19
2ej.

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

# ANALISIS CONVEXO Y PROBLEMAS VARIACIONALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :


ERIC FABIAN HERNANDEZ MARTINEZ

DIRECTOR DE TESIS. DRA. MONICA CLAPP JIMENEZ L.


1997

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

VNIVERSDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

**M. en C. Virginia Abrín Batule**
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la**
**Facultad de Ciencias**
**P r e s e n t e**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

ANALISIS CONVEXO Y PROBLEMAS VARIACIONALES

realizado por ERIC FABIAN HERNANDEZ MARTINEZ

con número de cuenta 8903863-7 , pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

**Atentamente**

| | |
|---|---|
| Director de Tesis Propietario | DRA. MONICA ALICIA CLAPP JIMENEZ LABORA |
| Propietario | DR. JAVIER BRACHO CARPIZO |
| Propietario | M. en C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA |
| Suplente | M. en C. DEBORA OLIVEROS BRANIFF |
| Suplente | M. en C. JOSE MARTINEZ LEON |

Consejo Departamental de Matemáticas
DR. MANUEL FALCONI MAGAÑA

# Análisis Convexo y Problemas Variacionales

Eric Fabián Hernández Martínez
Facultad de Ciencias U.N.A.M.

Julio, 1997

# Agradecimientos

Antes de empezar con este trabajo, quiero mencionar algunas personas e instituciones que fueron muy importantes en el transcurso de mi carrera y a las cuales les estoy muy agradecido.

Agradezco a Fundación UNAM.

A mis amigos y compañeros de toda la carrera.

A Mónica Clapp por el interés que despertó en mi hacia el Análisis Matemático, así como por su paciencia, sencillez y dedicación en la elaboración de este trabajo.

A José Antonio Gómez Ortega, por el apoyo y la amistad que me ha brindado durante toda mi carrera.

A mis padres por confiar en mi y haberme brindado la oportunidad de llegar al final de una de mis metas.

A mis hermanos por su apoyo y comprensión.

A mis tíos Martín y José, por haberme brindado un segundo hogar.

A Verónica por todo su amor y comprensión.

Por último quiero mencionar que este trabajo lo realicé siendo becario del Instituto de Matemáticas.

# Contenido

# Lista de Figuras

# Introducción

La transformada de Legendre $F^* : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ de una función $F : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ de clase $C^1$ se define mediante la fórmula implícita

$$F^*(y) = y \cdot x - F(x)$$

$$y = \nabla F(x)$$

cuando $\nabla F : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ es invertible. $F^*$ tiene la importante propiedad de que

$$x = \nabla F^*(y)$$

es decir,

$$\nabla F^* = (\nabla F)^{-1}.$$

En 1949 W. Fenchel introdujo el concepto de función conjugada o transformada de Fenchel que generaliza la noción de transformada de Legendre a funciones no necesariamente diferenciables o cuyo gradiente no es necesariamente invertible. La transformada de Fenchel fue posteriormente extendida a espacios vectoriales topológicos por Bronsted ([Br]), Moreau ([M]) y Rockafellar ([Ro2]).

El significado geométrico de la transformada de Legendre es el siguiente: Dado $y \in \mathbf{R}^n$ hay un único punto $(x.F(x))$ en la gráfica de $F$ en el que $(y, -1)$ *es* perpendicular a dicha gráfica (por la invertibilidad de $\nabla F$) . La ecuación del hiperplano tangente a la gráfica en $(x.F(x))$ es

$$t = y \cdot \xi - F^*(y), \qquad \xi \in \mathbf{R}^n, \ t \in \mathbf{R}.$$

Es decir $-F^*(y)$ es la ordenada al origen del único hiperplano afín perpendicular a $(y, -1)$ tangente a la gráfica de $F$.

Si $F : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ es convexa y semicontinua inferiormente (*s.c.i.*) su epigráfica

$$epi\ F = \{(\xi, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \ : \ F(\xi) \leq t\}$$

es convexa y cerrada. Por el teorema de *Hahn* − *Banach* existe un hiperplano soporte perpendicular a $(y, -1)$ para cada $y \in \mathbf{R}^n$. La transformada de Fenchel $F^*(y)$ de $F$ en $y$ es el negativo de la ordenada al origen de dicho plano Definición (1.3.6).

La propiedad de reciprocidad de $\nabla F$ y $\nabla F^*$ que carece de sentido si $F$ o $F^*$ no son diferenciables o $\nabla F$ no es invertible, recobra su sentido en términos del concepto de subdiferenciabilidad de una función convexa. El subgradiente $\nabla F(x)$ de una función convexa y s.c.i. es el conjunto de todas las pendientes de los hiperplanos soporte de la epigráfica de $F$ en el punto $(x.F(x))$ . El Teorema de Reciprocidad (1.4.5) dice entonces que

$$y \in \nabla F(x) \text{ si y sólo si } x \in \nabla F^*(y).$$

Como aplicación de la dualidad de Fenchel probaremos la existencia de una solución periódica del sistema Hamiltoniano

$$\dot{x} = J \nabla H(x) \tag{0.0.1}$$

sobre una superficie de nivel $S = H^{-1}(\alpha)$ dada. Aquí $H \in C^1(\mathbf{R}^{2n}, \mathbf{R})$ es no-negativa, estrictamente convexa y coerciva y

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

(*Teorema* 3.1.1).

La convexidad y la coercitividad de $H$ juegan un papel muy importante. Implican, en particular, que $S$ es frontera de un convexo acotado. Podemos sustituir entonces a $H$ por otra función $\tilde{H}$ homogénea positiva de grado $1 < q < 2$, con $S = \tilde{H}^{-1}(1)$, y tal que cualquier solución periódica de

$$\dot{x} = J\nabla\tilde{H}(x) \tag{0.0.2}$$

se puede "jalar" a una solución periódica de (0.0.1) sobre la superficie $S$ Proposición (3.2.3). El problema (0.0.2) se puede plantear como un problema variacional, es decir, las soluciones de período 1 de (0.0.2) corresponden a los puntos críticos de

$$F(x) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x \cdot J\dot{x} - H(x)\right) dt$$

para $x : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^{2n}$ en un espacio adecuado de curvas de período 1 (REF). Este es un problema difícil ya que $F$ no esta acotada ni superior ni inferiormente. Más aún, el operador $x \mapsto J\dot{x}$ tiene una infinidad de eigenvalores positivos y una infinidad de eigenvalores negativos.

El problema variacional se simplifica considerablemente aplicando primero dualidad de Fenchel: haciendo

$$\dot{z} = -J\dot{x} \tag{0.0.3}$$

obtenemos de (0.0.2) que

$$\dot{z} = \nabla\tilde{H}(x)$$

y por dualidad de Fenchel, esta ecuación es equivalente a

$$x = \nabla\tilde{H}^*(\dot{z})$$

y de (0.0.3) obtenemos

$$Jz - \nabla\tilde{H}^*(\dot{z}) = c$$

donde $c$ es una constante, cuyas soluciones corresponden a los puntos críticos de

$$F^*(\dot{z}) = \int_0^1 \left(\nabla \tilde{H}^*(\dot{z}) - \frac{1}{2}\dot{z} \cdot Jz\right) dt$$

en un espacio adecuado de curvas de periodo 1. ecuación (3.3.8). Es fácil ver que $F^*$ es coerciva y s.c.i. Proposición (3.3.9) por lo tanto está acotada inferiormente y alcanza su mínimo. Teorema (2.1.1).

El primer capítulo lo dividimos en cuatro secciones.

En la primera sección estudiamos las distintas versiones del Teorema de Hahn-Banach y algunas aplicaciones sencillas.

Dentro la segunda sección definimos lo que es una función covexa y una función semicontinua inferiormente. Vemos que la convexidad de una función es equivalente a que su epigráfica sea convexa y que una función sea semicontinua inferiormente es equivalente a que su epigráfica sea cerrada, además si una función es convexa y semicontinua inferiormente es equivalente a que sea semicontinua inferiormente en la topología débil. Un resultado importante es que la continuidad de funciones convexas es equivalente a que sea localmente acotada.

En la tercera sección definimos a $\Gamma(V)$ como el conjunto de las funciones convexas semicontinuas inferiormente que no toman el valor de $-\infty$ a menos que sea la constante $-\infty$. Definimos la polar o transformada de Fenchel de una función la cuál es convexa sin importar como es la función original así mismo definimos la bipolar de una función y establecemos la dualidad que existe entre $\Gamma(V)$ y $\Gamma(V^*)$ (Dualidad de Fenchel-Moreau).

Y en la última sección introducimos el concepto de subdiferencial de una función convexa el cuál es una generalización de la noción de derivada. Existen ejemplos de funciones convexas y estrictamente convexas no diferenciables y pero aquí hacemos ver que sí son subdiferenciables y hablamos un poco de lo que es el cálculo subdiferencial. En esta sección probamos el resultado de reciprocidad de $\nabla F$ y $\nabla F^*$ para la transformada de Fenchel.

El capítulo dos lo dividimos en dos secciones.

En la primera sección vemos que una función coerciva y semicontinua inferiormente, esta acotado por abajo y alcanza su mínimo; y damos condiciones para que una función convexa semicontinua inferiormente y propia alcanza su mínimo.

En la segunda sección caracterizamos las soluciones de los problemas de minimización como solución de desigualdades variacionales.

El último capítulo trata de la dualidad de Fenchel en la existencia de soluciones periódicas en un sistema Hamiltoniano sobre una superficie de nivel dada mencionado arriba. Este capítulo lo dividimos en tres secciones, en la primera sección introducimos el concepto de sistema Hamiltoniano. La segunda sección asegura que podemos cambiar nuestro Hamiltoniano por otro al cual le podemos aplicar algunos resultados de los capítulos anteriores. Y en la última sección establecemos bien el problema variacional a resolver y encontramos la solución.

# Capítulo 1

# Funciones Convexas

## §1.1 La separación de conjuntos convexos

Sea $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$. Si $u$ y $v$ son dos puntos de $V$ denotaremos al segmento con extremos $u$ y $v$ como $[u, v]$, es decir,

$$[u, v] = \{\lambda u + (1 - \lambda) v \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Un conjunto $A \subset V$ es **convexo** si y sólo si para cualquier par de puntos $u, v$ de $A$ el segmento $[u, v]$ está contenido en $A$.


Figura 1.1: Un conjunto *convexo* y otro no *convexo*.

**1.1.1 Proposición**. *Un conjunto $A \subset V$ es convexo si y sólo si para cualquier subconjunto finito $u_1, u_2, \cdots, u_n$ de elementos de $A$, y para cualquier familia de números reales positivos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ cuya suma sea la unidad, tenemos:*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in A.$$

**Demostración.**

Por inducción sobre $n$, para $n = 2$ haciendo $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ tenemos exactamente la definición. Supongamos válido para $n = k$ y demostraremos para $n = k + 1$.

Podemos suponer que existe un $\lambda_j \neq 1$ y entonces

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i u_i = \lambda_j u_j + (1 - \lambda_j) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k+1} \frac{\lambda_i u_i}{1 - \lambda_j} \in A$$

ya que por hipótesis de inducción $\sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k+1} \dfrac{\lambda_i u_i}{1 - \lambda_j} \in A$.

El recíproco se obtiene haciendo $n = 2$ y $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$. ■

**1.1.2 Observación.** *El espacio $V$ y el vacío son conjuntos convexos.*

**1.1.3 Proposición.** *La intersección de conjuntos convexos es convexa. La unión de conjuntos convexos no necesariamente lo es.*

**Demostración.**

Sea $U = \bigcap\limits_{i \in I} C_i$, con $C_i$ conjuntos convexos, y sean $u, v \in U$, luego $u, v \in C_i$ para toda $i \in I$. Por lo tanto $\lambda u + (1 - \lambda)v \in C_i$ para toda $i \in I$, de donde $\lambda u + (1 - \lambda)v \in \bigcap\limits_{i \in I} C_i = U$.

Para ver que la unión no necesariamente es convexa daremos el siguiente ejemplo, claramente el segmento $[u, v]$ no pertenece a la unión.

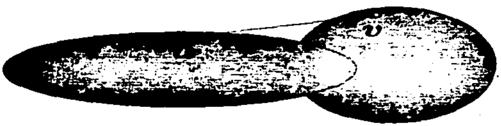



Figura 1.2: La unión de dos conjuntos convexos no siempre es convexa.

Sea $A \subset V$, la intersección de todos los conjuntos covexos que contienen a $A$ es por la Proposición 1.1.3 un conjunto convexo, y es el conjunto convexo más pequeño que contiene a $A$. Este conjunto es llamado la **envolvente convexa de** $A$ y lo denotaremos como $co\ A$.

**1.1.4 Proposición.** *Sí* $A \subset V$, *entonces.*

$$co\ A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \ \middle|\ n \in \mathbf{N},\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ u_i \in A,\ 1 \leq i \leq n \right\}.$$

**Demostración.**

Primeros probaremos que $U = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \mid n \in \mathbf{N},\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ u_i \in A,\ 1 \leq i \leq n \right\}$ es convexo. Sean $x, y \in U$ entonces

$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \qquad y = \sum_{j=1}^{m} \mu_j v_j \qquad$ con $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} \mu_j = 1; \alpha_i \geq 0\ ; \mu_j \geq 0$

$u_i$ y $v_j$ elementos de $A$.

$$(1-\lambda)\,x + \lambda y = (1-\lambda) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i + \lambda \sum_{j=1}^{m} \mu_j v_j = \sum_{i=1}^{n} (1-\lambda)\,\alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda \mu_j v_j \in U$$

ya que, $(1-\lambda)\,\alpha_i \geq 0,\ \lambda\mu_j \geq 0$ y

$\sum_{i=1}^{n} (1-\lambda)\,\alpha_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda\mu_j = (1-\lambda) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \lambda \sum_{j=1}^{m} \mu_j = (1-\lambda) + \lambda = 1.$

Por definición $A \subset U$ y como $U$ es convexo se sigue que $co\ A \subset U$.

Para ver que $U \subset co\ A$ observemos que por ser $co\ A$ la intersección de conjuntos convexos $co\ A$ es convexo; y por la Proposición (1.1.1) $U \subset co\ A$. Entonces $U = co\ A$. ■

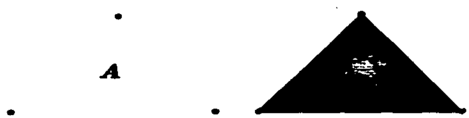



**Figura 1.3: La *envolvente convexa* de tres puntos**

Diremos que $H \subset V$ es un hiperplano afín si existe una funcional lineal $l : V \longrightarrow \mathbf{R}$ no trivial tal que $l^{-1}(\alpha) = H$ para alguna $\alpha \in \mathbf{R}$. Los conjuntos

$$\{u \in V \ | l(u) < k\} \qquad \{u \in V \ | l(u) > k\}$$

$$\{u \in V \ | l(u) \leq k\} \qquad \{u \in V \ | l(u) \geq k\}$$

donde $k \in \mathbf{R}$, son llamados **semi-espacios** *abiertos* o *cerrados* respectivamente acotados por $H$.

Un **espacio vectorial topológico** es un espacio vectorial $V$ con una topología que hace continuas a las operaciones:

$$(u, v) \longrightarrow u + v$$

$$(\lambda, u) \longrightarrow \lambda u.$$

Sea $V$ un espacio vectorial topológico y $H$ un hiperplano afín con ecuación $l(u) = \alpha$ donde $l$ es una función lineal distinta de cero sobre $V$ y $\alpha \in \mathbf{R}$. Se puede probar que $H$ es topológicamente cerrado si y sólo si $l$ es continua ([Bre] Proposición 1.5). Con estas condiciones los semiespacios *cerrados* (*abiertos*) serán *cerrados* (*abiertos*) en sentido topológico.

En un espacio vectorial topológico la cerradura de un conjunto convexo es convexo y el interior de un conjunto convexo es convexo (posiblemente el vacío) [V] Teorema 2.23.

Si $A$ es un subespacio de $V$, la intersección de todos los subconjuntos cerrados convexos que contienen a $A$ es el más pequeño subconjunto cerrado convexo que contiene a $A$. Lo denotaremos $\overline{co}\ A$ y lo llamaremos la **envolvente convexa cerrada de** $A$.

**1.1.5 Proposición**. *La cerradura de la envolvente convexa de $A$ coincide con la envolvente convexa cerrada de $A$.*

**Demostración.**

Sea $U$ la intersección de todos los conjuntos convexos cerrados que contienen a $A$, entonces $U$ es un conjunto convexo y cerrado que contiene a $A$ luego $A \subset co\ A \subset U$, por lo tanto $\overline{co\ A} \subset U$ . Ahora, por definición de $U$, tenemos que $U \subset \overline{co\ A}$ ya que $\overline{co\ A}$ es un convexo y cerrado que contienen a $A$. ■

**1.1.6 Observación.** *$\overline{co}\ A$ no es la envolvente convexa de la cerradura. Por ejemplo, sea $A$ la gráfica de la función $\frac{1}{x^2}$ con $x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, entonces la envolvente convexa será el semiplano superior abierto, mientras que la cerradura de la envolvente convexa será el semiplano superior cerrado.*

**Figura 1.4:** $A = \bar{A} = \left\{(x, y)\,; x \neq 0, y = \frac{1}{x^2}\right\}$ $\qquad$ $co\ A = co\ \bar{A}$.

Este ejemplo prueba que $\overline{co}\ A \not\subseteq co\ \bar{A}$ . Observemos que $co\ \bar{A} \subset \overline{co}\ A$, ya que $\bar{A}$ se puede ver como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a $A$, y $\overline{co}\ A$ es la intersección de solo los conjuntos cerrados y convexos que contienen a $A$, de donde $\bar{A} \subset \overline{co}\ A$, y como $\overline{co}\ A$ es convexo se tiene que $co\ \bar{A} \subset \overline{co}\ A$.

**1.1.7 Definición.** *Sea $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$ decimos que $p$ es una función* ***sub-lineal*** *de $V$ en $\mathbf{R}$ si para todo $u, v \in V$, y $\lambda > 0$ se satisface:*

$$p(\lambda u) = \lambda p(u), \tag{1.1.1}$$

$$p(u + v) \leq p(u) + p(v), \tag{1.1.2}$$

Es obvio que toda función lineal es sublineal, pero la función valor absoluto es sublineal y no es lineal.

Antes de ver la forma analítica del Teorema de **Hahn-Banach** recordemos el **Lema de Zorn**.

**1.1.8 Definición.** *Un conjunto $P$ con una relación binaria $\leq$ se llama* ***parcialmente ordenado*** *si satisface:*

(*i*) $a \leq a$ *para todo* $a \in P$,
(*ii*) $a \leq b$ *y* $b \leq c$ *entonces* $a \leq c$, $a, b, c \in P$
(*iii*) Si $a \leq b$ *y* $b \leq a$ *se tiene que* $a = b$, $a, b \in P$.

*$Q$ un subconjunto de $P$ se llama* ***totalmente ordenado*** *si para todo $a, b \in Q$ ocurre $a \leq b$ ó bien $b \leq a$.*

*Sea $Q \subset P$; $c \in P$ se llama* ***cota superior*** *de $Q$ si $c \geq a$ para todo $a \in A$; $m \in Q$ se llama* ***elemento maximal*** *de $Q$ si $m \leq x$ con $x \in Q$ implica que $x = m$.*

*$P$ es* ***inductivo*** *si todo subconjunto totalmente ordenado de $P$ tiene cota superior.*

**1.1.9 Lema de Zorn**. *Todo conjunto parcialmente ordenado no vacío e inductivo tiene un elemento maximal.*

**1.1.10 Teorema de Hahn – Banach.** *Sea $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$ y $V_0 \subset V$ subespacio vectorial; sea $p$ una función sublineal definida en $V$, y $f_0 : V_0 \longrightarrow \mathbf{R}$ una función lineal tal que:*

$$f_0(v) \leq p(v) \qquad \textit{para todo } v \in V_0.$$

*Entonces existe $f : V \longrightarrow \mathbf{R}$ función lineal tal que*

$$f(v) = f_0(v) \qquad \textit{para todo } v \in V_0 \tag{1.1.3}$$

$$y \qquad f(v) \leq p(v) \qquad \textit{para todo } v \in V.$$

**Demostración.**

**Sea $P = \{\mu : V_\mu \longrightarrow \mathbf{R} \mid V_0 \subset V_\mu \subset V,\ \mu$ es lineal, $\mu|_{V_0} = f_0$ y $\mu(v) \leq p(v)$ para todo $v \in V_\mu\}$. Le damos a $P$ la relación de orden: $\mu_1 \leq \mu_2 \Leftrightarrow V_{\mu_1} \subset V_{\mu_2}$ y $\mu_2|_{V_{\mu_1}} = \mu_1$.**

**Este es un orden parcial. $P$ no es vacío, ya que $f_0 \in P$. Ahora veamos que $P$ es inductivo: Sea $Q = \{\mu_i \mid i \in I\}$ con $Q \subset P$, totalmente ordenado entonces definamos a $\widetilde{\mu}: \bigcup_{i \in I} V_{\mu_i} \longrightarrow \mathbf{R}$ por $\widetilde{\mu}|_{V_{\mu_i}} = \mu_i$. $\widetilde{\mu} \in P$ y es cota superior de $Q$. Por el Lema de Zorn existe un elemento maximal $m : V_m \longrightarrow \mathbf{R}$, en $P$.**

**Ahora veremos que $V_m = V$; sí suponemos que existe $v_0 \in V \backslash V_m$, construyamos una función $\bar{m}$ de la siguiente manera:**

$\bar{m}: \mathbf{R}v_0 \oplus V_m \to \mathbf{R}; \qquad \bar{m}(\alpha v_0 + v) = \alpha\gamma_0 + m(v)$.

Ahora buscaremos $\gamma_0$ tal que:
$\alpha\gamma_0 + m(v) \leq p(\alpha v_0 + v) \qquad$ para todo $\alpha \in \mathbf{R}$ y $v \in V_m$
o equivalentemente si $\alpha > 0$

$$\gamma_0 \leq p\left(v_0 + \frac{v}{\alpha}\right) - m\left(\frac{v}{\alpha}\right) \qquad \text{para todo } \alpha > 0 \quad \text{y} \quad v \in V_m \tag{1.1.4}$$

si $\alpha < 0$;

$$\gamma_0 \geq -p\left(-v_0 - \frac{v}{\alpha}\right) + m\left(-\frac{v}{\alpha}\right) \quad \text{para todo } \alpha < 0 \quad \text{y} \quad v \in V_m. \tag{1.1.5}$$

Entonces queremos asegurar que siempre existe $\gamma_0$ que satisface (1.1.4) y(1.1.5) .

Dados $y_1, y_2 \in V_m$ se tiene que para todo $z \in V$,

$$m(y_2) - m(y_1) \leq p(y_2 - y_1) = p((y_2 + z) - (y_1 + z)) \leq p(y_2 + z) + p(-y_1 - z)$$

y, por tanto,

$$-p(-y_1 - z) - m(y_1) \leq -m(y_2) + p(y_2 + z).$$

Sea
$$c_1 = \sup_{y_1} \left[-p(-y_1 - z) - m(y_1)\right]$$
$$c_2 = \inf_{y_2} \left[-m(y_2) + p(y_2 + z)\right]$$
por ser $y_1$ y $y_2$ arbitrarios $c_2 \geq c_1$ y podemos escoger $c_1 \leq \gamma_0 \leq c_2$.

Y así llegamos a una contradicción de que $m$ sea elemento maximal, por lo tanto $V_m = V$. ■

**1.1.11 Corolario.** *Sea $V$ un espacio vectorial normado, y $G$ un subespacio vectorial de $V$, $l$ una funcional lineal y continua sobre $G$, con norma:*

$$\|l\|_* = \sup_{\substack{v \in G \\ \|v\| \leq 1}} l(v).$$

*Entonces existe una funcional lineal y continua $f$ que extiende a $l$ y tal que:*

$$\|f\|_* = \|l\|_* .$$

**Demostración.**

Aplicar el Teorema de Hahn-Banach con $p(v) = \|l\|_* \|v\|$ . La continuidad de $f$, se sigue de que $\|f\|_* = \|l\|_*$ lo que implica que $f$ es un operador acotado y por lo tanto continuo. ∎

Ahora veremos la versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach.

Supondremos de aquí en adelante que $V$ es un espacio vectorial normado.

**Lema.** (Funcional de **Minkowski** de un convexo).- Sea $C \subset V$ un convexo abierto con $0 \in C$. Para todo $v \in V$ se define:

$$p(v) = \inf\left\{\alpha > 0 \;\middle|\; \frac{v}{\alpha} \in C\right\}$$

( Se dice que $p$ es la **funcional de Minkowski** de $C$ ). Entonces $p$ cumple (1.1.1), (1.1.2) y

$$\text{existe } r \text{ tal que} \quad 0 \leq p(v) \leq \frac{1}{r}\|v\| \quad \text{para todo } v \in V \tag{1.1.6}$$

$$C = \{v \in V \mid p(v) < 1\} \tag{1.1.7}$$

**Demostración.**

La propiedad (1.1.1) es evidente.

Demostraremos primero (1.1.6); sea $r > 0$ tal que $B(0, r) \subset C$; es claro que $\frac{rv}{\|v\|} \in C$ por lo tanto $p(v) \leq \frac{1}{r}\|v\|$ para todo $v \in V$.

Ahora demostraremos (1.1.7). Supongamos que $v \in C$. Como $C$ es abierto, $(1+\varepsilon)v \in C$ con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño; así $p(v) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$.

Inversamente, si $p(v) < 1$, existe $0 < \alpha < 1$ tal que $\alpha^{-1}v \in C$ y así $v = \alpha(\alpha^{-1}v) + (1-\alpha)0 \in C$.

Y para finalizar demostraremos (1.1.2); sean $u$ , $v$ elementos de $V$ y sea $\varepsilon > 0$ de (1.1.1) y (1.1.7) se sabe que $\frac{u}{p(u)+\varepsilon} \in C$ y $\frac{v}{p(v)+\varepsilon} \in C$. Y por ser $C$ convexo: $\frac{tu}{p(u)+\varepsilon} + \frac{(1-t)v}{p(v)+\varepsilon} \in C$ con $0 \leq t \leq 1$. Ahora para $t = \frac{p(u)+\varepsilon}{p(u)+p(v)+2\varepsilon}$, obtenemos que: $\frac{u+v}{p(u)+p(v)+2\varepsilon} \in C$

entonces $p(u+v) < p(u) + p(v) + 2\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Y haciendo $\varepsilon \longrightarrow 0$ se obtiene (1.1.2). ■

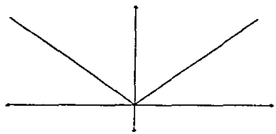


Figura 1.5: La funcional de *Minkowsky* aplicada al intervalo $C = (-1, 1)$.

Decimos que un hiperplano afín cerrado $H$ **separa** (**separa estrictamente**) a dos conjuntos $A$ y $B$ si uno de los semiespacios cerrados (abiertos) determinados por $H$ contiene a uno de ellos y el otro semiespacio al otro. Escrito analíticamente; si $l\,(u) = \alpha$ es la ecuación de $H$, entonces;

$$l\,(u) \leq \alpha, \quad \text{para todo } u \in A, \qquad l\,(u) \geq \alpha, \quad \forall u \in B$$

$$(l\,(u) < \alpha, \quad \text{para todo } u \in A, \qquad l\,(u) > \alpha, \quad \forall u \in B)\,.$$

**1.1.12 Lema**. *Sea $C \subset V$ convexo abierto, no vacío y sea $v_0 \in V$ con $v_0 \notin C$. Entonces existe un hiperplano afín cerrado $H$ que separa $\{v_0\}$ de $C$.*

**Demostración.**

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $0 \in C$. Sea $p_C$ la funcional de **Minkowsky** de $C$ . Consideramos $G = \mathbf{R}v_0$ y la función lineal $g$ definida en $G$ por:

$$g(tv_0) = t, \qquad t \in \mathbf{R}$$

Si $t < 0$ es fácil ver que $g(tv_0) = t \leq p_C(tv_0)$ y si $t > 0$, sabemos que $1 \leq p_C(v_0)$ entonces $g(tv_0) = t \leq tp_C(v_0) = p_C(tv_0)$ por lo tanto $g(v) \leq p_C(v)$ para todo $v \in G$.

Por el teorema de **Hahn-Banach** existe una función lineal $f$ sobre $V$ que extiende a $g$, tal que

$$f(v) \le p_C(v) \quad \text{para todo } v \in V$$

En particular se tiene que $f(v_0) = 1$ y $f(v) < 1$ para todo $v \in C$, por lo que $v_0$ y $C$ quedan separados por el hiperplano que determina $f = 1$. ■

**1.1.13 Teorema.** *Sea $V$ un espacio vectorial normado, $A$ un conjunto abierto convexo no vacío, $B$ un conjunto convexo no vacío que no intersecta a $A$. Entonces existe un hiperplano cerrado afín que separa a $A$ y $B$.*

**Demostración.**

Hacemos $C = A - B = \{a - b \in V : a \in A,\ b \in B\}$. Entonces $C$ es convexo y es abierto ya que $C = \bigcup_{y \in B} (A - y)$; como $A$ y $B$ son ajenos $0 \notin C$. Por el lema anterior existe $f$ lineal y continua tal que $f(v) < 0$ para todo $v \in C$ es decir $f(x) < f(y)$ para todo $x \in A$ y $y \in B$.

Ahora tomamos $\alpha \in \mathbf{R}$ tal que

$$\sup_{x \in A} f(x) \le \alpha \le \inf_{y \in B} f(y)$$

y entonces el hiperplano de ecuación $f = \alpha$ separa a $A$ y $B$. ■

**1.1.14 Teorema** *(**Hahn-Banach**, forma geométrica). Sea $V$ un espacio vectorial normado, $A$ y $B$ dos conjuntos convexos, no vacíos y disjuntos. Supongamos que $A$ es cerrado y $B$ es compacto. Entonces existe un hiperplano cerrado que separa estrictamente a $A$ y $B$.*

**Demostración.**

Para $\varepsilon > 0$ sean $A_\varepsilon = A + B(0, \varepsilon)$ y $B_\varepsilon = B + B(0, \varepsilon)$, de forma que $A_\varepsilon$ y $B_\varepsilon$ son convexos, abiertos y no vacíos. Además, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, $A_\varepsilon$ y $B_\varepsilon$ son disjuntos (en caso contrario, se podrían encontrar sucesiones $\varepsilon_n \to 0$, $x_n \in A$ e $y_n \in B$ tales que $\|x_n - y_n\| < 2\varepsilon_n$; y se podría extraer una subsucesión $y_{n_i} \to y \in A \cap B$). Por el teorema anterior existe un hiperplano $f = \alpha$ que separa a $A_\varepsilon$ y $B_\varepsilon$. Entonces tenemos:

$$f(x + \varepsilon z) \le \alpha \le f(y + \varepsilon z) \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad \forall z \in B(0,1),$$

de donde resulta que

$$f(x) - \varepsilon \|f\| \leq \alpha \leq f(y) + \varepsilon \|f\|, \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B,$$

como $\|f\| \neq 0$ entonces $f = \alpha$ separa estrictamente $A$ y $B$. ■

**1.1.15 Definición**. *Sea $A$ un subconjunto de $V$ y $H$ un hiperplano afín cerrado que contiene al menos un punto $u \in A$, tal que $A$ está totalmente contenido en uno de los semiespacios determinados por $H$; diremos que $H$ es un* ***plano soporte*** *y $u$ un* ***punto soporte de*** *$A$.*

Entonces:

**1.1.16 Corolario**. *Sea $V$ un espacio vectorial normado y $A$ un conjunto convexo con $int(A) \neq \emptyset$ . Entonces cualquier punto frontera de $A$ es un punto soporte de $A$.*

**Demostración.**

Aplicar el Teorema (1.1.14); tomando al punto soporte como el conjunto convexo compacto y a $int(A)$ como el otro conjunto convexo. ■

**1.1.17 Corolario**. *En un espacio vectorial normado $V$, cualquier conjunto convexo cerrado es la intersección de semiespacios cerrados que lo contengan.*

Todos estos resultados tienen una gran importancia dentro del análisis, en especial ayuda a visulizar diversos aspectos de la teoría de la dualidad.

Si $V$ es un espacio vectorial normado, el **Teorema** de **Hahn-Banach** nos garantiza la existencia de una funcional lineal distinta de cero sobre $V$; es suficiente tomar dos puntos $u, v$ de $V$, y separarlos por un hiperplano cerrado afín $H$ con ecuación $l^{-1}(\alpha)$, la función $l : V \rightarrow \mathbf{R}$ es continua ya que $H$ es cerrado y cumple que $l(v) \neq l(u)$ por lo que $l \neq 0$. El espacio vectorial de todas las funcionales lineales en $V$ denotado por $V^*$ es llamado **el dual de** $V$ . Los elementos de $V^*$ serán denotados por $v^*$ y $\langle v, v^* \rangle$ denotará el valor de la funcional $v^* \in V^*$ en $v$.

# §1.2 Convexidad y semi-continuidad

**Funciones Convexas.**

$V$ denotará como antes un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$ y las funciones descritas tendrán como dominio a $A \subset V$ y como codominio a $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Sea $A$ un subespacio convexo de $V$, y $F$ una función de $A$ en $\bar{\mathbf{R}}$. Diremos que $F$ es **convexa** si para toda $u, v \in A$:

$$F(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda F(u) + (1-\lambda)F(v) \quad \text{con } \lambda \in [0,1] \tag{1.2.1}$$

siempre y cuando la suma del lado derecho tenga sentido (es decir, excepto cuando $F(u) = -F(v) = \pm\infty$ ).

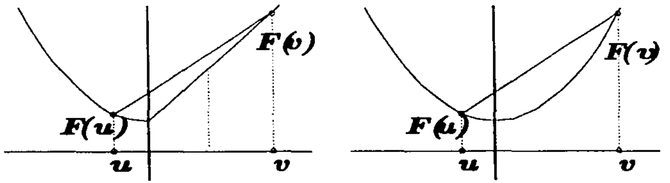



Figura 1.6: Representación gráfica de una función *convexa*

**1.2.1 Proposición**. *Si $F$ es convexa entonces para cualquier conjunto finito $u_1, u_2, ..., u_n$ de puntos en $V$ y para cualquier familia $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de números reales no negativos cuya suma es la unidad se tiene que:*

$$F\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F(u_i)$$

*siempre y cuando la suma del lado derecho esté bien definida.*

**Demostración.**

Por inducción sobre $n$, para $n = 2$ haciendo $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ tenemos exactamente la definición, por lo tanto suponemos válido para $n = k$ y demostraremos para $n = k + 1$.

Existe un $\lambda_j \neq 1$ y entonces

$$F\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i u_i\right) = F\left(\lambda_j u_j + (1-\lambda_j)\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k+1} \frac{\lambda_i u_i}{1-\lambda_j}\right)$$
$$\leq \lambda_j F(u_j) + (1-\lambda_j) F\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k+1} \frac{\lambda_i u_i}{1-\lambda_j}\right)$$

y por hipótesis de inducción tenemos que:

$$(1-\lambda_j) F\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k+1} \frac{\lambda_i u_i}{1-\lambda_j}\right) \leq (1-\lambda_j)\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k+1} \frac{\lambda_i F(u_i)}{1-\lambda_j} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k+1} \lambda_i F(u_i)$$

por lo tanto

$$F\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i u_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i F(u_i). \blacksquare$$

Es fácil ver que, si $F : V \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$ es convexa, los conjuntos

$$\{u \mid F(u) \leq a\} \quad \text{y} \quad \{u \mid F(u) < a\} \tag{1.2.2}$$

con $a \in \bar{\mathbf{R}}$, son conjuntos convexos de $V$. El inverso es falso.

Si $F$ es convexa y $G : \bar{\mathbf{R}} \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$ es una función creciente entonces $G \circ F : V \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$ tendrá secciones convexas pero no será convexa en general. Un ejemplo seria si $F(x) = x$ y $G(x) = x^3$, la composición sería $x^3$ la cual sólo tiene secciones convexas.

Sea $F : V \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$, denotaremos a:

$$dom\ F = \{u \mid F(u) < \infty\} \tag{1.2.3}$$

el **dominio efectivo de** $F$ el cual es convexo si $F$ es convexa.

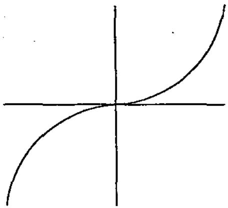


Figura 1.7: La gráfica de la función $x^3$

Permitiremos el valor de $+\infty$ por lo siguiente. Si $F$ es un mapeo de $A \subset V$ en $\mathbf{R}$, le podemos asociar $\bar{F}$ definida en $V$ como:

$$\bar{F}(u) = \begin{cases} F(u) & \text{si} \quad u \in A \\ +\infty & \text{si} \quad u \notin A. \end{cases} \tag{1.2.4}$$

Entonces $\bar{F}$ es convexa si y sólo si $A \subset V$ es convexo y $F$ es convexa.

Para $A \subset V$ definimos la función **característica** $\chi_A$ de $A$ como:

$$\chi_A(u) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad u \in A \\ +\infty & \text{si} \quad u \notin A. \end{cases} \tag{1.2.5}$$

$A$ es convexo si y sólo si $\chi_A$ es una función convexa. Entonces el estudio de conjuntos convexos se reduce al estudio de funciones convexas.

**1.2.2 Definición.** *La* ***epigráfica*** *de una función $f : V \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$ es el conjunto:*

$$epi\ f = \{(u, a) \in V \times \mathbf{R} \mid f(u) \leq a\} \tag{1.2.6}$$

Es decir es el conjunto de puntos de $V \times \mathbf{R}$ que están arriba de la gráfica de $f$. La proyección de *epi* $f$ en $V$ da como resultado el *dom* $f$.


Figura 1.8: La *epigráfica* de una función.

**1.2.3 Proposición**. *Una función $f$ es convexa si y sólo si su epigráfica es convexa.*

**Demostración.**

Sea $f$ convexa tomamos $(u, a)$ , $(u, b)$ en la *epi* $f$, entonces por definición $f(u) \leq a < +\infty$ y $f(v) \leq b < +\infty$ , si $0 \leq \lambda \leq 1$ tenemos:

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v) \leq \lambda a + (1-\lambda)b$$

por lo tanto $\lambda(u, a) + (1-\lambda)(v, b) \in$ *epi* $f$.

Inversamente supongamos que *epi* $f$ es convexa. La proyección sobre $V$ también es convexa, entonces sean $u$ y $v$ en *dom* $f$, $a \geq f(u)$, $b \geq f(v)$. Por hipótesis, $\lambda(u, a) + (1-\lambda)(v, b) \in$ *epi* $f$ y esto se cumple para todo $\lambda \in [0, 1]$ por lo tanto:

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda a + (1-\lambda)b$$

Si $f(u)$ y $f(v)$ son finitos, es suficiente tomar $a = f(u)$ y $b = f(v)$. Si $f(u)$ o $f(v)$ es igual a $-\infty$ hacemos tender a $a$ ó $b$ a $-\infty$. ■

**1.2.4 Proposición.**

*(i) Si $F : V \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$ es convexa y $\lambda$ un número real positivo, entonces $\lambda F$ es convexa.*

*(ii) Si $F$ y $G$ son funciones convexas de $V$ en $\bar{\mathbf{R}}$, entonces $F + G$ es convexa. Definimos $(F+G)(u) = +\infty$ si $F(u) = -G(u) = \pm\infty$.*

*(iii) Si $(F_i)_{i \in I}$ es una familia de funciones convexas de $V$ en $\bar{\mathbf{R}}$, entonces $F(u) = \sup_{i \in I} \{F_i(u)\}$ es convexa.*

**Demostración.**

Por ser $F$ convexa y $\lambda$ un número real positivo tenemos que:

$$\lambda F(\mu u + (1-\mu)v) \leq \lambda\left(\mu F(u) + (1-\mu)F(v)\right) = \mu\lambda F(u) + (1-\mu)\lambda F(v),$$

es decir $\lambda F$ es convexa.

Para demostrar la segunda afirmación observemos que:

$$(F+G)(\mu u + (1-\mu)v) = F(\mu u + (1-\mu)v) + G(\mu u + (1-\mu)v),$$

y por ser $F$ y $G$ convexas:

$$\begin{aligned}(F+G)(\mu u + (1-\mu)v) &\leq \mu F(u) + (1-\mu)F(v) + \mu G(u) + (1-\mu)G(v)\\ &= \mu(F+G)(u) + (1-\mu)(F+G)(v),\end{aligned}$$

de donde $F+G$ es convexa.

Para la última afirmación tenemos que para cada $F_i$:

$$\begin{aligned}F_i(\mu u + (1-\mu)v) &\leq \mu F_i(u) + (1-\mu)F_i(v)\\ &\leq \mu \sup_{i\in I}\{F_i(u)\} + (1-\mu)\sup_{i\in I}\{F_i(v)\}\\ &\leq \mu F(u) + (1-\mu)F(v).\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}F(\mu u + (1-\mu)v) &= \sup_{i\in I}\{F_i(\mu u + (1-\mu)v)\}\\ &\leq \mu F(u) + (1-\mu)F(v),\end{aligned}$$

es decir $F$ es convexa. ■

**1.2.5 Definición.** *Sea $A$ un conjunto convexo de $V$ y $F$ un mapeo de $V$ en $\mathbb{R}$. $F$ es* ***estrictamente convexa*** *si para todo $u, v \in A, u \neq v$ y $\lambda \in ]0,1[$ se tiene que:*

$$F(\lambda u + (1-\lambda)v) < \lambda F(u) + (1-\lambda)F(v)$$

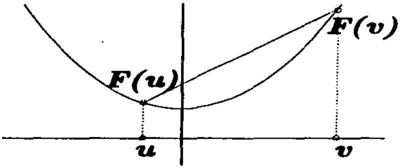



Figura 1.9: Gráfica de una función estrictamente convexa.

### Funciones semi-continuas inferiormente

Supondremos ahora que $V$ es un espacio topológico.

**1.2.6 Definición.** *Diremos que una función $F : V \to \bar{\mathbf{R}}$ es* ***semicontinua inferiormente*** *en $a \in V$* (**s.c.i.**)*, si para todo $\lambda < F(a)$ existe una vecindad $W$ de $a$ tal que $\lambda < F(W)$. Y diremos que $F$ es* **s.c.i.** *en $V$ si es* **s.c.i.** *en todo punto de $V$.*

**1.2.7 Observación.** *Una función $F : V \to \bar{\mathbf{R}}$ es s.c.i. en $V$, es equivalente a decir que para todo $\lambda \in \bar{\mathbf{R}}$, el conjunto:*

$$\{u \in V \mid F(u) \leq \lambda\} \qquad \textit{es cerrado};$$

*o bien que para todo $\lambda \in \bar{\mathbf{R}}$ el conjunto*

$$\{u \in V \mid F(u) > \lambda\} \qquad \textit{es abierto.} \tag{1.2.7}$$

También diremos que $F : V \to \bar{\mathbf{R}}$ es **semicontinua superiormente** (**s.c.s.**) si $-F$ es *s.c.i.*

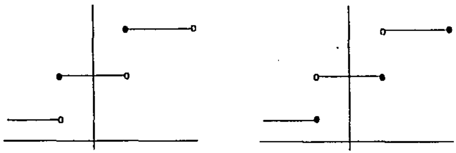


**Figura 1.10:** Una función *semicontinua superiormente* y otra *semicontinua inferiormente*.

**Ejemplos:**

1.- Sea $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida como:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0, \\ x^{-n} \text{ si } x \neq 0. \end{cases}$$

Si $n$ par, $f_n$ es *s.c.i.* en 0, y si $n$ es impar no es *s.c.s.* ni *s.c.i.* en 0.

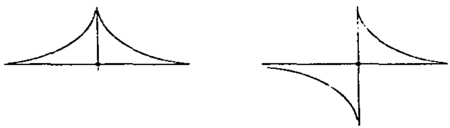


**Figura 1.11:** Gráficas para $n$ par y $n$ impar respectivamente.

2.- Sea $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \text{ es racional,} \\ 1 \text{ si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

La función $g$ es *s.c.i.* en los racionales y es *s.c.s.* en los irracionales, pero en $\mathbf{R}$ no conserva ninguna de estas propiedades.

3.- La función característica $\chi_A$ de un conjunto $A \subset V$, es *s.c.i.* si y sólo si $A$ es cerrado y *s.c.s.* si y sólo si $A$ es abierto.

**1.2.8 Definición.** *Sea $W_u$ el conjunto de todas las vecindades de $u$ entonces definimos a:*

$$\lim_{v \to u} \inf \ F(v) = \inf_{U \in W_u} \ \sup_{x \in U} \ F(x)$$

*de la misma manera*

$$\lim_{v \to u} \sup \ F(v) = \sup_{U \in W_u} \ \inf_{x \in U} \ F(x).$$

**1.2.9 Proposición.** *$F$ es s.c.i. en $a \in V$ si y sólo si:*

$$F(a) \leq \lim_{u \to a} \inf F(u).$$

**Demostración.**

Si $F$ es *s.c.i.* en $a$, entonces dado $\lambda < F(a)$; existe una vecindad $W$ de $a$ tal que $\lambda \leq F(W)$, y tenemos también que:

$$\lambda \leq \overline{F(W)}, \qquad \text{de donde} \qquad \lambda \leq \lim_{u \to a} \ \inf F(u).$$

Como esto se tiene para todo $\lambda < F(a)$, obtenemos que:

$$F(a) \leq \lim_{u \to a} \ \inf F(u).$$

Recíprocamente, suponemos que $F(a) \leq \lim_{u \to a} \inf F(u)$. Para todo $\lambda < F(a)$, existe una vecindad $W$ de $a$ tal que $\lambda < F(a)$, es decir $F$ es *s.c.i.* en $a$. ■

**1.2.10 Proposición.** *Una función $F : V \to \bar{\mathbf{R}}$ es s.c.i. si y sólo si su epigráfica es cerrada.*

**Demostración.**

Demostraremos que el complemento de la epigráfica es abierto. Si $F$ es *s.c.i.* en $V$, entonces para todo $(u,\lambda)$ tal que $\lambda < F(u)$, es decir, $(u,\lambda) \in (epi\ F)^c$; y para todo $\mu$ tal que $\lambda < \mu < F(u)$, tenemos que existe una vecindad $W$ de $u$ con la propiedad de que $\mu < F(v)$ para todo $v \in W$. De donde se sigue que existe una vecindad de $(u,\lambda)$, $W \times [-\infty, \mu[$ contenida en $(epi\ F)^c$ de donde $(epi\ F)^c$ es abierto.

Inversamente, definamos a $\varphi : V \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ como $\varphi(u,a) = F(u) - a$, y $T_r(u,a) = (u, a+r)$. Entonces para todo $r \in \mathbf{R}$ ,el conjunto:

$$\begin{aligned}\{(u,a) \mid \varphi(u,a) \le r\} &= \{(u,a) \mid F(u) - a \le r\} \\ &= \{(u,a) \mid F(u) \le r + a\} \\ &= \{(u,a) \mid (u, r+a) \in epi\ \ F\} \\ &= T_{-r}(epi\ F)\end{aligned}$$

lo cuál implica que si la *epi* $F$ es cerrada entonces $\varphi$ es *s.c.i.*, es decir, que $F$ es *s.c.i.* ■

**1.2.11 Proposición.**

*(i) Si $F : V \to \bar{\mathbf{R}}$ es s.c.i. y $\lambda$ un número real positivo, entonces $\lambda F$ es s.c.i.*

*(ii) Si $F$ y $G$ son funciones s.c.i. de $V$ en $\bar{\mathbf{R}}$, entonces $F+G$ es s.c.i. Definimos $(F+G)(u) = +\infty$ si $F(u) = -G(u) = \pm\infty$.*

*(iii) Si $(F_i)_{i\in I}$ es una familia de funciones s.c.i. de $V$ en $\bar{\mathbf{R}}$, entonces $F(u) = \sup\limits_{i\in I}\{F_i(u)\}$ es s.c.i.*

**Demostración.**

$(i)$ Tenemos que demostrar que el conjunto $\{u \mid \lambda F(u) \le k\}$ es cerrado para toda $k \in \mathbf{R}$, por ser $\lambda > 0$, entonces es equivalente a demostrar que $\left\{u \,\middle|\, F(u) \le \frac{k}{\lambda}\right\}$ es cerrado para toda $k$, y haciendo $r = \frac{k}{\lambda}$, obtenemos la afirmación ya que $F$ es *s.c.i.*

$(ii)$ Sean $F$ y $G$ *s.c.i.*, y sea $\lambda < F(u) + G(u)$, podemos escribir $\lambda = \alpha + \beta$, con $\alpha < F(u)$ y $\beta < G(u)$. Entonces existen vecindades $U$, $W$ de $u$, tal que $\alpha < F(\bar{v})$, y $\beta < G(v)$ para toda $\bar{v} \in U$ y toda $v \in W$. Entonces $\lambda = \alpha + \beta < (F+G)(v)$ para todo $v \in U \cap W$, de donde $F+G$ es *s.c.i.*

Para demostrar $(iii)$, veremos que *epi* $F = \bigcap\limits_{i\in I}$ *epi* $F_i$. Sabemos que *epi* $F \subset$ *epi* $F_i$ para todo $i \in I$ por lo tanto *epi* $F \subset \bigcap\limits_{i\in I}$ *epi* $F_i$. Ahora sea $(u,a) \in$

$\bigcap_{i\in I}$ *epi* $F_i$ por definición $F_i(u) \leq a$ para todo $i \in I$, luego, $F(u) = \sup_{i\in I} \{F_i(u)\} \leq a$, y entonces $(u,a) \in$ *epi* $F$. ■

**1.2.12 Definición.** *La* ***regularización s.c.i. de*** $F : V \to \bar{\mathbb{R}}$ *es la mayor función* $\bar{F} : V \to \bar{\mathbb{R}}$ *s.c.i. tal que* $\bar{F}(u) \leq F(u)$ *para todo* $u \in V$.

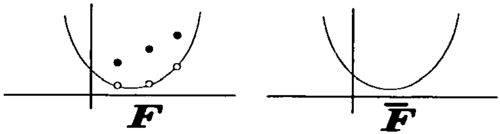



Figura 1.12: Una función $F$ con su regularización s.c.i. $\bar{F}$

**1.2.13 Lema.** *Sea* $F : V \to \bar{\mathbb{R}}$, *entonces el conjunto* $\overline{epi\ F}$ *es una epigráfica.*

**Demostración.**

Sea $(u,a) \in \overline{epi\ F}$ existe una sucesión $(u_n, a_n) \in$ *epi* $F$ que converge a $(u,a)$. Sea $b > a$, entonces para alguna $n$, tenemos que $a_n \leq b$, luego $F(u_n) \leq a_n \leq b$ de donde $(u_n, b) \in$ *epi* $F$ y pasando al límite $(u,b) \in \overline{epi\ F}$.

Es decir, si $(u,a) \in \overline{epi\ F}$ entonces $\{u\} \times [a, \infty) \subset \overline{epi\ F}$ . Sea $G(u) = \inf \left\{a \in [-\infty, \infty] \ : \ (u,a) \in \overline{epi\ F}\right\}$. Entonces *epi* $G = \overline{epi\ F}$. ■

**1.2.14 Corolario.** *Sea* $F : V \to \bar{\mathbb{R}}$ *y* $\bar{F}$ *su regularización s.c.i.entonces:*

$$epi\ \bar{F} = \overline{epi\ F}, \tag{1.2.8}$$

**Demostración.**

Como $\bar{F}$ es una función *s.c.i.* menor que $F$, *epi* $\bar{F}$ es un conjunto cerrado y sabemos que *epi* $F \subset$ *epi* $\bar{F}$ por lo tanto $\overline{epi\ F} \subset$ *epi* $\bar{F}$.

Como $\overline{epi\ F}$ es una epigráfica, sea $G$ una función tal que *epi* $G = \overline{epi\ F}$ entonces $G$ es *s.c.i.* y como *epi* $F \subset \overline{epi\ F} =$ *epi* $G$, se sigue que $G \leq F$; pero como $\bar{F}$ es el supremo de todas las funciones *s.c.i.* menores que $F$, $G \leq \bar{F}$ por lo tanto *epi* $F \subset$ *epi* $G = \overline{epi\ F}$ . ■

**1.2.15 Definición.** *$F : V \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$ es* ***débilmente s.c.i.*** *si $F$ es s.c.i. en la topología débil $\sigma(V, V^*)$.*

**1.2.16 Corolario.** *Una función $F$ convexa de un espacio vectorial normado $V$ en $\bar{\mathbf{R}}$ es s.c.i. si y sólo si $F$ es débilmente s.c.i.*

**Demostración.**

La epigráfica de $F$ es un conjunto convexo. Por lo tanto es cerrado si sólo si es débilmente cerrado [Bre], Teorema III.7 ■

Notemos que la convexidad es esencial ya que si $V$ es un espacio vectorial normado de dimensión infinita se sabe que $C = \{v \mid \|v\| = 1\}$, es cerrado en la topología fuerte y no es cerrado en la topología débil $\sigma(V, V^*)$ de hecho su cerradura en $\sigma(V, V^*)$ es $\bar{C} = \{v \mid \|v\| \leq 1\}$.

**1.2.17 Proposición.** *Sea $V$ un espacio vectorial normado. Si $F : V \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$ es una función convexa s.c.i. y toma el valor $-\infty$, entonces no puede tomar ningún valor finito.*

**Demostración.**

Suponemos que existe $\bar{u} \in V$ tal que $F(\bar{u}) \in \mathbf{R}$. Tomemos $\bar{a} \in \mathbf{R}$ con $\bar{a} < F(\bar{u})$, y podemos separa estrictamente a $(\bar{u}, \bar{a})$ de *epi* $F$ por ser un conjunto convexo cerrado. Entonces existe una función lineal continua $l$ distinta de cero de $V$ y $\alpha \in \mathbf{R}$ tal que:

para todo $(u, a) \in epiF$, $\quad l(\bar{u}) + \alpha\bar{a} < l(u) + \alpha a$

como $(\bar{u}, F(\bar{u})) \in epiF$, obtenemos que $l(\bar{u}) + \alpha\bar{a} < l(\bar{u}) + \alpha F(\bar{u})$ es decir, $\alpha(F(\bar{u}) - a) > 0$, por lo tanto $\alpha > 0$.

Podemos fijarnos sólo en los puntos $(u, F(u)) \in$ *epi* $F$, y tenemos que para todo $u \in V$ :

$$l(\bar{u}) + \alpha\bar{a} < l(u) + \alpha F(u)$$

$$\frac{1}{\alpha} l(\bar{u} - u) + \bar{a} < F(u) \tag{1.2.9}$$

y esto es una contradicción ya que el primer miembro siempre es finito y por hipótesis sabemos que $F$ toma el valor de $-\infty$. ■

**Continuidad de funciones convexas.**

De aquí en adelante $V$ denotará un espacio vectorial normado. El estudio de continuidad de las funciones convexas esta basado en el siguiente lema.

**1.2.18 Lema.** *Sea $F$ una función convexa con $F(0) = 0$. Si existe una vecindad $W$ simétrica del origen en la cuál $F$ está acotada por arriba, por una constante $a$ finita, entonces $F$ es continua en* $0$.

**Demostración.**

Sea $\varepsilon \in ]0,1[$. Si $v \in \varepsilon W$, tenemos por convexidad que:

para todo $\frac{v}{\varepsilon} \in W \qquad F(v) = F\left((1-\varepsilon)0 + \varepsilon\frac{v}{\varepsilon}\right) \leq \varepsilon F\left(\frac{v}{\varepsilon}\right) \leq \varepsilon a$

para todo $-\frac{v}{\varepsilon} \in W \quad 0 = F\left(\frac{1}{1+\varepsilon}v + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(\frac{-v}{\varepsilon}\right)\right)$

$$\leq \frac{1}{1+\varepsilon}F(v) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}F\left(\frac{-v}{\varepsilon}\right)$$

es decir para todo $-\frac{v}{\varepsilon} \in W \qquad -\varepsilon a \leq -\varepsilon F\left(\frac{-v}{\varepsilon}\right) \leq F(v)$.

Entonces $|F(v)| \leq \varepsilon a$ para toda $v \in \varepsilon W$. ■

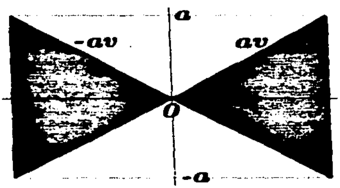



**Figura 1.13:** Por ser $F$ una función *convexa* su gráfica debe estar en la parte sobreada.

**1.2.19 Definición.** *Una función convexa $F$ de $V$ en $\bar{\mathbf{R}}$ es* **propia** *si no toma el valor de $-\infty$ y $F$ no es idénticamente igual a $+\infty$.*

**1.2.20 Proposición.** *Sea $F : V \to \bar{\mathbf{R}}$ una función convexa. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(i) Existe un conjunto abierto no vacío $U$ en el cuál $F$ no es idénticamente $-\infty$ y está acotada por una constante $a < +\infty$.*

*(ii) $F$ es una función propia, y es continua en el interior de su dominio efectivo, $int(dom\ F)$.*

**Demostración.**

Probaremos que $i) \Rightarrow ii)$. La otra implicación es obvia. Sea $u \in U \subset int(dom\ F)$, tal que $F(u) > -\infty$, por el lema anterior $F$ es continua en $u$, y por lo tanto finita en una vecindad de $u$, es decir $F$ es propia. Ahora vamos a demostrar que para todo $v \in int(dom\ F)$ existe una vecindad de $v$ en la cuál $F$ es acotada por arriba. Sea $v \in int(dom\ F)$, existe $\rho > 1$ tal que $w = u + \rho(v - u) \in int(dom\ F)$. La homotecia $h(t) = w - (\ 1 - \frac{1}{\rho})(w - t)$ con centro en $w$ y radio $1 - \frac{1}{\rho}$

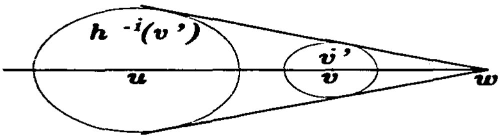



Figura 1.14: Homotecia $h$ con centro en $w$ y radio $1 - \frac{1}{\rho}$

transforma a $u$ en $v$ y a $U$ en una vecindad $h(U)$ abierta de $v$. Sea $v' \in h(U)$ sabemos que:

$$\frac{v' - w}{h^{-1}(v') - w} = 1 - \frac{1}{\rho} \quad \text{es decir} \quad v' = \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) h^{-1}(v') + \frac{w}{\rho}$$

y por convexidad

$$F(v') \leq \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) F(h^{-1}(v')) + \frac{1}{\rho} F(w) \leq \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) a + \frac{1}{\rho} F(w).$$

Entonces con $h(U)$ como vecindad de $v$, $F$ es acotada por arriba y por el lema (1.2.18) $F$ es continua en $h(U)$. ■

**1.2.21 Corolario.** *Cualquier función convexa propia en un espacio de dimensión finita es continua en el interior de su dominio efectivo.*

**Demostración.**

Sea $n$ la dimensión de $V$. Si $int(dom\ F)$ no es vacío, entonces existen $u_1$, $u_2, \ldots u_n$, $u_{n+1}$ afínamente independientes tal que conjunto abierto:

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1, \text{ y } \lambda_i > 0, \text{ para todo } i \right\} \subset int(dom F).$$

Por convexidad tenemos que $F$ está acotada en $W$ por $\max\limits_{1 \leq i \leq n+1} F(u_i)$. ■

### No diferenciabilidad de funciones convexas

Hasta ahora hemos demostrado que toda función convexa en un espacio de dimensión finita es continua en el interior de su dominio efectivo, existen funciones que son estrictamente convexas y no son derivables en el interior de su dominio efectivo, es decir pedir que una función sea estrictamente convexa no implica que la función sea derivable. Un ejemplo es el siguiente:

$$F(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad x \leq \frac{1}{2} \\ x^2 & \text{si} \quad x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad x \in \mathbf{R}.$$

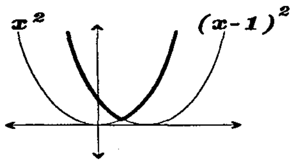



Figura 1.15: La gráfica de una función *estrictamente convexa* no *derivable*.

## §1.3 Funciones polares y dualidad

Sea $V$ un espacio vectorial normado. Una función **afín continua** es del tipo $v \mapsto l(v) + \alpha$, donde $l$ es una función lineal continua sobre $V$ y $\alpha \in \mathbf{R}$.

**1.3.1 Definición.** *El conjunto de funciones $F : V \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$ que son el supremo puntual de una familia de funciones continuas afines es denotado por $\Gamma(V)$. Como las constantes $+\infty$ y $-\infty$ son elementos de $\Gamma(V)$, denotaremos a $\Gamma_0(V) = \Gamma(V) \setminus \{+\infty, -\infty\}$.*

Sabemos que si $F$ es continua y afín entonces $F$ es *s.c.i.* y convexa por lo tanto si $F \in \Gamma(V)$ entonces $F$ es *s.c.i.* y convexa (véase Proposiciones 1.2.4 y 1.2.11).

**1.3.2 Proposición.** *Las siguientes propiedades son equivalentes:*
$(i)$ $F \in \Gamma(V)$
$(ii)$ *$F$ es una función convexa s.c.i. de $V$ en $\bar{\mathbf{R}}$ y si $F$ toma el valor $-\infty$ entonces $F \equiv -\infty$.*

**Demostración.**

Notemos que el supremo puntual del vacío es $-\infty$ y si el conjunto de funciones considerado no es el vacío , $F$ no puede tomar el valor de $-\infty$. Entonces $i) \Rightarrow ii)$.

Ahora suponemos que $F$ es una función convexa *s.c.i.* de $V$ en $\bar{\mathbf{R}}$ y que no toma el valor de $-\infty$. Si $F$ es la constante $+\infty$, es claro que es el supremo de todas las funciones afines continuas de $V$ en $\mathbf{R}$. Tenemos que demostrar que para todo $\bar{u} \in V$, y para toda $\bar{a} < F(\bar{u})$ existe una función $\varphi$ afín continua de $V$ en $\bar{\mathbf{R}}$ tal que $\bar{a} < \varphi(\bar{u})$ y $\varphi(u) < F(u)$ para todo $u \in V$.

Tenemos que *epi* $F$ es un conjunto cerrado y convexo el cuál no contiene al punto $(\bar{u}, \bar{a})$. Entonces por el Teorema de Hahn-Banach (1.1.14) los podemos separar estrictamente con un hiperplano $H$ cuya ecuación es:

$$H = \{(u, a) \in V \times \mathbf{R} \mid l(u) + \alpha a = \beta\} \tag{1.3.1}$$

donde $l$ es una función lineal y continua de $V$ en $\mathbf{R}$, $\alpha$ y $\beta \in \mathbf{R}$ tal que:

$$l(\bar{u}) + \alpha\bar{a} < \beta \tag{1.3.2}$$

$$\text{y para todo } (u, a) \in epiF, \quad l(u) + \alpha a > \beta. \tag{1.3.3}$$

Ahora tenemos dos casos:
$(i)$ $\alpha \neq 0$
$(ii) \alpha = 0$.

Si $\alpha \neq 0$ definimos $\varphi(u) = \frac{1}{\alpha}(\beta - l(u))$ . Entonces por (1.3.2) $\bar{a} < \varphi(\bar{u})$ y si $F(u) < \infty$, como $(u, F(u)) \in$ *epi* $F$, por (1.3.3) , se tiene que $\varphi(u) < F(u)$.

Si $\alpha = 0$ la función $\beta - l(u)$ cumple que es mayor que cero en $\bar{u}$ y menor que cero sobre el *dom* $F$ de modo que $F(\bar{u}) = \infty$. Por el caso anterior podemos construir una función afín continua $\gamma - m(u)$ menor que $F$ . Entonces para toda $c > 0$ $\gamma - m(u) + c(\beta - l(u))$ es una función afín continua menor que $F$, y sólo hay que escoger $c$ suficientemente grande tal que:

$$\gamma - m(\bar{u}) + c(\beta - l(\bar{u})) > \bar{a}. \blacksquare \tag{1.3.4}$$

**1.3.3 Proposición y Definición**. *Sean $F$ y $G$ dos funciones de $V$ en $\bar{\mathbf{R}}$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*$(i)$ $G$ es el supremo puntual de todas las funciones afines, continuas menores que $F$.*

*$(ii)$ $G$ es el supremo puntual de funciones de $\Gamma(V)$ menores que $F$. $G$ será llamada la* **$\Gamma-$regularización de $F$.**

**Demostración.**

Llamaremos a $G_1$ el supremo de todas las funciones afines, continuas menores que $F$; y a $G_2$ el supremo de las funciones de $\Gamma(V)$ menores que $F$. $G_1$ y $G_2$ pertenecen a $\Gamma(V)$, por que $G_1$ es supremo de funciones afines y $G_2$ es supremo de funciones de $\Gamma(V)$ , entonces tenemos que $G_1 \leq G_2$. Y además cualquier función afín continua menor que $G_2$ es una función de $\Gamma(V)$ menor que $F$. Y por definición de también es menor que $G_1$. Entonces hemos llegado a que todas las funciones afines continuas menores que $G_1$ también son menores que $G_2$ e inversamente; pero como son elementos de $\Gamma(V)$, debemos tener que $G_1 \equiv G_2$. ■

En particular si $F \in \Gamma(V)$, entonces $F$ coincide con su $\Gamma-$*regularización*. En general, podemos construir la epigráfica de la $\Gamma-$*regularización*, como la envolvente convexa cerrada de la epigráfica de la función (ver Proposiciones $(1.1.4)y(1.1.5)$).

**1.3.4 Proposición**. *Sea $F : V \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$, y $G$ su $\Gamma-$regularización. Si existe una función afín continua menor que $F$, entonces:*

$$epiG = \bar{co}\ epiF$$

**Demostración.**

Sea $\Phi$ una función afín, continua menor que $F$; entonces *epi* $\Phi$ es un conjunto convexo, cerrado y por ser menor que $F$ tenemos que:

$$epi\ F \subset \bar{co}\ epi\ F \subset epi\ \Phi.$$

Ahora sea $\bar{G}$ tal que *epi* $\bar{G}$ $=\bar{co}$ *epi*$F$; esta función $\bar{G}$ existe gracias al Corolario 1.1.16; entonces tenemos que $\Phi \leq \bar{G} \leq F$ por lo tanto $\bar{G} \in \Gamma(V)$.

Sea $G_1 \leq F$ con $G_1 \in \Gamma(V)$, entonces la *epi* $G_1$ es un conjunto cerrado y convexo que contiene a *epi* $F$, y también contiene a $\bar{co}$ *epi*$F =$ *epi* $\bar{G}$, lo que significa que $G_1 \leq \bar{G}$. Por tanto $\bar{G}$ es la $\Gamma-$regularización de $F$. ■

**Ejemplo:**

Sea $A \subset V$, la $\Gamma-$regularización de su función característica $\chi_A$ es la función característica de la envolvente convexa cerrada de $A$.

Anteriormente definimos $\bar{F}$; como la mayor función $\bar{F} : V \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$, *s.c.i.* tal que $\bar{F}(u) \leq F(u)$ para todo $u \in V$.

Ahora vamos a ver que relación existe entre $F$, $\bar{F}$ y a su $\Gamma-$regularización.

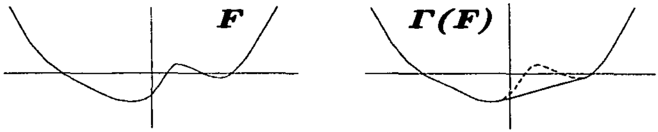



Figura 1.16: Una función $F$ y su $\Gamma-$*regularización*.

**1.3.5 Proposición**. *Sea* $F : V \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$, *y* $G$ *su* $\Gamma-$*regularización, entonces:*
(*i*) $G \leq \bar{F} \leq F$
(*ii*) *Si existe una función afín continua menor que* $F$ *y si* $F$ *es convexa entonces* $\bar{F} = G$.

**Demostración.**

Sabemos que $epi\ F \subset \overline{epi\ F} \subset \overline{co}\ epi\ F$, de donde $ii) \Rightarrow i)$.
Ahora si $F$ es convexa tenemos que $epi\ F = co\ epi\ F$ y entonces $\overline{epi\ F} = \overline{co}\ epi\ F$, es decir, $\bar{F} = G$. ■

**Funciones polares y dualidad de Fenchel**

Si $V$ es un espacio vectorial normado denotamos por $V^*$ a su dual, es decir, $V^*$ es el espacio de la funciones lineales continuas de $V \longrightarrow \mathbf{R}$. La norma de $V^*$ está dada por:

$$\|u^*\|_* = \sup_{\substack{u \in V \\ \|u\| \leq 1}} |u^*(u)| .$$

Denotemos por $\langle u, u^* \rangle = u^*(u)$.
Sea $F : V \longrightarrow \mathbf{R}$, $u^* \in V^*$ y $\alpha \in \mathbf{R}$. Observemos que la función afín $u \longmapsto \langle u, u^* \rangle - \alpha$ es menor o igual que $F$ si y sólo si $\alpha \geq \langle u, u^* \rangle - F(u)$ para todo $u \in V$.
Es decir:

$$\alpha \geq F^*(u^*) \tag{1.3.5}$$

donde

$$F^*(u^*) = \sup_{u \in V} \{\langle u, u^* \rangle - F(u)\} . \tag{1.3.6}$$

**1.3.6 Definición.** *$F : V \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$ , definimos a $F^* : V^* \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$, $F^*(u^*) = \sup_{u \in V} \{\langle u, u^* \rangle - F(u)\}$ , y la llamaremos la función* ***polar*** *ó* ***conjugada*** *de $F$. $F^*$ se llama también la* ***transformada de Legendre-Fenchel de $F$.***

Es claro que (1.3.6) lo podemos restringir a $u$ en *dom* $F$ :

$$F^*(u^*) = \sup_{u \in dom\, F} \{\langle u, u^* \rangle - F(u)\} \qquad (1.3.7)$$

y de aquí es fácil ver que $F^*$ es el supremo puntual de la familia de funciones afines $\varphi : V^* \longrightarrow \mathbf{R}$, $\varphi(u^*) = \langle u, u^* \rangle - F(u)$, para $u \in$ *dom* $F$. Entonces podemos concluir que $F^* \in \Gamma(V^*)$, y en particular que $F^*$ es *s.c.i.* y convexa (aún cuando $F$ no lo sea). Notemos que si $F$ es la constante $+\infty$, *dom* $F = \emptyset$ entonces $F^*$ es la constante $-\infty$. Cuando $V = \mathbf{R}$, y en general el significado geométrico es el siguiente: para saber el valor de $F^*(u^*)$ tomamos una recta $l$ con pendiente $u^*$ y la acercamos hasta que toque a la gráfica de $F$ y las intersección de dicha recta con el eje $y$ será igual a $-F^*(u^*)$.

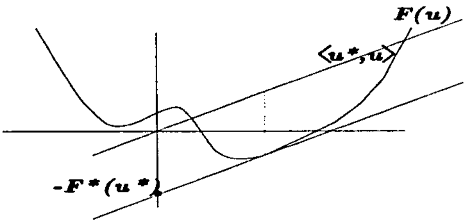



Figura 1.17: Significado geométrico de la función polar.

Ahora veremos algunas propiedades:

**1.3.7 Proposición.**
(*a*) $F^*(0) = -\inf_{u \in V} F(u)$
(*b*) *Si $F \leq G$, entonces $F^* \geq G^*$*

(*c*) $(\inf_{i\in I} F_i)^* = \sup_{i\in I} F_i^*$
$(\sup_{i\in I} F_i)^* \leq \inf_{i\in I} F_i^*$
*para cualquier familia* $(F_i)_{i\in I}$ *funciones de* $V$; .
(*d*) $(\lambda F)^*(u^*) = \lambda F^*\left(\frac{u^*}{\lambda}\right)$
*para toda* $\lambda > 0$
(*e*) $(F+\alpha)^* = F^* - \alpha$
*Para toda* $a \in V$, *denotaremos por* $F_a$ *a la traslación de* $F$, *es decir,* $F_a(v) = F(v-a)$. *Entonces*
(*f*) $(F_a)^*(u^*) = F^*(u^*) + \langle a, u^*\rangle$

**Demostración.**

(*a*) Sabemos que $F^*(0) = \sup_{u\in V}\{-F(u)\} = -\inf_{u\in V} F(u)$.

(*b*) Como $F \leq G$, se sigue que, $\langle u, u^*\rangle - G(u) \leq \langle u, u^*\rangle - F(u)$ tomando el supremo sobre $V$ obtenemos el resultado.

(*c*)
$$\begin{aligned}\sup_{i\in I} F_i^*(u^*) &= \sup_{i\in I}\left\{\sup_{u\in V}\{\langle u, u^*\rangle - F_i(u)\}\right\}\\ &= \sup_{u\in V}\left\{\langle u, u^*\rangle + \sup_{i\in I}\{-F_i(u)\}\right\}\\ &= \sup_{u\in V}\left\{\langle u, u^*\rangle - \inf_{i\in I} F_i(u)\right\}\\ &= \left(\inf_{i\in I} F_i\right)^*(u^*).\end{aligned}$$

(*d*) $\lambda F^*\left(\dfrac{u^*}{\lambda}\right) = \sup_{u\in V}\{\langle u, u^*\rangle - \lambda F(u)\} = (\lambda F)^*(u^*)$.

(*e*) $(F+\alpha)^*(u^*) = \sup_{u\in V}\{\langle u, u^*\rangle - F(u)\} - \alpha = F^*(u^*) - \alpha$.

(*f*)
$$\begin{aligned}(F_a)^*(u^*) &= \sup_{u\in V}\{\langle u, u^*\rangle - F(u-a)\}\\ &= \sup_{v\in V}\{\langle v+a, u^*\rangle - F(v)\}\\ &= F^*(u^*) + \langle a, u^*\rangle\ . \blacksquare\end{aligned}$$

**1.3.8 Definición**. *La* ***función bipolar*** *de* $F$ *es la función de* $V$ *en* $\bar{\mathbb{R}}$ *definida como sigue:*

$$F^{**}(u) = \sup_{u^*\in V^*}\{\langle u, u^*\rangle - F^*(u^*)\}\ . \tag{1.3.8}$$

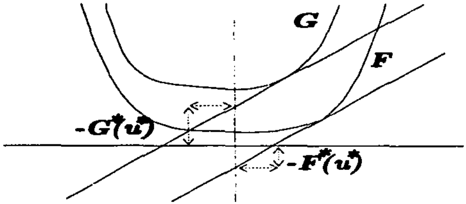



Figura 1.18: Aquí podemos ver gráficamente que si $G > F$ entonces, $F^*(u^*) > G^*(u^*)$.

Sabemos que $\langle u, \_\rangle : V^* \longrightarrow \mathbf{R}$ es lineal para ver que es continua observemos que:

$$|\langle u, u^*\rangle - \langle u, v^*\rangle| = |\langle u, u^* - v^*\rangle| \leq \|u\| \, \|u^* - v^*\|_*$$

de donde se sigue que es continua. De igual manera obtenemos que $F^{**} \in \Gamma(V)$. Ahora podemos comparar a $F$ y $F^{**}$ , que están definidas sobre el mismo espacio.

**1.3.9 Teorema (Fenchel – Moreau).** *Sea $F$ una función de $V$ en $\bar{\mathbf{R}}$ . Entonces su bipolar $F^{**}$ , es su $\Gamma-$regularización. En particular, si $F \in \Gamma(V)$, $F^{**} = F$.*

**Demostración.**

Por definición, la $\Gamma-$regularización, es el supremo de todas las funciones afines menores que $F$. Basta fijarnos en las funciones afines del tipo:

$$u \longrightarrow \langle u, u^* \rangle - F^* (u^*) \tag{1.3.9}$$

ya que son funciones afines continuas máximas (1.3.5) .

Y el supremo de estas funciones es $F^{**}$ , de donde $F^{**}$ es la $\Gamma-$*regularización*. Ahora si $F \in \Gamma(V)$, entonces, por la Definición 1.3.3, $F$ coincide con $\Gamma-$ *regularización*, y por lo tanto $F^{**} = F$. ■

**1.3.10 Corolario.** *a) Si $F_1$ y $F_2$ pertenecen a $\Gamma(V)$ y $F_1^* = F_2^*$ entonces $F_1 = F_2$.*

*b) Si $G \in \Gamma(V)$ y $G < F$ entonces $G < F^{**}$.*

**Demostración.**

Como $F_1^* = F_2^*$ y $F_1, F_2 \in \Gamma(V)$, se sigue que $F_1 = F_1^{**} = F_2^{**} = F_2$.

Sabemos que $G < F$ por 1.3.7 $b$) obtenemos que $F^* < G^*$ y también $G^{**} < F^{**}$ pero $G^{**} = G$ de donde $G < F^{**}$. ■

**1.3.11 Corolario.** *Para cualquier función $F : V \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$, tenemos que $F^{***} = F^*$.*

**Demostración.**

Como $F^{**}$ es la $\Gamma-$regularización de $F$, tenemos que $F^{**} \leq F$ y por la Proposición (1.3.7) ($b$) se sigue que:

$$F^* \leq F^{***}.$$

Ahora por definición tenemos que :

$(F^{*})^{*}(u) = \sup\limits_{u^* \in V^*} \{\langle u, u^* \rangle - F^*(u^*)\} \geq \langle u, u^* \rangle - F^*(u^*)$ es decir;

$\langle u, u^* \rangle - F^{**}(u^*) \leq F^*(u^*)$ tomando el supremo sobre $u \in V \subset V^*$ obtenemos que;

$F^{***}(u) = \sup\limits_{u \in V} \{\langle u, u^* \rangle - F^{**}(u)\} \leq F^*(u^*)$. ■

Esto nos indica que $F \in \Gamma(V)$ si solo si $F^{**} = F$; y da lugar a una definición.

Ya vimos que la polaridad restringida a $\Gamma(V)$ es una función de $\Gamma(V)$ en $\Gamma(V^*)$. Ahora por el Corolario 1.3.10 es inyectiva y para ver que es suprayectiva sea $G \in \Gamma(V^*)$ entonces $G^* \in \Gamma(V^{**})$, ahora recordemos que $V \subset V^{**}$ ya que se tiene la inyección canónica $J : V \longrightarrow V^{**}$ definida como sigue: sea $v \in V$ fijo, la aplicación $v^* \longmapsto \langle v^*, v \rangle$ de $V^*$ en $\mathbf{R}$ es una función lineal continua sobre $V^*$, es decir un elemento de $V^{**}$. Así pues,

$$\langle Jv, v^* \rangle_{V^{**}, V^*} = \langle v^*, v \rangle_{V^*, V} \qquad \text{paratodo } v \in V, \text{ y todo } v^* \in V^*.$$

De hecho $J$ es una isometría. Por lo tanto podemos pensar a $G^* \in \Gamma(V^{**})$ como $G^* \in \Gamma(V)$ restringiendo $G^*$ a $V$ entonces $G^{**} \in \Gamma(V^*)$,y por el Teorema 1.3.9 $G^{**} = G$ con lo cual concluimos que la polaridad establece una biyección entre $\Gamma(V)$ y $\Gamma(V^*)$.

**1.3.12 Definición**. *Si $F \in \Gamma(V)$ y $G \in \Gamma(V^*)$ diremos que están en* ***dualidad*** *si:*

$$F = G^*|_V \qquad y \qquad G = F^* \tag{1.3.10}$$

Las constantes $\pm\infty$ en $V$ y $\pm\infty$ en $V^*$ están en dualidad.

Sea $V$ un espacio normado y $V^*$ su dual, denotaremos por $\|\cdot\|$ la norma en $V$ y por $\|\cdot\|_*$ a la norma en $V^*$. Tomamos una función $\Phi \in \Gamma_0(\mathbf{R})$ par y denotaremos a $\Phi^*$ a su función conjugada la cuál también pertenece a $\Gamma_0(\mathbf{R})$.

Entonces definimos a $F : V \longrightarrow \mathbf{R}$ y $G : V^* \longrightarrow \mathbf{R}$ por:

$$F(u) = \Phi\left(\|u\|\right)$$

$$G(u) = \Phi^*\left(\|u\|_*\right).$$

**1.3.13 Proposición**. *Bajo estas hipótesis, $F$ y $G$ están en dualidad.*

**Demostración.**

Como $\Phi$ y $\Phi^*$ son elementos de $\Gamma_0(\mathbf{R})$ entonces, $F$ y $G$ también pertenecen a $\Gamma_0(V)$ y a $\Gamma_0(V^*)$ respectivamente. Por lo tanto es suficiente probar que $F^* = G$.

$$F^*(u^*) = \sup_{u\in V} \{\langle u, u^*\rangle - \Phi(\|u\|)\} = \sup_{t\geq 0} \left\{ \sup_{\substack{u\in V\\ \|u\|=t}} \{\langle u, u^*\rangle - \Phi(\|u\|)\} \right\}$$

$$= \sup_{t\geq 0} \{t\,\|u^*\|_* - \Phi(t)\}$$

como $\Phi$ es par $\displaystyle\sup_{t\in\mathbf{R}} \{t\,\|u^*\|_* - \Phi(t)\} = \Phi^*(\|u\|_*)$. ■

**Ejemplo:**

Sean $\Phi(t) = \frac{1}{\alpha}|t|^\alpha$ y $\Phi^*(t) = \frac{1}{\alpha^*}|t|^{\alpha^*}$ con $\alpha$ y $\alpha^* \in (1,\infty)$ tal que, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^*} = 1$. Entonces $\Phi(t)$ y $\Phi^*(t)$ pertenecen a $\Gamma_0(\mathbf{R})$. Probemos ahora que son conjugadas.

De la desigualdad de Young

$|st| \leq \frac{1}{\alpha}|s|^\alpha + \frac{1}{\alpha^*}|t|^{\alpha^*}$ ahora

$\Phi^*(t) = \displaystyle\sup_{s\in V} \left\{|st| - \tfrac{1}{\alpha}|t|^\alpha\right\} \leq$

$\displaystyle\sup_{s\in V} \left\{\tfrac{1}{\alpha}|s|^\alpha + \tfrac{1}{\alpha^*}|t|^{\alpha^*} - \tfrac{1}{\alpha}|t|^\alpha\right\} = \sup_{s\in V} \left\{\tfrac{1}{\alpha^*}|s|^{\alpha^*}\right\} = \tfrac{1}{\alpha^*}|t|^{\alpha^*}.$

Ahora como $\Phi(t)$ y $\Phi^*(t)$ son pares continuas y convexas pertenecen a $\Gamma_0(\mathbf{R})$.

Entonces, por la Proposición 1.3.13 podemos deducir que:

$$F(u) = \frac{1}{\alpha}\|u\|^{\alpha} \qquad \text{y} \qquad G(u) = \frac{1}{\alpha^*}\|u\|_*^{\alpha^*}$$

son funciones convexas conjugadas.

## §1.4 La subdiferencial

Supondremos como antes que $V$ es un espacio normado. Diremos que una función afín continua $l$ menor o igual que $F$ es **exacta en el punto** $u \in V$ si $l(u) = F(u)$. En particular, $F(u) \in \mathbf{R}$. La función $l$ será entonces de la forma:

$$l(v) = \langle v - u, u^* \rangle + F(u) = \langle v, u^* \rangle + F(u) - \langle u, u^* \rangle .$$

Necesariamente $l$ es máxima, por lo que el término constante deberá satisfacer:

$$F(u) - \langle u, u^* \rangle = -F^*(u^*). \tag{1.4.1}$$

**1.4.1 Definición.** *Una función $F$ de $V$ en $\bar{\mathbf{R}}$ es* ***subdiferenciable*** *en el punto $u \in V$ si existe una función afín continua exacta en $u$. La "pendiente" $u^* \in V^*$ de tal función afín continua será llamada el* ***subgradiente*** *de $F$ en $u$, y el conjunto de subgradientes en $u$ será el* ***subdiferencial*** *en $u$ y será denotado por $\partial F(u)$.*

Si $F$ no es subdiferenciable en $u$, tenemos que $\partial F(u) = \emptyset$. Tenemos la siguiente caracterización, inmediata de la definición:

$$u^* \in \partial F(u) \quad \text{si y sólo si} \quad F(u) \text{ es finito y} \tag{1.4.2}$$
$$\langle v - u, u^* \rangle + F(u) \leq F(v), \quad \text{para todo } v \in V$$

Sea $l$ una función afín continua menor que $F$ exacta en $u$, entonces $l(u) \leq F^{**}(u) \leq F(u)$, pero por ser $l$ exacta en $u$, $F^{**}(u) = F(u)$. Entonces tenemos los siguientes resultados:

$$\text{Si} \quad \partial F(u) \neq \emptyset, \text{ entonces } F(u) = F^{**}(u). \tag{1.4.3}$$

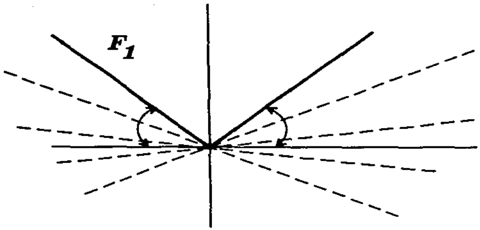



Figura 1.19: La *subdiferencial* en 0, de la función valor absoluto; es el conjunto $\{u^* \in V^* : |u^*| \leq 1\}$.

$$\text{Si} \quad F(u) = F^{**}(u), \text{ entonces } \partial F(u) = \partial F^{**}(u). \tag{1.4.4}$$

Esto da a lugar a una propiedad, que juega un papel muy importante dentro la subdiferenciación en los problemas de optimización:

**1.4.2 Proposición.** *Si $F$ es propia entonces*

$$F(u) = \min_{v \in V} F(v) \quad \textit{si y sólo si} \quad 0 \in \partial F(u) \tag{1.4.5}$$

**Demostración.**

$0 \in \partial F(u)$ si y sólo si $\langle v - u, 0\rangle + F(u) \leq F(v)$, para todo $v \in V$, es decir, si y sólo si $F(u) = \min_{v \in V} F(v)$. ■

**1.4.3 Proposición.** *Sea $F$ una función de $V$ en $\bar{\mathbf{R}}$ y $F^*$ su polar. Entonces $u^* \in \partial F(u)$ si y sólo si:*

$$F(u) + F^*(u^*) = \langle u, u^* \rangle \tag{1.4.6}$$

**Demostración.**

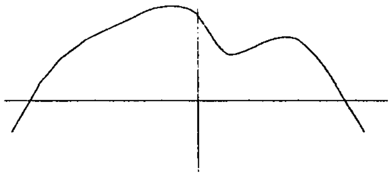


Figura 1.20: Una función *diferenciable* que no es *subdiferenciable*.

Sea $u^* \in \partial F(u)$ entonces $F(u) - \langle u, u^* \rangle = -F^*(u^*)$, por (1.4.1) .

Ahora si se satisface que $F(u) + F^*(u^*) = \langle u, u^* \rangle$, entonces la función afín continua:

$$l(v) = \langle v, u^* \rangle + F(u) - \langle u, u^* \rangle \tag{1.4.7}$$

es menor que $F$, ya que el término constante es igual a $-F^*(u^*)$ , y es exacta en $u$. ■

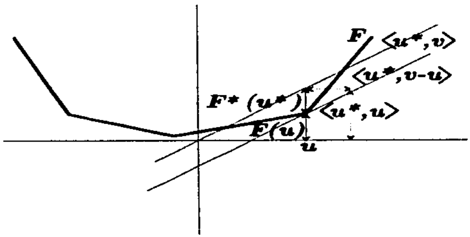



Figura 1.21: Significado geómetrico de $F(u) + F^*(u^*) = \langle u, u^* \rangle$ .

**1.4.4 Proposición.** *Para cada* $u \in V$, $\partial F(u)$ *es cerrado y convexo.*

**Demostración.**

Por definición de $F^*$, tenemos que:

$$F^*(u^*) - \langle u, u^* \rangle \geq -F(u).$$

Entonces la Proposición (1.4.3) puede ser escrita como:

$$\partial F(u) = \{u^* \in V^* \mid F^*(u^*) - \langle u, u^* \rangle \leq -F(u)\}$$

y como $F^* \in \Gamma(V^*)$, $F^* - \langle u, \_\rangle$ es *s.c.i.* y convexa por lo tanto $\partial F(u)$ es cerrado y convexo. ■

**1.4.5 Corolario.** *Para toda función $F$ de $V$ en* $\mathbf{R}$, *tenemos que:*

$$\text{si } u^* \in \partial F(u) \text{ entonces } u \in \partial F^*(u^*). \tag{1.4.8}$$

*Si además $F \in \Gamma(V)$ tenemos que:*

$$u^* \in \partial F(u) \text{ si y sólo si } u \in \partial F^*(u^*). \tag{1.4.9}$$

**Demostración.**

Como $F^{**} \leq F$, si $u^* \in \partial F(u)$, entonces:

$$F^{**}(u) + F^*(u^*) \leq F(u) + F^*(u^*) = \langle u, u^* \rangle$$

es decir,

$$F^{**}(u) - \langle u, u^* \rangle \leq -F^*(u^*)$$

y por definición de $F^{**}$ se tiene la igualdad, por lo tanto $u \in \partial F^*(u^*)$.
Si $F \in \Gamma(V)$, $F^{**} = F$, y

$$F^{**}(u) + F^*(u^*) = F(u) + F^*(u^*) = \langle u, u^* \rangle$$

es decir, $u^* \in \partial F(u)$ si y sólo si $u \in \partial F^*(u^*)$. ■

**1.4.6 Corolario.** *Si $F \in \Gamma_0(\mathbf{R}^n)$, la gráfica $\{(u, u^*) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \mid u^* \in \partial F(u)\}$ de $\partial F$ es cerrada.*

**Demostración.**

Sea $\{u_k, u_k^*\}$ una en $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ tal que, $u_k^* \in \partial F(u_k)$, $u_k \to u$,y $u_k^* \to u^*$. Para todo $w \in \mathbf{R}^n$, tenemos que:

$$\langle u_k^*, w - u_k \rangle + F(u_k) \leq F(w) \text{ para toda } k \in \mathbf{N},$$

$$F(w) \geq \liminf_{k \to \infty} \langle u_k^*, w - u_k \rangle + F(u_k) \geq \langle u^*, w - u \rangle + F(u)$$

por lo tanto $u^* \in \partial F(u)$. ■

Recordemos (Véase ejemplo al final de la sección 1.2) que una función continua convexa no necesariamente es diferenciable. A continuación veremos que sí es subdiferenciable.

**1.4.7 Proposición.** *Sea $F$ una función convexa de $V$ en $\bar{\mathbf{R}}$, finita y continua en el punto $u \in V$. Entonces $\partial F(v) \neq \emptyset$ para todo $v \in int(dom\ F)$ y en particular $\partial F(u) \neq \emptyset$.*

**Demostración.**

Como $F$ es finita y continua en $u$, entonces $F$ es acotada por arriba en una vecindad de $u$ y por la Proposición (1.2.20) , continua y finita en $int(dom\ F)$. Entonces es suficiente probar que $\partial F(u) \neq \emptyset$.

Como $F$ es covexa, $epi\ F$ es convexo. Por ser $F$ continua existe una vecindad $O$ de $u$ en la cuál $F$ es acotada por arriba por una $c \in \mathbf{R}$; el conjunto $O \times ]c, +\infty[$ es un conjunto abierto de $V \times \mathbf{R}$ contenido en $epi\ F$, de donde el $int(epi\ F) \neq \emptyset$.

Como $(u, F(u))$ pertenece a la frontera de $epi\ F$, entonces lo podemos separar de $int(dom\ F)$ por un hiperplano afín; obteniendo un hiperplano soporte $H$ de $epi\ F$, que contiene a $(u, F(u))$, con ecuación:

$$H = \{(v, a) \in V \times \mathbf{R} \mid \langle v, u^* \rangle + \alpha a = \beta\} \quad \text{donde} \quad u^* \in V^*,\ \alpha \text{ y } \beta \in \mathbf{R}.$$

donde no todos los coeficientes son cero, y cumplen que:

$$\text{para todo } (v, a) \in epi\ F, \quad \langle v, u^* \rangle + \alpha a \geq \beta$$

$$\langle u, u^* \rangle + \alpha F(u) = \beta.$$

De modo que si $\alpha \neq 0$,

$$\frac{1}{\alpha}\left(\langle \_, u^* \rangle + \beta\right),$$

es una función afín continua menor o igual que $F$, exacta en $u$.

Si $\alpha = 0$, tenemos que:

$$\text{para todo } v \in dom\ F \ \ \langle u, u^* \rangle + \alpha F(u) \leq \langle v, u^* \rangle + \alpha F(v) \text{ es decir } 0 \leq \langle v - u, u^* \rangle,$$

de donde, la función afín $l(v) = \langle v - u, u^* \rangle$, es no negativa, en $dom\ F = V$.

Por lo tanto como $l(u) = 0$, $u^* = 0$, y esto es una contradicción. ■

**1.4.8 Definición.**. *Sea $F$ una función de $V$ en $\bar{\mathbf{R}}$, si*

$$\lim_{\lambda \to 0_+} \frac{F(u + \lambda v) - F(u)}{\lambda} \tag{1.4.10}$$

*existe entonces dicho límite será llamado la **derivada direccional de $F$ en la dirección** $v$, y lo denotaremos por $F'(u; v)$.*

Si la función $F$ es convexa dicho límite tiene algunas propiedades que son las siguientes. Sean $u$ y $v$ elementos de $V$ y $F$ una función convexa de $V$ en $\bar{\mathbf{R}}$, entonces definimos una función $G$ como

$$G(\lambda) = \frac{F(u+\lambda v) - F(u)}{\lambda}$$

Ahora sean $0 < k < h$ por ser $F$ convexa tenemos que:

$$F(u+kv) = F\left(\left(1-\frac{k}{h}\right)u + \frac{k}{h}(u+hv)\right) \leq \left(1-\frac{k}{h}\right)F(u) + \frac{k}{h}F(u+hv)$$

y multiplicando por $\frac{1}{k}$ se sigue que:

$$\frac{F(u+kv) - F(u)}{k} \leq \frac{F(u+hv) - F(u)}{h}$$

es decir, $G(k) \leq G(h)$; sucede lo mismo si $h$ y $k$ son negativos. El significado geométrico esta representado en la siguiente figura.

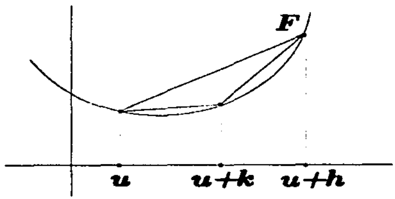



Figura 1.22: La pendiente de $F(u)$ a $F(u+h)$ es mayor que de $F(u)$ a $F(u+k)$.

Si existe $u^* \in V^*$ tal que:

$$\text{para todo } v \in V \qquad F'(u;v) = \langle v, u^* \rangle$$

diremos que $F$ es **Gâteaux-diferenciable** en $u$, y llamaremos a $u^*$ **el gradiente** en $u$ de $F$, y lo denotaremos por $\nabla F(u)$. La unicidad de la **diferencial de Gâteaux** se sigue de la definición ya que si existe $\bar{u}^* \in V^*$ tal que $F'(u;v) = \langle v, u^* \rangle = \langle v, \bar{u}^* \rangle$ se sigue que $\langle v, u^* - \bar{u}^* \rangle = 0$ para todo $v \in V$, lo cuál implica que $u^* = \bar{u}^*$.

Sea $F$ una función de $V$ en $\bar{\mathbf{R}}$ convexa,

**1.4.9 Proposición.** *Si $F$ es convexa entonces para todo $\lambda \in R$ y todo $v \in V$.*

$$F(u) + \lambda F'(u;v) \leq F(u + \lambda v)$$

**Demostración.**

Sea $\lambda > 0$ entonces sabemos que la función

$$G(\lambda) = \frac{F(u + \lambda v) - F(u)}{\lambda}$$

es creciente, es decir, que

$$\lambda F'(u;v) \leq F(u + \lambda v) - F(u).$$

Ahora si $\lambda < 0$, la función $G$ es creciente de donde:

$$\frac{F(u + \lambda v) - F(u)}{\lambda} \leq F'(u;v)$$

y así

$$\lambda F'(u;v) \leq F(u + \lambda v) - F(u) . \blacksquare$$

**1.4.10 Proposición.** *Sea $F$ una función convexa de $V$ en $\bar{\mathbf{R}}$ y $u \in V$ tal que $F$ es finita. Entonces $u^* \in \partial F(u)$ si y sólo si $F'(u;v) \geq \langle v, u^* \rangle$ para todo $v \in V$.*

**Demostración.**

Por definición $u^* \in \partial F(u)$ si y sólo si $\langle v - u, u^* \rangle + F(u) \leq F(v)$, para todo $v \in V$. Haciendo $v = u + \varepsilon w$, obtenemos $\varepsilon \langle w, u^* \rangle + F(u) \leq F(u + \varepsilon w)$, $w \in V$ para todo $\varepsilon > 0$, de donde $\langle v, u^* \rangle \leq F'(u;v)$ y esto es para todo $v \in V$. El regreso es análogo. $\blacksquare$

**1.4.11 Teorema.** *Sea $F$ una función convexa de $V$ en $\bar{\mathbf{R}}$. Si $F$ es Gâteaux-diferenciable en $u \in V$, entonces es subdiferenciable en $u$ y $\partial F(u) = \{\nabla F(u)\}$. Inversamente, si en el punto $u \in V$, $F$ es continua y finita y tiene sólo un subgradiente, entonces $F$ es Gâteaux-diferenciable en $u$ y $\partial F(u) = \{\nabla F(u)\}$.*

**Demostración.**

Si $F$ es Gâteaux-diferenciable en $u$ entonces $F'(u) \in \partial F(u)$; ahora vamos a demostrar la unicidad; sea $u^* \in \partial F(u)$ por la Proposición (1.4.10) tenemos que $\langle v, u^* \rangle \leq F'(u; v) = \langle v, F'(u) \rangle$, para todo $v \in V$, es decir, $0 \leq \langle v, F'(u) - u^* \rangle \quad v \in V$, y se sigue que $u^* = F'(u)$.

Inversamente, por la Proposición (1.4.9), tenemos que:

$$F(u) + \lambda F'(u; v) \leq F(u + \lambda v) \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbf{R} \text{ y todo } v \in V$$

Es decir, la recta en $V \times \mathbf{R}$ definida como:

$$\mathfrak{L} = \{(u + \lambda v, F(u) + \lambda F'(u; v)) \mid \lambda \in \mathbf{R}\},$$

no intersecta el interior de *epi* $F$. Pero el *int*(*epi* $F$) es un conjunto abierto convexo y no vacío, porque $F$ es continua y finita. Por el Teorema de Hahn-Banach, existe un hiperplano afín $H$ que contiene a $\mathfrak{L}$ y no intersecta a *int*(*epi* $F$). Como $(u, F(u)) \in \mathfrak{L}$, entonces $H$ es la gráfica de una función afín y continua menor que $F$ y exacta en $u$. Por hipótesis el subgradiente $u^*$ de $F$ en $u$ es único, así que $u^*$ es la pendiente de $H$ y como $H$ contiene a $\mathfrak{L}$:

$$F'(u; v) = \langle v, u^* \rangle. \blacksquare$$

**1.4.12 Definición.** *Denotaremos por $C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ al conjunto de funciones $F : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que su derivada es continua.*

**1.4.13 Proposición.** *Si $F \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, estrictamente convexa y tal que*

$$\frac{F(u)}{\|u\|} \longrightarrow \infty \text{ si } \|u\| \longrightarrow \infty. \tag{1.4.11}$$

*Entonces $F^* \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$.*

**Demostración.**

La demostración la haremos en tres etapas:

1.- Como $F \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, $F$ es Gâteaux diferenciable, por el Teorema 1.4.11y el Corolario 1.4.5 tenemos que $\partial F(u) = u^*$ si y sólo si $u = \partial F^*(u^*)$.

2.- La función $\partial F^* : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$; $u^* \longrightarrow u$ donde $u = \partial F^*(u^*)$, es continua por el Corolario 1.4.6 la gráfica de $\partial F^*$ es cerrada entonces es suficiente probar que la imagen de conjuntos acotados es acotada. Sea $\|u^*\| \leq \rho$ y $u = \partial F^*(u^*)$ entonces $\partial F(u) = u^*$ de donde

$$F(0) \geq F(u) - \langle u^*, u \rangle$$

y por la desigualdad de Cauchy

$$\frac{|F(0) - F(u)|}{\|u\|} \leq \|u^*\| \leq \rho$$

y por (1.4.11) $\|u\|$ es acotado.

3.- Sea $u = \partial F^*(u^*)$ y $u_h = \partial F^*(u^*+h)$ para algún $u^* \in \mathbf{R}^n$, $h \in \mathbf{R}^n \backslash \{0\}$, por la definición de subdiferencial, tenemos que:

$$0 \leq \frac{F^*(u^* + h) - F^*(u^*) - \langle h, u \rangle}{\|h\|} \leq \frac{\langle h, u_h - u \rangle}{\|h\|} \leq \|u_h - u\| \, .$$

Y como $\partial F^*$ es continua, si $h \longrightarrow 0$ entonces $u_h \longrightarrow u$ de donde $F^*$ es diferenciable en $v$ con $\nabla F^*(u^*) = u = \partial F^*(u^*)$. Por lo tanto $F^* \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. ■

**1.4.14 Proposición.** *Sea $F$ una función Gâteaux-diferenciable, de $A \subset V$ en $\mathbf{R}$ con $A$ convexo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*$F$ es convexa sobre $A$* (1.4.12)

$F(v) \geq F(u) + \langle v - u, F'(u) \rangle$, *para todo* $u, v \in A$. (1.4.13)

*De igual manera son equivalentes:*

*$F$ es estrictamente convexa sobre $A$* (1.4.14)

$F(v) > F(u) + \langle v - u, F'(u) \rangle$, *para todo* $u, v \in A \quad u \neq v$. (1.4.15)

**Demostración.**

Por la Proposición (1.4.11), sabemos que (1.4.12) implica(1.4.13). Ahora la desigualdad (1.4.13) se puede escribir con $u$ y $(1-\lambda)u+\lambda v$ tal que $u, v \in A$, $\lambda \in ]0,1[$ , de modo que

$$\begin{aligned} F(u) &\geq F((1-\lambda)u+\lambda v) + \langle \lambda(u-v), F'(\lambda v + (1-\lambda)u)\rangle \\ &= F(u+\lambda(v-u)) + \lambda \langle u-v, F'(\lambda(v-u)+u)\rangle . \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(1-\lambda)F(u) \geq (1-\lambda)\left(F(u+\lambda(v-u)) + \lambda \langle (u-v), F'(\lambda(v-u)+u)\rangle\right). \tag{1.4.16}$$

También la desigualdad (1.4.13) se puede ver como:

$$\begin{aligned} F(v) &\geq F((1-\lambda)u+\lambda v) + \langle v-(\lambda v+(1-\lambda)u), F'(\lambda v + (1-\lambda)u)\rangle \\ &= F(u+\lambda(v-u)) + (1-\lambda) \langle v-u, F'(\lambda(v-u)+u)\rangle . \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lambda F(v) \geq \lambda\left(F(u+\lambda(v-u)) + (1-\lambda) \langle v-u, F'(\lambda(v-u)+u)\rangle\right). \tag{1.4.17}$$

Sumando (1.4.16) y (1.4.17) obtenemos:

$$F(u+\lambda(v-u)) \leq \lambda F(v) + (1-\lambda)F(v).$$

Para ver que (1.4.14) implica (1.4.15), sabemos que por ser $F$ estrictamente convexa se sigue que:

$$F(u+\lambda(v-u)) < (1-\lambda)F(u) + \lambda F(v)$$

$$\langle v-u, F'(u)\rangle \leq \frac{F(u+\lambda(v-u))-F(u)}{\lambda} < F(v)-F(u).$$

Para demostrar que de (1.4.15) se sigue (1.4.14), sólo hay que tomar en cuenta que las desigualdades son estrictas si $v \neq u$. ■

La convexidad de una función es lo mismo que la diferencial de Gâteaux sea monótona:

**1.4.15 Proposición**. *Sea $F$ una función Gâteaux-diferenciable de $A \subset V$ en $\mathbf{R}$, con $A$ convexo. Entonces $F$ es convexa si y sólo si la diferencial $F'$ es un mapeo monótono de $V$ en $V^*$, es decir:*

$$\text{para todo } u_1, u_2 \in V, \qquad \langle u_1 - u_2, F'(u_1) - F'(u_2) \rangle \geq 0. \tag{1.4.18}$$

**Demostración.**

Como $F$ es convexa por la Proposición (1.4.14), $F'(u_1)$ y $F'(u_2)$ son subgradientes de $F$ en $u_1$ y $u_2$, es decir, para todo $u_1$ y $u_2$ en $V$ se tiene que:

$$\langle u_2 - u_1, F'(u_1) \rangle + F(u_1) \leq F(u_2),$$

$$\langle u_1 - u_2, F'(u_2) \rangle + F(u_2) \leq F(u_1),$$

sumando obtenemos:

$$\langle u_1 - u_2, F'(u_1) - F'(u_2) \rangle \geq 0.$$

Inversamente, si $F$ es Gâteaux-diferenciable y si $F'$ es monótona, la función $\phi$ de $[0, 1]$ a $\mathbf{R}$ definida como:

$$\phi(\lambda) = F\left(u + \lambda(v - u)\right) \qquad \text{para todo } u, v \in V$$

es diferenciable, es decir:

$$\phi'(\lambda) = \langle v - u, F'\left(u + \lambda(v - u)\right) \rangle .$$

Por ser $F'$ monótona se sigue que, $\phi'$ es creciente, entonces $\phi$ es convexa en $[0, 1]$ , y en particular para todo $\lambda \in [0, 1]$ :

$$\phi(\lambda) \leq (1 - \lambda)\phi(0) + \lambda\phi(1),$$

es decir,

$$F\left(\lambda v + (1 - \lambda)u\right) \leq \lambda F(v) + (1 - \lambda)F(u). \blacksquare$$

**Cálculo subdiferencial.**

**1.4.16 Proposición.** *Sea* $F : V \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$ *y* $\lambda > 0$. *Tenemos que para todo* $u \in V$ :

$$\partial(\lambda F)(u) = \lambda \partial F(u), \tag{1.4.19}$$

**Demostración.**

$u^* \in \partial(\lambda F)(u)$, si y sólo si

$$\langle u^*, v-u\rangle + \lambda F(u) \leq \lambda F(v) \text{ para todo } v \in V,$$

si y sólo si

$$\left\langle \frac{u^*}{\lambda}, v-u \right\rangle + F(u) \leq F(v) \text{ para todo } v \in V,$$

si y sólo si $u^* \in \lambda \partial F(u)$. ■

**1.4.17 Proposición.** *Sea* $F_1$ *y* $F_2 : V \longrightarrow \mathbf{R}$. *Entonces para todo* $u \in V$ :

$$\partial F_1(u) + \partial F_2(u) \subset \partial(F_1 + F_2)(u), \tag{1.4.20}$$

**Demostración.**

Sea $u_1^* \in \partial F_1(u)$ y $u_2^* \in \partial F_2(u)$ entonces para todo $v \in V$ :

$$\langle u_1^*, v-u\rangle + F_1(u) \leq F_1(v),$$

$$\langle u_2^*, v-u\rangle + F_2(u) \leq F_2(v),$$

sumando obtenemos:

$$\langle u_1^* + u_2^*, v-u\rangle + F_1(u) + F_2(u) \leq F_1(v) + F_2(v),$$

lo cuál implica que $u_1^* + u_2^* \in \partial(F_1 + F_2)(u)$, para todo $u \in V$. ■

**1.4.18 Proposición.** *Si* $F_1$ *y* $F_2 \in \Gamma(V)$, *y si existe un* $\bar{u} \in domF_1 \cap domF_2$, *donde* $F_1$ *es continua, entonces:*

$$\partial F_1(u) + \partial F_2(u) = \partial(F_1 + F_2)(u), \qquad \text{para todo } u \in V. \tag{1.4.21}$$

**Demostración.**

Lo que tenemos que demostrar es que para todo $u^* \in \partial(F_1 + F_2)(u)$ se puede escribir como $u_1^* + u_2^*$, con $u_1^* \in \partial F_1(u)$ y $u_2^* \in \partial F_2(u)$. Como $u^* \in \partial(F_1 + F_2)(u)$, se tiene que:

$$\langle u^*, v - u\rangle + F_1(u) + F_2(u) \leq F_1(v) + F_2(v), \qquad \text{para todo } v \in V \quad (1.4.22)$$

Consideramos a los conjuntos:

$$C_1 = \{(v, a) \;\; | F_1(v) - \langle v - u, u^*\rangle - F_1(u) \leq a\}$$

$$C_2 = \{(v, a) \;\; | F_2(u) - F_2(v) \geq a\}.$$

Por (1.4.22) $C_1$ y $C_2$ sólo tienen puntos frontera en común.

Vamos a ver que los conjuntos son convexos. Sean $(w, a)$ y $(v, b)$ elementos de $C_2$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$ :

$$\lambda a \leq \lambda F_2(u) - \lambda F_2(w)$$

$$(1 - \lambda)b \leq (1 - \lambda)F_2(u) - (1 - \lambda)F_2(v)$$

sumando obtenemos:

$$\lambda a + (1 - \lambda)b \leq F_2(u) - (1 - \lambda)F_2(v) - \lambda F_2(w)$$

y como $F_2$ es convexa:

$$\lambda a + (1 - \lambda)b \leq F_2(u) - F_2((1 - \lambda)v + \lambda w)$$

que es lo mismo que $((1 - \lambda)v + \lambda w, \lambda a + (1 - \lambda)b) \in C_2$ para todo $\lambda \in [0, 1]$ ; lo cuál implica que $C_2$ es convexo. $C_1$ es la epigráfica de la función:

$$G(v) = F_1(v) - \langle u^*, v\rangle - F_1(u) + \langle u^*, u\rangle$$

la cual es convexa y continua en $\bar{u}$. Entonces $C_1$ es un conjunto convexo con interior no vacío. Podemos separar $int(C_1)$ y $C_2$ por un hiperplano cerrado afín. Es fácil ver que $H$ no es vertical y por lo tanto es la gráfica de una función afín continua.

$$v \longrightarrow \langle v, v^*\rangle + \alpha, \quad \text{donde} \quad v^* \in V^* \quad \text{y} \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

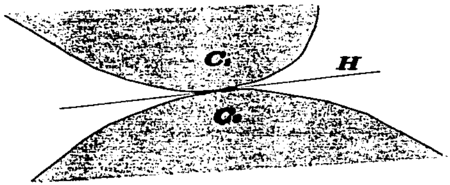



**Figura 1.23:**

La condición de separación puede ser escrita de la siguiente manera para todo $v \in V$:

$$F_2(u) - F_2(v) \le \langle v, v^* \rangle + \alpha \le F_1(v) - \langle v - u, u^* \rangle - F_1(u),$$

evaluando en $v = u$, obtenemos $\alpha = -\langle u, v^* \rangle$ , y entonces:

$$F_2(u) - \langle v, v^* \rangle + \langle u, v^* \rangle \le F_2(v),$$

$$\langle v - u, -v^* \rangle + F_2(u) \le F_2(v),$$

y también:

$$\langle v, v^* \rangle - \langle u, v^* \rangle + \langle v - u, u^* \rangle + F_1(u) \le F_1(v),$$

$$\langle v - u, u^* + v^* \rangle + F_1(u) \le F_1(v).$$

De donde $-v^* \in \partial F_2(u)$ y $u^* + v^* \in \partial F_1(u)$. Haciendo $u_1^* = u^* + v^*$ y $u_2^* = -v^*$ obtenemos el resultado. ■

**Diferenciabilidad de Frechet**

Sea $V$ un espacio vectorial normado.

**1.4.19 Definición.** *Una función $F : V \longrightarrow \mathbf{R}$, es **Frechet diferenciable en** $u \in V$ si existe $u^* \in V^*$ tal que:*

$$F(u + h) - F(u) = \langle u^*, h \rangle + \alpha(u, h)$$

*donde* $$\frac{|\alpha(u,h)|}{\|h\|} \longrightarrow 0 \quad \textit{cuando } \|h\| \longrightarrow 0.$$

*A $\langle u^*, h\rangle$ se le llama* ***diferencial de Frechet*** *y al operador $u^*$* ***derivada fuerte de** $F$ en el punto $u$. Denotaremos esta derivada por $F'(u)$.*

La unicidad de la derivada se sigue de la definición en efecto, supongamos que:

$$F(u+h) - F(u) = \langle u^*, h\rangle + \alpha(u,h) = \langle \bar{u}^*, h\rangle + \bar{\alpha}(u,h);$$

entonces,

$$\frac{|\langle u^*, h\rangle - \langle \bar{u}^*, h\rangle|}{\|h\|} = \frac{|\bar{\alpha}(u,h) - \alpha(u,h)|}{\|h\|}$$

de donde

$$\frac{|\langle u^*, h\rangle - \langle \bar{u}^*, h\rangle|}{\|h\|} \longrightarrow 0 \qquad \text{si} \quad \|h\| \longrightarrow 0. \tag{1.4.23}$$

Si existe $h$ tal que:

$$\frac{|\langle u^*, h\rangle - \langle \bar{u}^*, h\rangle|}{\|h\|} = \lambda \neq 0$$

tendremos que para toda $\varepsilon \neq 0$

$$\frac{|\langle u^*, \varepsilon h\rangle - \langle \bar{u}^*, \varepsilon h\rangle|}{\|h\|} = \lambda$$

y esto es una contradicción ya que (1.4.23) no se cumple.

Señalemos algunos resultados que se siguen de la definición.

1. Si $F(u) = k$ con $k$ una constante entonces $F'(u) \equiv 0$.

2. La derivada de una funcional lineal $L$ continua es ella misma, en efecto:$L(u+h) - L(u) = L(h)$.

3. Sean $F$ y $G$ funciones Frechet diferenciables y $a \in \mathbf{R}$; entonces $F+G$ y $aF$ son Frechet diferenciables.

Las propiedades de Frechet diferenciable y Gâteaux diferenciable constituyen conceptos diferentes incluso en el caso de espacios de dimensión finita. Efectivamente es bien sabido que para una función $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ con $n \geq 2$ la existencia de:

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda y) - f(x)}{\lambda}$$

para todo $y$ no implica que $f$ sea diferenciable; mas aun que sea Gâteaux diferenciable no implica Frechet diferenciable. Como ejemplo sea $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y + \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2} & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Esta función es continua en todo $\mathbf{R}^2$. Y es Gâteaux diferenciable en $(0,0)$, ya que:

$$f'(0;v) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(0+\lambda v) - f(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} v_1 + v_2 + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda^3 v_1^3 \lambda v_2}{\lambda^4 v_1^4 + \lambda^2 v_2^2} = v_1 + v_2.$$

Y no es Frechet diferenciable ya que

$$\alpha(0,v) = f(0+v) - f(0) - v_1 + v_2 = \frac{v_1^3 v_2}{v_1^4 + v_2^2}.$$

Entonces tomando $v_2 = v_1^2$, tendremos:

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{\alpha(0,v)}{\|v\|} = \lim_{v_1 \to 0} \frac{v_1^5}{2v_1^4 \sqrt{v_1^2 + v_1^4}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Pero si una función es Frechet diferenciable entonces es Gâteaux diferenciable además las diferenciales coinciden. En efecto sea $F$ una función Frechet diferenciable, entonces tenemos:

$$F(u + \lambda v) - F(u) = \langle F'(u), \lambda v \rangle + \alpha(\lambda v) = \lambda \langle F'(u), v \rangle + \alpha(\lambda v)$$

de donde

$$\frac{F(u+\lambda v) - F(u)}{\lambda} = \langle F'(u), v \rangle + \frac{\alpha(\lambda v)}{\lambda} \longrightarrow \langle F'(u), v \rangle .$$

Las condiciones para las cuales Gâteaux diferenciable implica Frechet diferenciable están dadas en el siguiente teorema.

**1.4.20 Teorema.** *Si una función $F$ es Gâteaux diferenciable en una vecindad $U$ de $u_0$ y la derivada débil de $F$ es continua en dicha vecindad, entonces $F$ es Frechet diferenciable en $u_0$ y las derivadas coinciden.*

**Demostración.**

Por hipótesis la función es Gâteaux diferenciable en $u_0$ es decir $F'(u_0, v) = \langle F'(u_0), v\rangle$ sea $v$ tal que $v + u_0 \in U$ y consideremos la expresión:

$$\alpha(u_0, v) = F(u_0 + v) - F(u_0) - \langle F'(u_0), v\rangle \,.$$

Definimos la función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ como $f(t) = F(u_0 + tv)$, esta función es diferenciable con derivada $f'(t) = \langle F'(u_0 + tv), v\rangle$ y por ser $f$ diferenciable sabemos que existe $\theta \in [0,1]$ tal que:

$$f(0) - f(1) = f'(\theta)$$

es decir:

$$F(u_0) - F(u_0 + v) = \langle F'(u_0 + \theta v), v\rangle \text{ con } \theta \in [0,1]\,.$$

De donde

$$\alpha(u_0, v) = \langle F'(u_0 + \theta v), v\rangle - \langle F'(u_0), v\rangle = \langle F'(u_0 + \theta v) - F'(u_0), v\rangle \,,$$

con $\theta \in [0,1]$ y además

$$|\alpha(u_0, v)| \leq \|F'(u_0 + \theta v) - F'(u_0)\| \, \|v\|$$

y como $F'(u_0)$ es continua:

$$0 \leq \frac{|\alpha(u_0, v)|}{\|v\|} \leq \|F'(u_0 + \theta v) - F'(u_0)\| \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad \|v\| \longrightarrow 0.$$

Con esto queda demostrado que $F$ es Frechet diferenciable y además su derivada coincide con la derivada de Gâteaux. ∎

**Ejemplo:**

Sea $V$ un espacio de Hilbert y $F(u) = \|u\|^2$. Entonces

$$\|u + h\|^2 - \|u\|^2 = 2\,\langle u, h\rangle + \|h\|^2$$

de donde $F'(u) = 2u$.

# Capítulo 2

# Minimización y Desigualdades Variacionales

## §2.1 Resultados sobre existencia

Recordemos que un espacio de **Banach** es **reflexivo** si y sólo si la bola unitaria es compacta en la topología débil [Bre] Teorema III.16. Esto implica que cualquier sucesión acotada tiene una subsucesión débilmente convergente.

Los espacios de **Hilbert** y los espacios $L^p$ $(1 < p < \infty)$ son reflexivos [Bre] Teorema IV.10.

Nos interesa el problema

$$\inf_{v \in C} F(v). \tag{2.1.1}$$

Un elemento de $u \in C$ tal que:

$$F(u) = \inf_{v \in C} F(v) \tag{2.1.2}$$

es una solución de nuestro problema.

Un criterio para la existencia de soluciones es el siguiente:

**2.1.1 Teorema.** *Sea $V$ un espacio reflexivo de Banach con norma $\|\cdot\|$, y $M \subset V$ un subconjunto débilmente cerrado de $V$. Si $F : M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es tal que:*

(*i*) *$F$ coerciva en $M$ con respecto a $V$, es decir, $F(u) \to \infty$ si $\|u\| \to \infty$, $u \in M$.*
(2.1.3)

*(ii) Para toda $u \in M$ y toda sucesión $u_m$ en $M$ tal que $u_m \rightharpoonup u$ débilmente en $V$ se cumple que :* (2.1.4)

$$F(u) \leq \liminf_{m \to \infty} F(u_m).$$

*Entonces $F$ es acotada por abajo en $M$ y alcanza su ínfimo en $M$.*

El concepto de sucesiones minimizantes ofrece una prueba aparentemente constructiva.

**Demostración.**

Si $F \equiv \infty$ no hay nada que probar. Supongamos pues que $F$ no es idénticamente $+\infty$ en $M$. Sea $\alpha_0 = \inf_{u \in M} F(u)$ y sea $u_m$ una sucesión minimizante en $M$; es decir tal que $F(u_m) \to \alpha_0$.

Ahora veremos que $u_m$ es acotada; $F(u_m)$ converge a $\alpha_0 \neq +\infty$, si suponemos que $u_m$ no es acotada es decir $\|u_m\| \to \infty$, esto contradice que $F$ sea coerciva, por lo tanto $u_m$ es acotada.

Como $V$ es reflexivo, existe una subsucesión de $u_m$ que converge débilmente a $u \in V$. Pero como $M$ es débilmente cerrado se sigue que $u \in M$, y por $(ii)$ tenemos que:

$$F(u) \leq \liminf_{m \to \infty} F(u_m) = \alpha_0.$$

■

En la siguiente gráfica se dan ejemplos mostrando que las hipótesis $(i)$ y $(ii)$ son necesarias.

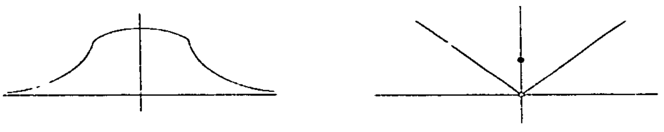


**Figura 2.1:** $F$ no satisface $(i)$ $F$ no satisface $(ii)$.

Sea $V$ un espacio de Banach reflexivo con norma $\|\cdot\|$ y $C$ un subconjunto de $V$ convexo, cerrado no vacío. Tomamos una función $F$ de $C$ en $\mathbf{R}$ y supondremos que:

$$F \textit{ es convexa y s.c.i.} \tag{2.1.5}$$

En algunos casos es preferible cambiar el problema (2.1.1) por un problema de minimización sobre todo el espacio $V$; para esto a la función $F$ y al conjunto $C$ le asociamos una función $\bar{F} : V \to \bar{\mathbf{R}}$, definida por:

$$\bar{F}(u) = \begin{cases} F(u) & si \quad u \in C, \\ \\ +\infty & si \quad u \notin C. \end{cases} \tag{2.1.6}$$

Por (1.2.5) y la observación (1.2.6) es obvio que $\bar{F}$ es convexa y s.c.i.; entonces el problema:

$$\inf_{u \in V} \bar{F}(u) \tag{2.1.7}$$

es idéntico al problema (2.1.1), el ínfimo es el mismo, así como el conjunto de soluciones.

**2.1.2 Proposición.** *El conjunto de soluciones de (2.1.1) es un conjunto cerrado convexo contenido en $C$; (puede ser vacío).*

**Demostración.**

Denotaremos al ínfimo en (2.1.1) como $\alpha$. El conjunto de soluciones es:

$$\left\{ u \in V \;\middle|\; \bar{F}(u) \leq \alpha \right\} \subset C$$

y el resultado se sigue por (1.2.3), y (1.2.8). ■

Si en el Teorema (2.1.1)cambiamos las hipótesis de que $M$ es débilmente cerrado y $(ii)$, por (2.1.5) y suponemos que $F$ es coerciva ó que $C$ es acotado obtenemos el siguiente resultado.

**2.1.3 Corolario.** *Sea $F : C \to \mathbf{R}$ convexa y s.c.i. Supongamos que, o bien*

$$\textit{el conjunto } C \textit{ es acotado,} \tag{2.1.8}$$

*o bien que la función $F$ es coerciva sobre $C$, es decir:*

$$\lim F(u) = +\infty, \quad para \quad u \in C, \quad \|u\| \to \infty. \tag{2.1.9}$$

*Entonces el problema (2.1.1) tiene al menos una solución. Tiene una solución única si la función $F$ es estrictamente convexa sobre $C$.*

**Demostración.**

Como $C$ es convexo y cerrado es débilmente cerrado en $V$ ([Bre] Teorema III.7 ). Y como $F$ es s.c.i., satisface (2.1.4) (véase Corolario 1.2.16).

Si $F$ es coerciva en $C$ se satisfacen (2.1.3) , (2.1.4) y por tanto $F$ alcanza su ínfimo en $C$. Y, si $C$ es acotado $F$ es trivialmente, coerciva en $C$.

Si $u_1$ y $u_2$ son soluciones, con $F$ estrictamente convexa, tenemos que:

$$F\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) < \frac{1}{2}\left(F(u_1)+F(u_2)\right) = \alpha.$$

y esto es una contradicción. ∎

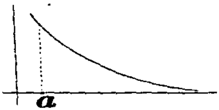



Figura 2.2: Si definimos la función $1/x$ en el cerrrado $[a,+\infty)$ , obtenemos una función convexa que no tiene mínimo.

**2.1.4 Proposición.** *Sea $a(u,v)$ una forma bilineal continua sobre $V$, coerciva en el sentido de:*

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in V, \qquad \text{con} \qquad \alpha > 0. \tag{2.1.10}$$

*Para toda $l \in V^*$, existe una única $u$ tal que la función:*

$$F(v) = a(v,v) - 2\langle l, v\rangle, \tag{2.1.11}$$

*alcanza su mínimo.*

**Demostración.**

Esta propiedad es una consecuencia del corolario anterior sólo basta demostrar que la función, $v \longrightarrow a(v,v)$; es estrictamente convexa. Por (2.1.10),

$a(v-w,v-w) \geq \alpha \|v-w\|^2$, y si $v \neq w$ entonces $a(v-w,v-w) > 0$, entonces:

$$2a(v,w) < a(v,v) + a(w,w), \tag{2.1.12}$$

sea $\lambda \in ]0,1[$, por (2.1.12), tenemos que:

$$2\lambda(1-\lambda)a(v,w) < \lambda(1-\lambda)\left(a(v,v) + a(w,w)\right) \tag{2.1.13}$$

ahora veremos que es estrictamente convexa:

$$a(\lambda v+(1-\lambda)w, \lambda v+(1-\lambda)w) = \lambda^2 a(v,v) + 2\lambda(1-\lambda)a(v,w) + (1-\lambda)^2 a(v,v)$$

y por (2.1.13) se sigue que:

$$< \lambda(1-\lambda)(a(v,v)+a(w,w)) + \lambda^2 a(v,v) + (1-\lambda)^2 a(v,v)$$

$$= \lambda a(v,v) + (1-\lambda)a(v,v).$$

Para probar que $F$, cumple (2.1.9) observemos que:

$$(\alpha\|v\| - 2\|l\|_*)^2 + 2\alpha\|v\|\,\|l\|_* \geq 0$$

es decir:

$$\alpha^2\|v\|^2 - 2\alpha\|v\|\,\|l\|_* + 4\|l\|_*^2 \geq 0$$

$$\alpha\|v\|^2 - 2\|v\|\,\|l\|_* \geq -\frac{4}{\alpha}\|l\|_*^2$$

$$\alpha\|v\|^2 - 2\|v\|\,\|l\|_* \geq \frac{\alpha}{2}\|v\|^2 - \frac{4}{\alpha}\|l\|_*^2 \tag{2.1.14}$$

ahora:

$$F(v) = a(v,v) - 2\langle l, v\rangle \geq \alpha\|v\|^2 - 2\|v\|\,\|l\|_*$$

y por (2.1.14):

$$F(v) \geq \frac{\alpha}{2}\|v\|^2 - \frac{4}{\alpha}\|l\|_*^2.$$

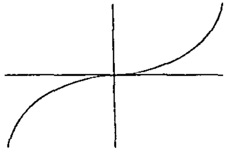
Cuando $C$ es acotado, (2.1.10) puede ser reemplazada por:

$$a(u,u) \geq 0, \qquad \forall u \in V. \blacksquare$$

## §2.2 Caracterizaciones de soluciones.

Es bien sabido que si $F : V \to \mathbf{R}$ es Gâteaux-diferenciable y si $F(u) = \min_{v \in V} F(v)$ entonces $\langle F'(u), w\rangle = 0$ para todo $w \in V$. (Véase 1.4.2 y 1.4.11).

El inverso no es cierto como lo muestra el siguiente ejemplo a menos que $F$ sea convexa.



$F(x) = x^3, \quad x \in \mathbf{R}$

De hecho, si $F$ es convexa todos los puntos críticos son necesariamente mínimos y se pueden caracterizar como sigue:

**2.2.1 Proposición.** *Sea $F$ que satisface (2.1.5) y es Gâteaux-diferenciable con derivada continua $F'$. Entonces si $u \in C$, las siguientes tres condiciones son equivalentes:*

$$u \text{ es solución de (2.1.1)}, \tag{2.2.1}$$

$$\langle F'(u), v-u\rangle \geq 0 \qquad \forall v \in C, \tag{2.2.2}$$

$$\langle F'(v), v-u\rangle \geq 0 \qquad \forall v \in C. \tag{2.2.3}$$

**Demostración.**

Si $u$ es solución de (2.1.1), entonces:

$$F(u) \leq F((1-\lambda)u + \lambda v), \quad \forall v \in C, \text{ y } \forall \lambda \in ]0,1[$$

de donde:

$$\frac{F(u + \lambda(v-u)) - F(u)}{\lambda} \geq 0.$$

Y si $\lambda \to 0_+$, tenemos:

$$\langle F'(u), v-u\rangle \geq 0 \qquad \forall v \in C.$$

Inversamente si $u$ cumple con (2.2.2) por ser $F$ convexa, tenemos:

$$F(v) - F(u) \geq \frac{F(u + \lambda(v-u)) - F(u)}{\lambda} \quad \forall v \in C, \text{ y } \forall \lambda \in ]0,1[$$

Ahora si $\lambda \longrightarrow 0_+$, tenemos:

$$F(v) - F(u) \geq \langle F'(u), v - u\rangle \geq 0 \quad \forall v \in C,$$

es decir:

$$F(v) - F(u) \geq 0 \quad \forall v \in C,$$

lo cual demuestra que $u$ es solución de (2.1.1).

Demostraremos que (2.2.2) es equivalente a (2.2.3). $F'$ es un operador monótono de $V$ en $V^*$, (prop.1.4.11), es decir,

$$\langle F'(v) - F'(u), v-u\rangle \geq 0, \quad \forall u, v \in V. \tag{2.2.4}$$

Si $u$ cumple (2.2.2):

$$\langle F'(u), v-u\rangle \geq 0 \qquad \forall v \in C,$$

sumando estas dos últimas desigualdades obtenemos:

$$\langle F'(v), v-u\rangle \geq 0 \qquad \forall v \in C.$$

Inversamente si $u$ satisface (2.2.3), tomando $v = (1-\lambda)u + \lambda w$, $w \in C$, $\lambda \in ]0,1[$ , tenemos que:

$$\langle F'((1-\lambda)u + \lambda w), (1-\lambda)u + \lambda w - u\rangle = \langle F'((1-\lambda)u + \lambda w), \lambda(w-u)\rangle$$

es decir:

$$\lambda \langle F'((1-\lambda)u + \lambda w), w - u\rangle \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\langle F'((1-\lambda)u + \lambda w), w - u\rangle \geq 0 \tag{2.2.5}$$

La función $\lambda \longrightarrow \langle F'(u + \lambda(w-u)), w-u\rangle$ , es la derivada de la función $\lambda \longrightarrow F(u + \lambda(w-u))$; que por hipótesis es continua y entonces, cuando $\lambda \longrightarrow 0$, (2.2.5) se convierte en:

$$\langle F'(u), w-u\rangle \geq 0 \qquad \forall w \in C. \blacksquare$$

Nótese que la continuidad de la derivada se usó únicamente para probar la equivalencia de (2.2.3) con las anteriores.

**Ejemplo:**
Sea $F$ como en la Proposición (2.1.4) su diferencial está dada por:

$$\langle F'(u), v\rangle = 2\{a(u,v) - \langle l, v\rangle\}, \qquad \forall v \in V,$$

entonces el hecho de que $u$ se el mínimo de (**??**) en $C$ es equivalente a las siguientes condiciones:

$$a(u, v-u) - \langle l, v-u\rangle \geq 0, \quad \forall v \in C, \ y \ u \in C,$$

o

$$a(v, v-u) - \langle l, v-u\rangle \geq 0, \quad \forall v \in C, \ y \ u \in C.$$

**2.2.2 Proposición.** *Sea $F = F_1 + F_2$, $F_1$ y $F_2$ funciones convexas s.c.i. de $C$ en $\mathbf{R}$, $F_1$ Gâteaux-diferenciable con derivada continua $F_1'$. Entonces si $u \in C$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

$$u \text{ es solución de } (2.1.1), \tag{2.2.6}$$

$$\langle F_1'(u), v-u\rangle + F_2(v) - F_2(u) \geq 0 \qquad \forall v \in C, \tag{2.2.7}$$

$$\langle F_1'(v), v-u\rangle + F_2(v) - F_2(u) \geq 0 \qquad \forall v \in C,. \tag{2.2.8}$$

**Demostración.**

Si $u$ es el mínimo en (2.1.1) entonces:

$$F(u) \leq F((1-\lambda)u + \lambda v), \qquad \forall v \in C, \quad \forall \lambda \in ]0,1[,$$

pero

$$F((1-\lambda)u + \lambda v) = F_1((1-\lambda)u + \lambda v) + F_2((1-\lambda)u + \lambda v)$$

y por convexidad de $F_2$ :

$$\leq F_1((1-\lambda)u + \lambda v) + (1-\lambda)F_2(u) + \lambda F_2(v)$$

es decir:

$$F_1(u) + F_2(u) \leq F_1((1-\lambda)u + \lambda v) + (1-\lambda)F_2(u) + \lambda F_2(v)$$

de donde:

$$0 \leq F_1(u + \lambda(v - u)) - F_1(u) + \lambda(F_2(v) - F_2(u))$$
$$0 \leq \frac{F_1(u + \lambda(v - u)) - F_1(u)}{\lambda} + F_2(v) - F_2(u)$$

y haciendo $\lambda \longrightarrow 0_+$ obtenemos:

$$\langle F_1'(u), v - u\rangle + F_2(v) - F_2(u) \geq 0 \qquad \forall v \in C.$$

Inversamente como $F_1$ es convexa:

$$F_1(v) - F_1(u) - \langle F_1'(u), v - u\rangle \geq 0, \qquad \forall v \in C, \tag{2.2.9}$$

y si sumamos (2.2.7) y (2.2.9) se sigue que:

$$F_1(v) - F_1(u) + F_2(v) - F_2(u) \geq 0$$

lo cual indica:

$$F(v) - F(u) \geq 0 \qquad \forall v \in C$$

y por lo tanto $u$ es solución de (2.1.1).

Ahora demostraremos la equivalencia entre (2.2.7) y (2.2.8). Sabemos que $F_1'$ es monótono:

$$\langle F_1'(v) - F_1'(u), v - u\rangle \geq 0,$$

si sumamos esta desigualdad con (2.2.7) tenemos que:

$$\langle F_1'(v), v - u\rangle + F_2(v) - F_2(u) \geq 0 \qquad \forall v \in C.$$

Inversamente si $u$ cumple con (2.2.8), tomamos $v = (1 - \lambda)\, u + \lambda w, \quad w \in C, \quad \lambda \in ]0, 1[$ , y vemos que:

$$\langle F_1'\left((1 - \lambda)\, u + \lambda w\right), (1 - \lambda)\, u + \lambda w - u\rangle + F_2\left((1 - \lambda)\, u + \lambda w\right) - F_2(u) \geq 0 \ \forall w \in C,$$
$$\lambda \,\langle F_1'\left((1 - \lambda)\, u + \lambda w\right), w - u\rangle + F_2\left((1 - \lambda)\, u + \lambda w\right) - F_2(u) \geq 0 \qquad \forall w \in C,$$

y por convexidad de $F_2$ :

$$\lambda \,\langle F_1'\left((1 - \lambda)\, u + \lambda w\right), w - u\rangle + \lambda\left(F_2(w) - F_2(u)\right) \geq 0 \qquad \forall w \in C,$$

Dividiendo entre $\lambda$ y haciendo $\lambda \longrightarrow 0_+$, obtenemos:

$$\langle F_1'(u), w - u\rangle + F_2(w) - F_2(u) \geq 0 \qquad \forall w \in C. \blacksquare$$

**2.2.3 Observación.** *La proposición (2.2.2) es una generalización de la proposición (2.2.1).*

**Ejemplo:**
**Desigualdades Variacionales.**
Sea $V$ un espacio de Hilbert con producto interior denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y sea $\varphi$ una función propia convexa, s.c.i. de $V$ en $\mathbf{R}$ es decir, $\varphi \in \Gamma_0(V)$. Sea:

$$F = F_1 + F_2, \qquad F_2(u) = \varphi(u),$$

$$F_1(u) = \frac{1}{2} \|u - x\|^2, \qquad x \in V, \quad \text{fijo.}$$

Como $F_1$ es estrictamente convexa y s.c.i. por la observación (2.1.4), entonces se sigue que $F$ es estrictamente convexa y s.c.i. Ahora vamos a demostrar que la función $F$ es coerciva sobre $V$; como $\varphi \in \Gamma_0(V)$, existe una función afín continua menor que $\varphi$ la cuál la podemos escribir como:

$$\langle y, \cdot \rangle + \alpha, \qquad \alpha \in \mathbf{R},$$

entonces

$$F(u) \geq \tfrac{1}{2} \|u - x\|^2 + \langle y, u \rangle + \alpha$$

ahora observemos que:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2} \|u - x\|^2 + \langle y, u \rangle &= \tfrac{1}{2} \langle u - x, u - x \rangle + \langle y, u \rangle \\
&= \tfrac{1}{2} \langle u - x, u - x \rangle + \langle u - x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \tfrac{1}{2} \langle y, y \rangle \\
&\quad - \tfrac{1}{2} \langle y, y \rangle - \tfrac{1}{2} \langle x, x \rangle + \tfrac{1}{2} \langle x, x \rangle \\
&= \tfrac{1}{2} \langle u - x, u - x \rangle + \langle u - x, y \rangle + \tfrac{1}{2} \langle y, y \rangle - \tfrac{1}{2} \langle y, y \rangle \\
&\quad + \langle y, x \rangle - \tfrac{1}{2} \langle x, x \rangle + \tfrac{1}{2} \langle x, x \rangle \\
&= \tfrac{1}{2} \langle u + y - x, u + y - x \rangle - \tfrac{1}{2} \langle y - x, y - x \rangle + \tfrac{1}{2} \langle x, x \rangle \\
&= \tfrac{1}{2} \|u + y - x\|^2 - \tfrac{1}{2} \|y - x\|^2 + \tfrac{1}{2} \|x\|^2
\end{aligned}$$

por lo tanto obtenemos que:

$$F(u) \geq \tfrac{1}{2} \|u + y - x\|^2 - \tfrac{1}{2} \|y - x\|^2 + \tfrac{1}{2} \|x\|^2 + \alpha,$$

de donde se deduce que $F$ es coerciva.

Entonces podemos aplicar el corolario (2.1.3), con $C = V$; existe un único elemento $u \in V$ tal que la función:

$$F(v) = \frac{1}{2}\|v - x\|^2 + \varphi(v).$$

alcanza su ínfimo en $u$ y por la proposición (2.2.2) sabemos que $u$ esta caracterizado por las siguientes condiciones:

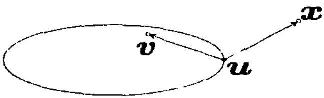
$$\langle u - x, v - u\rangle + \varphi(v) - \varphi(u) \geq 0, \qquad \forall v \in V, \tag{2.2.10}$$

$$\langle v - x, v - u\rangle + \varphi(v) - \varphi(u) \geq 0, \qquad \forall v \in V. \tag{2.2.11}$$

es decir, que estas desigualdades tienen solución única.

Estas desigualdades se llaman desigualdades variacionales y aparecen en problemas de minimización de funciones convexas. Por ejemplo, si $\varphi = \chi_C$ es la función característica de un subconjunto $C$ de $V$ entonces las ecuaciones anteriores se transforman en:

$$u \in C \qquad \text{y} \qquad \langle x - u, v - u\rangle \leq 0 \qquad \forall v \in C$$




Representación geométrica de la desigualdad variacional.

y $u$ es el único punto de $C$ que minimiza la distancia a $x$.

# Capítulo 3

# Sistemas Hamiltonianos

## §3.1 Soluciones periódicas de Sistemas Hamiltonianos

Sea $H : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}$ una función de clase $C^1$. Una curva $x(t) = (p(t), q(t))$ , en $\mathbf{R}^{2n}$, $t \in \mathbf{R}$, que satisface el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{p} = -H_q(p,q) \\ \dot{q} = H_p(p,q) \end{cases} \tag{3.1.1}$$

se llama una **solución del sistema Hamiltoniano** (3.1.1). Podemos escribir este sistema en forma matricial como sigue:

$$\dot{x} = J\nabla H(x) \tag{3.1.2}$$

donde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

con $I$ la matriz identidad de $n \times n$. Notemos que $x \cdot Jx = 0$ para todo $x \in \mathbf{R}^{2n}$.

Queremos encontrar **soluciones periódicas** del sistema es decir soluciones tales que $x(t) = x(t+T)$ para todo $t \in \mathbf{R}$ y algún **periodo** $T \in \mathbf{R}$.

Observemos que toda solución $x(t)$ de (3.1.2) está contenida en alguna superficie de nivel de $H$. En efecto, por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dt}H(x(t)) = \nabla H(x(t)) \cdot \dot{x}(t)$$

$$= \nabla H\,(x(t)) \cdot J\nabla H(x)$$
$$= 0.$$

Así, $H\,(x(t))$ =constante.

En esta sección probaremos el siguiente teorema:

**3.1.1 Teorema.** *Sea $H \in C^1(\mathbf{R}^{2n}, \mathbf{R})$ estrictamente convexa, no-negativa y coerciva. Supongamos que $H(0) = 0$. Entonces para toda $\alpha > 0$ existe una solución periódica $x(t)$ de (3.1.2) con $H\,(x(t)) = \alpha$ para todo $t \in \mathbf{R}$.*

Este teorema se debe a P.H. Rabinowitz [1973] , [1978] y A. Weinstein [1978] , además generaliza un resultado previo de H. Seifert [1948] . La demostración que aquí daremos se debe a F. Clarke.

## §3.2 Cambiando el Hamiltoniano

Empecemos notando que

**3.2.1 Proposición.** *Si $H : \mathbf{R}^{2n} \longrightarrow \mathbf{R}$, es coerciva, no-negativa y estrictamente convexa, con $H(0) = 0$, entonces para toda $\alpha > 0$, el conjunto $C_\alpha \equiv \{x \in \mathbf{R}^{2n} : H(x) \leq \alpha\}$ es estrictamente convexo y acotado.*

**Demostración.**

Ya sabemos que $C_\alpha$ es un conjunto estrictamente convexo, ahora si suponemos que no es acotado, podemos encontrar una sucesión $\{x_n\}$ contenida en $C_\alpha$ tal que $\|x_n\| \longrightarrow \infty$. Pero $H(x_n) \leq \alpha$. Esto contradice que $H$ sea coerciva. ■

**3.2.2 Proposición.** *Si $H \in C^1(\mathbf{R}^{2n}, \mathbf{R})$ es coerciva, no-negativa y estrictamente convexa, con $H(0) = 0$, entonces dados $\alpha > 0$ y $x \in \mathbf{R}^{2n} \setminus \{0\}$ existe un único número $\mu(x) > 0$ tal que $\mu(x)x \in S_\alpha \equiv \{x \in \mathbf{R}^{2n} : H(x) = \alpha\}$. Más aún, la función*

$$\mu : \mathbf{R}^{2n} \setminus \{0\} \longrightarrow (0, \infty)$$

*es de clase $C^1$.*

**Demostración.**

Primero veremos que la función $\mu$ está bien definida. Por la observación anterior tenemos que $S_\alpha$ es un conjunto acotado y además acota a una vecindad estrictamente convexa del origen. Ahora para todo $x \in \mathbf{R}^{2n}$ nos fijamos en la recta $L_x \equiv \{tx \mid t \in \mathbf{R}^+\}$ ; por ser $S_\alpha$ acotado se sigue que $S_\alpha \cap L_x \neq \emptyset$; suponemos que existen $u$ y $v$ en $S_\alpha \cap L_x$, con $\|u\| < \|v\|$, entonces existe $\tau \in (0,1)$ tal que $u = \tau \cdot 0 + (1-\tau)v$ , por ser $H$ estrictamente convexa tenemos que,

$$\alpha = H(u) < \tau H(0) + (1-\tau)H(v) = (1-\tau)H(v) = (1-\tau)\alpha$$

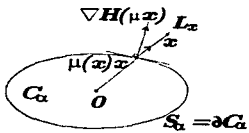



Figura 3.1: La función $\mu$

y esto es una contradicción. Entonces existe un único $u \in S_\alpha \cap L_x$ y por estar en $L_x$ existe un $t_0 \in \mathbf{R}^+$ tal que $u = t_0 x$, es decir $\mu(x) = t_0$.

Para ver que $\mu$ es de clase $C^1$ aplicamos el teorema de la función implícita a $F : \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $F(x,\mu) = H(\mu x) - \alpha$, de la siguiente manera: $F \in C^1$, ya que $H$ lo es. Dado $x \in \mathbf{R}^{2n} \setminus \{0\}$ , podemos encontrara $\mu$ tal que $H(\mu x) = \alpha$, es decir $F(x,\mu) = 0$ para todo $x \in \mathbf{R}^{2n} \setminus \{0\}$ . Por ser $H$ estrictamente convexa y por la proposición 1.4.15 tenemos que $(\mu x - 0) \cdot (\nabla H(\mu x) - \nabla H(0)) > 0$ de donde $\mu x \cdot \nabla H(\mu x) > 0$ como $\mu > 0$ se sigue que $x \cdot \nabla H(\mu x) > 0$ por lo tanto $\dfrac{\partial F}{\partial \mu} = x \cdot \nabla H(\mu x) > 0$, y por el Teorema de la función ímplicita ([Ru], Teorema 9.18) $\mu(x) \in C^1\ (R^{2n} \setminus \{0\})$ . ∎

Ahora vamos a calcular $\mu(\lambda x)$, sabemos que $\mu(\lambda x)\lambda x = \mu(x)x$ de donde $\mu(\lambda x)\lambda = \mu(x)$ es decir

$$\mu(\lambda x) = \frac{\mu(x)}{\lambda}. \tag{3.2.1}$$

Sea $1 < q < 2$ , vamos a reemplazar $H$ por la siguiente función:

$$\tilde{H}(x) = \begin{cases} \frac{1}{(\mu(x))^q} & si \quad \|x\| \neq 0 \\ 0 & si \quad \|x\| = 0. \end{cases}$$

La gráfica de esta función es de la forma:

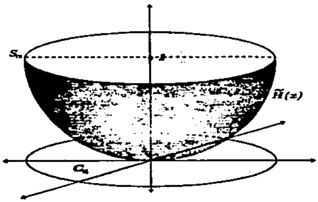



Figura 3.2: La gráfica de $\tilde{H}$.

Observemos que:

**3.2.3 Proposición.** *Sean $H$ y $\alpha$ como en la proposición anterior. Entonces:*

*(a)* $\tilde{H} \in C^1(\mathbf{R}^{2n}, \mathbf{R})$.

*(b)* $\tilde{H}$ *es estrictamente convexa, no negativa.*

*(c)* $\tilde{H}(\lambda x) = \lambda^q \tilde{H}(x)$ *para* $\lambda \geq 0$, $x \in \mathbf{R}^{2n}$.

*(d) Si $z(s)$ es una solución no trivial, periódica de $\dot{z} = J\nabla\tilde{H}(z)$ entonces existen $c > 0$ y una reparametrización $s = s(t)$ de $z$ tales que $x(t) = cz(s(t))$ es solución de (3.1.2) en $S_\alpha = H^{-1}(\alpha)$.*

**Demostración.**

Demostración de $(b)$. Para ver que $\bar{H}$ es estrictamente convexa, sean $u, v \in \mathbf{R}^{2n}$ con $\bar{H}(u) = n$ y $\bar{H}(v) = m$ podemos suponer que $m \leq n$, de donde $u, v \in C_n \equiv \left\{x \in \mathbf{R}^{2n} : \bar{H}(x) \leq n\right\}$, pero como $C_n$ es estrictamente convexo se sigue que $tu + (1-t)\, v \in int\ C_n$ si $t \in (0,1)$, es decir $\bar{H}\,(tu + (1-t)\,v) < t$ $\bar{H}(u) + (1-t)\,\bar{H}(v)$.

Demostremos $(c)$, $\bar{H}(\lambda x) = \frac{1}{(\mu(\lambda x))^q}$ y por 3.2.1 $\bar{H}(\lambda x) = \frac{\lambda^q}{(\mu(x))^q} = \lambda^q \bar{H}(x)$.

Ahora demostremos $(a)$, sabemos por 3.2.2 que $\bar{H} \in C^1\left(\mathbf{R}^{2n} \setminus \{0\}\right)$. Sean $x \in \mathbf{R}^{2n} \setminus \{0\}$, $\lambda > 0$. Dado $h \neq 0$ escribámoslo como $t\lambda = h$. Entonces, dado $v \in \mathbf{R}^{2n}$,

$$\frac{\bar{H}(\lambda x + hv) - \bar{H}(\lambda x)}{h} = \frac{\bar{H}(\lambda x + t\lambda v) - \bar{H}(\lambda x)}{t\lambda} = \lambda^{q-1}\frac{\bar{H}(x + tv) - \bar{H}(x)}{t}$$

y tomando el límite cuando $t \to 0$ tenemos que

$$\bar{H}'(\lambda x; v) = \lambda^{q-1}\bar{H}(x; v)$$

y como $\bar{H} \in C^1\left(\mathbf{R}^{2n} \setminus \{0\}\right)$,

$$\nabla\bar{H}(\lambda x) = \lambda^{q-1}\nabla\bar{H}(x).$$

Dado $y \in \mathbf{R}^{2n} \setminus \{0\}$ lo escribimos como $y = \lambda x$ con $x \in S_\alpha$, $\lambda > 0$. Como $S_\alpha$ es compacto y $\nabla\bar{H}(x)$, $x \in S_\alpha$, es continuo, $\left|\nabla\bar{H}(x)\right| < K$ para alguna constante $K > 0$. Entonces $0 \leq \left|\nabla\bar{H}(y)\right| = \lambda^{q-1}\left|\nabla\bar{H}(x)\right| \leq \lambda^{q-1}K \to 0$ si $\lambda \to 0$ es decir, $\nabla\bar{H}(y) \to 0$ si $y \to 0$.

Para demostrar la última afirmación podemos suponer que existe $c > 0$ tal que $\bar{H}\,(z(s)) = \dfrac{1}{c^q}$ para toda $s$ ya que $z$ es no trivial. Sea $u = cz$. Entonces $\bar{H}(u) = c^q\bar{H}(z) = 1$, es decir, $u \in \bar{H}^{-1}(1) = S_\alpha = H^{-1}(\alpha)$. Por el inciso anterior obtenemos que

$$\nabla\bar{H}(\lambda x) = \lambda^{q-1}\nabla\bar{H}(x). \tag{3.2.2}$$

Ahora bien, $\dot{u} = c\dot{z}$, pero $\dot{z} = J\nabla\bar{H}(z)$, es decir, $\dot{u} = cJ\nabla\bar{H}(z) = cJ\nabla\bar{H}\left(\dfrac{u}{c}\right)$ y por (3.2.2)

$$\dot{u} = c^{2-q}J\nabla\bar{H}(x). \tag{3.2.3}$$

Además como $H$ tiene a $\alpha$ como valor regular y $\tilde{H}$ tiene a 1 como valor regular entonces se sigue que $\nabla H(x) \neq 0$ y $\nabla \tilde{H}(x) \neq 0$ en $S_\alpha$ de donde se sigue que:

$$\nabla H(x) = \lambda(x) \nabla \tilde{H}(x) \text{ para toda } x \in S_\alpha \tag{3.2.4}$$

con $\lambda(x) > 0$, de hecho:

$$\lambda(x) = \frac{\|\nabla H(x)\|}{\left\|\nabla \tilde{H}(x)\right\|} \tag{3.2.5}$$

por lo tanto $\lambda(x)$ es continua.

Así, reparametrizando $u$ como

$$x(t) = u\,(s(t)) \tag{3.2.6}$$

donde $s(t)$ satisface

$$\dot{s} = c^{q-2}\lambda\,(u(s))\,. \tag{3.2.7}$$

Esta existe ya que buscamos

$$s \quad \text{tal que} \quad \dot{s} = F(s) \quad \text{con } F \text{ continua.}$$

Y por el Teorema Fundamental del Cálculo la integral indefinida de una función continua siempre existe por lo tanto la función $s$ que buscamos existe.

Ahora veremos que la función $x(t)$ definida por (3.2.6) es periódica. Como $z$ es periódica implica que $u = cz$ es periódica y por lo tanto $x$ es una función periódica sobre la superficie de nivel $S_\alpha$ que satisface

$$\dot{x} = \dot{u}(s)\dot{s} = c^{2-q} J \nabla \tilde{H}\,(u(s))\, c^{q-2}\lambda\,(u(s)) = J \nabla H(x).$$

La relevancia del resultado anterior es que nos permite olvidarnos de la condición de que la solución esté en $S_\alpha$. Basta encontrar cualquier solución periódica del nuevo hamiltoniano

$$\dot{x} = J \nabla \tilde{H}(x).$$

Para simplificar notación **supondremos de aquí en adelante que $\tilde{H} = H$, $\alpha = 1$ y denotaremos por $S = \tilde{H}^{-1}(1)$.** ■

Sea $H^*$ la polar de $H$, es decir,

$$H^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^{2n}} \{x \cdot y - H(x)\}\,.$$

**3.2.4 Proposición.**
(a) $H^* \in C^1(\mathbf{R}^{2n})$ *y* $H^*(0) = 0$
(b) $H^*$ *es estrictamente convexa*
(c) $H^*(\lambda y) = \lambda^p H^*(y)$ *para todo* $\lambda \geq 0$, $y \in \mathbf{R}^{2n}$ *donde* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

**Demostración.**

Por la Proposición 1.4.13 tenemos que $H^* \in C^1(\mathbf{R}^{2n})$.

Por definición tenemos que $H^*(0) = 0$ y además por la Definición 1.3.12 sabemos que $H^*$ es estrictamente convexa.

Para demostrar la última afirmación podemos suponer que $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} H^*(\lambda y) &= \sup_{x\in\mathbf{R}^{2n}} \{x \cdot \lambda y - H(x)\} \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda}\right)^p \sup_{x\in\mathbf{R}^{2n}} \{x \cdot \lambda y - H(x)\} \\ &= \lambda^p \sup_{x\in\mathbf{R}^{2n}} \left\{\frac{\lambda}{\lambda^p} x \cdot y - \frac{H(x)}{\lambda^p}\right\} \\ &= \lambda^p \sup_{x\in\mathbf{R}^{2n}} \left\{\frac{x}{\lambda^{p-1}} \cdot y - H\left(\frac{x}{\lambda^{\frac{p}{q}}}\right)\right\}. \end{aligned}$$

pero como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se sigue que $\frac{p}{q} = p - 1$, y haciendo $u = \frac{x}{\lambda^{\frac{p}{q}}}$ obtenemos:

$$H^*(\lambda y) = \lambda^p \sup_{u\in\mathbf{R}^{2n}} \{u \cdot y - H(u)\} = \lambda^p H^*(y). \blacksquare$$

## §3.3 El problema variacional

**Consideremos los espacios ($p > 2$ como antes)**

$$L_0^p \equiv \left\{ y \in L^p\left([0,1], \mathbf{R}^{2n}\right) \;\middle|\; \int_0^1 y\,dt = 0 \right\} \tag{3.3.8}$$

$$W^{1,p}(S^1) \equiv \left\{ x \in W^{1,p}\left([0,1], \mathbf{R}^{2n}\right) \;\mid x(0) = x(1) \right\}.$$

**Que $y \in L^p([0,1], \mathbf{R}^{2n})$ significa que $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{2n})$, y que $y_i \in L^p([0,1], \mathbf{R})$ para $1 \leq i \leq 2n$.** De la misma manera que $x \in W^{1,p}([0,1], \mathbf{R}^{2n})$ quiere decir que $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$, y que $x_i \in W^{1,p}([0,1], \mathbf{R})$ para $1 \leq i \leq 2n$, el espacio de *Sobolev* ([Bre] Capítulo VII) de las curvas absolutamente continuas $[0,1] \to \mathbf{R}$ cuya derivada está en $L^p$. Por último $\int_0^1 y dt = 0$ es lo mismo que $\int_0^1 y_i dt = 0$ para $1 \leq i \leq 2n$.

**3.3.5 Proposión.** *El espacio $L_0^p$ es de Banach.*

**Demostración.**

Consideremos la funcional lineal y continua

$$\begin{aligned} L^p\left([0,1], \mathbf{R}^{2n}\right) &\xrightarrow{\omega} \mathbf{R} \\ y \longrightarrow &\int_0^1 y dt. \end{aligned}$$

Primero veremos que está bien definida es decir que $\int_0^1 y_i dt < \infty$ con $y_i \in L^p([0,1], \mathbf{R})$, por la desigualdad de Hölder obtenemos que $\int_0^1 |y_i| \, dt \leq \|y_i\|_p < \infty$ de aquí también se sigue que $\omega$ es continua. Entonces $L_0^p$ es el núcleo de $\omega$ por lo tanto es un subespacio cerrado de un espacio de Banach [W] por lo tanto $L_0^p$ es de Banach. ■

Observemos que es importante que $\omega$ sea continua porque en general que sea lineal no implica que sea continua, y entonces no podemos asegurar que $L_0^p$ sea un subespacio cerrado.

Al espacio $L^p\left([0,1], \mathbf{R}^{2n}\right)$ le podemos asociar una norma definida como:

$$\|y\|_{L^p} = \left(\sum_{i=1}^{2n} \|y_i\|_{L^p}^p\right)^{1/p}.$$

donde $\|y_i\|_{L^p} = \left(\int_0^1 |y_i|^p \, dt\right)^{1/p}$ es la norma en $L^p\left([0,1], \mathbf{R}\right)$.

Y en el espacio $W^{1,p}(S^1)$ tomaremos como norma:

$$\|x\|_{W^{1,p}} = \|\dot{x}\|_{L^p} \tag{3.3.9}$$

la cual es equivalente a la usual: $\|x\|_{W^{1,p}} = \|x\|_{L^p} + \|\dot{x}\|_{L^p}$ ([Bre], Proposición VIII.12 ).

La función

$$\begin{array}{rcl} W^{1,p}(S^1) & \xrightarrow{\delta} & L_0^p \\ x & \rightarrow & -J\dot{x} \end{array}$$

es lineal y continua. Primero veremos que su imagen está en $L_0^p$. Como $x \in W^{1,p}(S^1)$ se sigue que $\dot{x} \in L^p$ de donde $-J\dot{x} \in L^p$, para ver que es un elemento de $L_0^p$ vemos que $\int_0^1 -J\dot{x}dt = -Jx(1) + Jx(0) = -J\left(x(1) - x(0)\right) = 0$ (véase [Bre], Teorema VIII) de donde $\delta(x) \in L_0^p$. Para probar que es lineal, sean $x$ y $y$ en $W^{1,p}(S^1)$ entonces $\delta(x+y) = -J(\dot{x}+\dot{y}) = -J\dot{x} - J\dot{y} = \delta(x) + \delta(y)$, de igual manera $\delta(\lambda x) = -J\lambda\dot{x} = \lambda\delta(x)$.

Para demostrar que es continua, observemos que $\|-J\dot{x}\|_{L_p} = \|\dot{x}\|_{L_p}$; sean $x$ y $y$ elementos de $W^{1,p}(S^1)$, entonces

$$\begin{aligned} \|\delta(x) - \delta(y)\|_{L^p} &= \|-J\dot{x} + J\dot{y}\|_{L^p} \\ &= \|J(\dot{y} - \dot{x})\|_{L^p} \\ &= \|\dot{y} - \dot{x}\|_{L^p} \\ &= \|x - y\|_{W^{1,p}}. \end{aligned}$$

De donde $\delta$ es continua, de hecho es una isometría.

Más aún podemos definir a:

$$L_0^p \quad \xrightarrow{\gamma} \quad W^{1,p}(S^1)$$

como

$$\gamma(y)(t) \equiv \int_0^t Jy(s)ds, \qquad y \in L_0^p, \quad t \in [0,1],$$

la cuál también es lineal y continua: Sea $y \in L_0^p$ entonces sea $x(t) = \gamma(y)(t) = \int_0^t Jy(s)\ ds$ es claro que $x(0) = 0$, pero también como $y \in L_0^p$ tenemos que $\int_0^1 y_i dt = 0$ para $1 \leq i \leq 2n$, es decir $x(1) = 0$, además $\dot{x}(t) = Jy(t)$, es decir $\dot{x}(t) \in L_0^p$, por lo tanto $x(t) \in W^{1,p}(S^1)$.

Como $J$ y la integral son lineales se sigue que $\gamma$ es lineal. Para ver que es continua sean $y$ y $x$ elementos de $L_0^p$ entonces definimos $v(t) = \gamma(y)(t) \equiv \int_0^t Jy(s)ds$, y $u(t) = \gamma(x)(t) \equiv \int_0^t Jx(s)ds$, de donde $\dot{v}(t) = Jy(t)$, y $\dot{u}(t) = Jx(t)$. Ahora:

$$\|v - u\|_{W^{1,p}} = \|\dot{v} - \dot{u}\|_{L^p} = \|Jy - Jx\|_{L^p} = \|y - x\|_{L^p}$$

es decir $\gamma$ es continua.

Por último observemos que:

$$\gamma \circ \delta(x) = x - x(0) \tag{3.3.10}$$

$$\delta \circ \gamma(y) = y. \tag{3.3.11}$$

**3.3.6 Proposición.** *Si* $x \in W^{1,p}([0,1])$ *y satisface que* $\dot{x} = \nabla H(x)$, *entonces* $x \in C^1([0,1])$.

**Demostración.**

Como $x \in W^{1,p}([0,1])$, $x$ es continua en $[0,1]$ (véase [Bre], Teorema VIII.2) y como $H \in C^1(\mathbf{R}^{2n})$, la composición $\dot{x} = \nabla H(x)$ es continua en $[0,1]$. ■

**3.3.7 Proposición.** $x \in W^{1,p}$ *es una solución de periodo 1 de* $\dot{x} = J\nabla H(x)$ *si y sólo si* $y = \delta(x) \in L_0^p$ *es solución de*

$$\nabla H^*(y) = \gamma(y) + x_0 \qquad en\ L^p \tag{3.3.12}$$

*para algún* $x_0 \in \mathbf{R}^{2n}$.

**Demostración.**

Por lo anterior

$$y = \delta(x) = -J\dot{x} = \nabla H(x) \in L_0^p.$$

Por Proposición 1.4.11, Corolario 1.4.5 y (3.3.10)

$$\nabla H^*(y) = x = \gamma(y) + x(0).$$

Inversamente,

$$x = \gamma(y) + x_0 = \nabla H^*(y) \in W^{1,p}\left(S^1\right),$$

y por la Proposición 1.4.11, Corolario 1.4.5 y (3.3.11)

$$\nabla H(x) = y = \delta(x) = -J\dot{x}.$$

■

**3.3.8 Proposición.** *$y \in L_0^p$ satisface (3.3.12) si y sólo si*

$$\int_0^1 (\nabla H^*(y) - \gamma(y)) \cdot z \; dt = 0 \quad \textit{para todo } z \in L_0^p. \tag{3.3.13}$$

*donde $w \cdot z$ denota el producto escalar usual en $\mathbf{R}^{2n}$.*

**Demostración.**

Si $y \in L_0^p$ satisface (3.3.12) se sigue que $\int_0^1 (\nabla H^*(y) - \gamma(y)) \cdot z \; dt$ $= \int_0^1 x_0 \cdot z dt = x_0 \cdot \int_0^1 z dt = 0$ para todo $z \in L_0^p$.

Ahora si $y \in L_0^p$, satisface que $\int_0^1 (\nabla H^*(y) - \gamma(y)) \cdot z \; dt = 0$ para todo $z \in L_0^p$ entonces $\int_0^1 (\nabla H^*(y) - \gamma(y) - a) \cdot z \; dt = 0$, para toda $a \in \mathbf{R}$ y todo $z \in L_0^p$, en efecto

$$\int_0^1 (\nabla H^*(y) - \gamma(y) - a) \cdot z \; dt = \int_0^1 (\nabla H^*(y) - \gamma(y)) \cdot z \; dt - a \cdot \int_0^1 z \; dt$$
$$= \int_0^1 (\nabla H^*(y) - \gamma(y)) \cdot z \; dt = 0.$$

Primero veremos que $\nabla H^*(y) - \gamma(y) \in L^p$; como $H^* \in C^1$ y $y \in L_0^p$ tenemos que $\nabla H^*(y) \in L^p$ además tenemos que $\gamma(y) \in W^{1,p}$, por lo tanto $\nabla H^*(y) - \gamma(y) \in L^p$, ahora si definimos a $x_0 = \int_0^1 (\nabla H^*(y) - \gamma(y)) \, dt$ tenemos que $\nabla H^*(y) - \gamma(y) - x_0 \in L_0^p$. Sea $z(t) = \nabla H^*(y) - \gamma(y) - x_0$, se sigue que:
$\int_0^1 (\nabla H^*(y) - \gamma(y) - x_0) \cdot (\nabla H^*(y) - \gamma(y) - x_0) \, dt = 0.$
De donde $\nabla H^*(y) - \gamma(y) - x_0 = 0$, casi dondequiera en $[0, 1]$ . ■

Consideremos la funcional

$$F^* : L_0^p \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$F^*(y) = \int_0^1 \left( H^*(y) - \frac{1}{2} y \cdot \gamma(y) \right) \; dt.$$

**3.3.9 Proposición.**

*a) $F^*$ es Gâteaux-diferenciable en $L_0^p$ y su derivada está dada por*

$$DF^*(y)z = \int_0^1 (\nabla H^*(y) - \gamma(y)) \cdot z dt, \qquad y, z \in L_0^p.$$

*b) $F^*$ es coerciva*

**Demostración.**

Para ver que es Gâteaux-diferenciable en $L_0^p$ sean $y$ y $z$ en $L_0^p$, entonces
$F^*(y+sz) - F^*(y) =$

$\int_0^1 \left(H^*(y+sz) - \frac{1}{2}(y+sz)\cdot(\gamma(y+sz))\right) dt - \int_0^1 \left(H^*(y) - \frac{1}{2} y \cdot \gamma(y)\right) dt =$

$\int_0^1 \left(H^*(y+sz) - \frac{1}{2}(y+sz)\cdot(\gamma(y+sz)) - H^*(y) + \frac{1}{2} y \cdot \gamma(y)\right) dt =$

$\int_0^1 (H^*(y+sz) - H^*(y))\, dt - \frac{1}{2}\int_0^1 ((y+sz)\cdot(\gamma(y+sz)) - y\cdot\gamma(y))\, dt =$

$\int_0^1 (H^*(y+sz) - H^*(y))\, dt - \frac{1}{2}\int_0^1 ((y+sz)\cdot(\gamma(y)+s\gamma(z)) - y\cdot\gamma(y))\, dt =$

$\int_0^1 (H^*(y+sz) - H^*(y))\, dt - \frac{1}{2}\int_0^1 (y\cdot s\gamma(z) + sz\cdot\gamma(y) + s^2 z\cdot\gamma(z))\, dt.$

Por lo tanto:

$\frac{F^*(y+sz) - F^*(y)}{s} =$

$\int_0^1 \frac{(H^*(y+sz) - H^*(y))}{s} dt - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(y\cdot s\gamma(z) + sz\cdot\gamma(y) + s^2 z\cdot\gamma(z))}{s} dt =$

$\int_0^1 \frac{(H^*(y+sz) - H^*(y))}{s} dt - \frac{1}{2}\int_0^1 (y\cdot\gamma(z) + z\cdot\gamma(y) + sz\cdot\gamma(z))\, dt =$

y tomando el límite:

$(F^*)'(y; z) =$

$\lim_{s\to 0}\left[\int_0^1 \frac{(H^*(y+sz) - H^*(y))}{s} dt - \frac{1}{2}\int_0^1 (y\cdot\gamma(z) + z\cdot\gamma(y) + sz\cdot\gamma(z))\, dt\right].$

El límite puede pasar dentro de la integral debido al Teorema de Convergencia acotada ver [Roy], de modo que

$(F^*)'(y; z) = \int_0^1 \nabla H^*(y)\cdot z dt - \frac{1}{2}\int_0^1 (y\cdot\gamma(z) + z\cdot\gamma(y))\, dt.$

Ahora veremos que:

$$\int_0^1 (z \cdot \gamma(y) - y \cdot \gamma(z))\, dt = 0. \tag{3.3.14}$$

Como $\gamma(z)$ y $\gamma(y)$ tienen período 1,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 \tfrac{d}{dt}\left(\gamma(z) \cdot J\gamma(y)\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\tfrac{d}{dt}\gamma(z) \cdot J\gamma(y)\right) dt + \int_0^1 \left(\gamma(z) \cdot J\tfrac{d}{dt}\gamma(y)\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(-J\tfrac{d}{dt}\gamma(z) \cdot \gamma(y)\right) dt - \int_0^1 \left(\gamma(z) \cdot (-J)\, \tfrac{d}{dt}\gamma(y)\right) dt \\
&= \int_0^1 z \cdot \gamma(y)\; dt - \int_0^1 \gamma(z) \cdot y\; dt
\end{aligned}$$

y con esto probamos 3.3.14 lo cual es equivalente a:

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 (y \cdot \gamma(z) + z \cdot \gamma(y))\, dt = -\int_0^1 z \cdot \gamma(y) dt.$$

Por lo tanto

$$DF^*(y)z = \int_0^1 (\nabla H^*(y) - \gamma(y)) \cdot z dt, \qquad y, z \in L_0^p.$$

Para ver que $F^*$ es coerciva sea $\{y_n\}$ una sucesión tal que $\|y_n\|_{L^p} \to \infty$ si $n \to \infty$, sea $y_n = \lambda_n u_n$ con $\|u_n\|_{L^p} = 1$.

$$\begin{aligned}
F^*(\lambda_n u_n) &= \int_0^1 \left(H^*(\lambda_n u_n) - \tfrac{1}{2}\lambda_n u_n \cdot \gamma(\lambda_n u_n)\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\lambda_n^p \cdot H^*(u_n) - \frac{\lambda_n^2}{2} u_n \cdot \gamma(u_n)\right) dt \\
&= \lambda_n^2 \left(\lambda_n^{p-2} \int_0^1 H^*(u_n) dt - \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 u_n \cdot \gamma(u_n)\; dt\right)
\end{aligned}$$

para ver que $F^*(\lambda_n u_n) \to \infty$ si $n \to \infty$ tenemos que demostrar que

$$\left|\int_0^1 y \cdot \gamma(y)\; dt\right| \leq K \qquad \text{para toda } \|y\|_{L^p} = 1$$

$$\left|\int_0^1 y\cdot\gamma(y)\ dt\right| \leq \int_0^1 |y\cdot\gamma(y)|\ dt$$

pero

$$|y\cdot\gamma(y)| = \left|y\cdot \int_0^t Jy(s)ds\right|$$
$$= \left|-y_1 \int_0^t y_{n+1}(s)ds - \ldots + y_{2n}\int_0^t y_n(s)ds\right|$$
$$\leq |y_1|\left|\int_0^t y_{n+1}(s)ds\right| + \ldots + |y_{2n}|\left|\int_0^t y_n(s)ds\right|$$

y como

$$\left|\int_0^t y_i(s)ds\right| \leq \int_0^t |y_i(s)|\,ds \leq \int_0^1 |y_i(s)|\,ds \leq \|y_i\|_{L^p} \leq 1 \ (Hölder) \text{ para toda } i$$

se sigue que

$$|y\cdot\gamma(y)| \leq |y_1| + \ldots + |y_{2n}|$$

por lo tanto

$$\left|\int_0^1 y\cdot\gamma(y)\ dt\right| \leq \int_0^1 |y_1| + \ldots + |y_{2n}|\ dt$$
$$\leq \|y_1\|_{L^p} + \ldots + \|y_{2n}\|_{L^p}$$
$$\leq \left(\sum_{i=1}^{2n} \|y_1\|_{L^p}^p\right)^{1/p} = \|y\|_{L^p} = 1.$$

Ahora como $F^*$ es Gâteaux diferenciable en particular es s.c.i., de modo que la función $F^*$ cumple las hipótesis del Teorema 2.1.2, por lo tanto existe $y^* \in L_0^p$ tal que $F^*$ alcanza su mínimo y además $\int_0^1 (\nabla H^*(y) - \gamma(y))\cdot z\ dt = 0$ para todo $z \in L_0^p$. Sólo falta probar que $y^* \neq 0$ y para eso probaremos que existen valores para los cuáles la funcional $F^*$ es menor que 0.

**3.3.10 Corolario.** (3.3.13) *tiene una solución no-trivial.*

**Demostración.**

$F^*(tx) = t^p\cdot \int_0^1 H^*(x)\ dt - \dfrac{t^2}{2}\int_0^1 x\cdot\gamma(x)\ dt$, es decir $F^*(tx) = A(x)t^p - B(x)\dfrac{t^2}{2}$. Ahora veremos que $B(x) > 0$ para alguna $x$, es decir, que existe $x(t)$ tal que $\int_0^1 x\cdot\gamma(x)\ dt > 0$.

Sea $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ el $i - \acute{e}simo$ véctor coordenado en $\mathbf{R}^{2n}$. Sea
$x(t) = (\mathrm{sen} 2\pi t) \cdot e_1 - (\cos 2\pi t) e_{n+1} \in L_0^p$

$$\gamma(x)(t) = \left(\int_0^t \cos 2\pi s ds\right) e_1 + \left(\int_0^t \mathrm{sen} 2\pi s ds\right) e_{n+1}$$
$$= \left(\tfrac{1}{2\pi} sen 2\pi t\right) e_1 - \tfrac{1}{2\pi}\left(\cos 2\pi t - 1\right) e_{n+1}$$

por lo tanto $(x \cdot \gamma(x)) \cdot (t) = \frac{1}{2\pi}(1 - \cos 2\pi t)$ y
$\int_0^1 x \cdot \gamma(x)\, dt = \dfrac{1}{2\pi} > 0.$

De donde $B(x) > 0$ y como $p > 2$, y para valores de $t$ cercanos a 0 se tiene que $F^*(tx) < 0$, por lo tanto $\inf F^* < 0$. ■

# Bibliografía


[Ba] V. Barbu, Th. Precupanu, *Convexity and optimization in Banach Spaces*, Noordhoff, 1978.

[Bre] H. Brézis, *Análisis funcional. Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial, 1989.

[Br] A. Brinsted, *Conjugate functions in topological vector spaces,* Mat.-fys. Medd. Dansk. Vid. Selsk, t.34, 1964.

[Ch] G. Choquet, *Cours d'Analyse*, Masson, [2] 1964.

[Eke] I. Ekeland, R. Temam, *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland, 1976.

[Kol] A. N. Kolmogórov, S. V. Fomín, *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional,* MIR Moscu, 1978.

[M] J. J. Moreau, *Proximité et dualité dans un espace hilbertien.* Bull. Soc. Math France 93, 1965 273-299.

[V] Jan Van Tiel, *Convex Analysis*, John Wiley Sons Ltd, 1984.

[Ro1] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, 1970.

[Ro2] R. T. Rockafellar, *Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions,* Duke Math. 33, 1960, 81-90.

[Roy] H. L. Royden, *Real Analysis*, The Macmillan Company, 1968.

[Ru] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis,* Mc Graw-Hill, 1964.

[S] M. Struwe, *Variational Methods*, Springer-Verlag, 1990.

[W] P. Wojtaszczyk. *Banach spaces for analyst,* Cambridge Univ. 1991.

# Índice