



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

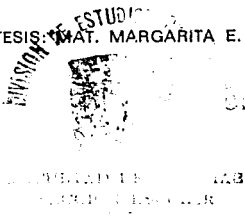
DISTRIBUCIONES EN ESTADISTICA
CIRCULAR

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
A C T U A R I O
P R E S E N T A :
MONICA ANGELES VELAZQUEZ

DIRECTOR DE TESIS: MATH. MARGARITA E. CHAVEZ CANO



MEXICO, D. F.
TESIS CON
FALSA DE ORIGEN



1997



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrin Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"Distribuciones en Estadística Circular"

realizado por Angeles Velázquez Mónica
con número de cuenta 8929703-4, pasante de la carrera de Actuaría.
Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Mat. Margarita Elvira Chávez Cano

M. E. Chávez

Propietario

M. en C. Beatriz Eugenia Rodríguez Fernández

Beatriz Rodríguez

Propietario

Dr. José Rodolfo Mendoza Blanco

José Rodolfo Mendoza Blanco

Suplente

Mat. Vinicio Pérez Fonseca

Vinicio Pérez Fonseca

Suplente

Act. José Manuel Morales Cortes

José Manuel Morales Cortes

Consejo Departamental de Matemáticas
Act. Agustín Román Aguilar

Agustín Román Aguilar

AGRADEZCO A LA UNIVERSIDAD
NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
HABERME PERMITIDO SER
ESTUDIANTE DE ESTA ALMA MATER Y
POR HABERME ABIERTO LAS PUERTAS
PARA LABORAR EN ELLA.

A LA FACULTAD DE CIENCIAS:
EN ESPECIAL A LOS PROFESORES
QUE ME TRANSMITIERON SUS
CONOCIMIENTOS.

A LA MAT. MARGARITA E. CHÁVEZ
CANO:
ESTOY AGRADECIDA POR EL APOYO
QUE ME DIO AL ESTAR REALIZANDO
ESTÁ TESIS, POR SU PACIENCIA Y POR
HABERME TRANSMITIDO SUS
CONOCIMIENTOS.

AL CENTRO DE COMPUTO, EN
ESPECIAL A MI JEFE, EL ING. JORGE
LEÓN QUE ME ESTUVO APOYANDO EN
LA REALIZACIÓN DE ESTA TESIS.

A MIS ABUELOS:

**BERNARDO ANGELES† Y LEONILA DE
ANGELES POR HABERME DADO FUERZAS
PARA SEGUIR ADELANTE.**

A MIS PADRES:

**JUAN MANUEL ANGELES Y
AMALIA DE ANGELES POR
HABERME DADO UNA EDUCACIÓN
Y POR HABERME APOYADO EN MIS
DECISIONES.**

A MIS HERMANAS:

**ERIKA Y NORMA POR ABSTENERSE DE
ESTARME MOLESTANDO .**

A MIS AMIGOS :

**ANGELICA, ALVARO, ARACELI,
ADRIANA, CHIVIS, EDITH, LUCERO,
MARU, MARTHA; POR HABERME
HECHADO PORRAS.**

A MIS COMPAÑEROS DE TRABAJO:

**POR HABERME AUXILIADO EN LAS
LABORES DEL TRABAJO.**

**Y POR ULTIMO A UNA PERSONA
MUY ESPECIAL QUE NO HACE
FALTA MENCIONAR, CON TODO MI
CORAZÓN.**

NO DESISTAS

Cuando vayan mal las cosas como a veces suelen ir,
cuando ofrezca tu camino solo cuestras que subir,
cuando tengas poco a ver pero mucho que pagar,
y precise sonreír aún teniendo que llorar,
cuando ya el dolor te agobie y no puedas ya sufrir,
descansar al caso debes pero nunca desistir.

Tras las sombras de la deuda,
ya plateadas ya sombrías,
puede bien surgir el triunfo,
no hay fracaso que temías,
y no es dable a tu ignorancia figurarse tan cercano,
puede estar el bien que anhelas y que juzgas tan lejano,
lucha, pues más que en la brega tengas que sufrir
¡cuando todo esté peor, más debemos insistir!

Rudyard Kipling.

INDICE

INTRODUCCIÓN	v
CAPITULO I: CONCEPTOS BÁSICOS	1
1. <i>Estadística Circular</i>	1
1.1 Representación Gráfica	2
1.1.1 Representación Gráfica para datos sin agrupar	2
1.1.2 Representación Gráfica para datos agrupados	2
2. <i>Radianes</i>	4
3. <i>Muestra aleatoria</i>	5
4. <i>Medidas Descriptivas</i>	5
4.1. <i>Vector Medio</i>	6
4.2. <i>Dirección Mediana</i>	10
4.3. <i>La Moda</i>	11
4.4. <i>Sesgo y kurtosis</i>	11
5. <i>Propiedades del Vector Medio</i>	12
6. <i>Medidas de concentración</i>	14
7. <i>Varianza Angular y Desviación Angular</i>	15
8. <i>Estadísticas</i>	17
CAPITULO II: FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN	19
1. <i>Función de Distribución</i>	19
1.1. <i>Conceptos Básicos de una distribución</i>	22
2. <i>Momentos Trigonométricos</i>	25
3. <i>Estimación de Parámetros</i>	28
3.1. <i>Estimación por el Método de Momentos</i>	30
3.2. <i>Estimación por el Método de Máxima -verosimilitud</i>	30
4. <i>Función Característica</i>	31

5. Distribuciones Punto.....	32
6. Distribuciones Lattice	34
6.1. Función de Densidad	35
6.2. Función de Distribución	36
6.3. Propiedades de la distribución.....	37
7. Distribución Uniforme circular, $U(0,2\pi)$	37
7.1. Estimando el parámetro α por el método de máxima-verosimilitud.....	38
7.2. Función característica de la distribución Uniforme $U(0,2\pi)$	41
8. Distribución von Mises.....	42
8.1. Su relación con otras distribuciones.....	48
8.2. Estimación por el método máxima-verosimilitud	51
8.3. Estimación de los parámetros por el método de Schou.....	54
8.4. Función Característica de una von Mises $M(k,0)$	55
8.5. Función de distribución	57
9. Distribuciones Envueltas.....	58
9.1. Propiedades de las funciones de distribuciones envueltas.....	59
9.2. Distribución Normal envuelta $N_n(\mu_1, \rho_1)$	61
9.2.1. Función de densidad de probabilidad.....	62
9.2.2. Función de distribución	62
9.2.3. Función Característica de la distribución Normal envuelta.....	62
9.2.4. Propiedad aditiva de la función característica	64
9.2.5. Su relación con otras distribuciones	65
9.3. Distribución Poisson envuelta.....	66
9.3.1. Función Característica.....	67
10. Distribución Coseno o cardioide.....	67
10.1. Su relación con otras distribuciones	70
10.2. Función de Distribución	71

10.2. Momentos Trigonométricos	72
10.3. Función Característica	74
CAPITULO III: APLICACIONES DE LA FUNCIÓN VON MISES	79
1. Procedimiento	79
2. Problema de precipitación pluvial	88
3. Problema del número de ocurrencias de la precipitación de 1" (una pulgada) o más	94
4. Problema de los "runoff"	98
5. Problema de porcentajes de muertes	103
6. Problema de precipitación pluvial en milímetros	107
CONCLUSIONES	111
BIBLIOGRAFÍA	113
TABLA DE NOTACIONES	115
APÉNDICE I	I
APÉNDICE II	XIX



INTRODUCCIÓN

Los modelos probabilísticos son un aspecto muy importante del análisis. Si se puede ajustar un modelo de probabilidades a nuestros datos, haciendo una estimación adecuada de los parámetros en el modelo, entonces los datos pueden ser resumidos eficientemente utilizando la forma particular del modelo de probabilidad especificado por los estimadores de los parámetros. Ha sido sorprendente para nosotros el encontrar que los modelos de probabilidad no han tenido mucha aplicación a datos circulares por diferentes motivos.

El interés de la *Estadística Circular* nace con el libro "Circular Statistics in Biology", de Batschelet(1981), a partir de esta obra se publicaron muchos artículos y varios libros especializados en el tema.

Los puntos distribuidos sobre un círculo son analizados por la estadística circular. Este tipo de datos ocurren en muchas aplicaciones de biología, medicina, geología, geografía, meteorología y física. Las observaciones de direcciones sobre un plano y de fenómenos cíclicos pueden ser interpretados como observaciones circulares.

De allí un tema central del estudio que se presentará en un futuro inmediato, son las Distribuciones en *Estadística Circular*, cuyo objetivo es mostrar las principales distribuciones con sus principales características. En ese sentido para que el lector pueda irse introduciendo al tópic, es necesario comprender algunos conceptos básicos como la muestra aleatoria, el vector



medio, la dirección mediana, la moda, la varianza angular y la desviación angular estos conceptos están dados en el *CAPÍTULO I*. Ahora bien para obtener algunos conceptos básicos es necesario conocer determinadas herramientas matemáticas como por ejemplo las operaciones entre los vectores, el estudio de las funciones trigonométricas, el concepto de las funciones Bessel y series de Fourier, lo anterior se muestra en el *APÉNDICE I*. Por otro lado, en el *CAPÍTULO II* se muestran las distribuciones más importantes de la Estadística Circular, por ejemplo la distribución Uniforme circular que es semejante a la distribución Uniforme de Estadística lineal, la distribución normal circular que es semejante a la distribución Normal lineal; ésta última fue introducida por von Mises cuando supuso que los cuerpos atómicos son enteros y están sujetos a un error y éste puede ser representado por desviaciones angulares, con su características más importantes como la estimación de los parámetros de la distribución.

Cuando se tiene una distribución sobre la línea y se envuelve alrededor de la circunferencia del círculo unitario, se obtendrá una distribución envuelta, llamada una distribución circular envuelta. En este capítulo también se muestran las distribuciones envueltas más importantes.

En el *CAPÍTULO III* se aplican dos métodos a los problemas que tienen una distribución Normal circular donde uno de ellos nos lleva a una distribución observada y el otro nos lleva a una distribución teórica, lo cual es importante hacer una comparación de las dos distribuciones para ver qué criterios convencionales pueden ser usados.

Los métodos son aplicados a los problemas de la precipitación pluvial, al número de ocurrencias de la precipitación de 1 una o más pulgadas, de los runoff¹ y de los porcentajes de muertes.

En el *APÉNDICE II* se muestran tablas de conversiones y de la distribución normal como por ejemplo la comparación entre ángulos medidos en grados 0° a 360° , las horas del día de 0:00 a 24:00 y radianes de 0 a 2π , la comparación de la longitud del vector medio (ρ o r) convertido a una desviación angular (σ o s).

¹ Es la cantidad de agua que queda en el suelo cuando llueve.

CAPITULO I

1. ESTADÍSTICA CIRCULAR

A diferencia de la estadística lineal, en la estadística circular se tienen observaciones en medidas angulares ($0 < \phi^\circ \leq 360^\circ$ ó $0 < \phi \leq 2\pi$). Las observaciones angulares pueden surgir de experimentos como por ejemplo, las direcciones de las rutas migratorias de los pájaros, las series de tiempo en economía, el estudio de la ocurrencia de los temblores en una región, la dirección del viento en los fenómenos meteorológicos, hipótesis de que los pesos atómicos son enteros y están sujetos a un error y éste puede ser representado por desviaciones angulares (Prueba propuesta por von Mises 1918). También pueden surgir indirectamente de medidas de tiempo reducidas a algún periodo y convertirlas en ángulos. Por ejemplo se tiene un año, un año tiene doce meses y se supone que un mes tiene treinta días entonces un día puede ser representado por un grado.

Por lo anterior se puede decir que el análisis circular tiene muchas aplicaciones en las áreas como, biología, geología, paleontología, geografía, meteorología, astronomía, psicología, física, economía y medicina.

Las direcciones son medidas por ángulos que van de 0° a 360° o su equivalente en radianes, 0 a 2π . La suma o diferencia de ángulos puede exceder el intervalo de 0° a 360° , y de aquí tiene que ser reducido al modulo 360° (APÉNDICE I).

Las direcciones son cíclicas por lo tanto se llaman variables circulares. Cuando un evento ocurre repetidamente y en el mismo instante dentro de un periodo, se asigna a él un ángulo de fase.

1.1 REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Las observaciones angulares pueden ser representadas de dos maneras, por un lado para datos sin agrupar y por el otro para datos agrupados.

1.1.1 Representación Gráfica para datos sin agrupar

Se representan las observaciones por puntos sobre la circunferencia de un círculo unitario (APÉNDICE I), la misma masa será asignada a cada observación, con centro O. Esta representación es llamada *Diagrama de puntos*. FIGURA 1.1.

1.1.2 Representación Gráfica para datos agrupados

Se tienen varios tipos de gráficas como por ejemplo:

Histograma circular. Cuando se tienen muchos datos puede llegar a ser necesario arreglar las direcciones observadas en grupos. FIGURA 1.2.

Pollgono de frecuencias. Una vez que se tienen los intervalos se toman los puntos medios de cada uno de éstos y se unen los puntos medios para formar el polígono de frecuencias. FIGURA 1.3.

Histograma de línea. Consiste en extender el Histograma circular en un segmento; por ello, la longitud de éste es de 360° . FIGURA 1.3.

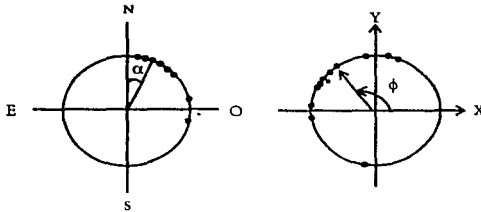


FIGURA 1.1. Las direcciones en un plano son indicadas por puntos sobre la circunferencia. (a) El ángulo α es medido desde el azimuth en dirección a las manecillas del reloj. (b) Es más usado el ángulo polar ϕ medido desde el eje X en dirección contraria a las manecillas del reloj.

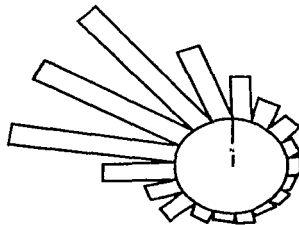


FIGURA 1.2. Histograma circular de la TABLA 1.1 (Mardia 1972).

Diagrama de Rosa. Se construye un sector con un punto en el origen, el radio es proporcional a la frecuencia y los arcos corresponden a los intervalos. FIGURA 1.4.

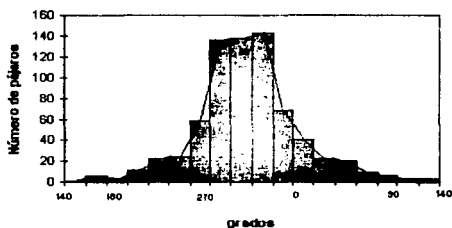


FIGURA 1.3. Histograma de línea de la TABLA 1.1 (Mardia 1972). Se utiliza más este histograma porque es más fácil de interpretar.

2. RADIANES

Para la teoría como por ejemplo la obtención del ángulo medio $\bar{\phi}_1$ Secc. 4.1 es preferible que el ángulo ϕ° en grados sea convertido en el ángulo ϕ en radianes (TABLA A. APÉNDICE II). Se tiene que

$$\phi^\circ = 180\phi/\pi, \quad \phi = \pi\phi^\circ/180^\circ$$

donde el rango de ϕ es de $0 < \phi \leq 2\pi$, que corresponde al rango $0^\circ < \phi^\circ \leq 360^\circ$ de ϕ° . Además los datos angulares en el intervalo de $(0^\circ, 180^\circ)$ pueden ser convertidos en el intervalo de $(0^\circ, 360^\circ)$ por un proceso de multiplicar cada ángulo, y el rango 0° a $360^\circ/l$ de ϕ° puede ser convertido en el intervalo de $(0, 2\pi)$ por $\phi = l\pi\phi^\circ/180$ donde l es un número entero.

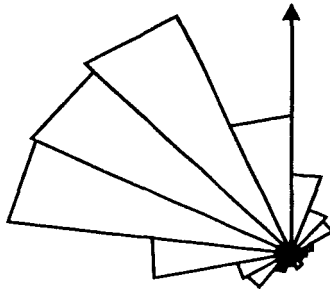


FIGURA 1.4. Diagrama de rosa de la TABLA 1.1(Mardia 1972).

3. MUESTRA ALEATORIA

Una muestra aleatoria (m.a) de una variable aleatoria poblacional ϕ , es un conjunto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas cada una con la distribución de ϕ , denotada por $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$.

Ej. Si ϕ se distribuye uniformemente, entonces ϕ_i se distribuye uniformemente y con los mismos parámetros de la variable aleatoria poblacional.

4. MEDIDAS DESCRIPTIVAS

Para describir una distribución circular unimodal es necesario tener algunas medidas como la media, la varianza, etc. Estas medidas también serán usadas para hacer comparaciones entre distribuciones, para la construcción de la teoría y para la estimación de los parámetros.

Sea $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ una muestra aleatoria poblacional de tamaño n de una población circular con una función de distribución $F(\phi)$. Los ángulos son medidos con respecto al eje X en dirección contraria a las manecillas del reloj. Se puede pensar que el ángulo ϕ_i está representando al vector unitario \overline{OP}_i , donde P_i es el punto de ϕ_i sobre el círculo unitario $\forall i=1, \dots, n$ (ver FIGURA 1.5). En el caso de datos agrupados, se tienen k intervalos de longitud h y se obtiene el punto medio a cada uno de éstos. Se denota el punto medio del i -ésimo intervalo de nuevo por ϕ_i ; asimismo, cada intervalo tiene observada una frecuencia f_i y la suma de las frecuencias es el número de observaciones n .

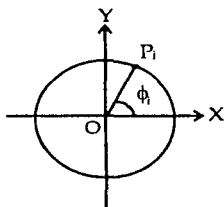


FIGURA 1.5. En la FIGURA se muestra el punto P_i y su ángulo ϕ_i .

4.1. VECTOR MEDIO

Se tiene un círculo unitario, a cada punto se le asigna el mismo valor de masa M , y encontrando el centro de masa C (APÉNDICE I), si este centro es diferente del origen O , la línea OC define una dirección la cual se llamará *dirección media de la muestra* o *vector medio* (ver FIGURA 1.6).

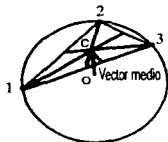


FIGURA 1.6. La FIGURA muestra el vector medio.

Hay dos formas de calcular el vector que apunta al centro de masa:

- La primer forma es mediante el Álgebra de vectores.

Cada punto sobre el círculo unitario puede ser localizado por un vector unitario, entonces sean: $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ vectores unitarios que representan las direcciones de la muestra.

Por definición,

$|e_i|=1$ para toda $i=1, \dots, n$.

Sea que $M_i \forall i=1, \dots, n$, la masa del i -ésimo vector e_i , donde es localizada en el punto final del vector i -ésimo.

Por definición

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n M_i e_i}{\sum_{i=1}^n M_i}$$

Si se supone que todas las masas son iguales; es decir,
 $M=M_1=M_2=M_3=\dots=M_n$

$$\Rightarrow \quad m = \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{n}.$$

Llamamos a \bar{M} el *vector medio de la muestra*, que apunta al centro de masa

Sea R la *longitud del vector suma* y r es la *longitud del vector medio*, por consiguiente se tiene:

$$R = \left| \sum_{i=1}^n e_i \right|, \quad r = |m| = \frac{R}{n}.$$

De lo anterior se tiene $0 \leq R \leq n$ y $0 \leq r \leq 1$.

- La segunda forma es a través de las funciones trigonométricas

Usando coordenadas rectangulares con ejes X y Y , con origen O .

Si ϕ_i es el i -ésimo ángulo observado y e_i el vector unitario correspondiente a ϕ_i ; donde los componentes rectangulares de e_i son x_i y y_i , entonces por definición de seno y coseno (APÉNDICE I).

$$x_i = \cos \phi_i, \quad y_i = \sin \phi_i \quad (1.1)$$

Sean \bar{X} y \bar{Y} las coordenadas rectangulares del centro de masa definidas por:

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n \frac{\cos \phi_i}{n}, \quad \bar{Y} = \sum_{i=1}^n \frac{\text{sen } \phi_i}{n}.$$

Si r es la longitud del vector medio con componentes \bar{X} y \bar{Y} . De la ecuación $r^2 = \bar{X}^2 + \bar{Y}^2$ se despeja a r y se sustituyen las ecuaciones de 1.1 y se obtiene:

$$r = \frac{1}{n} \sqrt{\left[\left(\sum_{i=1}^n \cos \phi_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \text{sen } \phi_i \right)^2 \right]}.$$

Análogamente, si R es la longitud del vector suma con componentes $\sum_{i=1}^n x_i$ y $\sum_{i=1}^n y_i$; entonces se tiene:

$$R = \sqrt{\left[\left(\sum_{i=1}^n \cos \phi_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \text{sen } \phi_i \right)^2 \right]}.$$

Un caso especial ocurre cuando \bar{X} y \bar{Y} son cero; esto implica que $r=0$, y por consiguiente, el vector medio es igual al vector cero. Ahora, si se omite este caso, el vector medio tiene un ángulo bien definido con respecto al eje X positivo denominado el ángulo medio denotado por $\bar{\phi}_1$.

$$\bar{\phi}_1 = \begin{cases} \text{arc tan } (\bar{y}/\bar{x}), & \text{si } \bar{x} > 0 \\ 180^\circ + \text{arc tan } (\bar{y}/\bar{x}), & \text{si } \bar{x} < 0 \\ 90^\circ & \text{si } \bar{x} = 0, \quad \bar{y} > 0 \\ 270^\circ & \text{si } \bar{x} = 0, \quad \bar{y} < 0 \\ \infty & \text{si } \bar{x} = 0, \quad \bar{y} = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Los valores de la muestra $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ están sujetos a fluctuaciones aleatorias. Las estadísticas $m, r, R, \bar{\phi}_1$ se desvían de los parámetros correspondientes de la población subyacente.

4.2. DIRECCIÓN MEDIANA

Se divide la muestra circular por un diámetro de tal manera que la mitad de la muestra caiga en un lado y la otra mitad del otro lado. El diámetro está definido por dos puntos P y Q. Si la muestra es unimodal de tamaño n, y si el número n es impar el diámetro va a estar definido por un punto de la muestra; si no, el diámetro pasa en medio de dos puntos de ésta. (ver FIGURA 1.7)

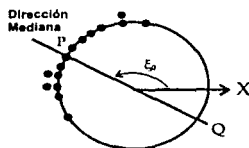


FIGURA 1.7. La FIGURA muestra la dirección mediana.

Intuitivamente, si la mayoría de las observaciones están cerca del punto P en vez de Q; \overline{OP} es llamado dirección mediana y se denotará por ξ_0 . Se dice que ξ_0 es una dirección mediana de la población si satisface la siguiente ecuación:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_0+\pi} f(\phi) d\phi = \int_{\xi_0+\pi}^{\xi_0+2\pi} f(\phi) d\phi = \frac{1}{2}.$$

4.3. LA MODA

Al valor que ocurre con mayor frecuencia dentro de un conjunto de medidas se le llama la moda. De aquí, se selecciona el punto corte que es donde hay una máxima concentración y este punto será el centro de la distribución. La moda está definida (Mardia 1972, p. 30) para datos agrupados como:

$$\text{Moda} = l + \frac{f_0 - f_{-1}}{2f_0 - f_{-1} - f_{+1}} h$$

donde l es el límite inferior de la clase modal, f_0 es la frecuencia de la clase modal, f_{-1} es la frecuencia de la clase modal anterior, f_{+1} es la frecuencia de la clase modal posterior y h es la longitud del intervalo.

4.4. SESGO Y KURTOSIS

Se supone que una distribución bimodal tiene sus picos en $\bar{\phi}_1$ y $\bar{\phi}_1 + 180^\circ$. Por el duplicado de los ángulos (ver FIGURA 2.4) se obtiene $2\bar{\phi}_1$, y $2\bar{\phi}_1 + 180^\circ$ respectivamente que son congruentes modulo 2π . Con esto las probabilidades de la distribución original estarán encima y sólo permanecerá un pico, con esto se puede pensar que si se duplican los ángulos, una distribución bimodal se puede convertir en una distribución unimodal.

Un análisis (Batschelet, p.43) muestra que el grado de sesgo depende de r_2 , $\bar{\phi}_2$ y $\bar{\phi}_1$, donde r_2 y $\bar{\phi}_2$ son obtenidos con los ángulos duplicados, y está dado por:

$$r_2 \text{sen}(\bar{\phi}_2 - 2\bar{\phi}_1).$$

Por la duplicación de ángulos se tiene $\bar{\phi}_2 = 2\bar{\phi}_1$, así que $r_2 \text{sen}(\bar{\phi}_2 - 2\bar{\phi}_1)$ se hace cero en este caso.

Una distribución puede ser chata o picuda con respecto a la moda; a esta medida se le llama *Kurtosis* y está dada por:

$$r_2 \text{cos}(\bar{\phi}_2 - 2\bar{\phi}_1).$$

Batschelet, p.43 define esta medida utilizando el término anterior.

5. PROPIEDADES DEL VECTOR MEDIO

El centro de masa es definido independientemente del sistema de coordenadas, el vector medio no depende de la dirección cero. Se supone que se rota la dirección cero por un ángulo ψ en el sentido a las manecillas del reloj. Entonces los valores de la muestra ϕ_i están dados por:

$$\phi_i' = \phi_i - \psi \quad \forall i=1, \dots, n.$$

Análogamente, para obtener un nuevo ángulo se tiene:

$$\bar{\phi}' = \bar{\phi} - \psi,$$

pero la longitud del vector medio r , permanece invariable.

Se tiene cuatro analogías de (1.2) con la estadística lineal:

- Una desviación $(X_i - \bar{X})$ es análoga a $\text{sen}(\phi_i - \bar{\phi}_1) \approx \phi_i - \bar{\phi}_1$
- Desarrollando $\text{sen}(\phi_i - \bar{\phi}_1) = \text{sen}\phi_i \cos \bar{\phi}_1 - \cos\phi_i \text{sen} \bar{\phi}_1$ y sumando sobre i

$$\sum_{i=1}^n \text{sen}(\phi_i - \bar{\phi}_1) = \frac{\bar{x}n\bar{y}}{r} - \frac{\bar{y}n\bar{x}}{r} = 0$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n \text{sen}(\phi_i - \bar{\phi}_1) = 0.$$

Para una pequeña desviación $\phi_i - \bar{\phi}_1$ de la ecuación $\text{sen} \bar{\phi}_1 \approx \bar{\phi}_1$

entonces $\text{sen}(\phi_i - \bar{\phi}_1) \approx \phi_i - \bar{\phi}_1$, esto es análogo a $\sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x}) = 0$ en estadística lineal.

- Desarrollando $\cos(\phi_i - \bar{\phi}_1) = \cos\phi_i \cos \bar{\phi}_1 + \text{sen}\phi_i \text{sen} \bar{\phi}_1$ y sumando sobre i

$$\sum_{i=1}^n \cos(\phi_i - \bar{\phi}_1) = \cos \bar{\phi}_1 \sum_{i=1}^n \cos\phi_i + \text{sen} \bar{\phi}_1 \sum_{i=1}^n \text{sen}\phi_i$$

$$\sum_{i=1}^n \cos(\phi_i - \bar{\phi}_1) = \frac{(\bar{x})n\bar{x}}{r} + \frac{(\bar{y})n\bar{y}}{r} = \frac{n}{r}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \cos(\phi_i - \bar{\phi}_1) &= r^2 n / r = rn \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{2[1 - \cos(\phi_i - \bar{\phi}_1)]}{n} &= 2(1 - r) \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{(\phi_i - \bar{\phi}_1)^2}{n} &= 2(1 - r). \end{aligned}$$

Esto es análogo a $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x})^2 = s^2$ en estadística lineal.

- De lo anterior se deduce $(x_i - \bar{x})^2$ es análogo a $2[1 - \cos(\phi_i - \bar{\phi}_1)]$.

6. MEDIDAS DE CONCENTRACIÓN

Se observa que cuando caen todos los puntos de la muestra en una misma dirección sobre el círculo, la longitud del vector medio r , es igual a 1 (ver FIGURA 1.8). Esto es un caso de máxima concentración. Cuando los puntos de la muestra están cercanos y forman un arco de no más de 20° , el centro de masa es cercano a la circunferencia del círculo unitario y r se aproxima a 1. Si hay menos concentración, r es pequeño. Si $r=0$ no hay concentración, es decir, las observaciones se distribuyen uniformemente. *Para las muestras unimodales, la longitud del vector medio r , sirve como medida de concentración.*

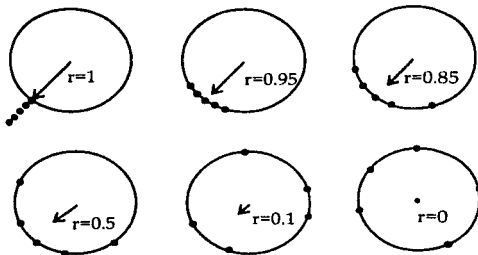


FIGURA 1.8. El rango de la longitud del vector medio es de 0 a 1. Decrece r cuando las observaciones se van distribuyendo uniformemente a lo largo del círculo.

La longitud del vector medio está sujeto a fluctuaciones aleatorias y puede diferir considerablemente del parámetro que corresponde a la población subyacente.

7. VARIANZA ANGULAR Y DESVIACIÓN ANGULAR

La longitud del vector medio r se puede considerar como una medida de concentración. Indirectamente es una medida de dispersión; si r disminuye de 1 a 0, la dispersión aumenta y es natural considerar $1-r$ como una medida de dispersión; sin embargo, una comparación de las igualdades :

$$1/n \sum (\phi_i - \bar{\phi}_1)^2 \approx 2(1-r) \text{ es análoga a } 1/n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = s^2$$

sugiere que se debe considerar mejor a $2(1-r)$ que a $1-r$ como una estadística, por lo tanto definimos la cantidad:

$$s^2 = 2(1-r)$$

como *varianza angular*, esta estadística es equivalente a la *varianza en estadística lineal*.

Si se obtiene la raíz cuadrada, s será una medida de dispersión llamada *desviación media angular* medida en radianes, la cual es equivalente a la *desviación estándar en estadística lineal*. En la FIGURA 1.9 se muestra la *desviación media angular* y la *longitud del vector medio*.

Si s^2 y s se multiplican por $180^\circ/\pi$, se obtendrá la *varianza angular* y la *desviación media angular* respectivamente en grados.

$$s^2 = [180^\circ/\pi]^2 (1-r)$$

$$s = [180^\circ/\pi] \sqrt{2(1-r)}$$

A continuación se presenta una construcción geométrica de s dada r , ésta fue encontrada por Seyforth y Barth (1972). Ver FIGURA 1.10. La TABLA B (APÉNDICE II) permite convertir a r en s y la TABLA D permite convertir a s en r .

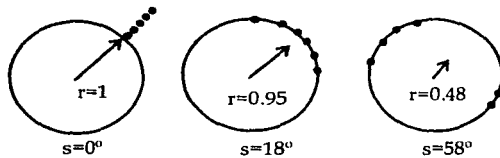


FIGURA 1.9. La desviación media angular s , decrece tanto como decrece la longitud media del vector r .

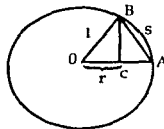


FIGURA 1.10. La construcción de la desviación media angular está dada por la longitud del vector medio r . La demostración está basada en el teorema de pitágoras aplicado a los triángulos BCO y ABC. s es conceptualmente la longitud del arco, y no de un segmento.

8. ESTADÍSTICAS

Una estadística es una función de las observaciones de la muestra que no depende de parámetros desconocidos, por ejemplo

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \phi_i .$$

CAPITULO II

1. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Una población representa el "estado de la naturaleza" o la forma de las cosas con respecto a un fenómeno aleatorio en particular, mismo que puede identificarse a través de una característica medible ϕ . La manera en que ocurren las cosas en relación con ϕ puede definirse por un modelo de probabilidad que recibe el nombre de distribución de probabilidad de la población. Ahora bien, si se supone que n eventos ocurren durante un periodo (éstos pueden ser tormentas, muertes o carambolas de automóviles) y cada uno de ellos ocurre en determinada fecha; pues bien, si ésta es determinada como una variable ϕ , la distribución de eventos en el periodo puede ser considerada como una distribución circular de un ángulo.

Se llaman distribuciones univariadas aquellas que se conocen en estadística lineal no direccional y que son trazadas en una línea. Se tienen ejemplos de distribuciones de familias como la binomial, la Poisson y la normal entre otras.

Por un lado; las distribuciones lineales pueden tener un rango finito como por ejemplo la binomial, o un rango infinito numerable $+\infty$ como la distribución Poisson, o un rango $(-\infty, +\infty)$ como la distribución normal; y a

diferencia de ellas las distribuciones circulares siempre tienen un rango finito, el rango es de 0° a 360° (ó de 0 a 2π).

Sea z una variable aleatoria la cual toma sus valores sobre la circunferencia de un círculo unitario $x^2+y^2=1$.

Se puede identificar los valores posibles de z mediante ángulos medidos con respecto a la parte positiva del eje X y en sentido contrario a las manecillas del reloj, así que el ángulo ϕ representa el punto $(\cos\phi, \text{sen}\phi)$, $0 < \phi \leq 2\pi$.

Con esta representación se puede definir la función de distribución F de la variable z por la siguiente ecuación:

$$F(\phi) = P(0 < z \leq \phi), \quad 0 < \phi \leq 2\pi.$$

Sin embargo, una observación se repite ciclicamente, por lo tanto la función de distribución se puede ver la siguiente forma:

$$F(\phi + 2\pi n) = F(\phi) \quad 0 < \phi < 2\pi \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si se considera la probabilidad cuando ϕ toma un valor en un arco, se desarrollará lo siguiente: Sean α, β dos ángulos, tales que $0 < \alpha, \beta < 2\pi$. Se supone que A, B son dos puntos sobre el círculo unitario representados por α y β respectivamente. Se denota el arco formado por los puntos A y B en dirección contraria a las manecillas del reloj por $\text{arc}(\alpha, \beta)$, con la convención de que el punto A es excluido. Se denota por x el punto sobre el círculo unitario que corresponde a la dirección cero, i.e. x es el punto positivo con respecto al eje X donde empieza el círculo.

Si $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ entonces el $\text{arc}(\alpha, \beta)$ es el arc AB del círculo unitario el cual no contiene al punto x , sin embargo, el $\text{arc}(\beta, \alpha)$ es el arc $B \times A$ contiene a x . En el primer caso el punto A no fue considerado, mientras que en el segundo caso fue el punto B.

En estos casos, se puede denotar a los arcos por $\alpha < \phi \leq \beta$ y $\beta < \phi \leq \alpha$ respectivamente.

Para $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ y $\beta - \alpha < 2\pi$, se puede demostrar que tiene la siguiente propiedad:

$$P\{\phi \in \text{arc}(\alpha, \beta)\} = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} dF(\phi)$$

donde la integral es una integral de Lebesgue-Stieltjes; también se tiene:

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} F(\phi) = 1, \quad \lim_{\phi \rightarrow -\infty} F(\phi) = 0.$$

Si se evalúa en cero y en uno se tiene:

$$F(0) = 0, \quad F(2\pi) = 1.$$

F depende de la elección de la dirección cero, se muestra que $F(\beta) - F(\alpha)$ es independiente de dicha elección. Por lo tanto, si se cambia la dirección cero se le suma una constante a F.

Si la función de distribución es absolutamente continua, entonces tiene una función de densidad de probabilidad (f.d.p.) f tal que :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi) d\phi = F(\beta) - F(\alpha), \quad 0 < \alpha < \beta < 2\pi.$$

Una función f es una función de densidad de probabilidad de una distribución continua si y sólo si:

$$i) f(\phi) \geq 0 \quad 0 < \phi \leq 2\pi \quad (2.1)$$

$$ii) f(\phi + 2\pi) = f(\phi) \quad 0 < \phi \leq 2\pi \quad (2.2)$$

$$iii) \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi = 1. \quad 0 < \phi \leq 2\pi \quad (2.3)$$

En este caso se describe a ϕ como una variable aleatoria circular continua.

1.1. CONCEPTOS BÁSICOS DE UNA DISTRIBUCIÓN

Una idea intuitiva de una distribución circular está dada por una gráfica circular: el círculo es de radio arbitrario, y la densidad $f(\phi)$ está trazada con respecto a una dirección radial; en la FIGURA 2.1 se muestra una gráfica de la función von Mises. Sin embargo, es más práctico utilizar una gráfica de línea donde $f(\phi)$ se representa mediante coordenadas rectangulares. Sólo existe una desventaja, ya que el punto inicial sobre la línea es arbitrario y este hecho puede causar fácilmente una confusión; ésta es mostrada en la gráfica de línea (FIGURA 2.1) de una distribución circular trazada con tres diferentes puntos iniciales.

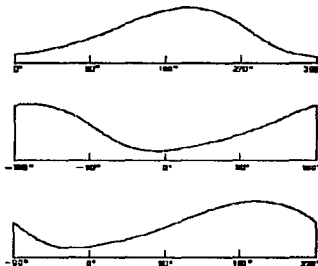


FIGURA 2.1. Tres diferentes gráficas de la misma distribución circular. La distribución es unimodal, y la moda es localizada en el ángulo 200° . Los puntos iniciales de las gráficas son 0° (arriba), -180° (en medio) y -90° (abajo).

En estadística circular existe un *vector medio* denotado por μ_1 y la longitud de éste será denotado por ρ_1 . Es decir,:

$$\rho_1 = |\mu_1|, \quad 0 \leq \rho_1 \leq 1$$

y θ_1 es el ángulo polar de μ_1 , llamado *ángulo medio* de la distribución y existe éste si y sólo si $\rho_1 > 0$.

Los componentes rectangulares de μ_1 son a_1 medido con respecto al eje X y b_1 medido con respecto al eje Y (ver . FIGURA 2.2).

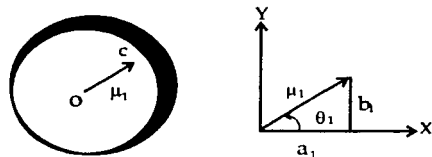


FIGURA 2.2. Se tiene un ejemplo de una distribución continua (parte sombreada) donde la probabilidad total es uno sobre la circunferencia de círculo unitario; también se muestra el vector medio μ_1 , con su centro de gravedad, y sus componentes rectangulares a_1 y b_1 . De igual manera el ángulo medio θ_1 .

En la siguiente sección se calcula el vector medio μ_1 .

Se tiene $a_1 = \rho_1 \cos \theta_1$, $b_1 = \rho_1 \sin \theta_1$; ahora bien, la solución de estas ecuaciones con respecto a ρ_1 y θ_1 es:

$$\rho_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

$$\theta_1 = \begin{cases} \arctan(b_1/a_1), & \text{si } a_1 > 0 \\ 180^\circ + \arctan(b_1/a_1), & \text{si } a_1 < 0 \\ 90^\circ & \text{si } a_1 = 0, \quad b_1 > 0 \\ 270^\circ & \text{si } a_1 = 0, \quad b_1 < 0 \\ \infty & \text{si } a_1 = 0, \quad b_1 = 0 \end{cases}$$

La longitud del vector medio ρ_1 , es un número entre 0 y 1. Si se aproxima esta longitud a 1, entonces la masa total está concentrada alrededor de la dirección media; si no la masa no está concentrada alrededor de ésta o la

distribución tiene más de una moda. Por consiguiente ρ_1 es una medida de concentración alrededor de la dirección media.

Frecuentemente es deseable obtener una medida de dispersión en vez de una medida de concentración; claramente las dos medidas están interrelacionadas ya que mientras una se incrementa la otra decrece. En Batschelet (1965) se propone la *desviación angular* definida por:

$$\sigma = \sqrt{2(1 - \rho_1)} \quad (\text{radianes}).$$

Para convertir a σ en grados se multiplica por $180^\circ/\pi=57.296^\circ$. La *desviación angular* puede determinarse en la TABLA B DEL APÉNDICE II.

Además, define la *varianza angular* (Mardia 1972 p.45) como:

$$v_0=1-\rho_1=1-E\{\cos(\phi-\mu_1)\}, \text{ donde } \rho_1 \text{ es la longitud del vector medio.}$$

2. MOMENTOS TRIGONOMÉTRICOS

Para cada ángulo ϕ se le asigna un valor $f(\phi)$ que es la función de densidad de probabilidad de una distribución circular (ver FIGURA 2.3).

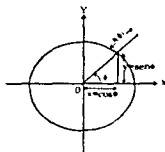


FIGURA 2.3. La f.d.p. $f(\phi)$ está asociada con el vector unitario (x, y) donde $x=\cos\phi$, $y=\text{sen}\phi$.

Para cada vector unitario con componentes:

$$x = \cos \phi, \quad y = \sin \phi$$

se calculan los valores medios de x y y por las siguientes fórmulas:

$$a_1 = \int_0^{2\pi} x f(\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \cos \phi f(\phi) d\phi = E(\cos \phi)$$

$$b_1 = \int_0^{2\pi} y f(\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \sin \phi f(\phi) d\phi = E(\sin \phi).$$

Las medias a_1 y b_1 son *componentes del vector medio*, donde éste es también denominado el primer momento trigonométrico de una distribución circular denotado por:

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}.$$

A diferencia del momento trigonométrico de las distribuciones lineales este momento es un vector; por ello, el vector medio $\mu_1 = (\rho_1, \theta_1)$ contiene más información que un momento ordinario.

Se sabe que ρ_1 es la longitud del vector medio y θ_1 es el ángulo medio; por consiguiente, μ_1 no sólo proporciona la dirección media sino una medida para la concentración de la distribución alrededor de la dirección media.

Para obtener el segundo momento trigonométrico, se realiza lo siguiente: para cada masa se duplica el ángulo; esto es, se localiza la masa en 2ϕ en lugar de ϕ , donde 2ϕ es congruente modulo 2π . Para una distribución discreta el proceso de duplicar los ángulos es visto en la FIGURA 2.4.

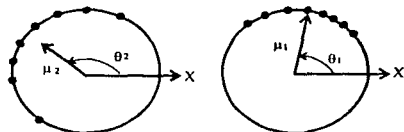


FIGURA 2.4. El duplicado de ángulos para una distribución circular discreta.
 μ_1 es el primer momento trigonométrico y μ_2 el segundo momento.

La nueva distribución tiene su propio vector medio y precisamente éste se llama el segundo momento trigonométrico, entonces sus componentes son:

$$a_2 = \int_0^{2\pi} \cos 2\phi f(\phi) d\phi = E(\cos 2\phi)$$

$$b_2 = \int_0^{2\pi} \sin 2\phi f(\phi) d\phi = E(\sin 2\phi).$$

Así que el segundo momento es el vector :

$$\mu_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

y ρ_2 es la longitud de μ_2 definida por:

$$\rho_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}, \quad 0 \leq \rho_2 \leq 1.$$

Si $\rho_2 > 0$, existe un ángulo medio θ_2 , pero si $\rho_2 = 0$ el ángulo no está determinado y las coordenadas polares ρ_2 y θ_2 son calculadas de la misma forma que calculamos ρ_1 y θ_1 .

El momento trigonométrico de orden n está definido por:

$$\mu_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$$

donde

$$a_n = \int_0^{2\pi} \cos n\phi f(\phi) d\phi = E(\cos n\phi)$$

$$b_n = \int_0^{2\pi} \sin n\phi f(\phi) d\phi = E(\sin n\phi).$$

Se tienen las siguientes propiedades para los componentes a_n y b_n :

$$a_{-n} = a_n, \quad b_{-n} = -b_n, \quad |a_n| \leq 1 \quad \text{y} \quad |b_n| \leq 1.$$

3. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

Para analizar las muestras primero se definirán algunas estadísticas; así como las medidas locales y de dispersión. En un nivel más sofisticado se encontrará un modelo; esto es, una población subyacente de la cual la muestra fue obtenida. Por ejemplo, para muestras circulares unimodales y simétricas un modelo común es una distribución von Mises; donde esta distribución es

definida por dos parámetros, el ángulo medio θ_1 y el parámetro de concentración, k .

Para la población subyacente se asigna la siguiente notación:

	Estadística (muestra)	Parámetro (población)
vector medio	m	μ_1
longitud del vector medio	r	ρ_1
ángulo medio	ϕ_1	θ_1

Es aceptable que los estimadores de los parámetros sean las estadísticas dadas; es decir, se denotarán los estimadores de μ_1 , ρ_1 , y θ_1 por $\hat{\mu}_1, \hat{\rho}_1$ y $\hat{\theta}_1$. Así que tentativamente se sugiere:

$$\hat{\mu}_1 = m$$

$$\hat{\rho}_1 = r$$

$$\hat{\theta}_1 = \phi_1$$

A la hora de estimar los parámetros es primordial encontrar la estadística que pierda menos información de la muestra en el proceso de reducción de las variables.

El mérito de estos estimadores sólo puede ser discutido en conexión con una distribución particular, un caso importante es de la distribución von

Mises (Secc. 8), donde se encuentran los estimadores máximo-verosímiles de la longitud del vector medio ρ_1 , y del ángulo medio θ_1 .

Los estimadores máximo-verosímiles tienen algunas propiedades favorables; como ser consistentes, eficientes y suficientes.

3.1. ESTIMACIÓN POR EL MÉTODO DE MOMENTOS

Se supone que $f(\phi; \theta_1, \rho_1)$ es la f.d.p de una población la cual depende solamente de dos parámetros θ_1 y ρ_1 .

Sean

$$E(\cos\phi) = a_1(\theta_1, \rho_1) \quad (2.4)$$

$$E(\sin\phi) = b_1(\theta_1, \rho_1) \quad (2.5)$$

donde a_1 y b_1 no son idénticamente iguales a cero. Entonces los estimadores de θ_1 y ρ_1 por el método de momentos es la solución de las siguientes ecuaciones:

$$\bar{x} = a_1(\theta_1, \rho_1), \quad \bar{y} = b_1(\theta_1, \rho_1).$$

3.2. ESTIMACIÓN POR EL MÉTODO DE MÁXIMA -VEROSIMILITUD

Sea $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ una m.a. de una población con f.d.p. $f(\phi, \alpha)$ que depende de un vector de parámetros $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ y $L(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) = f(\phi_1, \alpha) f(\phi_2, \alpha) \dots f(\phi_n, \alpha)$ es la función de verosimilitud.

Para obtener el estimador máximo-verosímil se maximiza la función L como función de α y el punto en el cual se maximiza es el estimador $\hat{\alpha}$ de α .

4. FUNCIÓN CARACTERÍSTICA

DEFINICIÓN. Si z es una variable aleatoria con valores sobre el círculo unitario; se identifica con ésta una variable aleatoria continua ϕ ($0 < \phi \leq 2\pi$), y z se define como :

$$z = e^{i\phi}$$

En analogía con estadística lineal, se define la función :

$$\phi(t) = E(e^{it}) = \int_0^{2\pi} e^{it\phi} f(\phi) d\phi$$

como la función característica de $f(\phi)$, donde $f(\phi)$ es la f.d.p. de ϕ . Ahora se sabe que $F(\phi+2\pi) - F(\phi) = 1$ donde $0 < \phi \leq 2\pi$; por consiguiente es fácil ver que:

$$\int_0^{2\pi} e^{it(\phi+2\pi)} dF(\phi) = \int_0^{2\pi} e^{it\phi} dF(\phi)$$

La teoría de series de Fourier para funciones periódicas muestra que es suficiente tomar t como un entero (APÉNDICE I). Por lo tanto, la función característica está definida por:

$$\phi_p = E(e^{ip\phi}) = \int_0^{2\pi} e^{ip\phi} f(\phi) d\phi, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

De lo anterior se tienen las siguientes propiedades:

$$1. \phi_0 = 1$$

Demostración:

$$\phi_0 = \int_0^{2\pi} e^{i0\phi} f(\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = 1.$$

$$2. |\phi_p| \leq 1$$

Demostración:

$$\left| \int_0^{2\pi} f(\phi) e^{ip\phi} d\phi \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(\phi)| |e^{ip\phi}| d\phi = \int_0^{2\pi} |f(\phi)| d\phi = 1 \quad \Rightarrow \quad |\phi_p| \leq 1.$$

$$3. \phi_p = \phi_{-p}$$

$$4. \phi_p = a_p + ib_p$$

Demostración:

$$\phi_p = \int_0^{2\pi} e^{ip\phi} f(\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} (\cos p\phi + i \operatorname{sen} p\phi) f(\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \cos p\phi f(\phi) d\phi + i \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} p\phi f(\phi) d\phi$$

$$\phi_p = E(\cos p\phi) + iE(\operatorname{sen} p\phi) = a_p + ib_p.$$

Además se tiene que:

$$e^{2ip} = \cos 2\pi(p) + i \operatorname{sen} 2\pi(p) = 1.$$

5. DISTRIBUCIONES PUNTO

Considere una distribución que se concentra en un solo punto $\phi = \theta$, de tal forma que:

$$f(\theta_1) = P(\phi = \theta_1) = 1 \quad (2.6)$$

donde su función característica está dada por:

$$\phi_p = e^{i p \theta_1}.$$

De la definición de v_0^2 puede verse que $v_0^2 = 0$. A continuación se muestra que si $v_0^2 = 0$ para una distribución, entonces ésta debe ser una distribución que tiene toda su masa en un punto.

Se tiene:

$$\int_0^{2\pi} \{1 - \cos(\phi - \theta_1)\} f(\phi) d\phi = 0.$$

Como la función $\{1 - \cos(\phi - \theta_1)\}$ es continua y no-negativa, la distribución con función de distribución F debe estar concentrada en el punto ϕ para el cual $\cos(\phi - \theta_1) = 1$. Por lo tanto se tiene de (2.6).

Para $\theta_1 = 0$,

$$\phi_p = \theta_1^p = 1, a_p = 1, \quad b_p = 0$$

por lo tanto, la expansión de Fourier para esta distribución es simplemente:

$$f(\phi) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \cos p\phi \right\}.$$

6. DISTRIBUCIONES LATTICE

Considere una distribución discreta definida por:

$$f_r(\phi = v + 2\pi r/m), \quad r=0,1,\dots,m-1,$$

y

$$f_r \geq 0, \quad \sum_{r=1}^{m-1} f_r = 1, \quad v = \text{nueva dirección cero.}$$

Los puntos $v+2\pi r/m$ son equidistantes sobre el círculo unitario y la distribución puede ser imaginada como una concentración sobre los vértices de un polígono regular de m lados. En particular, si todas las longitudes son iguales; es decir, si $f_r=1/m$ esto nos dará una distribución Uniforme circular discreta. Ahora, $m=37$ se tiene la distribución de una rueda de ruleta insesgada (honesto).

Si $v=0$, la función característica de la distribución está dada por:

$$\phi_p = \sum_{r=0}^{m-1} f_r e^{2\pi i r p / m}$$

$$\phi_p = 1 \quad \text{para } p=0 \pmod{m}$$

$$\phi_p = 0 \quad \text{en cualquier otro caso.}$$

Si todas las direcciones en el círculo unitario se eligen con la misma probabilidad; es decir que, si no hay preferencia por algún sector o por alguna dirección, entonces la distribución es conocida con el nombre de "Distribución Uniforme circular" o "Distribución Isotrópica". Este hecho se muestra gráficamente en la FIGURA 2.5.

Ahora bien, se supone que ϕ es una variable aleatoria angular continua que toma todos sus valores en el intervalo $[\alpha, \beta]$, en donde α y β son valores finitos, donde se supone la f.d.p de ϕ es una constante sobre la circunferencia del círculo unitario:

$$f(\phi) = k \quad \text{donde } k = \text{constante y } \alpha \leq \phi \leq \beta.$$

6.1. FUNCIÓN DE DENSIDAD

Para que $f(\phi)$ sea una función de densidad entonces tiene que satisfacer las condiciones (2.1), (2.2) y (2.3).

Se obtiene la integral para encontrar la constante k .

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi) d\phi = \int_{\alpha}^{\beta} k d\phi = k \int_{\alpha}^{\beta} d\phi = k\phi \Big|_{\alpha}^{\beta} = k(\beta - \alpha)$$

$$k(\beta - \alpha) = 1$$

$$\Rightarrow k = 1/(\beta - \alpha).$$

Por lo tanto, la función de densidad es:

$$f(\phi) = \frac{1}{\beta - \alpha} \quad \alpha \leq \phi \leq \beta.$$

Se observa que la función de densidad no depende de ϕ directamente.

6.2. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

La función de distribución está definida como :

$$F(\phi) = \int_0^{\phi} f(u) du = \begin{cases} \int_0^{\phi} 0 du = 0 & \phi \leq \alpha \\ \int_0^{\alpha} 0 du + \int_{\alpha}^{\phi} \frac{1}{\beta - \alpha} du = \frac{\phi - \alpha}{\beta - \alpha} & \alpha < \phi < \beta \\ \int_0^{\alpha} 0 du + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\beta - \alpha} du + \int_{\beta}^{\phi} 0 du = 1 & \phi \geq \beta \end{cases}$$

por lo tanto, $F(\phi)$ queda definida por:

$$F(\phi) = \begin{cases} 0 & \phi \leq \alpha \\ \frac{\phi - \alpha}{\beta - \alpha} & \alpha < \phi < \beta \\ 1 & \phi \geq \beta \end{cases}$$

Pólya usó una función uniforme n-dimensional (Mardia 1975) cuando estudiaba la lluvia de estrellas, ya que este fenómeno se distribuye aleatoriamente uniforme.

6.3. PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCIÓN

Una variable aleatoria distribuida uniformemente representa la analogía continua a los resultados igualmente posibles en el sentido siguiente: para cualquier sub-intervalo $[\delta, \gamma]$, en donde $\alpha \leq \delta < \gamma \leq \beta$, $P(\delta \leq \phi \leq \gamma)$ es la misma para todos los sub-intervalos que tienen la misma longitud. Esto es,

$$P(\delta \leq \phi \leq \gamma) = \int_{\delta}^{\gamma} f(\phi) d\phi = \int_{\delta}^{\gamma} \frac{1}{\beta - \alpha} d\phi = \frac{\gamma - \delta}{\beta - \alpha} \quad \alpha \leq \delta < \gamma \leq \beta$$

y así sólo depende de la longitud del intervalo y no de la ubicación del mismo.

7. DISTRIBUCIÓN UNIFORME CIRCULAR, $U(0, 2\pi)$

Sea ϕ una v.a. distribuida uniformemente en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Esta distribución es análoga a la distribución uniforme cero-uno ($U(0,1)$) en estadística lineal.

Su función de densidad está dada por:

$$f(\phi) = \frac{1}{2\pi} \quad 0 < \phi \leq 2\pi$$

aquí los parámetros son conocidos (ver FIGURA 2.5), sin embargo, si se tiene una distribución Uniforme circular en el intervalo $[0, \alpha]$, su función de densidad es:

$$f(\phi) = \frac{1}{\alpha} \quad 0 \leq \phi \leq \alpha$$

donde α se supone es un parámetro desconocido.

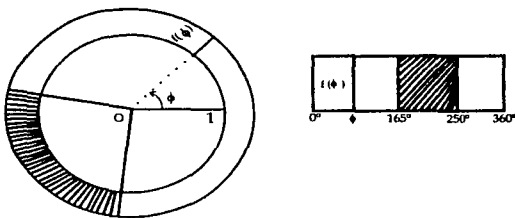


FIGURA 2.5. La distribución Uniforme circular. En la izquierda se muestra una gráfica circular y en la derecha se muestra una gráfica lineal. La probabilidad del sector de 165° a 250° se muestra sombreada.

7.1. ESTIMANDO EL PARÁMETRO α POR EL MÉTODO DE MÁXIMA-VEROSIMILITUD

Sea $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ una muestra aleatoria de una distribución Uniforme circular, cuya función de densidad es:

$$f(\phi) = \frac{1}{\alpha} \quad 0 \leq \phi \leq \alpha$$

Maximizando la función,

$$L(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n, \alpha) = \prod_{i=1}^n f(\phi_i, \alpha) \quad \phi_i \in [0, \alpha], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$L = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\alpha} \quad \phi_i \in [0, \alpha], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$L = \frac{1}{\alpha^n} \quad \phi_i \in [0, \alpha], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Obteniendo \ln y derivando se tiene:

$$\ln L = -n \ln \alpha, \quad \frac{d \ln L}{d \alpha} = -\frac{n}{\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad n = 0$$

y esto es falso ya que $n \neq 0$.

El método falla, porque el máximo no se alcanza en el interior del espacio paramétrico sino en la frontera.

De otro modo:

$$L = \frac{1}{\alpha^n}, \quad \text{si } \phi_i < \alpha \quad i=1,2,\dots,n$$

La función $L(\phi, \alpha)$ alcanza su valor máximo si el denominador es pequeño y esto sucede si n es pequeño.

Se tiene que cada variable es mayor que cero i.e:

$$0 < \phi_1, 0 < \phi_2, \dots, 0 < \phi_n$$

ordenando las variables aleatorias :

$$0 < \phi_{(1)}, 0 < \phi_{(2)}, \dots, 0 < \phi_{(n)}$$

donde

$$\phi_{(1)} = \min\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$$

$\phi_{(2)}$ = El siguiente de valor creciente

$$\phi_{(n)} = \max\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$$

entonces $0 < \phi_{(1)}$.

por otro lado:

$$\phi_1 < \alpha, \phi_2 < \alpha, \dots, \phi_n < \alpha$$

ordenando las variables aleatorias:

$$0 < \phi_{(1)} < \phi_{(2)} < \dots < \phi_{(n)} < \alpha$$

entonces se tiene lo siguiente:

$$0 < \phi_{(1)} < \phi_{(n)} < \alpha$$

por lo tanto el estimador de α es (ver FIGURA 2.6):

$$\hat{\alpha} = \phi_{(n)}$$

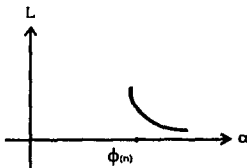


FIGURA 2.6. Se muestra la gráfica del estimador de α .

7.2. FUNCIÓN CARACTERÍSTICA DE LA DISTRIBUCIÓN UNIFORME $U(0, 2\pi)$

A continuación se obtiene la función característica de la distribución Uniforme $U(0, 2\pi)$.

$$\begin{aligned} \phi_p &= \int_0^{2\pi} e^{ip\phi} f(\phi) d\phi & p = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\ \phi_p &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{ip\phi}}{2\pi} d\phi \\ \phi_p &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ip\phi} d\phi \\ \phi_p &= \frac{1}{2\pi ip} e^{ip\phi} \Big|_0^{2\pi} & \text{si } p \neq 0 \\ \phi_p &= \frac{e^{ip2\pi} - 1}{2\pi ip} \end{aligned}$$

En consecuencia se tiene:

$$\phi_p = 1 \quad \text{si } p = 0$$

$$\phi_p = 0 \quad \text{si } p \neq 0$$

Si se tiene una distribución circular de tamaño $n \geq 2$, y el ángulo medio y la longitud del vector medio son independientes entonces la población se distribuye uniformemente alrededor del círculo. El lector puede ver la demostración en Bingham (1978) y en Kent et. al (1979).

8. DISTRIBUCIÓN VON MISES

La distribución von Mises juega un papel prominente en la estadística inferencial sobre el círculo y su importancia es similar a la distribución normal en estadística lineal. Además esta distribución tiene propiedades importantes que comparte con la distribución lineal y tiene aplicaciones para fenómenos meteorológicos como la precipitación pluvial la cual es una variable angular o "circular".

Gauss mostró que la distribución normal puede ser derivada del principio de máxima-verosimilitud y una hipótesis es que la media es el valor más posible. En 1918 Richard von Mises aplicó el método de Gauss para una variable circular y derivó la distribución von Mises. Su procedimiento es esencialmente el siguiente: von Mises se preguntó para una distribución $f(\xi)$, donde ξ es un "error de observación" $\xi_i = \phi_i - \phi$, que el cociente de la probabilidad a posteriori y la probabilidad a priori (la función de verosimilitud) de un "valor verdadero" ϕ , teniendo n observaciones $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$, es para obtener un máximo para ϕ dado por :

$$\sum_{i=1}^n \text{sen}(\phi_i - \theta_i) = 0. \quad (2.7)$$

La función de verosimilitud es:

$$\prod_{i=1}^n f(\xi_i).$$

El postulado significa que:

$$\sum_{i=1}^n \frac{f'(\phi_i - \theta_i)}{f(\phi_i - \theta_i)} = 0$$

esto debe ser cierto junto con (2.7). Puesto que estas dos sumas son iguales para valores arbitrarios de ϕ_i , la igualdad debe ser cierta término a término. Puede demostrarse en von Mises (1918) que esto conduce a la siguiente solución general:

$$f(\xi_i) = c e^{k \cos \xi_i} \quad i=1,2,\dots,n$$

donde los dos parámetros c y k están condicionados por:

$$\int_0^{2\pi} f(\xi) d\xi = 1$$

en consecuencia:

$$c = \frac{1}{\int_0^{2\pi} e^{k \cos \xi} d\xi}$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2\pi I_0(k)}$$

donde $I_0(k)$ es la función Bessel (APÉNDICE I) de primer tipo de argumento imaginario puro.

Por lo tanto, una variable aleatoria circular ϕ se distribuye von Mises si tiene la siguiente función de densidad :

$$f(\phi) = \frac{1}{2\pi I_0(k)} \exp[k \cos(\phi - \theta_1)]$$

donde $0 < \phi \leq 2\pi$, $k \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$ y la función $I_0(k)$ es una función Bessel de primer tipo y de orden cero, además en la TABLA F del APÉNDICE II se tienen algunos valores para ésta.

Se denotará a la distribución von Mises con parámetros k y θ_1 por $M(k, \theta_1)$.

El centro de masa está dado por el vector medio μ_1 , su vector polar es θ_1 , y su longitud es: $|\mu_1| = \rho_1 = A(k)$, donde $A(k)$ (FIGURA 2.7) es una función que está definida por:

$$A(k) = \rho_1 = \frac{I_1(k)}{I_0(k)} \quad (2.8)$$

donde $k \geq 0$, $I_0(k)$, $I_1(k)$ son funciones Bessel. El parámetro k puede ser convertido a ρ_1 por la TABLA C (APÉNDICE II) y para el caso opuesto se usa la TABLA B (APÉNDICE II), es decir convertir a ρ_1 en k .

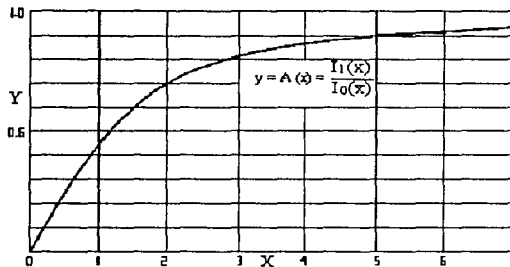


FIGURA 2.7. Se muestra la gráfica de la función $A(x)$. Si x es interpretado como parámetro de concentración k , entonces $A(k)$ es igual a la longitud del vector medio ρ_1 .

En la FIGURA 2.8 se muestra una gráfica de una distribución particular von Mises, donde se muestran el vector medio μ_1 y el centro de masa C . Además, el lector encontrará valores de la función de distribución acumulativa en la TABLA E (APÉNDICE II).

La función toma su valor máximo cuando $\phi = \theta_1$, por lo tanto θ_1 es la moda, y la antimoda (punto que tiene menor frecuencia) es $\phi = \theta_1 + \pi$. (FIGURA 2.8). Además, la distribución es simétrica con respecto a la moda, en consecuencia θ_1 es también el ángulo medio.

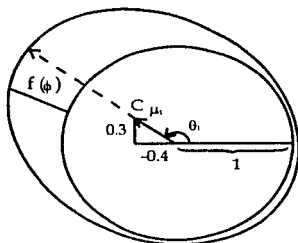


FIGURA 2.8. Gráfica circular de una distribución von Mises, donde se muestran la longitud del vector medio que es 0.5 el cual corresponde a $k=1.16$ y el ángulo medio θ_1 .

Ahora, los puntos de inflexión para una función de densidad con $\theta_1=0$ están dados por:

$$\pm \arccos \left\{ -\frac{1}{2k} + \left(1 + \frac{1}{4k^2} \right)^{1/2} \right\}.$$

Nota: $M(k, \theta_1 + \pi)$ y $M(-k, \theta_1)$ son la misma distribución, para eliminar esta indeterminación de los parámetros se toma siempre k mayor que cero y $0 < \theta_1 \leq 2\pi$.

En las FIGURAS 2.9 y 2.10 se muestran las gráficas de la función de densidad von Mises donde se varían los parámetros.

Para valores grandes de k los puntos de inflexión se reducen a $\pm k^{-1/2}$, los cuales son comparables con los puntos de inflexión $\pm \sigma$ de una distribución normal $N(0, \sigma^2)$. De aquí que, si k es grande la distribución se concentra alrededor de la dirección media, como se muestra en la FIGURA 2.8.

En la FIGURA 2.9 se muestra que entre más grande sea el parámetro de concentración k , la distribución se concentra alrededor de la dirección media.

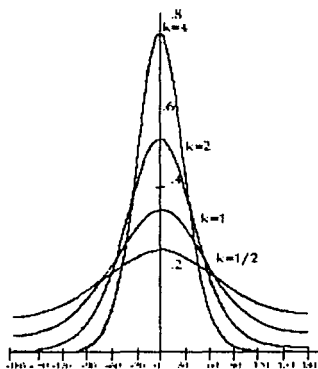


FIGURA 2.8. Gráfica de una distribución von Mises, donde $\theta_1 = 0^\circ$ y $k=1/2, 1, 2, 4$.

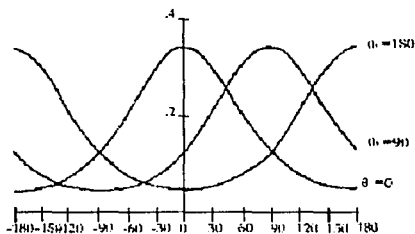


FIGURA 2.10. Gráfica de una distribución von Mises, donde $k = 1$ y $\theta_1 = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$.

8.1. SU RELACIÓN CON OTRAS DISTRIBUCIONES.

Para $k=0$ la distribución von Mises genera la distribución uniforme.

$$f(\phi) = \frac{1}{2\pi I_0(0)} e^{0 \cdot \cos(\phi - \theta_1)} = \frac{1}{2\pi I_0(0)} = \frac{1}{2\pi}, \text{ donde } I_0(0) = 1$$

En la FIGURA 2.11 se muestra una comparación de cuatro distribuciones simétricas importantes y unimodales con el mismo valor de ρ_1 , resultando que los puntos de inflexión de cada gráfica son diferentes.

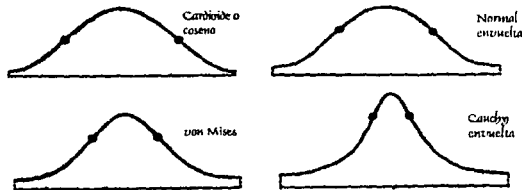


FIGURA 2.11 Gráficas de las distribuciones Cardíoloide o coseno, Normal envuelta, von Mises, y Cauchy envuelta.

Para valores pequeños de k , se encuentran términos negligibles de orden k^2, k^4, \dots esto se reduce a una distribución cardíoloide con f.d.p.

$$f(\phi) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \rho_1 \cos(\phi - \theta_1) \right\}, \quad 0 < \phi \leq 2\pi.$$

Haciendo $\phi - \theta_1 = \frac{\xi}{k^{1/2}}$, donde k es grande, entonces se tiene:

$$g(\xi) = \frac{1}{2\pi I_0(k)} e^{-k \cos(\frac{\xi}{k^{1/2}})} \text{ y } \cos(\frac{\xi}{k^{1/2}}) \doteq 1 - (\frac{\xi^2}{2k}),$$

donde ξ se distribuye $N(0,1)$. De lo anterior, para k grande la variable aleatoria

ϕ se distribuye como una $N(0, \frac{1}{k^{1/2}})$, entonces cuando $k \rightarrow \infty$; la distribución se llega a concentrar en el punto $\phi = \theta_1$.

Hay una relación peculiar entre la distribución von Mises y la distribución normal bivariada, la relación fue descubierta por Downs en 1976. Considerando el caso especial de la distribución normal bivariada con centro $(m, 0)$, desviaciones estándar $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, y con un coeficiente de correlación $\rho_1 = 0$; las curvas de nivel de la densidad de probabilidad que se obtiene son círculos y se muestran en la FIGURA 2.12. Estas curvas de nivel se interceptan con el círculo unitario originando una distribución circular von Mises. Por lo tanto, si se tiene una distribución normal bivariada con estas características, su distribución condicional bajo la restricción $x^2 + y^2 = 1$ es una distribución von Mises con parámetro de concentración $k = m$.

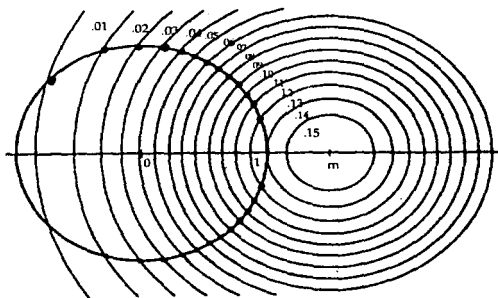


FIGURA 2.12 Una distribución von Mises puede ser derivada de una distribución normal bivariada con la condición de que los puntos de ésta caigan sobre la circunferencia del círculo unitario.

8.2. ESTIMACIÓN POR EL MÉTODO MÁXIMA-VEROSIMILITUD.

Sea $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ una muestra aleatoria de ángulos donde ϕ_i se distribuye $M(k, \theta_1)$. Se obtendrá el estimador máximo-verosimil para el ángulo medio θ_1 si k es conocida.

La función de densidad de probabilidad es:

$$f(\phi) = c \exp[k \cos(\phi - \theta_1)] \quad \text{donde} \quad c = \frac{1}{2\pi I_0(k)}.$$

La función de verosimilitud es:

$$L(\underline{\phi}, \theta_1) = \prod_{i=1}^n f(\phi_i, \theta_1)$$

$$L(\underline{\phi}, \theta_1) = \prod_{i=1}^n c \exp[k \cos(\phi_i - \theta_1)]$$

$$L(\underline{\phi}, \theta_1) = (2\pi I_0(k))^{-n} \exp \sum_{i=1}^n k [\cos(\phi_i - \theta_1)].$$

Aplicando logaritmo natural:

$$\ln L(\underline{\phi}, \theta_1) = -n \ln[2\pi I_0(k)] + k \sum_{i=1}^n \cos(\phi_i - \theta_1) \quad (2.9)$$

Derivando con respecto a θ_1 .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\underline{\phi}, \theta_1)}{\partial \theta_1} &= - \sum_{i=1}^n k \operatorname{sen}(\phi_i - \theta_1) \cdot (-1) = \sum_{i=1}^n k \operatorname{sen}(\phi_i - \theta_1) = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^n \operatorname{sen}(\phi_i - \theta_1) = 0. \end{aligned}$$

De la ecuación $\sum_{i=1}^n \text{sen}(\phi_i - \bar{\phi}) = 0$ (CAPITULO I), se tiene que el estimador máximo-verosímil del parámetro θ_1 de una distribución von Mises es el ángulo medio de la muestra ϕ_1 .

$$\therefore \sum_{i=1}^n k \text{sen}(\phi_i - \hat{\theta}_1) = 0 \text{ si } \hat{\theta}_1 = \phi_1.$$

¿Se puede obtener el mismo resultado para otras distribuciones, como la Normal envuelta, la Cauchy envuelta, o la distribución coseno?. La respuesta es no ya que existe sólo una distribución circular para la cual el ángulo medio es el estimador máximo-verosímil de la población von Mises. La demostración está dada por Bingham and Mardia (1975).

Ahora se obtiene el estimador para el parámetro de concentración k , si θ_1 es conocido.

De (2.9) se obtiene la siguiente derivada parcial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\phi, \theta_1)}{\partial k} &= -n \frac{2\pi I_0'(k)}{2\pi I_0(k)} + \sum_{i=1}^n \cos(\phi_i - \theta_1) = 0 \\ \Rightarrow n \frac{I_0'(k)}{I_0(k)} &= \sum_{i=1}^n \cos(\phi_i - \theta_1) \\ \Rightarrow \frac{I_0'(k)}{I_0(k)} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(\phi_i - \theta_1). \end{aligned}$$

Por una propiedad de las funciones Bessel se tiene:

$$I_0(k) = I_1(k).$$

Por lo tanto,

$$\frac{I_1(k)}{I_0(k)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(\phi_i - \theta_1).$$

Pero $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(\phi_i - \theta_1)$ es la longitud del vector medio de la muestra

$$\Rightarrow A(\hat{k}) = \frac{I_1(\hat{k})}{I_0(\hat{k})} = r.$$

Se puede resolver esta ecuación numéricamente usando la TABLA B (APÉNDICE II) y también se puede escribir $\hat{\rho}_1 = r$.

Así, el estimador máximo-verosímil de la longitud del vector medio teórico es igual a la longitud del vector medio de la muestra.

Para obtener los estimadores de ambos parámetros cuando éstos son desconocidos, se toma (2.9) y se obtienen las siguientes ecuaciones de verosimilitud:

$$\frac{\partial \ln L(\phi, \theta_1)}{\partial \theta_1} = 0 \text{ y } \frac{\partial \ln L(\phi, \theta_1)}{\partial k} = 0.$$

De las ecuaciones anteriores se obtiene un sistema de ecuaciones, la solución a este sistema proporciona los estimadores máximo-verosímiles de θ_1 y de k , que son los mismos que se obtuvieron anteriormente por separado.

8.3. ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS POR EL MÉTODO DE SCHOU

Obteniendo el promedio sobre muchas muestras, r es grande. Esto es especialmente cierto para muestras pequeñas de tamaño n .

Si r_1, r_2, \dots, r_m son estimaciones de r_1 (cada estimación basada en una muestra de tamaño n), entonces converge en forma casi segura a $E\{r\}$ donde r es una estimación de r_1 basada en n observaciones.

Lo anterior se puede escribir $\rho_1 = E\{r\} - b$ donde b denota el sesgo.

Stephens (1969) descubrió una fórmula aproximada para el sesgo, que se satisface para $k > 4$ y $n > 5$.

$$b \approx \frac{1}{2nk}$$

Para obtener un mejor estimador de ρ_1 e indirectamente de k , se requiere de un estimador que reduzca el sesgo a cero. Si $\tilde{\rho}_1$ es este estimador entonces se tiene:

$$E\{\tilde{\rho}_1\} = \rho_1$$

Sin embargo, esta ecuación no puede ser satisfecha por completo. Pero un procedimiento de estimación que reduce el sesgo; fue descubierto por Schou (1978). Con este procedimiento k es estimado e indirectamente ρ_1 . La regla es la siguiente:

a) Si $r \leq n^{-1/2}$, entonces $\tilde{k} = 0$

b) Si $r > n^{-1/2}$, entonces \tilde{k} es la solución distinta de cero de la ecuación $A(x) = \rho_1 A(n\rho_1 x)$ donde $A(x)$ está definida por (2.8).

8.4. FUNCIÓN CARACTERÍSTICA DE UNA VON MISES $M(k,0)$

Se obtendrá la función característica de una distribución von Mises cuando $\theta_1=0$, por esto la distribución es simétrica con respecto a $\phi=0$, y se tiene:

$$b_p = E(\text{sen} p \phi) = E(\text{sen} p 0) = E(\text{sen} 0) = E(0) = 0.$$

En consecuencia:

$$\phi_p = a_p = \frac{1}{2\pi I_0(k)} \int_0^{2\pi} \cos p \phi e^{k \cos \phi} d\phi$$

Expandiendo el término exponencial

$$\phi_p = \frac{1}{2\pi I_0(k)} \int_0^{2\pi} \cos p \phi \sum_{i=0}^{\infty} \frac{k^i \cos^i \phi}{i!} d\phi$$

$$\phi_p = \frac{1}{2\pi I_0(k)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{k^i}{i!} \int_0^{2\pi} \cos p \phi \cos^i \phi d\phi.$$

$$\text{Si } \int_0^{2\pi} \cos p \phi \cos^i \phi d\phi = T_{i,p}$$

$$\Rightarrow \phi_p = \frac{1}{2\pi I_0(k)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{k^i}{i!} T_{i,p}.$$

Integrando por partes $T_{i,p}$ ($\cos p \phi$ y $\text{sen} p \phi$)

se obtiene

$$T_{r,p} = \frac{r(r-1)}{r^2 - p^2} T_{r-2,p} \quad r \neq p.$$

$$\text{y} \quad T_{p,p} = \frac{1}{2} T_{p-1,p-1}.$$

En consecuencia:

$$T_{r,p} = 0 \quad \text{si } r < p$$

$$\text{y } T_{2r+p,p} = \frac{2\pi \binom{2r+p}{r} (r-1)}{2^{2r+p}}, \quad T_{2r+1+p,p} = 0.$$

Con lo anterior, se tiene que:

$$\phi_r = a_p = \frac{I_p(k)}{I_0(k)} \quad \text{donde}$$

$$I_p(k) = \sum_{r=0}^{\infty} \{ \Gamma(p+r+1) \Gamma(r+1) \}^{-1} \left(\frac{k}{2} \right)^{2r+p}.$$

La función $I_p(k)$ es la función Bessel modificada del primer tipo y del p -ésimo orden.

En particular, si se tiene $\mu_1 \neq 0$, entonces $a_1 = A(k) \cos \mu_1$, $b_1 = A(k) \sin \mu_1$, $\rho_1 = A(k)$.

8.5. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

De $f(\phi) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (a_p \cos p\phi + b_p \sin p\phi) \right]$, $a_p = \frac{I_p(k)}{I_0(k)}$, $b_p=0$ y una

distribución von Mises $M(k,0)$ se tiene una expansión de Fourier para la función de densidad de probabilidad de $M(k,0)$ como:

$$f(\phi; k, 0) = \frac{1}{2\pi I_0(k)} \left[I_0(k) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} I_p(k) \cos p\phi \right]$$

En consecuencia le corresponde una función de distribución dada por:

$$F(\phi; k, 0) = \frac{1}{2\pi I_0(k)} \left[\phi I_0(k) + 2 \sum_{p=0}^{\infty} \{I_p(k) \sin p\phi\} / p \right]$$

La expresión ha sido usada por Gumbel, et al. 1953 para calcular la función de distribución.

La función de distribución puede ser expresada en términos de la función beta:

$$F(\phi; k, 0) = \frac{1}{4\pi I_0(k)} \left[2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{k^p}{p!} \int_0^{\sin^2 \phi} x^{-1/2} (1-x)^{1/2} p^{-1/2} dx \right]$$

El resultado siguiente se usa en la definición de la función de distribución expandiendo el término exponencial e integrando término por término.

Gumbel et al. (1953) tiene tabulado $2F(\phi; k, 0)$ para $\phi=0^\circ, 5^\circ, 180^\circ$, $k=2, 10$. y para $F(\alpha; k, 0)$ está tabulado en la TABLA I de este trabajo.

$F(\alpha; k, 0) = f(-\pi < \alpha < -\pi + \phi)$, $0 \leq \alpha \leq \pi$, $k \leq 10$, el rango de ϕ es $(-\pi, \pi)$. Los valores de F para $\alpha \geq \pi$ pueden ser obtenidos de:

$$f(-\pi < \alpha < -\pi + \alpha) = 1 - F(2\pi - \alpha; k, 0).$$

De $k \geq 10$, la distribución puede ser aproximada satisfactoriamente por $(\mu_0, \{k - \frac{1}{2}\}^{-1/2})$.

9. DISTRIBUCIONES ENVUELTAS

Se tiene una distribución sobre la línea y si ésta se envuelve alrededor de la circunferencia del círculo unitario, se obtendrá una distribución envuelta. Es decir, si X es una variable aleatoria sobre la línea con función de distribución $F(x)$, entonces la variable X_w de la distribución envuelta está dada por:

$$X_w = X \pmod{2\pi}$$

y la función de distribución de X_w es:

$$F_w(\phi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{F(\phi + 2\pi k) - F(2\pi k)\}, \quad 0 < \phi \leq 2\pi.$$

¹ Se utiliza la notación X_w debido a que w denota a la palabra "wrapped" que significa envuelta.

En particular, si X tiene una distribución concentrada sobre los puntos, $x = \frac{k}{2\pi m}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ y m es un entero, se tiene:

$$f_w(\phi = \frac{2\pi r}{m}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\phi + 2\pi k), \quad r = 0, 1, \dots, m-1.$$

donde f y f_w son funciones de densidad de probabilidad de X y X_w respectivamente.

Similaramente, si X tiene una función de densidad de probabilidad $f(x)$, entonces la f.d.p que le corresponde a X_w es:

$$f_w(\phi = \frac{2\pi r}{m}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\phi + 2\pi k) \quad (2.10)$$

9.1. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE DISTRIBUCIONES ENVUELTAS

1. Si $\phi_p(p)$ es la función característica de X , entonces la función característica de X_w es sencillamente ϕ_p , y definida por:

$$\begin{aligned} \phi_p &= \int_0^{2\pi} e^{ip\phi} dF_w(\phi) \\ \phi_p &= \int_0^{2\pi} e^{ip\phi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\phi + 2\pi k) d\phi \\ \phi_p &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{ip\phi} f(\phi + 2\pi k) d\phi \end{aligned}$$

$$\phi_p = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi k}^{2\pi + 2\pi k} e^{i p \phi} f(\phi) d\phi$$

$$\phi_p = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} e^{i p \phi} dF(\phi)$$

$$\phi_p = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i p x} dF(x) = \varphi_x(p).$$

II. Si $\phi_x(p)$ es integrable entonces X tiene una función de densidad y la función de densidad de probabilidad de ϕ es:

$$f_w(\phi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\phi + 2\pi k) = \frac{1}{2\pi} [1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (a_p \cos p\phi + b_p \operatorname{sen} p\phi)] \quad (2.11)$$

donde $\phi_p = a_p + i b_p$.

Puesto que es integrable ϕ_p , se tiene:

$$\sum_{p=0}^{\infty} |\phi_p|^2 < \sum_{p=0}^{\infty} |\phi_p| < \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)| dt.$$

Por lo tanto la serie $\sum_{p=0}^{\infty} (a_p^2 + b_p^2)$ es convergente y la expresión (2.11) se sigue de las siguientes ecuaciones:

$$f(\phi) = \frac{1}{2\pi} [1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (a_p \cos p\phi + b_p \operatorname{sen} p\phi)]$$

$$\forall f_w(\phi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\phi + 2\pi k).$$

III. Si X es infinitamente divisible (B.V. Gnedenko, 1973) entonces X_w es infinitamente divisible.

IV. La envoltura de la parte fraccionada de una variable aleatoria X puede ser obtenida por la transformación. $\phi = 2\pi(x - [x])$, donde $[X]$ denota la parte entera de X .

V. El proceso de desenvoltura sobre el círculo no lleva a una distribución única sobre la línea, así que el proceso de envoltura no es reversible.

Sea $g(\phi)$ la función de densidad de probabilidad sobre el círculo, se puede construir la siguiente f.d.p. sobre la línea la cual cuando se envuelve lleva a $g(\phi)$.

$$f(x) = p_r g(x), \quad 2\pi r < x \leq 2\pi(r+1), \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

donde p_r son cualesquiera números no negativos tales que: $\sum p_r = 1$.

9.2. DISTRIBUCIÓN NORMAL ENVUELTA $N_w(\mu_1, \rho_1)$

Imagínate una rueda dando vueltas aleatorias con respecto a una posición en equilibrio marcada por 0° . Las vueltas se realizan en sentido a las manecillas del reloj o en sentido contrario. Ahora, si se supone que las elongaciones (APÉNDICE 1) están distribuidas normalmente y están restringidas al intervalo de -180° a 180° , este procedimiento origina una distribución circular llamada *Normal envuelta*. Además, éste se puede ver como un procedimiento matemático, en donde se envuelve la distribución normal lineal alrededor del círculo y se suman las probabilidades que caen dentro del mismo sector del círculo. (Ver FIGURA 2.11). En la figura se observa que la distribución es unimodal y simétrica con respecto a $\mu_1=0$ y que tiene dos puntos de inflexión.

9.2.1. Función de densidad de probabilidad

Si X se distribuye normal $N(0, \sigma^2)$. Se obtiene de la ecuación (2.10) la f.d.p. de la distribución Normal envuelta

$$f_w(\phi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\phi + 2\pi k), \quad 0 < \phi \leq 2\pi$$

$$f_w(\phi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(\phi + 2\pi k)^2}{2\sigma^2}\right],$$

$$f_w(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\phi + 2\pi k)^2}{2\sigma^2}\right], \quad 0 < \phi \leq 2\pi \quad (2.12)$$

9.2.2. Función de distribución.

La función de distribución puede ser obtenida si se integra la serie (2.12) término por término.

9.2.3. Función Característica de la distribución Normal envuelta.

En la sección 10.1 se mencionó que la función característica de una variable aleatoria circular es ϕ_p , que es la función característica de la variable aleatoria lineal.

A continuación se obtiene la función característica de X que se distribuye normal $N(\mu, \sigma^2)$:

$$\phi(p) = E(e^{ipx})$$

$$\phi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right] dx$$

$$\phi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2x\mu + \mu^2 - ipx2\sigma^2)\right] dx$$

$$\phi(p) = \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\mu^2 + \frac{(\mu + ip\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2x(\mu + ip\sigma^2) + (\mu + ip\sigma^2)^2)\right] dx$$

$$\phi(p) = \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\mu^2 + \frac{(\mu + ip\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2x(\mu + ip\sigma^2) + (\mu + ip\sigma^2)^2)\right] \right]_{-\infty}^{\infty} \int f(x) dx$$

$$\therefore \phi_*(p) = \exp\left[ip\mu - \frac{1}{2}p^2\sigma^2\right].$$

Por lo tanto, la función característica para x que se distribuye Normal

$N(\mu, \sigma^2)$ es $\phi_*(p) = \exp\left[-\frac{1}{2}p^2\sigma^2\right]$, y por consiguiente

$$\phi_p = a_p = \exp\left[-\frac{1}{2}p^2\sigma^2\right] \quad (2.13)$$

es la función característica de la distribución Normal envuelta, donde $b_p=0$.

Ahora, si se utiliza este resultado en (2.11), se obtiene una representación usual de la densidad:

$$f_*(\phi) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p r^p \cos p\phi \right], \quad 0 < \phi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho_p \leq 1, \quad (2.14)$$

$$\text{donde } \rho_1 = \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma^2\right], \quad \sigma^2 = -2\log\rho_1 \quad (2.15)$$

9.2.4. Propiedad aditiva de la función característica.

Sea $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ una muestra aleatoria donde ϕ_i tiene una función de densidad de probabilidad cuya función característica es:

$$\phi_p = a_p = \exp\left[-\frac{1}{2}p^2\sigma^2\right]$$

Obteniendo la función característica de ϕ donde $\phi = \sum_{k=1}^n \phi_k$:

$$\phi_p = E(e^{ip\phi})$$

$$\phi_p = E\left(\exp\left[ip \sum_{k=1}^n \phi_k\right]\right)$$

$$\phi_p = E\left(\prod_{k=1}^n \exp[ip\phi_k]\right)$$

$$\phi_p = \prod_{k=1}^n E(\exp[ip\phi_k])$$

$$\phi_p = \prod_{k=1}^n \exp\left[-\frac{1}{2}p^2\sigma^2\right]$$

$$\phi_p = \left[\exp\left(-\frac{1}{2}np^2\sigma^2\right)\right]^n$$

$$\phi_p = \rho_1^{np^2}$$

dado que la función característica de ϕ tiene la misma forma que (2.13), (reemplazando σ^2 por $n\sigma^2$), se sigue por el teorema de unicidad que ϕ tiene densidad dada (2.14) con $\rho_1 = \exp\left[\frac{1}{2}n\sigma^2\right]$.

La relación entre (2.12) y (2.15) es una famosa fórmula de transformación de la teoría de las funciones zetas²

Además, se tiene $\mu_1=0$, $a_1=\rho_1$, $b_1=0$, $a_2=\rho_1^4$,

$$v_0=1-\rho_1, \sigma=[-2\log(1-v_0)]^{1/2}.$$

9.2.5. Su relación con otras distribuciones.

Si $\rho_1 \rightarrow 0$ en la ecuación (2.14), entonces se observa que la función tiende a ser una función de distribución de una variable aleatoria uniforme circular uniforme ϕ . Si $\rho_1 \rightarrow 1$ entonces la función de distribución se concentra en un solo punto μ_1 . Los valores numéricos de la f.d.p. (2.12) pueden obtenerse usando la siguiente relación:

$f_w(\phi) = (2p)^{-1} \mathfrak{Z}_3(\phi, \rho_1)$, donde \mathfrak{Z}_3 es una función zeta. Shuler y Gebelein (1955, TABLAS 3 y 4).

Las tablas tienen tabulada la siguiente función.

² Bellman. (1961), p.11

$$93\left(\frac{1}{2} \cos^{-1} x, \rho_1\right), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq \rho_1 \leq 0.5.$$

9.3. DISTRIBUCIÓN POISSON ENVUELTA

Si se considera la función de densidad de probabilidad de una distribución Poisson como sigue:

$$f(x; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots; \quad \lambda > 0.$$

Entonces se obtiene la función de densidad de probabilidad envuelta de ϕ :

$$f_w(\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} f(\phi + 2\pi k)$$

$$f_w(\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{\phi + 2\pi k}}{(\phi + 2\pi k)!}$$

Por lo que

$$f_w(\phi) = \frac{2\pi r}{m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{\frac{2\pi r}{m} + 2\pi k}}{\left(\frac{2\pi r}{m} + 2\pi k\right)!}$$

Desarrollando el exponente de λ y el factorial se tiene:

$$\frac{2\pi r}{m} + 2\pi k = \frac{2\pi r + 2\pi km}{m} = \frac{2\pi}{m}(r + km)$$

Por lo tanto

$$f_w(\phi) = \sum_{k=0}^m \frac{e^{-\lambda} \lambda^m (r+k)^{2\pi}}{\left[\frac{2\pi}{m} (r+k) \right]!} \quad r = 0, 1, \dots, m-1$$

$$\Rightarrow f_w(\phi) = \sum_{k=0}^m f\left[\frac{2\pi}{m} (r+k); \lambda \right], \quad r = 0, 1, \dots, m-1$$

donde m es un entero, y se puede ver que las probabilidades son funciones decrecientes de r .

9.3.1. Función Característica

Se supone que X tiene una distribución Poisson con parámetro λ .

Obteniendo su función característica.

$$\phi_x(p) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ipk} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$\phi_x(p) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{ip}\lambda)^k}{k!}$$

$$\phi_x(p) = e^{-\lambda} e^{e^{ip}\lambda}$$

$$\phi_x(p) = e^{\lambda(e^{ip}-1)}$$

$$\therefore \phi_p = e^{\lambda(e^{ip}-1)}$$

10. DISTRIBUCIÓN COSENO O CARDIOIDE

La distribución Coseno o Cardioide fue introducida por Jeffreys (1961. Pp. 328-330) y es derivada de una curva coseno sobre el intervalo de -180° a

180°. La función de densidad de probabilidad de una distribución coseno con longitud de vector medio ρ_1 y ángulo medio θ_1 es:

$$f(\phi) = \frac{1}{2\pi} [1 + 2\rho_1 \cos(\phi - \theta_1)], \quad 0 < \phi \leq 2\pi, \quad |\rho_1| \leq \frac{1}{2}$$

Para evitar valores negativos para $f(\phi)$ se tiene que tomar $|\rho_1| \leq \frac{1}{2}$.

Por lo tanto la distribución coseno no puede ser ajustada a una muestra que tenga la longitud del vector medio $\rho_1 > \frac{1}{2}$.

Si se traza $f(\phi)$ en coordenadas polares, se obtendrá una curva llamada cardioides donde la figura representa un corazón. Por esta razón recibe el nombre de distribución cardioides. (Ver FIGURA 2.13).

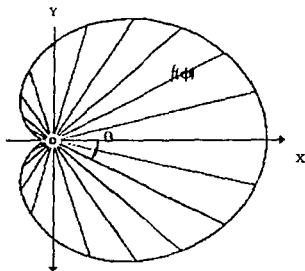


FIGURA 2.13. Función de distribución Cardioides.

Si es una función de densidad entonces satisface las ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3).

Demostración:

i) $f(\phi)$ es mayor o igual que cero, ya que se toma $|\rho_1| \leq \frac{1}{2}$.

ii) $f(\phi) = f(\phi + 2\pi)$.

Demostración:

$$f(\phi) = \frac{1}{2\pi} [1 + 2\rho_1 \cos[(\phi + 2\pi) - \theta_1]]$$

Desarrollando

$$\cos[(\phi + 2\pi) - \theta_1] = \cos(\phi + 2\pi)\cos\theta_1 + \sin(\phi + 2\pi)\sin\theta_1$$

$$\cos[(\phi + 2\pi) - \theta_1] = [\cos\phi\cos 2\pi - \sin\phi\sin 2\pi]\cos\theta_1 + [\sin\phi\cos 2\pi + \cos\phi\sin 2\pi]\sin\theta_1$$

$$\cos[(\phi + 2\pi) - \theta_1] = \cos\phi\cos\theta_1 + \sin\phi\sin\theta_1$$

$$\cos[(\phi + 2\pi) - \theta_1] = \cos(\phi - \theta_1)$$

Entonces

$$f(\phi + 2\pi) = \frac{1}{2\pi} [1 + 2\rho_1 \cos(\phi - \theta_1)]$$

y este resultado es igual a $f(\phi)$.

\therefore

$$f(\phi) = f(\phi + 2\pi)$$

iii) $\int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi = 1$

Demostración:

$$\int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} [1 + 2\rho_1 \cos(\phi - \theta_1)] d\phi$$

$$\int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\phi + \int_0^{2\pi} 2\rho_1 \cos(\phi - \theta_1) d\phi$$

$$\int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi = \frac{1}{2\pi} \phi \Big|_0^{2\pi} + 2\rho_1 \int_0^{2\pi} \cos(\phi - \theta_1) d\phi$$

$$\int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi = 1 + 2\rho_1 \int_0^{2\pi} [\cos \phi \cos \theta_1 + \text{sen } \phi \text{ sen } \theta_1] d\phi$$

$$\int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi = 1 + 2\rho_1 [\cos \theta_1 \text{ sen } \phi \Big|_0^{2\pi} - \text{sen } \theta_1 \cos \phi \Big|_0^{2\pi}]$$

$$\int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi = 1 + 2\rho_1 (0)$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi = 1.$$

De los tres puntos demostrados se puede concluir que $f(\phi)$ es una función de densidad de probabilidad.

10.1. SU RELACIÓN CON OTRAS DISTRIBUCIONES

Si $\rho_1 \rightarrow 0$, la función de densidad $f(\phi)$ converge a una función de densidad Uniforme circular.

Demostración:

$$f(\phi) = \frac{1}{2\pi} [1 + 2\rho_1 \cos(\phi - \theta_1)], \quad 0 < \phi \leq 2\pi, \quad |\rho_1| \leq \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\rho_1 \rightarrow 0} f(\phi) = \lim_{\rho_1 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} [1 + 2\rho_1 \cos(\phi - \theta_1)], \quad 0 < \phi \leq 2\pi, \quad |\rho_1| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(\phi) = \frac{1}{2\pi}.$$

10.2. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Obteniendo la función de distribución:

$$F(\phi) = \int_0^{\phi} f(u) du = \int_0^{\phi} \frac{1}{2\pi} [1 + 2\rho_1 \cos(u - \theta_1)] du$$

$$F(\phi) = \int_0^{\phi} \frac{1}{2\pi} du + \int_0^{\phi} \frac{2\rho_1 \cos(u - \theta_1)}{2\pi} du$$

$$F(\phi) = \frac{\phi}{2\pi} + \frac{\rho_1}{\pi} \int_0^{\phi} \cos(u - \theta_1) du$$

$$F(\phi) = \frac{\phi}{2\pi} + \frac{\rho_1}{\pi} \int_0^{\phi} [\cos u \cos \theta_1 + \text{sen } u \text{ sen } \theta_1] du$$

$$F(\phi) = \frac{\phi}{2\pi} + \frac{\rho_1}{\pi} \int_0^{\phi} \cos u \cos \theta_1 du + \int_0^{\phi} \text{sen } u \text{ sen } \theta_1 du$$

$$F(\phi) = \frac{\phi}{2\pi} + \frac{\rho_1}{\pi} [\cos \theta_1 \text{ sen } u \Big|_0^{\phi} - \text{sen } \theta_1 \cos u \Big|_0^{\phi}]$$

$$F(\phi) = \frac{\phi}{2\pi} + \frac{\rho_1}{\pi} [\cos \theta_1 \text{ sen } \phi - \text{sen } \theta_1 \cos \phi + \text{sen } \theta_1]$$

$$\therefore F(\phi) = \frac{\phi}{2\pi} + \frac{\rho_1}{\pi} (\text{sen}(\phi - \theta_1) + \text{sen } \theta_1).$$

10.3. MOMENTOS TRIGONOMÉTRICOS

Se obtiene el primer momento trigonométrico que es el vector medio μ_1 con coordenadas (a_1, b_1) .

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \int_0^{2\pi} \cos \phi f(\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi}{2\pi} [1 + 2\rho_1 \cos(\phi - \theta_1)] d\phi \\
 a_1 &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi}{2\pi} d\phi + \int_0^{2\pi} \frac{2\rho_1 \cos(\phi - \theta_1) \cos \phi}{2\pi} d\phi \\
 a_1 &= \frac{1}{2\pi} \sin \phi \Big|_0^{2\pi} + \frac{\rho_1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\cos \phi \cos \theta_1 + \sin \phi \sin \theta_1] \cos \phi d\phi \\
 a_1 &= \frac{\rho_1}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \cos \theta_1 d\phi + \sin \theta_1 \int_0^{2\pi} \sin \phi \cos \phi d\phi \right].
 \end{aligned}$$

Resolviendo la primera integral

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \cos \theta_1 d\phi &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta_1 (1 - \cos 2\phi)}{2} d\phi \\
 \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \cos \theta_1 d\phi &= \frac{\cos \theta_1}{2} \int_0^{2\pi} [1 - \cos 2\phi] d\phi \\
 \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \cos \theta_1 d\phi &= \frac{\cos \theta_1}{2} \left[2\pi - \int_0^{2\pi} \cos 2\phi d\phi \right].
 \end{aligned}$$

Por el método de sustitución:

Se define a $u = 2\phi \Rightarrow du = 2d\phi$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \cos \theta_1 d\phi &= \frac{\cos \theta_1}{2} \left[2\pi - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos u du \right] \\
 \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \cos \theta_1 d\phi &= \frac{\cos \theta_1}{2} \left[2\pi - \frac{1}{2} \sin 2\phi \Big|_0^{2\pi} \right]
 \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \cos \theta_1 d\phi = \frac{\cos \theta_1}{2} \left[2\pi + \frac{1}{2} \sin 4\pi - \frac{1}{2} \sin 2(0) \right]$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \cos \theta_1 d\phi = \pi \cos \theta_1.$$

Resolviendo la segunda integral.

Por el método de sustitución:

Se define a $u = \sin \phi \Rightarrow du = \cos \phi d\phi$

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi \cos \phi d\phi = \int_0^{2\pi} u du = \left. \frac{u^2}{2} \right|_0^{2\pi} = \frac{\sin^2 \phi}{2} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\therefore a_1 = \frac{\rho}{\pi} \pi \cos \theta_1 = \rho \cos \theta_1.$$

Obteniendo la segunda coordenada del vector medio.

$$b_1 = \int_0^{2\pi} \sin \phi f(\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi}{2\pi} [1 + 2\rho_1 \cos(\phi - \theta_1)] d\phi$$

$$b_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi}{2\pi} d\phi + \int_0^{2\pi} \frac{2}{2\pi} \rho_1 \cos(\phi - \theta_1) \sin \phi d\phi$$

$$b_1 = \left. \frac{-\cos \phi}{2\pi} \right|_0^{2\pi} + \frac{\rho_1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\cos \phi \cos \theta_1 + \sin \phi \sin \theta_1] \sin \phi d\phi$$

$$b_1 = \frac{-1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{\rho_1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\cos \phi \sin \phi \cos \theta_1 + \sin^2 \phi \sin \theta_1] d\phi$$

$$b_1 = \frac{\rho_1}{\pi} [\cos \theta_1 \sin^2 \phi \Big|_0^{2\pi} + \sin \theta_1 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\phi}{2} d\phi]$$

$$b_1 = \frac{\rho_1}{\pi} [\sin \theta_1 \left(\frac{1}{2} \phi \Big|_0^{2\pi} \right) - \frac{\sin \theta_1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\phi d\phi].$$

Por el método de sustitución:

Se define a $u = 2\phi \Rightarrow du = 2d\phi$

$$b_1 = \frac{\rho_1}{\pi} \left[\pi \operatorname{sen} \theta_1 - \frac{\operatorname{sen} \theta_1}{2 \cdot 2} \int_0^{2\pi} \cos u du \right]$$

$$b_1 = \frac{\rho_1}{\pi} \left[\pi \operatorname{sen} \theta_1 - \frac{\operatorname{sen} \theta_1}{4} \operatorname{sen} 2\phi \right]_0^{2\pi}$$

$$b_1 = \rho_1 \operatorname{sen} \theta_1$$

$$\therefore b_1 = \rho_1 \operatorname{sen} \theta_1.$$

$$\Rightarrow \mu_1 = \begin{bmatrix} \rho_1 \cos \theta_1 \\ \rho_1 \operatorname{sen} \theta_1 \end{bmatrix}.$$

10.4. FUNCIÓN CARACTERÍSTICA

$$\begin{aligned} \phi_p &= E(e^{ip^*}) = \int_0^{2\pi} e^{ip^*} f(\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} e^{ip^*} \frac{1}{2\pi} [1 + 2\rho \cos(\phi - \theta_1)] d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ip^*} d\phi + \int_0^{2\pi} \frac{e^{ip^*}}{2\pi} [2\rho \cos(\phi - \theta_1)] d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ip^*} d\phi + \int_0^{2\pi} \frac{e^{ip^*}}{\pi} \rho \cos(\phi - \theta_1) d\phi. \end{aligned}$$

Integrando la primera integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ip^*} d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ip^*} d\phi = \frac{1}{2\pi ip} e^{ip^*} \Big|_0^{2\pi} = \frac{e^{ip2\pi}}{2\pi ip} - \frac{1}{2\pi ip} \quad p \neq 0.$$

Integrando la segunda integral

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ip\phi}}{\pi} \rho \cos(\phi - \theta_1) d\phi &= \frac{\rho}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ip\phi} [\cos\phi \cos\theta_1 + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta_1] d\phi \\ &= \frac{\rho \cos\theta_1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ip\phi} \cos\phi d\phi + \frac{\rho \operatorname{sen}\theta_1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ip\phi} \operatorname{sen}\phi d\phi. \end{aligned}$$

Resolviendo la primera integral por partes:

$$\begin{aligned} u &= \cos\phi & dv &= e^{ip\phi} d\phi \\ u' &= -\operatorname{sen}\phi d\phi & v &= \frac{1}{ip} e^{ip\phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho \cos\theta_1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ip\phi} \cos\phi d\phi &= \frac{\cos\phi e^{ip\phi}}{ip} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{ip} \int_0^{2\pi} e^{ip\phi} \operatorname{sen}\phi d\phi \\ &= \frac{e^{ip2\pi}}{ip} - \frac{1}{ip} + \frac{1}{ip} \int_0^{2\pi} e^{ip\phi} \operatorname{sen}\phi d\phi. \end{aligned}$$

Resolviendo la integral por partes:

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{sen}\phi & dv &= e^{ip\phi} d\phi \\ u' &= \cos\phi d\phi & v &= \frac{1}{ip} e^{ip\phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho \cos\theta_1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ip\phi} \cos\phi d\phi &= \frac{e^{ip2\pi}}{ip} - \frac{1}{ip} + \int_0^{2\pi} \frac{1}{ip} e^{ip\phi} \operatorname{sen}\phi d\phi \\ \frac{\rho \cos\theta_1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ip\phi} \cos\phi d\phi &= \frac{e^{ip2\pi}}{ip} - \frac{1}{ip} + \left[\frac{\operatorname{sen}\phi e^{ip\phi}}{(ip)^2} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{(ip)^2} \int_0^{2\pi} e^{ip\phi} \cos\phi d\phi \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\rho \cos \theta_1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ip\phi} \cos \phi d\phi = \frac{e^{ip2\pi}}{ip} - \frac{1}{ip} - \frac{1}{i^2 p^2} \int_0^{2\pi} e^{ip\phi} \cos \phi d\phi$$

$$\frac{\rho \cos \theta_1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ip\phi} \cos \phi d\phi + \frac{1}{(ip)^2} \int_0^{2\pi} e^{ip\phi} \cos \phi d\phi = \frac{e^{ip2\pi}}{ip} - \frac{1}{ip}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{ip\phi} \cos \phi d\phi \left[\frac{\rho \cos \theta_1}{\pi} + \frac{1}{(ip)^2} \right] = \frac{e^{ip2\pi}}{ip} - \frac{1}{ip} = \frac{e^{ip2\pi} - 1}{ip}$$

Sintetizando

$$\frac{\rho \cos \theta_1}{\pi} + \frac{1}{(ip)^2} = \frac{\rho \cos \theta_1 (ip)^2 + \pi}{\pi (ip)^2}$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} e^{ip\phi} \cos \phi d\phi = \frac{\frac{e^{ip2\pi} - 1}{ip}}{\frac{\rho \cos \theta_1 (ip)^2 + \pi}{\pi (ip)^2}} = \frac{(e^{ip2\pi} - 1)(\pi i^2 p^2)}{ip(\rho \cos \theta_1 i^2 p^2 + \pi)}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{ip\phi} \cos \phi d\phi = \frac{(e^{ip2\pi} - 1)\pi ip}{i^2 p^2 \rho \cos \theta_1 + \pi}$$

Realizando la segunda integral

$$\frac{\rho \operatorname{sen} \theta_1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \phi e^{ip\phi} d\phi.$$

Se integra por partes

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{sen} \phi & dv &= e^{ip\phi} d\phi \\ u' &= \cos \phi d\phi & v &= \frac{e^{ip\phi}}{ip} \end{aligned}$$

$$\frac{\rho \operatorname{sen} \theta_1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \phi e^{ip\phi} d\phi = \frac{\operatorname{sen} \phi e^{ip\phi}}{ip} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{(ip)} \int_0^{2\pi} e^{ip\phi} \cos \phi d\phi.$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned} u &= \cos \phi & dv &= e^{ip\phi} d\phi \\ u' &= -\operatorname{sen} \phi d\phi & v &= \frac{e^{ip\phi}}{ip} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho \operatorname{sen} \theta_1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \phi e^{ip\phi} d\phi &= \frac{1}{ip} \left[\frac{\cos \phi e^{ip\phi}}{ip} \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{e^{ip\phi}}{ip} \operatorname{sen} \phi d\phi \right] \\ \frac{\rho \operatorname{sen} \theta_1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \phi e^{ip\phi} d\phi + \frac{1}{(ip)^2} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \phi e^{ip\phi} d\phi &= \frac{-1}{ip} \left[\frac{e^{ip2\pi}}{ip} - \frac{1}{ip} \right] \\ \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \phi e^{ip\phi} d\phi &= \left[\frac{\rho \operatorname{sen} \theta_1}{\pi} + \frac{1}{(ip)^2} \right] = \frac{-1}{ip} \left[\frac{e^{ip2\pi} - 1}{ip} \right] = \frac{(1 - e^{ip2\pi})}{(ip)^2}. \end{aligned}$$

Sintetizando

$$\frac{\rho \operatorname{sen} \theta_1}{\pi} + \frac{1}{(ip)^2} = \frac{\rho \operatorname{sen} \theta_1 (ip)^2 + \pi}{\pi (ip)^2}$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \phi e^{ip\phi} d\phi = \frac{\frac{(1 - e^{ip2\pi})}{(ip)^2}}{\frac{\rho \operatorname{sen} \theta_1 (ip)^2 + \pi}{\pi (ip)^2}} = \frac{(1 - e^{ip2\pi})\pi (ip)^2}{(ip)^2 [\rho \operatorname{sen} \theta_1 (ip)^2 + \pi]}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \phi e^{ip\phi} d\phi = \frac{(1 - e^{ip2\pi})\pi}{\rho \operatorname{sen} \theta_1 (ip)^2 + \pi}$$

$$\phi_p = \frac{e^{ip2\pi}}{2\pi ip} - \frac{1}{2\pi ip} + \frac{\rho \cos \theta_1}{\pi} \left[\frac{(e^{ip2\pi} - 1)\pi ip}{(ip)^2 \rho \cos \theta_1 + \pi} \right] + \frac{\rho \cos \theta_1}{\pi} \left[\frac{(1 - e^{ip2\pi})\pi}{\rho \operatorname{sen} \theta_1 (ip)^2 + \pi} \right]$$

$$\therefore \phi_p = \frac{e^{ip2\pi}}{2\pi ip} - \frac{1}{2\pi ip} + \rho \cos \theta_1 \left[\frac{(e^{ip2\pi} - 1)ip}{(ip)^2 \rho \cos \theta_1 + \pi} \right] + \rho \cos \theta_1 \left[\frac{(1 - e^{ip2\pi})}{\rho \operatorname{sen} \theta_1 (ip)^2 + \pi} \right]$$

$p \neq 0$.

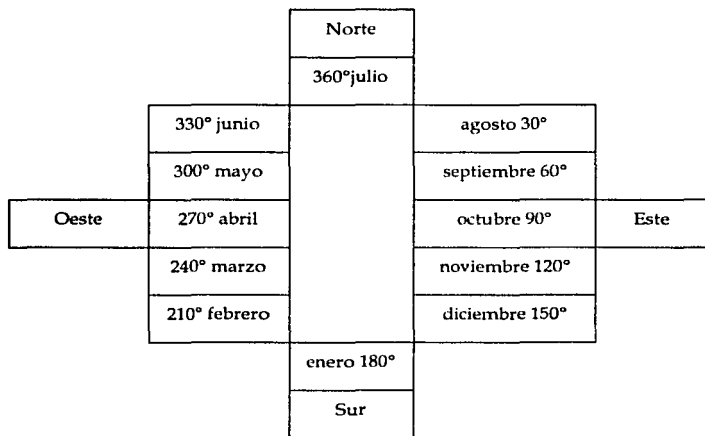
CAPITULO III

1. PROCEDIMIENTO

En los problemas las periodicidades, su amplitud y longitud son una de las principales faenas de la aplicación de estadística cuyo rango es muy extenso, y especialmente para los fenómenos económicos. Aunque numerosos teoremas han sido desarrollados, la cuestión de como reconocer un ciclo permanece abierta, puesto que los complicados métodos matemáticos usados en los análisis de periodograma y correlograma pueden generar ciclos reales o ficticios y pueden esconder los originales.

Las observaciones ϕ_i pueden estar dadas individualmente y/o en la mayoría de los casos en grupos, i.e. como frecuencias f_i que corresponden a ciertos intervalos, por ejemplo los meses de igual longitud. En el caso individual se calcula el seno y coseno de cada observación y se obtiene θ_1 .

El caso de las observaciones agrupadas permite una simplificación, ya que se supone que las frecuencias están dadas para los doce meses y cada uno de éstos tienen treinta días. Por lo tanto el año es considerado de 360 días, y por consiguiente a un día le corresponde un grado. Las frecuencias van a corresponder al punto medio de cada mes. Y un valor preliminar para θ_1 (moda de una distribución von Mises) es a la mitad de julio. Entonces las observaciones pueden ser arregladas como muestra el siguiente esquema:



ESQUEMA 3.1. Se observa que en la TABLA se utiliza el ángulo α . (ver FIGURA 1.1).

La distribución circular, como se mencionó en el CAPITULO I puede ser representada por un histograma de línea; para la realización de este histograma se toman en cuenta diversos arreglos como por ejemplo:

1. Listar los meses en su orden normal de enero por la izquierda y Diciembre por la derecha.
2. Poner el mes modal a la mitad de la gráfica.
3. Localizar la media calculada (o moda) a la mitad.



Además, una distribución circular puede ser trazada sobre papel polar. Un procedimiento usual es el trazo de frecuencias de varios meses como radio vectores en los ángulos apropiados; el resultado de esto es un diagrama polar ajustado correspondiente al histograma de línea. Sin embargo, por este procedimiento el área de cada ajuste varía como el cuadrado de la frecuencia, lo cual significa que si se tienen dos distribuciones diferentes de 100 observaciones y si son trazadas, entonces sus áreas serán diferentes. Para conservar las áreas, Leighly (1928) propone el trazo de raíces cuadradas de las frecuencias y este procedimiento se llama aequiareal (Gumbel, E.J., Greenwood, J.A. and Dorand. P., 1953).

Se considera una distribución circular sobre el año. Las observaciones son agrupadas o pueden ser agrupadas dentro de periodos mensuales. Por lo tanto las series de tiempo son concentradas en doce frecuencias denotadas f_i , $i=1,2,\dots,12$. En la mayoría de los casos f_i representa la frecuencia media del i -ésimo mes. La media ha estado siendo tomada para todos los años observados. Puesto que los parámetros de la distribución normal son invariante bajo una multiplicación de todas las frecuencias, es irrelevante si es usada la frecuencia absoluta o relativa. Esta propiedad es muy importante ya que permite la aplicación de la distribución Normal circular a series de tiempo las cuales por ellas mismas no constituyen distribuciones en el sentido estadístico lineal. Sean f_i cualesquiera números no negativos arbitrarios o de dimensión correspondientes a los meses. Además la sucesión:

$$\frac{f_i}{\sum_{i=1}^{12} f_i} \quad i=1,\dots,12$$

puede ser vista como una distribución dado que hace y puede ser analizada como una variable circular, donde $n = \sum_{i=1}^{12} f_i$.

Sin embargo, en nuestro sistema de calendario las longitudes de los meses varían de 28 a 31 días. Si la moda es en julio, el mes febrero muestra principalmente una mínima apariencia asimétrica. Recíprocamente, cuando la moda es en febrero su ausencia de dos días puede crear un hueco. Para eliminar estas influencias artificiales, a las frecuencias de enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre y diciembre hay que multiplicarlas por: $30/31=0.96774$ y para febrero por $30/28=1.07143$; Por lo tanto sean f'_i las frecuencias ajustadas y el año es así reducido a 360 días.

Para conservar esta suma observada las frecuencias ajustadas son multiplicadas por el cociente .

$$Q = \frac{\sum_{i \in A} f_i}{\sum_{i \in A} f'_i} \text{ donde } A = \{i=1,2,3,5,7,8,10,12\}.$$

En este procedimiento las frecuencias observadas para abril, junio, septiembre y noviembre son preservadas, mientras las frecuencias para otros meses son doblemente ajustadas. Los ajustes deben ser usados si las frecuencias son pequeñas, digamos del orden del 10% puesto que ellas son fuertemente afectadas por las diferentes longitudes de los meses.

Los ajustes no son relevantes si las diferencias entre diferentes meses son grandes, digamos si la frecuencia mensual más grande es diez

veces la más pequeña. El segundo ajuste es innecesario si el factor Q difiere de la unidad por menos del 1%.

Las frecuencias ajustadas son atribuidas al quinceavo día de cada mes y pueden ser trazadas como un histograma de línea o sobre papel polar consistiendo de círculos equidistantes concéntricos y un radio para cada grado. La frecuencia máxima es trazada al norte y los siguientes meses son trazados en sentido de las manecillas del reloj. Después de elegir una distancia unitaria la raíz cuadrada de las frecuencias dos veces ajustadas $\sqrt{f_i''}$, son graficadas en lugar de las frecuencias $\sqrt{f_i'}$. Este procedimiento iguala a las áreas de las distribuciones observadas y teóricas. Las distribuciones que difieren con respecto al tamaño de muestra n por lo tanto son trazadas en diferentes escalas. Sin embargo, se obtiene una escala uniforme si todas las frecuencias ajustadas f_i'' son divididas por su media \bar{f} . Este método tiene la ventaja de que las distribuciones con diferentes valores de n pueden ser trazadas sobre la misma escala.

En el uso de la distribución Normal circular.

$$f(\phi) = \frac{1}{2\pi I_0(k)} \exp[k \cos(\phi - \theta_1)] \quad 0 < \phi \leq 2\pi.$$

La moda θ_1 es estimada a partir de $\tan \phi = \frac{\sum_{i=1}^{12} \text{sen } \phi_i}{\sum_{i=1}^{12} \text{cos } \phi_i}$ donde se tienen

las siguientes reglas trigonométricas.

$$\sum_{i=1}^{12} \cos \phi_i = \text{jul.-ene.} + 0.86603(\text{ago.-feb.} + \text{jun.-dic.}) + 0.05(\text{sep.-mar.} + \text{may.-nov.}) \quad (3.1)$$

$$\sum_{i=1}^{12} \text{sen } \phi_i = \text{oct.-abr.} + 0.86603(\text{sep.-mar.} + \text{nov.-may.}) + 0.05(\text{ago.-feb.} + \text{dic.-jun.}) \quad (3.2)$$

donde los meses son escritos en lugar de sus frecuencias f_i^n . Esto determina a ϕ solo arriba de 180° . La ubicación exacta se encuentra del diagrama convencional por los signos de funciones trigonométricas. En la estimación de ϕ es suficiente calcular todos los grados del ángulo.

El parámetro k es estimado a partir de:

$$\rho_1 = \frac{1}{n} \sqrt{[(\sum \cos \phi_i)^2 + (\sum \text{sen } \phi_i)^2]}$$

con la ayuda de la TABLA B (APÉNDICE II) lo cual da a k como una función de ρ_1 .

Los parámetros para los valores reducidos $\frac{f_i^n}{\bar{f}}$ son obtenidos de una manera análoga.

Los ajustes para los meses de igual longitud pueden ser introducidos dentro de (3.1) y (3.2). Esto lleva a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{12} \cos \phi_i &= 0.96677(\text{jul.-ene.}) + 0.86603\text{jun.} + 0.83726(\text{ago.-dic.}) \\ &+ 0.5(\text{sep.-nov.}) + 0.48339(\text{may.-mar.}) - 0.92789\text{feb.} \end{aligned} \quad (3.3)$$



$$\sum_{i=1}^{12} \text{sen } \phi_i = 0.96677(\text{oct.} + 0.86603(\text{nov.} + \text{sep.}) \quad (3.4)$$

$$+ 0.48339(\text{ago.} + \text{dic.}) - \text{abr.} - 0.83726(\text{mar.} + \text{may.}) - 0.53571\text{feb.} - 0.5\text{jun.}$$

Puesto que los parámetros ϕ y k son invariantes bajo la multiplicación de las frecuencias no ajustadas, es necesario conservar la suma de las observaciones. Sin embargo, para la comparación de la teoría, las observaciones deben ser ajustadas nuevamente para los meses de igual longitud y para conservación de la suma observada. Por lo tanto, este sistema no es usado en los ejemplos siguientes.

En otro procedimiento analítico un valor constante igual al mínimo valor mensual \tilde{f} se supone cierto para todo el año. Este componente se trata como una distribución Uniforme circular. La otra componente consiste de las frecuencias observadas $f_v - \tilde{f}$ es considerada como una distribución Normal circular con $n' - n - 12 \tilde{f}$. Sin embargo hasta ahora no ha ocurrido un caso en el cual este procedimiento de un mejor ajuste de la gráfica (FIGURA 3.1) que el anterior.

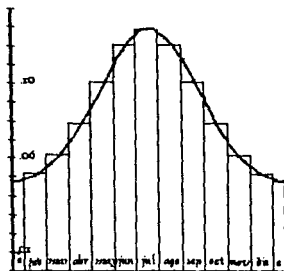


FIGURA 3.1. Distribución circular normal $f(\phi)$ y diferencias de probabilidades $\Delta f(\phi)$ para $k=0.5$

Los valores teóricos que corresponden a las observaciones $\sqrt{f_i}$ se obtienen después de multiplicar los valores dados de la TABLA G del APÉNDICE II por $0.28868\sqrt{n}$. Si k es cercano a uno de los valores dados en la TABLA B es suficiente usar una calculadora. Los valores teóricos que corresponden a las frecuencias reducidas f_i se toman de la TABLA G sin ninguna multiplicación.

Los valores teóricos se grafican sobre el diagrama polar. Se obtiene una curva simétrica continua uniendo los puntos a la izquierda y a la derecha de la moda. Si la dirección modal es prácticamente cero o un múltiplo de 30° , esto, si la moda observada es o conservado o recorrida por estas cantidades equivalencias se pueden usar diferencias de $\Delta f(\phi)$ probabilidades en lugar de las densidades $f(\phi)$.

Este procedimiento nos lleva a una comparación del diagrama observado con el teórico, y tiene la ventaja de que criterios convencionales pueden ser usados. Las diferencias de probabilidades de la TABLA H. del APÉNDICE II fueron obtenidas tomando la mitad de las diferencias sucesivas de la función de probabilidad calculada a nueve decimales y atribuyéndoles el punto medio de los intervalos.

Las FIGURAS 3.1 y 3.2 muestran un diagrama ajustado obtenido de la TABLA H. La distribución continua trazada sobre escalas lineales y polares (aequiaereal). Ya que las observaciones sólo pueden ser trazadas en forma ajustada, mientras que la distribución teórica puede ser trazada también como una curva continua es deseable comparar de una distribución de dos formas diferentes.

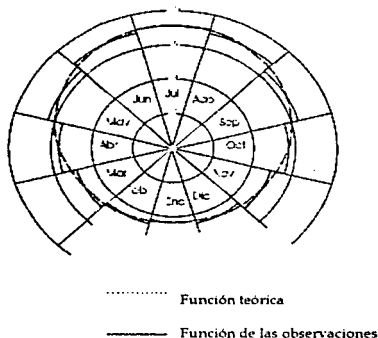


FIGURA 3.2. Distribución circular normal $f(\phi)$ y diferencias de probabilidades $\Delta f(\phi)$ para $k=0.5$ trazada sobre una escala polar.

Las Figuras también muestran el tipo de desviaciones que son inevitables si un diagrama ajustado observado es comparado a una distribución continua, con la excepción de los meses modal y antimodal, las curvas que representan a la distribución teórica interceptan al diagrama ajustado observado cerca de la mitad de cada mes y el diagrama ajustado queda cerca a la curva teórica al principio o al final de cada mes.

El trazo de $\Delta f(\phi)$ es una alternativa gráfica al trazo de la distribución $f(\phi)$. En general tiene las desventaja de que los "meses" considerados no coinciden con los meses en el calendario.

A continuación se aplica el procedimiento para algunos datos numéricos.

2.PROBLEMA DE PRECIPITACIÓN PLUVIAL

Los siguientes ejemplos muestran la cantidad de precipitación pluvial, los "runoff" y porcentajes de muertes, es decir, el ciclo hidrológico y temperaturas. Hay que determinar que la cantidad de precipitación pluvial por mes forma una distribución circular. Del depósito Esopus que es esencial para el abastecimiento del Agua en Nueva York fueron tomados los datos de la TABLA 3.1. Por lo que respecta a la moda (anti-moda) del mes está escrita en la primera línea.

		f_1	f_2	$\sqrt{f_1}$
julio	4.69	4.539	4.64	2.15
junio	4.54	-----	4.54	2.13
mayo	4.31	4.171	4.27	2.07

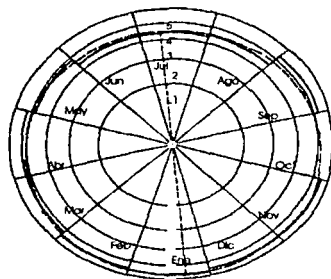
abril	4.23	—	4.23	2.06
marzo	3.85	3.726	3.81	1.95
febrero	3.05	3.268	3.34	1.682
agosto	4.58	4.432	4.53	2.13
septiembre	4.5	—	4.5	2.12
octubre	4.03	3.9	3.99	1.99
noviembre	4.28	—	4.28	2.06
diciembre	3.45	3.339	3.42	1.85
enero	3.4	3.290	3.36	1.83
	$\sum f_i = 31.36''$	$\sum f'_i = 30.665''$	$\sum_{i=1}^{12} f''_i = 48.91''$	

TABLA 3.1. Muestra las medias mensuales de la precipitación en pulgadas.

La segunda columna contiene los números observados en pulgadas, la tercera columna contiene el primer ajuste para la longitud de los meses.

De lo anterior se puede observar que la suma de las frecuencias ajustadas es: $\sum f'_i = 30.665''$ $i=1,2,3,5,7,8,10,12$, mientras que la suma observada de los mismos meses es: $\sum f_i = 31.36''$ $i=1,2,3,5,7,8,10,12$. Por lo tanto las frecuencias ajustadas son multiplicadas por $Q = \frac{31.36}{30.665} = 1.02263$, lo que da como resultado la cuarta columna la cual conserva la precipitación pluvial media anual total observada $n=48.91''$. Las raíces cuadradas de los

números de la quinta columna inician con el mes de julio y han sido trazadas en el diagrama ajustado. ver FIGURA 3.3.



..... Función teórica
 ————— Función de las observaciones

FIGURA 3.3. Indica las gráficas de las medias mensuales de las precipitaciones con $k=0.15$.

Estos cálculos determinan que las variaciones indican una distribución circular sistemática empezando con la moda en julio y decreciendo con la antimoda en enero con la excepción de la precipitación en noviembre la cual excede esto en Octubre. ver FIGURA 3.4.

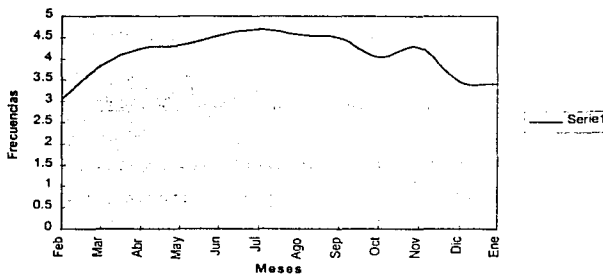


FIGURA 3.4. Histograma de las observaciones de la TABLA 3.1.

Con el fin de obtener la distribución teórica, primero hemos de calcular los parámetros siguientes.

De (3.1) se tiene:

$$\sum_{i=1}^{12} \cos \phi_i = 4.69 - 3.40 + 0.86603(4.58 - 3.05 + 4.54 - 3.45) + 0.5(4.50 - 3.85 + 4.31 - 4.28) = 3.62553$$

$$\sum_{i=1}^{12} \sin \phi_i = 4.03 - 4.23 + 0.86603(4.50 - 3.85 + 4.28 - 4.31) + 0.5(4.58 - 3.05 + 3.45 - 4.54) = .40112.$$

Luego entonces la consecuencia es:

$$\tan \phi = \frac{\sum_{i=1}^{12} \text{sen } \phi_i}{\sum_{i=1}^{12} \text{cos } \phi_i} = \frac{0.40112}{3.62553} = 0.11067,$$

$$\phi = 0.11022, \quad \phi^\circ = \frac{180(.11022)}{\pi} = 6.32 \Rightarrow \phi = 6^\circ.$$

Una vez que ϕ es estimado el 15 de julio, esto significa un cambio de la moda 21 de julio. Esto se explica por el hecho de que las frecuencias de la última parte del año muestra una ligera predominancia sobre la primera parte (20.72" contra 20.19").

Obteniendo la longitud del vector medio.

$$\rho_1 = \frac{1}{n} \sqrt{[(\sum \text{cos } \phi_i)^2 + (\sum \text{sen } \phi_i)^2]}$$

$$\rho_1 = \frac{1}{48.92} \sqrt{[(0.40112)^2 + (3.6253)^2]} = \frac{\sqrt{13.3053}}{48.91}$$

$$\rho_1 = \frac{3.64766}{48.91} = 0.07458$$

$$\Rightarrow \rho_1 = 0.07458$$

De la TABLA B se tienen los valores siguientes:

$$\rho_1 = 0.07, \quad k = 0.1403$$

$$\rho_1 = 0.08, \quad k = 0.1605$$

Se interpola para obtener el valor de k.

$$\frac{.1605 - .1403}{.08 - .07} = \frac{k - .1403}{.07458 - .07} \Rightarrow k = .1495.$$



Por lo tanto, se demuestra que es suficiente tomar $k=0.15$. Este valor pequeño del parámetro se debe a la circunstancia de que las diferencias entre las distintas frecuencias son completamente pequeñas.

De la TABLA G del APÉNDICE II se extraen los radio vectores $\psi(\phi)\sqrt{\frac{12}{n}}$ por una interpolación entre $k=0.1$ y $k=0.2$. Estos valores están dados en la TABLA 3.2 en la segunda columna, y si se multiplican éstos por $\sqrt{\frac{48.91}{12}} = 2.0189$ se obtienen los radio vectores de la tercera columna de la TABLA 3.2. Los cuales son trazados en el papel polar donde se observa como resultado de izquierda a derecha que el valor modal es el 21 de julio.

Angulo	$\psi(\phi)\sqrt{\frac{12}{n}}$	$\psi(\phi)$
0	1.075	2.170
20	1.070	2.160
40	1.051	2.122
60	1.035	2.090
80	1.012	2.043
100	.9840	1.987
120	.9603	1.939
140	.9414	1.901
160	.9293	1.876

180	.9252	1.868
-----	-------	-------

TABLA 3.2. Muestra los radio vectores.

3. PROBLEMA DEL NÚMERO DE OCURRENCIAS DE LA PRECIPITACIÓN DE 1" (UNA PULGADA) O MÁS.

El número de ocurrencias de precipitación de 1" (una pulgada) o más por hora también forman una distribución circular. Los números considerados fueron tomados con base en Dick (1941) para 156 estaciones de los Estados Unidos de Norteamérica en el periodo comprendido de los años 1908 a 1937, y están dados en la TABLA 3.3.

	f_i	f_i^2	$\sqrt{f_i}$	
enero	101	97.74	101	10.05
febrero	94	100.71	104	10.20
marzo	232	224.52	231	15.20
abril	406	-----	406	20.15
mayo	985	662.90	683	26.13
junio	1225	-----	1225	35
julio	1478	1430.32	1475	38.41
agosto	1384	1339.35	1381	37.16
septiembre	907	-----	907	30.12

octubre	383	370.64	382	19.54
noviembre	195	-----	195	13.96
diciembre	145	140.32	145	12.04
	$\sum f_i = 4502$	$\sum f'_i = 4366.5$	$\sum_{i=1}^{12} f''_i = 7235''$	

TABLA 3.3. Muestra los datos del número de ocurrencias de la precipitación de 1° o más.

Para lograr obtener la cuarta columna se ha de multiplicar la tercera columna por el cociente $Q = \frac{4512}{4365} = 1.03$, donde la suma total observada es de 7235''.

Ahora bien, las frecuencias están ajustadas menos del 1% excepción hecha para Febrero en el cual el valor observado es disminuido por más del 10%. Se ve que la moda en julio es 14 veces más grande que la frecuencia de enero.

Considerando los parámetros:

De (3.1) se tiene:

$$\sum_{i=1}^{12} \cos \phi_i = 1475 - 101 + 0.86603(1381 - 104 + 1225 - 145) + 0.5(907 - 231 + 683 - 195) = 3997.23$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{12} \text{sen } \phi_i &= 382 - 406 + 0.86603(907 - 231 + 195 - 683) \\ &+ 0.5(1381 - 104 + 145 - 1225) = 237.31. \end{aligned}$$

Lo que da como resultado:

$$\begin{aligned} \tan \phi &= \frac{\sum_{i=1}^{12} \text{sen } \phi_i}{\sum_{i=1}^{12} \text{cos } \phi_i} = \frac{237.31}{3997.93} = 0.0594 \\ \phi &= .05933, \quad \phi^\circ = \frac{180(.05933)}{\pi} = 3.39 \Rightarrow \phi = 3^\circ. \end{aligned}$$

Puesto que ϕ es estimado el 15 de julio, esto nos indica una variación de la moda al 18 de julio.

De lo explicado líneas atrás se ha obtenido la longitud del vector medio.

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{n} \sqrt{[(\sum \text{cos } \phi_i)^2 + (\sum \text{sen } \phi_i)^2]} \\ \rho_1 &= \frac{1}{7235} \sqrt{[(237.31)^2 + (3997.23)^2]} = \frac{\sqrt{16034163.71}}{7235} \\ \rho_1 &= \frac{4004.27}{7235} = 0.5535 \\ \Rightarrow \rho_1 &= 0.5535. \end{aligned}$$

De la TABLA B se extraen los valores siguientes:

$$\rho_1 = 0.55, \quad k = 1.32520$$

$$\rho_1 = 0.56, \quad k = 1.36156$$



Se interpola para obtener el valor de k .

$$\frac{1.36156 - 1.32520}{.56-.55} = \frac{k - 1.32520}{.5535-.55}$$

$$\Rightarrow k = 1.338 \quad \approx \quad k = 1.34.$$

Por lo tanto es suficiente tomar $k=1.34$. Este valor del parámetro es debido al hecho de que las diferencias entre las frecuencias son más o menos grandes.

La TABLA G del APÉNDICE II arroja los radio vectores $\psi(\phi)\sqrt{\frac{12}{n}}$ por interpolación entre $k=1.3$ y $k=1.4$. Se debe precisar que estos valores están considerados en la TABLA 3.4 en la segunda columna, y ellos se multiplican por $\sqrt{\frac{7235}{12}} = 24.554$ para obtener los radio vectores de la tercera columna de la TABLA 3.4. Los cuales son trazados en el papel polar y se observa que el valor modal es el 18 de julio.

Angulo	$\psi(\phi)\sqrt{\frac{12}{n}}$	$\psi(\phi)$
0	1.584	1.5837
20	1.531	1.5322
40	1.363	1.3627
60	1.140	1.1393
80	.9168	.9159
100	.7266	.7268

120	.5836	.5844
140	.4882	.4886
160	.4352	.4346
180	.4178	.4174

TABLA 3.4. Racio-vectores del problema.

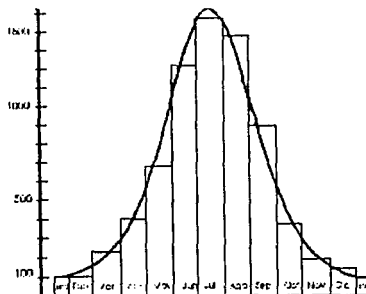


FIGURA 3.5. Gráfica de los datos del número de ocurrencias de la precipitación de 1'' o más.

4. PROBLEMA DE LOS "RUNOFF"

Otro problema que se ha considerado, es el que se refiere a los "runoff" mensuales que están determinados en pulgadas y fueron obtenidos de los depósitos de Derwent River, Yorkshire, Derbyshire (Inglaterra) TABLA 3.5.

APLICACIONES DE LA FUNCIÓN VON MISES

Mes	f_i	f_i'	f_i''	$\sqrt{f_i}$
enero	210.29	4.733	4.81	2.19
febrero	171.87	4.282	4.35	2.08
marzo	147.85	3.327	3.38	1.84
abril	106.84	2.485	2.49	1.58
mayo	78.85	1.775	1.80	1.34
junio	67.27	1.564	1.56	1.25
julio	80.09	1.802	1.83	1.35
agosto	86.54	1.948	1.98	1.41
septiembre	91.57	2.130	2.13	1.46
octubre	142.28	3.202	3.26	1.81
noviembre	185.17	4.306	4.31	2.08
diciembre	191.47	4.309	4.38	2.09
	$\sum f_i = 1560.09$	$\sum f_i' = 35.863$	$\sum_{i=1}^{12} f_i'' = 36.28''$	

TABLA 3.5. Muestra los datos de los runoff.

- ◆ Marque con las tiras huellas que tracen líneas para lograr la composición.
- ◆ Deje que seque y sobre ella pinte, con engrudo colorado, algunos de los miembros de su familia.
- ◆ Explique su composición.

ACTIVIDAD 15: REPRESENTACION PLASTICA DE ALGUNA REUNION O ESCENA FAMILIAR.

Secuencia de Actividades:

- ◆ Mencione algunas y elija una de ellas.
- ◆ Maneje el material moldeable.
- ◆ Haga bolitas y viboritas.
- ◆ Adapte el material moldeado a las figuras necesarias para su composición.
- ◆ Las coloque sobre una superficie (cartoncillo, papel, etc.) formando la situación elegida.
- ◆ Explique su composición a sus compañeros.

ACTIVIDAD 16: DIBUJO DE SU CASA UTILIZANDO COLORES.

Secuencia de Actividades:

- ◆ Dibuje su casa.
- ◆ Rellene toda la superficie de la hoja.
- ◆ Siga la dirección de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, y a la inversa.

$$\rho_1 = \frac{1}{n} \sqrt{[(\sum \cos \phi_i)^2 + (\sum \operatorname{sen} \phi_i)^2]}$$

$$\rho_1 = \frac{1}{36.28} \sqrt{[(-9.355)^2 + (2.086)^2]} = \frac{\sqrt{91.867421}}{36.28}$$

$$\rho_1 = \frac{9.5847}{36.28} = .264$$

$$\Rightarrow \rho_1 = .264.$$

De la TABLA B se tienen los valores siguientes:

$$\rho_1 = 0.26, \quad k = 53863$$

$$\rho_1 = 0.27, \quad k = 56097$$

Aplicando un proceso de interpolación se tiene la obtención del valor k.

$$\frac{.56097 - .53863}{.27 - .26} = \frac{k - .53863}{.264 - .26}$$

$$\Rightarrow k = .5475 \approx k = .548.$$

Luego entonces, es más que suficiente tomar $k = .548$. Esta decisión nos revela que el valor del parámetro es debido a la existencia de diferencias que aparecen entre las frecuencias y son más o menos pequeñas.

Hay que explicar que la TABLA G del APÉNDICE II se determinan los radio vectores $\psi(\phi) \sqrt{\frac{12}{n}}$ por interpolación entre $k = .5$ y $k = .6$. Estos valores son dados en la TABLA 3.6 en la segunda columna, y además se multiplican estos valores por $\sqrt{\frac{36.28}{12}} = 1.739$ con la finalidad de obtener los radio vectores de la

tercera columna de la TABLA 3.6. Los cuales son trazados en el papel polar y se observa que el valor modal es el 2 de enero.

Angulo	$\psi(\phi) \sqrt{\frac{12}{n}}$	$\psi(\phi)$
0	.7290	1.2678
20	.7170	1.2469
40	.6753	1.1743
60	.6356	1.1053
80	.5812	1.0107
100	.5285	.9190
120	.4835	.8408
140	.4494	.7815
160	.4287	.7455
180	.4215	.7330

TABLA 3.6. Muestra los radio-vectores.

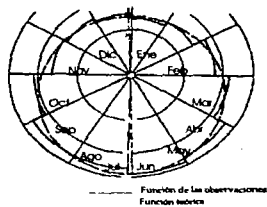


FIGURA 3.7. Gráfica de los radio-vectores

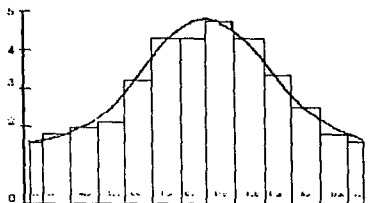


FIGURA 3.8. Histograma de los datos de runoff.

5. PROBLEMA DE PORCENTAJES DE MUERTES

El porcentaje de personas que mueren cada mes se distribuye normal puesto que la población crece en muchos países, es vital en estadística presentar la tasa de muerte; es decir, el número de muertes dividido por el tiempo esperado de vida por la población respectiva. Estos porcentajes mensuales de muertes por 1000 tienen la dimensión recíproca del tiempo y puede ser comparada mes por mes, y año por año. Los porcentajes pueden ser tratados para nuestro propósito como si constituyeran una distribución, puesto que los porcentajes de muertes son proporcionales al número de muertes para una población estática.

La media mensual de lo observado y el porcentaje ajustado en los Estados Unidos, septiembre 1946 a agosto 1951 están dados en la TABLA 3.7.

Mes	f_i	f_i^*	f_i^*	Teoría
febrero	10.66	11.42	11.64	10.82

ACTIVIDAD 17: MODELADO CON PLASTILINA O BARRO DE ALGUNOS MUEBLES QUE HAY EN SU CASA.

Secuencia de Actividades:

- ◆ Mencione y elija los muebles que tiene en su casa y modele éstos sobre plastilina o barro.
- ◆ Exponga su trabajo al grupo.

ACTIVIDAD 18: MEZCLA DE COLORES PRIMARIOS PARA OBTENER COLORES SECUNDARIOS.

Secuencia de Actividades:

- ◆ Organice el trabajo en equipos.
- ◆ Utilice 6 frascos transparentes con la misma cantidad de agua.
- ◆ En la misma proporción (tres gotas), ponga pintura roja en el primer frasco; amarilla en el segundo y azul en el tercero; los agite para observar cómo se tiñe el agua.
- ◆ Tome el cuarto recipiente y deje caer gotas de pintura roja e inmediatamente después gotas de pintura amarilla agitando el agua para observar cómo se forma el color naranja.
- ◆ Siga el procedimiento anterior y mezcle pintura amarilla y azul en el quinto frasco, azul y roja en el sexto, para obtener los colores verde y violeta respectivamente.
- ◆ Utilice sus dedos, a manera de pincel, para realizar con los colores obtenidos una composición relacionada con su casa y las actividades que realizan.

Obteniendo los parámetros:

De (3.1) se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{12} \cos \phi_i &= 9.05 - 10.35 + .86603(8.83 - 11.64 + 9.4210.27) \\ &+ 0.5(9.08 - 10.65 + 9.46 - 9.70) = -5.385 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{12} \text{sen } \phi_i &= 9.29 - 10.24 + 0.86603(9.08 - 10.65 + 9.70 - 9.46) \\ &+ 0.5(8.83 - 11.64 + 10.27 - 9.42) = -3.082. \end{aligned}$$

En consecuencia :

$$\begin{aligned} \tan \phi &= \frac{\sum_{i=1}^{12} \text{sen } \phi_i}{\sum_{i=1}^{12} \cos \phi_i} = \frac{-3.082}{-5.385} = .5723, \\ \phi &= 0.5195, \quad \phi^\circ = \frac{180(0.5195)}{\pi} = 29.77 \quad \phi^\circ = 30^\circ. \end{aligned}$$

La moda estimada es la misma a la moda observada que es el 15 de febrero.

Obteniendo la longitud del vector medio.

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{n} \sqrt{[(\sum \cos \phi_i)^2 + (\sum \text{sen } \phi_i)^2]} \\ \rho_1 &= \frac{1}{117.98} \sqrt{[(-5.385)^2 + (-3.082)^2]} = \frac{\sqrt{38.496949}}{117.98} \\ \rho_1 &= \frac{6.2046}{117.98} = .0526 \\ \Rightarrow \quad \rho_1 &= .0526. \end{aligned}$$

De la TABLA B se tienen los valores siguientes:

$$P_1 = 0.05, k = .10013$$

$$P_1 = 0.06, k = .12022$$

Se interpola para obtener el valor de k.

$$\frac{.12022 - .10013}{.06 - .05} = \frac{k - .10013}{.0526 - .056}$$

$$\Rightarrow k = .10535 \approx k = .105.$$

Por lo tanto es suficiente tomar $k = .105$. Este valor del parámetro es debido al hecho de que las diferencias entre las frecuencias son muy pequeñas.

Por lo tanto, se pueden usar las diferentes probabilidades $\Delta f(\phi)$ de la TABLA H. Para obtener los porcentajes teóricos, los valores $117.98 \Delta f(\phi)$ están dados en la última columna de la TABLA 3.7.

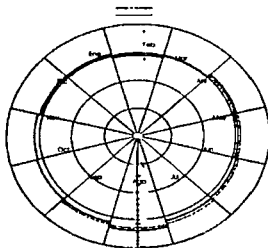


FIGURA 3.9. Gráfica del problema.

6. PROBLEMA DE PRECIPITACIÓN PLUVIAL MEDIDOS EN MILIMETROS

Los datos de la segunda columna se refieren a la precipitación medidos en mm. los cuales fueron obtenidos del servicio meteorológico de Tacubaya (estación Agua Azul, Chiapas).

Mes	f_i	f_i	f_i	Teoría
febrero	434.8	465.86	610.28	24.70
enero	717	693.87	908.97	30.15
diciembre	1255.1	1214.61	1591.14	39.89
noviembre	1600	-----	1600	40
octubre	1698.5	1643.71	2153.26	46.40
septiembre	3168.5	-----	3168.5	56.29
marzo	484.6	468.97	613.08	24.76
abril	319.5	-----	319.5	17.87
mayo	1715.1	1659.77	2174.30	46.63
junio	2368.9	-----	2368.9	48.67
julio	2368.2	2291.80	3102.34	59.55
agosto	2797.0	2706.77	3545.87	59.55

	$\sum f_i = 14638.8$	$\sum f'_i = 11145.36$	$\sum_{i=1}^{12} f''_i = 17099.07$	117.98
--	----------------------	------------------------	------------------------------------	--------

TABLA 3.8. Muestra las medias mensuales de la precipitación en milímetros.

La segunda columna contiene los números observados en milímetros, la tercera columna contiene el primer ajuste para la longitud de los meses. La suma de las frecuencias ajustadas $\sum f'_i = 11145.36$, $i=1,2,3,5,7,8,10$ y 12 , y la suma de las frecuencias es $\sum f_i = 14638.8$, $i=1,2,3,5,7,8,10$ y 12 . En consecuencia las frecuencias ajustadas son multiplicadas por $Q = \frac{14638.8}{1114.36} = 1.31$ esto da como resultado la cuarta columna la cual se tiene una precipitación pluvial media anual total observada de $n=17099.07$.

Obteniendo los parámetros :

De (3.1) se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{12} \cos \phi_i &= 2368.9 - 717 + .86603(2797.0 - 434.8 + 2368.9 - 1255.1) \\ &+ 0.5(3168.5 - 484.6 + 1715 - 1600) = 6061.72 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{12} \operatorname{sen} \phi_i &= 1698.5 - 3195 + 0.86603(3168.5 - 484.6 + 1600 - 1715) \\ &+ 0.5(2797 - 434.8 + 1255.1 - 2368.9) = 1352.36. \end{aligned}$$

En consecuencia :



$$\tan \phi = \frac{\sum_{i=1}^{12} \sin \phi_i}{\sum_{i=1}^{12} \cos \phi_i} = \frac{1352.36}{6061.72} = .219,$$

$$\phi = 0.5195, \quad \phi^\circ = \frac{180(0.219)}{\pi} = 12.54 \quad \phi^\circ = 13^\circ.$$

La moda estimada es la misma a la moda observada que es el 24 de febrero.

Obteniendo la longitud del vector medio.

$$\rho_1 = \frac{1}{n} \sqrt{[(\sum \cos \phi_i)^2 + (\sum \sin \phi_i)^2]}$$

$$\rho_1 = \frac{1}{17099.07} \sqrt{[(6061.72)^2 + (1352.36)^2]} = \frac{\sqrt{38572353.36}}{17099.07}$$

$$\rho_1 = \frac{6210.66}{17099.07} = .3632$$

$$\Rightarrow \rho_1 = .3632.$$

De la TABLA B se tienen los valores siguientes:

$$\rho_1 = 0.36, \quad k = .77241$$

$$\rho_1 = 0.37, \quad k = .79730$$

Se interpola para obtener el valor de k.

$$\frac{.79730 - .77241}{.37 - .36} = \frac{k - .77241}{.3632 - .36}$$

$$\Rightarrow k = .78.$$

Este valor del parámetro es debido al hecho de que las diferencias entre las frecuencias son más o menos pequeñas. En la FIGURA 3.8 se observa

que el mes de abril tiene una frecuencia menor a marzo por lo que se forma un hueco en la gráfica, de igual manera la frecuencia de octubre con respecto a la de septiembre.

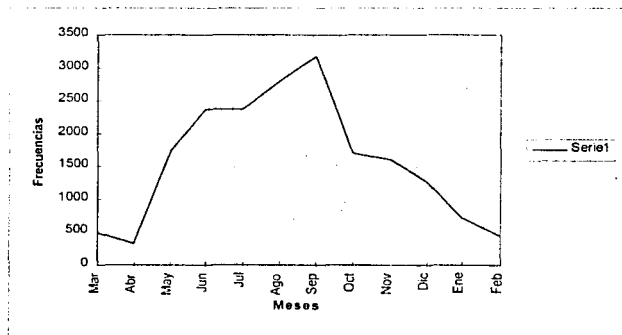


FIGURA 3.8. Histograma de los datos de precipitación medidos en milímetros.

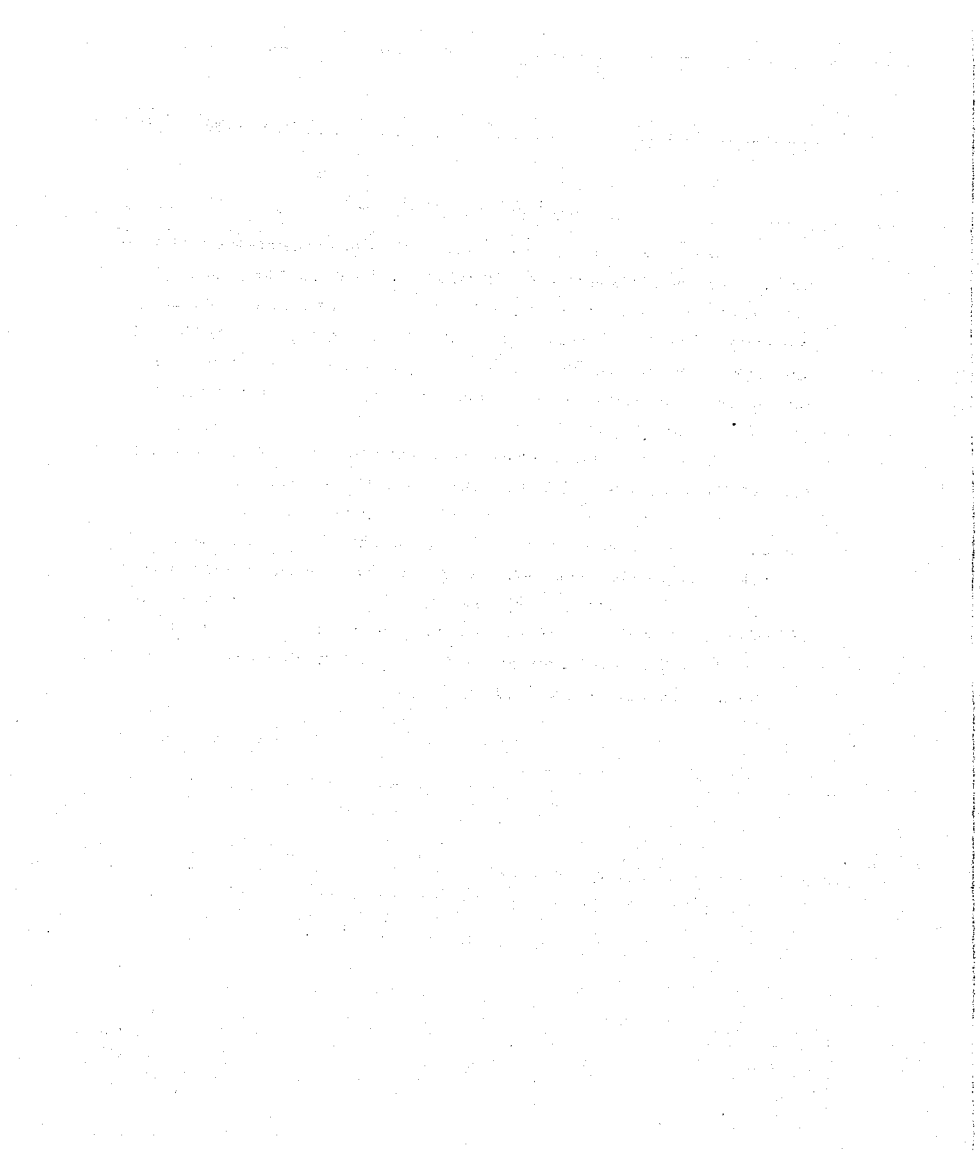


CONCLUSIONES

Una vez cumplidos los objetivos de esta investigación debemos tomar en cuenta que la función de densidad von Mises aplicada en este caso a los fenómenos tales como la precipitación pluvial, el número de ocurrencias de la precipitación pluvial, el número de ocurrencias de precipitación de 1" ó más, los runoff, los porcentajes de muertes, etc., es importante por si misma como un recurso para la investigación en diversas áreas como por ejemplo: economía, geología, biología, en otras.

Es decir es trascendente para fenómenos naturales, financieros, económicos, como para problemas sociales como el de la salud.

De allí los capítulos desarrollados se refieren a las funciones de distribución más importantes de la *Estadística Circular* y se desarrollan dos procedimientos para la distribución von Mises con el objetivo de compararlos en cada problema. Por ejemplo en el problema aplicado de precipitación medidos en milímetros al realizar los ajustes la moda permanece en el mes observado que es el 15 de febrero y al obtener la estimación de la moda mediante la teoría se muestra que la moda cambia al 24 de febrero.





BIBLIOGRAFIA

- [1] Alan, D. Solomon., (1989).
"The essentials of Fourier Analysis".
Research and Education Association.
- [2] Batschelet, E. (1965).
Statistical Methods for the analysis of Problems in animal Orientation and
Certain Biological Rhythms.
Amer. Inst. Biol. Sci; Washington, D.C.
- [3] Batschelet, E., (1981).
"Circular Statistics in Biology".
Academic Press N.Y.
- [4] Bingham, C. and Mardia, K. V. (1975).
Maximum likelihood characterization of the von Mises distribution.
In "Statistical Distributions in Scientific Work". (C. P. Patil et al., eds),
Vol. 3, pp. 387-398. Reidel, Dordrecht.
- [5] Bingham, M. S. (1978).
A characterization of the uniform distribution on the circle in the analysis of
directional data.
J. Appl. Prob. 15, 852-857.
- [6] Dick, H. D., y Mattice, W.A., (1941).
"A study of excessive rainfalls,"
Monthly Weather Review, 69 , 293-302.
- [7] Fisher, N. I., (1992).
" Statistical Analysis of Circular Data"
Cambridge University Press.
- [8] Gnedenko, B.V., (1973).
"The theory of probability".
Tranlated from the russian by George Yankovsky.
Mir Publishers Moscow.



- [9] Gumbel, E. J., (1954).
Applications of the Circular Normal Distribution.
Columbia University.
- [10] Gumbel, E. J., Greenwood, J.A. and Dorand, D., (1953).
"The Circular Normal Distribución": Theory and tables.
J. Amer. Stat. Assoc. 8, 131-152.
- [11] Kent, J. T. & Tyler, D.E., (1988).
Maximum Likelihood Estimation for the Wrapped Cauchy Distribution.
Journal of applied Statistics, Vol. 15, No. 2, 1988.
- [12] Kent, J. T., Mardia, K. V. and Rao, J. S. (1979).
A Characterization of the Uniform Distribution on the Circle.
The Annals of Statistics. 7. 882-889.
- [13] Leighly, J. B., (1928).
"Graphic studies in climatology: polar form of diagram in the plotting of the annual climatic cycle."
University of California Publications in Geography (Berkeley), 2, 387-407.
- [14] Mardia, K. V. (1975).
Statistics of Directional Data.
J. Roy. Stat. Soc., Ser. B37, 349-393.
- [15] Mardia, K.V., (1972).
Statistics of Directional Data.
Academic Press. London and New York.
- [16] Stephen, M. A. (1969).
Test for the von Mises Distribution.
Biometrika 56, 149-180.
- [17] Thompson, R. W. S., (1950).
"The application of statistical methods in the determination of the yield of a catchment from run-off data," con una nota estadística de D. h. Thomson,
Journal of the Institution of water Engineers, 4, 397.



TABLA DE NOTACIONES

ϕ	Variable aleatoria
M	Masa
O	Origen
m, μ_1	Vector medio de la muestra
R	Longitud del vector suma
r, ρ_1	Longitud del vector medio
S^2, σ^2	Varianza Angular
S, σ	Desviación media angular
$f(\phi)$	Función de densidad
$F(\phi)$	Función de Distribución
$a_1 = E(\cos\phi)$	Componente del vector medio
$b_1 = E(\sin\phi)$	Componente del vector medio
θ_1	Angulo Medio polar de μ_1 .
ϕ_P	Función característica
ϕ_i	Variable aleatoria i-ésima
k	Parámetro de concentración de la distribución von Mises
α	Angulo medido desde al azimuth
L	Medida local sensible

**TABLA DE NOTACIONES**

$A(x)$	Función Bessel
$M(k, \theta_1)$	Distribución von Mises
$U(0, 2\pi)$	Distribución Uniforme en el intervalo de cero a 2π .
$Nw(\mu, \rho)$	Distribución Normal envuelta con parámetro μ y ρ .
C	Centro de masa



1. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

La posición de un punto P , en el plano puede ser únicamente determinado por dos coordenadas x y y (coordenadas rectangulares), o por un ángulo ϕ y una distancia r (coordenadas polares). Ver FIGURA 1. Si P coincide con O (origen del plano), el ángulo ϕ no está definido. Se dice que el eje X positivo se conoce con el nombre de "dirección cero", sin embargo, también es denominado comúnmente como "eje polar".

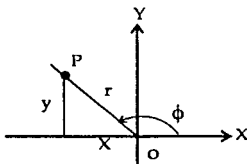


FIGURA 1. Coordenadas rectangulares (x , y) de un punto P , y coordenadas polares r y ϕ .

ϕ es un ángulo que se traza en sentido contrario a las manecillas del reloj empezando desde el eje X . Aquí los ángulos pueden ser medidos en grados o en radianes.

Se asocia un ángulo con una dirección dada, y por ello se requiere una restricción en los ángulos, es decir, los ángulos se tienen que medir en el intervalo de 0° a 360° . Los ángulos 630° , -90° ó 270° representan la misma dirección, por lo tanto se dice que 630° ó -90° son congruentes a 270° modulo 360° .



Se escribe $630^\circ = -90^\circ = 270^\circ \pmod{360^\circ}$ y en general $\theta = \phi \pmod{360^\circ}$

significa que θ y ϕ difieren de un múltiplo de 360° o sea:

$$\theta = \phi \pm k \cdot 360^\circ \text{ donde } k \text{ es un entero.}$$

En la FIGURA 2 se presenta un círculo unitario (la longitud de su radio es uno) para obtener una unidad, lo cual es más importante para la teoría de los ángulos medidos en grados. Este es el círculo de radio 1 y centro O. Después, se rota la línea media ℓ desde el eje positivo X hasta colocarla en el punto P, y posteriormente se denotan el origen y el final de los puntos de la intersección de ℓ con el círculo unitario por A y B, entonces se mide el ángulo ϕ por la longitud del arco A y B.

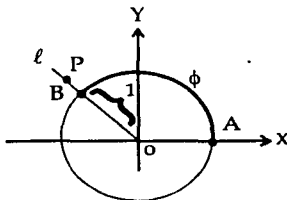


FIGURA 2. Círculo unitario.

Si se mide el ángulo ϕ en radianes, entonces la circunferencia de un círculo de radio r es $2\pi r$, el ángulo 2π radianes ó 6.28 radianes es equivalente a 360° . En la TABLA A (APÉNDICE II.) se puede ver como convertir los ángulos de grados a radianes. Un radian, corresponde a 57.3° .

2. VECTORES

Los vectores fueron usados por los físicos para el estudio de conceptos como la fuerza y la velocidad. Hoy en día sólo son usados para el álgebra y la geometría. Los puntos P y Q están dados, la línea con dirección de Q a P es llamada vector denotado por \vec{QP} o por v ; donde Q es llamado el punto inicial y P es el punto final del vector.

Dos vectores son iguales si tienen la misma dirección y la misma longitud. FIGURA 3.

Ejemplo $QP=Q'P'$ o $v=v'$

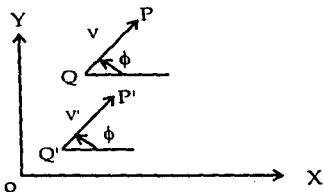


FIGURA 3. Los vectores $v=v'$ son iguales en longitud y en dirección.

Se utilizan los vectores para localizar puntos en el plano (FIGURA 1), un vector es denominado como sigue:

$$OP=v=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=(r,\phi).$$



La longitud r es llamada valor absoluto de v y se denota por $r=|v|$. Un vector especial es el vector cero.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (0, \dots, 0), \quad |0| = 0.$$

En el análisis de direcciones frecuentemente se utilizan vectores unitarios. Éstos son de longitud 1. Los vectores unitarios determinan puntos sobre la circunferencia del círculo unitario y viceversa; es decir, a cada punto del círculo unitario se le asocia un vector unitario.

Ejemplo de esto, son los vectores siguientes:

$$u_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

3. OPERACIONES CON VECTORES

1. La suma (FIGURA 4) de dos vectores está definida algebraicamente de la siguiente manera:

$$u_1 + u_2 = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} = u_3.$$

Geoméricamente se suman los vectores v_1 y v_2 de la siguiente forma: se traza el paralelo de v_1 de tal forma que el inicio del vector de v_1 coincida con el punto final de v_2 , luego trazar un vector v_3 donde su punto inicial coincida con el punto inicial del vector v_2 y su punto final es el mismo que el punto final del vector paralelo v_1 . Por lo tanto, $v_3 = v_1 + v_2$ es el vector suma o el vector resultante.

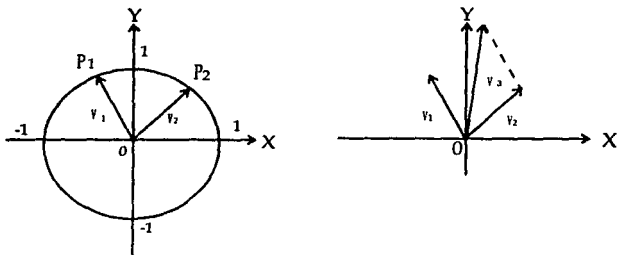


FIGURA 4. La Figura de la izquierda nos muestra los vectores v_1 y v_2 y la FIGURA de la derecha nos muestra la suma de los vectores v_1 y v_2 .

3.1 Propiedad de la Comutatividad

Si v_1, v_2 son dos vectores entonces $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$.

3.2 Propiedad de la asociatividad

Si v_1, v_2, v_3 , son vectores entonces

$$v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3.$$

3.3 Múltiplos de vectores

En la FIGURA 5 se muestran algunos múltiplos de vectores y se observa que si $k > 0$ la dirección del vector permanece igual, y si $k < 0$ la dirección del vector cambia.

$$kv = k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}.$$

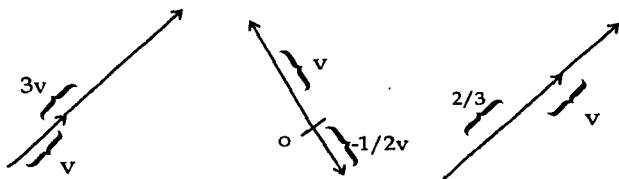


FIGURA 5. Múltiplos de un vector.

Un concepto es el centro de Masa.

Si los puntos de masa son M_1 y M_2 y están localizados en las puntas de los vectores unitarios v_1 y v_2 respectivamente. El centro de masa está dado por la siguiente formula:

$$v = \frac{1}{M_1 + M_2} (M_1 v_1 + M_2 v_2).$$

El nuevo vector v es llamado vector medio (ver FIGURA 1.6) y puede ser interpretado como una media aritmética ponderada de los vectores v_1 y v_2 . Ahora para el vector medio de n puntos de masa. M_1, M_2, \dots, M_n asociados a los vectores unitarios v_1, v_2, \dots, v_n está dado por:

$$v = \frac{1}{\sum_{i=1}^n M_i} \sum_{i=1}^n M_i v_i.$$

4. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

DEFINICIÓN. Sea P un punto con coordenadas polares ρ y ϕ . Se denotarán sus coordenadas rectangulares por x y y ; entonces el coseno y el seno de ϕ son definidos como :

$$x = \cos\phi \quad \text{y} \quad y = \sin\phi.$$

Por lo tanto, el $\sin\phi$ y $\cos\phi$ son funciones de ϕ , pero si el dominio de ϕ consiste en todos los números reales, x y y son funciones periódicas de ϕ , si se tiene una nueva rotación alrededor del círculo unitario se generan los mismos valores de x y y . El periodo es 360° . ver FIGURA 6.

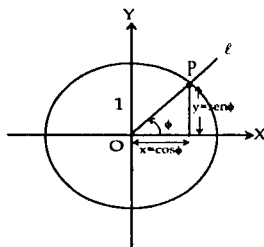
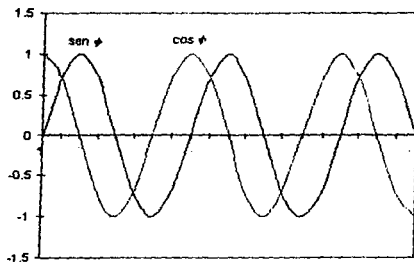


FIGURA 6. Definición de las funciones trigonométricas seno y coseno para ángulos arbitrarios de ϕ .

Una representación lineal de las funciones $\sin\phi$ y $\cos\phi$ se muestra en la FIGURA 7.

FIGURA 7. Gráficas de $\text{sen } \phi$ y $\text{cos } \phi$.

Las siguientes relaciones pueden derivarse de la FIGURA 7.

$$\text{sen}^2\phi + \text{cos}^2\phi = 1$$

$$\text{sen}(-\phi) = \text{sen}(360^\circ - \phi) = -\text{sen}\phi$$

$$\text{cos}(-\phi) = \text{cos}(360^\circ - \phi) = \text{cos}\phi$$

$$\text{sen}(180^\circ - \phi) = \text{sen}\phi$$

$$\text{cos}(180^\circ - \phi) = -\text{cos}\phi$$

$$\text{sen}(180^\circ + \phi) = -\text{sen}\phi$$

$$\text{cos}(180^\circ + \phi) = -\text{cos}\phi.$$

Sin previa demostración se tienen las siguientes fórmulas:

$$\text{sen}(\phi + \psi) = \text{sen}\phi \text{cos}\psi + \text{cos}\phi \text{sen}\psi$$

$$\text{sen}(\phi - \psi) = \text{sen}\phi \text{cos}\psi - \text{cos}\phi \text{sen}\psi$$



$$\cos(\phi+\psi)=\cos\phi\cos\psi+\sin\phi\sin\psi$$

$$\cos(\phi-\psi)=\cos\phi\cos\psi-\sin\phi\sin\psi.$$

Así se define la tangente:

$$\tan \phi = \frac{\text{sen } \phi}{\text{cos } \phi}.$$

El periodo de $\text{sen } \phi$ y $\text{cos } \phi$ es de 360° , la función $\tan \phi$ tiene un periodo de 180° , entonces:

$$\tan(\phi + 180^\circ) = \frac{\text{sen}(\phi + 180^\circ)}{\text{cos}(\phi + 180^\circ)} = \frac{-\text{sen } \phi}{-\text{cos } \phi} = \tan \phi.$$

Por la ecuación $\text{cos } \phi = x$, el ángulo ϕ no es único para determinar x ya que existe una infinidad de soluciones. Por ejemplo, si $x = .5$ algunas soluciones son $\phi_1 = 60^\circ$, $\phi_2 = -60^\circ$, $\phi_3 = 420^\circ$, $\phi_4 = -420^\circ$, etc. Por eso, cuando se define la función inversa se tiene que tomar nota del intervalo dentro del cual el ángulo cae.

$\text{Cos } \phi$ decrece de 1 a -1, si ϕ se incrementa de 0° a 180° , ϕ es únicamente determinado dentro de este intervalo. Así, se tiene un ángulo limitado por $0^\circ \leq \phi \leq 180^\circ$ es una función de x , llamada la función inversa de $x = \text{cos } \phi$ esto implica que:

$$\phi = \arccos x \quad (-1 \leq x \leq 1, \quad 0^\circ \leq \phi \leq 180^\circ)$$

equivalentemente denotado por: $\phi = \text{cos}^{-1}x$.

Análogamente, $\text{sen } \phi$ se incrementa de -1 a 1, si ϕ se incrementa de -90° a 90° .



De esto, la función inversa de $y=\text{sen}\phi$ es:

$$\phi=\text{arc sen } y \quad (-1\leq y\leq 1, \quad -90^\circ\leq\phi\leq 90^\circ)$$

equivalente a denotarse por $\phi=\text{sen}^{-1}y$.

$u=\text{tan}\phi$ sólo tiene solución para ϕ , si está limitado en el intervalo de -90° a 90° .

De aquí, la función inversa de $u=\text{tan}\phi$ es:

$$\phi=\text{arc tan } u \quad (-90^\circ\leq\phi\leq 90^\circ)$$

equivalente a denotarse por $\phi=\text{tan}^{-1}u$.

Se nota que u puede tomar algunos valores arbitrarios reales.

Se aplican funciones trigonométricas para la conversión de coordenadas polares a coordenadas rectangulares. Si r es la distancia polar, se tiene:

$$x=r\cos\phi, \quad y=r\text{sen}\phi.$$

La conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas polares es menos simple. De $\text{sen}^2\phi+\cos^2\phi=1$ se tiene lo siguiente:

$$x^2+y^2=r^2(\cos^2\phi+\text{sen}^2\phi)=r^2.$$

$$\text{Entonces } \tan\phi = \frac{\text{sen}\phi}{\cos\phi} = \frac{y}{x} \text{ para } x\neq 0.$$

Como se sabe, el $\text{arctan}(y/x)$ toma sus valores entre -90° y 90° , que es su reproducción en ángulos polares sólo en el primero y cuarto cuadrante donde $x>0$. Para $x<0$ el punto (x,y) cae dentro del segundo y tercer cuadrante. Con esto, ϕ mide entre 90° y 270° . Como $\text{tan}\phi$ tiene un periodo de 180° , se tiene



que sumar 180° al $\arctan(y/x)$. Por lo tanto, es necesario completar este resultado con los casos particulares que se presentan a continuación:

$$\phi = \begin{cases} 90^\circ & \text{si } x = 0, y > 0 \\ 270^\circ & \text{si } x = 0, y < 0 \\ \infty & \text{si } x = 0, y = 0. \end{cases}$$

Estudiando funciones periódicas como $\text{sen}2\phi$, $\text{sen}3\phi$ etc., $\text{cos}2\phi$, $\text{cos}3\phi$ etc. Si se incrementa ϕ de 0° a 180° , entonces 2ϕ se incrementa de 0° a 360° . Así, los valores de ϕ se incrementan de 0° a 120° , 3ϕ se incrementa de 0° a 360° . De aquí, $\text{sen}3\phi$ y $\text{cos}3\phi$ tienen un periodo de 120° .

De esta manera se puede estudiar las funciones $\text{sen}(n\phi)$ y $\text{cos}(n\phi)$ para algunos números naturales n . En la FIGURA 8 se muestran los diagramas de $\text{sen}\phi$ y $\text{cos}\phi$.

Se tiene algunas aproximaciones para valores de ψ cercanos a 0° :

$$\text{sen}\psi \approx \psi$$

$$\text{cos}\psi \approx 1 - \frac{1}{2} \psi^2$$

$$2(1 - \text{cos}\psi) \approx \psi^2$$

donde ψ es medido en radianes.

El ángulo entre dos direcciones tiene que ser determinado. Las direcciones pueden ser representadas por las líneas medias ℓ_1 , ℓ_2 , con un vértice común.

Las líneas medias dividen al círculo unitario en dos arcos. Uno de ellos es de longitud mayor o igual a 180° , y el otro de longitud menor o igual a



180°. Se selecciona el más corto de los dos arcos y se llamará *distancia angular* de las dos direcciones. Sean ϕ y ψ los ángulos polares de ℓ_1 y ℓ_2 con respecto a una dirección cero arbitraria. Aquí, se denotará la distancia angular por el símbolo $|\phi, \psi|$, donde se tiene la desigualdad dada por:

$$0^\circ \leq |\phi, \psi| \leq 180^\circ.$$

El cálculo de la distancia angular no es trivial. Porque esta distancia no es igual para $\phi - \psi$; entonces, la diferencia puede tomar algunos valores entre -360° y 360° . En este caso se debe obtener el valor absoluto de 360° , y la solución correcta a nuestro problema es $|\phi - \psi| - \min.$ de los ángulos $|\phi - \psi|$ y $360^\circ - |\phi - \psi|$.

Por la ecuación $\cos(-\phi) = \cos(360^\circ - \phi) = \cos\phi$ se obtiene que $\cos(\psi - \phi) = \cos(\phi - \psi)$, esto elimina la asimetría entre ϕ y ψ . Además, la función arccos toma sólo valores de 0° a 180° . Esto nos lleva a un resultado práctico:

$$|\phi, \psi| = \arccos[\cos(\phi - \psi)].$$

Otra alternativa de poder medir la distancia entre dos direcciones con ángulos polares ϕ y ψ es la función:

$$d(\phi, \psi) = 1 - \cos(\phi - \psi).$$

Si $\phi = \psi$, entonces $d(\phi, \psi) = 0$. Cuando la diferencia $\phi - \psi$ crece en el valor absoluto, $d(\phi, \psi)$ se incrementa monótonamente. El valor máximo es 2; si ϕ difiere de ψ por más de 180° .

5. ROTACIÓN DEL PLANO

Las coordenadas polares son herramientas que muestran como los puntos de un plano pueden ser rotados alrededor del origen (FIGURA 8). Si P es



algún punto (x,y) con coordenadas polares, r y ϕ . Si se rota el plano por un ángulo θ , entonces P se mueve al punto P' con coordenadas polares r y $\phi'=\phi+\theta$. Entonces se tiene:

$$x'=r\cos(\phi+\theta), \quad y'=r\sin(\phi+\theta)$$

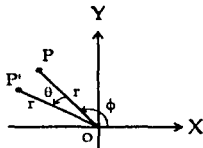


FIGURA 8. Se rotó el plano un ángulo θ .

6. FUNCIONES BESSEL

El astrónomo Friedrich W. Bessel (1784-1846) definió una familia de funciones $J_n(z)$ por:

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\phi - z \sin \phi) d\phi$$

para los ordenes $n=\pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. La variable independiente Z puede ser un real o un complejo. Las gráficas de las funciones $J_0(z)$, $J_1(z)$ y $J_2(z)$ se muestran en la FIGURA 9. El lector encontrará una lista breve de los valores de las funciones Bessel en la TABLA F del APÉNDICE II.

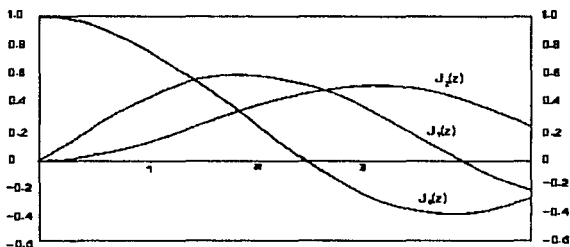


FIGURA 9. Gráficas de funciones Bessel $J_0(z)$,

$J_1(z)$ $J_2(z)$.

Las funciones $J_n(z)$ tienen varias propiedades las cuales son usadas en estadística circular:

$$J_n(-z) = (-1)^n J_n(z)$$

particularmente

$$\begin{aligned} J_0(-z) &= J_0(z), & J_1(-z) &= -J_1(z) \\ J_{n+1}(z) &= \frac{2n}{z} J_n(z) - J_{n-1}(z) & (z \neq 0). \end{aligned}$$

Para $n=1$, se obtiene de la fórmula de recursión

$$\int_0^{2\pi} \cos(z \sin \phi) \cos n\phi d\phi = \begin{cases} 2\pi J_n(z), & \text{si } n = 0, 2, 4, 6, \dots \\ 0, & \text{si } n = 1, 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$

Varias integrales pueden ser expresadas por funciones Bessel, por ejemplo:



$$\int_0^{2\pi} \cos(z \cos \phi) \cos n\phi \, d\phi = 2\pi \cos \frac{n\pi}{2} J_n(z)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(z \cos \phi) \cos n\phi \, d\phi = 2\pi \sin \frac{n\pi}{2} J_n(z)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(z \sin \phi) \sin n\phi \, d\phi = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0, 2, 4, 6, \dots \\ 2\pi J_n(z), & \text{si } n = 1, 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$

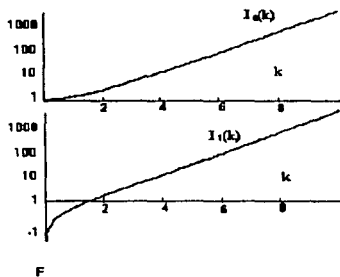
Existe una segunda familia de funciones Bessel que son de igual importancia para las distribuciones circulares, las funciones $I_n(z)$ de orden $n = \pm 0, \pm 1, \pm 2$, están definidas por:

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(z \cos \phi) \cos n\phi \, d\phi.$$

Están relacionadas con la familia anterior, $J_n(z)$, por la ecuación:

$$I_n(z) = i^{-n} J_n(iz)$$

donde $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria. Por esta razón $I_n(z)$, es también llamada una función Bessel pero sólo para argumentos imaginarios puros. Las gráficas de $I_0(z)$ y $I_1(z)$ se muestran en la FIGURA 10. En la TABLA F se encuentran algunos valores de estas funciones (una lista más completa puede ser encontrada, por ejemplo en Abramowitz y Stegun 1965).

FIGURA 10. Gráficas de funciones Bessel I_0 y I_1 .

$I_n(z)$ tiene dos propiedades similares a los de la familia anterior $J_n(z)$:

$$I_n(-z) = (-1)^n I_n(z)$$

$$I_{n+1}(z) = I_{n-1}(z) - \frac{2n}{z} I_n(z) \quad (z \neq 0).$$

También se necesita de la siguiente propiedad:

$$d I_0(z) / dz = I_1(z).$$

7. SERIES DE FOURIER

En las distribuciones circulares continuas es conveniente contar con la propiedad expresar su función de densidad en momentos trigonométricos, y para ello se propone las *series de Fourier* que son funciones continuas definidas en el intervalo $(0, 2\pi)$:



$$f(\phi) = \frac{1}{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos i\phi + b_i \sin i\phi) \right)$$

con coeficientes Fourier a_n y b_n .

Sea $f(\phi)$ la función de probabilidad de una distribución circular, y los coeficientes de Fourier a_n y b_n no son más que los componentes del n -ésimo momento trigonométrico ($n=1,2,3,\dots$) definido por la ecuación que a continuación se muestra:

$$\mu_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \rho_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$$

Considerando la serie de Fourier para distribuciones unimodales y simétricas y bajo la suposición de que la moda es $\theta_1=0$, la expansión de Fourier se reduce en términos de coseno como sigue:

$$f(\phi) = \frac{1}{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos i\phi) \right).$$

De aquí, se tiene:

$$\rho_1 = a_1, \quad \rho_2 = |a_2|, \quad \rho_3 = |a_3|, \dots$$

Elongación. Astronomía: diferencia de longitud entre un planeta y el sol. Distancia angular entre dos planetas. En los planetas interiores la máxima distancia angular se llama máxima elongación. Física: separación o distancia de un punto, o un cuerpo, oscilante o vibrante, de su posición normal de equilibrio. Puede ser lineal, como en una partida vibrante, o angular como en un péndulo. Medicina: Alargamiento accidental de un miembro o de un nervio.

TABLA A TRES MEDIDAS DIFERENTES PARA COMPARAR ÁNGULOS: GRADOS DE 0° A 360°, HORAS DEL DÍA DE 00:00 A 24:00, Y RADIANES DE 0 A 2 π (EN PASOS DE 1 O 4 MINUTOS). TAMBIÉN SE PRESENTAN LOS VALORES DE SENO, COSENO Y TANGENTE.

GRADOS	HORA	RADIANES	SENO	COSENO	TANGENTE	GRADOS	HORA	RADIANES	SENO	COSENO	TANGENTE
0	0:00	0	0	+1	0	30	2:00	.5236	+5000	+8660	+5774
1	0:04	.0175	+0175	+9998	+0175	31	2:04	.5411	+5150	+8572	+6009
2	0:08	.0349	+0349	+9994	+0349	32	2:08	.5585	+5299	+8480	+6249
3	0:12	.0524	+0523	+9986	+0524	33	2:12	.5760	+5446	+8387	+6494
4	0:16	.0698	+0698	+9976	+0699	34	2:16	.5934	+5592	+8290	+6745
5	0:20	.0873	+0872	+9962	+0875	35	2:20	.6109	+5735	+8192	+7002
6	0:24	.1047	+1045	+9945	+1051	36	2:24	.6283	+5878	+8090	+7265
7	0:28	.1222	+1219	+9925	+1228	37	2:28	.6458	+6018	+7988	+7536
8	0:32	.1396	+1392	+9903	+1405	38	2:32	.6632	+6157	+7880	+7813
9	0:36	.1571	+1564	+9877	+1584	39	2:36	.6807	+6293	+7771	+8098
10	0:40	.1745	+1738	+9848	+1763	40	2:40	.6981	+6428	+7660	+8391
11	0:44	.1920	+1908	+9815	+1844	41	2:44	.7156	+6561	+7547	+8693
12	0:48	.2094	+2079	+9781	+1926	42	2:48	.7330	+6691	+7431	+9004
13	0:52	.2269	+2250	+9744	+2309	43	2:52	.7505	+6820	+7314	+9325
14	0:56	.2443	+2419	+9703	+2493	44	2:56	.7679	+6947	+7193	+9667
15	1:00	.2618	+2588	+9659	+2679	45	3:00	.7854	+7071	+7071	+1000
16	1:04	.2793	+2756	+9613	+2867	46	3:04	.8029	+7193	+6947	+1036
17	1:08	.2967	+2924	+9563	+3057	47	3:08	.8203	+7314	+6820	+1072
18	1:12	.3142	+3090	+9511	+3249	48	3:12	.8378	+7431	+6691	+1111
19	1:16	.3316	+3256	+9455	+3443	49	3:16	.8552	+7547	+6561	+1150
20	1:20	.3491	+3420	+9397	+3640	50	3:20	.8727	+7660	+6428	+1192
21	1:24	.3665	+3584	+9336	+3839	51	3:24	.8901	+7771	+6293	+1235
22	1:28	.3840	+3746	+9272	+4040	52	3:28	.9076	+7880	+6157	+1280
23	1:32	.4014	+3907	+9205	+4245	53	3:32	.9250	+7988	+6018	+1327
24	1:36	.4189	+4067	+9135	+4452	54	3:36	.9425	+8090	+5878	+1376
25	1:40	.4363	+4226	+9063	+4663	55	3:40	.9599	+8192	+5736	+1428
26	1:44	.4538	+4384	+8988	+4877	56	3:44	.9774	+8290	+5592	+1483
27	1:48	.4712	+4540	+8910	+5095	57	3:48	.9948	+8387	+5446	+1540
28	1:52	.4887	+4695	+8829	+5317	58	3:52	1.012	+8480	+5299	+1600
29	1:56	.5061	+4848	+8745	+5543	59	3:56	1.030	+8572	+5150	+1664

TABLA A (CONTINUACIÓN)

GRADOS	HORA	RADIANES	SENO	COSENO	TANGENTE	GRADO	HORA	RADIANES	SENO	COSENO	TANGENTE
60	4:00	1.047	+8960	+5000	+1.732	90	6:00	1.571	+1.000	0	∞
61	4:04	1.065	+8746	+4848	+1.804	91	6:04	1.588	+9998	-0.0175	-57.29
62	4:08	1.082	+8529	+4695	+1.881	92	6:08	1.606	+9994	-0.0349	-28.84
63	4:12	1.100	+8310	+4540	+1.963	93	6:12	1.623	+9986	-0.0523	-19.08
64	4:16	1.117	+8088	+4384	+2.050	94	6:16	1.641	+9976	-0.0698	-14.30
65	4:20	1.134	+7863	+4226	+2.145	95	6:20	1.658	+9962	-0.0872	-11.43
66	4:24	1.152	+7635	+4067	+2.246	96	6:24	1.676	+9945	-0.1045	-9.514
67	4:28	1.169	+7405	+3907	+2.356	97	6:28	1.693	+9925	-0.1219	-8.144
68	4:32	1.187	+7172	+3746	+2.475	98	6:32	1.710	+9903	-0.1392	-7.115
69	4:36	1.204	+6936	+3584	+2.605	99	6:36	1.728	+9877	-0.1564	-6.314
70	4:40	1.222	+6697	+3420	+2.747	100	6:40	1.745	+9848	-0.1736	-5.671
71	4:44	1.239	+6455	+3256	+2.904	101	6:44	1.763	+9816	-0.1908	-5.145
72	4:48	1.257	+6211	+3090	+3.078	102	6:48	1.780	+9781	-0.2079	-4.705
73	4:52	1.274	+5963	+2924	+3.271	103	6:52	1.798	+9744	-0.2250	-4.331
74	4:56	1.292	+5713	+2756	+3.487	104	6:56	1.815	+9703	-0.2419	-4.011
75	5:00	1.309	+5460	+2588	+3.732	105	7:00	1.833	+9659	-0.2588	-3.732
76	5:04	1.326	+5205	+2419	+4.011	106	7:04	1.850	+9613	-0.2756	-3.487
77	5:08	1.344	+4948	+2250	+4.331	107	7:08	1.868	+9563	-0.2924	-3.271
78	5:12	1.361	+4689	+2079	+4.705	108	7:12	1.885	+9511	-0.3090	-3.078
79	5:16	1.379	+4428	+1908	+5.145	109	7:16	1.902	+9455	-0.3256	-2.904
80	5:20	1.396	+4165	+1736	+5.671	110	7:20	1.920	+9397	-0.3420	-2.747
81	5:24	1.414	+3900	+1564	+6.314	111	7:24	1.937	+9336	-0.3584	-2.605
82	5:28	1.431	+3633	+1392	+7.115	112	7:28	1.955	+9272	-0.3746	-2.475
83	5:32	1.449	+3364	+1219	+8.144	113	7:32	1.972	+9205	-0.3907	-2.356
84	5:36	1.466	+3093	+1045	+9.514	114	7:36	1.990	+9135	-0.4067	-2.246
85	5:40	1.484	+2820	+872	+11.43	115	7:40	2.007	+9063	-0.4226	-2.145
86	5:44	1.501	+2545	+698	+14.30	116	7:44	2.025	+8988	-0.4384	-2.050
87	5:48	1.518	+2268	+523	+19.08	117	7:48	2.042	+8910	-0.4540	-1.963
88	5:52	1.536	+1989	+349	+28.84	118	7:52	2.059	+8829	-0.4695	-1.881
89	5:56	1.553	+1708	+175	+57.29	119	7:56	2.077	+8746	-0.4848	-1.804

TABLA A (CONTINUACIÓN)

GRADOS	HORA	RADIANES	SENO	COSENO	TANGENTE	GRADOS	HORA	RADIANES	SENO	COSENO	TANGENTE
120	8 00	2 094	+8660	-5000	-1 732	150	10 00	2 618	+5000	-8660	-5 774
121	8 04	2 112	+8572	-5150	-1 664	151	10 04	2 635	+4848	-8746	-5 543
122	8 08	2 129	+8480	-5299	-1 600	152	10 08	2 653	+4695	-8829	-5 317
123	8 12	2 147	+8387	-5446	-1 540	153	10 12	2 670	+4540	-8910	-5 095
124	8 16	2 164	+8290	-5592	-1 483	154	10 16	2 688	+4384	-8988	-4 877
125	8 20	2 182	+8192	-5738	-1 428	155	10 20	2 705	+4226	-9063	-4 663
126	8 24	2 199	+8090	-5878	-1 376	156	10 24	2 723	+4067	-9115	-4 452
127	8 28	2 217	+7986	-6018	-1 327	157	10 28	2 740	+3907	-9205	-4 245
128	8 32	2 234	+7880	-6157	-1 280	158	10 32	2 758	+3746	-9272	-4 040
129	8 36	2 251	+7771	-6293	-1 235	159	10 36	2 775	+3584	-9336	-3 839
130	8 40	2 269	+7660	-6428	-1 192	160	10 40	2 793	+3420	-9397	-3 640
131	8 44	2 286	+7547	-6561	-1 150	161	10 44	2 810	+3256	-9455	-3 443
132	8 48	2 304	+7431	-6691	-1 111	162	10 48	2 827	+3090	-9511	-3 249
133	8 52	2 321	+7314	-6820	-1 072	163	10 52	2 845	+2924	-9563	-3 057
134	8 56	2 339	+7193	-6947	-1 036	164	10 56	2 862	+2756	-9613	-2 867
135	9 00	2 356	+7071	-7071	-1 000	165	11 00	2 880	+2588	-9660	-2 679
136	9 04	2 374	+6947	-7193	-9657	166	11 04	2 897	+2419	-9703	-2 493
137	9 08	2 391	+6820	-7314	-9325	167	11 08	2 915	+2250	-9744	-2 309
138	9 12	2 409	+6691	-7431	-9004	168	11 12	2 932	+2079	-9781	-2 128
139	9 16	2 426	+6561	-7547	-8693	169	11 16	2 950	+1908	-9816	-1 944
140	9 20	2 443	+6428	-7660	-8391	170	11 20	2 967	+1736	-9848	-1 763
141	9 24	2 461	+6293	-7771	-8098	171	11 24	2 985	+1564	-9877	-1 584
142	9 28	2 478	+6157	-7880	-7813	172	11 28	3 002	+1392	-9903	-1 405
143	9 32	2 496	+6018	-7986	-7536	173	11 32	3 019	+1219	-9925	-1 228
144	9 36	2 513	+5878	-8090	-7265	174	11 36	3 037	+1045	-9945	-1 051
145	9 40	2 531	+5736	-8192	-7002	175	11 40	3 054	+872	-9962	-0 875
146	9 44	2 548	+5592	-8290	-6745	176	11 44	3 072	+698	-9976	-0 699
147	9 48	2 566	+5446	-8387	-6494	177	11 48	3 089	+523	-9986	-0 524
148	9 52	2 583	+5299	-8480	-6249	178	11 52	3 107	+349	-9994	-0 349
149	9 56	2 601	+5150	-8572	-6009	179	11 56	3 124	+0 175	-9998	-0 175

TABLA A (CONTINUACIÓN)

GRADOS	HORA	RADIANES	SENO	COSENO	TANGENTE	GRADO	HORA	RADIANES	SENO	COSENO	TANGENTE
180	12:00	3.142	0	-1	0	210	14:00	3.665	-5000	-8650	+5774
181	12:04	3.159	-0.0175	-9998	+0175	211	14:04	3.683	-5150	-8572	+6009
182	12:08	3.176	-0.0349	-9994	+0349	212	14:08	3.700	-5299	-8480	+6249
183	12:12	3.194	-0.0523	-9986	+0524	213	14:12	3.718	-5446	-8387	+6494
184	12:16	3.211	-0.0698	-9976	+0699	214	14:16	3.735	-5592	-8290	+6745
185	12:20	3.229	-0.0872	-9962	+0875	215	14:20	3.752	-5736	-8192	+7002
186	12:24	3.246	-0.1045	-9945	+1051	216	14:24	3.770	-5878	-8090	+7265
187	12:28	3.264	-0.1219	-9925	+1228	217	14:28	3.787	-6018	-7986	+7536
188	12:32	3.281	-0.1392	-9903	+1405	218	14:32	3.805	-6157	-7880	+7813
189	12:36	3.299	-0.1564	-9877	+1584	219	14:36	3.822	-6293	-7771	+8098
190	12:40	3.316	-0.1736	-9848	+1763	220	14:40	3.840	-6428	-7660	+8391
191	12:44	3.334	-0.1908	-9816	+1944	221	14:44	3.857	-6561	-7547	+8693
192	12:48	3.351	-0.2079	-9781	+2126	222	14:48	3.875	-6691	-7431	+9004
193	12:52	3.368	-0.2250	-9744	+2309	223	14:52	3.892	-6820	-7314	+9325
194	12:56	3.386	-0.2419	-9703	+2493	224	14:56	3.910	-6947	-7193	+9657
195	13:00	3.403	-0.2588	-9659	+2679	225	15:00	3.927	-7071	-7071	+1000
196	13:04	3.421	-0.2756	-9613	+2867	226	15:04	3.944	-7193	-6947	+1036
197	13:08	3.438	-0.2924	-9563	+3057	227	15:08	3.962	-7314	-6820	+1072
198	13:12	3.456	-0.3090	-9511	+3249	228	15:12	3.979	-7431	-6691	+1111
199	13:16	3.473	-0.3256	-9455	+3443	229	15:16	3.997	-7547	-6561	+1150
200	13:20	3.491	-0.3420	-9397	+3640	230	15:20	4.014	-7660	-6428	+1192
201	13:24	3.508	-0.3584	-9336	+3839	231	15:24	4.032	-7771	-6293	+1235
202	13:28	3.526	-0.3748	-9272	+4040	232	15:28	4.049	-7880	-6157	+1280
203	13:32	3.543	-0.3907	-9205	+4245	233	15:32	4.067	-7986	-6018	+1327
204	13:36	3.560	-0.4067	-9135	+4452	234	15:36	4.084	-8090	-5878	+1376
205	13:40	3.578	-0.4226	-9063	+4663	235	15:40	4.102	-8192	-5736	+1428
206	13:44	3.595	-0.4384	-8988	+4877	236	15:44	4.119	-8290	-5592	+1483
207	13:48	3.613	-0.4540	-8910	+5095	237	15:48	4.138	-8387	-5446	+1540
208	13:52	3.630	-0.4695	-8829	+5317	238	15:52	4.154	-8480	-5299	+1600
209	13:56	3.648	-0.4848	-8746	+5543	239	15:56	4.171	-8572	-5150	+1664

TABLA A (CONTINUACIÓN)

GRADOS	HORA	RADIANES	SENO	COSENO	TANGENTE	GRADOS	HORA	RADIANES	SENO	COSENO	TANGENTE
240	16.00	4.189	-0.8660	-0.5000	+1.732	270	18.00	4.712	-1	0	∞
241	16.04	4.206	-0.8746	-0.4848	+1.804	271	18.04	4.730	-0.9998	+0.0175	-57.29
242	16.08	4.224	-0.8829	-0.4695	+1.881	272	18.08	4.747	-0.9994	+0.0349	-28.64
243	16.12	4.241	-0.8910	-0.4540	+1.963	273	18.12	4.765	-0.9986	+0.0523	-19.08
244	16.16	4.259	-0.8988	-0.4384	+2.050	274	18.16	4.782	-0.9976	+0.0698	-14.30
245	16.20	4.276	-0.9063	-0.4226	+2.145	275	18.20	4.800	-0.9962	+0.0872	-11.43
246	16.24	4.294	-0.9135	-0.4067	+2.246	276	18.24	4.817	-0.9945	+0.1045	-9.514
247	16.28	4.311	-0.9205	-0.3907	+2.356	277	18.28	4.835	-0.9925	+0.1219	-8.144
248	16.32	4.328	-0.9272	-0.3746	+2.475	278	18.32	4.852	-0.9903	+0.1392	-7.115
249	16.36	4.346	-0.9336	-0.3584	+2.605	279	18.36	4.869	-0.9877	+0.1564	-6.314
250	16.40	4.363	-0.9397	-0.3420	+2.747	280	18.40	4.887	-0.9848	+0.1736	-5.671
251	16.44	4.381	-0.9455	-0.3256	+2.904	281	18.44	4.904	-0.9816	+0.1908	-5.145
252	16.48	4.398	-0.9511	-0.3090	+3.078	282	18.48	4.922	-0.9781	+0.2079	-4.705
253	16.52	4.416	-0.9563	-0.2924	+3.271	283	18.52	4.939	-0.9744	+0.2250	-4.331
254	16.56	4.433	-0.9613	-0.2758	+3.487	284	18.56	4.957	-0.9703	+0.2419	-4.011
255	17.00	4.451	-0.9659	-0.2588	+3.732	285	19.00	4.974	-0.9659	+0.2588	-3.732
256	17.04	4.468	-0.9703	-0.2419	+4.011	286	19.04	4.992	-0.9613	+0.2758	-3.487
257	17.08	4.485	-0.9744	-0.2250	+4.331	287	19.08	5.009	-0.9563	+0.2924	-3.271
258	17.12	4.503	-0.9781	-0.2079	+4.705	288	19.12	5.027	-0.9511	+0.3090	-3.078
259	17.16	4.520	-0.9816	-0.1908	+5.145	289	19.16	5.044	-0.9455	+0.3256	-2.904
260	17.20	4.538	-0.9848	-0.1736	+5.671	290	19.20	5.061	-0.9397	+0.3420	-2.747
261	17.24	4.555	-0.9877	-0.1564	+6.314	291	19.24	5.079	-0.9336	+0.3584	-2.605
262	17.28	4.573	-0.9903	-0.1392	+7.115	292	19.28	5.096	-0.9272	+0.3746	-2.475
263	17.32	4.590	-0.9925	-0.1219	+8.144	293	19.32	5.114	-0.9205	+0.3907	-2.356
264	17.36	4.608	-0.9945	-0.1045	+9.514	294	19.36	5.131	-0.9135	+0.4067	-2.246
265	17.40	4.625	-0.9962	-0.0872	+11.43	295	19.40	5.149	-0.9063	+0.4226	-2.145
266	17.44	4.643	-0.9976	-0.0698	+14.30	296	19.44	5.166	-0.8988	+0.4384	-2.050
267	17.48	4.660	-0.9986	-0.0523	+19.08	297	19.48	5.184	-0.8910	+0.4540	-1.963
268	17.52	4.677	-0.9994	-0.0349	+28.64	298	19.52	5.201	-0.8829	+0.4695	-1.881
269	17.56	4.695	-0.9998	-0.0175	+57.29	299	19.56	5.219	-0.8746	+0.4848	-1.804

TABLA A (CONTINUACIÓN)

GRADOS	HORA	RADIANES	SENO	COSENO	TANGENTE	GRADO	HORA	RADIANES	SENO	COSENO	TANGENTE
300	20:00	5.236	-0.6660	+0.5000	-1.732	330	22:00	5.760	-0.5000	+0.8660	-0.5774
301	20:04	5.253	-0.8572	+0.5150	-1.664	331	22:04	5.777	-0.4848	+0.8745	-0.5543
302	20:08	5.271	-0.8480	+0.5299	-1.600	332	22:08	5.794	-0.4695	+0.8829	-0.5317
303	20:12	5.288	-0.8387	+0.5448	-1.540	333	22:12	5.812	-0.4540	+0.8910	-0.5095
304	20:16	5.306	-0.8290	+0.5592	-1.483	334	22:16	5.829	-0.4384	+0.8988	-0.4877
305	20:20	5.323	-0.8192	+0.5736	-1.428	335	22:20	5.847	-0.4226	+0.9063	-0.4663
306	20:24	5.341	-0.8090	+0.5878	-1.376	336	22:24	5.864	-0.4067	+0.9135	-0.4452
307	20:28	5.358	-0.7988	+0.6018	-1.327	337	22:28	5.882	-0.3907	+0.9205	-0.4245
308	20:32	5.376	-0.7880	+0.6157	-1.280	338	22:32	5.899	-0.3746	+0.9272	-0.4040
309	20:36	5.393	-0.7771	+0.6293	-1.235	339	22:36	5.917	-0.3584	+0.9336	-0.3839
310	20:40	5.411	-0.7660	+0.6428	-1.192	340	22:40	5.934	-0.3420	+0.9397	-0.3640
311	20:44	5.428	-0.7547	+0.6561	-1.150	341	22:44	5.952	-0.3256	+0.9455	-0.3443
312	20:48	5.445	-0.7431	+0.6691	-1.111	342	22:48	5.969	-0.3090	+0.9511	-0.3249
313	20:52	5.463	-0.7314	+0.6820	-1.072	343	22:52	5.986	-0.2924	+0.9563	-0.3057
314	20:56	5.480	-0.7193	+0.6947	-1.036	344	22:56	6.004	-0.2756	+0.9613	-0.2867
315	21:00	5.498	-0.7071	+0.7071	-1.000	345	23:00	6.021	-0.2588	+0.9659	-0.2679
316	21:04	5.515	-0.6947	+0.7193	-0.9657	346	23:04	6.039	-0.2419	+0.9703	-0.2493
317	21:08	5.533	-0.6820	+0.7314	-0.9325	347	23:08	6.056	-0.2250	+0.9744	-0.2309
318	21:12	5.550	-0.6691	+0.7431	-0.9004	348	23:12	6.074	-0.2079	+0.9781	-0.2126
319	21:16	5.568	-0.6561	+0.7547	-0.8693	349	23:16	6.091	-0.1908	+0.9816	-0.1944
320	21:20	5.585	-0.6428	+0.7660	-0.8391	350	23:20	6.109	-0.1736	+0.9848	-0.1763
321	21:24	5.603	-0.6293	+0.7771	-0.8098	351	23:24	6.126	-0.1564	+0.9877	-0.1584
322	21:28	5.620	-0.6157	+0.7880	-0.7813	352	23:28	6.144	-0.1392	+0.9903	-0.1405
323	21:32	5.637	-0.6018	+0.7966	-0.7536	353	23:32	6.161	-0.1219	+0.9925	-0.1228
324	21:36	5.655	-0.5878	+0.8090	-0.7265	354	23:36	6.178	-0.1045	+0.9945	-0.1051
325	21:40	5.672	-0.5736	+0.8192	-0.7002	355	23:40	6.196	-0.0872	+0.9962	-0.0875
326	21:44	5.690	-0.5592	+0.8290	-0.6745	356	23:44	6.213	-0.0698	+0.9976	-0.0690
327	21:48	5.707	-0.5448	+0.8387	-0.6494	357	23:48	6.231	-0.0523	+0.9986	-0.0524
328	21:52	5.725	-0.5299	+0.8480	-0.6249	358	23:52	6.248	-0.0349	+0.9994	-0.0349
329	21:56	5.742	-0.5150	+0.8572	-0.6009	359	23:56	6.266	-0.0175	+0.9998	-0.0175
						360	24:00	6.283	0	+1	0

TABLA B LA LONGITUD DEL VECTOR MEDIO (ρ_1 O r) CONVERTIDO A UNA DESVIACIÓN ANGULAR (σ O S EN GRADOS) O EN EL PARÁMETRO DE CONCENTRACIÓN (k O K).

ρ_1 o r	σ o S	k o K	ρ_1 o r	σ o S	k o K
.00	81.03	00000	.50	57.30	1.16632
.01	80.82	02000	.51	56.72	1.15105
.02	80.21	04001	.52	56.14	1.22350
.03	79.80	06003	.53	55.55	1.25672
.04	79.39	08006	.54	54.96	1.29077
.05	78.98	.10013	.55	54.36	1.32570
.06	78.56	.12022	.56	53.75	1.36156
.07	78.14	.14034	.57	53.14	1.39842
.08	77.72	.16051	.58	52.51	1.43635
.09	77.30	.18073	.59	51.88	1.47543
.10	76.87	.20101	.60	51.25	1.51574
.11	76.44	.22134	.61	50.60	1.55738
.12	76.01	.24175	.62	49.95	1.60044
.13	75.58	.26223	.63	49.29	1.64506
.14	75.14	.28279	.64	48.62	1.69134
.15	74.70	.30344	.65	47.94	1.73945
.16	74.26	.32419	.66	47.25	1.78953
.17	73.82	.34503	.67	46.55	1.84177
.18	73.37	.36596	.68	45.84	1.89637
.19	72.93	.38707	.69	45.11	1.95357
.20	72.47	.40828	.70	44.38	2.01363
.21	72.02	.42962	.71	43.64	2.07665
.22	71.56	.45110	.72	42.87	2.14359
.23	71.10	.47273	.73	42.10	2.21425
.24	70.64	.49453	.74	41.32	2.28930
.25	70.17	.51649	.75	40.52	2.36930
.26	69.71	.53863	.76	39.69	2.45490
.27	69.23	.56097	.77	38.86	2.54668
.28	68.75	.58350	.78	38.00	2.64413
.29	68.27	.60625	.79	37.13	2.75382
.30	67.79	.62922	.80	36.24	2.87129
.31	67.30	.65242	.81	35.32	3.00020
.32	66.82	.67587	.82	34.38	3.14262
.33	66.32	.69955	.83	33.41	3.30114
.34	65.83	.72356	.84	32.41	3.47601
.35	65.33	.74783	.85	31.38	3.66041
.36	64.82	.77241	.86	30.32	3.85107
.37	64.31	.79730	.87	29.22	4.17703
.38	63.80	.82253	.88	28.07	4.46876
.39	63.28	.84812	.89	26.87	4.85871
.40	62.76	.87408	.90	25.62	5.3047
.41	62.24	.90043	.91	24.31	5.8522
.42	61.71	.92720	.92	22.92	6.5394
.43	61.17	.95440	.93	21.44	7.4257
.44	60.64	.98207	.94	19.85	8.5104
.45	60.09	1.01022	.95	18.12	10.2718
.46	59.54	1.03889	.96	16.20	12.7961
.47	58.99	1.06810	.97	14.04	16.9268
.48	58.43	1.09788	.98	11.48	25.2522
.49	57.87	1.12828	.99	8.10	50.2421
			1.00	0.00	=

APÉNDICE II

TABLA C EL PARÁMETRO DE CONCENTRACIÓN (K O %K) CONVERTIDO EN LA LONGITUD DEL VECTOR MEDIO (P1 O r) Y EN DESVIACIÓN ANGULAR (σ O S EN GRADOS).

ko %k	p1 or	σ os	ko %k	p1 or	σ os
0	00000	81.03	3.0	80999	35.32
.1	04984	78.98	3.1	81711	34.66
.2	09850	76.89	3.2	82375	34.02
.3	14634	74.79	3.3	82983	33.42
.4	19810	72.65	3.4	83570	32.84
5	24250	70.53	3.5	84110	32.30
.6	28725	68.41	3.6	84618	31.78
.7	33018	66.31	3.7	85091	31.29
.8	37106	64.26	3.8	85537	30.82
.9	40984	62.25	3.9	85956	30.37
10	44639	60.29	4.0	86352	29.93
11	48070	58.38	4.1	86728	29.52
12	51278	56.56	4.2	87078	29.13
13	54267	54.80	4.3	87414	28.75
14	57042	53.11	4.4	87732	28.38
15	59613	51.49	4.5	88033	28.03
1.6	61990	49.96	4.6	88320	27.69
1.7	64183	48.49	4.7	88593	27.37
1.8	66204	47.11	4.8	88853	27.06
1.9	68056	45.79	4.9	89101	26.75
2.0	69777	44.55	5.0	89338	26.46
2.1	71353	43.37	5.1	89565	26.18
2.2	72803	42.26	5.2	89782	25.90
2.3	74136	41.21	5.3	89990	25.64
2.4	75367	40.22	5.4	90190	25.38
2.5	76500	39.28	5.5	90382	25.13
2.6	77545	38.40	5.6	90568	24.88
2.7	78511	37.56	5.7	90743	24.65
2.8	79404	36.77	5.8	90913	24.43
2.9	80231	36.03	5.9	91078	24.20
3.0	81000	35.34	6.0	91239	23.98
3.1	81711	34.69	6.1	91394	23.78
3.2	82375	34.08	6.2	91546	23.58
3.3	83000	33.51	6.3	91694	23.39
3.4	83570	32.98	6.4	91838	23.21
3.5	84110	32.48	6.5	91979	23.04
3.6	84618	32.01	6.6	92116	22.88
3.7	85091	31.57	6.7	92251	22.73
3.8	85537	31.16	6.8	92382	22.58
3.9	85956	30.77	6.9	92511	22.44
4.0	86352	30.40	7.0	92637	22.31
4.1	86728	30.05	7.1	92761	22.19
4.2	87078	29.72	7.2	92882	22.07
4.3	87414	29.41	7.3	92999	21.96
4.4	87732	29.12	7.4	93114	21.86
4.5	88033	28.84	7.5	93226	21.76
4.6	88320	28.58	7.6	93336	21.67
4.7	88593	28.33	7.7	93443	21.58
4.8	88853	28.10	7.8	93548	21.50
4.9	89101	27.88	7.9	93650	21.42
5.0	89338	27.67	8.0	93750	21.34
5.1	89565	27.48	8.1	93847	21.27
5.2	89782	27.29	8.2	93942	21.20
5.3	89990	27.12	8.3	94035	21.14
5.4	90190	26.96	8.4	94126	21.08
5.5	90382	26.81	8.5	94214	21.02
5.6	90568	26.67	8.6	94300	20.97
5.7	90743	26.53	8.7	94383	20.92
5.8	90913	26.40	8.8	94464	20.87
5.9	91078	26.28	8.9	94542	20.82
6.0	91239	26.16	9.0	94618	20.78
6.1	91394	26.05	9.1	94691	20.74
6.2	91546	25.94	9.2	94762	20.70
6.3	91694	25.84	9.3	94830	20.66
6.4	91838	25.75	9.4	94896	20.62
6.5	91979	25.66	9.5	94960	20.58
6.6	92116	25.58	9.6	95022	20.54
6.7	92251	25.50	9.7	95081	20.50
6.8	92382	25.43	9.8	95139	20.46
6.9	92511	25.36	9.9	95194	20.42
7.0	92637	25.30	10.0	95247	20.38
7.1	92761	25.24	10.1	95298	20.34
7.2	92882	25.18	10.2	95347	20.30
7.3	92999	25.13	10.3	95394	20.26
7.4	93114	25.08	10.4	95439	20.22
7.5	93226	25.03	10.5	95482	20.18
7.6	93336	25.00	10.6	95523	20.14
7.7	93443	24.96	10.7	95562	20.10
7.8	93548	24.92	10.8	95599	20.06
7.9	93650	24.88	10.9	95634	20.02
8.0	93750	24.84	11.0	95667	20.00
8.1	93847	24.81	11.1	95698	19.98
8.2	93942	24.78	11.2	95728	19.96
8.3	94035	24.75	11.3	95756	19.94
8.4	94126	24.72	11.4	95782	19.92
8.5	94214	24.69	11.5	95807	19.90
8.6	94300	24.66	11.6	95830	19.88
8.7	94383	24.63	11.7	95851	19.86
8.8	94464	24.60	11.8	95870	19.84
8.9	94542	24.57	11.9	95888	19.82
9.0	94618	24.54	12.0	95904	19.81
9.1	94691	24.51	12.1	95919	19.80
9.2	94762	24.48	12.2	95932	19.79
9.3	94830	24.45	12.3	95944	19.78
9.4	94896	24.42	12.4	95955	19.77
9.5	94960	24.39	12.5	95964	19.76
9.6	95022	24.36	12.6	95972	19.75
9.7	95081	24.33	12.7	95979	19.74
9.8	95139	24.30	12.8	95985	19.73
9.9	95194	24.27	12.9	95990	19.72
10.0	95247	24.24	13.0	95994	19.71

TABLAS

TABLA D LA DESVIACIÓN ANGULAR (n O S EN GRADOS) CONVERTIDA EN LA LONGITUD DEL VECTOR MEDIO (p l o r) Y EN EL PARÁMETRO DE CONCENTRACIÓN (k o %).

α o s	p l o r	k o %	α o s	p l o r	k o %
0	1.00000	∞	40	.75631	2.423
1	.99985		41	.74397	2.321
2	.99939		42	.73133	2.224
3	.99863		43	.71838	2.133
4	.99756		44	.70513	2.046
5	.99619		45	.69157	1.963
6	.99452		46	.67771	1.884
7	.99254		47	.66355	1.808
8	.99025		48	.64908	1.735
9	.98766		49	.63431	1.665
10	.98477	35.100	50	.61923	1.597
11	.98157	28.300	51	.60385	1.532
12	.97807	23.300	52	.58816	1.468
13	.97426	20.000	53	.57216	1.400
14	.97015	17.000	54	.55587	1.347
15	.96573	15.000	55	.53927	1.288
16	.96101	13.100	56	.52236	1.231
17	.95598	11.860	57	.50515	1.176
18	.95065	10.410	58	.48763	1.121
19	.94502	9.380	59	.46982	1.068
20	.93908	8.490	60	.45169	1.015
21	.93283	7.730	61	.43326	.9634
22	.92628	7.070	62	.41453	.9125
23	.91943	6.500	63	.39549	.8623
24	.91227	6.000	64	.37614	.8128
25	.90481	5.555	65	.35650	.7638
26	.89704	5.165	66	.33654	.7152
27	.88897	4.818	67	.31629	.6671
28	.88059	4.511	68	.29572	.6194
29	.87191	4.233	69	.27486	.5719
30	.86292	3.985	70	.25368	.5246
31	.85363	3.761	71	.23221	.4775
32	.84404	3.557	72	.21043	.4305
33	.83414	3.372	73	.18835	.3835
34	.82393	3.203	74	.16596	.3366
35	.81342	3.048	75	.14326	.2895
36	.80261	2.904	76	.12026	.2422
37	.79149	2.771	77	.09696	.1948
38	.78007	2.647	78	.07335	.1471
39	.76834	2.531	79	.04944	.0990
			80	.02522	.0505
			81	.00070	.0015

TABLA D1 PUNTO DE ESTIMACIÓN DE \bar{x} .

n	r=0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
5	0	0	0	0	0	0	0	0.15	0.67	0.94	1.18	1.41	1.68	2.00	2.44	3.10	4.39	8.33
6	0	0	0	0	0	0	0	0.56	0.83	1.04	1.25	1.48	1.74	2.07	2.51	3.20	4.54	8.66
7	0	0	0	0	0	0	0.38	0.69	0.90	1.10	1.30	1.52	1.78	2.11	2.56	3.27	4.65	8.89
8	0	0	0	0	0	0	0.53	0.76	0.95	1.13	1.33	1.55	1.81	2.15	2.60	3.32	4.73	9.06
9	0	0	0	0	0	0.31	0.61	0.80	0.98	1.16	1.35	1.57	1.84	2.17	2.63	3.36	4.79	9.19
10	0	0	0	0	0	0.42	0.65	0.83	1.00	1.18	1.37	1.59	1.86	2.19	2.66	3.39	4.84	9.30
11	0	0	0	0	0	0.48	0.69	0.85	1.02	1.19	1.38	1.61	1.87	2.21	2.68	3.42	4.89	9.39
12	0	0	0	0	0.23	0.53	0.71	0.87	1.03	1.20	1.40	1.62	1.88	2.22	2.69	3.44	4.92	9.46
13	0	0	0	0	0.32	0.56	0.73	0.88	1.04	1.21	1.41	1.63	1.89	2.23	2.71	3.46	4.95	9.53
14	0	0	0	0	0.37	0.58	0.74	0.89	1.05	1.22	1.41	1.63	1.90	2.24	2.72	3.47	4.96	9.58
15	0	0	0	0	0.41	0.60	0.75	0.90	1.06	1.23	1.42	1.64	1.91	2.25	2.73	3.49	5.00	9.63
20	0	0	0	0.30	0.50	0.65	0.79	0.93	1.09	1.26	1.45	1.67	1.94	2.28	2.76	3.53	5.07	9.79
25	0	0	0	0.38	0.54	0.67	0.81	0.95	1.10	1.27	1.46	1.68	1.95	2.30	2.79	3.56	5.12	9.88
30	0	0	0.22	0.42	0.56	0.69	0.82	0.96	1.11	1.28	1.47	1.69	1.96	2.31	2.80	3.58	5.15	9.95
35	0	0	0.27	0.44	0.57	0.70	0.83	0.97	1.12	1.29	1.48	1.70	1.97	2.32	2.81	3.60	5.17	9.99
40	0	0	0.31	0.45	0.58	0.70	0.83	0.97	1.12	1.29	1.48	1.70	1.98	2.33	2.82	3.61	5.19	10.03
45	0	0.04	0.33	0.46	0.58	0.71	0.84	0.98	1.13	1.30	1.49	1.71	1.98	2.33	2.82	3.62	5.20	10.06
50	0	0.14	0.34	0.47	0.59	0.71	0.84	0.98	1.13	1.30	1.49	1.71	1.98	2.34	2.83	3.62	5.21	10.08
100	0	0.26	0.38	0.49	0.61	0.73	0.86	1.00	1.15	1.31	1.50	1.73	2.00	2.35	2.85	3.65	5.26	10.18
150	0.18	0.28	0.39	0.50	0.62	0.74	0.86	1.00	1.15	1.32	1.51	1.73	2.00	2.36	2.86	3.66	5.27	10.21
200	0.19	0.29	0.40	0.51	0.62	0.74	0.87	1.00	1.15	1.32	1.51	1.73	2.01	2.36	2.86	3.67	5.28	10.22
∞	0.20	0.30	0.41	0.52	0.63	0.75	0.87	1.01	1.16	1.33	1.52	1.74	2.01	2.37	2.87	3.68	5.31	10.27

n=tamaño de la muestra; r=longitud del vector medio de la muestra

TABLA E LA FUNCIÓN DISTRIBUCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN VON MISES. (K ES EL PARÁMETRO DE CONCENTRACIÓN. EL ÁNGULO MEDIO $\theta_0 = 180^\circ$)

	K=0	K=2	K=4	K=6	K=8	K=1.0	K=1.2	K=1.4	K=1.6	K=1.8
0	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
5	.01389	.01126	.00895	.00699	.00536	.00404	.00301	.00221	.00161	.00116
10	.02778	.02254	.01793	.01400	.01074	.00811	.00604	.00444	.00323	.00233
15	.04167	.03385	.02697	.02108	.01620	.01225	.00913	.00672	.00490	.00353
20	.05556	.04522	.03608	.02826	.02175	.01647	.01230	.00907	.00662	.00479
25	.06944	.05665	.04531	.03557	.02744	.02083	.01559	.01153	.00843	.00611
30	.08333	.06816	.05467	.04304	.03329	.02535	.01903	.01411	.01035	.00753
35	.09722	.07978	.06420	.05071	.03936	.03007	.02266	.01686	.01241	.00906
40	.11111	.09152	.07392	.05861	.04567	.03504	.02650	.01981	.01465	.01073
45	.12500	.10338	.08386	.06679	.05228	.04029	.03062	.02299	.01709	.01259
50	.13889	.11540	.09405	.07527	.05921	.04587	.03505	.02547	.01978	.01486
55	.15278	.12757	.10452	.08409	.06653	.05184	.03985	.03028	.02278	.01699
60	.16667	.13992	.11529	.09331	.07428	.05825	.04509	.03450	.02614	.01965
65	.18056	.15246	.12639	.10295	.08251	.06517	.05082	.03919	.02994	.02270
70	.19444	.16520	.13784	.11306	.09128	.07265	.05711	.04442	.03425	.02620
75	.20833	.17815	.14968	.12368	.10064	.08078	.06407	.05030	.03915	.03027
80	.22222	.19132	.16192	.13485	.11066	.08962	.07176	.05690	.04477	.03301
85	.23611	.20471	.17460	.14662	.12139	.09925	.08028	.06436	.05122	.04053
90	.25000	.21834	.18772	.15901	.13269	.10975	.08974	.07277	.05863	.04699
95	.26389	.23222	.20130	.17206	.14522	.12122	.10025	.08228	.06714	.05455
100	.27778	.24633	.21537	.18582	.15844	.13372	.11191	.09302	.07693	.06339
105	.29167	.26069	.22992	.20030	.17260	.14734	.12463	.10514	.08816	.07370
110	.30556	.27529	.24498	.21554	.18774	.16217	.13913	.11876	.10101	.08571
115	.31944	.29014	.26054	.23154	.20392	.17825	.15491	.13405	.11566	.09962
120	.33333	.30522	.27659	.24832	.22114	.19566	.17226	.15112	.13228	.11565
125	.34722	.32053	.29314	.26587	.23944	.21444	.19125	.17009	.15103	.13402
130	.36111	.33606	.31017	.28420	.25882	.23460	.21194	.19106	.17206	.15491
135	.37500	.35180	.32766	.30327	.27926	.25616	.23435	.21408	.19545	.17847
140	.38889	.36774	.34559	.32306	.30073	.27909	.25849	.23918	.22127	.20479
145	.40278	.38385	.36392	.34353	.32319	.30334	.28431	.26633	.24951	.23390
150	.41667	.40013	.38263	.36463	.34656	.32883	.31172	.29544	.28010	.26575
155	.43056	.41655	.40166	.38628	.37077	.35546	.34060	.32638	.31290	.30020
160	.44444	.43309	.42098	.40841	.39570	.38309	.37079	.35897	.34769	.33701
165	.45833	.44973	.44053	.43095	.42122	.41155	.40208	.39294	.38418	.37585
170	.47222	.46644	.46025	.45379	.44722	.44066	.43423	.42800	.42201	.41630
175	.48611	.48321	.48009	.47684	.47353	.47022	.46696	.46381	.46077	.45786

TABLA E (CONTINUACIÓN)

	K=0	K=2	K=4	K=6	K=8	K=1.0	K=1.2	K=1.4	K=1.6	K=1.8
180	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000
185	.51389	.51679	.51991	.52316	.52647	.52978	.53304	.53619	.53923	.54214
190	.52778	.53356	.53975	.54621	.55278	.55934	.56577	.57200	.57799	.58370
195	.54167	.55027	.55947	.56905	.57878	.58845	.59792	.60706	.61582	.62415
200	.55556	.56691	.57902	.59159	.60430	.61691	.62921	.64103	.65231	.66299
205	.56944	.58345	.59834	.61372	.62923	.64454	.65940	.67362	.68710	.69960
210	.58333	.59887	.61737	.63537	.65344	.67117	.68828	.70456	.71990	.73425
215	.59722	.61615	.63608	.65647	.67681	.69666	.71569	.73367	.75049	.76610
220	.61111	.63226	.65441	.67694	.69927	.72091	.74151	.76082	.77873	.79521
225	.62500	.64820	.67234	.69673	.72074	.74384	.76565	.78592	.80455	.82153
230	.63889	.66394	.68983	.71580	.74118	.76540	.78806	.80894	.82794	.84509
235	.65278	.67947	.70686	.73413	.76056	.78556	.80875	.82991	.84897	.86598
240	.66667	.69478	.72341	.75168	.77886	.80434	.82774	.84888	.86772	.88435
245	.68056	.70966	.73946	.76846	.79608	.82175	.84509	.86595	.88434	.90038
250	.69444	.72471	.75502	.78446	.81226	.83783	.86087	.88124	.89899	.91429
255	.70833	.73931	.77008	.79970	.82740	.85266	.87517	.89486	.91184	.92630
260	.72222	.75367	.78483	.81418	.84156	.86628	.88809	.90698	.92307	.93661
265	.73611	.76778	.79870	.82794	.85478	.87878	.89975	.91772	.93286	.94545
270	.75000	.78186	.81228	.84099	.86711	.89025	.91026	.92723	.94137	.95301
275	.76389	.79529	.82540	.85338	.87861	.90075	.91972	.93564	.94878	.95947
280	.77778	.80868	.83808	.86515	.88934	.91038	.92824	.94310	.95523	.96499
285	.79167	.82185	.85032	.87632	.89936	.91922	.93593	.94970	.96085	.96973
290	.80556	.83480	.86216	.88654	.90872	.92735	.94289	.95558	.96575	.97380
295	.81944	.84784	.87361	.89705	.91749	.93483	.94918	.96081	.97006	.97730
300	.83333	.86008	.88471	.90669	.92572	.94175	.95491	.96550	.97388	.98035
305	.84722	.87243	.89548	.91591	.93347	.94816	.96015	.96972	.97722	.98301
310	.86111	.88460	.90595	.92473	.94079	.95413	.96495	.97353	.98022	.98534
315	.87500	.89662	.91614	.93321	.94772	.95971	.96938	.97701	.98291	.98741
320	.88889	.90848	.92608	.94139	.95433	.96496	.97350	.98019	.98535	.98927
325	.90278	.92022	.93580	.94929	.96064	.96993	.97734	.98314	.98759	.99094
330	.91667	.93184	.94533	.95696	.96671	.97465	.98097	.98589	.98965	.99247
335	.93056	.94335	.95469	.96443	.97256	.97917	.98441	.98847	.99157	.99389
340	.94444	.95478	.96392	.97174	.97825	.98353	.98770	.99093	.99336	.99521
345	.95833	.96615	.97303	.97892	.98380	.98775	.99087	.99328	.99510	.99647
350	.97222	.97746	.98207	.98600	.98926	.99189	.99396	.99556	.99677	.99767
355	.98611	.98874	.99105	.99301	.99464	.99596	.99699	.99779	.99831	.99864
360	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

TABLA E (CONTINUACIÓN)

	K = 2.0	K = 2.2	K = 2.4	K = 2.6	K = 2.8	K = 3.0	K = 3.2	K = 3.4	K = 3.6	K = 3.8
0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
5	.00083	.00059	.00041	.00029	.00020	.00014	.00010	.00007	.00005	.00003
10	.00167	.00118	.00084	.00059	.00041	.00029	.00020	.00014	.00010	.00007
15	.00253	.00180	.00127	.00090	.00063	.00044	.00031	.00021	.00015	.00010
20	.00344	.00245	.00174	.00123	.00086	.00060	.00042	.00029	.00020	.00014
25	.00440	.00314	.00223	.00158	.00111	.00078	.00055	.00038	.00027	.00019
30	.00543	.00389	.00278	.00197	.00139	.00098	.00069	.00048	.00034	.00024
35	.00656	.00472	.00338	.00241	.00171	.00121	.00085	.00060	.00042	.00029
40	.00781	.00564	.00406	.00290	.00207	.00147	.00104	.00074	.00052	.00037
45	.00920	.00669	.00483	.00348	.00249	.00178	.00127	.00090	.00064	.00046
50	.01078	.00788	.00574	.00416	.00300	.00216	.00155	.00111	.00079	.00057
55	.01259	.00927	.00679	.00496	.00361	.00262	.00190	.00137	.00099	.00071
60	.01467	.01089	.00805	.00583	.00435	.00319	.00233	.00170	.00124	.00090
65	.01709	.01281	.00956	.00711	.00527	.00390	.00288	.00213	.00157	.00116
70	.01983	.01509	.01138	.00856	.00642	.00481	.00360	.00269	.00201	.00150
75	.02328	.01782	.01360	.01035	.00786	.00596	.00452	.00343	.00260	.00197
80	.02723	.02111	.01631	.01258	.00969	.00746	.00573	.00441	.00339	.00261
85	.03193	.02508	.01965	.01537	.01201	.00938	.00733	.00573	.00448	.00350
90	.03752	.02988	.02376	.01887	.01498	.01189	.00944	.00750	.00596	.0475
95	.04416	.03571	.02882	.02325	.01876	.01514	.01223	.00988	.00800	.00648
100	.05210	.04276	.03506	.02875	.02359	.01936	.01591	.01308	.01077	.00888
105	.06150	.05127	.04273	.03563	.02972	.02482	.02075	.01737	.01456	.01222
110	.07253	.06152	.05212	.04419	.03749	.03185	.02710	.02308	.01968	.01681
115	.08574	.07379	.06355	.05477	.04727	.04084	.03534	.03062	.02657	.02308
120	.10109	.08840	.07736	.06777	.05946	.05223	.04595	.04048	.03571	.03154
125	.11895	.10564	.09391	.08360	.07452	.06652	.05946	.05323	.04771	.04282
130	.13954	.12581	.11356	.10264	.09290	.08421	.07644	.06947	.06322	.05760
135	.16308	.14917	.13682	.12530	.11507	.10583	.09748	.08986	.08294	.07665
140	.18970	.17562	.16335	.15188	.14141	.13183	.12305	.11499	.10758	.10071
145	.21948	.20618	.19393	.18294	.17222	.16259	.15367	.14538	.13767	.13048
150	.25239	.23996	.22841	.21766	.20766	.19832	.18959	.18140	.17371	.16647
155	.28829	.27713	.26668	.25688	.24769	.23903	.23088	.22317	.21586	.20893
160	.32694	.31744	.30848	.30004	.29206	.28450	.27732	.27050	.26399	.25776
165	.36795	.36047	.35339	.34667	.34029	.33421	.32841	.32287	.31755	.31244
170	.41087	.40570	.40079	.39612	.39166	.38740	.38332	.37941	.37563	.37200
175	.45509	.45246	.44994	.44755	.44526	.44306	.44095	.43893	.43697	.43508

TABLA E (CONTINUACIÓN)

	K=4.0	K=4.2	K=4.4	K=4.6	K=4.8	K=5.0	K=5.2	K=5.4	K=5.6	K=5.8
0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
5	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
10	.0005	.0003	.0002	.0001	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
15	.0007	.0005	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001	.0000	.0000
20	.0010	.0007	.0005	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0000	.0000
25	.0013	.0009	.0006	.0004	.0003	.0002	.0001	.0001	.0001	.0000
30	.0018	.0011	.0008	.0005	.0004	.0003	.0002	.0001	.0001	.0001
35	.0021	.0014	.0010	.0007	.0005	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001
40	.0026	.0018	.0013	.0009	.0006	.0004	.0003	.0002	.0001	.0001
45	.0032	.0023	.0016	.0011	.0008	.0006	.0004	.0003	.0002	.0001
50	.0040	.0029	.0021	.0015	.0010	.0007	.0005	.0004	.0003	.0002
55	.0051	.0037	.0027	.0019	.0014	.0010	.0007	.0005	.0004	.0003
60	.0066	.0048	.0035	.0025	.0018	.0013	.0010	.0007	.0005	.0004
65	.0085	.0063	.0046	.0034	.0025	.0018	.0014	.0010	.0007	.0005
70	.00112	.00084	.00062	.00047	.00035	.00026	.00019	.00015	.00011	.00008
75	.00149	.00113	.00086	.00065	.00049	.00037	.00028	.00022	.00016	.00013
80	.00201	.00155	.00119	.00092	.00071	.00055	.00042	.00033	.00025	.00020
85	.00274	.00215	.00168	.00132	.00104	.00082	.00064	.00051	.00040	.00031
90	.00378	.00301	.00240	.00192	.00154	.00123	.00098	.00079	.00063	.00051
95	.00525	.00426	.00345	.00282	.00229	.00187	.00152	.00124	.00102	.00083
100	.00733	.00606	.00501	.00415	.00344	.00286	.00237	.00197	.00164	.00137
105	.01027	.00864	.00727	.00613	.00517	.00437	.00370	.00313	.00265	.00224
110	.01437	.01231	.01055	.00905	.00777	.00668	.00575	.00495	.00426	.00367
115	.02008	.01748	.01524	.01330	.01162	.01016	.00889	.00778	.00682	.00597
120	.02789	.02470	.02189	.01941	.01724	.01531	.01362	.01212	.01079	.00961
125	.03847	.03460	.03114	.02806	.02530	.02284	.02062	.01863	.01685	.01524
130	.05253	.04795	.04382	.04007	.03667	.03358	.03077	.02821	.02588	.02375
135	.07089	.06563	.06081	.05638	.05232	.04857	.04512	.04194	.03900	.03628
140	.09438	.08852	.08309	.07804	.07334	.06897	.06488	.06107	.05751	.05418
145	.12377	.11748	.11159	.10605	.10084	.09594	.09132	.08695	.08283	.07893
150	.15964	.15319	.14708	.14129	.13578	.13055	.12558	.12083	.11631	.11199
155	.20234	.19606	.19006	.18433	.17884	.17358	.16853	.16368	.15902	.15453
160	.25180	.24608	.24059	.23530	.23020	.22528	.22053	.21593	.21146	.20716
165	.30752	.30277	.29818	.29374	.28944	.28527	.28122	.27728	.27344	.26971
170	.36948	.36508	.36177	.35857	.35545	.35241	.34944	.34655	.34372	.34096
175	.43324	.43146	.42973	.42805	.42641	.42481	.42324	.42171	.42021	.41873

TABLA E (CONTINUACIÓN)

	K = 6.0	K = 6.2	K = 6.4	K = 6.6	K = 6.8	K = 7.0	K = 7.2	K = 7.4	K = 7.6	K = 7.8
30	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
35	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
40	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
45	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
50	.0001	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
55	.0002	.0001	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
60	.0003	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
65	.0004	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000
70	.0006	.0005	.0003	.0003	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000
75	.0010	.0007	.0006	.0004	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001
80	.0015	.0012	.0009	.0007	.0006	.0004	.0003	.0003	.0002	.0002
85	.0025	.0020	.0015	.0012	.0010	.0008	.0006	.0005	.0004	.0003
90	.0041	.0033	.0026	.0021	.0017	.0014	.0011	.0009	.0007	.0006
95	.0068	.0056	.0046	.0037	.0031	.0025	.0021	.0017	.0014	.0011
100	.0114	.0095	.0079	.0066	.0055	.0046	.0038	.0032	.0027	.0023
105	.0190	.0181	.0137	.0118	.0099	.0084	.0071	.0061	.0052	.0044
110	.0317	.0274	.0236	.0204	.0176	.0153	.0132	.0114	.0099	.0086
115	.0624	.0490	.0404	.0355	.0312	.0274	.0241	.0212	.0187	.0164
120	.0857	.0754	.0661	.0608	.0543	.0485	.0434	.0388	.0346	.0310
125	.1379	.11249	.1131	.1025	.0929	.0843	.0765	.0694	.0630	.0572
130	.22181	.22003	.1841	.1693	.1556	.1432	.1318	.1213	.1117	.1029
135	.33377	.3144	.2928	.2728	.2543	.2371	.2211	.2063	.1925	.1796
140	.5106	.4814	.4450	.4283	.4041	.3815	.3602	.3402	.3213	.3036
145	.7525	.7175	.6844	.6530	.6233	.5950	.5681	.5426	.5184	.4953
150	.10787	.10382	.10015	.09654	.09308	.08976	.08658	.08353	.08061	.07780
155	.15020	.14604	.14202	.13814	.13440	.13078	.12728	.12390	.12063	.11748
160	.20268	.19893	.19499	.19118	.18744	.18382	.18029	.17686	.17352	.17027
165	.26906	.26251	.25604	.25068	.24535	.24011	.23494	.22985	.22491	.22004
170	.33828	.33561	.33302	.33047	.32798	.32553	.32312	.32078	.31844	.31618
175	.41729	.41588	.41449	.41312	.41178	.41045	.40915	.40787	.40661	.40537

TABLA E (CONTINUACIÓN)

	K = 8.0	K = 8.2	K = 8.4	K = 8.6	K = 8.8	K = 9.0	K = 9.2	K = 9.4	K = 9.6	K = 9.8	K = 10.0
70	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
75	.00001	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
80	.00001	.00001	.00001	.00001	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
85	.00002	.00002	.00002	.00001	.00001	.00001	.00001	.00000	.00000	.00000	.00000
90	.00005	.00004	.00003	.00003	.00002	.00002	.00001	.00001	.00001	.00001	.00001
95	.00009	.00008	.00006	.00005	.00004	.00004	.00003	.00002	.00002	.00002	.00001
100	.00019	.00016	.00013	.00011	.00009	.00008	.00007	.00005	.00005	.00004	.00003
105	.00038	.00032	.00027	.00023	.00020	.00017	.00014	.00012	.00011	.00009	.00008
110	.00074	.00064	.00056	.00048	.00042	.00036	.00032	.00027	.00024	.00021	.00018
115	.00145	.00127	.00112	.00099	.00087	.00077	.00068	.00060	.00053	.00047	.00041
120	.00277	.00248	.00222	.00199	.00178	.00160	.00143	.00128	.00115	.00103	.00092
125	.00519	.00472	.00429	.00390	.00354	.00322	.00293	.00266	.00242	.00221	.00201
130	.00948	.00873	.00805	.00742	.00684	.00631	.00582	.00537	.00495	.00457	.00422
135	.01677	.01566	.01462	.01366	.01276	.01193	.01115	.01042	.00974	.00911	.00852
140	.02869	.02712	.02564	.02425	.02293	.02169	.02052	.01942	.01838	.01740	.01647
145	.04733	.04524	.04325	.04136	.03955	.03783	.03619	.03463	.03314	.03171	.03036
150	.07510	.07251	.07001	.06762	.06531	.06310	.06096	.05891	.05693	.05503	.05319
155	.11440	.11143	.10855	.10576	.10305	.10043	.09789	.09542	.09302	.09069	.08843
160	.16710	.16400	.16099	.15801	.15517	.15236	.14962	.14694	.14433	.14177	.13927
165	.23393	.23107	.22827	.22552	.22283	.22019	.21759	.21504	.21253	.21007	.20765
170	.31391	.31170	.30952	.30738	.30527	.30319	.30115	.29913	.29714	.29517	.29323
175	.40414	.40293	.40174	.40056	.39940	.39825	.39712	.39600	.39489	.39380	.39271

TABLA F FUNCIONES BESSEL

	$J_0(z)$	$J_1(z)$	$J_2(z)$	$J_3(z)$
0.0	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.1	0.99750	0.04994	0.00125	0.00002
0.2	0.99002	0.09950	0.00496	0.00016
0.3	0.97763	0.14832	0.01117	0.00056
0.4	0.96040	0.19603	0.01973	0.00132
0.5	0.93847	0.24227	0.03060	0.00256
0.6	0.91200	0.28670	0.04367	0.00440
0.7	0.88120	0.32900	0.05879	0.00693
0.8	0.84629	0.36884	0.07582	0.01025
0.9	0.80752	0.40595	0.09459	0.01443
1.0	0.76520	0.44005	0.11490	0.01956
1.5	0.51183	0.55794	0.23209	0.06096
2.0	0.22389	0.57672	0.35283	0.12894
2.5	-0.04838	0.49709	0.44606	0.21660
3.0	-0.28005	0.33906	0.48609	0.30906
3.5	-0.38013	0.13738	0.45863	0.38877
4.0	-0.39715	-0.06604	0.36413	0.43017
4.5	-0.32054	-0.23106	0.21785	0.42470
5.0	-0.17760	-0.32758	0.04657	0.36483
	$I_0(z)$	$I_1(z)$	$I_2(z)$	$I_3(z)$
0.0	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.1	1.00250	0.05006	0.00125	0.00002
0.2	1.01003	0.10050	0.00502	0.00017
0.3	1.02263	0.15169	0.01133	0.00057
0.4	1.04040	0.20403	0.02027	0.00135
0.5	1.06348	0.25789	0.03191	0.00264
0.6	1.09204	0.31370	0.04637	0.00460
0.7	1.12630	0.37188	0.06379	0.00737
0.8	1.16652	0.43287	0.08436	0.01110
0.9	1.21299	0.49713	0.10828	0.01587
1.0	1.26607	0.56516	0.13575	0.02217
1.5	1.64672	0.98167	0.33783	0.08079
2.0	2.27959	1.59064	0.68895	0.21274
2.5	3.28984	2.51672	1.27647	0.47437
3.0	4.88079	3.95337	2.24521	0.95976
3.5	7.37620	6.20584	3.83201	1.62640
4.0	11.30182	9.75946	6.42219	3.33727
4.5	17.48117	15.38922	10.84152	5.93009
5.0	27.23987	24.33564	17.50561	10.33115

TABLA G. RAÍCES DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD PARA EL TRAZO ARQUEABAL DE LA DISTRIBUCIÓN CIRCULAR NORMAL

$$v(x) = \sqrt{\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\pi}}$$

k	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°	k	
00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	00	
01	0.580	1.049	1.047	1.085	1.074	1.038	1.031	1.024	1.016	1.007	0.990	0.981	0.974	0.957	0.961	0.956	0.953	0.951	0.950	01	
02	1.100	1.098	1.093	1.085	1.074	1.046	1.040	1.026	1.016	1.012	0.978	0.962	0.947	0.933	0.922	0.912	0.906	0.902	0.900	02	
03	1.149	1.149	1.139	1.136	1.131	1.115	1.109	1.099	1.066	1.041	1.015	0.989	0.963	0.939	0.917	0.898	0.882	0.868	0.859	0.853	03
04	1.197	1.194	1.183	1.180	1.173	1.158	1.099	1.056	1.015	0.940	0.947	0.916	0.887	0.862	0.841	0.824	0.812	0.802	0.803	04	
05	1.245	1.240	1.226	1.204	1.200	1.185	1.169	1.068	0.945	0.908	0.864	0.824	0.789	0.760	0.738	0.722	0.712	0.712	0.709	05	
06	1.292	1.286	1.269	1.241	1.230	1.216	1.180	1.132	1.062	1.001	0.942	0.887	0.836	0.791	0.752	0.721	0.698	0.678	0.668	06	
07	1.337	1.330	1.309	1.278	1.258	1.237	1.189	1.137	1.065	0.992	0.926	0.864	0.804	0.758	0.716	0.682	0.655	0.624	0.621	07	
08	1.381	1.373	1.348	1.309	1.258	1.197	1.131	1.105	0.982	0.908	0.840	0.778	0.725	0.680	0.643	0.615	0.585	0.583	0.579	08	
09	1.424	1.414	1.385	1.341	1.282	1.215	1.141	1.054	0.969	0.898	0.815	0.749	0.692	0.644	0.606	0.576	0.556	0.549	0.539	09	
10	1.465	1.454	1.422	1.370	1.255	1.171	1.084	0.995	0.908	0.820	0.739	0.660	0.610	0.570	0.539	0.518	0.505	0.501	0.501	10	
11	1.505	1.493	1.460	1.408	1.253	1.171	1.084	0.993	0.904	0.817	0.733	0.650	0.600	0.568	0.535	0.504	0.482	0.469	0.465	11	
12	1.545	1.529	1.496	1.443	1.244	1.164	1.076	0.985	0.894	0.807	0.721	0.637	0.586	0.553	0.504	0.470	0.448	0.435	0.431	12	
13	1.580	1.565	1.530	1.480	1.241	1.164	1.076	0.985	0.894	0.807	0.721	0.637	0.586	0.553	0.504	0.470	0.448	0.435	0.431	13	
14	1.616	1.599	1.560	1.471	1.232	1.158	1.070	0.979	0.888	0.799	0.714	0.630	0.579	0.546	0.512	0.469	0.438	0.416	0.403	14	
15	1.650	1.631	1.577	1.493	1.384	1.253	1.174	1.084	0.993	0.904	0.817	0.733	0.682	0.649	0.615	0.481	0.439	0.407	0.385	0.372	15
16	1.682	1.662	1.603	1.511	1.395	1.264	1.184	1.094	0.999	0.910	0.821	0.737	0.686	0.653	0.619	0.485	0.443	0.410	0.378	0.356	16
17	1.714	1.692	1.628	1.529	1.405	1.265	1.184	1.094	0.999	0.910	0.821	0.737	0.686	0.653	0.619	0.485	0.443	0.410	0.378	0.356	17
18	1.744	1.720	1.652	1.546	1.413	1.264	1.184	1.094	0.999	0.910	0.821	0.737	0.686	0.653	0.619	0.485	0.443	0.410	0.378	0.356	18
19	1.773	1.747	1.674	1.561	1.419	1.263	1.184	1.094	0.999	0.910	0.821	0.737	0.686	0.653	0.619	0.485	0.443	0.410	0.378	0.356	19
20	1.800	1.773	1.695	1.575	1.425	1.260	1.182	0.912	0.788	0.642	0.557	0.470	0.402	0.348	0.308	0.278	0.259	0.247	0.244	20	
21	1.827	1.798	1.715	1.590	1.432	1.251	1.096	0.894	0.747	0.617	0.509	0.423	0.356	0.304	0.266	0.238	0.219	0.209	0.205	21	
22	1.853	1.822	1.734	1.609	1.435	1.245	1.096	0.893	0.726	0.594	0.487	0.401	0.334	0.284	0.246	0.220	0.202	0.192	0.188	22	
23	1.877	1.845	1.752	1.626	1.436	1.238	1.083	0.863	0.705	0.573	0.466	0.380	0.314	0.265	0.228	0.203	0.185	0.176	0.172	23	
24	1.901	1.869	1.769	1.643	1.436	1.231	1.080	0.845	0.685	0.551	0.444	0.360	0.295	0.247	0.212	0.187	0.170	0.161	0.158	24	
25	1.924	1.888	1.785	1.659	1.436	1.223	1.016	0.828	0.665	0.531	0.423	0.340	0.277	0.230	0.196	0.172	0.156	0.147	0.145	25	
26	1.948	1.900	1.800	1.674	1.435	1.215	1.002	0.810	0.645	0.510	0.404	0.322	0.260	0.214	0.181	0.158	0.143	0.135	0.132	26	
27	1.969	1.923	1.824	1.698	1.433	1.206	0.968	0.792	0.625	0.490	0.385	0.304	0.244	0.198	0.168	0.146	0.132	0.124	0.121	27	
28	1.989	1.943	1.844	1.654	1.431	1.197	0.973	0.774	0.606	0.471	0.366	0.287	0.228	0.186	0.155	0.134	0.121	0.113	0.111	28	
29	2.009	1.965	1.864	1.654	1.431	1.197	0.973	0.774	0.606	0.471	0.366	0.287	0.228	0.186	0.155	0.134	0.121	0.113	0.111	29	
30	2.029	1.983	1.883	1.659	1.428	1.187	0.988	0.758	0.587	0.453	0.349	0.271	0.214	0.173	0.143	0.123	0.111	0.103	0.102	30	
31	2.048	2.000	1.895	1.664	1.425	1.187	0.993	0.758	0.587	0.453	0.349	0.271	0.214	0.173	0.143	0.123	0.111	0.103	0.102	31	
32	2.066	2.016	1.876	1.667	1.421	1.186	0.993	0.758	0.587	0.453	0.349	0.271	0.214	0.173	0.143	0.123	0.111	0.103	0.102	32	
33	2.084	2.032	1.867	1.671	1.417	1.185	0.988	0.757	0.586	0.453	0.349	0.271	0.214	0.173	0.143	0.123	0.111	0.103	0.102	33	
34	2.102	2.048	1.867	1.673	1.417	1.185	0.988	0.757	0.586	0.453	0.349	0.271	0.214	0.173	0.143	0.123	0.111	0.103	0.102	34	
35	2.119	2.063	1.906	1.676	1.406	1.184	0.983	0.757	0.586	0.453	0.349	0.271	0.214	0.173	0.143	0.123	0.111	0.103	0.102	35	
36	2.135	2.078	1.916	1.678	1.404	1.183	0.983	0.757	0.586	0.453	0.349	0.271	0.214	0.173	0.143	0.123	0.111	0.103	0.102	36	
37	2.151	2.092	1.924	1.679	1.396	1.181	0.983	0.757	0.586	0.453	0.349	0.271	0.214	0.173	0.143	0.123	0.111	0.103	0.102	37	
38	2.167	2.106	1.933	1.680	1.390	1.180	0.979	0.757	0.586	0.453	0.349	0.271	0.214	0.173	0.143	0.123	0.111	0.103	0.102	38	
39	2.183	2.119	1.941	1.681	1.383	1.178	0.979	0.757	0.586	0.453	0.349	0.271	0.214	0.173	0.143	0.123	0.111	0.103	0.102	39	
40	2.198	2.132	1.944	1.681	1.377	1.176	0.980	0.758	0.587	0.453	0.349	0.271	0.214	0.173	0.143	0.123	0.111	0.103	0.102	40	

TABLA H DIFERENCIAS DE PROBABILIDAD DE LA DISTRIBUCIÓN CIRCULAR NORMAL PARA 12 ÁREAS, DE 30°.

K	MEDIA	± 30°	± 60°	± 90°	± 120°	± 150°	± 180°
0.0	.08333	.08333	.08333	.08333	.08333	.08333	.08333
0.1	.09178	.09056	.08735	.08314	.07912	.07630	.07530
0.2	.10054	.09793	.09111	.08255	.07478	.06953	.06770
0.3	.10962	.10539	.09458	.08158	.07031	.06304	.06058
0.4	.11895	.11286	.09774	.08024	.06581	.05690	.05394
0.5	.12846	.12032	.10054	.07858	.06133	.05110	.04780
0.6	.13810	.12768	.10296	.07662	.05690	.04570	.04217
0.7	.14782	.13491	.10501	.07440	.05256	.04069	.03704
0.8	.15755	.14196	.10666	.07196	.04837	.03608	.03239
0.9	.16726	.14680	.10793	.06933	.04434	.03186	.02822
1.0	.17690	.15539	.10882	.06656	.04049	.02804	.02449
1.1	.18644	.16171	.10934	.06369	.03686	.02459	.02118
1.2	.19584	.16772	.10953	.07076	.03345	.02149	.01826
1.3	.20507	.17345	.10938	.05781	.03026	.01872	.01569
1.4	.21413	.17885	.10895	.05484	.02730	.01627	.01344
1.5	.22298	.18395	.10824	.05190	.02457	.01410	.01149
1.6	.23163	.18874	.10729	.04901	.02206	.01219	.00979
1.7	.24007	.19320	.10613	.04617	.01978	.01052	.00833
1.8	.24829	.19738	.10476	.04344	.01768	.00906	.00707
1.9	.25630	.20127	.10324	.04078	.01578	.00778	.00599
2.0	.26409	.20487	.10158	.03822	.01407	.00668	.00508
2.1	.27167	.20822	.09979	.03578	.01252	.00572	.00427
2.2	.27905	.21130	.09790	.03345	.01113	.00489	.00360
2.3	.28623	.21415	.09592	.03124	.00988	.00418	.00303
2.4	.29322	.21677	.09388	.02914	.00876	.00356	.00255
2.5	.30003	.21917	.09179	.02715	.00776	.00304	.00214
2.6	.30666	.22138	.08966	.02528	.00687	.00258	.00179
2.7	.31312	.22328	.08752	.02352	.00607	.00220	.00150
2.8	.31942	.22522	.08535	.02186	.00536	.00187	.00126
2.9	.32557	.22688	.08318	.02031	.00474	.00158	.00105
3.0	.33157	.22838	.08100	.01886	.00418	.00135	.00088
3.1	.33744	.22974	.07884	.01750	.00369	.00114	.00073
3.2	.34317	.23096	.07670	.01624	.00325	.00096	.00061
3.3	.34878	.23204	.07458	.01505	.00286	.00082	.00051
3.4	.35427	.23301	.07249	.01394	.00252	.00069	.00043
3.5	.35964	.23388	.07042	.01292	.00222	.00058	.00036
3.6	.36490	.23460	.06839	.01196	.00196	.00049	.00030
3.7	.37006	.23524	.06639	.01107	.00172	.00042	.00025
3.8	.37513	.23579	.06442	.01026	.00151	.00035	.00020
3.9	.38009	.23625	.06251	.00949	.00133	.00030	.00017
4.0	.38497	.23662	.06063	.00877	.00117	.00025	.00014
4.1	.38978	.23662	.05879	.00812	.00102	.00021	.00012
4.2	.39446	.23714	.05700	.00750	.00090	.00018	.00010

TABLA I MUESTRA LOS VALORES DE F(α ;K,0).

Grados	K=0	K=2	K=4	K=6	K=8	K=10	K=12	K=14	K=16	K=18
0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0-00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
5	.01389	.01326	.00895	.00699	.00536	.00404	.00301	.00221	.00161	.00116
10	.02778	.02254	.01793	.01400	.01074	.00811	.00604	.00444	.00323	.00233
15	.04167	.03385	.02697	.00108	.01620	.01225	.00913	.00672	.00490	.00353
20	.05556	.04522	.03608	.02826	.02175	.01647	.01230	.00907	.00662	.00479
25	.06944	.05665	.04531	.03557	.02744	.02083	.01559	.01153	.00843	.00611
30	.08333	.06816	.05467	.04304	.03329	.02535	.01903	.01411	.01035	.00753
35	.09722	.07978	.06420	.05071	.03936	.03007	.02296	.03686	.01241	.00906
40	.11111	.09152	.07392	.05881	.04567	.03504	.02650	.01981	.01465	.01073
45	.12500	.10338	.08386	.06679	.05228	.04029	.03062	.02299	.01709	.01259
50	.13889	.11540	.09405	.07527	.05921	.04587	.03505	.02547	.01978	.01468
55	.15278	.12757	.10452	.08409	.06653	.05184	.03985	.03028	.02278	.01699
60	.16667	.13992	.11529	.09331	.07428	.05825	.04509	.03450	.02614	.01965
65	.18056	.15246	.12639	.1095	.08251	.06517	.05082	.03919	.02994	.02270
70	.19444	.16520	.13184	.11306	.09118	.07265	.05711	.04442	.03425	.02620
75	.20833	.17815	.14968	.12368	.10064	.08078	.06407	.05030	.03915	.03027
80	.22222	.19132	.16192	.13485	.11066	.08962	.07176	.05690	.04477	.03501
85	.23611	.20471	.17460	.14662	.12139	.09925	.08028	.06436	.05122	.04053
90	.25000	.21834	.18772	.15901	.13289	.10975	.08974	.07277	.05863	.04699
95	.26389	.23222	.20130	.17206	.14522	.12122	.10025	.08228	.06714	.05455
100	.27778	.24633	.21537	.18582	.15844	.13372	.11191	.09302	.07693	.06339
105	.29167	.26069	.22992	.20030	.17260	.14734	.12483	.10514	.08816	.07370
110	.30556	.27529	.24498	.21554	.18774	.16217	.13913	.11876	.10101	.08571
115	.31944	.29014	.26054	.23154	.20392	.17825	.15491	.13405	.11566	.09962
120	.33333	.30522	.27659	.24832	.22114	.19566	.17226	.15112	.13228	.11565
125	.34722	.32053	.29314	.26587	.23944	.21444	.19125	.17009	.15103	.13402
130	.36111	.33606	.31017	.28420	.25882	.23460	.21164	.19106	.17208	.15491
135	.37500	.35180	.32766	.30327	.27926	.25616	.23435	.21408	.19545	.17847
140	.38889	.36774	.34559	.32306	.30073	.27909	.25849	.23918	.22127	.20479
145	.40278	.38385	.36392	.34353	.32319	.30334	.28431	.26633	.24951	.23390
150	.41667	.40013	.38263	.36483	.34656	.32883	.31172	.29544	.28010	.20020
155	.43056	.41855	.40166	.38628	.37077	.35546	.34060	.32638	.31290	.30020
160	.44444	.43309	.42098	.40841	.39570	.38309	.37079	.35897	.34769	.33761
165	.45833	.44973	.44053	.43095	.42122	.41155	.40208	.39294	.38418	.37585
170	.47222	.46644	.46025	.45379	.44722	.44066	.43423	.42800	.42201	.41630
175	.48611	.48321	.48009	.47684	.47353	.47022	.46696	.46381	.46077	.45786
180	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000

TABLA I (CONTINUACIÓN)

Grados	K=2.0	K=2.2	K=2.4	K=2.6	K=2.8	K=3.0	K=3.2	K=3.4	K=3.6	K=3.8
0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
5	.00083	.00059	.00041	.00029	.00020	.00014	.00030	.00017	.00005	.00003
10	.00167	.00138	.00084	.00059	.00041	.00029	.00020	.00014	.00010	.00007
15	.00253	.00180	.00327	.00090	.00063	.00044	.00031	.00021	.00015	.00010
20	.00344	.00245	.00174	.00123	.00086	.00060	.00042	.00029	.00020	.00014
25	.00440	.00314	.00223	.00159	.00111	.00085	.00038	.00027	.00019	.00038
30	.00543	.00389	.00278	.00197	.00139	.00098	.00069	.00048	.00034	.00038
35	.00656	.00472	.00338	.00241	.00171	.00121	.00085	.00060	.00042	.00029
40	.00781	.00564	.00406	.00290	.00207	.00147	.00104	.00074	.00052	.00037
45	.00920	.00669	.00483	.00348	.00249	.00178	.00127	.00090	.00064	.00046
50	.01071	.00788	.00574	.00416	.00300	.00226	.00155	.00109	.00067	.00046
55	.01259	.00927	.00679	.00496	.00361	.00262	.00190	.00137	.00089	.00071
60	.01467	.01089	.00805	.00593	.00435	.00319	.00233	.00170	.00124	.00090
65	.01709	.01281	.00956	.00711	.00527	.00390	.00288	.00213	.00157	.00118
70	.01993	.01509	.01138	.00856	.00642	.00481	.00360	.00259	.00201	.00150
75	.02328	.01782	.01360	.01035	.00786	.00596	.00452	.00343	.00260	.00197
80	.02723	.02111	.01631	.01258	.00969	.00746	.00573	.00441	.00339	.00261
85	.03193	.02508	.01965	.01537	.01201	.00938	.00733	.00573	.00448	.00350
90	.03752	.02968	.02376	.01887	.01498	.01189	.00944	.00750	.00596	.00475
95	.04418	.03571	.02882	.02325	.01876	.01514	.01223	.00988	.00800	.00648
100	.05210	.04276	.03506	.02875	.02359	.01936	.01591	.01308	.01077	.00888
105	.06150	.05127	.04273	.03563	.02972	.02482	.02075	.01737	.01456	.01222
110	.07263	.06152	.05212	.04419	.03749	.03185	.02710	.02308	.01968	.01697
150	.08574	.07379	.06355	.05477	.04727	.04084	.03534	.03062	.02657	.02308
120	.10109	.08840	.07736	.06777	.05946	.05223	.04595	.04048	.03571	.03154
125	.11895	.10564	.09391	.08360	.07452	.06652	.05945	.05323	.04771	.04282
130	.13954	.12581	.11356	.10264	.09290	.08421	.07644	.06947	.06325	.05750
135	.16308	.14917	.13662	.12530	.11507	.10583	.09748	.08986	.08294	.07665
140	.18970	.17592	.16335	.15188	.14141	.13183	.12305	.11499	.10756	.10071
145	.21848	.20618	.19393	.18264	.17222	.16259	.15367	.14538	.13767	.13048
150	.25239	.23996	.22841	.21766	.20766	.19832	.18959	.18140	.17371	.16647
155	.28829	.27713	.26668	.25688	.24769	.23903	.23088	.22317	.21586	.20893
160	.32694	.31744	.30848	.30004	.29206	.28450	.27732	.27050	.26399	.25776
165	.36795	.36047	.35339	.34667	.34029	.33421	.32841	.32287	.31755	.31244
170	.41087	.40570	.40079	.39612	.39166	.38740	.38332	.37941	.37563	.37200
175	.45509	.45246	.44994	.44755	.44526	.44306	.44095	.43893	.43697	.43508
180	.50000	.50000	.50000	.500000	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000

TABLA I (CONTINUACIÓN)

Grados	K=4.0	K=4.2	K=4.4	K=4.6	K=4.8	K=5.0	K=5.2	K=5.4	K=5.6	K=5.8
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	.0002	.0002	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
10	.0005	.0003	.0002	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
15	.0007	.0005	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001	.0000	.0000
20	.0010	.0007	.0005	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0000	.0000
25	.0013	.0006	.0003	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000
30	.0016	.0011	.0008	.0005	.0004	.0003	.0002	.0001	.0001	.0001
35	.0021	.0014	.0010	.0007	.0005	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001
40	.0026	.0018	.0013	.0009	.0006	.0004	.0003	.0002	.0001	.0001
45	.0032	.0023	.0016	.0008	.0006	.0004	.0003	.0002	.0002	.0001
50	.0040	.0029	.0021	.0015	.0010	.0007	.0005	.0004	.0003	.0001
55	.0051	.0037	.0027	.0019	.0014	.0010	.0007	.0005	.0004	.0003
60	.0066	.0048	.0035	.0025	.0018	.0013	.0010	.0007	.0005	.0004
65	.0085	.0063	.0046	.0034	.0025	.0018	.0014	.0010	.0007	.0005
70	.0112	.0084	.0062	.0047	.0035	.0026	.0019	.0015	.0011	.0008
75	.0149	.0113	.0086	.0065	.0049	.0037	.0028	.0022	.0016	.0013
80	.0201	.0156	.0119	.0092	.0071	.0055	.0042	.0033	.0025	.0019
85	.0274	.0215	.0168	.0132	.0104	.0082	.0064	.0051	.0040	.0031
90	.0378	.0301	.0240	.0192	.0154	.0123	.0098	.0079	.0063	.0051
95	.0525	.0426	.0346	.0282	.0229	.0187	.0152	.0124	.0102	.0083
100	.0733	.0606	.0501	.0415	.0344	.0296	.0237	.0197	.0164	.0137
105	.1027	.0864	.0727	.0613	.0517	.0437	.0370	.0313	.0265	.0224
110	.1437	.1231	.1055	.0905	.0777	.0668	.0575	.0495	.0426	.0367
115	.2008	.1748	.1524	.1330	.1162	.1016	.0889	.0778	.0682	.0597
120	.2789	.2470	.2189	.1941	.1724	.1531	.1362	.1212	.1079	.0961
125	.3847	.3460	.3114	.2806	.2530	.2284	.2062	.1863	.1685	.1524
130	.5253	.4795	.4482	.4207	.3967	.3758	.3577	.3421	.3281	.3154
135	.6653	.6081	.5638	.5232	.4857	.4512	.4194	.3900	.3628	.3376
140	.8438	.7852	.7409	.7004	.6634	.6297	.5988	.5704	.5441	.5197
145	1.1277	1.1159	1.1055	1.0965	1.0884	1.0812	1.0748	1.0691	1.0641	1.0597
150	1.5564	1.5319	1.4708	1.4129	1.3578	1.3055	1.2558	1.2083	1.1631	1.1199
155	2.0234	1.9606	1.9006	1.8433	1.7884	1.7358	1.6853	1.6368	1.5902	1.5453
160	2.5180	2.4608	2.4059	2.3530	2.3020	2.2528	2.2053	2.1593	2.1148	2.0716
165	3.0752	3.0277	2.9818	2.9374	2.8944	2.8527	2.8122	2.7728	2.7344	2.6971
170	3.6948	3.6508	3.6177	3.5857	3.5545	3.5241	3.4944	3.4655	3.4372	3.4096
175	4.3324	4.3146	4.2973	4.2805	4.2641	4.2481	4.2421	4.2361	4.2301	4.1873
180	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000

TABLA I (CONTINUACIÓN)

	K=6.0	K=6.2	K=6.4	K=6.6	K=6.8	K=7.0	K=7.2	K=7.4	K=7.6	K=7.8
30	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
35	.00001	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
40	.00001	.00001	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
45	.00001	.00001	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
50	.00001	.00001	.00001	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
55	.00002	.00001	.00001	.00001	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
60	.00003	.00002	.00001	.00001	.00001	.00001	.00000	.00000	.00000	.00000
65	.00004	.00003	.00002	.00002	.00001	.00001	.00001	.00000	.00000	.00000
70	.00006	.00005	.00003	.00003	.00002	.00001	.00001	.00001	.00001	.00000
75	.00010	.00007	.00006	.00004	.00003	.00002	.00002	.00001	.00001	.00001
80	.00015	.00012	.00009	.00007	.00006	.00003	.00003	.00003	.00002	.00002
85	.00025	.00020	.00015	.00012	.00010	.00008	.00006	.00005	.00004	.00003
90	.00041	.00033	.00016	.00021	.00017	.00014	.00009	.00009	.00007	.00006
95	.00068	.00056	.00046	.00037	.00031	.00025	.00021	.00017	.00014	.00011
100	.00114	.00095	.00079	.00066	.00055	.00045	.00038	.00032	.00027	.00023
105	.00190	.00161	.00137	.00116	.00099	.00084	.00071	.00061	.00052	.00044
110	.00317	.00274	.00236	.00204	.00176	.00153	.00132	.00114	.00099	.00086
115	.00524	.00460	.00404	.00355	.00324	.00241	.00212	.00187	.00164	.00164
220	.010857	.00764	.00681	.00608	.00543	.00485	.00434	.00388	.00346	.00310
320	.01379	.01249	.01131	.01025	.00929	.00843	.00765	.00694	.00630	.00572
135	.02181	.02003	.01841	.01693	.01556	.01432	.01318	.01213	.01117	.01029
135	.03377	.03144	.02918	.02728	.02543	.02371	.02211	.02063	.01925	.01796
140	.05106-	.04814	.04540	.04283	.04041	.03815	.03602	.03402	.03213	.03036
145	.07525	.07175	.06844	.06530	.06233	.05950	.05681	.05416	.05184	.04953
150	.10787	.10392	.09954	.09508	.08976	.08658	.08353	.08061	.07780	.00000
155	.15020	.14604	.14202	.13814	.13440	.13078	.12728	.12390	.12063	.11746
160	.20298	.19893	.19499	.19116	.18744	.18382	.18029	.17686	.17352	.17027
165	.26606	.26251	.25904	.25566	.25235	.24911	.24594	.24285	.23981	.23684
170	.33826	.33561	.33302	.33047	.32798	.32553	.32312	.32076	.31844	.31616
175	.41729	.41588	.41449	.41312	.41178	.41045	.40915	.40787	.40661	.40537
180	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000

TABLA (CONTINUACIÓN)

Grados	K=8.0	K=8.2	K=8.4	K=8.6	K=8.8	K=9.0	K=9.2	K=9.4	K=9.6	K=9.8	K=10.0
70	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
75	.00001	0.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
80	.00001	.00001	.00001	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
85	.00002	.00002	.00002	.00001	.00001	.00001	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
90	.00005	.00004	.00003	.00003	.00002	.00002	.00001	.00001	.00001	.00000	.00000
95	.00009	.00008	.00006	.00004	.00004	.00004	.00003	.00002	.00002	.00002	.00001
100	.00019	.00016	.00013	.00009	.00009	.00007	.00005	.00005	.00004	.00003	.0000
105	.00038	.00032	.00027	.00023	.00020	.00017	.00014	.00012	.00011	.00009	.00008
110	.00074	.00064	.00056	.00048	.00042	.00035	.00032	.00027	.00024	.00021	.00018
115	.00145	.00127	.00112	.00099	.00087	.00077	.00068	.00060	.00053	.00047	.00040
120	.00277	.00248	.00222	.00199	.00178	.00160	.00143	.00128	.00115	.00103	.00092
125	.00519	.00472	.00429	.00390	.00354	.00322	.00293	.00266	.00242	.00221	.00201
130	.00948	.00873	.00805	.00742	.00684	.00631	.00582	.00537	.00495	.00457	.00422
135	.01677	.01566	.01462	.00356	.01276	.01193	.01115	.01042	.00974	.00911	.00852
140	.02869	.02712	.02564	.02425	.02293	.02169	.02052	.01942	.01838	.01740	.01647
145	.04733	.04524	.04325	.04136	.03955	.03783	.03619	.03463	.03314	.03171	.03036
150	.07510	.07251	.07001	.06762	.06531	.06310	.06096	.05891	.05693	.05503	.05319
155	.11440	.10855	.10285	.10726	.10305	.10043	.09789	.09542	.09302	.09069	.08843
160	.16710	.16400	.16099	.15804	.15517	.15236	.14962	.14694	.14433	.14177	.13927
165	.23393	.23107	.22827	.22552	.22283	.22019	.21759	.21504	.21253	.21007	.20765
170	.31391	.31170	.30952	.30738	.30527	.30319	.30115	.29913	.29714	.29517	.29323
175	.40414	.40283	.40174	.40056	.39940	.39825	.39712	.39600	.39489	.39380	.39271
180	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000	.50000