81
2cj.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELO PARA EL CALCULO DE LA EXPOSICION AL RIESGO DE MERCADO DE UN PORTAFOLIO.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

AGUSTIN PEREZ MIRANDA

DIRECTOR DE TESIS: ACT. TOMAS FERNANDEZ CRUZ.

1997

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"MODELO PARA EL CÁLCULO DE LA EXPOSICIÓN AL RIESGO DE MERCADO DE UN PORTAFOLIO"

realizado por Agustín Pérez Miranda

con número de cuenta 9052106-3 , pasante de la carrera de Actuaría .

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Act. Tomás Fernández Cruz
Propietario	Act. Javier Ibarra Piña
Propietario	Act. César Castillo Villanueva
Suplente	Act. Gerardo Loredo Fuentes
Suplente	Act. Carlos Ortiz Alfie

Consejo Departamental de Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

A mis padres,
a quienes debo todo
lo que soy.

A mis Hermanos,
por todo su apoyo.

A mis Amigos,
por su amistad incondicional.

A todos los que participaron
en la elaboración de este trabajo,
Muchas Gracias.

MODELO PARA EL CALCULO DE LA EXPOSICIÓN AL RIESGO DE MERCADO DE UN PORTAFOLIO

Agustín Pérez Miranda.

INDICE

INTRODUCCION.

Una de las principales preocupaciones de los participantes en los mercados financieros es el riesgo de mercado. Las instituciones reguladoras, los bancos comerciales, de inversión, las empresas corporativas y los inversionistas institucionales están centrándose en los niveles de riesgo de los que son partícipes.

Pero, ¿por qué surge la inquietud de desarrollar una metodología para monitorear los riesgos de mercado?, bueno pues sencillamente por el desarrollo que han experimentado los mercados financieros a lo largo de las últimas décadas, este desarrollo ha incrementado la volatilidad de los mercados y ésta a su vez ha incrementado la exposición al riesgo de los participantes de estos mercados.

Por ejemplo, si una compañía tiene deuda en dólares, es de su interés que el tipo de cambio baje, es decir, tiene una posición corta en dólares. De la misma manera si una compañía exporta a Estados Unidos, esta compañía genera dólares y es de su interés que el tipo de cambio suba, es decir, tiene una posición larga en dólares. En caso de que el tipo de cambio suba, la compañía exportadora se beneficiará y la compañía con deuda en dólares se perjudicará, y viceversa.

De la misma manera que en el ejemplo anterior, todos los participantes de los mercados financieros tienen posiciones (largas o cortas) en diferentes instrumentos como pueden ser las tasas de interés, bonos, acciones, monedas, bienes no diferenciables (*commodities*), etc.

Por ejemplo, una compañia de manufactura tiene una posición natural corta en sus insumos y una posición natural larga en sus productos terminados. La utilidad de este tipo de compañias está dado básicamente por las ventas de los productos terminados menos el costo de los insumos menos el costo de operación. Para efectos del ejemplo, supongamos que los costos de operación son fijos. Si el precio de los insumos sube, los productos terminados deberán subir en la misma cantidad para que la utilidad no se vea afectada, pero en realidad esto no sucede. Si los insumos suben de precio, es de esperarse que también lo hagan los productos terminados, pero en caso contrario la utilidad se vera disminuida; pero si el precio de los productos terminados subiese mas de lo que subieron los insumos, la utilidad de esta compañia se verá incrementada. Lo que se reduce a que la compañia tiene una posición larga en la diferencia entre productos terminados menos insumos (o una posición corta en la diferencia insumos menos productos terminados).

El ejemplo anterior es para una compañia que tiene costos de operación fijos (al menos no se ven afectados por movimientos en ninguno de los mercados financieros), y que produce únicamente un producto terminado a partir de un solo insúmo. Lo que sucede en realidad es que las compañias producen una variedad de productos, requieren de varios insumos, tienen créditos y/o inversiones, por lo que se ven afectadas por las tasas de interés, y en general se ven afectadas por las cotizaciones en los mercados financieros.

En este trabajo se presenta una metodología para el cálculo del riesgo teórico de un portafólio, en el que los elementos del portafolio sean todas las posiciones que se tengan. En el capítulo uno se hace una descripción de los riesgos de mercado y una explicación del método para calcular el riesgo de una posición única y de varias posiciones en un portafolio. En el capítulo dos se cuestiona la validéz de las hipótesis estadísticas que se utilizaron en el capítulo uno. En el capítulo tres se presenta una propuesta para el cálculo de las volatilidades y correlaciones, para el cálculo del riesgo de todo el portafolio. Las volatilidades y correlaciones se calculan tanto ex-ante como ex-post, para hacer una evaluación *a posteriori* del modelo.

CAPITULO 1

El Riesgo de Mercado.

1.1 Conceptos.

Se define riesgo como el grado de incertidumbre de los retornos o utilidades (pérdidas) futuras.

Esta incertidumbre puede ser de distintas clases, por lo que la mayoría de los participantes en los mercados financieros están sujetos a una gran variedad de riesgos, como pueden ser:

i) **Riesgo de crédito:** estima el potencial de pérdida debido a la incapacidad de cumplimiento de las obligaciones de una contraparte;
ii) **Riesgo de operación** surge de errores en la ejecución, como la definición del monto o fecha de pagos;
iii) **Riesgo de liquidez:** es la incapacidad de una institución para neutralizar o liquidar una posición; y
iv) **Riesgo de mercado:** es la incertidumbre de los ingresos futuros resultantes de los cambios en las condiciones de mercado, como pueden ser el precio de los activos, tasas de interés y la tasa de tipo de cambio.

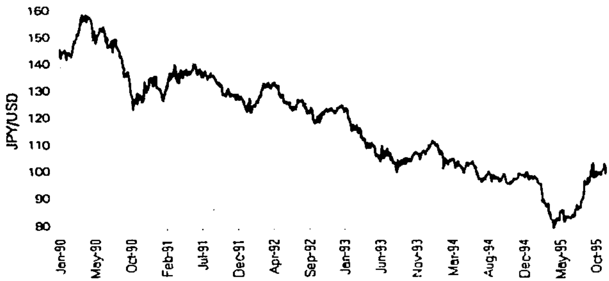
1.2 Descripción de los movimientos de mercado.

Consideremos el tipo de cambio entre el dólar americano y el yen japonés. En la gráfica 1 se muestra la evolución de este de enero de 1990 a noviembre de 1995.

Gráfica 1

Tipo de Cambio: JPY / USD

Enero 1990 a Noviembre 1995

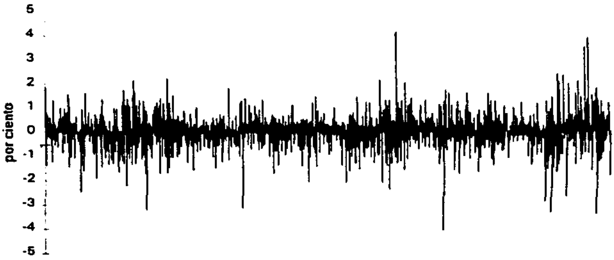


Para una serie histórica de precios R_t, definimos el rendimiento diario porcentual como: $X_t = (R_t - R_{t-1}) / R_{t-1}$. En la Gráfica 2 tenemos el rendimiento diario porcentual del tipo de cambio.

Gráfica 2

Rendimiento diario porcentual Tipo de Cambio: JPY / USD

Enero 1990 a Noviembre 1995

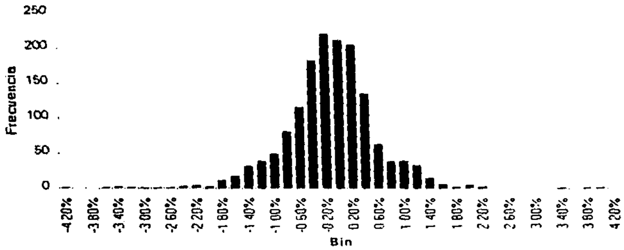


Nuestro objetivo es medir la incertidumbre de X_t, i.e. su volatilidad. La volatilidad de los rendimientos puede ser medida como la variación histórica alrededor de su media. Por lo tanto, el riesgo de mercado puede ser medido por la desviación estándar de los rendimientos. Habiendo obtenido una medida para la volatilidad, podemos estimar el riesgo en el que se incurre al tener una posición larga o corta en cualquier instrumento que sea valuado por su precio de mercado, del cual podemos calcular la serie de rendimientos históricos.

Como una primera aproximación visual, podemos construir el histograma de los rendimientos diarios. Un histograma agrupa los rendimientos diarios en rangos llamados clases (*bins*) y grafica el número de ocurrencias en cada clase (*bin*). La distribución de esos rendimientos alrededor de su media será la que representará correctamente el riesgo. De nuestro ejemplo se puede observar el histograma en la Gráfica 3.

Gráfica 3

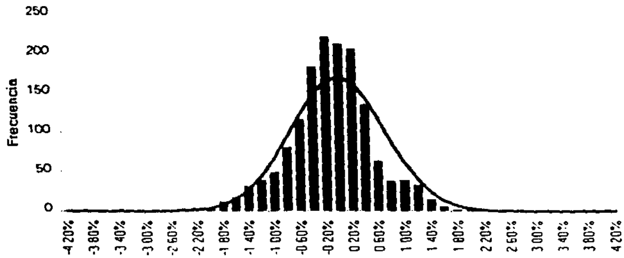
Distribución de los rendimientos diarios porcentuales



Esta gráfica muestra que la media -0.0209% se encuentra en el rango de frecuencia máxima (-0.2% , 0%). La media negativa refleja la tendencia a la baja durante el periodo. A pesar de que la gráfica nos muestra la distribución de los rendimientos, no nos proporciona una muestra clara para medir el riesgo.

Un paso importante para medir el riesgo, es la selección de una función matemática que describa la distribución de los rendimientos. Se necesita seleccionar alguna distribución estadística con propiedades "que tengan buen comportamiento" para describir los rendimientos, siendo la distribución Normal la que otorga una descripción general de las distribuciones de rendimientos diarios en los mercados de precios y tasas. En la Gráfica 4 la línea muestra la frecuencia que deberíamos esperar en cada rango si la distribución fuera una Normal perfecta.

Gráfica 4



La distribución Normal es ampliamente utilizada para describir movimientos aleatorios. Se caracteriza por solo dos parámetros: la media (donde se localiza el pico) y por la desviación estándar (el ancho de la campana). La función de densidad normal es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right]$$

donde:

μ = media; y

σ = desviación estándar.

La función de densidad $f(x)$ describe la probabilidad de que un movimiento caiga en un rango alrededor de x. La probabilidad de obtener una observación, de una variable aleatoria normal, a menos de una desviación estándar de la media es de 0.68. Esto nos da una descripción intuitiva de la desviación estándar: mide el rango alrededor de la media en donde se espera obtener el 68% del total de las ocurrencias. En términos matemáticos escribimos esta probabilidad como:

$$\begin{aligned}\Pr(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) &= \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f(x)dx \\ &= \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right]dx \\ &= 0.68\end{aligned}$$

En este documento definimos un movimiento "adverso" X_a, como el cambio diario en cualquier dirección (hacia arriba o hacia abajo), que no se espera que ocurra mas del 10% de las veces. Esto se expresa como:

$$\Pr(\mu - X_a, \mu + X_a) = 0.90$$

Basados en la distribución normal, podemos resolver para un movimiento adverso:

$$X_a = 1.65\sigma$$

Esto es, un movimiento "adverso" es equivalente a 1.65 desviaciones estándar, asumiendo que los rendimientos diarios se distribuyen normalmente.

Regresando al ejemplo del tipo de cambio, la serie tiene una media de -0.0209% y una desviación estándar de 0.7156

Media	μ =-0.0209%
Desviación Estándar	σ =0.7156%

Por lo tanto, puede ser estimado que el 68% de los rendimientos diarios estén situados entre -0.7365 (-0.0209% - 1*0.7156) y 0.6947% (-0.0209% + 1*0.7156). De la misma manera, el 90% de los rendimientos diarios debería estar situado entre -1.2016% (-0.0209% - 1.65*0.7156) y 1.1598% (-0.0209% + 1.65*0.7156)

1.3 Estimando los cambios de valor: El Riesgo de Mercado.

1.3.1 El Riesgo de Mercado en una posición única.

Apliquemos la distribución de rendimientos diarios para las Acciones de Banacci Serie A de Enero de 1992 a Abril de 1996 en un ejemplo práctico.

Supongamos que se tiene una posición única de 100,000 Acciones de Banacci A al 30 de Abril de 1996. Dado el precio de mercado de la Acción en ese momento de $14.90 por acción, el valor de las acciones sería de $1,490,000. Suponiendo una distribución Normal, y si la volatilidad histórica se mantiene durante las próximas 24 horas, se estima con un 90% de confianza que el valor de la posición no cambiará más de +/- 4.5596%, es decir, que esperamos que el valor total de las acciones no cambie más de $67,938 en un periodo de 24 horas. Bajo este contexto existe una probabilidad de 5% de que la posición se deprecie más de $67,938, y de la misma manera otro 5% de probabilidad de que se valore más de $67,938 en el mismo periodo de tiempo.

Supongamos que otro inversionista tiene una posición de 150,000 Acciones de Telmex L en el mismo día. El precio de cierre de esta Acción fue de $12.54 por acción. El valor de estas acciones sería de $1,881,000. De la misma manera, se estima con un 90% de confianza, si la volatilidad histórica se mantiene durante las próximas 24 horas, que el valor de la posición no cambiará mas de +/- 3.1083% en el mismo periodo de tiempo, es decir $58,467.

Acción	No de Acciones	Precio de la Acción	Valor de la Inversión	Desviación Estándar	Confianza 90%	Volatilidad 90%	Cambio Máximo Esperado
Banacci A	100,000	$14 90	$1 490,00 0	2 7634%	1 65	4 5596%	$67,938
Telmex L	150,000	$12 54	$1,881,00 0	1.8838%	1 65	3 1083%	$58,467
Total			$3,371,00 0				$126,405*

*Es únicamente la suma, más adelante se calculará correctamente

1.3.2 Riesgos asociados a un portafolio de activos.

Para calcular el riesgo de un portafolio de activos se necesita entender como se mueven los rendimientos en relación unos a otros. En general, el riesgo de un portafolio de N activos depende de la correlación entre los rendimientos de los activos. El valor de el portafolio se puede escribir como la suma de N rendimientos (variables aleatorias) correlacionados y se pondera cada rendimiento de acuerdo al monto invertido en su activo correspondiente. El valor del portafolio P se expresa como:

$$P = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i X_i$$

donde: X_i = rendimiento del activo i

α_i = monto invertido en el activo i (valor de la posición);

Si se supone una distribución Normal, la desviación estándar del portafolio está dada por:

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i<j} \sum \alpha_i \alpha_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j} \qquad (3)$$

donde: σ_i^2 = varianza del rendimiento i

σ_i = desviación estándar del rendimiento i

ρ_{ij} = correlación entre los rendimientos i y j.

Habiendo obtenido una expresión para la desviación estándar de un portafolio se puede manipular este como un instrumento sencillo. Por lo tanto, el movimiento adverso del rendimiento del portafolio con un 90% de confianza es +/- 1.65 σ_P. Los beneficios de la diversificación son medidos por el segundo término de la fórmula (3). Si los rendimientos de los N instrumentos son no correlacionados, i.e. su correlación es igual a cero, el

segundo término de la ecuación se elimina y el riesgo total es igual al promedio geométrico ponderado de los riesgos involucrados.
Debido a que las correlaciones no son siempre 1, se necesitan estimar como cualquier otro parámetro. Los métodos para estimar correlaciones se discutirán en el capítulo tres.

Consideremos un ejemplo: Supongamos que se tiene un portafolio con dos tipos de activos, A y B. En este caso la desviación estándar del portafolio es:

$$\sigma_{AB} = \sqrt{a^2\sigma_A^2 + b^2\sigma_B^2 + 2ab\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B}$$

donde:

$\sigma_A =$ desviación estándar del activo A.

$\sigma_B =$ desviación estándar del activo B.

$\rho_{AB} =$ correlación entre los activos A y B.

$a =$ monto invertido en el activo A.

$b =$ monto invertido en el activo B.

Supongamos que el Activo A son las Acciones de Banacci A, el Activo B son las Acciones de Telmex L, de los ejemplos anteriores.

Si la correlación sobre los rendimientos diarios porcentuales de estos dos Activos fuese de 1, el riesgo de mercado total sería aditivo, igual a $67,938 de Banacci A mas $58,467 de Telmex L, es decir un total de $126,405.

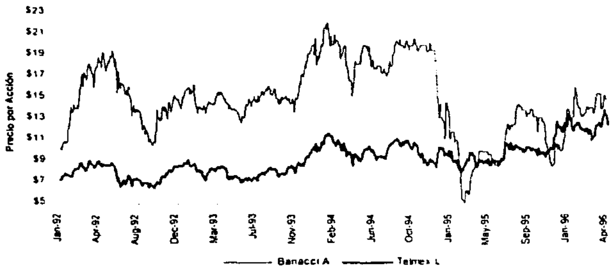
Sin embargo, la correlación histórica de los rendimientos diarios porcentuales de Banacci A y Telmex L fue de 0.300995. Como resultado el riesgo total de un inversionista cuyo portafolio de Acciones fuera el descrito en los dos ejemplos anteriores sería de $102,104

$$\begin{aligned} Riesgo &= \sqrt{67,938^2 + 126,405^2 + 2 * 0.300995 * 67,938 * 126,405} \\ &= \$102,104 \end{aligned}$$

Gráfica 5

Precios de Acciones: Banacci A y Telmex L

Enero de 1992 a Abril de 1996.



Medición del riesgo de mercado: Posiciones lineales

Existen dos diferencias básicas para estimar el riesgo en "*trading*" vs. inversión:

i) Relatividad: En trading, el riesgo se considera como el monto que se puede perder hasta que la posición sea liquidada o neutralizada (por ejemplo con una cobertura perfecta). En inversiones, el riesgo es el monto que puede quedar por debajo de los objetivos predeterminados del inversionista. Los objetivos pueden ser el rendimiento esperado sobre un periodo o un índice sobre el cual la posición es valuada. En este caso, el riesgo se define como el error de seguimiento ("*tracking*").

ii) Horizonte: En trading el horizonte regularmente es corto, se mide en días y es el tiempo que se requiere para neutralizar o liquidar una posición. En inversiones el horizonte generalmente es mayor, se mide en meses y es el tiempo que se requiere para que la estrategia de inversión seleccionada se espera que tenga éxito o el periodo de tiempo mas corto que se requiere para medir la eficacia de un administrador de inversiones.

Entonces el riesgo en el trading es usualmente corto y absoluto, mientras que el riesgo de inversión es regularmente a mediano plazo y relativo. De acuerdo al horizonte se diferencia entre Rendimientos Diarios en Riesgo (RDeR ó DEaR por sus siglas en ingles "*Daily Earnings at Risk*") y el Capital en Riesgo (CaR ó VaR por sus siglas en ingles "*Value at Risk*").

Daily Earnings at Risk o DEaR, mide las pérdidas máximas esperadas de una posición dada en un periodo de un dia, i.e., las siguientes 24 horas, con una probabilidad del 95%.

Value at Risk o VaR, mide las pérdidas máximas esperadas de una posición dada y que pueden ocurrir hasta que la posición sea neutralizada o sea revaluada. Cuando el horizonte es 1 día entonces

VaR = DEaR. Este horizonte puede ser una función tanto de la posición como del inversionista.

Hay que resaltar que se eligió arbitrariamente la marca de 95% / 5%, equivalente a 1.65 desviaciones estándar de la distribución normal. Se pudo haber escogido la marca de 99% / 1% multiplicando la desviación estándar por 2 para obtener el estimado de la volatilidad. En el presente trabajo se desea proporcionar una herramienta para fines administrativos, por lo cual es importante que se puedan observar y revisar los estimadores frecuentemente. La marca del 5% implica que se debe observar, en promedio, una pérdida mayor al DEaR una vez cada 20 días hábiles. Si se escoge una marca de 1%, se debería esperar, en promedio, 100 días hábiles para confirmar que el estimador refleja la realidad.

1.4 Rendimientos Diarios en Riesgo (DEaR)

En los mercados mas desarrollados y líquidos, las posiciones pueden ser liquidadas o neutralizadas en menos de un día. Es por esto que los riesgos están relacionados a una ventana de 24 horas. Definimos los Rendimientos Diarios en Riesgo (DEaR), como la pérdida potencial estimada del valor de un portafolio ocasionada por un movimiento adverso en los factores del mercado durante un periodo de un día.

En general, el DEaR para una posición sencilla se calculan como sigue:

DEaR = Valor de Mercado de la posición (MV_X)

* Sensibilidad del precio al movimiento del mercado (δ)

* Movimiento adverso en un día (X_a)

$= MV_X * \delta * X_a$

La sensibilidad del precio al movimiento del mercado (δ) mide el cambio en el valor del mercado de una posición cuando el bien asociado cambia. Para los casos en los que el valor de la posición se relaciona linealmente al bien asociado se tiene una $\delta = 1$

En general, el $DEaR$ de un portafolio de N activos, donde cada activo tiene $DEaR_i$ (i=1,2,...,N), se calcula como sigue:

$$DEaR = \sqrt{\overline{V} * [C] * \overline{V}^T}$$

donde:

$$\overline{V} = [DEaR_1 \quad ,\cdots, \quad DEaR_N]$$ (Vector de DEaR)

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \rho_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1N} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$ (Matriz de Correlaciones)

$$\overline{V}^T = \begin{bmatrix} DEaR_1 \\ \vdots \\ DEaR_N \end{bmatrix}$$ (Vector transpuesto de V)

1.5 Capital en Riesgo (VaR)

En muchas situaciones, las posiciones no pueden ser liquidadas o neutralizadas en un periodo de 24 horas. Para estas posiciones, el método mas sencillo de utilizar, para estimar el capital en riesgo, es multiplicar el riesgo diario por la raiz cuadrada del tiempo necesario para neutralizar la posición. Esto es válido, si el supuesto de normalidad en la distribución de los rendimientos se cumple.

Definimos el Capital en riesgo (VaR) como el riesgo total sobre un periodo de tiempo si la posición no puede ser eliminada en menos de 1 día.

$$VaR = DEaR * \sqrt{días}$$

Esta expresión debe ser utilizada únicamente para posiciones lineales. Si el valor de una posición cambia de una forma no lineal, como las opciones con respecto al bien asociado, entonces este escalamiento lineal de los riesgos diarios puede ser una no muy buena aproximación para periodos de tiempo largos.

Para las posiciones de inversión que tienen un horizonte de decisión mayor a un día se puede modificar el Capital en Riesgo (VaR) estándar, calculando las volatilidades y correlaciones para un periodo de tiempo especifico.

Análogo al cálculo del DEaR, la expresión para calcular el VaR para un horizonte de un mes es:

VaR = Valor de Mercado de la posición (MV_X)
* Sensibilidad del precio al movimiento del mercado (δ)
* Movimiento adverso en un mes (X_a)

$$= MV_X * \delta * X_a$$

Estos términos se definen de la misma manera que los del DEaR, con la única diferencia que la desviación estándar σ, es el estimador de la desviación estándar para un mes.

En el ejemplo de las Acciones de Banacci A, el DEaR se calcula:

$$\begin{aligned} DEaR &= MV_X * \delta * X_a \\ &= 100{,}000 * \$14.90 * 1 * 4.5596\% \\ &= \$67{,}938 \end{aligned}$$

y el VaR para un mes, suponiendo que el mes tiene 20 días hábiles:

$$\begin{aligned} VaR &= DEaR * \sqrt{días} \\ &= \$67{,}938 * \sqrt{20} \\ &= \$303{,}830 \end{aligned}$$

CAPITULO 2

Estadística de los movimientos de mercado.

En el capítulo anterior se presentaron los conceptos y el algorítmo para calcular el capital en riesgo de un portafolio, suponiendo que los rendimientos porcentuales diarios siguen una caminata aleatória con distribución normal, y distribución conjunta normal. En el presente capítulo se discute la validéz de estos supuestos.

2.1 La Distribución de probabilidad y sus hipótesis estadisticas.

Se presenta la distribución de probabilidad y sus hipótesis estadísticas planteando cuatro preguntas:

i) ¿Se distribuyen normalmente los rendimientos de los activos individuales, condicionados a su información histórica? y ¿pueden ser caracterizados por su media y desviación estándar (volatilidad)?

ii) ¿Son normales los rendimientos conjuntos?, ¿qué se puede decir acerca de la distribución multivariada de los rendimientos?

iii) ¿Se correlacionan serialmente estos rendimientos?; i.e. ¿existe alguna correlación entre los rendimientos de hoy y los de ayer?

iv) ¿Son predecibles los parámetros (media, volatilidad) sobre un cierto tiempo de las caminatas aleatorias?; i.e. ¿se pueden usar los movimientos pasados para caracterizar los movimientos futuros?

2.2 ¿Se distribuyen normalmente los rendimientos individuales?

Las propiedades de las series de tiempo financieras (rendimientos) han sido ampliamente investigadas por gente como Mandelbrot (1963) y Fama (1965). Una gran parte de estos estudios se enfoca en rendimientos de alta frecuencia o diarios. Sus conclusiones pueden resumirse en los siguientes puntos:

i) Las distribuciones de los rendimientos tienen "colas gordas" (existen mas ocurrencias muy lejanas a la media de las que se predicen con la distribución normal). A esta característica se le conoce como "exceso de kurtosis".

ii) El "pico alrededor de la media" de la distribución de rendimientos es mayor al que se predice con la distribución normal.

iii) Los rendimientos de los activos frecuentemente tienen una distribución asimétricamente negativa *"negatively skewed"*, i.e.

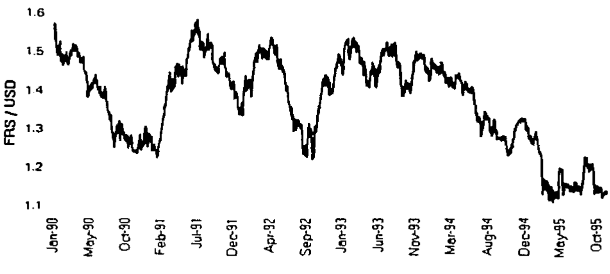
existen mas observaciones en la cola izquierda que en la cola derecha.

iv) Los rendimientos de los activos tienen poca autocorrelación.

v) El cuadrado de los rendimientos de los activos frecuentemente tienen una autocorrelación significativa.

Como un ejemplo de lo anterior se utilizó la tasa del tipo de cambio entre el dólar americano y el franco suizo.

Tipo de cambio FRS / USD
Enero de 1990 a Noviembre de 1995



Se hace el análisis de los rendimientos diarios porcentuales de la serie histórica de precios R_t. La siguiente tabla muestra los parámetros estadísticos básicos para nuestro análisis. Las definiciones de estos parámetros están en el Anexo 3.

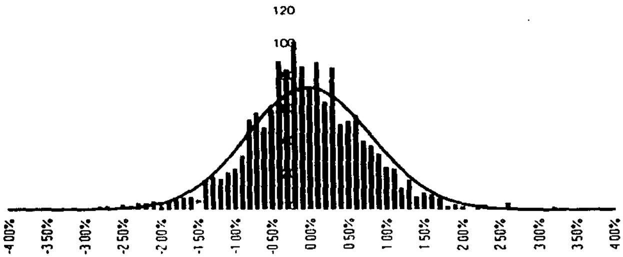
	Serie R_t	Rendimiento Diario Porcentual X_t
Rango	0.4737	7.4005%
Mínimo	1.1170	-3.4891%
Máximo	1.5907	3.9113%
Número de observaciones	1,529	1,528
Media		-0.0166%
Desviación Estándar		0.8167%
1.65 Desviaciones Estándar		1.3476%
Kurtosis		1.8040
Skewness		-0.0311
Correlación con la distribución Normal		0.9911

Los histogramas son una herramienta visual muy efectiva para saber si se puede considerar una serie como normal. Las barras verticales muestran el número de ocurrencias del cambio diario en un intervalo dado. El eje de las X mide el tamaño del rendimiento diario en porcentaje. La línea negra muestra la distribución normal con la misma media y desviación estándar.

Histograma correspondiente al tipo de cambio FRS / USD

Rendimientos diarios porcentuales.

Enero de 1990 a Noviembre de 1995



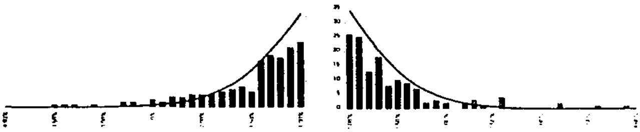
Si los rendimientos diarios del tipo de cambio FRS / USD se distribuyeran normalmente, entonces las barras y la línea negra coincidirían. El hecho que no lo hacen está indicado por el exceso de kurtosis (i.e. la kurtosis es mayor a 3, kurtosis para una distribución normal) y por la distribución asimétrica negativa (i.e. la skewness diferente de cero, la skewness para la distribución normal).

La administración del riesgo se preocupa en las observaciones ocasionales que aparecen muy alejadas de la media. Si existen muchas de estas observaciones aparecen como barras largas en los extremos del histograma.

Colas del histograma correspondiente al tipo de cambio FRS / USD

Rendimientos diarios porcentuales.

Enero de 1990 a Noviembre de 1995



Como se muestra en el ejemplo anterior, hubo pocas ocasiones durante los 6 años en las que los rendimientos diarios fueron significativamente mayores (menores) a los que están implicitos en la distribución normal.

Un método mas complicado para probar normalidad es el cálculo de los coeficientes de correlación en las series de una Gráfica Q-Q. Una gráfica Q-Q muestra los cuantiles de los rendimientos contra los rendimientos que se deberian esperar si éstos se distribuyeran normalmente. Los cuantiles estandarizados son las series de rendimientos ordenados por su desviación estándar.

Si $x_1, x_2, \ldots, x_N$ son cuantiles, entonces

$$\Pr(x \le x_i) \cong \frac{j - 0.5}{N} \quad \text{se define como } p_i$$

Para una distribución normal, el cuantil correspondiente z_i es la solución correspondiente a la ecuación:

$$P(z < z_i) = P_j$$
$$= \int_{-\infty}^{z_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ell^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

La gráfica Q-Q se obtiene trazando las coordenadas de puntos $[z_j, x_j]$

Existen cinco pasos para calcular los puntos en una gráfica Q-Q:

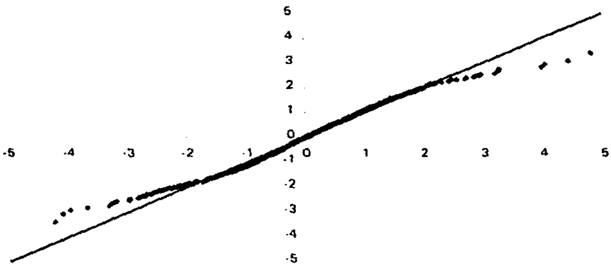
1. Estandarizar los rendimientos diarios Y_j a $X_j = \frac{(Y_j - \mu)}{\sigma_j}$
2. Ordenar los rendimientos X_j para obtener sus cuantiles x_j
3. Calcular la probabilidades p_j de los cuantiles x_j
4. Calcular los cuantiles normales z_j
5. Graficar las coordenadas de puntos $[z_1, x_1], [z_2, x_2], \cdots, [z_N, x_N]$

La siguiente es un ejemplo de una gráfica Q-Q.

Gráfica Q-Q para el tipo de cambio FRS / USD

Rendimientos diarios porcentuales.

Enero de 1990 a Noviembre de 1995



Mientras mas parecida sea la gráfica a una línea recta, mas parecida será la distribución de rendimientos diarios porcentuales a la distribución normal. Si todos los puntos formaran una línea recta, entonces la distribución de los rendimientos sería perfectamente normal. Como muestra la gráfica anterior, existe cierta desviación de la normal en la distribución de los rendimientos diarios del tipo de cambio FRS/USD durante el periodo Enero de 1990 a Noviembre de 1995.

Una técnica para medir la desviación de la normal es calcular el coeficiente de correlación de la gráfica Q-Q:

$$r_Q = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(z_i - \bar{z})^2}}$$

Para muestras grandes, como la utilizada en el ejemplo anterior, el coeficiente de correlación (r_Q) necesita ser por lo menos de 0.999 para pasar un estricta prueba de normalidad con un nivel de significancia del 5%. El coeficiente r_Q se calculó en 0.9602, es por esto que los rendimientos diarios porcentuales del tipo de cambio FRS/USD fallan la prueba de normalidad estricta.

Utilizado en distintos tipo de activos, el indicador r_Q puede proporcionar información muy útil para indicar que tan próxima es la hipótesis de normalidad con la realidad. En el ejemplo anterior, se demuestra que la distribución de los rendimientos diarios porcentuales del tipo de cambio FRS/USD no es normal pero su desviación de la normal es muy pequeño.

Desviaciones de la normal pueden ser mucho mas significativas en otras series. La distribución de los rendimientos diarios porcentuales en los mercados económicos claramente no es normal. Esto es fácil de entender intuitivamente, las tasas de interés de corto plazo se mueven de manera discreta como resultado de acciones de los bancos centrales. Los países con ciertas políticas sobre el tipo de cambio se han desviado significativamente de los fundamentos económicos por algún periodo de tiempo, muestran en el mercado de dinero que la distribución de las tasas son claramente no normales. Como resultado, estas cambian muy poco cuando la política monetaria se mantiene sin cambio (la mayoría del tiempo) y cambian mas significativamente cuando los bancos centrales cambian de política, o los mercados obligan a hacerlo. Por lo tanto, la forma de la distribución es resultado de "saltos" discretos en el movimiento en el cambio de precios.

Existen otras pruebas de normalidad que varian en la dificultad de su implementación. Kiefer y Salmon (1983) ofrecen una prueba sencilla basada en la kurtosis y la asimetría (skewness) de la distribución. También Shapiro y Wilk (1965) y Jarque y Bera (1987) ofrecen otras pruebas de cálculos mas complicados.

Es importante recordar que cuando se aplican las pruebas de normalidad a las series de tiempo financieras, se debe hacer con cuidado. La razón es que las hipótesis de cada prueba (varianza constante, observaciones no autocorrelacionadas, etc.) no se cumplen todas las veces. Por ejemplo si una prueba de normalidad asume que la serie de datos son no correlacionados seriamente a lo largo del periodo de muestra, cuando de hecho no lo son, entonces la prueba rechazará la normalidad incorrectamente (Heuts y Rens 1986). Se ha investigado el efecto de varianzas no constantes en pruebas de normalidad, encontrando que, en un número grande de casos, se concluye incorrectamente que no son normales cuando lo son.

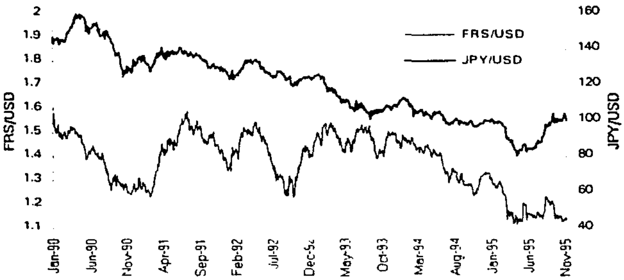
Para concluir quisiéramos enfatizar que las pruebas que se presentaron anteriormente son pruebas de normalidad univariada y normalidad no multivariada. Sin embargo, es sabido que los rendimientos entre varias clases de activos se correlacionan entre si (i.e. no son independientes) y que esta correlación pueda ocasionar que la distribución de los rendimientos individuales aparezca con cierto grado de asimetria cuando el hecho de que la verdadera distribución marginal no lo sea (Richardson y Smith, 1993)

2.3 ¿Son normales los rendimientos conjuntos?

Cuando dos series se distribuyen conjuntamente normal, es sabido que se distribuyen como una normal bivariada. En este caso el coeficiente de correlación mide la relación lineal entre las dos variables. La siguiente gráfica compara el movimiento de los tipos de cambio FRS/USD Y JPY/USD.

Tipo de cambio FRS/USD y JPY/USD

Enero de 1990 a Noviembre de 1995



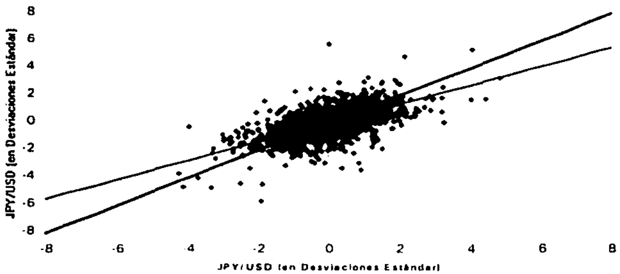
Los rendimientos normalizados se definen como sigue y se expresan en desviaciones estándar (donde X representa el rendimiento porcentual diario en FRS/USD y Y el rendimiento porcentual diario en JPY/USD):

$$X_t^* = \frac{X_t - \bar{x}}{\sigma_X} = \frac{X_t - \bar{x}}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(X_k - \bar{x})^2}}$$

$$Y_t^* = \frac{Y_t - \bar{y}}{\sigma_Y} = \frac{Y_t - \bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(Y_k - \bar{y})^2}}$$

El escategrama de los **rendimientos diarios porcentuales normalizados** describe la interdependencia entre los movimientos de los dos tipos de cambio. Cada punto representa el cambio porcentual normalizado del FRS/USD contra el cambio porcentual normalizado del JPY/USD para el mismo dia.

Escategrama de los rendimientos diarios porcentuales normalizado.
Tipos de cambio FRS/USD y JPY/USD (en desviaciones estándar).
Enero de 1990 a Noviembre de 1995

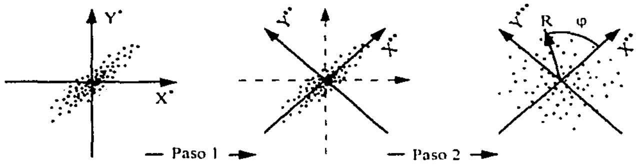


La gráfica muestra cierta correlación: rendimientos positivos en FRS/USD generalmente son acompañados por rendimientos positivos en JPY/USD. El grado de correlación está determinado por la forma de la elipse y la inclinación de la linea de correlación. Si no existiese correlación entre las dos variables, entonces la elipse tenderia a un circulo y la linea de correlación coincidiria con el eje de las equis. Si existiese una perfecta correlación, entonces la elipse degeneraría en una línea diagonal y la línea de correlación caería sobre ella.

Para revisar gráficamente la normalidad bivariada se transforma el escategrama anterior en dos pasos:

i) Primero se rotan los ejes 45 grados, i.e., se expresan todos los puntos en coordenadas $[X^{**}, Y^{**}]$

ii) Después se expande a lo largo del eje Y^{**} de tal manera que la elipse del escategrama de correlación se convierta en un círculo y se reexpresan todas las coordenadas cartesianas $[X^{**}, Y^{***}]$ en sus equivalentes en coordenadas polares $[R, \varphi]$



Matemáticamente la transformación a $[X^{**}, Y^{***}]$ se logra multiplicando el vector $[X^{*}, Y^{*}]$ por la raíz cuadrada del inverso de la matriz de covarianzas:

$$\begin{bmatrix} X^{**} \\ Y^{***} \end{bmatrix} = \Sigma^{-\frac{1}{2}} * \begin{bmatrix} X^{*} \\ Y^{*} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{1-\rho} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{1+\rho} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X^{*} \\ Y^{*} \end{bmatrix}$$

Si la correlación es normal entonces los puntos deben estar bien distribuidos en el círculo. Mas específicamente los ángulos φ se deben distribuir uniformemente y la distribución del radio R sigue la forma:

$$R^2 = (X^{**})^2 + (Y^{***})^2$$
$$= \begin{bmatrix} X^{**} & Y^{***} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X^{**} \\ Y^{**} \end{bmatrix}$$

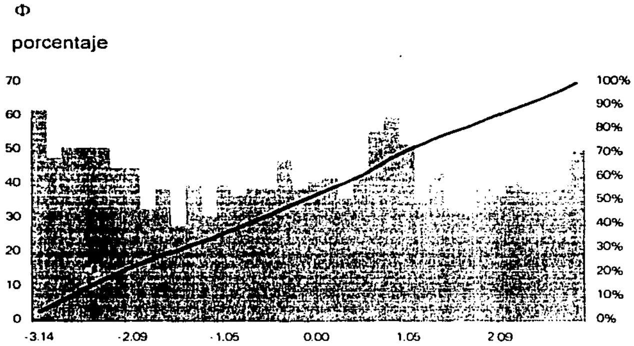
Sea $A = \Sigma^{-\frac{1}{2}} * \begin{bmatrix} X^{*} \\ Y^{*} \end{bmatrix}$ que se distribuye como N(0,1), entonces

$$R^2 = \begin{bmatrix} X^{*} & Y^{*} \end{bmatrix}' \Sigma^{-1/2}{}' \Sigma^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} X^{*} \\ Y^{*} \end{bmatrix} = A'A$$

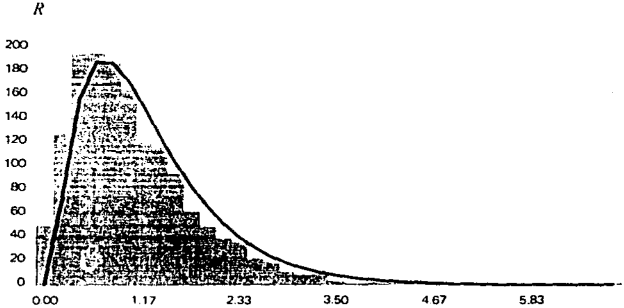
Como A es un vector normal estandarizado de 2 elementos, su producto cruz, R^2, se distribuye como una Chi-cuadrada con dos grados de libertad. El radio, que es la raíz cuadrada de R^2, sigue una distribución Chi-cuadrada con dos grados de libertad.

La siguientes gráficas muestran los histogramas para los ángulos y los radios para la correlación de los rendimientos diarios porcentuales entre el FRS/USD y JPY/USD:

Correlación de los rendimientos diarios entre FRS/USD y JPY/USD
Histograma de los ángulos de las coordenadas polares.
Enero de 1990 a Noviembre de 1995



Correlación de los rendimientos diarios entre FRS/USD y JPY/USD
Histograma de los radios de las coordenadas polares.
Enero de 1990 a Noviembre de 1995



La primera gráfica representa la distribución de los ángulos de las parejas de los cambios porcentuales normalizados de los tipos de cambio FRS/USD y JPY/USD. La segunda gráfica compara la distribución de los ángulos con una distribución Chi con dos grados de libertad.

2.4 ¿Son no correlacionados los rendimientos en las series?

La correlación en una serie, también conocida como autocorrelación, ocurre cuando las observaciones secuenciales a lo largo del tiempo no son independientes unas de las otras. Si una serie $X = \{X_t, X_{t-1}\}$ es correlacionada serialmente, entonces X_t y X_{t-1} comparten información.

Bajo los supuestos en el presente modelo los datos no son serialmente correlacionados. Esta hipótesis es importante ya que si los rendimientos diarios no son serialmente no correlacionados, entonces la volatilidad de los rendimientos a lo largo de un horizonte mayor a un día no se escalan con la raíz cuadrada del tiempo. Por ejemplo, si σ_d es la desviación estándar de los rendimientos diarios, la desviación estándar de los rendimientos semanales es $\sqrt{5} * \sigma_d$ (5 días hábiles en una semana).

Se establece un resultado mas general suponiendo que en el momento t el logaritmo de los precios $\ln(P_t)$ se puede expresar de acuerdo al siguiente proceso (caminata aleatoria):

$$\ln(P_t) = \delta_t + \ln(P_{t-1}) + \varepsilon_t \qquad t=1,\ldots,T$$

donde:

$\delta_t =$ un parámetro no aleatorio (a non-random drift parameter)

$\varepsilon_t =$ una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida Normal, con media 0 y varianza σ^2

Bajo estos supuestos e ignorando δ_t (mientras δ_t es despreciable, la suma de estas sobre un periodo largo de tiempo puede no serlo), los rendimientos diarios compuestos son simplemente $\ln(P_t / P_{t-1}) = \varepsilon_t$.

Supongamos que se quieren hacer predicciones de precios para periodos de T+1 en adelante. Debemos escribir $\ln(P_T)$ como una función de $\ln(P_0)$. Substituyendo recursivamente en la ecuación anterior:

$$\ln(P_T) = \sum_{t=1}^{T} \delta_t + \ln(P_0) + \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t$$

definimos:

$$x_T = \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t$$

y $$\alpha = \sum_{t=1}^{T} \delta_t$$

entonces podemos escribir:

$$\ln(P_T) - \ln(P_0) = \alpha + x_T$$

Dada esta expresión, la varianza de $\ln(P_T) - \ln(P_0)$ es:

$$E\left[\left((\alpha + x_T) - E(\alpha + x_T)\right)^2\right] = E\left[\left(\sum_{t=0}^{T-1} \varepsilon_{T-t}\right)^2\right] = T * \sigma^2$$

Como $\ln(P_T)-\ln(P_0)$ es simplemente el rendimiento en un periodo de tiempo T, si σ_t es la desviación estándar de los rendimientos diarios al tiempo t, entonces la desviación estándar del periodo T es:

$$\sigma_{t,T} = \sqrt{T} * \sigma_t$$

Sin importar si los rendimientos son serialmente correlacionados o no, lo que realmente nos inquieta es determinar la credibilidad aparente de que la volatilidad de los rendimientos a lo largo de un horizonte mayor a un día se escalan con la raíz cuadrada del tiempo. Las observaciones en cada serie de tiempo, T, se prueban graficando el orden de correlación k-ésimo (i.e. la medida de autocorrelación para observaciones que disten k periodos) contra k, número de desplazamientos:

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{T}(y_t-\bar{y})(y_{t-k}-\bar{y})/[T-(k+1)]}{\sum_{t=1}^{T}(y_t-\bar{y})^2/[T-1]}$$

donde:

$T =$ número de observaciones para las series;

$k =$ número de desplazamientos.

Si la serie de rendimientos es serialmente no correlacionada, entonces los estimadores de r_k no serán significativamente diferentes de 0. Se calcula un intervalo de confianza (IC) del 95% alrededor del 0 para cada estimado del coeficiente de correlación serial. El intervalo de confianza se define como:

$$IC = \pm 1.96\frac{1}{\sqrt{T}}$$

donde T es el número de datos en la muestra y 1.96 es el valor crítico asociado a un 95% de probabilidad.

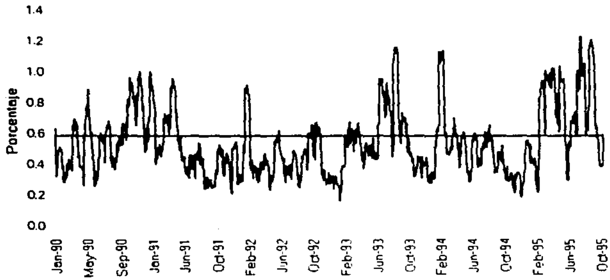
2.5 ¿Es constante la volatilidad a lo largo del tiempo?

Una característica principal de las series de tiempo financieras es que su volatilidad es un proceso dinámico que depende del tiempo. Mas aún, es sabido que la volatilidad de los rendimientos financieros se agrupan, i.e., periodos de alta volatilidad aparecen alejados a periodos de baja volatilidad. En al siguiente gráfica se presenta la persistencia en volatilidad; la gráfica compara la volatilidad promedio (línea recta) de los rendimientos diarios en el tipo de cambio JPY/USD con la volatilidad observada a lo largo de un periodo móvil de 20 días:

Volatilidad promedio del Tipo de cambio JPY/USD

Rendimientos diarios porcentuales.

Enero de 1990 a Noviembre de 1995



Claramente la volatilidad cambia a lo largo del tiempo; lo que nos lleva a concluir que la volatilidad promedio de los rendimientos diarios en un periodo de tiempo largo no es necesariamente una buena aproximación para la volatilidad diaria observada en un periodo más corto. Esto es común para la mayoría de precios y tasas de interés en los mercados financieros, ya que las volatilidades son por si solas muy volátiles y como consecuencia la predicción de éstas se convierte en un reto que se discutirá mas adelante.

CAPITULO 3

Estimación de volatilidades y correlaciones.

3.1 Diseño Básico.

El objetivo es obtener volatilidades y correlaciones basadas en datos históricos con un método simple y uniforme que otorgue estimadores razonablemente robustos.

Basado en datos históricos: No consideramos las volatilidades implícitas de las opciones por que se ha observado que no son los mejores estimadores para las volatilidades y por que no existe un mercado lo suficientemente amplio de opciones para calcular todas las volatilidades y correlaciones que se necesitan. La volatilidad implícita se puede decir que es el consenso del mercado de cuál será la volatilidad en el futuro, y se ha observado que no se obtienen mejores estimadores consistentemente.

Método simple y uniforme: Se busca un método de estimación que pueda ser aplicado a todos los mercados y que sea fácil de implementar y entender. Lo esencial de la metodología consiste en:

Utilizar datos de alta frecuencia, i.e. diarios, para estimar los rendimientos de los activos.

Calcular estimadores de las volatilidades y correlaciones a 1 día de los rendimientos diarios.

Actualizar diariamente las volatilidades y correlaciones.

Idear un punto de referencia para medir los estimadores.

Es posible encontrar mejores estimadores si utilizamos diferentes métodos, el óptimo (si es que existe), para cada mercado en particular. Hay que considerar si la precisión que se podría ganar justifica el incremento en complejidad y la reducción de la transparencia del método al mismo tiempo.

Que otorgue estimadores razonablemente robustos: se deben ir evaluando los resultados continuamente, ya que una serie de errores continuos nos pondrá en alerta cuando se deba cambiar el método.

3.1.1 Definición de los estimadores.

Se deben estimar las volatilidades y correlaciones dependiendo del horizonte. Se pueden estimar las volatilidades y correlaciones que esperamos para el siguiente día, estos son utilizados para estimar los riesgos diarios *(daily trading risks)*. También se pueden calcular las volatilidades y correlaciones que se esperan sobre un periodo de tiempo mayor, por ejemplo 1 mes, y son las que se utilizan para estimar los riesgos de inversión.

Bajo este contexto se define el término volatilidad como el cambio máximo (en tasa o en precio) que se espera ocurra el 90% de las veces; existe un 5% de probabilidad que los incrementos sean mayores en cualquiera de las direcciones (positiva o negativa). Si los rendimientos se distribuyen normalmente, como asumimos, entonces esta volatilidad es equivalente a 1.65 desviaciones estándar. Por ejemplo, una volatilidad diaria de 0.70% en el tipo de cambio DEM/USD cuando el tipo de cambio actual es 1.60 DEM/USD significa que se espera que el tipo de cambio continúe en el rango 1.5888 - 1.6112 en las próximas 24 horas (i.e., 1.6000 +/- 1.6000*0.007) con una nivel de confianza del 90%

3.1.2 Comprobando la calidad de los estimadores contra un punto de referencia.

Se debe ir revisando la calidad de los estimadores comparando cada estimación pasada con la volatilidad real durante los siguientes 5 días (para volatilidades diarias) o 20 días (para volatilidades mensuales, se consideran 20 días hábiles como una constante aproximada para un mes). El problema es que no se puede medir con exactitud la volatilidad pasada, solo se puede estimar, y el estimador es peor mientras mas corto es el periodo. El estimado de la volatilidad es a lo que nos referimos como volatilidad **ex-post**.

3.2 Estimación ex-post.

Con un ejemplo podemos describir cómo se calcula la volatilidad de *trading* objetivo (ex-post). Supongamos que se quiere calcular la volatilidad del tipo de cambio del USD/JPY durante el periodo de 5 días hábiles del 18 al 22 de Septiembre de 1995. La siguiente tabla muestra el tipo de cambio y el rendimiento diario porcentual para el periodo:

Tipo de cambio USD/JPY, precios de cierre y rendimientos.
18 al 22 de Septiembre de 1995.

Fecha	Tipo de Cambio	Rendimiento diario %
15 Sep.	104.100	
18 Sep.	103.090	-0.9702
19 Sep.	104.450	1.3192
20 Sep.	102.500	-1.8669
21 Sep.	99.000	-3.4146
22 Sep.	100.050	1.0606

Media:	-0.7744
σ_t :	1.9971
V_t :	3.2952

Se tienen 5 observaciones de rendimientos diarios (-0.9702, 1.3192, -1.8669, -3.4146, 1.0606), de los cuales se debe estimar la media y

desviación estándar de una distribución normal que genere esa muestra.
Se calcula la media y desviación estándar de la muestra:

Media:

Media: $\frac{1}{5}*(-0.9702+1.3192-1.8669-3.4146+1.0606)=-0.7744$

σ_t: $\sqrt{\frac{1}{4}\sum\left[(-0.9702+0.7744)^2+(1.3192+0.7744)^2+\cdots\right]}=1.9971$

V_t: $1.65*1.9971=3.2952$

Cuando se estiman las estadísticas muestrales, como la media y desviación estándar, hay que ser razonablemente confiables en los resultados. La confianza se mide por el error estándar del estimado; mientras menor sea el error estándar del estimado, mayor nivel de confianza tendrá el estimado. Esto nos lleva a utilizar las muestras tan grandes como se pueda para calcular esas estadísticas. A continuación se ilustra la relación entre el tamaño de la muestra y el nivel de confianza.

Consideremos el intervalo de confianza para la varianza de los rendimientos del ejemplo anterior (i.e. el cuadrado de la desviación estándar, $(1.9971)^2=3.9883$). En principio se debe considerar el intervalo de confianza para la varianza y no para la desviación estándar debido a que se utiliza el siguiente resultado:

Si $\{X_1,\dots,X_i\}$ se distribuyen normal, con una varianza σ^2 y su varianza muestral es s^2, entonces para una muestra de tamaño N, la estadística $\left[\frac{(N-1)s^2}{\sigma^2}\right]$ se distribuye χ^2 con N-1 grados de libertad.

Entonces se pueden buscar puntos a y b tales que:

$$\Pr\left[a \le \frac{(N-1)s^2}{\sigma^2} \le b\right] = 1-\alpha$$

$$\Pr\left[\frac{(N-1)s^2}{b} \le \sigma^2 \le \frac{(N-1)s^2}{a}\right] = 1-\alpha$$

sea el intervalo de confianza $1-\alpha$ para σ^2. Hay que notar que a y b no son únicos. Un método común para resolver este problema es escoger a y b tales que las colas sean iguales, esto es $\Pr(\chi^2 < a) = \alpha/2$ y $\Pr(\chi^2 > b) = \alpha/2$. De esto se tiene que $a = \chi^2(1-\alpha/2)$ y $b = \chi^2(\alpha/2)$.

Por ejemplo, si se toma una muestra de tamaño 5 de cualquier distribución normal, entonces:

$$\Pr\left[0.4844 \le \frac{4s^2}{\sigma^2} \le 11.1433\right] = 0.95$$

Como la varianza de la muestra es 3.9883, entonces la prueba de la Chi cuadrada nos dice que hay una probabilidad del 95% de que el verdadero valor de la varianza de la normal este en el intervalo 1.4317

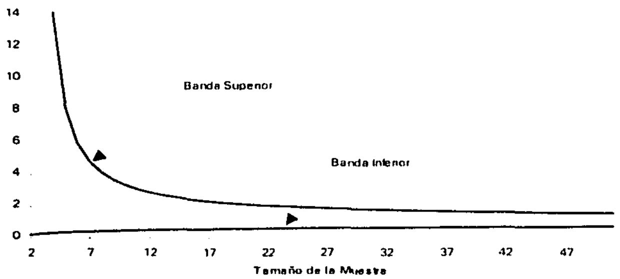
((5-1)*3.9883/11.1433) y 32.9329 ((5-1)*3.9883/0.4844). Tomando la raíz cuadrada de los extremos del intervalo se obtiene el intervalo de 95% de confianza para la desviación estándar (1.1965,5.7387). En otras palabras:

$$\Pr[1.1965 \leq \sigma \leq 5.7387] = 0.95$$

De esto se puede deducir que la volatilidad diaria del tipo de cambio USD/JPY en el periodo del 18 al 22 de Septiembre de 1995 estuvo en algún punto entre 1.1965% y 5.7387% con un 95% de confianza. Esto claramente es un rango muy amplio para ser de utilidad e ilustra el problema de estimar volatilidades en periodos de tiempo cortos (i.e. con muestras pequeñas).

Se puede observar la relación entre el intervalo de confianza para la desviación estándar muestral y el tamaño de la muestra en la siguiente gráfica. Esta muestra el intervalo del 95% de confianza alrededor de la varianza estimada de la estadística Chi cuadrada para diferentes tamaños de muestra. Las bandas superior e inferior de la gráfica se refieren a $(N-1)/a$ y $(N-1)/b$ respectivamente, donde a y b son los valores críticos de la Chi cuadrada (χ^2) que cumplan $\Pr(a < \chi^2 < b) = 0.95$.

Intervalos de Confianza alrededor de los estimados de la varianza.
Las bandas superior e inferior asumen una distribución normal.



El mensaje de esta gráfica es claro, mientras mas grande sea el tamaño de la muestra a la que calculemos la volatilidad, incrementará el nivel de confianza en nuestros estimados. Es por esto que debemos encontrar alguna forma para incrementar el tamaño de la muestra para obtener un buen estimador de la volatilidad. En otras palabras, el intervalo de confianza para estimadores que se basan en cinco observaciones es tan amplio que se necesita aumentar el tamaño de la muestra.

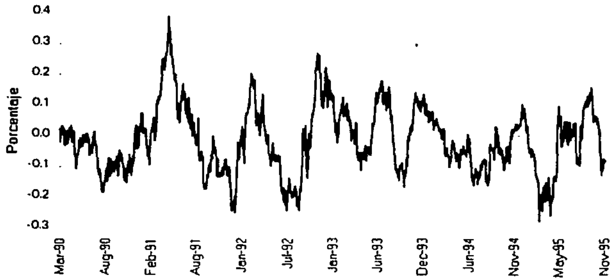
3.2.1 Estimando la media muestral.

En el ejemplo anterior se calculó la desviación estándar alrededor de un estimado de la media muestral (-0.7744). De la misma manera que con la desviación estándar, sin una muestra suficientemente grande, se obtienen estimados de la media muestral de baja confiabilidad. En la siguiente gráfica podemos observar que tan variable puede ser la media muestral, esta nos enseña la media muestral para el rendimiento porcentual diario del tipo de cambio DEM/USD. Cada estimado se basa en una ventana móvil de 50 dias.

Promedio móvil de 50 dias de los rendimientos diario porcentuales.

Tipo de Cambio DEM/USD

Enero 1990 a Noviembre 1995.



Como podemos observar en la gráfica, los rendimientos diarios porcentuales de los mercados financieros no se comportan completamente como una caminata aleatoria, es decir, hay periodos de tiempo en los que el indicador va a la alza y otros en los que va a la baja.

Mientras el tamaño de la muestra se va incrementando el estimado de la media muestral tiende a cero, siempre y cuando las inflaciones de ambos países sean iguales (para el caso del tipo de cambio), en caso de ser diferentes el estimador tiende a la diferencia de las inflaciones de ambos países durante el mismo periodo. Para el caso de el precio de un *commodity* (Oro, Plata, Crudo, etc.) el estimador tiende a la inflación, durante el mismo periodo, de la moneda en la que se cotiza.

Para reducir la incertidumbre y la imprecisión del estimador de la media, puede ser mas preciso fijar la media a algún valor que sea consistente con la teoría financiera, En nuestro modelo, suponemos un valor de la media de cero. Esto es, los estimados de la volatilidad están centrados alrededor del cero, en vez de la media muestral. De la misma manera, cuando se calculan las covarianzas, las desviaciones de los rendimientos se consideran alrededor del cero en vez de la media muestral.

En resumen, se considera que los rendimientos diarios porcentuales siguen una caminata aleatoria con media cero.

3.2.2 Seleccionando el *benchmark*.

Para determinar cuántos datos son necesarios para calcular nuestro *benchmark* se utilizan consideraciones tanto prácticas como teóricas. Específicamente, se requiere que no se utilicen demasiadas observaciones, que nos dejarían con un número restringido de estimadores ex-post, y por otro lado seleccionar un número mínimo de observaciones a considerar, que nos den un cierto nivel de confianza en nuestros resultados. Mientras que no existe un número mínimo para el tamaño de la muestra a considerar universalmente aceptado, algunos libro de estadística sugieren que las muestras entre 20 y 30 observaciones son suficientemente grandes. Por ejemplo, de la gráfica de los intervalos de confianza alrededor de los estimados de la varianza, se puede observar que el tamaño del intervalo de confianza tiende a estabilizarse con una muestra de tamaño cercano a 20.

Si asumimos que la volatilidad no cambia mucho sobre un periodo corto de tiempo, de unas cuantas semanas, entonces podemos tomar el periodo de -2 semanas a +3 semanas como el periodo muestral para estimar la volatilidad de la semana en curso. De este modo podemos incrementar el tamaño de la muestra de 5 a 25 y disminuir significativamente el intervalo de confianza de una longitud de 1.62 para una muestra de tamaño 5 a una longitud de 0.30 para una muestra de tamaño 25, esto representa una disminución de un 80% en la longitud del intervalo de confianza.

Regresando al ejemplo anterior, se estima la volatilidad diaria para el periodo del 18 al 22 de Septiembre de 1995 del tipo de cambio JPY/USD, calculando la desviación estándar de los rendimientos diarios sobre el periodo de 25 días del 4 de Septiembre al 6 de Octubre de 1995, y se multiplica por 1.65%.

Tipo de cambio JPY/USD, precios de cierre y rendimientos.
4 de Septiembre al 6 de Octubre de 1995.

	Fecha	Tipo de Cambio	Rendimiento diario %
	1 Sep.	97.35	
-10	4 Sep.	97.60	0.2568
-9	5 Sep.	97.64	0.0410
-8	6 Sep.	98.85	1.2392
-7	7 Sep.	99.05	0.2023
-6	8 Sep.	99.70	0.6562
-5	11 Sep.	99.97	0.2708
-4	12 Sep.	101.05	1.0803
-3	13 Sep.	102.66	1.5933
-2	14 Sep.	102.30	-0.3507
-1	15 Sep.	104.10	1.7595
	18 Sep.	103.09	-0.9702
	19 Sep.	104.45	1.3192
	20 Sep.	102.50	-1.8669
	21 Sep.	99.00	-3.4146
	22 Sep.	100.05	1.0606
+1	25 Sep.	100.50	0.4498
+2	26 Sep.	100.93	0.4279
+3	27 Sep.	100.40	-0.5251
+4	28 Sep.	99.14	-1.2550

+5	29 Sep.	99.80	0.6657
+6	2 Oct.	100.30	0.5010
+7	3 Oct.	101.55	1.2463
+8	4 Oct.	100.82	-0.7189
+9	5 Oct.	99.64	-1.1704
+10	6 Oct.	100.40	0.7627

Media:	0.1304
σ_t :	1.1998
V_t :	1.9797

Nuestro estimador ex-post de la volatilidad real del tipo de cambio JPY/USD para la semana del 18 al 22 de Septiembre de 1995 es de 1.9797%. El intervalo de confianza del 95% sería +/- 1.9797, este intervalo de confianza supone una media de cero. En caso de que se hubiera utilizado la media muestral, el intervalo de confianza del 95% sería -1.8493% a 2.1101. Pero, como se expuso anteriormente, la media estimada puede ser muy imprecisa. Hay que hacer notar que el estimado ex-post es el *benchmark* contra el cual se va ha evaluar la volatilidad estimada realizada el 18 de Septiembre de 1995. Esta otra volatilidad estimada se conoce como el estimador ex-ante.

En términos matemáticos, el estimador de la desviación estándar diaria ex-post se puede representar como:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{1}{25}\sum_{i=t-10}^{t+14}(X_i)^2}$$

El contador t en la fórmula anterior se refiere a días.

3.3 Estimación ex-ante - *forecasting*

A continuación se presentará otra alternativa para la estimación ex-ante de las volatilidades y correlaciones, pero debe quedar claro que en genéricamente no existe el "mejor" método para estimar volatilidades. Todos los métodos de estimación tienen sus ventajas y desventajas.

3.3.1 Promedio móvil estándar versus promedio móvil ponderado exponencialmente.

Una característica importante de las series de tiempo de volatilidades y correlaciones es que además de cambiar con el tiempo, se comportan oscilatoriamente, es decir de valores altos a bajos y viceversa.

Tradicionalmente para estimar volatilidades utilizando series de tiempo históricas, se le da un peso fijo e igual a cada observación. Así, la volatilidad es definida como la desviación estándar de los rendimientos sobre un periodo de tiempo específico. La regla general es que mientras más grande sea el horizonte a estimar, mayor debe ser la serie de datos históricos que se debe utilizar.

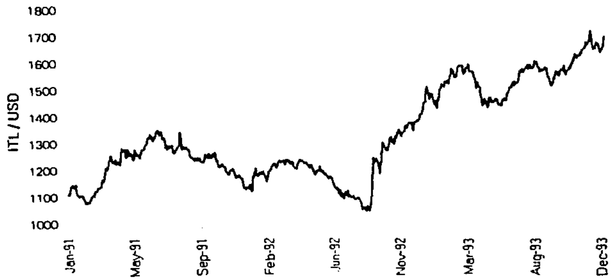
En ciertas ocasiones utilizar un simple promedio móvil no ha sido muy satisfactorio. En el caso de que la volatilidad se incremente rápidamente por algún movimiento muy grande en el mercado (como una devaluación), debido a que todos los puntos en la muestra tienen el mismo peso, la volatilidad se puede incrementar rápidamente, pero de igual manera disminuye cuando esa observación particular cae fuera de la muestra a utilizar.

Una alternativa para evitar este problema es utilizar un promedio ponderado exponencial donde la última observación tiene el mayor peso para estimar la volatilidad. Este enfoque tiene dos ventajas conceptuales importantes: la primera es que la volatilidad estimada reacciona más rápidamente a un cambio grande en el mercado, ya que los datos recientes son los que llevan más peso en la estimación; y la segunda es que después del movimiento grande del mercado la volatilidad disminuye gradualmente conforme el peso otorgado para la estimación disminuye.

En las gráficas siguientes se muestra este hecho para el tipo de cambio ITL/USD durante el último trimestre de 1992. Debido a la devaluación de la Lira Italiana con respecto al Dólar hubo un incremento en la volatilidad en el tipo de cambio. La volatilidad estimada utilizando un promedio móvil ponderado exponencialmente refleja rápidamente este tipo de eventos y también incorpora la disminución gradual de la volatilidad en los siguientes meses. El promedio móvil estándar de 6 meses tardó más tiempo en registrar el movimiento en el mercado y se mantuvo alto a pesar de el hecho que el mercado cambiario se calmó más rápidamente.

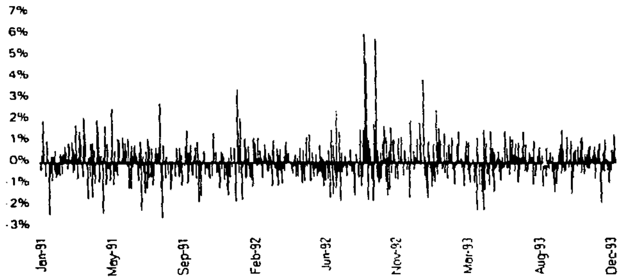
Tipo de Cambio ITL/USD

Enero 1991 a Diciembre 1993.



Incremento porcentual del Tipo de Cambio ITL/USD

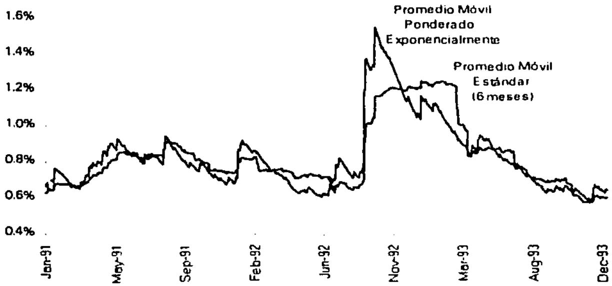
Enero 1991 a Diciembre 1993.



Desviación estándar del Tipo de Cambio ITL/USD

Promedio móvil ponderado exponencialmente vs. Promedio móvil estándar.

Enero 1991 a Diciembre 1993.



3.3.2 Promedio móvil ponderado exponencialmente.

En vez de aplicar el mismo peso a cada dato, como en un simple promedio móvil (cada dato tiene un peso de $1/T$ donde T es el tamaño de la muestra), el promedio móvil ponderado exponencialmente coloca más peso en las observaciones recientes. El peso asignado a cada dato depende del factor de decrecimiento (*decay factor*).

Consideremos una serie de observaciones en el tiempo $\{X_t\}$ y definamos el nivel actual de la serie como:

$$\hat{X}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j X_{t-j}$$

donde: $\omega_j = \lambda^j (1-\lambda)$ para $0 < \lambda < 1$

donde las ω_j son un conjunto que suma a la unidad y λ es el factor de decrecimiento o coeficiente de descuento. En un simple promedio móvil todas las ω_j son iguales. Una forma de poner mas peso a la observación más reciente es dejar que los pesos disminuyan exponencialmente. Entonces:

$$\hat{X}_T = (1-\lambda)\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j X_{t-j} \qquad \text{para} \quad 0 < \lambda < 1$$

Si T es grande, la condición de que los pesos sumen la unidad se satisface aproximadamente cuando:

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{j=0}^{T-1} \omega_j = (1-\lambda) \lim_{T\to\infty} \sum_{j=0}^{T-1} \lambda^j = 1$$

Ajustar una serie de tiempo a un promedio móvil ponderado exponencialmente (PMPE) requiere que se seleccione un valor apropiado para el coeficiente de descuento λ. En esencia, la selección de λ deberá depender de la velocidad con la que el nivel medio de $\{X_t\}$ cambia a lo largo del tiempo. Intuitivamente esto tiene sentido, si el nivel medio evoluciona lentamente con el tiempo, se deberán escoger valores de λ cercanos a 1. De la misma forma, valores de λ pequeños se deberán seleccionar cuando hay cambios rápidos en el nivel medio de $\{X_t\}$.

En la práctica es importante determinar, para un factor de decrecimiento dado, cuántos datos utiliza el PMPE. Para hacer esto, utilizamos la medida Ω_K^∞ que es la suma acumulada de los pesos decrecientes geométricamente empezando K periodos en el pasado (en este caso los periodos son días).

$$\Omega_K^\infty = (1-\lambda)\sum_{t=K}^{\infty}\lambda^K$$

Ajustando esta cantidad a un valor suficientemente cercano a cero, NT (Nivel de Tolerancia), se puede resolver para K:

$$\begin{aligned}
\Omega_K^\infty &= (1-\lambda)\sum_{t=K}^{\infty}\lambda^K = NT \\
&= (1-\lambda)\left[\lambda^K + \lambda^{K+1} + \lambda^{K+2} + \cdots\right] = NT \\
&= \lambda^K(1-\lambda)\left[1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots\right] = NT \\
&\Rightarrow \lambda^K = NT \\
&\Rightarrow K = \frac{\log(NT)}{\log(\lambda)}
\end{aligned}$$

En otras palabras, para un factor de decrecimiento λ y un nivel de tolerancia NT, el número de días efectivos de datos utilizados por el PMPE es K. La siguiente tabla muestra la relación entre el nivel de tolerancia, el factor de decrecimiento y la cantidad de datos requeridos por el PMPE.

Número de datos históricos utilizados para un nivel de tolerancia dado y un factor de decrecimiento.

	Nivel de Tolerancia			
Factor de Decrecimiento	0.00001	0.0001	0.001	0.01
0.85	71	57	43	28
0.86	76	61	46	31
0.87	803	66	50	33
0.88	90	72	54	36
0.89	99	79	59	40
0.90	109	87	66	44
0.91	122	98	73	49
0.92	138	110	83	55
0.93	159	127	95	63
0.94	186	149	112	74
0.95	224	180	135	90
0.96	282	226	169	113
0.97	378	302	227	151
0.98	570	456	342	228
0.99	1146	916	687	458

Por ejemplo, con un nivel de tolerancia de 0.1% y un factor de decrecimiento del 0.93, el PMPE utiliza aproximadamente 95 datos históricos para pronosticar las volatilidades y correlaciones futuras.

3.3.3 Estimador diario de Volatilidad

Hasta ahora se ha presentado un caso para los rendimientos ponderados exponencialmente. La aplicación de este filtro a las series de rendimientos tiene importantes implicaciones para pronosticar las volatilidades. Específicamente, para ventanas infinitamente grandes, es decir T aproximándose a infinito, las desviaciones estándar de un promedio móvil exponencial tienen una ventaja adicional: pueden ser calculadas recursivamente. Esto es, la desviación estándar al tiempo t puede ser calculada a partir de la desviación estándar al tiempo $t-1$, ajustada por la última observación. Suponiendo una media de cero, el proceso es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_t^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i X_{t-i}^2 \\
&= (1-\lambda)\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i X_{t-i}^2 \\
&= (1-\lambda)\left[X_t^2 + \lambda X_{t-1}^2 + \lambda^2 X_{t-2}^2 + \cdots\right] \\
&= (1-\lambda)X_t^2 + \lambda\left\{(1-\lambda)\left[X_{t-1}^2 + \lambda X_{t-2}^2 + \lambda^2 X_{t-3}^2 + \cdots\right]\right\} \\
&= \lambda\tilde{\sigma}_{t-1}^2 + (1-\lambda)X_t^2
\end{aligned}$$

El cálculo de la volatilidad requiere de un valor inicial σ_0^2. Se puede obtener este valor para cada valor de decrecimiento utilizando la fórmula $K = \frac{\log(NT)}{\log(\lambda)}$, para determinar la cantidad de datos históricos a utilizar y calcular la varianza sencilla:

$$\bar{\sigma}_0^2 = \frac{1}{K}\sum_{i=0}^{(K-1)}(X_{t-i})^2$$

El estimador inicial de la varianza utiliza los últimos K datos antes de la recursión.

3.3.4 Estimador diario de Correlación

De una forma similar al estimador ex-ante de la desviación estándar es el procedimiento para calcular los estimadores de las correlaciones. Sin embargo, como la correlación es una función de las desviaciones estándar, se deduce una expresión para las covarianzas. En primer lugar, para un PMPE la fórmula para la correlación está dada por:

$$\rho_t = \frac{\sum_{n=0}^{N-1}\omega_n\left[(X_{t-n})(Y_{t-n})\right]}{\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1}\omega_n X_{t-n}^2}\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1}\omega_n Y_{t-n}^2}}$$

Similar a lo que se puede obtener con la desviación estándar, el cálculo de las correlaciones utilizando un promedio móvil exponencial puede ser estimado mediante un procedimiento recursivo. La forma más sencilla de resolver este problema es estimar la covarianza, y seguido deducir de ésta el factor de correlación. El procedimiento para el cálculo de la covarianza, asumiendo una media de cero, es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma}^2_{xy,t} &= \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i X_{t-i} Y_{t-i} \\
&= (1-\lambda)\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i X_{t-i} Y_{t-i} \\
&= (1-\lambda)\left[X_t Y_t + \lambda X_{t-1} Y_{t-1} + \lambda^2 X_{t-2} Y_{t-2} + \cdots\right] \\
&= (1-\lambda) X_t Y_t + \lambda \left\{(1-\lambda)\left[X_{t-1} Y_{t-1} + \lambda X_{t-2} Y_{t-2} + \lambda^2 X_{t-3} Y_{t-3} + \cdots\right]\right\} \\
&= \lambda \tilde{\sigma}^2_{xy,t-1} + (1-\lambda) X_t Y_t
\end{aligned}
$$

La fórmula para la correlación es:

$$
\rho_{xy,t} = \frac{\tilde{\sigma}^2_{xy,t}}{\tilde{\sigma}_{x,t}\tilde{\sigma}_{y,t}}
$$

De la misma forma que para las volatilidades, se necesita un valor inicial para las covarianzas. Como la longitud de las series de precios y tasas históricas disponibles puede variar, para cualquier par de series de tiempo se utilizarán únicamente los datos más recientes para los cuáles existen ambas series. Basados en estas series se obtiene ρ_0, utilizando primero la misma fórmula que en el caso anterior para determinar K, que son los datos que el PMPE necesita, y entonces se calcula la correlación sencilla entre las series a lo largo de este periodo.

CONCLUSIONES.

Debido a la naturaleza actual de los mercados financieros, los participantes en estos deben mostrar interés por conocer el nivel de riesgo asociado a su negocio.

Para conocer dicho nivel de riesgo, es importante tener una visión de portafolio, ya que es de poca utilidad conocer los niveles de riesgo individuales asociados a cada elemento del portafolio.

Para lograr este objetivo, se recomienda utilizar la metodología descrita en el capítulo uno, ya que se basa en datos históricos, es un método simple y uniforme; y otorga un estimador del capital en riesgo razonablemente robusto.

Es importante probar que las hipótesis, en las que se basa la metodología descrita, son suficientemente válidas para nuestros objetivos. En el capítulo dos se presentaron algunos métodos para verificar dicha validez.

Por último, es importante mencionar que las desviaciones estándar y las correlaciones no se pueden calcular directamente con las estadísticas tradicionales, ya que estos parámetros no son convergentes, i.e., varían a lo largo del tiempo. Es por esto que en el capítulo tres se presentó una alternativa para la estimación de dichos parámetros, necesarios para el cálculo del capital en riesgo.

Conforme los participantes en los mercados financieros empiecen a calcular su capital en riesgo deberán implementar políticas para la administración de los riesgos en los que son participes, como pueden ser límites máximos por línea de negocio, carteras ó sub-portafolios así como un límite máximo de todo el portafolio.

A medida que la apertura del mercado mexicano progrese, será imprescindible que las compañías sepan administrar y controlar sus riesgos. El Capital en Riesgo es solamente una, pero no menos importante, de las herramientas que se utilizan para la Administración de Riesgos.

ANEXO 1

Estadística Descriptiva.

A1.1 Conceptos.

Estadística: es el estudio de los fenómenos aleatorios.

Inferencia estadística: es la obtención de conclusiones basadas en los datos experimentales.

Población: colección de toda la posible información que caracteriza a un fenómeno.

Muestra: subconjunto representativo seleccionado de una población.

El objetivo de las técnicas de muestreo es asegurar que cada observación en la población tiene una oportunidad igual e independiente de ser incluida en la muestra. Estos procesos de muestreo nos conducen a una *muestra aleatoria*. A partir de las observaciones de una muestra aleatoria se calculan características de la muestra llamadas *estadísticas*; con estas estadísticas se hacen inferencias sobre ciertas características de la población, que se denominan *parámetros*.

Así, muchas veces se analiza la información que contiene una muestra aleatoria con el propósito de hacer inferencias sobre la naturaleza de la población de la cuál se obtuvo la muestra.

En estadística la inferencia es inductiva, ya que va de lo específico (muestra) a lo general (población). Este procedimiento comprende un tipo de error, este error está dado por una medida de confiabilidad que se mide en términos de probabilidad.

Elementos característicos de los problemas estadísticos:

i) Población de interés y el procedimiento para muestrear la población.
ii) Muestra y el análisis matemático de su información.
iii) Inferencias estadísticas.
iv) Probabilidad de que las inferencias sean las correctas.

Tipos de inferencia estadística:

i) Inferencia clásica.
   Este enfoque descansa únicamente en la evidencia muestral.
ii) Inferencia Bayesiana.
   Utiliza la evidencia muestral con otra información, generalmente incorporada por el investigador del problema.

A1.2 Descripción gráfica de los datos.

Una descripción informativa de cualquier conjunto de datos está dada por la frecuencia de repetición o arreglo distribucional de las observaciones en el conjunto.
Frecuencia de clase: Número de observaciones en una clase.

Frecuencia relativa de clase: Número de frecuencia de clase entre el número combinado de observaciones entre todas las clases.

Limites: Frontera de clase.

Punto medio: promedio aritmético entre los límites superior e inferior.

Histograma de frecuencia relativa (ó distribución de frecuencia relativa): gráfica de las frecuencias relativas de las clases contra sus respectivos intervalos en forma de rectángulos.

El número de clases que se emplea para clasificar los datos en un conjunto depende del total de observaciones. Si el número de observaciones es pequeño usar 5 clases; si por el contrario es grande usar un número no mayor a 15.

Es recomendable usar clases de la misma longitud, restando la diferencia entre los valores extremos y dividiéndola entre el número de clases.

Distribución de frecuencia relativa acumulada: se obtiene graficando la frecuencia relativa acumulada de una clase contra el límite inferior de la siguiente y uniendo con segmentos todos los puntos consecutivos.

Cuantil: valor bajo el cual se encuentra una determinada proporción de valores de la distribución.

Esta es la principal utilidad de la distribución acumulada; el valor del cuantil se lee en dirección opuesta, en el eje horizontal, a la proporción correspondiente deseada sobre el eje vertical.

A1.3 Medidas numéricas descriptivas.

Existen 2 medidas de interés para cualquier conjunto de datos:

i) localización de su centro.
   Tendencia central de un conjunto de datos es la disposición de estos para agruparse ya sea alrededor del centro o de ciertos valores numéricos.
ii) variabilidad.
   Variabilidad de un conjunto de datos es la dispersión de las observaciones en el conjunto.

A1.4 Medidas de tendencia central:

i) La media,
ii) La Mediana,
iii) La Moda.

Media: La media de las observaciones $x_1, x_2, \cdots, x_n$ es el promedio aritmético de estas y se denota por $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Mediana: La mediana de un conjunto de observaciones es el valor para el cual, cuando todas las observaciones se ordenan de manera creciente, la mitad de estas es menor que este valor y la otra mitad mayor.
Si el número de observaciones es impar, la mediana es el valor de la observación que se encuentra a la mitad del conjunto ordenado.
A partir de la distribución acumulada, la mediana es el percentil cincuenta.

Moda: La moda de un conjunto de observaciones es el valor de la observación que ocurre con mayor frecuencia en el conjunto.
A partir de determinar la distribución de frecuencia relativa, la clase con la frecuencia más alta se llamará frecuencia modal y la moda corresponde al punto medio de esta clase.

Muchas veces la única información que se cuenta es la tabla de frecuencias, por lo que es este caso se obtienen valores aproximados para la media, la mediana y la moda. Los cálculos aproximados se hacen con los puntos medios de cada clase y sus respectivas frecuencias.

Media: Sea k el número de clases y x_i el punto medio de la clase i. Entonces el valor aproximado de la media es: $\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_i x_i}{n}$

donde: $f_i =$ frecuencia de la clase i.

$n = \sum_{i=1}^{k} f_i$

Mediana: Es aquel valor que divide en 2 partes iguales la distribución de frecuencia relativa. La fórmula es: $Mediana = L + C\left(\frac{j}{fm}\right)$

donde: $L =$ límite inferior de la clase donde esta la mediana.

$fm =$ frecuencia relativa de la clase donde esta la mediana.

$C =$ longitud de la clase.

$j =$ número de observaciones en la clase.

Una medida de tendencia central proporciona información acerca de un conjunto de datos, pero no proporciona ninguna idea de la variabilidad de las observaciones.

A1.5 Medidas de variabilidad.

Varianza: La varianza de las observaciones $x_1, x_2, \cdots, n_n$ es el promedio del cuadrado de las distancias entre cada observación y la media del conjunto de observaciones. La varianza se denota por: $\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

Desviación Estándar (σ): Raíz cuadrada positiva de la varianza.

Para los datos agrupados la varianza y la desviación estándar se calcula mediante:

Varianza: $$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \bar{x})^2$$

Desviación estándar: $$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

donde:
- $f_i =$ frecuencia de la clase i.
- $x_i =$ punto medio de la clase i.
- $\bar{x} =$ media.
- $n =$ suma de todas las frecuencias.

Desviación Media: es el promedio de los valores absolutos de las diferencias entre cada observación y la media de las observaciones. La desviación media está dada por: $DM = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|$, y para datos agrupados por: $DM = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i|x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$

Desviación Mediana: es el promedio de los valores absolutos de las diferencias entre cada observación y la mediana de estas. La desviación mediana está dada por: $D.Md. = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - Md|$

Recorrido: El recorrido R de las observaciones en un conjunto de datos es la diferencia entre el valor más grande y el mas pequeño del conjunto.

Recorrido Intercuantil: la diferencia entre los percentiles números 75 y 25.

Recorrido Interdecil: la diferencia entre los percentiles números 90 y 10.

ANEXO 2

La Distribución Normal

La distribución Normal o Gaussiana es la más importante y la de mayor uso de todas las distribuciones continuas de probabilidad. Es la distribución más importante en la aplicación de la inferencia estadística, ya que las distribuciones de muchas estadísticas muestrales tienden a la distribución normal conforme crece el tamaño de la muestra.

La apariencia gráfica de la distribución normal es una curva simétrica en forma de campana, que se extiende sin límite tanto en la dirección positiva como en la negativa.

A2.1 Definición

Se dice que una variable aleatoria X se encuentra normalmente distribuida si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

para: $-\infty < x < \infty$, y $\sigma > 0$

El máximo de $f(x)$ se obtiene cuando $x=\mu$ y los puntos de inflexión de $f(x)$ son $(\mu+\sigma, f(\mu+\sigma))$ y $(\mu-\sigma, f(\mu-\sigma))$.

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}dt \end{aligned}$$

Sea $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ donde μ es la media de X y σ es la desviación estándar de X

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

$$Z \approx N(0,1)$$

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{a}^{b} \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}dt \\ &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\ &= F_Z(b) - F_Z(a) \end{aligned}$$

A2.2 Propiedades básicas de la distribución Normal.

Función de densidad de probabilidad: $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$

para: $-\infty < x < \infty$

Parámetros:	μ,	$-\infty < \mu < \infty$
	σ,	$\sigma > 0$
Kurtosis Relativa:	3	
Media:	μ	
Varianza:	σ^2	
Desviación Media:	0.7979σ	
Recorrido Intercuantil:	1.35σ	
Recorrido Interdecil:	2.65σ	
Coeficiente de Simetría:	0	

La distribución normal es una forma límite de la distribución binomial cuando n es grande y p es cercano a cero o a uno. El teorema con el que se demuestra es el teorema del límite de Moivre-Laplace.

ANEXO 3

Glosario

Bin: Intervalo de clase.

Commodity: Mercancía básica. Bienes no diferenciables.

Correlación con la distribución normal: Correlación de una serie de datos (muestra), con la distribución normal.

Desviación Estándar: Una medida de variabilidad. Indicación del ancho de los cambios alrededor de la media de la distribución.

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Hedge: Cobertura; cubrir. Neutralizar, o disminuir, el riesgo de mercado de un portafolio.

Kurtosis: Caracteriza lo "alto" o "picudo" vs. lo "bajo" o "plano" de una distribución dada comparada a una distribución normal. Kurtosis positiva indica una distribución relativamente "alta" o "picuda", Kurtosis negativa indica una distribución "baja" o "plana".

$$K_X = \left\{ \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_X} \right)^4 \right\} - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}$$

Media: Una medida de tendencia central. Promedio aritmético de las observaciones.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Rango: Valor absoluto de la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo.

Skewness: Índice de asimetría. Caracteriza el grado de asimetría de la distribución alrededor de su media. Skewness positiva indica cola asimétrica extendiéndose hacia los valores positivos (lado derecho). Skewness negativa indica cola asimétrica extendiéndose hacia los valores negativos (lado izquierdo).

$$S_X = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_X} \right)^3$$

Tamaño de la muestra: Número de Observaciones en la muestra. Orden del conjunto muestra.

Trade:	Operación de compra venta de prductos financieros (tasas de interés, monedas; commodities, productos derivados, etc.); operar; comerciar; comercio.
Valor Máximo:	Máximo de los valores de la muestra.
Valor Mínimo:	Mínimo de los valores de la muestra.

BIBLIOGRAFIA

Desai, Meghnad.,(1977), Applied Econometrics, Philip Allan Publishers Limited.

Famma, E. (1965), The Behavior of Stock Market Prices, Journal of Business.

Guildimann, Till M., Zangari, Peter., Longerstaey, Jacques., (1995), RiskMetrics - Technical Document, Morgan Guaranty Trust Company.

Heuts, R.M.J., and Rens, S. (1986), Testing Normality When Observations Satisfy a Certain Low Order ARMA - Scheme, Computational Statistics Quarterly.

Jarque, C.M. and Bera, A.K., (1980), Efficient Tests for Normality, Homoskedasticity and Serial Independence of Regression Residuals, Economic Letters.

Kiefer, N., and Salmon, M., (1983), Testing Normality in Econometric Models, Economic Letters.

Mandelbrot, B. (1963), The Variations of Certain Speculative Prices, Journal of Business.

Mood, Alexander M., Graybill, Franklin A., Boes, Duane C., (1986), Introduction to the Teory of Statistics, McGraw-Hill.

Richardson, M., and Smith, T. (1993), A Test for Multivariate Normality in Stock Returns, Journal of Business.

Shapiro, S.S., and Wilk, M.B. (1965), An Analysis of Variance Test for Normality, Biometrika.