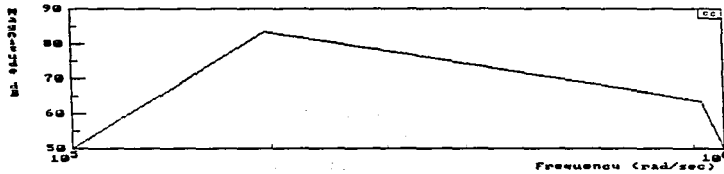
La figura 4.5.13 muestra la respuesta en frecuencia para el filtro 11: a) respuesta en paso banda del filtro 11; b) Frecuencia central de 16 KHz del filtro 11; c) Ancho de banda de 6000 Hz para el filtro 11.

Análisis de respuesta en frecuencia para el filtro 12, con frecuencia central igual a 20 KHz, relación de muestreo igual a 40,000 Hz, figura 4.5.14.

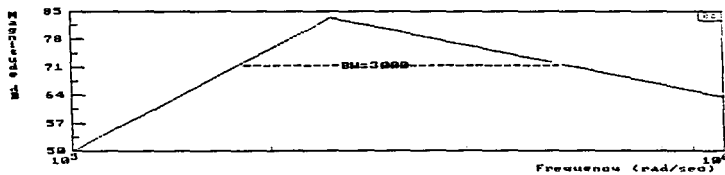
(a) Filtro 12 Gráfica 1  $F_c = 20$  KHz



(b) Filtro 12 Gráfica 2  $F_c = 20$  KHz



(c) Filtro 12 Gráfica 2  $F_c = 20$  KHz



La figura 4.5.14 muestra la respuesta en frecuencia para el filtro 12: a) respuesta en paso banda del filtro 12; b) Frecuencia central de 20 KHz del filtro 12; c) Ancho de banda de 4000 Hz para el filtro 12.

Con esta simulación observamos que los filtros diseñados cumplen con las características requeridas en la tabla 4.3.1. Los coeficientes utilizados en esta simulación también se ocuparán en la programación del microcontrolador 68HC11, con estos coeficientes y una programación que se implementará el microcontrolador realizará el filtrado y de este modo sabremos las frecuencias que existen en el recinto.

## PROGRAMACIÓN DEL MICROCONTROLADOR

El microcontrolador 68HC11 se programará de tal manera que nos indique la(s) frecuencia(s) que existe(n) en un punto del recinto que se desea ecualizar, su entrada analógica estará dada por un micrófono omnidireccional, la cual será convertida a una señal digital por el sistema convertidor analógico-digital A/D interno que posee el 68HC11 y la salida será a una matriz de LEDS.

Antes de pasar a la programación del microcontrolador es necesario hacer una breve descripción de como deberá funcionar éste, para que en base a dicho funcionamiento se pueda diseñar un algoritmo que realice el proceso deseado.

El microcontrolador recibirá una señal de entrada analógica proveniente del pre-amplificador descrito anteriormente, al recibir la señal el microcontrolador mediante su sistema convertidor A/D interno convertirá la señal analógica a una señal digital. Una vez realizado este paso el microcontrolador almacenará el resultado de la conversión en cuatro registros internos llamados ADR'S, después de hacer esto, el microcontrolador seleccionará una señal proveniente de los registros de espera, en los cuales se encuentra la señal seleccionada por el proceso de round robin a que fueron sometidas las señales a una frecuencia de muestreo de 40 kHz, posteriormente el microcontrolador procederá a cargar los coeficientes para el filtro 1 y empezará a calcular su  $y_i$  del filtro, almacenando este resultado en una localidad de memoria que será direccionado hacia la salida (display); y esta operación se efectuará de manera sucesiva para cada uno de los doce filtros.

De acuerdo a lo anterior podemos ver que es conveniente estructurar la programación en cuatro pasos básicos:

1. - Almacenamiento de los coeficientes de segundo orden calculados en la sección 4.3 y 4.4.
2. - Número de veces a realizar el muestreo.
3. - Cálculo de  $y_i$  (para cada uno de los doce filtros).
4. - Despliegue de los datos obtenidos.

El algoritmo representado mediante el diagrama de flujo en la figura 4.5.15 representa el programa principal llamado "filtrado" que es el software encargado de analizar las frecuencias que existen en un punto del recinto, dicho programa utiliza una subrutina para el cálculo de  $y_i$  y esta a su vez se apoya en otras subrutinas para realizar operaciones algebraicas y determinación de los signos de acuerdo a las operaciones realizadas.

### Programa: Filtrado

#### Estructura: Programa principal

Declaración de variables que intervienen en el programa principal:

Variables de entrada:  $V_{1,1}$ ,  $V_{1,2}$ ,  $V_{1,3}$ ,  $V_{1,4}$ .

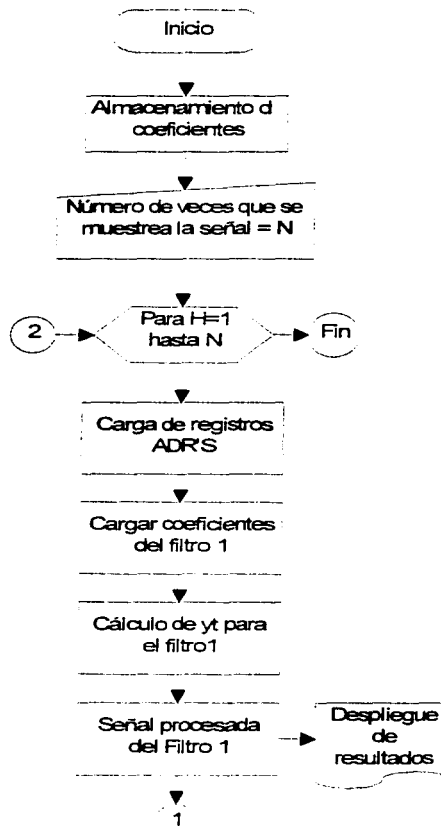
Variables de salida:  $y_{1,1}$ ,  $y_{1,2}$ , ...,  $y_{1,12}$ .

Variables de signo de salida:  $sig_{1,1}$ ,  $sig_{1,2}$ , ...,  $sig_{1,12}$ .

Variables para los coeficientes de segundo orden:  $B_{1,2}$ ,  $B_{1,3}$ ,  $B_{1,4}$ .

Programa principal "Filtrado". El cual se describe a continuación.





Inicia programa principal 'FILTRADO'

Paso 1: Almacenamiento de coeficientes d segundo orden según tabla 4.5.5.

Paso 2: Se indica el número de veces que s realiza el muestreo de la señal.

Paso 3: Se cargan los registro ADR'S en localidades de memoria, estos datos se utilizarán en el cálculo de los 12 filtros

Se asignan los coeficientes del filtro 1 a cad una de las variables definidas

Paso 4: Cálculo de yt apoyándose en l subrutina 'Cálculo de yt' para el filtro 1

Se procesa y almacena la señal, para después enviarse a una matriz de led

fig 4.5.15 Programa principal del microcontrolador (continua).

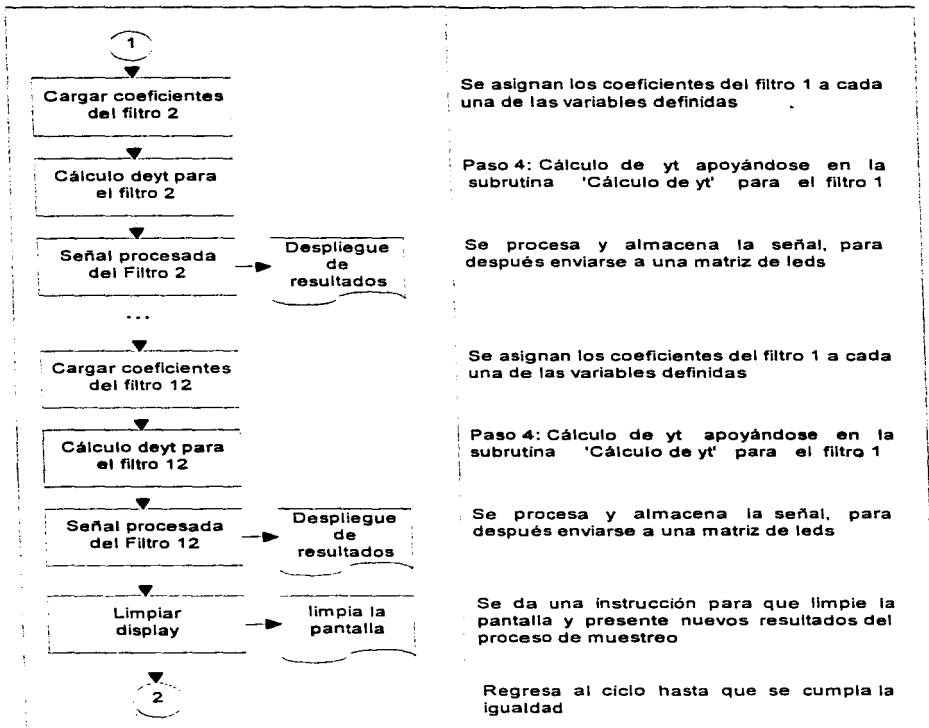


Figura 4.5.15 Programa principal del microcontrolador, (continuación) .

Como se puede observar en la figura 4.5.15, lo que se calcula es la  $y_t$ , para cada uno de los filtros, este cálculo se realiza mediante subrutinas que se describirán a continuación.

Una vez que hemos visto el funcionamiento del algoritmo del programa principal 'filtrado', procederemos a describir cada una de las subrutinas que son empleadas.

Como primer paso desarrollaremos el cálculo de  $y_t$ .

Hemos visto que  $y_t$  representa la función de transferencia para un filtro Butterworth paso-banda.

$$y_t = \prod_{k=1}^N y_k \quad (4.5.26)$$

Donde:

N: orden del filtro

$$\text{Donde: } y_k = C_k [x_k - x_{k-2}] - B_{1,k} y_{k-1} - B_{2,k} y_{k-2} \quad (4.5.27)$$

$y_k$ : Representa la k-ésima salida  
 $c_k$ : Coeficiente de normalización  
 $x_k$ : Variables de entrada

$B_{1,k}, B_{2,k}$ : Coeficientes que caracterizan al filtro en el k-ésimo valor.

De tal manera que  $y_t$  será:

$$y_t = y_1 * y_2 * y_3 * \dots * y_N \quad (4.5.28)$$

Para poder emplear esta función de transferencia es necesario definir las condiciones iniciales, las cuales son:  $N=8, x_{-1}=0, x_0=0, y_{-2}=0, y_{-1}=0, y_0=0$ .

Teniendo definidas las condiciones iniciales podemos caracterizar la función de transferencia quedando como sigue:

$$y_t = \prod_{k=1}^4 y_k \quad (4.5.29)$$

$$y_t = y_1 * y_2 * y_3 * y_4 \quad (4.5.30)$$

Donde:

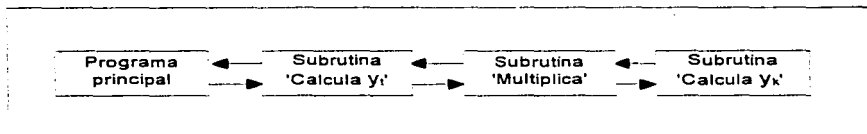
$$y_1 = c_1 x_1 \quad (4.5.31)$$

$$y_2 = c_2 [x_1] - B_{1,2} y_1 - B_{2,2} y_2 \quad (4.5.32)$$

$$y_3 = c_3 [x_3 - x_1] - B_{1,3} y_2 - B_{2,3} y_3 \quad (4.5.33)$$

$$y_4 = c_4 [x_4 - x_2] - B_{1,4} y_3 - B_{2,4} y_4 \quad (4.5.34)$$

A continuación se muestra el diagrama a bloques 4.5.16 que representa el proceso del programa principal para el cálculo de  $y_i$ .



**Diagrama de flujo 4.5.16 Proceso del programa principal.**

Se observa que para obtener  $y_i$  es necesario emplear dos subrutinas: multiplica y calcula  $y_k$ .

**Subrutina multiplica:** se emplea esta subrutina con la finalidad de emplearla como 'calculadora', de tal manera que siempre que se quiera realizar una operación de multiplicación de 8 \* 8 bits sólo sea necesario dar los dos valores a multiplicar y la subrutina proporcionará un resultado de 16 bits.

**Subrutina  $y_k$ :** al igual que la anterior, esta subrutina tiene la función de 'calculadora', pero ésta realizará los cálculos de los datos de entrada y se obtendrán los resultados del valor final de  $y_k$  que está dada por la ecuación 4.5.27.

**Programa: Filtrado**  
**Estructura: Subrutina que 'calcula  $y_i$ '**

Declaración de variables que intervienen en la subrutina calcula  $y_i$ :

Términos que componen la ecuación 4.5.27, 4.5.28, ..., 4.5.33, así como su signos  $sig_{y_1}$ ,  $sig_{y_2}$ , ...,  $sig_{y_n}$ ,  $sig_{y_1}$ ,  $sig_{y_2}$ .

De la ecuación 4.5.28 tenemos que:

$$y_i = y_{i1} * y_{i2} \quad (4.5.35)$$

Donde:

$y_{i1}$ ,  $y_{i2}$ : son términos para calcular  $y_i$  que es el resultado de multiplicar  $y_1 * y_2 * y_3 * y_4$ , así como su signo  $sig_{y_i}$ .

$FACT_1$ ,  $FACT_2$  corresponden a los términos a multiplicar teniendo una parte entera y una fraccionaria, es decir:

$$FACT_i = ENTERO . FRACCION$$

El diagrama de flujo de la figura 4.5.17, muestra la subrutina para el cálculo de  $Y_i$

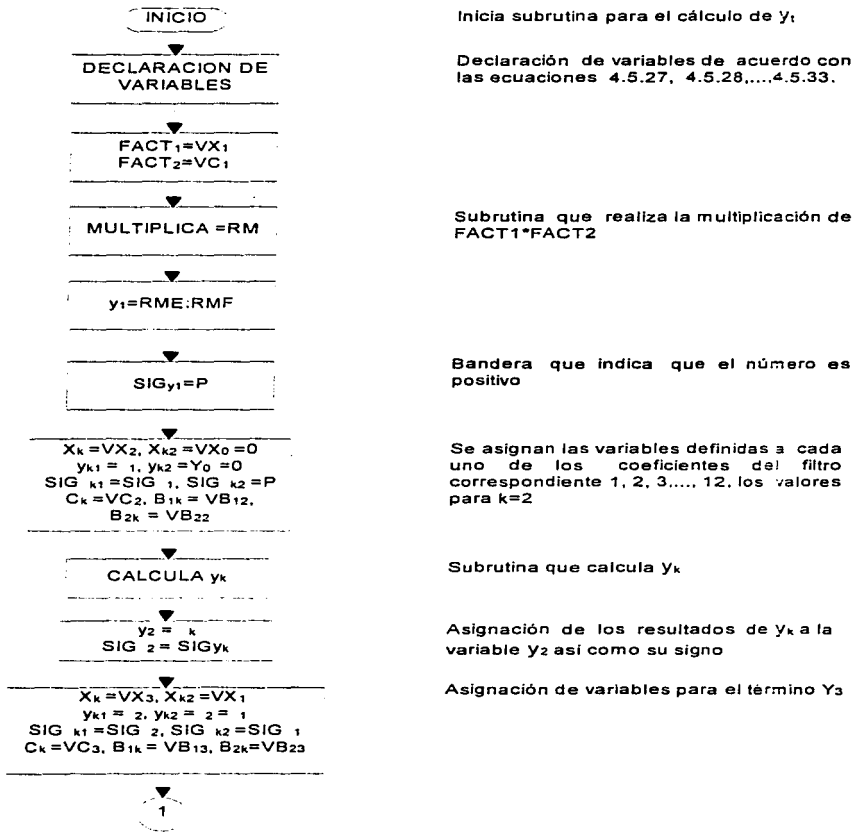


Figura 4.5.17. Cálculo de  $y_i$ , (Continúa).

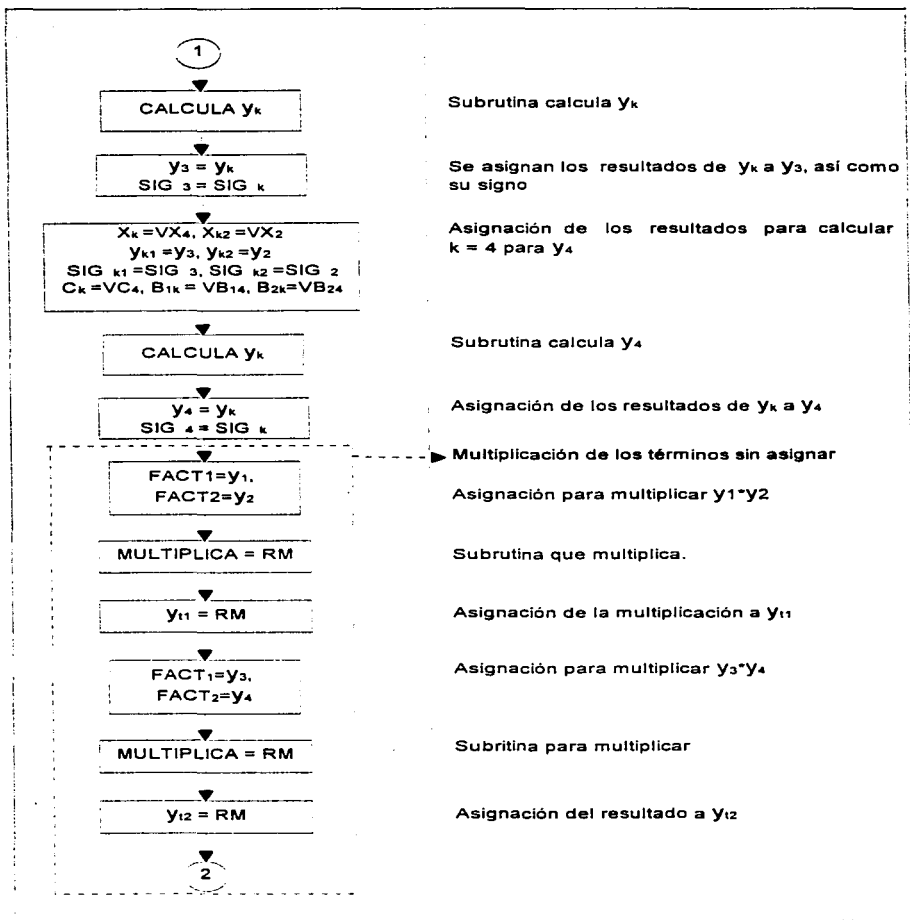
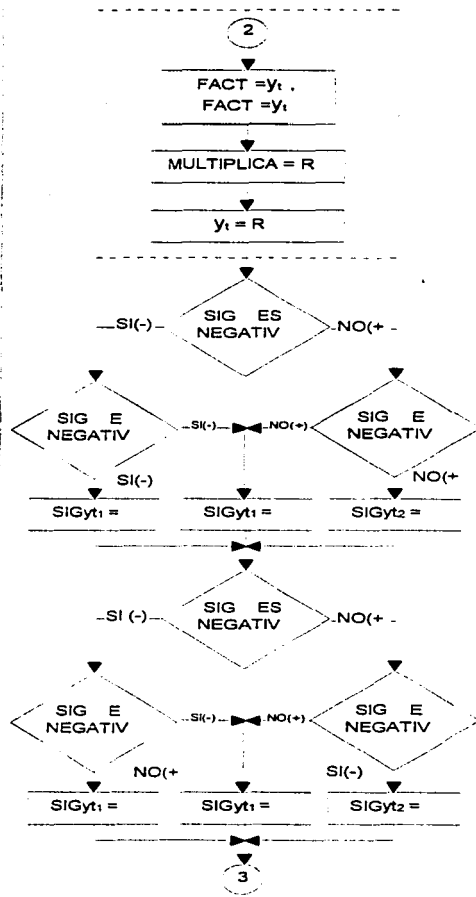


Figura 4.5.17. Cálculo de  $y_1$ . (Continúa).



Multiplicación de los términos sin asignar

Asinación para multiplicar  $y_t$   $y_t$

Subrutina que multiplica

Asignación del resultado a  $y_t$

En esta parte se determina el signo de  $y_t$ . se pregunta por el signo de  $y$  y de para después hacer la asignación del término  $y_{t1}$ .

Se pregunta por los signos de  $y$  y  $y$  para después hacer la asignación de  $t$ .

Figura 4.5.17. Cálculo de  $y_t$ , (Continua).

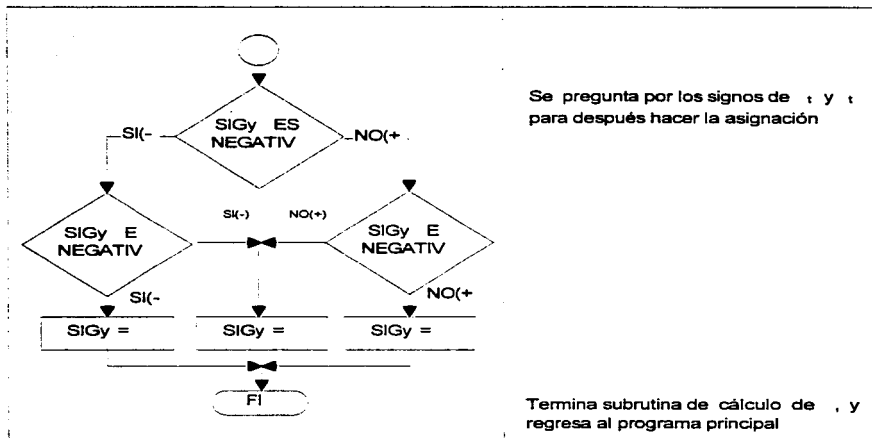


Figura 4.5.17. Cálculo de  $y$ , (Continua).

**Programa: Filtrado**

**Estructura: Subrutina que 'multiplica'**

Esta subrutina ejecuta una multiplicación de 16 por 16 bits con un punto, teniendo la siguiente composición:

8 bits que representan a un número entero:	FF
8 bits que representan a un número fraccionario:	FF
Es decir,	FF.FF

Dando como resultado un producto de 16 bits con la misma composición.

Declaración de variables que intervienen en la subrutina multiplica.

FACT<sub>1</sub>, FACT<sub>2</sub>: términos a multiplicar y son cargados para utilizar esta subrutina.

L<sub>0</sub>, L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub>, ..., L<sub>15</sub>: representan localidades de memoria en las que se van colocando los resultados de las operaciones para componer una multiplicación de 16 bits por 16 bits.

RM: resultado de la multiplicación (16 bits).

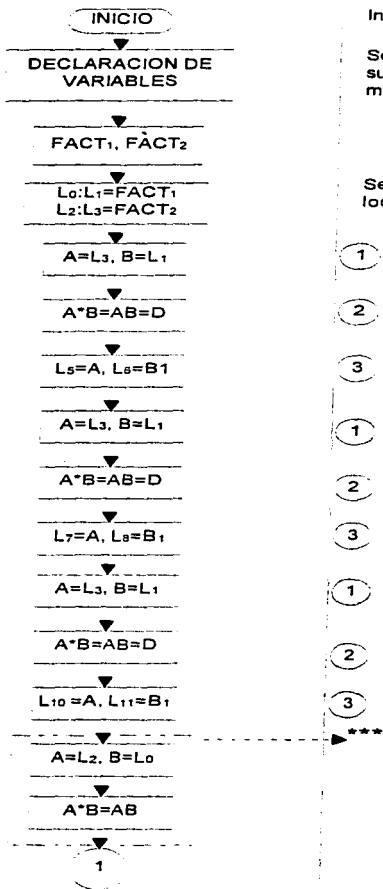
CONT2: contador para llevar el acarreo de la suma 1.

CONT3: contador para llevar el acarreo de la suma 2.

FADIV: factor de divisor.



El algoritmo 4.5.18. muestra la subrutina que multiplica.



Inicia subrutina de multiplicación.

Se declaran variables que se utilizarán en esta subrutina (ver explicación de subrutina de multiplicación)

Se asignan los valores de FACT1 y FACT2 a localidades de memoria.

- 1 El contenido de la localidad 3 se carga en A y el contenido de la localidad 1 se carga en B
- 2 Se ejecuta una multiplicación de 8 bits por 8 bits, dando como resultado un valor de 16 bits.
- 3 Se almacena el resultado en la localidad 5 y la localidad 6 del acumulador A y B respectivamente.

1

2

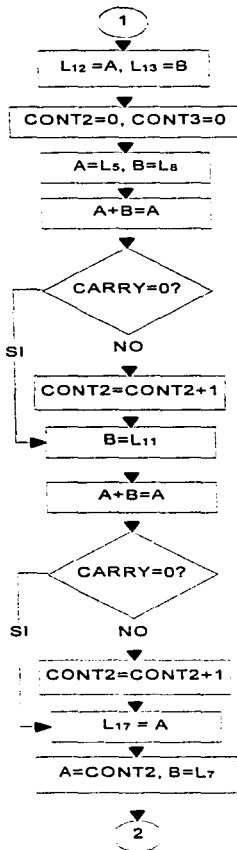
3

1

2

3

Figura 4.5.18. Subrutina de multiplicación. (Continua) .

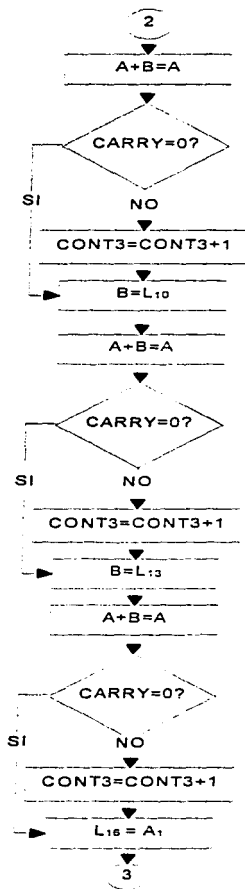


\*\*\* La operación que realiza esta subrutina toma: 'bloques' de 8 bits y los multiplica y el resultado es un bloque de 16 bits, que será dividido en dos, dando como resultado un 'bloques' de 8 bits de la siguiente manera:

L0	L1	FACT1	
L2	L3	FACT2	
CONT2	L5	L6	L3*L6=L5:L6
L7	L8	L11	L3*L0=L7:L8
CONT3	L10	L11	L2*L1=L10:L11
L12	L13		L2*L1=L12:L13
L15	L16	L17	L18
16 bits enteros		16 bits fracción	
32 bits			

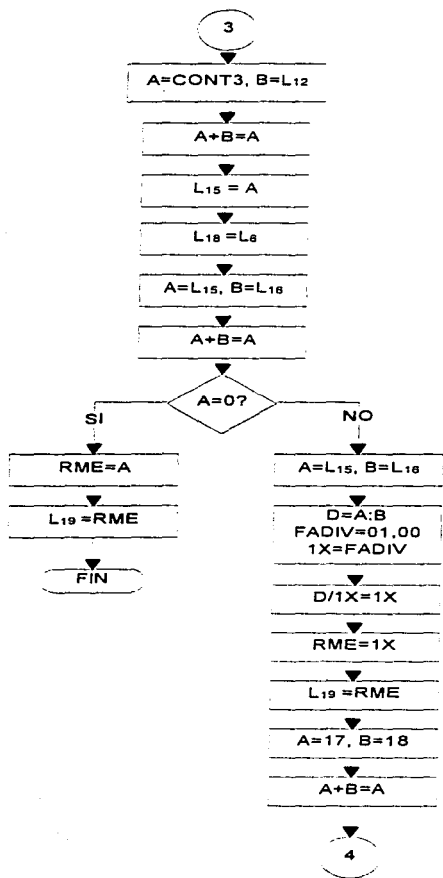
L15	L16	L17	L18
L19		L20	
RME		RMF	
8 bits		8 bits	
16 bits			

Figura 4.5.18. Subrutina de multiplicación, (Continua).



Esta parte del programa ejecuta operaciones que permiten acomodar los resultados en las localidades correspondientes, de acuerdo a como se representan en forma gráfica la multiplicación.

Figura 4.5.18. Subrutina de multiplicación, (Continúa) .



A partir de este bloque se aplica un factor de disminución para reducir el resultado de la multiplicación de 32 bits a uno de 16 bits.

Como primera etapa se pregunta si la parte entera de 16 bits no es cero para evitar continuar, ya que el resultado de la división será cero.

En caso afirmativo termina la subrutina multiplica y regresará a la subrutina "CALCULA Yt"

Figura 4-5.18. Subrutina de multiplicación, (Continúa) .

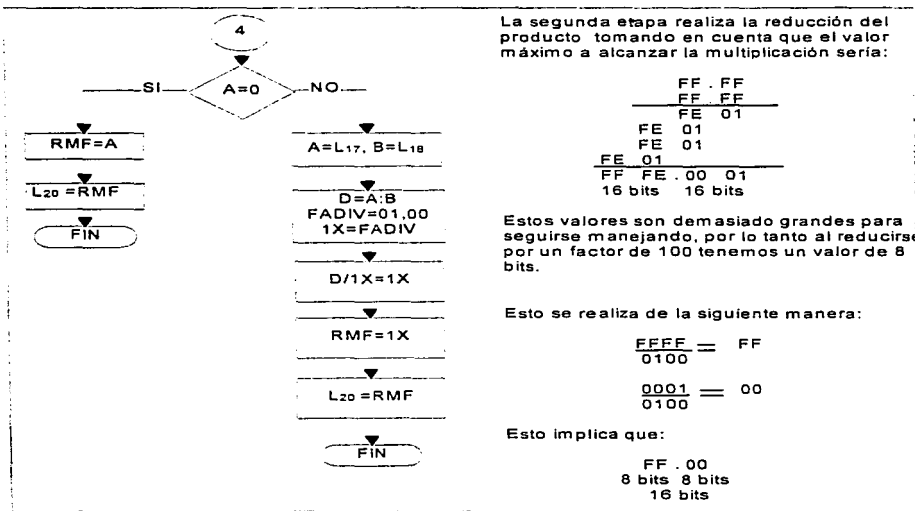


Figura 4.5.18. Subrutina de multiplicación .

A continuación se presenta la subrutina que realizó el cálculo de  $y_k$ .

**Programa:** Filtrado

**Estructura:** Subrutina que 'Calcula  $y_k$ '

Esta subrutina ejecuta las operaciones necesarias para resolver la ecuación 4.5.27

$$y_k = C_k [x_k - x_{k-2}] - B_{1,k} y_{k-1} - B_{2,k} y_{k-2} \quad (4.5.27)$$

A las variables se les asignarán nuevos valores de entrada cada vez que se le llame a esta subrutina, el programa entregará un resultado  $y_k$  con su respectivo signo  $\text{sig}_{y_k}$ .

Declaración de variables que intervienen en la subrutina multiplica.

Variables de entrada:  $C_k, X_k, X_{k2}, B_{1,k}, y_{11}, \text{VSB}_{1,k}, \text{V}_{S_{k1}}, B_{2,k}, y_{k2}, \text{VSB}_{2,k}, \text{V}_{S_{k2}}$ .

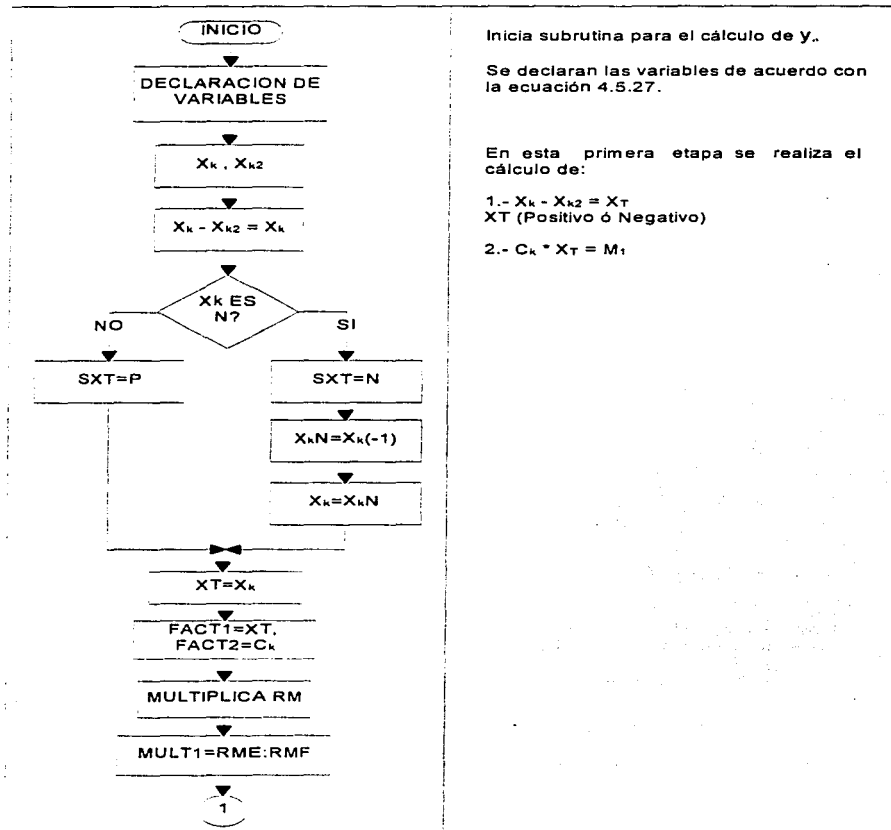
Variables temporales de entrada de signo: VTE, SVTE.

Signo temporales: 1, 2 y signo final de  $y_k$ .

Variables temporales de sustracción: VTS.

Variables de número de multiplicaciones necesarias: SMULT1, SMULT2, SMULT3.

El diagrama 4.5.19 muestra la subrutina para el cálculo de  $y_k$ .



Inicia subrutina para el cálculo de  $y_k$ .

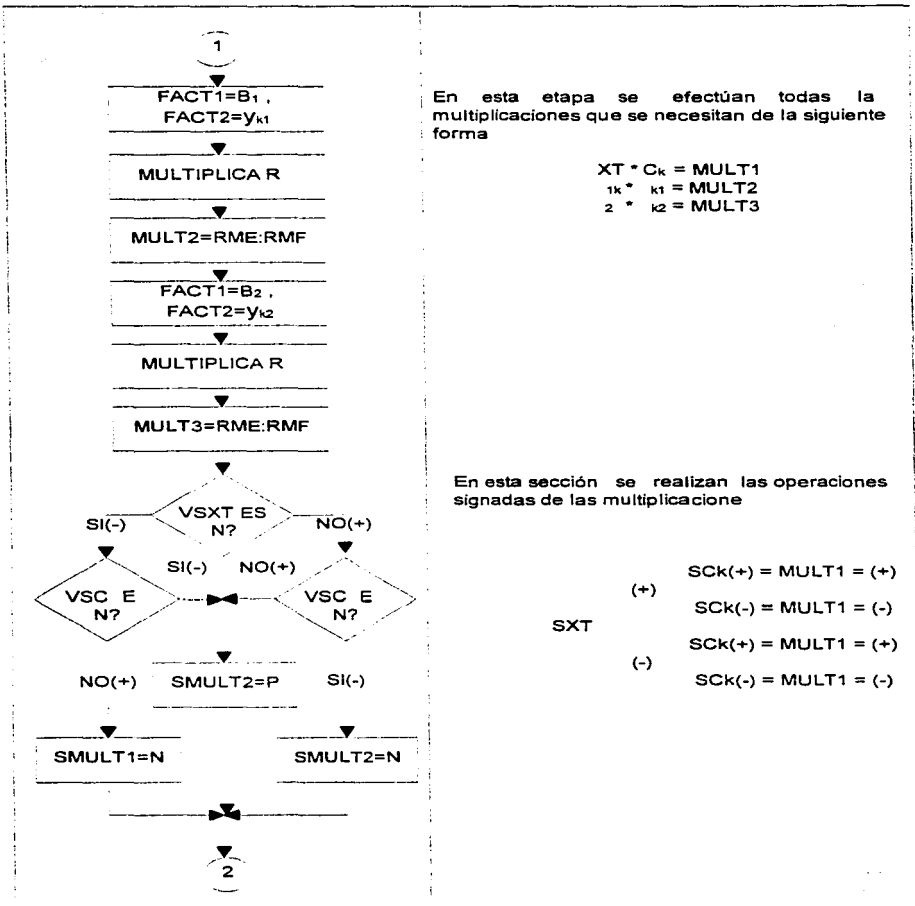
Se declaran las variables de acuerdo con la ecuación 4.5.27.

En esta primera etapa se realiza el cálculo de:

1.-  $X_k - X_{k2} = X_T$   
 $X_T$  (Positivo ó Negativo)

2.-  $C_k * X_T = M_1$

Figura 4.5.19. Subrutina para el cálculo de  $y_k$ . (Continúa).



En esta etapa se efectúan todas la multiplicaciones que se necesitan de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 XT * C_k &= MULT1 \\
 1k * k1 &= MULT2 \\
 2 * k2 &= MULT3
 \end{aligned}$$

En esta sección se realizan las operaciones signadas de las multiplicaciones

$$\begin{aligned}
 (+) \quad SCK(+) &= MULT1 = (+) \\
 (+) \quad SCK(-) &= MULT1 = (-) \\
 SXT \quad (-) \quad SCK(+) &= MULT1 = (+) \\
 (-) \quad SCK(-) &= MULT1 = (-)
 \end{aligned}$$

Figura 4.5.19. Subrutina para el cálculo de  $y_k$ , (Continua).

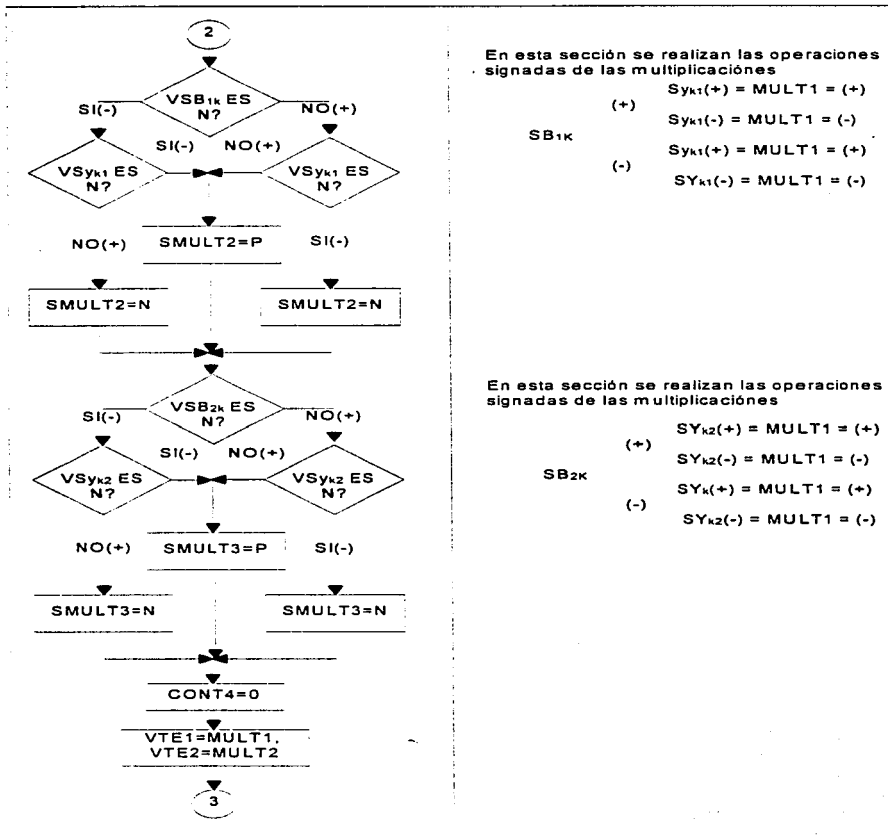


Figura 4.5.19 Subrutina para el cálculo de y. (continua).



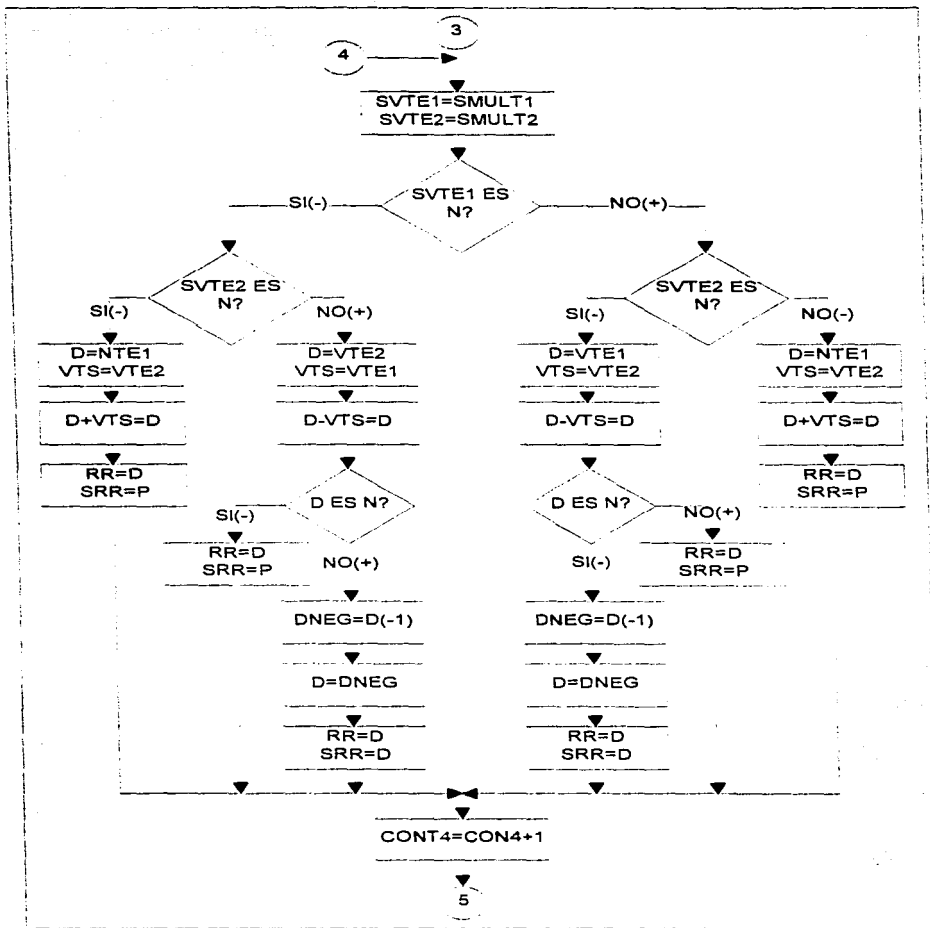
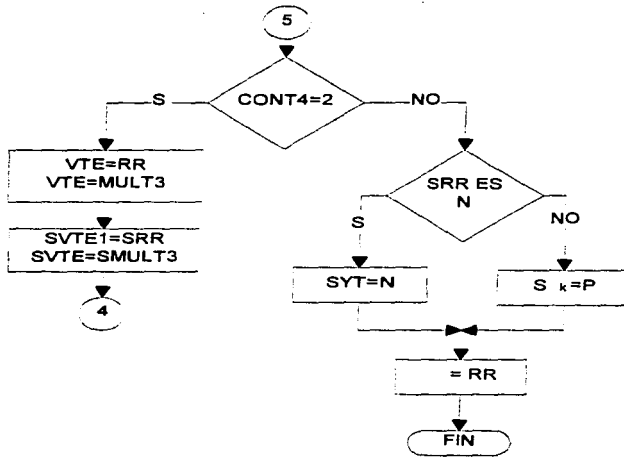


Figura 4.5.19. Subrutina para el cálculo de y, (continua).



LL En esta sección se pregunta por los signos de cada multiplicación y de acuerdo a éstos se efectúa una operación:

	(+)	SVTE	(+) = (+) VTE1 - (+) VTE2
VTE2			(-) = (+) VTE1 - (-) VTE2 = (+) VTE1 +
SVTE			
	(-)	SVTE	(+) = (-) VTE1 - (+) VTE2 = - VTE1 - VTE2
			(-) = (-) VTE1 - (-) VTE2 = (+) VTE2 - VTE1

Figura 4.5.19. Subrutina para el cálculo de  $y_k$ .

Estos son todos los algoritmos que se utilizan para la programación del microcontrolador 68HC11, a continuación se presenta el software del algoritmo aquí presentado.

SOFTWARE DEL SISTEMA

M68HC11 Absolute Assembler Version 2.70C:ENS4.ASC

```

1 A *****
2 A * Programa para procesar una señal de audio usando el
3 A * convertidor A/D del microcontrolador MC68HC11
4 A *****
5 A * A continuación se presentan los valores de dirección en
6 A * los Registros de Control a ser utilizados
7 A *
8 A *
9 A *
10 A 0000          PORTA          EQU   $00
11 A 0003          PORTC          EQU   $03
12 A 0004          PORTB          EQU   $04
13 A 000A          PORTE          EQU   $0A
14 A 0030          ADCTL          EQU   $30
15 A 0031          ADR1           EQU   $31
16 A 0032          ADR2           EQU   $32
17 A 0033          ADR3           EQU   $33
18 A 0034          ADR4           EQU   $34
19 A *
20 A *
21 A * En la siguiente sección se almacenan los valores de
22 A * los coeficientes que determinan a cada filtro, los
23 A * cuales permanecerán constantes y serán utilizados a lo
24 A * largo del programa.
25 A * Los coeficientes son almacenados después de los
26 A * registros de control.
27 A *
28 A 1050  ORG $1050
29 A 0001          F1C1            EQU   $0001
30 A 0000          F1SC1          EQU   $00
31 A 00FF          F1C2            EQU   $00FF
32 A 0000          F1SC2          EQU   $00
33 A 00FF          F1B12          EQU   $00FF
34 A 0001          F1SB12         EQU   $01
35 A 00FF          F1B22          EQU   $00FF
36 A 0001          F1SB22         EQU   $01
37 A 0007          F1C3            EQU   $0007
38 A 0000          F1SC3          EQU   $00
39 A 00FF          F1B13          EQU   $00FF
40 A 0001          F1SB13         EQU   $01
41 A 00FF          F1B23          EQU   $00FF
42 A 0001          F1SB23         EQU   $01
43 A 000F          F1C4            EQU   $000F
44 A 0000          F1SC4          EQU   $00
45 A 00FF          F1B14          EQU   $00FF
46 A 0001          F1SB14         EQU   $01
47 A 00FF          F1B24          EQU   $00FF
48 A 0001          F1SB24         EQU   $01
49 A *
50 A *Asignaciones a emplear en memoria RAM

```

\*Ubicación dentro de la memoria  
\*Las siguientes constantes determinan al FILTRO I  
1.Valor de la constante en términos absolutos.  
F1C1  
2.Signo de la constante denotado con S .  
F1SC1

51 A *		
52 A *	PROGRAMA PRINCIPAL	
53 A *		
54 A *		
55 A 0100	ORG	S0100
56 P 0100	0001	NVEC RMB 1
57 P 0101	0001	CONT1 RMB 1
58 A 0102		
59 P 0102	0001	CONTL1 RMB 1
60 A 0103		
61 P 0103	0001	VX1 RMB 1
62 A 0104		
63 P 0104	0001	VX2 RMB 1
64 P 0105	0001	VX3 RMB 1
65 P 0106	0001	VX4 RMB 1
66 P 0107	0002	VC1 RMB 2
67 P 0109	0001	VSC1 RMB 1
68 A 010A		
69 P 010A	0002	VC2 RMB 2
70 P 010C	0001	VSC2 RMB 1
71 P 010D	0002	VB12 RMB 2
72 P 010F	0001	VS12 RMB 1
73 A 0110		
74 P 0110	0002	VB22 RMB 2
75 P 0112	0001	VS122 RMB 1
76 P 0113	0002	VC3 RMB 2
77 P 0115	0001	VSC3 RMB 1
78 P 0116	0002	VB13 RMB 2
79 P 0118	0001	VS13 RMB 1
80 P 0119	0002	VB23 RMB 2
81 P 011B	0001	VS13 RMB 1
82 P 011C	0002	VC4 RMB 2
83 A 011E		
84 P 011E	0001	VSC4 RMB 1
86 P 0121	0001	VS14 RMB 1
87 P 0122	0002	VB24 RMB 2
88 P 0124	0001	VS14 RMB 1
89 P 0125	0002	YTF1 RMB 2
90 P 0127	0001	SYTF1 RMB 1
91 P 0128	0002	YTF2 RMB 2
92 A 012A		
93 P 012A	0001	SYTF2 RMB 1
94 P 012B	0002	YTF3 RMB 2
95 P 012D	0001	SYTF3 RMB 1
96 P 012E	0002	YTF4 RMB 2
97 P 0130	0001	SYTF4 RMB 1
98 P 0131	0002	YTF5 RMB 2
99 P 0133	0001	SYTF5 RMB 1
100 P 0134	0002	YTF6 RMB 2
101 P 0136	0001	SYTF6 RMB 1
102 P 0137	0002	YTF7 RMB 2
103 P 0139	0001	SYTF7 RMB 1
104 P 013A	0002	YTF8 RMB 2
105 P 013C	0001	SYTF8 RMB 1

\*Posición en la Memoria RAM  
\*Indicador para determinar el  
número de mostrar a realizar

\*Contador para limpiar puerto  
C y A

\*Variables que almacenarán  
temporalmente el con-  
tenido de los registros ADRs

\*A continuación se reservan  
localidades de memoria que  
almacenarán temporalmente  
los coeficientes de  
cada filtro para calcular  
su función de transferencia.

\*Como se mencionó anteriormente en  
primer lugar se guarda su valor  
y después su signo correspondiente

Y1=VC1\*VX1  
Y2=VC2\*VX2-VB12\*Y1-VB22\*Y2  
Y3=VC3[VX3-VX1]-VB13\*Y2-VB23\*Y3  
Y4=VC4[VX4-VX2]-VB14\*Y3-VB24\*Y4

\*Se reservan localidades para los re-  
sultados de los 12 filtros así como su  
signo

106 P 013D 0002	YTF9	RMB 2
107 P 013F 0001	SYTF9	RMB 1
108 P 0140 0002	YTF10	RMB 2
109 P 0142 0001	SYTF10	RMB 1
110 P 0143 0002	YTF11	RMB 2
111 P 0145 0001	SYTF11	RMB 1
112 P 0146 0002	YTF12	RMB 2
113 P 0148 0001	SYTF12	RMB 1
114 A		
115 A *Variables de SUBROUTINA CALCULA YT		
116 A *		
117 A *		
118 P 0149 0002	FACT1	RMB 2
119 A 014B		
120 P 014B 0002	FACT2	RMB 2
121 A 014D		
122 P 014D 0001	XK	RMB 1
123 A 014E		
124 P 014E 0001	XK2	RMB 1
125 P 014F 0002	YK1	RMB 2
126 P 0151 0001	SYK1	RMB 1
127 P 0152 0002	YK2	RMB 2
128 P 0154 0001	SYK2	RMB 1
129 P 0155 0002	CK	RMB 2
130 P 0157 0001	SCK	RMB 1
131 P 0158 0002	B1K	RMB 2
132 P 015A 0001	SB1K	RMB 1
133 P 015B 0002	B2K	RMB 2
134 P 015D 0001	SB2K	RMB 1
135 P 015E 0002	Y1	RMB 2
136 P 0160 0001	SIGY1	RMB 1
137 P 0161 0002	Y2	RMB 2
138 P 0163 0001	SIGY2	RMB 1
139 P 0164 0002	Y3	RMB 2
140 P 0166 0001	SIGY3	RMB 1
141 P 0167 0002	Y4	RMB 2
142 P 0169 0001	SIGY4	RMB 1
143 P 016A 0002	YT1	RMB 2
144 P 016C 0001	SYT1	RMB 1
145 P 016D 0002	YT2	RMB 2
146 P 016F 0001	SYT2	RMB 1
147 P 0170 0002	YT	RMB 2
148 A 0172		
149 P 0172 0001	SYT	RMB 1
150 A *		
151 A *Variables de la SUBROUTINA CALCULA YK		
152 A *		
153 P 0173 0001	SXT	RMB 1
154 P 0174 0001	XKN	RMB 1
155 P 0175 0001	XT	RMB 1
156 P 0176 0002	MULT1	RMB 2
157 P 0178 0002	MULT2	RMB 2
158 P 017A 0002	MULT3	RMB 2
159 P 017C 0001	SMULT1	RMB 1

\*En esta sección son reservadas las localidades de memoria para resolver la siguiente ecuación

$$Yk = Ck[Xk - Xk2] - B1k * Yk1 - B2k * Yk2$$

\*Al igual que en las secciones anteriores la letra S indica el signo del valor.

$$YT = Y1 * Y2 * Y3 * Y4$$

\*En esta sección se reservan las localidades de memoria que resuelven la ecuación.

$$Xk - Xk2 = XT$$

$$Ck * XT = MULT1$$

160 P 017D 0001	SMULT2	RMB	1
161 P 017E 0001	SMULT3	RMB	1
162 A 017F			
163 P 017F 0001	CONT4	RMB	1
164 P 0180 0002	VTE1	RMB	2
165 A 0182			
166 P 0182 0002	VTE2	RMB	2
167 P 0184 0001	SVTE1	RMB	1
168 P 0185 0001	SVTE2	RMB	1
169 P 0186 0002	VTS	RMB	2
170 P 0188 0002	RR	RMB	2
171 P 018A 0001	SRR	RMB	1
172 P 018B 0002	DT	RMB	2
173 P 018D 0002	YK	RMB	2
174 P 018F 0001	SYK	RMB	1

B1k\*Yk1=MULT2

B2k\*Yk2=MULT3

175 A \*  
 176 A \*Variables de la SUBROUTINA MULTIPLICA

177 A *			
178 A *			
179 A *			
180 P 0190 0001	L0	RMB	1
181 A 0191			
182 P 0191 0001	L1	RMB	1
183 A 0192			
184 P 0192 0001	L2	RMB	1
185 P 0193 0001	L3	RMB	1
186 P 0194 0001	L4	RMB	1
187 P 0195 0001	L5	RMB	1
188 P 0196 0001	L6	RMB	1
189 P 0197 0001	L7	RMB	1
190 P 0198 0001	L8	RMB	1
191 P 0199 0001	L9	RMB	1
192 P 019A 0001	L10	RMB	1
193 P 019B 0001	L11	RMB	1
194 P 019C 0001	L12	RMB	1
195 P 019D 0001	L13	RMB	1
196 P 019E 0001	L14	RMB	1
197 P 019F 0001	L15	RMB	1
198 P 01A0 0001	L16	RMB	1
199 P 01A1 0001	L17	RMB	1
200 P 01A2 0001	L18	RMB	1
201 P 01A3 0001	L19	RMB	1
202 P 01A4 0001	L20	RMB	1
203 P 01A5 0001	L21	RMB	1
204 P 01A6 0001	RME	RMB	1
205 P 01A7 0001	RMF	RMB	1

\*En la presente sección se reservan las localidades de memoria para efectuar una multiplicación de 32 bits que posteriormente se reducirá a 16 bits

206 A \*  
 207 A \*  
 208 A B600     ORG   SB600  
 209 A \*  
 210 A B600  
 211 A \*  
 212 A \*PROGRAMA PRINCIPAL  
 213 A \*

\*Dirección de Memoria EEPROM donde sera almacenado el programa

214 A B600 BE7000	LDS		S7000	*Inicializa StackPointer
215 A B603 8620	LDAA		#S20	*Direccionamiento del puerto A
216 A B605				
217 A B605 9730	STAA		ADCTL	
218 A B607 9600	LDAA		PORTA	*Lectura de número de veces a muestrear
219 A B609				
220 A B609 B70100	STAA		NVEC	
221 A B60C 8601	LDAA		#S01	*Inicializa contador
222 A B60E B70101	STAA		CONT1	
223 A B611 7F0103	CLR		VX1	*Limpia registros
224 A B614 7F0104				
225 A B617 7F0105	CLR	VX2	VX3	
226 A B61A 7F0106	CLR		VX4	
227 A B61D 960A	LDAA		PORTE	
228 A B61F 9631	LDAA		ADR1	*Carga los valores de los registros ADRs y son almacenados en variables temporales.
229 A B621 D632	LDAB		ADR2	
230 A B623 B70103	STAA		VX1	
231 A B626 F70104	STAB		VX2	
232 A B629 9633	LDAA		ADR3	
234 A B62D B70105	STAA		VX3	
235 A B630 F70106	STAB		VX4	
236 A B633 DC01				
237 A B635	LDD	F1C1		*Se cargan los coeficientes que determinan al FILTRO1 para ser almacenados en las variables temporales y de esta forma calcular la función de transferencia para el filtro 1
238 A B635 FD0107	STD		VC1	
239 A B638 9600	LDAA		F1SC1	
240 A B63A				
241 A B63A B70109	STAA		VSC1	
242 A B63D DCFE	LDD		F1C2	
243 A B63F				
244 A B63F FD010A	STD		VC2	
245 A B642 9600	LDAA		F1SC2	
246 A B644 B7010C	STAA		VSC2	
247 A B647 DCFE	LDD		F1B12	
248 A B649 FD010D	STD		VB12	
249 A B64C 9601	LDAA		F1SB12	
250 A B64E B7010F	STAA		VS12	
251 A B651 DCFE	LDD		F1B22	
252 A B653 FD0110	STD		VB22	
253 A B656 9601	LDAA		F1SB22	
254 A B658 B70112	STAA		VS22	
255 A B65B DC07	LDD		F1C3	
256 A B65D FD0113	STD		VC3	
257 A B660 9600	LDAA		F1SC3	
258 A B662 B70115	STAA		VSC3	
259 A B665 DCFE	LDD		F1B13	
260 A B667 FD0116	STD		VB13	
261 A B66A 9601	LDAA		F1SB13	
262 A B66C B70118	STAA		VS13	
263 A B66F DCFE	LDD		F1B23	
264 A B671 FD0119	STD		VB23	
265 A B674 9601	LDAA		F1SB23	
266 A B676 B7011B	STAA		VS23	
267 A B679 DC0F	LDD		F1C4	
268 A B67B FD011C	STD		VC4	

269 A B67E 9600	LDAA	FISC4		
270 A B680 B7011E	STAA	VSC4		
271 A B683 DCFF	LDD	FIB14		
272 A B685 FD011F	STD	VB14		
273 A B688 9601	LDAA	FISB14		
274 A B68A B70121	STAA	VSF14		
275 A B68D DCFF	LDD	FIB24		
276 A B68F FD0122	STD	VB24		
277 A B692 9601	LDAA	FISB24		
278 A B694 B70124	STAA	VSF24		
279 A B697 BDB6FB	JSR	CALCYT		
280 A B69A FC0170	LDD	YT		
281 A B69D FD0125	STD	YTF1		
282 A B6A0 B60172	LDAA	SYT		
283 A B6A3 B70127	STAA	SYTF1		
284 A *				
285 A *				
286 A * Este proceso se realiza para los 12 filtros y de esta				
287 A * forma tener el muestreo completo				
288 A *				
289 A *				
290 A B6A6 8600	LDAA	#S00		
291 A B6A8				
292 A B6A8 B70102	STAA	CONTLI		
293 A B6AB				
294 A B6AB 9703	LIMP STAA	PORTC		
295 A B6AD C600	LDAB	#S00		
296 A B6AF D704	STAB	PORTB		
297 A B6B1 7C0102	INC CONTLI			
298 A B6B4 B60102	LDAA	CONTLI		
299 A B6B7 C60C	LDAB	#S0C		
300 A B6B9 F10102	CMPB	CONTLI		
301 A B6BC 2AED	BPL	LIMP		
302 A B6BE C600	LDAB	#S00		
303 A B6C0 F10127	CMPB	SYTF1		
304 A B6C3 2B09	BMI	F2		
305 A B6C5 8601	LDAA	#S01		
306 A B6C7 9703	STAA	PORTC		Columna
307 A B6C9 FC0125	LDD	YTF1		
308 A B6CC 9704	STAA	PORTB		Fila
309 A B6CE F1012A	F2 CMPB	SYTF2		
310 A B6D1 2B09	BMI	F12		
311 A B6D3 8602	LDAA	#S02		
312 A B6D5 9703	STAA	PORTC		Columna
313 A B6D7 FC0128	LDD	YTF2		
314 A B6DA 9704	STAA	PORTB		Fila
315 A *				
316 A *Esto se hace para los 12 filtros				
317 A *				
318 A B6DC F10148	F12 CMPB	SYTF12		
319 A B6DF 2B09	BMI	ADELA		
320 A B6E1 860C	LDAA	#S0C		
321 A B6E3 9703	STAA	PORTC		Columna
322 A B6E5 FC0128	LDD	YTF2		

\*Después de ser cargados los valores se manda a la SUBROUTINA CALCULA YT, al regresar de esta subrutina se obtiene la función de transferencia.

\*Al obtener el valor de la función de transferencia del filtro se limpian los registros de algún valor anterior y, posteriormente es desplegado el nuevo valor



323 A B6E8 9704		STAA	PORTB	Fila
324 A B6EA 7C0101	ADELA	INC	CONT1	*Se pregunta si se han
325 A B6ED B60100		LDAA	NVEC	realizado las muestras
326 A B6F0 B10101		CMPA	CONT1	indicadas si es asi
327 A B6F3 2603		BNE	INIC2	finaliza el programa de
328 A B6F5 BDBA91		JSR	FIN	lo contrario se cargan
329 A B6F8 7EB611	INIC2	JMP	INIC	los nuevos valores
330 A B6FB				
331 A "				
332 A B6FB				
333 A ***Fin del Programa Principal***				
334 A **				
335 A **Inicia SUBROUTINA CALCULA YT				
336 A "				
337 A B6FB B60103	CALCYT	LDAA	VX1	*Esta subrutina calcula
338 A B6FE B70149		STAA	FACT1	el valor de Yk, para
339 A B701 8600		LDAA	#S00	k=1 hasta k=4, asi
340 A B703 B7014A		STAA	FACT1+1	como su signo de cada
341 A B706 FC0107		LDD	VC1	operación y de esta
342 A B709 FD014B		STD	FACT2	forma tener el resultado
343 A B70C BDB9BC		JSR	MULT	final YT
344 A B70F B601A6		LDAA	RME	
345 A B712 F601A7		LDAB	RMF	
346 A B715 FD015E		STD	Y1	
347 A B718 8600		LDAA	#S00	
348 A B71A B70160		STAA	SIGY1	
349 A B71D B60104		LDAA	VX2	
350 A B720 B7014D		STAA	XK	
351 A B723 8600		LDAA	#S00	
352 A B725 B7014E		STAA	XK2	
353 A B728 FC015E		LDD	Y1	
354 A B72B FD014F		STD	YK1	
355 A B72E B60160		LDAA	SIGY1	
356 A B731 B70151		STAA	SYK1	
357 A B734 CC0000		LDD	#S0000	
358 A B737 FD0152		STD	YK2	
359 A B73A B70154		STAA	SYK2	
360 A B73D FC010A		LDD	VC2	
361 A B740 FD0155		STD	CK	
362 A B743 B6010C		LDAA	VSC2	
363 A B746 B70157		STAA	SCK	
364 A B749 FC010D		LDD	VB12	
365 A B74C FD0158		STD	B1K	
366 A B74F FC011C		LDD	VC4	
367 A B752 FD0155		STD	CK	
368 A B755 B6011E		LDAA	VSC4	
369 A B758 B70157		STAA	SCK	
370 A B75B FC011F		LDD	VB14	
371 A B75E FD0158		STD	BIK	
372 A B761 B60121		LDAA	VSBI4	
373 A B764 B7015A		STAA	SB1K	
374 A B767 FC0122		LDD	VB24	
375 A B76A FD015B		STD	B2K	
376 A B76D B60124		LDAA	VSBI4	

377 A B770 B7015D		STAA		SB2K
378 A B773 BDB811		JSR		CALCYK
379 A B776 FC018D		LDD		YK
380 A B779 FD0167		STD		Y4
381 A B77C B6018F		LDAA		SYK
382 A B77F B70169		STAA		SIGY4
383 A B782 FC015E		LDD		Y1
384 A B785 FD0149		STD		FACT1
385 A B788 FC0161		LDD		Y2
386 A B78B FD014B		STD		FACT2
387 A B78E BDB9BC		JSR		MULT
388 A B791 B601A6		LDAA		RME
389 A B794 F601A7		LDAB		RMF
390 A B797 FD016A		STD		YT1
391 A B79A FC0164		LDD		Y3
392 A B79D FD0149		STD		FACT1
393 A B7A0 FC0167		LDD		Y4
394 A B7A3 FD014B		STD		FACT2
395 A B7A6 BDB9BC		JSR		MULT
396 A B7A9 B601A6		LDAA		RME
397 A B7AC F601A7		LDAB		RMF
398 A B7AF FD016D		STD		YT2
399 A B7B2 FC016A		LDD		YT1
400 A B7B5 FD0149		STD		FACT1
401 A B7B8 FC016D		LDD		YT2
402 A B7BB FD014B		STD		FACT2
403 A B7BE BDB9BC		JSR		MULT
404 A B7C1 B601A6		LDAA		RME
405 A B7C4 F601A7		LDAB		RMF
406 A B7C7 FD0170		STD		YT
408 A B7CC				
409 A B7CC 43		COMA		SIGY1
410 A B7CD 2B0B		BMI		y1neg
411 A B7CF 43		COMA		SIGY2
412 A B7D0 2B0B		BMI		y2neg
413 A B7D2 8600		LDAA		#S00
414 A B7D4 B7016C	syt1p	STAA		SYT1
415 A B7D7 7EB7E2		JMP		beta
416 A B7DA 43	y1neg	COMA		SIGY2
417 A B7DB 2BF5		BMI		syt1p
418 A B7DD 8601	y2neg	LDAA		#S01
419 A B7DF B7016C		STAA		YT1
420 A B7E2 8600	beta	LDAA		#S00
421 A B7E4				
422 A B7E4 43		COMA		SIGY3
423 A B7E5 2B0B		BMI		y3neg
424 A B7E7 43		COMA		SIGY4
425 A B7E8 2B0B		BMI		y4neg
426 A B7EA 8600		LDAA		#S00
427 A B7EC B7016F	syt2p	STAA		SYT2
428 A B7EF 7EB7FA		JMP		alfa
429 A B7F2 43	y3neg	COMA		SIGY4
430 A B7F3 2BF5		BMI		syt2p
431 A B7F5 8601	y4neg	LDAA		#S01

\*En esta parte se determina el signo de YT.

\*Se pregunta por el signo de Y1 y Y2 para después hacer el signado de YT1

\*Se pregunta por los signos de Y3 y Y4 para después hacer el signado de YT2

432 A B7F7 B7016F		STAA	SYT2	
433 A B7FA 8600	alfa	LDAA	#\$00	*Se pregunta por los de YT1 y YT2 para después signos hacer el signado de YT
434 A B7FC 43		COMA	SYT1	
435 A B7FD 2B09		BMI	yt1neg	
436 A B7FF 43		COMA	SYT2	
437 A B800 2B09		BMI	yt2neg	
438 A B802 8600	sytp	LDAA	#\$00	
439 A B804 B70172		STAA	SYT	
440 A B807 39		RTS		
441 A B808 43	yt1neg	COMA	SYT2	
442 A B809 2BF7		BMI	sytp	
443 A B80B 8601	yt2neg	LDAA	#\$01	
444 A B80D B70172		STAA	SYT	
445 A B810 39		RTS		
446 A *				
447 A **Inicia Subrutina CALCULA YK				
448 A *				
449 A B811 B6014D CALCYK		LDAA	XK	*Esta subrutina ejecuta las operaciones necesarias para resolver la ecuación Yk para un valor en específico y después regresar a la subrutina donde fue invocado
450 A B814 F6014E		LDAB	XK2	
451 A B817 10		SBA		
452 A B818				
453 A B818 2A0F	BPL		sigp	
454 A B81A 8601		LDAA	#\$01	
455 A B81C B70173		STAA	SXT	
456 A B81F B6014D		LDAA	XK	
457 A B822 43		COMA		
458 A B823 B70175		STAA	XT	
459 A B826 7EB82E		JMP	salta	
460 A B829 8600	sigp	LDAA	#\$00	
461 A B82B B70173		STAA	SXT	
462 A B82E B60175	salta	LDAA	XT	
463 A B831 C600		LDAB	#\$00	
464 A B833 FD0149		STD	FACT1	
465 A B836 8600		LDAA	#\$00	
466 A B838 F60155		LDAB	CK	
467 A B83B FD014B		STD	FACT2	
468 A B83E BDB9BC		JSR	MULT	
469 A B841 B601A6		LDAA	RME	
470 A B844 F601A7		LDAB	RMF	
471 A B847 FD0176		STD	MULT1	
472 A B84A FC0158		LDD	B1K	
473 A B84D FD0149		STD	FACT1	
474 A B850 FC014F		LDD	YK1	
475 A B853 FD014B		STD	FACT2	
476 A B856 BDB9BC		JSR	MULT	
477 A B859 B601A6		LDAA	RME	
478 A B85C F601A7		LDAB	RMF	
479 A B85F FD0178		STD	MULT2	
480 A B862 FC015B		LDD	B2K	
481 A B865 FD0149		STD	FACT1	
482 A B868 FC0152		LDD	YK2	
483 A B86B FD014B		STD	FACT2	
484 A B86E BDB9BC		JSR	MULT	
485 A B871 B601A6		LDAA	RME	

486 A B874 F601A7		LDAB	
487 A B877 FD017A		STD	
488 A B87A 8600		LDAA	
489 A B87C B10173		CMPA	
490 A B87F 260D		BNE	
491 A B881 B10157		CMPA	
492 A B884 2B0D		BMI	
493 A B886 8600	sm1pos	LDAA	
494 A B888 B7017C		STAA	
495 A B88B 7EB898		JMP	
496 A B88E B10157	xtneg	CMPA	
497 A B891 2BF3		BMI	
498 A B893 8601	ckneg	LDAA	
499 A B895 B7017C		STAA	
500 A B898 8600	sigblk	LDAA	
501 A B89A B1015A		CMPA	
502 A B89D 2B12		BMI	
503 A B89F B10151		CMPA	
504 A B8A2 2B08		BMI	
505 A B8A4 8600	sm2pos	LDAA	
506 A B8A6 B7017D		STAA	
507 A B8A9 7EB8BB		JMP	
508 A B8AC 8601	yk1neg	LDAA	
509 A B8AE B7017D		STAA	
510 A B8B1 B10151	blkneg	CMPA	
511 A B8B4 2BEE		BMI	
512 A B8B6 8601		LDAA	
513 A B8B8 B7017D		STAA	
514 A B8BB 8600	sigb2k	LDAA	
515 A B8BD B1015D		CMPA	
516 A B8C0 2B0D		BMI	
517 A B8C2 B10154		CMPA	
518 A B8C5 2B0D		BMI	
519 A B8C7 8600	sm3pos	LDAA	
520 A B8C9 B7017E		STAA	
521 A B8CC 7EB8D9		JMP	
522 A B8CF B10154	b2kneg	CMPA	
523 A B8D2 2BF3		BMI	
524 A B8D4 8601	yk2neg	LDAA	
525 A B8D6 B7017E		STAA	
526 A B8D9 8600	cont4	LDAA	
527 A B8DB B7B8D9		STAA	
528 A B8DE FC0176		LDD	
529 A B8E1 FD0180		STD	
530 A B8E4 FC0178		LDD	
531 A B8E7 FD0182		STD	
532 A B8EA B6017C		LDAA	
533 A B8ED B70184		STAA	
534 A B8F0 B6017D		LDAA	
535 A B8F3 B70185		STAA	
536 A B8F6 CC0000	sigG	LDD	
537 A B8F9 1AB30184		CPD	
538 A B8FD 2B1F		BMI	
539 A B8FF 1AB30185		CPD	

RMF
MULT3
#S00
SXT
xtneg
SCK
ckneg
#S00
SMULT1
sigblk
SCK
sm1pos
#S01
SMULT1
#S00
SB1K
blkneg
SYK1
yk1neg
#S00
SMULT2
sigb2k
#S01
SMULT2
SYK1
sm2pos
#S01
SMULT2
#S00
SB2K
b2kneg
SYK2
yk2neg
#S00
SMULT3
cont4
SYK2
sm3pos
#S01
SMULT3
#S00
cont4
MULT1
VTE1
MULT2
VTE2
SMULT1
SVTE1
SMULT2
SVTE2
#S00
SVTE1
svte1n
SVTE2

\*A partir de este punto se realizan las operaciones de signado para obtener el signo de la Yk correspondiente.

540 A B903 2B38		BMI	svte2n
541 A B905 FC0182		LDD	VTE2
542 A B908 FD0186		STD	VTS
543 A B90B FC0180		LDD	VTE1
544 A B90E B30186		SUBD	VTS
545 A B911 2B41		BMI	dneg
546 A B913 FD0188		STD	RR
547 A B916 8600		LDAA	#S00
548 A B918 B7018A		STAA	SRR
549 A B91B 7EB97C		JMP	ictd4
550 A B91E 1AB30185		JMP	ictd4
551 A B922 2B44	svte1n	CPD	SVTE2
552 A B924 FC0180		BMI	sumane
553 A B927 FD0186		LDD	VTE1
554 A B92A FC0182		STD	VTS
555 A B92D B30186		LDD	VTE2
556 A B930 2B22		SUBD	VTS
57 A B932 FD0188		BMI	dneg
558 A B935 8600		STD	RR
559 A B937 B7018A		LDAA	#S00
560 A B93A 7EB97C		STAA	SRR
561 A B93D FC0182		JMP	ictd4
562 A B940 FD0186	svte2n	LDD	VTE2
563 A B943 FC0180		STD	VTS
564 A B946 F30186		LDD	VTE1
565 A B949 FD0188		ADDD	VTS
566 A B94C 8600		STD	RR
567 A B94E B7018A		LDAA	#S00
568 A B951 7EB97C		STAA	SRR
569 A B954 FD018B		JMP	ictd4
570 A B957 CC0000	dneg	STD	DT
571 A B95A B3018B		LDD	#S0000
572 A B95D FD0188		SUBD	DT
573 A B960 8601		STD	RR
574 A B962 B7018A		LDAA	#S01
575 A B965 7EB97C		STAA	SRR
576 A B968 FC0182		JMP	ictd4
577 A B96B FD0186	sumane	LDD	VTE2
578 A B96E FC0180		STD	VTS
579 A B971 F30186		LDD	VTE1
580 A B974 FC0188		ADDD	VTS
581 A B977 8601		LDD	RR
582 A B979 B7018A		LDAA	#S01
583 A B97C 7C017F		STAA	SRR
584 A B97F 8602	ictd4	INC	CONT4
585 A B981 43		LDAA	#S02
586 A B982 271B		COMA	CONT4
587 A B984 FC0188		BEQ	final
588 A B987 FD0180		LDD	RR
589 A B98A FC017A		STD	VTE1
590 A B98D FD0182		LDD	MULT3
591 A B990 B6018A		STD	VTE2
592 A B993 B70184		LDAA	SRR
593 A B996 B6017E		STAA	SVTE1
		LDAA	SMULT3

594 A B999 B70185		STAA		SVTE2	
595 A B99C 7EB8F6		JMP		sigG	
596 A B99F 8600		LDAA	final	#S00	
597 A B9A1 43		COMA		SRR	
598 A B9A2 2B0C		BMI		ykneg	
599 A B9A4 8600		LDAA		#S00	
600 A B9A6 B7018F		STAA		SYK	
601 A B9A9 FC0188		LDD		RR	
602 A B9AC FD018D		STD		YK	
603 A B9AF 39		RTS			
604 A B9B0 8601		LDAA	ykneg	#S01	
605 A B9B2 B7018F		STAA		SYK	
606 A B9B5 FC0188		LDD		RR	
607 A B9B8 FD018D		STD		YK	
608 A B9BB 39		RTS			
609 A *					
610 A *Inicia SUBROUTINA MULT					
611 A					
612 A B9BC B60149	MULT	LDAA		FACT1	*Esta subrutina efectúa
613 A B9BF B70190		STAA		L0	una multiplicación de
614 A B9C2 B6014A		LDAA		FACT1+1	16 bits por 16 bits
615 A B9C5 B70191		STAA		L1	*FACT1 y Fact2 son
616 A B9C8 B6014B		LDAA		FACT2	variables que se cargan
617 A B9CB B70192		STAA		L2	cuando se desea utilizar
618 A B9CE B6014C		LDAA		FACT2+1	esta subrutina.
619 A B9D1 B70193		STAA		L3	L0,L1...L19 represen-
620 A B9D4 B60193		LDAA		L3	tan localidades de
621 A B9D7 F60191		LDAB		L1	memoria en las que se
622 A B9DA 3D		MUL			van colocando los re-
623 A B9DB B70195		STAA		L5	sultados de las opera-
624 A B9DE F70196		STAB		L6	ciones para así compo-
625 A B9E1 B60193		LDAA		L3	ner el resultado de la
626 A B9E4 F60190		LDAB		L0	multiplicación
627 A B9E7 3D		MUL			
628 A B9E8 B70197		STAA		L7	*Cabe mencionar que
629 A B9EB F70198		STAB		L8	sólo se realiza la mul-
630 A B9EE B60192		LDAA		L2	tiplicación sin signar ya
631 A B9F1 F60191		LDAB		L1	que esta operación se
632 A B9F4 3D		MUL			efectúa en otra subru-
633 A B9F5 B7019A		STAA		L10	rutina
634 A B9F8 F7019B		STAB		L11	
635 A B9FB B60192		LDAA		L2	
636 A B9FE F60190		LDAB		L0	
637 A BA01 3D		MUL			
638 A BA02 B7019C	STAA		L12		
639 A BA05 F7019D		STAB		L13	
640 A BA08 8600		LDAA		#S00	
641 A BA0A B70194		STAA		L4	
642 A BA0D B70199		STAA		L9	
643 A BA10 B60195		LDAA		L5	
644 A BA13 F60198		LDAB		L8	
645 A BA16 1B		ABA			
646 A BA17 2403		BCC		noacal	
647 A BA19 7C0194		INC		L4	

648 A BA1C F6019B  
 649 A BA1F 1B  
 650 A BA20 2403  
 651 A BA22 7C0194  
 652 A BA25 B701A1  
 653 A BA28 B60194  
 654 A BA2B F60197  
 655 A BA2E 1B  
 656 A BA2F 2403  
 657 A BA31 7C0199  
 658 A BA34 F6019A  
 659 A BA37 1B  
 660 A BA38 2403  
 661 A BA3A 7C0199  
 662 A BA3D F6019D  
 663 A BA40 1B  
 664 A BA41 2403  
 665 A BA43 7C0199  
 666 A BA46 B701A0  
 667 A BA49 B60199  
 668 A BA4C F6019C  
 669 A BA4F 1B  
 670 A BA50 B7019F  
 671 A BA53 B60196  
 672 A BA56 B701A2  
 673 A BA59 B6019F  
 674 A BA5C F601A0  
 675 A BA5F 1B  
 676 A BA60 2604  
 677 A BA62 B701A6  
 678 A BA65 39  
 679 A BA66 B6019F  
 680 A BA69 F601A0  
 681 A BA6C CE1000  
 682 A BA6F 03  
 683 A BA70 FE01A3  
 684 A BA73 B601A4  
 685 A BA76 B701A6  
 686 A BA79 B601A1  
 687 A BA7C F601A2  
 688 A BA7F 1B  
 689 A BA80 2604  
 690 A BA82 B701A7  
 691 A BA85 39  
 692 A BA86 CE1000  
 693 A BA89 03  
 694 A BA8A FE01A5  
 695 A BA8D B701A7  
 696 A BA90 39  
 697 A BA91

SYMBOL TABLE: Total Entries= 231  
 TOTAL ERRORS=0

noaca1	LDAB	L11
	ABA	noaca2
	BCC	L4
	INC	L17
noaca2	STAA	L4
	LDAA	L7
	LDAB	noaca3
	ABA	L9
	BCC	L10
	INC	noaca4
noaca3	LDAB	L9
ABA	BCC	L13
	INC	noaca5
noaca4	LDAB	L9
	ABA	L16
	BCC	L9
	INC	L12
noaca5	STAA	L15
	LDAA	L6
	LDAB	L18
ABA	LDAB	L15
	STAA	L16
	LDAA	kapa
ABA	LDAB	RME
	BNE	L15
	STAA	L16
	RTS	#S1000
kapa	LDAA	L19
	LDAB	L20
	LDX	RME
FDIV	LDX	L17
	LDAA	L18
	STAA	lamda
LDAA	LDAB	RMF
	ABA	
	BNE	#S1000
	STAA	L21
	RTS	RMF
lamda	LDX	
	FDIV	END
	LDX	
	STAA	
	RTS	
	FIN	

Por las características que presenta el algoritmo del ASA, la programación que se obtiene del sistema es sencilla y de instrucciones que para su funcionamiento no requieren de demasiados ciclos máquina para llevar a cabo su función lo que beneficia al sistema, ya que el tiempo para realizar el muestreo de la señal por los doce filtros se realiza en un tiempo de 0.07 [mS]. Tiempo suficiente para que el proceso sea continuo y al aparecer los resultados por el display de led's éstos permanezcan encendidos sin percibir si se ha terminado el primer muestreo y se está continuando con el siguiente.

El ensamble del algoritmo que aquí se ha presentado fue realizado en un software simulador del microcontrolador 68HC11 de Motorola llamado ( ASMHC11 ), el cual se encarga de ensamblar los mnemónicos a código hexadecimal y de corregir cualquier error de sintaxis que llegase a tener el programa. De la misma forma se empleó un software simulador del funcionamiento del 68HC11 llamado ( AVSIM11 ) en el cual se comprobó el correcto desempeño del programa.

## **4.6 OPERACIÓN DEL ASA**

A continuación se presenta el diagrama eléctrico del Analizador de Señales de Audio, la implementación física del sistema que se propone reúne las características de funcionamiento y procesamiento de información. A continuación mencionaremos el modo de operación del ASA:

Para iniciar el funcionamiento del sistema es necesario indicar el número de muestras a coleccionar del punto dentro del recinto a ser analizado, esto se hace mediante un DIP Switch que alimentará las entradas del puerto A de 68HC11.

El sistema recibe las señales desde un punto dentro del recinto a analizar, estas señales son adquiridas por medio de un micrófono el cual entrega la señal analógica en un rango de mV, por lo que dicha señal deberá ser amplificada a niveles de 0-5 V. voltaje con el que opera el convertidor analógico-digital A/D del microcontrolador 68HC11. Al ser amplificada la señal, el convertidor digitaliza la señal y la envía a los registros ADR's que son los encargados de almacenar la información digitalizada. Cabe mencionar que el convertidor A/D se encuentra en el puerto E del circuito microcontrolador, este convertidor es de 8 canales, para fines del proyecto sólo se ha empleado un canal que se encuentra ubicado en la terminal E0 de 68HC11.

Al tenerse las condiciones generales para el funcionamiento del sistema, el software programado procesa la información y arroja los resultados obtenidos mediante el display, los datos son enviados por medio de los puertos B y C del microcontrolador.

Las terminales del puerto B desde B0-B7 indican la magnitud de la frecuencia, éstas enviarán la información a un convertidor que a su vez encenderá los led's de acuerdo a la intensidad de la señal. Las terminales del puerto C desde C0-C3 indican el número de fila o filtro del cual se tiene el análisis, debido a esto las salidas utilizadas del puerto alimentan a un convertidor que a su vez excitará a la respectiva fila de led's que deberán ser encendidos de acuerdo a la conversión realizada.

La operación y el funcionamiento del ASA son simples por lo que su manejo es fácil y rápido. No hay que perder de vista que se buscó tener un modelo con el mínimo de elementos para de esta forma tener un analizador de bajo costo pero, de acuerdo a los requerimientos del usuario, así como también a sus condiciones económicas es posible que el diseñador pueda modificar el sistema hasta satisfacer las necesidades del comprador.



# CAPÍTULO 5

## CONCLUSIONES

El presente trabajo ha sido laborioso y difícil, siendo éste uno de los tantos motivos que nos llena de orgullo y satisfacción al presentarlo. Sabemos que ya ha pasado bastante tiempo en que terminamos la licenciatura; pero este mismo tiempo, lejos de haber sido perdido nos ha servido para darnos cuenta del entorno que impera en nuestro país, afectando inevitablemente a nuestra sociedad. En la actualidad México necesita que cada uno de nosotros cumplamos con nuestra responsabilidad, que como parte integrante de la misma nos corresponde; y de esta manera evitar que la marcha del país se haga más difícil. Lo que proponemos en la presente Tesis, es en cierta forma, darle dinamismo e impulso a nuestra economía, quizá en una mínima parte pero que indudablemente es un principio.

Para dar inicio a la Tesis fue necesario profundizar en temas que no conocíamos, aunando por supuesto, los conocimientos adquiridos en la licenciatura, y la experiencia del campo profesional. Se ha dejado el proceso hasta la parte de diseño del sistema, siendo éste nuestro objetivo. De esta manera, dejamos escrito el inicio de nuestra investigación, para dar pie a que se continúe con el desarrollo final del sistema.

Nuestro trabajo, en conclusión, consistió principalmente en desarrollar un proceso de tecnología alternativa que se refleja en un Analizador de Señales de Audio (ASA), que es un sistema procesador digital de señales de audio, mismo que determina cuáles son las frecuencias que componen a la señal que se analiza. Esta tecnología alternativa tiene el fin de construir analizadores de señales de audio, que tienen un uso común dentro de la rama de la acústica, sobre todo en la equalización de recintos acústicos.

### **Este analizador se desarrolló conforme describimos a continuación:**

- En primer lugar el sistema se constituye por 12 filtros digitales de respuesta impulso infinita ( IIR ), que cubren el espectro de audio. Iniciando desde 20 Hz hasta 20 kHz, a intervalos de una octava, entre frecuencias centrales. Los filtros tienen un ancho de banda de un tercio de octava y una ganancia unitaria ( 0 dB ).
- Cabe mencionar que cada filtro digital es del tipo recursivo, expresado en una red en cascada de segundo orden. Con esto se logra que los errores de cuantización sean minimizados. La ecuación que representa a esta red, está formada por operaciones como suma, resta y multiplicación. Tales operaciones están afectadas por coeficientes que caracterizan a cada filtro. Para el cálculo de los coeficientes se utilizó la técnica de Transformación Bilineal, la cual convierte un filtro analógico en un filtro digital, mediante el mapeo de los polos de la ecuación característica del filtro, pasando del plano S al plano Z. Con esto obtenemos la ecuación indiferente, que define al filtro digital. La Transformación Bilineal, es la técnica más utilizada para el diseño de filtros digitales por ser más fácil de comprender, además de su sencillez aritmética.

- Para el empleo esta técnica se partió de un filtro analógico del tipo paso-banda, éste fue aproximado a sus características ideales, por medio del modelo Butterworth. Elegimos este modelo por tener una respuesta plana en frecuencia, en la región de paso-banda; logrando tener uniformidad a la salida. Del mismo modo, su aproximación tiene mayor facilidad de diseño, ya que con el orden del filtro y la frecuencia de corte es posible caracterizar a la ecuación que define al filtro. El orden del filtro corresponde a una pendiente más pronunciada. Para nuestro caso se determinó un filtro de orden ocho, teniendo como pendiente una caída de 48 dB / Octava.
- Como hemos visto, el diseño de filtros digitales requiere de los filtros analógicos, por ser éstos ya más estudiados y conocidos en sus respuestas; pero la ventaja que presentan los filtros digitales frente a su contraparte analógica, es que cumplen con los mismos requisitos de diseño, sólo que expresados en ecuaciones más sencillas aritméticamente, por lo que resultan más fáciles de entender e implantar.
- Es necesario señalar que independientemente de la seguridad que brindan los filtros analógicos en su respuesta en frecuencia, los filtros digitales aquí diseñados fueron simulados por medio de un software llamado CC: mismo que analiza la respuesta en frecuencia de los filtros, para asegurar su correcto comportamiento.
- Al tener caracterizados los filtros en ecuaciones indiferentes, su proceso de solución es sencillo y repetitivo, por lo que al diseñar el algoritmo, que hiciera estas operaciones, se buscó simplificar el desempeño del proceso. Se dividió el algoritmo en cuatro módulos, que se encargaran de resolver una serie de operaciones repetitivas. Cada módulo recibe una entrada y arroja una salida, minimizando la complejidad en el manejo de las variables. Además de que es posible realizar modificaciones en un módulo sin afectar a los otros. Obteniendo así, una mayor flexibilidad para cualquier cambio o ampliación posterior. La implementación del algoritmo que caracteriza al sistema fue realizada en el circuito microcontrolador 68HC11.
- El 68HC11 es un circuito que ofrece diversas opciones para el manejo de datos, ya que proporciona al sistema la capacidad de poder desplegar la información por otros medios empleando el mismo circuito. Otro atributo con que cuenta el sistema es el de poder aumentar la capacidad de almacenamiento de datos en memoria, con sólo emplear otro modo de operación del microcontrolador (modo expandido). No debemos olvidar que el 68HC11 posee un software para programación muy amigable; por lo que hace más fácil su programación.
- El hardware del sistema está formado por tres partes: La primera realiza la adecuación y adquisición de la señal para ser procesada; en la segunda parte, la señal es procesada para determinar qué frecuencias la componen; y en la tercera etapa se muestran los resultados obtenidos. La salida de los datos se hace en forma visual, de tal manera que es posible observar en forma gráfica el comportamiento de la señal. Que para propósitos de análisis de un recinto, es la mejor forma de interpretar la información.

- El software que compone al sistema es sencillo y compacto, es decir sin un gran número de instrucciones, logrando una mayor velocidad en el procesamiento de la señal. De tal manera que se logra el análisis total de la señal en aproximadamente 0.07 [ mS ]. Suficiente para tener una respuesta continua en la pantalla de led's. La operación y funcionamiento del sistema son simples por lo que su empleo no requiere mayor preparación, dejando para los expertos en el ramo su mejor interpretación de los resultados obtenidos.

Una vez que terminamos de describir el el diseño de nuestro sistema, es conveniente mencionar que esta propuesta queda abierta para mejorarla o modificarla, de acuerdo a las necesidades, tanto del usuario como del diseñador, dando lugar al perfeccionamiento del sistema.

El elaborar la Tesis nos ha hecho reflexionar acerca de la tecnología que se desarrolla en México, ya que es bien sabido que en nuestro país se conoce como adaptada o intermedia. Lejos de tomarlo así, comprendimos que de esta forma no estamos partiendo de cero; situación que nos favorece, sino que logramos a un mediano plazo la creación de tecnología propia y más avanzada, e inclusive, en un futuro transmitirla a países menos industrializados.

Concluimos que nuestra Tesis la tomamos como un buen arranque que podría dar impulso para promover e innovar la tecnología alternativa que propusimos favoreciendo el mercado interno, con pequeñas o grandes contribuciones. No debemos negar nuestras raíces, ni las estructuras: social, económica, política y cultural, sino partir de esta realidad para innovar sistemas funcionales y propios que atiendan las necesidades nacionales, antes que privilegiar modelos externos que responden a realidades distintas y con otros intereses.



# BIBLIOGRAFÍA

- Antoniou, A.. *Digital Filters: Analysis and Desing*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1976.
- Churchill, R. V.. *Complex Variables and Applications* New York:  
David E. Johnson..Introduction to Filter Theory. N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1989.
- ECG Serviconductor Master Replacement Guide
- Granville Willians Antony, *Cálculo Diferencial e Integral*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1988.
- Hamming, R. W., *Digital Filters*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall. Inc. 1985.
- Harry Y-F Lam. *Analog and Digital Filters*. N.J.: Prentice-Hall. Inc.. 1985.
- HC11M68HC11 Reference Manual Motorola
- Jury, E. Y., *Theory and Application of the z-Transform Method*. McGraw-Hill Book Company, 1960.
- Oppenheim. A.V., and R.W. Schafer, *Digital Signal Processing*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1975.
- Peled, A., and B. Liu. *Digital Signal Processing: Theory. Design. and Implementation*. New York: John Wiley, 1976.
- Rabiner. L. R., and B. Gold. *Theory and Application of Digital Signal Processing*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall. Inc.. 1975
- Ragazzini, J. R. and G. F. Franklin. *Sampled-Data Control Systems*. -New York: McGraw-Hill Book Company, 1958.
- Sterns, S.D., *Digital Signal Processing*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall. Inc., 1975.
- Taylor, F. J., *Digital Filter Design Handbook*. New York: Marcel Dekker. Inc.. 1983.
- Van Valkenburg. M. E., *Network Analysis* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall. Inc., 1974.
- Van Valkenburg, M.E., *Analog Filter Design*. New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1982.
- Williams Charles s. *Designing Digital Filters*. N.J.: Prentice-Hall. Inc., 1995.

# APÉNDICE A

## AISLAMIENTO ACÚSTICO A RUIDO AÉREO

En las siguientes tablas se muestran los materiales más comunes, empleados para el aislamiento acústico de recintos, los cuales se comentan en el capítulo I del presente trabajo.

TABLA 1

AISLAMIENTO ACÚSTICO A RUIDO AÉREO DE DIFERENTES SISTEMAS ORDENADOS DE MENOR A MAYOR INTENSIDAD			
Denominación	densidad (Kg/m <sup>2</sup> )	espesor (cm.)	R (dB)
ALUMINIO	1.6	0.60	18.0
MADERA CONTRACHAPADA	5.0	8.00	21.8
PLACA DE YESO + BASTIDOR DE MADERA	7.0	9.00	25.8
VENTANA SIMPLE	9.0	3.00	20.7
YESO	9.3	10.00	27.0
LUNA PULIDA DE VIDRIO	10.0	3.00	29.5
VENTANA DOBLE	15.0	11.80	24.2
PLANCHA DE PLOMO	17.0	1.50	31.8
TABLERO DE FIBRA	21.0	125.00	34.3
POLIESTIRENO EXPANDIDO	23.0	50.00	30.2
MADERA DE CAOBA	25.0	50.00	29.3
LAMINA DE PLÁSTICO	25.3	25.00	32.2
LOSETA DE FIBRA COMPRIMIDA	25.8	56.00	28.3
PLACA DE CARTÓN YESO	26.8	9.50	26.3
PUERTA SENCILLA DE MADERA	28.00	-43.00	26.3
PUERTA DOBLE DE MADERA	34.0	150.00	35.5
PLADUR N-15	35.0	6.00	32.8
LAMINA DE ACERO ACANALADO	39.0	1.20	26.8
TABLERO DE YESO	40.0	125.00	40.8
PANEL DE FIBRA + LAMINA DE MADERA	42.2	122.00	40.8
MADERA DE PINO	49.0	25.00	33.8
LADRILLO TABICON	70.0	100.00	12.0
PLADUR + ARKOBEL 80 Kg/m <sup>2</sup>	83.0	130.00	59.8
LISTÓN DE METAL + YESO	88.3	125.00	40.0
MADERA AGLOMERADA + YESO	136.6	162.50	37.0
LADRILLO MACIZO	145.0	125.00	43.8
BLOQUE DE HORMIGÓN + CORCHO	161.0	175.00	55.2
FIBROCEMENTO ONDULADO	370.0	340.00	35.2
LADRILLO - YESO	419.0	300.00	58.8
PIEDRA	990.0	300.00	59.0

**TABLA 2**

<b>AISLAMIENTO ACÚSTICO A RUIDO AÉREO DE DIFERENTES SISTEMAS ORDENADOS DE MENOR A MAYOR ESPESOR</b>			
<b>Denominación</b>	<b>densidad (Kg/m<sup>3</sup>)</b>	<b>espesor (cm.)</b>	<b>R (dB)</b>
ALUMINIO	1.6	0.60	18.0
LAMINA DE ACERO ACANALADO	39.0	1.20	26.8
PLANCHA DE PLOMO	17.0	1.50	31.8
VENTANA SIMPLE	9.0	3.00	20.7
LUNA PUJIDA DE VIDRIO	10.0	3.00	29.5
PLADUR N-15	35.0	6.00	32.8
MADERA CONTRACHAPADA	5.0	8.00	21.8
PLACA DE YESO + BASTIDOR DE MADERA	7.0	9.00	25.8
PLACA DE CARTÓN YESO	26.8	9.50	26.3
YESO	9.3	10.00	27.0
VENTANA DOBLE	15.0	11.80	24.2
MADERA DE PINO	49.0	25.00	33.8
LAMINA DE PLÁSTICO	25.3	25.00	32.2
PUERTA SENCILLA DE MADERA	28.00	43.00	26.3
POLIESTIRENO EXPANDIDO	23.0	50.00	30.2
MADERA DE CAOBA	25.0	50.00	29.3
LOSETA DE FIBRA COMPRIMIDA	25.8	56.00	28.3
LADRILLO TABICON	70.0	100.00	12.0
PANEL DE FIBRA + LAMINA DE MADERA	42.2	122.00	40.8
TABLERO DE FIBRA	21.0	125.00	34.3
TABLERO DE YESO	40.0	125.00	40.8
LISTÓN DE METAL + YESO	88.3	125.00	40.0
LADRILLO MACIZO	145.0	125.00	43.8
PLADUR + ARKOBEL 80 Kg/m <sup>3</sup>	83.0	130.00	59.8
PUERTA DOBLE DE MADERA	34.0	150.00	35.5
MADERA AGLOMERADA + YESO	136.6	162.50	37.0
BLOQUE DE HORMIGÓN + CORCHO	161.0	175.00	55.2
LADRILLO + YESO	419.0	300.00	58.8
PIEDRA	990.0	300.00	59.0
FIBROCEMENTO ONDULADO	370.0	340.00	35.2

**TABLA 3**

<b>AISLAMIENTO ACÚSTICO A RUIDO AÉREO DE DIFERENTES SISTEMAS ORDENADOS DE MENOR A MAYOR INTENSIDAD</b>			
<b>Denominación</b>	<b>densidad (Kg/m<sup>2</sup>)</b>	<b>espesor (cm.)</b>	<b>R (dB)</b>
LADRILLO TABICON	70.0	100.00	12.0
ALUMINIO	1.6	0.60	18.0
VENTANA SIMPLE	9.0	3.00	20.7
MADERA CONTRACHAPADA	5.0	8.00	21.8
VENTANA DOBLE	15.0	11.80	24.2
PLACA DE YESO + BASTIDOR DE MADERA	7.0	9.00	25.8
PLACA DE CARTÓN YESO	26.8	9.50	26.3
PUERTA SENCILLA DE MADERA	28.00	43.00	26.3
LAMINA DE ACERO ACANALADO	39.0	1.20	26.8
YESO	9.3	10.00	27.0
LOSETA DE FIBRA COMPRIMIDA	25.8	56.00	28.3
MADERA DE CAOBA	25.0	50.00	29.3
LUNA PULIDA DE VIDRIO	10.0	3.00	29.5
POLIESTIRENO EXPANDIDO	23.0	50.00	30.2
PLANCHA DE PLOMO	17.0	1.50	31.8
LAMINA DE PLÁSTICO	25.3	25.00	32.2
PLADUR N-15	35.0	6.00	32.8
MADERA DE PINO	49.0	25.00	33.8
TABLERO DE FIBRA	21.0	125.00	34.3
FIBROCEMENTO ONDULADO	370.0	340.00	35.2
PUERTA DOBLE DE MADERA	34.0	150.00	35.5
MADERA AGLOMERADA + YESO	136.6	162.50	37.0
LISTÓN DE METAL + YESO	88.3	125.00	40.0
TABLERO DE YESO	40.0	125.00	40.8
PANEL DE FIBRA + LAMINA DE MADERA	42.2	122.00	40.8
LADRILLO MACIZO	145.0	125.00	43.8
BLOQUE DE HORMIGÓN + CORCHO	161.0	175.00	55.2
LADRILLO + YESO	419.0	300.00	58.8
PIEDRA	990.0	300.00	59.0
PLADUR + ARKOBEL 80 Kg/m <sup>2</sup>	83.0	130.00	59.8



**TABLA 4**

<b> AISLAMIENTO ACÚSTICO A RUIDO AÉREO DE DIFERENTES SISTEMAS  ORDENADOS POR ORDEN ALFABÉTICO</b>			
<b>Denominación</b>	<b>densidad (Kg/m<sup>2</sup>)</b>	<b>espesor (cm.)</b>	<b>R (dB)</b>
ALUMINIO	1.6	0.60	18.0
BLOQUE DE HORMIGÓN + CORCHO	161.0	175.00	55.2
FIBROCEMENTO ONDULADO	370.0	340.00	35.2
LADRILLO + YESO	419.0	300.00	58.8
LADRILLO MACIZO	145.0	125.00	43.8
LADRILLO TABICON	70.0	100.00	12.0
LAMINA DE ACERO ACANALADO	39.0	1.20	26.8
LAMINA DE PLÁSTICO	25.3	25.00	32.2
LISTÓN DE METAL + YESO	88.3	125.00	40.0
LOSETA DE FIBRA COMPRIMIDA	25.8	56.00	28.3
LUNA PULIDA DE VIDRIO	10.0	3.00	29.5
MADERA AGLOMERADA + YESO	136.6	162.50	37.0
MADERA CONTRACHAPADA	5.0	8.00	21.8
MADERA DE CAOBA	25.0	50.00	29.3
MADERA DE PINO	49.0	25.00	33.8
PANEL DE FIBRA + LAMINA DE MADERA	42.2	122.00	40.8
PIEDRA	990.0	300.00	59.0
PLACA DE CARTÓN YESO	26.8	9.50	26.3
PLACA DE YESO + BASTIDOR DE MADERA	7.0	9.00	25.8
PLADUR + ARKOBEL 80 Kg/m <sup>2</sup>	83.0	130.00	59.8
PLADUR N-15	35.0	6.00	32.8
PLANCHA DE PLOMO	17.0	1.50	31.8
POLIESTIRENO EXPANDIDO	23.0	50.00	30.2
PUERTA DOBLE DE MADERA	34.0	150.00	35.5
PUERTA SENCILLA DE MADERA	28.00	43.00	26.3
TABLERO DE FIBRA	21.0	125.00	34.3
TABLERO DE YESO	40.0	125.00	40.8
VENTANA DOBLE	15.0	11.80	24.2
VENTANA SIMPLE	9.0	3.00	20.7
YESO	9.3	10.00	27.0

**TABLA 5**

**AISLAMIENTO ACÚSTICO A RUIDO AÉREO DE DIFERENTES SISTEMAS A LAS DISTINTAS FRECUENCIAS ORDENADAS POR ORDEN ALFABÉTICO**

Denominación del sistema	Aislamiento acústico R (dB)					
	f ( Hz )					
	125	250	500	1k	2k	4k
ALUMINIO		18.0	13.0	18.0	23.0	25.0
BLOQUE DE HORMIGÓN + CORCHO						
FIBROCEMENTO ONDULADO	45.0	46.0	42.0	45.0	59.0	67.0
LADRILLO + YESO	33.0	31.0	33.0	35.0	42.0	39.0
LADRILLO MACIZO	17.0	18.0	20.0	24.0	30.0	38.0
LADRILLO TABICÓN	8.0	5.0	9.0	14.0	19.0	17.0
LAMINA DE ACERO ACANALADO	30.0	20.0	22.0	30.0	28.0	31.0
LAMINA DE PLASTICO	15.0	23.0	22.0	23.0	26.0	26.0
LISTÓN DE METAL + YESO	30.0	25.0	34.0	38.0	38.0	54.0
LOSETA DE FIBRA COMPRIMIDA	22.0	25.0	27.0	29.0	35.0	34.0
LUNA PULIDA DE VIDRIO		32.0	30.0	33.0	34.0	
MADERA AGLOMERADA + YESO	26.0	33.0	34.0	38.0	42.0	49.0
MADERA CONTRACHAPADA	9.0	13.0	16.0	21.0	27.0	29.0
MADERA DE CAOBA	19.0	23.0	25.0	30.0	37.0	42.0
MADERA DE PINO	27.0	31.0	33.0	35.0	37.0	40.0
PIEDRA	47.0	51.0	57.0	61.0	67.0	71.0
PLACA DE CARTÓN YESO	23.4	23.4	23.4	31.4	28.0	28.0
PANEL DE FIBRA - LAMINA DE MADERA	11.0	20.0	29.0	41.0	54.0	60.0
PLACA DE YESO - BASTIDOR DE MADERA	15.0	20.0	24.0	29.0	32.0	35.0
PLADUR + ARKOBEL 80 Kg/m'	35.0	37.0	45.0	52.0	52.0	48.0
PLADUR N-15	27.5	23.5	33.5	39.0	35.5	37.5
PLANCHA DE PLOMO	28.0	32.0	33.0	32.0	33.0	33.0
POLIESTIRENO EXPANDIDO	8.0	17.0	19.0	22.0	19.0	39.0
PUERTA DOBLE DE MADERA	29.0	33.0	36.0	34.0	41.0	40.0
PUERTA SENCILLA DE MADERA	25.0	27.0	31.0	36.0	32.0	
TABLERO DE FIBRA	22.0	23.0	27.0	27.0	35.0	35.0
TABLERO DE YESO	20.0	27.0	37.0	43.0	48.0	43.0
VENTANA DOBLE				21.0		
VENTANA SIMPLE	14.0	14.0	21.0	21.0	29.0	25.0
YESO	16.0	20.0	27.0	34.0	31.0	

# APÉNDICE B

## PROPIEDADES DE LOS FILTROS

### SUPERPOSICIÓN

Supóngase que tenemos un filtro que produce una salida  $y_k$  cuando aplicamos una entrada  $x_k$ , como se muestra en la figura 1. Así mismo, supóngase que el mismo filtro produce una salida de  $u_k$  cuando nosotros aplicamos la entrada  $u_k$  como se muestra en la misma figura. Entonces se dice que un filtro presenta la propiedad de superposición si y sólo si la suma de las entradas  $x + u$  genera una salida de  $y + u$ , donde  $y$  es la salida generada por  $x$ , y  $u$  es la salida generada por  $u$ . Esto se debe de cumplir para cualquier entradas dadas.

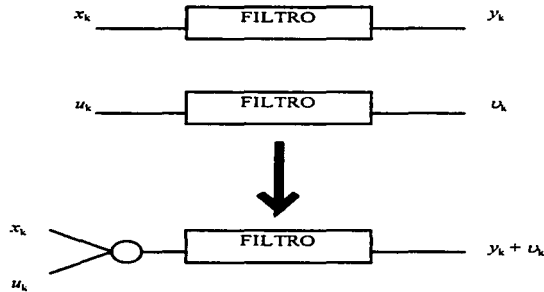


Figura 1. Superposición

## HOMOGENEIDAD

La propiedad de homogeneidad especifica como los filtros se comportan cuando la entrada es escalada por una constante. Supóngase que se tiene un filtro que produce una salida  $y_k$  cuando su entrada es  $x_k$ . ¿Que pasa si le aplicamos una entrada con una constante de escalación  $\alpha x_k$  a el filtro?. Si la constante de escalación  $\alpha$ , es integrable, se puede emplear la propiedad de superposición de los filtros digitales para demostrar que la salida es simplemente escalada por el mismo valor de escalación,  $\alpha$ .

Un filtro presenta la propiedad de homogeneidad si y sólo si la entrada de  $\alpha x_k$  genera una salida  $\alpha y_k$ , donde  $y_k$  es la salida generada por  $x_k$ . Esto se deberá cumplir para todas las entradas  $x_k$  y para todas las constantes  $\alpha$ .

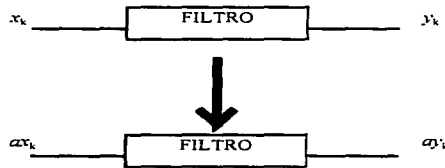


Figura 2. Homogeneidad

## INVARIANZA

La propiedad de invarianza especifica como un filtro responde a los cambios en las entradas. Supóngase que a un filtro se le aplica una entrada  $x_k$ , el cual produce una salida  $y_k$ . ¿Que pasa con el filtro cuando otra entrada  $x_{k-1}$ , es aplicada a la entrada del filtro?.

Un filtro presenta la propiedad de invarianza si y solo si la entrada de  $x_{k-1}$  genera la salida  $y_{k-1}$ , donde  $y_k$  es la salida generada por  $x_k$ . Esto debe de cumplirse para todas las entradas.

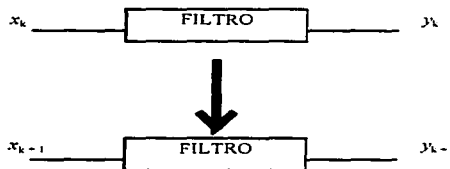


Figura 3. Invarianza

## FILTROS LINEALES E INVARIANTES EN EL TIEMPO

Un filtro que exhibe las propiedades de superposición, homogeneidad e invarianza es llamado *filtro lineal e invariante en el tiempo*. El filtro recursivo tiene todas estas propiedades si es lineal.

Sabemos que si aplicamos un impulso  $i_k$ , a un filtro, el filtro produce una respuesta  $h_k$ . Si aplicamos un impulso  $i_{k+1}$ , la salida del filtro será  $h_{k+1}$ . Si aplicamos una entrada impulso escalada  $ai_{k+1}$ , la respuesta impulso será  $ah_{k+1}$ . Estas observaciones son justamente las aplicaciones de los filtros lineales e invariantes en el tiempo.

Supóngase que la entrada de un filtro es una suma de impulsos. Cada impulso es dado por un valor de entrada como es muestra en la figura 4.

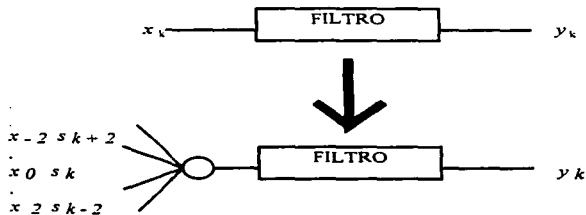


Figura 4. Impulso

Debido a la homogeneidad y la superposición, la salida del filtro es la suma de las salidas del filtro de cada una de las entradas. Pero se sabe que cada entrada impulso y escalada genera una respuesta impulso escalada. Entonces, la salida del filtro es la suma de todas estas respuestas impulsos.

$$y_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j h_{k-j}$$

Esta ecuación es una alternativa de la convolución. Otra fórmula se obtiene substituyendo  $l = k - j$ .

$$y_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l x_{k-l}$$

De esta forma, la entrada y salida están relacionadas a través de la convolución de la respuesta impulso.

## ANÁLISIS DEL AMPLIFICADOR

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{SC_1} \Rightarrow Z_1 = \frac{SR_1 + \frac{1}{C_1}}{S}$$

$$Z_2 = \frac{R_2 \left( \frac{1}{SC_2} \right)}{R_2 + \frac{1}{SC_2}} \Rightarrow Z_2 = \frac{\frac{1}{C_2}}{S + \frac{1}{C_2 R_2}}$$

$$Z_2 = Z_3 \Rightarrow Z_3 = \frac{\frac{1}{C_3}}{S + \frac{1}{C_3 R_3}}$$

$$Z_0 = R_4 + Z_2 + Z_3 \Rightarrow Z_0 = R_4 + \frac{\frac{1}{C_2}}{S + \frac{1}{C_2 R_2}} + \frac{\frac{1}{C_3}}{S + \frac{1}{C_3 R_3}}$$

Desarrollando la ecuación :

$$Z_0 = \frac{S^2 R_4 + S \left( \frac{R_4}{C_2 R_2} + \frac{R_4}{C_3 R_3} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) + \frac{1}{C_2 R_2 C_3} + \frac{1}{C_2 C_3 R_3} + \frac{R_4}{C_2 R_2 C_3 R_3}}{S^2 + S \left( \frac{1}{C_2 R_2} + \frac{1}{C_3 R_3} \right) + \frac{1}{C_2 R_2 C_3 R_3}}$$

$$Z_i = R_1 + \frac{1}{SC_1} \Rightarrow Z_i = \frac{SR_1 + \frac{1}{C_1}}{S}$$

$$AV = -\frac{Z_0}{Z_i}$$

Sustituyendo los términos correspondientes y desarrollando la ecuación:

$$A_v = - \frac{S^3 R_4 + S^2 \left( \frac{R_4}{C_2 R_2} + \frac{R_4}{C_3 R_3} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) + S \left( \frac{R_4}{C_2 R_2 C_3 R_3} + \frac{1}{C_2 C_3 R_3} + \frac{1}{C_2 R_2 C_3} \right)}{S^3 R_1 + S^2 \left( \frac{R_1}{C_2 R_2} + \frac{R_1}{C_3 R_3} + \frac{1}{C_1} \right) + S \left( \frac{R_1}{C_2 R_2 C_3 R_3} + \frac{1}{C_1 C_2 R_2} + \frac{1}{C_1 C_3 R_3} \right) + \frac{1}{C_1 C_2 R_2 C_3 R_3}}$$

$$A_v = - \frac{S \left[ S^2 R_4 + S \left( \frac{R_4}{C_2 R_2} + \frac{R_4}{C_3 R_3} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) + \frac{R_4}{C_2 R_2 C_3 R_3} + \frac{1}{C_2 C_3 R_3} + \frac{1}{C_2 R_2 C_3} \right]}{S^3 R_1 + S^2 \left( \frac{R_1}{C_2 R_2} + \frac{R_1}{C_3 R_3} + \frac{1}{C_1} \right) + S \left( \frac{R_1}{C_2 R_2 C_3 R_3} + \frac{1}{C_1 C_2 R_2} + \frac{1}{C_1 C_3 R_3} \right) + \frac{1}{C_1 C_2 R_2 C_3 R_3}}$$

POLOS Y CEROS PARA UN FILTRO BUTTERWORTH PASO BAJAS EN EL PLANO "S"					
CEROS			POLOS		
K	FILTRO	REAL	IMAGINARIO	REAL	IMAGINARIO
1	1..12	0.00	0.00	-0.1951	0.9808
2	1..12	0.00	0.00	-0.5555	0.8314
3	1..12	0.00	0.00	-0.8314	0.5555
4	1..12	0.00	0.00	-0.9807	0.1950

POLOS Y CEROS PARA UN FILTRO BUTTERWORTH PASO BANDA											
PLANOS S					PLANOS Z						
		CEROS			POLOS			CEROS		POLOS	
K	FILTRO	REAL	IMAGINARIO	REAL	IMAGINARIO	REAL	IMAGINARIO	REAL	IMAGINARIO		
1	1	0.00	0.00	-0.0002	0.0023	1.00	0.00	0.9996	0.0046		
2	1	0.00	0.00	-0.0006	0.0021	1.00	0.00	0.9989	0.0042		
3	1	0.00	0.00	-0.0008	0.0018	1.00	0.00	0.9985	0.0036		
4	1	0.00	0.00	-0.0008	0.0014	1.00	0.00	0.9984	0.0028		
1	2	0.00	0.00	-0.0002	0.0039	1.00	0.00	0.9996	0.0077		
2	2	0.00	0.00	-0.0005	0.0037	1.00	0.00	0.9990	0.0074		
3	2	0.00	0.00	-0.0007	0.0034	1.00	0.00	0.9986	0.0069		
4	2	0.00	0.00	-0.0007	0.0031	1.00	0.00	0.9985	0.0063		
1	3	0.00	0.00	-0.0003	0.0077	1.00	0.00	0.9992	0.0154		
2	3	0.00	0.00	-0.0009	0.0074	1.00	0.00	0.9980	0.0148		
3	3	0.00	0.00	-0.0013	0.0069	1.00	0.00	0.9972	0.0137		
4	3	0.00	0.00	-0.0015	0.0063	1.00	0.00	0.9970	0.0125		
1	4	0.00	0.00	-0.0007	0.0154	1.00	0.00	0.9982	0.0308		
2	4	0.00	0.00	-0.0019	0.0148	1.00	0.00	0.9958	0.0295		
3	4	0.00	0.00	-0.0027	0.0138	1.00	0.00	0.9942	0.0274		
4	4	0.00	0.00	-0.0029	0.0126	1.00	0.00	0.9938	0.0250		
1	5	0.00	0.00	-0.0014	0.0309	1.00	0.00	0.9954	0.0615		
2	5	0.00	0.00	-0.0038	0.0297	1.00	0.00	0.9907	0.0588		
3	5	0.00	0.00	-0.0054	0.0276	1.00	0.00	0.9978	0.0545		
4	5	0.00	0.00	-0.0059	0.0251	1.00	0.00	0.9971	0.0496		
1	6	0.00	0.00	-0.0027	0.0518	1.00	0.00	0.9870	0.1224		
2	6	0.00	0.00	-0.0076	0.0594	1.00	0.00	0.9780	0.1166		
3	6	0.00	0.00	-0.0108	0.0552	1.00	0.00	0.9727	0.1077		
4	6	0.00	0.00	-0.0118	0.0503	1.00	0.00	0.9718	0.0980		
1	7	0.00	0.00	-0.0003	0.0920	1.00	0.00	0.9773	0.1813		
2	7	0.00	0.00	-0.0085	0.0894	1.00	0.00	0.9678	0.1744		
3	7	0.00	0.00	-0.0122	0.0848	1.00	0.00	0.9622	0.1644		
4	7	0.00	0.00	-0.0135	0.0794	1.00	0.00	0.9613	0.1536		
1	8	0.00	0.00	-0.0144	0.2143	1.00	0.00	0.8874	0.3988		
2	8	0.00	0.00	-0.0397	0.2011	1.00	0.00	0.8543	0.3586		
3	8	0.00	0.00	-0.0554	0.1782	1.00	0.00	0.8425	0.3112		
4	8	0.00	0.00	-0.0582	0.1524	1.00	0.00	0.8516	0.2667		
1	9	0.00	0.00	-0.0111	0.3747	1.00	0.00	0.7392	0.6445		
2	9	0.00	0.00	-0.0310	0.3647	1.00	0.00	0.7235	0.6105		
3	9	0.00	0.00	-0.0447	0.3486	1.00	0.00	0.7225	0.5748		
4	9	0.00	0.00	-0.0501	0.3287	1.00	0.00	0.7347	0.5230		
1	10	0.00	0.00	-0.0742	1.0373	1.00	0.00	-0.0366	0.9304		
2	10	0.00	0.00	-0.2045	0.9687	1.00	0.00	0.0083	0.8109		
3	10	0.00	0.00	-0.2846	0.8499	1.00	0.00	0.0829	0.7164		
4	10	0.00	0.00	-0.2969	0.7162	1.00	0.00	0.1817	0.6526		
1	11	0.00	0.00	-2.2291	13.8473	1.00	0.00	-0.9681	0.1370		
2	11	0.00	0.00	-6.2937	11.8556	1.00	0.00	-0.9248	0.1223		
3	11	0.00	0.00	-9.2370	8.1304	1.00	0.00	-0.8802	0.0951		
4	11	0.00	0.00	-10.5701	2.9758	1.00	0.00	-0.8379	0.0417		
1	12	0.00	0.00	3.9902	-10.6000	1.00	0.00	-0.9306	-0.1517		
2	12	0.00	0.00	9.9981	-9.9811	1.00	0.00	-0.9003	-0.0905		
3	12	0.00	0.00	14.2413	-6.9026	1.00	0.00	-0.8911	-0.0493		
4	12	0.00	0.00	16.4900	-2.4572	1.00	0.00	-0.8879	-0.0158		



