



20  
2ej

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**TRANSPORTE CAOTICO EN  
POTENCIALES ASIMETRICOS**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

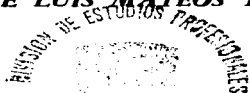
**F I S I C O**

P R E S E N T A :

**CUAUHTEMOC GARCIA GARCIA**

*DIRECTOR DE TESIS:*

**DR. JOSE LUIS MATEOS TRIGOS**



**MEXICO, D. F.**

**1997**

**FACULTAD DE CIENCIAS  
SECRETARÍA DE CIENCIAS**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "Transporte Caótico en Potenciales Asimétricos".

realizado por Cuauhtémoc García García

con número de cuenta 9041573-1 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
Propietario  
Propietario  
Propietario  
Suplente  
Suplente

DR. JOSE LUIS MATEOS TRIGOS  
DR. JOSE JULIO HERRERA VELAZQUEZ  
DR. DARIO MORENO OSORIO  
DR. VICTOR MANUEL ROMERO ROCHIN  
DR. GERMINAL COCHO GIL

Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA

FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

# Contenido

<b>1</b>	<b>Potenciales de Rueda Dentada</b>	<b>1</b>
1.1	Introducción . . . . .	1
1.2	Proteínas Motoras . . . . .	1
1.3	La rueda dentada . . . . .	3
1.4	Transporte en potenciales tipo rueda dentada . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Dinámica no Lineal y Caos en Potenciales Simétricos</b>	<b>7</b>
2.1	El Péndulo . . . . .	7
2.2	El espacio fase . . . . .	8
2.3	Sección de Poincaré <sup>20</sup> . . . . .	9
2.4	Diagramas de bifurcación . . . . .	10
2.5	Una caracterización del caos <sup>21</sup> . . . . .	11
2.6	La corriente . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Transporte en Potenciales Asimétricos</b>	<b>13</b>
3.1	Transporte en ausencia de ruido . . . . .	13
3.2	Transporte caótico: efectos del término inercial . . . . .	15
3.3	Transporte Browniano . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Transporte Caótico en Potenciales Asimétricos</b>	<b>16</b>
4.1	Introducción . . . . .	16
4.2	Análisis del Comportamiento del Potencial y la Fuerza Externa . . . . .	16
4.3	La Corriente Promedio . . . . .	17
4.4	Análisis de trayectorias y espacio fase . . . . .	17
4.5	Atractores Extraños . . . . .	19
4.6	Diagramas de bifurcación . . . . .	19
4.7	Transporte normal y anómalo . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>21</b>
<b>6</b>	<b>Referencias</b>	<b>23</b>

## Introducción

Recientemente, una serie de fenómenos biológicos han suscitado un interés creciente por parte de la comunidad científica. Grupos interdisciplinarios han unido esfuerzos con la finalidad de afrontar problemas cada vez más complejos. Este trabajo, como un ejemplo de dicha actividad interdisciplinaria, se encuentra motivado por el problema biológico del movimiento de las proteínas motoras a través del citoesqueleto celular.

El movimiento de las proteínas motoras en el citoesqueleto celular, es un problema que no ha sido entendido cabalmente; su estudio ha dado lugar a diversas líneas de investigación (como es nuestro caso) que provean de ideas "claves" para explicar dicho transporte.

Como punto de partida, en el capítulo primero, estudiaremos algunas de las funciones más importantes del citoesqueleto celular, veremos su importancia en el transporte de sustancias químicas dentro de la célula y el papel que juegan las proteínas motoras en dicho transporte. Como un primer intento para entender el movimiento de las proteínas motoras, abordaremos una discusión hecha por Richard Feynman, donde introduce el concepto de potencial de rueda dentada y establece las condiciones bajo las cuales es posible rectificar las fluctuaciones brownianas para obtener trabajo neto. Con base en ello, revisaremos una serie de trabajos relacionados con estos potenciales. El tipo de sistemas en los que vamos a estar interesados, son aquellos en los que tendremos una partícula sometida a un potencial periódico y asimétrico. Dicha partícula se encontrará sometida a una fuerza externa cuyo promedio temporal es igual a cero. En trabajos previos se ha encontrado, que a pesar de que la fuerza total aplicada a la partícula es cero en cada período del forzamiento externo, la partícula observa un desplazamiento neto en el espacio, o bien, una corriente diferente de cero.

En el capítulo segundo, analizaremos la dinámica caótica del péndulo, por ser un problema semejante al que estudiaremos, e introduciremos los conceptos de espacio fase, sección de Poincaré, atractores extraños y diagramas de bifurcación, como herramientas básicas para la descripción de la dinámica de las partículas.

Durante el tercer capítulo, analizaremos los diferentes tipos de transporte que pueden experimentar las partículas sujetas a potenciales periódicos y asimétricos. Comenzaremos con el caso sobrearmortiguado (donde se despre-

cia el término inercial) y estudiaremos el movimiento unidireccional de las partículas a través del potencial. Posteriormente, introduciremos el término inercial y, a diferencia del caso anterior, notaremos una inversión en la corriente, es decir, las partículas podrán moverse hacia ambos lados en el potencial. Para concluir mencionaremos las características más importantes en la corriente cuando se introduce ruido.

En el capítulo cuarto, se describirán los resultados numéricos obtenidos para el problema del transporte de las partículas en estos potenciales asimétricos cuando la dinámica que gobierna su comportamiento se transforma de periódica en caótica. Veremos, que este sistema tiene una dinámica muy rica y da lugar a diagramas de bifurcación, ciclos límite y atractores extraños. La importancia de este análisis radica en que, actualmente, no se han estudiado ampliamente este tipo de problemas con un enfoque puramente determinista.

En este trabajo, se mostrará que bajo estas condiciones, podemos encontrar una inversión de la corriente y que las partículas pueden observar un comportamiento difusivo tanto normal como anómalo.

Finalmente, me gustaría expresar mi más sincero agradecimiento al Dr. Mateos por haber dirigido este trabajo de tesis.

# 1 Potenciales de Rueda Dentada

## 1.1 Introducción

En este capítulo introduciremos el concepto de motor molecular y explicaremos el papel que juega en la fisiología celular. Con la idea de entender los motores moleculares, abordaremos una discusión hecha por R. Feynman, en la que establece las condiciones bajo las cuales es posible extraer trabajo del movimiento browniano. Finalmente, se revisarán una serie de trabajos donde se intenta explicar el comportamiento de una partícula browniana en un régimen sobreamortiguado sujeta a un potencial periódico y asimétrico.

## 1.2 Proteínas Motoras

A través de la historia de la evolución biológica, las células eucariontes han desarrollado una enorme complejidad en sus funciones y estructuras.

Su habilidad para adoptar una gran variedad de formas, y llevar a cabo movimientos coordinados y dirigidos, ha dependido de una red compleja de filamentos proteínicos que se extiende a lo largo de todo el citoplasma. Esta red es conocida como el citoesqueleto celular [1].

La diversidad de actividades del citoesqueleto depende solamente de tres tipos de filamentos proteínicos: filamentos de actina, microtúbulos y filamentos intermedios:

Los filamentos de actina, también conocidos como microfilamentos, son dos polímeros de actina enrollados. Tienen estructura flexible con un diámetro de 5 a 9 nm y están organizados dentro de una variedad de paquetes lineales, redes en dos dimensiones y geles tridimensionales. A pesar de que los filamentos de actina están dispersados en toda la célula, se encuentran principalmente concentrados en la corteza, justo debajo de la membrana plásmica (fig. 1.1).

Los microtúbulos son cilindros huecos largos hechos de tubulina; con un diámetro exterior de 25 nm son mucho más rígidos que los filamentos de actina. Los microtúbulos son largos y rectos y típicamente tienen un extremo unido al centrosoma (centro de organización de los microtúbulos) como se muestra en la figura (1.2) [1].

Los filamentos intermedios son fibras con un diámetro de alrededor de 10 nm, están hechos de proteínas que constituyen una gran familia heterogénea.

Un tipo de filamentos intermedios forma la red llamada lámina nuclear, justo detrás de la membrana nuclear interna. Otros tipos se extienden a través del citoplasma dando a las células firmeza mecánica.

Cada tipo de filamentos está formado de monómeros proteínicos y da lugar a una gran cantidad de proteínas accesorias, que le permiten participar en una gran variedad de funciones en diferentes regiones de la célula. Algunas de las proteínas asociadas se unen a los filamentos de algún otro tipo de componentes celulares tal como la membrana plasmática. Otras controlan dónde y cómo los filamentos de actina y los microtúbulos son ensamblados en la célula para regular la rapidez y extender su polimerización. Aún más, las proteínas asociadas interactúan con los filamentos para producir movimientos; los dos ejemplos mejor entendidos son la contracción muscular, que depende de los filamentos de actina; y el movimiento de los cilios que depende de los microtúbulos.

Existen proteínas motoras dentro de las células que se desplazan sobre el citoesqueleto y ayudan a realizar todo tipo de funciones esenciales: transportan sustancias químicas a través de la célula, ayudan a mover y ordenar los cromosomas en la división celular, proveen movilidad a células completas impulsadas por cilios y flagelos, mueven los músculos y por lo tanto a los organismos completos.

El primer motor proteínico que se descubrió fue la miosina, una proteína que se mueve a lo largo de los filamentos de actina y es especialmente abundante en el sistema muscular. Otros tipos de miosinas fueron descubiertos posteriormente en células no musculares.

Las proteínas motoras que se mueven a través de los microtúbulos son distintas de las miosinas y pertenecen a otras dos familias (fig 1.3): la kinesina que generalmente se mueve hacia el lado positivo del microtúbulo (alejándose del centrosoma) y las dineínas que se mueven en dirección opuesta (hacia el centrosoma). Como las miosinas, cada proteína motora lleva diferente carga cuando se mueve.

El tamaño típico de estos motores ensamblados es como de 20 nm [1]. Esto es aproximadamente 30 veces menor que la longitud de onda de la luz visible, y, aún bajo el microscopio electrónico, su estructura difícilmente puede ser distinguida.

Todos estos motores consumen moléculas de trifosfato de adenosina (ATP, de sus siglas en inglés) para moverse. El ATP es una molécula importante para el transporte de energía dentro de las células; la energía es almacenada



en los enlaces de fosfato y es liberada cuando el enlace se hidroliza, en una reacción del tipo  $\text{ATP} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{ADP} + \text{P} + \text{Energía}$ . Sin embargo, aún no se ha entendido claramente como la reacción química puede crear un gradiente espacial que defina una dirección preferente de movimiento[1].

A pesar de que las tres principales subunidades de polímeros en el citoesqueleto, así como muchas de las proteínas accesorias han sido aisladas y sus secuencias de aminoácidos determinadas, ha sido muy difícil establecer como esas proteínas funcionan en la célula. Además la complejidad que surge cuando un gran número de proteínas son consideradas, dos características generales hacen que el citoesqueleto sea difícil de entender. Primero, la función del citoesqueleto depende de ensamblajes complejos de proteínas, las cuales se unen en grupos cooperativos a los filamentos. Es relativamente directo examinar los efectos de un filamento de una sola proteína accesoria, pero más complicado los efectos de una mezcla de varios tipos de proteínas. Este problema no es único del citoesqueleto, pero es especialmente delicado aquí. Segundo, las funciones del citoesqueleto son más difíciles de analizar que las funciones de otros grandes complejos de proteínas. Los procesos de síntesis de RNA y DNA, por ejemplo, que involucran la formación de nuevos polímeros lleva consigo enlaces covalentes, que pueden ser rápidamente analizados *in vitro*, en parte, porque los productos de las reacciones *in vitro* son más fácilmente medidos y comparados con sus correspondientes productos hechos por la célula. El citoesqueleto, en contraste, ejerce fuerzas y genera movimientos sin gran cambio químico. Esto hace particularmente difícil analizar las funciones del sistema citoesquelético que han sido reconstruidas *in vitro* por sus componentes purificados.

Para comprender como trabajan las proteínas motoras, debemos tener en mente que viven en un mundo diferente al nuestro: no son lo suficientemente pequeñas para considerarlas como partículas cuánticas, ni aún para que puedan tener un camino libre medio, por el contrario, son lo suficientemente pequeñas para sentir fuertemente el bombardeo browniano. Este régimen lo denotaremos como régimen browniano[2].

### 1.3 La rueda dentada

En esta sección, como un primer intento para entender las proteínas motoras, introduciremos una construcción termodinámica propuesta por Feynman sobre una rueda dentada en el régimen browniano.

Feynman [3, 4], explica las condiciones bajo las cuales es posible obtener un trabajo neto a partir del movimiento browniano. Su razonamiento es como sigue:

Supongamos que construimos un dispositivo que solamente pueda girar en un sentido, por ejemplo, una rueda dentada con su trinquete (fig. 1.4). La rueda posee unas muescas, que, por un lado tienen un corte vertical, mientras que por el otro, son redondeadas. La rueda se halla sobre un eje y existe un retén con muelle que lo mantiene apoyado.

Tendremos que la rueda puede girar en un sentido. Si se la intenta hacer girar en el otro, las partes verticales de los dientes son detenidas y la rueda no avanzará, mientras que en el sentido contrario, todo girará suavemente.

Conectemos la rueda con un eje que lleva acopladas cuatro aspas como se muestra en la figura (1.5). Supongamos que las aspas están inmersas en una atmósfera de gas y son continuamente bombardeadas de forma irregular por las moléculas del gas, de manera que unas veces son empujadas en un sentido y otras veces en el contrario.

Cuando las aspas son empujadas en uno de los dos sentidos, el retén no permite que giren, mientras que, cuando son empujadas en el opuesto, el eje y la rueda giran continuamente y, por lo tanto, logramos un mecanismo aparente de movimiento perpetuo. Esto es debido a que la rueda y el trinquete siguen un movimiento irreversible.

Pero veámoslo con más detalle. El mecanismo funciona de forma que cuando la rueda gira en una dirección levanta al retén que vuelve a caer sobre la muesca. El retén vuelve a saltar y, de ser éste perfectamente elástico, va ir saltando y saltando y la rueda irá girando a medida que el retén vaya levantándose. Sin embargo, este mecanismo no funcionará a menos que el retén efectivamente impida a la rueda girar en un sentido y no en el otro. Si el retén salta y retiene la rueda, deberá producirse una resistencia, una fricción que generará calor, con lo que la rueda irá poniéndose más y más caliente. Pero al alcanzar una determinada temperatura empieza a ocurrir un nuevo fenómeno. De la misma manera que existe un movimiento browniano, un movimiento irregular del gas alrededor de las aspas, sea cual fuere el material del que está construido el aparato, éste, al ir calentándose, empezará a moverse de manera más irregular. Llegará un momento en que la rueda estará tan caliente que el retén se moverá debido simplemente al movimiento de las moléculas de su interior, es decir, debido a lo mismo que hace mover las aspas. El retén saltará sobre la rueda hacia arriba y hacia abajo y como

estará tanto tiempo bajado como levantado los dientes de la rueda se moverán tanto en un sentido como en otro.

Supongamos ahora que la temperatura de las aspas es  $T_1$  y la temperatura de las ruedas es  $T_2$ , donde  $T_1 > T_2$ . Debido a que la rueda está más fría y las fluctuaciones del trinquete son menos probables, será muy difícil para el trinquete tener la energía suficiente para levantarse y saltar a la siguiente muesca. Dada la alta temperatura  $T_1$ , las aspas frecuentemente tendrán la energía necesaria para levantar el trinquete a la punta del diente, por lo tanto, el dispositivo irá en una sola dirección como fue diseñado. Es fácil demostrar [4] que con este dispositivo pueden levantarse pesos debido a que las fluctuaciones brownianas hacen que la máquina se mueva preferencialmente en un sentido que en otro.

#### 1.4 Transporte en potenciales tipo rueda dentada

A principios este siglo, Marian von Smoluchowski [5], mostró que en ausencia de una creatura superinteligente, es decir, un demonio de Maxwell, una corriente neta, tal y como aparece en la rueda dentada de Feynman, no tendría lugar. Esta situación cambia drásticamente en presencia de fuerzas fuera de equilibrio. En un potencial de rueda dentada que es periódico pero que carece de simetría, se pueden rectificar fluctuaciones fuera de equilibrio creando una corriente neta. En otras palabras, con un sistema de rueda dentada podemos mover partículas con una velocidad diferente de cero en ausencia de fuerzas macroscópicas dirigidas, tales como, gradientes de potencial eléctrico, térmico o químico.

Estrictamente, definiremos un sistema del tipo rueda dentada como un sistema que puede transportar partículas en una estructura periódica con una velocidad macroscópica diferente de cero, a pesar de que en promedio, ninguna fuerza macroscópica esté actuando.

Como un ejemplo, consideremos un potencial periódico y simétrico, aplicado periódicamente durante un semiperíodo y apagado durante el siguiente, como se muestra en la figura (1.6).

Una distribución de partículas se encuentra inicialmente en un mínimo, cuando el potencial está prendido. Al apagarse el potencial, la distribución de partículas comenzará a dispersarse simétricamente a ambos lados del potencial.

Cuando el potencial es prendido nuevamente, una parte de la distribución

se encontrará en el mínimo de la izquierda, apareciendo así, una corriente dirigida hacia la izquierda.

Estos sistemas han sido estudiados extensamente en la literatura, debido a su conexión con el problema del movimiento de las proteínas motoras. A su vez, han suscitado una serie de experimentos que concuerdan cualitativamente con los modelos.

Una caracterización [6] completa de todas las variantes alrededor de estos sistemas es de la siguiente forma:

i) Una primera clase de sistemas son aquellos cuyos potenciales se están prendiendo y apagando, como el del ejemplo anterior. Aquí las partículas experimentan un perfil de energía fluctuante, es decir, el potencial se "prende" y se "apaga" durante intervalos discretos de tiempo[7-8].

ii) Otra clase, como se estudiará más adelante, son aquellas en las que las partículas están moviéndose en un potencial periódico y asimétrico sujetas a fuerzas con promedios espaciales y temporales iguales a cero. Existen tres subclases:

(a) Oscilatorios: En el cual las partículas experimentan la acción de fuerzas espacialmente uniformes y periódicas y deterministas en el tiempo[9-14].

(b) Difusivas: Cuando son forzadas por un coeficiente de difusión periódico en el tiempo y uniformes en el espacio[15].

(c) Correlación: Cuando son forzadas por fuerzas estocásticas uniformemente espaciales con promedio cero[16].

Existe una gran variedad de trabajos relacionados a todas estas clases de potenciales; cada uno presenta características particulares en el transporte de las partículas.

Hasta el momento, todos los sistemas estudiados poseen cualidades generales que creemos, son esenciales para el transporte:

i) Potencial asimétrico

ii) Fuerza externa (con promedio cero)

iii) Término disipativo

En el capítulo tres retomaremos estos sistemas y estudiaremos con detalle las propiedades asociadas con la corriente.

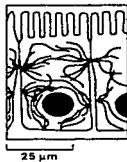
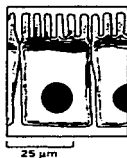


Fig. 1.1 En la figura se muestran de arriba abajo los microfilamentos, microtúbulos y los filamentos intermedios. A la derecha de cada uno puede verse su sección transversal (tomado de [1]).

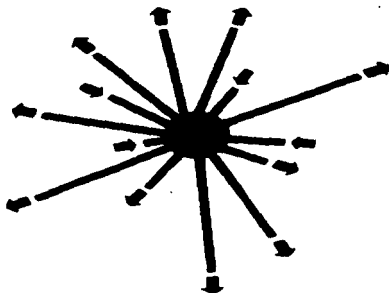


Fig. 1.2 Centrosoma celular. Los segmentos salientes indican los microfilamentos (tomado de [1])



Fig. 1.3 Motores moleculares sobre un microtúbulo. Las flechas indican la dirección del movimiento (tomada de [1])

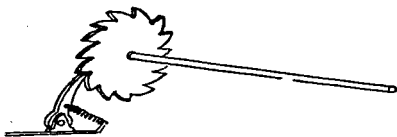


Fig. 1.4 Rueda dentada y trinquete (tomada de [3])

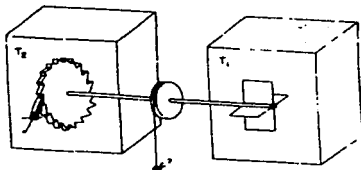


Fig. 1.5 Rueda con aspas (tomada de [4])

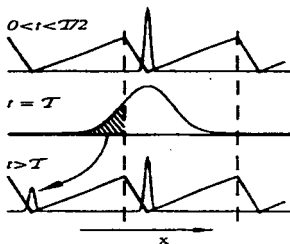


Fig. 1.6 La figura muestra la evolución de una distribución de partículas en un potencial de "prendido y apagado" (tomado de [6])

## 2 Dinámica no Lineal y Caos en Potenciales Simétricos

### 2.1 El Péndulo

En este capítulo revisaremos algunas herramientas útiles en el estudio de los sistemas dinámicos [17-20]: espacio fase, sección de Poincaré, atractores y diagramas de bifurcación.

Se utilizará el problema del péndulo como ejemplo para introducir los conceptos por su estrecha relación con el problema de la rueda dentada.

La ecuación de movimiento del péndulo amortiguado y forzado está dada por

$$ml \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + mg \operatorname{sen}(x) = B \cos(\omega_s t) \quad (2.1)$$

donde  $x$  es el ángulo que forma el péndulo respecto a la vertical,  $B$  la amplitud de la fuerza externa,  $\omega_s$  su frecuencia,  $\gamma$  es un factor relacionado con la disipación del sistema,  $m$  y  $l$  representan la longitud y masa del péndulo, respectivamente (ver figura (2.1)).

Para reducir el número de parámetros hagamos las siguientes transformaciones:

$$t' = \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad (2.2)$$

entonces

$$m \frac{g}{l} \frac{d^2x}{dt'^2} + \gamma \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{dx}{dt'} + mg \operatorname{sen}(x) = B \cos(\omega_s \sqrt{l/g} t') \quad (2.3)$$

o bien

$$\frac{d^2x}{dt'^2} + \frac{\gamma}{mg} \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{dx}{dt'} + \operatorname{sen}(x) = \frac{B}{mg} \cos(\omega_s \sqrt{l/g} t') \quad (2.4)$$

sean  $t = t'$ ,  $1/q = \gamma/m\sqrt{gl}$ ,  $\omega = \omega_s \sqrt{l/g}$  y  $A = B/mg$  sustituyendo en (2.4) obtenemos finalmente

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{q} \frac{dx}{dt} + \operatorname{sen}(x) = A \cos(\omega t) \quad (2.5)$$

El potencial del péndulo está dado por  $V(x) = -V_0(1 - \cos(x))$  ver figura (2.2); para nuestro caso  $V_0 = 1$ .



Este potencial es periódico y además simétrico, es decir, la derivada del potencial en ambos lados del mínimo es la misma.

Más adelante, en el capítulo 3, analizaremos el caso de potenciales periódicos, pero asimétricos.

## 2.2 El espacio fase

Un sistema dinámico con  $N$  grados de libertad tiene  $2N$  coordenadas generalizadas:  $q_1, q_2, \dots, q_N$ . Las correspondientes variables canónicamente conjugadas son:  $p_1, p_2, \dots, p_N$ . El espacio fase de este sistema está formado por estas  $2N$  variables y será un espacio de dimensión  $2N$ .

En el caso que nos ocupa, tenemos únicamente un grado de libertad, dado que la coordenada generalizada  $x$ , representa el ángulo del péndulo respecto a la vertical. La correspondiente variable canónicamente conjugada es  $ml^2\dot{x}$ . Por lo tanto, el espacio fase del péndulo libre (no forzado) es bidimensional y está caracterizado por las variables  $(x, \dot{x})$ .

Las órbitas trazadas en el espacio fase, usualmente, se las conoce como trayectorias fase. Una importante característica de las trayectorias fase es que dos órbitas nunca se cruzan. Esta propiedad es una consecuencia de la unicidad de las soluciones de la ecuación. Físicamente, esta característica puede derivarse a partir del hecho de que el pasado y el futuro de un sistema mecánico está completamente determinado si se conoce el estado del sistema en un tiempo dado. Una ambigüedad en los estados futuros y pasados podría surgir si las trayectorias se cruzaran, dejando, por lo tanto, al sistema indeterminado.

Otra característica importante es la conservación de "áreas". Esto significa que todos los puntos situados en una región del espacio fase, para un tiempo dado, se moverán de tal manera que, a un tiempo posterior, el área ocupada por estos puntos será la misma. Esta característica se ilustra en la figura (2.3), donde hemos considerado que  $dx/dt = 0$  y  $A = 0$  en la ecuación (2.7).

La propiedad de conservación de área en el espacio fase es una característica de los sistemas conservativos.

A diferencia de los sistemas conservativos, para los sistemas dinámicos disipativos el término de fricción está presente ( $\frac{dx}{dt} \neq 0$ ). En este caso el área en el espacio fase disminuye con el tiempo.

La contracción de áreas se muestra en la figura (2.4). Se le conoce como atractor puntual al punto donde convergen las órbitas.

Otros tipos de atractores [18] son conocidos como ciclos límite y se los puede caracterizar de la siguiente manera: Supongamos una dinámica acotada, un ciclo límite es una órbita periódica cerrada en cuya vecindad las órbitas convergen. Si las órbitas convergen cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces decimos que es un ciclo límite estable y si, por el contrario, convergen a éste cuando  $t \rightarrow -\infty$  decimos que es un ciclo límite inestable (fig 2.5).

En muchas ocasiones, la dinámica puede ser más complicada que un ciclo límite o un atractor puntual. Para ciertos valores de los parámetros de la ecuación (2.5) podemos encontrar otro tipo de atractores conocidos como atractores caóticos o extraños. Un atractor caótico [19], es un atractor para el cual dos órbitas cercanas permanecen acotadas pero divergen exponencialmente la una de la otra. Además, su estructura es tal que, para escalas más y más finas, los patrones básicos se repiten consecutivamente. Esta autosimilaridad es una característica de estos atractores extraños. En la figura (2.6) se muestra un atractor extraño del péndulo. Tanto en este capítulo, como a lo largo de la tesis, estaremos analizando exclusivamente el caso del caos disipativo en el cual, como se mencionó, existen atractores.

### 2.3 Sección de Poincaré<sup>20</sup>

Una técnica estandar concerniente al espacio de fase extendido  $(x, \dot{x}, t)$  del péndulo periódicamente forzado, es inspeccionar la proyección  $(x, \dot{x})$  cuando  $t$  es un múltiplo de  $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ , como se muestra en la figura (2.7). Aquí  $\tau$  es el período del forzamiento externo de la ecuación (2.5).

El resultado de inspeccionar las proyecciones de fase solo para tiempos específicos  $t = m\tau$ , es una secuencia de puntos en el plano  $(x, \dot{x})$ , que representan el mapeo de Poincaré, llamado así en honor del gran matemático francés Henri Poincaré, quien exploró por primera vez esta técnica.

Frecuentemente es llamada una técnica estroboscópica, por razones obvias. Los movimientos transitorios aparecerán como puntos esparcidos y la emergencia de una solución estable daría lugar a puntos fijos del mapeo.

## 2.4 Diagramas de bifurcación

El espacio de fase y la sección de Poincaré proveen información de la dinámica del sistema para valores especificados de los parámetros. La dinámica puede también ser vista más globalmente sobre un intervalo de valores de los parámetros, permitiendo una comparación de los comportamientos periódico y caótico. Los diagramas de bifurcación poseen un resumen de la dinámica esencial y son, por lo tanto, una herramienta útil [16-17].

En la figura (2.8) se ha graficado un diagrama de bifurcación para el péndulo con  $q = 2$  y  $\omega = 3/2$ . El eje horizontal corresponde a la amplitud del forzamiento  $A$ , mientras que el vertical a la velocidad  $\dot{x}$ . Para explicar el diagrama haremos uso de la sección de Poincaré. Puede observarse en la gráfica que cuando  $0.8 \leq A \leq 1.0$ , el diagrama es una línea. La sección de Poincaré correspondiente a éstos puntos se verá como un solo punto, por lo tanto, se tienen órbitas de período uno. Cuando avanzamos sobre el diagrama de bifurcaciones (incrementando  $A$ ) nos encontraremos con un doblamiento de período, es decir, la dinámica pasa de ser de período uno a período dos y en la sección de Poincaré aparecerán dos puntos, en lugar de uno. De manera análoga, cada una de éstas trayectorias experimentará, para un cierto valor de  $A$ , un nuevo doblamiento de período, obteniendo así, órbitas de período cuatro, posteriormente de período ocho, dieciseis, etc.

Para un cierto valor crítico de  $A$ , la dinámica pasará de tener órbitas con períodos finitos a órbitas de períodos infinitos, es decir, aperiódicas. Para valores de  $A$  mayores al crítico, el sistema presenta una dinámica caótica. Este paso de una dinámica periódica a una caótica duplicando el período se le conoce como "ruta al caos por doblamiento de período".

En la figura (2.8), podemos observar que para un cierto valor de  $A$  la dinámica caótica cambia abruptamente a periódica. Las regiones en los diagramas de bifurcación donde sucede este fenómeno son conocidas como "ventanas". En la figura se observa una ventana para  $A \approx 1.12$  con órbitas de período tres. De manera inversa, cuando la dinámica pasa de ser periódica a caótica repentinamente, decimos que una bifurcación tangente ha ocurrido [19, 20].

## 2.5 Una caracterización del caos<sup>21</sup>

Más adelante, estaremos interesados en caracterizar la dinámica que presentan las partículas en los potenciales de rueda dentada. Diremos que tienen una dinámica caótica, si podemos observar las siguientes propiedades:

1) **Aperiódico**, lo cual significa que el estado de un sistema nunca se repite en dos ocasiones. A pesar de que las simulaciones en la computadora o las iteraciones gráficas siempre dejan alguna duda del comportamiento periódico del sistema, la presencia de largos ciclos o de una dinámica aperiódica en las simulaciones es una evidencia parcial del caos.

2) **Acotado**, que significa que para iteraciones sucesivas, las variables que caracterizan el sistema (en nuestro caso  $x$  y  $\dot{x}$ ) permanecen en un intervalo de valores y nunca se aproximan a  $\pm\infty$

3) **Determinista**, es decir, existe una regla definida sin términos azarosos gobernando la dinámica.

4) **Sensibilidad ante condiciones iniciales**, implica que dos puntos inicialmente cercanos se alejarán en forma exponencial en el tiempo. Este es un aspecto esencial del caos. Quiere decir que somos capaces de predecir que sucederá para tiempos cortos, pero para tiempos largos la predicción será imposible debido a que nunca podemos estar completamente seguros de los valores exactos de las condiciones iniciales de cualquier sistema real.

En este trabajo estaremos interesados únicamente en caos disipativo.

## 2.6 La corriente

En el futuro, estaremos interesados en caracterizar el comportamiento promedio de las partículas. Comenzaremos definiendo el promedio de ensamble de un sistema como:

$$\langle \dot{x}(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \dot{x}_i(t)$$

El promedio de ensamble se realiza de la siguiente manera: se escogen  $N$  condiciones iniciales para la ecuación del péndulo, de manera tal que su promedio (tanto de velocidades como de posiciones iniciales) es cero. Una vez que se deja evolucionar el sistema a un tiempo  $t_0$  se promedian todas las velocidades correspondientes a ese tiempo obteniendo  $\langle \dot{x}(t_0) \rangle$ , y así sucesivamente para diferentes tiempos.

Se definirá la corriente  $J$  de un sistema como el siguiente promedio:

$$J = \frac{1}{(n\tau)} \int_{m\tau}^{(m+n)\tau} \langle \dot{x}(t) \rangle dt$$

donde  $\tau = 2\pi/\omega$  representa el período de la fuerza externa;  $m, n$  son dos números enteros.

En la figura (2.9) se muestra un diagrama del promedio de ensamble  $\langle \dot{x}(t) \rangle$  contra el tiempo. Puede notarse, que después de un transitorio, la corriente se hace cero, la explicación es como sigue: Supongamos que una partícula se encuentra en el potencial al tiempo  $t$ . La acción de la fuerza externa es inclinar el potencial hacia un lado y hacia el otro (ya que la fuerza es periódica). Entonces, en un semiperíodo el potencial se inclinará hacia un lado haciendo que la partícula se desplace en una dirección. En el siguiente semiperíodo, el potencial se inclinará hacia el lado contrario y la partícula se moverá, en esta ocasión, en la dirección opuesta. Debido a la simetría del potencial y de la fuerza externa, no hay una dirección privilegiada del movimiento, por lo tanto, en promedio la partícula no se desplazará.

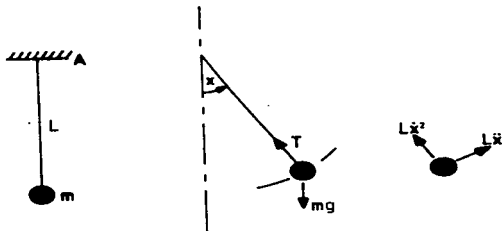


Fig. 2.1 Péndulo rígido con fuerzas actuando sobre él (tomado de [20])

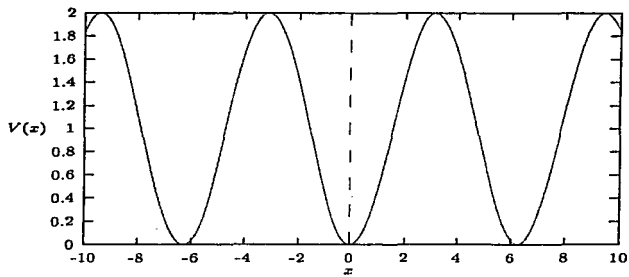


Fig. 2.2 Potencial del péndulo.

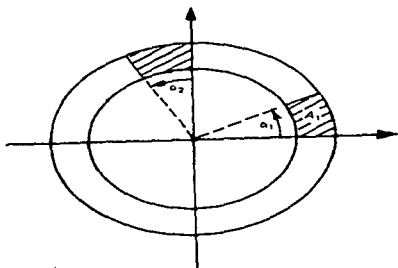


Fig. 2.3 Conservación de áreas en el espacio fase (tomado de [17]).

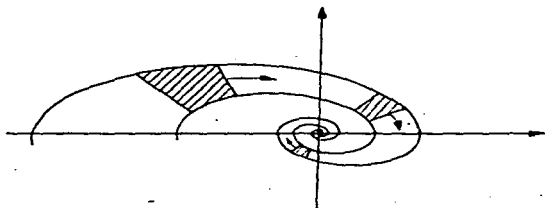


Fig. 2.4 Contracción de áreas en el espacio fase (tomado de [17]).

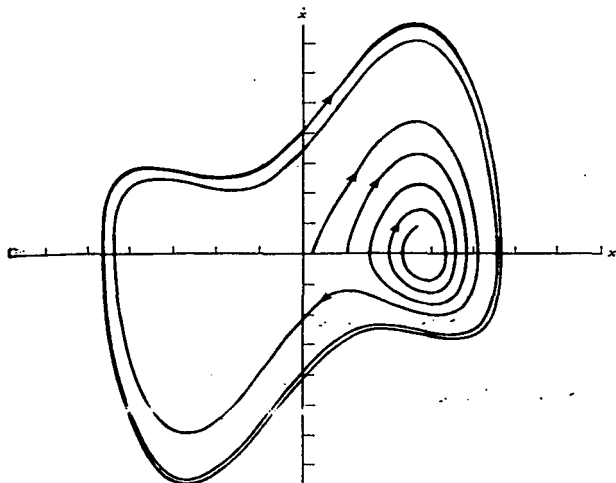


Fig. 2.5 Ciclo límite (tomado de [18])

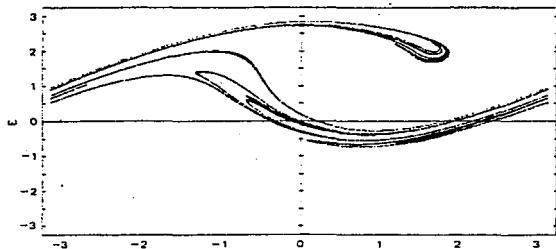


Fig. 2.6 Atractor extraño del péndulo  $\eta = 4, A = 1.5, \omega = 3/2$



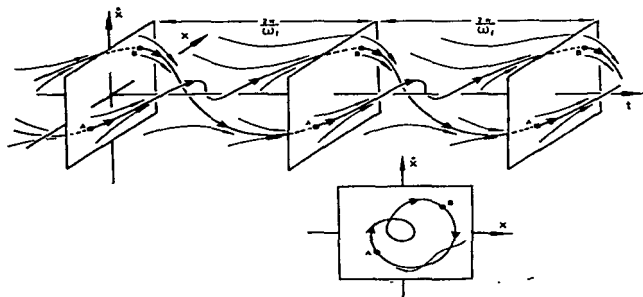


Fig. 2.7 Espacio fase tridimensional mostrando la sección de Poincaré (tomado de [20])

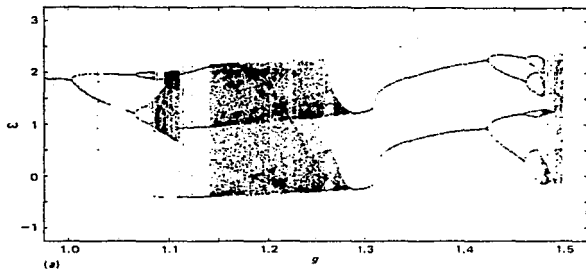


Fig. 2.8 Diagrama de bifurcación del péndulo  $\omega = 3/2, q = 2$  (tomado de [17])

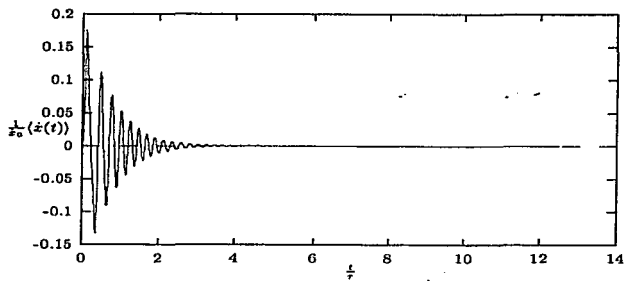


Fig. 2.9 La figura muestra el promedio de ensamble  $\langle \dot{x} \rangle$  contra el tiempo.

### 3 Transporte en Potenciales Asimétricos

#### 3.1 Transporte en ausencia de ruido

En esta sección estudiaremos el transporte en potenciales periódicos y asimétricos en ausencia de ruido. Nuestra discusión estará basada principalmente en los trabajos de R. Bartussek *et al.* [22] y Ajdari *et al.* [23].

Consideremos una partícula en un potencial periódico y simétrico bajo la acción de una fuerza externa simétrica en el tiempo, cuyo promedio temporal es cero. Puede mostrarse fácilmente [6] que la partícula permanecerá, en promedio, en un lugar fijo.

Cuando se presenta un rompimiento en la simetría temporal de la fuerza externa o en la simetría espacial del potencial, la evolución de la partícula en el tiempo resultará en una corriente macroscópica con promedio temporal diferente de cero.

A diferencia del capítulo anterior, consideremos ahora la dinámica de una partícula de masa  $m$  sujeta a una fuerza debida a un potencial unidimensional periódico  $V(x)$  con período  $L$ , es decir,  $V(x) = V(x+L)$ . Sin embargo, ahora este potencial es asimétrico, como se muestra en la figura (3.1). Para este potencial tendremos la forma:

$$V(x) = \frac{1}{k} [\text{sen}(kx) + \frac{1}{4} \text{sen}(2kx)] \quad (3.1)$$

donde  $k = \frac{2\pi}{L}$ .

La partícula además está sujeta a una fuerza externa oscilante de la forma  $F(t) = A \text{sen}(\omega t)$ . Esta fuerza es periódica, y su promedio temporal es cero.

La ecuación de movimiento está dada por:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \partial_x [V(x) - xF(t)] = 0 \quad (3.2)$$

donde  $\gamma \dot{x}$  es una fuerza de fricción. Si suponemos que  $\gamma \dot{x} \gg m \ddot{x}$  entonces

$$\gamma \dot{x} + \partial_x [V(x) - xF(t)] = 0 \quad (3.3)$$

Dado que no tenemos ruido, la ecuación es determinista.

Supongamos ahora  $A = 0$ , la corriente se anula (véase 2.5) debido a la presencia de la disipación.

En la fig. (3.2a, b) se ilustran algunas trayectorias deterministas  $x(t)$ . Una mirada a las gráficas revela que la dinámica determinista es, por si sola,

un problema no trivial. Primeramente, para grandes  $A$  no necesariamente implica una corriente  $J$  grande. Segundo, para una selección especial de los parámetros ( $A = 3, \omega = 7$ ) uno puede encontrar dos trayectorias estables. Por lo tanto, diferentes condiciones iniciales pueden resultar en diferentes cuencas de atracción para la solución  $x(t)$ . En la figura (3.2b) puede verse que la trayectoria 1 está centrada en un mínimo, mientras que la trayectoria 2 se localiza alrededor del máximo del potencial.

En la figura (3.1) se muestra el potencial  $V(x)$ . La acción de la fuerza externa (véase capítulo 4), hará que el potencial, oscile arriba y abajo manteniéndose fijo el origen. Para las figuras (3.2a, b), podemos observar que la corriente no cambia de signo. Además, la aparición de la corriente corresponde a un valor de la amplitud de la fuerza externa  $A_{\min} = 0.75$  cuya acción sobre el potencial es permitir que la partícula pase de un pozo del potencial a otro pozo hacia el lado en el cual la pendiente del potencial es mínima (derecha). El máximo de la corriente se obtiene para una amplitud de  $A_{\max} = 1.5$  en la cual las partículas están en el umbral de vencer la pendiente máxima del potencial. Teóricamente y numéricamente uno obtiene que  $A_{\max} = 1.5$  y  $A_{\min} = 0.75$

Para  $A > A_{\max}$  la partícula podrá moverse en ambas direcciones. Esto hace posible una corriente máxima alrededor de  $A_{\max}$ .

Otra propiedad intrigante de la corriente determinista es la cuantización del tamaño de los escalones en unidades de  $\frac{L}{2}$ . Claramente, en el límite asintótico, donde  $\dot{x}$  es una función periódica de  $t$  con período  $\tau$ , la posición de la partícula al tiempo  $t$  difiere de la posición al tiempo  $t + \tau$  por un múltiplo entero de  $L$ , esto inmediatamente implica una cuantización.

Finalmente mencionaremos la propiedad de distancia y ancho de los escalones. Entenderemos por distancia la medida desde la aparición de un escalón hasta la aparición del siguiente escalón. Las simulaciones hechas por Bartussek *et al* muestran una distancia constante en cada escalón, mientras que sus anchos decrecen monótonicamente dentro de una corriente constante como es mostrado en la figura(3.3b).

Por otro lado, si se rompe la simetría temporal en la fuerza externa, es decir,  $F(t) = F(t + \tau)$  y  $F(t) \neq -F(t + \frac{\tau}{2})$  donde  $\tau$  es el período, se experimenta una corriente diferente de cero. Adjari *et al.* [23] han estudiado en detalle este caso.

### 3.2 Transporte caótico: efectos del término inercial

Cuando el término inercial es considerado, es decir,  $\ddot{x} \neq 0$  puede observarse que aparecen nuevas propiedades en el transporte: las trayectorias pueden ser caóticas además de presentar un cambio neto en la dirección del flujo.

Jung *et al.* [24] caracterizan esta nueva dinámica utilizando cumulantes para distinguir el comportamiento periódico del caótico. Muestra que el primer cumulante de la densidad de probabilidad de las partículas describe una corriente estacionaria que exhibe cambios en su sentido cuando se incrementa la amplitud del forzamiento, mientras que el segundo cumulante establece una medida de su invariancia. Finalmente, muestra que el transporte caótico exhibe un comportamiento de escalamiento gaussiano.

### 3.3 Transporte Browniano

En este capítulo hemos considerado la ecuación

$$m\ddot{x} + \dot{x} = -\partial_x[V(x) - xF(t)] \quad 3.4$$

Vemos que cuando  $\ddot{x} = 0$  se puede obtener una corriente neta si existe un rompimiento en la simetría temporal o espacial del potencial o la fuerza externa respectivamente.

Estos trabajos difieren del resto en el hecho de que se trata de una dinámica determinista y no hay ruido. Sin embargo, estos mismos autores analizan el caso en que el ruido está presente y el término inercial es despreciable. En este caso, una de las diferencias es que puede ocurrir una inversión de corriente. Es decir, si tenemos ruido entonces la ecuación que resulta es

$$\dot{x} = -\partial_x[V(x) - xF(t)] + \xi(t) \quad 3.5$$

donde  $\xi(t)$  es un ruido blanco gaussiano.

En el siguiente capítulo mostraremos que aún en ausencia de ruido, pero considerando el término inercial podemos encontrar una inversión de corriente.

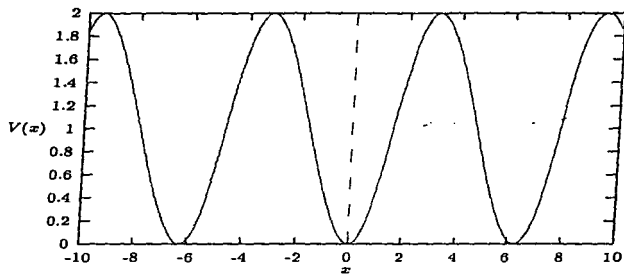


Fig. 3.1 Potencial asimétrico  $V(x) = (\text{sen}(kx) + \text{sen}(2kx))/4$

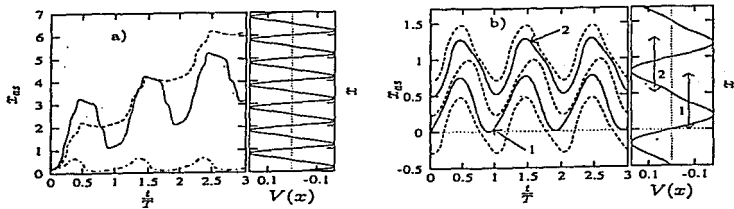


Fig. 3.2 Trayectorias asintóticas de  $x(t)$  contra el tiempo  $t$  a)  $\omega = 1.0$  b)  $\omega = 7.0$  (tomada de [22])

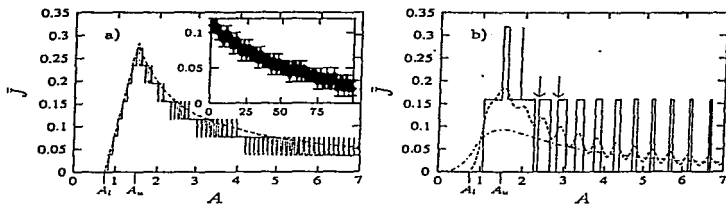


Fig. 3.3 Corriente  $J$  contra la amplitud de forzamiento a)  $\omega = 0.25$  b)  $\omega = 1.0$  (tomada de [22])

## 4 Transporte Caótico en Potenciales Asimétricos

### 4.1 Introducción

En este capítulo se describirán los resultados numéricos que fueron obtenidos en el estudio de la ecuación

$$\epsilon \ddot{x} + \dot{x} + \partial_x[V(x) - xF(t)] = 0 \quad (4.1a)$$

donde  $V(x) = \frac{1}{2}[\text{sen}(kx) + \frac{1}{2}\text{sen}(2kx)]$  con  $k = 2\pi$ , es el potencial al que se encuentra sometido la partícula y  $F(t) = A\text{sen}(\omega t)$  la fuerza externa. En todo el capítulo consideraremos que  $\omega = 0.25$ .

Posteriormente, será útil tener la ecuación (4.1a) en la siguiente forma:

$$\epsilon \ddot{x} + \dot{x} + V'(x) = F(t) \quad (4.1b)$$

### 4.2 Análisis del Comportamiento del Potencial y la Fuerza Externa

Consideremos el lado derecho de la ecuación (4.1a)

$$\partial_x[V(X) - xF(t)] \quad (4.2)$$

En la figura (4.1) se ha graficado el potencial  $V(x)$  contra  $x$ . El efecto de sumar dos senos con diferentes amplitudes y frecuencias ha creado una asimetría respecto al origen en el potencial.

Fijémonos en un mínimo del potencial. A la derecha del mínimo el potencial tiene una pendiente positiva, llamemos  $V_{\min}$  al valor absoluto de la pendiente máxima de esa pared del potencial. Numéricamente encontramos que  $V_{\min} \approx 0.83$ . De manera análoga, llamemos  $V_{\max}$  al valor absoluto del máximo de la pendiente de la pared izquierda del potencial, tenemos que  $V_{\max} \approx 1.5$ . Consideremos ahora los términos  $V(x) - xF(t)$ ; el efecto de la fuerza externa sobre  $V(x)$  es hacerlo oscilar respecto al origen. En la figura (4.2) se muestra  $V(x) - xF(t)$  cuando la amplitud de la fuerza externa  $A$  vale 0.83. Nótese que para este valor de la pendiente  $V_{\min}$  prácticamente vale cero.

Una situación análoga se exhibe en la figura (4.3) en donde  $A = 1.5$ . Vemos que el valor de  $V_{\max}$  es cercano a cero.



Los valores de  $A = 0.83$  y  $A = 1.5$ , son muy importantes ya que para ellos una partícula en el potencial podrá prácticamente desplazarse a la derecha o a la izquierda respectivamente.

### 4.3 La Corriente Promedio

En la figura (4.4) se muestra una gráfica de la corriente promedio  $J$  (véase la sección 2.6) contra la amplitud del forzamiento. Tomemos  $\epsilon = 0.5$ , puede observarse que la figura presenta la forma de una escalera. Para valores de  $0 \leq A \leq 0.8$  la corriente es cero. Esto puede ser fácilmente explicado: El efecto de la fuerza externa es hacer oscilar el potencial, pero, debido a que sus amplitudes son pequeñas, las partículas permanecerán en los pozos del potencial sin poder "brincar" de uno a otro, por lo tanto, no habrá un desplazamiento neto de las partículas en el potencial y  $J = 0$ .

Cuando  $A$  es un poco mayor se presenta un fenómeno importante: la corriente deja de ser cero. Nótese que este valor de la amplitud es tal que  $V_{\min} \approx 0$  y las partículas pueden moverse hacia el lado derecho del potencial.

¿Porqué se presenta un máximo en la escalera? Cuando  $A$  varía de 0.8 a 1.5 las partículas solamente pueden moverse hacia la derecha del potencial, ya que la amplitud de la fuerza externa no es lo suficientemente grande para que las partículas puedan "vencer" la pared izquierda del potencial. Cuando  $A = 1.5$  las partículas comenzaran a moverse hacia ambos lados del potencial. Conforme  $A$  siga aumentando, el potencial comenzará a presentarles menos resistencia y en cada oscilación viajarán tanto a la izquierda como a la derecha, por lo que  $J$ , al ser promedio, disminuye.

Para valores de  $A > 4$  encontramos que la corriente fluctua sobre una línea base, como es mostrado en la figura (4.4).

Finalmente, como se discutió en el capítulo 3, uno puede observar una cuantización en la corriente. Esto se debe a que la partícula durante un período "salta" un número fijo de pozos.

### 4.4 Análisis de trayectorias y espacio fase

En las figuras (4.5-7) se muestran las gráficas de la posición contra el tiempo, la velocidad como función del tiempo y el espacio fase, respectivamente, para  $A = 1.3$  y  $\epsilon = 0.5$ . Puede verse en la gráfica (4.4) que para éstos parámetros la dinámica corresponde al séptimo escalón del lado izquierdo de la escalera.

Utilizando el método de mínimos cuadrados se calculó la pendiente de la recta que mejor ajusta la curva en la figura (4.5), obteniendo un valor de aproximado de 7, consistente con el valor promedio. Se ve que para un semiperíodo la partícula avanzará mientras que para el otro semiperíodo permanecerá prácticamente inmóvil (Para este valor de la amplitud de la fuerza externa, todavía no se puede rebasar la pendiente izquierda del potencial).

Otra manera de caracterizar la órbita particular, puede ser a partir de la gráfica de  $\dot{x}$  contra  $t$  (fig. 4.6).

La gráfica presenta una serie de picos. Hagamos ciertas consideraciones para poder explicarlos: si el término disipativo  $\dot{x}$  es comparable con el forzamiento  $F(t)$ , entonces podemos considerar que la energía total del sistema está fluctuando alrededor de una constante  $E$ , ya que la energía que se pierde debido a la disipación, se compensa con la que recibe del exterior. (Cuando analicemos el espacio fase, veremos que esta hipótesis es correcta). Tendremos que la energía cinética  $T$  de la partícula y su energía potencial  $V$  van a satisfacer que:

$$T + V \approx E.$$

Entonces, cada vez que la partícula "salte" un pozo veremos que su velocidad presentará un mínimo relativo (ya que la energía del sistema es aproximadamente una constante). En la figura podemos contar 7 mínimos, lo que significa que en cada período la partícula se desplazará 7 pozos, acorde a lo anterior.

El espacio fase es mostrado en la figura (4.7). Nótese que la separación entre cada mínimo relativo de la velocidad corresponde exactamente a la separación entre dos pozos contiguos del potencial, validando así nuestra hipótesis.

Puede observarse en la figura oscilaciones alrededor del cero, éstas corresponden al semiperíodo cuando está inclinado y no logra superar la pendiente máxima. Como la partícula no posee la suficiente energía para cruzar los máximos de la izquierda del potencial, se quedará oscilando en un pozo. Esto corresponde a las partes planas en la figura (4.5).

## 4.5 Atractores Extraños

Al ir incrementando los valores de la amplitud de forzamiento  $A$  la dinámica del sistema deja de ser periódica para transformarse en caótica.

Las figuras (4.8 y 9) muestran un atractor extraño para los valores de  $A = 1.5$ ,  $\omega = 0.25$  y  $\epsilon = 0.25$ . Dado que el potencial tiene período  $L$ , tomaremos la variable  $x$  en forma acotada, identificando  $x$  con  $x + L$ , es decir, tomaremos un mapeo con  $x$  módulo  $L$ .

La figura (4.8) sugiere la existencias de dos atractores, es probable que la competencia entre ellos de lugar a bifurcaciones tangentes.

Una ampliación del atractor se muestra en la figura (4.9). Nótese que el atractor presenta una estructura autosimilar.

#### 4.6 Diagramas de bifurcación

En la figura (4.10) se muestra un diagrama de bifurcación. Varios comentarios pueden hacerse después de analizar la gráfica:

1) Para valores de la amplitud  $A$  desde 0 hasta 1.5 la dinámica es periódica.  
2) A partir de 1.5 aparece un cambio brusco en la dinámica y pasa de ser periódica a caótica. Este fenómeno es conocido como bifurcación tangente [18].

3) El valor de la amplitud  $A \approx 1.5$  no es arbitrario, sino que, corresponde con el valor máximo de la corriente y el punto para el cual todas las partículas en una oscilación pueden viajar hacia ambos lados del potencial. Este valor, está estrechamente ligado con la forma del potencial.

La figura (4.11) muestra una ampliación del diagrama de bifurcación. Puede observarse que la bifurcación tangente no es la única ruta al caos que presenta la dinámica del sistema, sino también por doblamiento de período.

Puede también apreciarse la aparición de bifurcaciones invertidas en la dinámica. Este comportamiento aparece en el caso del péndulo (ver fig. (2.8)).

Las ventanas, otra característica de los diagramas de bifurcación donde la dinámica pasa de ser caótica a periódica, aparecen muy a menudo en esta dinámica a todas las escalas. Compárese el diagrama de bifurcación con su ampliación.

#### 4.7 Transporte normal y anómalo

Hemos encontrado en las figuras (4.12 y 13) que las partículas en estos potenciales presentan un transporte difusivo normal y anómalo dependiendo del valor de los parámetros.

En la figura (4.12), se muestra la gráfica del  $\ln(\langle x^2 \rangle)$  como función de  $\ln(t)$ , la pendiente de la recta para valores asintóticos es aproximadamente dos; de aquí puede concluirse que  $\langle x^2 \rangle \propto t^2$  para tiempos grandes, es decir, la dinámica corresponde a un proceso difusión anómala o superdifusivo. Cuando la masa de la partícula es aumentada de  $\epsilon = 1$  a  $\epsilon = 120$  (fig. 4.13) obtenemos que el valor del exponente es cercano a 1 y la partícula presenta un comportamiento difusivo normal, es decir,  $\langle x^2 \rangle \approx t$ .

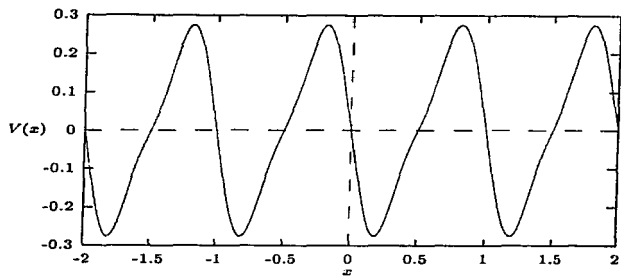


Fig. 4.1 Potencial  $V(x) = [\text{sen}(kx) + \text{sen}(2kx)/k]/k$  contra  $x$ .

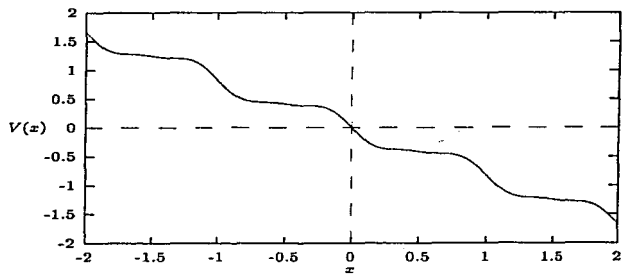


Fig. 4.2 Gráfica del potencial  $V(x) + xF(t)$  para una amplitud de forzamiento  $A = 0.83$

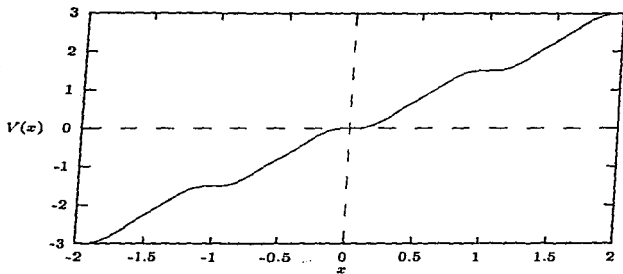


Fig. 4.3 Gráfica del potencial  $V(x)+x\mathcal{F}(t)$  para una amplitud de forzamiento  $A = 1.5$

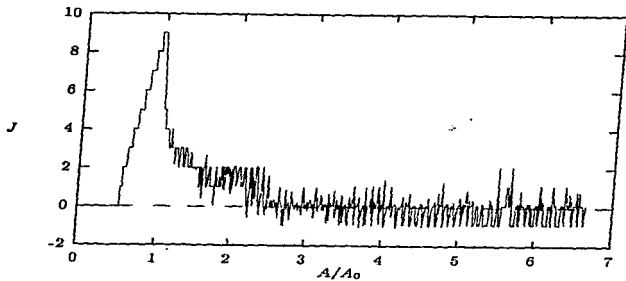


Fig. 4.4 Corriente promedio  $J$  contra la amplitud de forzamiento  $A$ ,  $\epsilon = 0.5$

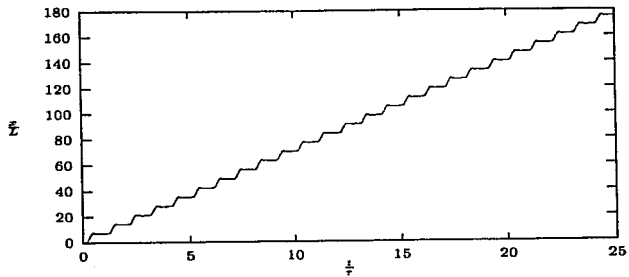


Fig. 4.5 Gráfica de la posición contra el tiempo  $\epsilon = 0.5$

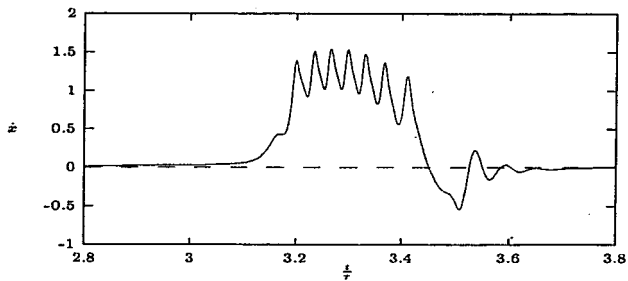


Fig. 4.6 Gráfica de la velocidad contra el tiempo  $\epsilon = 0.5$

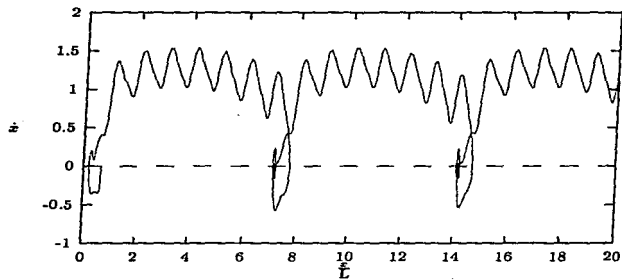


Fig. 4.7 Espacio fase  $\epsilon = 0.5$



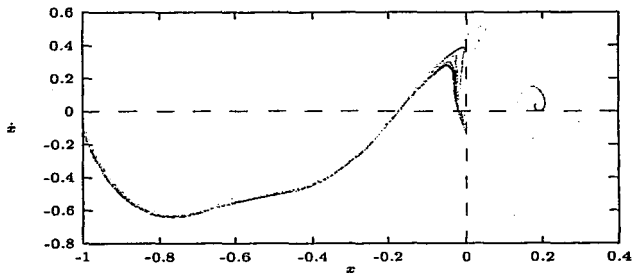
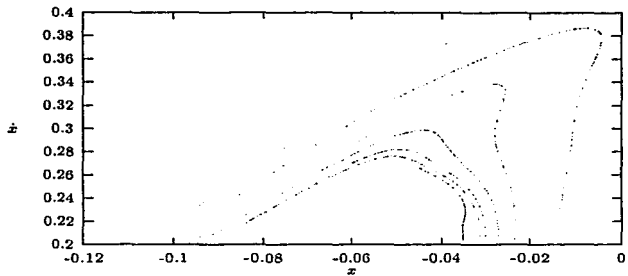


Fig. 4.8 Atractor extraño

Fig. 4.9 Ampliación del atractor extraño



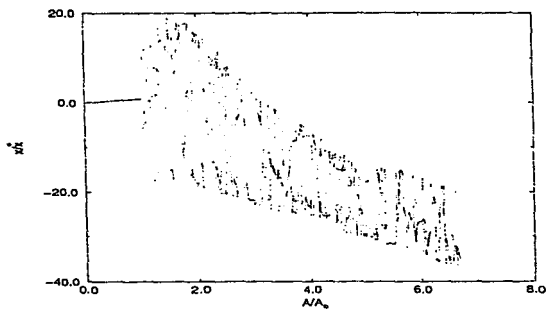


Fig. 4.10 La gráfica muestra el diagrama de bifurcaciones para  $\epsilon = 0.5$

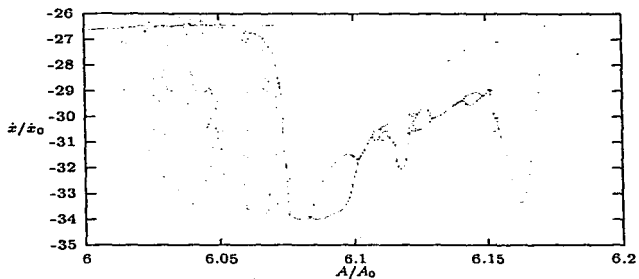


Fig. 4.11 ampliación del diagrama de bifurcaciones.

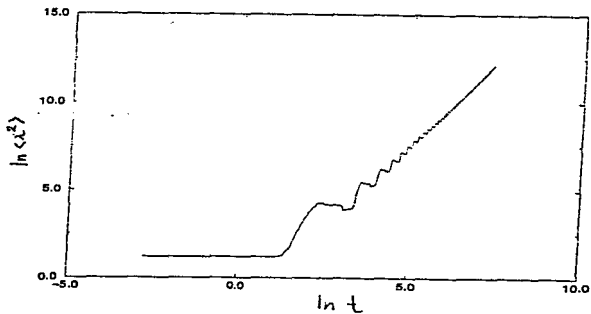


Fig. 4.12 Transporte balístico  $\epsilon = 1.0, A = 3.0$

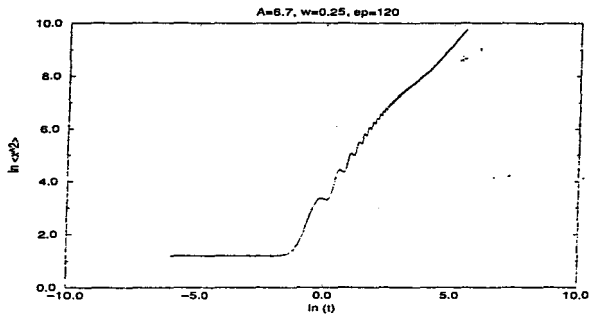


Fig. 4.13 Comportamiento difusivo de las partículas en el potencial. Aquí  $\epsilon = 120, A = 3.0$

## 5 Conclusiones

El movimiento de las proteínas motoras a través del citoesqueleto celular, ha motivado una gran cantidad de trabajos, dentro de los cuales se encuentra nuestro estudio. En el trabajo hemos estudiado, el comportamiento de las partículas en potenciales periódicos y asimétricos cuando son sometidas a la acción de una fuerza externa cuyo promedio temporal es cero. A diferencia de la mayoría de los trabajos existentes en la literatura, se ha puesto énfasis en un enfoque puramente determinista, por ser un caso poco estudiado.

Hasta el momento, los resultados de las simulaciones numéricas han establecido que las condiciones necesarias para que pueda existir un transporte diferente de cero son:

- i) Asimetría espacial en el potencial, ya que, como se describió en el capítulo dos, una simetría en el potencial causaría necesariamente una corriente igual a cero.
- ii) Forzamiento externo, ya que de ser cero, el sistema únicamente estaría disipando energía y la dinámica se reduciría, después de un tiempo finito, a un punto.
- iii) Si el término disipativo fuera cero, el sistema podría acoplarse con la fuerza externa y permanecer oscilando después de un transitorio.

En nuestro sistema, a partir de un valor crítico de la amplitud de forzamiento, para la cual la partícula puede vencer el potencial, obtendremos una corriente diferente de cero. Es importante mencionar que la corriente (fig. (4.4)), presenta estados "cuantizados", esto es debido a que, después de un periodo del forzamiento externo, la partícula se mueve un número entero de pozos en el potencial. Como se explicó en el capítulo 4, el estudio de una órbita particular, puede ofrecer una explicación factible del comportamiento de la corriente.

Otro caso interesante de mencionar, cuando la corriente es diferente de cero, es que el sistema presenta una dinámica periódica o caótica, dependiendo del valor de los parámetros. Las rutas al caos que presenta el sistema pueden ser por doblamiento de período o por bifurcaciones tangentes. Como se mostró en el capítulo 4, cuando tenemos órbitas caóticas, la dinámica del sistema está atrapada en un atractor extraño.

Si consideramos la dinámica del sistema tomando en cuenta la periodicidad del potencial, vemos que en el caso caótico, a diferencia del periódico, los posibles valores que puede asumir la velocidad, dada una posición fija en

el potencial, pertenecen a un conjunto de Cantor.

Como fue mencionado en el capítulo 3, la inversión en la corriente aparece cuando se introduce, además de la fuerza externa, ruido. En nuestro caso, que es determinista, aparece nuevamente una inversión en la corriente. La justificación de dicho fenómeno, es que el caos intrínseco que se está generando, juega el papel del ruido externo.

Finalmente, encontramos que para valores muy pequeños de la masa ( $\epsilon \ll 1$ ) el transporte que presentan las partículas es superdifusivo, es decir,  $\langle x^2 \rangle \approx t^2$ . Cuando el valor de la masa se incrementa lo suficiente, ( $\epsilon \gg 1$ ), las partículas experimentarán un proceso difusivo normal ( $\langle x^2 \rangle \approx t$ ).

## 6 Referencias

- [1] B. Alberts, D. Bray, J. Lewis, M. Raff, K. Roberts y James D. Watson. "Molecular Biology of the Cell", (Grand Publishing, New York 1994).
- [2] M. Magnasco, "Brownian Combustion Engines in Fluctuation and Order, the New Synthesis" (Springer, New York 1996), cap 17.
- [3] R. Feynman, El carácter de la ley física, (Antoni Bosh editor, Barcelona España 1993), pp. 99-102.
- [4] R. Feynman, R. B. Leighton y M. Sands, The Feynman Lectures on Physics, (Addison Wesley, Reading, MA, 1966), Vol. 1, cap 46.
- [5] M. von Smolochowski, Phys. Z. **XIII**, 1069, (1912).
- [6] P. Hänggi y R. Bartussek, Nonlinear Physics of Complex Systems, Lecture Notes in Physics, Vol. 476, (Springer, Berlin, 1996) pp.294-308.
- [7] R. Bartussek, P. Hänggi y J. G. Kissner, Europhys. Lett. **28**, 459 (1994).
- [8] A. Adjari, Phys. Rev. Lett. **72**, 2652, (1994).
- [9] R. D. Astumian y M. Bier, Phys. Rev. Lett. **72**, 1766 (1994).
- [10] M. Magnasco, Phys. Rev. Lett. **71**, 1477 (1993)
- [11] A. Adjari, D. Mukamel, L. Peliti y J. Prost, J. Phys. I (France), **4**, 1551 (1994).
- [12] P. Talkner, R. Badii, R. Bartussek y P. Hänggi, Stroboscopic description of rocking ratches, preprint (1996).
- [13] I. Derényi y T. Visek, Phys. Rev. Lett. **75**, 374 (1995).
- [14] I. Zapata, R. Bartussek, F. Sols, y P Hänggi, Phys. Rev. Lett. **77**, 2292 (1996).
- [15] P. Riemann, R. Bartussek, R. Häuller y P. Hänggi, Phys. Rev. Lett. **A 215**, 26 (1994)
- [16] A. Mielke, Ann. Physik **4**, 476 (1995).
- [17] G. L. Baker y J. P. Gollub, "Chaotic Dynamics an introduction", (Cambridge University Press, New York, 1990).
- [20] J. M. Thomsom y H. B. Stewart, Nonlinear Dynamics and Chaos, (Wiley, Great Britain, 1991), Caps 2,3.
- [18] E. Atlee Jackson, "Perspectives of nonlinear dynamics 1" (Cambridge U. Press, USA, 1991)
- [19] A. J. Lichtenberg y M. A. Liberman, "Regular and Chaotic Dynamics", (Springer-Verlag, 1992, New York), Cap. 1.
- [20] J. M. Thomsom y H. B. Stewart, "Nonlinear Dynamics and Chaos", (Wiley, Great Britain, 1991), Caps 2,3.

- [21] D. Kaplan y L. Glass. "Understanding Nonlinear Dynamics" (Springer-Verlag, New York, 1995), cap. 1.
- [22] R. Bartussek, P. Hänggi y J. G. Kissner, *Europhys. Lett.* **28**, 459 (1994).
- [23] A. Adjari, D. Mukamel, L. Peliti y J. Prost, *J. Phys. I (France)* **4**, 1551 (1994).
- [24] P. Jung, J. G. Kissner, y P. Hänggi, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3436 (1996).