



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**LA GEOMETRIA DE LOS GRUPOS
DISCRETOS CLASICOS**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A :
CARLOS ALFONSO CABRERA OCAÑAS

DIRECTOR DE TESIS: M. EN C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORTOSA

**FACULTAD DE CIENCIAS
SERVICIO DE REGISTRO
1997**



**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACION VARIA

COMPLETA LA INFORMACION



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

LA GEOMETRIA DE LOS GRUPOS DISCRETOS CLASICOS

realizado por CARLOS ALFONSO CABRERA OCAÑAS

con número de cuenta 9355268-0 , pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atestamos:

Director de Tesis Propietario	M. en C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA
Propietario	Dra. SYLVIA DE NEYMET URBINA
Propietario	Dr. ALBERTO LEON KUSHNER SCHNUR
Suplente	M. en C. EMMA LAM OSNAYA
Suplente	Mat. JOSE LUIS EUGO GOYTIA

JGj
S. de Neymet
Alberto León Kushner
Emma Lam O.
tr

Comité Directivo de Matemáticas
DR. FRAUDEL FALCONI MAGARA
DIRECCIÓN DE FACULTAD
DE
MATEMÁTICAS

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar, profundamente a mi familia, por su gran esfuerzo y sacrificio por mantenerme a flote durante estos años. Especialmente a mi Madre, a quien dedico éste trabajo.

De quien se han recibido tantos beneficios, enseñanzas y consejos, es insuficiente cualquier agradecimiento. José Antonio Gómez, no sólo ha sido un excelente maestro y guía, sino también un gran amigo. De nuevo, muchas gracias Toño.

A Rogelio por estar siempre en los momentos más difíciles para ofrecer su gran ayuda.

A mis sinodales Sylvia de Neymet, Emma Lam, León Kushner y José Luis Lugo quienes pusieron tiempo y energías en la revisión de ésta tesis.

Y a todos los profesores y compañeros que he tenido el gusto por conocer durante la carrera.

Muchas Gracias.

Contenido

Introducción	iv
1 Preliminares.	1
1.1 El Espacio Euclidiano.	1
1.1.1 Espacios Métricos.	2
1.1.2 Transformaciones Ortogonales.	3
1.1.3 Acciones de Grupos.	3
1.1.4 Geodésicas.	4
1.2 El Espacio Esférico.	4
1.3 Geometría Hiperbólica.	6
1.3.1 El Espacio de Lorentz.	6
1.3.2 Transformaciones de Lorentz.	7
1.4 El Espacio Hiperbólico.	8
1.4.1 Geodésicas Hiperbólicas.	9
1.5 Geometría Inversa.	9
1.5.1 Proyección Estereográfica.	10
1.5.2 Transformaciones de Möbius.	11
1.5.3 La Extensión de Poincaré.	12
1.6 Modelos para el Espacio Hiperbólico.	13
1.6.1 El Modelo de la Bola Conforme.	13
1.6.2 El Modelo del Semiespacio Superior.	15
1.6.3 El Modelo del Disco Proyectivo.	15
1.7 Espacios de Transformaciones.	17
1.7.1 Clasificación de las Transformaciones.	17
1.7.2 La Topología Compacto Abierta.	18
2 Isometrías del Espacio Hiperbólico.	19
2.1 Grupos Topológicos.	19
2.1.1 Grupos Topológicos Cociente	21
2.2 Grupos de Isometrías	24
2.2.1 Grupos de Transformaciones de Möbius	25
2.3 Grupos Discretos	29
2.3.1 Grupos Discontinuos	31
2.4 Grupos Euclidianos Discretos.	34
2.4.1 Conmutatividad en Grupos Discretos Euclidianos	36

2.5	Grupos Elementales.	45
2.5.1	Grupos Elementales Del Tipo Elíptico.	46
2.5.2	Grupos Elementales del Tipo Parabólico	46
2.5.3	Grupos Elementales del Tipo Hiperbólico.	48
2.5.4	Grupos Solubles.	50
3	Conjuntos Convexos Politopos.	54
3.1	Conjuntos Convexos.	54
3.1.1	Lados de un Conjunto Convexo	55
3.2	Poliedros Convexos.	58
3.2.1	Caras de un Poliedro Convexo.	63
3.2.2	Vértices de un Poliedro Convexo.	63
3.2.3	Eslabones de un Poliedro Convexo.	65
3.3	Politopos	75
3.3.1	Politopos Generalizados.	77
3.3.2	Politopos Regulares.	79
3.3.3	Politopos Regulares Ideales.	82
4	Dominios Fundamentales.	83
4.1	Regiones Fundamentales.	85
4.1.1	Regiones Fundamentales Localmente finitas.	88
4.1.2	Espacios Métricos Rígidos.	92
4.1.3	Dominios de Dirichlet.	94
4.2	Poliedros Convexos Fundamentales.	97
4.2.1	Poliedros Fundamentales.	98
4.3	Teselaciones	102
4.3.1	Pareo de Lados.	104
4.3.2	Ángulos Diédricos.	106
4.3.3	Ciclos de Poliedros.	107
4.3.4	Relaciones de Ciclos.	109
5	Grupos Discretos Clásicos.	112
5.1	Grupos de Reflexiones.	112
5.1.1	Grupos de Coxeter.	123
5.2	Grupos de Reflexiones Simpliciales.	124
5.2.1	Grupos Triangulares de Reflexiones, Caso Esférico.	125
5.2.2	Grupos Triangulares de Reflexiones, Caso Euclidiano.	127
5.2.3	Grupos Triangulares de Reflexiones, Caso Hiperbólico.	128
5.2.4	Grupos Tetraédricos de Reflexiones.	130
5.2.5	Formas Bilineales.	131
5.2.6	Clasificación de Grupos de Reflexiones en Simplejos.	132
5.3	Grupos de Reflexiones en Simplejos Generalizados.	134
5.4	Grupos Cristalográficos.	138

Introducción

El concepto de transformación es quizá el más importante en las Matemáticas. Tanto así, que llevó a Felix Klein a proponer en su famoso Programa de Erlängen que a cualquier geometría le correspondía un grupo de transformaciones, que respetaban sus propiedades e inversamente a un grupo de transformaciones le correspondería una geometría. Este punto de vista reveló una veta que aún en nuestros días no se ha agotado y aún continúa brindando frutos.

En el presente trabajo, estudiaremos los grupos de isometrías de las geometrías esférica, Euclidiana e hiperbólica, su estructura y relación intrínseca con el espacio en el que actúan. Para esto nos será muy útil considerar en estos, además de su estructura algebraica, una topológica, con el fin de analizar propiedades locales en los grupos de isometrías. Con esta herramienta podremos, bajo ciertas condiciones, obtener información del grupo por su acción en el espacio y viceversa. Como elementos de gran importancia surgen los grupos discretos de isometrías, ya que en estos espacios, su espacio de órbitas se puede recuperar también como un espacio de órbitas en una región más pequeña; la región fundamental. Esta región bajo ciertas condiciones es el interior de un poliedro. El estudio de esta clase de grupos es nuestro objetivo principal.

En el primer capítulo expondremos algunas herramientas básicas para el curso de la tesis; las definiciones de las geometrías esférica, Euclidiana e hiperbólica, las cuales servirán de marco a nuestro objetivo. Algunos resultados de geometría inversa y la topología compacto-abierto también se incluirán. Sin embargo el lector interesado, deberá recurrir a los libros de Beardon [B] y Dugundji [Du] para un tratamiento más amplio.

En el segundo capítulo veremos algo de la teoría de grupos topológicos. El concepto de grupo topológico abarca la noción de un grupo continuo de transformaciones de un espacio de dimensión n , fue desarrollado principalmente por Lie, Cartan y Killing a finales del siglo XIX. Aplicaremos estos resultados, especialmente, a los grupos de isometrías de espacios métricos finitamente compactos. Estudiando las soluciones a ecuaciones diferenciales Poincaré encontró que los grupos discretos estaban estrechamente vinculados con los grupos discontinuos probando para grupos de isometrías del espacio hiperbólico el teorema 2.9. Veremos algunos resultados acerca de los grupos discretos de isometrías Euclidianos. Los grupos elementales fueron introducidos por Ford en 1929, aunque nuestra definición está basada en el

**La Geometría de los Grupos Discretos
Clásicos.**

**Carlos Alfonso Cabrera Ocañas
Facultad de Ciencias UNAM**

Julio 1997

texto de Beardon.

El tercer capítulo desarrolla la teoría de poliedros y politopos desde un punto de vista de la topología de conjuntos, esto nos servirá para estudiar en el capítulo cuarto las regiones fundamentales de los grupos discretos de isometrías, y las condiciones bajo las que un grupo de isometrías induce una teselación en el espacio por regiones fundamentales.

Por último clasificaremos los grupos discretos de reflexiones en simplejos, se introducen los grupos de Coxeter, viendo que los grupos de reflexiones en simplejos con ángulos diédricos submúltiplos de π tienen una representación como grupos de Coxeter, para estos grupos de reflexiones, tienen asociadas gráficas dadas por Coxeter en 1935. Los grupos triangulares de reflexión fueron determinados por Schwarz en 1873. Los grupos tetraédricos hiperbólicos de reflexiones fueron considerados por Dyck en 1883. Se darán teoremas que inducen la construcción de las gráficas de Coxeter para los grupos de reflexiones simplejos compactos y no compactos de las tres geometrías. De la teoría de grupos cristalográficos damos una breve aproximación llegando a su clasificación en el teorema de Bieberbach.

Este trabajo está basado en el libro de John G. Ratcliffe *Foundations of Hyperbolic Manifolds*.

1

Preliminares.

En el presente capítulo se exponen las definiciones y resultados básicos de las distintas geometrías de las que se ocupa este trabajo. Las demostraciones las omitimos, el lector interesado puede encontrarlas en los libros que se dan en la bibliografía. Se numerarán principalmente los enunciados a los que se hace referencia en capítulos posteriores.

1.1 El Espacio Euclidiano.

Un modelo vectorial común para el espacio Euclidiano es \mathbb{R}^n , el espacio vectorial real de dimensión n . En este espacio se define el producto interior Euclidiano entre dos vectores $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ en \mathbb{R}^n por

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Algunas propiedades de esta operación son más generales y se desarrollan alrededor de la siguiente.

Definición. *Un producto interior en un espacio vectorial V es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ denotada por $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$, tal que para todos v, w en V ,*

- (1) $\langle v, \cdot \rangle$ y $\langle \cdot, w \rangle$, son funciones lineales de V a \mathbb{R} (bilinealidad);
- (2) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ (simetría);
- (3) si $v \neq 0$, entonces existe una $w \neq 0$ tal que $\langle v, w \rangle \neq 0$ (no degenerado).

Un producto interior es definido positivo si $\langle v, v \rangle > 0$ para todo vector v distinto de cero en V .

Ejemplo. El producto interior Euclidiano en \mathbb{R}^n es bilineal, simétrico, es no degenerado, y es definido positivo.

Un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define una función $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$, llamada norma, de la manera usual:

$$\|v\| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

La norma de x en \mathbb{R}^n inducida por el producto interior Euclidiano es la norma Euclidiana y la denotaremos por $|x|$.

Si en V , está definido un producto interior entonces para todo v y w en V se cumple

$$|(v, w)| \leq \|v\| \|w\|$$

la igualdad se satisface si y sólo si v y w son vectores linealmente dependientes. Esta es la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

1.1.1 ESPACIOS MÉTRICOS.

Definición. Una métrica en un conjunto X es una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- (1) $d(x, x) \geq 0$ (definida positiva);
- (2) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$;
- (3) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetría); y
- (4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (desigualdad del triángulo).

Un espacio métrico X es un conjunto dotado de una métrica.

Un elemento de un espacio métrico es llamado un *punto*. Sea X un espacio métrico con métrica d . La *bola abierta* de radio $r > 0$, centrada en el punto a de X , está definida como el conjunto

$$B(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}.$$

La *bola cerrada* de radio $r > 0$, centrada en el punto a de X , está definida como el conjunto

$$C(a, r) = \{x \in X : d(a, x) \leq r\}.$$

La *nube abierta* de radio $r > 0$, de un subconjunto A de X es el conjunto

$$N(A, r) = \bigcup_{a \in A} B(a, r).$$

La topología generada por las bolas abiertas es llamada la topología métrica inducida por d en X . A menos que se afirme lo contrario, de aquí en adelante, supondremos a todo espacio métrico X dotado de la topología inducida por su métrica.

La distancia Euclidiana entre dos vectores x, y en \mathbb{R}^n está definida por

$$d_E(x, y) = |x - y|.$$

La métrica d_E de E^n se llama la métrica Euclidiana.

Definición. Un espacio métrico X es finitamente compacto si todas las bolas cerradas son compactas, esto es

$$C(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\},$$

es compacto para toda $a \in X$ y toda $r > 0$.

Definición. Una isometría de un espacio métrico X a un espacio métrico Y es una biyección ϕ entre ellos que preserva distancias. En tal caso diremos que X y Y son isométricos. Cuando $X = Y$ diremos que ϕ es una isometría de X .

La inversa de una isometría es una isometría, además la composición de isometrías es una isometría. El conjunto de isometrías de un espacio a sí mismo forma un grupo $I(X)$ con la operación multiplicación. Este es el llamado grupo de isometrías de X .

1.1.2 TRANSFORMACIONES ORTOGONALES.

Definición. Una función $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación ortogonal si

$$\phi(x) \cdot \phi(y) = x \cdot y$$

para todos x, y en \mathbb{R}^n .

Definición. Una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de \mathbb{R}^n se dice ortonormal si

$$v_i \cdot v_j = \delta_{ij} \text{ (Delta de Kronecker) para todos } i, j.$$

Una función $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es ortogonal si es lineal y $\{\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)\}$ forma una base ortonormal de \mathbb{R}^n . Además cada transformación ortogonal es una isometría Euclidiana. Una matriz A se dice ortogonal si la transformación lineal asociada a A es ortogonal. El conjunto de todas las matrices de $n \times n$ ortogonales junto con la multiplicación de matrices como operación forma un grupo $O(n)$ llamado el grupo ortogonal de matrices de $n \times n$.

Una función es una isometría Euclidiana si y sólo si preserva distancias. Más aún, las isometrías Euclidianas son todas las funciones de la forma $\phi(x) = a + Ax$ donde A es una matriz ortogonal y $a = \phi(0)$.

1.1.3 ACCIONES DE GRUPOS.

Definición. Un grupo actúa en un conjunto X si, existe una función $\Phi: G \times X \rightarrow X$, tal que

$$(1) \Phi(I_d, x) = x \text{ para toda } x \in X$$

$$(2) \Phi(g, \Phi(h, x)) = \Phi(gh, x).$$

A una función como ésta se le llama una acción de G en X .

Una acción de un grupo G en un conjunto X se dice transitiva si y sólo si para cada x, y en X , existe una g en G tal que $gx = y$.

Ejemplo. Un m -plano de E^n es una clase lateral $a + V$ de un subespacio vectorial V de dimensión m de \mathbb{R}^n .

Definición. Dos subconjuntos S y T en un espacio métrico se dicen congruentes si existe una isometría ϕ de X tal que $\phi(S) = T$.

1.1.4 GEODÉSICAS.

Definición. Una curva en un espacio X es una función $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ continua donde $[a, b]$ es el intervalo cerrado en \mathbb{R} con $a < b$. Si X es un espacio métrico y γ es una función que preserva distancias decimos que es un arco geodésico.

Teorema 1.1 Una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow X$ es un arco geodésico si y sólo si es lineal y $|\alpha'(t)| = 1$ para toda t en $[a, b]$.

Un segmento geodésico que une un par de puntos x, y de un espacio X , es la imagen de un arco geodésico cuyos puntos inicial y terminal son x, y respectivamente.

Un subconjunto C de E^n se dice convexo si y sólo si para cada par de puntos distintos x, y en X existe uno y sólo un arco geodésico contenido en C que los une.

Definición. Una curva geodésica en un espacio métrico X es una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ que preserva distancias localmente. Una línea geodésica es una función $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ que localmente preserva distancias. Una geodésica en un espacio métrico X es la imagen de una línea geodésica.

1.2 El Espacio Esférico.

El modelo más usual para la geometría esférica de dimensión n es la esfera unitaria S^n en \mathbb{R}^{n+1} definida por:

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}.$$

Dos vectores x, y en S^n se dicen antípodos si $x = -y$. Sean x, y dos vectores en S^n y sea $\theta(x, y)$ el ángulo Euclidiano entre x y y . La distancia esférica entre x y y está dada por

$$d_S(x, y) = \theta(x, y).$$

Notemos que

$$0 \leq d_S(x, y) \leq \pi$$

y $d_S(x, y) = \pi$ si y sólo si x y y son antípodos. Así definida $d_S(x, y)$ resulta ser una métrica la cual es llamada la métrica esférica. La topología inducida por la métrica esférica coincide con la restringida de la Euclidiana. El espacio métrico que consiste de S^n y d_S es el espacio esférico de dimensión n . De aquí en adelante S^n denotará al espacio esférico. Una isometría esférica es una isometría de S^n en S^n .

Teorema 1.2 Cada transformación ortogonal de \mathbb{R}^{n+1} se restringe a una isometría de S^n , y cada isometría de S^n se extiende a una transformación ortogonal única de \mathbb{R}^{n+1} .

Teorema 1.3 Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow S^n$ una curva con $b - a < \pi$. Entonces las siguientes son equivalentes:

- (1) La curva α es un arco geodésico.
- (2) Existen vectores ortogonales x, y en S^n tales que

$$\alpha(t) = (\cos(t - a))x + ((\sin(t - a))y).$$

- (3) La curva α satisface la ecuación diferencial $\alpha'' + \alpha = 0$.

Además, una función $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow S^n$ es una línea geodésica si y sólo si existen vectores ortogonales x, y en S^n tales que

$$\lambda(t) = (\cos t)x + (\sin t)y$$

es decir, las geodésicas de S^n son los círculos máximos.

Teorema 1.4 Sea $T(A, B, C)$ un triángulo esférico cuyos ángulos en cada vértice son α, β, γ respectivamente. Entonces:

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi.$$

Además, su área es

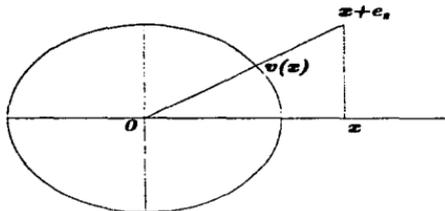
$$\pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

Identifiquemos \mathbb{R}^n con $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ en \mathbb{R}^{n+1} . La proyección gnomónica

$$v : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$$

está definida como la composición de la translación vertical de \mathbb{R}^n por e_{n+1} seguida de la proyección a S^n . Ver la figura 1.1. Una fórmula explícita para v está dada por

$$v(x) = \frac{x + e_{n+1}}{|x + e_{n+1}|}.$$

Figura 1.1. La proyección gnomónica ν de \mathbb{R} en S^1

1.3 Geometría Hiperbólica.

1.3.1 EL ESPACIO DE LORENTZ.

Sean x, y vectores en \mathbb{R}^n con $n > 1$. El producto interior de Lorentz de x y y está dado por

$$x \circ y = -x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Así definido el producto interior de Lorentz es un producto interior. Al espacio \mathbb{R}^n dotado con el producto interior de Lorentz se le conoce como el espacio de Lorentz de dimensión n , y se denota por $\mathbb{R}^{1, n-1}$. La norma de Lorentz de un vector x en \mathbb{R}^n se define, como

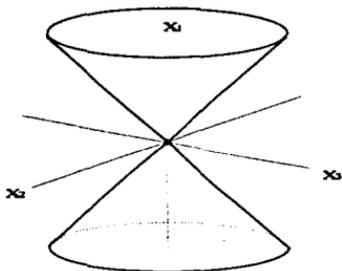
$$\|x\| = (x \circ x)^{\frac{1}{2}}.$$

Aquí $\|x\|$ es un real positivo, cero o un imaginario positivo, según el caso se dice que x es un vector espacial, luminoso o temporal respectivamente. Si $\|x\|$ es imaginario, denotamos su valor absoluto (módulo) por $\|\|x\|\|$. El conjunto de todos los vectores x en \mathbb{R}^n tales que $\|x\| = 0$ es el hipercono C^{n-1} , también conocido como el cono de luz en \mathbb{R}^n , ver figura. Diremos que un vector x en \mathbb{R}^n es positivo (respectivamente negativo), cuando $x_1 > 0$ (respectivamente $x_1 < 0$).

Teorema 1.5 Si x y y son vectores temporales positivos (negativos) en \mathbb{R}^n y $t > 0$, entonces

- (1) el vector tx es un vector temporal positivo (respectivamente negativo)
- (2) el vector $x + y$ es un vector temporal positivo (respectivamente negativo).

Corolario 1. El conjunto de vectores temporales positivos (respectivamente negativos) es convexo.

Figura 1.2. El cono de luz C^2 en $\mathbb{R}^{(2,1)}$

1.3.2 TRANSFORMACIONES DE LORENTZ.

Definición. Una función $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación de Lorentz si

$$\phi(x) \circ \phi(y) = x \circ y \text{ para todos } x, y \text{ en } \mathbb{R}^n.$$

Una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ en \mathbb{R}^n es ortonormal de Lorentz si $v_i \circ v_i = -1$ y $v_i \circ v_j = \delta_{ij}$ en otro caso. Notemos que la base canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal de Lorentz.

Teorema 1.6 Una función $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación de Lorentz si y sólo si ϕ es lineal y $\{\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)\}$ es una base ortonormal de Lorentz para \mathbb{R}^n .

Por definición diremos que una matriz A es de Lorentz si su transformación lineal asociada es de Lorentz. Sea

$$O(1, n-1) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A \text{ es de Lorentz}\}$$

este conjunto con la multiplicación de matrices tiene estructura de grupo, llamado el grupo de Lorentz de $n \times n$. Este es isomorfo al grupo de transformaciones de Lorentz de \mathbb{R}^n .

Una matriz de Lorentz se dice positiva (respectivamente negativa) si manda vectores temporales positivos (resp. negativos) a vectores temporales positivos (resp. negativos). Por continuidad cada matriz es positiva o bien es negativa. Sea $PO(1, n-1)$ el conjunto de todas las matrices positivas en $O(1, n-1)$. Este es un subgrupo de índice dos en $O(1, n-1)$. El

grupo de matrices positivas es el *grupo de Lorentz positivo*.

Definición. Dos vectores x, y en \mathbb{R}^n son ortogonales de Lorentz si y sólo si $x \circ y = 0$.

Teorema 1.7 Sean x, y dos vectores distintos de cero ortogonales de Lorentz. Si x es temporal, entonces y es espacial.

Definición. Sea V un subespacio de \mathbb{R}^n , V se dice

- (1) temporal si V contiene un vector temporal,
- (2) espacial si cada vector distinto de cero en V es espacial, o
- (3) luminoso en otro caso.

1.4 El Espacio Hiperbólico.

Como la esfera de radio r en \mathbb{R}^{n+1} es de curvatura constante $1/r^2$ y como el espacio hiperbólico es de curvatura constante negativa, la dualidad entre las geometrías esféricas e hiperbólicas, nos sugiere que el espacio hiperbólico debe ser una esfera de radio imaginario. Como las distancias imaginarias son posibles en el espacio de Lorentz tomaremos como un modelo del espacio hiperbólico a la esfera unitaria de radio imaginario

$$\mathbb{F}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 = -1\}.$$

El problema con este conjunto es que es desconexo, es un hiperboloide de dos hojas. El conjunto H^n de todos los x en \mathbb{F}^n tales que $x_1 > 0$ es la hoja positiva de \mathbb{F}^n , éste es un hiperboloide de una hoja y es un modelo conveniente para el espacio hiperbólico de dimensión n .

Sean x, y en H^n y sea $\eta(x, y)$ el ángulo de Lorentz entre x y y . La distancia hiperbólica entre x y y está definida como el número real

$$d_H(x, y) = \eta(x, y).$$

Como $x \circ y = \|x\| \|y\| \cosh d_H(x, y)$, tenemos la ecuación

$$\cosh d_H(x, y) = -x \circ y.$$

d_H es una métrica en H^n . Al espacio H^n dotado d_H se le llama el espacio hiperbólico de dimensión n . Una isometría de H^n en sí mismo es una isometría hiperbólica.

Teorema 1.8 Cada transformación de Lorentz positiva de \mathbb{R}^{n+1} se restringe a una isometría de H^n , y cada isometría de H^n se extiende a una única transformación de Lorentz de \mathbb{R}^{n+1} .

Corolario. El grupo de isometrías $I(H^n)$ es isomorfo al grupo positivo de Lorentz $PO(1, n-1)$.

1.4.1 GEODÉSICAS HIPERBÓLICAS.

Definición Una línea hiperbólica de H^n es la intersección de H^n con un subespacio vectorial temporal de dimensión 2 de \mathbb{R}^{n+1} .

Tres puntos x, y, z de H^n son hiperbólicamente colineales si existe una línea hiperbólica L de H^n que los contiene. Si x, y, z en H^n , cumplen

$$\eta(x, y) + \eta(y, z) = \eta(x, z)$$

entonces x, y, z son colineales. Dos vectores x, y en \mathbb{R}^{n+1} son ortogonales de Lorentz si $\|x\|^2 = -1$, $x \circ y = 0$ y $\|y\|^2 = 1$.

Teorema 1.9 Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow H^n$ una curva. Entonces, son equivalentes:

(1) La curva α es un arco geodésico.

(2) Existen vectores x, y , Lorentz ortonormales tales que

$$\alpha(t) = (\cosh(t-a)x + \sinh(t-a)y).$$

(3) La curva α satisface la ecuación diferencial $\alpha'' - \alpha = 0$.

Una función $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow H^n$ es una línea geodésica si y sólo si existen dos vectores x, y en \mathbb{R}^{n+1} tales que

$$\lambda(t) = (\cosh t)x + (\sinh t)y.$$

Así, las geodésicas en H^n son sus líneas hiperbólicas.

Teorema 1.10 Sea $T(A, B, C)$ un triángulo hiperbólico, con α, β, γ sus ángulos en cada vértice. Entonces:

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi.$$

Además, su área es

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Definición. Un m -plano hiperbólico de H^n es la intersección de un subespacio vectorial temporal de dimensión $m+1$.

1.5 Geometría Inversa.

Sea a un vector unitario en E^n y sea t un número real. Consideremos el hiperplano de E^n definido por

$$P(a, t) = \{x \in E^n : a \cdot x = t\}.$$

Observemos que cada punto x en $P(a, t)$ satisface la ecuación

$$a \cdot (x - ta) = 0.$$

De aquí $P(a, t)$ es el hiperplano de E^n con vector unitario normal a , que pasa por el punto ta .

La reflexión ρ de E^n en el hiperplano $P(a, t)$ está definida por la fórmula

$$\rho(x) = x + s(t - a \cdot x)a.$$

Cada isometría es la composición de a lo más $n + 1$ reflexiones en hiperplanos. Sea a un punto de E^n y sea r un número real positivo. La esfera con centro a y radio r se define como el conjunto

$$S(a, r) = \{x \in E^n : |x - a| = r\}.$$

La reflexión σ de E^n en la esfera $S(a, r)$ se define mediante

$$\sigma(x) = a + \left(\frac{r}{|x - a|}\right)^2(x - a).$$

1.5.1 PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA.

Identificamos E^n con $E^n \times \{0\}$ en E^{n+1} . La proyección estereográfica π de E^n sobre $S^n \setminus \{e_{n+1}\}$, está definida proyectando un punto x en E^n hacia e_{n+1} hasta que corta con la esfera unitaria S^n en el punto $\pi(x)$. Ver figura 1.3. Una fórmula explícita para la proyección estereográfica es

$$\pi(x) = \left(\frac{2x_1}{1 + |x|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1 + |x|^2}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1}\right).$$

La función π es una biyección de E^n en $S^n \setminus \{e_{n+1}\}$.

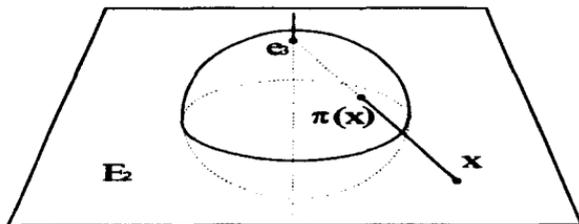


Figura 1.3. La proyección estereográfica π de E^2 sobre S^2

Sea ∞ un punto que no está en E^{n+1} , definamos $\widehat{E}^n = E^n \cup \{\infty\}$, y extendamos π a una biyección $\widehat{\pi}: \widehat{E}^n \rightarrow S^n$, poniendo $\widehat{\pi}(\infty) = e_{n+1}$, y sea d una métrica en \widehat{E}^n dada por la fórmula

$$d(x, y) = |\widehat{\pi}(x) - \widehat{\pi}(y)|.$$

La métrica d es la llamada métrica cordal en \widehat{E}^n . Por definición la función $\widehat{\pi}$ es una isometría de \widehat{E}^n , con la métrica cordal a S^n con la métrica Euclidiana. La topología métrica cordal es la misma que la Euclidiana en E^n , ya que π manda E^n homeomórficamente sobre subconjuntos abiertos $S^n \setminus \{e_{n+1}\}$ de S^n . El espacio métrico \widehat{E}^n es compacto y se obtiene de E^n por adjuntar un punto al infinito. Por esta razón \widehat{E}^n es llamada la compactación por un punto de E^n . La compactación por un punto del plano complejo \mathbb{C} es la famosa esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Sean u, v, x, y puntos de \widehat{E}^n , tales que $u \neq v$, y $x \neq y$. La razón cruzada de estos puntos está definida como el número

$$[u, v, x, y] = \frac{d(u, x)d(v, y)}{d(u, v)d(x, y)}.$$

La razón cruzada es una función continua en cuatro variables, ya que la métrica $d: \widehat{E}^n \times \widehat{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

1.5.2 TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS.

Una esfera Σ de \widehat{E}^n está definida como una esfera Euclidiana $S(a, r)$ o un plano extendido $\widehat{P}(a, t) = P(a, t) \cup \{\infty\}$. Vale la pena notar que $\widehat{P}(a, t)$ es una esfera topológica.

Definición Una transformación de Möbius de \widehat{E}^n es una composición finita de reflexiones en esferas de \widehat{E}^n .

Sea $M(\widehat{E}^n)$ el conjunto de todas las transformaciones de Möbius de \widehat{E}^n . Entonces $M(\widehat{E}^n)$ forma un grupo bajo la composición. Como cada isometría de E^n se extiende de manera única a una transformación de Möbius en \widehat{E}^n , podemos considerar al grupo de isometrías Euclidianas como un subgrupo de $M(\widehat{E}^n)$.

Más aún, la homotecia $\mu_k: \widehat{E}^n \rightarrow \widehat{E}^n$ definida por $\mu_k(x) = kx$, es la composición de la reflexión $S(0, 1)$ con la reflexión en $S(0, \sqrt{k})$, de modo que también podemos considerar al grupo de similitudes $S(E^n)$ de E^n como un subgrupo de $M(\widehat{E}^n)$.

Teorema 1.11 Una función $\phi: \widehat{E}^n \rightarrow \widehat{E}^n$ es una transformación de Möbius si y sólo si preserva razones cruzadas.

Teorema 1.12 Una transformación ϕ de \widehat{E}^n fija ∞ si y sólo si ϕ es una similitud.

Es un hecho conocido de la teoría de transformaciones de Möbius que si ϕ es una transformación de Möbius en \widehat{E}^n , y Σ es una esfera de \widehat{E}^n entonces $\phi(\Sigma)$ es también una esfera de \widehat{E}^n , todavía más la acción natural de $M(\widehat{E}^n)$ es transitiva en el conjunto de esferas de E^n .

Teorema 1.13 Si ϕ es una transformación de Möbius de \widehat{E}^n que fija un punto en una esfera Σ de \widehat{E}^n , entonces ϕ es la identidad en \widehat{E}^n o es la reflexión en Σ .

Definición. Dada una reflexión σ en una esfera Σ de \widehat{E}^n , dos puntos x, y en \widehat{E}^n se dicen puntos inversos con respecto a Σ si y sólo si $y = \sigma(x)$.

Teorema 1.14 Sea ϕ una transformación de Möbius de \widehat{E}^n . Si x y y son puntos inversos con respecto a una esfera Σ de \widehat{E}^n , entonces $\phi(x)$ y $\phi(y)$ son puntos inversos con respecto a $\phi(\Sigma)$.

1.5.3 LA EXTENSIÓN DE POINCARÉ.

Bajo la identificación de E^{n-1} con $E^{n-1} \times \{0\}$ en E^n , un punto x de E^{n-1} corresponde al punto $\tilde{x} = (x, 0)$ de E^n . Sea ϕ una transformación de \widehat{E}^{n-1} , extendemos ϕ a una transformación de \widehat{E}^n de la siguiente manera. Si ϕ es la reflexión de \widehat{E}^{n-1} en $\widehat{P}(a, t)$, entonces $\tilde{\phi}$ es la reflexión en $\widehat{P}(\tilde{a}, t)$. Si ϕ es la reflexión en $S(a, r)$, entonces $\tilde{\phi}$ es la reflexión en $S(\tilde{a}, r)$. En ambos casos $\tilde{\phi}(x) = (\phi(x), 0)$ para toda x en E^{n-1} . De este modo $\tilde{\phi}$ deja invariante a \widehat{E}^{n-1} y al semiespacio superior

$$U^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in E^n : x_n > 0\}.$$

Si ϕ es una transformación de Möbius arbitraria de \widehat{E}^{n-1} . Entonces $\tilde{\phi}$ es una composición de reflexiones $\phi = \sigma_1 \dots \sigma_m$, definimos a $\tilde{\phi} = \tilde{\sigma}_1 \dots \tilde{\sigma}_m$. Esta definición no depende de la descomposición en reflexiones. A la función $\tilde{\phi}$ la llamaremos la extensión de Poincaré de ϕ .

Teorema 1.15 Una transformación de Möbius del semiespacio superior \widehat{E}^n deja invariante a U^n si y sólo si ϕ es la extensión de Poincaré de una transformación de Möbius en \widehat{E}^{n-1} .

Definición. Una transformación de Möbius del semiespacio superior U^n es una transformación de Möbius que deja a U^n invariante.

Sea $M(U^n)$ el conjunto de transformaciones de Möbius de U^n . Este es un subgrupo de $M(\widehat{E}^{n-1})$. Dos esferas Σ y Σ' de \widehat{E}^n se dicen ortogonales si y sólo si se intersecan en E^n y en cada punto de intersección sus líneas normales son ortogonales.

Sea σ la reflexión de \widehat{E}^n en la esfera $S(e_n, \sqrt{2})$. Entonces

$$\sigma(x) = e_n + \frac{2(x - e_n)}{|x - e_n|^2}.$$

La función σ manda al semiespacio inferior $-U^n$ en la n bola unitaria abierta

$$B^n = \{x \in E^n : |x| < 1\}.$$

Sea ρ la reflexión de \widehat{E}^n en \widehat{E}^n y definamos $\eta = \sigma\rho$. Entonces η manda a U^n homeomórficamente en B^n . La transformación η es la transformación canónica de U^n a B^n .

Definición. Una transformación de Möbius de S^n es una función $\phi : S^n \rightarrow S^n$ tal que $\pi^{-1}\phi\pi$ es una transformación de Möbius de E^n , donde $\pi : \widehat{E}^n \rightarrow S^n$ es la proyección estereográfica.

Sea $M(S^n)$ el conjunto de todas las transformaciones de Möbius de S^n . Entonces $M(S^n)$ forma un grupo bajo la composición. La función dada por $\psi \mapsto \pi\psi\pi^{-1}$ es un isomorfismo de $M(\widehat{E}^n)$ a $M(S^n)$.

Sea ϕ una transformación de Möbius de S^{n-1} . La extensión de Poincaré de ϕ es la transformación $\tilde{\phi} = \eta\psi\eta^{-1}$, donde ψ es la extensión de Poincaré de $\phi = \eta^{-1}\phi\eta$ y η es la transformación de transformación canónica de U^n a B^n . La transformación de Möbius $\tilde{\phi}$ extiende a ϕ y deja invariante a B^n ; más aún $\tilde{\phi}$ es la única con esta propiedad.

Teorema 1.16 Sea ϕ una transformación de Möbius de B^n . Entonces $\phi(0) = 0$ si y sólo si ϕ es una transformación ortogonal de E^n .

1.6 Modelos para el Espacio Hiperbólico.

1.6.1 EL MODELO DE LA BOLA CONFORME.

Trabajaremos con el espacio hiperbólico de dimensión n en $\mathbb{R}^{n,1}$. Redefinamos el producto de Lorentz en \mathbb{R}^{n+1} por

$$x \circ y = x_1y_1 + \dots + x_ny_n - x_{n+1}y_{n+1}.$$

Todos los resultados de la sección 1.4 se siguen cumpliendo salvo que el orden de las coordenadas se revierte. El grupo de Lorentz de $\mathbb{R}^{n,1}$ lo denotaremos por $O(n, 1)$. Identificaremos \mathbb{R}^n con $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ en \mathbb{R}^{n+1} . La proyección estereográfica ξ de la bola unitaria abierta B^n sobre el espacio hiperbólico H^n está definida proyectando un punto x en B^n desde $-e_{n+1}$ hasta que corte a H^n en el único punto $\xi(x)$. Una fórmula explícita para ξ es

$$\xi(x) = \left(\frac{2x_1}{1 - |x|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1 - |x|^2}, \frac{1 + |x|^2}{1 - |x|^2} \right).$$

ξ es una biyección entre B^n y H^n su inversa ξ^{-1} está dada por

$$\xi^{-1}(y) = \left(\frac{y_1}{1 + y_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{1 + y_{n+1}} \right).$$

Definamos una métrica d_B en B^n mediante

$$d_B(x, y) = d_H(\xi(x), \xi(y)).$$

La métrica d_B es llamada la métrica de Poincaré en B^n . Por definición ξ es una isometría de B^n con H^n . El espacio métrico que consiste de B^n con la métrica d_B es llamado el modelo de la bola conforme del espacio hiperbólico de dimensión n .

Teorema 1.17 *La métrica d_B en B^n está dada por*

$$\cosh d_B(x, y) = 1 + \frac{2|x - y|^2}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}.$$

Sea b un punto distinto de cero en B^n y $b^* = \frac{b}{|b|}$. Definamos la transformación de Möbius τ_b de B^n por la fórmula

$$\tau_b(x) = \frac{|b^*|^2 - 1}{|x - b^*|^2} x + \frac{(|x|^2 + 2x \cdot b + 1)}{|x + b^*|^2} b^*.$$

que en términos de b , nos da la fórmula

$$\tau_b(x) = \frac{1 - |b|^2}{(|b|^2|x|^2 + 2x \cdot b + 1)} x + \frac{(|x|^2 + 2x \cdot b + 1)}{(|b|^2|x|^2 + 2x \cdot b + 1)} b. \quad (1.1)$$

La función τ_b es la composición de dos reflexiones en hiperplanos ortogonales a la línea $(-\frac{b}{|b|}, \frac{b}{|b|})$, la transformación τ_b actúa como una traslación a lo largo de esta línea, definimos τ_0 como la identidad. Entonces $\tau_b(0) = b$ para todo b en B^n . La función τ_b es llamada la traslación hiperbólica de B^n por b .

Teorema 1.18 *Cada transformación de Möbius de B^n se restringe a una isometría de B^n . Inversamente, cada isometría de B^n se extiende a una única transformación de Möbius de B^n .*

Una consecuencia inmediata a este teorema es que los grupos $I(B^n)$ y $M(B^n)$ son isomórficos. Una horosfera Σ de B^n , basada en un punto b de S^{n-1} , se define como la intersección de B^n con una esfera Euclidiana en \bar{B}^n tangente a S^{n-1} . Una horosfera de dimensión dos es también llamada un horociclo. El interior de una horosfera es llamada una horobola. El interior de un horociclo es llamado también un horodisco.

1.6.2 EL MODELO DEL SEMIESPACIO SUPERIOR.

Sea η la transformación canónica del semiespacio U^n a la bola unitaria B^n . Entonces $\eta = \sigma\rho$, donde ρ es la reflexión de \bar{E}^n en el hiperplano E^{n-1} y σ es la reflexión de \bar{E}^n en el hiperplano E^{n-1} y σ es la reflexión de \bar{E}^n en la esfera $S(e_n, \sqrt{2})$. Definamos una métrica d_U en U^n por la fórmula

$$d_U(x, y) = d_B(\eta(x), \eta(y)).$$

La métrica d_U es llamada la métrica de Poincaré en U^n . Por definición, η es una isometría de U^n con la métrica d_U al modelo de la bola conforme B^n del espacio hiperbólico de dimensión n . Al espacio métrico que consta de U^n con la métrica d_U se le conoce como el modelo del semiespacio superior del espacio hiperbólico de dimensión n .

Teorema 1.19 *La métrica d_U en U^n está dada por*

$$\cosh d_U(x, y) = 1 + \frac{|x - y|^2}{2x_n y_n}.$$

Teorema 1.20 *Cada transformación de Möbius de U^n se restringe a una isometría del modelo del semiespacio superior U^n , y cada isometría de U^n se extiende a una única transformación de Möbius de U^n .*

Luego podemos identificar el grupo $I(U^n)$ de isometrías del semiespacio superior con el grupo $M(U^n)$ de transformaciones de U^n . Es más, los grupos $I(U^n)$ y $M(U^n)$ son isomorfos, todavía más, $I(U^n)$ y $I(H^n)$ son isomorfos ya que U^n y H^n son isométricos, también tenemos que $M(U^n)$ es isomorfo a $M(\bar{E}^{n-1})$. De esta forma $I(H^n)$ y $M(\bar{E}^{n-1})$ son también isomorfos. Entenderemos por una línea hiperbólica de U^n a un 1-plano hiperbólico de U^n . El elemento de longitud de arco hiperbólico del semiespacio superior U^n es

$$\frac{|dx|}{x_n}.$$

El elemento de volumen hiperbólico del semiespacio hiperbólico U^n es

$$\frac{dx_1 \dots dx_n}{(x_n)^n}.$$

1.6.3 EL MODELO DEL DISCO PROYECTIVO.

El n -disco unitario abierto en \mathbb{R}^n está definido como el conjunto

$$\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}.$$

Notemos que \mathbb{D}^n es el mismo conjunto que B^n . La razón para esta nueva notación es que una nueva métrica $d_{\mathbb{D}}$ en \mathbb{D}^n será definida, de tal forma que \mathbb{D}^n y B^n se convierten en diferentes espacios métricos.

Identificaremos \mathbb{R}^n con $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ en \mathbb{R}^{n+1} . La proyección gnomónica μ de \mathbb{D}^n sobre H^n está definida como la composición de la translación vertical de \mathbb{D}^n por e_{n+1} seguida por la proyección radial a H^n . Una fórmula explícita está dada por

$$\mu(x) = \frac{x + e_{n+1}}{\|x + e_{n+1}\|},$$

La función $\mu: \mathbb{D}^n \rightarrow H^n$ es una biyección. La inversa de μ está dada por

$$\mu^{-1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1/x_{n+1}, \dots, x_n/x_{n+1}),$$

Definamos una métrica $d_{\mathbb{D}}$ en \mathbb{D}^n por

$$d_{\mathbb{D}}(x, y) = d_H(\mu(x), \mu(y)),$$

Por definición, μ es una isometría de \mathbb{D}^n , con la métrica $d_{\mathbb{D}}$, al n -espacio hiperbólico H^n . El espacio métrico que consiste de \mathbb{D}^n , junto con la métrica $d_{\mathbb{D}}$, es el llamado modelo del disco proyectivo del n -espacio hiperbólico.

Teorema 1.21 *La métrica $d_{\mathbb{D}}$ en \mathbb{D}^n está dada por*

$$\cosh d_{\mathbb{D}}(x, y) = \frac{1 - x \cdot y}{\sqrt{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}}.$$

Teorema 1.22 *Cada isometría de \mathbb{D}^n se extiende a una única transformación proyectiva del n -espacio proyectivo clásico \mathbb{R}^n y cada transformación proyectiva de \mathbb{R}^n que deja a \mathbb{D}^n invariante, se restringe a una isometría de \mathbb{D}^n .*

Teorema 1.23 *Una función $\phi: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ que fija al origen es una isometría de \mathbb{D}^n si y sólo si es la restricción de una transformación ortogonal de \mathbb{R}^n .*

Un conjunto P de \mathbb{D}^n se dice un m -plano hiperbólico de \mathbb{D}^n si $\mu(P)$ es un m -plano hiperbólico de H^n .

Teorema 1.24 *Un subconjunto P de \mathbb{D}^n es un m -plano hiperbólico de \mathbb{D}^n si y sólo si es la intersección no vacía con un m -plano de \mathbb{R}^n .*

Una línea hiperbólica de \mathbb{D}^n se define como un 1-plano de \mathbb{D}^n .

Corolario. *Las líneas hiperbólicas de \mathbb{D}^n son las cuerdas abiertas de \mathbb{D}^n .*

Nota: El hecho de que los m -planos hiperbólicos de \mathbb{D}^n coincidan con m -planos euclidianos hace del modelo proyectivo una base muy útil para argumentos de convexidad. En todo caso, se debe tener siempre en mente que los ángulos hiperbólicos de \mathbb{D}^n no necesariamente coinciden con los ángulos euclidianos; en otras palabras, \mathbb{D}^n no es un modelo conforme del n -espacio hiperbólico.

1.7 Espacios de Transformaciones.

1.7.1 CLASIFICACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES.

Sea ϕ una transformación de Möbius de B^n . Entonces ϕ manda la bola cerrada \overline{B}^n a sí mismo. Por el teorema del punto fijo de Brouwer, ϕ tiene un punto fijo en \overline{B}^n . La transformación ϕ se dice

- (1) elíptica si ϕ fija un punto de B^n .
- (2) parabólica si ϕ no fija puntos en B^n y fija sólo un punto de S^{n-1} .
- (3) hiperbólica si ϕ no fija puntos en B^n y fija al menos dos puntos de S^{n-1} .

Sea F_ϕ el conjunto de todos los puntos fijos de ϕ en \overline{B}^n , y sea ψ una transformación de Möbius de B^n . Entonces

$$F_{\phi\psi\phi^{-1}} = \psi(F_\phi).$$

De aquí que ϕ sea elíptica, parabólica o hiperbólica sólo depende de la clase de conjugación de ϕ en $M(B^n)$.

Caracterizamos ahora las transformaciones elípticas de B^n .

Teorema 1.25 *Una transformación ϕ de B^n es elíptica si y sólo si ϕ es conjugada en $M(B^n)$ a una transformación ortogonal de E^n .*

Con el fin de caracterizar las transformaciones parabólicas e hiperbólicas, es conveniente trabajar en el modelo del semiespacio superior del espacio hiperbólico. Las transformaciones elípticas, parabólicas e hiperbólicas de U^n están definidas en la misma manera que en el modelo de la bola conforme B^n . Para precisar una transformación de Möbius de U^n , ϕ se dice

- 1) elíptica si ϕ fija un punto de U^n .
- 2) parabólica si ϕ no fija puntos de U^n y fija a un único punto de \widehat{E}^{n-1} ;
- 3) hiperbólico si ϕ no fija puntos en U^n y fija al menos dos puntos de \widehat{E}^{n-1} .

Ahora podemos caracterizar las transformaciones parabólicas de U^n .

Teorema 1.26 *Una transformación de Möbius ϕ de U^n es parabólica si y sólo si ϕ es conjugado en $M(U^n)$ a la extensión de Poincaré de una isometría que no tiene puntos fijos en E^{n-1} .*

Sigue la caracterización de las transformaciones hiperbólicas en U^n .

Teorema 1.27 Una transformación de Möbius ϕ de U^n es hiperbólica si y sólo si ϕ es conjugada en $M(U^n)$ a la extensión de Poincaré de una similitud ψ de E^{n-1} de la forma $\psi(x) = kAx$, donde $k > 1$, y A es una transformación ortogonal de E^{n-1} .

1.7.2 LA TOPOLOGÍA COMPACTO ABIERTA.

A continuación damos algunos resultados fundamentales de la topología compacto-abierto para un conjunto de funciones continuas, para una mejor exposición ver [Du]. Sea

$$C(X, X) = \{f : X \rightarrow X : f \text{ es continua}\}.$$

Definición. La topología compacto-abierto en $C(X, X)$ está generada por abiertos subbásicos de la forma $(K, U) = \{f \in C(X, X) \mid f(K) \subset U\}$ donde K es un compacto en X , y U un abierto en X .

La siguiente definición es muy útil para caracterizar a la topología compacto-abierto mediante sucesiones. A partir de ahora consideraremos a $C(X, X)$ y a cualquier subespacio de éste dotados por la topología compacto-abierto.

Definición. Sea X un espacio métrico. Una sucesión $\{f_n\}$ en $C(X, X)$ se dice que converge uniformemente en conjuntos compactos en $C(X, X)$ si para cada compacto $K \subset X$ y cada $\epsilon > 0$, existe un entero $N = N(K, \epsilon)$ tal que $d(f_n(k), f_n(k)) < \epsilon$ para toda $n \geq N$ y toda $k \in K$.

Teorema 1.28 Sea X un espacio métrico, entonces una sucesión $\{f_n\}$ converge en $C(X, X)$ si y sólo si converge uniformemente en conjuntos compactos en $C(X, X)$.

El espacio $C(X, X)$ es Hausdorff si y sólo si X es de Hausdorff. Más aún $C(X, X)$ es regular si y sólo si X es regular.

Teorema 1.29 La función composición en el espacio $C(X, X)$ es continuo.

Definición. La función $e : C(X, X) \times X \rightarrow X$ definida por $(f, x) \mapsto f(x)$ es llamada la función evaluación.

Teorema 1.30 La restricción e_x en cada punto x en X de la función evaluación es continua.

Teorema 1.31 Una sucesión $\{\phi_i\}$ de isometrías de un espacio métrico X converge en $I(X)$ a una isometría ϕ si y sólo si $\{\phi_i(x)\}$ converge a $\phi(x)$ para cada punto $x \in X$.

2

Isometrías del Espacio Hiperbólico.

Haremos aquí un estudio de la topología del grupo $I(H^n)$ de isometrías del espacio hiperbólico. Empezaremos primero con una introducción a los grupos topológicos. La estructura del grupo topológico de $I(H^n)$ se estudiará en la segunda sección. Los subgrupos discretos de $I(H^n)$ son de fundamental importancia para el estudio de las variedades hiperbólicas, por lo que las propiedades básicas de los subgrupos discretos de $I(H^n)$ serán examinadas en la tercera sección. Una caracterización de los subgrupos discretos de $I(E^n)$ está dada en la cuarta sección. Terminaremos el capítulo con una caracterización de todos los subgrupos discretos de $I(H^n)$:

2.1 Grupos Topológicos.

Definición. *Un grupo topológico es un grupo G que es también un espacio topológico, tal que la multiplicación $(g, h) \rightarrow gh$ y la inversión $g \rightarrow g^{-1}$, son funciones continuas.*

Los siguientes son ejemplos de grupos topológicos.

Ejemplo 1. \mathbf{R}^n el n -espacio real, con la operación de adición vectorial.

Ejemplo 2. \mathbf{C}^n el n -espacio complejo, con la operación de suma vectorial.

Ejemplo 3. \mathbf{S}^1 el círculo unitario, en el plano complejo con la operación de multiplicación compleja.

Ejemplo 4. \mathbf{R}_+ los reales positivos, con la multiplicación.

Ejemplo 5. \mathbf{C}^* los números complejos distintos de cero, con la operación de multiplicación compleja.

Sea \mathbf{C}^n el espacio vectorial n -dimensional complejo. El producto interior Hermitiano de z y w , vectores de \mathbf{C}^n , es

$$z * w = z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n.$$

La norma Hermitiana de un vector z en \mathbb{C}^n es:

$$|z| = (z * z)^{1/2} = (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)^{1/2}. \quad (2.1)$$

La norma Hermitiana determina la métrica en \mathbb{C}^n

$$d_{\mathbb{C}}(z, w) = |z - w|. \quad (2.2)$$

El espacio métrico $(\mathbb{C}^n, d_{\mathbb{C}})$ es llamado el n -espacio complejo.

Si definimos $\varphi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ como

$$\varphi(z_1, \dots, z_n) = (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n).$$

Entonces φ es un isomorfismo de espacios vectoriales reales. Mas aún,

$$\langle \varphi(z), \varphi(w) \rangle = \operatorname{Re}(z * w).$$

Como φ preserva productos interiores, φ preserva normas, por tanto, φ es una isometría. Por esta razón, llamamos $d_{\mathbb{C}}$ a la métrica euclidiana en \mathbb{C}^n .

Ejemplo 6. El Grupo Lineal General.

Sea $GL(n, \mathbb{C}^n)$ el conjunto de todas las matrices complejas invertibles de $n \times n$, éste es un grupo bajo la operación de multiplicación matricial, llamado grupo general lineal de matrices $n \times n$ complejas.

La norma de una matriz compleja $n \times n$, $A = (a_{ij})$ está definida por:

$$|A| = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}. \quad (2.3)$$

Esta norma determina la llamada métrica Euclidiana en $GL(n, \mathbb{C})$. El grupo lineal $GL(n, \mathbb{C})$, con la topología inducida por la métrica euclidiana, es un grupo topológico.

Observación. Cualquier subgrupo H de un grupo topológico G es un grupo topológico con la topología del subespacio, por ejemplo cada uno de los siguientes subgrupos de $GL(n, \mathbb{C})$ es un grupo topológico con la topología inducida por la métrica euclidiana:

Ejemplo 7. $SL(n, \mathbb{C})$ el grupo especial lineal, de todas las matrices complejas $n \times n$ con determinante igual a uno.

Ejemplo 8. $GL(n, \mathbb{R})$ el grupo general lineal, de todas las matrices reales $n \times n$ invertibles.

Ejemplo 9. $O(n)$ el grupo ortogonal, de las matrices $A \in GL(n, \mathbb{R})$ que cumplen $AA^t = I$.

Ejemplo 10. $SO(n)$ el grupo especial ortogonal, de las matrices A en $O(n)$ de determinante 1.

Ejemplo 11. El Grupo Unitario.

Una matriz $A \in GL(n, \mathbb{C})$ se dice unitaria si y sólo si

$$(Az) * (Aw) = z * w$$

para todos $z, w \in \mathbb{C}^n$. El conjunto de todas las matrices unitarias forma un subgrupo $U(n)$, llamado el grupo unitario de matrices complejas de $n \times n$.

Dos vectores z y w en \mathbb{C}^n se dicen ortogonales si y sólo si $z * w = 0$. Una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de \mathbb{C}^n se dice ortonormal si y sólo si $v_i * v_j = \delta_{ij}$, para toda i, j , donde δ es la delta de Kroenecker. Una matriz real es unitaria si y sólo si es ortogonal.

Sea A una matriz unitaria, como $A\bar{A}^t = I$, tenemos $|\det A| = 1$. Sea $SU(n)$ el conjunto de todas las matrices A en $U(n)$ tales que $\det A = 1$. El grupo $SU(n)$ es el grupo unitario especial de las matrices complejas de $n \times n$. El grupo unitario $U(n)$ es compacto. Así, $O(n)$ también es compacto ya que es un subgrupo cerrado de $U(n)$.

2.1.1 GRUPOS TOPOLÓGICOS COCIENTE

Lema 1. Si h es un elemento de un grupo topológico G , entonces las funciones $L_h : G \rightarrow G$ dada por $L_h(g) = h^{-1}g$ y $R_h : G \rightarrow G$ dada por $R_h(g) = gh$, son homeomorfismos.

Demostración:

Ambas funciones son continuas pues son la restricción sobre h (o h^{-1}) del producto de elementos y como tienen inversas $g \rightarrow h^{-1}g$ y $g \rightarrow gh^{-1}$, respectivamente (que son continuas por el mismo argumento). Entonces las funciones dadas son homeomorfismos. ■

Sea H un subgrupo de un grupo topológico G . El espacio de las clases laterales G/H es el conjunto $\{gH : g \in G\}$ con la topología cociente. La función cociente se denotará por $\pi : G \rightarrow G/H$.

Lema 2. Si H es un subgrupo de un grupo topológico G , entonces la función cociente $\pi : G \rightarrow G/H$ es una función abierta.

Demostración:

Sea U un abierto en G . Entonces $\pi(U)$ es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(\pi(U))$ es abierto en G por la definición de la topología cociente en G/H . Pero cada Uh es abierto por el lema 1. Así π es una función abierta. ■

Teorema 2.1 Sea N un subgrupo normal de un grupo topológico G . Entonces G/N , con la topología cociente, es un grupo topológico.

Demostración:

Sea $\pi : G \rightarrow G/N$ la función cociente. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{g \rightarrow g^{-1}} & G \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ G/N & \xrightarrow{gN \rightarrow g^{-1}N} & G/N \end{array}$$

Veamos que la inversión $gN \rightarrow g^{-1}N$ es continua. Sea U un abierto en G/N , $\pi^{-1}(U)$ es abierto, pues π es continua; si ι es la función que invierte en G , $\iota^{-1}(\pi^{-1}(U))$ es también abierto en G pues ι es continua. Luego como π es abierta en G/N , como el diagrama conmuta $\pi(\iota^{-1}(\pi^{-1}(U))) = \iota_{G/N}^{-1}(U)$ donde $\iota_{G/N}^{-1}$ es la función que invierte, entonces $\iota_{G/N}^{-1}$ es continua.

Análogamente del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{(g, h) \rightarrow gh} & G \\ \pi \times \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ G/N \times G/N & \xrightarrow{(gN, hN) \rightarrow ghN} & G/N \end{array}$$

Como π es una función abierta $\pi \times \pi$ es también abierta. Del diagrama se deduce que la multiplicación en G/N es continua. ■

Por el teorema 2.1 los siguientes grupos cocientes, con la topología cociente son grupos topológicos:

Ejemplo 12. El grupo proyectivo lineal general complejo

$$PGL(n, \mathbb{C}) = GL(n, \mathbb{C})/N$$

aquí N es el subgrupo normal $\{kI : k \in \mathbb{C}^*\}$.

Ejemplo 13. El grupo proyectivo lineal especial complejo

$PSL(n, \mathbb{C}) = SL(n, \mathbb{C})/N$,
donde N es el subgrupo normal $\{\omega I : \omega \text{ es una raíz de la unidad}\}$.

Ejemplo 14. El grupo proyectivo lineal general real

$$PGL(n, \mathbb{R}) = GL(n, \mathbb{R})/N$$

siendo N el subgrupo normal $\{kI : k \in \mathbb{R}^*\}$.

Ejemplo 15. El grupo proyectivo especial unitario

$$PSU(n) = SU(n)/N,$$

N es el subgrupo normal $\{\omega I : \omega \text{ es una } n\text{-ésima raíz de la unidad}\}$.

Definición. Dos grupos topológicos G y H son topológicamente isomorfos si y sólo si existe un isomorfismo de grupos $\varphi : G \rightarrow H$ que es también un homeomorfismo.

Ejemplos

1.- Los espacios \mathbb{C}^n y \mathbb{R}^{2n} son grupos topológicos isomorfos, en notación $\mathbb{C}^n \cong_{\text{top}} \mathbb{R}^{2n}$.

2.- $(\mathbb{R}, +) \cong_{\text{top}} (\mathbb{R}, \cdot)$ mediante el morfismo $Exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$Exp(x) = e^x.$$

3.- $(\mathbb{C}^*, \cdot) \cong_{\text{top}} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1$; la función $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1$ dada por

$$f(z) = (|z|, z/|z|),$$

es un isomorfismo de grupos topológicos.

4.- $(\mathbb{S}^1, \cdot) \cong_{\text{top}} SO(2)$, la función $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow SO(2)$, definida por

$$g(z) = \begin{pmatrix} \cos(\arg(z)) & \text{sen}(\arg(z)) \\ -\text{sen}(\arg(z)) & \cos(\arg(z)) \end{pmatrix}$$

es un isomorfismo de grupos topológicos.

Teorema 2.2 Sea H un subgrupo de un grupo topológico G , y sea $\eta : G \rightarrow X$ una función continua tal que $\eta^{-1}(\eta(g)) = gH$, para cada $g \in G$. Si $\sigma : X \rightarrow G$ es una inversa derecha, continua de η , entonces la función $\Phi : X \times H \rightarrow G$, definida por $\Phi(x, h) = \sigma(x)h$, es un homeomorfismo, más aún la función $\bar{\eta} : G/H \rightarrow X$ inducida por η , es un homeomorfismo.

2.2 Grupos de Isometrías

Sea X un espacio métrico. De aquí en adelante supondremos que el grupo $I(X)$ de isometrías de X y el grupo $S(X)$ de similitudes de X están dotados con la topología inducida como subespacios de $C(X, X)$ el espacio de las funciones continuas de X en X con la topología compacto-abierta.

Teorema 2.3 *Si X es un espacio métrico finitamente compacto, entonces $I(X)$ es un grupo topológico.*

Demostración:

Por el teorema 1.29, la función composición $(\phi, \psi) \rightarrow \phi\psi$ es continua. Como X es finitamente compacto, es también localmente compacto. Cada espacio métrico finitamente compacto tiene una base numerable, $C(X, X)$ lo es, y de aquí, $I(X)$ tiene una base numerable. Probaremos que la inversión $\phi \rightarrow \phi^{-1}$ es continua usando sucesiones. Supongamos que $\phi_i \rightarrow \phi$ en $I(X)$, luego $\phi_i(x) \rightarrow \phi(x)$ para cada $x \in X$. Sean $\epsilon > 0$, x un punto de X , y $y = \phi^{-1}(x)$. De lo anterior, existe un entero k tal que para todo $i \geq k$, tenemos $d(\phi_i(y), \phi(y)) < \epsilon$, entonces

$$\begin{aligned} d(\phi_i^{-1}(x), \phi^{-1}(x)) &= d(\phi_i \phi_i^{-1}(x), \phi_i \phi^{-1}(x)) = d(x, \phi_i \phi^{-1}(x)) \\ &= d(\phi \phi^{-1}(x), \phi_i \phi^{-1}(x)) = d(\phi(y), \phi_i(y)) < \epsilon. \end{aligned}$$

Así $\phi_i(x) \rightarrow \phi^{-1}(x)$. Por el teorema 1.31, tenemos $\phi_i^{-1} \rightarrow \phi^{-1}$. Esto muestra que la inversión es continua y, por tanto, $I(X)$ es un grupo topológico. ■

Teorema 2.4 *Las siguientes funciones definidas por las restricciones correspondientes, son isomorfismos de grupos topológicos.*

- 1) $\rho : O(n+1) \rightarrow I(S^n)$.
- 2) $\phi : E^n \times O(n) \rightarrow I(E^n)$.
- 3) $\xi : PO(n, 1) \rightarrow I(H^n)$.

Demostración:

(1) Sabemos que ρ es un morfismo biyectivo de grupos. Solo necesitamos probar que ρ es un homeomorfismo. Supongamos que $A_i \rightarrow A$ en $O(n+1)$, entonces $A_i x \rightarrow Ax$ para todo x en S^n . Por el teorema 1.31 $A_i \rightarrow A$ en $I(S^n)$. Recíprocamente, supongamos que $A_i \rightarrow A$ en $I(S^n)$. De modo que $A_i e_j \rightarrow A e_j$ para cada $j = 1, \dots, n+1$. Así $A_i \rightarrow A$ en $O(n+1)$. Por tanto ρ es un homeomorfismo.

(2) Sea $e : I(E^n) \rightarrow E^n$ la función evaluación definida por $e(\phi) = \phi(0)$, por el teorema 1.30, e es continua. Definimos $\tau : E^n \times E^n \rightarrow E^n$ por $\tau(a, x) = a + x$. Entonces τ es obviamente continua, también la función correspondiente $\hat{\tau} : E^n \rightarrow I(E^n)$ definida por $\hat{\tau}(a)(x) = a + x$, es también continua. La función $\hat{\tau}$ es una inversa derecha de e .

Identifiquemos $O(n)$ con el grupo de isometrías que dejan fijo al origen. De (1), la topología compacto-abierta en $O(n)$ es la misma que la topología euclidiana en $O(n)$. Para cada $\phi \in I(E^n)$, tenemos:

$$e^{-1}(e(\phi)) = \phi O(n)$$

con esto, ϕ es un homeomorfismo por 2.2.

(3) Por el teorema 1.8, ξ es un isomorfismo de grupos. Supongamos $A_i \rightarrow A$ en $PO(n, 1)$. Entonces, $A_i x \rightarrow Ax$ para todo x en H^n . De modo que $A_i \rightarrow A$ en $I(H^n)$ por el teorema 1.31. Recíprocamente, supongamos que $A_i \rightarrow A$ en $I(H^n)$. Entonces $A_i e_{n+1} \rightarrow A e_{n+1}$. Para cada $j = 1, \dots, n$ el vector $v_j = e_j + \sqrt{2}e_{n+1}$ está en H^n . De aquí, $A_i v_j \rightarrow A v_j$ para cada $j = 1, \dots, n$. Por tanto:

$$A_i e_j + \sqrt{2}A_i e_{n+1} \rightarrow A e_j + \sqrt{2}A e_{n+1}$$

de esta manera $A_i e_j \rightarrow A e_j$ para cada $j = 1, \dots, n$. Por todo lo anterior $A_i \rightarrow A$ en $PO(n, 1)$, y entonces ξ es un homeomorfismo. ■

El grupo $T(E^n)$ de las translaciones de E^n es un subgrupo de $I(E^n)$, y por tanto, $T(E^n)$ es un grupo topológico con la topología de subespacio.

Corolario. La evaluación $e : T(E^n) \rightarrow E^n$, definida por la fórmula $e(\tau) = \tau(0)$, es un isomorfismo de grupos topológicos.

2.2.1 GRUPOS DE TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS

Cada transformación de Möbius que envía la bola unitaria B^n sobre sí misma está determinada completamente por su acción en $\partial B^n = S^{n-1}$, esto es una consecuencia de la extensión de Poincaré. La topología de S^{n-1} determina de manera natural una topología en el grupo $M(B^n)$, la inducida por la métrica definida por

$$D_B(\phi, \psi) = \sup_{x \in S^{n-1}} |\phi(x) - \psi(x)|.$$

La topología inducida por D_B en $M(B^n)$, coincide con la que hereda del espacio $C(S^{n-1}, S^{n-1})$ de funciones continuas de S^{n-1} en sí mismo, con la topología compacto-abierta.

Lema 1. Si ϕ está en $M(B^n)$, entonces

$$\sup_{x, y \in S^{n-1}} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{|x - y|} = \exp D_B(0, \phi(0)).$$

Demostración:

Supongamos que $\phi(\infty) = \infty$. Entonces ϕ es ortogonal, por tanto, tenemos

$$\frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{|x - y|} = 1 = \exp D_B(0, 0).$$

Ahora supongamos que $\phi(\infty) \neq \infty$. Entonces $\phi = \psi\sigma$, donde σ es la reflexión en la esfera $S(a, r)$ ortogonal a S^{n-1} y ψ es una transformación ortogonal. De manera que $r^2 = |a|^2 - 1$; y además:

$$\frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{|x - y|} = \frac{r^2}{|x - a||y - a|} = \frac{|a|^2 - 1}{|x - a||y - a|},$$

de la igualdad $|x - a|^2 = |x|^2 - 2x \cdot a + |a|^2$ y de la desigualdad de Cauchy-Schwarz $|a \cdot x| \leq |a||x| = |a|^2$, se sigue $|x|^2 - 2x \cdot a + |a|^2 \geq |x|^2 - 2|a||x| + |a|^2$, por tanto el mínimo valor para $|x - a|$ se obtiene cuando $x = \frac{a}{|a|}$, esto implica

$$\sup_{x, y \in S^{n-1}} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{|x - y|} = \frac{|a|^2 - 1}{(|a| - 1)^2} = \frac{|a| + 1}{|a| - 1}.$$

Como

$$\sigma(x) = a + \frac{|a|^2 - 1}{|x - a|^2}(x - a),$$

$\sigma(0) = \frac{a}{|a|^2}$, y por tanto, $|a| = \frac{1}{|\sigma(0)|}$. De aquí

$$\frac{|a| + 1}{|a| - 1} = \frac{1 + |\phi(0)|}{1 - |\phi(0)|} = \exp D_B(0, \phi(0)).$$

Sea $\eta: U^n \rightarrow B^n$, dada por la proyección estereográfica compuesta con la gnomónica. Entonces η induce un isomorfismo $\eta_*: M(U^n) \rightarrow M(B^n)$ definido por $\eta_*(\phi) = \eta\phi\eta^{-1}$. La restricción de η a \tilde{E}^{n-1} es la proyección estereográfica $\pi: \tilde{E}^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$. Sea d la métrica cordal en \tilde{E}^{n-1} . Definamos una métrica D_U en $M(U^n)$ por $D_U(\phi, \psi) = \sup_{x \in \tilde{E}^{n-1}} d(\phi(x), \psi(x))$. Entonces

$$\begin{aligned} D_U(\phi, \psi) &= \sup |\pi\phi(x) - \pi\psi(x)| = \sup |\pi\phi\pi^{-1}(y) - \pi\psi\pi^{-1}(y)| \\ &= D_B(\eta\phi\eta^{-1}, \eta\psi\eta^{-1}) = D_B(\eta_*(\phi), \eta_*(\psi)). \end{aligned}$$

Por tanto, $\eta_*: M(U^n) \rightarrow M(B^n)$ es una isometría.

Teorema 2.5 *Son grupos topológicos*

- 1) $(M(B^n), D_B)$.
- 2) $(M(S^{n-1}), D_B)$ donde D_B es la métrica inducida por D_B en S^{n-1} .
- 3) $(M(U^n), D_U)$.
- 4) $(M(E^{n-1}), D_U)$.

Demostración:

Probemos solo el enunciado (1), éste implica de manera inmediata los otros enunciados. Sean $\phi, \phi_0, \psi, \psi_0 \in M(B^n)$. Por el lema 1, existe una constante positiva $k(\phi)$ tal que

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq k(\phi) |x - y|$$

para todos $x, y \in S^{n-1}$. Como ψ se restringe a una biyección en S^{n-1} , tenemos $D_B(\phi\psi, \phi_0\psi_0) = D_B(\phi, \phi_0)$. De esto se sigue

$$\begin{aligned} D_B(\phi\psi, \phi_0\psi_0) &\leq D_B(\phi\psi, \phi_0\psi) + D_B(\phi_0\psi, \phi_0\psi_0) \\ &\leq D_B(\phi, \phi_0) + k(\phi_0)D_B(\psi, \psi_0). \end{aligned}$$

Esto implica que la composición $(\phi, \psi) \rightarrow \phi\psi$ es continua en (ϕ_0, ψ_0) . Similarmemente, la función $\phi \rightarrow \phi^{-1}$ es continua en ϕ_0 ya que

$$\begin{aligned} D_B(\phi^{-1}, \phi_0^{-1}) &= D_B(\phi^{-1}\phi, \phi_0^{-1}\phi) \\ = D_B(\phi_0^{-1}\phi_0, \phi_0^{-1}\phi) &\leq k(\phi_0^{-1})D_B(\phi_0, \phi). \end{aligned}$$

La extensión de Poincaré induce un homeomorfismo de $M(S^{n-1})$ a $M(B^n)$ y un homeomorfismo de $M(\tilde{E}^{n-1})$ a $M(U^n)$.

Teorema 2.6 Las funciones

- 1) $\Phi : B^n \times O(n) \rightarrow M(B^n)$, dada por $\Phi(b, A) = \tau_b A$, y
 2) $\Psi : B^n \times O(n) \rightarrow I(B^n)$, dada por $\Psi(b, A) = \tau_b A$ son homeomorfismos.

Demostración:

(1) Sea $e_0 : M(B^n) \rightarrow B^n$ la evaluación, definida por $e(\phi) = \phi(0)$. Supongamos que $D(\phi, I) < r$. Como la imagen $\phi(L_\alpha)$ de cada diámetro euclidiano está contenida en una línea de B^n cuyos puntos extremos distan a lo más r de los extremos de $\phi(L_\alpha)$, el cilindro euclidiano C_α con eje en L_α y radio r contiene a $\phi(L_\alpha)$. Entonces e_0 es continua en la identidad, ya que

$$\{\phi(0)\} \subset \bigcap_\alpha \phi(L_\alpha) \subset \bigcap_\alpha C_\alpha = \{x \in B^n : |x| < r\}.$$

Supongamos ahora, que $\{\phi_i\}$ es una sucesión en $M(B^n)$ que converge a ϕ . Entonces $\phi^{-1}\phi_i$ converge a I , ya que $M(B^n)$ es un grupo topológico, luego $\phi^{-1}\phi_i(0)$ converge a 0 , así, $\phi_i(0)$ converge a $\phi(0)$. De modo que e_0 es continua en todo punto. Definamos $\partial\tau : B^n \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ por $\partial\tau(b, x) = \tau_b(x)$. Por la fórmula en 1.1, tenemos

$$\tau_b(x) = \frac{(1 - |b|^2)}{(|b|^2|x|^2 + 2x \cdot b + 1)}x + \frac{2(1 + x \cdot b)}{|x + b|^2}b$$

Por tanto, $\partial\tau$ es continua. De aquí, la función $\partial\hat{\tau} : B^n \rightarrow M(S^{n-1})$ definida por $\partial\hat{\tau}(b)(x) = \tau_b(x)$, es continua, ya que la topología inducida por D_B en $M(S^n)$ es la misma que la topología compacto-abierta. Así también, la función $\hat{\tau} : B^n \rightarrow M(B^n)$ definida por $\hat{\tau}(b)(x) = \tau_b(x)$ es continua, ya que la función de $M(S^{n-1})$ a $M(B^n)$ inducida por la extensión de Poincaré, es un homeomorfismo. La función $\hat{\tau}$ es una inversa derecha de e .

Sea $\phi \in M(B^n)$, luego $\phi O(n) \subset e^{-1}(e(\phi))$. Supongamos que ψ está en $e^{-1}(e(\phi))$. Entonces $\psi(0) = \phi(0)$, y por tanto $\phi^{-1}\psi(0) = 0$, tenemos que $\phi^{-1}\psi$ está en $O(n)$ de aquí $\psi \in \phi O(n)$. Así $e^{-1}(e(\phi)) = \phi O(n)$. De esta manera Φ es un homeomorfismo por el teorema 2.2.

(2) Definamos $\tau : B^n \times B^n \rightarrow B^n$ por $\tau(b, x) = \tau_b(x)$. Sean b y $x \in B^n$. Por la fórmula 1.1 tenemos

$$\tau_b(x) = \frac{(1 - |b|^2)}{(|b|^2|x|^2 + 2x \cdot b + 1)}x + \frac{(|x|^2 + 2x \cdot b + 1)}{(|b|^2|x|^2 + 2x \cdot b + 1)}b.$$

Por tanto, τ es continua. También, la función $\hat{\tau} : B^n \rightarrow I(B^n)$, definida por $\hat{\tau}(b)(x) = \tau_b(x)$, es continua. La función $\hat{\tau}$ es una inversa derecha de e .

Identificaremos a $O(n)$ con el grupo de todas las isometrías de B^n que dejan fijo al origen. Por el mismo argumento que en 2.4(1), con $e_j/2$, la topología compacto-abierta en $O(n)$ es la misma que la topología Euclidiana en $O(n)$. Como $e^{-1}(e(\phi)) = \phi O(n)$, Ψ es un homeomorfismo por el teorema 2.2. ■

Teorema 2.7 Las restricciones

- 1) $\rho : M(B^n) \rightarrow I(B^n)$.
- 2) $\rho : M(U^n) \rightarrow I(U^n)$.
- 3) $\rho : (\hat{E}^{n-1}) \rightarrow S(E^{n-1})$.

Son isomorfismos de grupos topológicos.

Demostración:

(1) La función ρ es un isomorfismo por el teorema 1.18. Las funciones $\Phi : B^n \times O(n) \rightarrow M(B^n)$ y $\Psi : B^n \times O(n) \rightarrow I(B^n)$ son homeomorfismos del teorema 2.6. Como $\rho = \Psi\Phi^{-1}$, tenemos que ρ es un homeomorfismo.

(2) Se sigue inmediatamente de (1).

(3) El grupo $S(E^{n-1})$ de similitudes de E^{n-1} es isomorfo, por la extensión a ∞ , al grupo $M(\hat{E}^{n-1})_\infty$ de transformaciones en $M(\hat{E}^{n-1})$ que fijan al ∞ . La topología inducida en $M(\hat{E}^{n-1})_\infty$ por la métrica D_U es la misma que la topología compacto-abierta, ya que \hat{E}^{n-1} es compacto. Supongamos que $\psi_i \rightarrow \psi$ en $M(\hat{E}^{n-1})_\infty$. Entonces $\psi_i(x) \rightarrow \psi(x)$ para cada punto x en \hat{E}^{n-1} . Se puede probar que $\rho(\psi_i) \rightarrow \rho(\psi)$ y por tanto ρ es continua.

Supongamos que $\phi_i \rightarrow \phi$ en $S(E^{n-1})$, luego $\phi_i(x) \rightarrow \phi(x)$ para cada punto x en E^{n-1} . Sea $\hat{\phi}$ la extensión de Poincaré de ϕ . Entonces $\hat{\phi}_i \rightarrow \hat{\phi}$ en $M(U^n)$ por los teoremas 1.31 y 2.7. Sea $\hat{\hat{\phi}} : \hat{E}^{n-1} \rightarrow \hat{E}^{n-1}$ la extensión de $\hat{\phi}$

definida por $\widehat{\phi}(\infty) = \infty$. Entonces $\widehat{\phi}_i \rightarrow \widehat{\phi}$, ya que la extensión de Poincaré induce un homeomorfismo de $M(\widehat{E}^{n-1})$ a $M(U^n)$. Como $\rho(\widehat{\phi}) = \phi$, tenemos $\rho^{-1}(\phi_i) \rightarrow \rho^{-1}$. Por tanto ρ^{-1} es continua. Así ρ es un homeomorfismo. ■

Ejemplo 1. $PSU(2)$ y $SO(3)$ son isomorfos.

Ejemplo 2. $SU(2)$ y S^2 son isomorfos.

Ejemplo 3. $S^3 / \{\pm 1\}$ y $SO(3)$, son isomorfos.

2.3 Grupos Discretos

En esta sección, estudiaremos las propiedades básicas de los grupos discretos de isometrías de S^n , E^n , y H^n .

Definición. Un grupo discreto es un grupo topológico Γ donde todos sus puntos son abiertos, i.e., la topología de Γ es la discreta.

Lema 1. Si Γ es un grupo topológico, entonces Γ es discreto si y sólo si $\{1\}$ es abierto en Γ .

Demostración:

Si Γ es discreto, entonces $\{1\}$ es abierto. Recíprocamente, supongamos que $\{1\}$ es abierto. Sea $g \in \Gamma$, entonces la multiplicación por la izquierda por g es un homeomorfismo de Γ . Por tanto, el conjunto $g\{1\} = \{g\}$ es abierto en Γ . ■

Lema 2. Un espacio métrico X es discreto si y sólo si cada sucesión convergente en X es eventualmente constante.

Demostración:

Supongamos que X es discreto y $x_n \rightarrow x$ en X . Entonces existe una $r > 0$ tal que $B(x, r) = \{x\}$. Como $x_0 \rightarrow x$, existe un entero m tal que $x_n \in B(x, r)$ para toda $n \geq m$. Así $x_n = x$ para toda $n \geq m$. Recíprocamente, supongamos que X no es discreto. Entonces existe un punto x tal que $\{x\}$ no es abierto. Así $B(x, 1/n) \neq \{x\}$ para cada entero $n > 0$. Escogamos $x_n \in B(x, 1/n)$ tal que $x_n \neq x$. Por tanto, $x_n \rightarrow x$, pero $\{x_n\}$ no es eventualmente constante. ■

Lema 3. Si G es un grupo topológico con una topología inducida por una métrica, entonces cada subgrupo discreto de G es cerrado en G .

Demostración:

Un subespacio discreto de un espacio Hausdorff es cerrado. ■

Asignándole la topología discreta a cualquier grupo Γ , se puede considerar como un grupo discreto. Sin embargo, en este trabajo, nos concentraremos en el estudio de los subgrupos discretos de un grupo continuo como \mathbf{R}^n o $GL(n, \mathbf{C})$. A continuación ponemos algunos ejemplos de subgrupos discretos de grupos continuos familiares.

Ejemplo 1. Los enteros \mathbf{Z} es un subgrupo discreto de \mathbf{R} .

Ejemplo 2. Los enteros gaussianos $\mathbf{Z}[i] = \{m + n\{i\} : m, n \in \mathbf{Z}\}$ es un subgrupo discreto de \mathbf{C} .

Ejemplo 3. El conjunto $\{k^n : n \in \mathbf{Z}\}$ es un subgrupo discreto de \mathbf{R}_+ para cada $k > 0$.

Ejemplo 4. El grupo $\{\exp(2\pi im/n) : m = 0, 1, \dots, n-1\}$ de las n -ésimas raíces de la unidad es un subgrupo discreto de \mathbf{S}^1 para cada entero positivo n .

Ejemplo 5. El conjunto $\{k^n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ es un subgrupo discreto de $\mathbf{C}^* \setminus \mathbf{S}^1$ para cada k en $\mathbf{C}^* \setminus \mathbf{S}^1$.

Ejemplo 6. Un subgrupo Γ de $U(n)$ es discreto si y sólo si Γ es finito.

Ejemplo 7. Un subgrupo Γ de $O(n)$ es discreto si y sólo si Γ es finito.

Definición. El grupo de simetrías de un subconjunto S de un espacio métrico X es el grupo de todas las simetrías de X que dejan a S invariante.

Ejemplo 8. Es conocido desde la antigüedad que los cinco sólidos pueden ser inscritos en una esfera; de hecho una construcción está dada en el libro 13 de los elementos de Euclides. El grupo de simetrías de un sólido regular P inscrito en \mathbf{S}^2 es un subgrupo finito de $O(3)$ cuyo orden es 24 si P es un tetraedro; 48 si P es un cubo o un octaedro; y 120 si P es un dodecaedro o un icosaedro.

Definición: Una latiz de \mathbf{R}^n es un subgrupo generado por m vectores linealmente independientes de \mathbf{R}^n .

Ejemplo 9. Un subgrupo Γ de \mathbf{R}^n es discreto si y sólo si Γ es una latiz.

Ejemplo 10. Sea Γ el conjunto de puntos de \mathbf{R}^4 de la forma $\frac{1}{2}(m, n, p, q)$ donde m, n, p, q son todos enteros pares o todos impares. Entonces Γ es una latiz de \mathbf{R}^4 . Esta latiz es interesante porque contiene 24 vectores uni-

tarios $\pm e_i$, para $i = 1, 2, 3, 4$ y $(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$ todos los cuales forman la vecindad más cercana al cero en Γ . Vale mencionar que estos 24 puntos son los vértices de un poliedro regular en \mathbb{R}^4 llamado la 24-celda.

Definición. Sea $\widehat{SL}(n, \mathbb{C})$ el grupo de las matrices de $n \times n$ cuyo determinante es ± 1 .

Ejemplo 11. Un subgrupo Γ de $\widehat{SL}(n, \mathbb{C})$ es discreto si y sólo si para cada $r > 0$, el conjunto $\{A \in \Gamma : |A| \leq r\}$ es finito. En consecuencia, un subgrupo discreto de $\widehat{SL}(n, \mathbb{C})$ es numerable.

Ejemplo 12. Observemos que el grupo modular $SL(n, \mathbb{Z})$ y el unimodular $GL(n, \mathbb{Z})$ son subgrupos discretos de $\widehat{SL}(n, \mathbb{C})$ por el ejemplo 11.

2.3.1 GRUPOS DISCONTINUOS

Definición. Sea G un grupo en un conjunto X y sea x un elemento de X .

(1) El subgrupo $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ de G es el grupo estabilizador de x en G .

(2) El subconjunto $Gx = \{gx : g \in G\}$ de X es la G -órbita a través de x . Las G -órbitas forman una partición de X .

Observación. Definamos la función $\phi : G/G_x \rightarrow Gx$ por $\phi(gG_x) = gx$. Entonces ϕ es una biyección. Por tanto, el índice de G_x en G es la cardinalidad de la órbita Gx .

Definición: Sea G actuando en un espacio topológico X , decimos que:
i) G actúa discontinuamente en X si y sólo si para cada subconjunto compacto K de X , el conjunto $K \cap gK$ es no vacío sólo para un número finito de elementos de G .

ii) G es discontinuo en caso de que G es un grupo de homeomorfismos de X actuando discontinuamente en X .

Lema 4. Si un grupo G actúa discontinuamente en un espacio topológico X , entonces cada grupo estabilizador es finito.

Demostración:

Sea x un punto de X . El estabilizador G_x de x es finito, ya que $\{x\}$ es compacto. ■

Definición: Una colección S de subconjuntos de un espacio topológico X es localmente finita si y sólo si para cada punto x de X , existe una vecindad abierta U de x en X tal que U interseca únicamente a un número finito

de elementos de S .

Una subcolección de una colección localmente finita S es también localmente finita. También la unión de los miembros de una colección localmente finita S de conjuntos cerrados es cerrada.

Lema 5. Si un grupo G actúa discontinuamente sobre un espacio métrico X , entonces cada G -órbita es un subconjunto cerrado de X .

Demostración:

Sea x un punto en X . Mostraremos que la colección de subconjuntos de un sólo elemento de Gx es localmente finita. Supongamos que y es un punto de X tal que cada vecindad de y contiene un número infinito de puntos de Gx . Ya que X es métrico, existe una sucesión infinita $\{g_i\}$ de elementos distintos de G tal que $\{g_i x\}$ converge a y . Entonces

$$K = \{x, y, g_1 x, \dots\}$$

es un conjunto compacto de X . Como $g_i x$ está en $K \cap g_i K$ para cada i , tenemos una contradicción. Así $\{\{gx\} : g \in G\}$ es una familia localmente finita de subconjuntos cerrados de X . Por tanto, cada subconjunto de Gx es cerrado en X . De manera que Gx es un cerrado en X . ■

Teorema 2.8 Sea Γ un grupo de similitudes de un espacio métrico X . Entonces Γ es discontinuo si y sólo si

- (1) cada estabilizador de Γ es finito, y
- (2) cada Γ -órbita es un subconjunto cerrado discreto de X .

Demostración:

Si Γ es discontinuo, entonces Γ satisface (1) y (2) por los lemas 4 y 5. Recíprocamente, supongamos que Γ no es discontinuo pero que satisface (1) y (2). Entonces existe un subconjunto compacto K de X y una sucesión infinita $\{g_i\}$ de elementos distintos de Γ tales que K y $g_i K$ se intersecan, de esta forma también $g_i^{-1} K$ y K se intersecan. Por medio de una subsucesión, podemos suponer $g_i \neq g_j^{-1}$ para toda $i \neq j$, y reemplazando g_i si es necesario, podemos elegir al factor de escala k_i de g_i menor que uno. Para cada i , existe una x_i en K tal que $g_i x_i \in K$. Como K es compacto, la sucesión $\{x_i\}$ tiene un punto de acumulación x en K . Pasando a una subsucesión, podemos suponer que $\{x_i\}$ converge a x . Análogamente, se construye $\{g_i x_i\}$ que converge a y en K . Obsérvenos que

$$d(g_i x, y) \leq d(g_i x, g_i x_i) + d(g_i x_i, y) = k_i d(x, x_i) + d(g_i x_i, y)$$

Por tanto, $\{g_i x\}$ converge a y . Para cada i , sólo hay un número finito de índices j tales que $g_i x = g_j x$ (1). De aquí, existe una subsucesión infinita de $\{g_i x\}$, cuyos términos son todos distintos que converge a y ; pero esto

contradice (2). Por tanto Γ es discontinuo. ■

Lema 6. Si X es un espacio métrico finitamente compacto, entonces $I(X)$ es cerrado en $C(X, X)$.

Demostración:

El espacio X tiene una base numerable, ya que X es finitamente compacto. Por tanto, $C(X, X)$ tiene una base numerable. De aquí, $I(X)$ es cerrado en $C(X, X)$ si y sólo si cada sucesión infinita de elementos de $I(X)$ que converge en $C(X, X)$, converge en $I(X)$.

Sea $\{\phi_i\}$ una sucesión en $I(X)$ que converge a una función $\phi : X \rightarrow X$. Entonces para cada par de puntos x, y en X , tenemos que

$$d(\phi_i(x), \phi_i(y)) \rightarrow d(\phi(x), \phi(y))$$

por tanto,

$$d(x, y) = d(\phi(x), \phi(y)).$$

Así ϕ preserva distancias. Ya estamos cerca de probar que ϕ es una isometría, mostraremos, para acabar, que ϕ es suprayectiva. Sea a un punto base de X y sea $C(a, r)$ la bola cerrada centrada en a con radio $r > 0$. Entonces el conjunto $\phi(C(a, r))$ es cerrado en X , ya que $C(a, 2r)$ es compacto. Por contradicción, supongamos que y es un punto de $C(\phi(a), r)$ que no está en $\phi(C(a, 2r))$. Sea

$$s = \text{dist}(y, \phi(C(a, 2r))).$$

Entonces $0 < s \leq r$. Como $\phi_i \rightarrow \phi$ uniformemente en $C(a, 2r)$, existe un índice, tal que

$$d(\phi_i(x), \phi(x)) < s,$$

para cada punto x en $C(a, 2r)$. Observemos que:

$$d(y, \phi_j(a)) \leq d(y, \phi(a)) + d(\phi(a), \phi_j(a)) \leq r + s \leq 2r.$$

Luego $y \in C(\phi_j(a), 2r)$, y como ϕ_j manda a $C(a, 2r)$ sobre $C(\phi_j(a), 2r)$, existe un punto x en $C(a, 2r)$ tal que $\phi_j(x) = y$. Tenemos la contradicción

$$d(y, \phi(x)) = d(\phi_j(x), \phi(x)) < s.$$

De esto,

$$X = \bigcup_{r>0} C(\phi(a), r) \subset \bigcup_{r>0} \phi(C(a, 2r)) = \text{Im } \phi$$

Luego, ϕ es suprayectiva. Por tanto, ϕ es una isometría. Con todo lo anterior, se sigue que la sucesión $\{\phi_i\}$ converge en $I(X)$, en consecuencia, $I(X)$ es cerrado en $C(X, X)$. ■

Teorema 2.9 Sea X un espacio métrico finitamente compacto. Entonces un grupo Γ de $I(X)$ es discreto si y sólo si Γ es discontinuo.

Demostración: Supongamos que Γ es discontinuo. Sea $x \in X$, entonces la órbita Γx es discreta y el subgrupo estabilizador Γ_x es finito por el teorema 2.8. Sea $\varepsilon_x : \Gamma \rightarrow \Gamma x$ la evaluación en x . Entonces ε_x es continua. Por tanto, el conjunto $\varepsilon_x^{-1}(x) = \Gamma_x$ es abierto en Γ . De aquí, se sigue que la identidad de X es un abierto en Γ , y por esto, Γ es discreto, por el Lema 1.

Recíprocamente, supongamos que Γ es discreto. X es finitamente compacto. Así $C(X, X)$ es regular, ya que X lo es. De esta forma se concluye que $C(X, X)$ es metrizable. Así, Γ es cerrado en $I(X)$ por el Lema 3, entonces cerrado en $C(X, X)$ por el Lema 6.

Supongamos que Γ no es discontinuo. Entonces existe un punto y de X y una sucesión infinita $S = \{\phi_i\}$ de elementos diferentes de Γ tal que $\{\phi_i(y)\}$ converge a un punto de X . El conjunto S es cerrado en $C(X, X)$, ya que Γ es un subconjunto cerrado discreto de $C(X, X)$. También S es equicontinuo en X , ya que para cada $x \in X$, $\tau > 0$, $i \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\phi_i(B(x, \tau)) = B(\phi_i(x), \tau).$$

Sea x un punto arbitrario de X . Entonces $\varepsilon_x(S) = \{\phi_i(x)\}$. Observemos que para todo i , también

$$d(\phi_i(x), \phi_i(y)) = d(x, y).$$

Sea $r = d(x, y)$. De manera que

$$\{\phi_i(x)\} \subset \overline{N}(\{\phi_i(y)\}, r),$$

donde $\overline{N}(\{\phi_i(y)\}, r) = \overline{\bigcup_i B(\phi_i(y), r)}$, que es compacta ya que $\{\phi_i(y)\}$ es acotado. Por tanto, como S es equicontinua y cerrada y $\varepsilon_x(S)$ es compacto para cada $x \in X$, por el Teorema de Arzela-Ascoli [Dudjundi, pág 267] $\overline{S} = S$ es compacto. Como S es discreto, S debe resultar finito, una contradicción, luego Γ es discontinuo. ■

2.4 Grupos Euclidianos Discretos.

En esta sección caracterizamos los subgrupos discretos del grupo $I(E^n)$ de isometrías de E^n .

Definición: Una isometría ϕ de E^n es *elíptica* si fija al menos un punto de E^n ; de otra forma, es *parabólica*.

Observación. $\phi \in I(E^n)$ es elíptica (resp. parabólica) si y sólo si su extensión de Poincaré $\tilde{\phi}$ en $M(U^{n+1})$ es elíptica (resp. parabólica).

Cada elemento ϕ de $I(E^n)$ es de la forma $\phi(x) = a + Ax$ con a en E^n y A en $O(n)$. Escribiremos simplemente $\phi = a + A$.

Teorema 2.10 *Sea ϕ en $I(E^n)$. Entonces ϕ es parabólica si y sólo si existe una línea L de E^n en la cual ϕ actúa como una translación no trivial. Además existe una isometría ψ de E^n que fija los puntos de L y una translación no trivial τ que deja a L invariante, tales que $\phi = \tau\psi$.*

Demostración:

Supongamos que $\phi = a + A$ es parabólica. Entonces ϕ no tiene puntos fijos en E^n por definición. Sean $V = \{x \in E^n; Ax = x\}$ y W su complemento ortogonal. Escribamos $x = v + w$ con $v \in V$ y $w \in W$. La transformación ortogonal A deja a la descomposición $E^n = V \oplus W$ invariante. De aquí, $A - I$ manda a W en sí mismo. Como V es el núcleo de $A - I$ y $V \cap W = \{0\}$, tenemos que $A - I$ es un isomorfismo de W en sí mismo. Observemos que la ecuación:

$$a + Ax = x$$

es equivalente a la ecuación:

$$(b + c) + v + Aw = v + w, \text{ con } a = b + c, x = v + w$$

luego:

$$(A - I)w = -b - c.$$

En consecuencia $b \neq 0$. Puesto que de otra manera se podría resolver la última ecuación para w y obtener un punto fijo para ϕ . Escojamos una y en E^n de tal forma que $(A - I)y = -c$. Sea L la línea cuya forma paramétrica es $x = tb + y$, con t en \mathbb{R} . Entonces, ϕ actúa como una translación no trivial en L , ya que

$$\begin{aligned} \phi(tb + y) &= a + A(tb + y) = a + Atb + Ay \\ &= a + tb + y + c = (t + 1)b + y. \end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que existe una línea L de E^n en la cual ϕ actúa como una translación no trivial. Entonces, ϕ manda a cada hiperplano de E^n ortogonal a L a otro hiperplano ortogonal a L . Luego ϕ no tiene puntos fijos en E^n , por tanto ϕ es parabólica.

Escojamos y tal que $(A - I)y = c$, y sea L la línea $x = tb + y$ con $t \in \mathbb{R}$, $\psi = c + A$ y $\tau = b + I$. Entonces $\phi = \tau\psi$, además

$$\psi(tb + y) = c + tb + Ay = tb + y$$

y

$$\tau(tb + y) = (1 + t)b + y,$$

de modo que ψ fija a cada punto de L y τ la deja invariante. ■

Corolario 1. Si $\phi \in I(E^n)$ es parabólica, entonces $\Gamma = \langle \phi \rangle$ es discreto.

Demostración:

Por el teorema 2.10, existe una línea L de E^n en la cual ϕ actúa como una translación no trivial. Sea x un punto en L . Entonces la órbita Γx es un conjunto discreto. Como la función $e: \Gamma \rightarrow \Gamma x$ definida por $e(\phi^m) = \phi^m(x)$, es continua, tenemos que $e^{-1}(x) = \{I\}$ es abierto en Γ , y por tanto Γ es discreto. ■

Observación. Sea $\phi \in I(E^n)$ elíptica, entonces $\Gamma = \langle \phi \rangle$ es discreto si y sólo si ϕ tiene orden finito.

2.4.1 CONMUTATIVIDAD EN GRUPOS DISCRETOS EUCLIDIANOS

El siguiente teorema es un resultado clásico del Álgebra Lineal.

Teorema 2.11 Sea A una matriz ortogonal de $n \times n$. Entonces existen ángulos $\theta_1, \dots, \theta_m$ con $0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_m \leq \pi$, tal que A es conjugada en $O(n)$ a una matriz de bloque de la forma

$$\begin{pmatrix} B(\theta_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B(\theta_m) \end{pmatrix},$$

donde $B(0) = 1$, $B(\pi) = -1$, y en otro caso,

$$B(\theta_j) = \begin{pmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j \\ \sin \theta_j & \cos \theta_j \end{pmatrix}.$$

Definición. Los ángulos $\theta_1, \dots, \theta_m$ en el teorema 2.11 se llaman los ángulos de rotación de A .

Los ángulos de rotación de una matriz A determinan completamente su clase de conjugación en $O(n)$, ya que $e^{\pm i\theta_1}, \dots, e^{\pm i\theta_m}$ son los vectores propios de A , contando multiplicidades. Mas aún, A es conjugada en $U(n)$ a una matriz diagonal con entradas en la diagonal $e^{\pm i\theta_1}, \dots, e^{\pm i\theta_m}$. Notemos

que A tiene orden finito si y sólo si cada ángulo de rotación de A es un múltiplo racional de π .

Lema 1. Sean A y $B \in M(n, \mathbb{R})$ y $x \in E^n$. Entonces:

- 1) $|Ax| \leq |A| |x|$.
- 2) $|AB| \leq |A| |B|$.
- 3) $|A \pm B| \leq |A| + |B|$.

Además, si B es ortogonal

- 4) $|BA| = |A| = |AB|$.
- 5) $|BAB^{-1} - I| = |A - I|$.

Lema 2. Si A está en $O(n)$ y $|A - I| < 2$, entonces A es una rotación con todos sus ángulos de rotación menores que $\pi/2$.

Demostración:

Por el Lema 1 (5) supongamos que A está en la forma de matriz diagonal por bloques del teorema 2.11. Ya que $|A - I| < 2$, ningún ángulo de rotación es igual a π y por tanto A es una rotación. Mas aún, para cada ángulo de rotación $\theta > 0$, tenemos:

$$|B(\theta)|^2 = (\cos \theta - 1)^2 + \sin^2 \theta + \sin^2 \theta + (\cos \theta - 1)^2 < 4.$$

De aquí:

$$4 - 4\cos \theta < 4.$$

Por tanto, $\cos \theta > 0$. Así $\theta < \pi/2$ para cada ángulo de rotación de A . ■

Lema 3. Sean $A, B \in GL(n, \mathbb{C})$, donde A es una matriz conjugada a una matriz ortogonal y sea $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ la descomposición en espacios propios de \mathbb{C}^n relativa a A . Entonces A y B conmutan si y sólo si $B(V_j) = V_j$ para cada j .

Demostración:

Sea c_j el vector propio asociado al subespacio propio V_j , para cada j . Entonces por definición $V_j = \ker(A - c_j I)$. De aquí:

$$B(V_j) = \ker B(A - c_j I)B^{-1} = \ker(BAB^{-1} - c_j I).$$

Por tanto:

$$\mathbb{C}^n = B(V_1) \oplus \dots \oplus B(V_m)$$

es la descomposición en espacios propios de \mathbb{C}^n relativa BAB^{-1} .

Supongamos que A y B conmutan. Entonces $BAB^{-1} = A$ y por tanto $B(V_j) = V_j$ para cada j . Recíprocamente, supongamos que $B(V_j) = V_j$ para cada j . Sea v un vector arbitrario en \mathbb{C}^n . Entonces podemos escribir $v = v_1 + \dots + v_m$ con $v_j \in V_j$. Observemos que

$$BAv_j = Bc_j v_j = c_j Bv_j$$

y

$$ABv_j = A(Bv_j) = c_j Bv_j,$$

pero esto implica que $BAv = ABv$, por tanto $BA = AB$. ■

Lema 4. Sean A, B en $O(n)$ con $|B - I| < 2$. Si A conmuta con BAB^{-1} , entonces A conmuta con B .

Demostración:

Por el lema 2, tenemos que B es una rotación con todos sus ángulos menores que $\pi/2$. Entonces, todos los valores propios de B tienen partes reales positivas. Sea $\mathbb{C}^n = W_1 \oplus \dots \oplus W_l$ la descomposición en subespacios propios de \mathbb{C}^n relativa a B . Los espacios W_j son mutuamente ortogonales, ya que B es ortogonal. Sea w un vector distinto de cero en \mathbb{C}^n y escribamos $w = w_1 + \dots + w_l$ con w_j en W_j . Sea c_j el valor propio correspondiente a W_j . Entonces

$$\operatorname{Re}((Bw) * w) = \operatorname{Re}((\sum c_j w_j) * \sum w_k) = \operatorname{Re} \sum c_j |w_j|^2 > 0.$$

Por esto B no puede mandar a un vector distinto de cero a un vector ortogonal a él. Sea $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ la descomposición ortogonal de \mathbb{C}^n relativa a A . Entonces,

$$\mathbb{C}^n = B(V_1) \oplus \dots \oplus B(V_m)$$

es la descomposición de \mathbb{C}^n relativa a BAB^{-1} . Ya que BAB^{-1} y A conmutan, $A(B(V_j)) = B(V_j)$ para cada j por el lema 3. Tenemos que

$$B(V_j) = \bigoplus_k (B(V_j) \cap V_k)$$

es la descomposición por espacios propios de $B(V_j)$ relativa a A . Ya que B no puede mandar ningún vector distinto de cero en \mathbb{C}^n a uno ortogonal a él, debemos tener que $B(V_j) \cap V_k = \{0\}$ con $i \neq k$. Así $B(V_j) = B(V_j) \cap V_j \subset V_j$ y por tanto, $B(V_j) = V_j$ para toda j , y de esta forma, deducimos que A conmuta con B , por el lema 3. ■

Lema 5. Sea Γ un subgrupo discreto de $I(E^n)$ y sean $\phi = a + A$ y $\psi = b + B$ en Γ , si $|A - I| < 1/2$ y $|B - I| < 2$, entonces A y B conmutan.

Demostración:

Supongamos que $BA \neq AB$. Definamos una sucesión $\{\psi_m\}$ en Γ mediante $\psi_0 = \psi$ y $\psi_{m+1} = \psi_m \phi \psi_m^{-1}$. Sean B_m en $O(n)$ y b_m en E^n , tales que $\psi_m = b_m + B_m$. Por un cálculo directo

$$\psi_{m+1} = b_m + B_m a - B_m A B_m^{-1} b_m + B_m A B_m^{-1}.$$

De aquí, $B_{m+1} = B_m A B_m^{-1}$. Como $|B_0 - I| < 2$ y

$$\begin{aligned} |A - B_{m+1}| &= |A - B_m A B_m^{-1}| \\ &= |A B_m - B_m A| = |(A - B_m)(A - I) - (A - I)(A - B_m)| \\ &\leq |(A - B_m)(A - I)| + |(A - I)(A - B_m)| \\ &\leq 2|A - I||A - B_m| < |A - B_m|. \end{aligned}$$

Así B_{m+1} es más cercano a A que B_m , luego los términos de la sucesión $\{B_m\}$, y por tanto de $\{\psi_m\}$, son distintos. Observemos que

$$b_{m+1} = (I - B_m A B_m^{-1})b_m + B_m a$$

entonces,

$$|b_{m+1}| \leq \frac{1}{2} |b_m| + |a|.$$

Consecuentemente $|b_m|$ está acotado por $2|a| + |b|$ para toda m , de esta manera la sucesión $\{b_m\}$ tiene una subsucesión convergente $\{b_{m_j}\}$, más aún como $O(n)$ es compacto, $\{B_{m_j}\}$ tiene también una subsucesión convergente, así $\{\psi_m\}$ tiene una subsucesión en $I(E^n)$ que converge en Γ , pues Γ es cerrado en $I(E^n)$. Como los términos de $\{\psi_m\}$ son distintos, tenemos una contradicción con que Γ es discreto por el lema 2 de 2.3. ■

Lema 6. Sean Γ un subgrupo discreto de $I(E^n)$, $\phi = a + A$ y $\psi = b + B$ elementos en Γ con $|A - I| < 1$ y $|B - I| < 1$. Si A y B conmutan, entonces ϕ y ψ conmutan.

Demostración:

Sea $\{\phi, \psi\} = \phi\psi\phi^{-1}\psi^{-1}$, mediante operaciones directas se llega a que

$$\{\phi, \psi\} = (A - I)b + (I - B)a + I.$$

Sean $c = (A - I)b + (I - B)a$, y $\{\phi_m\}$ la sucesión en Γ definida por $\phi_1 = \{\phi, \psi\}$ y $\phi_m = \{\phi, \phi_{m-1}\}$. Entonces $\phi_1 = (A - I)c + I$, y en general $\phi_m = (A - I)^m c + I$. Ahora

$$|(A - I)^m c| \leq |A - I|^m |c|,$$

como $|A - I| < 1$, tenemos que $(A - I)^m c \rightarrow 0$ en E^n . Así $\phi_m \rightarrow I$ en Γ . De aquí se sigue que $\{\phi_m\}$ es eventualmente constante por el lema 2 de 2.3. Luego $(A - I)^m c = 0$ para alguna m .

Sea V el espacio de todos los vectores en E^n que fija A y sea W su complemento ortogonal, de manera que $c = v + w$ con $v \in V$ y $w \in W$. Entonces

$$(A - I)^m c = (A - I)^m w.$$

Como A es ortogonal, $A - I$ manda a W isomórficamente sobre sí mismo. Así $w = 0$, de modo que c es un punto fijo de A . Usando el mismo argumento, la sucesión $\{\psi_m\}$, definida por $\psi_1 = [\psi, [\phi, \psi]]$ y $\psi_m = [\psi, \psi_m]$, converge a I , se puede deducir que c es también un punto fijo de B .

Observemos que $(A - I)b$ está en W , luego es ortogonal a c . Análogamente $(I - B)a$ es ortogonal a c . Como $c = (A - I)b + (I - B)a$, tenemos que c es ortogonal a sí mismo, esto sólo pasa cuando $c = 0$. De modo que ϕ y ψ conmutan. ■

Lema 7. Si X es un espacio métrico compacto, entonces, para cada $r > 0$, existe un número máximo $k(r)$ de puntos en X , cuyas distancias entre sí son al menos r .

Demostración:

Supongamos que no existe una cota superior al número de puntos de X cuyas distancias entre ellos son al menos r . Ya que X es compacto, se puede cubrir por un número finito de bolas de radio $r/2$, digamos $B(x_1, r/2), \dots, B(x_m, r/2)$. Sean y_1, \dots, y_{m+1} , $m + 1$ puntos de X cuyas distancias entre sí son al menos r . Entonces alguna bola $B(x_i, r/2)$ contiene dos puntos y_j y y_k . Pero

$$d(y_j, y_k) \leq d(y_j, x_i) + d(x_i, y_k) < r/2 + r/2 = r$$

que es una contradicción. ■

Lema 8. Sea Γ un subgrupo de $I(E^n)$ y para cada $r > 0$, sea Γ_r el subgrupo de Γ generado por todos los elementos $\phi = a + A$ en Γ , con $|A - I| < r$, y sea $k_n(r)$ el máximo número de elementos de $O(n)$ cuyas distancias mutuas sean menores a r , relativas a la métrica $d(A, B) = |A - B|$. Entonces Γ_r es un subgrupo normal de Γ y $|\Gamma : \Gamma_r| \leq k_n(r)$ para cada $r > 0$.

Demostración:

Sea $\phi = a + A$ en Γ_r , con $|A - I| < r$, y sea $\psi = b + B \in \Gamma$. Entonces $\psi\phi\psi^{-1} = c + BAB^{-1}$ para algún c en E^n . De aquí

$$|BAB^{-1} - I| = |A - I| < r.$$

Así $\psi\phi\psi^{-1}$ está en Γ_r . Consecuentemente Γ_r es un subgrupo normal de Γ . Sea $\psi_i = b_i + B_i$, para $i = 1, \dots, m$, el número maximal de elementos de Γ tal que las distancias mutuas entre los B_1, \dots, B_m son al menos r . De este modo $m \leq k_n(r)$. Sea $\psi = b + B$ un elemento cualquiera en Γ . Entonces existe un índice j tal que $|B - B_j| < r$; de otra manera $\psi, \psi_1, \dots, \psi_m$ serían $m + 1$ elementos cuyas distancias entre los B, B_1, \dots, B_m son al menos r . De aquí $|\psi B_j^{-1} - I| < r$. Como $\psi\psi_j^{-1} = c + BB_j^{-1}$ para algún $c \in E^n$, tenemos que $\psi\psi_j^{-1}$ está en Γ_r . Así ψ está en la clase lateral $\Gamma_r\psi_j$. Por tanto

$$\Gamma = \Gamma_r\psi_1 \cup \dots \cup \Gamma_r\psi_m.$$

De lo anterior $[\Gamma : \Gamma_r] \leq m \leq k_n(r)$. ■

Teorema 2.12 *Sea Γ un subgrupo discreto de $I(E^n)$. Entonces Γ contiene a un subgrupo normal abeliano N de índice finito que contiene a todas las traslaciones en Γ , el índice de N está acotado por un número que sólo depende de n .*

Demostración:

Sea $N = \Gamma_{1/2}$. Entonces tenemos por el lema 8 que N es un subgrupo normal de Γ con $[\Gamma : N] \leq k_n(1/2)$; mas aún, N es abeliano por los lemas 5 y 6. Claramente N contiene a las traslaciones que están en Γ . ■

Ejemplo 1. Sea Γ el grupo de simetrías de \mathbb{Z}^n en E^n . Entonces $\Gamma(0) = \mathbb{Z}^n$; más aún, el estabilizador Γ_0 es el subgrupo de $O(n)$ de todas las matrices con entradas enteras, además es un grupo finito. La función $e : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}^n$, definida por $e(\phi) = \phi(0)$, es continua. Por tanto, $e^{-1}(0) = \Gamma_0$ es abierto en Γ . Así Γ es discreto.

Si $\phi = a + A \in \Gamma$, entonces $A \in \Gamma_0$. Así, la función $a + A \rightarrow A$ determina una sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow T \rightarrow \Gamma \rightarrow \Gamma_0 \rightarrow 1$$

donde T es el subgrupo de traslaciones de Γ . La sucesión se escinde, ya que Γ_0 es un subgrupo de Γ . Así $\Gamma = T\Gamma_0$ es un producto semidirecto. En particular, el índice T en Γ es el orden de Γ_0 .

Definición: *Sea G un grupo que actúa en un conjunto X .*

(1) *Un elemento $g \in G$ actúa trivialmente si y sólo si $gx = x$ para todo x en X .*

(2) *El grupo G actúa trivialmente en X si y sólo si cada elemento de G actúa trivialmente en X .*

(3) *El grupo G actúa efectivamente en G si y sólo si 1 es el único elemento de G que actúa trivialmente en X .*

Teorema 2.13 *Sea Γ un subgrupo discreto abeliano de $I(E^n)$. Entonces existen subgrupos H y K de Γ y un m -plano P de E^n tal que*

(1) *el grupo Γ tiene la descomposición por suma directa $\Gamma = K \oplus H$;*

(2) *el grupo K es finito y actúa trivialmente en P ; y*

(3) *el grupo H es abeliano libre de rango m y actúa efectivamente en P como un grupo de traslaciones.*

Demostración:

La prueba es por inducción en la dimensión n . El teorema es trivial cuando $n = 0$. Supongamos que $n > 0$ y el teorema es cierto para todas las dimensiones menores que n . Escogamos $\phi = a + A$ en Γ tal que la dimensión

del espacio V de todos los vectores en E^n fijos por A es tan pequeña como sea posible. Si $V = E^n$, entonces Γ es un grupo de translaciones y por tanto el teorema se cumple para Γ por según el ejemplo 9 de 2.3 con $H = \Gamma$ y P el espacio vectorial generado por la órbita $\Gamma(0)$.

Supongamos que $\dim V < n$, sea W el complemento ortogonal de V en E^n . Escribamos $a = v + w$ con $v \in V$ y $w \in W$. Ya que la imagen de $A - I$ es W , existe una y tal que $(A - I)y = w$. Sea $\tau = y + I$. Entonces

$$\begin{aligned}\tau\phi\tau^{-1} &= \tau\phi(-y + I) = \tau(a - Ay + A) \\ &= y + a - Ay + A = a - w + A \\ &= v + A.\end{aligned}$$

Conjugando el grupo Γ por τ , podemos suponer que a es un punto fijo de A . Sea $\psi = b + B$ en V . De la prueba del Lema 6, tenemos

$$[\phi, \psi] = (A - I)b + (I - B)a + I.$$

Así $(A - I)b + (I - B)a = 0$. Como A y B conmutan, $B(V) = V$ y entonces $(B - I)(V) \subset V$. De la ecuación

$$(B - I)a + (I - A)b,$$

deducimos que $(B - I)a$ está en $V \cap W = \{0\}$. Así B fija a y A fija b . Se sigue que b está en V . De manera que ψ , y por tanto Γ , dejan a V invariante.

Conjugando el grupo Γ por una rotación apropiada, podemos suponer que $V = E^k$ con $k < n$. Sea $\bar{\Gamma}$ el subgrupo de $I(E^k)$ que se obtiene de restringir las isometrías de Γ en V y $\rho : \Gamma \rightarrow \bar{\Gamma}$ la restricción. El núcleo de ρ es un subgrupo discreto de $O(n)$ y es por tanto finito de acuerdo con el ejemplo 6 de 2.3. Como Γ actúa discontinuamente en E^k , el grupo $\bar{\Gamma}$ lo hace también y por tanto es discreto. Por hipótesis de inducción, existen subgrupos \bar{H} , \bar{K} de $\bar{\Gamma}$ y un m -plano P de E^k tal que (1) $\bar{\Gamma} = \bar{H} \oplus \bar{K}$, (2) \bar{K} es finito y actúa trivialmente en P , y (3) \bar{H} es abeliano libre de rango m y actúa trivialmente en P como un grupo discreto de translaciones. Sea $K = \rho^{-1}(\bar{K})$. Entonces K es un subgrupo discreto de Γ , actuando trivialmente en P . Más aún existe una sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow K \rightarrow \Gamma \rightarrow \bar{H} \rightarrow 1.$$

La sucesión se escinde, ya que \bar{H} es abeliano libre. De aquí, existe un subgrupo H de Γ tal que $\Gamma = K \oplus H$ y ρ manda H isomórficamente sobre \bar{H} . Por tanto, H es abeliano libre de rango m y H actúa efectivamente en P como un grupo discreto de translaciones. Esto completa la inducción. ■

Definición. Un subgrupo latiz Γ de $I(E^n)$ es un grupo Γ generado por $m \leq n$ translaciones linealmente independientes.

Corolario 3. *Un subgrupo Γ de $I(E^n)$ es un subgrupo latiz si y sólo si Γ es discreto y abeliano libre de rango m .*

Lema 12. *Sea H un subgrupo de índice finito en un grupo topológico Γ con una topología inducida por una métrica. Si H es discreto, entonces Γ es discreto.*

Demostración:

Supongamos que H es discreto. Entonces H es cerrado en Γ por el Lema 3 de 1.3. Ya que H es de índice finito en Γ , existen elementos g_1, g_2, \dots, g_m en Γ , con $g_1 = 1$, tal que

$$\Gamma = g_1 H \cup \dots \cup g_m H.$$

Así,

$$H = \Gamma - g_2 H \cup \dots \cup g_m H.$$

Como cada clase lateral $g_i H$ es cerrada en Γ , H es abierto en Γ . También $\{1\}$ es abierto en Γ . Así Γ es discreto. ■

El siguiente teorema se sigue inmediatamente de los teoremas 2.12 y 2.13, y el lema 9.

Teorema 2.14 *Sea Γ un subgrupo de $I(E^n)$. Entonces Γ es discreto si y sólo si Γ tiene un subgrupo abeliano libre H de rango m y de índice finito tal que H actúa efectivamente en un m -plano P de E^n como un grupo discreto de translaciones.*

Mostraremos que el m -plano P en el teorema 2.14 puede escogerse de manera que P es invariante bajo Γ . El siguiente lema considera el caso $m = 0$.

Lema 10. *Si Γ es un subgrupo finito de $I(E^n)$, entonces Γ fija un punto de E^n .*

Demostración:

Sea $m = |\Gamma|$ y hagamos

$$a = \frac{1}{m} \sum_{\phi \in \Gamma} \phi(0).$$

Entonces para $\psi = b + B$ en Γ , tenemos

$$\begin{aligned} \psi(a) &= b + \frac{1}{m} \sum_{\phi \in \Gamma} B\phi(0) = \frac{1}{m} \sum_{\phi \in \Gamma} (b + B\phi(0)) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{\phi \in \Gamma} \psi\phi(0) = \frac{1}{m} \sum_{\phi \in \Gamma} \phi(0) = a. \end{aligned}$$

Teorema 2.15 Sea Γ un subgrupo discreto de $I(E^n)$, entonces

- (1) el grupo Γ tiene un subgrupo libre abeliano de índice finito H ;
 (2) existe un m -plano P de E^n en donde H actúa efectivamente como un grupo discreto de translaciones; y
 (3) el m -plano P es invariante bajo Γ .

Demostración:

Por el teorema 2.12 el grupo Γ tiene un subgrupo abeliano normal N de índice finito. Por el teorema 2.13, el grupo N contiene a un subgrupo abeliano libre H de rango m y de índice finito, existe un m -plano Q de E^n tal que H actúa efectivamente en Q como un subgrupo discreto de translaciones, y N actúa en Q vía translaciones. Conjugando Γ en $I(E^n)$, podemos suponer que $Q = E^m$. Sea $\phi = a + A$ un elemento arbitrario de N . Como $\phi(0) = a$, encontramos que a está en E^n y ϕ actúa en E^m , por translación por a . Luego, A fija cada punto de E^m . Sea V_ϕ el subespacio de E^n de elementos fijos por A y definamos $V = \bigcap_{\phi \in N} V_\phi$. Entonces $E^m \subset V$.

Sea $\psi = b + B$ un elemento arbitrario de Γ . Mostraremos que ψ deja V invariante. Primero,

$$\begin{aligned} B(V) &= B\left(\bigcap_{\phi \in N} V_\phi\right) = \bigcap_{\phi \in N} BV_\phi \\ &= \bigcap_{\phi \in N} V_{\psi\phi\psi^{-1}} = \bigcap_{\omega \in N} V_\omega = V. \end{aligned}$$

Por tanto, B deja invariante a V . Sea $\phi = a + A$ en N . Entonces

$$\psi\phi\psi^{-1} = (I - BAB^{-1})b + Ba + BAB^{-1}.$$

Como $\psi\phi\psi^{-1}$ está en N , existe una v en E^n tal que

$$(I - BAB^{-1})d + Ba = v.$$

Observemos que

$$Ba = v + (BAB^{-1} - I)d$$

es la descomposición ortogonal de Ba con respecto a $V_{\psi\phi\psi^{-1}}$. Como Ba está en V , tenemos que $(BAB^{-1} - I)d = 0$, entonces $d = 0$. Por tanto, $b \in V_{\psi\phi\psi^{-1}}$ para cada $\phi \in N$. Así b está en V . Y de esta forma ϕ deja a V invariante. Más aún Ba está en E^m para cada $a \in E^m$. Luego B deja E^n invariante.

Conjugando Γ por una rotación apropiada de E^n que deja a E^m fijo, podemos suponer que $V = E^l$ con $l \geq m$. Sea $\eta: E^l \rightarrow E^{l-m}$ la proyección definida por

$$\eta(x_1, \dots, x_l) = (x_{m+1}, \dots, x_l).$$

Definamos $\sigma : E^{l-m} \rightarrow E^l$ por

$$\sigma(x_1, \dots, x_{l-m}) = (0, \dots, 0, x_1, \dots, x_{l-m}).$$

Entonces σ es un inverso derecho de η . Por el teorema 2.2 tenemos que η induce un isomorfismo de grupos topológicos

$$\bar{\eta} : E^l/E^m \rightarrow E^{l-m}.$$

Definamos una métrica en E^l/E^m por

$$d(x + E^m, y + E^m) = |\eta(x) - \eta(y)|.$$

Entonces $\bar{\eta}$ es una isometría. Definimos una acción de Γ/N en E^l/E^m mediante

$$(N\psi)(x + E^m) = \psi(x) + E^m = b + Bx + E^m.$$

Esta acción está bien definida, ya que N actúa en E^l por translación por los elementos de E^m y B deja E^m invariante. Más aún Γ/N actúa en E^l/E^m vía isometrías. Por el lema 6, el grupo finito Γ/N fija un punto $P = x + E^m$ de E^l/E^m . De aquí Γ deja el m -plano P invariante, y H actúa efectivamente en P como un grupo de translaciones. ■

2.5 Grupos Elementales.

En esta sección, caracterizamos los subgrupos discretos elementales de $M(B^n)$.

Definición. Un subgrupo G de $M(B^n)$ es elemental si G tiene una órbita finita en la bola cerrada \bar{B}^n .

Definición. Sea G un subgrupo elemental de $M(B^n)$.

- (1) El grupo G se dice del tipo *elíptico* si G tiene una órbita finita en B^n .
- (2) El grupo G se dice del tipo *parabólico* si G fija un punto en S^{n-1} y no tiene otras órbitas finitas en \bar{B}^n .
- (3) El grupo G se dice del tipo *hiperbólico* si G no es ni del tipo parabólico ni del tipo elíptico.

Sea $\phi \in M(B^n)$ y x un punto de \bar{B}^n . Entonces

$$(\phi G \phi^{-1})\phi(x) = \phi(Gx).$$

En otras palabras, la $\phi G \phi^{-1}$ -órbita de $\phi(x)$ es la ϕ -imagen de la G -órbita de x . Esto implica que $\phi G \phi^{-1}$ es también elemental; más aún, G y $\phi G \phi^{-1}$ tienen el mismo tipo. Así, el tipo elemental de G depende sólo de la clase de conjugación de G .

2.5.1 GRUPOS ELEMENTALES DEL TIPO ELÍPTICO.

Teorema 2.16 *Sea G un subgrupo elemental de $M(B^n)$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (1) *El grupo G es del tipo elíptico.*
 - (2) *El grupo G fija un punto de B^n .*
 - (3) *El grupo G es conjugado en $M(B^n)$ a un subgrupo de $O(n)$.*
- Además será un grupo discreto elemental del tipo elíptico si y sólo si G es finito.*

Demostración:

Supongamos que G es del tipo elíptico. Pasaremos al modelo del hiperboloide \mathbb{H}^n del espacio hiperbólico y consideramos a G como un subgrupo de $PO(n, 1)$. Como G es del tipo elíptico tiene una órbita finita $\{v_1, \dots, v_m\}$ en \mathbb{H}^n . Sea $v = v_1 + \dots + v_m$. Entonces v es un vector temporal positivo de $\mathbb{R}^{n,1}$ por el teorema 1.5.

Sea $v_0 = v / \|v\|$, entonces v_0 está en \mathbb{H}^n . Si A está en G , A permuta los elementos de $\{v_1, \dots, v_m\}$ con la multiplicación por la izquierda. De esta manera,

$$Av_0 = \frac{Av}{\|Av\|} = \frac{Av_1 + \dots + Av_m}{\|Av\|} = \frac{v_1 + \dots + v_m}{\|v\|} = v_0.$$

Así G fija a v_0 . Esto es (1) implica (2). Supongamos que G fija un punto b de B^n . Sea ϕ una transformación de Möbius de B^n tal que $\phi(0) = b$. Entonces $\phi^{-1}G\phi$ fija al 0, una transformación de Möbius que fija al cero es ortogonal. Luego (2) implica (3). Si existe una $\phi \in M(B^n)$ tal que $\phi G \phi^{-1}$ es un subgrupo de $O(n)$, entonces G fija $\phi(0)$, y por tanto, (3) implica (1). La última observación se sigue de la definición de ser discreto. ■

2.5.2 GRUPOS ELEMENTALES DEL TIPO PARABÓLICO

Con el fin de analizar los grupos del tipo parabólico e hiperbólico será conveniente trabajar en el modelo del semi-espacio superior U^n del espacio hiperbólico. Subgrupos elementales de $M(U^n)$ de los tipos elípticos, parabólicos e hiperbólicos se definen de la misma manera que en el modelo de la bola B^n . La ventaja principal, de este modelo, es que el grupo de similitudes euclidianas $S(E^{n-1})$ es isomorfo a la extensión de Poincaré del estabilizador de ∞ en $M(U^n)$.

Teorema 2.17 *Sea G un subgrupo elemental de $M(U^n)$. Entonces los siguientes son equivalentes:*

- (1) *El grupo G es del tipo parabólico.*
- (2) *El grupo G tiene un único punto fijo en \widehat{E}^{n-1} .*

(3) El grupo G es conjugado en $M(U^n)$ a un subgrupo de $S(E^{n-1})$ tal que no fija puntos en E^{n-1} .

Demostración:

(1) implica (2) de la definición. (2) y (3) son equivalentes. Probaremos que (2) implica (1) por contradicción. Supongamos que G fija a un único punto $a \in \hat{E}^{n-1}$ y que G no es del tipo parabólico. Entonces G tiene una órbita finita $\{u_1, \dots, u_m\}$ en U^n , por el teorema 2.16, G es del tipo elíptico, y por tanto fija a un punto $u \in U^n$. De esta manera, G fija a la línea hiperbólica L que comienza en a y pasa por u . Pero esto implica que G fija el otro punto extremo de L contrario a la unicidad de a . Así $\{u_1, \dots, u_m\}$ debe estar contenido en \hat{E}^{n-1} . Como a es el único punto fijo de G en \hat{E}^{n-1} , debemos tener $m \geq 2$. El índice de cada estabilizador G_{u_i} es m . Se sigue que $H = G_{u_1} \cap G_{u_2}$ es de índice finito en G . Más aún, cada elemento de H es elíptico, ya que H fija los tres puntos a, u_1, u_2 . De aquí, H fija la línea hiperbólica L que une a a con u_1 . Sea u cualquier punto en L . Como G_u contiene a H , tenemos que G_u es de índice finito en G . Así, la órbita G_u es finita. Esto lleva a una contradicción. Luego G debe ser parabólico. ■

Teorema 2.18 Sean ϕ, ψ en $M(U^n)$ con ψ hiperbólico. Si ϕ y ψ tienen exactamente un punto fijo en común. Entonces el subgrupo generado por ϕ y ψ no es discreto.

Demostración:

Conjugando en $M(U^n)$, podemos suponer que el punto fijo en común es ∞ . Así, consideremos a ϕ y ψ en $S(E^{n-1})$, también, conjugando en $S(E^{n-1})$ supongamos que ψ fija al 0. Entonces, existen escalares positivos r, s y matrices $A, B \in O(n-1)$, y un punto a distinto de cero en E^{n-1} tal que $\phi(x) = a + rAx$ y $\psi(x) = sBx$. Reemplazando ψ con ψ^{-1} si es necesario, tomemos a s de modo que $0 < s < 1$. Entonces tenemos

$$\psi^m \phi \psi^{-m}(x) = s^m B^m a + r B^m A B^{-m} x$$

para cada entero positivo m . Los términos de la sucesión $\{\psi^m \phi \psi^{-m}\}$ son todos distintos, ya que son distintos

$$\psi^m \phi \psi^{-m}(0) = s^m B^m a \quad \text{con } a \neq 0.$$

Como $O(n-1)$ es compacto, la sucesión $\{B^m A B^{-m}\}$ tiene una subsucesión convergente $\{B^{m_j} A B^{-m_j}\}$. Sea τ_m la translación de E^{n-1} por $S^m B^m a$. Entonces $\{\tau_m\}$ converge a I por el Corolario 1 de 2.2. Como

$$\psi^m \phi \psi^{-m} = \tau_m r B^m A B^{-m},$$

la sucesión $\{\psi^{m_j} \phi \psi^{-m_j}\}$ es convergente, pero no es eventualmente constante. Así, el grupo $\langle \phi, \psi \rangle$ no es discreto por el lema 2 de 2.3. ■

Teorema 2.19 *Un subgrupo Γ de $M(U^n)$ es un subgrupo discreto elemental del tipo parabólico si y sólo si Γ es conjugado en $M(U^n)$ a un subgrupo infinito discreto de $I(E^{n-1})$.*

Demostración:

Supongamos que Γ es un subgrupo discreto elemental del tipo parabólico. Por el teorema 2.17 podemos pensar que Γ es un subgrupo de $S(E^{n-1})$ que no fija puntos de E^{n-1} . Por el teorema 2.18, el grupo Γ no tiene elementos hiperbólicos, de otra manera Γ no fijaría a un punto de E^{n-1} . Consecuentemente, cada elemento ϕ de Γ es de la forma $\phi(x) = a + Ax$, donde A está en $O(n-1)$ y a está en E^{n-1} . Así Γ es un subgrupo de $I(E^{n-1})$. El grupo Γ debe ser infinito, en otro caso, sería del tipo elíptico.

Recíprocamente, supongamos que Γ es un subgrupo discreto infinito de $I(E^{n-1})$, y supongamos que Γ fija a un punto de E^{n-1} . Conjugando en $I(E^{n-1})$, podemos suponer que Γ fija al cero. Entonces Γ es un subgrupo de $O(n-1)$. Pero Γ es discreto, por tanto debe ser finito, pero este no es el caso. Por lo anterior Γ no fija puntos de E^{n-1} . Luego, Γ es del tipo parabólico por el teorema 2.17. ■

2.5.3 GRUPOS ELEMENTALES DEL TIPO HIPERBÓLICO.

Sea $S(E^{n-1})$ el subgrupo de $M(E^{n-1})$ de todas las transformaciones que dejan invariante al conjunto $\{0, \infty\}$. El grupo $S(E^{n-1})_0$ de todas las similitudes que fijan al 0 y al ∞ , es un subgrupo de índice dos del grupo $S(E^{n-1})$. Identifiquemos $S(E^{n-1})$ con el subgrupo de $M(U^n)$ de todas las transformaciones que dejan a $\{0, \infty\}$ invariante.

Teorema 2.20 *Sea G un subgrupo elemental de $M(U^n)$. Entonces los siguientes son equivalentes:*

- (1) *El grupo G es del tipo hiperbólico.*
- (2) *La unión de todas las órbitas finitas de G en \bar{U}^n consiste de dos puntos de \bar{E}^{n-1} .*
- (3) *El grupo G es conjugado en $M(U^n)$ a un subgrupo de $S(E^{n-1})$ que no fija algún punto del enésimo eje positivo.*

Además un subgrupo Γ de $M(U^n)$ es un subgrupo elemental discreto del tipo hiperbólico si y sólo si Γ es conjugado en $M(U^n)$ a un subgrupo discreto infinito de $S(E^{n-1})$.

Demostración:

Supongamos que G es del tipo hiperbólico. Entonces todas las órbitas finitas de G están contenidas en \bar{E}^{n-1} , ya que G no es del tipo elíptico. Sea $\{u_1, \dots, u_m\}$ la unión de un número finito de G -órbitas distintas. Entonces cada uno de los estabilizadores G_{u_i} es de índice finito en G , ya que cada una de las órbitas $G u_i$ es finita. Sea

$$H = G_{u_1} \cap \dots \cap G_{u_m}.$$

Entonces H es de índice finito en G y fija a cada u_i . Si $m \geq 3$, el grupo H debe ser del tipo elíptico; pero esto implica que G es del tipo elíptico que no es el caso. Luego m puede ser a lo más 2. El caso de una sola órbita finita, que consiste en un sólo punto, está descartado por el teorema 2.17. De esta forma, G tiene o una órbita finita que consiste de dos puntos o dos órbitas finitas que consisten de un sólo punto cada una. Esto es (1) implica (2). De la definición de $S(E^{n-1})_*$, se sigue que (2) implica (3).

Supongamos que G es un subgrupo de $S(E^{n-1})_*$ que no fija puntos en el enésimo eje positivo. Entonces G fija al cero, al ∞ o $\{0, \infty\}$ es una G -órbita. Consecuentemente G no es del tipo parabólico. Veamos, que tampoco es del tipo elíptico. Si G fija a 0 y al ∞ , entonces G fija al enésimo eje positivo, que no es el caso. Por tanto $\{0, \infty\}$ es una G -órbita. El estabilizador G_0 es de índice dos en G y fija al 0 y al ∞ . De aquí, G_0 fija al enésimo eje positivo L e intercambia sus puntos extremos. Por ello, ϕ tiene un punto fijo u en L . Como G_0 y ϕ generan a G , el grupo G fija a u , lo cual es una contradicción. Se sigue que G es del tipo hiperbólico. ■

La estructura de un subgrupo discreto infinito Γ de $S(E^{n-1})_*$ es sencilla de describir. Sea Γ_0 el subgrupo de Γ que fija a 0. Entonces Γ_0 es de índice 1 o 2 en Γ . Cada elemento de Γ_0 es de la forma kA , donde k es un escalar positivo y A está en $O(n-1)$. Sea

$$\rho: \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$$

el homomorfismo definido por $\rho(kA) = k$. El núcleo de ρ es el grupo $\Gamma_0 \cap O(n-1)$, el cual es finito. Como la órbita $\Gamma_0 e_n$ es discreta, encontramos que la imagen de ρ es un subgrupo discreto infinito de \mathbb{R}_+ . De aquí que existe un escalar $s > 1$ tal que

$$\rho(\Gamma_0) = \{s^m : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Así Γ_0 tiene un número finito de ciclos infinitos. Sea ϕ un elemento de Γ_0 tal que $\rho(\psi) = s$. Entonces Γ es el producto semidirecto del subgrupo finito $\Gamma_0 \cap O(n-1)$ y el subgrupo cíclico infinito generado por ψ . Luego, Γ tiene un subgrupo cíclico infinito generado por una transformación hiperbólica como un subgrupo de índice finito. Esto conduce al siguiente teorema.

Teorema 2.21 *Un subgrupo Γ de $M(U^n)$ es un subgrupo elemental discreto del tipo hiperbólico si y sólo si Γ contiene a un subgrupo cíclico infinito generado por una transformación hiperbólica como un subgrupo de índice finito.*

Demostración:

Supongamos que Γ contiene un subgrupo cíclico infinito H generado por una transformación hiperbólica ϕ como un subgrupo de índice finito. Sean

a y b puntos fijos de ψ . Como Γ_a contiene a H , tenemos que Γ_a es de índice finito en Γ . Por tanto, la órbita Γa es finita. Análogamente Γb es finita. De esta manera, Γ es elemental. Como H no tiene puntos fijos en U^n , el tipo de Γ no es del tipo elíptico por el teorema 2.16. Más aún, Γ no es del tipo parabólico, ya que la unión de todas las órbitas finitas de Γ contienen al menos a los puntos a y b . Por tanto, Γ debe ser del tipo hiperbólico. Sea L el eje de ψ y sea x un punto en L . Entonces la órbita Hx es un conjunto discreto. Como la función $e: H \rightarrow Hx$, definida como $e(\psi^m) = \psi^m(x)$ es continua, $e^{-1}(x) = \{I\}$ es abierto en H , y por tanto H es discreto. Así Γ es discreto por el lema 8 de 1.4. El recíproco se sigue del teorema 2.20 y de forma análoga a la discusión anterior. ■

Ejemplo 1. Sea μ la dilatación de U^n definida por $\mu(x) = 2x$, y sea σ la inversión de U^n definida por $\sigma(x) = x/|x|^2$. Sea Γ el grupo generado por μ y σ como $\sigma\mu\sigma = \mu^{-1}$, el grupo cíclico infinito $\langle \mu \rangle$ tiene índice dos en Γ . Por tanto, Γ es un subgrupo elemental discreto de $M(U^n)$ del tipo hiperbólico por el teorema 2.21. Observemos que Γ deja el conjunto $\{0, \infty\}$ invariante pero no fija ni a 0 ni a ∞ .

2.5.4 GRUPOS SOLUBLES.

Sea F_ϕ el conjunto de todos los puntos fijos en \overline{B}^n de una transformación de Möbius ϕ de B^n . Si ϕ, ψ están en $M(B^n)$, entonces

$$F_{\psi\phi\psi^{-1}} = \psi(F_\phi).$$

Esta observación tan simple es la clave de la prueba del siguiente lema.

Lema 1. *Cada subgrupo abeliano de $M(B^n)$ es elemental.*

Demostración:

La prueba es por inducción en n . El teorema es claro cuando $n = 0$, ya que $B^0 = \{0\}$ por definición. Supongamos, ahora que $n > 0$ y que el teorema es cierto para todas las dimensiones menores que n . Sea G un subgrupo abeliano de $M(B^n)$. Supongamos primero que G tiene un elemento que es parabólico o hiperbólico. Entonces F_ϕ consiste de uno o dos puntos. Como $\psi\phi\psi^{-1} = \phi$, tenemos que $\psi(F_\phi) = F_\phi$ para toda ψ en G , y por tanto G es elemental.

Ahora pensemos que todos los elementos de G son elípticos. Sea ϕ en G . Entonces F_ϕ es la cerradura de \overline{B}^n de un m -plano hiperbólico de B^n , ya que ϕ es conjugado en $M(B^n)$ a un elemento de $O(n)$. Por tanto, F_ϕ es un m -disco cerrado. Escojamos ϕ en G de tal manera que la dimensión de F_ϕ sea tan pequeña como sea posible. Si $\dim F_\phi = n$, entonces G es trivial, así que supongamos que $\dim F_\phi < n$. Conjugando G en $M(B^n)$, podemos suponer que $F_\phi = \overline{B}^m$ con $m < n$. Como G es abeliano, tenemos

que $\psi(F_\psi) = F_\psi$ para toda ψ en G ; en otras palabras, G deja invariante a \overline{B}^m . Más aún G deja invariante a \overline{E}^m por el teorema 1.14.

Más aún, sea \overline{G} el grupo de transformaciones en \overline{E}^n que se obtiene de G restringiendo a sus elementos. Entonces \overline{G} es un subgrupo de $M(B^m)$ por el teorema 1.11. \overline{G} es abeliano, ya que \overline{G} es una imagen homomórfica de G . Por hipótesis de inducción, \overline{G} , y por tanto G , tiene una órbita finita en \overline{B}^m , luego G es elemental. ■

Teorema 2.22 *Sea Γ un subgrupo discreto de $M(B^n)$. Entonces Γ es un grupo elemental si y sólo si contiene a un subgrupo abeliano de índice finito. Más aún, si Γ es elemental, entonces contiene a un subgrupo abeliano libre de índice finito cuyo rango es 0 si Γ es elíptico, 1 si Γ es hiperbólico, ó k , con $0 < k < n$, si Γ es parabólico.*

Demostración:

Si Γ es elemental, entonces contiene un subgrupo abeliano libre de índice finito por los teoremas 2.14, 2.16, 2.19 y 2.21 cuyo rango es 0 si Γ es elíptico, 1 si Γ es hiperbólico, ó k , con $0 < k < n$, si Γ es parabólico.

Recíprocamente, supongamos que Γ contiene un subgrupo abeliano H de índice finito. Entonces H es elemental por el lema 1. Sea x un punto en \overline{B}^n tal que Hx es finito. Como $[\Gamma : H]$ es finito, existen elementos ϕ_1, \dots, ϕ_m en Γ tales que $\Gamma = \phi_1 H \cup \dots \cup \phi_m H$. Por esto tenemos que $\Gamma x = \phi_1 Hx \cup \dots \cup \phi_m Hx$, es finito. Por tanto Γ es elemental. ■

Teorema 2.23 *Cada subgrupo soluble de $M(B^n)$ es elemental.*

Demostración:

Sea G un subgrupo soluble de $M(B^n)$. Definamos una cadena de grupos de la siguiente manera $G^{(0)} = G$ y $G^{(k)} = [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}]$ para $k > 0$. Entonces $G^{(k)} = 1$ para algún k , tomemos de estos k al más pequeño. Probamos que G es elemental por inducción sobre k . Esto es claro si $k = 0$ así que supongamos que $k > 0$ y que todos los subgrupos de $M(B^n)$ de solubilidad $k-1$ son elementales. Como el grado de solubilidad de $H = G^{(1)}$ es $k-1$, tenemos que H es elemental.

Supongamos que H es del tipo parabólico o del tipo hiperbólico. Entonces la unión de las órbitas finitas de H en S^{n-1} es un conjunto de uno o dos puntos. Sea h en H y g en G . Entonces $g^{-1}hg$ está en H , ya que H es un subgrupo normal de g . Así $g^{-1}hg(F) = F$, por tanto $hg(F) = g(F)$. Así $g(F)$ es una unión de órbitas finitas de H , y entonces $g(G) = F$. De aquí G contiene una órbita finita y entonces G es elemental. Supongamos ahora que H es elíptico. Sea F el conjunto de todos los puntos de B^n que fija H . Entonces F es un m -plano de B^n . Conjugando G en $M(B^n)$, podemos suponer que $F = B^m$. Si x está en F , h está en H , y g en G , entonces $g^{-1}hgx = x$ y por tanto $hgx = gx$, así gx está en F . Tenemos también que

G manda a F sobre sí mismo. Sea \bar{G} el subgrupo de $M(B^n)$ que se obtiene de restringir G a F . Entonces H es un subgrupo del núcleo del homomorfismo restricción $\rho: G \rightarrow \bar{G}$. Así ρ induce un homomorfismo de G/H sobre \bar{G} . Como G/H es abeliano, \bar{G} es abeliano. Por tanto \bar{G} es elemental por el lema 1. Así \bar{G} y luego G , tienen una órbita finita en F , de esta manera, G es elemental. ■

Teorema 2.24 Si G es un subgrupo no elemental de $M(B^n)$ que no tiene m -planos de B^n invariantes, entonces G no contiene subgrupos normales elementales no triviales.

Demostración:

Sea H un subgrupo normal elemental no trivial de G . Supongamos primero que H es del tipo elíptico. Entonces el conjunto G de todos los puntos de B^n fijos de H es un m -plano propio de B^n . Sea x un punto de F , ϕ en H y ψ en G . Entonces $\psi\phi\psi^{-1}(x) = x$, luego $\phi\psi(x) = \psi(x)$. De aquí $\psi(x)$ es un punto fijo de ϕ . Como ϕ es arbitrario en H , tenemos que $\psi(x)$ está en G . Como ψ es arbitrario en G se deduce que G deja a F invariante, que no es el caso. Ahora supongamos que H no es del tipo elíptico. Entonces, la unión de todas las órbitas finitas de H es un conjunto F de uno o dos puntos. Sea ψ en G . Entonces

$$\psi^{-1}H\psi(F) = HF = H.$$

De esto $H\psi(F) = \psi(F)$. Por tanto, $\psi(F) = F$. Como ψ es arbitrario en G , deducimos que $GF = F$, pero esta es una contradicción a que G es elemental. ■

Corolario 1 Si $n > 1$, entonces $M(B^n)$ no tiene subgrupos solubles, normales no triviales.

Demostración:

$M(B^n)$ no deja a ningún m -plano propio de B^n invariante. Más aún, ya que $M(B^n)$ actúa trivialmente en S^{n-1} , se sigue que $M(B^n)$ no es elemental para $n > 1$. Por tanto $M(B^n)$ no contiene subgrupos normales solubles no triviales por los teoremas 2.23 y 2.24. ■

Observación. El grupo $M(B^n)$ es isomorfo a $I(H^n)$. Por esto $I(H^n)$ no contiene subgrupos normales solubles no triviales para $n > 1$. En contraste $I(S^n)$ y $I(E^n)$ tienen ambos, subgrupos normales solubles no triviales.

El grupo $M(B^n)$ contiene un grupo cociente abeliano no trivial, porque el subgrupo $M_0(B^n)$ de isometrías que preservan la orientación en B^n tiene índice dos. Se sigue del próximo teorema que $M_0(B^n)$ es el único subgrupo normal propio de $M(E^n)$ cuyo grupo de clases laterales es abeliano.

Teorema 2.25 *En el grupo $M_0(B^n)$ todo grupo cociente abeliano es trivial.*

Demostración:

Es suficiente mostrar que $M_0(B^n)$ es igual a su conmutador. Para esto, usaremos el modelo del semiespacio superior U^n . El grupo $M_0(U^n)$ está generado por todos los productos $\gamma = \sigma_1\sigma_2$ de dos reflexiones en esferas Σ_1 y Σ_2 de \bar{E}^n que son ortogonales a E^{n-1} y tangentes a una esfera Σ de \bar{E}^n que es ortogonal a E^{n-1} . Sea σ la reflexión en Σ . Entonces $\beta_1 = \sigma_1\sigma$ y $\beta_2 = \sigma\sigma_2$ son traslaciones parabólicas. Esto es claro poniendo las esferas de tal forma que ∞ es el punto de tangencia. Como $\gamma = \beta_1\beta_2$, encontramos que $M_0(U^n)$ está generado por el conjunto de todas las traslaciones parabólicas de U^n .

Como cualquier traslación parabólica de U^n es conjugada en $M_0(U^n)$ a la traslación parabólica τ de U^n definida por $\tau(x) = e_1 + x$, es suficiente mostrar que τ es un conmutador. Sea μ la dilatación de U^n definida por $\mu(x) = 2x$. Entonces

$$\begin{aligned}\mu\tau\mu^{-1}\tau^{-1}(x) &= \mu\tau\mu^{-1}(-e_1 + x) = \mu\tau(-e_1/2 + x/2) \\ &= \mu(e_1/2 + x/2) = e_1 + x = \tau.\end{aligned}$$

Por tanto $\tau = [\mu, \tau]$. ■

Definición. *Un subgrupo Γ de $I(H^n)$ es elemental si y sólo si el subgrupo $\xi\Gamma\xi^{-1}$ de $I(B^n)$ corresponde a un subgrupo elemental de $M(B^n)$ bajo el isomorfismo natural de $I(B^n)$ a $M(B^n)$.*

Todos los resultados de esta sección se aplican ahora a los subgrupos elementales de $I(H^n)$. Más aún, se pueden definir en una manera similar los subgrupos elementales de el grupo de isometrías en cualquier modelo del espacio hiperbólico.

3

Conjuntos Convexos, Politopos.

En este capítulo estudiamos la geometría de los grupos discretos de isometrías de S^n , E^n , H^n . Comenzaremos con una introducción al modelo del disco proyectivo del n -espacio hiperbólico. Conjuntos convexos, poliedros y politopos en S^n , E^n y H^n se estudian en las secciones 3.1, 3.2 y 3.3 respectivamente.

3.1 Conjuntos Convexos.

A través de esta sección $X = S^n$, E^n o H^n con $n > 0$. Un par de puntos x , y de X se dicen propios si y sólo si x , y son distintos y no son puntos antípodos cuando $X = S^n$. Si x , y es un par de puntos propios de X , entonces existe un único segmento geodésico en X que une x a y . Denotaremos este segmento por $[x, y]$.

Definición: Un subconjunto C de X es convexo si y sólo si para cada par de puntos propios x , y de C , el segmento geodésico $[x, y]$ está contenido en C .

Con el fin de tener uniformidad en la terminología, definamos a un m -plano de S^n como la intersección de un subespacio de E^{n+1} de dimensión $m + 1$ con S^n , llamaremos a esta intersección una m -esfera en S^n .

Ejemplo 1. Cada m -plano de X es convexo. Cada par de puntos antípodos de S^n es convexo. También la intersección arbitraria de conjuntos convexos en X es convexa.

Definición. Sea C un subconjunto no vacío de X .

(1) La dimensión de C está definida como el menor entero m tal que C está contenido en un m -plano de X .

(2) Si $\dim C = m$, entonces C está contenido en un único m -plano de X , el cual está denotado por $\langle C \rangle$.

(3) El interior de C es el interior topológico de C en $\langle C \rangle$ y se denota por C° .

(4) La frontera de C es la frontera topológica de C en $\langle C \rangle$ y se denota por ∂C .

(5) La cerradura de C es la cerradura topológica de C en $\langle C \rangle$ y está denotada por \overline{C} . Notemos que \overline{C} es también la cerradura topológica de C en X , ya que $\langle C \rangle$ es cerrado en C . Observemos que \overline{C} es la unión ajena de ∂C y C° .

Si C es el conjunto vacío, entonces la dimensión de C está indefinida, y todos los conjuntos $\langle C \rangle$, C° , ∂C y \overline{C} son vacíos por definición.

Lema 1. Sea x, y un par de puntos propios de X . Entonces existe $r > 0$ tal que si u está en $B(x, r)$ y v está en $B(y, r)$, entonces u, v es un par de puntos propios.

Demostración:

Esto es claro si $X = E^n$ o H^n . Supongamos que $X = S^n$, los conjuntos $\{\pm x\}$ y $\{\pm y\}$ son ajenos, ya que x, y es un par de puntos propios de X . Sea r la mitad de la distancia de $\{\pm x\}$ a $\{\pm y\}$. Entonces $B(x, r)$, $B(y, r)$ y $B(-x, r)$ son mutuamente ajenos. Como $-B(x, r) = B(x, r)$, ningún punto de $B(x, r)$ puede ser antípoda a un punto de $B(x, r)$. ■

El siguiente es un teorema muy conocido en la teoría de conjuntos convexos.

Teorema 3.1 Sea C un subconjunto convexo de X , entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

- i) \overline{C} es convexo;
- ii) si x, y es un par de puntos propios de \overline{C} , si $x \in C^\circ$ entonces $[x, y] \subset C^\circ$; y
- iii) C° es convexo.

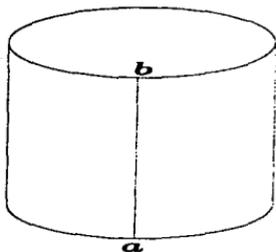
3.1.1 LADOS DE UN CONJUNTO CONVEXO

Definición. Un lado de un subconjunto convexo C de X es un subconjunto convexo, maximal no vacío de ∂C .

Ejemplo 2. Sea C un cilindro recto circular en E^3 puesto como se ve en la Figura 3.1. Entonces los lados de C son las tapas superior e inferior de C y todos los segmentos de línea verticales en ∂C que unen la tapas de C como $[a, b]$ en la figura 3.1. Notemos que C tiene un número infinito de lados.

Teorema 3.2 Si S es un lado de un subconjunto convexo C de X , entonces $\overline{C} \cap (S) = S$.

Demostración:

Figura 3.1. Un Cilindro Circular Recto en E^3

El resultado es claro cuando $\dim S = 0$, supongamos pues que $\dim S > 0$. Mostraremos que C° y $\langle S \rangle$ son ajenos. Supongamos que x está en $C^\circ \cap \langle S \rangle$, entonces S° es no vacío por el teorema 3.1 como $\dim S > 0$, escojamos una y en S° tal que x y y no son antípodos. Como C° y ∂C son ajenos, $x \neq y$. De aquí x, y es un par de puntos propios. Ya que y está en S° , existe $r > 0$ tal que

$$B(y, r) \cap \langle S \rangle \subset S.$$

Por el teorema 3.1, el segmento geodésico semiabierto $[x, y)$ está contenido en C° , pero observemos que

$$[x, y) \cap B(y, r) \subset S \subset \partial C,$$

lo cual es una contradicción. Por tanto C° y $\langle S \rangle$ son ajenos.

Como \bar{C} es convexo, $\bar{C} \cap \langle S \rangle$ es un subconjunto convexo de ∂C que contiene a S . Por tanto $\bar{C} \cap \langle S \rangle = S$ por la maximalidad de S . ■

Teorema 3.3 Sea P un m -plano de X que contiene un lado S de dimensión $m - 1$ de un conjunto convexo C de X . Entonces $C^\circ \cap P$ está contenido en una de las componentes de $P \setminus \langle S \rangle$: además $\bar{C} \cap P$ está contenido en uno de los semiespacios cerrados de P acotados por $\langle S \rangle$.

Demostración:

Si $C^\circ \cap P = \emptyset$, entonces $\bar{C} \cap P = S$, ya que $\bar{C} \cap P$ es un convexo en ∂C y contiene a S , luego en este caso no hay nada que hacer por lo que podemos suponer que $C^\circ \cap P \neq \emptyset$, entonces $P \subset \langle C \rangle$ ya que $\langle S \rangle \subset P$ y

P contiene un punto de C° . Por tanto $C^\circ \cap P$ es un subconjunto abierto, no vacío convexo de $P - (S)$. Como $\dim(C^\circ \cap P) > 0$, podemos suponer que x y y no son antípodas. Ahora ya que $[x, y]$ es conexo, debe contener un punto de (S) . Pero $[x, y]$ está contenido en C° por el teorema 3.1 y C° es ajeno a (S) por el teorema 3.2, lo cual es una contradicción. Por tanto, $C^\circ \cap P$ está contenido en una componente de $P - (S)$. Claramente tenemos $\overline{C^\circ \cap P} \subset \overline{C} \cap P$. Sea y en $\partial C \cap P$ y escojamos x en $C^\circ \cap P$ tal que x, y no son antípodas. Por el teorema 3.1, $[x, y] \subset \overline{C^\circ \cap P}$ y entonces $\overline{C^\circ \cap P} = \overline{C} \cap P$. Consecuentemente $\overline{C} \cap P$ está contenido en uno de los semiospacios cerrados de P acotados por (S) , por la primera parte del teorema. ■

Teorema 3.4 Si C es un subconjunto convexo de X , entonces

- (1) cada subconjunto convexo no vacío de ∂C está contenido en un lado de C ;
- (2) cada lado de C es cerrado;
- (3) los lados de C se intersecan únicamente a lo largo de sus fronteras.

Demostración:

(1) Sea K un subconjunto convexo no vacío de ∂C y sea \mathcal{K} el conjunto de todos los subconjuntos convexos de ∂C que contienen a K . Entonces \mathcal{K} está parcialmente ordenado por inclusión y es no vacío, ya que contiene a K . Sea \mathcal{C} una cadena de \mathcal{K} . La unión de los elementos de \mathcal{C} es un convexo y además es una cota superior para \mathcal{C} . Por tanto \mathcal{K} contiene un elemento maximal por el Lema de Zorn.

(2) Sea S un lado de C . Entonces \overline{S} es convexo por el teorema 3.1. También \overline{S} está contenido en ∂C , pues ∂C es cerrado luego $S = \overline{S}$ ya que S es maximal en C .

(3) Sean S y T lados distintos de C . Supongamos que x está en $S \cap T^\circ$. Como S y T son subconjuntos convexos maximales distintos de ∂C , el lado T no está contenido en S . Así, existe un punto y de T que no está en S . Por el teorema 3.2, tenemos que $\overline{C} \cap (S) = S$, y entonces y no está en (S) . Supongamos primero que $\dim T = 0$. Entonces x y y son antípodas. Como S no está contenido en T contiene un punto $z \neq x$. Sea $S[x, z]$ la única $(n-1)$ -esfera de S^n que pasa por x y z . Entonces $S[x, z]$ también contiene $y = -x$. Como $S[x, z]$ está contenida en (S) , encontramos que y está también en (S) lo cual es una contradicción.

Si $\dim T > 0$. Entonces $T - S$ es un subconjunto abierto de T por (2). Por tanto podemos suponer que y no es antípoda de x . Sea L la única geodésica de X que pasa por x y y , y sea P el plano de dimensión $1 + \dim S$ que contiene (S) y L . Como x está en T° , existe una $r > 0$ tal que

$$B(x, r) \cap (S) \subset T.$$

Observemos que $B(x, r) \cap L$ está en ambos lados de (S) en P y

$$B(x, r) \cap L \subset B(x, r) \subset T \subset \partial C.$$

Por tanto, existen puntos de \bar{C} en ambos lados de $\langle S \rangle$ en P contrario al teorema 3.3, se sigue que S y T^o son ajenos. Así S y T se intersecan a lo largo de sus fronteras.

3.2 Poliedros Convexos.

A través de esta sección, X será S^n , E^n o H^n con $n > 0$.

Definición. Un poliedro convexo P en X es un subconjunto convexo, cerrado, no vacío de X tal que la colección S de sus lados es localmente finita en X .

Observación. Localmente finito en S^n es lo mismo que finito, ya que S^n es compacto; y cada colección localmente finita de subconjuntos de E^n o H^n es numerable, ya que E^n y H^n son espacios métricos finitamente compactos.

Teorema 3.5 Sea P un poliedro convexo de dimensión n en X que no es todo X . Para cada lado S de P , sea H_S el semiespacio cerrado de X tal que $\partial H_S = \langle S \rangle$ y $P \subset H_S$. Entonces $P = \bigcap \{H_S : S \text{ es un lado de } P\}$.

Demostración:

Sea $K = \bigcap \{H_S : S \text{ es un lado de } P\}$. Claramente, tenemos que $P \subset K$. Sea x un punto de $X - P$ y y un punto de P^o que no es antípoda de x . Entonces el segmento $[x, y]$ contiene a un punto z de ∂P , ya que $[x, y]$ es conexo. Sea S un lado de P que contiene a z . Entonces x y y están en lados opuestos del hiperplano $\langle S \rangle$. De aquí y no está en H_S . Por tanto $X - P \subset X - K$ y entonces $K \subset P$. Así $P = K$. ■

Teorema 3.6 Si x es un punto en la frontera de un lado S de un poliedro convexo P en X , entonces x está en la frontera de otro lado de P .

Demostración:

Podemos suponer que $\langle P \rangle = X$. Supongamos que x no está contenido en otro lado de P . Ya que la colección de los lados de P es localmente finita, existe $r > 0$ tal que $B(x, r)$ interseca a sólo un número finito de lados de P . Como S es el único lado de P que contiene a x , podemos estrechar $B(x, r)$ para evitar que los otros lados lo intersequen. Por tanto, podemos suponer que $B(x, r) \cap \partial P \subset S$ y que $r < \pi/2$. Como x está en ∂P , la bola $B(x, r)$ contiene a un punto z de $\langle S \rangle - S$. Ahora z está en $X - P$, ya que $P \cap \langle S \rangle = S$ por el teorema 3.2. En consecuencia, el segmento geodésico $[y, z]$ contiene

a un punto w de ∂P . Ver figura 3.2. Como $B(x, r) \cap \partial P \subset S$, el punto w está en S . Como z, w están en $\langle S \rangle$, deducimos que y está en $\langle S \rangle$, lo cual es una contradicción, ya que $P \cap \langle S \rangle = S$. Se sigue que x está contenido en algún lado T de P ; más aún, x debe estar en la frontera de T por el teorema 3.4 (3). ■

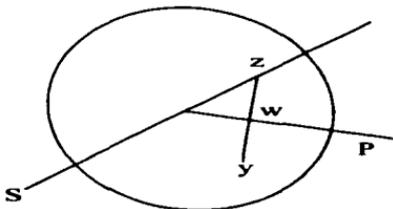


Figura 3.2. Los cuatro puntos x, y, w, z de la prueba del teorema 3.6

Teorema 3.7 Sean S y T lados distintos de un subconjunto convexo C de X , y sean x, y un par de puntos propios de C con x en S° , y en T° . Entonces el segmento geodésico (x, y) está contenido en C° .

Demostración:

Supongamos primero que $[x, y]$ está contenido en ∂C . Entonces $[x, y]$ está contenido en un lado R de C por el teorema 3.4 (1). Como R interseca a S° en x , $R = S$ por el teorema 3.4 (3), pero R también interseca a T° en y , y entonces $R = T$, lo cual es una contradicción. Por tanto, (x, y) contiene a un punto z de C° . Más aún, (x, z) y $[z, y)$ están contenidos en C° por el teorema 3.1. Así (x, y) está contenido en C° . ■

Llegamos al siguiente resultado:

Teorema 3.8 Cada lado de un poliedro convexo P de dimensión m en X es un poliedro convexo de dimensión $m - 1$.

Demostración:

Sea S un lado de P . Entonces S es convexo y distinto del vacío por definición; más aún, S es cerrado por el teorema 3.4 (2). Claramente S es un poliedro convexo si la dimensión de S es 0 ó 1, así podemos pensar que $\dim S > 1$.

Sea \mathcal{K} una colección de lados de S . Probaremos que \mathcal{K} es localmente finita en X . Sea x un punto de X . Como la colección S de lados de P es localmente finita, existe una $r > 0$ tal que $B(x, r)$ interseca sólo en un número finito de lados de P . Supongamos que $r < \pi/2$. Sea \mathcal{K}_0 la colección de todos los lados de S que intersecan a $B(x, r)$. Tomemos una R en \mathcal{K}_0 . Entonces $B(x, r)$ contiene a un punto y de R° , ya que $B(x, r)$ es abierto. Por el teorema 3.6, para cada lado R podemos escoger un lado $f(R)$ de P distinto de S que contiene a y , esto induce una función $f: \mathcal{K}_0 \rightarrow S$. Sean R_1 y R_2 lados distintos de S en \mathcal{K}_0 tal que $f(R_1) = f(R_2)$. De este modo $f(R_i)$ contiene a un punto y_i de $R_i^\circ \cap B(x, r)$ para $i = 1, 2$. Como $r < \pi/2$, tenemos que y_1 y y_2 no son antípodas. Por el teorema 3.7, el segmento geodésico abierto (y_1, y_2) está contenido en S° . Pero $[y_1, y_2]$ está contenido en $f(R_i)$ por la convexidad de $f(R_i)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, f es inyectiva. Como $B(x, r)$ interseca a un número finito de lados de P , la imagen de f es finita. Por tanto \mathcal{K}_0 es finito. Esto muestra que \mathcal{K} es localmente finita. Así S es un poliedro convexo. ■

Definición. Una arista de un poliedro convexo P es un lado de un lado de P .

Teorema 3.9 Si R es una arista de un poliedro convexo P en X , entonces

- (1) R° corta exactamente a dos lados S_1 y S_2 de P ;
- (2) R es un lado de S_1 y S_2 ;
- (3) $R = S_1 \cap S_2$.

Demostración:

Podemos suponer que $\langle P \rangle = X$. Sea R un lado de un lado S_1 de P . Escojamos un punto R° y una $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap \langle R \rangle \subset R$. Por el teorema 3.6 existe otro lado S_2 de P que contiene a x en su frontera. Del teorema 3.8, sabemos que $\langle S_1 \rangle$ y $\langle S_2 \rangle$ son hiperplanos de X . Por el teorema 3.3, el conjunto convexo P está contenido en uno de los dos semi-espacios cerrados de X acotados por $\langle S_2 \rangle$. Así, cada diámetro de $B(x, r)$ en R debe estar en $\langle S_2 \rangle$. Por tanto, $B(x, r) \cap R \subset S_2$. Más aún, por el teorema 3.4(1), el conjunto convexo $B(x, r) \cap R$ está contenido en un lado R_2 de S_2 . Sea $R_1 = R$. Entonces por el teorema 3.8, $\langle R_1 \rangle$ y $\langle R_2 \rangle$ tienen ambos dimensión $n-2$. Como $B(x, r) \cap R \subset R_2$, tenemos que $\langle R_1 \rangle = \langle R_2 \rangle$. Ahora $\langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle$ contiene a $\langle R \rangle$. Por tanto $\dim(\langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle) \geq n-2$, si en esta igualdad se cumple, tendríamos que $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle$, el cual no es el caso por el teorema 3.2. Por tanto $\langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle = \langle R \rangle$. De aquí, para cada i , tenemos

$$\begin{aligned} R_i &= S_i \cap \langle R \rangle = P \cap (S_i \cap \langle R \rangle) \\ &= P \cap (S_i \cap \langle S_2 \rangle) = S_i \cap S_2. \end{aligned}$$

Así $R_1 = R_2$. Por tanto R es un lado de S_1 y S_2 , además $R = S_1 \cap S_2$.

Supongamos que R° corta a un tercer lado S_3 de P . Entonces con el mismo argumento que el anterior, se muestra que R es un lado de S_3 y que

$R = S_1 \cap S_3$. Más aún (S_3) es también un hiperplano de X . El conjunto $X - (S_1) \cup (S_2)$ tiene cuatro componentes C_1, C_2, C_3 y C_4 una de ellas, digamos C_1 , contiene a P° por el teorema 3.3. Además P está contenido en \bar{C}_1 . Como S_3 está en \bar{C}_1 , el hiperplano (S_3) divide a C_1 en dos partes, esto es, $C - (S_3)$ tiene dos componentes C_{11} y C_{12} . Ver figura 3.3. Por el teorema 3.3, tenemos que P° está contenido en C_{11} y en C_{12} , lo que es una contradicción. Por esto tenemos que R° corta exactamente a dos lados de P . ■

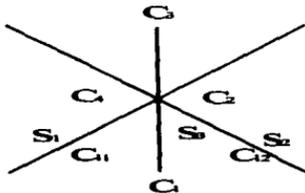


Figura 3.3. La subdivisión de E^2 por tres líneas concurrentes

Teorema 3.10 *Un poliedro convexo P de dimensión m en E^n o en H^n , con $m > 0$, es compacto si y sólo si*

- (1) *el poliedro tiene al menos $m + 1$ lados;*
- (2) *el poliedro tiene sólo un número finito de lados; y*
- (3) *cada lado de P es compacto.*

Demostración:

Supongamos que $m = n$. La prueba es por inducción en n . El teorema es cierto cuando $n = 1$, así que veremos el caso en que $n > 1$ y supondremos que el teorema es cierto para $n - 1$. Sea $Y = E^n$ o H^n .

Supongamos ahora que P es compacto. Entonces ∂P es no vacío; de otra manera P sería Y , que no es el caso. Por tanto P tiene al menos un lado S por el teorema 3.4(1), S es un poliedro convexo de dimensión $n - 1$, compacto. Luego, S tiene al menos n lados R_1, \dots, R_n por la hipótesis inducción. Cada R_i es un lado de otro lado S_i de P ; además, los lados S_1, \dots, S_n son distintos ya que $S \cap S_i = R_i$. De esta forma P tiene al menos $n + 1$ lados.

Para cada x en P , existe $r(x) > 0$ tal que $B(x, r(x))$ corta a un número finito de lados de P . Como P es compacto, existe un subconjunto finito

$\{x_1, \dots, x_n\}$ de P tal que la unión de las bolas $B(x_i, r(x_i))$ cubren a P . Por tanto, P tiene sólo un número finito de lados; no sólo esto, cada lado de P es compacto.

Recíprocamente, supongamos que P satisface las propiedades (1), (2) y (3). Por el teorema 3.4 (1), la frontera de P es la unión de todos los lados de P . De esta manera ∂P es compacta. Sea x en P° , entonces existe $r > 0$ tal que $B(x, r)$ contiene a ∂P , ya que ∂P está acotada. Sea y un punto en ∂P y sea z el punto extremo del radio de $B(x, r)$ que pasa por y . Entonces z no está en P por el teorema 3.1. Por tanto, el conjunto $S(x, r) - P$ es no vacío. Como la esfera $S(x, r)$ es conexa para $n > 1$, el conjunto $S(x, r) \cap P^\circ$ es vacío. Así $S(x, r)$ está contenida en $Y - P$. Como P es conexo $P \subset B(x, r)$. Se sigue que P está acotado, luego, es compacto. ■

Teorema 3.11 Sea P un poliedro convexo de dimensión m en S^n , con $m > 0$. Entonces las siguientes son equivalentes:

- (1) P está contenido en una hemiesfera abierta de S^n ;
- (2) P tiene al menos $m + 1$ lados y cada lado S de P está contenido en una hemiesfera abierta de $\langle S \rangle$; y
- (3) P tiene un lado S que está contenido en una hemiesfera abierta de $\langle S \rangle$.

Demostración:

Supongamos que P está contenida en una hemiesfera abierta H de S^n , digamos, la hemiesfera superior de S^n . Entonces por la proyección gnomónica, podemos ver a P como un poliedro convexo compacto de E^n , por el teorema anterior P tiene al menos $m + 1$ lados. Si S es un lado de P , entonces S está contenido en la hemiesfera $H \cap \langle S \rangle$. Así (1) implica (2). Claramente (2) implica (3).

Supongamos que $m = n$, que P tiene un lado S que está contenido en una hemiesfera abierta de $\langle S \rangle$ y que no está contenido en una hemiesfera cerrada del sur S^n de S^n . Entonces $\text{dist}(e_n, P) = \pi/2$. Sea y un punto de S^n . Entonces $\text{dist}(y, P) \leq \pi/2$; de otra manera P estaría contenido en la semiesfera abierta opuesta a y . De aquí, existe un punto $x \in P$ tal que $\theta(x, y) \leq \pi/2$. Supongamos ahora que $y \neq \pm e_n$. Entonces x está en $S^n \cap C(y, \pi/2)$. En consecuencia, existe una sucesión de puntos $\{y_i\}$ de $[e_n, y]$ que converge a e_n y una sucesión de puntos $\{x_i\}$ de P tales que x_i está en $S^n \cap C(y_i, \pi/2)$ para cada i . Como P es compacto, la sucesión $\{x_i\}$ tiene un punto límite de x_0 en $P \cap S^{n-1} = S$ contenido en la hemiesfera de S^{n-1} cuyo centro es la intersección de la gran circunferencia a través de e_n y y con S^{n-1} . Así S tiene la propiedad que cada hemiesfera cerrada de $\langle S \rangle$ contiene un punto de S , lo cual es una contradicción. Así (3) implica (1). ■

3.2.1 CARAS DE UN POLIEDRO CONVEXO.

Sea P un poliedro de dimensión m de X . Una k -cara de P para cada $k = 0, 1, \dots, m$ se define inductivamente como sigue: La única m -cara de P es P mismo. Supongamos que todas las $(k+1)$ -caras de P han sido definidas y cada una es un poliedro convexo de dimensión $k+1$ en X . Entonces una k -cara de P es un lado de una $(k+1)$ -cara de P . Por los teoremas 3.8 y 3.7, una k -cara de P es un poliedro convexo de dimensión k en X . Una cara propia de P es una k -cara de P con $k < m$. Notemos que una cara propia de P es en realidad, un lado de un lado... de un lado de P . De esta manera, una cara E de una cara F de P es una cara de P . En otras palabras, la relación de ser cara de un poliedro es una relación transitiva en el conjunto de los poliedros. Además la intersección no vacía de lados de P resulta ser una cara de P .

Los siguientes son teoremas conocidos de la teoría de poliedros, cuya demostración omitimos.

Teorema 3.12 *Los interiores de todas las caras de un poliedro convexo P en X forman una partición de P .*

Teorema 3.13 *Si E es una k -cara de un poliedro convexo P de dimensión m en X , entonces*

- (1) E es una cara de cada lado de P que corta E° ;
- (2) E es una cara de sólo un número finito de lados de P ;
- (3) E es una cara de al menos $m - k$ lados de P ;
- (4) E es la intersección de todas las caras de P que cortan a E° o $E = P$.

Teorema 3.14 *Sea P un poliedro de dimensión m en S^n . Entonces,*

- (1) el poliedro P es m -esfera de S^n ;
- (2) la intersección de todos los lados de P es una gran k -esfera de S ; o
- (3) el poliedro P está contenido en una hemiesfera de S^n .

3.2.2 VÉRTICES DE UN POLIEDRO CONVEXO.

Una 0-cara de un poliedro convexo P en X consiste de un sólo punto o un par de puntos antípodas.

Definición. *Un vértice de un poliedro P es un punto en una 0-cara de P .*

Definición. *La envolvente convexa de un subconjunto S de X es la intersección de todos los subconjuntos convexos de X que contienen a S .*

Teorema 3.15 *Un poliedro convexo P en E^n o H^n es compacto si y sólo si P tiene un número finito de vértices y P es la envolvente convexa de sus*

vértices.

Demostración:

Consideremos primero que P está en E^n . La prueba es por inducción en la dimensión m de P . El teorema es verdadero cuando $m = 0$, supongamos que $m > 0$, que el teorema es cierto cuando la dimensión es $m - 1$, y que P es compacto. Entonces por el teorema 3.10, el poliedro P tiene un número finito de lados y cada lado es compacto. Por la hipótesis de inducción, cada lado de P tiene sólo un número finito de vértices y es la envolvente convexa de éstos. Por tanto, P tiene solo un número finito de vértices. Sea V el conjunto de vértices de P . Entonces la envolvente convexa $C(V)$ está contenida en P , ya que P es convexo. Sea x un punto en P . Si x está en un lado de S de P , entonces x es una combinación convexa de los vértices de S por la hipótesis de inducción. De aquí que podemos suponer que x está en P° . Sea v_0 un vértice de P . Entonces el rayo de v_0 que pasa por x corta a ∂P en un punto y distinto de v_0 , ya que P está acotado. Por el teorema 3.1, el punto x está entre v_0 y y . De esta manera, existe un número real t entre 0 y 1 tal que

$$x = (1 - t)v_0 + ty.$$

Sea S un lado de P que contiene a y . Por la hipótesis de inducción, existen vértices v_1, \dots, v_k de S y números reales positivos t_1, \dots, t_k tales que

$$y = \sum_{i=1}^k t_i v_i \text{ y } \sum_{i=1}^k t_i = 1.$$

Observemos que

$$x = (1 - t)v_0 + t \sum_{i=1}^k t_i v_i$$

es una combinación convexa de v_0, \dots, v_k . De aquí deducimos que x está en $C(V)$. Por tanto $P = C(V)$. Recíprocamente, supongamos que P tiene solo un número finito de vértices y que P está en la envolvente convexa de sus vértices. Sea $r > 0$ tal que la bola $B(0, r)$ contiene al conjunto V de vértices de P . Entonces $B(0, r)$ contiene a la envolvente convexa $C(V)$, ya que $B(0, r)$ es convexo. Así P está acotado y entonces P es compacto. Esto completa la inducción.

Supongamos que P está en H^n . Pasamos al modelo del disco proyectivo D^n . Si P es compacto, entonces P es un poliedro euclidiano, por tanto tiene un número finito de vértices y es la envolvente convexa de sus vértices por el caso euclidiano. Recíprocamente, si P tiene un número finito de vértices y P es la envolvente convexa de sus vértices. Entonces P es compacto por el mismo argumento que en el caso euclidiano. ■

Teorema 3.16 *Un poliedro convexo P de dimensión $m > 0$ en S^n , está contenido en una hemisfera abierta de S^n si y sólo si P es la envolvente convexa de sus vértices.*

Demostración:

Supongamos que P está contenido en la hemisfera abierta del norte de S^n . Por la proyección gnomónica, podemos ver a P como un poliedro compacto en E . Entonces P es la envolvente convexa de sus vértices por el teorema 3.15.

Recíprocamente, supongamos que P es la envolvente convexa de sus vértices, y que no está contenido en una hemisfera abierta de S^n . Entonces la intersección P_0 de todos los lados de P es una gran k -esfera de S^n por el teorema 3.14. Ahora P_0 está contenido en cada 0-cara de P , ya que una 0-cara de P es la intersección de todos los lados de P que la contienen por el teorema 3.13. Por tanto, $\dim P_0 = 0$, y entonces P_0 es un par de puntos antípodas. De aquí, P tiene solo dos vértices. Por esto, la envolvente convexa de los vértices de P es P_0 , lo que es una contradicción, ya que $m > 0$. ■

3.2.3 ESLABONES DE UN POLIEDRO CONVEXO.

Sea x un punto de un poliedro convexo P en X . Entonces existe un número real r tal que $0 < r < \pi/2$ y es menor que la distancia de x a cualquier lado de P que no contiene a x , ya que el conjunto de lados de P es localmente finito. El conjunto

$$L(x) = P \cap S(x, r)$$

es llamado un eslabón de x en el poliedro P . La geometría esférica del eslabón $L(x)$ está únicamente determinada por x salvo un cambio de escala inducida por la proyección radial de x .

Por simplicidad, hemos considerado poliedros esféricos en S^n . Ya que con un sencillo cambio de escala, la teoría de poliedros esféricos en S^n se generaliza a poliedros en cualquier esfera de X .

Teorema 3.17 *Sea x un punto en un poliedro convexo P de dimensión m en X con $m > 0$, y sea r un número real tal que $0 < r < \pi/2$ y r es menor que la distancia de x a cualquier lado de P que no contenga a x . Entonces el eslabón $L(x) = P \cap S(x, r)$ de x en P es un poliedro convexo de dimensión $m - 1$ en la esfera $S(x, r)$. Más aún, si $S(x)$ es el conjunto de lados de P que contienen a x , entonces $\{T \cap S(x, r) : T \in S(x)\}$ es el conjunto de lados de $L(x)$.*

Demostración:

La prueba es por inducción en m . El teorema es cierto para $m = 1$, supongamos que $m > 0$ y que el teorema se cumple en todos los poliedros convexos de dimensión $m-1$ en X . Podemos suponer que $m = n$. Si x está en P° , entonces $L(x) = S(x, r)$, veamos qué pasa cuando x está en ∂P . Sea S el conjunto de lados de P . Para cada T en S , sea H_T el semiespacio cerrado de X acotado por el hiperplano (T) y que contiene a P . Entonces tenemos

$$P = \bigcap_{T \in S} H_T.$$

Como $H_T \cap S(x, r) = S(x, r)$ para cada T que no contiene a x , tenemos

$$P \cap S(x, r) = \bigcap_{T \in S(x)} (H_T \cap S(x, r)).$$

Ahora $H_T \cap (x, r)$ es una semiesfera cerrada de $S(x, r)$ para cada T en $S(x)$. Por tanto $L(x)$ es un subconjunto convexo cerrado de $S(x, r)$.

Sea y un punto de P° tal que y no es antípoda de x . Modificando r , si es necesario, podemos suponer que $d(x, r) \geq r$. Entonces el segmento geodésico $[x, y]$ interseca a $S(x, r)$ en un punto z de P° por el teorema 3.1. Por tanto $P^\circ \cap S(x, r)$ es un subconjunto abierto no vacío de $S(x, r)$ contenido en $L(x)$. De aquí $\dim L(x) = n - 1$. Como

$$P^\circ \cap S(x, r) \subset L(x)^\circ,$$

tenemos que

$$\partial L(x) \subset \partial P \cap S(x, r).$$

Sea T un lado de P que contiene a x . Por hipótesis de inducción, $T \cap S(x, r)$ es un poliedro convexo de dimensión $n-2$ en $S(x, r)$. Ahora ya que $P \subset H_T$, ningún punto de $T \cap S(x, r)$ tiene una vecindad abierta en $S(x, r)$ contenida en $L(x)$. Por tanto

$$T \cap S(x, r) \subset \partial L(x).$$

De aquí,

$$\partial P \cap S(x, r) \subset \partial L(x).$$

De esto

$$\partial L(x) = \partial P \cap S(x, r).$$

El conjunto convexo $T \cap S(x, r)$ está contenido en un lado \hat{T} de $L(x)$ por el teorema 3.4 (1). Como

$$\partial P \cap S(x, r) = \bigcup_{T \in S(x)} (T \cap S(x, r)),$$

tenemos que

$$\partial L(x) = \bigcup_{T \in \mathcal{S}(x)} \widehat{T}.$$

Por tanto $\{\widehat{T} : T \in \mathcal{S}(x)\}$ es el conjunto de lados de $L(x)$ por el teorema 3.4 (3). Luego, $L(x)$ sólo tiene un número finito de lados. De esta manera $L(x)$ es un poliedro convexo en $S(x, r)$. Por el teorema 3.4 (3), tenemos $\widehat{T}^\circ \subset T \cap S(x, r)$, se sigue que $\widehat{T} = T \cap S(x, r)$ para cada T en $\mathcal{S}(x)$. Entonces

$$\{T \cap S(x, r) : T \in \mathcal{S}(x)\}$$

es el conjunto de lados de $L(x)$. ■

Teorema 3.18 *Sea P un poliedro convexo en D^n . Entonces su cerradura \overline{P} en E^n es un subconjunto convexo de E^n tal que $\overline{P} \cap D^n = P$ y*

$$\partial(\overline{P}) = \partial P \cup (\overline{P} \cap S^{n-1})$$

Más aún, si S es un lado de P , entonces su cerradura \overline{S} en E^n es un lado de P , y si u es un punto de $\partial(\overline{P})$ que no está en la cerradura euclidiana de un lado de P entonces $\{u\}$ es un lado de P .

Demostración:

Podemos suponer que $\langle P \rangle = D^n$. Como P es un subconjunto convexo de E^n , tenemos que \overline{P} es un subconjunto convexo de E^n por el teorema 3.1. Como D^n es abierto en E^n y P es cerrado en D^n , tenemos

$$\overline{P} \cap D^n = P, P^\circ \subset (\overline{P}^\circ), \text{ y } \partial P \subset \partial(\overline{P}).$$

Claramente, tenemos que $\overline{P} \cap S^{n-1} \subset \partial(\overline{P})$. Por lo que $P^\circ = (\overline{P})^\circ$ y

$$\partial(\overline{P}) = \partial P \cup (\overline{P} \cap S^{n-1})$$

Si S es un lado de P , S está contenido en un lado \widehat{S} de \overline{P} . Ahora $\widehat{S} \cap D^n$ es un subconjunto convexo de ∂P contenido en S . Luego $\widehat{S} \cap D^n = S$ y entonces

$$\widehat{S} \cap S^{n-1} \subset \partial(\widehat{S}).$$

Por tanto $\widehat{S}_0 \subset S$, y $\widehat{S} = \overline{S}$ por el teorema 3.1.

Sea u un punto de $\partial(\overline{P})$ que no está en la cerradura de un lado de P . Sea U un lado de $\partial(\overline{P})$ que contiene a u . Entonces U no es la cerradura de un lado de P . De aquí U° es ajeno a ∂P , y entonces $U^\circ \subset S^{n-1}$. Por tanto, $U = \{u\}$. ■

Sea $\kappa : D^n \rightarrow B^n$ la isometría de D^n a B^n . Dada por

$$\kappa(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{1 - |x|^2}}. \quad (3.1)$$

La inversa de κ está dada por

$$\kappa^{-1}(y) = \frac{2y}{1 + |y|^2}. \quad (3.2)$$

Observemos que κ se extiende a un homeomorfismo

$$\bar{\kappa} : \bar{D}^n \rightarrow \bar{B}^n,$$

lo cual es la identidad en S^{n-1} .

Definición: Un punto ideal de un poliedro convexo P en B^n es un punto u de $\bar{P} \cap S^{n-1}$, donde \bar{P} es la cerradura de P en E^n .

Teorema 3.19 Sea u un punto ideal de un poliedro P en B^n . Entonces para cada punto x de P , existe un rayo geodésico $[x, u)$ en P que comienza en x y termina en u .

Demostración:

Ya que la isometría $k : D^n \rightarrow B^n$ se extiende a un homeomorfismo $\bar{k} : \bar{D}^n \rightarrow \bar{B}^n$, podemos pasar al modelo proyectivo del disco D^n del espacio hiperbólico. Sea x un punto de P , \bar{P} es un subconjunto convexo de E^n , el segmento de recta $[x, u)$ está en \bar{P} . Ya que $[x, u) \cap S^{n-1} = \{u\}$ y $\bar{P} \cap D^n = P$, tenemos que $[x, u) \subset P$. ■

Definición. Un lado S de un poliedro convexo P en B^n es incidente con un punto ideal u de P si y sólo si u está en la cerradura de S en E^n .

Teorema 3.20 Sea ∞ un punto ideal de un poliedro convexo P en U^n . Entonces un lado S de P es incidente con ∞ si y sólo si S es vertical.

Demostración:

Cada lado hemisférico de P está acotado en E^n . Por tanto, si un lado S de P es incidente con ∞ , entonces S debe ser vertical.

Recíprocamente, supongamos que S es un lado vertical de P . Sea x un punto de S . Por el teorema 3.19, existe un rayo geodésico $[x, \infty)$ en P que

empieza en x y termina en ∞ . Ya que $[x, \infty)$ y $\langle S \rangle$ son verticales, deducimos que $[x, \infty) \subset \langle S \rangle \cap P = S$. Por tanto S es incidente con ∞ . ■

Definición. Un horopunto de un poliedro convexo P en B^n es un punto ideal u de P para el cual existe una horoesfera Σ de B^n basada en u tal que Σ interseca sólo a los lados de P incidentes con u .

Notemos que si P tiene un número finito de lados, entonces cada punto ideal de P es un horopunto.

Sea u un horopunto de un poliedro convexo P en B^n . Entonces existe una horoesfera Σ de B^n basada en u tal que Σ corta sólo a los lados de P incidentes con u . El conjunto

$$L(u) = P \cap \Sigma$$

es llamado un eslabón de u en el poliedro P . La geometría euclidiana del eslabón $L(u)$ está únicamente determinada por u salvo una similitud inducida por la proyección radial de u .

Teorema 3.21 Sea u un horopunto de un poliedro convexo P de dimensión m en B^n basada en u tal que Σ corta sólo a los lados de P incidentes con u . Entonces el eslabón

$$L(u) = P \cap \Sigma$$

de u en P es un poliedro convexo de dimensión $m - 1$ en la horoesfera Σ . Más aún, si $S(u)$ es el conjunto de lados de P incidentes con u , entonces

$$\{S \cap \Sigma : S \in S(u)\}$$

es el conjunto de lados de $L(u)$.

Demostración:

Pasamos al modelo del semiespacio superior U^n de espacio hiperbólico, podemos suponer que $u = \infty$. La prueba es por inducción en m , el teorema es cierto cuando $m = 1$, supongamos que $m > 1$ y que el teorema es cierto para todos los poliedros convexos de dimensión $m - 1$ en U^n . Podemos pedir que $m = n$. Por el teorema 3.20, un lado de P es incidente con ∞ si y sólo si es vertical. Si P no tiene lados verticales, entonces $L(u) = \Sigma$, podemos pensar que P tiene un lado vertical. Sea S el conjunto de lados de P . Para cada S en S sea H_S el semiespacio cerrado de U^n acotado por el hiperplano $\langle S \rangle$ y que contiene a P . Entonces tenemos

$$P = \bigcap_{S \in S} H_S.$$

Como $H_S \cap \Sigma = \Sigma$ para cada lado hemisférico S de P , tenemos

$$P \cap \Sigma = \bigcap_{T \in S(u)} (H_S \cap \Sigma).$$

De esta forma $H_S \cap \Sigma$ es un semiespacio cerrado de Σ para cada S en $S(u)$. Por tanto, $L(u)$ es un subconjunto convexo cerrado de Σ .

Sea x un punto de P° . Estrechando a Σ si es necesario, podemos pensar que x no está dentro de Σ . Entonces el rayo geodésico $[x, \infty)$ interseca a Σ en un punto y de P° por el teorema 3.1 aplicado a la cerradura euclidiana de P en el disco proyectivo. Por tanto $P^\circ \cap \Sigma$ es un subconjunto abierto no vacío de Σ contenido en $L(u)$. De aquí $\dim L(u) = n - 1$. Como

$$P^\circ \cap \Sigma \subset L(u)^\circ,$$

tenemos que

$$\partial L(u) \subset \partial P \cap \Sigma.$$

Sea S un lado vertical de P . Por hipótesis de inducción, $S \cap \Sigma$ es un poliedro convexo de dimensión $n - 2$ en Σ . Ya que $P \subset H_S$, ningún punto de $S \cap \Sigma$ tiene una vecindad abierta en Σ contenida en $L(u)$. Por tanto $S \cap \Sigma \subset \partial L(u)$. De aquí,

$$\partial P \cap \Sigma \subset \partial L(u).$$

También,

$$\partial L(u) = \partial P \cap \Sigma.$$

El conjunto convexo $S \cap \Sigma$ está contenido en un lado \widehat{S} de $L(u)$ por el teorema 3.4 (1). Como

$$\partial P \cap \Sigma = \bigcup_{S \in S(u)} (S \cap \Sigma).$$

tenemos

$$\partial L(u) = \bigcup_{S \in S(u)} \widehat{S}.$$

Por tanto, $\{\widehat{S} : S \in S(u)\}$ es el conjunto de lados de $L(u)$ por el teorema 3.4 (3). Por el teorema 3.4 (3), tenemos

$$\widehat{S}^\circ \subset S \cap \Sigma.$$

Luego $\widehat{S} = S \cap \Sigma$ para cada S en $S(u)$. Así

$$\{S \cap \Sigma : S \in S(u)\}$$

es el conjunto de lados de $L(u)$. Más aún, el conjunto de lados de $L(u)$ es localmente finito en Σ , ya que el conjunto de lados de P es localmente finito en U^n . Así $L(u)$ es un poliedro convexo en Σ . ■

Existe una manera interesante de representar el eslabón de un horopunto u de un poliedro P en U^n . Si ponemos P de tal manera que $u = \infty$, entonces la proyección vertical

$$\nu : U^n \rightarrow E^{n-1}$$

proyecta $L(u)$ sobre un poliedro similar en E^{n-1} que no depende de la elección de la horoesfera Σ de U^n tal que $L(u) = P \cap \Sigma$. Ver figura 3.4.

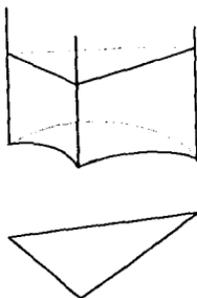


Figura 3.4. El eslabón en ∞ de un poliedro en U^3

Definición. Un vértice ideal de un poliedro convexo P en E^n es un horopunto de P cuyo eslabón es compacto.

Por ejemplo, el poliedro en la figura 3.4 tiene un vértice ideal en ∞ .

Teorema 3.22 Sea P un poliedro convexo en D^n . Entonces su cerradura \overline{P} en E^n es un poliedro convexo en E^n si y sólo si cada punto ideal de P es un vértice ideal de P .

Demostración:

Sea $m = \dim P > 0$. Supongamos que \bar{P} es un poliedro convexo en E^n . Sea u un punto ideal de P . Mostraremos que u es un vértice de \bar{P} . Supongamos que u no es un vértice de \bar{P} . Entonces u está en el interior de una k -cara F de \bar{P} para alguna $k > 0$. De esto, existe un segmento de línea euclidiana abierto en F que contiene a u . Pero un segmento de línea como éste no puede estar enteramente en \bar{D}^n , ya que u está en S^{n-1} , luego u debe ser un vértice de \bar{P} .

Si $m = 1$, los lados de \bar{P} son los dos puntos extremos de \bar{P} . Si $m \geq 1$, los lados de \bar{P} son las cerraduras de los lados de P . Como \bar{P} es compacto, \bar{P} tiene un número finito de lados. Por tanto P sólo tiene un número finito de lados. Sea u un punto ideal de P , entonces u es un horopunto de P . Sea Σ una horoesfera basada en u tal que Σ corta sólo a los lados de P incidentes con u . Decimos que $P \cap \Sigma$ es compacto. La prueba es por inducción en m . Esto es verdadero para $m = 1$, así que pensemos que $m > 1$ y supongamos que se $P \cap \Sigma$ es compacto para todos los poliedros convexos de dimensión $m - 1$ en D^n . Ahora el vértice u de \bar{P} corta al menos a m lados de \bar{P} por el teorema 3.13. Por tanto $P \cap \Sigma$ es compacto por el teorema 3.10. Así u es un vértice ideal de P .

Recíprocamente supongamos que cada punto ideal de P es un vértice ideal. Podemos suponer que $m > 1$. Entonces cada punto ideal de P está en la cerradura de un lado de P . De aquí \bar{P} es un subconjunto cerrado de E^n cuyos lados son las cerraduras de los lados de P por el teorema 3.18. Mostraremos ahora que el conjunto de lados de \bar{P} es localmente finito en E^n . Sea x un punto de E^n . Necesitamos encontrar una vecindad abierta N de x en E^n que interseca sólo a un número finito de lados de \bar{P} . Si x está en $E^n - \bar{P}$, podemos tomar $N = E^n - \bar{P}$. Si x está en D^n , entonces una N como ésta existe, ya que el conjunto de lados de P es localmente finito en D^n . Por tanto, podemos suponer que x es un vértice ideal de P .

Pasamos al modelo del semiespacio superior U^n del espacio hiperbólico y ponemos P de tal manera que $x = \infty$. Sea Σ una horoesfera horizontal de U^n que corta sólo a los lados de P que inciden con ∞ . Entonces $L(\infty) = P \cap \Sigma$ es compacto. Por el teorema 3.20, los lados de P que inciden con ∞ son lados verticales de P . Sea B la bola en E^n centrada en algún punto de E^{n-1} tal que $L(\infty) \subset B$. Entonces B contiene a las cerraduras de todos los lados hemisféricos de P , ya que todos los lados hemisféricos de P están bajo $L(\infty)$. Por tanto $N = E^n - \bar{B}$ es una vecindad abierta de ∞ en E^n que corta sólo a los lados de \bar{P} que contienen a ∞ . Como $L(\infty)$ es compacto, $L(\infty)$ tiene sólo un número finito de lados. Por tanto P sólo tiene un número finito de lados incidentes con ∞ por el teorema 3.21. De aquí N corta sólo finitamente a los lados de \bar{P} . Regresamos al modelo del disco proyectivo D^n del espacio hiperbólico. Entonces el conjunto de lados de \bar{P} es localmente finito en E^n . Por tanto \bar{P} es un poliedro convexo en E^n . ■

Definición. Un vértice generalizado de un poliedro convexo P en B^n es o bien un vértice de P o un vértice ideal de P .

Definición. La envolvente convexa en D^n de un subconjunto S de \overline{D}^n es la intersección de la envolvente convexa de S en E^n con D^n .

Teorema 3.23 Sea P un poliedro convexo en D^n . Entonces su cerradura \overline{P} en E^n es un poliedro convexo en E^n si y sólo si P tiene un número finito de vértices generalizados y P es la envolvente convexa de sus vértices generalizados.

Demostración:

Sea $m = \dim P$. Podemos suponer que $m > 0$. Supongamos que \overline{P} es un poliedro convexo en E^n . Si $m = 1$, los lados de \overline{P} son las cerraduras de los lados de P . Afirmamos que los vértices de \overline{P} son los vértices generalizados de P . La prueba es por inducción en m . El teorema se cumple cuando $m = 1$, así que supongamos que $m > 1$. Los vértices de \overline{P} son los vértices de los lados de \overline{P} . Por tanto, los vértices de \overline{P} son los vértices generalizados de P por la hipótesis de inducción. Sea v un vértice de \overline{P} en S^{m-1} . Entonces v es un vértice ideal de P por el teorema 3.22. Así, cada vértice de \overline{P} es un vértice generalizado de P . Así v es un vértice ideal de cada lado de P incidente con v y por tanto v es un vértice de \overline{P} . De aquí, cada vértice generalizado de P es un vértice de \overline{P} . Así, los vértices de \overline{P} son los vértices generalizados de P , lo cual completa la inducción.

Sea V el conjunto de vértices de \overline{P} . Como \overline{P} es compacto, V es finito y $\overline{P} = C(V)$. De aquí P tiene sólo un número finito de vértices generalizados y P es la envolvente convexa de sus vértices generalizados, ya que

$$P = \overline{P} \cap D^n.$$

Recíprocamente, supongamos que P sólo tiene un número finito de vértices generalizados y, además, que P es la envolvente convexa de sus vértices generalizados. Sea V el conjunto de vértices generalizados de P y sea $C(V)$ la envolvente convexa de V en E^n . Entonces tenemos

$$P = C(V) \cap C^n.$$

Como $V \subset D^n$ y \overline{D}^n es un subconjunto convexo de E^n , tenemos que $C(V) \subset \overline{D}^n$. Claramente tenemos

$$C(V) \cap S^{n-1} \subset V.$$

Por tanto,

$$C(V) = P \cup V.$$

$C(V)$ es un subconjunto cerrado de E que contiene a P , ya que V es finito. Luego

$$\overline{P} \subset C(V) = P \cup V \subset \overline{P}.$$

Tenemos que $\bar{P} = P \cup V$. Por tanto, cada punto ideal de P es un vértice ideal de P . De aquí \bar{P} es un poliedro convexo en E^n . ■

Teorema 3.24 Sea P un poliedro convexo de dimensión m en D^n , con $m > 1$. Entonces su cerradura \bar{P} en E^n es un poliedro convexo en E^n si y sólo si P tiene sólo un número finito de lados y P tiene un volumen finito en (P) .

Demostración:

Podemos suponer que $m = n$ y que \bar{P} es un poliedro convexo en E^n . Por el teorema 3.18, los lados de \bar{P} son las cerraduras de los lados de P . Como \bar{P} es compacto, \bar{P} tiene sólo un número finito de lados. Por tanto P tiene sólo un número finito de lados.

Por el argumento en la prueba del teorema 3.22, cada punto ideal de P es un vértice de \bar{P} . Como \bar{P} es compacto, \bar{P} sólo tiene un número finito de vértices. Por tanto P tiene sólo un número finito de puntos ideales. Cada punto ideal de P es un vértice ideal de P por el teorema 3.22. Sean v_1, \dots, v_k los vértices ideales de P . Para cada i , escogamos una horobola B_i basada en v_i tal que \bar{B}_i corta sólo a los lados de P incidentes con v_i . Entonces el conjunto

$$P - (B_1 \cup \dots \cup B_k)$$

es compacto y por tanto tiene volumen finito. De aquí, es suficiente mostrar que $P \cap B_i$ tiene volumen finito para cada $i = 1, \dots, k$.

Sea v un vértice ideal de P y sea V la horobola correspondiente. Ahora pasamos al modelo del semiespacio superior U^n . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $v = \infty$. Entonces B es de la forma

$$\{x \in U^n : x_n > s\}$$

para alguna $s > 0$. Todos los lados de P incidentes con ∞ son verticales. Sea $\nu : U^n \rightarrow E^{n-1}$ la proyección vertical. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \text{Vol}(P \cap B) &= \int_{P \cap B} \frac{dx_1 \dots dx_n}{(x_n)^n} = \int_s^\infty \left\{ \int_{\nu(P \cap \partial B)} dx_1 \dots dx_{n-1} \right\} \frac{dx_n}{(x_n)^n} \\ &= \text{Vol}(\nu(P \cap \partial B)) \left[\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \right]_s^\infty = \frac{1}{n-1} \text{Vol}(\nu(P \cap \partial B)) \frac{1}{s^{n-1}}. \end{aligned}$$

El conjunto $P \cap \partial B$ es compacto, ya que r es un vértice ideal de P . Por tanto $\text{Vol}(P \cap B)$ es finito. Así P tiene volumen finito.

Recíprocamente, supongamos que P sólo tiene un número finito de lados y que P tiene volumen finito en D^n . Entonces cada punto ideal de P es un horopunto de P . El cálculo de volumen de más arriba muestra que el eslabón de cada punto ideal de P tiene un volumen finito y por tanto es compacto. Así cada punto ideal de P es un vértice ideal. Por tanto, \bar{P} es un poliedro convexo en E^n . ■

3.3 Polítopos

Como siempre $X = E^n, S^n$, o H^n con $n > 0$.

Definición: Un polítopo en X es un poliedro convexo P en X tal que

- (1) P sólo tiene un número finito de vértices;
- (2) P es la envolvente convexa de sus vértices;
- (3) P no es un par de puntos antípodos de S^n .

Teorema 3.25 Un poliedro convexo P en X es un polítopo en X si y sólo si P es compacto, y si $X = S^n$, entonces P está contenido en una semiesfera de S^n .

Demostración:

Se sigue inmediatamente de los teoremas 3.15 y 3.16. ■

Teorema 3.26 Un polítopo P de dimensión m en X tiene al menos $m + 1$ vértices.

Demostración:

Supongamos primero que P está en E^n . La prueba es por inducción en la dimensión m . El teorema es cierto cuando $m = 0$, así que supongamos que $m > 0$ y que el teorema se cumple cuando la dimensión es $m - 1$. Sea S un lado de P . Entonces S es un polítopo por el teorema 3.25. Por la hipótesis de inducción S tiene al menos m lados. Ya que P es la envolvente convexa de sus vértices, S no puede contener a todos los vértices de P . Por tanto, P tiene al menos $m + 1$ vértices. Esto completa la inducción.

Supongamos ahora que P está en S^n . Entonces mediante la proyección gnomónica podemos ver a P como un poliedro euclidiano, por tanto P tiene al menos $m + 1$ vértices.

Sea P un polítopo en H^n . Pasamos al modelo del disco proyectivo \mathbb{D}^n . Entonces P es un poliedro euclidiano ya que P es compacto. Por tanto P tiene al menos $m + 1$ vértices por el caso euclidiano. ■

Definición. Un m -simplejo en X es un polítopo de dimensión m en X con exactamente $m + 1$ vértices.

Un subconjunto S de E^n es un m -simplejo si y sólo si S es la envolvente convexa de algún subconjunto de $m + 1$ puntos afinmente independientes $\{v_1, \dots, v_m\}$ de E^n .

Ejemplo 1. El m -simplejo canónico Δ^m en E^n , con $m \geq 0$, es la envolvente convexa de los puntos $0, e_1, \dots, e_m$ de E^n .

Teorema 3.27 *Un polítopo de dimensión m en X , con $m > 0$, tiene al menos $m + 1$ lados.*

Demostración:

Se sigue de los teoremas 3.10, 3.11 y 3.25. ■

Teorema 3.28 *Un polítopo de dimensión $m > 0$ en X , es un m -simplejo si y sólo si P tiene exactamente $m + 1$ lados.*

Demostración:

La prueba es por inducción en m . El teorema es cierto para $m = 1$, supongamos pues que $m > 1$, y que P es un m -simplejo. Entonces P tiene al menos $m + 1$ lados por el teorema 3.27. Sea S un lado de P , S no contiene a todos los vértices de P , ya que P es la envolvente convexa de sus vértices, S tiene a lo mas m vértices. De aquí S es un $(m - 1)$ -simplejo, luego, cada lado de P es la envolvente convexa de m vértices de P . Ya que el conjunto de $m + 1$ vértices de P tiene exactamente $m + 1$ subconjuntos de m vértices, P tiene a lo mas $m + 1$ lados. Por tanto P tiene exactamente $m + 1$ lados.

Recíprocamente, supongamos que P tiene exactamente $m + 1$ lados. Entonces P tiene al menos $m + 1$ vértices por el teorema 3.26. Por el teorema 3.13, cada vértice de P es la intersección de todos los lados de P . Como la intersección de todos los lados de P está contenida en cada vértice de P , debe ser vacía. De esta manera cada vértice de P es la intersección de exactamente m lados de P . Ya que el conjunto de $m + 1$ lados de P tiene exactamente $m + 1$ subconjuntos con m lados, P tiene a lo mas $m + 1$ vértices. Por tanto, P tiene exactamente $m + 1$ vértices, luego P es un m -simplejo. ■

Teorema 3.29 *Sea P un polítopo en X . Entonces el grupo de isometrías de P en $\langle P \rangle$ es finito.*

Demostración:

La prueba es por inducción en $\dim P = m$. El teorema es cierto si $m = 0$, así que supongamos que $m > 0$ y que el teorema es cierto para todos los polítopos de dimensión $m - 1$ en X . Sea Γ el grupo de simetrías de P en $\langle P \rangle$. Entonces Γ actúa en el conjunto finito S de lados de P . S no es vacío por el teorema 3.27 y cada lado de P es un polítopo de dimensión $m - 1$ por el teorema 3.25. Por hipótesis de inducción, el estabilizador de cada lado de P es finito. Por tanto Γ es finito. ■

Definición: *El centroide de un polítopo P en X con vértices v_1, \dots, v_k es el punto*

$$c = \begin{cases} (v_1 + \dots + v_k)/k & \text{si } X = E^n \\ \frac{(v_1 + \dots + v_k)/k}{|(v_1 + \dots + v_k)/k|} & \text{si } X = S^n \\ \frac{(v_1 + \dots + v_k)/k}{|||(v_1 + \dots + v_k)/k|||} & \text{si } X = H^n \end{cases}$$

Notemos que c está bien definido. Un polítopo P en X contiene a su centroide c , ya que c está en la envolvente convexa de sus vértices de P . Es más c está contenido en el interior de P . ■

Teorema 3.30 Sea P un polítopo en X . Entonces cada simetría de P fija el centroide de P .

Demostración:

Sea g una simetría de P . Entonces g permuta los vértices v_1, \dots, v_k de P . Si $X = E^n$, entonces existe un punto a de E^n y un A en $O(n)$ tal que $g = a + A$. Si $X = S^n$ o H^n , entonces g es lineal. Por tanto, tenemos,

$$g\left(\frac{v_1 + \dots + v_k}{k}\right) = \frac{v_1 + \dots + v_k}{k}$$

De esta manera, $g(c) = c$. ■

3.3.1 POLÍTOPOS GENERALIZADOS.

Generalizamos el concepto de polítopo en H^n para permitir vértices ideales en la esfera al infinito de H^n . Será más conveniente para nosotros trabajar en un modelo del espacio hiperbólico que permita una representación directa de la esfera al infinito, éste será el modelo del disco proyectivo para el espacio hiperbólico.

Definición. Un polítopo generalizado en \mathbb{D}^n es un poliedro convexo P en \mathbb{D}^n tal que P tiene sólo un número finito de vértices generalizados.

Teorema 3.31 Sea P un poliedro convexo en \mathbb{D}^n . Son equivalentes

- (i) P es un polítopo generalizado en \mathbb{D}^n
- (ii) \bar{P} es un polítopo en E^n .
- (iii) P tiene un número finito de lados y volumen finito en $\langle P \rangle$.

Es más, si la dimensión de P en \mathbb{D}^n es m , P tiene al menos $m+1$ vértices y $m+1$ lados.

Demostración:

(i) \Leftrightarrow (ii) Se sigue inmediatamente de los teoremas 3.23 y 3.25.

(i) \Leftrightarrow (iii) Se sigue inmediatamente de los teoremas 3.23 y 3.22.

Tenemos que \bar{P} es un polítopo en E^n . Por el teorema 3.25 tenemos que \bar{P} tiene al menos $m + 1$ vértices. Usando el mismo argumento de la prueba del teorema 3.23, los vértices de \bar{P} son los vértices generalizados de P . Por tanto P tiene al menos $m + 1$ vértices generalizados. Finalmente, por el teorema 3.18, los lados de \bar{P} son las cerraduras de los lados de P . Ahora por 3.27, tenemos que \bar{P} tiene al menos $m + 1$ lados. Por tanto P tiene al menos $m + 1$ lados. ■

Definición Un m -simplejo generalizado en \mathbb{D}^n es un polítopo generalizado de dimensión m en \mathbb{D}^n con exactamente $m + 1$ vértices generalizados.

Notemos que un 0-simplejo generalizado es sólo un punto. Un 1-simplejo es ya sea un segmento geodésico o un rayo geodésico o una geodésica.

Teorema 3.32 Un poliedro convexo en \mathbb{D}^n es un m -simplejo generalizado en \mathbb{D}^n si y sólo si su cerradura en E^n es un m -simplejo en E^n .

Demostración:

Supongamos que P es un m -simplejo. Por el teorema 3.31, tenemos que \bar{P} es un polítopo en E . Por el argumento de la prueba del teorema 3.23, los vértices de \bar{P} son los vértices generalizados de P . Por tanto \bar{P} tiene exactamente $m + 1$ vértices. Así \bar{P} es un m -simplejo en E^n .

Recíprocamente, supongamos que \bar{P} es un m -simplejo en E^n . Entonces P es un polítopo en \mathbb{D}^n por el teorema 3.31. Por el argumento en la prueba del teorema 3.23, los vértices de \bar{P} son los vértices generalizados de P . Por tanto P tiene exactamente $m + 1$ vértices generalizados. De esta manera, P es un m -simplejo generalizado. ■

Teorema 3.33 Un polítopo generalizado P , de dimensión m , en \mathbb{D}^n , con $m > 1$, es un m -simplejo generalizado si y sólo si P tiene exactamente $m + 1$ lados.

Demostración:

Por el teorema 3.31, \bar{P} es un polítopo en E^n . Por el teorema 3.32, P es un m -simplejo generalizado si y sólo si \bar{P} es un m -simplejo en E^n . Por el teorema 3.18, los lados de \bar{P} son las cerraduras de los lados de P . Por tanto, P es un m -simplejo si y sólo si P tiene exactamente $m + 1$ lados por el teorema 3.28. ■

Definición. Un m -simplejo ideal de \mathbb{D}^n es un polítopo generalizado, de dimensión m , en \mathbb{D}^n cuyos vértices son todos ideales.

Ejemplo 2. Sean v_0, \dots, v_m , $m + 1$ vectores afínmente independientes en S^{n-1} , con $m > 0$. Entonces su envolvente convexa es un m -simplejo Δ inscrito en S^n . Por tanto Δ menos sus vértices es un m -simplejo ideal en \mathbb{D}^n por el teorema 3.32.

Teorema 3.34 *Sea P un polítopo generalizado en \mathbb{D}^n que no es una geodésica de \mathbb{D}^n . Entonces el grupo de simetrías de P en $\langle P \rangle$ es finito.*

Demostración:

Sea Γ el grupo de simetrías de P en $\langle P \rangle$. Entonces Γ permuta los vértices generalizados de P . Sea g un elemento de Γ que fija a todos los vértices generalizados de P . Afirmamos que g es la identidad. La prueba es por inducción en $m = \dim P$. Esto es cierto para $m = 0$, así supongamos que $m > 0$ y que la afirmación se cumple en todos los polítopos generalizados de dimensión $m - 1$ en \mathbb{D}^n que no son geodésicas. Sea v un vértice generalizado de P . Entonces P tiene un lado S que no es incidente con v , ya que P es la envolvente convexa de sus vértices generalizados y no es una geodésica. Si S es una geodésica en \mathbb{D}^n , entonces $g = Id$, ya que g fija los puntos extremos de S y v . Si S no es una geodésica, entonces por la hipótesis de inducción, g es la identidad en $\langle S \rangle$. Por tanto $g = Id$ por el teorema 1.13. De aquí, Γ se inyecta dentro del grupo de permutaciones de los vértices generalizados de P . Por tanto Γ es finito. ■

3.3.2 POLÍTOPOS REGULARES.

Sea P un polítopo de dimensión m en X . Una bandera de P es una sucesión (F_0, \dots, F_m) de caras de P tales que $\dim F_i = i$ para cada i y F_i es un lado de F_{i+1} para cada $i < m$. Sea \mathcal{F} el conjunto de todas las banderas de P y sea Γ el grupo de simetrías de P en $\langle P \rangle$. Entonces Γ actúa en \mathcal{F} con

$$g(F_0, \dots, F_m) = (gF_0, \dots, gF_m).$$

Definición: *Un polítopo regular en X es un polítopo P en X cuyo grupo de simetrías en $\langle P \rangle$ actúa transitivamente en el conjunto de sus banderas.*

Teorema 3.35 *Sea P un polítopo regular en X . Entonces P está inscrito en una esfera de $\langle P \rangle$ centrada en el centroide de P .*

Demostración:

Sea Γ el grupo de simetrías de P . Entonces Γ actúa transitivamente en los vértices v_1, \dots, v_k de P . Cada elemento de Γ fija el centroide c de P por el teorema 3.30. Por tanto

$$d(c, v_1) = d(c, v_i) \text{ para cada } i.$$

De aquí P está inscrito en la esfera de (e) centrada en c de radio $d(c, v_1)$.

Los polítopos regulares de X están completamente clasificados. La clasificación de los polítopos regulares euclidianos en las distintas dimensiones la ponemos en los siguientes ejemplos: ■

Ejemplo 3. Un polítopo regular euclidiano de dimensión 1 es un segmento de línea.

Ejemplo 4. Un polítopo regular euclidiano de dimensión 2 es un polígono regular.

Ejemplo 5. Un polítopo regular euclidiano de dimensión 3 es un sólido regular. Salvo similitudes sólo hay 5 sólidos regulares, el tetraedro regular, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

Ejemplo 6. Existen salvo similitudes sólo seis poliedros regulares euclidianos. Son la 5-celda, la 8-celda, la 16-celda, la 24-celda, la 120-celda y la 600-celda.

Ejemplo 7. Para $n \geq 5$, existen, salvo similitudes, sólo tres polítopos regulares euclidianos, el n -simplejo regular con $n + 1$ lados, el n -cubo con $2n$ lados y su dual con 2^n lados.

La clasificación de polítopos regulares en S^n y H^n es esencialmente la misma que la clasificación de los polítopos regulares en E^n . La diferencia estriba en que en S^n y H^n polítopos regulares del mismo tipo combinatorio pueden no ser semejantes cuando cambia su tamaño.

Teorema 3.36 *Sea P un polítopo en S^n . Entonces P es regular, con centroide e_{n+1} , si y sólo si la proyección gnómonica en E^n de P es regular con centroide 0.*

Además, un polítopo P en \mathbb{D}^n es regular con centroide 0 si y sólo si P es regular en E^n con centroide 0.

Demostración:

Podemos suponer que $\langle P \rangle = S^n$. Si P es regular con centroide e_{n+1} . Sea $A \in O(n + 1)$ una simetría de P . Como $A(e_{n+1}) = e_{n+1}$, la restricción de A en E^n es un elemento \bar{A} de $O(n)$. La proyección gnómonica de S^n_+ sobre E^n está dada por $\phi(x) = \bar{x}/x_{n+1}$, donde $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Observemos que

$$\phi(Ax) = \bar{A}\bar{x}/(Ax)_{n+1} = \bar{A}\bar{x}/x_{n+1} = \bar{A}\bar{x}/x_{n+1} = \bar{A}\phi(x).$$

Con esto encontramos

$$\bar{A}\phi(P) = \phi(AP) = \phi(P).$$

De aquí \bar{A} es una simetría de $\phi(P)$. Por tanto $\phi(P)$ es regular en E^n . Sean v_1, \dots, v_n los vértices de P . Entonces

$$v_1 + \dots + v_k = |v_1 + \dots + v_k| / e_{n+1}.$$

Por tanto,

$$\bar{v}_1 + \dots + \bar{v}_k = 0.$$

Observemos que

$$\cos \theta(v_i, e_{n+1}) = v_i \cdot e_{n+1} = (v_i)_{n+1}.$$

Luego,

$$(v_i)_{n+1} = (\bar{v}_i)_{n+1} \text{ para toda } i.$$

De aquí

$$\frac{(\bar{v}_1 / (v_1)_{n+1}) + \dots + (\bar{v}_k / (v_k)_{n+1})}{k} = \frac{v_1 + \dots + v_k}{k(v_1)_{n+1}} = 0.$$

Concluimos que el centroide de $\phi(P)$ es 0.

Recíprocamente, supongamos que $\phi(P)$ es regular con centroide en 0. Sea A una simetría de $\phi(P)$. Entonces A es un elemento de $O(n)$. Sea \hat{A} el elemento de $O(n+1)$ que extiende a A y que fija e_{n+1} . Entonces tenemos $A\phi = \phi\hat{A}$. De aquí,

$$\hat{A}P = \hat{A}\phi^{-1}\phi(P) = \phi^{-1}A\phi(P) = \phi^{-1}\phi(P) = P.$$

Así, \hat{A} es una simetría de P . Por tanto P es regular. Ya que las simetrías de P de la forma de \hat{A} fijan e_{n+1} y actúan transitivamente en los vértices de P , concluimos como antes que

$$(v_i)_{n+1} = (v_i)_{1+n} \text{ para toda } i.$$

De esta manera

$$\frac{\bar{v}_1 + \dots + \bar{v}_k}{k(v_1)_{n+1}} = \frac{(\bar{v}_1 / (v_1)_{n+1}) + \dots + (\bar{v}_k / (v_k)_{n+1})}{k} = 0,$$

luego

$$\bar{v}_1 + \dots + \bar{v}_k = 0,$$

y entonces

$$v_1 + \dots + v_k = |v_1 + \dots + v_k| e_{n+1}.$$

Así el centroide de P es e_{n+1} .

La segunda parte del teorema se sigue de la misma manera reemplazando S^n por \mathbb{D}^n . ■

3.3.3 POLÍTOPOS REGULARES IDEALES.

Sea P un polítopo ideal en \mathbb{D}^n . Una bandera de P está definida exactamente como antes excepto que los vértices ahora son ideales.

Definición: *Un polítopo regular ideal en \mathbb{D}^n es un polítopo ideal P en \mathbb{D}^n cuyo grupo de simetrías en $\langle P \rangle$ actúa transitivamente en el conjunto de sus banderas.*

Teorema 3.37 *Un polítopo ideal P en \mathbb{D}^n es regular si y sólo si P es congruente a un polítopo ideal en \mathbb{D}^n cuya cerradura en E^n es un polítopo regular en E^n .*

Demostración:

Podemos suponer que $\langle P \rangle = \mathbb{D}^n$ y $n > 1$. Sea Γ el grupo de simetrías de P . Entonces Γ es finito por el teorema 3.34. De aquí Γ fija un punto de \mathbb{D}^n por el teorema 2.16 y 2.16. Conjugando Γ apropiadamente, podemos suponer que Γ fija al cero. Entonces cada simetría de P es un simetría de \overline{P} . Por tanto, si P es regular, entonces \overline{P} es regular.

Recíprocamente, supongamos que \overline{P} es regular. Entonces el centroide de \overline{P} está inscrito en S^{n-1} . De aquí, cada simetría de \overline{P} es una simetría de P . Por tanto P es regular. ■

Dominios Fundamentales.

Las propiedades básicas de los dominios fundamentales para un grupo discreto son examinadas en las secciones 4.1 y 4.2. El capítulo termina con un estudio de las propiedades básicas de teselaciones de S^n , E^n y H^n .

Sea Γ un grupo que actúa en un espacio métrico X . El espacio de órbitas de la acción de Γ en X está definido como el conjunto de Γ -órbitas

$$X/\Gamma = \{\Gamma x : x \in X\}.$$

Al que añadimos la topología cociente heredada de X bajo la proyección orbital $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$, $\pi(x) = \Gamma x$. Recordemos que si A y B son subconjuntos de X , entonces la distancia de A a B en X está definida como

$$\text{dist}(A, B) = \inf \{d(x, y) : x \in A \text{ y } y \in B\}.$$

El espacio de órbitas admite una distancia,

$$d_\Gamma : X/\Gamma \times X/\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por la fórmula

$$d_\Gamma(\Gamma x, \Gamma y) = \text{dist}(\Gamma x, \Gamma y). \quad (4.1)$$

Teorema 4.1 *Sea Γ un grupo de isometrías de un espacio métrico X . Entonces d_Γ es una métrica en X/Γ si y sólo si cada Γ -órbita es un subconjunto cerrado de X .*

Demostración:

Sean x, y en X y g, h en Γ . Entonces

$$d(gx, gy) = d(x, g^{-1}hy).$$

Por tanto,

$$\text{dist}(\Gamma x, \Gamma y) = \text{dist}(x, \Gamma y).$$

supongamos que d_Γ es una métrica y que $\Gamma x \neq \Gamma y$. Entonces tenemos que $B(x, y) \subset X - \Gamma y$. De aquí $X - \Gamma y$ es abierto y por tanto Γy es cerrado. Por tanto, cada Γ -órbita es un subconjunto cerrado de X . Si x, y están en X y $\Gamma x \neq \Gamma y$, entonces

$$d_{\Gamma}(\Gamma x, \Gamma y) = \text{dist}(x, \Gamma y) > 0.$$

Luego, d_{Γ} es no degenerada.

Ahora sean x, y, z en X y g, h , en Γ . Entonces

$$\begin{aligned} d(x, gy) + d(y, hz) &= d(x, \Gamma y) + d(gy, ghz) \\ &\geq d(x, ghz) \geq d(x, \Gamma z). \end{aligned}$$

De modo que

$$\text{dist}(x, \Gamma z) \leq \text{dist}(x, \Gamma y) + \text{dist}(y, \Gamma z).$$

De aquí d_{Γ} satisface la desigualdad del triángulo, con esto, d_{Γ} es una métrica en X/Γ . ■

Corolario 1. Si F es un grupo discontinuo de isometrías de un espacio métrico X , entonces d_{Γ} es una métrica en x/Γ .

Demostración:

Por el teorema 2.8, cada órbita es un subconjunto cerrado de X .

Teorema 4.2 Sea Γ un grupo de isometrías de un espacio métrico X tal que d_{Γ} es una métrica en X/Γ . Entonces la topología inducida por la métrica en X/Γ determinada por d_{Γ} es la topología cociente si $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$ es la función cociente, entonces para cada x en X y $r > 0$, tenemos

$$\pi(B(x, r)) = B(\pi(x), r).$$

Demostración:

Sea x en X y supongamos que $r > 0$. Entonces

$$\pi(B(x, r)) \subset B(\pi(x), r).$$

Ahora tomemos una y en X tal que $d_{\Gamma}(\Gamma x, \Gamma y) < r$. Así

$$d(x, \Gamma y) < r.$$

Consecuentemente, existe una g en Γ tal que $d(x, gy) < r$. Más aún, tenemos $\pi(gy) = \Gamma y$. Luego

$$\pi(B(x, r)) = B(\pi(x), r).$$

De aquí π es abierta y continua con respecto a la topología inducida por la métrica d_{Γ} en X/Γ .

Sea U un subconjunto abierto de X/Γ con respecto a la topología cociente. Entonces $\pi^{-1}(U)$ es abierto en X . Por tanto $U = \pi(\pi^{-1}(U))$ es abierto en la topología métrica en X/Γ . Sea x en X y supongamos que $r > 0$. Se sigue

$$\pi^{-1}(B(\pi(x), r)) = \bigcup_{g \in \Gamma} B(gx, r)$$

por tanto, $B(\pi(x), r)$ es abierto en la topología cociente en X/Γ . Así la topología en X/Γ determinada por d_Γ es la topología cociente. ■

4.1 Regiones Fundamentales.

Definición. Un subconjunto R de un espacio métrico X es una región fundamental para un grupo Γ de isometrías de X si y sólo si

- (1) el conjunto R en X es abierto;
- (2) los miembros de $\{gR : g \in \Gamma\}$ son mutuamente ajenos;
- (3) $X = \bigcup \{gR : g \in \Gamma\}$.

Definición. Un subconjunto D de un espacio métrico X es un dominio fundamental para un grupo Γ de isometrías de X si y sólo si D es una región fundamental conexa para Γ .

Teorema 4.3 Si un grupo Γ de isometrías de un espacio métrico X tiene una región fundamental entonces Γ es un subgrupo discreto de $I(X)$.

Demostración:

Sea x un punto en una región fundamental R , para un grupo de isometrías Γ de un espacio métrico X . Entonces la función evaluación

$$\varepsilon : \Gamma \rightarrow \Gamma x,$$

definida por $\varepsilon(g) = gx$, es continua. El punto x es abierto en Γx , ya que $R \cap \Gamma x = \{x\}$. Más aún, el estabilizador Γ_x es trivial. De aquí $I = \varepsilon^{-1}(x)$ es abierto en Γ . Por tanto, Γ es discreto por la prueba del lema 1 de 2.3. ■

Teorema 4.4 Si R es una región fundamental para un grupo Γ de isometrías de un espacio métrico X , entonces para cada $g \neq Id$ en Γ , tenemos

$$\overline{R} \cap g\overline{R} \subset \partial R.$$

Demostración:

Sea x un punto en $\overline{R} \cap g\overline{R}$. Entonces para cualquier $B(x, r)$, existen puntos $w \in R \cap B(x, r)$, $z \in gR \cap B(x, r)$. Como R y gR son ajenos, $B(x, r)$ corta a R y a $X - R$. Entonces x está en ∂R . Y así $\overline{R} \cap g\overline{R}$ está contenido en ∂R para cada $g \neq Id$ en Γ . ■

Definición. Una región fundamental R para un grupo discreto de isometrías de $X = \mathbb{S}^n, E^n, \text{ o } H^n$ es propia si y sólo si $\text{Vol}(\partial R) = 0$.

Ejemplo 1. Sea α la función antípoda de \mathbb{S}^n . Entonces $\Gamma = \{Id, \alpha\}$ es un subgrupo discreto de $I(\mathbb{S}^n)$ y cualquier semiesfera abierta de \mathbb{S}^n es un dominio fundamental para Γ . El espacio de órbitas \mathbb{S}^n/Γ es el n -espacio elíptico P^n .

Ejemplo 2. Sea τ_i la traslación de E^n por e_i para cada $i = 1, \dots, n$. Entonces $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ genera un subgrupo discreto Γ de $I(E^n)$. Un dominio fundamental propio para Γ es el n -cubo abierto unitario $(0, 1)^n$ en E^n . El espacio de órbitas E^n/Γ es similar al n -toro $(\mathbb{S}^1)^n$.

Ejemplo 3. Sea ρ la reflexión de H^n en un hiperplano P . Entonces $\Gamma = \{Id, \rho\}$ es un subgrupo discreto de $I(H^n)$. Cualquiera de los dos semiespacios abiertos de H^n acotados por P es un dominio fundamental propio para Γ . El espacio de órbitas H^n/Γ es isométrico a un semiespacio cerrado de H^n .

Teorema 4.5 Si Γ es un grupo discreto de isometrías de $X = \mathbb{S}^n, E^n$ o H^n , entonces todas las regiones fundamentales propias para Γ tienen el mismo volumen.

Demostración:

Sean R y S regiones fundamentales propias para Γ . Observemos que

$$X - \bigcup_{g \in \Gamma} gS \subset \bigcup_{g \in \Gamma} g\partial S.$$

Entonces

$$\text{Vol}(X - \bigcup_{g \in \Gamma} gS) = 0.$$

De aquí

$$\begin{aligned} \text{Vol}(R) &= \text{Vol}(R \cap (\bigcup_{g \in \Gamma} gS)) = \text{Vol}(\bigcup_{g \in \Gamma} R \cap gS) \\ &= \sum_{g \in \Gamma} \text{Vol}(R \cap gS) = \sum_{g \in \Gamma} \text{Vol}(g^{-1}R \cap S) = \text{Vol}(S). \end{aligned}$$

■

Teorema 4.6 Si R es una región fundamental para un grupo Γ de isometrías de un espacio métrico X y g es un elemento de Γ que fija un punto de X , entonces g es conjugado en Γ a un elemento h tal que h fija un punto de ∂R .

Demostración:

El resultado es cierto cuando $g = Id$, así que supongamos que $g \neq Id$. Sea x un punto fijo de g . Entonces existe un punto y de \bar{R} y un elemento f de Γ tal que $fx = y$. Sea $h = fgyf^{-1}$. Entonces h fija y . Como R y hR son ajenos, y está en ∂R . ■

Corolario 1. Sea R una región fundamental para un grupo discreto Γ de isometrías de E^n o H^n . Si g es un elemento elíptico de Γ , entonces es conjugado en Γ a un elemento h tal que h fija un punto de ∂R .

Demostración:

Cada elemento elíptico de Γ tiene un punto fijo. ■

Lema 1. Si Γ es un grupo discreto de isometrías de H^n tal que H^n/Γ es compacto, entonces existe una $l > 0$ tal que $d(x, hx) \geq l$ para toda x en H^n y toda h no elíptica en Γ .

Demostración:

Sea x un punto arbitrario de H^n y sea

$$r(x) = \frac{1}{2} \text{dist}(x, \Gamma x - \{x\}).$$

Entonces cualesquiera dos bolas abiertas del conjunto:

$$\{B(gx, r(x)) : g \in \Gamma\}$$

o son la misma o son ajenas. Sea $\pi : H^n \rightarrow H^n/\Gamma$ la función cociente. Como H^n/Γ es compacto, la cubierta abierta

$$\{B(\pi(y), r(y)) : y \in H^n\}$$

tiene un número de Lebesgue $l > 0$. De aquí, existe una y en H^n tal que $B(\pi(y), r(y))$ contiene a la bola $B(\pi(x), l)$. En consecuencia $\bigcup_{g \in \Gamma} B(gy, r(y))$ contiene a $B(x, l)$. Como $B(x, l)$ es conexa, existe una g en Γ tal que $B(gy, r(y))$ contiene $B(x, l)$. Reemplazando y con gy , podemos suponer que $g = Id$. Sea h un elemento arbitrario no elíptico de Γ . Como $B(y, r(y))$ y $B(hy, r(y))$ son ajenas, $B(x, l)$ y $B(hx, l)$ también lo son. Por tanto, $d(x, hx) \geq l$. ■

Teorema 4.7 Sea Γ un grupo discreto de isometrías de H^n , entonces

- (i) Si H^n/Γ es compacto, cada elemento de Γ es elíptico o hiperbólico.
- (ii) Si Γ tiene un elemento parabólico, entonces toda región fundamental de Γ es no acotada.

Demostración:

i) Por contradicción, supongamos que Γ tiene un elemento parabólico f . Pasamos al modelo del semiespacio superior U^n . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, $f(\infty) = \infty$. Entonces f es la extensión de Poincaré de una isometría de E^{n-1} . Por el teorema 1.19, tenemos para cada $t > 0$,

$$\cosh d(te_n, f(e_n)) = 1 + \frac{|te_n - f(te_n)|}{2t^2} = 1 + \frac{|e_n - f(e_n)|}{2t^2}.$$

De aquí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \cosh d(te_n, f(te_n)) = 1.$$

Luego

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(te_n, f(te_n)) = 0.$$

Pero esto contradice al lema.

ii) Sea R una región fundamental para Γ . Si R fuera acotado, entonces \overline{R} sería compacto; pero la función cociente $\pi : H^n \rightarrow H^n/\Gamma$ manda \overline{R} sobre H^n/Γ , y entonces H^n/Γ sería compacto y por i) Γ sólo tendría elementos elípticos o hiperbólicos. ■

4.1.1 REGIONES FUNDAMENTALES LOCALMENTE FINITAS.

Definición: Una región fundamental R para un grupo Γ de isometrías de un espacio métrico X es localmente finita si y sólo si $\{g\overline{R} : g \in \Gamma\}$ es una familia localmente finita de subconjuntos de X .

Ejemplo 4. Cada región fundamental de un grupo discreto de isometrías de S^n es localmente finita, ya que Γ es finito.

Sea R una región fundamental para un grupo discontinuo Γ de isometrías de un espacio métrico X , y sea \overline{R}/Γ la colección de subconjuntos ajenos de \overline{R} ,

$$\{\Gamma x \cap \overline{R} : x \in R\},$$

con la topología cociente. En ocasiones, será muy útil adoptar \overline{R}/Γ como un modelo geométrico para X/Γ . La importancia de la propiedad de ser localmente finita en este esquema, subyace en el siguiente teorema.

Teorema 4.8 Si R es una región fundamental para un grupo discontinuo Γ de isometrías de un espacio métrico X , entonces la inclusión $\iota : \overline{R} \rightarrow X$ induce una biyección continua $\kappa : \overline{R}/\Gamma \rightarrow X/\Gamma$, además κ es un homeomorfismo si y sólo si R es localmente finita.

Demostración:

La función κ está definida por $\kappa(\Gamma x \cap \bar{R}) = \Gamma x$. Si x, y están \bar{R} y $\Gamma x = \Gamma y$, entonces tenemos

$$\Gamma x \cap \bar{R} = \Gamma y \cap \bar{R}.$$

Por tanto κ es inyectiva. Como \bar{R} contiene a un conjunto fundamental, κ es sobreyectiva. Sea $\eta: \bar{R} \rightarrow \bar{R}/\Gamma$ la función cociente entonces tenemos un diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} \bar{R} & \xrightarrow{\iota} & X \\ \eta \downarrow & & \downarrow \pi \\ \bar{R}/\Gamma & \xrightarrow{\kappa} & X/\Gamma \end{array}$$

Esto implica que κ es continua. Así κ es una biyección. Supongamos que \bar{R} es localmente finita. Para probar que κ es un homeomorfismo es suficiente mostrar que κ es una función abierta. Sea U un subconjunto abierto de \bar{R}/Γ . Como η es continua, y sobreyectiva, existe un abierto V de X tal que $\eta^{-1}(U) = \bar{R} \cap V$ y $\eta(\bar{R} \cap V) = U$. Sea

$$W = \bigcup_{g \in \Gamma} g(\bar{R} \cap V).$$

Entonces

$$\pi(W) = \pi(\bar{R} \cap V) = \pi\iota(\bar{R} \cap V) = \eta\kappa(\bar{R} \cap V) = \kappa(U).$$

Con el fin de probar que $\kappa(U)$ es abierto, es suficiente probar que W es un abierto en X , ya que π es una función abierta. Sea $w \in W$. Mostraremos que W contiene a una bola abierta centrada en w . Como W es Γ -invariante, podemos suponer que w es $\bar{R} \cap V$. Como \bar{R} es localmente finita, existe una bola abierta B centrada en w que corta sólo a un número finito de las Γ -imágenes de \bar{R} , digamos $g_1\bar{R}, \dots, g_m\bar{R}$. Entonces

$$B \subset g_1\bar{R} \cup \dots \cup g_m\bar{R}.$$

Si $g_i\bar{R}$ no contiene w , entonces $B - g_i\bar{R}$ es una vecindad abierta de w , podemos estrechar B para evitar que corte a $g_i\bar{R}$. De esta manera, podemos suponer que cada $g_i\bar{R}$ contiene w , entonces $g_i^{-1}w$ está en \bar{R} para cada i . Como $\eta(g_i^{-1}w) = \eta(w)$, tenemos que $g_i^{-1}w$ está en $\eta^{-1}(U) = \bar{R} \cap V$. De aquí w está en g_iV para cada i . Estrechando B aún más, suponemos que

$$B \subset g_1V \cap \dots \cap g_mV.$$

Consecuentemente $B \subset W$, ya que si x está en B , entonces x está en ambos $g_i\bar{R}$ y g_iV para algún i , y entonces x está en $g_i(\bar{R} \cap V)$, lo cual está contenido en W . Por tanto, W es abierto y κ es una función abierta. Así κ es un homeomorfismo.

Recíprocamente, supongamos que κ es un homeomorfismo y que existe un punto y de X en el cual R no es localmente finita. Entonces existe una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de puntos en R y una sucesión $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ de elementos distintos de Γ tales que $g_i x_i \rightarrow y$. Como gR es abierto y ajeno de cualquier otra Γ -imagen de R , el punto y no está en cualquier gR . Sea $k = \{x_1, x_2, \dots\}$. Como $K \subset R$, tenemos que $\pi(y)$ no está en $\pi(K)$.

Veamos que K es cerrado en X . Sea x en $X - K$. Ahora $\Gamma y - \{x\}$ es un subconjunto cerrado de X , por el teorema 2.8. Por tanto

$$\text{dist}(x, \Gamma y - \{x\}) > 0$$

Sea

$$r = \frac{1}{2} \text{dist}(x, \Gamma y - \{x\}).$$

Como las g_i son distintas, x es igual a lo más a un número finito de $g_i^{-1}y$, ya que Γy es finito. Así $d(x, g_i^{-1}y) \geq 2r$ para una i suficientemente grande. De aquí que para una i suficientemente grande.

$$2r \leq d(x, g_i^{-1}y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, g_i^{-1}y)$$

y

$$r < 2r - d(g_i x_i, y) \leq d(x, x_i).$$

Así $B(x, r)$ contiene a sólo un número finito de puntos de K , entonces existe una bola centrada en x que no corta a K . De esta manera $X - K$ es abierto y por tanto K es cerrado.

Como $K \subset R$, tenemos que $\eta^{-1}(\eta(K)) = K$, y entonces $\eta(K)$ es cerrado. Por tanto $\kappa\eta(K) = \pi(K)$ es cerrado en X/Γ , ya que κ es un homeomorfismo. Como π es continua, tenemos que $\pi(g_i x_i) \rightarrow \pi(y)$, esto es $\pi(x_i) \rightarrow \pi(y)$. Como $\pi(K)$ es cerrado, $\pi(y)$ está en $\pi(K)$, lo cual es una contradicción. Así R es localmente finito. ■

Teorema 4.9 Sea x un punto de la frontera de una región fundamental localmente finita R , de un grupo Γ de isometrías de un espacio métrico X . Entonces $\partial R \cap \Gamma x$ es finito, además existe un $r > 0$ tal que si $N(\bar{R}, r)$ es la r -vecindad de \bar{R} en X , entonces

$$N(\bar{R}, r) \cap \Gamma x = \partial R \cap \Gamma x.$$

Demostración:

Como R es localmente finito, existe una $r > 0$ tal que $B(x, r)$ corta a sólo un número finito de Γ -imágenes de \bar{R} , digamos $g_1^{-1}\bar{R}, \dots, g_m^{-1}\bar{R}$. Estrechando r , si es necesario, suponemos que c está en cada $g_i^{-1}\bar{R}$. Supongamos que gx está también en ∂R . Entonces x está en $g^{-1}\bar{R}$ y $g = g_i$ para alguna i . De aquí

$$\partial R \cap \Gamma x \subset \{g_1 x, \dots, g_m x\}.$$

Más aún, para cada i , existe y_i en ∂R tal que $x = g_i^{-1} y_i$. Por tanto

$$\partial R \cap \Gamma x = \{g_1 x, \dots, g_m x\}$$

Supongamos que $d(gx, y) < r$ con y en \bar{R} . Entonces $d(x, g^{-1}y) < r$. De aquí g está en $\{g_1, \dots, g_m\}$ y luego gx está en ∂R . Así

$$N(\bar{R}, x) \cap \Gamma x = \partial R \cap \Gamma x. \quad \blacksquare$$

Teorema 4.10 *Sea R una región fundamental para un grupo discontinuo Γ de isometrías de un espacio métrico X localmente compacto tal que X/Γ es compacto. Entonces R es localmente finito si y sólo si \bar{R} es compacto.*

Demostración:

Supongamos que \bar{R} es compacto. Entonces la función $k: \bar{R}/\Gamma \rightarrow X/\Gamma$ es una biyección continua de un espacio compacto a un espacio de Hausdorff, de modo que k es un homeomorfismo. Por tanto, R es localmente finito por el teorema 4.8.

Recíprocamente, supongamos que R es localmente finito. Como X/Γ es compacto $\{\pi(x_i)\}$ tiene una subsucesión convergente. Pasando a esta subsucesión, podemos pensar que $\{\pi(x_i)\}$ converge en X/Γ . Como la función cociente π manda a \bar{R} sobre X/Γ , existe un punto $x \in \bar{R}$ tal que la sucesión $\pi(x_i)$ converge a $\pi(x)$. Como π manda a \bar{R} homeomórficamente sobre $\pi(R)$, el punto x debe estar en ∂R . Por el teorema 4.9, existe $r > 0$ tal que

$$N(\bar{R}, r) \cap \Gamma x = \partial R \cap \Gamma x.$$

Más aún, existe sólo un número finito de elementos g_1, \dots, g_m de Γ tales que

$$\partial R \cap \Gamma x = \{g_1 x, \dots, g_m x\}.$$

Estrechando r , si es necesario podemos suponer que $\bar{B}(g_i x, r)$ es compacto para cada $i = 1, \dots, m$. Como $\pi(x_i) \rightarrow \pi(x)$, existe $k > 0$ tal que

$$\text{dist}(\Gamma x_i, \Gamma x) < r$$

para todos los $i \geq k$. De aquí, existe una h_i en Γ para cada $i \geq k$ tal que

$$d(x_i, h_i x) < r.$$

Ya que

$$N(\bar{R}, r) \cap \Gamma x = \partial R \cap \Gamma x,$$

tenemos $h_i x = g_j x$ para algún $j = 1, \dots, m$. De aquí x_i está en el conjunto compacto

$$\bar{B}(g_1 x, r) \cup \dots \cup \bar{B}(g_m x, r)$$

para toda $i \geq k$. Pero esto implica que $\{x_i\}$ tiene una subsucesión convergente, así \bar{R} es compacto. ■

Teorema 4.11 *Si R es una región fundamental localmente finita para un grupo Γ de isometrías de un espacio métrico conexo X , entonces Γ está generado por el conjunto*

$$\Psi = \{g \in \Gamma : \bar{R} \cap g\bar{R} \text{ es no vacío}\}.$$

Demostración:

Sea H el subgrupo de Γ generado por Ψ , y sea x en X . Entonces existe una g en Γ tal que gx está en \bar{R} . Supongamos que h es otro elemento de Γ tal que hx está en \bar{R} . Luego gx está en $\bar{R} \cap gh^{-1}\bar{R}$ y entonces gh^{-1} está en Ψ . De aquí que $Hg = Hh$. Esto implica que existe una función bien definida $\phi : X \rightarrow \Gamma/H$, dada por $\phi(x) = Hg$, donde gx está en \bar{R} .

Como \bar{R} es localmente finito existe una bola abierta B centrada en x que corta finitamente a las Γ -imágenes de \bar{R} , digamos $g_1\bar{R}, \dots, g_m\bar{R}$. Podemos suponer que cada $g_i\bar{R}$ contiene a x . Entonces tenemos

$$B \subset g_1\bar{R} \cup \dots \cup g_m\bar{R}.$$

Si $y \in B$, entonces $y \in g_i\bar{R}$ para algún i y entonces

$$\phi(y) = Hg_i^{-1} = \phi(x).$$

Luego ϕ es constante en B . De esta manera, las fibras de la función ϕ son abiertas. Como X es conexo, ϕ es constante.

Sea g en Γ , sea u en \mathbb{R} , y sea v en $g^{-1}R$. Entonces

$$H = \phi(u) = \phi(v) = Hg$$

y por tanto $g \in H$. Esto muestra que $H = \Gamma$, es decir, Ψ genera a Γ . ■

4.1.2 ESPACIOS MÉTRICOS RÍGIDOS.

Definición. *Un espacio métrico X es rígido si y sólo si la única similitud que fija cada punto de un abierto no vacío de X es la identidad en X .*

Teorema 4.12 *Si X es un espacio métrico geodésicamente conexo y geodésicamente completo entonces X es rígido.*

Demostración:

Sea ϕ una similitud de X que fija cada punto de un abierto no vacío W de X . Entonces el factor de escala de ϕ es uno y ϕ es una isometría de X . Sea w un punto de W y x un punto arbitrario de X distinto de w . Existe una línea geodésica $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow X$ cuya imagen contiene a w y a x . Observemos que

$$\phi\lambda : \mathbb{R} \rightarrow X$$

es también una línea geodésica y $\phi\lambda$ coincide con λ en el conjunto abierto $\lambda^{-1}(W)$. Como cada arco geodésico en X se extiende a una única línea geodésica deducimos que $\phi\lambda = \lambda$. Por tanto $\phi(x) = x$. Y entonces X es rígido. ■

Ejemplo 5. Por lo anterior S^n , E^n , H^n son espacios métricos rígidos.

Definición: Un subconjunto F de un espacio métrico X es un conjunto fundamental para un grupo Γ de isometrías de X si y sólo si F contiene exactamente un punto de cada Γ -órbita en X .

Teorema 4.13 Un subconjunto abierto R de un espacio métrico rígido X es una región fundamental para un grupo Γ de isometrías de X si y sólo si existe un conjunto fundamental F para Γ tal que $R \subset F \subset \bar{R}$.

Demostración:

Supongamos que R es una región fundamental para Γ . Entonces los miembros de $\{gR : g \in \Gamma\}$ son ajenos dos a dos. Por tanto R contiene a lo más un elemento de cada Γ -órbita en X . Como

$$Y = \cup\{g\bar{R} : g \in \Gamma\},$$

por el axioma de elección existe un conjunto fundamental F para Γ tal que $R \subset F \subset \bar{R}$. Recíprocamente supóngase que existe un conjunto fundamental F para el grupo Γ tal que $R \subset F \subset \bar{R}$ y supongamos que g y h son elementos de Γ tales que $gR \cap hR$ es no vacío. Entonces existen puntos x , y en R tales que $gx = hy$. De aquí $h^{-1}gx = y$. Como x , y están en F , deducimos que $h^{-1}gx = x$. Por tanto $h^{-1}g$ fija cada punto de $R \cap g^{-1}hR$. Como X es rígido, $h^{-1}g = 1$. De esta manera, los miembros de $\{gR : g \in \Gamma\}$ son ajenos dos a dos.

Como $F \subset \bar{R}$, tenemos

$$X = \cup_{g \in \Gamma} gF = \cup_{g \in \Gamma} g\bar{R}.$$

Luego R es una región fundamental para Γ . ■

Si R es una región fundamental para un grupo Γ de isometrías de un espacio métrico X , entonces el estabilizador de cada punto de R es trivial. Consideraremos un ejemplo de un grupo discontinuo de isometrías de un espacio métrico X tal que cada punto de X es un punto fijo para algún elemento distinto de la identidad en Γ . De esta forma, este grupo no tiene una región fundamental.

Ejemplo 6. Sea X la unión del eje X y el eje Y de E^2 y sea

$$\Gamma = \{1, \rho, \sigma, \alpha\},$$

donde ρ y σ son las reflexiones en el eje X y en el eje Y respectivamente, y α es la función antípoda. Entonces Γ es un grupo discontinuo de isometrías de X , ya que Γ es finito. Observemos que cada punto de X es un punto fijo de algún elemento Γ distinto de la identidad. Y por tanto, Γ no tiene una región fundamental. Más aún X no es rígido.

Teorema 4.14 *Sea Γ un grupo discontinuo de isometrías de un espacio métrico rígido X . Entonces existe un punto x de X cuyo estabilizador Γ_x es trivial.*

Demostración:

Ya que Γ es discontinuo, el estabilizador de cada punto de X es finito. Sea x un punto de X tal que el orden del estabilizador Γ_x sea lo más pequeño como posible. Sea s la mitad de la distancia de x a $\Gamma x - \{x\}$. Entonces para cada $g \in \Gamma$, tenemos que $B(x, s)$ corta $B(gx, s)$ si y sólo si $gx = x$. De aquí, para cada punto y de $B(y, s)$, tenemos que $\Gamma_y \subset \Gamma_x$ y por tanto $\Gamma_y = \Gamma_x$ por la minimalidad del orden de Γ_x . De aquí, cada punto de $B(x, s)$ es un punto fijo para cada elemento de Γ_x . Por tanto, $\Gamma_x = \{Id\}$, ya que X es rígido.

4.1.3 DOMINIOS DE DIRICHLET.

Sea Γ un grupo discontinuo de isometrías de un espacio métrico, y sea u un punto de X cuyo estabilizador Γ_u es trivial. Para cada $g \neq Id$ en Γ , definamos

$$Hg(u) = \{x \in X : d(x, u) < d(x, gu)\}.$$

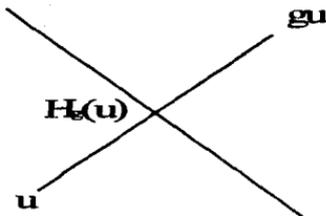
Observemos que el conjunto $Hg(u)$ es abierto en X . Más aún, si $X = S^n$, E^n , o H^n , entonces $Hg(u)$ es el semiespacio abierto de X que contiene a u cuya frontera es el bisector perpendicular de cada segmento geodésico que une a u con gu . Ver la figura 4.1. El dominio de Dirichlet $D(u)$ para Γ , con centro u , es X si Γ es trivial o

$$D(u) = \cap \{Hg(u) : g \neq Id \text{ en } \Gamma\}$$

si Γ no es trivial. ■

Teorema 4.15 *Sea $D(u)$ el dominio de Dirichlet, con centro u , para un grupo discontinuo Γ de isometrías de un espacio métrico X tal que*

- (1) X es geodésicamente conexo;
- (2) X es geodésicamente completo;
- (3) X es finitamente compacto.

Figura 4.1. El semiespacio $H_g(u)$

Entonces

- (i) $D(u)$ es un dominio fundamental localmente finito para Γ .
 (ii) $\overline{D}(u) = \{x \in X : \text{es un punto más cercano de } \Gamma x \text{ a } u\}$.

Demostración:

(i) El teorema es claro si Γ es trivial, así que supongamos que Γ no es trivial. Sea $r > 0$, entonces $C(u, r)$ es compacto. De aquí $C(u, r)$ contiene sólo un número finito de puntos de una órbita Γx , ya que Γ es discontinuo. Sea $K_g = X - Hg(u)$ para cada $g \neq Id$ en Γ . Entonces K es cerrado en X . Mostraremos que $\{K_g : g \neq Id \text{ en } \Gamma\}$ es una familia localmente finita de conjuntos en X . Supongamos que $B(u, r)$ corta a K_g en un punto x . Entonces

$$d(u, gu) \leq d(u, x) + d(x, gu) \leq d(u, x) + d(x, u) < 2r.$$

De aquí $B(u, 2r)$ contiene a gu . Como $B(u, 2r)$ contiene sólo un número finito de puntos de Γu , la bola $B(u, r)$ corta finitamente a los conjuntos K_g . Por tanto, $\{K_g : g \neq Id \text{ en } \Gamma\}$ es una familia localmente finita de conjuntos cerrados en X . De aquí

$$X - D(u) = \cup \{K_g : g \neq Id \text{ en } \Gamma\}$$

es un conjunto cerrado. Así $D(u)$ es abierto.

De cada órbita Γx , escojamos al punto más cercano a u y sea F el conjunto de estos puntos. Entonces F es un conjunto fundamental para Γ . Si x está en $D(u)$ y $g \neq Id$ en Γ , entonces

$$d(x, u) < d(x, gu) = d(g^{-1}x, u)$$

luego x es el único punto de la órbita Γx que está más cerca a u . Así $D(u) \subset F$.

Sea x un punto arbitrario de F que no sea u y sea $g \neq Id$ en Γ , entonces $d(x, u) \leq d(x, gu)$, ya que de otra manera tendríamos

$$d(x, u) > d(x, gu) = d(g^{-1}x, u),$$

contrario a la suposición de que x está en F . Sea $[u, x]$ un segmento geodésico en X que une u con x . Sea y un punto en el segmento abierto (u, x) . Entonces

$$d(x, ga) = d(x, u) - d(x, y) \leq d(x, gu) - d(x, y) \leq d(y, gu)$$

con igualdad en el caso:

$$d(x, gu) = d(x, y) + d(y, gu).$$

Supongamos que tenemos la igualdad. Sea $[x, y]$ el segmento geodésico en $[x, u]$ que une x con y y sea $[y, gu]$ un segmento geodésico en X que une y a gu . Por el teorema 1.4.3 (Preliminares), tenemos que $[x, y] \cup [y, gu]$ es un segmento geodésico $[x, gu]$ en X que une x con gu . $[x, u]$ y $[gu, y]$ se extienden a $[x, y]$ y tienen la misma longitud. Por tanto $[x, u] = [x, gu]$, ya que X es geodésicamente completo. De aquí $u = gu$, lo cual es una contradicción. Por tanto, debemos tener

$$d(y, u) < d(y, gu).$$

Luego y está en $H_g(u)$ para toda $g \neq Id$ en Γ . Por tanto y está en $\overline{D(u)}$. Se deduce $[u, x] \subset \overline{D(u)}$. Y entonces x está en $\overline{D(u)}$. De aquí $F \subset \overline{D(u)}$. Así $D(u)$ es una región fundamental para Γ por los teoremas 4.12 y 4.13. Más aún, si x está en $D(u)$, entonces $[u, x] \subset D(u)$, y así $D(u)$ es conexo.

Queda sólo mostrar que $D(u)$ es localmente finito. Supongamos $r > 0$ y $B(u, r)$ corta sólo $g\overline{D(u)}$. Entonces existe algún $x \in D(u)$ tal que $d(u, gx) < r$. Más aún

$$d(u, gu) \leq d(u, gx) + d(gx, gu) \leq r + d(x, u) \leq r + d(x, g^{-1}u) = r + d(gx, u) < 2r.$$

Pero esto es posible sólo para un número finito de g en P . Luego $D(u)$ es localmente finito.

(ii) Para cada $g \neq Id$ definamos

$$L_g = \{x \in X : d(x, u) \leq d(x, gu)\}.$$

Entonces L_g es un subconjunto cerrado de X que contiene a H_g . Ya que

$$L_g = \{x \in X : d(x, u) \leq d(g^{-1}x, u)\},$$

tenemos $\cap \{L_g : g \neq Id \text{ en } \Gamma\}$ es igual a

$$\{x \in X : x \text{ es un punto más cercano de } \Gamma x \text{ a } u\}$$

Más aún, como

$$D(u) = \cap \{H_g(u) : g \neq Id \text{ en } \Gamma\},$$

tenemos

$$\overline{D(u)} \subset \cap \{L_g : g \neq Id \text{ en } \Gamma\}.$$

Supongamos que x el punto más cercano de Γx a u . Entonces podemos escoger un conjunto fundamental F para Γ que contiene a x tal que cada punto de F es un punto de los más cercanos en su órbita a u . De la prueba del teorema 4.15, tenemos $F \subset \overline{D(u)}$. Así x está en $\overline{D(u)}$. De tal manera

$$\overline{D(u)} = \{x \in X : x \text{ es un punto de los más cercanos de } \Gamma x \text{ a } u\}.$$

■

4.2 Poliedros Convexos Fundamentales.

Sea Γ un grupo discreto de isometrías de X . Por el teorema 4.14, existe un punto u de X cuyo estabilizador Γu es trivial. Sea $D(u)$ el dominio de Dirichlet para Γ con centro u ; $D(u)$ es convexo, ya que por definición $D(u)$ es X o bien la intersección de semiespacios abiertos de X y $D(u)$ es localmente finito por el teorema 4.15. De aquí Γ tiene un dominio fundamental convexo localmente finito.

Lema 1. *Si D es un dominio fundamental convexo localmente finito para un grupo discreto Γ de isometrías de X , entonces para cada punto x de ∂D , existe una $g \neq Id$ en Γ tal que x está en $\overline{D} \cap g\overline{D}$.*

Demostración:

Como D es localmente finito, existe $r > 0$ tal que $B(x, r)$ corta a sólo un número finito de Γ -imágenes de \overline{D} , digamos $g_1\overline{D}, \dots, g_m\overline{D}$ donde $g_1 = Id$. Cambiando r de manera adecuada, podemos pensar que x está en cada $g_i\overline{D}$. Como D es convexo $\partial D = \overline{\partial D}$. Por tanto $B(x, r)$ contiene un punto que no está en \overline{D} . De aquí que $m > 1$. Así, existe una $g \neq Id$ en D tal que $x \in g\overline{D}$. ■

Teorema 4.16 *Si D es un dominio fundamental convexo localmente finito para un grupo discreto Γ de isometrías de X , entonces \overline{D} es un poliedro convexo.*

Demostración:

Ya que D es convexo en X , \overline{D} es cerrado y convexo en X . Sea S el conjunto de lados de D . Necesitamos mostrar que S es localmente finito. Sea x un punto arbitrario de X . Si x está en D , entonces D es una vecindad de x que no interseca a ningún lado de D ; si está en $X - \overline{D}$, entonces $X - \overline{D}$ es

una vecindad de x que no corta a ningún lado de D . Podemos suponer que x está en ∂D . Como D es localmente finito, existe $r > 0$ tal que $B(x, r)$ corta sólo finitamente a las Γ -imágenes de \bar{D} , digamos $g_0\bar{D}, \dots, g_m\bar{D}$ con $g_0 = Id$. Tomando una r más chica, si es necesario, podemos suponer que x está en cada $g_i\bar{D}$, luego $\bar{D} \cap g_i\bar{D}$ es un subconjunto convexo no vacío de ∂D . Por el teorema 3.4 (1), existe un lado S_i de D que contiene a $\bar{D} \cap g_i\bar{D}$. Por el lema 1, tenemos

$$B(x, r) \cap \partial D \subset \bigcup_{i=1}^m (\bar{D} \cap g_i\bar{D}).$$

Por tanto

$$B(x, r) \cap \partial D \subset S_1 \cup \dots \cup S_m.$$

Ahora supongamos que S es un lado de D que corta $B(x, r)$. Entonces $B(x, r)$ corta a S° , ya que $\bar{S}^\circ = \bar{S} = S$. Por el teorema 3.4 (3), tenemos que $S = S_i$ para alguna i . Así, \bar{D} es un poliedro convexo. ■

4.2.1 POLIEDROS FUNDAMENTALES.

Definición: Un poliedro fundamental convexo para un grupo discreto Γ de isometrías de X es un poliedro convexo P en X cuyo interior es un dominio fundamental localmente finito para Γ .

Sea Γ un grupo discreto de isometrías de X . Por el teorema 4.16 la cerradura \bar{D} de cualquier dominio fundamental convexo, localmente finito D para Γ es un poliedro convexo fundamental para Γ . En particular, la cerradura $\bar{D}(u)$ de cualquier dominio de Dirichlet es un poliedro convexo fundamental para Γ , llamado el *poliedro de Dirichlet* para Γ con centro u .

Ejemplo 1. Sea $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$, considérenoslo como un subgrupo de $I(U^2)$. Entonces Γ es discreto. Sea T el triángulo generalizado hiperbólico con vértices $\pm \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y ∞ . Ver la figura 4.2. Entonces T es el polígono de Dirichlet para Γ con centro ti para cualquier $t > 1$.

1

Sea Γ un grupo discreto de isometrías de X y u un punto de X cuyo estabilizador Γ_u es trivial. Para cada $g \neq Id$ en Γ , definamos

$$P_g(u) = \{x \in X : d(x, u) = d(x, gu)\}.$$

Entonces $P_g(u)$ es el único hiperplano de X que bisecta y que es ortogonal al segmento geodésico en X que une u a gu .

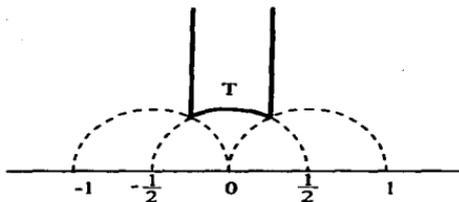


Figura 4.2. Una region fundamental.

Teorema 4.17 Sea S un lado de un dominio de Dirichlet $D(u)$, con centro u para un grupo discreto Γ de isometrías de X . Entonces existe un único elemento $g \neq Id$ de Γ que satisface cada una de propiedades siguientes:

- (1) $\langle S \rangle = P_g(u)$;
- (2) $S = \overline{D}(u) \cap g\overline{D}(u)$;
- (3) $g^{-1}S$ es un lado de $D(u)$.

Demostración:

(1) Ya que $\partial D(u) \subset \cup\{P_g(u) : g \neq Id \text{ en } \Gamma\}$, tenemos que

$$S \subset \cup\{P_g(u) : g \neq Id \text{ en } \Gamma\}.$$

Por tanto

$$S = \cup\{S \cap P_g(u) : g \neq Id \text{ en } \Gamma\}.$$

$S \cap P_g(u)$ es un subconjunto convexo cerrado de X para cada $g \neq Id$ en Γ . Como Γ es numerable, debemos tener:

$$\dim(S \cap P_g(u)) = n - 1,$$

para alguna g ; de otra manera, el volumen de dimensión $n - 1$ de S sería cero. Ya que:

$$\dim(S \cap P_g(u)) = n - 1,$$

tenemos que $\langle S \rangle = P_g(u)$.

Sean g, h elementos de Γ tales que $P_g(u) = \langle S \rangle = P_h(u)$. Como $P_g(u)$ es la bisectriz de un segmento geodésico que va de u a gu , tenemos que $gu = hu$. Pero u sólo es punto fijo de la identidad de Γ , entonces $g = h$. Así, existe un único elemento g de Γ tal que $\langle S \rangle = P_g(u)$.

(2) Por (1) existe un único elemento $g \neq Id$ de Γ tal que $S \subset P_g(u)$. Sea x un punto arbitrario de S . Entonces $d(x, u) = d(x, gu)$. Por el teorema 4.15, tenemos que x es de los puntos más cercanos de Γx a u . También

$$d(g^{-1}x, u) = d(x, gu) = d(x, u).$$

Por tanto, $g^{-1}x$ es también de los más cercanos de Γx a u . Así $g^{-1}x$ está en $\overline{D}(u)$ por el teorema 4.15. Por tanto, $g^{-1}S \subset \overline{D}(u)$. De aquí

$$S \subset \overline{D}(u) \cap g\overline{D}(u),$$

de hecho se da la igualdad por ser $\overline{D}(u) \cap g\overline{D}(u)$ un subconjunto convexo de $\partial D(u)$ y S es maximal como subconjunto convexo de $\partial D(u)$.

Supongamos que h es otro elemento distinto de la identidad de Γ tal que

$$S = \overline{D}(u) \cap h\overline{D}(u).$$

ya que S es un subconjunto maximal convexo de $\partial D(u)$. Supongamos que h es otro elemento distinto de la identidad de Γ tal que

$$S = \overline{D}(u) \cap h\overline{D}(u).$$

Sea x un punto arbitrario de S . Entonces $h^{-1}x$ está en $\overline{D}(u)$ y entonces

$$d(x, u) = d(h^{-1}x, u) = d(x, hu).$$

De aquí x está en $P_h(u)$. Así $g = h$ por la unicidad de g en (1). Así, existe un único $g \neq Id$ en Γ tal que

$$S = \overline{D}(u) \cap g\overline{D}(u).$$

(3) Por (2), existe un elemento único $g \neq Id$ de Γ tal que

$$S = \overline{D}(u) \cap g\overline{D}(u).$$

Entonces

$$g^{-1}S = g^{-1}\overline{D}(u) \cap \overline{D}(u).$$

Por tanto, $g^{-1}S \subset \partial D(u)$. De aquí, existe un lado T de $\overline{D}(u)$ que contiene a $g^{-1}S$. Por (1) existe un único elemento $h \neq Id$ de Γ tal que

$$T = \overline{D}(u) \cap h\overline{D}(u).$$

Así, tenemos

$$g^{-1}S \subset \overline{D}(u) \cap h\overline{D}(u)$$

y

$$S \subset g\overline{D}(u) \cap gh\overline{D}(u).$$

De esta forma

$$S \subset \overline{D}(u) \cap gh\overline{D}(u).$$

Supongamos que $gh \neq Id$. Ya que S es un subconjunto convexo maximal de $\partial D(u)$,

$$S = \overline{D}(u) \cap h\overline{D}(u).$$

Entonces $gh = g$ por (2), y también $h = Id$, lo cual es una contradicción. Luego $gh = Id$ y por tanto $h = g^{-1}$. Así $g^{-1}S = T$.

Supongamos que f es otro elemento distinto de la identidad en Γ tal que $f^{-1}S$ es un lado de $D(u)$, entonces $f^{-1}S = \overline{D}(u) \cap f^{-1}\overline{D}(u)$ y por esto tenemos $S = \overline{D}(u) \cap f\overline{D}(u)$. Luego $f = g$ por (2). De esta manera probamos que existe un único elemento $g \neq Id$ en Γ tal que $g^{-1}S$ es un lado de $D(u)$. ■

Definición. Un poliedro convexo fundamental P para Γ es exacto si y sólo si para cada lado S de P existe un elemento g de Γ tal que $S = P \cap gP$.

Se sigue del teorema 4.17 (2) que cada poliedro de Dirichlet para un grupo discreto es exacto. La figura 4.3 ilustra un polígono P fundamental convexo inexacto para $PSL(2, \mathbb{Z})$. El polígono P es inexacto, ya que los dos lados acotados de P no son ni congruentes ni invariantes izquierdos por un elemento de $PSL(2, \mathbb{Z})$. Ver el siguiente teorema.

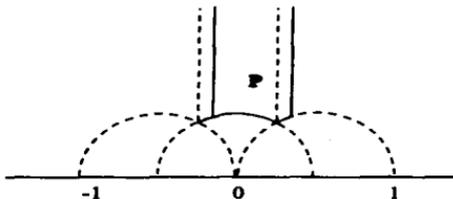


Figura 4.3. Un polígono fundamental convexo no exacto P para $PSL(2, \mathbb{Z})$

Teorema 4.18 Si S es un lado de un poliedro fundamental convexo exacto P para un grupo discreto de isometrías de X , entonces existe un elemento único $g \neq Id$ de Γ tal que

$$S = P \cap gP;$$

más aún, $g^{-1}S$ es un lado de P .

Demostración:

Ya que P es exacto, existe un elemento g de Γ tal que $S = P \cap gP$. Claramente $g \neq Id$. Si $h \neq Id$ es otro elemento de Γ tal que $S = P \cap hP$, entonces gP^o y hP^o se intersecan; por tanto, $gP^o = hP^o$ luego $g = h$. Así existe un elemento único $g \neq Id$ de Γ tal que $S = P \cap gP$. La prueba que $g^{-1}S$ es un lado de P es la misma que la prueba del teorema 4.17 (3). ■

4.3 Tesselaciones

A través de esta sección, $X = \mathbb{S}^n$, E^n , o H^n con $n > 0$.

Definición. Una tesselación de X es una colección \mathcal{P} de poliedros convexos de dimensión n en X tales que

- (1) los interiores de los poliedros en \mathcal{P} son mutuamente ajenos;
- (2) la unión de los poliedros en \mathcal{P} es X ; y
- (3) la colección \mathcal{P} es localmente finita.

Definición. Una tesselación \mathcal{P} de X es exacta si y sólo si cada lado S de un poliedro P en \mathcal{P} es un lado de exactamente dos poliedros P y Q en \mathcal{P} .

Un ejemplo de una tesselación exacta es la de malla de E^2 dada por cuadrados congruentes. Un ejemplo de una tesselación no exacta es la familia de ladrillos en una pared en E^2 formada por rectángulos congruentes.

Definición. Una tesselación regular de X es una tesselación de X que consiste de polítopos regulares.

En el plano sólo hay tres tesselaciones regulares, por triángulos equiláteros, por cuadrados y por hexágonos regulares, estas han sido conocidas desde la antigüedad. Los sólidos platónicos inducen cinco tesselaciones regulares en la esfera, las cuales se conocen desde la edad media. Las tesselaciones de X por poliedros congruentes, nos interesan sobre todo por el siguiente teorema.

Teorema 4.19 Sea P un poliedro convexo de dimensión n en X y sea Γ un grupo de isometrías de X . Entonces Γ es discreto y P es un poliedro (exacto) fundamental convexo para Γ si y sólo si

$$\mathcal{P} = \{gP : g \in \Gamma\}$$

es una teselación (exacta) de X .

Demostración:

Supongamos que Γ es discreto y que P es un poliedro fundamental convexo para Γ . Entonces P es un dominio fundamental localmente convexo para Γ , luego P es un dominio fundamental localmente finito para Γ . De aquí tenemos,

- (1) los miembros de $\{gP^o : g \in \Gamma\}$, son mutuamente ajenos;
- (2) $X = \cup\{gP : g \in \Gamma\}$; y
- (3) la colección \mathcal{P} es localmente finita.

Así \mathcal{P} es una teselación de X . Supongamos que P es exacto. Sea S un lado de P . Entonces existe un único elemento $g \neq Id$ de Γ tal que $S = P \cap gP$; más aún $g^{-1}S$ es un lado de P . Así S es un lado de gP . Por tanto S es un lado de exactamente dos poliedros P y gP de \mathcal{P} . Como \mathcal{P} es Γ -invariante, lo mismo es cierto para cualquier lado de cualquier poliedro en \mathcal{P} . Así \mathcal{P} es exacta.

Recíprocamente, supongamos que \mathcal{P} es una teselación de X . Entonces

- (1) los miembros de $\{gP^o : g \in \Gamma\}$ son mutuamente ajenos;
- (2) $X = \cup\{gP : g \in \Gamma\}$;
- (3) la colección \mathcal{P} es localmente finita.

De esta manera P^o es un dominio fundamental localmente finito para Γ . Por tanto Γ es discreto por el teorema 4.3 y P es un poliedro convexo para el grupo Γ . Ahora supongamos que \mathcal{P} es exacta. Entonces para cada lado S de P , existe una g en Γ de tal manera que S es un lado de gP . De aquí $S \subset P \cap gP$. Ya que $P \cap gP \subset \partial P$ y S es un subconjunto maximal convexo de ∂P , tenemos que $S = P \cap gP$. Así P es exacto. ■

Definición. Una colección \mathcal{P} de poliedros convexos de dimensión n en X se dice que es conexa si y sólo si para cada par P, Q en \mathcal{P} existe una sucesión finita P_1, \dots, P_m en \mathcal{P} tal que $P = P_1$, $P_m = Q$, P_{i-1} y P_i comparten un lado en común para cada $i > 1$.

Teorema 4.20 Cada teselación exacta de X es conexa.

Demostración:

La prueba es por inducción en la dimensión n de X . El teorema es cierto si $n = 1$, luego supongamos que $n > 1$ y que el teorema es cierto en la dimensión $n - 1$. Sea \mathcal{P} una teselación exacta de X y sea P un poliedro en \mathcal{P} . Sea U la unión de todos los poliedros $Q \in \mathcal{P}$ para los cuales existe una sucesión finita P_1, \dots, P_m en \mathcal{P} tal que $P = P_1$, $Q = P_m$, P_{i-1} y P_i comparten un lado en común para cada $i > 1$. Entonces U es cerrado ya que \mathcal{P} es localmente finita.

Mostraremos que U es abierto en X . Sea x un punto en U . Escojamos una r tal que $0 < r < \frac{\pi}{2}$ y que $C(x, r)$ corta sólo a los poliedros de \mathcal{P}

que contienen a x . Sea Q un poliedro en \mathcal{P} que contiene a x . Entonces r es menor que la distancia de x a cualquier lado de Q que no contiene a x . Por el teorema 3.17, el conjunto $Q \cap S(x, r)$ es un poliedro de dimensión $n-1$ convexo en $S(x, r)$; más aún, si $S(x)$ es el conjunto de lados de Q que contienen a x , entonces $\{T \cap S(x, r) : T \in S(x)\}$ es el conjunto de lados de $Q \cap S(x, r)$. Por tanto \mathcal{P} se restringe a una tesselación exacta \mathcal{T} de $S(x, r)$. Por hipótesis de inducción, \mathcal{T} es conexo. Consecuentemente cada poliedro en \mathcal{P} que contiene a x está contenido en U . Luego U contiene a $B(x, r)$. Así U es abierto y cerrado en X . Como X es conexo, $U = X$. De esta manera \mathcal{P} es conexa. ■

Teorema 4.21 *Sea P un poliedro convexo exacto para un grupo discreto Γ de isometrías de X . Entonces Γ está generado por el conjunto*

$$\Phi = \{g \in \Gamma : P \cap gP \text{ es un lado de } P\}.$$

Demostración:

Tenemos por los teoremas anteriores que la tesselación $\mathcal{P} = \{gP : g \in \Gamma\}$ de X es exacta y conexa. Sea g un elemento arbitrario de Γ . Entonces existe una sucesión finita de elementos g_1, \dots, g_m de Γ con $P = g_1P$, $g_mP = gP$, y $g_{i-1}P$ comparte un lado con g_iP para cada $i > 1$. Esto implica que $g_1 = Id$, $g_m = g$, y que P comparte un lado con $g_{i-1}^{-1}g_iP$ para cada $i > 1$. Podemos suponer que $g_{i-1} \neq g_i$ para cada $i > 1$. Entonces $g_{i-1}^{-1}g_i$ está en Φ para cada $i > 1$. Como $g = g_1(g_{1-1}^{-1}g_2)\dots(g_{m-1}^{-1}g_m)$, tenemos que Φ genera a Γ . ■

Corolario 1. *Si un grupo discreto Γ de isometrías de X tiene un poliedro fundamental convexo, exacto y con un número finito de lados, entonces es finitamente generado.*

Demostración:

Por el teorema 4.18 el conjunto de lados de S de P está en correspondencia uno a uno con el conjunto $\Phi = \{g \in \Gamma : P \cap gP \in S\}$. Por tanto Φ es finito y entonces Γ es finitamente generado. ■

4.3.1 PAREO DE LADOS.

Sea S un lado de un poliedro convexo, fundamental exacto P para un grupo discreto Γ de isometrías de X , por el teorema 4.18 existe un elemento único g_S de Γ tal que

$$S = P \cap g_S(P).$$

Más aún $S' = g_S^{-1}(S)$ es un lado de P . El lado S' se dice que está *pareado* con el lado S por el elemento g_S de Γ . Como

$$S' = P \cap g_S^{-1}(S),$$

tenemos que $g_{S'} = g_S^{-1}$. Por tanto, S está pareado con S' por g_S^{-1} y $S'' = S$. El Γ -pareo de P está definido como el conjunto

$$\Phi = \{g_S : S \text{ es un lado de } P\}.$$

Los elementos de Φ se llaman *transformaciones de pareo de lados* de P .

Dos puntos x, x' de P se dicen que están pareados por Φ , y escribimos $x \simeq x'$, si y sólo si existe un lado S de P tal que x está en S , x' está en S' y $g_S(x') = x$. Si $g_S(x') = x$, entonces $g_{S'}(x) = x'$. Por tanto $x \simeq x'$ si y sólo si $x' \simeq x$. Dos puntos x, y de P se dice que están relacionados por Φ , y escribimos $x \sim y$, si $x = y$ o existe una sucesión finita x_1, \dots, x_m de puntos tales que

$$x = x_1 \simeq \dots \simeq x_m = y.$$

El estar relacionados por Φ es claramente una relación de equivalencia en P . Las clases de equivalencia en P son los llamados ciclos de Φ . Si x está en P , denotamos el ciclo de Φ que contiene a x por $[x]$.

Teorema 4.22 *Si P es un poliedro fundamental convexo exacto, de un grupo discreto de isometrías de X , entonces para cada punto x de P ,*

- (1) *el ciclo $[x]$ es finito, y*
- (2) *$[x] = P \cap \Gamma_x$.*

Demostración:

(1) Se sigue de la definición de un ciclo que $[x] \subset P \cap \Gamma_x$. Por tanto $[x]$ es finito por el teorema 4.9.

(2) Sea y en $P \cap \Gamma_x$. Entonces existe una f en Γ tal que $y = fx$. De aquí, x está en $f^{-1}P$. Como P es localmente finito, existe una $r > 0$ tal que $B(x, r)$ corta sólo finitamente a las Γ -imágenes de P , digamos g_1P, \dots, g_mP . Tomando una r más pequeña, podemos pensar que x está en g_iP para cada i , aún más, podemos pedir que $r < \pi/2$ y que r es menor que la distancia de x a cualquier lado de g_iP que no contiene a x . Para cada i , el conjunto $g_iP \cap S(x, r)$ es un poliedro convexo de dimensión $n-1$ en la esfera $S(x, r)$ por el teorema 3.17. Además

$$T = \{g_iP \cap S(x, r) : i = 1, \dots, m\}$$

es una teselación exacta de $S(x, r)$. Por el teorema 4.20, la teselación T es conexa. Por tanto, existen elementos f_1, \dots, f_ℓ de Γ tales que x está en f_iP para cada i , $P = f_1^{-1}P$, $f^{-1}P = f_\ell^{-1}P$, y $f_i^{-1}P$ comparte un lado con $f_{i-1}^{-1}P$ para cada $i > 1$. Esto implica que $f_1 = Id$, $f_\ell = f$, y que P comparte un lado S_i en común con $f_{i-1}f_i^{-1}P$ para cada $i > 1$. Podemos suponer que $f_{i-1} \neq f_i$ para cada $i > 1$. Entonces $f_{i-1}f_i^{-1} = g_S$, para cada $i > 1$. Sea $x_1 = x$ y $x_i = f_i x$ para cada $i > 1$. Como x está en $f_i^{-1}P$, tenemos que $f_i x$ está en P . De aquí x_i está en P para cada i . Luego

$$g_{S_i}(x_i) = f_{i-1}f_i^{-1}(x_i) = f_{i-1}x = x_{i-1}.$$

De aquí x_{i-1} está en $P \cap g_{S_i}(P)$. Por tanto x_{i-1} está en S_i y x_i está en S_i' para cada $i > 1$. De aquí tenemos

$$x = x_1 \simeq \dots \simeq x_\ell = x.$$

Por tanto, $x \sim y$. Así $[x] = P \cap \Gamma_x$. ■

4.3.2 ÁNGULOS DIÉDRICOS.

Sea P un poliedro convexo de dimensión m en X . Los lados S y T de P se dicen adyacentes si y sólo si, $X = S^1$ y S, T son lados de P o $n > 1$ y $S \cap T$ es un lado de S y de T . En particular el único lado de un semicírculo en S^1 es adyacente a sí mismo.

Sean S y T lados de P . Ahora definimos el *ángulo diédrico* $\theta(S, T)$ de P entre S y T . Primero que todo, si $S = T$, entonces $\theta(S, T)$ se define como π . Si S y T son distintos y no son lados adyacentes de P , entonces a $\theta(S, T)$ lo definimos como 0. Supongamos ahora que S y T son adyacentes. Si $X = S^1$, entonces $\theta(S, T)$ está definido como el ángulo entre los puntos extremos de P .

Supongamos que $n > 1$. Entonces los hiperplanos $\langle S \rangle$ y $\langle T \rangle$ subdividen a X en cuatro regiones, una de las cuales contiene a P ; más aún,

$$\langle S \rangle \cap \langle T \rangle = \langle S \cap T \rangle.$$

Sea x cualquier punto en $S \cap T$ y sea $\lambda, \mu : \mathbb{R} \rightarrow X$ líneas geodésicas tales que

- (1) $\lambda(0) = X = \mu(0)$;
- (2) λ y μ son normales a $\langle S \rangle$ y $\langle T \rangle$, respectivamente; y
- (3) $\lambda'(0)$ y $\mu'(0)$ están dirigidos hacia los semiespacios respectivos de X que contienen a P .

Sea α el ángulo entre λ y μ en el punto x . Claramente α no depende de la elección de x . El *ángulo diédrico* de P entre S y T se define como el ángulo

$$\theta(S, T) = \pi - \alpha.$$

Ver la figura 4.4. Notemos que como $0 < \alpha < \pi$, y $0 < \theta(S, T) < \pi$. Tenemos que

$$0 \leq \theta(S, T) < \pi.$$

El ángulo diédrico $\theta(S, T)$ se dice que es propio si y sólo si

$$0 < \theta(S, T) < \pi.$$

Notemos que $\theta(S, T)$ es propio si y sólo si S y T son lados adyacentes distintos de P .

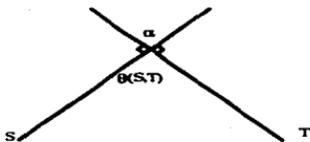


Figura 4.4. El ángulo diédrico $\theta(S, T)$ entre lados adyacentes

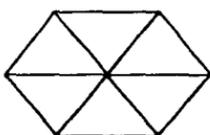


Figura 4.5. Un ciclo de triángulos equiláteros en E^2

4.3.3 CICLOS DE POLIEDROS.

Definición: Un ciclo de poliedros en X es un conjunto finito

$$C = \{P_0, \dots, P_{m-1}\}$$

de poliedros convexos de dimensión n en X tales que para cada $i \pmod{m}$,

(1) existen lados adyacentes S_i y S_{i+1} de P_i tal que $P_i \cap P_{i+1} = S_{i+1}$;

(2) $\sum_{i=0}^{m-1} \theta(S_i, S_{i+1}) = 2\pi$; y

(3) si $n > 1$, entonces $R = \bigcap_{i=0}^{m-1} P_i$ es un lado de S_i para cada i .

Ver la figura 4.5. Notemos que una colección C de segmentos geodésicos en S^1 es un ciclo si y sólo si C es una tesselación de S^1 .

Teorema 4.23 Sea R un eslabón de un poliedro P de una tesselación \mathcal{P} de X . Entonces el conjunto de todos los poliedros en \mathcal{P} que contienen a R forman un ciclo cuya intersección es R .

Demostración:

Sea S uno de los lados de P que contienen a R . Definimos las sucesiones de manera inductiva

$$P_0, P_1, \dots \text{ y } S_0, S_1, \dots$$

tales que para cada i ,

- (1) P_i está en \mathcal{P} y S_i es un lado de P_i ;
- (2) $P_0 = P$ y $S_0 = S$;
- (3) R es un lado de S_i ;
- (4) S_i y S_{i+1} son lados adyacentes de P_i ; y
- (5) $P_i \cap P_{i+1} = S_{i+1}$.

R está contenido en sólo un número finito de poliedros en \mathcal{P} , ya que \mathcal{P} es localmente finito. Se deduce que la sucesión $\{P_i\}$ involucra sólo a un número finito de poliedros distintos. Evidentemente, P_0, P_1, \dots, P_{k-1} son distintos si

$$\sum_{r=0}^{m-1} \theta(S_r, S_{r+1}) \leq 2\pi.$$

De aquí, la primera repetición de la sucesión ocurre en el primer poliedro P_m tal que

$$\sum_{i=0}^m \theta(S_i, S_{i+1}) > 2\pi.$$

Claramente P_m interseca al interior de P_0 y entonces $P_m = P_0$. De aquí $S_m = S_0$ y

$$\sum_{i=0}^m \theta(S_i, S_{i+1}) = 2\pi.$$

Como

$$R = S_i \cap S_{i+1} \text{ para cada } i,$$

tenemos que

$$R = \bigcap_{i=0}^{m-1} P_i.$$

Por tanto $\{P_0, \dots, P_{m-1}\}$ es un ciclo de poliedros cuya intersección es R .

Sea Q cualquier poliedro en \mathcal{P} que contiene R . Entonces claramente Q corta al interior de $\cup_{i=0}^{m-1} P_i$. Esto implica que Q corta al interior de P_i para alguna i , y luego $Q = P_i$. Así $\{P_0, \dots, P_{m-1}\}$ es el conjunto de poliedros en \mathcal{P} que contienen a R . ■

4.3.4 RELACIONES DE CICLOS.

Sea P un poliedro fundamental convexo exacto, para un grupo discreto Γ de isometrías de X . Consideraremos ciertas relaciones en Γ que se pueden derivar de las aristas y lados de P .

Sea R un lado de un lado S de P . Definamos la sucesión $\{S_j\}_{j=1}^{\infty}$ de lados de P mediante

- (1) Sea $S_1 = S$.
- (2) Sea S_2 el lado de P adyacente a S'_1 tal que $g_{S_1}(S'_1 \cap S_2) = R$.
- (3) Sea S_{i+1} el lado de P adyacente a S'_i tal que

$$g_{S_i}(S'_i \cap S_{i+1}) = S'_{i-1} \cap S_i \text{ para cada } i > 1.$$

Llamamos a $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ la sucesión de lados de P determinados por R y S .

Teorema 4.24 *Sea R un lado de un lado de S un poliedro fundamental convexo exacto P para un grupo discreto Γ de isometrías de X , y sea $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ la sucesión de lados de P determinados por R y S . Entonces existe un entero mínimo ℓ y un entero positivo k tal que*

- (1) $S_{i+\ell} = S_i$ para cada i ,
- (2) $\sum_{i=1}^{\ell} \theta(S_i, S_{i+1}) = 2\pi/k$, y
- (3) el elemento $g_{S_1} g_{S_2} \dots g_{S_{i+\ell}}$ tiene orden k .

Demostración:

Definamos una sucesión $\{g_i\}_{i=0}^{\infty}$ de elementos de Γ por $g_0 = Id$ y

$$g_i = g_{S_1} g_{S_2} \dots g_{S_i} \text{ para cada } i > 0.$$

A continuación probaremos que $\{g_i P\}_{i=0}^{\infty}$ forman un ciclo de poliedros en X . Como S'_i y S_{i+1} son lados adyacentes de P para cada i , tenemos que $g_i S'_i$ y $g_i S_{i+1}$ son lados adyacentes de $g_i P$ para cada i ; más aún,

$$g_i P \cap g_{i+1} P = g_i (P \cap g_{S_{i+1}} P) = g_i S_{i+1}$$

y $g_i S_{i+1} = g_{i+1} S'_{i+1}$ para cada $i > 1$. Luego, para cada $i > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} g_i S_{i+1} \cap g_{i+1} S_{i+2} &= g_{i+1} S'_{i+1} \cap g_{i+1} S_{i+2} \\ &= g_{i+1} (S'_{i+1} \cap S_{i+2}) = g_{i+1} (S'_i \cap S_{i+1}) = g_{i-1} S_i \cap g_i S_{i+1}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} g_i P = S_1 \cap g_{S_1}(S_2) = R.$$

Por el teorema 4.23, existe un entero $m > 0$ tal que $\{g_i P\}_{i=0}^{m-1}$ es un ciclo de poliedros. Así $g_{i+m} P = g_i P$ para cada i , y entonces $g_{i+m} = g_i$ para cada i . Ya que

$$\begin{aligned} g_{i-1}S_{i+m} &= g_{i+m-1}S_{i+m} = g_{i+m-1}P \cap g_{i+m}P \\ &= g_{i-1}P \cap g_iP = g_{i-1}S_i, \end{aligned}$$

encontramos que $S_{i+m} = S_i$ para cada i .

Sea ℓ el entero positivo mínimo tal que $S_{i+\ell} = S_i$ para cada i . Entonces $k = m/\ell$ es un entero positivo. Como

$$\sum_{i=1}^m \theta(g_i S'_i, g_i S_{i+1}) = 2\pi,$$

tenemos que

$$k \sum_{i=1}^{\ell} \theta(S'_i, S_{i+1}) = 2\pi.$$

Más aún, como $g_m = Id$, tenemos que $g_\ell^k = Id$, ya que $g_\ell \neq Id$ para $1 < j < m$, deducimos que k es el orden de g_ℓ . ■

Sea R el lado de un lado S de un poliedro fundamental convexo exacto P para un grupo discreto de isometrías de X , y sea $\{S_i\}_{i=0}^{\infty}$ la sucesión de lados de P determinada por R y S . Por el teorema 4.24, existe un mínimo entero positivo ℓ tal que $S_{i+\ell} = S_i$ para cada i . La sucesión finita $\{S_i\}_{i=0}^{\ell}$ es llamada el *ciclo de lados* de P determinados por R y S . El elemento $g_{S_1} g_{S_2} \dots g_{S_\ell}$ de Γ es la llamada transformación cíclica de los lados $\{S_i\}_{i=1}^{\ell}$. Por el teorema 4.24, la transformación cíclica $g_{S_1} g_{S_2} \dots g_{S_\ell}$ tiene orden finito k . La relación

$$(g_{S_1} g_{S_2} \dots g_{S_\ell})^k = 1$$

en Γ es llamada la *relación cíclica* de Γ determinada por el ciclo de lados $\{S_i\}_{i=1}^{\ell}$. Para cada lado S de P , la relación

$$g_S g_{S'} = 1$$

es llamada la *relación de pareo de lados* determinada por el lado S .

Nota: Las relaciones cíclicas junto con las relaciones de pareo de lados forman un conjunto completo de relaciones para los generadores

$$\Phi = \{g_S : S \text{ es un lado de } P\}$$

del grupo Γ ; esto es, cualquier relación entre los generadores Φ puede ser derivada de estas relaciones.

Ejemplo 1. Sean L, S, R los tres lados que ocurren de la izquierda a la derecha en el polígono de Dirichlet T para $PSL(2, \mathbb{Z})$ en la figura 4.2. Entonces

$$g_R(z) = z + 1 \text{ y } g_S(z) = -1/z.$$

Así $R' = L$, $S' = S$, y $L' = R$. Observemos que $\{S, R\}$ es un ciclo de lados de T cuya transformación cíclica $g_S g_R$ tiene orden tres. Más aún g_S tiene orden dos. Las relaciones $(g_S g_R)^3 = 1$ y $g_S^2 = 1$ forman un conjunto completo de relaciones para los generadores $\{g_S, g_R\}$ de $PSL(2, \mathbb{Z})$.

5

Grupos Discretos Clásicos.

En este capítulo, estudiamos algunos grupos discretos clásicos de isometrías de S^n , E^n y H^n , a menos que se afirme lo contrario representaremos a estos espacios genericamente por X y n será mayor que 0. Comenzamos con la teoría de grupos discretos de reflexiones en poliedros o en simplejos. En la última sección estudiaremos los de grupos cristalográficos.

5.1 Grupos de Reflexiones.

Lema 1. *Sea x un punto dentro de la horoesfera Σ de H^n . Entonces la distancia más corta de x a Σ se alcanza a lo largo de la única línea hiperbólica que pasa por x y que es Lorentz ortogonal a Σ .*

Demostración:

Usaremos el modelo de la bola conforme B^n del espacio hiperbólico, con la ayuda de una isometría podemos suponer que x es el origen. Entonces la distancia más corta de 0 a Σ se alcanza sobre el único diámetro de B^n ortogonal a Σ . Ver figura 5.1. ■

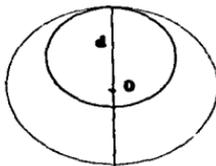


Figura 5.1. Una figura

Sea S un lado de un poliedro convexo P de dimensión n en X . La reflexión de X en el lado S de P es la reflexión de X en el hiperplano $\langle S \rangle$ generado por S .

Teorema 5.1 Sea G el grupo generado por las reflexiones de X en los lados de un poliedro convexo P de dimensión n , de volumen finito y con un número finito de lados. Entonces

$$X = \cup\{gP : g \in G\}.$$

Demostración:

La prueba es por inducción en la dimensión n . El teorema es cierto cuando $n = 1$, supongamos que $n > 1$, y que el teorema es cierto cuando la dimensión es $n - 1$. Sea x un punto de P , $G(x)$ el subgrupo de G generado por todas las reflexiones de X en los lados de P que contienen a x , y $r(x)$ un número real tal que $0 < r(x) < \pi/2$ y que la bola $C(x, r(x))$ corta solo a los lados de P que contienen a x . Por el teorema 3.17, el conjunto $P \cap S(x, r(x))$ es un poliedro convexo de dimensión $n - 1$ en la esfera $S(x, r(x))$. De la hipótesis de inducción, tenemos

$$S(x, r(x)) = \cup\{g(P \cap S(x, r(x))) : g \in G\}.$$

ya que P es convexo, deducimos que

$$B(x, r(x)) \subset \cup\{gP : g \in G(x)\}.$$

Por los teoremas 3.23 y 3.24, el poliedro P tiene solo un número finito de vértices ideales, digamos v_1, \dots, v_m . Para cada i , sea B_i la horobola basada en v_i tal que $\overline{B_i}$ corta solo a los lados incidentes con v_i . Para cada i , sea G_i el subgrupo de G generado por todas las reflexiones de X en los lados de P que inciden en v_i . Por el teorema 3.21, el conjunto $P \cap \partial B_i$ es un poliedro compacto euclidiano convexo de dimensión $n - 1$ en la horoesfera ∂B_i . Deducimos, de la hipótesis inducción, que

$$B_i \subset \cup\{gP : g \in G_i\}.$$

Por lema 1, existe una horobola B'_i basada en v_i tal que $B'_i \subset B_i$ y $\text{dist}(B'_i, \partial B_i) = 1$ para cada i . Definamos

$$P_0 = P - \bigcup_{i=1}^m B'_i.$$

Así definido P_0 es compacto por el teorema 3.24. Sea $\ell > 0$ el número de Lebesgue para la cubierta abierta $\{B(x, r(x)) : x \in P_0\}$ de P_0 tal que $\ell < 1$. Sea

$$U = \cup\{gP : g \in G\}.$$

Decimos que $N(P, \ell) \subset U$. Observemos que $N(P_0, \ell) \subset U$. Sea x un punto de $P \cap B'_i$. Entonces tenemos

$$B(x, \ell) \subset B_i \subset U.$$

De aquí $N(B'_i, \ell) \subset U$ para cada i . Por tanto $N(P, \ell) \subset U$ como se dijo. Como U es G -equivariante, deducimos que $N(gP, \ell) \subset U$ para cada g en G . Por tanto $N(U, \ell) \subset U$, y entonces $U = X$.

Sea P un poliedro fundamental convexo, exacto para un grupo discreto Γ de isometrías de X . Entonces para cada lado S de P , existe un único elemento g_S de Γ tal que

$$S = P \cap g_S(P).$$

El grupo Γ está definido como el grupo discreto de reflexiones, con respecto al poliedro P , si y sólo si g_S es la reflexión de X en el hiperplano $\langle S \rangle$ para cada S de P . ■

Definición: Un ángulo α es un submúltiplo de un ángulo β si y sólo si existe un entero positivo k tal que $\alpha = \beta/k$ o $\beta = \alpha/\infty = 0$.

Teorema 5.2 Sea Γ un grupo discreto de reflexiones con respecto al poliedro P . Entonces todos los ángulos diédricos de P son submúltiplos de π ; más aún, si g_S y g_T son las reflexiones en los lados adyacentes S y T de P , y $\theta(S, T) = 2\pi/k$, entonces $g_S g_T$ tiene orden k en Γ .

Demostración:

Sean S, T lados adyacentes de P . Entonces $\{S, T\}$ es un ciclo de lados de P . Por el teorema 4.24, existe un entero positivo k tal que

$$2\theta(S, T) = 2\pi/k$$

y el elemento $g_S g_T$ tiene orden k en Γ . ■

Teorema 5.3 Sea P un poliedro convexo de dimensión n con un número finito de lados en X , con volumen finito, todos de cuyos ángulos diédricos son submúltiplos de π . Entonces el grupo Γ generado por las reflexiones de X en los lados de P es un grupo discreto de reflexiones con respecto al poliedro.

Demostración:

(1) La prueba es por inducción en n . El teorema es cierto cuando $n = 1$, así supongamos que $n > 1$ y el teorema es cierto en la dimensión $n - 1$. La idea de la prueba es construir un espacio topológico \bar{X} homeomorfo a X en el que el teorema se cumpla claramente y de ahí inducirlo mediante un argumento de espacio cubriente.

(2) Sea $\Gamma \times P$ el producto cartesiano de Γ y de P . Consideremos en Γ la topología discreta y en $\Gamma \times P$ la topología producto inducida por la topología en P . Entonces $\Gamma \times P$ es la suma topológica de los subespacios

$$\{\{g\} \times P : g \in \Gamma\}.$$

Más aún, la función $(g, x) \rightarrow gx$ es un homeomorfismo de $\{g\} \times P$ sobre gP para cada g en Γ .

(3) Sea \mathcal{S} el conjunto de lados de P y para cada $S \in \mathcal{S}$, sea g_S la reflexión de X en el lado S de P , y $\Phi = \{g_S : S \in \mathcal{S}\}$. Dos puntos (g, x) y (h, y) de $\Gamma \times P$ se dicen relacionados por Φ , escrito $(g, x) \simeq (h, y)$, si y sólo si $g^{-1}h$ está en Φ y $gx = hy$. Supongamos que $(g, x) \simeq (h, y)$, entonces existe un lado S de P tal que $g^{-1}h = g_S$. Como $g_S^{-1} = g_S$, tenemos que $(h, y) \simeq (g, x)$, además, x está en $P \cap g_S(P) = S$, y de esta manera $x = g_S x = y$.

Dos puntos (g, x) y (h, y) de $\Gamma \times P$ se dicen relacionados por Φ , escrito $(g, x) \sim (h, y)$, si y sólo si existe una sucesión finita $((g_0, x_0), \dots, (g_k, x_k))$, de puntos de $\Gamma \times P$ tales que

$$(g, x) = (g_0, x_0), (g_k, x_k) = (h, y), y \\ (g_{i-1}, x_{i-1}) \simeq (g_i, x_i) \text{ para } i = 1, \dots, k.$$

El estar relacionados por Φ es una relación de equivalencia en $\Gamma \times P$; más aún, si $(g, x) \sim (h, y)$, entonces $x = y$. Sea $[g, x]$ la clase de equivalencia de (g, x) y sea \bar{X} el espacio cociente de $\Gamma \times P$ en clases de equivalencia.

(4) Si $(g, x) \simeq (h, x)$, entonces claramente $(fg, x) \simeq (fh, x)$, para cada f en Γ . De aquí Γ actúa en \bar{X} mediante $f[g, x] = [fg, x]$. Para un subconjunto A de P , hagamos

$$[A] = \{\{1, x\} : x \in A\}.$$

Si g está en Γ , tenemos

$$g[A] = \{\{g, x\} : x \in A\}.$$

Si (g, x) está en $\Gamma \times P^o$, entonces $[g, x] = \{(g, x)\}$. Consecuentemente, los miembros de $\{g[P^o] : g \in \Gamma\}$ son mutuamente ajenos en \bar{X} .

(5) Mostraremos que \bar{X} es conexo. Sea $\eta : \Gamma \times P \rightarrow \bar{X}$ la función cociente. Como η manda a $\{g\} \times P$ sobre $g[P]$, tenemos que $g[P]$ es conexo. En vista del hecho

$$\bar{X} = \cup \{g[P] : g \in \Gamma\},$$

es suficiente mostrar que para cualquier g en Γ , existe una sucesión finita g_0, \dots, g_k en Γ tal que $[P] = g_0[P]$, $g_k[P] = g[P]$, y $g_{i-1}[P]$ y $g_i[P]$ se intersecan para cada $i > 0$. Como Γ está generado por los elementos de Φ , existen lados S_i de P tal que $g = g_S \dots g_{S_k}$. Sea $g_0 = 1$ y $g_i = g_{S_1} \dots g_{S_i}$, para $i = 1, \dots, k$. Como

$$S_i = P \cap g_{S_i}(P),$$

tenemos que

$$[S_i] \subset [P] \cap g_{S_i}[P].$$

Así \tilde{X} es conexo.

(6) Sea x un punto de P , sea $S(x)$ el conjunto de todos los lados de P que contienen a x , y sea $\Gamma(x)$ el subgrupo de Γ generado por los elementos de $\{g_S : S \in S(x)\}$. Mostraremos que $\Gamma(x)$ es finito. Sea r un número real tal que $0 < r < \pi/2$ y menor que la distancia de x a cualquier lado de P que no contiene a x . Por el teorema 3.17, tenemos que $P \cap S(x, r)$ es un poliedro convexo de dimensión $n - 1$ en la esfera $S(x, r)$ y

$$\{T \cap S(x, r) : T \in S(x)\}$$

es el conjunto de lados de $P \cap S(x, r)$. Claramente $P \cap S(x, r)$ es compacto y todos los ángulos diédricos de $P \cap S(x, r)$ son los submúltiplos de π . Por la hipótesis de inducción, $\Gamma(x)$ se restringe a un grupo discreto de reflexiones con respecto a $P \cap S(x, r)$. De aquí $\Gamma(x)$ es finito ya que $S(x, r)$ es compacto.

(7) Lo que sigue es mostrar que

$$[1, x] = \{(g, x) : g \in \Gamma(x)\}.$$

Sea (g, x) en $[1, x]$. Entonces existe una sucesión finita g_0, \dots, g_k en Γ tal que $(1, x) = (g_0, x)$, $(g_k, x) = (g, x)$, y $(g_{i-1}, x) \simeq (g_i, x)$ para todo $i > 0$. De aquí $g_i x = x$ para toda i , y existe un lado S_i en $S(x)$ tal que $g_i = g_{i-1} g_{S_i}$ para cada $i = 1, \dots, k$. Por tanto, $g = g_S \dots g_{S_k}$. Así g está en $\Gamma(x)$. Consecuentemente

$$[1, x] \subset \{(g, x) : g \in \Gamma(x)\}.$$

Sea g un elemento de $\Gamma(x)$. Ya que $S(x)$ está generado por el conjunto $\{g_S : S \in S(x)\}$, existen lados S_i en $S(x)$ tales que $g = g_{S_1} \dots g_{S_k}$. Sea $g_0 = 1$ y $g_i = g_{S_1} \dots g_{S_i}$, para toda i . Como $g_{i-1}^{-1} g_i = g_{S_i}$, tenemos que $(g_{i-1}, x) \simeq (g_i, x)$ para toda $i > 0$. De aquí $(1, x) \sim (g, x)$. Así

$$[1, x] = \{(g, x) : g \in \Gamma(x)\}.$$

(8) Para cada punto x de P y número real r como en (6), definamos

$$B(x, r) = \bigcup_{g \in \Gamma(x)} g[P \cap B(x, r)].$$

Supongamos que g está en $\Gamma(x)$ y y está en $P \cap B(x, r)$. Entonces $S(y) \subset S(x)$, y $\Gamma(y) \subset \Gamma(x)$. Como $[1, y] = \{(h, y) : h \in \Gamma(y)\}$. Tenemos que $[g, y] = \{(gh, y) : h \in \Gamma(y)\}$. Consecuentemente $\eta^{-1}(\tilde{B}(x, r)) = \bigcup_{g \in \Gamma(x)} \{g\} \times (P \cap B(x, r))$. De aquí $\tilde{B}(x, r)$ es una vecindad abierta de $[1, x]$ en \tilde{X} ; más aún $\tilde{B}(x, r)$ interseca $g[P]$ si y sólo si g está en $\Gamma(x)$.

(9) Sea $\kappa : \tilde{X} \rightarrow X$ la función definida por $\kappa[g, x] = gx$. Mostraremos que κ manda $\tilde{B}(x, r)$ sobre $B(x, r)$. Por el teorema 4.19, tenemos que

$$\{gP \cap S(x, r) : g \in \Gamma(x)\}$$

es una teselación de $S(x, r)$. Consecuentemente, los miembros de

$$\{gP \cap B(x, r) : g \in \Gamma(x)\}$$

son mutuamente ajenos y

$$B(x, r) = \bigcup_{g \in \Gamma(x)} (gP \cap B(x, r)).$$

Como κ manda a $g[P \cap B(x, r)]$ sobre $gP \cap B(x, r)$ para cada $g \in \Gamma(x)$, tenemos que κ envía a $\tilde{B}(x, r)$ sobre $B(x, r)$.

(10) Mostraremos que κ manda $\tilde{B}(x, r)$ inyectivamente en $B(x, r)$. Sean g, h elementos en $\Gamma(x)$, sean y, z elementos en $P \cap B(x, r)$, y supongamos que $\kappa[g, y] = \kappa[h, z]$. Entonces $gy = hz$. De esto se deduce que P y $g^{-1}hP$ se intersecan en $y = g^{-1}hz$. Como y esta en $P \cap B(x, r)$, tenemos que $\Gamma(y) \subset \Gamma(x)$. Existe una $s > 0$ tal que $B(y, s) \subset B(x, r)$, y $\tilde{B}(y, s) = \bigcup_{f \in \Gamma(x)} (fP \cap B(y, s))$. De aquí $g^{-1}hP \cap B(y, s)$ interseca $fP \cap B(y, s)$ para algún $f \in \Gamma(y)$. Pero los miembros de

$$\{fP \cap B(x, r) : f \in \Gamma(x)\}$$

son mutuamente ajenos. Por tanto $g^{-1}h = f$ para algún $f \in \Gamma(y)$. Luego

$$\begin{aligned} y &= f^{-1}y = h^{-1}gy = z, \\ [g, y] &= g[1, y] = g[g^{-1}h, y] = [h, y] = [h, z]. \end{aligned}$$

Entonces κ manda $\tilde{B}(x, r)$ biyectivamente sobre $B(x, r)$.

(11) Probaremos que κ manda $\tilde{B}(x, r)$ homeomórficamente sobre $B(x, r)$. Sea $g \in \Gamma(x)$. Como $\kappa\eta$ manda a $\{g\} \times P \cap B(x, r)$ homeomórficamente sobre $gP \cap B(x, r)$, tenemos que κ manda $[gP \cap B(x, r)]$ homeomórficamente sobre $gP \cap B(x, r)$. Como

$$B(x, r) = \bigcup_{g \in \Gamma(x)} (gP \cap B(x, r)),$$

y cada conjunto $gP \cap B(x, r)$ es cerrado en $B(x, r)$, y $\Gamma(x)$ es finito, deducimos que κ manda a $\tilde{B}(x, r)$ homeomórficamente sobre $B(x, r)$.

(12) Sea g un elemento de Γ . Entonces la multiplicación por la izquierda por g es un homeomorfismo de \tilde{X} y que lo es en $\Gamma \times P$. De aquí $g\tilde{B}(x, r)$ es una vecindad abierta de $[g, x]$ en \tilde{X} . Como $\kappa(g\tilde{B}(x, r)) = g\kappa(\tilde{B}(x, r))$, tenemos que κ manda $g\tilde{B}(x, r)$ homeomórficamente sobre $B(x, r)$. Así κ es un homeomorfismo local.

(13) Sigue mostrar que \tilde{X} es Hausdorff. Sean

$$\begin{aligned} [g, x] &= \{(g_1, x), \dots, (g_k, x)\}, \\ [h, y] &= \{(h_1, y), \dots, (h_k, y)\} \end{aligned}$$

puntos distintos de \tilde{X} . Entonces estos son subconjuntos ajenos de $\Gamma \times P$. Escogamos a r como antes de tal forma que κ manda $\tilde{B}(x, r)$ homeomórficamente sobre $\tilde{B}(y, r)$. Podemos escoger r suficientemente pequeña de tal manera que

$$\eta^{-1}(g\bar{B}(x, r)) = \bigcup_{i=1}^k \{g_i\} \times (P \cap B(x, r)),$$

$$\eta^{-1}(h\bar{B}(y, r)) = \bigcup_{j=1}^{\ell} \{h_j\} \times (P \cap B(y, r))$$

son puntos distintos de $\Gamma \times P$, ya que $g_i \neq h_j$, entonces $\{g_i\} \times P$ y $\{h_j\} \times P$ son ajenos; mientras que si $x \neq y$, podemos escoger una r suficientemente pequeña tal que $B(x, r)$ y $B(y, r)$ son ajenos. Por tanto $g\bar{B}(x, r)$ y $h\bar{B}(y, r)$ son vecindades ajenas de $[g, x]$ y $[h, y]$, respectivamente, en \bar{X} . Así \bar{X} es de Hausdorff.

(14) Sea v un vértice ideal de P , sea $S(v)$ el conjunto de todos los lados de P incidentes con v , se $\Gamma(v)$ el subgrupo de Γ generado por el conjunto $\{gs : S \in S(v)\}$. Sea B la horobola basada en v tal que \bar{B} corta solo a los lados de $S(v)$. Entonces $P \cap \partial B$ está en un poliedro convexo euclidiano, de dimensión $n - 1$ en la horoesfera ∂B y

$$\{S \cap \partial B : S \in S(v)\}$$

es el conjunto de lados de $P \cap \partial B$. Claramente $P \cap \partial B$ es compacto y todos los ángulos diédricos de $P \cap \partial B$ son submúltiplos de π . Por la hipótesis de inducción, $\Gamma(v)$ se restringe a un grupo discreto de reflexión con respecto a $P \cap \partial B$.

(15) Definamos

$$\bar{B} = \bigcup_{g \in \Gamma(x)} [gP \cap B].$$

Por el mismo argumento de (8), tenemos

$$\eta^{-1}(\bar{B}) = \bigcup_{g \in \Gamma(v)} \{g\} \times (P \cap B).$$

De aquí \bar{B} es un subconjunto abierto de \bar{X} , y \bar{B} interseca a $g(P)$ si y sólo si g está en $\Gamma(v)$. Por los mismos argumentos que en (9) y en (10), se sigue que κ manda a \bar{B} homeomórficamente sobre B .

(16) Sean v_1, \dots, v_m los vértices ideales de P y para cada i , sea B_i una horobola basada en v_i tal que \bar{B}_i corta solo los lados de P incidentes con v_i . Sea B'_i la horobola basada en v_i tal que $B'_i \subset V_i$ y $\text{dist}(B'_i, \partial B_i) = 1$. Definamos

$$P_0 = P - \bigcup_{i=0}^m B'_i.$$

Entonces P_0 es compacto. Sea x un punto de P y escojamos $r(x) > 0$ como antes de tal manera que κ manda a $\bar{B}(x, r(x))$ homeomórficamente sobre $B(x, r(x))$. Entonces, la cubierta abierta $\{B(x, r(x)) : x \in P_0\}$ tiene un número de Lebesgue ℓ tal que $0 < \ell < 1$. Si x está en P_0 , sea y un punto de P_0 tal que $B(x, \ell) \subset B(y, r(y))$, y sea $\bar{B}(x)$ el subconjunto de $\bar{B}(y, r(y))$ que está en la imagen de $B(x, \ell)$ bajo κ . Entonces $\bar{B}(x)$ es una vecindad

abierta de $[1, x]$ en \bar{X} que es mandada homeomórficamente sobre $B(x, \ell)$ por κ . Más aún, si g está en Γ , entonces $g\bar{B}(x)$ es una vecindad abierta de $[g, x]$ en \bar{X} que es mandado homeomórficamente sobre $B(gx, \ell)$ por κ . Si y está en la imagen de κ , entonces $B(y, \ell)$ está en la imagen de κ . Por tanto, κ es sobreyectiva.

(17) Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow X$ un arco geodésico de y a z tal que $|\alpha| < \ell$ y supongamos que $\kappa[g, x] = y$. Mostraremos que σ se levanta a una curva única $\tilde{\alpha} : [a, b] \rightarrow \bar{X}$ tal que $\tilde{\alpha}(a) = [g, x]$. Como κ manda a $g\bar{B}(x)$ homeomórficamente sobre $B(gx, \ell)$, la función α se levanta a una curva $\tilde{\alpha} : [a, b] \rightarrow \bar{X}$ tal que $\tilde{\alpha}(a) = [g, x]$ y $\tilde{\alpha}([a, b]) \subset g\bar{B}(x)$. Supongamos que $\tilde{\alpha} : [a, b] \rightarrow \bar{X}$ es un levantamiento distinto de α comenzando en $[g, x]$. Entonces $\tilde{\alpha}^{-1}(g\bar{B}(x))$ es una vecindad abierta propia de a en $[a, b]$, ya que $\tilde{\alpha}$ es continua y distinta a α . Sea t el primer punto de $[a, b]$ que no está en esta vecindad. Entonces $\tilde{\alpha}(t) \neq \alpha(t)$. Como \bar{X} es de Hausdorff, existen vecindades abiertas ajenas U y V de $\tilde{\alpha}(t)$ y $\alpha(t)$, respectivamente. Escogamos $s < t$ en la vecindad abierta $\tilde{\alpha}^{-1}(U) \cap \alpha^{-1}(V)$ de t . Entonces $\tilde{\alpha}(s)$ está en $g\bar{B}(x)$ y debe ser igual a $\alpha(s)$. Como U y V son ajenas, tenemos una contradicción. Por tanto, el levantamiento $\tilde{\alpha}$ es único.

(18) Mostraremos que $\kappa : \bar{X} \rightarrow X$ es una proyección cubriente. Sea z un punto de X . Veremos también que $B(z, \ell)$ está uniformemente cubierto por κ . Ya que κ es sobreyectiva, existe un punto $[g, x]$ de X tal que $\kappa[g, x] = z$. Entonces κ manda la vecindad abierta $g\bar{B}(x)$ de $[g, x]$ en \bar{X} homeomórficamente sobre $B(z, \ell)$. Supongamos que $[h, y] \neq [g, x]$ y $\kappa[h, y] = z$. Decimos que $g\bar{B}(x)$ y $h\bar{B}(y)$ son ajenos. Por el contrario, supongamos que $[f, w]$ está en $g\bar{B}(x) \cap h\bar{B}(y)$. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow X$ un arco geodésico de z a fw . Como fw está en $B(z, \ell)$, tenemos que $|\alpha| < \ell$. De aquí α es un levantamiento a las curvas únicas $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 : [a, b] \rightarrow \bar{X}$ comenzando en $[g, x]$ y $[h, y]$, respectivamente. Ambas $\tilde{\alpha}_1$ y $\tilde{\alpha}_2$ terminan en $[f, w]$, ya que $[f, w]$ es el único punto en $g\bar{B}(x)$ y en $h\bar{B}(y)$ que es mandado a fw por κ . Por la unicidad del levantamiento de α^{-1} comenzando en $[f, w]$, tenemos que $[g, x] = [h, y]$, lo que es una contradicción. De esto $g\bar{B}(x)$ y $h\bar{B}(y)$ son ajenos y por tanto $B(z, \ell)$ está cubierto uniformemente por κ . Así κ es una proyección cubriente.

(19) $\kappa : \bar{X} \rightarrow X$ es un homeomorfismo, ya que X es simplemente conexo. Por tanto las vecindades de $\{gP^o : g \in P\}$ son mutuamente ajenos, ya que los miembros de $\{g\{P^o\} : g \in \Gamma\}$ son mutuamente ajenos

$$X = \cup\{gP : g \in \Gamma\}$$

ya que tenemos

$$\bar{X} = \cup\{g\{P\} : g \in \Gamma\}.$$

(20) Mostraremos que

$$\mathcal{P} = \{gP : g \in \Gamma\}$$

es localmente finito. Sea y un punto arbitrario de X . Entonces existe un elemento único $[f, x]$ de X tal que $\kappa[f, x] = y$. Sea r tal que $0 < r < \pi/2$ y que r es menor que la distancia de cualquier lado de P que no contiene a x . Entonces la vecindad abierta $f\tilde{B}(x, r)$ de $[f, x]$ interseca $g[P]$ si y sólo si $f^{-1}g$ esta en $\Gamma(x)$. De aquí, que el conjunto

$$\kappa(f\tilde{B}(x, r)) = B(fx, r) = B(y, r)$$

interseca a gP si y sólo si $f^{-1}g$ está en $\Gamma(x)$. Como $\Gamma(x)$ es finito, tenemos que $B(y, r)$ interseca solo a un número finito de miembros de \mathcal{P} . Así \mathcal{P} es localmente finito.

(21) Si gS es un lado de gP , entonces gS es también un lado de $ggsP$, ya que

$$gP \cap ggsP = gS,$$

gP y $ggsP$ son los únicos poliedros de \mathcal{P} que contienen a gS como un lado. Así \mathcal{P} es una teselación exacta de X . Por tanto Γ es discreto y P es un poliedro fundamental convexo exacto para Γ por el teorema 4.19. Así Γ es un grupo de reflexiones con respecto al poliedro P . ■

Ejemplo 1. Sea

$$P = \{x \in S^n : x_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, n+1\}.$$

Entonces P un n -simplejo regular en S^n cuyo ángulo diédrico es $\pi/2$. Por tanto el grupo Γ generado por las reflexiones en los lados de P es un grupo de reflexiones discreto con respecto a P por el teorema 1.23. La teselación $\{gP : g \in \Gamma\}$ de S^n contiene 2^{n+1} simplejos, y entonces Γ tiene orden 2^{n+1} . Vale la pena notar que los vértices de la teselación regular $\{gP : g \in \Gamma\}$ de S^n están los vértices de un politopo euclidiano regular inscrito en S^n .

Ejemplo 2. Sea P un n -cubo en E^n . Entonces P es un politopo en E^n cuyo ángulo diédrico es $\pi/2$. Por tanto, el grupo Γ generado por las reflexiones en los lados de P es un grupo de reflexiones discreto con respecto a P por el teorema 5.3.

Ejemplo 3. Formemos un ciclo de triángulos hiperbólicos reflejando en los lados de un triángulo $30^\circ - 45^\circ$ hiperbólico, manteniendo siempre el vértice en el ángulo de 30° fijo. Como $30^\circ = 360^\circ/12$, existen 12 triángulos en este ciclo, su unión es un hexágono regular hiperbólico P cuyos ángulos diédricos son 90° . Sea Γ el grupo generado por las reflexiones en los lados de P . Entonces Γ es un grupo de reflexiones con respecto a P por el teorema 5.3.

Ejemplo 4. Sea $D(v)$ un dodecaedro regular inscrito en la esfera $S(0, r)$ en E^3 con $0 < r < 1$. Entonces $D(v)$ es un dodecaedro hiperbólico regular en el modelo del disco proyectivo \mathbb{D}^3 del espacio hiperbólico de dimensión 3. Sea $\theta(r)$ el ángulo hiperbólico diédrico de $D(r)$. Cuando r es pequeño, $\theta(r)$ es aproximadamente 116.6° . Cuando r se incrementa a 1, el ángulo $\theta(x)$ decrece continuamente a su valor límite $\theta(1)$, el ángulo de un dodecaedro regular ideal en \mathbb{D}^3 .

Para encontrar el valor de $\theta(1)$, consideremos a un dodecaedro regular ideal en el modelo del semiespacio superior U^3 del espacio hiperbólico de tercera dimensión con un vértice ideal en ∞ . Ya que el dodecaedro es regular, el eslabón del vértice ideal en ∞ es un triángulo equilátero. Por tanto $\theta(1) = 60^\circ$. Ver figura 5.2.

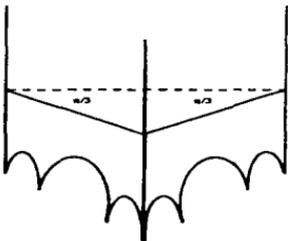


Figura 5.2. Un dodecaedro ideal en U^3 con un vértice en ∞ .

Como $\theta(r)$ es una función continua de r que toma valores en el intervalo $[\theta(1), \theta(0)]$, existe un único valor de r tal que $\theta(r) = 90^\circ$. Sea $P = D(r)$ para esta r . Entonces P es un dodecaedro regular hiperbólico cuyo ángulo es $\pi/2$. Sea Γ el grupo generado por las reflexiones en los lados de P . Entonces Γ es un grupo discreto de reflexiones con respecto a P por el teorema 5.3.

Ejemplo 5. Por la discusión previa, un dodecaedro regular ideal P en H^3 tiene algún ángulo diédrico $\pi/3$. Sea Γ el grupo generado por las reflexiones en los lados de P . Entonces Γ es un grupo discreto de reflexiones con respecto a P por el teorema 5.3.

Ejemplo 6. Los 24 puntos $\pm e_i$, para $i = 1, 2, 3, 4$, y $(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$ de S^3 son los vértices de una 24-celda en E^4 . Sea P la 24-celda regular en B^4 correspondiente. El eslabón de un vértice ideal de P es un cubo.

Por tanto, el ángulo diédrico de P es $\pi/2$. Sea Γ el grupo generado por las reflexiones en los lados de P . Entonces Γ es un grupo discreto de reflexiones con respecto a P por el teorema 5.3.

Sea Γ el grupo de reflexiones discreto con respecto a un poliedro P . Entonces todos los ángulos diédricos de P son submúltiplos de π por el teorema 5.2. Sean $\{S_i\}$ los lados de P y para cada par de índices i, j , sea $k_{ij} = \pi/\theta(S_i, S_j)$. Sea G el grupo libre generado por los símbolos $\{S_i\}$ y sea g_S la reflexión de X en el hiperplano $\langle S_i \rangle$. Entonces $\phi: F \rightarrow \Gamma$, definido por $\phi(S_i) = g_{S_i}$, es un epimorfismo. Por el teorema 5.2 el kernel de ϕ contiene a las palabras $(S_i S_j)^{k_{ij}}$ siempre que k_{ij} es finito.

Sea G el cociente de F por la cerradura normal de las palabras

$$\{(S_i S_j)^{k_{ij}} : k_{ij} \text{ es finito}\}.$$

Entonces ϕ induce un epimorfismo $\psi: G \rightarrow \Gamma$. Probaremos que ϕ es un isomorfismo cuando P tiene un número finito de lados y volumen finito. Este hecho usualmente se expresa diciendo que

$$(S_i : (S_i S_j)^{k_{ij}})$$

es una presentación del grupo para Γ bajo la función $S_i \rightarrow g_{S_i}$. Entendiéndolo que cuando $k_{ij} = \infty$ entonces borramos el elemento $(S_i S_j)^{k_{ij}}$ correspondiente.

Teorema 5.4 *Sea Γ un grupo de reflexiones discreto con respecto a un poliedro con un número finito de lados P en X de volumen finito. Sea $\{S_i\}$ el conjunto de lados de P y para cada par de índices i, j , sea $k_{ij} = \pi/\theta(S_i, S_j)$. Entonces*

$$(S_i : (S_i S_j)^{k_{ij}})$$

es una presentación de grupo para Γ bajo la función $S_i \rightarrow g_{S_i}$.

Demostración:

La prueba se sigue con la misma idea del teorema 5.3, y entonces solo daremos las alteraciones necesarias. El comienzo de la inducción requiere una prueba. Si $n = 1$, entonces P es un segmento geodésico y Γ es obviamente un grupo diédrico de orden $2k_{12}$. Es un hecho conocido de la teoría de representaciones de grupos que Γ tiene la representación

$$(S_1, S_2; S_1^2, S_2^2, (S_1 S_2)^{k_{12}}).$$

La alteración principal en la prueba del teorema 5.3 es reemplazar Γ por G en la construcción del espacio cubriente \tilde{X} . Todo va a través de como se había hecho antes excepto cuando la hipótesis de inducción se usa en los pasos (6) y (14). Aquí se añade la conclusión de que $\Gamma(x)$ tiene la presentación

$$(S_i \in S(x); (S_i S_j)^{k_{ij}}).$$

Ya que el subgrupo $G(x)$ de G generado por el conjunto $\{S_i : S_i \in S(x)\}$ satisface las mismas relaciones y funciones sobre en $\Gamma(x)$, deducimos que $G(x)$ tiene la misma presentación. En particular, la función $S_i \rightarrow gS_i$ induce un isomorfismo de $G(x)$ sobre $\Gamma(x)$. Ahora todo sigue como antes. La conclusión final es que la función $S_i \rightarrow gS_i$ induce un homomorfismo de G a Γ .

5.1.1 GRUPOS DE COXETER.

Definición. Un grupo de Coxeter G es un grupo abstracto definido por una representación de la forma $(S_i; (S_i S_j)^{k_{ij}})$, donde

- (1) los índices i, j , varían sobre algún conjunto de índices numerable \mathcal{I} ;
- (2) los exponentes k_{ij} son un número positivo o ∞ para cada i, j ;
- (3) $k_{ij} = k_{ji}$;
- (4) $k_{ii} = 1$ para cada i ;
- (6) si $k_{ij} = \infty$, entonces la relación $(S_i S_j)^{k_{ij}}$ se omite.

Notemos que si $i \neq j$, entonces la relación $(S_i S_j)^{k_{ij}}$ se deriva de las relaciones S_i^2, S_j^2 , y $(S_i S_j)^{k_{ij}}$; y por tanto solo una de las relaciones $(S_i S_j)^{k_{ij}}$ y $(S_j S_i)^{k_{ij}}$ se necesita, la otra se puede quitar.

Sea $G = (S_i, i \in \mathcal{I}; (S_i S_j)^{k_{ij}})$ un grupo de Coxeter. La gráfica de Coxeter es la gráfica etiquetada con vértices en \mathcal{I} y aristas

$$\{(i, j) : k_{ij} > 2\}.$$

Cada arista (i, j) esta etiquetada por k_{ij} . Por simplicidad, las etiquetas correspondientes a las $k_{ij} = 3$ se omiten.

Ejemplo 7. El grupo de Coxeter $G = (S_1; S_1^2)$ es un grupo cíclico de orden dos. Su gráfica consiste en un solo vértice.

Ejemplo 8. El grupo de Coxeter $G(k) = (S_1, S_2; S_1^2, S_2^2, (S_1 S_2)^k)$ es un grupo diédrico de orden $2k$. Su gráfica de Coxeter, cuando $k > 2$, es una arista única con etiqueta k .

Sea Γ un grupo discreto de reflexiones con respecto a un poliedro P con un número finito de lados y con volumen finito. Si $\{S_i\}$ es el conjunto de lados de P , y para cada par de índices i, j , definimos $k_{ij} = \pi/\theta(S_i, S_j)$. Entonces el grupo de Coxeter

$$G = (S_i; (S_i S_j)^{k_{ij}})$$

es isomorfo a Γ por el teorema 5.4. Así Γ es un grupo de Coxeter.

Ejemplo 9. Sea Γ es grupo generado por las reflexiones en los lados de un rectángulo P en E^2 . Por el teorema 5.4, el grupo Γ tiene la presentación

$$(S_1, S_2, S_3, S_4; S_1^2, (S_i S_{i+1})^2 \text{ i mod } 4).$$

La gráfica de Coxeter de Γ consiste en dos aristas ajenas etiquetadas por ∞ .

Un grupo de Coxeter se dice que es irreducible o reducible de acuerdo a que su gráfica de Coxeter sea conexa o desconexa. Se verá que un grupo de Coxeter reducible es el producto directo de los grupos irreducibles de Coxeter representadas por las componentes conexas de su gráfica. Por ejemplo, el grupo de reflexiones en el ejemplo 9 es el producto directo de dos grupos diédricos, infinitos $(S_1, S_3; S_1^2, S_3^2)$ y $(S_2, S_4; S_2^2, S_4^2)$. Esto no es sorprendente, ya que un rectángulo en E^2 es el producto cartesiano de dos segmentos de línea. En general, la base geométrica para la descomposición en producto directo de un grupo de reflexiones discreto reducible es el hecho de que las reflexiones ortogonales conmutan.

5.2 Grupos de Reflexiones Simpliciales.

A través de esta sección $X = S^n, E^n, \text{ o } H^n$ con $n > 0$. Sea Δ un n -simplejo en X todos cuyos ángulos son submúltiplos de π . Por el teorema 5.3, el grupo Γ generado por las reflexiones de X en los lados de Δ es un grupo discreto de isometrías de X . El grupo Γ es llamado un grupo de reflexiones del n -simplejo.

Debemos incluir también el caso de un 0-simplejo Δ en S^0 . Consideremos la función antípoda α de S^0 como una reflexión de S^0 . Ya que $(\Delta, \alpha(\Delta))$ es una teselación de S^0 , también llamamos al grupo Γ generado por α , un grupo de reflexión (0-simplejo). La gráfica de Coxeter de Γ está definida como un solo vértice.

Supongamos que $n = 1$. Entonces Δ es un segmento geodésico en X . Claramente Γ es un grupo diédrico de orden 2κ , con $\kappa > 1$, donde π/κ es el ángulo de Δ . La gráfica de Coxeter de Γ esta constituida por dos vértices si $\kappa = 2$ o un vértice etiquetado por κ si $\kappa > 2$. Si $X = S^1$, κ es finito, mientras que si $X = E^1$ o H^1 , entonces $\kappa = \infty$.

Cuando $n = 2$, existen enteros a, b, c , con $2 \leq a \leq b \leq c$, tales que Δ es un triángulo $T(a, b, c)$ en X cuyos ángulos son $\pi/a, \pi/b, \pi/c$. Notemos que $T(a, b, c)$ está determinado salvo una similaridad por los enteros a, b, c . El grupo generado por las reflexiones en los lados de $T(a, b, c)$ se denota por $G(a, b, c)$. Sea $G_0(a, b, c)$ el subgrupo de $G(a, b, c)$ de isometrías que preservan la orientación. Entonces $G_0(a, b, c)$ tiene índice dos en $G(a, b, c)$. El grupo $G_0(a, b, c)$ es llamado el grupo triangular, mientras que $G(a, b, c)$ es llamado el grupo triangular de reflexiones.

5.2.1 GRUPOS TRIANGULARES DE REFLEXIONES, CASO ESFÉRICO.

Supongamos que $X = \mathbf{S}^2$. Por el teorema 1.4 tenemos

$$\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b} + \frac{\pi}{c} > \pi.$$

Por tanto, los enteros a, b, c satisfacen la desigualdad

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1.$$

Existen un número infinito de soluciones para

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{c} > 1,$$

y solo tres soluciones mas,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} > 1, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} > 1$$

La gráfica de Coxeter del grupo $G(2, 2, 2)$ consiste de tres vértices y entonces $G(2, 2, 2)$ es un 2-grupo elemental de orden 8. La gráfica de Coxeter de $G(2, 2, c)$, para $c > 2$ es la unión ajena de un vértice y una arista etiquetada por c . De aquí $G(2, 2, c)$ es el producto directo de un grupo de orden 2 y un grupo diédrico de orden $2c$. Así $G(2, 2, c)$ tiene orden $4c$.

La teselación de \mathbf{S}^2 generada por la reflexión en los lados del triángulo $T(2, 2, 5)$ está ilustrada en la figura 5.3 (a).

Por el teorema 1.4. El área de $T(2, 3, 3)$ es

$$\pi/2 + \pi/3 + \pi/3 - \pi = \pi/6.$$

Como el área de \mathbf{S}^2 es 4π , la teselación

$$\{gT(2, 3, 3) : g \in G(2, 3, 3)\}$$

contiene 24 triángulos, y entonces $G(2, 3, 3)$ tiene orden 24. La teselación se puede partir en 4 ciclos, cada uno formado por 6 triángulos girando alrededor de un vértice de 60° . La unión de cada uno de estos ciclos es un triángulo equilátero esférico. Ver figura 5.3 (b). Esto nos da una teselación regular de \mathbf{S}^2 en 4 triángulos equiláteros. Es claro de la geometría de estas dos teselaciones que $G(2, 3, 3)$ es el grupo de simetrías del tetraedro regular inscrito en \mathbf{S}^2 con sus vértices en las esquinas de los 4 triángulos. Consecuentemente $G(2, 3, 3)$ es un grupo simétrico de cuatro letras. El grupo triangular $G_0(2, 3, 3)$ es un grupo alternante en cuatro letras llamado el grupo tetraédrico. La gráfica de Coxeter de $G(2, 3, 3)$ es

El área de $T(2, 3, 4)$ es $\pi/12$. Por tanto, la teselación

$$\{gT(2, 3, 4) : g \in G(2, 3, 4)\}$$

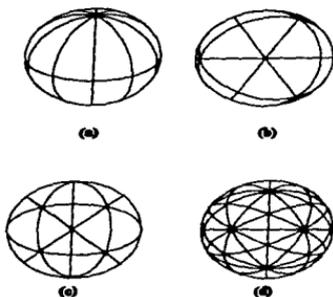


Figura 5.3. Teselaciones en S^2 obtenidas de reflejar en los lados de un triángulo.



Figura 5.4.

contiene 48 triángulos, y entonces $G(2,3,4)$ tiene orden 48. La teselación puede ser partida dentro de 6 ciclos, cada uno consiste en 8 triángulos girando alrededor de un vértice de 45° . La unión de cada uno de estos ciclos es un cuadrilátero regular esférico. Ver figura 5.3 (c). Esto da una teselación de S^2 por 6 cuadriláteros. Es claro de la geometría de estas dos teselaciones que $G(2,3,4)$ es el grupo de simetrías del cubo inscrito en S^2 con sus vértices en las esquinas de los 6 cuadriláteros. La teselación de S^2 por 48 triángulos puede también ser partida en 8 ciclos, cada uno formado por 6 triángulos rotando alrededor de un vértice de 60° . La unión de cada uno de estos ciclos es un triángulo esférico equilátero. Ver figura 5.3 (c). Esto da una teselación regular de S^2 por 8 triángulos equiláteros. Es claro de la geometría de estas dos teselaciones que $G(2,3,4)$ es el grupo de simetrías del octaedro regular inscrito en S^2 con sus vértices en las esquinas de los 8 triángulos equiláteros. Ya que un octaedro regular es antípodamente simétrico, tenemos

$$G(2,3,4) = \{\pm 1\} \times G_0(2,3,4).$$

El grupo triangular $G_0(2, 3, 4)$ es un grupo simétrico en cuatro letras llamado el grupo octaédrico, su gráfica de Coxeter es



Figura 5.5.

El área del triángulo $T(2, 3, 4)$ es $\pi/30$. Por tanto, la teselación

$$\{gT(2, 3, 5) : g \in G(2, 3, 5)\}$$

contiene 120 triángulos, entonces $G(2, 3, 5)$ tiene orden 120. La teselación puede partirse en 12 ciclos, cada uno consiste en 10 triángulos rotando en un vértice de 36° . La unión de cada uno de estos ciclos, es un pentágono regular esférico. Ver figura 5.3 (d). Esto no da una teselación regular de S^2 por 12 pentágonos. Es claro de la geometría de estas dos teselaciones que $G(2, 3, 5)$ es el grupo de simetrías del dodecaedro regular inscrito en S^2 con sus vértices en las esquinas de los 12 pentágonos. La teselación también puede también partirse 20 ciclos cada uno consistiendo en 6 triángulos, rotando alrededor de un vértice de 60° . La unión de cada uno de estos ciclos es un triángulo equilátero esférico. Ver figura 5.3 (d). Esto nos da una teselación regular de S^2 por 20 triángulos equiláteros. Es claro de la geometría de estas dos teselaciones que $G(2, 3, 5)$ es el grupo de simetrías del icosaedro regular inscrito en S^2 con sus vértices en las esquinas de los 20 triángulos equiláteros. Ya que un icosaedro regular es antipodamente simétrico, tenemos

$$G(2, 3, 5) = \{\pm 1\} \times G_0(2, 3, 5).$$

El grupo triangular $G_0(2, 3, 5)$ es un grupo alternante en cinco letras llamado el grupo icosaédrico. La gráfica de Coxeter de $G(2, 3, 5)$ es



Figura 5.6.

5.2.2 GRUPOS TRIANGULARES DE REFLEXIONES, CASO EUCLIDIANO.

Supongamos que $X = E^2$. Entonces tenemos

$$\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b} + \frac{\pi}{c} = \pi.$$

De aquí, los enteros a, b, c satisfacen la ecuación

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Existen exactamente tres soluciones,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

Notemos que $T(3, 3, 3)$ es un triángulo equilátero, $T(2, 4, 4)$ es un triángulo rectángulo isosceles, y $T(2, 3, 6)$ es un triángulo rectángulo de ángulos $30^\circ - 60^\circ$. La teselación de E^2 generada reflejando por los lados de $T(a, b, c)$. La gráfica de Coxeter de los grupos $G(3, 3, 3)$, $G(2, 4, 4)$ y $G(2, 3, 6)$ son respectivamente,



Figura 5.7.

5.2.3 GRUPOS TRIANGULARES DE REFLEXIONES, CASO HIPERBÓLICO.

Supongamos que $X = H^2$. Por el teorema 1.10, tenemos

$$\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b} + \frac{\pi}{c} < \pi.$$

De aquí, los enteros a, b, c satisfacen la desigualdad

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1.$$

Existe un número infinito de soluciones para esta desigualdad. Cada solución, determina a un único triángulo hiperbólico $T(a, b, c)$ y a su grupo de reflexiones correspondiente $G(a, b, c)$. De todos estos triángulos el de menor área es el $T(2, 3, 7)$, que es $42/\pi$.

La gráfica de Coxeter de un grupo hiperbólico de reflexiones $G(a, b, c)$ es ya sea

de acuerdo a que $a = 2$ o $a > 1$.

Teorema 5.5 Sean a, b, c, a', b', c' enteros tales que $2 \leq a \leq b \leq c$ y $2 \leq a' \leq b' \leq c'$. Entonces los grupos $G(a, b, c)$ y $G(a', b', c')$ son isomorfos si y sólo si $(a, b, c) = (a', b', c')$.



Figura 5.8.

Demostración:

Supongamos que $G(a, b, c)$ y $G(a', b', c')$ son isomorfos. Supongamos primero que $G(a, b, c)$ es finito. Entonces $G(a, b, c)$ y $G(a', b', c')$ son grupos de reflexiones triangulares esféricos isomorfos. De la descripción de todos los grupos triangulares esféricos de reflexiones, deducimos que $(a, b, c) = (a', b', c')$.

Así podemos suponer que $G(a, b, c)$ es infinito. Entonces $G(a, b, c)$ es un grupo triangular de reflexiones Euclidiano o uno hiperbólico. En cualquiera de los casos cada elemento de orden finito de $G(a, b, c)$ es elíptico. Por el teorema 4.6, cada elemento de orden finito es conjugado en $G(a, b, c)$ a un elemento que fija un punto en la frontera del triángulo $T(a, b, c)$. Sean x, y, z los vértices de $T(a, b, c)$ correspondientes a los ángulos $\pi/a, \pi/b, \pi/c$. En vista del hecho de que

$$\{gT(a, b, c) : g \in G(a, b, c)\}$$

es una teselación de X , el subgrupo estabilizador de cada lado de $T(a, b, c)$ es el grupo de orden dos generado por la reflexión en el lado correspondiente de $T(a, b, c)$. Más aún, el subgrupo estabilizador en el vértice x, y o z es el grupo diédrico de orden $2a, 2b, 2c$ respectivamente.

Sea v un vértice arbitrario de $T(a, b, c)$ y sea G_v el subgrupo estabilizador de v . Entonces

$$\{gT(a, b, c) : g \in G_v\}$$

forma un ciclo de triángulos alrededor del vértice v . Consecuentemente, ningún par de vértices de $T(a, b, c)$ está en la misma órbita. Por tanto, dos elementos en $G_x \cup G_y \cup G_z$ son conjugados en $G(a, b, c)$ si y sólo si están conjugados en el mismo estabilizador B , ya que $gG_v g^{-1} = G_{g \cdot v}$. De aquí, los enteros $\{2, a, b, c\}$ están caracterizados por $G(a, b, c)$. Como este conjunto es invariante bajo isomorfismos tenemos que $\{2, a, b, c\} = \{2, a', b', c'\}$. Por tanto $(a, b, c) = (a', b', c')$. ■

Subdivisión Baricéntrica.

Sea P un politopo de dimensión n en X . La *subdivisión baricéntrica* de P es la subdivisión de P en los n -simplejos cuyos vértices pueden ordenarse $\{v_0, \dots, v_n\}$ de tal forma que v_k es el centroide de una k -cara F_k de P para cada k y F_k es un lado de F_{k+1} para cada $k = 0, \dots, n-1$. En particular,

todos los simplejos de la subdivisión baricéntrica de P comparten el centroide de P como un vértice común, y el lado de ese simplejo opuesto al centroide de P es parte de la subdivisión baricéntrica de un lado de P .

5.2.4 GRUPOS TETRAÉDRICOS DE REFLEXIONES.

Consideraremos algunos ejemplos de grupo de reflexiones tetraédricos determinados por teselaciones regulares de S^3 , E^3 , y H^3 .

Ejemplo 1. Sea P un 4-simplejo inscrito en S^3 . Entonces la proyección radial de ∂P sobre S^3 da una teselación regular de S^3 por 5 tetraedros. Ya que tres de estos tetraedros se cortan a lo largo de cada arista, su ángulo diédrico es $2\pi/3$. Sea T uno de estos tetraedros. Entonces la subdivisión baricéntrica parte a T en 24 tetraedros congruentes. Sea Δ uno de estos tetraedros. Entonces los ángulos diédricos de Δ son todos submúltiplos de π . Por tanto, el grupo Γ generado por reflejar en los lados de Δ es un grupo de reflexiones discreto con respecto a Δ por el teorema 5.3. Es claro de la geometría de Δ y T que Γ es el grupo de simetrías de P . Por tanto Γ es un grupo simétrico de 5 letras, y entonces Γ tiene orden $5! = 120$. La gráfica de Coxeter Γ es



Figura 5.9.

Ejemplo 2. Sea P un cubo en E^3 . El ángulo diédrico de P es $\pi/2$. Observemos que la subdivisión baricéntrica divide a P en 48 tetraedros congruentes. Sea Δ uno de estos tetraedros. Entonces los ángulos diédricos de Δ son todos submúltiplos de π . Por tanto, el grupo Γ generado por reflejar en los lados de Δ es un grupo de reflexiones discreto con respecto a Δ por el teorema 5.3. La gráfica de Coxeter de Γ es



Figura 5.10.

Ejemplo 3. Por el argumento en el ejemplo 4 de §5.1, existe un dodecaedro hiperbólico regular P cuyo ángulo diédrico es $2\pi/5$. Observemos que la subdivisión baricéntrica divide a P en 120 tetraedros congruentes. Sea Δ uno de estos tetraedros. Entonces el ángulo diédrico de Δ son todos submúltiplos de π . Por tanto, el grupo Γ generado por las reflexiones en los lados de Δ es un grupo de reflexiones discreto con respecto a Δ por

el teorema 5.3. Vale la pena notar que Γ es el grupo de simetrías de la teselación regular de H^3 por dodecaedros obtenidos reflejando en los lados de P . La gráfica de Coxeter de Γ es



Figura 5.11.

5.2.5 FORMAS BILINEALES.

Una forma bilineal en un espacio vectorial real V es una función de $V \times V$ a \mathbb{R} , denotada por $(v, w) \rightarrow \langle v, w \rangle$, tal que para todos v, w en V :

- (1) $\langle v, \cdot \rangle$ y $\langle \cdot, w \rangle$ son funciones lineales de V en \mathbb{R} (bilinealidad).
 (2) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ (simetría).

Además, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se dice no degenerada si,

- (3) si $v \neq 0$, entonces existe un $w \neq 0$ tal que $\langle v, w \rangle \neq 0$.

Observación. Una forma bilineal no degenerada es lo mismo que un producto interior en V .

Una forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en V se dice semidefinida positiva si,

- (4) $\langle v, v \rangle \geq 0$ para todo v en V .

Finalmente, una forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en v se dice definida positiva si,

- (5) $\langle v, v \rangle > 0$ para toda v distinta de cero en V .

Supongamos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una forma bilineal en \mathbb{R}^n . La matriz A de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es la matriz real de $n \times n$, (a_{ij}) definida por:

$$a_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle.$$

Observemos que A es una matriz simétrica. Decimos que A es definida positiva, semidefinida positiva, o no degenerada de acuerdo con que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tenga la misma propiedad. Por el proceso de Gram-Schmidt, existe una base u_1, \dots, u_n de \mathbb{R}^n tal que

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } 1 \leq i \leq p \\ -1 & \text{si } p+1 \leq i \leq q \\ 0 & \text{si } q+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

donde p, q son enteros tales que $0 \leq p \leq q \leq n$. Notemos que A es (semi)definida positiva si y sólo si $(p = q)$ $p = n$, y A es no degenerada si y sólo si $q = n$. Más aún q es igual al rango de A . El par $(q, q - p)$ denota el tipo de A . Dada cualquier matriz real simétrica de $n \times n$, A , definimos la forma bilineal de A en \mathbb{R}^n por la fórmula

$$(x, y) = x \cdot Ay.$$

Claramente, A es la matriz de la forma bilineal de A . El espacio nulo de una forma bilineal (\cdot, \cdot) en \mathbb{R}^n es el conjunto $\{y \in \mathbb{R}^n : (x, y) = 0 \text{ para toda } x \text{ en } \mathbb{R}^n\}$. El espacio nulo de la forma bilineal de una matriz A es el espacio nulo de A .

Definición. La matriz de Gram de un n -simplejo Δ en X cuyos lados son, S_1, S_2, \dots, S_{n+1} es la $(n+1) \times (n+1)$ matriz cuya i, j -ésima entrada es $-\cos \theta(S_i, S_j)$.

Teorema 5.6 Sea θ_{ij} para $i, j = 1, \dots, n+1$, los números reales tales que

- (1) $\theta_{ij} = \theta_{ji}$ para toda i, j .
 - (2) $\theta_{ii} = \pi$ para cada i, y
 - (3) θ_{ij} está en el intervalo $(0, \pi/2]$ si $i \neq j$.
- Sea A la matriz de $(n+1) \times (n+1)$ cuya ij -ésima entrada es $-\cos \theta_{ij}$ y sea A_i la matriz de $n \times n$ que se obtiene de A borrando la i -ésima columna y la i -ésimo renglón. Entonces existe un n -simplejo Δ en S^n, E^n o H^n cuya matriz de Gram es A si y sólo si A_i es definida positiva para cada $i = 1, \dots, n+1$. Más aún Δ es

- (1) esférico si y sólo si A es definida positiva;
- (2) Euclidiano si y sólo si A es del tipo $(n, 0)$;
- (3) hiperbólico si y sólo si A es del tipo $(n, 1)$.

La demostración de este teorema esta basada en elementos de Algebra Lineal.

5.2.6 CLASIFICACIÓN DE GRUPOS DE REFLEXIONES EN SIMPLEJOS.

Sea Γ el grupo generado por las reflexiones de X en los lados de un n -simplejo Δ todos de cuyos ángulos diédricos son submúltiplos de π . Sea v un vértice de Δ y Γ_v el subgrupo de Γ que consiste en los elementos que fijan a v . Entonces Γ_v es un grupo esférico de reflexiones en un $(n-1)$ -simplejo. Más aún, la subgráfica de Coxeter de Γ , se obtiene de borrar los vértices correspondientes al lado opuesto y sus aristas adjuntas, es la gráfica de Γ_v . Por inducción, cada subgráfica de Coxeter de Γ que se obtiene de borrar vértices y sus aristas correspondientes es la gráfica de Coxeter de un grupo de reflexiones en un simplejo esférico.

El grupo Γ se dice irreducible si y sólo si, su gráfica de Coxeter es conexa. Supongamos que Γ es irreducible. Entonces podemos borrar vértices y sus aristas adjuntas de la gráfica de Coxeter de Γ , y cada vez que hagamos esto obtenemos una subgráfica conexa. Ahora las únicas etiquetas de los grupos de reflexiones en un simplejo esférico son 3, 4, y 5. Por tanto si $n > 2$, la gráfica de Coxeter de Γ tiene solo 3, 4 y 5 como posibles etiquetas.

De aquí que existen solo un número finito de posibles Gráficas de Coxeter para un grupo de reflexiones en un n -simplejo para cada $n > 0$. En vista del teorema 5.6, es directo listar a todas las gráficas de Coxeter de los grupos de reflexiones en n -simplejos. Los grupos de reflexiones en n -simplejos esféricos y Euclidianos existen en todas las dimensiones n ; sin embargo, los grupos de reflexiones hiperbólicos en n -simplejos existen solo en dimensiones menores que 4. Las figuras 5.12-5.14 ilustran las gráficas de Coxeter de todos los grupos irreducibles de reflexiones en simplejos.

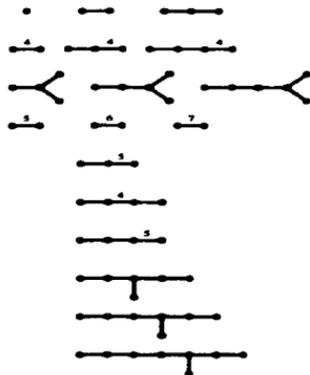


Figura 5.12. Los grupos irreducibles de reflexiones en simplejos esféricos.

5.3 Grupos de Reflexiones en Simplejos Generalizados.

Sea Δ un n -simplejo generalizado en H^n todos de sus ángulos diédricos son submúltiplos de π . El grupo Γ generado por las reflexiones de H^n en los lados de Δ es por el teorema 5.3 un grupo discreto de isometrías de H^n . Γ se llama un grupo (generalizado) de reflexiones en un simplejo. La figura 5.15 ilustra la teselación de B^2 que se obtiene por reflejar en los lados de un triángulo ideal.

Ejemplo 1. Sea Γ el subgrupo de $PO(2,1)$ de todas las matrices con entradas enteras. Entonces Γ es un subgrupo discreto de $PO(2,1)$, ya que Γ es un subgrupo del grupo discreto $GL(3, \mathbf{Z})$. Mostraremos que Γ es un grupo discreto de reflexiones con respecto a un triángulo $T(2,4,\infty)$ en H^2 . Claramente Γ actúa en el conjunto $S = H^2 \cap \mathbf{Z}^3$. Observemos que el punto $e_3 = (0,0,1)$ está en S . El estabilizador de e_3 en Γ es isomorfo a $O(2) \cap GL(2, \mathbf{Z})$. De aquí Γ es un grupo diédrico de orden 8 generado por la rotación de 90° alrededor del eje z y la reflexión en el plano xz .

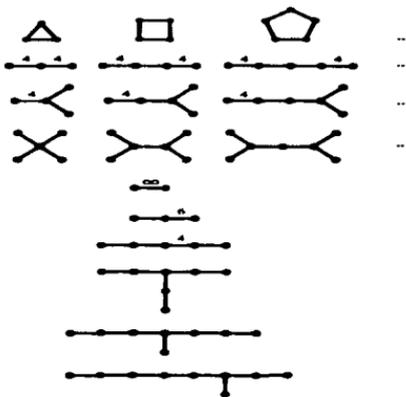


Figura 5.13. Los grupos de reflexiones en simplejos Euclidianos

Observemos que los puntos de $S - \{e_3\}$ más cercanos a e_3 son los cuatro puntos $(\pm 2, \pm 2, 3)$. Sea A la matriz Lorentziana que representa la única reflexión de H^2 que manda e_3 a $(2, 2, 3)$. Entonces $A = A^{-1} = (JAJ)^t$. Por tanto A es de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b & 2 \\ b & c & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como las columnas de A forman una base de Lorentz ortonormal de $\mathbb{R}^{2,1}$ y $\det A = -1$, deducimos que

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, A está en Γ . Observemos que A fija al plano $z = x + y$. De aquí A fija a la línea hiperbólica de H^2 dada por

$$z = x + y, \quad x^2 + y^2 - z^2 = -1, \quad z > 0.$$

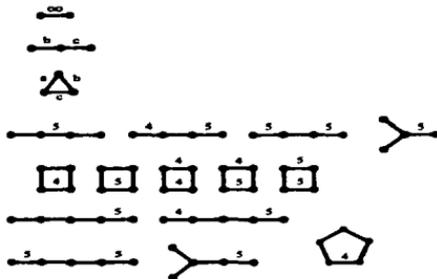


Figura 5.14. Los grupos de reflexiones en simplejos hiperbólicos

Sustituyendo la primera ecuación dentro de la segunda, vemos que A fija a la línea hiperbólica de H^2 dada por la ecuación $xy = 1/2$.

A continuación notemos que las reflexiones

$$(x, y, z) \rightarrow (x, -y, z) \text{ y } (x, y, z) \rightarrow (y, x, z)$$

fijan a las líneas hiperbólicas $y = 0$ y $x = y$, respectivamente. Sea T el triángulo en H^2 definida por las desigualdades

$$xy \leq 1/2, y \geq 0, x \geq y.$$

Entonces claramente $T = T(2, 4, \infty)$. Ver la figura 5.16. Sea Γ_1 el subgrupo de Γ generado por las matrices representando las reflexiones en los lados de T . Entonces Γ_1 es un grupo discreto de reflexiones con respecto a T .

Sea g un elemento en Γ . Entonces existe una f en Γ_1 tal que fge_3 está en T . Por tanto $fge_3 = e_3$, de esta manera fg está en el estabilizador de e_3 en Γ . Como el estabilizador de e_3 en Γ es un subgrupo de Γ_1 , tenemos que g está en Γ_1 . De esta manera $\Gamma = \Gamma_1$. Así Γ es un grupo triangular de reflexiones con respecto al triángulo $T(2, 4, \infty)$. Una buena consecuencia de este hecho es que el conjunto S de puntos enteros de H^2 es el conjunto de centros hiperbólicos de todos los cuadrados ideales de la teselación de H^2 en la figura 5.17.

Sea Γ_n el subgrupo de $PO(n, 1)$ que consiste en todas las matrices con entradas enteras. Entonces Γ_n es un subgrupo discreto de $PO(n, 1)$, ya que Γ_n es un subgrupo discreto de $GL(n+1, \mathbb{Z})$. El grupo Γ_n es un grupo de reflexiones en un n -simplejo hiperbólico no compacto para $n = 2, 3, \dots, n$.

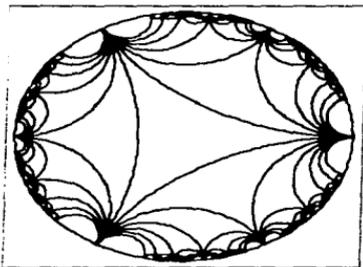


Figura 5.15. La teselación de B^2 que se obtiene de reflejar en un triángulo ideal

Las gráficas de Coxeter están ilustradas en la figura 5.18.

Definición. La matriz de Gram de un n -simplejo generalizado Δ en H^n , con lados S_1, \dots, S_{n+1} , es la $(n+1) \times (n+1)$ matriz cuya entrada i, j es $-\cos \theta(S_i, S_j)$.

El siguiente teorema se deduce del teorema 5.6.

Teorema 5.7 Sea θ_{ij} , para $i, j = 1, \dots, n+1$, números reales tales que

- (1) $\theta_{ij} = \theta_{ji}$ para todos i, j
- (2) $\theta_{ii} = \pi$ para toda i , y
- (3) $\theta_{ij} \in [0, \pi/2]$ si $i \neq j$.

Sea A la matriz de $(n+1) \times (n+1)$ cuya entrada ij es $-\cos \theta_{ij}$ y A_i la matriz de $n \times n$ que se obtiene de A borrando la i -ésima columna y el i -ésimo renglón. Entonces existe un Δ n -simplejo generalizado no compacto en H^n cuya matriz de Gram es A si y sólo si

- (1) cada columna A tiene más de una entrada distinta de cero;
- (2) la matriz A_i es la matriz de Gram de y sea un $(n-1)$ -simplejo euclidiano o esférico para cada $i = 1, \dots, n+1$; y
- (3) la matriz A_i es la matriz de Gram de un $(n-1)$ -simplejo Euclidiano para algún i .

Se sigue del teorema 5.7 y del hecho de que las gráficas de Coxeter de los grupos de reflexiones en un simplejos euclidiano son conexas, que una gráfica de Coxeter es la gráfica de un grupo de reflexiones en un n -simplejo hiperbólico no compacto si y sólo si se cumplen las siguientes propiedades:

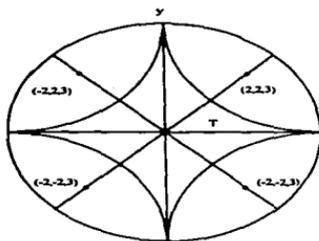


Figura 5.16. Un triángulo $T(2, 4, \infty)$ en H^2 .

- (1) El número de vértices es $n + 1$.
- (2) La gráfica es conexa.
- (3) Cualquier subgráfica se obtiene de borrar un vértice y sus aristas adjuntas es la gráfica de Coxeter de ya sea un grupo de reflexiones en un n -simplejo esférico o euclidiano.
- (4) Alguna subgráfica obtenida de borrar un vértice y sus arista adjuntas es la gráfica de Coxeter de un grupo de reflexiones de un $(n - 1)$ -simplejo euclidiano.

Para cada dimensión $n \geq 3$, existen solo un número finito de tales gráficas y tales gráficas existen solo para $n \leq 9$. La figura 5.19 ilustra las gráficas de Coxeter de todos los grupos de reflexión hiperbólicos, tetraédricos no compactos. El número de gráficas de Coxeter de grupos de reflexión para $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ es 9, 12, 3, 4, 4, 5 respectivamente.

5.4 Grupos Cristalográficos.

En esta sección revisamos brevemente la teoría de grupos cristalográficos.

Definición: Un grupo cristalográfico de dimensión n es un grupo discreto Γ de E^n tales que E^n/Γ es compacto.

Son ejemplos de grupos cristalográficos los grupos de reflexiones de simplejos euclidianos dados en la figura 5.13.

Teorema 5.8 Sea Γ un grupo discreto de isometrías de E^n . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

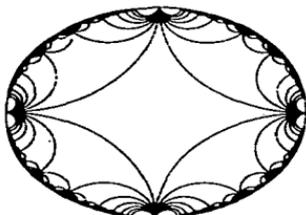


Figura 5.17. La teselación del disco unitario por cuadrados ideales.

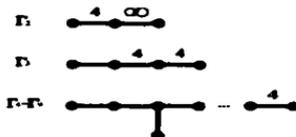


Figura 5.18. Las gráficas de Coxeter para los grupos Γ_n para $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

- (1) El grupo Γ es cristalográfico.
- (2) Cada poliedro convexo fundamental de Γ es compacto.
- (3) El grupo Γ tiene un poliedro de Dirichlet compacto.

Demostración:

(1) implica (2) por el teorema 4.10. Claramente se dan las otras implicaciones. ■

Sea P un poliedro convexo fundamental para un grupo cristalográfico Γ de dimensión n . P es compacto por el teorema 5.9. Por tanto P está acotado y solo tiene un número finito de lados. Consideremos a P como el modelo de un cristal de dimensión n , y a la teselación $\{gP : g \in \Gamma\}$ de E^n como el modelo de una estructura cristalina.

El estudio de las estructuras cristalinas se llama cristalografía. Para el final del siglo XIX, los cristalógrafos habían clasificado los grupos cristalográficos de dimensiones 1, 2 y 3. Para cada una de estas dimensiones, se determinó que solo existen un número finito de grupos cristalográficos

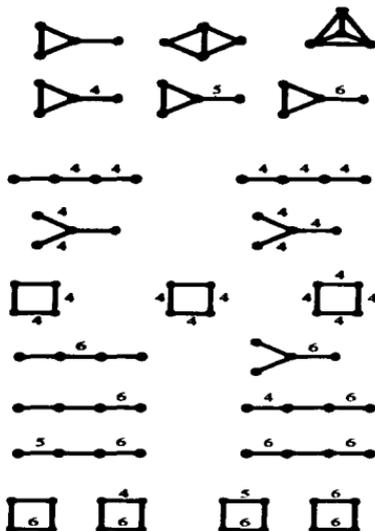


Figura 5.19. Los grupos de reflexiones en tetraedros hiperbólicos no compactos.

esencialmente distintos. Esto llevó a Hilbert a preguntarse si existen un solo número finito de grupos cristalográficos en cada dimensión esencialmente distintos. Este es el problema 18 de su famosa lista de problemas y fue contestado afirmativamente por Bieberbach en 1910. Bieberbach probó que solo había un número finito de clases de isomorfismos de grupos cristalográficos de dimensión n para cada n . En esta sección, probaremos el teorema de Bieberbach.

Lema 1. *Si H es un subgrupo de índice finito de un grupo discreto Γ de isometrías de $X = E^n$ o H^n , entonces X/Γ es compacto si y sólo si X/H es compacto.*

Demostración:

Supongamos que X/H es compacto. Definamos una función

$$\phi : X/H \rightarrow X/\Gamma$$

por $\phi(Hx) = \Gamma x$. Sean $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$ y $\eta : X \rightarrow X/H$ las proyecciones naturales. Entonces $\pi = \phi\eta$. Por tanto ϕ es continua. Como ϕ es suprayectiva, X/Γ es compacto.

Recíprocamente, supongamos que X/Γ es compacto. Sea D un dominio de Dirichlet para Γ . Entonces D es un dominio fundamental localmente finito para Γ . Por tanto \bar{D} es compacto por el teorema 4.10. Sean g_1H, \dots, g_mH las clases laterales de H en Γ y definamos

$$K = g_1^{-1}\bar{D} \cup \dots \cup g_m^{-1}\bar{D}.$$

Entonces K es un subconjunto compacto de X . Sea x un punto de X . Entonces existe una $g \in \Gamma$ tal que gx está en \bar{D} ; más aún, existe un índice i tal que $g = g_i h$ para alguna h en H . De aquí, hx está en $g_i^{-1}\bar{D}$. Así Hx está en $\eta(K)$. Esto muestra que $X/H = \eta(K)$ y por tanto X/H es compacto.

Teorema 5.9 *Sea Γ un grupo discreto de isometrías de E^n . Entonces Γ es cristalográfico si y sólo si el subgrupo T de translaciones de Γ es de índice finito y tiene rango n .*

Demostración:

Supongamos que Γ es cristalográfico. Por el teorema 2.12, el grupo Γ tiene un subgrupo abeliano H de índice finito que contiene a T ; además, H es también cristalográfico por el Lema 1. Por el teorema 2.13, existe un m -plano P de E^n en el cual H actúa por translaciones. Ya que los puntos a distancia d de P permanecen a distancia d de P bajo la acción de H , el espacio de órbitas E^n/H no es acotado si $m < n$. Luego H es un subgrupo latiz de $I(E^n)$. De aquí $H = T$, T es de índice finito en Γ y tiene rango n .

Recíprocamente, supongamos que el subgrupo T de translaciones de Γ es de índice finito y tiene rango n . Por el ejemplo 9 de 2.3, existe una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de \mathbb{R}^n tal que T es el grupo generado por las translaciones de E^n por v_1, \dots, v_n . Claramente, el paralelepípedo P generado por v_1, \dots, v_n es un poliedro convexo fundamental para T . Como P es un compacto, E^n/T es también compacto. Por tanto E^n/T es compacto por el Lema 1. ■

Sea Γ un grupo cristalográfico de dimensión n y $T = T(\Gamma)$ su grupo de translaciones. Entonces T es un grupo abeliano libre de rango n y tiene índice finito en Γ por el teorema 5.9. Más aún, por el teorema 2.13, el subgrupo T de Γ está caracterizado como el único subgrupo abeliano libre maximal de Γ . Consecuentemente, el rango n de T es invariante bajo isomorfismos de Γ . Por tanto, la dimensión n de Γ es un invariante en Γ .

Sea $\eta : \Gamma \rightarrow O(n)$ la proyección natural definida por $\eta(a + A) = A$. La imagen Π de η es llamada el grupo puntual de Γ . Como T es el kernel de η , tenemos una sucesión exacta de grupos:

$$1 \rightarrow T \rightarrow \Gamma \xrightarrow{\eta} \Pi \rightarrow 1$$

Por tanto, T es un subgrupo normal de Γ y Π es un grupo finito. Más aún, la conjugación en Γ induce a una acción izquierda de Π en T que convierte a T en un H -módulo. Sea $L = L(\Gamma)$ el subgrupo latiz de \mathbb{R}^n que corresponde a T . Si $a + A$ esta en Γ y b esta en L , entonces:

$$(a + A)(b + I)(a + A)^{-1} = Ab + I.$$

De aquí Π actúa en L mediante la multiplicación de matrices por la izquierda. Por el teorema 2.13 el grupo T es un subgrupo abeliano maximal de Γ . Se sigue que Π actúa en T y por tanto en L . Consecuentemente, tenemos una representación de Π en $Aut(L)$ dada por $A \rightarrow \phi_A$ donde $\phi_A(x) = Ax$. Como L es isomórfico a \mathbb{Z} , tenemos una sucesión exacta de grupos:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma \rightarrow Q \rightarrow 1 \quad (5.1)$$

donde Q es un subgrupo finito de $GL(n\mathbb{Z})$ y la acción izquierda de Q en \mathbb{Z}^n inducida por la conjugación en Γ es la acción natural de Q en \mathbb{Z}^n . El método más común para probar que existen solo un número finito de clases de isomorfismos de grupos cristalográficos de dimensión n , es probar que existen solo un número finito de clases de isomorfismos de extensiones de grupos de la forma (5.1). Tomaremos un acercamiento diferente, más geométrico, el cual explota la geometría de los latices de \mathbb{R}^n .

Lema 2. Sea $B(a, r)$ la bola abierta en E^n con centro a y radio r . Entonces existe una constante positiva c_n , dependiendo solo en n , tal que

$$Vol(B(a, r)) = c_n r^n.$$

Demostración:

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a = 0$. Integrando con respecto a las coordenadas esféricas, tenemos

$$\begin{aligned} Vol(B(0, r)) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \rho^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2} d\rho d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} = \\ &= \frac{r^n}{n} Vol(S^{n-1}). \end{aligned}$$

De aquí, la constante buscada es:

$$c_n = \frac{1}{n} Vol(S^{n-1}).$$

Definición. Una latiz L en \mathbb{R}^n es de escala completa si y sólo si todos los vértices distintos de cero de L tienen norma al menos 1.

Lema 3. Sea L una latiz completa en \mathbb{R}^n y para cada $r \geq 0$, sea $N(r)$ el número de vectores en L cuya norma es a lo más r . Entonces

$$N(r) \leq (2r + 1)^n.$$

Demostración:

Ya que L es de escala completa, la distancia entre cualesquiera dos vectores distintos es al menos 1. Consecuentemente, las bolas abiertas de radio $1/2$ centradas en los $N(r)$ vectores de L , cuya norma es a lo más r , son ajenas dos a dos y están contenidas en la bola de radio $r + 1/2$ centrada en el origen. Comparando los volúmenes, deducimos del lema 2 que

$$N(r) \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \left(r + \frac{1}{2}\right)^n.$$

Lema 4. Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de \mathbb{R}^n . Entonces para cada x en \mathbb{R}^n , existen enteros k_1, \dots, k_n tales que

$$\left| x - \sum_{i=1}^n k_i v_i \right| \leq \frac{1}{2}(|v_1| + \dots + |v_n|).$$

Demostración:

Sea x en \mathbb{R}^n . Entonces existen números reales t_1, \dots, t_n tales que $x = \sum_{i=1}^n t_i v_i$. Sea k_i el entero más cercano a t_i en \mathbb{R} . Entonces tenemos

$$\left| x - \sum_{i=1}^n k_i v_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^n (t_i - v_i) v_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |(t_i - k_i) v_i| \leq \frac{1}{2}(|v_1| + \dots + |v_n|).$$

Lema 5. Sea V un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n generado por m vectores unitarios linealmente independientes v_1, \dots, v_m de una latiz de escala completa en \mathbb{R}^n . Si un vector u en L no está en V , entonces su V^\perp -componente ω tiene norma

$$|\omega| > (m + 3)^{-n}.$$

Demostración:

Sea u un vector en L cuya V^\perp -componente ω satisface

$$0 \leq |\omega| \leq (m + 3)^{-n}.$$

Sea

$$k = (m + 3)^n.$$

Entonces $k|\omega| \leq 1$. De aquí, los vectores $0, u, 2u, \dots, ku$ están a distancia a lo más 1 de V . Por el lema 4, podemos añadir combinaciones lineales enteras de v_1, \dots, v_m adecuadas a cada uno de estos vectores para obtener $n + 1$ nuevos vectores distintos en L cuyas V^\perp -componentes no han cambiado, pero cuyas V -componentes tienen norma menor que $m/2$. Estos $k + 1$ vectores de L tienen norma menor que

$$r = \left(\frac{m}{2}\right) + 1.$$

Por el lema 3, tenemos

$$k + 1 \leq N(v) \leq (2r + 1)^n = (m + 3)^n$$

lo cual es una contradicción. Por tanto

$$|\omega| > (m + 3)^{-n}.$$

Definición. Un grupo cristalográfico Γ de dimensión n está normalizado si y sólo si su latiz $L(\Gamma)$ es de escala completa y contiene n vectores unitarios linealmente independientes. ■

Lema 6. Sea Γ un grupo cristalográfico de dimensión n . Entonces Γ es isomorfo a un grupo cristalográfico normalizado de dimensión n .

Demostración:

Cambiando la escala, podemos suponer que los vectores distintos de cero, con la norma más pequeña en $L(\Gamma)$ son vectores unitarios. Supongamos por inducción que $L(\Gamma)$ es de escala completa y que contiene $m < n$ vectores unitarios linealmente independientes v_1, \dots, v_m . Debemos encontrar un grupo cristalográfico Γ' de dimensión n isomorfo a Γ tal que $L(\Gamma')$ es de escala completa y que contiene $n + 1$ vectores unitarios linealmente independientes. Sea V un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n generado por v_1, \dots, v_m . Supongamos primero que la acción del grupo puntual Π de Γ en $L(\Gamma)$ no deja a V invariante. Entonces existe un elemento A de Π y un índice i tal que Av_i no está en V . Sea $v_{m+1} = Av_i$. Entonces v_1, \dots, v_{m+1} son $m + 1$ vectores linealmente independientes unitarios en $L(\Gamma)$. Por tanto, Γ es el grupo buscado.

Supongamos ahora que Π deja a V invariante. Entonces Π también deja a V^\perp invariante. Para cada $t > 0$, definamos un automorfismo lineal α_t de \mathbb{R}^n por la fórmula

$$\alpha_t(u) = v + t\omega,$$

donde $u = v + \omega$, con $u \in V$ y $\omega \in V^\perp$. Sea $a + A$ en Γ . Como A deja a V y a V^\perp invariantes, tenemos

$$\alpha_t(a + A)\alpha_t^{-1} = \alpha_t(a) + A.$$

De aquí, para cada $t > 0$, el grupo

$$\Gamma_t = \alpha_t \Gamma \alpha_t^{-1} = \alpha_t(a) + A.$$

es un subgrupo de $I(E^n)$. Como

$$T(\Gamma_t) = \alpha_t T(\Gamma) \alpha_t^{-1}$$

y $T(\Gamma_t)$ es de índice finito en Γ_t para cada $t > 0$, tenemos que Γ_t es un grupo cristalográfico de dimensión n para cada t . Más aún, tenemos

$$L(\Gamma_t) = \alpha_t(L(\Gamma)).$$

Sea u un vector arbitrario en $L(\Gamma) - V$ y escribamos $u = v + w$ con v en V y w en V^\perp . Entonces para t tal que

$$0 < t \leq |w|^{-1} (m+3)^{-n},$$

el vector $v + tw$ está en $L(\Gamma_t) - V$ y

$$|tw| \leq (m+3)^{-n}.$$

Por el lema 5, la latiz $L(\Gamma_t)$ no puede ser de escala completa. Sea

$$s = \inf\{t : L(\Gamma_t) \text{ es de escala completa}\}.$$

Entonces $0 < s \leq 1$. Como $|\alpha_t(u)| \geq 1$ para toda $t > s$, tenemos que $|\alpha_s(u)| \geq 1$, ya que $|\alpha_t(u)|$ es una función continua de t . Por tanto $L(\Gamma_s)$ es de escala completa.

Sea u_0 el vector de norma más pequeña en $L(\Gamma_t) - V$. Afirmamos que u_0 es un vector unitario. Si por el contrario, $|u_0| > 1$, reemplazando Γ por Γ_s , podemos suponer que $s = 1$. Escribamos $u_0 = v_0 + w_0$ con v_0 en V y w_0 en V^\perp . Como $|u_0|^2 \geq |v_0|^2$, tenemos:

$$|v|^2 + |w|^2 \geq |v_0|^2 + |w_0|^2.$$

Sea $t = |u_0|^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned} |\alpha_0(u)|^2 &= |v + tw|^2 = |v|^2 + t^2 |w|^2 \geq |v|^2 + t^2 (|v_0|^2 + |w_0|^2 - |v|^2) \\ &= |v|^2 (1 - t^2) + t^2 |u_0|^2 \geq t^2 |u_0|^2 = 1, \end{aligned}$$

por tanto $L(\Gamma_t)$ es de escala completa contrario a la minimalidad de s . Entonces, tenemos que $v_{m+1} = u_0$ es un vector unitario. De aquí v_1, \dots, v_{m+1} son $m+1$ vectores unitarios linealmente independientes en $L(\Gamma_s)$. Por tanto Γ_s es el grupo deseado. Esto completa la inducción. Y así Γ es isomorfo a un grupo cristalográfico normalizado de dimensión n . ■

Teorema 5.10 (Teorema de Bieberbach) *Para cada dimensión n , existen solo un número finito de clases de isomorfismos de grupos cristalográficos de dimensión n .*

Demostración:

Fijemos un entero positivo n . Por el lema 6 es suficiente mostrar que existen solo un número finito de clases de isomorfismos de grupos cristalográficos normalizados de dimensión n . Sea Γ un grupo de estos. Entonces $L(\Gamma)$ contiene n vectores unitarios linealmente independientes $\omega_1, \dots, \omega_n$. Para cada i , sea $w_i = \omega_i + I$ la traslación correspondiente en Γ , y sea H el subgrupo de $T(\Gamma)$ generado por w_1, \dots, w_n . Entonces H es un grupo abeliano libre de rango n y por tanto tiene índice finito en $T(\Gamma)$. Por el teorema 5.9, el grupo $T(\Gamma)$ tiene índice finito en Γ . De aquí H es de índice finito en Γ .

Por el lema 4, podemos escoger para cada clase lateral Hw de H en Γ un representante $w = \omega + A$ cuyo vector de traslación ω tiene norma $|\omega| \leq n/2$. Sean w_{n+1}, \dots, w_m las clases laterales escogidas. Entonces cada elemento ϕ de Γ puede expresarse únicamente en la forma

$$\phi = (a_1\omega_1 + \dots + a_n\omega_n + I)w_p,$$

donde a_1, \dots, a_n y p son enteros con $n+1 \leq p \leq m$. Llamaremos a esta expresión *la forma normal de ϕ* .

Ya que cada elemento de Γ tiene una única forma normal, existen para cada $i, j = 1, \dots, m$, enteros únicos c_{ijk} y $f(i, j) > n$ tal que

$$w_i w_j = (c_{ij1}\omega_1 + \dots + c_{ijn}\omega_n + I)w_{f(i,j)}.$$

Los enteros c_{ijk} y $f(i, j)$ determinan completamente a Γ , ya que uno puede encontrar la forma normal de un producto de elementos ϕ, ψ de Γ dadas sus formas normales para ϕ, ψ y $w_i w_j$ para cada $i, j = 1, \dots, m$. Para ver esto, sean

$$\begin{aligned}\phi &= (a_1\omega_1 + \dots + a_n\omega_n + I)w_p, \\ \psi &= (b_1\omega_1 + \dots + b_n\omega_n + I)w_q\end{aligned}$$

las formas normales para ϕ y ψ . Entonces

$$\phi\psi = (a_1\omega_1 + \dots + a_n\omega_n + I)w_p(w_{b_1}^{b_1} \dots w_n^{b_n})w_q.$$

Para encontrar la forma normal para $\phi\psi$, es suficiente encontrar la forma normal de $w_p(w_{b_1}^{b_1} \dots w_n^{b_n})w_q$. Si $b_1 > 0$, reemplazamos $w_p w_1$ por su forma normal. Esto tiene el efecto de disminuir b_1 a $b_1 - 1$. Si $b_1 < 0$, reemplazamos $w_p w_1^{-1}$ por su forma normal

$$w_p w_1^{-1} = (d_1\omega_1 + \dots + d_n\omega_n + I)w_i.$$

Observemos que

$$w_i w_1 = (-d_1 \omega_1 - \dots - d_n \omega_n + I) w_p.$$

Entonces i es el único entero tal que $p = f(i, j)$; más aún $d_k = -c_{ik}$ para cada $k = 1, \dots, n$. Así, podemos elevar b_1 a $b_1 + 1$. Es claro que por la aplicación repetida de estos dos pasos podemos encontrar la forma normal de $\phi\psi$.

Algo más es cierto. Los enteros c_{ijk} y $f(i, j)$ determinan a Γ salvo isomorfismos, en el sentido de que si Γ' es otro grupo cristalográfico normalizado de dimensión n , con los mismos enteros, entonces Γ y Γ' son isomórficos. Para ver esto, sean $\omega'_1, \dots, \omega'_n$ los vectores unitarios correspondientes de $L(\Gamma')$ y sean $\omega'_{n+1}, \dots, \omega'_m$ las clases laterales representativas correspondientes. Entonces la función $\xi: \Gamma \rightarrow \Gamma'$, definida por

$$\xi((a_1 \omega_1 + \dots + a_n \omega_n + I) w_p) = (a_1 \omega'_1 + \dots + a_n \omega'_n + I) \omega'_p,$$

es un isomorfismo, ya que ξ es una biyección, y el mismo algoritmo determina la forma normal para un producto en cada grupo. Así, para probar que existen solo un número finito de clases de isomorfismos de grupos cristalográficos de dimensión n , es suficiente mostrar que los valores absolutos de los enteros c_{ijk} y m tienen una cota superior dependiendo solo de la dimensión n .

Los elementos w_i, w_j y $w_{f(i,j)}$ tienen vectores de translación de longitud a lo más $n/2$. Consecuentemente, el vector translación de

$$c_{ij1} \omega_1 + \dots + c_{ijn} \omega_n + I = w_i w_j w_{f(i,j)}^{-1}$$

tiene longitud a lo más $3n/2$. Sea v_k la componente de ω_k perpendicular al hiperplano generado por $\omega_1, \dots, \omega_{k-1}, \omega_{k+1}, \dots, \omega_n$. Entonces

$$|c_{ijk} v_k| \leq 3n/2.$$

Por el lema 5, tenemos que

$$|v_k| > (n+2)^{-n}.$$

De aquí, para cada i, j, k , tenemos

$$|c_{ijk}| \leq \frac{3n}{2} (n+2)^n.$$

Ahora encontraremos una cota superior para m . Primero que todo, tenemos que

$$m - n = [\Gamma : H] = [\Gamma : T(\Gamma)][T(\Gamma) : H].$$

Las translaciones entre los representantes $\omega_{n+1}, \dots, \omega_m$ forman un conjunto completo de clases laterales de representantes para H en $T(\Gamma)$. Cada vector translación ω_i tiene norma a lo más $n/2$ y, por el lema 3, es uno de a lo más $(n+1)^n$ vectores en $L(\Gamma)$. De aquí

$$[T(\Gamma) : H] \leq (n+1)^n.$$

Ahora observemos que

$$[\Gamma : T(\Gamma)] = |\Pi|,$$

donde Π es el grupo puntual de Γ . Sea A en Π . Entonces A está determinado de manera única por las imágenes $A\omega_i$ para $i = 1, \dots, n$. Por el lema 3, el vector $A\omega_i$ es uno de al lo más 3^n vectores unitarios distintos en $L(\Gamma)$. De aquí A es uno de a lo más $(3^n)^n$ matrices diferentes en $O(n)$. De aquí

$$[\Gamma : T(\Gamma)] \leq (3^n)^n.$$

Así, tenemos

$$m \leq n + (3^n)^n (n + 1)^n.$$

■

Observación. El número exacto de clases de isomorfismo de grupos cristalográficos de dimensión n para $n = 1, 2, 3, 4$ es 2, 17, 219, 4783, respectivamente.

Referencias

[1]

- [B] Beardon, A. F., *The geometry of discrete groups*. Springer Verlag, New York Inc. 1983.
- [Co1] Coxeter H. S. M., *Groups whose fundamental regions are simplexes*, J. London Math. Soc., 6 (1931), 133-136.
- [Co2] Coxeter H. S. M., *The complete enumeration of finite groups of the form $R_1^2 = (R_1 R_2)^{k+1}$* , J. London Math. Soc. 10 (1935), 21-25.
- [Co3] Coxeter H. S. M., *Regular Polytopes 3rd Ed.*, Dover, New York (1973).
- [Du] Dugundji, J., *Topology*, Allyn and Bacon, Boston (1966).
- [L] Lehner, J., *Discontinuous Groups and Automorphic Functions*, Math. Surveys, 8, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1964).
- [O] Oliver, R. K., *On Bieberbach's analysis on discrete Euclidean groups*, Proc. Amer. Math. Soc., 80 (1980), 15-21.
- [P] Pontryagin, L. S., *Selected Works, Topological Groups, 3rd Ed. Vol 2*, Gordon and Breach Science Pub. (1986).
- [Ra] Ratcliffe, G., *Fundations of hyperbolic manifolds*. Springer Verlag, New York 1994.

Índice

S

- m*-plano hiperbólico, 9
- m*-esfera, 55
- m*-plano
 - en S^n , 55
- m*-simplejo, 76
 - generalizado, 79
 - ideal, 79

A

- acción de un grupo, 3
- ángulo diédrico, 107
- propio, 107
- arco geodésico, 4
- arista, 61

B

- base ortonormal, 3
- base ortonormal de Lorentz, 7

C

- centroide, 77
- ciclo de lados, 111
- ciclo de poliedros, 108
- conjunto convexo, 55
 - en E^n , 4
- cono de luz, 6
- cristalografía, 141
- curva, 4

D

- dominio fundamental, 86

E

- envolvente convexa, 64
- envolvente convexa en D^n , 74
- eslabón, 66
- espacio métrico, 2
 - finitamente compacto, 2
 - rígido, 93

- espacio vectorial complejo, 20
- extensión de Poincaré, 12

F

- forma normal, 147

G

- geodésica, 4
- actúa discontinuamente, 32
- grupo elemental, 46
 - tipo elíptico, 46
 - tipo hiperbólico, 46
 - tipo parabólico, 46
- grupo cristalográfico, 140
- grupo,
 - de simetrías, 31
 - discreto, 30
 - puntual, 142
 - topológico, 20
- grupo cristalográfico normalizado, 145
- grupo de Lorentz, 7-8
- topológicamente isomorfos, 24

H

- horopunto, 70

I

- isometría, 3
- isometría elíptica, 36
- isometría parabólica, 36

L

- lado, 56
- pareado, 105
- lado
 - incidente, 69
- pareo, 106
 - ciclos de un, 106
 - transformaciones, 106
- latiz, 31

M

- métrica,
 - métrica de Poincaré
 - en B^n , 14
 - en U^n , 15
- Matriz de Gram , 138
- modelo del semiespacio superior, 15

N

- norma hermitiana, 21

O

- ortogonales
 - de Lorentz, 8

P

- poliedro,
 - poliedro59
 - fundamental, 99
 - fundamental exacto, 102
 - poliedro de Dirichlet, 99
- politopo, 76
 - generalizado, 78
 - regular, 80
- producto interior, 1
- producto interior Hermitiano, 20
 - de Lorentz, 6
- proyección estereográfica, 10
- punto ideal, 69

R

- razon cruzada, 11
- region fundamental, 86
 - para un grupo discreto de isometrías, 87
- relación
 - de pareo de lados, 111
 - relación cíclica, 111

S

- subdivisión baricéntrica, 130
- simplejo canónico, 76
- subespacio espacial, 8
- subespacio luminoso, 8

- subespacio temporal, 8
- suggrupo latiz, 43
- sucesión de lados, 110

T

- teselación, 103
 - exacta, 103
 - regular, 103
- tipo de una matriz, 132
- topología compacto-abierta, 18
- transformación de Lorentz, 7
- transformación de Möbius, 11
 - en U^n , 12
- transformación de Möbius
 - de S^n , 13
- transformación ortogonal, 3
- translación hiperbólica, 14

V

- vector espacial, 6
- vector luminoso, 6
- vector temporal, 6
- vértice, 64
 - generalizado , 73
 - ideal, 72