Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

DEMOSTRACIÓN FORMAL POR ETAPAS DE LA FÓRMULA

$$\bigtimes_{i\in I} A^{B_i} \sim A^{\bigcup_{i\in I}\{i\}\times B_i}$$

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MATEMÁTICO

P R E S E N T A

OSVALDO DE LA PEÑA RODRÍGUEZ

Director: Dr. Gonzalo Zubieta Russi

México D.F. 1997

31

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNOMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "DEMOSTRACION FORMAL POR ETAPAS DE LA FORMULA $\underset{i\in I}{\times} A^{B_i} \sim A^{\bigcup_{i\in I}\{i\}\times B_i}$"

realizado por OSVALDO DE LA PEÑA RODRIGUEZ .

con número de cuenta 9052396-4 , pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	MAT. GONZALO ZUBIETA RUSSI
Propietario	M. en C. CARLOS TORRES ALCARAZ
Propietario	M. en C. RAFAEL ROJAS BARBACHANO
Suplente	M. en C. CARMEN ROCIO VITE GONZALEZ
Suplente	M. en I. de O. NORMA ELVIRA PERALTA MARQUEZ

Consejo Departamental de Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A MI MADRE :

Quien con tanto esfuerzo me brindó su apoyo y cariño para salir adelante en mi carrera.

A MIS TÍOS :

Quienes me brindaron apoyo con sus consejos.

A MIS DEMÁS FAMILIARES.

AGRADECIMIENTOS :

Mi más sincero agradecimiento al profesor Gonzálo Zubieta Russi, que bajo su dirección se elaboró y desarrolló el presente trabajo de tesis, por su gran ayuda y sus valiosos consejos que me fueron proporcionados durante la realización del mismo.

Ante la imposibilidad de nombrar a todas aquellas personas que hicieron posible la elaboración de este trabajo de tesis, además, de que colaboraron directa e indirectamente durante la realización de mi carrera, quiero agradecer o profesores y compañeros por su apoyo.

DEMOSTRACIÓN FORMAL POR

ETAPAS DE LA FÓRMULA

$$\bigtimes_{i\in I} A^{B_i} \sim A^{\bigcup_{i\in I}\{i\}\times B_i}$$

PRÓLOGO

El propósito esencial de esta tesis es el de presentar los principales temas de la teoría de conjuntos e ilustrar la utilidad de la materia a través de una amplia variedad de aplicaciones. Está concebida de tal manera que permite ser utilizada en diferentes cursos. Además, se ocupa del empleo sistemático del raciocinio.

El estudio de los términos lógicos constituye un excelente medio para lograr la finalidad perseguida, y a ellas se ha prestado la debida atención que va dirigida a estudiantes de primeros cursos de lógica formal y de teoría de conjuntos.

En el contenido de dicha tesis se presenta la teoría de la lógica formal, donde se muestra a través de ejemplos comunes los patrones de inferencia que se utilizan más adelante; tales ejemplos comunes, basados en conceptos de la vida cotidiana, son los más apropiados, ya que su dificultad es más bien de orden lógico, por lo que permiten concentrarse en el aspecto lógico exclusivamente. Los ejemplos sobre veraces y mitómanos tienen, además, la virtud de que existe una manera uniforme de demostrarlos. Dicha uniformidad consiste en que cada paso determina, dentro de cierto margen de libertad, cuál es el paso que sigue. Además, se presenta el álgebra de conjuntos donde las fórmulas se demuestran también de manera uniforme, algo parecido a la lógica formal.

Una revisión general de ésta ha permitido agregar o excluir algunos ejemplos y perfilar o pulir algunos puntos, y, en todo momento, conservar su carácter funcional de peculiares lineamientos de una enseñanza programada, así como también una mejor disposición didáctica.

ABREVIATURAS Y SÍMBOLOS

Hpt : Hipótesis

Def : Definición

Excl : Exclusión

Corres : Correspondencia

Biun : Biunívoca

Desc : Descendiente

inc : incidencia

iny : inyectiva

sup : suprayectiva

biy : biyectiva

pot : potencia

Pend : Pendiente

Dem : Demostrado

fun : función

Dom f : Dominio de f

mit : mitómano

ver : veraz

Trad : Traducción

ent : entonces

ssi : si, y sólo si,

$\forall$ Para todo

$\in$ pertenece a

$\bigcup$ unión de familia

$\times$ cruz

(x,y) pareja ordenada x,y

$=$ es igual a

1-1 correspondencia biunívoca

$f : A \to B$ función de A a B

$\sim$ es equivalente a

$\neq$ no =

$f(x)$ f de

$\exists$ existe

! único

TEMARIO

1. INTRODUCCIÓN

Ejemplos de condicionales :

Si x es amigo de y entonces x convive.
Si x no convive entonces x no es amigo de y.

Para negar una condicional se afirma la hipótesis y se niega la tesis. En el caso de las dos anteriores, sus negaciones son, respectivamente:

x es amigo de y y x no convive.
x no convive y x es amigo de y.

Dos condicionales se llaman <u>giros</u>, la una de la otra, si, y sólo si, tienen la misma negación.
Así, las condicionales anteriores son giros, la una de la otra, porque tienen, salvo el orden, la misma negación.
Por definición el que es <u>veraz</u> siempre dice la verdad, el que es <u>mitómano</u> siempre miente, y el que no es ni veraz ni mitómano es <u>normal</u>. Luego el que dice alguna mentira no es veraz, y el que dice alguna verdad no es mitómano. Toda persona es veraz o mitómano o normal, pero sólo una de estas tres cosas.

Axiomas :

I. Si x es veraz, y x dice que sucede tal cosa, entonces sucede tal cosa.
II. Si x es mitómano, y x dice que sucede tal cosa, entonces no sucede tal cosa.
III. Si x es veraz entonces x no es mitómano.
Si x es mitómano entonces x no es normal.
Si x es normal entonces x no es veraz.
IV. x es veraz o x es mitómano o x es normal.

Estos axiomas constituyen una definición implícita de los términos <u>veraz</u>, <u>mitómano</u> y <u>normal</u>.

Otros axiomas :

i) Si x dice que sucede tal cosa, y no sucede tal cosa, entonces x miente. Def de mentir

ii) Si x dice que sucede tal cosa, y sucede tal cosa, entonces x no miente. Def de no mentir

En general, los axiomas son <u>válidos</u> <u>por</u> <u>definición</u>, y son las únicas verdades que no necesitan ser demostradas.

2. ESQUEMA DEDUCTIVO

El esquema deductivo universal es una estructura carente de contenido que toma vida dentro de ciertos contextos. Consta de tres modos hipotéticos, para inferir, y de cinco modos descendentes. Los modos hipotéticos son :

Si P o Q, y si no P, entonces Q.	Reducción por exclusión
Si, si P entonces Q, y si, si P entonces no Q, entonces no P.	Reducción por contradi-- cción
Si P o Q, si, si P entonces R, y si, si Q entonces R, entonces R.	Reducción por casos

P, Q, R, representan proposiciones cualesquiera.

Los modos descendentes son del estilo siguiente :

- De lo idéntico :
  Si x es amigo de y entonces x es amigo de y.
- De la conjunción a la parte :
  Si x es amigo de y y y corre entonces y corre.
- De la parte a la disyunción :
  Si x juega hoy entonces x juega hoy o x juega mañana.
- De lo general a lo particular :
  Si, para todo x, x comenta de y,
  entonces y comenta de y.

En este ejemplo, lo que la hipótesis afirma de todo x la tesis lo afirma de y. Nótese la colocación de la tesis.

- De lo específico a lo inespecífico :
  Si x es amigo de y y x corre
  entonces existe z tal que
  z es amigo de y y z corre.

Aquí, lo que la hipótesis afirma de y, la tesis lo afirma de algún z, sin especificar. Obsérvese la colocación de la tesis.

Aparte de los ocho modos anteriores, se puede inferir también <u>por traducción</u>, <u>por giro</u>, <u>por definición</u>, o <u>por algo demostrado antes</u>.

3. APLICACIÓN A VERACES Y MITÓMANOS

Las siguientes demostraciones exhiben el uso de los tres modos hipotéticos :

A dice que B es mitómano,
B dice que C no es veraz,
C dice que A miente. Datos

A no es veraz : Afirmación a demostrar

(1) A dice que B es mitómano Dato

(2) B es mitómano o B no es mitómano Axioma lógico

(3) Si B es mitómano entonces A no es veraz :

(a) B es mitómano Hpt

(b) B dice que C no es veraz Dato

(c) C es veraz (a)(b). Def de mit

(d) C dice que A miente Dato

(e) A miente (c)(d). Def de ver

(f) A no es veraz (e). Def de ver, girada

(4) Si B no es mitómano entonces A no es veraz :

(a) B no es mitómano Hpt

(b) A dice que B es mitómano Dato

(c) A miente (b)(a). Def de mentir

(d) A no es veraz (c). Def de ver, girada

(5) A no es veraz (2)(3)(4). Por casos

C no es mitómano :

(1) Si C es mitómano entonces B es mitómano :

(a) C es mitómano Hpt

(b) C dice que A miente Dato

(c) A no miente (a)(b). Def de mit

(d) A dice que B es mitómano Dato

(e) B es mitómano (c)(d). Def de mentir, girada

(2) Si C es mitómano entonces B no es mitómano :

(a) C es mitómano Hpt

(b) B dice que C no es veraz Dato

(c) C no es veraz (a). Def común

(d) B no miente (b)(c). Def de no mentir

(e) B no es mitómano (d). Def de mit, girada

(3) C no es mitómano (1)(2). Por contradicción

Si C es veraz entonces B es normal :

(1) C es veraz Hpt

(2) C dice que A miente Dato

(3) A miente (1)(2). Def de ver

(4) A dice que B es mitómano Dato

(5) B no es mitómano (3)(4). Def de no mentir, girada

(6) B es veraz o B es normal (5). Def común

(7) B no es veraz :

(a) B dice que C no es veraz Dato

(b) C es veraz (1). Desc

(c) B miente (a)(b). Def de mentir

(d) B no es veraz (c). Def de ver, girada

(8) B es normal (6)(7). Excl

4. NUEVO REPERTORIO SOBRE VERACES Y MITÓMANOS

Esta nuevo repertorio sobre veraces y mitómanos fué investigado y desarrollado por los tesistas:
Osvaldo de la Peña Rodríguez
Martha Patricia Rodríguez Rosas
Maricela Solórzano Audiffred
bajo la dirección del prof. Gonzalo Zubieta Russi.

A dice que B es veraz,
B dice que C es veraz,
C dice que A miente :
A no es veraz. B no es veraz. C no es mitómano.
Si B mitómano entonces C es normal.
Si C es veraz entonces B es normal.

A dice que B es veraz,
B dice que C no es mitómano,
C dice que A miente :
B no es mitómano. C no es mitómano.
Si A es mitómano entonces B es normal.
Si A es veraz entonces C es normal.
Si B es veraz entonces C es normal.
Si C es veraz entonces B es normal.

A dice que B es veraz,
B dice que C es normal,
C dice que A miente :
C no es mitómano.
Si B es mitómano entonces C es veraz.

A dice que B es veraz,
B dice que C no es normal,
C dice que A miente :
Si A es veraz entonces C es mitómano.
Si B es veraz entonces C es mitómano.
Si C es veraz entonces B es normal.

A dice que B es veraz,
B dice que C no es veraz,
C dice que A no miente :
B no es mitómano. C no es veraz.
Si A es veraz entonces C es normal.
Si A es mitómano entonces B es normal.
Si B es veraz entonces C es normal.
Si C es mitómano entonces B es normal.

A dice que B es veraz,
B dice que C es mitómano,
C dice que A no miente :
A no es veraz. B no es veraz. C no es veraz.
Si B es mitómano entonces C es normal.
Si C es mitómano entonces B es normal.

A dice que B es veraz,
B dice que C es normal,
C dice que A no miente :
C no es veraz.
Si B es mitómano entonces C es mitómano.

A dice que B es veraz,
B dice que C no es normal,
C dice que A no miente :
Si A es veraz entonces C es veraz.
Si B es veraz entonces C es veraz.
Si C es mitómano entonces B es normal.

A dice que B es mitómano,
B dice que C no es veraz,
C dice que A miente :
A no es veraz. B no es mitómano. C no es mitómano.
Si B es veraz entonces C es normal.
Si C es veraz entonces B es normal.

A dice que B es mitómano,
B dice que C es mitómano,
C dice que A miente :
B no es veraz. C no es mitómano.
Si A es veraz entonces C es normal.
Si A es mitómano entonces B es normal.
Si B es mitómano entonces C es normal.
Si C es veraz entonces B es normal.

A dice que B es mitómano,
B dice que C es normal,
C dice que A miente :
Si A es veraz entonces C es mitómano.
Si B es mitómano entonces C es mitómano.
Si C es veraz entonces B es normal.

A dice que B es mitómano,
B dice que C no es normal,
C dice que A miente :
C no es mitómano.
Si B es veraz entonces C es veraz.

A dice que B es mitómano,
B dice que C es veraz,
C dice que A no miente :
B no es veraz. C no es veraz.
Si A es veraz entonces C es normal.
Si A es mitómano entonces B es normal.
Si B es mitómano entonces C es normal.
Si C es mitómano entonces B es normal.

A dice que B es mitómano,
B dice que C no es mitómano,
C dice que A no miente :
A no es veraz. B no es mitómano. C no es veraz.
Si B es veraz entonces C es normal.
Si C es mitómano entonces B es normal.

A dice que B es mitómano,
B dice que C es normal,
C dice que A no miente :
Si A es veraz entonces C es veraz.
Si B es mitómano entonces C es veraz.
Si C es mitómano entonces B es normal.

A dice que B es mitómano,
B dice que C no es normal,
C dice que A no miente :
C no es veraz.
Si B es veraz entonces C es mitómano.

A dice que B es normal,
B dice que C es veraz,
C dice que A miente :
Si B es mitómano entonces C es normal.
Si C es veraz entonces B es veraz.

A dice que B es normal,
B dice que C no es veraz,
C dice que A miente :
Si B es veraz entonces C es normal.
Si C es veraz entonces B es mitómano.

A dice que B es normal,
B dice que C es mitómano,
C dice que A miente :
B no es veraz.
Si C es veraz entonces B es mitómano.
Si A es mitómano entonces B es mitómano.

A dice que B es normal,
B dice que C no es mitómano,
C dice que A miente :
B no es mitómano.
Si C es veraz entonces B es veraz.
Si A es mitómano entonces B es veraz.

A dice que B es normal,
B dice que C es normal,
C dice que A miente :
Si B es mitómano entonces C es veraz.
Si C es veraz entonces B es mitómano.

A dice que B es normal,
B dice que C no es normal,
C dice que A miente :
Si B es veraz entonces C es veraz.
Si C es veraz entonces B es veraz.

A dice que B es normal,
B dice que C es veraz,
C dice que A no miente :
B no es veraz.
Si A es mitómano entonces B es mitómano.
Si C es mitómano entonces B es mitómano.

A dice que B es normal,
B dice que C no es veraz,
C dice que A no miente :
B no es mitómano.
Si A es mitómano entonces B es veraz.
Si C es mitómano entonces B es veraz.

A dice que B es normal,
B dice que C es mitómano,
C dice que A no miente :
Si B es mitómano entonces C es normal.
Si C es mitómano entonces B es veraz.

A dice que B es normal,
B dice que C no es mitómano,
C dice que A no miente :
Si B es veraz entonces C es normal.
Si C es mitómano entonces B es mitómano.

A dice que B es normal,
B dice que C es normal,
C dice que A no miente :
Si B es mitómano entonces C es mitómano.
Si C es mitómano entonces B es mitómano.

A dice que B es normal,
B dice que C no es normal,
C dice que A no miente :
Si B es veraz entonces C es mitómano.
Si C es mitómano entonces B es veraz

5. DUALIDAD

El dual de veraz es mitómano, el dual de mitómano es veraz, y el dual de normal es normal.
El conjugado de un término es la negación de su dual. Así, el conjugado de veraz es no mitómano, el conjugado de mitómano es no veraz, y el conjugado de normal es no normal.

Principio de dualidad :

Si a partir de ciertos datos se demuestra cierta afirmación, entonces a partir de los datos conjugados se demuestra la afirmación dual.

En el repertorio que hemos formado no figuran los duales. Al incluirlos se duplica el repertorio.

Ejemplo :

A dice que B es veraz,
B dice que C no es normal,
C dice que A no miente.

Afirmación :

<u>Si</u> A <u>es</u> <u>veraz</u> <u>entonces</u> C <u>es</u> <u>veraz</u> :

(1) A es veraz Hpt
(2) A dice que B es veraz Dato
(3) B es veraz (1)(2). Def de ver
(4) B dice que C no es normal Dato
(5) C no es normal (3)(4). Def de ver
(6) C es veraz o C es mitómano (5). Def común
(7) C no es mitómano :
 (a) C dice que A no miente Dato
 (b) A no miente (1). Def de ver
 (c) C no es mitómano (a)(b). Def de mit, girada
(8) C es veraz (6)(7). Excl

Datos conjugados :

A dice que B no es mitómano,
B dice que C es normal,
C dice que A no miente.

Afirmación dual :

<u>Si</u> A <u>es</u> <u>mitómano</u> <u>entonces</u> C <u>es</u> <u>mitómano</u> :

(1) A es mitómano Hpt
(2) A dice que B no es mitómano Dato
(3) B es mitómano (1)(2). Def de mit
(4) B dice que C es normal Dato
(5) C no es normal (3)(4). Def de mit
(6) C es mitómano o C es veraz (5). Def común
(7) C no es veraz :
 (a) C dice que A no miente Dato
 (b) A miente (1). Def de mit
 (c) C no es veraz (a)(b). Def de ver, girada
(8) C es mitómano (6)(7). Excl

El repertorio del capítulo anterior se duplica al pasar en cada caso de los datos a los datos conjugados, y de las afirmaciones a las afirmaciones duales.

6. CORRESPONDENCIA BIUNÍVOCA

Función es una correspondencia f que a cada elemento x, de un conjunto D, llamado dominio de f, le asocia un objeto único $f(x)$, llamado valor de f en x. El conjunto de tales valores es, por definición, el curso, o imagen, de f.

Axioma :

Para todo $x \in A$, existe un único y tal que $f(x) = y$ Def de fun

Axioma de extensionalidad :

Si Dom f = D,
Dom g = D,
y si, para todo $x \in D$, $f(x) = g(x)$,
entonces f = g.

Se dice que f va de A a B, en símbolos $f : A \rightarrow B$, si, y sólo si, Dom f = A y, para todo $x \in A$, $f(x) \in B$.

Def de incidencia

Se dice que $f : A \rightarrow B$ es inyectiva si, y sólo si, f va de A a B y, para todos x_1, $x_2 \in A$, si $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Se dice que $f : A \rightarrow B$ es suprayectiva si, y sólo si, f va de A a B y, para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Se dice que $f : A \rightarrow B$ es biyectiva si, y sólo si, $f : A \rightarrow B$ es inyectiva y suprayectiva a la vez.

Se dice que A es equivalente a B, en símbolos $A \sim B$, si, y sólo si, existe f tal que $f : A \rightarrow B$ es biyectiva.

DEFINICIÓN. Se dice que existe un único $x \in A$ tal que x satisface ϕ ssi, existe $x \in A$ tal que x satisface ϕ, y dados x_1, $x_2 \in A$, si x_1 y x_2 satisfacen ϕ entonces $x_1 = x_2$.

DEFINICIÓN. Se dice que la condición

$P(x,y)$, $x \in A$, $y \in B$,

define una <u>correspondencia</u> <u>biunívoca</u> entre A y B ssi, para todo $x \in A$ existe un único $y \in B$ tal que vale $P(x,y)$, y para todo $y \in B$ existe un único $x \in A$ tal que vale $P(x,y)$.

LEMA

Si $P(x,y)$ define una correspondencia biunívoca entre A y B entonces

$A \sim B$:

(1) $P(x,y)$ define una correspondencia biunívoca entre A y B Hpt

(2) Para todo $x \in A$, existe un único $y \in B$ tal que vale $P(x,y)$ (1). Corres biun

(3) Para todo $y \in B$, existe un único $x \in A$ tal que vale $P(x,y)$ (1). Corres biun

(4) Existe f tal que $f : A \to B$ es biyectiva :

(a) Dom f = A

(b) Para todo $x \in A$, $f(x) = y$ ssi vale $P(x,y)$ Def de f

(c) Para todo $x \in A$, existe un único $y \in B$ tal que $f(x) = y$:

(c_1) $x \in A$ Hpt

(c_2) Existe un único $y \in B$ tal que vale $P(x,y)$ (c_1). Por (2)

(c_3) Existe $y \in B$ tal que vale $P(x,y)$ (c_2). Def de $\exists$!

(c_4) $y \in B$

(c_5) vale $P(x,y)$ Def de y

(c_6) Si vale $P(x,y)$ ent $f(x) = y$ (c_1). Por (b)

(c_7) $f(x) = y$ (c_5). Por (c_6)

(c_8) $y \in B$ y $f(x) = y$ (c_4)(c_7). Desc

(c_9) Existe y tal que $y \in B$ y $f(x) = y$ (c_8). Desc

(c_{10}) Dados y_1, $y_2 \in B$, si $f(x) = y_1$ y $f(x) = y_2$ ent $y_1 = y_2$:

(α) $y_1 \in B$

(β) $y_2 \in B$

(γ) $f(x) = y_1$

(δ) $f(x) = y_2$ Hpt

(ε) Si $f(x) = y_1$ ent vale $P(x,y_1)$ (c_1). Por (b)

(ζ) Si $f(x) = y_2$ ent vale $P(x,y_2)$ (c_1). Por (b)

(η) vale $P(x,y_1)$ (γ). Por (ε)
(θ) vale $P(x,y_2)$ (δ). Por (ζ)
(ι) Existe un único $y \in B$ tal que vale $P(x,y)$
(c_1). Por (2)
(κ) Dados y_1, $y_2 \in B$, si valen $P(x,y_1)$, $P(x,y_2)$,
ent $y_1 = y_2$ (ι). Def de $\exists$!
(λ) Si valen $P(x,y_1)$, $P(x,y_2)$, ent $y_1 = y_2$
(α)(β). Por (κ)
(μ) $y_1 = y_2$ (η)(θ). Por (λ)

(c_{11}) Existe un único $y \in B$ tal que $f(x) = y$
(c_9)(c_{10}). Def de $\exists$!

(d) Para todo $x \in A$, $f(x) \in B$:

(d_1) $x \in A$ Hpt
(d_2) Existe un único $y \in B$ tal que $f(x) = y$ (d_1). Por (c)
(d_3) Existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$ (d_2). Def de $\exists$!
(d_4) $y \in B$
(d_5) $f(x) = y$ Def de y
(d_6) $f(x) \in B$ (d_4)(d_5). Def de =

(e) f va de A a B (a)(d). Def de inc

(f) f es biyectiva :

(f_1) Dados x_1, $x_2 \in A$, si $f(x_1) = f(x_2)$ ent $x_1 = x_2$:

(α) $x_1 \in A$
(β) $x_2 \in A$
(γ) $f(x_1) = f(x_2)$ Hpt
(δ) $f(x_1) = y$ Def de y
(ε) $f(x_2) = y$ (δ)(γ). Def de =
(ζ) Si $f(x_1) = y$ ent vale $P(x_1,y)$ (α). Por (b)
(η) Si $f(x_2) = y$ ent vale $P(x_2,y)$ (β). Por (b)
(θ) vale $P(x_1,y)$ (δ). Por (ζ)
(ι) vale $P(x_2,y)$ (ε). Por (η)
(κ) $f(x_1) \in B$ (α). Por (d)
(λ) $y \in B$ (κ)(δ). Def de =
(μ) Existe un único $x \in A$ tal que vale $P(x,y)$
(λ). Por (3)

(ν) Dados x_1, $x_2 \in A$,
si valen $P(x_1,y)$, $P(x_2,y)$,
ent $x_1 = x_2$ (μ). Def de $\exists$!

(ξ) Si valen $P(x_1,y)$, $P(x_2,y)$ ent $x_1 = x_2$ (α)(β). Por (ν)

(o) $x_1 = x_2$ (θ)(ι). Por (ξ)

(f_2) f es inyectiva (e)(f_1). Def de iny

(f_3) Para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$:

(α) $y \in B$ Hpt

(β) Existe un único $x \in A$ tal que vale $P(x,y)$ (α). Por (3)

(γ) Existe $x \in A$ tal que vale $P(x,y)$ (β). Def de $\exists$!

(δ) $x \in A$

(ε) vale $P(x,y)$ Def de x

(ζ) Si vale $P(x,y)$ ent $f(x) = y$ (δ). Por (b)

(η) $f(x) = y$ (ε). Por (ζ)

(ι) $x \in A$ y $f(x) = y$ (δ)(η). Desc

(κ) Existe x tal que $x \in A$ y $f(x) = y$ (ι). Desc

(f_4) f es suprayectiva (e)(f_3). Def de sup

(f_5) $f : A \to B$ es biyectiva (f_2)(f_4). Def de biy

(f_6) $f : A \to B$ y f es biyectiva (e)(f_5). Desc

(f_7) Existe f tal que $f : A \to B$ es biy (f_6). Desc

(5) $A \sim B$ (4). Def de $\sim$

7. PRODUCTO CARTESIANO GRANDE

Se hablará de conjuntos A, B, ... , y de sus elementos x, y, ...

Se escribe $x \in A$ en lugar de cualquiera de las frases siguientes:
x está en A,
x pertenece a A,
x es elemento de A.

DEFINICIÓN. $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ si, y sólo si, existe i tal que $i \in I$ y $x \in A_i$.

Por definición, (x,y) es la pareja ordenada cuyo primer elemento es x y cuyo segundo elemento es y, en tanto que $A \times B$ es el producto cartesiano, o conjunto de las parejas (x,y) tales que $x \in A$ y $y \in B$.

Axiomas:

Si $(x,y) \in A \times B$ entonces $x \in A$.
Si $(x,y) \in A \times B$ entonces $y \in B$.
Si $x \in A$ y $y \in B$ entonces $(x,y) \in A \times B$.

El producto cartesiano

$$\bigtimes_{i \in I} A_i ,$$

de una familia de conjuntos, es el conjunto de las funciones f tales que Dom f = I y, para todo $i \in I$ existe un único $x \in A_i$ tal que $f(i) = x$.

Axioma :

$f \in \bigtimes_{i \in I} A_i$ ssi Dom f = I
y, para todo $i \in I$, existe un único $x \in A_i$ tal que $f(i) = x$.

Def de $\times$

Corolario :

Si $f \in \bigtimes_{i \in I} A_i$ ent para todo $i \in I$, $f(i) \in A_i$.

Definimos la potencia A^I como producto cartesiano de tantos factores iguales a A como elementos hay en I. En símbolos

$$A^I = \bigtimes_{i \in I} A_i$$

Axioma :

$f \in A^I$ ssi Dom $f = I$
y, para todo $i \in I$, existe un único $x \in A$ tal que $f(i) = x$.

Def de pot

Luego A^I es el conjunto de todas las funciones $f : I \rightarrow A$.

Corolarios :

Si $f \in A^I$ ent para todo $i \in I$, $f(i) \in A$.

TEOREMA

$$\bigtimes_{i\in I} A^{B_i} \sim A^{\bigcup_{i\in I}\{i\}\times B_i} \quad : \qquad 1^a \text{ Etapa}$$

(1) Si $f\in \bigtimes_{i\in I} A^{B_i}$ ent, $\forall\, j\in I$, y $\forall\, y\in B_j$, existe un único $x\in A$ tal que $f_j(y) = x$:

(a) $f\in \bigtimes A^{B_i}$ Hpt
(b) Dom $f = I$

(c) Para todo $i\in I$, $f_i \in A^{B_i}$ (a). Def de $\bigtimes$
(d) Para todo $j\in I$, y todo $y\in B_j$, existe un único $x\in A$ tal que $f_j(y) = x$:

(d$_1$) $j\in I$
(d$_2$) $y\in B_j$ Hpt
(d$_3$) $f_J \in A^{B_J}$ (d$_1$). Por (c)
(d$_4$) Existe un único $x\in A$ tal que $f_j(y) = x$ (d$_3$)(d$_2$). Def de pot

(2) Si $g\in A^{\bigcup_{i\in I}\{i\}\times B_i}$ ent, $\forall\, j\in I$, y $\forall\, y\in B_j$, existe un único $x\in A$ tal que $g(j,y) = x$:

(a) $g\in A^{\bigcup\{i\}\times B_i}$ Hpt
(b) Dom $g = \bigcup\{i\}\times B_i$
(c) Para todo $(j,y)\in\bigcup\{i\}\times B_i$, existe un único $x\in A$ tal que $g(j,y) = x$ (a). Def de pot
(d) Para todo $j\in I$, y todo $y\in B_j$ existe un único $x\in A$ tal que $g(j,y) = x$:

(d$_1$) $j\in I$
(d$_2$) $y\in B_j$ Hpt
(d$_3$) $j\in\{j\}$ Def de $\{j\}$
(d$_4$) $(j,y)\in\{j\}\times B_j$ (d$_3$)(d$_2$). Def de $\times$
(d$_5$) Existe i tal que $i\in I$ e $(j,y)\in\{i\}\times B_i$ (d$_1$)(d$_4$). Desc
(d$_6$) $(j,y)\in\bigcup_{i\in I}\{i\}\times B_i$ (d$_5$). Def de $\bigcup$
(d$_7$) Existe un único $x\in A$ tal que $g(j,y) = x$ (d$_6$). Por (c)

(d$_7$) Existe un único $x \in A$ tal que $g(j,y) = x$ (d$_6$). Por (c)

(3) Para todo $f \in \times A^{B_i}$ existe un único $g \in A^{\cup\{i\}\times B_i}$ tal que,
$\forall$ $i \in I$, y $\forall$ $y \in B_i$, $f_i(y) = g(i,y)$: Pend

(4) Para todo $g \in A^{\cup\{i\}\times B_i}$ existe un único $f \in \times A^{B_i}$ tal que,
$\forall$ $i \in I$, y $\forall$ $y \in B_i$, $f_i(y) = g(i,y)$: Pend

(5) La condición
$\forall$ $i \in I$, y $\forall$ $y \in B_i$, $f_i(y) = g(i,y)$
define una correspondencia biunívoca entre

$\times A^{B_i}$ y $A^{\cup\{i\}\times B_i}$ (3)(4). Def de 1-1

(6) $\times A^{B_i} \sim A^{\cup\{i\}\times B_i}$ (5). Dem

$\bigtimes_{i\in I} A^{B_i} \sim A^{\bigcup_{i\in I}\{i\}\times B_i}$:   2ª Etapa

(1) Si $f\in \bigtimes A^{B_i}$ ent, $\forall\ i\in I$, y $\forall\ y\in B_i$, existe un único $x\in A$ tal que $f_i(y) = x$ Dem

(2) Si $g\in A^{\bigcup\{i\}\times B_i}$ ent, $\forall\ i\in I$, y $\forall\ y\in B_i$, existe un único $x\in A$ tal que $g(i,y) = x$ Dem

(3) Para todo $f\in \bigtimes A^{B_i}$ existe un único $g\in A^{\bigcup\{i\}\times B_i}$ tal que, $\forall\ i\in I$, y $\forall\ y\in B_i$, $f_i(y) = g(i,y)$:

(a) $f\in \bigtimes A^{B_i}$ Hpt

(b) $\forall\ i\in I$, y $\forall\ y\in B_i$, existe un único $x\in A$ tal que $f_i(y) = x$ (a). Por (1)

(c) Existe $g\in A^{\bigcup\{i\}\times B_i}$ tal que $\forall\ i\in I$, y $\forall\ y\in B_i$, $f_i(y) = g(i,y)$:

(c_1) Dom $g = \bigcup\{i\}\times B_i$

(c_2) $\forall\ i\in I$, y $\forall\ y\in B_i$, $g(i,y) = f_i(y)$ Def de g

(c_3) $g\in A^{\bigcup\{i\}\times B_i}$:

(α) Dom $g = \bigcup\{i\}\times B_i$ (b_1). Desc

(β) $\forall\ (j,y)\in \bigcup\{i\}\times B_i$, existe un único $x\in A$ tal que $g(j,y) = A$:

(β_1) $(j,y)\in \bigcup\{i\}\times B_i$ Hpt

(β_2) Existe i tal que $i\in I$ y $(j,y)\in\{i\}\times B_i$ (β_1). Def de $\bigcup$

(β_3) $i\in I$

(β_4) $(j,y)\in\{i\}\times B_i$ Def de i

(β_5) $j\in\{i\}$

(β_6) $y\in B_i$ (β_4). Def de $\times$

(β_7) $j = i$ (β_5). Def de$\{i\}$

(β_8) $j\in I$ (β_3)(β_7). Def de =

(β_9) $y\in B_j$ (β_6)(β_7). Def de =

(β_{10}) Existe un único $x \in A$ tal que $f_j(y) = x$

(β_8)(β_9). Por (b)

(β_{11}) $g(j,y) = f_j(y)$ (β_8)(β_9). Por Por (c_2)

(β_{12}) Existe un único $x \in A$ tal que $g(j,y) = x$

(β_{10})(β_{11}). Def de =

(γ) $g \in A^{\bigcup (I) \times B_i}$ (α)(β). Def de pot

(c_4) $\forall\ i \in I$, y $\forall\ y \in B_i$, $f_i(y) = g(i,y)$:

(α) $i \in I$

(β) $y \in B_i$ Hpt

(γ) $g(i,y) = f_i(y)$ (α)(β). Por (c_2)

(δ) $f_i(y) = g(i,y)$ (γ). Def de =

(c_5) Existe g tal que $g \in A^{\bigcup (I) \times B_i}$ y tal que

$\forall\ i \in I$, y $\forall\ y \in B_i$, $f_i(y) = g(i,y)$ (c_3)(c_4). Desc

(d) Dados $g_1, g_2 \in A^{\bigcup_{i\in I}\{i\}\times B_i}$,
si, $\forall\, i\in I$, y $\forall\, y\in B_i$, $f_i(y) = g_1(i,y)$,
y, $\forall\, i\in I$, y $\forall\, y\in B_i$, $f_i(y) = g_2(i,y)$,
ent $g_1 = g_2$:

(d_1) $g_1\in A^{\bigcup\{i\}\times B_i}$

(d_2) $g_2\in A^{\bigcup\{i\}\times B_i}$
(d_3) $\forall\, i\in I$, y $\forall\, y\in B_i$, $f_i(y) = g_1(i,y)$
(d_4) $\forall\, i\in I$, y $\forall\, y\in B_i$, $f_i(y) = g_2(i,y)$ Hpt

(d_5) Dom $g_1 = \bigcup\{i\}\times B_i$ (d_1). Def de pot

(d_6) Dom $g_2 = \bigcup\{i\}\times B_i$ (d_2). Def de pot

(d_7) Para todo $(j,y)\in \bigcup\{i\}\times B_i$, $g_1(j,y) = g_2(j,y)$:

(α) $(j,y)\in \bigcup\{i\}\times B_i$ Hpt
(β) Existe i tal que $i\in I$ e $(j,y)\in\{i\}\times B_i$ (α). Def de $\bigcup$

(γ) $i\in I$
(δ) $(j,y)\in\{i\}\times B_i$ Def de j
(ε) $j\in\{i\}$ (δ). Def de $\times$
(ζ) $y\in B_i$ (δ). Def de $\times$
(η) $j = i$ (ε). Def de $\{i\}$
(θ) $j\in I$ (γ)(η). Def de =
(ι) $y\in B_j$ (ζ)(η). Def de =
(κ) $f_j(y) = g_1(j,y)$ (θ)(ι). Por (d_3)
(λ) $f_j(y) = g_2(j,y)$ (θ)(ι). Por (d_4)
(μ) $g_1(j,y) = g_2(j,y)$ (λ)(κ). Def de =

(c_8) $g_1 = g_2$ (d_5)(d_6)(d_7). Def de fun

(e) Existe un único $g\in A^{\bigcup\{i\}\times B_i}$ tal que
$\forall\, i\in I$, y $\forall\, y\in B_i$, $f_i(y) = g(i,y)$ (c)(d). Def de $\exists\,!$

(4) Para todo $g\in A^{\bigcup\{i\}\times B_i}$ existe un único $f\in \times A^{B_i}$ tal que
$\forall\, i\in I$, y $\forall\, y\in B_i$, $f_i(y) = g(i,y)$: Pend

(5) La condición
$\forall\, i \in I$, y $\forall\, y \in B_i$, $f_i(y) = g(i,y)$
define una correspondencia biunívoca entre

$\times A^{B_i}$ y $A^{\cup\{i\}\times B_i}$ (3)(4). Def de 1-1

(6) $\times A^{B_i} \sim A^{\cup\{i\}\times B_i}$ (5). Dem

$\underset{i\in I}{\times} A^{B_i} \sim A^{\bigcup_{i\in I}\{i\}\times B_i}$: 3ª Etapa

(1) Si $f\in \times A^{B_i}$ ent, $\forall\ i\in I$, y $\forall\ y\in B_i$, existe un único $x\in A$ tal que $f_i(y) = x$ Dem

(2) Si $g\in A^{\bigcup\{i\}\times B_i}$ ent, $\forall\ i\in I$, y $\forall\ y\in B_i$, existe un único $x\in A$ tal que $g(i,y) = x$ Dem

(3) Para todo $f\in \times A^{B_i}$ existe un único $g\in A^{\bigcup\{i\}\times B_i}$ tal que $\forall\ i\in I$, y $\forall\ y\in B_i$, $f_i(y) = g(i,y)$ Dem

(4) Para todo $g\in A^{\bigcup_{i\in I}\{i\}\times B_i}$ existe un único $f\in \underset{i\in I}{\times} A^{B_i}$ tal que $\forall\ i\in I$, y $\forall\ y\in B_i$, $f_i(y) = g(i,y)$:

(a) $g\in A^{\bigcup\{i\}\times B_i}$ Hpt

(b) $\forall\ i\in I$, y $\forall\ y\in B_i$, existe un único $x\in A$ tal que $g(i,y) = x$ (a). Por (2)

(c) Existe $f\in \times A^{B_i}$ tal que $\forall\ i\in I$, y $\forall\ y\in B_i$, $f_i(y) = g(i,y)$:

(c_1) Dom f = I

(c_2) Para todo $i\in I$, Dom $f_i = B_i$ y, $\forall\ y\in B_i$, $f_i(y) = g(i,y)$ Def de f

(c_3) Para todo $i\in I$, $f_i \in A^{B_i}$:

(α) $i\in I$ Hpt

(β) Dom $f_i = B_i$ (α). Por (c_2)

(γ) $\forall\ y\in B_i$, existe un único $x\in A$ tal que $f_i(y) = x$:

(γ_1) $y\in B_i$ Hpt

(γ_2) $i\in I$ y $y\in B_i$ (α)(γ_1). Desc

(γ_3) Existe un único $x\in A$ tal que $g(i,y) = x$ (γ_2). Por (b)

(γ_4) $f_i(y) = g(i,y)$ (γ_2). Por (c_2)

(γ_5) Existe un único $x \in A$ tal que
$f_i(y) = x$ (γ_3)(γ_4). Def de =

(δ) $f_i \in A^{B_i}$ (β)(γ). Def de pot

(c_4) Para todo $i \in I$, existe un único $h \in A^{B_i}$ tal que
$f_i = h$:

(α) $i \in I$ Hpt
(β) Existe $h \in A^{B_i}$ tal que $f_i = h$:

(β_1) $f_i \in A^{B_i}$ (α). Por (c_3)
(β_2) $f_i = f_i$ Def de =
(β_3) Existe h tal que $h \in A^{B_i}$ y $f_i = h$
(β_1)(β_2). Desc

(γ) Para todo $h_1, h_2 \in A^{B_i}$, si $f_i = h_1$ y $f_i = h_2$
ent $h_1 = h_2$:

(γ_1) $h_1 \in A^{B_i}$
(γ_2) $h_2 \in A^{B_i}$
(γ_3) $f_i = h_1$
(γ_4) $f_i = h_2$ Hpt
(γ_5) Dom $h_1 = Bi$ (γ_1). Def de pot
(γ_6) Dom $h_2 = Bi$ (γ_2). Def de pot
(γ_7) $\forall\ y \in Bi$, $h_1(y) = h_2(y)$:

(A) $y \in Bi$ Hpt
(B) $f_i(y) = h_1(y)$ (γ_3). Def de =
(C) $f_i(y) = h_2(y)$ (γ_4). Def de =
(D) $i \in I$ y $y \in Bi$ (α)(A). Desc
(E) $f_i(y) = g(i,y)$ (D). Por (c_2)
(F) $g(i,y) = h_1(y)$ (B)(E). Def de =
(G) $g(i,y) = h_2(y)$ (C)(E). Def de =
(H) $h_1(y) = h_2(y)$ (G)(F). Def de =

(γ_8) $h_1 = h_2$ (γ_5)(γ_6)(γ_7). Def de fun

(δ) Existe un único $h \in A^{B_i}$ tal que $f_i = h$
(β)(γ). Def de pot

(c_5) $f \in \times A^{B_i}$ (c_1)(c_4). Def de $\times$

(c_6) $\forall\, i \in I$, y $\forall\, y \in B_i$, $f_i(y) = g(i,y)$:

(α) $i \in I$

(β) $y \in B_i$ Hpt

(γ) $\forall\, y \in B_i$, $f_i(y) = g(i,y)$ (α). Por (c_2)

(δ) $f_i(y) = g(i,y)$ (β). Por (δ)

(c_7) Existe f tal que $f \in \times A^{B_i}$ y tal que
$\forall\, i \in I$, y $\forall\, y \in B_i$, $f_i(y) = g(i,y)$ (c_5)(c_6). Desc

(d) Dados f, $f^\circ \in \underset{i \in I}{\times} A^{B_i}$,
si, $\forall\, i \in I$, y $\forall\, y \in B_i$, $f_i(y) = g(i,y)$,
y, $\forall\, i \in I$, y $\forall\, y \in B_i$, $f^\circ_i(y) = g(i,y)$,
ent $f = f^\circ$:

(d_1) $f \in \times A^{B_i}$

(d_2) $f^\circ \in \times A^{B_i}$

(d_3) $\forall\, i \in I$, y $\forall\, y \in B_i$, $f_i(y) = g(i,y)$

(d_4) $\forall\, i \in I$, y $\forall\, y \in B_i$, $f^\circ_i(y) = g(i,y)$ Hpt

(d_5) Dom $f = I$ (d_1). Def de $\times$

(d_6) Dom $f^\circ = I$ (d_2). Def de $\times$

(d_7) Para todo $i \in I$, $f_i = f^\circ_i$:

(α) $i \in I$ Hpt

(β) Para todo $i \in I$, $f_i \in A^{B_i}$ (d_1). Def de $\times$

(δ) Para todo $i \in I$, $f^\circ_i \in A^{B_i}$ (d_2). Def de $\times$

(γ) $f_i \in A^{B_i}$ (α). Por (β)

(δ) $f^\circ_i \in A^{B_i}$ (α). Por (δ)

(ε) Dom $f_i = B_i$ (γ). Def de pot

(ζ) Dom $f^{\circ}_i = B_i$ (δ). Def de pot

(η) Para todo $y \in B_i$, $f_i(y) = f^{\circ}_i(y)$:

(η_1) $y \in B_i$ Hpt
(η_2) $i \in I$ y $y \in B_i$ (α)(η_1). Desc
(η_3) $f_i(y) = g(i,y)$ (η_2). Por (d_3)
(η_4) $f^{\circ}_i(y) = g(i,y)$ (η_2). Por (d_4)
(η_5) $f_i(y) = f^{\circ}_i(y)$ (η_3)(η_4). Def de =

(θ) $f_i = f^{\circ}_i$ (ε)(ζ)(η). Def de fun

(d_8) $f = f^{\circ}$ (d_5)(d_6)(d_7). Def de fun

(e) Existe un único $f \in \bigtimes_{i \in I} A^{B_i}$ tal que
$\forall\, i \in I$, y $\forall\, y \in B_i$, $f_i(y) = g(i,y)$ (c)(d). Def de $\exists$!

(5) La condición
$\forall\, i \in I$, y $\forall\, y \in B_i$, $f_i(y) = g(i,y)$
define una correspondencia biunívoca entre

$\bigtimes A^{B_i}$ y $A^{\bigcup \{i\} \times B_i}$ (3)(4). Def de 1-1

(6) $\bigtimes A^{B_i} \sim A^{\bigcup \{i\} \times B_i}$ (5). Dem

BIBLIOGRAFÍA

William y Martha Kneale
El desarrollo de la lógica
Editorial Technos. Madrid.1972.

Gonzalo Zubieta Russi
Taller de lógica matemática
Editorial McGraw-Hill. México.1992.

Revista Mathesis vol. VII No.2
Filosofía e historia de las
matemáticas
Depto. de matemáticas
Facultad de ciencias, UNAM.
Mayo de 1991.

Amor Montaño J. A.
Antología de lógica
Comunicaciones internas
Depto. de matemáticas
Facultad de ciencias, UNAM.1978.

Bolzano B.
Las paradojas del infinito
Introdución por Jan Sebestik
Mathema, 1991.

Church A.
Introduction to mathematical logic
Princeton, 1956.

Halmos P. R.
Naive set theory
Van Nostrand, 1960.

Hausdorff F.
Grundzüge der mengenlehre
Chelsea, 1949.

Heisenberg W.
Ley natural y Estrutura de la materia
Seminario de problemas científicos y filosóficos
UNAM, 1987.

Martínez Gallardo V. M.
Introducción al análisis lógico: Del lenguaje natural al analítico
Tesis,1988.

Quine W. V.
Mathematical logic
Harper and Row, 1947.

Quine W. V.
Methods of logic
Holt, Rinehart and Winston, 1959.

Smullyan R.
What is the name of this book?
Penguin, 1980.