



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

## UNA FAMILIA INFINITA DE POLIEDROS REGULARES

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
M A T E M A T I C O  
P R E S E N T A:

LUIS EDUARDO BLACKALLER BAGES



DIRECTOR DE TESIS:

DR. JORGE AROCHA PEREZ



MEXICO, D. F.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

1997



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

M. en C. Virginia Abría Estela  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

**Una Familia Infinita de Poliedros Regulares**

realizado por **Luis Eduardo Blackaller Bages**

con número de cuenta **8624623-9**, pasante de la carrera de **Matemático**

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Acentuamos

Director de Tesis  
Propietario  
Propietario  
Propietario  
Suplente  
Suplente

Dr. Jorge Luis Arocha Pérez

Dr. Javier Bracho Carpizo

Dr. Victor Neumann Lara

Dr. Luis Montejano Peimbert

Mat. Ricardo Strausz Santibañez

Consejo Departamental de Matemáticas



Dr. Manuel Falconi Magaña

ESCUELA DE CIENCIAS  
EXACTAS Y DEPARTAMENTAL  
DE  
MATEMÁTICAS

# Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer Jorge Arocha por haber sido un gran director de tesis, por haber fortalecido mi confianza en mi trabajo, por haberme tenido tanta paciencia y por haber apuntado siempre en la dirección correcta.

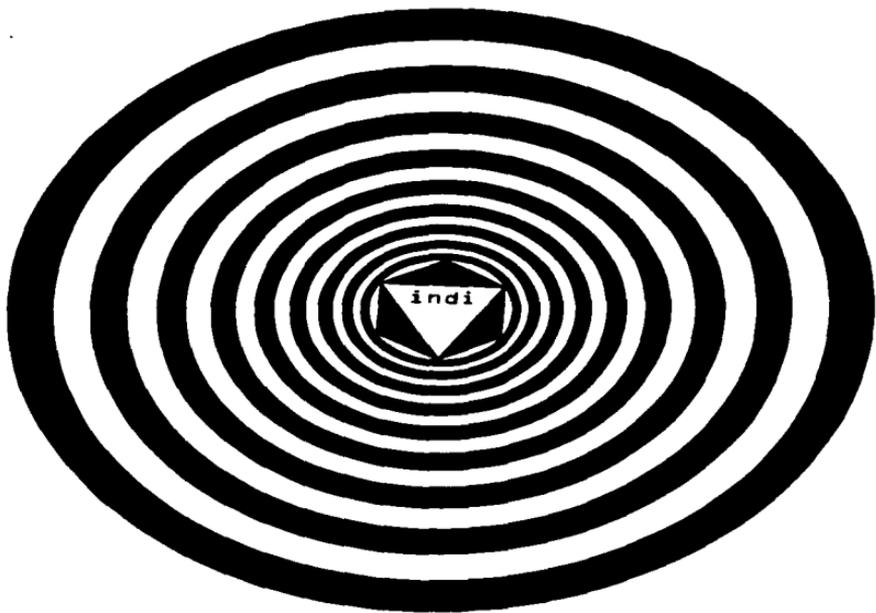
En segundo lugar al Roli y a Victor Newmann, cuyas observaciones y consejos me ayudaron a resolver un par de problemas que me tenían muy atorado. Y también a Mauricio Alvarez Manilla, que hizo gratis un programa para revisar a pata si R, es autodual, y al Dino, ya no me acuerdo ni porqué.

Quiero agradecer en tercer lugar a todos mis maestros durante la carrera, en especial a Angel Carrillo, a Jose Alfredo Amor, a Luis Montejano, a Elisa Viso, al Doctor Barajas, a Mónica Clapp y a Javier Paez (con todo y que me puso B) por el interés que pusieron en mi aprendizaje y por su amistad. A Luis Montejano, Victor Newmann, al Dino y al Roli además les agradezco haber aceptado ser mis sinodales.

También quiero agradecer a Carlos del Castillo y a Raul Hernández, al primero de ellos por haberme enseñado a usar la Macintosh y salvarme del Tex, y al segundo por haberme prestado su Mac durante casi un año, tiempo en que capturé casi todos los textos y dibujé casi todas las figuras de esta tesis.

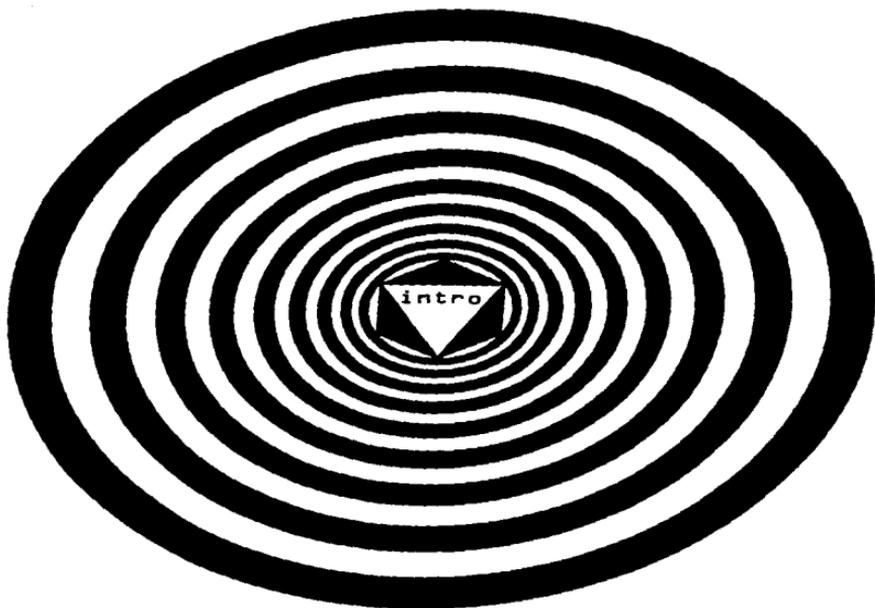
Agradezco la comprensión de todos aquellos a quienes olvidé agradecer, pero que seguramente fueron determinantes en la preparación de esta tesis.

Y por último agradezco al absoluto porque me ha dado un padre y una madre que me apoyan en todo y nunca impidieron que me volviera loco.



# Índice

<b>Introducción.</b>	2
<b>Capítulo 1:</b>	
Gráficas.....	6
Mapas poliedrales.....	12
<b>Capítulo 2:</b>	
El mapa simétrico $R_n$ .....	26
<b>Capítulo 3:</b>	
Grupo de automorfismos de $R_n$ .....	40
<b>Capítulo 4:</b>	
Orientabilidad.....	63
<b>Capítulo 5:</b>	
$R_7$ no es autodual.....	69
<b>Bibliografía.</b>	74



# Introducción

El concepto de Poliedro regular es un viejo conocido de la Geometría y las Matemáticas, y ha resultado, a lo largo de los siglos, sumamente importante y difícil de controlar. Representó, en principio, una abstracción simple del concepto de Simetría, pues hacía contar a los antiguos con un modelo sólido que les permitía maravillarse ante la armonía de estructuras que apenas llegaron a vislumbrar. La Simetría para el matemático moderno es un aspecto de la Combinatoria, en el sentido de que examina las formas posibles en que se pueden intercambiar entre sí los elementos de una estructura sin que esta deje de ser ella misma. Esto, relacionado con el estudio de los Poliedros regulares, ha desencadenado abstracciones cada vez más profundas en términos de sus definiciones, que han permitido agregar infinitudes (me refiero a infinitudes) de nuevos miembros a la familia original de cinco Poliedros regulares que los griegos conocieron.

Hay una evidente inclinación del ser humano hacia el concepto de Simetría. Tal vez porque la simetría de un objeto nos hace fortalecer la ilusión de una vida más simple. Un primer acercamiento hacia nociones abstractas de Simetría debe lograrse a través de los ojos o la piel, cuando la percepción se enfrenta a un objeto o una experiencia que parecen idénticos en todas sus partes (o desde cualquier perspectiva). Un esfuerzo de abstracción debe haber sido casi inmediato, en busca de un universo acogedor donde las repeticiones fueran, además de predecibles, todo.

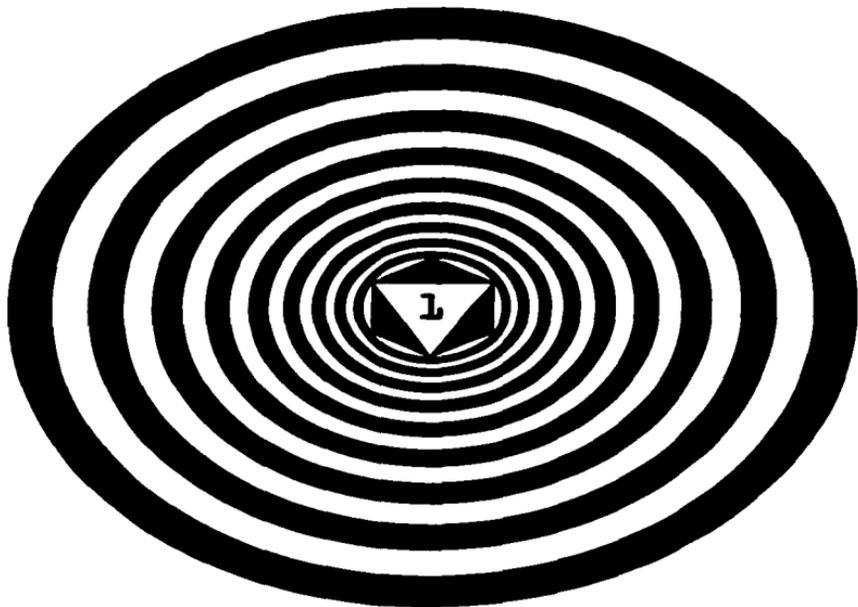
Hace como 2600 años Pitágoras dedujo que la forma de nuestro mundo era la de una Esfera, y sus seguidores fundaron en torno suyo un culto en que no se aceptaban las imperfecciones de la naturaleza. En la escuela de los pitagóricos el concepto de Simetría era como un dios, y los cinco Sólidos platónicos eran los íconos que lo representaban. Los pitagóricos practicaban una rigidez que les impedía corregir sus errores, y tal vez la poderosa influencia que lograron sobre Platón y la Cristiandad frenaron el desarrollo de abstracciones en torno a la Simetría hasta el renacimiento, cuando que un pintor llamado Paolo Ucello, por allí de 1420, casi 200 años antes que Kepler, y seguramente sin saber lo que hacía, descubrió el gran Dodecaedro estrellado  $\{5/2, 3\}$ , uno de los cuatro Sólidos de Kepler-Poinsot, que es una Variedad poliedral de género 4 con autointersecciones, tan simétrico como cualquiera de los cinco sólidos platónicos. La relación de Kepler con los pitagóricos fue bastante misteriosa; fuertemente influenciado por ellos durante su formación, terminó con la idea pitagórica de que los Cuerpos celestes describen órbitas en torno a Circunferencias perfectas a una velocidad constante, y acabó con la supremacía de los Sólidos platónicos como únicos objetos localmente planos con una Simetría perfecta en tres dimensiones. Después de Kepler no fue sino hasta 1861 que un matemático volvió a interesarse por los Poliedros, cuando Möbius describió la estructura combinatoria de un Toro minimal en Vértices, cuya realización poliedral fue hallada por Császár en 1949. Pero éste no era regular. No fue sino hasta 1937, que Coxeter y Petrie descubrieren un conjunto nuevo de tres Poliedros Regulares, un  $\{4,6\}$ , un  $\{6,4\}$ , y un  $\{6,6\}$ . Esta vez, la novedad consistió en permitir que los centros de las caras alrededor de un vértice no necesariamente formaran Polígonos planos. El resultado fueron tres Mosaicos tridimensionales infinitos. Pero la definición de Poliedro dada por Coxeter en 1937, a pesar de ya estar hecha en términos de relaciones combinatorias entre Polígonos planos, consideraba la Geometría como fundamental, y el método utilizado por Coxeter en su trabajo era muy poco preciso, casi

**incapaz de volver productivo a un lector. Después de aquello hubo un periodo de aparente calma que se prolongó hasta el principio de los años setentas, pero a partir de entonces el estudio de los Poliedros Regulares ha gozado de grandes contribuciones que han desencadenado el desarrollo de una teoría que utiliza indistintamente modelos geométricos, combinatorios, topológicos y algebraicos, y que ha llevado a los Poliedros Regulares a convertirse, ellos mismos, en modelos que ayudan a comprender las estructuras Grupos y Espacios métricos complicados.**

**El material desarrollado en esta tesis define y caracteriza una nueva lista de Poliedros regulares que arrojan algo de luz sobre la estructura combinatoria del Grupo simétrico de orden  $n$ , e ilustran algunas características bastante particulares de los Poliedros regulares.**

BK

D.F. 01/07/1997.



# Capítulo 1

Aquí presentaré algunos conceptos básicos. Después de dar la definición de gráfica mostraré algunos ejemplos que me serán útiles en el futuro, y daré una definición de la versión combinatoria del concepto de Poliedro. Aprovecho este momento para precisar que, para simplificar y por motivos de contexto, me voy a limitar a hablar exclusivamente de conjuntos finitos.

## Gráficas

**Definición:** Una gráfica es un par  $G=(V, A)$  de conjuntos, tales que  $A \subseteq P(V)$ , y todo elemento de  $A$  tiene cardinal 2. A los elementos de  $V$  y  $A$  se les llama respectivamente vértices y aristas de la gráfica  $G$ . Al cardinal de  $V$  se le llama orden de  $G$ .

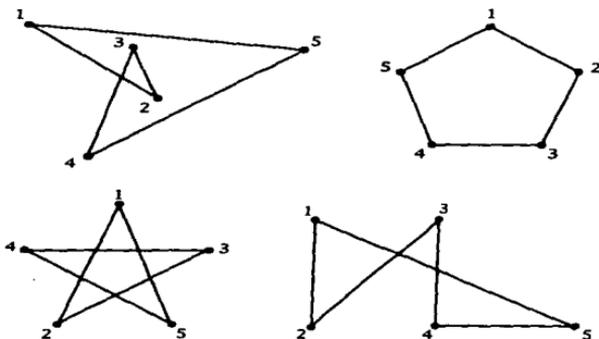
Se dice que dos vértices  $v, w$  en  $V$  son adyacentes si existe una arista  $a \in A$  tal que  $a=\{v, w\}$ . En ese caso es correcto escribir  $a=vw =wv$ . Si dos aristas distintas inciden sobre un vértice común, también se dice que son adyacentes.

Al número de aristas que inciden sobre un vértice se le llama valencia del vértice, y se le denota por  $V(w)$ . Si un vértice tiene valencia cero se le dice vértice aislado, y terminal si tiene valencia uno.

Se puede representar una gráfica por medio de un diagrama, dibujando un punto por cada vértice, y trazando una línea entre cada dos de

ellos si y sólo si los vértices que se les asignaron forman una arista. Por ejemplo: Sea la gráfica  $G = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 1\}\})$ . La figura 1 muestra cuatro posibles diagramas de dicha gráfica. Es fácil observar que algunos de estos diagramas resultan ser más bonitos que otros, y en eso hay que poner especial atención, pues muchas veces un diagrama bonito hace más evidentes algunas propiedades en la estructura del objeto; por ejemplo: siempre me llena de satisfacción ver un diagrama cuyas simetrías son exactamente los automorfismos de la gráfica que representa.

figura 1:

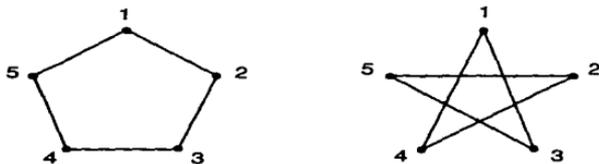


En la figura 1 se puede observar con claridad a lo que me refiero. Lo ideal, por supuesto, sería poder construir diagramas de un objeto pensando en función de aquellas propiedades suyas que se desea estudiar, y discriminar todo lo demás.

**Definición (Isomorfismo):** Sean  $G_1 = (V_1, A_1)$  y  $G_2 = (V_2, A_2)$  unas gráficas. Una función biyectiva  $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$  es un isomorfismo entre  $G_1$  y  $G_2$  si y sólo si  $\forall a \in P(V), a \in A_1 \Leftrightarrow \varphi(a) \in A_2$ .

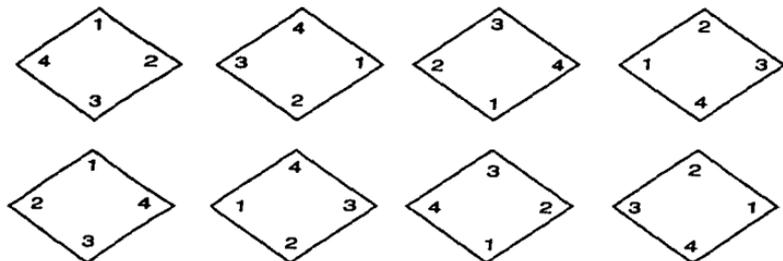
El concepto de isomorfismo sirve para distinguir en qué ocasiones dos objetos son el mismo en el sentido de que compartan una estructura. En el caso de una gráfica, su estructura está determinada por la relación de adyacencia entre sus vértices. La figura 2 muestra un par de gráficas que son isomorfas:

figura 2



**Definición:** Un automorfismo de una gráfica  $G=(V, A)$  es un isomorfismo de  $G$  en sí misma. El conjunto  $A(G)$  de los automorfismos de  $G$  con la operación composición de funciones forma un Grupo, que se conoce como el grupo de automorfismos de  $G$ . La figura 3 muestra todos los posibles automorfismos del cuadrado.

figura 3



Ahora voy a presentar algunos casos especiales de gráficas que llevan una relación estrecha con mi trabajo.

**Definición 1:** Una subgráfica  $G'=(V', A')$  de la gráfica  $G=(V, A)$  es tal que  $V' \subseteq V$  y  $A' \subseteq P(V') \cap A$ . En la figura 4 se puede ver una subgráfica del tetraedro.

figura 4



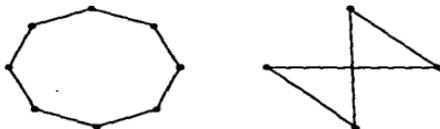
**Definición 2:** Una Gráfica  $G=(V, A)$  es conexa si para todos  $v, w$  en  $V$  existe una sucesión finita  $v=v_0, a_0, v_1, a_1, v_2, a_2, v_3, a_3, \dots, v_{n-1}, a_{n-1}, v_n=w$ , con  $n$  natural, tal que  $a_i=v_i v_{i+1}$  para todo  $i$  entre cero y  $n-1$ . Obviamente, una gráfica conexa no tiene vértices aislados.

figura 5



**Definición 3:** Un Ciclo es una gráfica conexa cuyos vértices tienen todos valencia 2. A un ciclo de orden  $p$  lo denotaré por  $\{p\}$  y lo llamaré polígono de  $p$  vértices, o, si  $p > 4$ ,  $P$ -gono. Si  $p=3$  lo llamaré triángulo (aunque no lleve ángulos), y si  $p=4$  lo llamaré cuadrado (aunque no sea cuadrado). La figura 6 muestra un octágono y un cuadrado.

figura 6



Y tengo una notación especial para ciclos que más adelante me resultará muy conveniente: Sea  $C = (V, A)$ , un ciclo. Puedo nombrar adecuadamente los vértices de  $C$  para que  $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$ , y  $A = \{v_1v_{i+1} : i < p\} \cup \{v_pv_1\}$ ; entonces escribo que  $C = [v_1, \dots, v_p]$ . Esta notación puede dar muchos símbolos para el mismo ciclo porque me basta permutar los vértices por medio de un automorfismo del ciclo para obtener un nuevo símbolo. Puedo tener tantos símbolos como automorfismos del ciclo, es decir, tantos como elementos en el grupo dihédrico de orden  $p$  (eso es  $2p$ ). Y no importa, porque esta libertad puede resultar de provecho. Cuando yo quiera  $C$  podrá ser  $[v_p, v_{p-1}, \dots, v_1]$ , o  $[v_2, v_3, \dots, v_p, v_1]$ , o cualquier otro que se pueda.

Al número de vértices en una gráfica  $G$  le llamaré orden de  $G$  y al número de aristas longitud de  $G$ . En el caso de un ciclo, ambos números son iguales. Voy a decir que dos ciclos son distintos si tienen al menos una arista distinta.

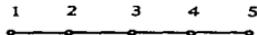
**Definición 4:** Un árbol es una gráfica conexa sin ciclos.

Un árbol tiene al menos dos vértices terminales, y, si el orden de un árbol es  $p$ , entonces tendrá  $p-1$  aristas [Haral].

**Definición 5:** Una trayectoria  $C$  es un árbol con sólo dos vértices terminales. Se le puede ver como una sucesión  $v_1, a_1, v_2, a_2, \dots, v_{n-1}, a_{n-1}, v_n$  donde si  $C = (V, A)$  entonces  $V = \{v_i\}$  y  $A = \{v_iv_{i+1}\}$ .

En las trayectorias el orden supera por uno el valor de la longitud. La figura 7 ilustra una hermosa trayectoria de orden igual a cinco y longitud igual a cuatro.

figura 7

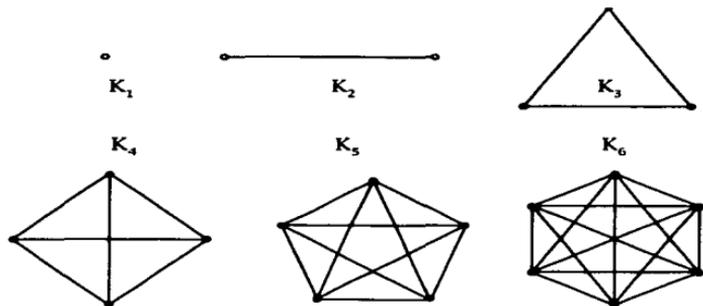


Una trayectoria y un ciclo se parecen al menos en que ambos pueden ser denotados con el mismo símbolo, pero para distinguir unos de otros usaré los paréntesis redondos a la hora de escribir el símbolo de una trayectoria, por ejemplo:  $C=(v_1, v_2, \dots, v_n)$ . Aquí también tendré tantas maneras distintas de escribir una trayectoria como elementos en su grupo de automorfismos, pero como tal grupo es el simétrico de orden dos para todas las trayectorias, nada más voy a tener dos maneras distintas de escribir una trayectoria, a saber, la que ya escribí y la de  $C=(v_n, v_{n-1}, \dots, v_2, v_1)$ .

Ciclos y trayectorias parecen ser demasiado simples como para ponerles mucha atención, pero son las piezas con que construiré los objetos de que trata mi trabajo.

**Definición 6:** La gráfica completa denotada por  $K_n=(V_n=\{1, 2, 3, \dots, n\}, A_n=\{a \in P(V_n): |a|=2\})$  es la gráfica de orden  $n$  que tiene aristas entre cualesquiera dos de sus vértices. Dicho en otra forma,  $K_n$  tiene todas las aristas que puede tener. En la figura 8 se pueden ver las 6 gráficas completas más pequeñas.

figura 8



Normalmente, el grupo de automorfismos de una gráfica es un subgrupo propio del grupo de permutaciones de sus vértices pero, en este caso, el grupo de automorfismos de  $K_n$  es exactamente el grupo de permutaciones de un conjunto de cardinal  $n$ , el grupo simétrico de orden  $n$  denotado por  $S_n$ , y representa la máxima simetría que podemos esperar no sólo en una gráfica, sino en cualquier tipo de objeto. Es gracias a la perfecta simetría de  $K_n$  que mi trabajo tiene sentido.

## Mapas Poliedrales.

**Definición.** Un mapa poliedral es una terna  $M=(V, A, C)$  tal que  $C$  es un conjunto de ciclos (o polígonos, y sus elementos se llamarán caras de  $M$ ),  $A$  es el conjunto de las aristas de todos los polígonos de  $C$ , y  $V$  es el conjunto de los vértices de todos los polígonos de  $C$ . Y que cumple tres axiomas:

**M1:** Cada arista está en exactamente dos polígonos.

figura 9

sí

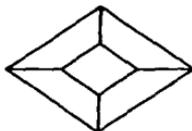
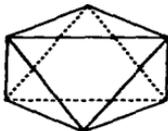


no



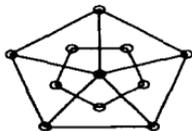
**M2:** La gráfica formada por vértices y aristas es conexa (a tal gráfica se le llama 1- esqueleto del mapa poliedral).

figura 10

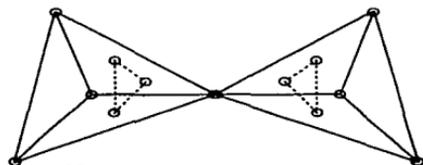


**M3:** Las gráficas que tienen por vértices las caras que inciden sobre un vértice son ciclos de cardinal mayor que 2 (tales gráficas se llaman links).

figura 11



Sí.



No.

A los vértices, aristas y caras de  $M$  les llamaré facetas de  $M$ . El conjunto de facetas de  $M$  es  $\cup \{ V, A, C \}$  y lo denotaré por  $\mathcal{RM}$ .

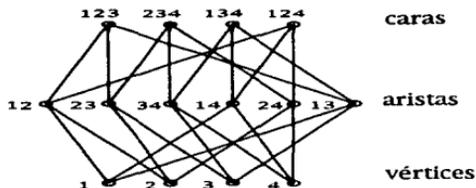
**Definición:**  $(\mathcal{RM}, <)$  es un orden parcial en el conjunto de facetas del mapa poliedral  $M=(V, A, C)$ , que me permitirá dar precisión y una forma sintética a la relación “estar en” compartida por los elementos de  $M$ : Sean  $v, a, c \in \mathcal{RM}$ ,

Si  $v \in V$  y  $a \in A$  entonces  $v < a \Leftrightarrow v \in a$ ,

si  $v \in V$  y  $c = (V_c, A_c) \in C$  entonces  $v < c \Leftrightarrow v \in V_c$ ,

y si  $a \in A$  y  $c = (V_c, A_c) \in C$  entonces  $a < c \Leftrightarrow a \in A_c$ .

Se puede asociar una gráfica a este orden parcial, trazando aristas entre dos elementos de  $\mathcal{RM}$  siempre y cuando estén relacionados y no haya otro elemento atrapado entre ambos. La figura ilustra el diagrama trazado para  $\mathcal{RM}$  cuando  $M$  es el tetraedro.



Los conceptos de isomorfismo, automorfismo y grupo de automorfismos se extienden de manera natural a los mapas poliedrales.

**Definición:** Sea  $\varphi: \mathcal{R}M_1 \cup \{V_1, A_1, C_1\} \rightarrow \mathcal{R}M_2 \cup \{V_2, A_2, C_2\}$  una función biyectiva. Se dice que  $\varphi$  es un isomorfismo entre  $M_1$  y  $M_2$  si y sólo si cumple que:

$$1: v \in V_1 \Leftrightarrow \varphi(v) \in V_2$$

$$a \in A_1 \Leftrightarrow \varphi(a) \in A_2$$

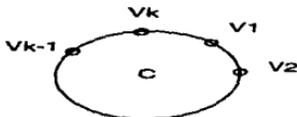
$$c \in C_1 \Leftrightarrow \varphi(c) \in C_2.$$

$$2: a_1 < a_2 \Leftrightarrow \varphi(a_1) < \varphi(a_2) \quad \forall a_1, a_2 \in \mathcal{R}M_1).$$

**Definición:** Una función biyectiva  $\varphi: \mathcal{R}M \rightarrow \mathcal{R}M$  es un automorfismo de  $M$  si es un isomorfismo de  $M$  en si mismo. Lo del grupo de automorfismos, a quien denotaré por  $A(M)$ , ya ni lo pongo por trivial.

“**Mapa poliedral**” es una manera un poco sofisticada de presentar un concepto con una larga historia, el de poliedro. Esta definición lo libera de las propiedades métricas que normalmente se le asocian, mas no de las topológicas; a pesar de haber dado una definición exclusivamente en términos combinatorios, veré más adelante que un mapa poliedral es, en cierto sentido, lo que se llama una superficie poliedral. En el trabajo de Brehm y Willis [BreW11] se exponen resultados importantes relacionados con el concepto de superficie poliedral, que resulta ser equivalente al de mapa poliedral en todos sus aspectos, por ejemplo: Cualquier mapa poliedral puede ser dibujado en una única superficie cerrada (compacta y sin frontera), y en esta forma es que define una única superficie poliedral. Para ver que ésto es posible basta seguir un procedimiento bastante simple: Por cada  $C = [v_1, \dots, v_k]$  cara de  $M$  tomaré un disco cerrado etiquetado con  $C$ , y etiquetaré  $k$  puntos distinguidos en su frontera siguiendo el orden cíclico de  $C$ :

figura 12

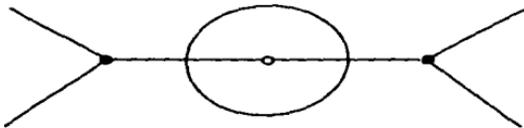


Pegaré dos discos de esos si y sólo si los ciclos que les corresponden se intersectan en una arista, identificando los intervalos que hay entre los puntos correspondientes a los vértices que los dos ciclos tienen en común por medio de un homeomorfismo. Cuando haya hecho ésto con todos los discos habré obtenido una superficie cerrada, que no tendrá frontera porque cada arista está en dos caras. Que será un compacto, pues es el resultado de identificar en un espacio que es un compacto por ser una unión finita de discos. Y que es una superficie pues:

1: los puntos en el interior de los discos claro que tienen una vecindad homeomorfa a un disco;

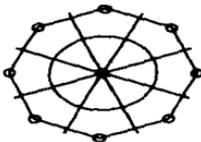
2: Los puntos en la frontera de algun disco que no representan vértices tienen una vecindad homeomorfa a un disco pues cada arista está en sólo dos caras (como lo muestra claramente la figura 13).

figura 13



3: Los puntos que representan vértices tienen una vecindad homeomorfa a un disco porque los links de cada vértice son ciclos (figura 14).

figura 14



En esta forma he obtenido una superficie poliedral que modela mi mapa poliedral. El hecho de que la superficie sea única depende de la definición de mapa poliedral.

Al definir el concepto de isomorfismo entre mapas poliedrales incluí la definición de un orden parcial basado en la relación de pertenencia entre vértices y aristas o entre aristas y caras. Formalmente no podría decir que un vértice o una arista pertenecen a una cara, pues las caras son gráficas, es decir, conjuntos ordenados cuyos elementos son un conjunto de vértices y un conjunto de aristas, pero podría decir si una arista pertenece o no al conjunto de aristas de una cara. Eso, desgraciadamente, es muy cansado y largo para decirlo todo el tiempo, de manera que voy a usar esta otra relación de falsa pertenencia en  $\mathcal{R}(M)$  que es más directa y que es transitiva. Se le podría llamar “**estar en**”, pues con toda naturalidad podemos referirnos a si un vértice está o no en una arista o una cara. Este orden parcial, que he presentado aquí en forma bastante intuitiva, es un concepto muy importante, pues con algunos ajustes y una definición precisa se extiende a cualquier dimensión para dar a la matemática moderna el modelo más abstracto y simple de polítopo que se conoce, expuesto por Danzer, McMullen y Schulte en [DaShu1][Shu1, 2][McShu2]. En [McShu2] se presenta esta noción combinatoria de polítopo y el primer resultado importante al que condujo, que es una equivalencia entre el problema de clasificar polítopos regulares y el de clasificar grupos finitos generados por involuciones.

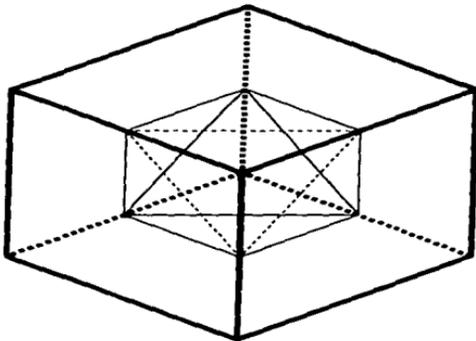
Este es buen momento para ilustrar la elegancia con que funciona el conjunto parcialmente ordenado  $(\mathcal{R}(M), <)$  porque me dispongo a definir  $\delta(M)$  el mapa poliedral dual de  $M$ . Esencialmente, el mapa dual se obtiene intercambiando el papel de los vértices y caras en la estructura original. Así, el orden parcial que resulta de invertir el orden parcial definido en  $(\mathcal{R}(M), <)$  es isomorfo al que se definiría en su dual.

**Definición:** Sea  $M=(V, A, C)$ , ahora definiré  $\delta(M)=(V', A', C')$  donde  $V'=C$ , y si  $c_1=\{V(c_1), A(c_1)\}$ ,  $c_2=\{V(c_2), A(c_2)\} \in V'=C$ , entonces  $c_1 c_2 \in A' \Leftrightarrow |A(c_1) \cap A(c_2)|=2$ , y para cada  $v \in V$  sea  $c_v = (\{c \in C / v \in V(c)\}, \{c_1 c_j / v \in V(c_1), V(c_j) \text{ y } |A(c_1) \cap A(c_2)|=2\})$ , entonces  $C' = \{c_v / v \in V\}$ .

Como ya lo dije antes, una relación interesante que guarda  $\mathcal{R}(M)$  con  $\mathcal{R}\delta(M)$  es que el orden parcial definido en uno de ellos es el inverso del otro.

**Definición:** Si  $M$  y  $\delta(M)$  resultan ser isomorfos entonces diré que  $M$  es autodual.

Aunque siempre es posible construir el dual de un modelo combinatorio de poliedro (y en consecuencia del topológico), eso no siempre funciona en el caso en que se esté trabajando con un modelo geométrico. En primer lugar debe ser posible localizar una especie de centro en cada una de las caras del poliedro, y, haciendo pasar a estos centros como vértices, ver si es posible tender desde ellos líneas y planos que, en el mejor de los casos, terminarán por formar el poliedro dual. Un caso en que la construcción geométrica del poliedro dual se logra con sencillez y claridad extremas, es el de los cinco sólidos platónicos encajados en el espacio ambiente euclídeano de tres dimensiones. La figura 15 ilustra esta situación en el caso del cubo y su dual, el octaedro.

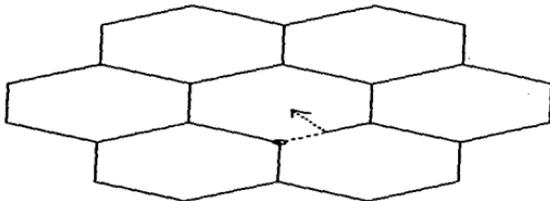


Ahora definiré una función muy importante que tiene su dominio en la clase de los mapas poliedrales y su imagen en el conjunto de los números enteros. Se trata de la función característica de Euler. Esta función es de vital importancia pues establece una relación muy fuerte y poderosa entre un mapa poliedral y su modelo topológico. Esta función puede ser definida para superficies y resulta ser un invariante parcial de homeomorfismos (si dos superficies son homeomorfas, entonces tienen la misma característica, pero no al revés). Si su valor es impar, permite saber con exactitud la única superficie en que puede ser dibujado un mapa poliedral, y si su valor es par reduce el número de posibles superficies a dos, una orientable y la otra no orientable. Allí radica una buena parte de su importancia. Y ahora, procederé a definir la función característica del mapa poliedral  $M=(V, A, C)$ , que es:

**Definición:** La función característica de Euler denotada por  $\chi(M)$ , del mapa poliedral  $M=(V, A, C)$  se define como  $\chi(M)=|V| - |A| + |C|$ .

Naturalmente, un mapa poliedral y su dual tienen la misma característica, e inclusive deben ser dibujados en la misma superficie.

**Definición:** Sea  $M=(V, A, C)$ . Una bandera del mapa poliedral  $M$  es una sucesión  $\Phi=(v, a, c)$  tal que  $v \in V, a \in A, c \in C, v \in a$  y si  $c=(v_c, a_c)$ , entonces  $a \in a_c$ , es decir,  $v < a < c$ . Una bandera es un orden total maximal, o cadena, en  $(\mathcal{R}(M), <)$ . Al conjunto de banderas de  $M$  se le denota por  $B_M$ . En la figura he puesto una parte de un mosaico de hexágonos y he marcado una de sus banderas.



Ahora estoy listo para dar la definición que tal vez sea el asunto más importante de este capítulo, por tratarse del concepto que caracteriza la noción de simetría en un poliedro.

**Definición (Regularidad):** Un mapa poliedral  $M$  se dice regular si su grupo de automorfismos actúa transitivamente en su conjunto de banderas. Es decir, si

$$\forall (v_1, a_1, c_1), (v_2, a_2, c_2) \in B_M \\ \exists \varphi \in A(M) / \varphi(v_1, a_1, c_1) = (v_2, a_2, c_2).$$

Para que un mapa poliedral sea regular es necesario que sus caras tengan el mismo número de vértices y que sobre cada vértice incida el mismo número de caras. Esta observación motiva la creación de un símbolo que caracteriza la estructura local de un mapa poliedral: el símbolo de Shläfli.

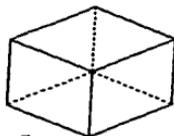
**Definición:** Sea  $M$  un mapa poliedral. Sean  $p, q$  números naturales. Si en cada uno de sus vértices inciden  $q$  caras y si todas sus caras tienen  $p$  vértices entonces a  $M$  le corresponde el símbolo de Shläfli  $\{p, q\}$ , y escribiré  $M = \{p, q\}$ .

Es inmediata la observación de que si un mapa poliedral es autodual entonces hay un número natural  $p$  tal que  $M = \{p, p\}$ . Después de haber visto eso se me ocurrió pensar si habrá un ejemplo de un mapa poliedral  $M = \{p, p\}$  no autodual. Encontré tal ejemplo al enfrentarme con esta tesis, pero no hay razón de peso para suponer que un mapa poliedral con un símbolo de Shläfli simétrico pudiera no ser autodual.

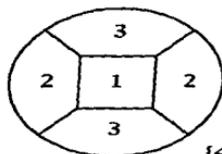
Por otra parte, lo que resulta bien cierto y relativamente fácil de observar es que un mapa poliedral con símbolo de Shläfli no tiene porqué ser regular, pues, por supuesto, el hecho de que se tengan todas las caras iguales y que incidan el mismo número de ellas en cada vértice es suficientemente local como para no implicar que el poliedro tenga un alto grado de simetría, y para ilustrar este caso daré un ejemplo de una cuadriculación del toro cuyo símbolo es  $\{4, 4\}$  y que cumple lo que he dicho.



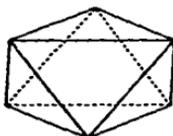
figura 19



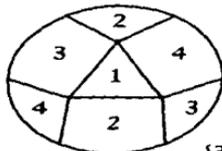
{4,3} en  $S_2$



{4,3} en  $P_2$



{3,4} en  $S_2$



{3,4} en  $P_2$

El símbolo de Sháflí parece no ser muy exclusivo. Divide la clase de los poliedros en grandes familias que comparten la estructura local. Este parentesco, al menos en el caso de los poliedros regulares, representa una relación muy estrecha en sus estructuras combinatorias, que se observa con claridad al analizar los grupos de automorfismos de todos los poliedros regulares que comparten, digamos, el símbolo  $\{p, q\}$ . Si  $M$  es un  $\{p, q\}$  entonces  $A(\{p, q\}) = A(M)$  resulta ser un grupo cociente del grupo de Coxeter con tres generadores  $\rho_0, \rho_1$  y  $\rho_2$  presentado por las relaciones

$$\rho_i^2 = e \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

$$(\rho_0 \rho_2)^2 = e$$

$$(\rho_0 \rho_1)^p = e$$

$$(\rho_1 \rho_2)^q = e$$

Esto lo trataré con más precisión en el capítulo tres, y puede consultarse [McShu2], si se desea más profundidad en el tema.

Para terminar la exposición de este primer capítulo definiré el último concepto relacionado con los mapas poliedrales en general, el de

orientabilidad, que, a pesar de poder ser planteada en términos exclusivamente combinatorios, está en correspondencia con la noción topológica de orientabilidad. Esto es conveniente tomarlo en cuenta pues, al menos en mi experiencia personal, la intuición funciona más en los términos de la topología y la geometría que en los de la combinatoria.

Primero daré una receta para orientar un ciclo o polígono: Tomaré un vértice del ciclo y, desde allí, tendré dos únicas posibilidades en el ciclo para elegir un vértice adyacente a ese. Cada una de ellas representa una de las dos orientaciones que puedo dar al ciclo.

figura 20



Al seguir caminando en la dirección que elegí, pondré etiquetas a las aristas de  $C$ . Si del vértice  $i$  pasé al vértice  $j$  entonces  $ij$  irá etiquetada por :



Como la orientación de una sola de sus aristas determina la orientación del ciclo, basta escribir tal arista orientada para denotar la orientación del ciclo. Es interesante observar que la notación  $C = [i_1 \dots i_k]$  del ciclo lleva incluida una orientación y puedo separar los  $2k$  símbolos que tiene  $C$  en dos clases, la de  $[i_1 \dots i_k]$  y la de  $[i_k \dots i_1]$ , que corresponden precisamente a las dos clases laterales del subgrupo cíclico  $Z_k$  en el grupo dihédrico de orden  $2k$ . La figura 21 muestra las dos posibles orientaciones que se pueden dar a un ciclo.

figura 21



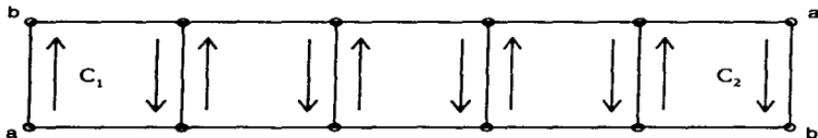
**Definición:** Un mapa poliedral  $M=(V, A, C)$  se dice que es orientable si puedo orientar todas sus caras de manera que  $\forall c_1, c_2 \in C$  si  $ij \in c_1 \cap c_2$  entonces

$\vec{ij}$  determina la orientación de  $c_1 \Leftrightarrow \vec{ji}$  determina la de  $c_2$ .

**Definición:** Sea el mapa poliedral  $M=(V, A, C)$ . Su gráfica dual  $G_M=(V_g, A_g)$  está definida por  $V_g=C$  y  $\forall c_1, c_2 \in C$   $c_1 c_2 \in A_g \Leftrightarrow c_1 \cap c_2 \in A$ . Tal gráfica tiene por vértices las caras del mapa  $M$ . En realidad se trata del 1-esqueleto del dual de  $M$ . Un ciclo contenido en esa gráfica se llamará una banda o cinta. Se dice que una banda es orientable si se puede orientar al correspondiente en  $M$ . Si una banda es orientable se le llama cilindro. Si no es orientable se le llama banda de Möbius.

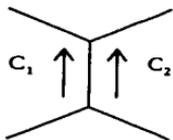
Es importante observar que un mapa poliedral es no orientable si y sólo si tiene una banda de Möbius, pues, en primer lugar, como lo muestra la figura 23, si tengo una banda de Möbius entonces no podré orientar las caras de la banda de manera que se cumpla con la condición de orientabilidad;

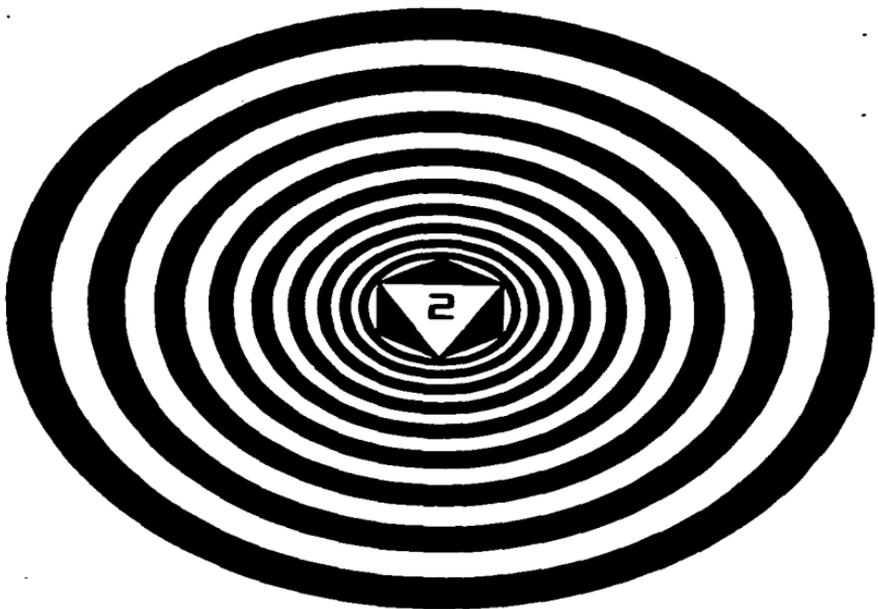
figura 23



Y, en segundo lugar, si un mapa poliedral es no orientable, entonces al dársele una orientación deben existir caras adyacentes  $C_1$  y  $C_2$  orientadas como en la figura 24, y, debido a las propiedades de finitud y conexidad de un mapa poliedral, debe existir un ciclo en la gráfica dual que los contenga, y tal ciclo es precisamente la banda de Möbius que yo buscaba.

figura 24





## Capítulo 2

En este capítulo estudiaré varias propiedades del mapa simétrico  $R_n$ . Aquí presentaré su definición, y verificaré que se trata de una familia de mapas poliedrales regulares. Identificaré a su grupo de automorfismos, calcularé su símbolo de Schläfli y el valor de su función característica de Euler.

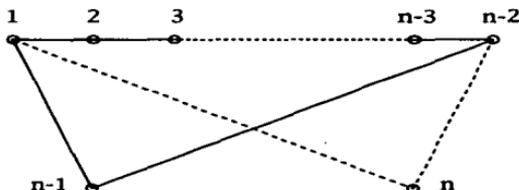
**Definición:** Para definir el mapa simétrico de orden  $n$  debo considerar la gráfica completa  $K_n$ . Haré la restricción de que  $n \geq 4$  para que los objetos de que hablaré tengan sentido. Definiré  $R_n = (V_n, A_n, C_n)$  talque

$V_n = \{k / k \text{ es una trayectoria de orden } n-3 \text{ en } K_n\}$ ,  
 $C_n = \{k / k \text{ es un ciclo de orden } n-1 \text{ en } K_n\}$ ,  
y de allí se deduce inmediatamente que  
 $A_n = \{k / k \text{ es una trayectoria de orden } n-2 \text{ en } K_n\}$ .

**Teroema:** La terna  $R_n = (V_n, A_n, C_n)$  es un mapa poliedral para todo número natural mayor que 3.

**Demostración:** Ahora debo ver que  $R_n$  es, efectivamente, un mapa poliedral. El primer axioma que revisaré es M1, que dice: cada arista está en exactamente dos caras, es decir, que cada  $n-2$  trayectoria de  $K_n$  está en exactamente en dos  $n-1$  ciclos de  $K_n$ .

figura 24



Pero eso es inmediato, pues, como lo muestra la figura 24, tengo  $n-2$  vértices ocupados en mi trayectoria, y para formar un ciclo de orden  $n-1$  que lo contenga sólo puedo agregar un vértice, pero hay nomás dos vértices libres, de manera que hay dos únicas formas para encontrar un  $(n-1)$ -ciclo en  $K_n$  que contenga a la  $(n-2)$ -trayectoria dada.

El siguiente axioma que debo revisar es M2, que dice que el uno esqueleto de  $R_n$  debe ser conexo. Debo considerar la gráfica que tiene como vértices las  $(n-3)$ -trayectorias de  $K_n$  y como aristas las  $(n-2)$ -trayectorias de  $K_n$ . Analizaré primero el caso en que  $n \geq 5$ . Sean pues  $(a_1, a_2, \dots, a_{n-3}) = a \in V_n$ ,  $(b_1, b_2, \dots, b_{n-3}) = b \in V_n$ , dos vértices del uno esqueleto. Necesito encontrar una trayectoria entre ellos. Una trayectoria de  $(n-3)$ -trayectorias que comience en uno y termine en el otro. Para hacerlo, primero definiré algunas operaciones (o movimientos permitidos por la conexidad) que, al aplicarlas a un vértice dado en  $R_n$ , me darán como resultado otro vértice de  $R_n$  que, efectivamente, estará conectado al primero por una trayectoria en  $R_n$ :

Sean  $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n-3})$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_{n-3})$  dos vértices en  $R_n$ , y sean  $x_1, x_2, x_3$  los tres vértices de  $K_n$  que no están en  $a$ .

1: En primer lugar describiré un movimiento permitido evidente que me hará ir de un vértice en  $R_n$  a cualquiera de los que tiene junto (es decir, adyacentes). Para lograrlo basta observar que si agrego alguna de las  $x_i$  a un extremo de  $a$  obtendré una arista en  $R_n$  que tiene al vértice  $a$ , de manera que el otro vértice de esa arista será el que quiero alcanzar. Eso equivale a quitar un extremo de  $a$  y colocar un  $x_i$  en el extremo

opuesto:

$$\begin{aligned} a &= (a_1, a_2, \dots, a_{n-3}) \rightarrow (a_2, \dots, a_{n-3}, x_1) \\ a &= (a_1, a_2, \dots, a_{n-3}) \rightarrow (x_1, a_1, \dots, a_{n-4}). \end{aligned}$$

2: Además, puedo desplazarme cíclicamente sobre de  $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n-3})$  sin tener la necesidad de agregar vértices, es decir,

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_{n-3}) \rightarrow (a_2, \dots, a_{n-3}, a_1) \rightarrow (a_3, \dots, a_{n-3}, a_1, a_2),$$

y etcétera, es un movimiento permitido. Para ver que ésto es cierto, basta seguir la siguiente secuencia de movimientos del tipo uno:

$$\begin{aligned} a &= (a_1, a_2, \dots, a_{n-3}) \rightarrow (a_2, \dots, a_{n-3}, x_1) \rightarrow \\ &(x_2, a_2, \dots, a_{n-3}) \rightarrow (a_2, \dots, a_{n-3}, a_1). \end{aligned}$$

3: Ahora describiré el tercero de los movimientos que necesitaré para conectar  $a$  con  $b$ , y que consiste en demostrar que, dado un vértice de  $R_n$ , puedo llegar a cualquier otro que resulte de permutar sus propios vértices, es decir:

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_{n-3}) \rightarrow (\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_{n-3})),$$

donde  $\varphi$  es una permutación cualquiera de los vértices de  $b$ . Esta posibilidad se sigue inmediatamente de que pueda probar que se permite el siguiente movimiento:

$$b = (b_1, \dots, b_i, b_{i+1}, \dots, b_{n-3}) \rightarrow (b_1, \dots, b_{i+1}, b_i, \dots, b_{n-3}).$$

Pero ese movimiento, a su vez, resulta ser consecuencia directa de que se pueda hacer lo siguiente:

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_{n-3}) \rightarrow (b_2, b_1, \dots, b_{n-3})$$

Y eso se puede lograr tan sólo usando los movimiento uno y dos:

$\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{n-3}) \rightarrow (\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{n-3}, \mathbf{x}_1) \rightarrow$   
 $(\mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_{n-3}, \mathbf{x}_1, \mathbf{b}_2) \rightarrow (\mathbf{b}_4, \dots, \mathbf{b}_{n-3}, \mathbf{x}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1) \rightarrow$   
 $(\mathbf{b}_5, \dots, \mathbf{b}_{n-3}, \mathbf{x}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3) \rightarrow (\mathbf{b}_6, \dots, \mathbf{b}_{n-3}, \mathbf{x}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4) \dots$

y me sigo bajando  $\mathbf{b}_{i+1}$  del extremo izquierdo y subiendo  $\mathbf{b}_i$  al extremo derecho (esta secuencia de movimientos podría interpretarse como una rotación parecida al movimiento número dos pero agregando un vértice) hasta llegar a:

$(\mathbf{x}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_{n-4}) \rightarrow (\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \dots, \mathbf{b}_{n-3})$ .

4: Finalmente, sean  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-3})$ ,  $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{n-3})$  dos vértices en  $\mathbf{R}_n$ , veré que se puede llegar desde  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-3})$  hasta un vértice de  $\mathbf{R}_n$  que tiene el mismo conjunto de vértices que  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{n-3})$ , es decir que

$\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-3}) \rightarrow (\varphi(\mathbf{b}_1), \dots, \varphi(\mathbf{b}_{n-3}))$ ,

donde  $\varphi$  es una permutación de los vértices de  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{n-3})$ , es un movimiento permitido. Primero que nada, si no existen  $\mathbf{a}_i$ s que no son una de las  $\mathbf{b}_j$ s, entonces el problema está resuelto de antemano por el movimiento 3 y no hay nada que hacer. Y si existen  $\mathbf{a}_i$ s que no son  $\mathbf{b}_j$ s, basta llevar cada una de ellas a los extremos de la trayectoria utilizando el movimiento dos, e intercambiarlas de inmediato por alguna  $\mathbf{b}_j$  que no sea ninguna de las  $\mathbf{a}_i$ s.

La aplicación adecuada de este conjunto de bonitos movimientos, muestra con precisión, y sin lugar a dudas, una trayectoria que conecta, efectivamente,  $\mathbf{a}$  con  $\mathbf{b}$ , y prueba en esta forma la veracidad, en el caso  $n \geq 5$ , del enunciado M2 para el conjunto de los  $\mathbf{R}_n$ . El caso  $n=4$  no hace falta revisarlo con detalle por trivial, pues el uno esqueleto de  $\mathbf{R}_4$  es la mismísima  $\mathbf{K}_4$ , y  $\mathbf{K}_4$  es una gráfica conexa.

Ahora les mostraré a todos ustedes que los links de  $\mathbf{R}_n$  son polígonos o ciclos. Para eso, sea  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-3}) = \mathbf{a} \in \mathbf{V}_n$  un vértice arbitrario de  $\mathbf{R}_n$ , otra vez con  $n \geq 5$ . Su link es la gráfica que tiene por vértices las

caras que lo contienen. Veré que, en cualquier caso, los links de  $R_n$  son hexágonos (excepto para  $n=4$ ).

Si  $n \geq 5$  entonces  $a$  está en seis caras distintas que son:

$$v_{21} = [a_1, \dots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}],$$

$$v_{20} = [a_1, \dots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_n],$$

$$v_{12} = [a_1, \dots, a_{n-3}, a_{n-1}, a_{n-2}],$$

$$v_{10} = [a_1, \dots, a_{n-3}, a_{n-1}, a_n],$$

$$v_{01} = [a_1, \dots, a_{n-3}, a_n, a_{n-1}],$$

$$v_{02} = [a_1, \dots, a_{n-3}, a_n, a_{n-2}],$$

y en seis aristas distintas, que son:

$$a_{2+} = (a_1, \dots, a_{n-3}, a_{n-2}),$$

$$a_{1+} = (a_1, \dots, a_{n-3}, a_{n-1}),$$

$$a_{0+} = (a_1, \dots, a_{n-3}, a_n),$$

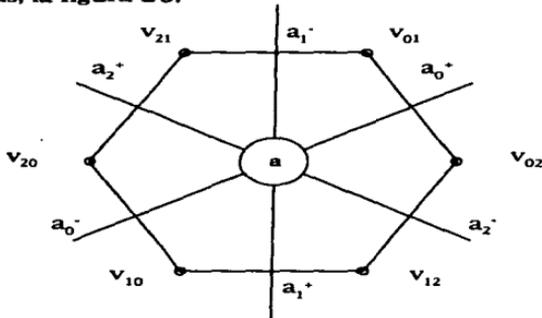
$$a_{2-} = (a_{n-2}, a_1, \dots, a_{n-3}),$$

$$a_{1-} = (a_{n-1}, a_1, \dots, a_{n-3}),$$

$$a_{0-} = (a_n, a_1, \dots, a_{n-3}),$$

Al observar las relaciones de incidencia entre los vértices y aristas del link de  $a$  se me hizo claro que es un hexágono, como lo muestra, sin lugar a dudas, la figura 25:

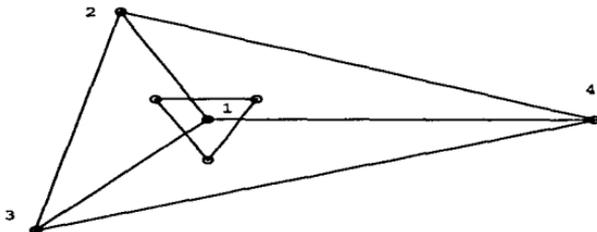
figura 25



En el caso  $n=4$ , como las  $(n-3)$ -trayectorias de  $K_4$  son sus vértices entonces resulta que  $R_4$  tiene los mismos 4 vértices que  $K_4$  (¿te vas dando una idea de quién es  $R_4$ ?), digamos  $\{1, 2, 3, 4\}$ , entonces las caras que inciden en 1 son  $[1, 2, 3]$ ,  $[1, 2, 4]$ , y  $[1, 3, 4]$ , y el link de 1 resulta ser claramente un triángulo. Es fácil ver que lo mismo sucede para los otros vértices. Por lo tanto se cumple con  $M_3$  y  $R_n$  es un mapa poliedral ( $n \geq 4$ ).

La figura 26 muestra el link de 1 en  $R_4$ .

figura 26



Pero  $R_n$  no se conforma con ser un mapa poliedral. Quiere distinguirse entre los mapas poliedrales y pertenecer a la élite más especial, la de los regulares. Y, por supuesto, lo logra con mucha facilidad. No es gratuito que esté tan emparentado con  $K_n$ .

Sin embargo, a pesar de que la regularidad de  $R_n$  es bastante natural, antes haré algunas observaciones que la harán clara e inmediata. En primer lugar, como todo  $(n-1)$ -ciclo de  $K_n$  tiene  $n-1$   $(n-3)$ -trayectorias, entonces todas las caras de  $R_n$  son iguales. Con esta observación, y otra que ya hice antes, podría calcular el símbolo de Shläfli de  $R_n$ , pero eso lo dejaré para después, y primero haré algunas consideraciones acerca del grupo de automorfismos de  $R_n$ , que me permitirán construir un isomorfismo entre  $S_n = A(K_n)$ , y  $A(R_n)$ .

Sea  $\varphi : A(K_n) \rightarrow A(R_n)$  tal que si  $\varphi \in A(K_n)$  entonces  $\varphi((a_1, a_2, \dots, a_{n-k})) = (\varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_{n-k}))$

Aquí, he abusado un poco de la notación, pues en este contexto me puedo permitir dar a trayectorias y ciclos un trato casi de iguales. Para evitar escribir demasiado haré una notación temporal con paréntesis redondos tanto para trayectorias como para ciclos, haciendo claro que  $(a_1, \dots, a_{n-k})$  denotará trayectorias cuando  $k=2, 3$ , y ciclos cuando  $k=1$ .

Ahora veré que la función  $\circ$  está bien definida. En primer lugar, debe ser cierto que  $\varphi^\circ$  sea un automorfismo de  $R_n$ :

1:  $\varphi^\circ$  es una aplicación inyectiva:

Sean  $j, k \in \{1, 2, 3\}$ . Sean  $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n-k})$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_{n-j})$  dos elementos de  $R_n$ . Si  $a \neq b$  y  $j \neq k$  entonces  $\varphi^\circ(a) \neq \varphi^\circ(b)$  pues van a tener distinta longitud. Si  $j = k$  entonces, como  $a \neq b$  hay al menos una  $i \in \{1, \dots, k=j\}$  tal que  $a_i \neq b_i$ . Pero eso quiere decir que  $\varphi(a_i) \neq \varphi(b_i)$ , pues  $\varphi$  es un automorfismo de  $K_n$ , y entonces  $\varphi^\circ(a)$  y  $\varphi^\circ(b)$  difieren al menos en su entrada  $i$ ésima, de donde concluyo que  $\varphi^\circ$  es inyectiva.

2: Es evidente que  $\varphi^\circ$  es suprayectiva pues el inverso de  $\varphi$  existe porque  $\varphi$  es un automorfismo de  $K_n$  y  $\varphi^\circ(\varphi^{-1}(a_1), \dots, \varphi^{-1}(a_{n-k})) = (a_1, a_2, \dots, a_{n-k})$ .

3: Finalmente debo verificar que  $\varphi^\circ : R_n \rightarrow R_n$  sea un automorfismo. Pero eso es inmediato pues  $\varphi^\circ(a_1, \dots, a_{n-k}) = (\varphi^\circ(a_1), \dots, \varphi^\circ(a_{n-k})) = (b_1, \dots, b_{n-k})$ , y  $(b_1, \dots, b_{n-k})$  vuelve a ser, en cualquier caso, del tipo y tamaño que es de donde proviene. Y si, digamos,  $a = (a_1, \dots, a_{n-k}) < (b_1, \dots, b_{n-j}) = b$ , con  $j$  obviamente mayor que  $k$  entonces  $(b_1, \dots, b_{n-j})$  puede ser a escrito como  $(a_1, \dots, a_{n-k}, a_{n-k+1}, \dots, a_{n-j})$  de donde es evidente que  $\varphi(a) < \varphi(b)$ .

Por lo tanto el operador  $\circ$  es una función bien definida. Además, resulta ser un isomorfismo de grupos:

1:  $\circ$  es inyectiva: Sean  $\phi \neq \psi \in A(K_n)$ . Entonces  $\exists a \in K_n$  tal que  $\phi(a) \neq \psi(a)$ . Sea  $(a_1, a_2, \dots, a_{n-3})$  un  $n-3$  camino en  $K_n$  tal que  $a_1 = a$ . Entonces  $\varphi^\circ(a_1, a_2, \dots, a_{n-3}) = (\varphi^\circ(a), \varphi^\circ(a_2), \dots, \varphi^\circ(a_{n-3})) \neq (\psi^\circ(a_1), \psi^\circ(a_2), \dots, \psi^\circ(a_{n-3})) = \psi^\circ(a_1, a_2, \dots, a_{n-3})$ .

Por lo tanto  $\phi^\circ \neq \phi^\circ$ , de modo que  $\circ$  es inyectiva.

2: Para poder ver que  $\circ$  es suprayectiva construiré su función inversa  
 $\ast: \mathbf{A}(\mathbf{R}_n) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{K}_n)$  :

Sea  $\phi: \mathbf{R}_n \rightarrow \mathbf{R}_n$  un automorfismo.

Sea  $\{(a_1, a_2, \dots, a_{n-3}), (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}), [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]\}$  una bandera fija en  $\mathbf{R}_n$ . Supongamos que:

$\phi\{(a_1, a_2, \dots, a_{n-3}), (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}), [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]\} = \{(b_1, b_2, \dots, b_{n-3}), (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}), [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]\}$ .

Sea  $\phi^\ast: \mathbf{K}_n \rightarrow \mathbf{K}_n$  tal que  $\phi^\ast(a_i) = b_i \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Ahora veré que  $\phi^\ast \in \mathbf{A}(\mathbf{K}_n)$ . Para eso basta ver que  $\phi^\ast$  es biyectiva, pues  $\mathbf{K}_n$  es extremadamente simétrica, y cualquier biyección en  $\mathbf{K}_n$  también es uno de sus automorfismos.

1: Cualquier elemento de  $\mathbf{K}_n$  es una de las  $a_i$ . Sea  $a_i \neq a_j \in \mathbf{K}_n$ . Entonces  $i \neq j$ , y  $\phi^\ast(b_i) \neq \phi^\ast(b_j)$ . Por lo tanto  $\phi^\ast$  es inyectiva.

2: Sea  $i \in \mathbf{K}_n$ . Debo encontrar una  $j \in \mathbf{K}_n$  tal que  $\phi^\ast(j) = i$ . Pero existe un índice  $k$  tal que  $i = b_k$  y entonces  $\phi^\ast(a_k) = b_k = i$ . Por lo tanto  $\phi^\ast$  es suprayectiva. De allí que  $\phi^\ast \in \mathbf{A}(\mathbf{K}_n)$  y que  $\ast$  está bien definida.

Ahora regresaré a ver que  $\circ$  es suprayectiva:

Sea  $\phi \in \mathbf{A}(\mathbf{R}_n)$ . Sea  $\phi^\ast \in \mathbf{A}(\mathbf{K}_n)$ . Mostraré que  $(\phi^\ast)^\circ = \phi$ . Supondré que  $\phi(a_1, a_2, \dots, a_{n-k}) = (b_1, b_2, \dots, b_{n-k})$ , entonces  $\phi^\ast(a_1) = b_1$ , de modo que  $\phi^\ast \circ (a_1, \dots, a_{n-k}) = (\phi^\ast(a_1), \dots, \phi^\ast(a_{n-k})) = (b_1, \dots, b_{n-k})$ . Por lo tanto  $\phi^\ast \circ = \phi$  y entonces  $\circ$  es suprayectiva.

En fin, para que  $\circ$  sea un isomorfismo de grupos debe suceder que  $(\phi_1 \phi_2)^\circ = (\phi_1^\circ \phi_2^\circ)$ , pero  $(\phi_1 \phi_2)^\circ(a_1, \dots, a_{n-k}) = (\phi_1 \phi_2(a_1), \dots, \phi_1 \phi_2(a_{n-k}))$ , y

$\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-k}) = \varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ (\mathbf{a}_1), \dots, \varphi_2 \circ (\mathbf{a}_{n-k})) = (\varphi_1 \varphi_2 (\mathbf{a}_1), \dots, \varphi_1 \varphi_2 (\mathbf{a}_{n-k}))$ . Por lo tanto  $\circ$  es un isomorfismo. [ McShu2 ]

Por lo tanto  $A(\mathbf{R}_n) = A(\mathbf{K}_n)$ , y me puedo atrever a enunciar el siguiente:

**Lema.** Sea  $n \geq 4$ . El grupo  $A(\mathbf{R}_n)$  de automorfismos del mapa poliedral  $\mathbf{R}_n$  es isomorfo al grupo simétrico  $S_n$  de orden  $n$ .

Después de todo este asunto con los grupos de automorfismos me será muy sencillo ver que  $\mathbf{R}_n$  es regular, y lo haré con toda propiedad.

**Teorema.** Sea  $n \geq 4$ . Entonces el mapa poliedral  $\mathbf{R}_n$  es regular.

**Demostración.** Sean

$$\Phi_1 = \{(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-3}), (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-2}), [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}]\}$$

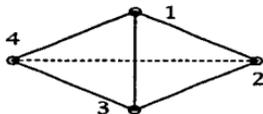
$$\Phi_2 = \{(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-3}), (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-2}), [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1}]\}.$$

dos banderas arbitrarias de  $\mathbf{R}_n$ . Para mostrar que  $A(\mathbf{R}_n)$  actúa transitivamente en el conjunto de banderas de  $\mathbf{R}_n$  basta ver que hay un automorfismo de  $\mathbf{R}_n$  que mapea  $\Phi_1$  en  $\Phi_2$ . Sea  $\varphi \in A(\mathbf{K}_n)$  tal que  $\varphi(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$  ( $\varphi$  está definida por la colocación de los índices). Entonces  $\varphi \in A(\mathbf{R}_n)$  y además  $\varphi \circ (\Phi_1) = \Phi_2$ . Por lo tanto  $\mathbf{R}_n$  es regular.

A continuación calcularé el símbolo de Shläfli de  $\mathbf{R}_n$ . Ya hice algunas reflexiones a lo largo de éste capítulo que me indican cuál es el valor de este símbolo, pero ahora repasaré todo eso con precisión.

En primer lugar trabajaré con el caso  $n=4$ , y de una buena vez lo dejaré caracterizado. Es muy sencillo observar que  $\mathbf{R}_4$  es el tetraedro, pues sus vértices, aristas y caras son los vértices, aristas y triángulos de  $\mathbf{K}_4$ . De manera que el símbolo de Shläfli para  $\mathbf{R}_4$  es  $\{3, 3\}$ . La figura 27 ilustra esta situación.

figura 27

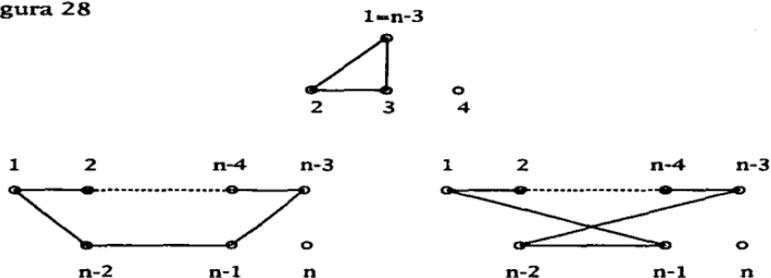


A partir de  $n=5$ ,  $R_n$  se presenta como un objeto bastante más complicado que el tetraedro. Más adelante en este capítulo calcularé una fórmula para la función característica de  $R_n$ , y con ella serán evidentes las dimensiones descomunales que, a partir de  $n=8$ , hacen de  $R_n$  un objeto muy difícil de imaginar o conocer.

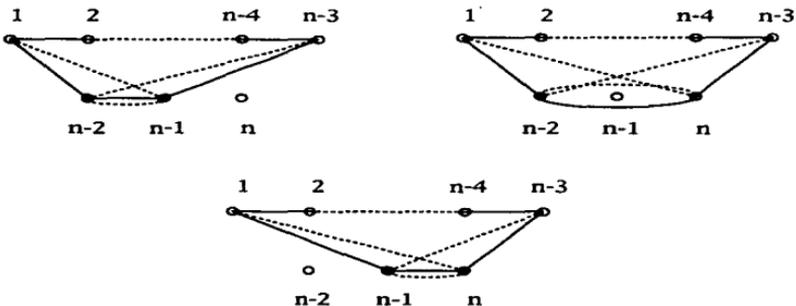
La diferencia fundamental entre  $R_4$  y el resto de los  $R_n$  radica en que las  $(n-3)$ -trayectorias de  $K_4$  son sus vértices, y en el resto de los casos cada  $(n-3)$ -trayectoria va a tener al menos dos vértices. Esto es bastante importante a la hora de contar cuantos  $(n-1)$ -ciclos de  $K_n$  van a contener a una  $(n-3)$ -trayectoria dada.

Al considerar el caso  $n \geq 5$  resulta que las  $(n-3)$ -trayectorias tienen dos extremos, y eso me permite que, dados dos vértices  $a_1$  y  $a_2$ , ajenos al camino, haya dos posibles formas en que yo construya un  $(n-1)$ -ciclo que contenga la  $(n-3)$ -trayectoria dada. Por el contrario, en el caso  $n=4$  existe una única forma hacerlo, pues resulta equivalente a preguntar cuántos triángulos pueden formarse con tres puntos. La respuesta a eso es, por supuesto, una sólo. La figura 28 muestra cómo para cada  $(n-1)$ -ciclo que contiene a una  $(n-3)$ -trayectoria cuando  $n=4$  habrá dos  $(n-1)$ -ciclos que contengan a la  $(n-3)$ -trayectoria cuando  $n \geq 5$ .

figura 28



De modo que deseo calcular el símbolo de Shläfli de  $R_n$  para toda  $n \geq 5$ . Comenzaré por contar el número de caras que inciden sobre un vértice de  $R_n$ . Tengo  $n-3$  vértices de  $K_n$  ocupados y quiero saber en cuántas formas puedo disponer de los otros tres para formar  $(n-1)$ -ciclos. El tamaño del camino y del ciclo me obligan a tomar los vértices libres en  $K_n$  en grupos de dos. Tengo tres vértices de  $K_n$ , y hay tres posibles maneras de escoger dos de ellos. Finalmente, como cada una de esas maneras me permite formar dos  $(n-1)$ -ciclos distintos, he resuelto que cada  $(n-3)$ -trayectoria de  $K_n$  está en seis  $(n-1)$ -ciclos distintos, que la figura 29 exhibe claramente.



Y para saber cuantos vértices tiene cada cara de  $R_n$  basta observar que en cada vértice de  $K_n$  del  $(n-1)$ -ciclo puedo poner dos  $(n-3)$ -trayectorias, una en cada dirección, y obtendré un número de  $(n-3)$ -trayectorias igual al doble del número de vértices de  $K_n$  que tenga el  $(n-1)$ -ciclo. Pero habré contado cada  $(n-3)$ -trayectoria una vez por cada uno de sus extremos, de manera que, en total, cada  $(n-1)$ -ciclo tiene  $n-1$   $(n-3)$ -trayectorias. Y por lo tanto:

**Teroema.** El símbolo de Shläfli para  $R_4$  es  $\{3, 3\}$ , y si  $n \geq 5$  el símbolo de Shläfli para  $R_n$  es  $\{n-1, 6\}$ .

Ahora me encargaré del asunto de la función característica de Euler: Si  $n=4$  como  $R_4$  es el tetraedro entonces  $\chi(R_4) = -2$ . Cuando  $n \geq 5$  no puedo hacer ninguna observación así de inmediata. Primero recordaré que si  $M = (V, A, C)$  es un mapa poliedral y  $v = |V|$ ,  $a = |A|$ ,  $c = |C|$ , entonces  $\chi(M) = v - a + c$ . Este número mágico tiene una larga historia que protagoniza temas apasionantes. Basta saber el valor que le asocia a un mapa poliedral para saber, salvo orientabilidad, en qué superficie puede ser dibujado. Es más, si el valor que resulta de la función característica es impar, entonces la superficie sin duda es no orientable y sé con exactitud de quién se trata. Para calcular  $\chi(R_n)$  tengo que lograr la tarea de contar el número de  $(n-3)$ -trayectorias,  $(n-2)$ -trayectorias y  $(n-1)$ -ciclos en  $K_n$ . Esa no es una tarea difícil.

Sea  $2 \leq k < n$ . Calcularé el número de trayectorias de orden  $n-k$  en  $K_n$ : Comienzo por seleccionar un vértice, que será uno de los extremos de la trayectoria. Para eso tengo  $n$  posibilidades. Para seleccionar el siguiente vértice de la trayectoria tengo  $n-1$  posibilidades, pues no puedo volver a elegir el que ya escogí. En esa forma, al seleccionar el  $i$ ésimo vértice ( $2 \geq i \geq k$ ) tendré  $n-(i-1)$  posibilidades para hacerlo. Obtengo la cifra  $n(n-1) \dots n-(k-1)$ , que no es definitiva, pues he contado cada camino una vez por cada uno de sus extremos, pero, al haber considerado esto, logro encontrar el resultado: El número de  $(n-k)$ -trayectorias en  $K_n$  es  $[n(n-1) \dots (n-(k-1))] / 2$ .

Para contar el número de ciclos de orden  $n-k$  en  $K_n$  se hace un razonamiento parecido, pero cada ciclo lo habré contado  $2(n-k)$  veces, dos veces en cada uno de sus vértices (una vez por cada dirección). Así,

el número de  $(n-k)$ -ciclos en  $K_n$  es  $[n(n-1)\dots(n-(k-1))]/[2(n-k)]$ .

Y de allí resulta que  $\chi(R_n) = \frac{[n(n-1)\dots(4)]}{2} - \frac{[n(n-1)\dots(3)]}{2} + \frac{[n(n-1)\dots(2)]}{2(n-1)}$ , es decir,

$$\chi(R_n) = \frac{n!}{12} - \frac{n!}{4} + \frac{n!}{2(n-1)}, \text{ si } n \geq 5.$$

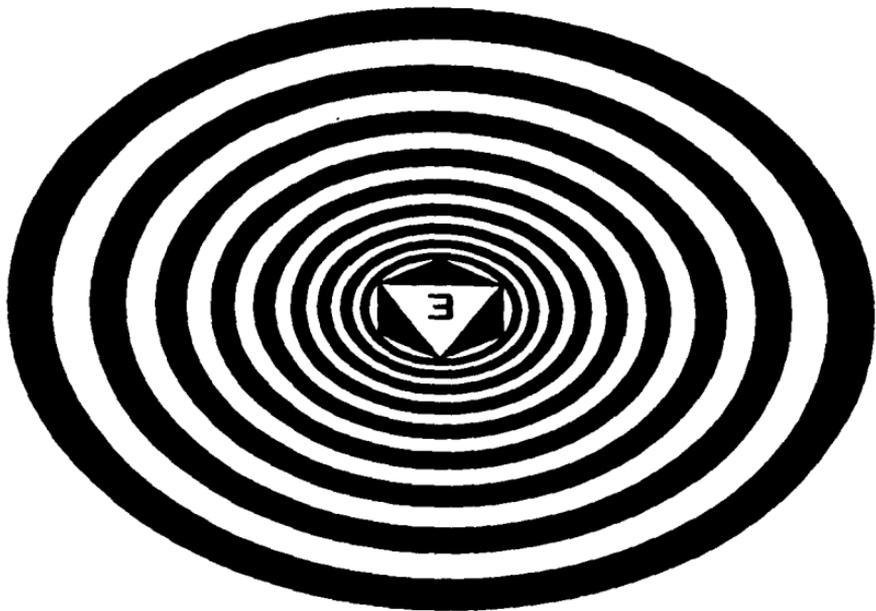
pero  $R_n = \{n-1, 6\}$ , de modo que su función característica, expresada en términos de  $\{p, q\}$ , será

$$\chi(R_n) = \frac{(n!)}{2} \left[ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} \right].$$

**Teorema:** Sea  $n \geq 4$ , entonces  $\chi(R_n)$ , la función característica de  $R_n$ , está definida por:

$$\chi(R_n) = \frac{(n!)}{2} \left[ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} \right].$$

Si  $n \geq 6$  entonces  $\chi(R_n)$  es par. Mala suerte. Si fuera impar sabría que  $R_n$  no sería orientable y sabría con exactitud en qué superficie sería dibujado, pero como es par debo revisar la orientabilidad aparte para saber qué superficie le toca a  $R_n$ .  $\chi(R_5)$ , por cierto, es impar, por lo tanto  $R_5$  no es orientable, y, me basta calcular el valor de su característica para saber de qué superficie se trata.



## Capítulo 3

Aquí haré un análisis profundo del grupo simétrico de orden  $n \geq 4$  en los términos impuestos por su papel como grupo de automorfismos del mapa poliedral regular  $R_n$ . Mostraré un conjunto especial de generadores del grupo y algunas relaciones que éstos satisfacen. Estas relaciones suelen no ser suficientes para dar una presentación del grupo, pero son el primer paso necesario para lograrlo.

En el capítulo anterior mostré que  $R_n$  es un mapa poliedral regular, y que hay un isomorfismo entre  $A(R_n)$  y el grupo de permutaciones de  $n$  elementos. Por eso hablaré de ambos grupos como si fueran el mismo, y me referiré a los automorfismos de  $R_n$  como si operaran sobre los vértices de  $K_n$ .

Lo que resolveré a continuación puede obtenerse directamente a través de un poderoso teorema general que se refiere a la relación entre un politopo de incidencia regular y su grupo de automorfismos. Este resultado se expone con cierto detalle en [Shu1, 2] y en [DaShu1], pero he decidido evitar usarlo porque una aproximación más particular hacia el problema que aquí me concierne arroja información interesante acerca de la estructura del grupo de automorfismos de  $R_n$ . El teorema es como tomar un avión para ir de Nairobi a Calcutta; llegas en un ratito, pero te pierdes todo lo que hay en el camino.

Sea  $\Phi = \{ (1, 2, \dots, n-3), (1, 2, \dots, n-2), [1, 2, \dots, n-1] \}$ . Esta

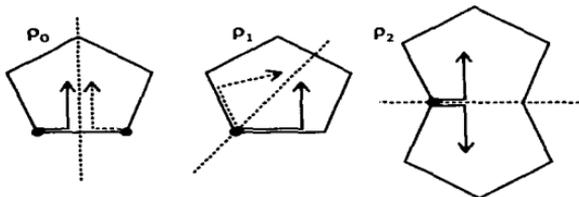
bandera ha sido elegida arbitrariamente y puede haber elegido cualquier otra en su lugar. Al elegir ésta, ella será la cimentación que sostendrá el material expuesto en este capítulo. En primer lugar, mostraré que existen tres únicos automorfismos de  $R_n$   $\rho_0, \rho_1$  y  $\rho_2$ , tales que  $\rho_1$  es la identidad en  $\Phi$  excepto por su faceta de dimensión íesima, es decir que  $\rho_1((1, 2, \dots, n-j)) = (1, 2, \dots, n-j)$  si y sólo si  $i = (3-j)$ . Pero la existencia y unicidad de tales  $\rho_1$  es evidente una vez que haya observado las siguientes banderas "adyacentes" a  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \{ (2, \dots, n-2), (1, 2, \dots, n-2), [1, 2, \dots, n-1] \}, \\ \Phi_1 &= \{ (1, 2, \dots, n-3), (n-1, 1, 2, \dots, n-3), [1, 2, \dots, n-1] \}, \\ \Phi_2 &= \{ (1, 2, \dots, n-3), (1, 2, \dots, n-2), [n, 1, 2, \dots, n-2] \}. \end{aligned}$$

Es muy sencillo ver, a partir del axioma **M1** en la definición de mapa poliedral y de que las caras son definidas como ciclos, que no existe otra bandera en  $R_n$  que comparta con  $\Phi$  una sola faceta, pues cada arista tiene exactamente dos vértices distintos y está en exactamente dos caras, y cada vértice sólo puede estar en dos aristas de la misma cara.

Pero  $R_n$  es un mapa poliedral regular, de manera que su grupo de automorfismos actúa transitivamente en su conjunto de banderas, y esa propiedad me garantiza la existencia de  $\rho_0, \rho_1$  y  $\rho_2$  tales que cumplen  $\Phi \rho_i = \Phi_i$  para cada  $i$  entre 1 y 3. Además, La unicidad de  $\rho_i$  está garantizada por la unicidad de  $\Phi_i$ . Es evidente que los  $\rho_i$  son involuciones, es decir, que su cuadrado es la identidad, y pueden ser interpretados geoméricamente como reflexiones. Más adelante veré que al multiplicarlos entre sí obtendré las representaciones de un tipo muy especial de simetría del poliedro.

figura 30



A continuación calcularé cada  $\rho_1$ :

$$\begin{aligned} \rho_0((1, 2, 3, \dots, n-3)) &= (2, 3, \dots, n-2) = (n-2, \dots, 3, 2), \\ \rho_0((1, 2, 3, \dots, n-2)) &= (1, 2, 3, \dots, n-2) = (n-2, \dots, 3, 2, 1), \\ \rho_0([1, 2, 3, \dots, n-1]) &= [1, 2, 3, \dots, n-1] = [n-1, \dots, 3, 2, 1]. \end{aligned}$$

Entonces  $\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-2 \\ n-2 & n-3 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ . O, más correctamente, debería decir que  $\rho_0$  corresponde a esa permutación, pero ya he aclarado que puedo tratar automorfismos de  $R_n$  y permutaciones de orden  $n$  como si fueran iguales.

$$\begin{aligned} \rho_1((1, 2, 3, \dots, n-3)) &= (1, 2, 3, \dots, n-3) = (n-3, \dots, 2, 1), \\ \rho_1((1, 2, 3, \dots, n-2)) &= (n-1, 1, 2, \dots, n-3) = (n-3, \dots, 2, 1, n-1), \\ \rho_1([1, 2, 3, \dots, n-1]) &= [1, 2, 3, \dots, n-1] = [n-3, \dots, 2, 1, n-1, n-2]. \end{aligned}$$

Entonces  $\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-3 \\ n-3 & n-4 & \dots & 1 \end{pmatrix} (n-1 \ n-2)$ .

Y, finalmente, con respecto al cálculo de  $\rho_2$ :

$$\begin{aligned} \rho_2((1, 2, 3, \dots, n-3)) &= (1, 2, 3, \dots, n-3), \\ \rho_2((1, 2, 3, \dots, n-2)) &= (1, 2, \dots, n-2), \\ \rho_2([1, 2, 3, \dots, n-1]) &= [n, 1, 2, 3, \dots, n-2]. \end{aligned}$$

Entonces  $\rho_2 = (n-1 \ n)$ .

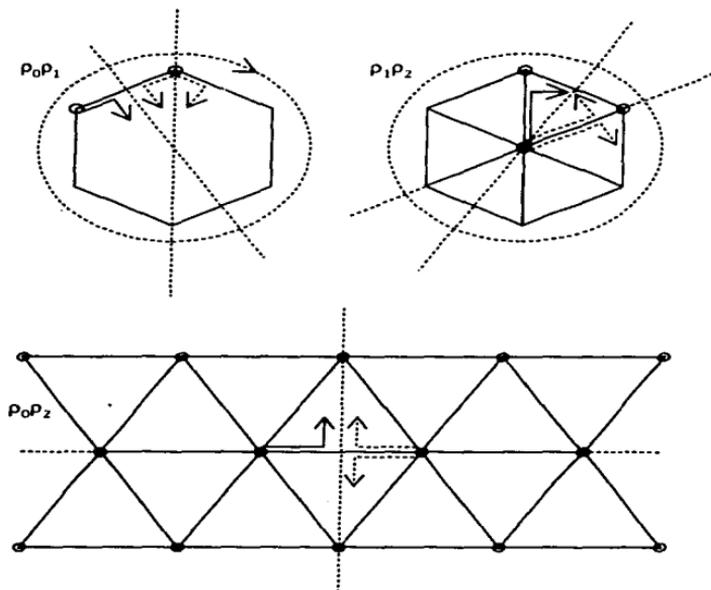
Ahora calcularé algunos productos:

$$\begin{aligned} \rho_0\rho_1 &= (1 \ n-1 \ n-2 \ \dots \ 2), \\ \rho_1\rho_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-3 \\ n-3 & n-2 & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix} (n-1 \ n-2 \ n), \\ \rho_0\rho_2 &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & n-2 \\ n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix} (n-1 \ n), \\ \rho_1\rho_0 &= (1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n-1). \end{aligned}$$

Los productos  $\rho_0\rho_1$ ,  $\rho_1\rho_2$  y  $\rho_0\rho_2$  representan, respectivamente, la rotación alrededor de una cara, la rotación alrededor de un vértice, y la

rotación alrededor del centro de una arista. La figura 3 1 intenta visualizar esta situación.

figura 31



Además, estos productos me proporcionan la información que necesito para mostrar que las  $\rho_i$  generan el grupo  $A(\mathbb{R}_n)$  y que cumplen con las relaciones planteadas por su interpretación geométrica, pues, si las  $\rho_i$  y sus productos representan lo que hace un momento dije, entonces, si  $\mathbb{R}_n = \{ p, q \} = \{ n-1, 6 \}$ , entonces las  $\rho_i$  deben cumplir con que:

**Teorema:** Sea  $n \geq 4$ , entonces  $A(R_n) = \{p_0, p_1, p_2\}$ , y se cumplen las relaciones siguientes:

- i)  $p_i^2 = e \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$ ,
- ii)  $(p_0 p_2)^2 = e$ ,
- iii)  $(p_0 p_1)^p = (p_0 p_1)^{n-1} = e$ ,
- iv)  $(p_1 p_2)^q = (p_1 p_2)^6 = e$ .

**Demostración:** El inciso i) ya he revisado que se cumple, pues los  $p_i$  son involuciones, y los otros tres son inmediatos tras analizar un poco la estructura que como permutaciones tienen los productos que he calculado. Por otra parte, es evidente que el conjunto  $\{p_1 p_0, p_2\} = \{(1 \ 2 \ 3 \dots n-1), (n \ n-1)\}$  genera todas las transposiciones del grupo de permutaciones de orden  $n$ , y como el conjunto de dichas transposiciones genera tal grupo, entonces el conjunto  $\{p_0, p_1, p_2\}$  es, efectivamente, un generador de  $A(R_n)$ .

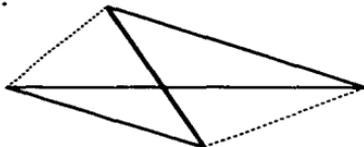
Lo que he resuelto hasta ahora, apoyándome tanto en la estructura particular de los  $R_n$ , es propiedad de cualquier mapa poliedral regular. Es decir, basta que  $\{p, q\}$  sea regular para que existan las  $p_i$ , que generen  $A(\{p, q\})$ , y que cumplan con las relaciones antes expresadas en los términos de  $p$  y de  $q$ . Este resultado se generaliza con bastante naturalidad a politopos de incidencia en cualquier dimensión. Aquella persona interesada en éste tópico puede consultar [ McShu2].

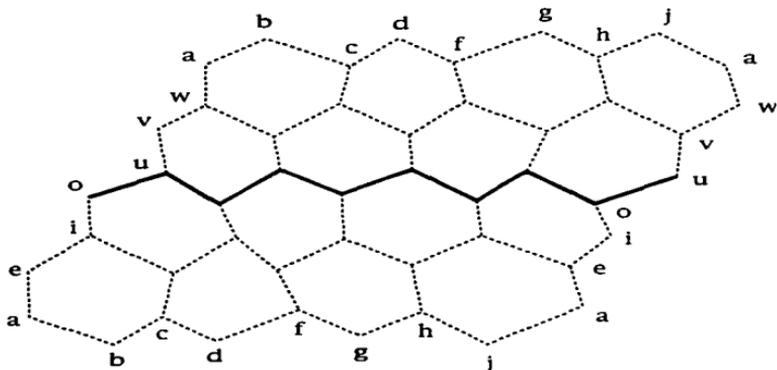
En ocasiones las relaciones que he planteado bastan para definir el grupo de automorfismos de un mapa poliedral regular, pero a veces no, y es necesario agregar algunas otras para obtener una presentación del grupo. Existe un algoritmo para revisar si las relaciones dadas son suficientes [CoMo1], y, en caso de que no lo sean, plantéa una fórmula para encontrar las que faltan. Este método es algebraico, y no echa ninguna luz hacia un posible nexo entre las nuevas relaciones y las propiedades combinatorias del mapa poliedral. Por otra parte, las nociones de polígono de Petrie y de  $j$ -cadena, que expondré más adelante, agregan a mi lista de relaciones unas nuevas que normalmente no resultan redundantes y que tienen mucho que ver con la geometría combinatoria del mapa poliedral en cuestión. Es

evidente que las relaciones que ya he dado definen el grupo  $A(R_4)$ . Sin embargo, estas relaciones no son suficientes para dar una presentación de  $A(R_5)$ , pero puedo apoyarme sobre las nuevas relaciones que haya encontrado para ver si en esa forma puedo presentar al grupo  $A(R_5)$ . La certeza con que me atrevo a asegurar lo que sucede en estos dos casos se basa en consideraciones que no trataré con detalle, a saber: El tetraedro es el politopo universal  $\{3, 3\}$  y, como tal, su grupo de automorfismos es de Coxeter y debe estar presentado por las relaciones que ya he dado. En cambio  $R_5 = \{4, 6\}$ , puede obtenerse como un cociente de otro  $\{4, 6\}$  que vive en la esfera de dimensión tres, y esta razón obliga que su grupo de automorfismos sea un cociente del de aquel otro y que, por tanto, no pueda ser un grupo de Coxeter y no pueda estar presentado únicamente por las tres relaciones originales. Lo más importante con relación a este asunto de las presentaciones es recordar que el grupo  $A(R_n)$  es ni más ni menos que el simétrico de orden  $n$ , y que ninguna de sus presentaciones localizadas en la literatura matemática ofrecen las relaciones definidas por el mapa poliedral  $R_n$ . Además, ninguna de estas presentaciones están apoyadas en un modelo geométrico como lo es la familia de los  $R_n$ .

En fin. Ahora voy a enunciar la definición de polígono de Petrie.

**Definición:** Un Polígono de Petrie  $P$  de un mapa poliedral  $M=(V, A, C)$  es un ciclo con vértices en  $V$  y aristas en  $A$  tal que cualesquiera dos aristas consecutivas en  $P$  deben estar en la misma cara de  $M$ , pero nunca tres. La figura **X** muestra en esta página un polígono de Petrie en el tetraedro y en la página siguiente otro en un enmozaicado hexagonal del toro (de tipo  $\{6, 3\}$ ).





Naturalmente, si un mapa poliedral es regular, todos sus polígonos de Petrie serán isomorfos, y, además, si un mapa poliedral regular  $M$  es un  $\{p, q\}$  y sus polígonos de Petrie tienen longitud  $k$ , entonces  $\rho_0, \rho_1$  y  $\rho_2$  cumplirán la relación  $(\rho_0\rho_1\rho_2)^k = e$ .

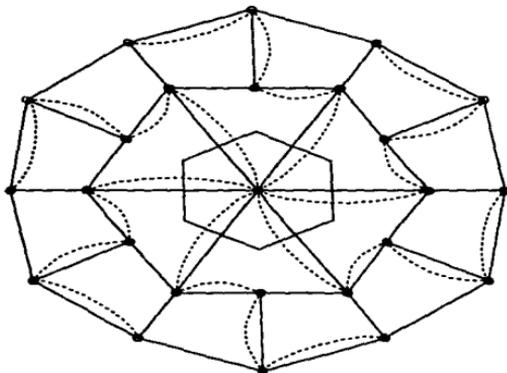
Si esta relación resulta no ser redundante con las tres anteriores, y entre todas dan una presentación de  $A(M)$ , entonces escribiré que  $M = \{p, q\}_k$ .

Por cierto, una observación interesante alrededor del concepto de polígono de Petrie es que nos permite construir un mapa poliedral nuevo a partir de cualquier mapa poliedral dado. Para lograrlo basta conservar el 1-esqueleto original, y cambiar las caras por los polígonos de Petrie. Para revisar que el objeto obtenido es, efectivamente, un mapa poliedral, debo ver que toda arista de un mapa poliedral arbitrario está en exactamente dos de sus polígonos de Petrie ( $M1$ ) y que la gráfica que tiene por vértices los polígonos de Petrie alrededor de un vértice, es decir, los links del nuevo mapa, son ciclos ( $M3$ ). El

axioma **M2** en la definición de mapa poliedral no es necesario revisar que se cumpla, porque tal axioma se refiere a la propiedad de conexidad del 1-esqueleto, y ésto lo comparte con el original el nuevo mapa. Con respecto al axioma **M1**, es bastante sencillo ver que una arista está contenida en exactamente dos polígonos de Petrie, pues tal arista sólo está en dos caras del poliedro original, y en cada una de esas caras tiene sólo dos aristas vecinas. Entonces nada más cuatro de sus aristas vecinas están en posición de formar parte de un polígono de Petrie con ella, y, como lo muestra la figura, con dos de sus aristas vecinas estará en un polígono de Petrie y con las dos que faltaban en el otro.



Por otro lado, para verificar que se cumple con el axioma **M3** me basta observar que, alrededor de un vértice, las caras y los polígonos de Petrie van a parecer iguales, pues las dos aristas de cada polígono de Petrie que contienen al vértice deben pertenecer a la misma cara del mapa poliedral original (bueno, también hay que ser un vértice con una vista de muy corto alcance, o ser un vértice que vive dentro de un poliedro inmenso, gigantesco, con caras tan grandes como mares o países, para no poder darnos cuenta de la diferencia que hay entre nuestros polígonos de Petrie y nuestras caras). Debido a esta misma razón, si el mapa poliedral  $M$  es un  $\{p, q\}$ , y la longitud de sus polígonos de Petrie es el número natural  $k$ , entonces su poliedro de Petrie asociado será un  $\{k, q\}$ . En fin, la siguiente gráfica ilustra con líneas punteadas la forma en que los polígonos de Petrie que



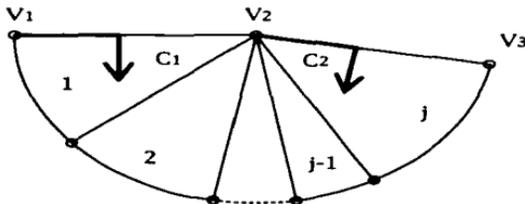
comparten un vértice inciden sobre éste último.

El poliedro de Petrie parece ser muy interesante, pero no tiene una gran relación con lo que me preocupa en este momento. A continuación definiré un concepto algo delicado, el de *j*-cadena.

**Definición:** Sea  $M = \{p, q\} = (V, A, C)$  un mapa poliedral. Una *j*-cadena en  $M$  puede entenderse como una sucesión de banderas que pueden ser consideradas como adyacentes, o como una trayectoria o ciclo que lleva incluida una orientación local en cada una de sus aristas que se impone al elegir como etiqueta una de las banderas a que pertenezca. Lo importante en este caso será poder contar con una noción de **adelante-atrás** e **izquierda-derecha** sobre la trayectoria o ciclo. Bien, ahora procederé a la construcción de una *j*-cadena en  $M$ . Sea, en primer lugar  $j \in \{1, 2, \dots, \lfloor q/2 \rfloor\}$ . Y sea  $\{v_1, a_1, c_1\}$  una bandera arbitraria en  $M$ . La bandera  $\{v_2, a_2, c_2\}$  será determinada como sigue:  $v_2 \neq v_1$  es el otro vértice que hay en  $a_1$ . Ahora, alrededor de  $v_2$  contaré *j* caras adyacentes en la dirección determinada por  $c_1$  (mi derecha), y la *j*otésima cara será  $c_2$ .  $v_3$  será el único vértice adyacente a  $v_2$  que

está en  $c_2$  pero no está en la  $j-1$ -ésima cara y  $a_2$  será, naturalmente  $v_2v_3$ . Puedo hacer ésto mismo para definir  $\{v_3, a_3, c_3\}$ , y puedo hacerlo para encontrar, dado  $\{v_1, a_1, c_1\}$ , al  $\{v_{i+1}, a_{i+1}, c_{i+1}\}$ . Dejaré de buscar nuevas banderas cuando haya encontrado un número natural  $k$  tal que  $\{v_1, a_1, c_1\} = \{v_{k+1}, a_{k+1}, c_{k+1}\}$ , y entonces diré que la  $j$ -cadena tiene longitud  $k$ .

Figura

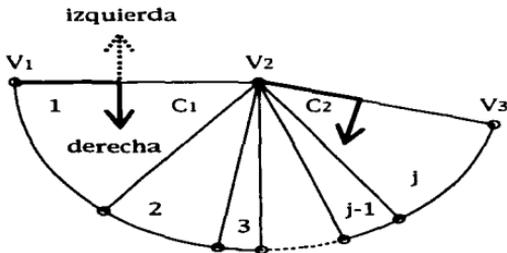


Denotaré una  $j$ -cadena en  $M$  como si fuera un ciclo de banderas "adyacentes":  $\{[v_1, a_1, c_1], \dots, [v_k, a_k, c_k]\}$  cuyas aristas son los vértices que cada dos banderas adyacentes comparten. En cierto sentido, una  $j$ -cadena es simplemente un ciclo, y las banderas funcionan como una especie de noción de orientación. Por lo menos en el caso que me concierne siempre sucede que la sucesión  $v_1, \dots, v_k$  forma un ciclo en  $R_n$ , pero en ocasiones hay que recorrerlo dos veces para recuperar la orientación original impuesta por las banderas.

Si  $j=1$  entonces el ciclo  $[v_1, \dots, v_k]$  es una cara, y si  $j=2$  obtengo lo que se conoce como el hoyo fundamental ( $[McShu2]$ ).

Una manera un poco distinta de pensar en las  $j$ -cadenas es como sigue: Sea  $M = \{p, q\}$ . Describiré la construcción de un objeto que es una especie de ciclo con aristas orientadas al que llamaré  $j$ -cadena,

Sea  $j \in \{1, 2, \dots, \lfloor q/2 \rfloor\}$ . Elegiré arbitrariamente un vértice  $v_1 \in V$ , y de los vértices adyacentes a  $v_1$  elegiré al  $v_2$  también en forma arbitraria. Si me imagino caminando de  $v_1$  hacia  $v_2$  sobre  $v_1v_2$  y me detengo a la mitad del camino, puedo pensar que a mi derecha tengo una cara y a la izquierda otra. Ahora seguiré caminando y me detendré justamente sobre  $v_2$ . A mi espalda estará  $v_1$ , y también, dado que  $M = \{p, q\}$ , puedo ver los otros  $q-1$  vértices adyacentes a  $v_2$ , y las  $q$  caras que lo contienen. De estos  $q-1$  vértices elegiré de la siguiente manera el  $v_3$  que será el siguiente paso en mi cadena: al seguir hacia la derecha alrededor de  $v_2$ , contaré  $j$  de las caras que inciden sobre  $v_2$ , y elegiré en la última de ellas al vértice adyacente a  $v_2$  que no estaba en la  $(j-1)$ ésima cara.



Ahora es cosa de seguir caminando y detenerme justamente sobre  $v_2v_3$  a medio camino entre  $v_2$  y  $v_3$ . Entonces deberé voltear a mi derecha y hacer exactamente lo mismo que hice antes. Podría decir que deberé detenerme cuando alcance el primer  $k$  tal que  $v_k = v_1$ , y entonces diría que la  $j$ -cadena tiene longitud  $k-1$ , y así es como sucederá en muchas ocasiones, pero puede ser que haya recorrido una banda de Möbius y que cuando haya llegado a  $v_k = v_1$  resulte que mi derecha sea la que antes era mi izquierda, y entonces tendré que volver a recorrer todo el ciclo para llegar a  $v_1$  igual de orientado que antes. Si este fuera el caso diría que la  $j$ -cadena tiene longitud  $2(k-1)$ .

Denotaré una  $j$ -cadena en  $M=(V, A, C)$  como sigue:

$\{(v_1, c_1), (v_2, c_2), \dots, (v_k, c_k)\}$ , donde  $v_i \in V, c_i \in C, v_i v_{i+1} \in A, v_k v_1 \in A, c_i$  es la cara que tiene  $v_i v_{i+1}$  a su derecha,  $(v_1, c_1) = (v_{k+1}, c_{k+1})$ , y no existe número natural menor que  $k$  capaz de cumplir con esa igualdad.

Mi experiencia personal hacia el concepto de  $j$ -cadena no fue al principio muy afortunada, y es por eso que mostré dos alternativas distintas para describirle. Yo espero que al haber expuesto tan detalladamente lo que entendí por  $j$ -cadena sea de ayuda para comprender mejor su naturaleza.

Nuevamente, si se da el caso en que  $M=\{p, q\}$  es regular, entonces, para cada  $j$  fija todas las  $j$ -cadenas van a ser de la misma longitud y, si  $r_j$  es el tamaño de una  $j$ -cadena, entonces:

$$((\rho_0 \rho_1) (\rho_2 \rho_1)^{j-1}) r_j = e \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, [q/2]\}.$$

Si este conjunto de relaciones y las tres relaciones originales dan una presentación de  $A(M)$ , entonces escribiré que

$$M = \{P, q / r_2, \dots, r_{[q/2]}\}.$$

Ahora, una vez definidos estos interesantes polígonos que pueden ser encontrados en cualquier mapa poliedral, procederé a ver lo que sucede con ellos al buscarlos dentro de los  $R_n = \{n-1, 6\}$ , cuando  $n \geq 5$  (ignoraré deliberadamente el caso  $n=4$  por trivial). Primero pasaré a tratar el asunto relacionado con el polígono de Petrie. Sea  $n \geq 5$ .

$$Y \text{ sea } P_n = [(1, 2, 3, \dots, n-3), (2, 3, \dots, n-2), (3, 4, \dots, n-1), \\ (4, 5, \dots, n), (5, 6, \dots, n, 1), \dots, (n, 1, \dots, n-4)].$$

Curiosamente,  $P_n$  resulta ser el caminito que utilizaré para construir las bandas de Möbius que probarán la no orientabilidad de una gran familia de mapas poliedrales  $R_n$  durante la exposición del capítulo próximo.

**Teorema:**  $P_n$  es un polígono de Petrie en  $R_n$ .

**Demostración:** Entonces debe ser cierto que al tomar cualesquiera dos aristas consecutivas de  $P_n$  están en una misma cara de  $R_n$ , pero nunca debe suceder al tomar tres. Para mostrar que así ocurre basta con observar que cualesquiera tres aristas consecutivas en  $P_n$  son de la forma:

$$\begin{aligned} &(1, 1+1, \dots, n-3+1) \\ &(1+1, \dots, n-2+1) \\ &(1+2, \dots, n-1+1) \end{aligned} \quad \text{mod}(n),$$

Donde he considerado el juego positivo de residuos módulo  $n$  y he cancelado  $n+n=n \pmod{n}$ . Es, por otra parte, bastante claro que

$$(1, 1+1, \dots, n-3+1), (1+1, \dots, n-2+1) < [1, 1+1, \dots, n-2+1] \in C_n, \text{ y que } (1+1, \dots, n-2+1), (1+2, \dots, n-1+1) < [1+1, \dots, n-1+1] \in C_n \pmod{n}.$$

Así, he mostrado que cualesquiera dos aristas consecutivas de  $P_n$  comparten una cara de  $R_n$ , pero, si  $V(G)$  denota el conjunto de vértices que tiene una subgráfica cualesquiera de  $K_n$  llamada  $G$ , entonces

$$|V((1, 1+1, \dots, n-3+1) \cup V((1+2, \dots, n-1+1))| = n,$$

de modo que las tres aristas no pueden estar a la vez en una cara de  $R_n$ , pues tales caras nomás tienen  $n-1$  vértices de  $K_n$ , y cualquier terna de aristas consecutivas en  $P_n$  tiene los  $n$  vértices de  $K_n$ . Por lo tanto  $P_n$  es un polígono de Petrie en  $R_n$ , y como tal polígono es un  $n$ -ágono, me puedo permitir la libertad de agregar a mi lista de relaciones la siguiente:

$$\begin{aligned} (\rho\sigma\rho_1\rho_2)^n &= e, \text{ es decir} \\ (\rho\sigma\rho_1\rho_2)^{P+1} &= e. \end{aligned}$$

Por otra parte, con respecto a las  $j$ -cadenas de  $R_n$ , dado que  $[Q/2]=3$ , y que las 1-cadenas van a ser las caras, me quedan por calcular tan

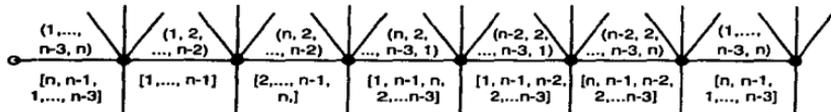
sólo las 2 y 3-cadenas, de manera que nada más voy a poder sacar dos relaciones de las  $j$ -cadenas de  $R_n = \{n-1, 6\}$ . Coxeter hizo la conjetura de que el número de relaciones necesario para encontrar una presentación de grupos finitos generados por un número fijo de involuciones (tres en este caso) crece al crecer el orden de los grupos ([CoMo1]). En caso de que esta conjetura fuera cierta deberemos comenzar a buscar relaciones en otra parte, pues tenemos grupos de automorfismos tan grandes, dentro de lo finito, como se nos antoje. Un buen sitio que se me ocurre para ir buscando es entre las  $j$ -cadenas de  $\delta(M) = \{6, n-1\}$ , pues como en este caso  $[q/2] = [n-1/2]$ , tengo la oportunidad de obtener  $[n-1/2]-1$  relaciones interesantes para buscar una presentación del grupo simétrico de orden  $n$ . Pero, en este caso, calcular las  $j$ -cadenas puede complicarse bastante, y por eso recomiendo un camino opuesto al que yo mismo he utilizado en mi trabajo: encontrar la geometría en el álgebra en lugar de sacar el álgebra de la geometría; como tengo calculadas las  $\rho_i$  en forma de permutaciones, y como el poliedro dual intercambia el papel de los vértices y caras del poliedro original, las relaciones que obtendré para las  $j$ -cadenas del dual serán  $((\rho_2 \rho_1) (\rho_0 \rho_1)^{j-1}) s_j = e$ , pues  $\rho_0$  y  $\rho_2$  habrán intercambiado sus papeles, y el número desconocido que causará problemas es el  $s_j$ , la longitud de una  $j$ -cadena. Sin embargo, basta calcular  $(\rho_2 \rho_1) (\rho_0 \rho_1)^{j-1}$  como producto de las permutaciones  $\rho_i$ , y creo que se debe poder calcular el orden que tiene dicho producto. En fin, ahora calcularé las 2-cadenas de  $R_n$ ,  $n \geq 5$ . Primero consideraré el caso  $n \geq 6$  por motivos que más adelante se volverán evidentes, y utilizaré la definición como ciclos de banderas.

**Teorema:** Sea  $C^2_n =$

[ ((1, 2, ..., n-3), (1, 2, ..., n-2), [1, 2, ..., n-1]),  
 ((2, 3, ..., n-2), (n, 2, ..., n-2), [2, 3, ..., n]),  
 ((n, 2, ..., n-3), (n, 2, ..., n-3, 1), [1, n-1, n, 2, ..., n-3]),  
 ((2, ..., n-3, 1), (n-2, 2, ..., n-3, 1), [1, n-1, n-2, 2, ..., n-3]),  
 ((n-2, 2, ..., n-3), (n-2, 2, ..., n-3, n), [n, n-1, n-2, 2, ..., n-3]),  
 ((2, 3, ..., n-3, n), (1, 2, ..., n-3, n), [n, n-1, 1, 2, ..., n-3]) ],

tal  $C^2_n$  es una 2-cadena de  $R_n$ , para  $n \geq 6$ .

**Demostración:** Es fácil verificar que esa sucesión de banderas de orden seis es una 2-cadena de  $R_n$ , como lo muestra la siguiente figura:



Y bastará recorrer el hexágono formado por sus vértices y aristas una sóla vez para regresar a la bandera original. Por lo tanto, puedo asegurar que:

$((\rho\rho\rho_1)(\rho_2\rho_1))^{6-q} = e$ , si  $n > 5$ , y eso es, efectivamente, cierto, pues:

$$\rho_2\rho_1 = (n-1 \ n \ n-2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-3 \\ n-3 & n-4 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

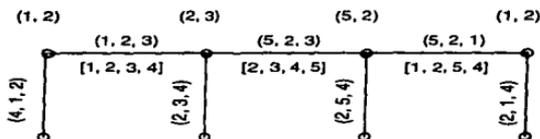
$$(\rho\rho\rho_1)(\rho_2\rho_1) = (1 \ n \ n-2) \begin{pmatrix} 2 & \dots & n-3 \\ n-3 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

de orden seis, evidentemente.

Lo que pasa con  $n=5$  es que no hay suficientes vértices en  $K_5$  para lograr que el ciclo formado por vértices y aristas en  $C^2_5$  sea un hexágono, y terminará por ser un pequeño triangulito:

$$C^2_5 = [ ((1, 2), (1, 2, 3), [1, 2, 3, 4]), ((2, 3), (5, 2, 3), [2, 3, 4, 5]), ((5, 2), (5, 2, 1), [1, 4, 5, 2]) ]$$

que, como lo muestra la figura, también es una 2-cadena:



Y, por supuesto:

$((\rho_0 \rho_1) (\rho_2 \rho_1))^3 = e$ , si  $n=5$ , pues  $(\rho_0 \rho_1) (\rho_2 \rho_1) = (1 \ n \ n-2) = (1 \ 5 \ 3)$ , cuyo orden es, obviamente, tres. Y dicho esto, queda resuelto el asunto que corresponde a las mentadas 2-cadenas de  $R_n$ ,  $n > 4$ .

Las 3-cadenas. Las 3-cadenas. En esta parte dividiré mi análisis en dos casos, el par y el impar. En el caso par, sea  $R_n = R_{2m}$ ,  $n > 5$ .

Sea,  $C^3_n = C^3_{2m} =$

$\{((1, \dots, n-3), (1, \dots, n-2), [n-1, 1, \dots, n-2]),$   
 $((2, \dots, n-2), (2, \dots, n-2, 1), [n, 2, \dots, n-2, 1]),$   
 $((3, \dots, n-2, 1), (3, \dots, n-2, 1, 2), [n-1, 3, \dots, n-2, 1, 2]),$   
 $((4, \dots, n-2, 1, 2), (4, \dots, n-2, 1, 2, 3), [n, 4, \dots, n-2, 1, 2, 3]),$

así, sucesivamente:

$i$  par:

$((1, \dots, n-2, 1, \dots, i-2), (1, \dots, n-2, 1, \dots, i-1), [n, i, \dots, n-2, 1, \dots, i-1]),$

$i$  impar:

$((1, \dots, n-2, 1, \dots, i-2), (i, \dots, n-2, 1, \dots, i-1), [n-1, i, \dots, n-2, 1, \dots, i-1]),$

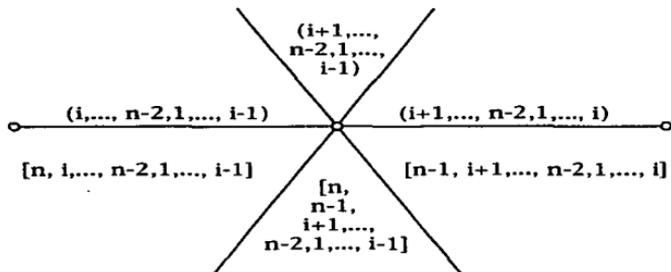
hasta llegar a:

$((n-2, 1, \dots, n-4), (n-2, 1, \dots, n-3), [n, n-2, \dots, n-3]).$

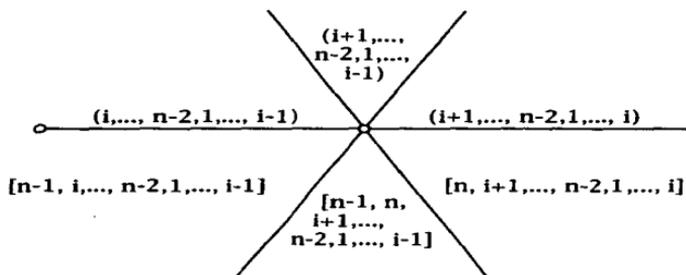
**Teorema.** Sea  $n=2m$  un par, entonces la  $C_n^3$  antes definida, es una 3-cadena de  $R_n$ .

**Demostración:** Esta sucesión tiene orden  $n-2$ . Es claro que el conjunto de vértices y aristas forma un ciclo. Para asegurarme que es una 3-cadena en  $R_{2k}$  debo revisar que si tomo un par de aristas consecutivas debe haber tres caras a la derecha del vértice que tienen en común. Trataré aparte el caso en que  $(1, \dots, n-2)$  forme parte de la pareja de aristas consecutivas que haya elegido porque a esas no las puedo escribir en la forma general, que es, para  $i: (1, \dots, n-2, 1, \dots, i-1)$ . Bien. Las siguientes figuras muestran que  $C_n^3$ , con  $n=2k$ , es una 3-cadena:

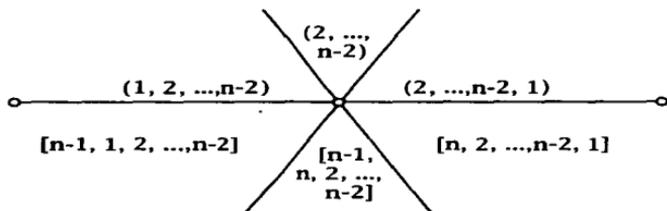
Si  $i \in \{ 2, \dots, n-2 \}$  es par:

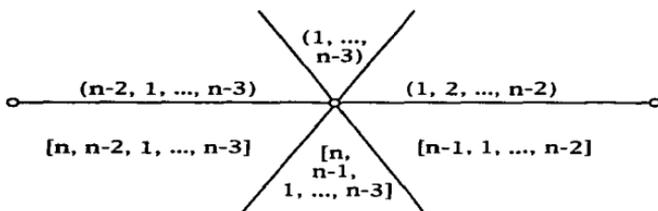


Si  $i \in \{ 2, \dots, n-2 \}$  es impar:



Y, para terminar, en el caso en que  $i=1$ , basta examinar los alrededores de  $(1, 2, \dots, n-2)$ :





Así es que para todo  $n$  par mayor que 5 debe ser que:

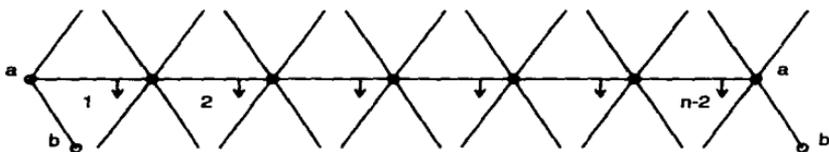
$$(\rho_0 \rho_1 (\rho_2 \rho_1)^2)^{n-2} = e, \text{ es decir}$$

$$(\rho_0 \rho_1 (\rho_2 \rho_1)^2)^{p-1} = e.$$

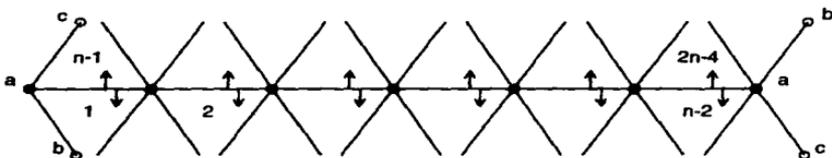
Y eso no podría ser más cierto, pues  $(\rho_2 \rho_1)^2 = (n-1 \ n-2 \ n)$ , y entonces  $(\rho_0 \rho_1 (\rho_2 \rho_1)^2)^{p-1} = (1 \ n-2 \ n-3 \ \dots \ 2) (n-1 \ n)$ , y como  $n$  es par, entonces  $n-2$  es par, y de allí es inmediato que la relación se cumple, tal y como debe ser.

Una buena parte de la importancia del trabajo expuesto en este capítulo es que puede ayudar a encontrar nuevas presentaciones del grupo Simétrico de orden  $n$  que tienen la interesante propiedad de contar con una bonita interpretación geométrica. A continuación mostraré lo que sucede con las tres cadenas de  $R_n$  cuando resulta que  $n-2k+1 \geq 5$ . Esencialmente obtendré el mismo ciclo de orden  $n-2$  que obtuve en el caso par, pero esta vez deberé recorrerlo dos veces debido a causas de orientación. La figura siguiente ilustra lo que pasa, y los números indican la cantidad de pasos que llevo dados en la 3-cadena:

Caso par:



Caso impar:



Ahora procederé a resolver el caso impar. Sea pues  $C^3_a = C^3_{2k+1} =$

( primera vuelta )

$[(1, \dots, n-3), (1, \dots, n-2), [n-1, 1, \dots, n-2]],$   
 $[(2, \dots, n-2), (2, \dots, n-2, 1), [n, 2, \dots, n-2, 1]],$   
 $[(3, \dots, n-2, 1), (3, \dots, n-2, 1, 2), [n-1, 3, \dots, n-2, 1, 2]],$   
 $[(4, \dots, n-2, 1, 2), (4, \dots, n-2, 1, 2, 3), [n, 4, \dots, n-2, 1, 2, 3]],$

así, sucesivamente:

**i par:**

$[(i, \dots, n-2, 1, \dots, i-2), (i, \dots, n-2, 1, \dots, i-1), [n, i, \dots, n-2, 1, \dots, i-1]],$

**i impar:**

$[(i, \dots, n-2, 1, \dots, i-2), (i, \dots, n-2, 1, \dots, i-1), [n-1, i, \dots, n-2, 1, \dots, i-1]],$

hasta llegar a:

$((n-2, 1, \dots, n-4), (n-2, 1, \dots, n-3), [n, n-2, \dots, n-3]),$

(segunda vuelta)

$(((1, \dots, n-3), (1, \dots, n-2), [n, 1, \dots, n-2]),$

$((2, \dots, n-2), (2, \dots, n-2, 1)), [n-1, 2, \dots, n-2, 1]),$

$((3, \dots, n-2, 1), (3, \dots, n-2, 1, 2), [n, 3, \dots, n-2, 1, 2]),$

$((4, \dots, n-2, 1, 2), (4, \dots, n-2, 1, 2, 3), [n-1, 4, \dots, n-2, 1, 2, 3]),$

así, sucesivamente:

i par:

$((1, \dots, n-2, 1, \dots, i-2), (1, \dots, n-2, 1, \dots, i-1), [n-1, i, \dots, n-2, 1, \dots, i-1]),$

i impar,

$((1, \dots, n-2, 1, \dots, i-2), (1, \dots, n-2, 1, \dots, i-1), [n, i, \dots, n-2, 1, \dots, i-1]),$

hasta llegar a:

$((n-2, 1, \dots, n-4), (n-2, 1, \dots, n-3), [n-1, n-2, \dots, n-3]).$

**Teorema.** Sea  $n=2m+1$  un impar, entonces la  $C^3_n$  antes definida, es una 3-cadena de  $R_n$ .

**Demostración.:** Esta cadena tiene longitud  $2(n-2)$ , exactamente el doble de la longitud que resultó en el caso par. Es fácil aceptar que se trata de una 3-cadena pues localmente se comporta en la misma forma que la tres cadena encontrada en el caso par. De nuevo me interesa comentar que el "caminito" seguido por los vértices consecutivos en las tres cadenas es el mismo que utilizaré en el próximo capítulo para resolver un problema de orientabilidad, sólo que en aquel me voy a seguir hasta la  $n$  y aquí me retaché al llegar a  $n-2$ . Curiosamente, aquel otro también hace una distinción sustancial entre los  $R_n$  pares y los impares. En este caso, para  $n=2k+1 \geq 5$ , he obtenido la relación:

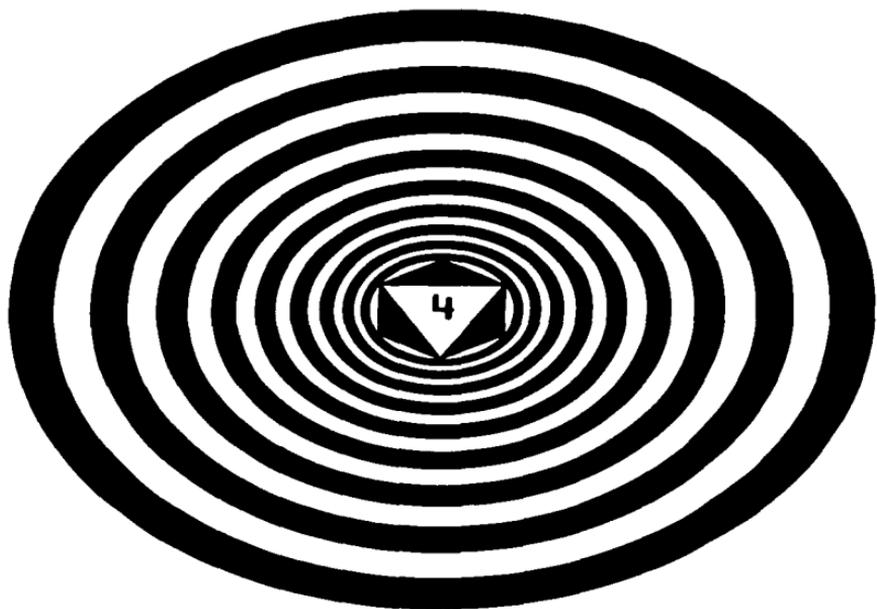
$(\rho_0\rho_1(\rho_2\rho_1)^2)^{2(n-2)}=e$ , es decir  
 $(\rho_0\rho_1(\rho_2\rho_1)^2)^{2(p-1)}=e$ .

Y como  $\rho_0\rho_1(\rho_2\rho_1)^2=(1 \ n-2 \ n-3 \ \dots \ 2) (n-1 \ n)$ , es evidente que ahora no basta el exponente  $n-2$  para cancelar ese producto, pues  $n-2$  es impar y  $(n-1 \ n)$  es una involución, y como  $(1 \ n-2 \ n-3 \ \dots \ 2)$  tiene orden  $n-2$ , entonces el exponente más pequeño que cancela ese producto es  $2(n-2)$ .

**Teorema.** En resumen, he obtenido el siguiente conjunto de relaciones para  $A(R_n)=(\rho_0, \rho_1, \rho_2)$ :

$$\begin{aligned} \rho_i^2 &= e \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \\ (\rho_0\rho_2)^2 &= \\ (\rho_0\rho_1)^p &= (\rho_0\rho_1)^{n-1} = \\ (\rho_1\rho_2)^q &= (\rho_1\rho_2)^{6-n} = \\ (\rho_0\rho_1\rho_2)^{p+1} &= (\rho_0\rho_1\rho_2)^n = \\ & \left( (\rho_0\rho_1)(\rho_2\rho_1) \right)^3 = & \text{(si } n=5) \\ & \left( (\rho_0\rho_1)(\rho_2\rho_1) \right)^{6-q} = & \text{(si } n>5) \\ (\rho_0\rho_1(\rho_2\rho_1)^2)^{n-2} &= (\rho_0\rho_1(\rho_2\rho_1)^2)^{p-1} = & \text{(si } n>5 \text{ es par)} \\ (\rho_0\rho_1(\rho_2\rho_1)^2)^{2(n-2)} &= (\rho_0\rho_1(\rho_2\rho_1)^2)^{2(p-1)} = e. & \text{(si } n \geq 5 \text{ es impar).} \end{aligned}$$

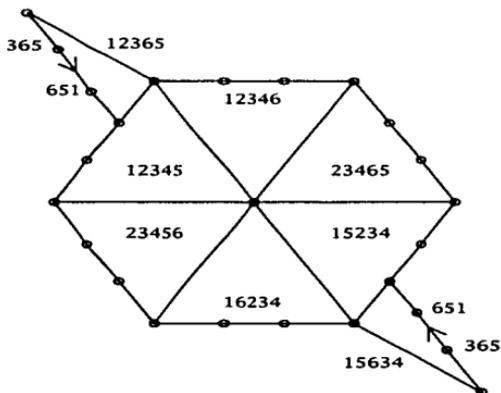
Es muy probable que para los casos 5, 6, 7 tales relaciones basten para dar una presentación del grupo simétrico. Pero no sé si seré yo quien diga la última palabra al respecto.



## Capítulo 4

Aquí trataré de calcular la orientación de  $R_n$ , con el objeto de saber exactamente en qué superficie puedo dibujarlo. Trabajaré con  $n \geq 5$  pues el caso  $n=4$  ya está resuelto, y propondré un método que resuelve el problema de la orientación para toda  $n$  impar (aunque el caso de  $R_5$  ya está resuelto gracias al valor de su función característica).

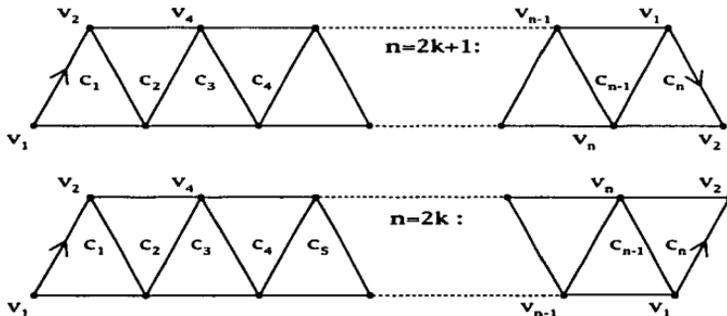
figura 33





En este caso,  $n$  estará en una arista  $a_1$  si y sólo si resulta que  $l \geq 3$ .

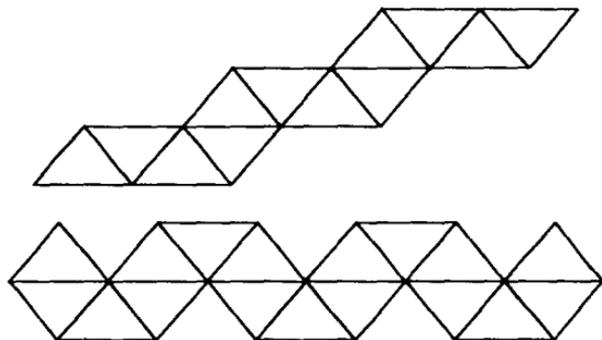
Es importante observar que  $a_1 \cap a_{l+1} = v_{l+1}$ , porque es propiedad de un mapa poliedral que dos aristas consecutivas (o que tienen un vértice común) no pueden estar juntas en más una sola cara ( $M3$ ), y esta propiedad la voy a utilizar para asignar una única cara de  $R_n$  a cada par  $a_i a_{i+1}$  ( $i < n$ ),  $a_n a_1$ , de aristas consecutivas. Sea pues  $c_1$  la única cara en  $R_n$  que tiene a  $a_1$  y  $a_{l+1}$ ,  $\forall l < n$ , y sea  $c_n$  la única cara que tiene a  $a_n$  y  $a_1$ , es decir que  $c_1 = [1, \dots, l-2] \pmod{n}$ . En este caso,  $n$  estará en una cara  $c_1$  si y sólo si resulta que  $l \geq 2$ . Como  $a_{l+1} \in c_1 \cap c_{l+1}$ ,  $\forall l < n$ , y  $a_1 \in c_n \cap c_1$ , entonces conque fuese  $c_1 \neq c_{l+1} \forall l, j$  podría estar seguro de que la sucesión de  $c_j$ 's me sirve para construir una banda. Pero eso es bien cierto, pues resulta que  $l-1$  nunca es un vértice de  $c_1$ , y sin embargo  $l-1$  sí es un vértice de  $c_j$ , con tal que  $j \neq 1$ , pues  $j \neq 1$  implica que hay una  $k \in \{1, 2, \dots, n-2, n-1\}$  tal que  $l = j+k \pmod{n}$ , pero  $c_j = [j, \dots, j-2]$ , y resulta que  $l-1 = j+k-1 \pmod{n}$ , pero, por los valores que puede tomar la  $k$ ,  $l-1$  tendrá que estar acotada entre  $j$  y  $j+n-2 = j+2$ , naturalmente que módulo  $n$ , y sobre el juego positivo de residuos. Por lo tanto  $c_1 \neq c_j$  para cualquier  $j$  que no sea la  $1$ , de manera que tengo una banda en  $R_n$ . La figura 35 ilustra con claridad porqué esta banda es no orientable (de Möbius) para el caso impar y orientable para el caso par. Figura 35.



Y, por lo tanto, me permite enunciar el siguiente:

**Teorema:** Sea  $n=2k+1 \geq 5$ . Entonces el mapa poliedral  $R_n$  es no orientable.

Inspirado por la idea de esta banda tan simple me orienté a estudiar otros ciclos de caras en  $R_n$ , con la viva intención de hallar una banda de Möbius general para  $R_{2k}$ . Pero fracasé. Los caminitos fueron haciéndose cada vez más largos, complicados e interesantes, pero siempre que regresaba al punto de partida encontraba el resultado deseado en el caso impar, que ya estaba resuelto, y el no deseado, un cilindro, en el caso par. Figura 36.

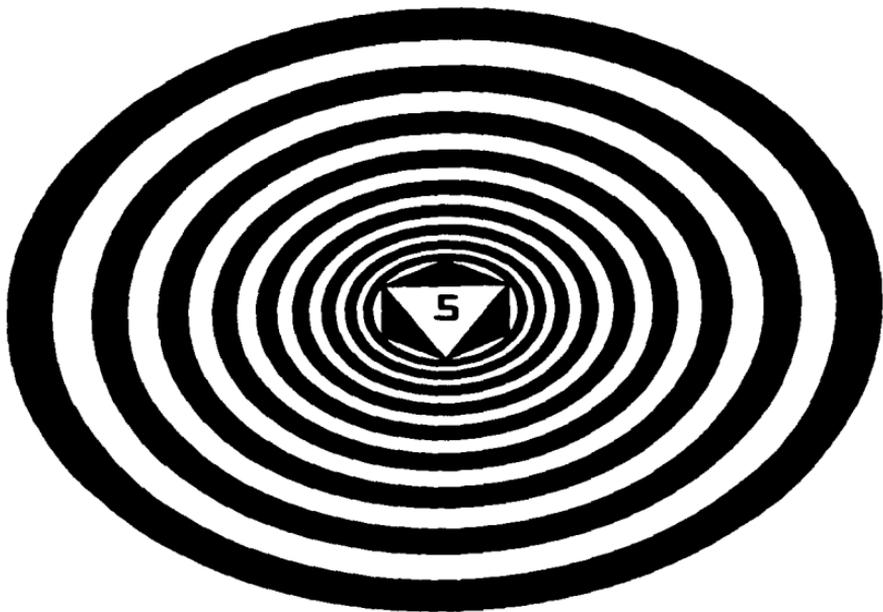


Esta última figura muestra diagramas de algunos de los intentos con que fracasé. Los triángulos, por supuesto representan  $(n-1)$ -gonos.

Así es que si la  $n$  es par no estoy autorizado a decir nada con respecto a su naturaleza en cuestión de orientabilidad, pues tengo un ejemplo no orientable ( $R_6$ ) y otro, por el contrario, tan orientable como una esfera

de navidad ( $\mathbf{R}_4$ ). Sin embargo, aun sin tener justificación alguna para decir lo siguiente, se me hace que de seis en adelante los  $\mathbf{R}_n$  van a ser no orientables.

Desesperado, decidí que no me importa si  $\mathbf{R}_7^{17}$  es orientable, al cabo estoy seguro que  $\mathbf{R}_2^{17+1}$  es no orientable.



## Capítulo 5

Durante la exposición hecha en este capítulo mostraré las poderosas razones que impiden a  $R_7 = \{ 6, 6 \}$  ser autodual, y en esta forma ofreceré un ejemplo de un mapa poliedral no autodual que tiene un símbolo de Shläfli simétrico  $\{ p, p \}$ .

Para que un mapa poliedral sea autodual es necesario que su símbolo de Shläfli sea simétrico, pues las caras de un mapa poliedral autodual deben poder intercambiarse por sus vértices. Pero, como ya lo dije antes, el símbolo de Shläfli describe una propiedad demasiado local de los mapas poliedrales como para que su simetría (la del símbolo), condujera a una consecuencia tan dramática como la autodualidad. Sin embargo, buscar ejemplos de mapas poliedrales no autoduales que tengan un símbolo de Shläfli simétrico no es nada sencillo porque, al menos en el caso de todos los ejemplos pequeños que conozco, parece haber suficientes cosas determinadas por la simetría de su símbolo de Shläfli (o por alguna otra cosa) para obligarlos a ser autoduales. Es más, yo no logré encontrar en la literatura un sólo ejemplo de un mapa poliedral no autodual cuyo símbolo de Shläfli fuera simétrico, mas te advierto, lector, que nunca he destacado como investigador obsesivo. Finalmente, tuve la suerte de encontrarme con un ejemplo de esos entre los  $R_n$ , aunque debo aceptar que tardé bastante tiempo intentando probar la

autodualidad del  $R_7$ , antes de tratar de averiguar si acaso le ocurriría lo contrario.

$R_7$ , por cierto, y pese a ser uno de los chiquitines dentro de la familia de los  $R_n$ , no es un ejemplo nada pequeño; tiene 420 vértices, 1260 aristas, y 420 hexágonos que se acomodan en montoncitos de a seis alrededor de cada vertice. Intentar dibujarlo puede volverte loco, y nada te dice que no es autodual. Tampoco te dice que lo sea. Pero la necesidad me hizo creer que sí lo era. Ya después me dije: pues no sabré hasta que lo sepa, y dejé de creer en cualquiera de las posibilidades; ahora, gracias al rigor de la lógica y al poder quirúrgico del Algebra moderna, puedo no sólo creer, sino apostar cualquier cosa en favor de una de ellas. Y he aquí el Algebra en acción:

**Teorema:** El Unico grupo simétrico que admite automorfismos externos es el de orden 6:  $S_6$  ([ Höld1]).

Afortunadamente, porque no me serviría de nada ese teorema si ese único grupo ha sido  $S_7$ . Bien, definiré con rapidez los conceptos de automorfismo interno y externo de un grupo para poder proceder a demostrar que  $R_7$  no es autodual.

**Definición :** Sea  $G$  un grupo, sea  $\varphi: G \rightarrow G$  un automorfismo de  $G$ . Se dice que  $\varphi$  es un **automorfismo interior** en  $G$  si hay  $g \in G$  tal que  $\varphi(x) = g^{-1}xg$  para toda  $x \in G$ . En caso que no haya tal  $g$  se dice que  $\varphi$  es **exterior**.

Es muy importante observar que si considero un grupo de permutaciones y uno de sus automorfismos internos, este automorfismo tiene la propiedad de conservar, o dejar invariante, la estructura cíclica de los elementos del grupo. Tal vez convenga que hable un poco de la estructura cíclica de una permutación. Pues bien, dado que a toda permutación le corresponde una única factorización (excepto por el orden de los factores) como producto de permutaciones cíclicas ajenas, diré que esa es, precisamente, su estructura cíclica: el número de factores, y la longitud de cada uno

de ellos.

Y es bastante simple deducir que si  $g \in S_n$  y  $\varphi(x) = g^{-1}xg$  para toda  $x \in S_n$ , entonces la tal  $\varphi \in A(S_n)$  deja invariante la estructura cíclica de cada  $x \in S_n$ , pues si  $x = c_1 c_2 \dots c_k \in S_n$ , donde cada  $c_i$  es una permutación cíclica y el producto de las  $c_i$ s determina la estructura cíclica de la  $x$ , entonces, como  $\varphi$  es un automorfismo, sucede que  $\varphi(x) = \varphi(c_1) \dots \varphi(c_k)$ , pero, al ser  $\varphi$  un automorfismo interior de  $S_n$ , resulta que  $\varphi(x) = g^{-1}c_1 g g^{-1}c_2 g \dots g^{-1}c_k g$ . En este momento, cualquiera podría cometer el error de cancelar lo evidentemente cancelable y regresar al principio, pero en lugar de eso basta observar que si considero en general una permutación cíclica  $c = (a_1, \dots, a_j)$ , donde  $a_i \in \{1, \dots, n\}$  para cada  $i$ , y  $j$  denota la longitud de  $c$ , entonces  $g^{-1}c g = (g^{m_1-1}(a_1), \dots, g^{m_1-1}(a_j))$ , donde  $m_1$  es la longitud de la única permutación cíclica dentro de la factorización de  $g$  como producto de ciclos ajenos en la que aparece  $a_1$ .

En fin, eso es lo último que necesitaba decir para poder demostrar el siguiente:

**Teorema:**  $R_7 = \{6, 6\}$  no es autodual.

**Demostración:** Porque si lo fuera entonces habría un isomorfismo  $\varphi: R_7 \rightarrow \delta(R_7)$ , y como  $R_7$  es regular entonces  $\delta(R_7)$  también lo es, y puedo suponer entonces, por transitividad en las banderas de  $\delta(R_7)$  que

$$\varphi( ((1,2,\dots, n-3), (1,2,\dots, n-2), [1,2,\dots, n-1]) ) = \\ ([1,2,\dots, n-1], (1,2,\dots, n-2), (1,2,\dots, n-3)),$$

es decir

$$\varphi( (1,2,\dots, n-3) ) = [1,2,\dots, n-1], \\ \varphi( (1,2,\dots, n-2) ) = (1,2,\dots, n-2), \\ \varphi( [1,2,\dots, n-1] ) = (1,2,\dots, n-3).$$

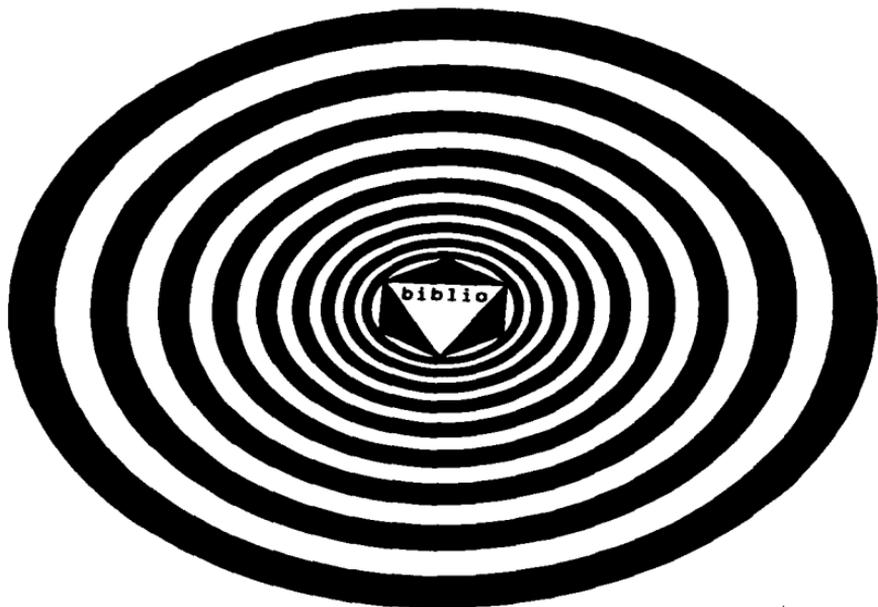
Así,  $\phi$  define un automorfismo  $\phi^*: S_7 = A(R_7) \rightarrow A(\delta(R_7))$  que es el siguiente: Para toda  $\psi \in S_7 = A(R_7)$ ,  $\phi^*(\psi) = \phi \psi$ . Claramente,  $\phi \rho_i$  dejará fija la bandera  $\phi \Phi = ([1, 2, \dots, n-1], (1, 2, \dots, n-2), (1, 2, \dots, n-3))$ , excepto por su faceta de dimensión íésima en  $\delta(R_7)$ , que es la faceta de dimensión "opuesta" en  $R_7$ , por lo tanto:

$$\phi \rho_0 = \rho_2, \phi \rho_1 = \rho_1, \text{ y } \phi \rho_2 = \rho_0.$$

Ahora bien, dado que el único  $S_n$  que padece automorfismos externos es el  $S_6$ , entonces  $S_7$  no tiene automorfismos externos, de modo que  $\phi^*$  debe ser un automorfismo interno de  $S_7$ , y en consecuencia debe respetar la estructura cíclica de los elementos de  $S_7$ , a quienes se les aplique, pero resulta que  $\phi^*(\rho_0) = \phi \rho_0 = \rho_2$ , y, como bien ya debemos todos de saberlo:

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-2 \\ n-2 & n-3 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

y  $\rho_2 = (n-1 \ 1)$ . Eso es contradictorio y en consecuencia me atrevo a deducir que  $R_7$ , efectivamente, no es autodual.



# Bibliografía

**N. Bourbaki,**

**[Bou1]** 1968. *Groupes et Algebres de Lie*. Chapters 4, 5, 6 Actu. Sci. Ind. Hermann, Paris.

**U. Brehm and J. M. Wills,**

**[BreWi1]** 1993. *Polyhedral Manifolds*. Handbook of Convex Geometry 2 Chapter 2.4, 535-554. Elsevier Science Publishers B. V.

**H. S. M. Coxeter,**

**[Cox1]** 1937. *Regular Skew Polyhedra in three and four dimensions and their topological analogues*. Proc. of the London Mathematical Society (2), 43 pp. 33-62. Reimpreso con ligeros cambios en *Twelve Geometric Essays*.

**[Cox2]** 1968. *Twelve Geometric Essays*. Southern Illinois University Press, Carbondale.

**[Cox3]** 1973. *Regular Polytopes* (third edition). Dover, New York.

**[Cox4]** 1984. *Surprising Relationships among Unitary Reflections Groups*. Proceedings of the Edimburgh Mathematical Society 27, pp. 185-194.

**[Cox5]** 1991. *Regular Complex Polytopes* (second edition). Cambridge University, Press, London.

**H. S. M. Coxeter and W.O. J. Moser,**

**[CoMo1]** 1980. *Generators and Relations for discrete groups* (fourth edition). Springer-Verlag, Berlin.

**H. S. M. Coxeter and G.C. Shephard,**  
[CoShe1]1977. Regular 3-Complexes with toroidal cells. Journal of Combinatorial Theory Ser. B 22, pp. 131-138.

**L. Danzer und Egon Schulte,**  
[DaShu1]1982. *Reguläre InzidenzKomplexe I.* Geometriae Dedicata 13, pp. 295-308.

**Branko Grünbaum,**  
[Grüm1]1967. *Convex Polytopes.* Interscience, New York.

**Frank Harary,**  
[Hara1]1971. *Graph Theory* (second edition). Addison Wesley.

**O. Hölder,**  
[Höld1]1895. *Bildung Gussammengesetzter Gruppen.* Math. Ann. 46, pp. 321-422.

**P. McMullen,**  
[McM1]1967. *Combinatorially Regular Polytopes.* Mathematika 14, pp. 142-150.  
[McM2]1968. *Affinely and Projectively Regular Polytopes.* Journal of the London Mathematical Society 43, pp. 755-757.  
[McM3]1968. *Regular Star Polytopes and a theorem of Hess.* Proc. of the London Mathematical Society (3) 18, pp. 577-596.  
[McM4]1989. *Realizations of regular polytopes.* Aequationes Math. 37, pp. 38-56.

**P. McMullen and Egon Schulte,**  
[McShu1]1987. *Self-dual 4-Polytopes and their Petrie-Coxeter Polyhedra.* Results in Math. 12, pp. 366-375.  
[McShu2]1990. *Constructions for Regular Polytopes.* Journal of Combinatorial Theory, Series A 53, pp. 1-28.

**P. McMullen, Egon Schulte and J. M. Wills,**  
[McShuW11] *Infinite Series of combinatorially regular polyhedra in three space.* Geometriae Dedicata 26, pp. 299-307.

**P. McMullen, CH. Schulz and J. M. Wills,**  
[McShzW11]1982. *Equivelar Polyhedral Manifolds in  $E^3$* . Israel Journal of Mathematics Vol. 41, No. 4, pp. 331-346.

[McShzW12]1983. *Polyhedral 2-Manifolds in  $E^3$  with unusually large genus*. Israel Journal of Mathematics Vol. 46, No. 1-2, pp. 127-144.

**Barry Monson,**  
[Mon1]1987. *A Family of Uniform Polytopes with Symmetric Shadows*. Geometriae Dedicata 23, pp. 355-363.

**Carl Sagan,**  
[Saga]1980. *Cosmos*. Gpo. Editorial Planeta, Barcelona.

**G. C. Shephard,**  
[Shep1]1952. *Regular Complex Polytopes*. Proc. of the London Mathematical Society (3) 2, pp. 82-97.

**G. C. Shephard and J. A. Todd,**  
[SheTo1]1954. *Finite Unitary Reflection Groups*. Canadian Journal of Mathematics 6, pp. 274-304.

**Egon Shulte,**  
[Shu1]1983. *Reguläre InzidenzKomplexe II*. Geometriae Dedicata 14, pp. 33-56.  
[Shu2]1983. *Reguläre InzidenzKomplexe III*. Geometriae Dedicata 14, pp. 57-79.  
[Shu3]1988. *Amalgamation of Regular Incidence Polytopes*. Proc. of the London Mathematical Society (3) 56, pp. 303-328.

**Egon Schulte and J. M. Wills,**  
[ShuW11]1986. *On Coxeter's Regular Skew Polyhedra*. Discrete Math. 60, pp. 253-262.  
[ShuW12]1987. *Kepler-Poinsot-Type realizations of regular maps of Klein, Fricke, Gordan, and Sherk*. Canadian Mathematical Bulletin Vol 30 (2), pp. 155-164.

**J. G. Sunday,**

**[Sun1]1975. *Hypergraphs and Abstract Polygons*. Geometriae Dedicata 4, pp. 363-371.**

**J. A. Todd and H. M.S. Coxeter,**

**[ToCo1]1936. *A Practical Method for enumerating cosets of a finite abstract group*. Proc. Edinburgh Math. Society (2), 5, pp. 26-36.**

**A. I. Weiss,**

**[Weil1]1986. *Incidence Polytopes of type {6, 3, 3}*. Geometriae Dedicata 20, pp. 147-155.**