12
2ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONSTRUCCION DE CONTINUOS ENCADENABLES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A:

BENJAMIN ESPINOZA REYES

Director de Tesis:

DR. SERGIO MACIAS ALVAREZ

1 9 9 7

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Construcción de continuos encadenables

realizado por Benjamín Espinoza Reyes

con número de cuenta 8934434-1, pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario Dr. Sergio Macías Alvarez

Propietario Dr. Alejandro Illanes Mejía

Propietario Dra. Isabel Puga Espinosa

Suplente M. en C. Enrique Castañeda Alvarado

Suplente M. en C. Fernando Orozco Zitli

Consejo Departamental de Matemáticas
Dr. Manuel Falconi Magaña

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

Y alzando la mano cada cual según su signo,
hicieron al Lucífero, de cola llameante,
para que buscase de un extremo al otro de los
mundos, y regresase pasados cien años.

Hombre: cuando veas el cometa, sabe que hay otro
que busca, además de ti, que tampoco encontrará.

En el país del tiempo. Lord Dunsany.

A mi familia.

Agradecimientos

Agradezco a mi director de tesis, Sergio Macías, por haber confiado en mí y por su gran paciencia, su apoyo y sus consejos en la realización de este trabajo, a mis sinodales Alejandro Illanes, Isabel Puga, Enrique Castañeda (el Willy) y Fernando Orozco (el Cantorsito), por el tiempo dedicado a la revisión de la tesis y por su apoyo.

Agradezco, de corazón, a mis padres por su tiempo y la educación que me han brindado incondicionalmente, sin ellos, no estaría aquí.

También agradezco a Larissa, por sus consejos, su apoyo y los buenos ratos, a Javier Páez y Antonio Gómez piezas fundamentales en mi formación académica, a los "Verónicos" por los ratos alegres y divertidos, a los cuates (**todos están incluidos**) por todas las complicidades y por los ratos "mulatos" que hemos pasado juntos.

Por último, agradezco al Instituto de Matemáticas y a la Universidad Nacional Autónoma de México.

Benjamín Espinoza Reyes.
Junio de 1997.

Introducción

La teoría de los continuos es la rama de la Topología que estudia las propiedades de los espacios topológicos, que son métricos, compactos y conexos; este estudio intenta clasificar a dichos objetos. Así, es normal que si un conjunto de continuos cumple con una cierta propiedad, se le asigne un nombre. Los continuos *encadenables*, forman uno de estos conjuntos; el estudio de estos espacios es interesante, ya que poseen propiedades inherentes al hecho de ser encadenables, tales como la *propiedad del punto fijo*, o el poder ser *encajados* en el plano, entre muchas otras.

El continuo encadenable más sencillo que existe es un intervalo cerrado, pero los ejemplos se pueden ir complicando, como la cerradura de la gráfica de la función $sen(\frac{1}{x})$, o bien el continuo de Knaster o peor aún el pseudoarco; en el libro [**5**, pág. 141-142], Hoking y Young, construyen un continuo encadenable el cual tiene 3 *puntos extremos*, además de ser *indescomponible*; los continuos de los primeros 4 ejemplos tienen 2,3,1 y $2^{\aleph_0}$ puntos extremos respectivamente; como se puede observar, entre los ejemplos, hay dos continuos que tienen 3 puntos extremos, a pesar de este hecho, son totalmente distintos, ya que uno es *indescomponible* y el otro es *descomponible*.

De manera natural surge la pregunta: dado un número entero positivo n, ¿existirá un continuo encadenable con exactamente n puntos extremos?, o bien, dado un número entero positivo n, ¿existirán continuos encadenables uno indescomponible y otro descomponible, tales que ambos tengan exactamente n puntos extremos?. Julien Doucet en su artículo *Cardinality, completeness, and decomposability of sets of end points of chainable continua* no sólo responde de forma afirmativa si no que además demuestra que existen continuos encadenables con $\aleph_0$ y $2^{\aleph_0}$ puntos extremos, de hecho en el segundo caso el conjunto de puntos extremos es homeomorfo al conjunto de Cantor. En el caso infinito numerable demuestra que se pueden construir continuos tales que el conjunto de puntos extremos sea completo o bien que no lo sea. Esta tesis se divide en tres capítulos, el primero contiene los conceptos preliminares, los cuales son la herramienta fundamental para el posterior desarrollo de este trabajo, en el segundo capítulo se construye, basándose en el artículo de Doucet, un continuo indescomponible con 4 puntos extremos, un continuo descomponible con 5 puntos extremos, además se da un algoritmo para construir continuos indescomponibles y descomponibles con n puntos extremos, en el tercer capítulo se construyen ejemplos de continuos indescomponibles y descomponibles con $\aleph_0$ puntos extremos, además que en cada caso se construye un continuo tal que el conjunto de puntos extremos es completo y otro en el que no lo es. En las construcciones de los casos descomponibles, se ha modificado la construcción hecha por Doucet además se ha simplificado de manera sustancial la notación.

ÍNDICE

	i
Agradecimientos	iii
Introducción	v
1. PRELIMINARES	1
1.1. Continuos	1
1.2. Continuos Encadenables	9
2. EL CASO FINITO.	19
2.1. Continuos Descomponibles	20
2.2. Continuos Indescomponibles	29
3. EL CASO $\aleph_0$	35
3.1. Continuos Descomponibles	35
3.2. Continuos Indescomponibles	51
BIBLIOGRAFÍA	63

1

PRELIMINARES

El material que se presenta en este capítulo, se divide en dos partes, la primera servirá para familiarizarse con algunas propiedades de los continuos. Una de las partes importantes de esta primera sección es dar una caracterización de los continuos indescomponibles; la segunda tiene como objetivo introducir los continuos encadenables, así como algunas de sus propiedades más importantes, las cuales son las herramientas necesarias para el desarrollo de este trabajo.

1.1. Continuos

Definición 1.1. Un espacio topológico X, conexo, métrico, y compacto, se llama **continuo**. Un **subcontinuo** de un espacio es un continuo contenido en tal espacio.

En la figura 1.1 se muestran ejemplos de continuos, como el intervalo cerrado $[0,1]$, al cual se le denotará por I, la circunferencia, la cual se denotará por S^1, el toro, etc.

Definición 1.2. Un continuo C es **irreducible respecto a un conjunto** A, si C contiene a A pero ningún subcontinuo propio de C contiene a A.

Definición 1.3. Un continuo C es **irreducible entre dos conjuntos ajenos** A y B, si $C \cap A \neq \emptyset \neq C \cap B$ y para todo subcontinuo propio, D, de C se tiene que $D \cap A = \emptyset$ o que $D \cap B = \emptyset$.

El ejemplo (a) de la figura 1.1, es un continuo irreducible entre 0 y 1; ya que si existiera un subcontinuo que contuviera al $\{0\}$ y al $\{1\}$, por

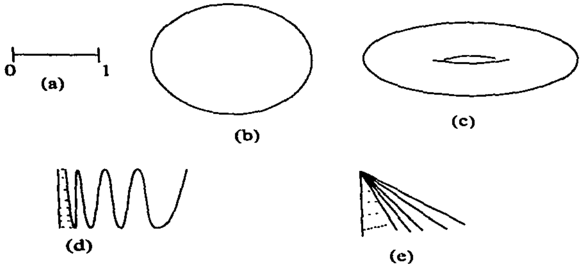


FIGURA 1.1. Algunos ejemplos de continuos

la conexidad, este subcontinuo debería de contener a cualquier punto entre estos dos, entonces contendría a todo I; *i.e.* no existe ningún subcontinuo propio de I que contenga al $\{0\}$ y al $\{1\}$.

Teorema 1.1. *Sean X un continuo, $U \subseteq X$ un abierto de X y $C \subseteq U$ una componente de U, entonces $\overline{U} \setminus U$ contiene al menos a un punto límite de C (véase* [**5**, Teorema 2-15]*).*

Definición 1.4. Sean X un espacio topológico y A y B subconjuntos de X. $(A|B)$ es una **separación** de X, si $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $X = A \cup B$ y $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$. $X = A|B$ denotará que A y B forman una separación de X.

Definición 1.5. Sean X un espacio conexo y p un punto de X. A p se llama un **punto de corte** de X si $X \setminus \{p\} = A|B$.

Definición 1.6. Sean X un espacio topológico y S un subconjunto de X. Se dice que S **separa** a X si $X \setminus S = A|B$.

Teorema 1.2. *Sean X y Y espacios topológicos conexos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y supráyectiva. Si $p \in Y$ es punto de corte entonces $f^{-1}(p)$ separa a X.*

Demostración. Sean X, Y y f como en el enunciado y $p \in Y$ un punto de corte.
Sea $(A|B)$ una separación de $Y \setminus \{p\}$, *i.e.* $Y \setminus \{p\} = A \cup B$, entonces $f^{-1}(Y \setminus p) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Por otro lado $f^{-1}(Y \setminus p) = X \setminus f^{-1}(p)$, por lo que tenemos que $X \setminus f^{-1}(p) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, lo cual es una separación de $X \setminus f^{-1}(p)$, ya que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ y $A \cap B = \emptyset$.

■

Teorema 1.3. *Todo continuo X, tiene al menos dos puntos que no son de corte (véase* [**5**, Teorema 2-18]*).*

Teorema 1.4. *Todo continuo X es irreducible respecto al conjunto de puntos que no son de corte.*

Demostración. Sea X un continuo y supóngase que X no es irreducible respecto a sus puntos que no son de corte.
Sean $\mathcal{P} = \{x \in X \quad | \quad x \text{ no es punto de corte de } X\}$ y D un subcontinuo propio de X tal que $\mathcal{P} \subset D$, por el teorema 1.3 $P \neq \emptyset$.
Sea $q \in X \setminus D$, entonces q es punto de corte de X por lo tanto $X \setminus \{q\} = A \cup B$, con A y B abiertos ajenos y no vacíos. Como D es conexo, se tiene que $D \subset A$ o $D \subset B$, supongamos, sin pérdida de generalidad, que $D \subset A$.
Por otro lado $B \cup \{q\}$ es un conexo cerrado de X (véase [**7**, 6.3]), *i.e.* es un continuo, por el teorema 1.3 $B \cup \{q\}$ tiene al menos dos puntos que no son de corte; sea $q_0 \neq q$ uno de estos puntos; ahora $A \cup \{q\}$, también es un continuo y como $B \cup \{q\}$ y $A \cup \{q\}$ sólo tienen al punto q en común, se tiene que $[(A \cup \{q\}) \cup (B \cup \{q\})] \setminus \{q_0\}$ es conexo, pero esto significa que $X \setminus \{q_0\}$ es conexo. Por lo tanto q_0 es un punto que no es de corte y que no está en P, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, X es irreducible respecto al conjunto de puntos que no son de corte.

■

Corolario 1.1. *Sea X un continuo, si $x \in X$ es un punto de corte de X y $X\setminus\{x\} = U|V$, entonces U y V contienen, cada uno, al menos un punto que no es de corte.*

Demostración. Por el teorema 1.3 X tiene al menos dos puntos que no son de corte. Sea x un punto de corte de X y $(U|V)$ una separación de $X\setminus\{x\}$, sin perdida de generalidad, supongamos que U no contiene a ningún punto que no es de corte, si P denota al conjunto de puntos de X que no son de corte, se tiene que $P \subset V$ y $P \subset V \cup \{x\}$, pero $V \cup \{x\}$ es un subcontinuo propio de X (véase [**7**, 6.3]), lo cual contradice al teorema 1.4, por lo tanto U contiene al menos uno de los dos puntos que no son de corte de X.

■

Definición 1.7. Un continuo X es **descomponible** si existen dos subcontinuos propios, A y B de X tal que $X = A \cup B$, se dirá que A y B forman una **descomposición de** X. Un continuo X es **indescomponible**, si no es descomponible.

Teorema 1.5. *Si X es un continuo entonces X contiene un subcontinuo propio con interior no vacío si y sólo si X es descomponible.*

Demostración. Primero se demostrará que si X contiene un subcontinuo con interior no vacío entonces X es descomponible.
Sea C un subcontinuo propio de X tal que $IntC \neq \emptyset$. Si $X\setminus C$ es conexo, entonces $\overline{X\setminus C}$ también lo es y además es un subcontinuo propio de X, ya que hay puntos en el interior de C que no están en la cerradura de $X\setminus C$, entonces $\overline{X\setminus C}$ y C forman una descomposición de X. Si $X\setminus C$ no es conexo, entonces $X\setminus C = U|V$ donde U y V son abiertos ajenos y no vacíos de X. Por otro lado $C \cup U$ y $C \cup V$ son subcontinuos propios de X, (véase [**7**, 6.3]), y forman una descomposición de X, por lo tanto X es descomponible.

Ahora se demostrará que si X es descomponible entonces X contiene un subcontinuo con interior no vacío.
Sean C_1 y C_2 dos subcontinuos propios de X tales que $X = C_1 \cup C_2$, como todo compacto en un Hausdorff es cerrado, $C_1 \setminus C_2$ es abierto no vacío, por lo tanto el interior de C_1 es no vacío.

■

Definición 1.8. Sean X un continuo y $p \in X$ un punto. Se define la **composante** de p, $\kappa(p)$, como la unión de los subcontinuos propios de X que contienen a p.

Calculemos las composantes de I. Sea $p \in I$ si $p \neq 1, 0$ o $p = 1$ o $p = 0$; se tiene que la unión de todos los subcontinuos propios de I que contienen a p es igual a I. Si $p = 1$ entonces la unión de todos los subcontinuos que contienen al 1 es igual a $I \setminus \{0\}$; y si $p = 0$ se tiene que la composante es igual a $I \setminus \{1\}$. Por lo tanto el número de composantes de I es igual a 3.

Teorema 1.6. *Todo continuo descomponible X es la composante de algún punto $p \in X$.*

Demostración. Sean X un continuo descomponible y A y B subcontinuos propios de X tales que $X = A \cup B$. Sea $p \in A \cap B$, entonces por la definición, $\kappa(p) \subset X$, pero $A \subset \kappa(p)$ y $B \subset \kappa(p)$, por lo que $A \cup B = X \subset \kappa(p)$. Por lo tanto $X = \kappa(p)$.

■

Teorema 1.7. *Todo punto de un continuo X, es punto límite de cualquier composante C de X.*

Demostración. Sean $C = \kappa(q)$ una composante de X, p un punto, de X, distinto de q y U un abierto de X tal que $p \in U$. Tómese un abierto, V, de X tal que $p \in V \subset \overline{V} \subset U$. Si $q \in \overline{V}$ se tiene que $C \cap U \neq \emptyset$, con lo cual terminaría la demostración, supongamos, entonces, que $q \notin \overline{V}$,sea K la componente de $X \setminus \overline{V}$ que contiene a q, como $X\backslash\overline{V}$ es un abierto, se tiene, por el teorema 1.1, que $\overline{K}\cap\overline{V}\neq\emptyset$, entonces $\overline{K}\cap U\neq\emptyset$, además como $\overline{K}$ es un subcontinuo propio de X y $q\in K$, $K\subset C$ y por lo tanto $C\cap U\neq\emptyset$, *i.e.* p es punto límite de C.

■

Teorema 1.8. *Si X es un continuo, entonces toda composante de X es la unión de una cantidad numerable de subcontinuos propios de X.*

Demostración. Sean X un continuo, p un punto de X y $\kappa(p)$ la composante de p. Tómese $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base de abiertos numerable de $X\backslash\{p\}$. Para toda $i\in\mathbb{N}$, sea C_i la componente de $X\backslash U_i$ que contiene a p, como $X\backslash U_i$ es un cerrado de X se tiene que C_i es un continuo, por lo tanto $\cup_{i\in\mathbb{N}}C_i\subset\kappa(p)$. Ahora, sea $x\in\kappa(p)$ distinto de p y tómese un continuo D tal que contenga a p y a x, entonces existe un abierto U_j, tal que $U_j\cap D=\emptyset$, pero $D\subset C_j$, donde C_j es la componente de $X\backslash U_j$ que contiene a p, por lo tanto $\kappa(p)\subset\cup_{i\in\mathbb{N}}C_i$.

■

Teorema 1.9 (Baire). *Ningún espacio métrico completo es la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte (véase* [**6**, 7.3]*).*

Teorema 1.10. *Si X es un continuo indescomponible, entonces X tiene una cantidad no numerable de composantes.*

Demostración. Obsérvese que, por el teorema 1.5, un continuo es indescomponible si y sólo si todos sus subcontinuos tienen interior vacío. Sea X un continuo indescomponible, como cada punto de X está en alguna composante, se tiene que X es la unión de éstas, supongamos que X tiene a lo más una cantidad numerable de composantes, *i.e.* $X=\cup_{i\in J}K_i$ donde cada K_i es una composante, pero como cada composante es la unión numerable de subcontinuos propios de X, (Teorema 1.8), entonces X es la unión numerable de subcontinuos propios, con interior vacío, lo cual contradice al teorema 1.9, pues todo espacio métrico compacto es completo (véase [4, pág. 294 Corolario 2.4]), por lo tanto X no puede contener una cantidad numerable de composantes.

■

Teorema 1.11. *Si X es un continuo indescomponible, entonces cualesquiera dos composantes de X son ajenas o coinciden.*

Demostración. Sean p y q dos puntos distintos de X, $K_1 = \kappa(p)$ y $K_2 = \kappa(q)$ las composantes de p y q. Supongamos que $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. Sean $x \in K_1 \cap K_2$ y $y \in K_2$; tómense subcontinuos, C_1 y C_2 de K_1 y K_2, respectivamente, tales que $p, x \in C_1$ y $q, x \in C_2$ entonces, como X es un continuo indescomponible, $C_1 \cup C_2$ es un subcontinuo propio de X. Sea C_3 un subcontinuo de K_2 tal que $q, y \in C_3$, entonces $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ es un subcontinuo propio de X que contiene a y y a p, *i.e.* $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \subset K_1$ por lo tanto $y \in K_1$, lo cual implica que $K_2 \subseteq K_1$; la otra contención se hace de manera analoga, obteniendo $K_1 = K_2$, por lo tanto dadas dos composantes distintas, éstas siempre son ajenas.

■

Corolario 1.2. *Todo continuo X indescomponible contiene un conjunto no numerable de puntos tal que es irreducible entre cada dos puntos de este conjunto.*

Demostración. Sea X un continuo indescomponible, por los teoremas 1.10 y 1.11 , X contiene una cantidad no numerable de composantes, $\{K_i\}_{i\in\Lambda}$, ajenas entre sí . Para cada $i \in \Lambda$ tómese $x_i \in K_i$, entonces $\{x_i\}_{i\in\Lambda}$ es un conjunto no numerable de puntos distintos de X, sean x_i y x_j dos elementos distintos de este conjunto, como ambos están en composantes ajenas, se tiene que ningún subcontinuo propio, C, de X contiene a x_i y a x_j. Por lo tanto X es irreducible entre x_i y x_j.

■

Teorema 1.12. *Sean X un continuo y p_1, p_2, p_3 tres puntos distintos de X. Si X es descomponible entonces X no es irreducible entre p_1 y p_2, entre p_1 y p_3, o entre p_2 y p_3.*

Demostración. Sean X un continuo descomponible y p_1, p_2 y p_3 tres puntos distintos de X. Existen dos subcontinuos, A y B, propios de X tales que $X = A \cup B$, entonces por el principio de las casillas al menos dos puntos están en A o en B, por lo tanto X no es irreducible entre estos dos puntos.

■

Teorema 1.13. *Sea X un continuo. Entonces X es indescomponible si y sólo si existen tres puntos de X tales que X es irreducible entre cada dos de estos tres puntos.*

Demostración. Sea X un continuo indescomponible entonces por el corolario 1.2, existen 3 puntos tales que X es irreducible entre cada dos de éstos.
Sean p_1, p_2 y p_3 tres puntos distintos de X tales que X es irreducible entre cada dos de éstos puntos entonces, por el teorema 1.12, X es indescomponible.

■

1.2. Continuos Encadenables

Esta sección tiene como objetivo el introducir el concepto de continuo encadenable y el de punto extremo de este tipo de continuos, el cual forma una parte central de este trabajo, a su vez se enunciarán algunas propiedades de los continuos encadenables, tales como la propiedad del punto fijo. Es importante señalar que el uso de cadenas es una herramienta útil en la teoría de continuos, pues el uso de éstas permite construir ejemplos interesantes de continuos; el primer ejemplo de un continuo indescomponible que aparece en la literatura, es un continuo encadenable.

Definición 1.9. Sea X un espacio topológico. Una **cadena**, $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, es un conjunto finito de abiertos de X, tales que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i-j| \leq 1$; a los elementos A_i de $\mathcal{C}$ se les llaman **eslabones**.

Definición 1.10. Sea $\mathcal{C}$ una cadena. Una **subcadena** de $\mathcal{C}$ es una colección de eslabones de $\mathcal{C}$, los cuales, a su vez, forman una cadena. $\mathcal{C}(j,k)$ y $\mathcal{C}(A_j, A_k)$ denotan a la subcadena de $\mathcal{C}$ que consiste de los eslabones $\{A_j, A_{j+1}, \ldots, A_k\}$.

Definición 1.11. Sea $\mathcal{C}$ una cadena, se define la **tensión** de $\mathcal{C}$ como $\tau(\mathcal{C}) = \text{ínf}\{d(A_j, A_k) | A_j, A_k \in \mathcal{C} \ y \ |j-k| > 1\}$

Definición 1.12. Sea $\mathcal{C}$ una cadena, se dice que la cadena $\mathcal{C}$ es **tensa** si $\tau(\mathcal{C}) > 0$

Definición 1.13. La **malla** de una cadena $\mathcal{C}$ se define como $malla(\mathcal{C}) = \sup\{\text{diám}(A_n) | A_n \in \mathcal{C}\}$

Definición 1.14. Dada $\varepsilon > 0$, una cadena $\mathcal{C}$ se llama **ε-cadena**, si $malla(\mathcal{C}) < \varepsilon$.

Definición 1.15. Sean $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ y $\mathcal{D} = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ cadenas, $\mathcal{D}$ es un **refinamiento** de $\mathcal{C}$ si para toda

$j \leq k$, existe i tal que $B_j \subseteq A_i$; diremos que $\mathcal{D}$ es un **refinamiento propio** de $\mathcal{C}$ si $\overline{B_j} \subseteq A_i$.

Definición 1.16. Sean X un espacio métrico, $\mathcal{C} = \{L_1, L_2, \ldots, L_k\}$ una cadena en X, $a, b \in X$ y $A, B \subset X$. Diremos que $\mathcal{C}$ **va** de a a b si $a \in L_1$ y $b \in L_k$ y que $\mathcal{C}$ **va** de A a B si $L_1 \subset A$ y $L_k \subset B$.

La siguiente definición sirve para controlar la trayectoria que siguen los eslabones de las cadenas, ya que no permite que los eslabones vayan de un lado a otro.

Definición 1.17. Sean $\mathcal{C} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ y $\mathcal{D} = \{B_1, \ldots, B_k\}$ cadenas, se dice que $\mathcal{D}$ **va directamente por** $\mathcal{C}$ si $\mathcal{D}$ es un refinamiento propio de $\mathcal{C}$ y si para $i < j$, se tiene que $B_i, B_j \subseteq A_k$, para alguna k, entonces $B_r \subseteq A_k$ para toda r, tal que $i \leq r \leq j$.

Definición 1.18. Sean $\mathcal{C} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ y $\mathcal{D} = \{B_1, \ldots, B_k\}$ cadenas y $E = \{L_1, L_2, \ldots, L_m\}$ un subconjunto de eslabones de $\mathcal{C}$ tal que $\overline{L_i} \cap \overline{L_j} = \emptyset$ si $i \neq j$.

Se dice que $\mathcal{D}$ **va directamente por** $\mathcal{C}$ **relativamente** al conjunto E si $\mathcal{D}$ es un refinamiento propio de $\mathcal{C}$ y existe una sucesión finita de enteros $1 = \lambda_{2,1}, \lambda_{2,2}, \ldots, \lambda_{2,t} = k$ tal que:

1. $\mathcal{D}(B_{\lambda_{2,j}}, B_{\lambda_{2,(j+1)}})$ va directamente por $\mathcal{C}$;
2. para toda $j < t$, existe s tal que $\overline{B_{\lambda_{2,j}}} \subset L_s$, nótese que t es el segundo subíndice de las lambdas; y
3. toda L_s contiene al menos a la cerradura de un $B_{\lambda_{2,j}}$

Los elementos del conjunto E se llaman **anillos**, los eslabones de $\mathcal{D}$ de la forma $B_{\lambda_{2,j}}$ se llaman **pivotes**, $\{\mathcal{D}(B_{\lambda_{2,j}}, B_{\lambda_{2,(j+1)}})\}_{j=1}^{t-1}$ se llama **sucesión de segmentos** de la cadena $\mathcal{D}$ en $\mathcal{C}$ (relativa a el conjunto E) y $\mathcal{D}(B_{\lambda_{2,j}}, B_{\lambda_{2,(j+1)}})$ se llama **un segmento de la sucesión**.

Obsérvese que en la definición 1.18, a diferencia de la definición 1.17, los refinamientos de las cadenas tienen más libertad, sin embargo con los pivotes se pueden controlar.

En la figura 1.2 se muestra una cadena que va directamente por otra, relativamente a un conjunto de eslabones, los pivotes y los anillos están resaltados.

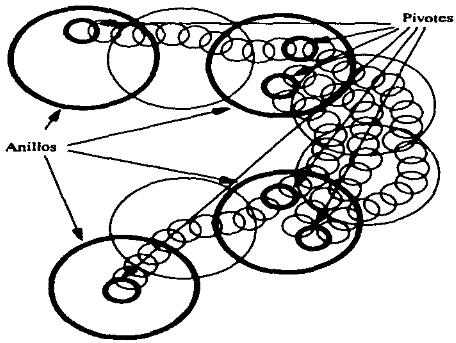


FIGURA 1.2. Ejemplo de ir directamente por, relativamente a un conjunto

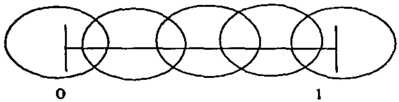
Definición 1.19. Un continuo X es **encadenable** si para toda $\varepsilon > 0$, existe una ε-cadena $\mathcal{C}$, tal que $X \subseteq \cup\mathcal{C}$.

En la figura 1.3 se muestran dos continuos encadenables.

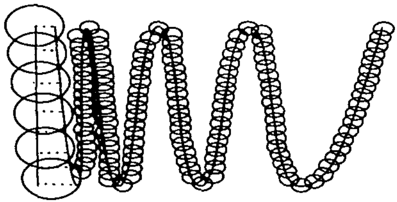
Ahora se probarán algunas propiedades, y se enunciarán otras de los continuos encadenables.

Teorema 1.14. *Sea X un continuo y K un subcontinuo de X. Si X es encadenable entonces K es encadenable.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, como X es encadenable, existe una ε-cadena, $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, tal que $X \subseteq \cup\mathcal{C}$.
Sea $i = \text{mín}\{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $A_i \cap K \neq \emptyset$ y $j = \text{máx}\{1, 2, \ldots, n\}$



(a) el intervalo



(b) cerradura de la gráfica de la funcion sen(1/x) definida en el intervalo (0, 2/Π) .

FIGURA 1.3. Algunos continuos encadenables

tal que $A_j \cap K \neq \emptyset$, entonces $C(K \cap A_i, K \cap A_j)$ es una ε-cadena de K; ya que si algún A_p con $i < p < j$ no intersecta a K se tiene que $K = (\cup_{n=i}^{p-1}(K \cap A_n)) \cup (\cup_{n=p+1}^{j}(K \cap A_n))$ que es una separación de K, lo cual es imposible.

■

Lema 1.1. *Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \longrightarrow X$ una función continua. Si para toda $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $d(f(x), x) < \varepsilon$, entonces existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

Demostración. Supóngase que para toda x en X, $f(x) \neq x$, entonces para cada x se tiene que $d(f(x), x) > 0$; como la función distancia es continua y $X \times X$ es compacto, el conjunto $\{d(f(x), x) | x \in X\}$

tiene un mínimo, sea d^* el mínimo de este conjunto, obsérvese que $d^* > 0$ ya que si no fuera así f tendría un punto fijo.

Sea $\varepsilon = \frac{d^*}{2}$, entonces para toda $x \in X$ $d(f(x), x) > \varepsilon$, lo cual contradice la hipótesis.

∎

Teorema 1.15. *Si X es un continuo encadenable, entonces X tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sean $f : X \longrightarrow X$ una función continua y $\varepsilon > 0$. Tómese $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ una ε-cadena de X y consideremos los siguientes conjuntos:
$A = \{x \in X | \ x \in C_i \text{ y } f(x) \in C_j \text{ para algún } j < i\}$
$B = \{x \in X | \ x \in C_i \text{ y } f(x) \in C_j \text{ para algún } j > i\}$
$C = \{x \in X | \ x \in C_i \text{ y } f(x) \in C_j \text{ para alguna } i\}$
Lo que se quiere demostrar es que C no es vacío. Supóngase que $C = \emptyset$, entonces $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, pues $C_1 \subset B$ y $C_n \subset A$.
Sea $x \in X \backslash A$ entonces existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $x \in C_i$, $f(x) \in C_j$ y $j > i$, tómese un abierto V tal que $f(x) \in V \subset C_j$, como f es una función continua existe un abierto U tal que $x \in U$ y $f(U) \subset V$, sea W un abierto tal que $x \in W \subset U$ y $W \subset C_i$, entonces $f(W) \subset V \subset C_j$, por lo tanto $W \cap A = \emptyset$, *i.e.* A es un cerrado de X. Análogamente se prueba que B es cerrado. Como $A \cap B = \emptyset$ y $X = A \cup B$, se tiene que X no es conexo, lo cual es una contradicción al hecho de que X es un continuo. Por lo tanto $C \neq \emptyset$ con lo cual se cumplen las condiciones del lema 1.1 *i.e.* existe un $x \in X$ tal que la distancia de x a su imagen es menor que ε; así que X tiene un punto fijo.

∎

Definición 1.20. Sean X un continuo y $a, b \in X$, se dice que X es **encadenable de a a b** si dada $\varepsilon > 0$, existe una ε-cadena $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ tal que $X = \cup\mathcal{C}$, $a \in A_1$ y $b \in A_n$.

Teorema 1.16. *Sean X un continuo y $a, b \in X$. Si X es encadenable de a a b, entonces X es irreducible entre a y b.*

Demostración. Supóngase que X no es irreducible entre a y b, entonces existe un subcontinuo propio, K, de X tal que $a, b \in K$. Sean $p \in X \setminus K$, $\varepsilon > 0$ tal que $d(p, K) > \varepsilon$ y $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ una ε-cadena de X tal que $a \in A_1$ y $b \in A_n$. Observemos que si $p \in A_j$, entonces $A_j \cap K = \emptyset$. Como $K \cap A_1 \neq \emptyset$ y $K \cap A_n \neq \emptyset$ resulta que $K \subset C(A_1, A_{j-1}) \cup C(A_{j+1}, A_n)$ pero por otro lado $C(A_1, A_{j-1}) \cap C(A_{j+1}, A_n) = \emptyset$, y esto significa que K es disconexo, lo cual contradice el hecho de que K es un continuo. Por lo tanto X es irreducible entre a y b.

■

Definición 1.21. Sean X un continuo encadenable y p un punto de X. p es **punto extremo** de X si para toda $\varepsilon > 0$, existe una ε-cadena $\mathcal{C}$ tal que p está en el primer eslabón de $\mathcal{C}$.

Los continuos que aparecen en la figura 1.3, tienen dos y tres puntos extremos, respectivamente.

Notación:

Sea X un continuo, se denotará por $PE(X)$ al conjunto de puntos extremos de X, o bien por PE cuando no cause confusión.

Teorema 1.17. *Sea X un continuo encadenable. Si p es un punto extremo de X y K_1 y K_2 son dos subcontinuos de X que contienen a p, entonces $K_1 \subset K_2$ o $K_2 \subset K_1$.*

Demostración. Sean X un continuo encadenable, p un punto extremo de X, K_1 y K_2 dos subcontinuos de X tales que p está en ambos. Supóngase que $K_1 \not\subseteq K_2$ y $K_2 \not\subseteq K_1$. Sean $q \in K_1$ tal que $q \notin K_2$, $r \in K_2$ tal que $r \notin K_1$ y $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\varepsilon_0 < \text{mín}\left\{\frac{d(q,K_2)}{2}, \frac{d(r,K_1)}{2}\right\}$. Tómese $\mathcal{C} = \{L_1, L_2, \ldots, L_k\}$ una ε_0-cadena tal que $p \in L_1$, como la $malla(\mathcal{C}) < \varepsilon_0$ entonces si $q \in L_s$ y $r \in L_j$ se tiene que $L_s \cap K_2 = \emptyset$

y $L_j \cap K_1 = \emptyset$. Supóngase, sin pérdida de generalidad que $s < j$; sea $C(L_1, L_t) = \{L_1, L_2, \ldots, L_s, \ldots, L_j, \ldots, L_t\}$ la subcadena de C que cubre a K_2, pero como $L_s \cap K_2 = \emptyset$ y $r \in K_2 \cap L_j$ se tiene que $K_2 \subset \cup C(L_1, L_t) \setminus L_s$, *i.e.* K_2 es disconexo, lo cual es una contradicción pues K_2 es un continuo. Por lo tanto $K_1 \subseteq K_2$ o $K_2 \subseteq K_1$.

■

Lema 1.2. *Sean X un continuo y a y b dos puntos de X, supóngase, además, que existe una colección de cadenas $\{C^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tales que para toda $i \in \mathbb{N}$, C^{i+1} va directamente por C^i, C^i va de a a b y $\lim_{i\to\infty} malla(C^i) = 0$, entonces $K = \cap_{i\in\mathbb{N}}(\overline{\cup C^i})$ es un arco de a a b.*

Demostración. Por construcción K es encadenable de a a b entonces, por el teorema 1.16, K es irreducible entre a y b, por lo tanto a y b no son puntos de corte; sea $p \in K \setminus \{a, b\}$, para cada cadena $C^i = \{L_1^i, L_2^i, \ldots, L_{\lambda_i}^i\}$ tómense las siguientes subcadenas: $\mathcal{R}^i = \{L_1^i, L_2^i, \ldots, L_r^i\}$ y $\mathcal{S}^i = \{L_s^i, L_{s+1}^i, \ldots, L_{\lambda_i}^i\}$ tales que L_r^i es el eslabón anterior, inmediato, al eslabón que contiene a p y que cumple con que $p \notin \overline{L_r^i}$ y L_s^i es el eslabon posterior, inmediato, al eslabón que contiene a p y que cumple con que $p \notin \overline{L_s^i}$, entonces $K \cap (\cup_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{R}^i)$ y $K \cap (\cup_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{S}^i)$ son abiertos de K tales que su unión es $K \setminus \{p\}$ y su intersección es vacía, esto es porque cada cadena va directamente por la cadena anterior, por lo tanto p es un punto de corte de K, *i.e* K es un arco (véase [**5**, teorema 2.27]).

■

Lema 1.3. *Sea X un continuo encadenable. Supóngase que:*

1. *existen conjuntos abiertos U y V en X tales que $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ y*
2. *existe una sucesión de cadenas $\{C^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ en X tal que:*
   (a) *$C^1 = \{L_1^1, L_2^1, \ldots, L_{\lambda_1}^1\}$ va de U a V,*
   (b) *$C^{m+1} = \{L_1^{m+1}, L_2^{m+1}, \ldots, L_{\lambda_{m+1}}^{m+1}\}$ va de L_1^m a $L_{\lambda_m}^m$,*
   (c) *C^{m+1} va directamente por C^m, y*
   (d) *$\lim_{m\to\infty} malla(C^m) = 0$.*

Si $p \in \cap_{m\in\mathbb{N}}(\overline{\cup C^m})\setminus(\overline{U}\cup\overline{V})$, entonces p no es un punto extremo de X, y se tiene la siguiente inclusión:

$$\cap_{m\in\mathbb{N}}(\overline{\cup C^m})\setminus(\overline{U}\cup\overline{V}) \subset (X\setminus PE(X))$$

.

Demostración. Sea $K = \cap_{m\in\mathbb{N}}(\overline{\cup C^m})$, por el lema anterior K es un arco entre a y b para alguna $a \in U$ y para alguna $b \in V$. Tómese $p \in K\setminus(\overline{U}\cup\overline{V})$, sea $f : I \longrightarrow K$ un homeomorfismo tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$, como p está en el arco K existe una $x \in I$ tal que $f(x) = p$, ahora, $f([0,x])$ y $f([x,1])$ son subcontinuos propios de K y ambos contienen a p y ninguno está contenido en el otro entonces, por el teorema 1.17, p no es punto extremo.

■

Para concluir el capítulo, se mencionarán otras propiedades importantes de los continuos encadenables:

Definición 1.22. Un continuo X es un **triodo** si existe un subcontinuo Y de X, tal que $X\setminus Y$ es la unión de tres conjuntos mutuamente separados (véase definición 1.4).

Definición 1.23. Un continuo X es **atriódico** si ningún subcontinuo de X es un triodo.

Teorema 1.18. *Si X es un continuo encadenable entonces se tiene que:*

1. *La intersección de cualesquiera dos subcontinuos de X es conexo i.e. X es hereditariamente unicoherente.*
   (Teorema 1.14 y [**2**, Teorema 9.C.12])
2. *X es atriódico.* ([**7**, Teorema 12.4])
3. *X es irreducible.* ([**8**, Teorema 3.2])
4. *Toda función continua de X en la circunferencia unitaria, S^1, es homotópica a una constante.* ([**7**, 12.47])

5. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua, suprayectiva y abierta (o monótona) entonces Y es encadenable.*
([**7**, Teorema 12.15 y Teorema 12.14 respectivamente])

Corolario 1.3. *Si X es un continuo encadenable y localmente conexo entonces X es homeomorfo a I.*

Demostración. Dado que X es un continuo localmente conexo, se tiene que X es arco-conexo (ver [**5**, Teorema 3-17]). Por el teorema 1.18 (3) X es irreducible así que existen dos puntos x_1 y x_2 en X tales que ningún subcontinuo propio de X contiene a ambos puntos. Como X es arco-conexo, existe un arco α en X cuyos extremos son x_1 y x_2. Por ser X irreducible entre x_1 y x_2 y $x_1, x_2 \in \alpha$, se tiene que $X = \alpha$. Por lo tanto X es homeomorfo a I.

■

Corolario 1.4. *Si $f : I \longrightarrow Y$ es una función continua, suprayectiva y abierta (o monótona) entonces Y es homeomorfo a I.*

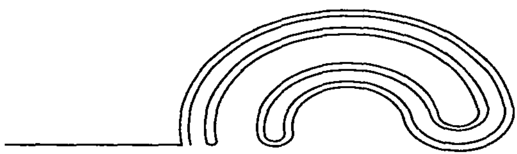
Demostración. Por el teorema 1.18 (5) , se tiene que Y es encadenable. Como I es localmente conexo, resulta que Y es localmente conexo. Por el corolario anterior, Y es homeomorfo a I.

■

2

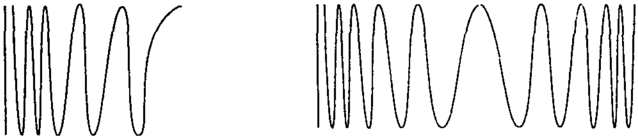
EL CASO FINITO.

En este capítulo se construirán continuos encadenables, tanto descomponibles como indescomponibles, con n puntos extremos. En el caso descomponible se construirá, primero, un continuo con 5 puntos extremos, esto porque los ejemplos con 0 ([**3**, pág. 44, fig. 2]), 1, 2 (el intervalo), 3 y 4 puntos extremos son bastante conocidos y no así el de 5 puntos extremos; en las figuras 2.1 y 2.2 se muestran continuos descomponibles con 1,3 y 4 puntos extremos, respectivamente; en el caso indescomponible primero se construirá un continuo con 4 puntos extremos, pues los ejemplos con 0 ([**3**, pág. 44, ejemplo 3.2]), 1, 2 ([**3**, pág. 45 ejemplo 3.6]) y 3 ([**5**, pág. 141-142]) puntos extremos, también, son bastante conocidos y no así el de 4 puntos extremos; en la figura 2.3 se muestra un continuo indescomponible con 1 punto extremo; y en ambos casos se hará una construcción para el caso general y, además se demostrará la validez de dichas construcciones.



1 pt. extremo

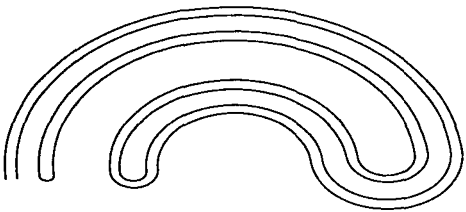
FIGURA 2.1. Continuo descomponible con 1 pt. extremo



(a) 3 pts. extremos **(b) 4 pts. extremos**

FIGURA 2.2. Continuos descomponibles con 3 y 4 pts. extremos

Nota:
Los eslabones de todas las cadenas, en todas las construcciones, serán abiertos conexos de $\mathbb{R}^2$.



1pt. extremo

FIGURA 2.3. Continuo indescomponible con 1 pt. extremo

2.1. Continuos Descomponibles

Construcción 1. $n = 5$
El método más natural para construir un continuo encadenable con 5 puntos extremos, es tomar 5 puntos distintos del plano y construir

una sucesión de ε-cadenas, tales que el límite de las mallas tienda a cero, y de tal forma que cada cadena contenga a los 5 puntos, además como se quiere que los puntos sean puntos extremos entonces las cadenas empezarán y terminarán, alternadamente, en cada uno de estos puntos; pero esta forma de construir el continuo no garantiza que éste sea descomponible, es por eso que en la siguiente construcción se usa un sexto punto, auxiliar, el cual va a permitir mayor control sobre ciertos eslabones de las cadenas, con el fin de que el continuo resultante sea descomponible, pero, a diferencia de la construcción propuesta unas líneas arriba, ninguna cadena de esta construcción empezará ni terminará en este punto auxiliar, pues se requiere que no sea punto extremo.

Todas las construcciones de este trabajo, se harán en forma inductiva.

Sea $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ un conjunto de puntos distintos en el plano.

1. Sea $C^1 = \{L_1^1, L_2^1, \ldots, L_{\lambda_1}^1\}$ una cadena tal que:
   (a) C^1 es tensa.
   (b) empieza en p_1, termina en p_6;
   (c) la $malla(C^1) < \frac{1}{3}\text{mín}\{\text{d}(p_i, p_j) | i \neq j\}$ y todos los puntos están en algún eslabón de la cadena;

   Notación:
   En toda cadena C^m, a los eslabones que contienen a los puntos p_j se les denotará por $L_{p_j}^m$

   (d) $C^1(L_{p_1}^1, L_{p_2}^1)$ es el primer elemento de la sucesión de segmentos de la cadena C^1 y $p_j \notin C^1(L_{p_1}^1, L_{p_2}^1)$ con $j \neq 1, 2$.

   Observaciones:

   - El inciso (c) además de pedir que la cadena contenga a todos los puntos del conjunto P, asegura que la cerradura de los eslabones que contienen a los puntos p_j es ajena dos a dos. A partir de este momento se sobreentendrá que las cadenas contienen a los puntos p_j.

- El inciso (d) pide que sólo p_1, p_2 estén en $\mathcal{C}^1(L^1_{p_1}, L^1_{p_2})$ y sólo ellos.

2. $\mathcal{C}^2 = \{L^2_1, \ldots, L^2_{\lambda_2}\}$ es una cadena tal que:
   (a) $\mathcal{C}^2$ es tensa;
   (b) empieza en p_1, termina en p_6;
   (c) $\mathcal{C}^2(L^2_{p_1}, L^2_{p_2})$ es el primer elemento de la sucesión de segmentos de la cadena $\mathcal{C}^2$ y $p_j \notin \mathcal{C}^2(L^2_{p_1}, L^2_{p_2})$ con $j \neq 1, 2$;
   (d) $\mathcal{C}^2$ es un refinamiento propio de $\mathcal{C}^1$ y, además, para todo p_j $\overline{L^2_{p_j}} \subset L^1_{p_j}$; y
   (e) $\mathcal{C}^2$ va directamente por $\mathcal{C}^1$ relativamente al conjunto de anillos (véase definición 1.18) $\{L^1_{p_1}, L^1_{p_2}, L^1_{p_3}, L^1_{p_4}, L^1_{p_5}, L^1_{p_6}\}$

   Nota:
   - Las cadenas $\mathcal{C}^1$ y $\mathcal{C}^2$ siguen el mismo patrón.
   - En general las cadenas de la forma $\mathcal{C}^{6k+1}$ y $\mathcal{C}^{6k+2}$ llevarán el mismo patrón; esto facilitará la descripción posterior.

3. $\mathcal{C}^3 = \{L^3_1, \ldots, L^3_{\lambda_3}\}$ es una cadena tal que:
   (a) $\mathcal{C}^3$ es tensa;
   (b) empieza en p_3 y termina en p_1;
   (c) $\mathcal{C}^3(L^3_{p_2}, L^3_{p_1})$ es el último elemento de la sucesión de segmentos de la cadena $\mathcal{C}^3$ y $p_j \notin \mathcal{C}^3(L^3_{p_2}, L^3_{p_1})$ con $j \neq 1, 2$;
   (d) $\mathcal{C}^3$ es un refinamiento propio de $\mathcal{C}^2$ y, además, para todo p_j $\overline{L^3_{p_j}} \subset L^2_{p_j}$; y
   (e) $\mathcal{C}^3$ va directamente por $\mathcal{C}^2$ relativamente al conjunto de anillos $\{L^2_{p_1}, L^2_{p_2}, L^2_{p_3}, L^2_{p_4}, L^2_{p_5}, L^2_{p_6}\}$.

4. $\mathcal{C}^4 = \{L^4_1, \ldots, L^4_{\lambda_4}\}$ es una cadena tal que:
   (a) $\mathcal{C}^4$ es tensa;
   (b) empieza en p_4 y termina en p_1;
   (c) $\mathcal{C}^4(L^4_{p_2}, L^4_{p_1})$ es el último elemento de la sucesión de segmentos de la cadena $\mathcal{C}^4$ y $p_j \notin \mathcal{C}^4(L^4_{p_2}, L^4_{p_1})$ con $j \neq 1, 2$;

(d) $\mathcal{C}^4$ es un refinamiento propio de $\mathcal{C}^3$ y, además, para todo p_j $\overline{L^4_{p_j}} \subset L^3_{p_j}$; y

(e) $\mathcal{C}^4$ va directamente por $\mathcal{C}^3$ relativamente al conjunto de anillos $\{L^3_{p_1}, L^3_{p_2}, L^3_{p_3}, L^3_{p_4}, L^3_{p_5}, L^3_{p_6}\}$.

5. $\mathcal{C}^5 = \{L^5_1, \ldots, L^5_{\lambda_5}\}$ es una cadena tal que:

(a) $\mathcal{C}^5$ es tensa;

(b) empieza en p_5 y termina en p_1;

(c) $\mathcal{C}^5(L^5_{p_2}, L^5_{p_1})$ es el último elemento de la sucesión de segmentos de la cadena $\mathcal{C}^5$ y $p_j \notin \mathcal{C}^5(L^5_{p_2}, L^5_{p_1})$ con $j \neq 1, 2$;

(d) $\mathcal{C}^5$ es un refinamiento propio de $\mathcal{C}^4$ y, además, para todo p_j $\overline{L^5_{p_j}} \subset L^4_{p_j}$;

(e) $\mathcal{C}^5$ va directamente por $\mathcal{C}^4$ relativamente al conjunto de anillos $\{L^4_{p_1}, L^4_{p_2}, L^4_{p_3}, L^4_{p_4}, L^4_{p_5}, L^4_{p_6}\}$.

6. $\mathcal{C}^6 = \{L^6_1, \ldots, L^6_{\lambda_6}\}$ es una cadena tal que:

(a) $\mathcal{C}^6$ es tensa;

(b) empieza en p_6 y termina en p_1;

(c) $\mathcal{C}^6(L^6_{p_2}, L^6_{p_1})$ es el último elemento de la sucesión de segmentos de la cadena $\mathcal{C}^6$ y $p_j \notin \mathcal{C}^6(L^6_{p_2}, L^6_{p_1})$ con $j \neq 1, 2$;

(d) $\mathcal{C}^6$ es un refinamiento propio de $\mathcal{C}^5$ y, además, para todo p_j $\overline{L^6_{p_j}} \subset L^5_{p_j}$;

(e) $\mathcal{C}^6$ va directamente por $\mathcal{C}^5$ relativamente al conjunto de anillos $\{L^5_{p_1}, L^5_{p_2}, L^5_{p_3}, L^5_{p_4}, L^5_{p_5}, L^5_{p_6}\}$.

Obsérvese que hay 5 tipos distintos de cadenas, las que empiezan en p_1 y las que empiezan en p_j y terminan en p_1 con $j \neq 1, 2$, algo que es muy importante en esta construcción, es el hecho de pedir que $\mathcal{C}^m(L^m_{p_1}, L^m_{p_2})$ sea un elemento de la sucesión de segmentos de la cadena $\mathcal{C}^m$, ya que esto aunado a la condición de que las cadenas vayan directamente por la cadena anterior relativamente a los eslabones $L^{m-1}_{p_j}$, permitirá construir un arco entre p_1 y p_2, el cual junto con su complemento serán una descomposición del continuo.

Nótese que todas las cadenas, salvo las 2 primeras, terminan en p_1 y justo antes pasan por p_2, esto se muestra en la figura 2.4.

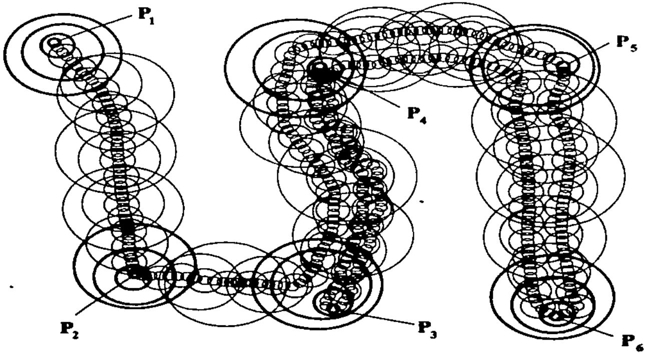


FIGURA 2.4. Continuo descomponible con 5 puntos extremos

En general:

7. Si $m > 6$
   (a) Todas las cadenas de la forma $\mathcal{C}^{6k+1}$ y $\mathcal{C}^{6k+2}$ cumplen:
      (i) $\mathcal{C}^{6k+1}$ y $\mathcal{C}^{6k+2}$ son tensas;
      (ii) Ambas empiezan en p_1 y terminan en p_6;
      (iii) $\mathcal{C}^{6k+1}(L^{6k+1}_{p_1}, L^{6k+1}_{p_2})$ y $\mathcal{C}^{6k+2}(L^{6k+2}_{p_1}, L^{6k+2}_{p_2})$ son los primeros elementos de la sucesión de segmentos de las cadenas $\mathcal{C}^{6k+1}$ y $\mathcal{C}^{6k+2}$, respectivamente, además, $p_j \notin \mathcal{C}^{6k+1}(L^{6k+1}_{p_1}, L^{6k+1}_{p_2})$ con $j \neq 1, 2$ y $p_j \notin \mathcal{C}^{6k+2}(L^{6k+2}_{p_1}, L^{6k+2}_{p_2})$ con $j \neq 1, 2$;
      (iv) $\mathcal{C}^{6k+1}$ es un refinamiento propio de $\mathcal{C}^{6k}$ y, además, la cerradura de los eslabones de la forma $L^{6k+1}_{p_j}$ están

contenidos en los eslabones de la forma $L^{6k}_{p_j}$. La cadena C^{6k+2} cumple las condiciones equivalentes; y

(v) C^{6k+1} va directamente por C^{6k} relativamente al conjunto de anillos $\{L^{6k}_{p_1}, L^{6k}_{p_2}, L^{6k}_{p_3}, L^{6k}_{p_4}, L^{6k}_{p_5}, L^{6k}_{p_6}\}$. Lo mismo sucede con la cadena C^{6k+2} respecto a la cadena C^{6k+1}.

(b) Todas las cadenas de la forma C^{6k+l}, con $1, 2 < l \leq 6$, cumplen:

(i) C^{6k+l} es tensa;

(ii) Empiezan en p_l y terminan en p_1;

(iii) $C^{6k+l}(L^{6k+l}_{p_2}, L^{6k+l}_{p_1})$ es el último elemento de la sucesión de segmentos de la cadena C^{6k+l} y $p_j \notin C^{6k+l}(L^{6k+l}_{p_2}, L^{6k+l}_{p_1})$ con $j \neq 1, 2$;

(iv) C^{6k+l} es un refinamiento propio de $C^{6k+(l-1)}$ y, además, la cerradura de los eslabones de la forma $L^{6k+l}_{p_j}$ está contenida en los eslabones de la forma $L^{6k+(l-1)}_{p_j}$; y

(v) C^{6k+l} va directamente por $C^{6k+(l-1)}$ relativamente al conjunto de anillos $\{L^{6k+(l-1)}_{p_1}, L^{6k+(l-1)}_{p_2}, L^{6k+(l-1)}_{p_3}, L^{6k+(l-1)}_{p_4}, L^{6k+(l-1)}_{p_5}, L^{6k+(l-1)}_{p_6}\}$.

8. $\lim_{m\to\infty} malla(C^m) = 0$.

Entonces $K = \cap_{m\in\mathbb{N}}(\overline{\cup C^m})$ es un continuo descomponible con 5 puntos extremos, ver Teorema 2.1.

Construcción 2. $n = k$

El método a seguir en la construcción de este continuo es una generalización de la técnica usada en la contrucción anterior, obsérvese que también se toma un punto más, del número de puntos extremos, ésto con el objetivo de obtener un continuo descomponible.

Sea $P = \{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k, p_{k+1}\}$ un conjunto de $k+1$ puntos distintos en el plano.

1. Sea $C^1 = \{L_1^1, L_2^1, \ldots, L_{\lambda_1}^1\}$ una cadena tal que:
   (a) C^1 es tensa;
   (b) Empieza en p_1, termina en p_{k+1};
   (c) la $malla(C^1) < \frac{1}{3}\text{mín}\{\mathrm{d}(p_i, p_j) | i \neq j\}$ y todos los puntos están en algún eslabón de la cadena;
   (d) $C^1(L_{p_1}^1, L_{p_2}^1)$ es el primer elemento de la sucesión de segmentos de la cadena C^1 y $p_j \notin C^1(L_{p_1}^1, L_{p_2}^1)$ con $j \neq 1, 2$.
2. $C^2 = \{L_1^2, L_2^2, \ldots, L_{\lambda_2}^2\}$ es una cadena tal que:
   (a) C^2 es tensa;
   (b) C^2 empieza en p_1 y termina en p_{k+1};
   (c) $C^2(L_{p_1}^2, L_{p_2}^2)$ es el primer elemento de la sucesión de segmentos de la cadena C^2 y $p_j \notin C^2(L_{p_1}^2, L_{p_2}^2)$ con $j \neq 1, 2$;
   (d) C^2 es un refinamiento propio de C^1 y, además, para todo p_j $\overline{L_{p_j}^2} \subset L_{p_j}^1$; y
   (e) C^2 va directamente por C^1 relativamente al conjunto de anillos $\{L_{p_1}^1, L_{p_2}^1, \ldots, L_{p_{k+1}}^1\}$.
3. $C^3 = \{L_1^3, L_2^3, \ldots, L_{\lambda_3}^3\}$ es una cadena tal que:
   (a) C^3 es tensa;
   (b) C^3 empieza en p_3 y termina en p_1;
   (c) $C^3(L_{p_2}^3, L_{p_1}^3)$ es el último elemento de la sucesión de segmentos de la cadena C^3 y $p_j \notin C^3(L_{p_2}^3, L_{p_1}^3)$ con $j \neq 1, 2$;
   (d) C^3 es un refinamiento propio de C^2 y, además, para todo p_j $\overline{L_{p_j}^3} \subset L_{p_j}^2$; y
   (e) C^3 va directamente por C^2 relativamente al conjunto de anillos $\{L_{p_1}^2, L_{p_2}^2, \ldots, L_{p_{k+1}}^2\}$.

   Observación:

   Los pasos $4, 5, \ldots, k+1$ serán muy parecidos, como se verá a continuación, al paso 3.

En general, para $m = (k+1)q + r$ con $1 \leq r \leq (k+1)$:

4. Las cadenas de la forma $C^{(k+1)q+1}$ y $C^{(k+1)q+2}$
   (a) $C^{(k+1)q+1}$ y $C^{(k+1)q+2}$ son tensas;

(b) Empiezan en p_1 y terminan en $p_k + 1$;

(c) $\mathcal{C}^{(k+1)q+1}(L_{p_1}^{(k+1)q+1}, L_{p_2}^{(k+1)q+1})$ es el primer elemento de la sucesión de segmentos de la cadena $\mathcal{C}^{(k+1)q+1}$ y $p_j \notin \mathcal{C}^{(k+1)q+1}(L_{p_1}^{(k+1)q+1}, L_{p_2}^{(k+1)q+1})$ con $j \neq 1, 2$; esto mismo ocurre en las cadenas $\mathcal{C}^{(k+1)q+2}$ con sus respectivas sucesiones de segmentos de cadenas;

(d) $\mathcal{C}^{(k+1)q+1}$ es un refinamiento propio de $\mathcal{C}^{(k+1)q}$ y, además, para todo p_j, $\overline{L_{p_j}^{(k+1)q+1}} \subset L_{p_j}^{(k+1)q}$ esto mismo se pide para las cadenas de la forma $\mathcal{C}^{(k+1)q+2}$; y

(e) $\mathcal{C}^{(k+1)q+1}$ va directamente por $\mathcal{C}^{(k+1)q}$ relativamente al conjunto de anillos $\{L_{p_1}^{(k+1)q}, L_{p_2}^{(k+1)q}, \ldots, L_{p_{k+1}}^{(k+1)q}\}$. Lo mismo sucede con la cadena $\mathcal{C}^{(k+1)q+2}$ respecto a la cadena $\mathcal{C}^{(k+1)q+1}$.

5. Las cadenas de la forma $\mathcal{C}^{(k+1)q+r}$ con $1, 2 < r \leq k$

   (a) $\mathcal{C}^{(k+1)q+r}$ son tensas;

   (b) Empiezan en p_r y terminan en p_1;

   (c) $\mathcal{C}^{(k+1)q+r}(L_{p_2}^{(k+1)q+r}, L_{p_1}^{(k+1)q+r})$ es el último elemento de la sucesión de segmentos de la cadena $\mathcal{C}^{(k+1)q+r}$ y $p_j \notin \mathcal{C}^{(k+1)q+r}(L_{p_2}^{(k+1)q+r}, L_{p_1}^{(k+1)q+r})$ con $j \neq 1, 2$;

   (d) $\mathcal{C}^{(k+1)q+r}$ es un refinamiento propio de $\mathcal{C}^{(k+1)q+(r-1)}$ y, además, para toda p_j, $\overline{L_{p_j}^{(k+1)q+r}} \subset L_{p_j}^{(k+1)q+(r-1)}$; y

   (e) $\mathcal{C}^{(k+1)q+r}$ va directamente por $\mathcal{C}^{(k+1)q+(r-1)}$ relativamente al conjunto de anillos $\{L_{p_1}^{(k+1)q+(r-1)}, L_{p_2}^{(k+1)q+(r-1)}, \ldots, L_{p_{k+1}}^{(k+1)q+(r-1)}\}$.

6. $\lim_{m\to\infty} malla(\mathcal{C}^m) = 0$

Entonces $K = \cap(\overline{\cup \mathcal{C}^m})$ es un continuo descomponible con k puntos extremos, ver Teorema 2.1.

Teorema 2.1. *El conjunto K, de la construcción anterior, es un continuo encadenable descomponible con k puntos extremos.*

Demostración. Por construcción K es encadenable.
Obsérvese que toda cadena que va de un punto a a un punto b, se puede

pensar como una cadena que va de b a a, simplemente reenumerando los eslabones. Así que, por comodidad en la notación, las subcadenas de las formas $\mathcal{C}^m(L^m_{p_1}, L^m_{p_2})$ y $\mathcal{C}^n(L^n_{p_2}, L^n_{p_1})$ serán pensadas de la forma $\mathcal{C}^m(L^m_{p_1}, L^m_{p_2})$.

Tómese la colección de subcadenas $\{\mathcal{C}^m(L^m_{p_1}, L^m_{p_2})\}_{m\in\mathbb{N}}$ y denótese a cada una de estas subcadenas por $\mathcal{D}^m$, por construcción, se tiene que, para toda $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}^{m+1}$ va directamente por $\mathcal{D}^m$, $\mathcal{D}^m$ va de p_1 a p_2 y $\lim_{m\to\infty} malla(\mathcal{D}^m) = 0$; por el lema 1.2 $H = \bigcap_{m\in\mathbb{N}}(\overline{\bigcup \mathcal{D}^m})$ es un arco entre p_1 y p_2.

Ahora para cada $m \in \mathbb{N}$, tómense las siguientes subcadenas de $\mathcal{C}^m$: $\mathcal{R}^m = \{L^m_1, L^m_2, \ldots, L^m_r\}$ y $\mathcal{S}^m = \{L^m_s, L^m_{s+1}, \ldots, L^m_{\lambda_m}\}$ tales que L^m_r es el eslabón anterior, inmediato, al eslabón que contiene a p_2 $(L^m_{p_2})$ y que cumple con que $p_2 \notin \overline{L^m_r}$, y L^m_s es el eslabón posterior, inmediato, al eslabón que contiene a p_2 y que cumple con que $p_2 \notin \overline{L^m_s}$, entonces $K \cap (\bigcup \mathcal{R}^m)$ y $K \cap (\bigcup \mathcal{S}^m)$ son abiertos de k tales que su unión es $K\setminus\{p_2\}$ y su intersección es vacía, entonces p_2 es un punto de corte, por lo tanto p_2 no es punto extremo; por otro lado $(K \cap (\bigcup \mathcal{R}^m)) \cup \{p_2\}$ y $(K \cap (\bigcup \mathcal{S}^m)) \cup \{p_2\}$ forman una descomposición de K, por lo tanto K es descomponible. Sea PE el conjunto de puntos extremos de K; para cada cadena $\mathcal{C}^m$, denótese por $A^m = \{L^m_{p_1}, L^m_{p_2}, \ldots, L^m_{p_{(k+1)}}\}$ al conjunto de anillos entonces por construcción, para toda $m \in \mathbb{N}$ $\{p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}\} \subset \bigcup A^m$ y ya que $\lim_{m\to\infty} malla(\mathcal{C}^m) = 0$ se tiene que $\{p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}\} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}}(\bigcup A^m)$, también, por construcción se tiene, para $j \neq 2$, que $p_j \in PE$, pero, $PE \subset \bigcap_{m\in\mathbb{N}}(\bigcup A^m)$, esto es porque si $p \notin \bigcap_{m\in\mathbb{N}}(\bigcup A^m)$; por el lema 1.3 $p \notin PE$ por contrapuesta se tiene que $PE \subset \bigcap_{m\in\mathbb{N}}(\bigcup A^m)$, como ya se vió que p_2 no es punto extremo se tiene que $\{p_1, p_3, p_4, \ldots, p_k, p_{k+1}\} = PE$, por lo tanto K tiene k puntos extremos.

■

2.2. Continuos Indescomponibles

Construcción 3. $n = 4$

Gracias a los teoremas 1.13 y 1.16 y las cadenas, se conoce un continuo encadenable indescomponible con tres puntos extremos (ver [5, 7, pág. 142]), modificando la construcción de este continuo y usando los mismos teoremas, se construirá un continuo indescomponible con cuatro puntos extremos, la técnica consiste en tomar cuatro puntos distintos en el plano y elegir tres de éstos, entre los cuales se construirán cadenas que pasen por los cuatro puntos y que empiecen y terminen entre cada dos de estos tres elegidos, con esto no se quiere decir que no hay cadena que empiece en el cuarto punto, pues también habrá cadenas que empiecen en este punto y que pasen por todos los demás.

Sea $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ un conjunto de puntos distintos en el plano.

1. Sea $C^1 = \{L_1^1, L_2^1, \ldots, L_{\lambda_1}^1\}$ una cadena tal que:
   (a) C^1 es tensa;
   (b) empieza en p_1, termina en p_3; y
   (c) la $malla(C^1) < \frac{1}{3}\text{mín}\{\text{d}(p_i, p_j) | i \neq j\}$ y todos los puntos están en algún eslabón de la cadena.

   Denótese con $L_{p_j}^1$ al eslabón que contiene al punto p_j para toda $j = 1, 2, 3, 4$.
2. $C^2 = \{L_1^2, L_2^2, \ldots, L_{\lambda_2}^2\}$ es una cadena tal que:
   (a) C^2 es tensa;
   (b) empieza en p_2, termina en p_1;
   (c) C^2 es un refinamiento propio de C^1; y
   (d) C^2 va directamente por C^1 relativamente al conjunto de anillos $\{L_{p_1}^1, L_{p_2}^1, L_{p_3}^1, L_{p_4}^1\}$.

   Denótese con $L_{p_j}^2$ al eslabón que contiene al punto p_j para toda $j = 1, 2, 3, 4$.
3. $C^3 = \{L_1^3, L_2^3, \ldots, L_{\lambda_3}^3\}$ es una cadena tal que:
   (a) C^3 es tensa;
   (b) empieza en p_3, termina en p_2;

(c) C^3 es un refinamiento propio de C^2; y

(d) C^3 va directamente por C^2 relativamente al conjunto de anillos $\{L^2_{p_1}, L^2_{p_2}, L^2_{p_3}, L^2_{p_4}\}$.

Denótese con $L^3_{p_j}$ al eslabón que contiene al punto p_j para toda $j = 1, 2, 3, 4$.

4. $C^4 = \{L^4_1, L^4_2, \ldots, L^4_{\lambda_4}\}$ es una cadena tal que:

(a) C^4 es tensa;

(b) empieza en p_4, termina en p_1;

(c) C^4 es un refinamiento propio de C^3; y

(d) C^4 va directamente por C^3 relativamente al conjunto de anillos $\{L^3_{p_1}, L^3_{p_2}, L^3_{p_3}, L^3_{p_4}\}$.

Denótese con $L^4_{p_j}$ al eslabón que contiene al punto p_j para toda $j = 1, 2, 3, 4$.

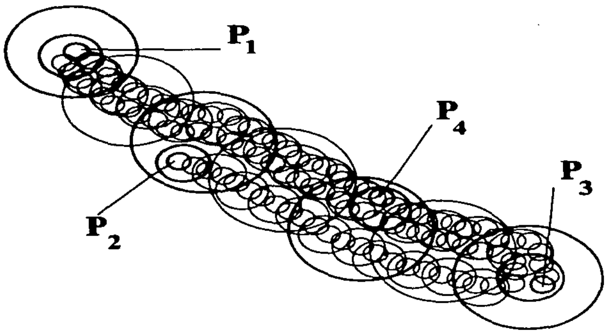


FIGURA 2.5. Continuo indescomponible con 4 puntos extremos

Obsérvese que se han construido las cadenas de tal forma que la primera empieza en p_1 y termina en p_3, la segunda empieza en p_2 y termina en p_1 y la tercera empieza en p_3 y termina en p_2, esto se hará, también, en las siguientes cadenas, es lo que hará del continuo encadenable de p_i a p_j, con $i \neq j$ e $i, j \in \{1, 2, 3\}$, de donde, por los teoremas 1.13 y 1.16, se tiene que el continuo es indescomponible, además también hay una cadena que empieza en p_4 y termina en p_1, en general para este tipo de cadena no importa en qué punto del conjunto $\{p_1, p_2, p_3\}$ termine ya que sólo importa que este punto sea punto extremo, se ha elegido p_1 por comodidad,

En general, para $4 \leq m$, $m = 4q + t$ tenemos:

5. Las cadenas de la forma C^{4q+1}
   (a) son tensas;
   (b) empiezan en p_1, terminan en p_3;
   (c) C^{4q+1} son refinamiento propio de C^{4q}; y
   (d) C^{4q+1} van directamente por C^{4q} relativamente al conjunto de anillos $\{L_{p_1}^{4q}, L_{p_2}^{4q}, L_{p_3}^{4q}, L_{p_4}^{4q}\}$.

   Denótese con $L_{p_j}^{4q+1}$ al eslabón que contiene al punto p_j para toda $j = 1, 2, 3, 4$.

6. Las cadenas de la forma C^{4q+2}
   (a) son tensas;
   (b) empiezan en p_2, terminan en p_1;
   (c) C^{4q+2} refinan propiamente a C^{4q+1}; y
   (d) C^{4q+2} van directamente por C^{4q+1} relativamente al conjunto de anillos $\{L_{p_1}^{4q+1}, L_{p_2}^{4q+1}, L_{p_3}^{4q+1}, L_{p_4}^{4q+1}\}$.
7. Las cadenas de la forma C^{4q+3}
   (a) son tensas;
   (b) empiezan en p_3, terminan en p_2;
   (c) C^{4q+3} refinan propiamente a C^{4q+2}; y
   (d) C^{4q+3} van directamente por C^{4q+2} relativamente al conjunto de anillos $\{L_{p_1}^{4q+2}, L_{p_2}^{4q+2}, L_{p_3}^{4q+2}, L_{p_4}^{4q+2}\}$.
8. Las cadenas de la forma C^{4q+4}
   (a) son tensas;
   (b) empiezan en p_4, terminan en p_1;

(c) C^{4q+4} refinan propiamente a C^{4q+3}; y
(d) C^{4q+4} van directamente por C^{4q+3} relativamente al conjunto de anillos $\{L_{p_1}^{4q+3}, L_{p_2}^{4q+3}, L_{p_3}^{4q+3}, L_{p_4}^{4q+3}\}$.

9. $\text{lím}_{m\to\infty} malla(C^m) = 0$.

Entonces $K = \cap(\overline{\cup C^m})$ es un continuo encadenable, indescomponible con 4 puntos extremos, ver Teorema 2.2.

Construcción 4. $n = k$

Esta construcción es la generalización, que se da de manera natural, a la construcción pasada.

Sea $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ un conjunto de puntos distintos del plano.

1. Sea $C^1 = \{L_1^1, L_2^1. \ldots, L_{\lambda_1}^1\}$ una cadena tal que:
   (a) C^1 es tensa;
   (b) empieza en p_1, termina en p_3; y
   (c) la $malla(C^1) < \frac{1}{3}\text{mín}\{d(p_i, p_j)|i \neq j\}$ y todos los puntos están en algún eslabón de la cadena.

   Nota:
   Se denotará por $L_{p_j}^m$ al eslabón, de la cadena C^m, que contenga al punto p_j.
2. $C^2 = \{L_1^2, L_2^2, \ldots, L_{\lambda_2}^2\}$ es una cadena tal que:
   (a) C^2 es tensa;
   (b) empieza en p_2, termina en p_1;
   (c) C^2 es un refinamiento propio de C^1; y
   (d) C^2 va directamente por C^1 relativamente al conjunto de anillos $\{L_{p_1}^1, L_{p_2}^1, \ldots, L_{p_k}^1\}$.
3. Sea $C^3 = \{L_1^3, L_2^3, \ldots, L_{\lambda_3}^3\}$ una cadena tal que:
   (a) C^3 es tensa;
   (b) empieza en p_3, termina en p_2;
   (c) C^3 es un refinamiento propio de C^2; y
   (d) C^3 va directamente por C^2 relativamente al conjunto de anillos $\{L_{p_1}^2, L_{p_2}^2, \ldots, L_{p_k}^2\}$.

4. para $4 \leq m \leq k$, $\mathcal{C}^m$ es una cadena tal que:
   (a) $\mathcal{C}^m$ es tensa;
   (b) empieza en p_m, termina en p_1;
   (c) $\mathcal{C}^m$ es un refinamiento propio de $\mathcal{C}^{m-1}$; y
   (d) $\mathcal{C}^m$ va directamente por $\mathcal{C}^{m-1}$ relativamente al conjunto de anillos $\{L_{p_1}^{m-1}, L_{p_2}^{m-1}, \ldots, L_{p_k}^{m-1}\}$.

   En general, para $m \geq k$, $m = kq + l$:
5. $\mathcal{C}^{kq+1}$ son cadenas tales que:
   (a) $\mathcal{C}^{kq+1}$ son tensas;
   (b) empiezan en p_1, terminan en p_3;
   (c) $\mathcal{C}^{kq+1}$ son un refinamiento propio de $\mathcal{C}^{kq}$; y
   (d) $\mathcal{C}^{kq+1}$ van directamente por $\mathcal{C}^{kq}$ relativamente al conjunto de anillos $\{L_{p_1}^{kq}, L_{p_2}^{kq}, \ldots, L_{p_k}^{kq}\}$.
6. $\mathcal{C}^{kq+2}$ son cadenas tales que:
   (a) $\mathcal{C}^{kq+2}$ son tensas;
   (b) empiezan en p_2, terminan en p_1;
   (c) $\mathcal{C}^{kq+2}$ son un refinamiento propio de $\mathcal{C}^{kq+1}$; y
   (d) $\mathcal{C}^{kq+2}$ van directamente por $\mathcal{C}^{kq+1}$ relativamente al conjunto de anillos $\{L_{p_1}^{kq+1}, L_{p_2}^{kq+1}, \ldots, L_{p_k}^{kq+1}\}$.
7. $\mathcal{C}^{kq+3}$ son cadenas tales que:
   (a) $\mathcal{C}^{kq+3}$ son tensas;
   (b) empiezan en p_3, terminan en p_2;
   (c) $\mathcal{C}^{kq+3}$ son un refinamiento propio de $\mathcal{C}^{kq+2}$; y
   (d) $\mathcal{C}^{kq+3}$ va directamente por $\mathcal{C}^{kq+2}$ relativamente al conjunto de anillos $\{L_{p_1}^{kq+2}, L_{p_2}^{kq+2}, \ldots, L_{p_k}^{kq+2}\}$.
8. $\mathcal{C}^{kq+l}$, $l \neq 1, 2, 3$ son cadenas tales que:
   (a) $\mathcal{C}^{kq+l}$ son tensas;
   (b) empiezan en p_l, terminan en p_1;
   (c) $\mathcal{C}^{kq+l}$ son un refinamiento propio de $\mathcal{C}^{kq+(l-1)}$; y
   (d) $\mathcal{C}^{kq+l}$ van directamente por $\mathcal{C}^{kq+(l-1)}$ relativamente al conjunto de anillos $\{L_{p_1}^{kq+(l-1)}, L_{p_2}^{kq+(l-1)}, \ldots, L_{p_k}^{kq+(l-1)}\}$.
9. $\text{lím}_{m\to\infty} malla(\mathcal{C}^m) = 0$.

Teorema 2.2. *El conjunto $K = \cap_{m\in\mathbb{N}}(\overline{\cup C^m})$, en la construcción anterior, es un continuo encadenable, indescomponible con k puntos extremos*

Demostración. K es, por construcción, encadenable.

Sea $A^m = \{L^m_{p_1}, L^m_{p_2}, \ldots, L^m_{p_k}\}$ el conjunto de los eslabones de la cadena C^m que contienen a los puntos p_j, sea PE el conjunto de puntos extremos de K y sea $A = \cap_{m\in\mathbb{N}}(\cup A^m) = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$.

Sean $p \in A$ y $\varepsilon > 0$, por construcción existe m tal que $malla(C^m) \leq \varepsilon$ y $p \in L^m_1$, esto es $A \subset PE$, ahora, $PE \subset A$, esto es porque si $p \notin A$; por el lema 1.3 $p \notin PE$ por contrapuesta se tiene que $PE \subset A$, entonces $PE = A$ y por lo tanto K tiene k puntos extremos.

Por otro lado dada $\varepsilon > 0$ existe m tal que la cadena C^m empieza en p_1 y termina en p_3, esto es, K es encadenable de p_1 a p_3, y por el teorema 1.16 es irreducible entre estos dos puntos; esto pasa, de la misma forma, para las parejas de puntos p_2, p_1 y p_3, p_2, y por el teorema 1.13, K es un continuo indescomponible.

■

3

EL CASO $\aleph_0$

Los ejemplos que se construirán en este capítulo serán continuos encadenables tanto descomponibles como indescomponibles, con una cantidad numerable de puntos extremos, además, para cada caso, se construirá un ejemplo en el cual el conjunto de puntos extremos es completo y otro en el cual el conjunto de puntos extremos no lo es, para esto se ocupará el hecho de que cualquier subconjunto cerrado de un espacio métrico completo es completo, y como los continuos son espacios completos entonces bastará con que el conjunto de puntos extremos sea cerrado o bien no lo sea.

Las técnicas a seguir en estas construcciones serán parecidas a las empleadas en el capítulo anterior; el conjunto de puntos extremos, dependiendo del caso, serán los puntos de la sucesión $\{(\frac{1}{n},0)\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{(0,0)\}$ o bien sólo los puntos $\{(\frac{1}{n},0)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

3.1. Continuos Descomponibles

De igual manera que en el capítulo anterior, los eslabones de todas las construcciones serán abiertos conexos de $\mathbb{R}^2$.

3.1.1. $PE = \overline{PE}$.

Construcción 5. Sea $P = \{(\frac{1}{n},0) \mid n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{(0,0)\}$.
Por comodidad se denotará por $\frac{1}{n}$ al punto $(\frac{1}{n},0)$.

1. $C^1 = \{L_1^1, L_2^1, \ldots, L_{\lambda_1}^1\}$ es una cadena tal que:
   (a) C^1 es tensa.
   (b) empieza en 1, *i.e.* el primer eslabón contiene al punto $(1,0)$;

(c) el último eslabón, $L^1_{\lambda_1}$, es el que contiene al punto $(0,0)$;
(d) $L^1_{\lambda_1}$, cumple con que $P\backslash\{1,\frac{1}{2}\} \subset L^1_{\lambda_1}$, *i.e.* todo el conjunto de puntos, P menos el 1, y el $\frac{1}{2}$ está contenido en este eslabón; y
(e) los eslabones que contienen a $1, \frac{1}{2}, P\backslash\{1,\frac{1}{2}\}$ son ajenos entre sí.

Notación:

En cada cadena C^m, al eslabón que sólo contiene al punto $\frac{1}{n}$ se le denotará con $L^m(\frac{1}{n})$ y con $L^m(0)$ al eslabón que contiene a más de un elemento de P. Por ejemplo en el paso anterior el último eslabón sólo contiene al punto 1, por lo que se le denota por $L^1(1)$, al eslabón que sólo contiene al punto $\frac{1}{2}$ se le denota por $L^1(\frac{1}{2})$ y, por último, el eslabón $L^1_{\lambda_1}$ contiene a más de un elemento de P, por lo que se le denota por $L^1(0)$.

2. $C^2 = \{L^2_1, L^2_2, \ldots, L^2_{\lambda_2}\}$ es una cadena tal que:
   (a) C^2 es tensa;
   (b) el primer eslabón de la cadena es $L^2(0)$ y es tal que $P\backslash\{1,\frac{1}{2}\} \subset L^2(0)$, el último eslabón es $L^2(1)$, *i.e.* sólo contiene al 1;
   (c) C^2 es un refinamiento propio de C^1;
   (d) los eslabones $L^2(1), L^2(\frac{1}{2}), L^2(0)$, tienen intersección ajena;
   (e) $C^2(L^2(\frac{1}{2}), L^2(1))$ es el último elemento de la sucesión de segmentos de la cadena C^2 y para todo $p \in \{\frac{1}{n}\}_{n=3}^{\infty}$, $p \notin C^2(L^2(\frac{1}{2}), L^2(1))$; y
   (f) C^2 va directamente por C^1 relativamente al conjunto de anillos $\{L^1(1), L^1(\frac{1}{2}), L^1(0)\}$.

Ya que los dos primeros pasos son muy similares, la figura 3.1 muestra el paso 2 de esta construcción, los anillos y pivotes estan resaltados, y las demás figuras empezarán en esta cadena.

3. $C^3 = \{L^3_1, L^3_2, \ldots, L^3_{\lambda_3}\}$ es una cadena tal que:
   (a) C^3 es tensa;

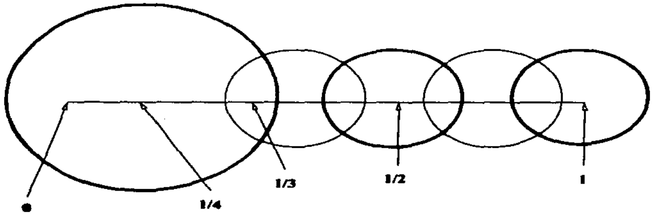


FIGURA 3.1. La cadena $\mathcal{C}^2$

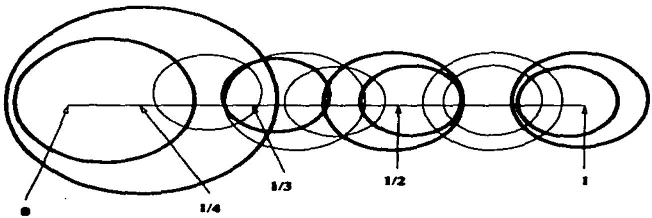


FIGURA 3.2. Las cadenas $\mathcal{C}^2$ y $\mathcal{C}^3$

(b) el primer eslabón de la cadena es $L^3(1)$, el último eslabón es $L^3(0)$, y es tal que $P\setminus\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\} \subset L^3(0)$;

(c) $\mathcal{C}^3$ es un refinamiento propio de $\mathcal{C}^2$;

(d) los eslabones $L^3(1)$, $L^3(\frac{1}{2}), L^3(\frac{1}{3}), L^3(0)$ son ajenos;

(e) $\mathcal{C}^3(L^3(1), L^3(\frac{1}{2}))$ es el primer elemento de la sucesión de segmentos de la cadena $\mathcal{C}^3$ y para todo $p \in \{\frac{1}{n}\}_{n=3}^{\infty}$, $p \notin \mathcal{C}^3(L^3(1), L^3(\frac{1}{2}))$; y

(f) $\mathcal{C}^3$ va directamente por $\mathcal{C}^2$ relativamente al conjunto de anillos $\{L^2(1), L^2(\frac{1}{2}), L^2(0)\}$.

La figura 3.3 muestra el cuarto paso de ésta construcción.

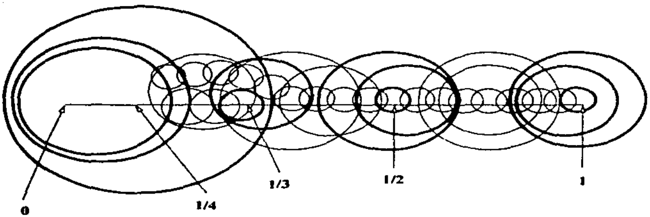


FIGURA 3.3. Las cadenas C^2, C^3 y C^4

4. $C^4 = \{L_1^4, L_2^4, \ldots, L_{\lambda_4}^4\}$ es una cadena tal que:
   (a) C^4 es tensa;
   (b) el primer eslabón de la cadena es $L^4(\frac{1}{3})$, el último eslabón es $L^4(1)$; $L^4(0)$ es tal que $P\backslash\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\} \subset L^4(0)$;
   (c) C^4 es un refinamiento propio de C^3;
   (d) el conjunto de anillos de C^4 es $\{L^4(1), L^4(\frac{1}{2}), L^4(\frac{1}{3}), L^4(0)\}$, y son ajenos;
   (e) $C^4(L^4(\frac{1}{2}), L^4(1))$ es el último elemento de la sucesión de segmentos de la cadena C^4 y para todo $p \in \{\frac{1}{n}\}_{n=3}^{\infty}$, $p \notin C^4(L^4(\frac{1}{2}), L^4(1))$; y
   (f) C^4 va directamente por C^3 relativamente al conjunto de anillos $\{L^3(1), L^3(\frac{1}{2}), L^3(\frac{1}{3}), L^3(0)\}$.

La figura 3.4 muestra el quinto paso de ésta construcción.

5. $C^5 = \{L_1^5, L_2^5, \ldots, L_{\lambda_5}^5\}$ es una cadena tal que:
   (a) C^5 es tensa;
   (b) el primer eslabón es $L^5(0)$, el último eslabón es $L^5(1)$;
   (c) C^5 es un refinamiento propio de C^4;
   (d) $P\backslash\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\} \subset L^5(0)$;

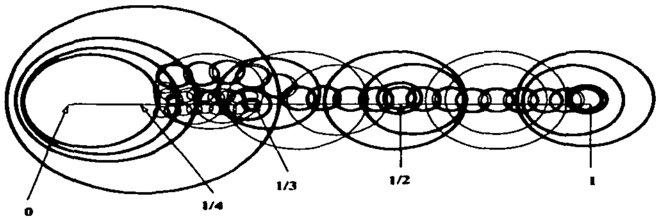


FIGURA 3.4. Las cadenas $\mathcal{C}^2$, $\mathcal{C}^3$, $\mathcal{C}^4$ y $\mathcal{C}^5$

(e) los anillos de $\mathcal{C}^5$ son $L^5(1), L^5(\frac{1}{2}), L^5(\frac{1}{3}), L^5(0)$; y son ajenos;

(f) $\mathcal{C}^5(L^5(\frac{1}{2}), L^5(1))$ es el último elemento de la sucesión de segmentos de la cadena $\mathcal{C}^5$ y para todo $p \in \{\frac{1}{n}\}_{n=3}^{\infty}$, $p \notin \mathcal{C}^5(L^5(\frac{1}{2}), L^5(1))$; y

(g) $\mathcal{C}^5$ va directamente por $\mathcal{C}^4$ relativamente al conjunto de anillos $\{L^4(1), L^4(\frac{1}{2}), L^4(\frac{1}{3}), L^4(0)\}$.

Nota:

Para simplificar la notación, se sobreentenderá que toda cadena $\mathcal{C}^m$ cumple con:

- $\mathcal{C}^m$ es tensa.
- $\mathcal{C}^m$ es un refinamiento propio de $\mathcal{C}^{m-1}$.
- Los eslabones $L^m(1), L^m(\frac{1}{2}), \ldots, L^m(\frac{1}{k}), L^m(0)$ son ajenos, esto es, los anillos de la cadena son ajenos; y
- En algunos de los pasos, de la construcción, se tendrá que $\mathcal{C}^m(L^m(\frac{1}{2}), L^m(1))$ es el último elemento de la sucesión de segmentos de la cadena $\mathcal{C}^m$ y para todo $p \in \{\frac{1}{n}\}_{n=3}^{\infty}$, $p \notin \mathcal{C}^m(L^m(\frac{1}{2}), L^m(1))$, en otros pasos, se tendrá que $\mathcal{C}^m(L^m(1), L^m(\frac{1}{2}))$ es el primer elemento de la sucesión de segmentos de la cadena $\mathcal{C}^m$ y para todo $p \in \{\frac{1}{n}\}_{n=3}^{\infty}$, $p \notin \mathcal{C}^m(L^m(1), L^m(\frac{1}{2}))$.

6. $C^6 = \{L_1^6, L_2^6, \ldots, L_{\lambda_6}^6\}$ es una cadena tal que:
   (a) empieza en el eslabón $L^6(1)$, termina en el eslabón $L^6(0)$;
   (b) $P \backslash \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\} \subset L^6(0)$;
   (c) los anillos de C^6 son $L^6(1), L^6(\frac{1}{2}), L^6(\frac{1}{3}), L^6(\frac{1}{4}), L^6(0)$; y
   (d) C^6 va directamente por C^5 relativamente al conjunto de anillos $\{L^5(1), L^5(\frac{1}{2}), L^5(\frac{1}{3}), L^5(0)\}$.
7. $C^7 = \{L_1^7, L_2^7, \ldots, L_{\lambda_7}^7\}$ es una cadena tal que:
   (a) el primer eslabón es $L^7(\frac{1}{3})$, el último eslabón es $L^7(1)$;
   (b) $P \backslash \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\} \subset L^7(0)$;
   (c) los anillos de C^7 son $L^7(0), L^7(1), L^7(\frac{1}{3}), L^7(\frac{1}{4})$; y
   (d) C^7 va directamente por C^6 relativamente al conjunto de anillos $\{L^6(1), L^6(\frac{1}{2}), L^6(\frac{1}{3}), L^6(\frac{1}{4}), L^6(0)\}$.
8. $C^8 = \{L_1^8, L_2^8, \ldots, L_{\lambda_8}^8\}$ es una cadena tal que:
   (a) el primer eslabón es $L^8(\frac{1}{4})$, el último eslabón es $L^8(1)$;
   (b) $P \backslash \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\} \subset L^8(0)$;
   (c) los anillos de C^8 son $L^8(1), L^8(\frac{1}{2}), L^8(\frac{1}{3}), L^8(\frac{1}{4}), L^8(0)$; y
   (d) C^8 va directamente por C^7 relativamente al conjunto de anillos $\{L^7(1), L^7(\frac{1}{2}), L^7(\frac{1}{3}), L^7(\frac{1}{4}), L^7(0)\}$.
9. $C^9 = \{L_1^9, L_2^9, \ldots, L_{\lambda_9}^9\}$ es una cadena tal que:
   (a) el primer eslabón es $L^9(0)$, el último eslabón es $L^9(1)$;
   (b) $P \backslash \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\} \subset L^9(0)$;
   (c) los anillos de C^9 son $L^9(1), L^9(\frac{1}{2}), L^9(\frac{1}{3}), L^9(\frac{1}{4}), L^9(0)$; y
   (d) C^9 va directamente por C^8 relativamente al conjunto de anillos $\{L^8(1), L^8(\frac{1}{2}), L^8(\frac{1}{3}), L^8(\frac{1}{4}), L^8(0)\}$.

Observación

Nótese que por cada conjunto $\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}\}$, se tiene una colección de cadenas, tal que la primera empieza en el eslabón que contiene al 1 y termina en el eslabón que contiene a todos los elementos de P menos a los primeros n, y las siguientes cadenas empiezan en los eslabones que contienen, respectivamente a $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}$ y al conjunto $P \backslash \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}\}$ y terminan en el eslabón que contiene al 1, nótese, además, que el punto $\frac{1}{2}$, juega un papel muy similar al del punto p_2 de la construcción 1 y, de igual forma el hecho de que $C^m(L^m(1), L^m(\frac{1}{2}))$ sea un elemento de la sucesión de segmentos de la cadena C^m permitirá que el continuo sea descomponible. En la figura 3.5 se muestran algunos pasos a partir de la cadena C^2.

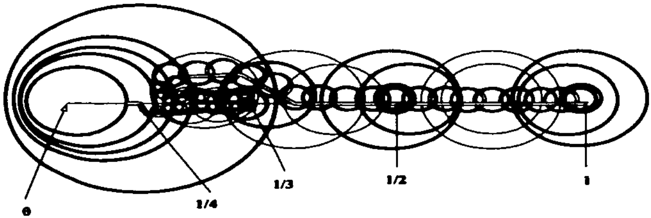


FIGURA 3.5. Continuo Descomponible con $|PE| = \aleph_0$ y $PE = \overline{PE}$

En general, si C^m empezó en el eslabón $L^m(0)$, con $P\backslash\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}\} \subset L^m(0)$, como se señaló en la observación anterior siempre hay una cadena que empieza en dicho eslabón, se tiene que:

10. C^{m+1} es una cadena tal que:
    (a) empieza en el eslabón $L^{m+1}(1)$ y termina en el eslabón $L^{m+1}(0)$;
    (b) $P\backslash\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}\} \subset L^{m+1}(0)$;
    (c) los anillos de C^{m+1} son $L^{m+1}(1), L^{m+1}(\frac{1}{2}), \ldots, L^{m+1}(\frac{1}{k}), L^{m+1}(\frac{1}{k+1}), L^{m+1}(0)$; y
    (d) C^{m+1} va directamente por C^m relativamente al conjunto de anillos $\{L^m(1), L^m(\frac{1}{2}), \ldots, L^m(\frac{1}{k}), L^m(0)\}$.
11. $C^{m+2}, C^{m+3}, \ldots, C^{m+k}, C^{m+k+1}$ son, cadenas tales que:
    (a) empiezan, respectivamente, en el eslabón

$L^{m+2}(\frac{1}{3}), L^{m+3}(\frac{1}{4}), \ldots, L^{m+k}(\frac{1}{k+1}), L^{m+k+1}(0)$;
y terminan en el eslabón $L^{m+2}(1), L^{m+3}(1), \ldots, L^{m+k+1}(1)$, y

(b) para toda j tal que $m+2 \leq j \leq m+k+1$
  (i) $P\backslash\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}\} \subset L^j(0)$, *i.e.* $L^j(0)$ es el eslabón, de cada cadena, que no contiene a los primeros $k+1$ puntos;
  (ii) los anillos de C^j son $L^j(1), L^j(\frac{1}{2}), \ldots, L^j(\frac{1}{k}), L^j(\frac{1}{k+1}), L^j(0)$; y
  (iii) C^j va directamente por C^{j-1} relativamente al conjunto de anillos $\{L^{j-1}(1), L^{j-1}(\frac{1}{2}), \ldots, L^{j-1}(\frac{1}{k}), L^{j-1}(\frac{1}{k+1}), L^{j-1}(0)\}$.

12. $\lim_{m\to\infty} malla(C^m) = 0$.

Entonces $K = \bigcap_{m\in\mathbb{N}}(\overline{\bigcup C^m})$ es un continuo descomponible con $|PE| = \aleph_0$ y $PE = \overline{PE}$, ver Teorema 3.1.

Teorema 3.1. *El continuo K, de la construcción anterior, es un continuo encadenable, descomponible, con una cantidad numerable infinita de puntos extremos, más aún, el conjunto de puntos extremos es completo.*

Demostración. Por construcción, K es un continuo encadenable. Nótese que de igual forma que en el teorema 2.1, se construyó un arco entre $\{\frac{1}{2}\}$ y $\{1\}$; con el mismo argumento tenemos que K es descomponible y que $\{\frac{1}{2}\}$ no es punto extremo.

Sean $P' = P \setminus \{\frac{1}{2}\}$, para cada cadena C^m, $A^m = \{L^m(1), L^m(\frac{1}{2}), L^m(\frac{1}{3}), \ldots, L^m(0)\}$, el conjunto de anillos de C^m y $A = \bigcap_{m\in\mathbb{N}}(\bigcup A^m)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, $\{1, \frac{1}{2}, \ldots, 0\} \subset (\bigcup A^m)$, como la malla de C tiende a cero, se tiene que $\{1, \frac{1}{2}, \ldots, 0\} = A$; por construcción, $P' \subset PE$, con el mismo razonamiento que en la demostración del teorema 2.1 , se tiene que $PE \subset A$, pero $A = P$ y como $\{\frac{1}{2}\}$ no es punto extremo se tiene que $PE \subset P'$, con lo que se obtiene la igualdad; obsérvese que por construcción el cero es punto extremo, por lo tanto el conjunto de puntos extremos es cerrado y, por ende, completo; *i.e.* $PE = \overline{PE}$.

■

3.1.2. $PE \neq \overline{PE}$.

Construcción 6. En esta construcción, a diferencia de la anterior, se obtendrá un continuo tal que el conjunto de puntos extremos no es cerrado, esto es, hay un punto en la cerradura del conjunto de puntos extremos que no es punto extremo, de donde se tendrá que el conjunto de puntos extremos no será completo; la técnica para conseguir esto, será escogiendo dos puntos distintos p_r y p_s y construir cadenas tales que el punto $(0,0)$ siempre esté en $C^m(L^m(p_r), L^m(p_s))$, de tal forma que estos segmentos de la cadena vayan directamente entre ellos, esto con el fin de utilizar el lema 1.3 y concluir que el punto $(0,0)$ no es punto extremo.

Sea $P = \{(\frac{1}{n}, 0) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Nota:

En esta construcción se usará la notación de la construcción anterior.

1. $C^1 = \{L_1^1, L_2^1, \ldots L_{\lambda_1}^1\}$ es una cadena tal que:
   (a) C^1 es tensa;
   (b) el primer eslabón es $L^1(1)$, el último eslabón es $L^1(\frac{1}{3})$;
   (c) los anillos de C^1 son $L^1(1), L^1(\frac{1}{2}), L^1(\frac{1}{3}), L^1(\frac{1}{4}), L^1(0)$, éstos son ajenos;
   (d) $P\backslash\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\} \subset L^1(0)$;
   (e) existen números naturales $j, k, l \leq \lambda_1$ tales que $j < k < l$ y $L^1(\frac{1}{3}) = L_j^1, L^1(\frac{1}{4}) = L_l^1, L^1(0) = L_k^1$ o bien $L^1(\frac{1}{3}) = L_l^1, L^1(\frac{1}{4}) = L_j^1, L^1(0) = L_k^1$ *i.e.* $L^1(0) \in C^1(L_j^1, L_l^1)$; y
   (f) $C^1(L^1(1), L^1(\frac{1}{2}))$ es el primer elemento de la sucesión de segmentos de la cadena C^1 y para toda $p \in \{\frac{1}{n}\}_{n=3}^{\infty}$, $p \notin C^1(L^1(1), L^1(\frac{1}{2}))$.

Nota:

Lo que se pide en el inciso (e), es que el eslabón $L^1(0)$ sea un elemento de la subcadena que va de $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$, esto se pedirá en toda cadena, con el fin de que el punto $(0,0)$ no sea un punto extremo del continuo.

2. $\mathcal{C}^2 = \{L_1^2, L_2^2, \ldots, L_{\lambda_2}^2\}$ es una cadena tal que:
   (a) $\mathcal{C}^2$ es tensa;
   (b) el primer eslabón es $L^2(1)$, el último eslabón es $L^2(\frac{1}{3})$;
   (c) los anillos de $\mathcal{C}^2$ son $L^2(1), L^2(\frac{1}{2}), L^2(\frac{1}{3}), L^2(\frac{1}{4}), L^2(0)$, son ajenos;
   (d) $P\backslash\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\} \subset L^2(0)$;
   (e) existen números naturales $j, k, l \leq \lambda_2$ tales que $j < k < l$ y $L^2(\frac{1}{3}) = L_j^2, L^2(\frac{1}{4}) = L_l^2, L^2(0) = L_k^2$ o bien $L^2(\frac{1}{3}) = L_l^2, L^2(\frac{1}{4}) = L_j^2, L^2(0) = L_k^2$ *i.e.* $L^2(0) \in \mathcal{C}^2(L_j^2, L_l^2)$;
   (f) $\mathcal{C}^2(L^2(1), L^2(\frac{1}{2}))$ es el primer elemento de la sucesión de segmentos de la cadena $\mathcal{C}^2$ y para toda $p \in \{\frac{1}{n}\}_{n=3}^{\infty}$, $p \notin \mathcal{C}^2(L^2(1), L^2(\frac{1}{2}))$;
   (g) $\mathcal{C}^2$ es un refinamiento propio de $\mathcal{C}^1$; y
   (h) $\mathcal{C}^2$ va directamente por $\mathcal{C}^1$ relativamente al conjunto de anillos de $\mathcal{C}^1$.

Ya que los primeros tres pasos de esta construcción son muy similares, la figura 3.6 muestra la cadena $\mathcal{C}^3$. Obsérvese, en la figura, que el eslabón que contiene al cero es un elemento de la subcadena que va de $\{\frac{1}{3}\}$ a $\{\frac{1}{4}\}$, esto es lo que se pidió en el inciso (e), y en la siguiente nota se pedirá que suceda en toda cadena.

3. $\mathcal{C}^3 = \{L_1^3, L_2^3, \ldots, L_{\lambda_3}^3\}$ es una cadena tal que:
   (a) $\mathcal{C}^3$ es tensa;
   (b) el primer eslabón es $L^3(\frac{1}{3})$, el último eslabón es $L^3(1)$;
   (c) los anillos de $\mathcal{C}^3$ son $L^3(1), L^3(\frac{1}{2}), L^3(\frac{1}{3}), L^3(\frac{1}{4}), L^3(0)$, son ajenos;
   (d) $P\backslash\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\} \subset L^3(0)$;

(e) existen números naturales $j, k, l \leq \lambda_3$ tales que $j < k < l$ y $L^3(\frac{1}{3}) = L^3_j, L^3(\frac{1}{4}) = L^3_l, L^3(0) = L^3_k$ o bien $L^3(\frac{1}{3}) = L^3_l, L^3(\frac{1}{4}) = L^3_j, L^3(0) = L^3_k$ *i.e.* $L^3(0) \in C^3(L^3_j, L^3_l)$;

(f) $C^3(L^3(\frac{1}{2}), L^3(1))$ es el último elemento de la sucesión de segmentos de la cadena C^3 y para toda $p \in \{\frac{1}{n}\}_{n=3}^{\infty}$, $p \notin C^3(L^3(\frac{1}{2}), L^3(1))$;

(g) C^3 es un refinamineto propio de C^2; y

(h) C^3 va directamente por C^2 relativamente al conjunto de anillos de C^2.

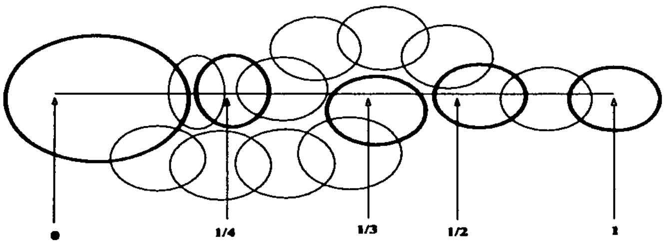


FIGURA 3.6. La cadena C^3

Nota:

Para toda cadena C^m se cumplirá:

- La cadena C^m es tensa.
- existen números naturales $j, k, l \leq \lambda_m$ tales que $j < k < l$ y $L^m(\frac{1}{3}) = L^m_j, L^m(\frac{1}{4}) = L^m_l, L^m(0) = L^m_k$ o bien $L^m(\frac{1}{3}) = L^m_l, L^m(\frac{1}{4}) = L^m_j, L^m(0) = L^m_k$ *i.e.* $L^m(0) \in C^m(L^m_j, L^m_l)$;
- Los eslabones $L^m(0), L^m(1), \ldots, L^m(\frac{1}{k})$ son ajenos. y
- La cadena C^m es un refinamiento propio de C^{m-1}.

4. $C^4 = \{L^4_1, L^4_2, \ldots, L^4_{\lambda_4}\}$ es una cadena tal que:
   (a) el primer eslabón es $L^4(\frac{1}{4})$, el último eslabón es $L^4(1)$;
   (b) los anillos de C^4 son $L^4(1), L^4(\frac{1}{2}), L^4(\frac{1}{3}), L^4(\frac{1}{4}), L^4(0)$;
   (c) $P \setminus \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\} \subset L^4(0)$;
   (d) $C^4(L^4(\frac{1}{2}), L^4(1))$ es el último elemento de la sucesión de segmentos de la cadena C^4 y para toda $p \in \{\frac{1}{n}\}_{n=3}^{\infty}$, $p \notin C^4(L^4(\frac{1}{2}), L^4(1))$; y
   $p \neq 1, 2$, $p \notin C^4(L^4(1), L^4(\frac{1}{2}))$; y
   (e) C^4 va directamente por C^3 relativamente al conjunto de anillos de C^3.

La figura 3.7 muestra el cuarto paso de ésta construcción.

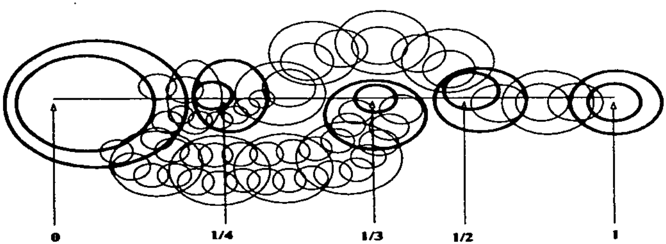


FIGURA 3.7. Las cadenas C^3 y C^4

5. C^5 y C^6 son cadenas tales que:
   (a) el primer eslabón, respectivamente, es $L^5(1)$, $L^6(1)$, el último eslabón es $L^5(\frac{1}{3})$, $L^6(\frac{1}{3})$;
   (b) los anillos de C^5 son $L^5(1), L^5(\frac{1}{2}), L^5(\frac{1}{3}), L^5(\frac{1}{4}), L^5(\frac{1}{5}), L^5(0)$, los anillos de C^6 son $L^6(1), L^6(\frac{1}{2}), L^6(\frac{1}{3}), L^6(\frac{1}{4}), L^6(\frac{1}{5}), L^6(0)$;
   (c) $P \setminus \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\} \subset L^5(0)$, $P \setminus \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\} \subset L^6(0)$;
   (d) $C^5(L^5(1), L^5(\frac{1}{2}))$ es el primer elemento de la sucesión de segmentos de la cadena C^5 y para toda $p \in \{\frac{1}{n}\}_{n=3}^{\infty}$, $p \notin$

$\mathcal{C}^5(L^5(1), L^5(\frac{1}{2}))$, $\mathcal{C}^6(L^6(1), L^6(\frac{1}{2}))$ es el primer elemento de la sucesión de segmentos de la cadena $\mathcal{C}^6$ y para toda $p \in \{\frac{1}{n}\}_{n=3}^{\infty}$, $p \notin \mathcal{C}^6(L^6(1), L^6(\frac{1}{2}))$; y

(e) $\mathcal{C}^5$ va directamente por $\mathcal{C}^4$ relativamente al conjunto de anillos de $\mathcal{C}^4$ y $\mathcal{C}^6$ va directamente por $\mathcal{C}^5$ relativamente al conjunto de anillos de $\mathcal{C}^5$.

6. $\mathcal{C}^7, \mathcal{C}^8, \mathcal{C}^9$ son cadenas tales que:
   (a) el primer eslabón es, respectivamente, $L^7(\frac{1}{3}), L^8(\frac{1}{4}), L^9(\frac{1}{5})$, y el último eslabón es $L^7(1), L^8(1), L^9(1)$;
   (b) los anillos de $\mathcal{C}^7$ son $L^7(1), L^7(\frac{1}{2}), L^7(\frac{1}{3}), L^7(\frac{1}{4}), L^7(\frac{1}{5}), L^7(0)$, los de $\mathcal{C}^8$ son $L^8(1), L^8(\frac{1}{2}), L^8(\frac{1}{3}), L^8(\frac{1}{4}), L^8(\frac{1}{5}), L^8(0)$, los de $\mathcal{C}^9$ son $L^9(1), L^9(\frac{1}{2}), L^9(\frac{1}{3}), L^9(\frac{1}{4}), L^9(\frac{1}{5}), L^9(0)$;
   (c) $P\backslash\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\} \subset L^7(0)$, $P\backslash\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\} \subset L^8(0)$, $P\backslash\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\} \subset L^9(0)$;
   (d) para $j = 7, 8, 9$
   $\mathcal{C}^j(L^j(\frac{1}{2}), L^j(1))$ es el último elemento de la sucesión de segmentos de la cadena $\mathcal{C}^j$ y para toda $p \in \{\frac{1}{n}\}_{n=3}^{\infty}$, $p \notin \mathcal{C}^j(L^j(\frac{1}{2}), L^j(1))$; y
   (e) $\mathcal{C}^j$ va directamente por $\mathcal{C}^{j-1}$ relativamente al conjunto de anillos de $\mathcal{C}^{j-1}$.

Observese que en las cadenas $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2, \mathcal{C}^3, \mathcal{C}^4$ el eslabón, respectivo, $L^i(0)$ con $i = 1, \ldots, 4$ es tal que $P\backslash\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\} \subset L^i(0)$, las cadenas $\mathcal{C}^1$ y $\mathcal{C}^2$ empezaron en el eslabón que contiene al punto $\{1\}$, la cadena $\mathcal{C}^3$ comenzó en el eslabón que contiene al punto $\{\frac{1}{3}\}$, la cadena $\mathcal{C}^4$ comenzó en el eslabón que contiene al punto $\{\frac{1}{4}\}$; nótese que, a diferencia de la construcción anterior, no hay cadena que haya comenzado en el eslabón $L^i(0)$, pues la cadena $\mathcal{C}^5$ empezó con el eslabón que contiene al $\{1\}$, esto, como ya se mencionó al inicio de esta construcción, con el fin de que el 0 no sea punto extremo.

En general, si la cadena $\mathcal{C}^m$ cumple con que $P\backslash\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}\} \subset L^m(0)$ y $\mathcal{C}^m$ comenzó en el eslabón que contiene al punto $\{\frac{1}{n}\}$,

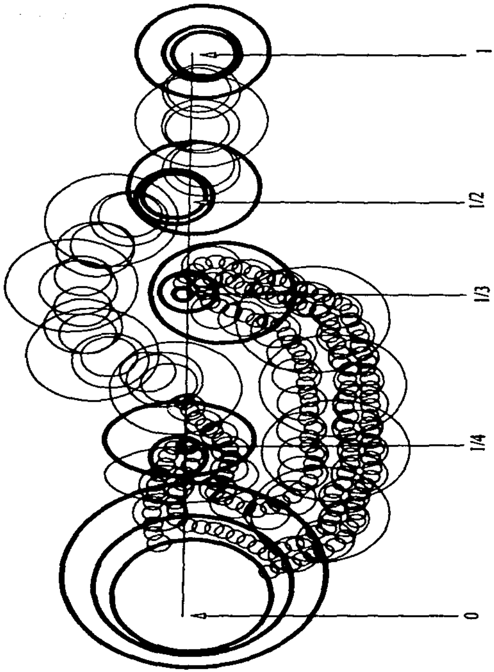


FIGURA 3.8. Continuo Descomponible con $|PE| = \aleph_0$ y $PE \neq \overline{PE}$

se tendrá, como se verá a continuación, que el eslabón $L^{m+1}(0)$ es tal que $P\setminus\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\} \subset L^{m+1}(0)$, y una vez que se haya concluido un ciclo en el cual las cadenas empiezan en los eslabones que contienen a cada uno de los puntos $1, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n+1}$ (menos al $\frac{1}{2}$), empieza otro ciclo pero ahora con un punto más (el punto $\frac{1}{n+2}$) y así sucesivamente.

7. las cadenas C^{m+1}, C^{m+2} son tales que:
   (a) el primer eslabón, respectivamente, es $L^{m+1}(1), L^{m+2}(1)$, el último eslabón es $L^{m+1}(\frac{1}{3}), L^{m+2}(\frac{1}{3})$;
   (b) los anillos de C^{m+1} son
   $L^{m+1}(1), L^{m+1}(\frac{1}{2}), \ldots, L^{m+1}(\frac{1}{n}), L^{m+1}(\frac{1}{n+1}), L^{m+1}(0)$,
   los de C^{m+2} son
   $L^{m+2}(1), L^{m+2}(\frac{1}{2}), \ldots, L^{m+2}(\frac{1}{n}), L^{m+2}(\frac{1}{n+1}), L^{m+2}(0)$;
   (c) $P\setminus\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\} \subset L^{m+1}(0)$,
   $P\setminus\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\} \subset L^{m+2}(0)$;
   (d) $C^{m+1}(L^{m+1}(1), L^{m+1}(\frac{1}{2}))$ es el primer elemento de la sucesión de segmentos de la cadena C^{m+1} y para toda $p \in \{\frac{1}{n}\}_{n=3}^{\infty}$,
   $p \notin C^{m+1}(L^{m+1}(1), L^{m+1}(\frac{1}{2}))$,
   $C^{m+2}(L^{m+2}(1), L^{m+2}(\frac{1}{2}))$ es primer elemento de la sucesión de segmentos de la cadena C^{m+2} y para toda $p \in \{\frac{1}{n}\}_{n=3}^{\infty}$,
   $p \notin C^{m+2}(L^{m+2}(1), L^{m+2}(\frac{1}{2}))$; y
   (e) C^{m+1} va directamente por C^{m} relativamente al conjunto de anillos de C^{m}, C^{m+2} va directamente por C^{m+1} relativamente al conjunto de anillos de C^{m+1}.
8. las cadenas $C^{m+3}, C^{m+4}, \ldots C^{m+n}, C^{m+n+1}$ son tales que:
   (a) el primer eslabón, respectivamente, es
   $L^{m+3}(\frac{1}{3}), L^{m+4}(\frac{1}{4}), \ldots, L^{m+n}(\frac{1}{n}), L^{m+n+1}(\frac{1}{n+1})$ y el último eslabón es
   $L^{m+3}(1), L^{m+4}(1), \ldots, L^{m+n}(1), L^{m+n+1}(1)$;
   (b) para $j = 3, 4, \ldots, n, n+1$, los anillos de C^{m+j} son
   $L^{m+j}(1), L^{m+j}(\frac{1}{2}), \ldots, L^{m+j}(\frac{1}{n}), L^{m+j}(\frac{1}{n+1}), L^{m+j}(0)$;

(c) $P\backslash\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\} \subset L^{m+j}(0)$;

(d) $C^{m+j}(L^{m+j}(\frac{1}{2}), L^{m+j}(1))$ es el último elemento de la sucesión de segmentos de la cadena C^{m+j} y para toda $p \in \{\frac{1}{n}\}_{n=3}^{\infty}$,
$p \notin C^{m+j}(L^{m+j}(\frac{1}{2}), L^{m+j}(1))$; y

(e) C^{m+j} va directamente por C^{m+j-1} relativamente al conjunto de anillos de C^{m+j-1}.

9. $\lim_{m\to\infty} malla(C^m) = 0$

Entonces el continuo $K = \bigcap_{m\in\mathbb{N}}(\overline{\bigcup C^m})$, es un continuo descomponible, con $\aleph_0$ puntos extremos, además $PE \neq \overline{PE}$, ver Teorema 3.2.

Teorema 3.2. *El continuo K de la construcción anterior, es un continuo descomponible, con $\aleph_0$ puntos extremos, además $PE \neq \overline{PE}$*

Demostración. Por construcción K es un continuo encadenable, y de la misma forma que en la construcción anterior el punto $\frac{1}{2}$ no es punto extremo y es descomponible ya que se construyó un arco con interior no vacío entre 1 y $\frac{1}{2}$. Ahora, por construcción, para toda $m \in \mathbb{N}$, $C^m(L^m(\frac{1}{3}), L^m(\frac{1}{4}))$ va directamente por $C^{m-1}(L^{m-1}(\frac{1}{3}), L^{m-1}(\frac{1}{4}))$ y $L^m(0) \in C^m(L^m(\frac{1}{3}), L^m(\frac{1}{4}))$ por lo que se tiene que
$0 \in C^m(L^m(\frac{1}{3}), L^m(\frac{1}{4}))$ y por el lema 1.3, no es punto extremo.

De manera análoga a la demostración anterior, se prueba que los puntos $\{\frac{1}{n}\}_{n\neq 2}$ son los puntos extremos de K, ahora como el 0 es un punto de acumulación del conjunto de puntos extremos, se tiene que éste no es cerrado y, por lo tanto, no es completo.

■

3.2. Continuos Indescomponibles

3.2.1. $PE = \overline{PE}$.

Construcción 7. Esta construcción, al igual que la construcción 3, se basa en los teoremas 1.13 y 1.16, los cuales permitirán que el continuo sea indescomponible.

Sea $P = \{(\frac{1}{n}, 0) \mid n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{(0,0)\}$.

1. Sea $C^1 = \{L^1_1, L^1_2, \ldots, L^1_{\lambda_1}\}$ una cadena tal que:
   (a) C^1 es tensa;
   (b) el primer eslabón es $L^1(1)$, el último eslabón es $L^1(\frac{1}{3})$; y
   (c) sus anillos son $L^1(1), L^1(\frac{1}{2}), L^1(\frac{1}{3}), L^1(0)$,
   éstos son ajenos y
   $P \backslash \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\} \subset L^1(0)$;

   La figura 3.9 muestra el primer paso de ésta construcción.

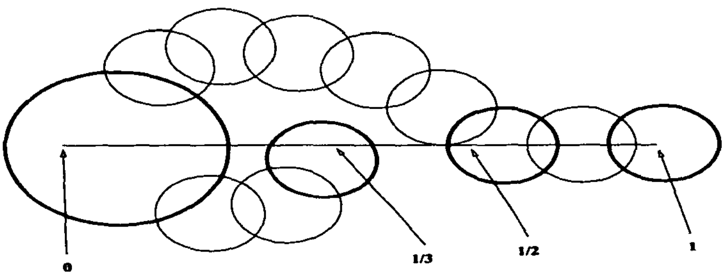


FIGURA 3.9. La cadena C^1

2. $C^2 = \{L^2_1, L^2_2, \ldots, L^2_{\lambda_2}\}$ es una cadena tal que:
   (a) C^2 es tensa;
   (b) el primer eslabón es $L^2(\frac{1}{2})$, el último eslabón es $L^2(1)$;

(c) sus anillos son $L^2(1), L^2(\frac{1}{2}), L^2(\frac{1}{3}), L^2(0)$,
son ajenos y
$P \setminus \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\} \subset L^2(0)$;

(d) $\mathcal{C}^2$ es un refinamiento propio de $\mathcal{C}^1$; y

(e) $\mathcal{C}^2$ va directamente por $\mathcal{C}^1$ relativamente a los anillos de $\mathcal{C}^1$.

La figura 3.10 muestra el segundo paso de ésta construcción.

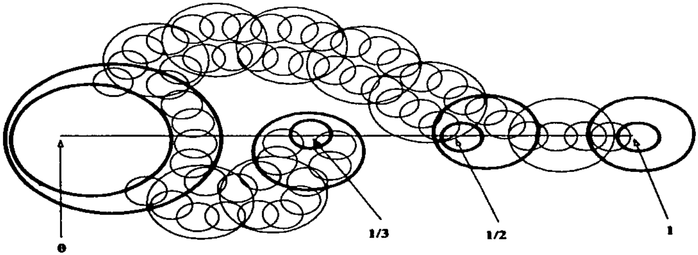


FIGURA 3.10. Las cadenas $\mathcal{C}^2$ y $\mathcal{C}^1$

3. $\mathcal{C}^3 = \{L_1^3, L_2^3, \ldots, L_{\lambda_3}^3\}$ es una cadena tal que:
   (a) $\mathcal{C}^3$ es tensa;
   (b) el primer eslabón es $L^3(\frac{1}{3})$, el último eslabón es $L^3(\frac{1}{2})$;
   (c) sus anillos son $L^3(1), L^3(\frac{1}{2}), L^3(\frac{1}{3}), L^3(0)$,
   son ajenos y
   $P \setminus \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\} \subset L^3(0)$;
   (d) $\mathcal{C}^3$ es un refinamiento propio de $\mathcal{C}^2$; y
   (e) $\mathcal{C}^3$ va directamente por $\mathcal{C}^2$ relativamente a los anillos de $\mathcal{C}^2$.
4. $\mathcal{C}^4 = \{L_1^4, L_2^4, \ldots, L_{\lambda_4}^4\}$ es una cadena tal que:
   (a) $\mathcal{C}^4$ es tensa;
   (b) el primer eslabón es $L^4(0)$, el último eslabón es $L^4(1)$;
   (c) sus anillos son $L^4(1), L^4(\frac{1}{2}), L^4(\frac{1}{3}), L^4(0)$,

son ajenos, y
$P \setminus \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\} \subset L^4(0)$;

(d) C^4 es un refinamiento propio de C^3; y

(e) C^4 va directamente por C^3 relativamente a los anillos de C^3.

Nota:

En toda cadena C^m se cumplirá:

- C^m es tensa.
- C^m es un refinamiento propio de C^{m-1} y
- Los anillos son ajenos entre sí.

5. $C^5 = \{L_1^5, L_2^5, \ldots, L_{\lambda_5}^5\}$ es una cadena tal que:
   (a) el primer eslabón es $L^5(1)$, el último eslabón es $L^5(\frac{1}{3})$;
   (b) sus anillos son $L^5(1), L^5(\frac{1}{2}), L^5(\frac{1}{3}), L^5(\frac{1}{4}), L^5(0)$ y
   $P \setminus \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\} \subset L^5(0)$; y
   (c) C^5 va directamente por C^4 relativamente a los anillos de C^4.

   Observación:

   Nótese que de la misma forma que las dos construcciones anteriores, se forma un ciclo de encadenamiento de los puntos de la forma $\frac{1}{n}$ y que cuando este acaba, se toma el siguiente punto de esta sucesión, por ejemplo hasta el paso (4) se tomaron los primeros tres elementos $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ y en el paso (5) se incuye al punto $\frac{1}{4}$.

6. C^6, C^7 son cadenas tales que:
   (a) el primer eslabón, respectivamente, es $L^6(\frac{1}{2}), L^7(\frac{1}{3})$,
   y el último eslabón, respectivamente es $L^6(1), L^7(\frac{1}{2})$;
   (b) sus anillos son, respectivamente,
   $L^6(1), L^6(\frac{1}{2}), L^6(\frac{1}{3}), L^6(\frac{1}{4}), L^6(0)$ y
   $L^7(1), L^7(\frac{1}{2}), L^7(\frac{1}{3}), L^7(\frac{1}{4}), L^7(0)$, además cumplen:
   $P \setminus \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\} \subset L^6(0)$, $P \setminus \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\} \subset L^7(0)$; y
   (c) C^6 va directamente por C^5 relativamente a los anillos de C^5,
   C^7 va directamente por C^6 relativamente a los anillos de C^6.
7. C^8 y C^9 son cadenas tales que:
   (a) el primer eslabón, respectivamente, es $L^8(\frac{1}{4})$, $L^9(0)$,

el último eslabón, respectivamente, es $L^8(1)$, $L^9(1)$;

(b) sus anillos, respectivamente, son
$L^8(1), L^8(\frac{1}{2}), L^8(\frac{1}{3}), L^8(\frac{1}{4}), L^8(0)$ y
$L^9(1), L^9(\frac{1}{2}), L^9(\frac{1}{3}), L^9(\frac{1}{4}), L^9(0)$, además cumplen:
$P\setminus\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\} \subset L^8(0)$, $P\setminus\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\} \subset L^9(0)$; y

(c) C^8 va directamente por C^7 relativamente a los anillos de C^7,
C^9 va directamente por C^8 relativamente a los anillos de C^8.

En general, si C^m empezó en $L^m(0)$, con $P\setminus\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}\} \subset L^m(0)$ se tiene que:

8. $C^{m+1}, C^{m+2}, C^{m+3}$ son cadenas tales que:
   (a) su primer eslabón, respectivamente, es
   $L^{m+1}(1), L^{m+2}(\frac{1}{2}), L^{m+3}(\frac{1}{3})$,
   su último eslabón, respectivamente, es
   $L^{m+1}(\frac{1}{3}), L^{m+2}(1), L^{m+3}(\frac{1}{2})$;
   (b) los anillos de C^{m+1} son
   $L^{m+1}(1), L^{m+1}(\frac{1}{2}), \dots, L^{m+1}(\frac{1}{k}), L^{m+1}(\frac{1}{k+1}), L^{m+1}(0)$,
   los de C^{m+2} son
   $L^{m+2}(1), L^{m+2}(\frac{1}{2}), \dots, L^{m+2}(\frac{1}{k}), L^{m+2}(\frac{1}{k+1}), L^{m+2}(0)$,
   los anillos de C^{m+3} son
   $L^{m+3}(1), L^{m+3}(\frac{1}{2}), \dots, L^{m+3}(\frac{1}{k}), L^{m+3}(\frac{1}{k+1}), L^{m+3}(0)$; y
   (c) cada cadena va directamente por la cadena anterior relativamente a los eslabones de dicha cadena.

Observación:

Nótese que las cadenas de la forma C^{m+1} van de 1 a $\frac{1}{3}$, las cadenas de la forma C^{m+2} van de $\frac{1}{2}$ a 1 y las cadenas de la forma C^{m+3} van de $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{2}$, esto es muy importante ya que por esto el continuo será indescomponible.

9. $C^{m+4}, C^{m+5}, \dots, C^{m+k}, C^{m+k+1}, C^{m+k+2}$ son cadenas tales que:
   (a) su primer eslabón, respectivamente, es
   $L^{m+4}(\frac{1}{4}), L^{m+5}(\frac{1}{5}), \dots, L^{m+k+1}(\frac{1}{k+1}),\ L^{m+k+2}(0)$;
   su último eslabón, respectivamente, es
   $L^{m+4}(1), L^{m+5}(1), \dots, L^{m+k+1}(1),\ L^{m+k+2}(1)$;

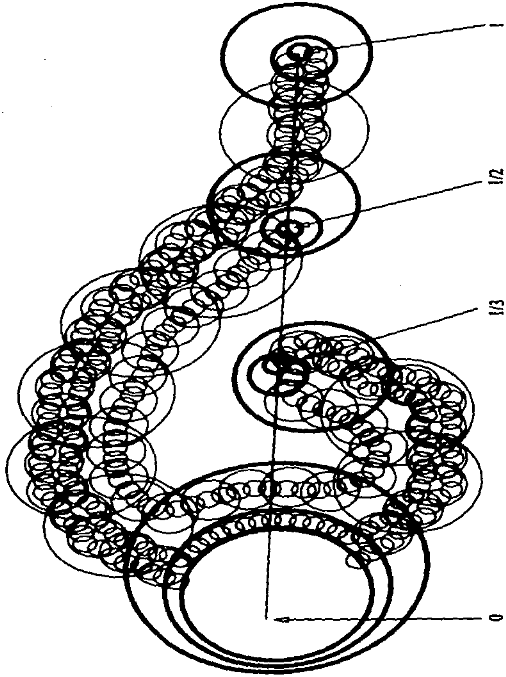


FIGURA 3.11. Continuo Indescomponible con $|PE| = \aleph_0$ y $PE = \overline{PE}$

(b) para toda j, $m+4 \leq j \leq m+k+2$

(i) $P \backslash \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}\} \subset L^j(0)$;

(ii) los anillos de C^j serán $L^j(1), L^j(\frac{1}{2}), \ldots, L^j(\frac{1}{k}), L^j(\frac{1}{k+1})$, $L^j(0)$; y

(iii) C^j va directamente por C^{j-1} relativamente a los anillos de C^{j-1}.

10. $\lim_{m\to\infty} malla(C^m) = 0$

Entonces el continuo $K = \bigcap_{m\in\mathbb{N}}(\overline{\bigcup C^m})$, es un continuo encadenable, indescomponible, con una cantidad infinita numerable de puntos extremos, más aún, el conjunto de puntos extremos es completo, ver Teorema 3.3

Teorema 3.3. *El continuo K de la construccón anterior, es un continuo encadenable, indescomponible, con un número infinito numerable de puntos extremos, más aún, el conjunto de puntos extremos es completo.*

Demostración. Por construcción K es encadenable, de la misma forma que en la demostración del teorema 3.1 se ve que el conjunto de puntos extremos es el conjunto P. Como P es cerrado, se tiene que P es completo. Ahora K, es encadenable de 1 a $\frac{1}{2}$, de 1 a $\frac{1}{3}$, y, también, de $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$; lo cual demuestra, por los teoremas 1.13 y 1.16, que K es indescomponible.

■

3.2.2. $PE \neq \overline{PE}$.

Construcción 8. En esta construcción la forma de obtener un punto en la cerradura de PE que no es punto extremo, se hará de la misma forma que en la construcción 6.

Sea $P = \{(\frac{1}{n}, 0) | n \in \mathbb{N}\}$.

1. Sea $C^1 = \{L_1^1, L_1^2, \ldots, L_{\lambda_1}^1\}$ una cadena tal que:

(a) C^1 es tensa;

(b) el primer eslabón es $L^1(1)$, el último eslabón es $L^1(\frac{1}{3})$;

(c) sus anillos son $L^1(1), L^1(\frac{1}{2}), L^1(\frac{1}{3}), L^1(\frac{1}{4}), L^1(\frac{1}{5}), L^1(0)$, la cerradura de éstos son ajenas entre sí y $P\setminus\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\} \subset L^1(0)$;

(d) existen números naturales $j, k, l < \lambda_1$ tales que $j < k < l$ y $L^1(\frac{1}{4}) = L^1_j$, $L^1(\frac{1}{5}) = L^1_l$, $L^1(0) = L^1_k$ o bien $L^1(\frac{1}{5}) = L^1_j$, $L^1(\frac{1}{4}) = L^1_l$; *i.e.* $L^1(0) \in C^1(L^1_j, L^1_l)$.

La figura 3.12 muestra el primer paso de esta construcción.

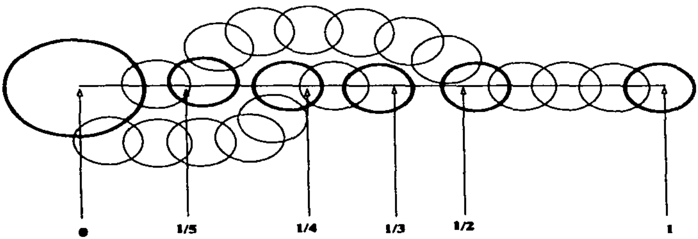


FIGURA 3.12. La cadena C^1

2. Sea $C^2 = \{L^2_1, L^2_2, \ldots, L^2_{\lambda_2}\}$ una cadena tal que:
   (a) C^2 es tensa;
   (b) el primer eslabón es $L^2(\frac{1}{2})$ y el último eslabón es $L^2(1)$;
   (c) sus anillos son $L^2(1), L^2(\frac{1}{2}), L^2(\frac{1}{3}), L^2(\frac{1}{4}), L^2(\frac{1}{5}), L^2(0)$, sus cerraduras son ajenas entre sí y $P\setminus\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\} \subset L^2(0)$;
   (d) existen números naturales $j, k, l < \lambda_1$ tales que $j < k < l$ y $L^2(\frac{1}{4}) = L^2_j$, $L^2(\frac{1}{5}) = L^2_l$, $L^2(0) = L^2_k$ o bien $L^2(\frac{1}{5}) = L^2_j$, $L^2(\frac{1}{4}) = L^2_l$; *i.e.* $L^2(0) \in C^2(L^2_j, L^2_l)$;
   (e) para todo número natural $\rho < \lambda_1$ existe ξ tal que $\overline{L^2_\rho} \subset L^1_\xi$; y
   (f) C^2 va directamente por C^1 relativamente a los anillos de C^1.

La figura 3.13 muestra el segundo paso de la construcción.

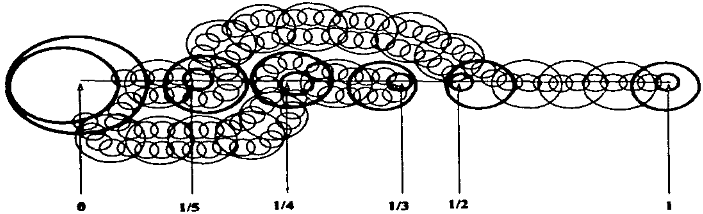


FIGURA 3.13. La Cadena $\mathcal{C}^2$

3. $\mathcal{C}^3 = \{L_1^3, L_2^3, \ldots, L_{\lambda_3}^3\}$ es una cadena tal que:
   (a) $\mathcal{C}^3$ es tensa;
   (b) el primer eslabón es $L^3(\frac{1}{3})$, el último eslabón es $L^3(\frac{1}{2})$;
   (c) sus anillos son $L^3(1), L^3(\frac{1}{2}), L^3(\frac{1}{3}), L^3(\frac{1}{4}), L^3(\frac{1}{5}), L^3(0)$, sus cerraduras son ajenas entre sí y $P\setminus\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\} \subset L^3(0)$;
   (d) existen números naturales $j, k, l < \lambda_1$ tales que $j < k < l$ y $L^3(\frac{1}{4}) = L_j^3$, $L^3(\frac{1}{5}) = L_l^3$, $L^3(0) = L_k^3$ o bien $L^3(\frac{1}{5}) = L_j^3$, $L^3(\frac{1}{4}) = L_l^3$; *i.e.* $L^3(0) \in \mathcal{C}^3(L_j^3, L_l^3)$;
   (e) para todo número natural $\rho < \lambda_1$ existe ξ tal que $\overline{L_\rho^3} \subset L_\xi^2$; y
   (f) $\mathcal{C}^3$ va directamente por $\mathcal{C}^2$ relativamente a los anillos de $\mathcal{C}^2$.
4. $\mathcal{C}^4 = \{L_1^4, L_2^4, \ldots, L_{\lambda_4}^4\}$ es una cadena tal que:
   (a) $\mathcal{C}^4$ es tensa;
   (b) el primer eslabón es $L^4(\frac{1}{4})$, el último eslabón es $L^4(\frac{1}{3})$;
   (c) sus anillos son $L^4(1), L^4(\frac{1}{2}), L^4(\frac{1}{3}), L^4(\frac{1}{4}), L^4(\frac{1}{5}), L^4(0)$, sus cerraduras son ajenas entre sí y $P\setminus\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\} \subset L^4(0)$;
   (d) existen números naturales $j, k, l < \lambda_1$ tales que $j < k < l$ y $L^4(\frac{1}{4}) = L_j^4$, $L^4(\frac{1}{5}) = L_l^4$, $L^4(0) = L_k^4$ o bien $L^4(\frac{1}{5}) = L_j^4$, $L^4(\frac{1}{4}) = L_l^4$; *i.e.* $L^4(0) \in \mathcal{C}^4(L_j^4, L_l^4)$;

(e) para todo número natural $\rho < \lambda_1$ existe ξ tal que $\overline{L^4_\rho} \subset L^3_\xi$; y

(f) C^4 va directamente por C^3 relativamente a los anillos de C^3.

5. $C^5 = \{L^5_1, L^5_2, \ldots, L^5_{\lambda_5}\}$ es una cadena tal que:

(a) C^5 es tensa;

(b) el primer eslabón es $L^5(\frac{1}{5})$, el último eslabón es $L^5(\frac{1}{3})$;

(c) sus anillos son $L^5(1), L^5(\frac{1}{2}), L^5(\frac{1}{3}), L^5(\frac{1}{4}), L^5(\frac{1}{5}), L^5(0)$, sus cerraduras son ajenas entre sí y $P\setminus\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\} \subset L^5(0)$;

(d) existen números naturales $j, k, l < \lambda_1$ tales que $j < k < l$ y $L^5(\frac{1}{4}) = L^5_j$, $L^5(\frac{1}{5}) = L^5_l$, $L^5(0) = L^5_k$ o bien $L^5(\frac{1}{5}) = L^5_j$, $L^5(\frac{1}{4}) = L^5_l$; *i.e.* $L^5(0) \in C^5(L^5_j, L^5_l)$;

(e) para todo número natural $\rho < \lambda_1$ existe ξ tal que $\overline{L^5_\rho} \subset L^4_\xi$; y

(f) C^5 va directamente por C^4 relativamente a los anillos de C^4.

Nota:

Para simplificar la notación, se sobreentendrá que toda cadena C^m cumple con

- C^m es tensa.
- C^m es un refinamiento propio de C^{m-1}.
- existen números naturales $j, k, l < \lambda_1$ tales que $j < k < l$ y $L^m(\frac{1}{4}) = L^m_j$, $L^m(\frac{1}{5}) = L^m_l$, $L^m(0) = L^m_k$ o bien $L^m(\frac{1}{5}) = L^m_j$, $L^m(\frac{1}{4}) = L^m_l$; *i.e.* $L^m(0) \in C^m(L^m_j, L^m_l)$;

6. C^6, C^7, C^8 son cadenas tales que:

(a) Su primer eslabón, respectivamente, es
$L^6(1), L^7(\frac{1}{2}), L^8(\frac{1}{3})$,
su último eslabón, respectivamente, es
$L^6(\frac{1}{3}), L^7(1), L^8(\frac{1}{2})$;

(b) los anillos de C^6 son $L^6(1), L^6(\frac{1}{2}), \ldots, L^6(\frac{1}{6}), L^6(0)$,
los anillos de C^7 son $L^7(1), L^7(\frac{1}{2}), \ldots, L^7(\frac{1}{6}), L^7(0)$,
los anillos de C^8 son $L^8(1), L^8(\frac{1}{2}), \ldots, L^8(\frac{1}{6}), L^8(0)$,

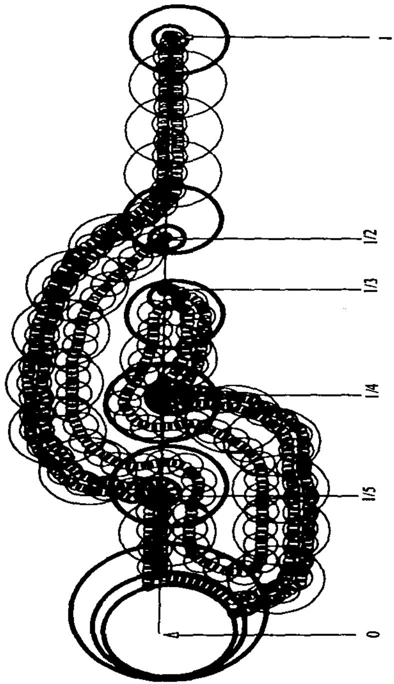


FIGURA 3.14. Continuo Indescomponible con $|PE| = \aleph_0$ y $PE \neq \overline{PE}$

sus cerraduras son ajenas, y
$P\backslash\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\} \subset L^8(0) \subset L^7(0) \subset L^6(0)$ y

(c) Cada una de las cadenas va directamente por la cadena anterior relativamente a los anillos de la cadena anterior.

7. C^9, C^{10}, C^{11} son cadenas tales que:
   (a) Su primer eslabón, respectivamente, es $L^9(\frac{1}{4}), L^{10}(\frac{1}{5})$, $L^{11}(\frac{1}{6})$, su último eslabón, respectivamente, es $L^9(\frac{1}{3})$, $L^{10}(\frac{1}{3}), L^{11}(\frac{1}{3})$;
   (b) los anillos de C^9 son $L^9(1), L^9(\frac{1}{2}), \ldots, L^9(\frac{1}{6}), L^9(0)$, los anillos de C^{10} son $L^{10}(1), L^{10}(\frac{1}{2}), \ldots, L^{10}(\frac{1}{6}), L^{10}(0)$, los anillos de C^{11} son $L^{11}(1), L^{11}(\frac{1}{2}), \ldots, L^{11}(\frac{1}{6}), L^{11}(0)$, sus cerraduras son ajenas, y $P\backslash\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\} \subset L^{11}(0) \subset L^{10}(0) \subset L^9(0)$ y
   (c) Cada una de las cadenas va directamente por la cadena anterior relativamente a los anillos de dicha cadena.

En general si C^m empieza en el eslabón $L^m(\frac{1}{k})$ con $P\backslash\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{k}\} \subset L^m(0)$ se tiene que:

8. $C^{m+1}, C^{m+2}, C^{m+3}$ son cadenas tales que:
   (a) Su primer eslabón, respectivamente, es $L^{m+1}(1), L^{m+2}(\frac{1}{2})$, $L^{m+3}(\frac{1}{3})$, su último eslabón, respectivamente, es $L^{m+1}(\frac{1}{3})$, $L^{m+2}(1), L^{m+3}(\frac{1}{2})$;
   (b) los anillos de C^{m+1} son $L^{m+1}(1), L^{m+1}(\frac{1}{2}), \ldots$, $L^{m+1}(\frac{1}{k}), L^{m+1}(\frac{1}{k+1}), L^{m+1}(0)$, los anillos de C^{m+2} son $L^{m+2}(1), L^{m+2}(\frac{1}{2}), \ldots, L^{m+2}(\frac{1}{k}), L^{m+2}(\frac{1}{k+1}), L^{m+2}(0)$, los anillos de C^{m+3} son $L^1m+3(1), L^{m+3}(\frac{1}{2}), \ldots, L^{m+3}(\frac{1}{k})$, $L^{m+3}(\frac{1}{k+1}), L^{m+3}(0)$, sus cerraduras son ajenas, y $P\backslash\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}\} \subset L^{m+3}(0) \subset L^{m+2}(0) \subset L^{m+1}(0)$ y
   (c) Cada una de las cadenas va directamente por la cadena anterior relativamente a los anillos de tal cadena.

9. $C^{m+4}, C^{m+5}, \ldots, C^{m+k}, C^{m+k+1}$ son cadenas tales que:

(a) Su primer eslabón, respectivamente, es $L^{m+4}(\frac{1}{4})$, $L^{m+5}(\frac{1}{5})$, $\ldots$, $L^{m+k}(\frac{1}{k})$, $L^{m+k+1}(\frac{1}{k+1})$, su último eslabón, respectivamente, es $L^{m+4}(\frac{1}{3})$, $L^{m+5}(\frac{1}{3})$, $\ldots$, $L^{m+k}(\frac{1}{3})$, $L^{m+k+1}(\frac{1}{3})$;

(b) los anillos de C^{m+4} son $L^{m+4}(1), L^{m+4}(\frac{1}{2}), \ldots,$ $L^{m+4}(\frac{1}{k}), L^{m+4}(\frac{1}{k+1}), L^{m+4}(0)$, los anillos de C^{m+5} son $L^{m+5}(1), L^{m+5}(\frac{1}{2}), \ldots, L^{m+5}(\frac{1}{k}), L^{m+5}(\frac{1}{k+1}), L^{m+5}(0), \cdots$ los anillos de C^{m+k} son $L^{m+k}(1), L^{m+k}(\frac{1}{2}), \ldots,$ $L^{m+k}(\frac{1}{k}), L^{m+k}(\frac{1}{k+1}), L^{m+k}(0)$, los anillos de C^{m+k+1} son $L^{m+k+1}(1), L^{m+k+1}(\frac{1}{2}), \ldots, L^{m+k+1}(\frac{1}{k}), L^{m+k+1}(\frac{1}{k+1}),$ $L^{m+k+1}(0)$, sus cerraduras son ajenas, y $P \setminus \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots,$ $\frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}\} \subset L^{m+k+1}(0) \subset L^{m+k} \cdots \subset L^{m+5}(0) \subset L^{m+4}(0)$ y

(c) Cada una de las cadenas va directamente por la cadena anterior relativamente a los anillos de la cadena anterior.

10. $\text{lím}_{m\to\infty} malla(C^m) = 0$

Entonces el continuo $K = \bigcap_{m\in\mathbb{N}}(\overline{\bigcup C^m})$, es un continuo encadenable, indescomponible, con una cantidad infinita numerable de puntos extremos, además $PE \neq \overline{PE}$, ver Teorema 3.4

Teorema 3.4. *El continuo K de la construccón anterior, es un continuo encadenable, indescomponible, con una cantidad infinita numerable de puntos extremos, además $PE \neq \overline{PE}$.*

Demostración. Por construcción el continuo K es encadenable, como para toda $m \in \mathbb{N}$ $L^m(0) \in C^m(L^m(\frac{1}{4}), L^m(\frac{1}{5}))$ y $C^m(L^m(\frac{1}{4}), L^m(\frac{1}{5}))$ va directamente por $C^{m-1}(L^{m-1}(\frac{1}{4}), L^{m-1}(\frac{1}{5}))$ se tiene de manera análoga a la demostración del teorema 3.2, que el 0 no es punto extremo y que el conjunto de puntos extremos es P, y como el 0 es punto de acumulacion de P se tiene que el conjunto de puntos extremos no es cerrado y, por lo tanto no es completo; además, como K es encadenable de 1 a $\frac{1}{2}$, de 1 a $\frac{1}{3}$ y de $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$, se tiene, con el mismo argumento de la construcción anterior, que K es indescomponible.

■

BIBLIOGRAFÍA

[1] BING, R. H. *Snake-like continua., Duke Math. J. 18 (1951) 653-663.*

[2] CHRISTENSON, CHARLES O. AND VOXMAN, WILLIAM L. *Aspects of topology., Marcel Dekker, Inc. 1977.*

[3] DOUCET, JULIEN *Cardinality, completeness, and decomposability of sets of endpoints of chainable continua., Topology and its Applications 60 (1994) 41-59.*

[4] DUGUNDJI, JAMES *Topology., Allyn and Bacon, Inc., 1966.*

[5] HOCKING, JOHN AND YOUNG, GAIL *Topology., Dover Publications, New York, 1988.*

[6] KOLMOGOROV, A. AND FOMIN, S. *Introductory real analysis., Dover Publications, New York, 1970.*

[7] NADLER, JR. SAM B. *Continuum theory: an introduction., Marcel Dekker, Inc. 1992.*

[8] R. H. SORGENFREY *Concerning triodic continua., Amer. J. Math. 66 (1944) 439-460.*