16
2ej.

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

ECUACIONES LINEALES

MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

TESIS

que para obtener el título de

MATEMÁTICO

presenta:

MARÍA ANTONIA ROSALINDA GÓMEZ GARCÍA

Director de tesis:

MAT. MARÍA DE JESÚS FIGUEROA TORRES

1997

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Ecuaciones lineales mediante la resolución de problemas

realizado por GOMEZ GARCIA MA. ANTONIA ROSALINDA

con número de cuenta 7644091-1 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario MAT. MARIA DE JESUS FIGUEROA TORRES María de Jesús Figueroa T.

Propietario MAT. JULIETA DEL CARMEN VERDUGO DIAZ

Propietario M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

Suplente M. en C. RAUL MELENDEZ VENANCIO

Suplente M. en C. JORGE RUIZ MORENO Jorge Ruiz M.

Consejo Departamental de Matemáticas

DR. MANUEL FALCONI MAGAÑA

DEDICATORIA

A DIOS . . .

POR HABERME CONCEDIDO UNOS PADRES TAN MARAVILLOSOS, ESPECIALES, Y UNOS HERMANOS SIN IGUAL.

POR HABERME AYUDADO A REALIZAR ESTE TRABAJO.

IN MEMORIA

PARA

JOSEFINA GARCÍA CASTRO MARCELINO GÓMEZ GARCÍA

MIS PADRES

POR SU AMOR INFINITO Y APOYO INCONDICIONAL QUE SIEMPRE RECIBÍ DE ELLOS. CON MI AGRADECIMIENTO ETERNO.

PARA

MARGARITA CASTRO GARCÍA FLORENTINO GARCÍA RAMÍREZ
JULIA GARCÍA MARTÍN GÓMEZ GARCÍA

MIS ABUELOS

POR HABER SIDO TAN NOBLES, INTELIGENTES, AMOROSOS Y DE GRAN VISIÓN.

PARA
ALBERTA FERNÁNDEZ BALLESTEROS, HERMINIA VENEGAS Y MARGARITO

POR SU AMOR

A MIS HERMANOS

BADOBLIO GÓMEZ GARCÍA por su inteligencia y ejemplo para enseñarme el camino a seguir.

HERON GÓMEZ GARCÍA por su sabiduría y confianza que me tuvo para lograr mi objetivo.

MARTÍN GÓMEZ GARCÍA por su ejemplo para lograr la materialización de un sueño.

ADOLFO GÓMEZ GARCÍA por su comprensión y por su ejemplo de lucha constante

ANTONINO JACOBO GÓMEZ GARCÍA por su, apoyo y ayuda invaluable que me regalo en la ausencia de mi madre y por haberme mostrado el maravilloso mundo de las ciencias.

MANUELA MARICELA GÓMEZ GARCÍA gracias por haberme conseguido el boleto para viajar por el mundo de las Matemáticas y por tu ejemplo que me motivan para seguir adelante.

ARACELI GÓMEZ GARCÍA por su amor y por su enseñanza de enfrentar los momentos difíciles y por la alegría de vivir

Gracias a todos por todo lo que me han brindado, sin los cuales no hubiera alcanzado mi meta.

PARA MIS HIJOS

GIOVANNA CADENA GÓMEZ Y LUIS FABIAN CADENA GÓMEZ.
Por su existencia , por su amor y por su comprensión en la tarea que me propuse.

LUIS CADENA FERNÁNDEZ, gracias por todo.

MARÍA DE JESÚS BALLESTEROS, gracias por ser una luz maravillosa.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a la directora de mi tesis MAT. MARÍA DE JESÚS FIGUEROA TORRES el apoyo que me brindo y la paciencia durante el desarrollo de esta tesis. A la MAT. JULIETA VERDUGO DÍAZ por su gran ayuda y sus comentarios tan valiosos y acertados.

Un especial agradecimiento a mis sinodales

M EN C ALEJANDRO BRAVO MOJICA

M en C RAÚL MELENDEZ VENANCIO

M en C. JORGE RUIZ MORENO.

Un agradecimiento muy especial al Fis. Arturo R. P por su gran apoyo sugerencias e invaluable ayuda.

Agradezco al Fis. Manuel O. B. por sus valiosas ideas y apoyo que me brindo para la realización de este trabajo.

Agradezco a todos los **Profesores** que durante mi formación académica compartieron conmigo sus conocimientos y amigos que conocí durante mis estudios, a todos ellos mil gracias.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Es indudable que, en nuestro Universo, todo evoluciona, nada permanece estático en el tiempo; hecho que se liga, por definición, con la vida misma. Al paso de los años todo cambia: el medio ambiente, la estructura de las sociedades, las relaciones entre diferentes culturas, las costumbres y, detrás de todo lo anterior el hombre mismo. En el desarrollo intelectual de cualquier ser humano, juega un papel primordial su educación y, detrás de esta, de importancia fundamental es el aprendizaje de dos temas básicos (Barajas 1994): lengua nacional y matemáticas.

En el ámbito de la educación matemática, recientemente se han desarrollado diversos trabajos en torno al método de trabajo conocido como **Resolución de Problemas**. En el Bachillerato Universitario, ha sido retomado y ha generado trabajos e investigaciones abocados a la enseñanza del álgebra.

Aunque los trabajos e investigaciones son recientes, se ha podido observar cierta eficiencia en el proceso de enseñanza del álgebra en los centros educativos en que se ha implementado.

Por lo que respecta al Plantel Sur del Bachillerato del CCH de la UNAM, la situación ha sido alentadora, aún cuando ha persistido el reducido número de problemas a utilizar con los alumnos, debido a la dificultad de crear y diseñar problemas y al escaso tiempo que la planta docente dispone para ello.

Es en este sentido que este trabajo está dirigido, es decir, se intenta seleccionar y diseñar material para una propuesta educativa consistente en la "resolución de problemas" que sirva de apoyo a los profesores para enfrentar la situación planteada.

La inquietud por desarrollar este trabajo, surge de la experiencia profesional que he tenido participando en la docencia en multiples cursos, tanto a nivel bachillerato como en licenciatura. Se ha observado que el primer contacto de los alumnos con las matemáticas formales, se da a través del álgebra, contacto que persistirá en el desarrollo de casi cualquier rama (v.g. geometría analítica, cálculo, etc.), de lo cual se desprende que la manera en que se desarrolle este primer encuentro, repercutirá en el progreso de la relación matemáticas-alumno. Así mismo me he dado cuenta de la carencia de material acorde con un método de trabajo "Resolución de Problemas" que permita a los alumnos obtener mejores resultados en sus cursos.

Desde luego, no se pretende proponer una metodología de trabajo, únicamente se propone una alternativa; tampoco se pretende sustituir (o en todo caso completar) los textos de uso general para este tipo de cursos sino de complementar la bibliografía existente. Se sabe que cada profesor, y también que cada grupo escolar tiene una forma propia de trabajo; sin embargo, no basta con tener estos ejercicios sino querer trabajar en ellos para (ejercitarse).

En este trabajo, se presenta un marco conceptual para desarrollar el tema de ecuaciones lineales de primer grado, que corresponde a la segunda unidad dentro del curso de matemáticas I. Siendo la primera unidad Variación Proporcional y Funciones Lineales. También se presenta el material necesario (ejercicios) para estudiarlo.

La idea central es que nuestros alumnos y profesores cuenten con un "texto" que responda al nuevo plan de estudios y que pueda servir de guía u orientación.

No se trata de que se desarrollen todos los problemas, sino que se elijan de acuerdo a las necesidades, el tiempo y características de cada grupo. Se sugiere que sean tomados en cuenta los problemas complementarios marcados con asterisco, trabajándolos conjuntamente (profesor-alumno).

En efecto, en la actualidad se ha modificado e implementado el plan de estudios actualizado del Colegio de Ciencias y Humanidades, de la UNAM en el que se inicia con algunos elementos en cuanto a enfoque y metodología de la enseñanza y a las características de los estudiantes.

Se consideran los antecedentes históricos del Álgebra[17]dado que éstos nos dan elementos para la actividad didáctica y nos permiten detectar dificultades en el aprendizaje del Álgebra a nivel bachillerato.

Se presentan los Estándares Curriculares en los cuales se dan los lineamientos de la comunidad de matemática educativa en Estados Unidos a nivel de primaria y secundaria, en cuanto a enfoque, contenidos y metodología de la enseñanza ante la actual crisis en el aprendizaje y enseñanza de la matemática, los cuales en cierto grado coinciden con los propuestos en el nuevo plan de estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) y han sido objeto del interés de muchos profesores en cuanto a su aplicación en el salón de clase.

Se tratan algunos trabajos de investigación en torno a algunos problemas en la enseñanza del Álgebra con el propósito de tratar de entender las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes a nivel secundaria y bachillerato, buscar las estrategias didacticas que permitan resolver tales dificultades.

El método de trabajo que esencialmente se propone en el nuevo plan de estudios del CCH es el de "Resolución de Problemas", por lo que al final del capítulo I consideramos algunos trabajos a nivel secundaria, preparatoria y licenciatura de sus principales exponentes como son Polya y Schoenfeld.

Se proponen diferentes problemas para cuya solución se utilizan los Métodos de Tanteo, Diagrama, Tabulación, Gráfico y Algebraico, que son los que se sugieren en el nuevo programa de matemáticas para el CCH, guiados por los cuatro pasos fundamentales propuestos por Polya [12] Estos son:

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

¿Qué datos tengo?

¿Cuál es la condición?

¿Qué deseo obtener?

2. Diseñar un plan

¿Cuál es la incógnita?

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

¿Cuáles datos necesito para obtener el valor de la incógnita?

¿He resuelto algún problema similar?

¿Qué otros métodos puedo utilizar para resolver el problema?

3. Llevar a cabo dicho plan

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

¿Encontré otros métodos para resolver el problema?

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

¿Establecí la solución con claridad?

La idea de cada uno de los métodos es la siguiente:

a) En los problemas de Método de Tanteo se pretende que los alumnos resuelvan los problemas a través de proponer, más o menos un valor solución, factible para después realizar las operaciones pertinentes y verificar que cumple con las condiciones del problema, lo cual significa que se ha encontrado la solución correcta.

b) En los problemas con Método de Tabulación los datos se ordenan en una tabla y se encuentran los múltiplos de los datos que tenemos con la información dada, mediante los cuales se obtiene el valor solución.

c) En los problemas mediante el Método de Diagrama se espera que los alumnos se apoyen en el uso de dibujos o diagramas, para poder encontrar la solución del problema.

d) En los problemas de Método Gráfico se pretende que ellos puedan elaborar una gráfica a partir de los datos del problema, en donde pueden localizar el valor solución del problema.

e) En los problemas resueltos mediante el Método Algebraico se busca que los alumnos a partir del enunciado puedan plantear una ecuación utilizando el Lenguaje Algebraico. Como la ecuación representa la situación descrita en el problema, entonces al resolver dicha ecuación se estará resolviendo el problema dado.

En el capítulo 1 se presenta el marco teórico que da fundamento a esta tesis.

En el capítulo 2 se da una propuesta educativa para la unidad 2 del Programa de Matemáticas I "Ecuaciones Lineales", basándose en los trabajos de Polya, y de Schoenfeld.

Como se observa en estos puntos, el modelo educativo del CCH contempla la esencia de ellos. Es decir, se espera que el motor de la actividad Enseñanza-Aprendizaje sea el alumno. De él también se espera que genere expectativas para ampliar el camino que el profesor deberá tener trazado. No para seguirlo rutinariamente sino para evitar que el alumno disperse su atención, situación que podría provocar su inexperiencia en el área.

Así, entonces la tarea urgente que tiene la comunidad (profesores principalmente) del CCH ahora es la de crear y trazar ese camino. En esto espero contribuir con este trabajo.

CAPITULO I. BASES TEÓRICAS

En este capítulo se menciona el plan de estudios actualizado del CCH, en donde cambia el papel del profesor al de auxiliador del proceso de aprendizaje. También se ve la historia del álgebra como un proceso evolutivo, el cual es el resultado de como el hombre va enfrentando los problemas en sus vida cotidiana hasta nuestros días.

Se toman en cuenta los estándares curriculares de la NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) porque debido a la actual crisis en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, ellos proponen que cada alumno debe tener varias actitudes matemáticas entre ellas ser capaz de resolver problemas matemáticos, poniendo mayor énfasis en problemas del mundo real que en los de los textos comunes. Se hace un comentario del papel que desempeñan las letras en el álgebra, por decir algunos toman el papel de letras como objetos, como número generalizado y como variables.

También se mencionan varios puntos de vista de Investigadores de la enseñanza como Schoenfeld, Polya, etc., por citar dos. Ellos concuerdan en que un problema debe ser familiar o sea pasar de lo conocido a lo mas laborioso y utilizar la heurística o sea que distinga la información del problema con preguntas como ¿Qué tengo?, ¿Qué es lo que deseo?, etc.

Halmos (1980) sugirió que el resolver problemas es el corazón de la matemática.

Kleiner (1986, p31) dijo que "la historia de la matemática muestra que los avances matemáticos casi siempre se originan en un esfuerzo por resolver un problema específico".

Hilbert (1990) presentó ante la comunidad matemática 23 problemas que han sido fuente de inspiración para el desarrollo del conocimiento matemático.

1.1 PLAN DE ESTUDIOS ACTUALIZADO C.C.H. 1996.

De acuerdo al Plan y Programas de Estudio del CCH (1996), el Colegio de Ciencias y Humanidades es una instancia de enseñanza media superior, ocupa por consiguiente una posición intermedia entre la enseñanza básica (la secundaria) y los estudios de licenciatura.

Sin embargo, el Bachillerato tiene funciones específicas que le confieren identidad y valor por sí mismo y excluyen concebirlo como mero tránsito entre los estudios básicos y los profesionales, repetición y ampliación de los primeros o anticipación de los segundos. Es propedéutico, general y único, puesto que se orienta a la adquisición de la preparación necesaria para cursar con éxito estudios profesionales

Como parte de la máxima casa de estudios, el bachillerato del CCH tiene una enorme responsabilida;consistente en formar alumnos en los ámbitos intelectual, ético y social, capaces no sólo de asimilar el conocimiento, sino además de construirlo y utilizarlo en beneficio de la sociedad; capaces de investigar, experimentar y expresar su opinión, es decir, de participar activamente en el proceso educativo, o sea, individuos críticos, creativos y útiles.

Formar alumnos capaces de impulsar el desarrollo económico, social y cultural de México, de alcanzar los niveles de excelencia que espera la sociedad.

Sintetizan estas concepciones las frases que la comunidad del Bachillerato del Colegio ha tomado como grandes orientaciones de su quehacer educativo, y cuya interpretación fundamental se propone a continuación.

Aprender a aprender significa la apropiación de una autonomía en la adquisición de nuevos conocimientos congruentes con la edad de los alumnos .

Aprender a hacer se refiere, en primera instancia, a la adquisición de habilidades, supone conocimientos y elementos de métodos diversos y, en consecuencia, determina enfoques pedagógicos y procedimientos de trabajo en clase (**aprender haciendo**).

Aprender a ser, enuncia el propósito de atender a la formación del alumno no sólo en la esfera del conocimiento, sino en los valores humanos, particularmente los éticos, los cívicos y los de la sensibilidad estética.

Alumno crítico apunta a la capacidad de juzgar acerca de la validez de los conocimientos que se presentan a su examen, sin lo cual no puede concebirse la constitución de un sujeto de la cultura ni la posesión personal del conocimiento científico o de los valores legítimamente adoptados.

Interdisciplinariedad sirve en este contexto para significar la atención a las relaciones entre los distintos campos del saber y el propósito de considerar problemas y temas combinando disciplinas y enfoques metodológicos, de manera que se constituya en el conocimiento la unidad de los aspectos de la realidad que la división disciplinaria de nuestro tiempo obliga a examinar por separado.

En la práctica docente del Bachillerato del Colegio, los aspectos pedagógicos y sus concreciones didácticas han disfrutado de una primacía que en ocasiones llegó a oscurecer su condición de instrumentos al servicio de un proyecto definido, en primera instancia, por sus aspectos propiamente académicos y por una concepción de la cultura y del aprendizaje que privilegian los aspectos básicos del saber - habilidades y conocimientos fundamentales en los distintos campos -, como garantía de un proceso de aprendizaje sin términos en el que el alumno se encuentra desde ahora comprometido como sujeto. Así, ha parecido a veces que son esencia del Bachillerato del Colegio sus intenciones y aportaciones de didáctica activa, sin suficiente atención al carácter básico y riguroso de los contenidos del aprendizaje.

Ahora bien, de la prioritaria concepción del alumno como sujeto de la cultura y de su propia educación, se derivan enfoques pedagógicos generales caracterizados por proponerse reconocer y respetar en la docencia aquella condición fundamental del alumno y, en consecuencia, atender a:

a) Formar e incrementar en el alumno actitudes como la propia del conocimiento científico ante la realidad, la curiosidad y el deseo de aprender, así como aptitudes para la reflexión metódica y rigurosa.

b) Acentuar su participación y actividad, puesto que la cultura básica tiene como componentes esenciales habilidades de trabajo intelectual para inquirir y acopiar, ordenar y clasificar información, la adquisición de las cuales depende de su ejercicio, a través del planteamiento y la resolución de problemas, la experimentación, la observación sistemática, la investigación en fuentes documentales, clásicas y modernas, la discusión.

c) Favorecer su libertad de opinión y que ésta se ejerza de manera cada vez más exigente, así como fomentar, en el trabajo de grupo y en las distintas formas de producción personal, principalmente escrita, la crítica fundada de la validez de la información y de las aserciones que otros o él mismo formulen.

En esta perspectiva, el profesor cumple funciones no de dispensador, sino de guía del aprendizaje, es decir, responsable de proponer a los alumnos las experiencias de aprendizaje que les permitan, a través de la información y la reflexión rigurosa y sistemática, no sólo adquirir nuevos conocimientos, sino tomar conciencia creciente de cómo proceder para continuar por su cuenta esta actividad.

PLAN DE ESTUDIOS ACTUALIZADO 1996.

TRABAJO EN GRUPO ESCOLAR	TRABAJO DEL ALUMNO
Procedimientos de trabajo	
Presentación de conocimientos fundamentales	
Ejercicios Primeras aplicaciones	Ejercicios Aplicaciones
	Lecturas complementarias, información e investigación
Revisión y supervisión	

El papel del profesor como sujeto facilitador o auxiliar del proceso de aprendizaje y no como repetidor o mero instructor.

En el área de matemáticas, los alumnos percibirán a esta disciplina como una ciencia en constante desarrollo, que se origina de las necesidades de los hombres de conocer y descubrir su entorno físico y social. Ellos deben percibir que la matemática posee una naturaleza dual: su propio carácter de ciencia y un valor funcional como herramienta.

La matemática es un saber que se construye: sus conceptos y métodos surgen de un proceso ligado a la resolución de problemas concretos, procedentes con frecuencia de otros campos del conocimiento de la actividad del hombre.

El profesor deberá propiciar la socialización del trabajo entre los estudiantes permitiéndoles la discusión en equipo y en grupo de las diversas ideas matemáticas, al igual que alentar el uso de diferentes formas de expresión de las mismas.

El desarrollo de los contenidos deberá hacerse de manera que el estudiante perciba las conexiones entre las distintas ramas de las matemáticas, en particular la geometría y el álgebra ; es decir el profesor deberá evitar un tratamiento de los distintos contenidos de las ramas o campos, como si fueran partes separadas de la matemática.

Muchos contenidos deberán tratarse a través de ejemplos. Si bien algunos ejemplos se plantean sólo a título ilustrativo, no significa esto que podrán ser sustituidos por cualquier otro. El profesor no debe pretender dar la teoría de los ejemplos presentados; sí , en cambio, debe proporcionar numerosas oportunidades para que el estudiante practique los procedimientos básicos y equilibrar adecuadamente este aspecto con los desarrollos conceptuales. para ello las nociones y procedimientos matemáticos deberán introducirse mediante actividades y problemas que los doten de significado; las precisiones teóricas deberán establecerse cuando los alumnos dispongan de la experiencia y los ejemplos suficientes para garantizar su comprensión

Los conocimientos por aprender deben surgir como necesidades en la solución de problemas adecuados y de la sistematización, tanto en representaciones como en conceptos, de procedimientos de solución que se lleven a cabo conforme las posibilidades actuales de los estudiantes. Esto determina un nivel en el aprendizaje de los conocimientos - que puede denominarse como *significación contextualizada*-, al que debe seguirse una actividad práctica de aplicación en situaciones con contexto más diversificado, para que tales significaciones adquieran mayor generalidad, se generen nuevos conceptos y las representaciones adquieran estatus de sistemas sintácticos útiles para simbolizar y resolver problemas.

Introducir el estudio de contenidos mediante el planteamiento de situaciones problemáticas que inicialmente no comprenden dificultades operatorias con distintos tipos de números; sólo hasta un segundo momento, abordar situaciones con esta dificultad y dar un repaso de tales operaciones con diversas clases de números.

Promover el desarrollo de estrategias para la resolución de problemas alentando a los estudiantes a descubrir o aplicar técnicas a través de procesos como escribir modelos verbales o algebraicos, introducción de variables, utilización de procedimientos mentales para resolver el modelo, realizar procesos inversos en el cambio de un tipo de registro a otro.

El perfil del estudiante del colegio de Ciencias y Humanidades (Plan de estudios actualizado. Julio 1996 pag. 15).

Los alumnos que ingresan al Colegio de Ciencias y Humanidades son más jóvenes y más dependientes que en el pasado.

Una proporción creciente de alumnos de nuevo ingreso (95 % en 1995, 81 % en 1988) se sitúa entre los 15 y los 18 años de edad. El 76 % de los alumnos que ingresaron al Colegio en 1994 tenía 15 años o menos, mientras que en 1996 tenía esa edad el 86 %.

La gran mayoría de los alumnos del Colegio provienen de secundarias públicas: en la generación 1992, únicamente el 1.5 % de los alumnos procedían de escuelas privadas.

Si se considera que en general la secundaria pública no logra desarrollar habilidades de aprendizaje autónomo ni hábitos de estudio, este dato resulta altamente significativo. Sólo tienen las nociones de números, ecuaciones, funciones y geometría de sus cursos de secundaria a un nivel básico introductoria.

Han disminuido los alumnos que afirman trabajar. Ya en 1988 el número de quienes decían trabajar al menos 6 horas diarias, alcanzaba sólo el 5.5 % frente a un 24.9 % en 1976.

Alumnos con escasas posibilidades de contar en su familia con orientación y apoyo para el trabajo escolar. El 40 % de los padres y el 60 % de las madres de los alumnos de la generación 1993 tenían una escolaridad máxima de primaria, mientas que la licenciatura o el posgrado era el nivel más alto alcanzado por el 11.5 % de los padres y el 3.2 % de las madres.

La gran proporción (86 %) de alumnos que tienen 15 años o menos al ingresar al Colegio, refleja una población regular en sus estudios previos, pues se trata evidentemente de alumnos que probablemente no han perdido ningún año escolar. Además, el hecho de que el 90 % no trabaje de manera estable significa que cuentan con el tiempo prácticamente completo para dedicarlo a su formación.

Nuestros alumnos tienen bien definida su aspiración de lograr una formación universitaria en sentido pleno: en un estudio realizado en 1988, el 95 % manifestó intenciones de continuar sus estudios.

Dada la necesidad de intensificar el trabajo escolar en grupo, estos datos representan condiciones del alumnado favorables para este propósito.

De acuerdo a los lineamientos del C.C.H, se puede observar que con este método de enseñanza se logra que el alumno se convierta en un ser autónomo, ya que se le enseñan ciertas habilidades que él las asimilará al ver los beneficios que puede obtener al llevarlas a la práctica, que en este caso es en la resolución de problemas. Estas habilidades formaran parte de lo que él será como persona, y que posteriormente las podrá utilizar para aprender otros conocimientos por sí mismo sin la ayuda de un profesor.

1.2 ANTECEDENTES HISTÓRICOS DEL ÁLGEBRA [17]

La historia de la matemática de acuerdo a Socas y otros (1989) ha sido utilizada por la didáctica de la matemática bajo distintos puntos de vista: desde informaciones históricas que sirven para motivar un tema nuevo, hasta la construcción de secuencias didácticas inspiradas en la progresión histórica seguida en el desarrollo de algunas teorías. En cualquier caso, la historia nos ofrece diferentes ideas para la actividad didáctica e incluso puede ser utilizada por el profesor como referencia para anticipar dificultades o errores posibles en el aprendizaje de los alumnos.

En esta parte se presentan los conceptos básicos del álgebra dentro de su marco histórico.

Lo cual permite reflexionar sobre los conceptos básicos del álgebra en cada época, viendo sus posibilidades y sus límites e insistiendo en los estudiantes en la idea de que las matemáticas evolucionan y que no es una ciencia hecha y fija.

El álgebra se caracteriza por sus métodos, que conllevan el uso de letras y expresiones literales sobre las que se realizan operaciones.

Para dar una idea de los inicios del álgebra es imprescindible remontarse al concepto de número. Los números eran percibidos por los antiguos como una propiedad inseparable de una colección de objetos, propiedad que ellos no podían distinguir claramente. Más adelante, aparecen las operaciones con números como reflejo de las relaciones entre los objetos concretos, y los hombres fueron descubriendo y asimilando las relaciones entre los números. Finalmente, a medida que la vida social se hizo más intensa y complicada, fueron apareciendo problemas más complejos que impulsaron a perfeccionar los nombres y *símbolos* de los números.

La primera etapa hacia los signos matemáticos y las fórmulas en general, la constituye la aparición de los símbolos numéricos, que aparentemente se produjo al mismo tiempo que la escritura y que jugó un papel fundamental en el desarrollo de la aritmética. Todavia en este tiempo, cualquier ley o la resolución de un problema matemático se expresaba con palabras, pues la utilización de signos para las operaciones aritméticas y la designación literal para la incógnita tuvo lugar mucho más tarde.

Para estudiar la historia del álgebra se divide su desarrollo en tres fases:

La primera fase, que comprende el período de 1700 a. de c. a 1700 d. de c., se caracterizó por la invención gradual de símbolos y resolución de ecuaciones. Dentro de esta fase encontramos un álgebra desarrollada por los griegos (300 a.C.), llamada álgebra geométrica, rica en métodos geométricos para resolver ecuaciones algebraicas.

La introducción de la notación simbólica asociada a Viète (1540-1603), marca el inicio de una nueva etapa en la cual Descartes (1596-1650) contribuye de forma importante al desarrollo de esa notación. En este momento, el álgebra se convierte en la Ciencia de los Cálculos Simbólicos y de las Ecuaciones. Posteriormente, Euler (1707-1783) la define como la Teoría de los Cálculos con Cantidades de Distintas Clases (Cálculos con números enteros, fracciones, raíces cuadradas y cúbicas, progresiones y todo tipo de ecuaciones).

A George Peacock (1791-1858) se debe el *principio de permanencia* que decía:

"Todos los resultados del álgebra que se deducen por aplicación de sus reglas, y son generales en su forma, aunque particulares en su valor, son igualmente resultados del álgebra simbólica, donde son generales tanto en su valor como en su forma"

Distinguiendo entre álgebra aritmética, donde las letras representan números naturales y los signos + y - tienen el significado aritmético ordinario, y el álgebra simbólica, donde siguen actuando las leyes del álgebra aritmética, pero se elimina la restricción a los naturales.

El principio de permanencia afirmaba que todas las reglas que se verifican con los naturales, por ejemplo, conmutativa y asociativa de la suma y de la multiplicación, y distributiva de la multiplicación respecto de la suma, seguían verificándose para todos los demás números u objetos representados por las letras, lo cual posteriormente se encontró que no se cumplía. Así, la importancia del significado de los símbolos quedó relegada a un segundo término ante la primacía de los símbolos por sí mismos y sus leyes de combinación; por ejemplo, la adición significará cualquier proceso que se ajuste a determinadas leyes.

Hasta finales del siglo XVIII y primera mitad del XX, el álgebra era la ciencia de las ecuaciones y su problema fundamental radicaba en la teoría de resolución de ecuaciones algebraicas.

En la segunda mitad del siglo XIX, el álgebra presentó un notable impulso debido a grandes matemáticos, entre los cuales destacamos las ideas de Galois (1801-1832) sobre la teoría de ecuaciones algebraicas. Teorías tales como la de grupos, determinantes y matrices, por citar algunas, alcanzaron un profundo desarrollo.

Todo esto favoreció el nacimiento del álgebra abstracta contemporánea (álgebra moderna). En este período se prescinde de los números, de ahí el nombre de abstracta, y los objetos utilizados pueden ser cualquiera (matrices, vectores, tensores, etc.) sobre los cuales se definen ciertas operaciones que verifican unas determinadas propiedades, construyéndose el álgebra a partir de axiomas previamente definidos.

En la actualidad, la revolución de los ordenadores está creando nuevos problemas sobre la mecanización de los cálculos algebraicos, lo que lógicamente conducirá a un desarrollo aún mayor del álgebra.

La notación algebraica presenta también tres periodos claramente diferenciados:

° El periodo retórico o verbal, en el cual las operaciones se describían con palabras. Este período se extiende desde los babilonios (1700 a.C.) hasta Diophante (250 d.C.).

° El período sincopado o abreviado, cuando empiezan a utilizarse algunas abreviaciones para simplificar la resolución de los problemas. Este período comienza con Diophante y dura hasta comienzos del siglo XVI.

° El periodo simbólico aparece en el siglo XVI y utiliza ya diferentes símbolos y signos matemáticos. Esta notación que fue más o menos estable en tiempos de Isaac Newton (1642-1727), se mantiene actualmente sin uniformidad total.

Nuestra notación moderna es debida a Descartes (1596-1650), con ligeras modificaciones posteriores.

A través del desarrollo histórico notamos tres etapas en el álgebra: álgebra geométrica de los griegos, la resolución de ecuaciones a través de los tiempos, por su incidencia directa en la enseñanza y el álgebra moderna.

El álgebra geométrica. Los griegos, aunque se cree que conocían los métodos de los babilonios (métodos puramente algebraicos) para la resolución de ecuaciones, desarrollaron métodos geométricos para resolverlas y comprobar diversas propiedades.

Los egipcios nos dejaron en sus papiros (sobre todo en el de Rhind - 1650 a.C. - y el de Moscú - 1850 a.C.) multitud de problemas matemáticos resueltos. La mayoría de ellos son de tipo aritmético y respondían a situaciones concretas de la vida diaria.

Las ecuaciones más utilizadas por los egipcios eran de la forma:

$$x + ax = b$$

$$x + ax + bx = 0$$

donde a, b y c eran números conocidos y x la incógnita que ellos denominaban *aha* o *montón*.

Una ecuación lineal que aparece en el papiro de Rhind responde al problema siguiente:

"Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24"

en notación moderna, la ecuación sería

$$x + \frac{1}{7}x = 24$$

La solución la obtenían por un método que hoy conocemos con el nombre de *método de la falsa posición* o *regula falsi*. Consiste en tomar un valor concreto para la incógnita, probamos con él y si se verifica la igualdad ya tenemos la solución, si no, mediante cálculos obtendremos la solución exacta. Supongamos que fuera 7 la solución

$$7 + \frac{1}{7} * 7 = 8$$

y como nuestra solución es 24, es decir, $8 * 3$, la solución es $21 = 3 * 7$, puesto que

$$3(7 + \frac{1}{7} * 7) = 24.$$

Generalmente el cálculo de la solución correcta no era tan fácil como en este caso e implicaba numerosas operaciones con fracciones unitarias (fracciones con numerador la unidad).

Los babilonios (el mayor número de documentos corresponde al periodo 600 a.C. a 300 d.C.) casi no le prestaron atención a las ecuaciones lineales, entre las pocas que aparecen, tenemos la ecuación $5x = 8$, en las tablas en base sexagésimal.

Los matemáticos griegos no tuvieron problemas con las ecuaciones lineales y, exceptuando a Diophante (250 d.c.), no se dedicaron mucho al álgebra, su preocupación era la geometría. Sobre la vida de Diophante aparece en los siglos V o VI un epigrama algebraico que constituye una ecuación lineal y dice:

" Después de la muerte de Diophante (un famoso matemático griego), alguien describió su vida con un acertijo. Transeúnte, ésta es la tumba de Diophante

Fue niño durante un sexto de su vida.
Después de un doceavo más tuvo barba.
Después de un séptimo se casó.
En el quinto año de su matrimonio nació su hijo.
Su hijo vivió la mitad de los años que vivió él.
Diofanto murió cuatro años después que su hijo.
¿Cuántos años tenía Diofanto cuando murió?

Ecuaciones Lineales.

Una ecuación lineal es una expresión de la forma ax + b = c, donde x es la incógnita y a, b y c son números conocidos. Para obtener la solución procedemos así: sumamos el opuesto de b en los dos miembros:

$$ax + b + (-b) = c + (-b)$$

$$ax = c - b$$

multiplicamos por el inverso de a:

$$\frac{1}{a}ax = \frac{1}{a}(c - b)$$

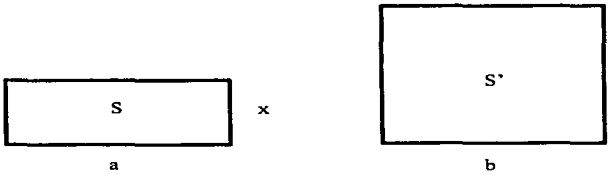
y obtenemos la solución de x:

$$x = \frac{c - b}{a}$$

Pero para llegar al proceso actual de resolución han pasado más de tres mil años. Los primeros documentos matemáticos *indues* que existen (data del siglo III d.c.) son los Sulvasutras, donde se recogen todos los conocimientos necesarios para construir los templos.

Ejemplo:

"Hallar el lado de un rectángulo, conociendo el otro lado y sabiendo que su área es igual al área de un cuadrado dado"



$$S = a * x \qquad\qquad S' = b^2$$

es decir,

$$a * x = b^2$$

Lo resolvían utilizando el método de la falsa posición, como los egipcios.

Posteriormente, Brahmagupta (siglo VII) expresa, ya de forma sincopada, cómo resolver ecuaciones lineales. La incógnita la representaba por la abreviatura "ya", y las operaciones por la primera sílaba de las palabras.

Ecuaciones Cuadráticas.

Una ecuación de segundo grado con una incógnita es de la forma $ax^2+bx+c=0$, donde x es la incógnita y a, b y c son números conocidos con $a\neq 0$.

Resolverla consiste en hallar los valores de x que la satisfagan.

En los documentos egipcios casi no aparecen estas ecuaciones. Sin embargo, los babilonios si las resolvían con soltura ya que poseían las tablas de las raíces cuadradas. Entre los problemas que ellos resolvían tenemos el siguiente ejemplo:

"Hallar el lado de un cuadrado si su área menos el lado es igual a 870"

Expresando su solución en notación actual sería:

$$x^2-x=870$$

Los babilonios dejaron varios ejemplos de resolución de ecuaciones cubicas. Por ejemplo, de la forma $x^3=a$, las resolvían directamente con las tablas de raíces cúbicas que manejaban con soltura.

Herón (100 d. c.) resuelve la ecuación $x^2+4x=896$, buscando un cuadrado perfecto.

Los hindúes (IV d.C.) en los tratados sobre construcción de altares resuelven ya la ecuación cuadrática del tipo $ax^2+bx=c$. Aryabhata (500 d. c.) da el método para resolver la ecuación.

La palabra ***ÁLGEBRA*** proviene del título de un libro *Al-jabr* (algunos usan Al-gebr) *w'al-muqabalah*, escrito en Bagdad, alrededor del año 825 por el matemático y astrónomo Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi (Mohammed hijo de Musa nativo de Khwarizm), que muestra en sus trabajos la primera fórmula general para la resolución de ecuaciones de primero y segundo grados.

El título *Al-jabr w'al-muqabalah* significa **ciencia de la restauración y oposición** o **transposición y eliminación** o, como expresa Carl Boyer, la transferencia de términos al otro miembro de la ecuación (al-jabr) y la cancelación de términos iguales en ambos miembros de la ecuación (al-muqabalah).

Así, dada la ecuación

$$x^2 + 3x + 7 = 7 - 2x + 4x^3$$

al-jabr da

$$x^2 + 5x + 7 = 7 + 4x^3$$

y al-muqabalah da

$$x^2 + 5x = 4x^3$$

Esta obra fue traducida al latín en los primeros años del siglo XII por Juan de Sevilla y Gerardo de Cremona, y con el tiempo se le llamó simplemente *Álgebra*.

El origen del vocablo responde satisfactoriamente al contenido real de la ciencia misma. El álgebra comienza en realidad cuando los matemáticos empiezan a interesarse por las *operaciones* que se pueden hacer con cualquier número, más que por los mismos números; es, en esencia, la doctrina de las operaciones matemáticas considerada formalmente desde un punto de vista general con abstracción de los números concretos.

Álgebra Abstracta.

Con todo el material acumulado en los últimos años se fueron gestando a lo largo del siglo XIX las bases del álgebra moderna. En este siglo aparecen conceptos fundamentales, tales como vectores, cuaterniones y matrices por citar algunos, y se desarrollan las teorías sobre estructuras: grupos, anillos y cuerpos.

Entre los precursores del álgebra moderna, podemos señalar al ya citado Peacock, que junto a Gregory (1813-1844) y a De Morgan (1806-1871) intentaron hacer del álgebra una ciencia independiente de las propiedades de los números reales y complejos . El problema fundamental del álgebra siguió ocupando a un número importante de matemáticos dando origen a la *teoría de grupos*.

Un paso decisivo fue la demostración de que la ecuación de quinto grado (o superior) no es posible resolverla mediante radicales, conseguida primero por Ruffini en 1799 y de forma rigurosa por Abel en 1826. Tanto Ruffini como Cauchy (1789-1857) esbozan el concepto de grupo, pero es Galois (1811-1832) a quien debemos la idea de aplicar la teoría de grupos a la resolución de ecuaciones. Estas teorías, que tardaron en divulgarse, poseen gran importancia en el desarrollo de teorías posteriores. Klein, en su clásico programa de Erlangen (1872) la utilizó para sistematizar las geometría y Lie (1842-1899) las aplica a ecuaciones en diferencias con derivadas parciales.

Los números complejos fueron estudiados simultáneamente por varios autores, entre los que se encontraba Gauss (1777- 1855), el cual aportó la presentación geométrica de dichos números, pero no le fue posible extender esta idea al espacio de tres dimensiones. Hamilton (1805-1865), paralelamente y partiendo de parejas algebraicas, creó los cuaterniones.

Otro desarrollo importante es la teoría de matrices. Recordemos que éstas tienen un precedente en los métodos chinos de resolución de ecuaciones lineales. Posteriormente Kowa (1683) sistematizó este método y Leibnitz creó los determinantes en los que trabajo Cramer (1704-1752).

Aunque la idea de matriz está implícita en los cuaterniones de Hamilton y en la extensión a n-uplas de Grassmann (1809 - 1877), se atribuye a Cayley (1821 - 1895) su creación.

La teoría de matrices de Cayley tuvo su origen en el estudio de las transformaciones lineales. Simultáneamente, Sylvester (1814 - 1897) amplía la teoría de los determinantes y publica, entre otros, un método para eliminar x de dos ecuaciones polinómicas de grados n y m.

Posteriormente Dodgson (1823 - 1898), más conocido como Lewis Carroll, enriquecerá la teoría sobre determinantes y otros, como Frobenius y Jordan, trabajarán sobre matrices.

Las nociones de determinante y matriz consideradas cono innovaciones en el lenguaje matemático se revelaron altamente útiles, no sólo en el desarrollo mismo de las matemáticas, sino como instrumento de cálculo que forma parte de las técnicas del matemático moderno.

A George Boole (1815 - 1874) debemos otro tipo de álgebra, el álgebra de Boole, que se aplica al álgebra de conjuntos o a la lógica y, más recientemente, en el diseño de computadoras.

Después de 1870, con la obra de Benjamín Pierce (1809 - 1880) se da un paso hacia una concepción más abstracta con el concepto de álgebras lineales asociativas, las cuales incluyen como casos particulares el álgebra ordinaria, los vectores y los cuaterniones.

Como hemos observado de la exposición anterior el desarrollo del álgebra no fue uniforme en el tiempo ni en el espacio geográfico. Por supuesto este desarrollo esta determinado por las diversas situaciones por las que atravesaban las sociedades de esa época.

Pero en todas ellas, la característica común era que se acumulaban no sólo la información necesaria para avanzar, sino que también se reunían las personas adecuadas en el lugar propicio para dar el avance en cuestión.

Nosotros profesores, tenemos que hacer patente esto a los alumnos, y hasta donde sea posible, hacer que el alumno llegue a tener la necesidad intelectual y hacer esa síntesis conceptual que el álgebra la requiere para la compresión de un determinado tema. Tenemos que ser capaces que el alumno haga suyo, sienta como parte de sí el tema a tratar. Solo así el concepto será relevante para el alumno y las tareas que haga lo llevarán, indudablemente a un grado más adelante del conocimiento del álgebra.

En esta etapa sería muy conveniente mencionar y ejemplificar que el álgebra no es un tema acabado de la Matemática. Que así como en la antigüedad había problemas que tomaba mucho tiempo resolverlos y a ello se dedicaron mucho tiempo hombres de diferentes épocas, así, ahora hay problemas en los que muchos científicos dedican gran parte de su vida

1.3 LOS ESTÁNDARES CURRICULARES DE LA NCTM DE ÁLGEBRA, 1989 [23].

Una comisión especial de la NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (1989), en Estados Unidos elaboró estándares para currícula y evaluación de matemáticas del nivel primario y secundario, para responder de esta manera a las inquietudes que existen en torno a la educación matemática.

Un estándar específico es un criterio que se usa para juzgar la calidad del curriculum en matemáticas o los métodos de evaluación.

Estos estándares se deben ver como una componente de la respuesta de la comunidad de matemática educativa a la actual crisis en el aprendizaje y la enseñanza de la matemática. Hay consenso que la mayoría de los estudiantes necesitan aprender más y muchas veces diferentes matemáticas. No solamente los enfoques principales y los contenidos matemáticos tienen que cambiar, sino también la metodología de enseñanza. Esta debe incluir experimentación, investigación y comunicación de ideas matemáticas así como razonamiento matemático.

De acuerdo con la NCTM en los niveles desde preprimaria hasta el último año de la enseñanza **media- superior**. Cada alumno debe:

1) Ser capaz de resolver problemas matemáticos.
2) Aprender a comunicarse matemáticamente.
3) Aprender a razonar matemáticamente.
4) Saber valorar las matemáticas.
5) Tener confianza en su capacidad de hacer matemáticas.

Esto implica que los estudiantes deben tener numerosas y variadas experiencias relacionadas que les permitan:

1. Resolver problemas complejos.
2. Leer, escribir y discutir matemáticas.
3. Formular conjeturas, probar y formar argumentos acerca de la validez de una conjetura.
4. Valorar la empresa intelectual llamada matemáticas, los hábitos del pensamiento matemático y el papel de la matemática en el quehacer humano.
5. Explorar, adivinar y cometer errores para ganar confianza en sus actividades matemáticas.

En particular, los estándares curriculares para el nivel medio-superior prevén las siguientes áreas de contenidos:

1. Matemáticas como resolución de problemas.
2. Matemáticas como comunicación.
3. Matemáticas como razonamiento.
4. Conexiones e interrelaciones entre diversos tópicos matemáticos.
5. Álgebra.
6. Funciones.
7. Geometría desde el punto de vista sintético.
8. Geometría desde el punto de vista algebraico.
9. Trigonometría.
10. Estadística.
11. Probabilidad.
12. Matemáticas discretas.
13. Fundamentos conceptuales del cálculo.
14. Estructuras matemáticas.

Lo importante de los cambios curriculares está en el enfoque y la metodología de trabajo, con la cual los estudiantes desarrollan su potencial matemático y adquirirán una competencia funcional en matemáticas.

Se espera que todos los alumnos tengan un curriculum amplio y rico en matemáticas.

En el estudio del Álgebra:

- el uso de problemas del mundo real recibirán más atención para motivar y aplicar la teoría,
- los problemas de texto rutinarios tal como los relacionados con monedas y dígitos, recibirán menos atención.

En el estándar 1 (Matemáticas como resolución de problemas) se debe incluir el refinamiento y la extensión de los métodos de la resolución de problemas matemáticos para que todos los alumnos puedan:

- aplicar, con confianza creciente, estrategias de resolución de problemas para resolver problemas dentro y fuera de la matemática.
- reconocer y formular problemas dentro y fuera de las matemáticas.
- aplicar el proceso de modelación matemática a situaciones de problemas del mundo real.

En el estándar 5 (Álgebra) se debe incluir el estudio de conceptos y métodos algebraicos para que todos puedan:

- representar situaciones que involucran contenidos variables con expresiones, ecuaciones.
- usar tablas y gráficas como herramienta para interpretar expresiones, ecuaciones.
- resolver ecuaciones.
- apreciar el poder de la abstracción y el simbolismo matemático.

Los estándares curriculares recogen las inquietudes que existían en varios lugares en torno a tener estudiantes con una mejor educación matemática. En México en 1970 - 1971 estas inquietudes también las tenían diversos especialistas del área de las matemáticas que se dedicaban a la docencia, tal es el caso del Dr. Santiago López de Medrano, M en C. Miguel Lara Aparicio que en conjunto con otros profesores participaron en la creación del CCH.

Poniendo énfasis en el tipo de estudiantes que querían formar en esos colegios. Con estos objetivos ellos estaban sentando las bases de los requerimientos que un estudiante debería de tener en conocimientos en el área de las matemáticas. Estas ideas con el paso del tiempo tambien fueron consideradas en los estándares curriculares NCTM (1989).

1.4 ALGUNOS PROBLEMAS EN LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA[7]

A través de la enseñanza de las operaciones llega el momento crucial en que se sustituye el número por las letras y en ese preciso instante se entra de lleno al álgebra.

Para la Didáctica de las matemáticas es importante analizar cómo se produce ese paso de las expresiones y operaciones concretas a las abstractas, qué procesos siguen los estudiantes en sus razonamientos durante este paso, qué dificultades o errores surgen en cada momento, cuáles son sus causas y, finalmente, conseguir que entiendan con la menor dificultad el significado de lo que ahora aparece.

De acuerdo a Gutiérrez (1994) para los alumnos, las letras de las expresiones algebraicas no siempre significan lo mismo, y lo analiza en tres aspectos:

1. La comprensión de las letras
2. El significado del signo =
3. El aprendizaje de la resolución de ecuaciones.

Una investigación realizada en Inglaterra (Hart, 1981), es la primera que da una respuesta concreta y detallada al problema de la interpretación de las letras por los estudiantes. Se puede resumir diciendo que perciben las letras con varios significados diferentes, lo cual refleja un progreso en su comprensión, hasta llegar finalmente a la interpretación correcta.

a) LETRAS EVALUADAS. Se presenta cuando toman contacto con las letras, consiste en considerarlas como marcas de las posiciones de números concretos.

$$3 + \boxed{} = \boxed{8}$$

Análogos algebraicos pueden ser

¿cuánto vale "a" en 3+a =8?

¿cuál es el valor de 5a+3 si a =2?

Los estudiantes piensan que el cuadrito ha sido sustituido por la letra, pero que el ejercicio es el mismo por lo tanto, a la letra no se le da el valor de variable, sino de número específico.

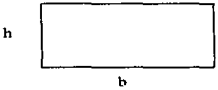
b) LETRAS IGNORADAS. Cuando cambiamos a expresiones algebraicas más complejas el significado anterior desaparece.

- Si $x + y = 42$, entonces $x + y + 6 =$ ...., esto es una utilización de letras muy poco útil, que hay que evitar en lo posible.

c) LETRAS COMO OBJETOS. Esta interpretación consiste en considerar las letras como abreviatura del nombre de un objeto, por ejemplo:

i) Calcular el área del rectángulo que tiene como base b, y altura h .

Donde el área está dada por $A = b \times h$



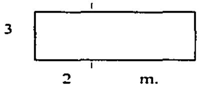
ii) Simplificar la expresión

$$2x + 3y + 4x - y =$$

En este ejemplo la letras son objetos en sí mismas, que los estudiantes manejan, agrupando por una parte todos los términos que llevan a x y por otra parte los que llevan y. Por lo tanto, ahora la x y la y no tienen un significado concreto. Esta interpretación de las letras como objetos ya empieza a ser útil para formar el concepto matemático, pues permite a los estudiantes manejar determinadas expresiones algebraicas, comprendiendo qué significa el ejercicio propuesto y qué tiene que hacer.

d) LETRAS COMO INCÓGNITAS ESPECIFICAS. En este caso, una letras representa un número particular pero desconocido, y los estudiantes pueden operar directamente con ella, veamos unos ejemplos

- Calcular el perímetro del rectángulo de la figura.



- Calcular el perímetro de un polígono de n lados, si cada lado mide 2 cm.

$2n$

Es importante diferenciar la primera interpretación (letras evaluadas) de ésta. En el primer caso, las letras representan números concretos, determinados, que pueden o deben colocarse en la posición de las letras, mientras que ahora las letras representan números indeterminados. En el primer ejemplo, las letras tienen un sólo valor posible, mientras que, en los ejemplos anteriores m puede ser cualquier longitud y n puede ser cualquier número natural. Por lo tanto, estos estudiantes entienden que para cada letra hay un conjunto (finito o infinito) de números, cualquiera de los cuales puede ponerse en el lugar de las letras.

e) LETRAS COMO NÚMEROS GENERALIZADOS. Ahora las letras pueden representar varios valores numéricos desconocidos y no sólo uno. Por ejemplo:

- Calcular los valores de n para los que se verifica que $3n + 1 < 19$. Ahora una letra se entiende como un sustituto de números, de manera que la letra no es una abreviatura del número, sino del propio conjunto.

f) LETRAS COMO VARIABLES. Este es el significado matemático estándar, donde las letras representan conjuntos indeterminados de números, de manera que hay una relación concreta entre los diferentes conjuntos que aparecen en la misma expresión algebraica. Por ejemplo:

¿Qué es mayor, $2 + n$ ó $2n$?

$$y = f(x)\ ,(y = 5 - 3x)\ ,\ f(x, y) = c$$

Los ejemplos anteriores representan dos formas diferentes de aparecer las variables: una sola variable o varias variables relacionadas. La idea de variable se ve más claramente al manejar expresiones o problemas con varias variables.

El planteamiento y el análisis didáctico de estas distinciones de los significados que los estudiantes dan a las letras ha hecho avanzar mucho el trabajo de los profesores en la enseñanza del álgebra. pues le ha permitido comprender por qué sus alumnos contestaban de la manera que lo hacían. El objetivo de esta clasificacion no es sugerir a los profesores que presenten a sus alumnos todos estos significados para que los aprendan. sino para comprender porque algunos estudiantes contestan de una determinada manera y poderlos situar en el camino correcto de una interpretación algebraica.

2.- Si las letras son uno de los elementos básicos del álgebra. las ecuaciones son otro de ellos. En el aprendizaje de la resolución de ecuaciones. el signo = juega un papel central para la correcta comprensión de "qué es el resolver una ecuación". y qué manipulaciones se pueden realizar con las ecuaciones para llegar a la solución.

En las expresiones aritméticas los estudiantes interpretan de la misma manera $5 + 7 = 12$ que la expresión algebraica $3x + 4 = 25$. pero van a tener dificultades con $3x + 4 = 7x - 5$ para interpretar. porque aquí el signo = no puede ejercer el papel de enlazar las operaciones con su resultado.

Un segundo significado que tiene el signo = es conectar dos expresiones en las que se deben realizar acciones similares:

- Lo que se haga a un lado del signo =, se debe hacer al otro lado. Esta interpretación suele preceder de la enseñanza en la cual los primeros contactos con el álgebra son transformaciones de ecuaciones para su resolución.

Por último, el tercer significado que le atribuyen los estudiantes al signo =, es el **significado correcto de equivalencia** entre dos expresiones algebraicas.

Hemos visto que el problema surge porque los estudiantes manejan expresiones algebraicas que tienen la misma forma que otras expresiones aritméticas conocidas. por los que transfieren el significado y los métodos aritméticos al álgebra.

Posteriormente los estudiantes resuelven una ecuación utilizando diversas reglas, tales como:

transposición de términos, realizar la misma operación a ambos lados del signo igual.

Muchos estudiantes no utilizan esto porque no entienden su significado. Para resolver esta dificultad, a veces se trabaja con las ecuaciones en contextos físicos que estén relacionados con el estudiante, como por ejemplo, balanzas en equilibrio, donde cada brazo representa cada una de las expresiones de los lados del signo =, y la manipulaciones permitidas son únicamente aquellas que mantienen el equilibrio.

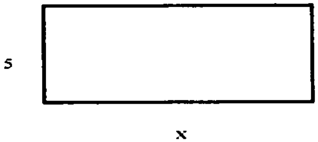
Otro contexto en el que se pueden representar las ecuaciones es el contexto geométrico, en el cual el producto de dos factores es el área de un rectángulo.

Ejemplos:

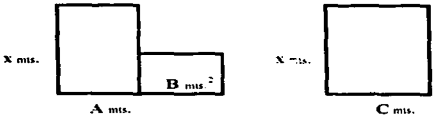
El producto 5x se representa mediante un rectángulo cuya base mide 5 y altura x, o al revés. Esta forma de hacer álgebra es mas antigua que el álgebra misma, porque ya en los Elementos de Euclides se encuentran problemas como éste (Proposición 4 del Libro II; en Euclides, 1991).

Otro ejemplo reciente (Kieran 1990)

"Una persona tiene un campo de A metros de ancho y x metros de largo. Esta persona compra un campo contiguo al anterior de B metros cuadrados de área. Una segunda persona le propone intercambiar esta propiedad por otro campo próximo que tiene la misma área total y el mismo largo, pero con una forma mejor. ¿Cuál debe ser el largo de los campos para que el intercambio sea justo?"



De este enunciado se deducen las siguientes figuras:



De las figuras (condiciones del problema) tenemos que

$$Ax + B = Cx$$

de donde se tiene que

$$x = \frac{-B}{(A-C)}$$

esto sólo es válido cuando C > A.

Al sustituir las letras A, B y C por números, se obtiene un enunciado concreto de este tipo. Por ejemplo, si A = 4, B = 12 y C = 6 entonces x = 6,, y con los valores A = 8, B = 20 y C =10, tenemos que x = 10

La solución se obtiene representando gráficamente el problema. El trabajo de los estudiantes es ir transformando las diferentes partes del texto en elementos geométricos. Si se eligen los coeficientes de las ecuaciones con cuidado, se puede sugerir a los estudiantes que realicen las figuras correspondientes con papel cuadriculado, pues solamente el hecho de dibujar las figuras correspondientes lleva al resultado, mediante un proceso de descomposición y de comparación de áreas.

Así pues, con este contexto se pretende ayudar a los estudiantes para que aprendan a entender qué son las ecuaciones y a darle un significado a su resolución.

En nuestra práctica docente los profesores usamos una o varias interpretaciones de las presentadas aquí. Y las usamos en diferentes órdenes y momentos, de acuerdo al interés y conformación de nuestros diversos grupos de alumnos.

Lo que no debemos dejar de hacer es tener en cuenta que estamos presentando al alumno una nueva forma de ver a los números, esto es ver a los números a través de letras. Así mismo hacer énfasis en qué nos va a representar una ecuación y qué significa resolverla, o sea, el alumno pasará el enunciado al lenguaje algebraico para obtener una ecuación, para posteriormente resolverla. Eso lo podemos realizar con proposiciones sencillas que permitan hacer la analogia entre la proposición expresada en un lenguaje usual y ésta misma expresada en el lenguaje matemático. Esto podría aclarar el proceso de no solo resolver una ecuación sino del proceso mismo de plantearla, o sea el alumno pasará el enunciado que tiene al lenguaje algebraico para obtener una ecuación y después su solución, se espera que hagan las dos cosas.

1.5 LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS[12]

Para George Polya (1967) en la enseñanza por medio de problemas el objetivo principal, es enseñar a los jóvenes a pensar, y los objetivos secundarios serían el pensamiento independiente y hábitos de mejorar en el trabajo; pero nuestra enseñanza debe considerar todos los aspectos principales del pensamiento matemático. Uno no puede aprenderlas y apreciarlas sin una participación activa. Si deseamos desarrollar la inteligencia de los alumnos debemos darles lo mas fácil para después pasar a lo más complicado por ejemplo: adivinar es más fácil que demostrar, resolver problemas concretos es mas natural que construir estructuras conceptuales.

En general, lo concreto va antes de lo abstracto, la acción y la percepción anteceden a las palabras y los conceptos, los conceptos antes que los símbolos, etc.

Puesto que el alumno deberá aprender no receptivamente sino por su propio esfuerzo, él debe familiarizarse con las formas de su entorno lo concreto luego con lo abstracto; con variedad de experiencias después con la unificación de conceptos, etc.

Esto conduce a la resolución de problemas matemáticos, que es la actividad más cercana al pensamiento de todos los días.

Cuando deseamos algo pensamos como lograrlo así debemos abordar un problema.

La solución de problemas cotidianos conduce a los problemas matemáticos simples.

La resolución de problemas es la espina dorsal de la enseñanza de las matemáticas desde la época del papiro de Rhind.

Hay problemas rutinarios y los que no lo son, los problemas rutinarios pueden ser útiles y necesarios, si son administrados en una dosis justa.

Debemos elegir problemas interesantes y a la vez volverlos atrayentes.

Así, el problema debe tener sentido y arribar a un propósito, desde el punto de vista del alumno. Debe estar en relación natural con las cosas que le son familiares, y debe servir a un fin (objetivo) comprensible al alumno, características del aprendizaje significativo de Ausubel, que de acuerdo con Novak (1982) es un proceso por el qué se relaciona nueva información con algún aspecto ya existente de la estructura cognitiva del individuo y que sea relevante para el material que se desea aprender.

No solo la elección, sino también su presentación merece nuestra atención, los alumnos deberán trabajar un problema de investigación sin prisa, de acuerdo con el principio de la enseñanza activa, y podrán descubrir la solución, conduciendo al descubrimiento, si encaramos el desarrollo de la inteligencia de los alumnos como el objetivo principal de la enseñanza, y el trabajo de los alumnos el resolver los problemas como el medio principal (o mejor) para alcanzar este fin, entonces el maestro debe conducir al alumno a descubrir la solución por sí mismo. El maestro debe dar sugerencias que permitan el nacimiento de ideas por parte del alumno.

La heurística es el estudio de los caminos y medios del descubrimiento y la invención, para resolver un problema cotidiano pregúntese ¿qué es lo que yo deseo?, y si su objetivo está claro, examine todo lo que este a su disposición, todo lo que pueda utilizar para obtenerlo, y pregúntese ¿qué es lo que tengo? y cuando revise todo lo que puede utilizar en el momento adecuado, entonces puede regresar a su primera pregunta y desarrollarla: ¿qué es lo que yo quiero? ,¿cómo es que puedo obtenerlo?, ó ¿puedo yo obtenerlo? y en un interrogatorio de este tipo, se puede acercar a la solución de un problema. En un problema matemático, el maestro pregunta ¿qué desea usted? ¿cuál es la incógnita? si esto es claro el maestro puede continuar ¿qué es lo que usted tiene?, ¿cuáles son los datos?, ¿cuál es la condición? si la respuesta es clara a estas preguntas el maestro regresará a la pregunta inicial para desarrollarla, ¿qué desea obtener?, ¿qué es lo desconocido?, ¿por qué medios puede obtener la incógnita?, ¿a partir de que datos puede determinar la incógnita? estas preguntas pueden conducirlo mejor a la solución.

Dichas preguntas son muestras de una heurística práctica. A la larga el alumno comprenderá el método y aprenderá a utilizar, estas preguntas: aprenderá así a dirigir su atención sobre los puntos esenciales, cuando encuentre un problema. De esta manera, tendrá un pensamiento metódico aunque jamás utilicen las matemáticas en su profesión.

Polya nos enseña como abordar un problema matemático en clase (1967). Esto se hace cuando se pretende resolver un problema con preguntas equivalentes, se debe buscar que el alumno adquiera la capacidad de ver la información que da el problema.

Por ejemplo: ¿de dónde se obtienen los datos?, ¿qué conozco y qué es lo desconocido?, ¿cómo puedo plantearlo? y ¿cuántas respuesta pide el problema?.

El objetivo es que el alumno sepa distinguir toda la información del problema y después pueda ordenarla para que finalmente plantee la ecuación que da la respuesta, esto quiere decir que es un trabajo de Heurística, para que el alumno sepa pensar. Por este motivo se dice que se les enseña a pensar es decir, se trata de que aprenda esta metodología, y no como podría entenderse que "no sabe pensar" pues todos tenemos esa capacidad desde que nacemos.

Otra forma de ver esta problematica es expresada por el Dr. Barajas [2](1978). En opinión de él, cuando se habla de que una de las tareas de la educación es enseñar a pensar a los jóvenes, no se entiende bien qué se quiere decir. No se trata de paradojas ni de sutilezas filosóficas, habiendo platicado con varios amigos suyos (matemáticos) concluyeron que esas operaciones que llamamos *entender y pensar* no tienen una significación muy clara. Y eso que en matemáticas y fisica, es donde hay menos confusión.

El Trabajo de Schoenfeld en cuanto a la resolución de problemas [15] (1987)

Durante el aprendizaje de las matemáticas, los alumnos estudian conceptos matemáticos, teoremas, algoritmos, definiciones, y varias estrategias que son utilizadas para resolver problemas. Halmost (1980) sugirió que el resolver problemas es el corazón de las matemáticas. Diudonne reconoció que "la historia de las matemáticas nuestra que los avances matemáticos casi siempre se originan en un esfuerzo por resolver un problema específico" (Kleiner, 1986, p 31). Hilbert (1900) presentó ante la comunidad matemática 23 problemas que han sido fuente de inspiración para el desarrollo del conocimiento matemático. Actualmente existe interés en identificar las estrategias que se utilizan en el proceso de resolver problemas e incorporar actividades de aprendizaje que se relacionen con el uso de estas estrategias en el salón de clases.

Alan Schoenfeld (1987) investigó por qué las ideas de Polya no daban resultados o por qué estas ideas no eran consideradas como guía en los entrenamientos de los estudiantes que participarian en diversas competencias matemáticas, fundamenta su propuesta en lo que denomina la adopción de un "microcosmo matemático" en el salón de clases. Esto es, propiciar en el aula condiciones similares a las condiciones que los matemáticos experimentan en el proceso de desarrollo de las matemáticas. En el estudio de las diferencias entre expertos y estudiantes, él reconoce que la claridad en el entendimiento del problema resulta determinante en el proceso de resolver problemas. En esta primera fase de acercamiento hacia el problema es importante reflexionar en cuestiones tales como "qué se pide", "qué se tiene" y "a dónde se quiere llegar". Encontró que los expertos dedican más tiempo en la fase de entendimiento del problema que los estudiantes y esto repercute en el éxito al intentar resolverlo.

Polya distingue algunos componentes fundamentales que caracterizan el proceso de resolver problemas, y presenta varios ejemplos donde se ilustra el uso de diversas estrategias. las cuatro componentes son: el entendimiento del problema, el diseño de un plan, el proceso de llevar a cabo el plan, el análisis retrospectivo del proceso empleado para resolver el problema y la posibilidad de la solución o soluciones. En los ejemplos se ilustra el uso de diversos métodos heurísticos, los cuales incluye: dividir o descomponer el problema en problemas más simples, usar diagramas o gráficas y trabajar el problema en sentido inverso. Schoenfeld indica que algunos estudiantes pueden tener éxito con este método cuando resuelven problemas en el mismo contexto, pero a menudo experimentan dificultades cuando el contexto del problema es diferente.

De acuerdo con Schoenfeld [18] (1983), se les pidió a algunos alumnos de la Universidad de Rochester resolver los siguientes problemas:

1) Demuestra que los segmentos de línea PV y QV tienen la misma longitud, y

2) Demuestra que el segmento de línea CV bisecta al ángulo PVQ, en relación a la siguiente figura.

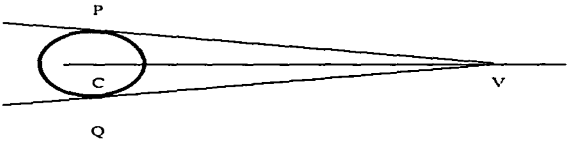


Fig. 1. Problemas de demostración 1 y 2.

El círculo en esta figura es tangente a las dos líneas dadas en los puntos P y Q.

Trabajando en grupo, lo resolvieron en menos de tres minutos. Después se les puso el problema 3:

3) Se dan dos líneas rectas que se interceptan y un punto P señalado en una de ellas. Muestra cómo construir, usando regla y compás, un círculo que sea tangente a ambas líneas y que P sea el punto de tangencia con la línea de arriba.

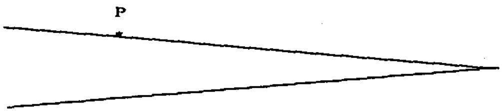


Fig. 2. Un problema de construcción.

Los estudiantes argumentaron durante mas de 10 minutos sin resolver el problema.

Como los estudiantes resolvieron el problema 1, se debieron de haber dado cuenta de que para encontrar el punto Q sólo debieron abrir el compás del punto de intersección V al punto P.

Como resolvieron el problema 2, sabían que el centro estaba sobre la bisectriz del ángulo PVQ, y este se encuentra en la intersección de la bisectriz y la recta PQ. Sin embargo, no resolvieron el problema.

Este incidente ilustra un fenómeno ampliamente conocido en el cual los estudiantes ponen en evidencia clara que conocen ciertas matemáticas pero proceden actuando como sí las ignoraran completamente.

En una serie de estudios de entrevistas a estudiantes de la preparatoria y universitarios realizada desde 1979 hasta 1984 (Schoenfeld 1983; Schoenfeld 1985 , cap. 5), más del 90% de los estudiantes a quienes se les solicitó resolver el problema 3, lo hicieron mediante ensayo y error, probando sus hipótesis realizando las construcciones y aceptándolas o rechazándolas sobre bases empíricas.

Después esos estudiantes mostraron sus conocimientos de las matemáticas deductivas relevantes demostrando los teoremas de los problema 1 y 2.

Tales inconsistencias conductuales difícilmente están limitadas a la geometría (Carpenter et. al. 1983, 656 - 657).

En el tercer examen Nacional de Progresos Educativos (1983) (NAEP), se hicieron los siguientes comentarios.

Los estudiantes sienten muy fuertemente que en las matemáticas siempre existe una regla a seguir para resolver problemas. Cómo resolver un problema es tan importante como entender la solución y saber por qué una respuesta es correcta es tan importante como obtener la respuesta correcta.

A pesar del hecho de que casi la mitad de los estudiantes ven a las matemáticas en su mayor parte como memorización, tres cuartas partes de ellos opinan que las matemáticas ayudan a las personas a pensar lógicamente, y más de tres quintas partes opinaron que el justificar las afirmaciones que uno hace es una parte muy importante de las matemáticas.

Es posible que estas últimas actitudes reflejen las creencias de los maestros o una opinión social más general en lugar de que surjan de su propia experiencia con las matemáticas escolares (Carpenter et al. 1983, 656-7).

Un amplio rango de factores afectivos incluyen el comportamiento de los estudiantes (véase Reyes 1984). Por ejemplo, la confianza que manifiestan tanto en general como frente a los problemas de matemáticas. Remontándonos a la National Longitudinal Study of Mathematical Abilities (Crosswhite 1972), los estudios de investigación han mostrado correlaciones positivas entre confianza y aprovechamiento. Análogamente la motivación y la utilidad percibida de las matemáticas se correlacionan positivamente con el aprovechamiento.

En un estudio sobre las creencias y conducta matemática (Guilfor et. al. 1973, 151 - 154), en general, los estudiantes consideran a las matemáticas como una disciplina objetiva y objetivamente evaluada que puede ser dominada. Creen que es el trabajo y no la buena suerte lo que cuenta para obtener buenas calificaciones, y ponen mucho más énfasis en el trabajo que en el talento inherente. sí los estudiantes tienen malas calificaciones, creen que es culpa suya.

Las actitudes de los maestros hacia sus estudiantes no son consideradas como un factor que influya en la evaluación.

Percepciones de las Matemáticas por los Estudiantes (Actitud Matemática), incluyendo geometría.

Todas las respuestas reflejan la práctica escolar.

¿Qué tan importante es la memorización en el aprendizaje de las matemáticas? ellos opinan que "deben saber ciertas reglas, las cuales son parte de las matemáticas. Sin conocer estas reglas no se puede resolver con éxito un problema". "La memorización es muy importante y en geometria, especialmente para el examen final". "La memorización de ecuaciones y fórmulas es esencial en matemáticas. Si se memorizan entonces se conecta la variable y se resuelve lo que se busca".

Prácticas en el salón de clases.

El maestro pregunta al alumno dando oportunidad, suficiente de responder. ¿Cuánto tiempo debería tomar el resolver un ejemplo típico de la tarea? ellos opinaron en promedio que 2 minutos.

Puntos de vista de los estudiantes acerca de las matemáticas, el inglés y las ciencias sociales de la escuela.

¿Algunas personas son buenas en matemáticas y otras no? los estudiantes creen firmemente en la habilidad innata, particularmente en las matemáticas.

En general los estudiantes creen que sus éxitos son por suerte y sus fracasos por la carencia de habilidad. Conforme es mejor el estudiante, es menos probable que crea que las matemáticas son en su mayor parte memorización, que el éxito depende de la memorización o que los problemas se resuelven de principio a fin, por procedimientos paso por paso. Aquellos que se ven a sí mismos como buenos en matemáticas, también tienden a encontrarlas interesantes. Y los mejores estudiantes (en todos los grados y en matemáticas) se perciben a sí mismos como que trabajan más duro en matemáticas que la mayoría.

Los estudiantes estaban muy motivados, piensan que es muy importante aprender la materia para pensar claramente; el método de enseñanza es "socrático" y los estudiantes tienen amplia oportunidad de contestar la pregunta que se les ha planteado, dicen que son tratados con respeto y que la materia puede ser dominada si trabajan en ella, y cuando sale bien creen que han tenido éxito porque han trabajado duro.

La retórica de la solución de problemas se ha vuelto familiar pero la realidad es que en el salón de clase los problemas fueron pocos y esporádicos y solo para lograr el dominio de la materia.

A pesar de sus afirmaciones de que las matemáticas ayudan a pensar lógicamente y de que se puede ser creativo en ellas, afirman que las matemáticas se aprenden mejor por medio de la memorización.

Lo que cuenta en las situaciones de resolución de problemas es la conducta de los estudiantes, y esa conducta parece estar mucho más dirigida por las experiencias de los estudiantes que por las creencias que profesan.

Schoenfeld [15] (1987) enfoca su investigación a la siguiente pregunta: ¿qué nivel de explicación es necesario para que, los estudiantes puedan en realidad usar las estrategias que uno considera importantes?. Los resultados de la respuesta a esta pregunta generaron información acerca del por qué las ideas de Polya no estaban funcionando en el salón de clases , "la razón es que los métodos heurísticos propuestos por Polya no son realmente coherentes "recalcó" en resumen, las caracterizaciones de Polya son etiquetas bajo las cuales familias de estrategias relacionadas están subsumidas "presentó varios ejemplos en los cuales una estrategia caracterizada por Polya producía muchas similares pero básicamente diferentes subestrategias.

Como resultado del anterior análisis, la principal implicación práctica para la enseñanza de las matemáticas fue diseñar actividades de aprendizaje que permitan:

a) identificar el uso de una estrategia en particular;
b) discutir la estrategia en suficiente detalle de manera descriptiva;
c) dar a los estudiantes un apropiado grado de entendimiento para su uso.

Los resultados de este estilo descriptivo mostraron un progreso en la forma en que los estudiantes resuelven problemas. Sin embargo, reconoció que este método no era suficiente.

También observó que los estudiantes a menudo no usaban el contenido matemático que conocían cuando intentaban resolver los problemas. Ellos escogían caminos y persistían en continuar aún cuando no existía ningún progreso en la solución del problema.

En varios estudios, encontró que existen cuatro dimensiones que influyen en el proceso de resolver problemas: dominio del conocimiento, estrategias cognoscitivas, estrategias metacognoscitivas y sistemas de creencias.

En el dominio del conocimiento incluyen definiciones, hechos y procedimientos usados en el dominio matemático, las estrategias cognoscitivas incluyen métodos heurísticos tales como descomponer el problema en casos más simples, establecer metas relacionadas, invertir el problema, y dibujar diagramas, las estrategias metacognoscitivas se relacionan con el monitoreo empleado al resolver el problema, por ejemplo, el proceso de selección de una estrategia y la necesidad de cambiar la dirección como resultado de una evaluación permanente del proceso, y los sistemas de creencias incluye las ideas que los estudiantes tienen acerca de las matemáticas y como resolver problemas

Schoenfeld, [15] en (1989) indicó que los estudiantes deben reconocer los principios epistemológicos de esta disciplina. Por ejemplo los estudiantes deben reconocer que:

a) Encontrar la solución de un problema matemático no es el final de la empresa matemática, sino el punto inicial para encontrar otras soluciones, extensiones, generalizaciones de ese problema.

b) Aprender matemáticas es un proceso activo el cual requiere discusión de conjeturas y pruebas. Este proceso puede guiar a los estudiante a nuevas ideas matemáticas. Algunas de las actividades de aprendizaje utilizadas por Schoenfeld son:

b.1) Resolver problemas nuevos para mostrar a los estudiantes las decisiones tomadas durante el proceso de resolver problemas.

b.2) Mostrar videos de otros estudiantes resolviendo problemas en clase.

b.3) Actuar como moderador mientras los estudiantes discuten problemas en clase, el moderador puede proveer algunas direcciones que son de valor para la discusión.

b.4) Dividir la clase en pequeños grupos los cuales discuten problemas matemáticos. El papel del coordinar es el de elaborar preguntas que ayuden a los estudiantes a reflexionar los que están haciendo. Por ejemplo, por qué han seleccionado determinada estrategia, o por qué deben buscar otras alternativas.

En 1988 Schoenfeld sugirió que el principal objetivo en la instrucción matemática es ayudar a los estudiantes a ser autónomos, es decir, que la instrucción matemática debe incorporar estrategias para aprender a leer, conceptualizar y escribir argumentos matemáticos. Aquí él identificó una quinta dimensión , "actividades de aprendizaje" donde los estudiantes son expuestos a estrategias que pueden ayudarlos a leer argumentos matemáticos. Por ejemplo, los estudiantes son motivados a organizar sus argumentos matemáticos en una secuencia de tres fases:

convéncete a ti mismo,

convence a un amigo,

y entonces convence a un enemigo.

Gerdner (1985) sugiere que para entender el proceso de resolver problemas uno tiene que considerar información de áreas como psicología, filosofía, inteligencia artificial, lingüística y antropología.

Para Santos [15] (1993) señala que el uso de estrategias para la resolución de problemas en el salón de clase, se hace en tres partes.

1) Se dan varias interpretaciones de la implementación en la solución de problemas (las estrategias que Polya utiliza para la solución de problemas)

2) Se estudian las ciencias cognoscitivas. o sea las actividades que deben ser implementadas en el salón de clases.

3) Schoenfeld investigó el uso de solución de problemas en diferentes contextos.

En la solución de problemas Branca [16] (1980) identifica 3 interpretaciones.

1.1) Como meta. La solución de problemas es la actividad principal.

1.2) Como proceso. Cuando la solución de problemas es un proceso, la atención es hacia los métodos, procedimientos y estrategias.

1.3) Como herramienta. Identificación de tipos específicos de problemas

A la vez Schoeder y Lester [16] (1989) distinguen 3 interpretaciones en esto mismo

1) "Enseñando acerca de la solución de problemas"

Esta aproximación hace énfasis en los 4 estados de Polya como un proceso

2) "Enseñando, para solución de problemas"

Es enfocada sobre el uso o aplicación del contenido matemático en la aplicación en lugar de la comprensión del contenido matemático.

3) "Enseñando vía solución de problemas"

En el proceso de hacer suyo el contenido Stanic y Kilpatrich [16] (1998) identifican 3 temas que caracterizan el papel de la solución de problemas en la historia de las matemáticas.

i) La solución de problemas. Proporciona las condiciones para las metas en el estudio de las matemáticas.

jj) La solución de problemas . Como una herramienta tienen que ser aprendidas estas herramientas y hay una jerarquía de herramientas.

iii) La solución de problemas. Como un arte, punto de vista de Polya.

Schoenfeld menciona lo que es de interés estudiar por los matemáticos y que se tomen en cuenta las siguientes investigaciones: ¿"qué es lo que la gente piensa hacerca de las matemáticas" y como entender el desarrollo de los conceptos de las matemáticas?.

Solución de problemas y heurística (Polya).

El sugiere utilizar diagramas, trabajar dando marcha atrás y usando métodos de contradicción, el uso de heurística, tal como diagramas, tablas; así como la consideración de casos simples, e información listada sistemáticamente que puede ser vista como un modelo matemático.

El diseño de un plan para su solución, el realce de estrategias heurísticas en la enseñanza para la solución de problemas está relacionado con la suposición que por imitación de la forma que los expertos resuelven los problemas los alumnos pueden llegar a ser buenos solucionando problemas.

Lester y Garofalo [16] (1982) y Mayer [16] (1982) señalan que es necesario establecer comunicación entre psicólogos y maestros de matemáticas, lo mismo opina Schoenfeld basado en entrevistas Mayer representa 2 estados en la resolución de problemas:

i) La representación del problema, lo cual depende de la lingüística.

ii) La solución del problema, la cual está asociada con algoritmos y estrategias del conocimiento.

Mayer [16] (1982) sugirió que los estudiantes experimentan dificultades en la etapa de representación.

Silver [16] (1987) resaltó que la representación del problema es central ya que esto puede convertirlo difícil o imposible de resolver.

Mayer [16] (1987) sugirió que la principal instrucción realza los procesos de solución.

Davis [16] (1986) indicó que si el problema está en mi mente en todo momento, debe tener una representación.

La habilidad de recordar o inventar ejemplos parecidos

La capacidad de hacer juicios. Lester [16] (1982) sugirió que la psicología cognoscitiva tiene una larga historia de estudiar el aprendizaje y la enseñanza a través de un enfoque matemático.

Schoenfeld [16] (1982) estableció que la única razón para enseñar matemáticas es porque resulta ser una disciplina ideal para entrenar a los estudiantes en "cómo pensar".

Vergnaud [16] (1984) recomendó que la representación es importante e identifica 3 niveles del problema de representación y simbolización.

i) El nivel de referencia el cual distribuye con el mundo real como es visto por el sujeto.

ii) El nivel de significado el cual se refiere a una teoría de representación.

iii) El nivel de simbolismo, el cual se refiere al uso de diferentes sistemas simbólicos (gráficas, diagramas o álgebras)

Silver [16] (1987) discutió los perfiles de solucionar problemas satisfactoriamente, él se enfocó sobre varias características.

Representación inicial, que desarrolla comprensión, esquema de memoria, un conocimiento que describa las propiedades y meta-procesos.

Kilpatrick [16] (1987) resaltó la importancia de la formulación de problemas como un medio y una meta de la enseñanza, para hacerla activa.

Lave et. al. sugirieron que la solución de problemas estimula (animar) una práctica matemática y la evolución de aprendiz de matemático a maestro en matemáticas.

Schoenfeld llamó a esto un microcosmo de la cultura matemática.

Lave et. al. ligaron esto con el trabajo de Schoenfeld , se incluyen 4 dimensiones en sus aproximaciones:

i) Recursos matemáticos

ii) Estrategias cognoscitivas

iii) Estrategias metacognoscitivas

iv) Sistemas en torno a la opinión acerca de la solución de problemas matemáticos.

Lave [16] (1988) mencionaron un proyecto en el desarrollo, el cual está muy relacionado con este tipo de prácticas matemáticas en la U. de California, el cual consta de preguntas para los estudiantes.

a) Encontrar patrones interesantes en los números dar forma y procedimientos para comparar los patrones, entenderlos, generalizarlos hasta que fallen y hacerlos plausibles.

b) Problemas variados que ellos dan.

c) Inventar sus propios problemas e inventar problemas para otros.

d) Cambiar su propia atención a la investigación y seguir a través de días o semanas.

e) Desarrollar más de una solución para un problema, más de una formulación de una solución.

f) Considerar el carácter y limitación de su entendimiento y como ellos llegar a ese entendimiento.

g) Usar el mundo para provocar y ejemplificar nociones matemáticas.

h) Enseñar a otros estudiantes la forma en la cual ellos enseñan, el orden para resolver un problema; el estudiante interactúa con otros estudiantes.

Los recursos que utilizan son los siguientes:

- Contenido matemático.
- Estrategias cognoscitivas, metacognoscitivas.
- Sistemas de verdad.

Perkins y Simmons [16] (1988) introdujeron un modelo en el que se discuten 4 marcos de conocimiento:

i) Contenido.

ii) Solución del problema.

iii) Epistemología.

iv) Indagación.

La idea en el uso de este modelo es para relacionar que tipo de experiencias matemáticas están asociadas con la forma en que los estudiantes solucionan o aproximan el problema, algunas dificultades que los estudiantes pueden experimentar en el proceso de aprender matemáticas y que están relacionadas con cada uno de los marcos de referencia del conocimiento.

Los estudiantes pueden experimentar dificultades en el uso de un concepto específico, pero aún estando familiarizados con dicho concepto, les falta el conocimiento de la estructura básica que está relacionada con su uso.

Estrategias contradictorias que los estudiantes pueden exhibir mientras estudian matemáticas, por ejemplo el uso no sistemático del método "tanteo y error". Exploran un caso más general, en el que las condiciones del problema son variados.

Perkins y Simmons [16] (1988) indicaron que la instrucción convencional, no ofrece al estudiante la oportunidad de participar en el proceso de formulación del problema y esto puede limitarlos para hacer, más adelante, análisis de la solución.

Schoenfeld [16] (1987) reconoció haber sido inicialmente inspirado por el libro de Polya "Como resolverlo", en este libro se identifican 4 niveles:

- Entender el problema.
- Diseñar un plan.
- Llevar a cabo dicho plan.
- Regresar a analizar el proceso de solución.

Schoenfeld aceptó haber usado esas estrategias varias veces, observa que los profesores no ponen en práctica esto, sino que ellos dicen "uno aprende a resolver problemas satisfactoriamente resolviendo un gran número de problemas".

La primera tarea emprendida, fue investigar porqué las ideas de Polya no habían funcionado; revisó algunos estudios llevados a cabo en ciencias cognoscitivas e inteligencia artificial, encontró que la gente en estas áreas ha hecho programas de computadora donde se usa lógica simbólica y cálculo. Es necesario tomar en cuenta el orden para entender el proceso usado por los "resolvedores" de problemas de matemáticas.

La pregunta central fue "qué nivel de detalle es necesario para que el estudiante pueda en esos momentos usar las estrategias que una vez consideró útiles". El resultado nos dice porqué las ideas de Polya no funcionan en el salón de clase "la razón es que las estrategias heurísticas de Polya no son realmente coherentes en todo; la caracterización de Polya fue amplia y descriptiva en lugar de prescriptiva".

En resumen, las caracterizaciones de Polya son etiquetas bajo las cuales, se agrupan familias de estrategias relacionadas. Schoenfeld proporcionó varios ejemplos en los cuales una estrategia, caracterizada por Polya producía varias subestrategias similares, pero básicamente distintas.

Para cada estrategia discutida, Polya diseña actividades de aprendizaje:

i) Identificar el uso de una estrategia particular.

ii) Discutir la estrategia con suficiente detalle de una manera descriptiva.

iii) Proveer al estudiante con el apropiado grado de educación.

Schoenfeld reconoce que esta aproximación no fue suficiente, por ejemplo el estudiante, puede reconocer la estrategia, sin saber cuando usarla; como un resultado incluye un conjunto de estrategias administrativas como parte de la instrucción para realizar este punto. Los resultados obtenidos por Schoenfeld mostraron ser favorables en el uso de soluciones de problemas, sin embargo, notó que sus estudiantes lo hicieron bien porque ellos fueron cuestionados para usar las estrategias en un contexto específico aún con problemas complicados, ellos conocían las estrategias, el contenido y una posible aproximación del problema.

La siguiente fase de la investigación de Schoenfeld empezó cuando examinó el video que mostraba la solución de problemas en diferentes contextos, observó que los estudiantes por lo regular no usan más contenido matemático que el que les es familiar para resolver un problema.

ellos seleccionan una dirección y persisten en usarla no importa cuál sea: él sugirió actividades de aprendizaje que podrian ayudar a las formas de resolver problemas. uno tiene que extender el contexto y enfocarse en factores básicos que influencien las formas en los cuales los estudiantes resuelven problemas.

Schoenfeld vio que hay 4 dimensiones que influyen en la forma de como se resuelven problemas.

- Dominio del conocimiento.
- Estrategias cognoscitivas.
- Estrategias metacognoscitivas.
- Sistemas de creencias.

Dominio del conocimiento.

Incluye definiciones. hechos y procedimientos usados en el dominio matemático.

Estrategias cognoscitivas.

Incluyen estrategias heurísticas tales como descomposición del problema en problemas más simples, subobjetivos establecidos, diagramas de trazo, retrospectivas del trabajo.

Estrategias metacognoscitivas.

Involucran el monitorear la selección de estrategias mientras se resuelve el problema, es decir. decidir los tipos de cambio que necesitan ser hechos cuando una situación particular es problemática.

Sistemas de creencias.

Incluyen las formas en las cuales los estudiantes piensan de la matemática y de resolver problemas.

Schoenfeld [16] (87-89) subrayó la importancia de relacionar la naturaleza del desarrollo de la matemática. con el proceso de resolver problemas matemáticos: mencionó que el principal objetivo de aprender matemáticas. es ver la conexión y hacer sensibles las estructuras matemáticas. en realidad para alcanzar este objetivo los estudiantes tienen que discutir sus ideas, negociar y especular acerca de los posibles ejemplos y contraejemplos, que puedan confirmar o desechar sus ideas. El estableció lo siguiente: "para que los estudiantes vean a las matemáticas como una actividad sensible (agradable) de hacer. ellos tienen que sentirla interiormente". indicó que los estudiantes podrían aprender de los objetivos epistemológicos básicos de las instrucciones para resolver problemas: Hallar la solución de un problema matemático no es el fin de la aventura matemática. sino el punto inicial para hallar otras soluciones extenciones y generalizaciones.

Aprender matemáticas es un proceso activo que requiere disposición para conjeturar pruebas de ideas matemáticas. este proceso lleva a los estudiantes al desarrollo de nuevos contenidos matemáticos.

Schoenfeld [16] (1989) indica que es necesario considerar las actividades del salón de clases. como consistentes con aquellos objetivos epistemológicos. Por ejemplo. ayudar a los estudiantes a explotar lo que ellos conocen y usar su conocimiento efectivamente en el objetivo del curso.

Algunas de las actividades para la resolución de problemas:

1) Resolver nuevos problemas para demostrar a los estudiantes las soluciones encontradas durante el proceso de resolver problemas. halladas por ellos.
2) Mostrar videos de otros estudiantes resolviendo problemas.
3) Actuar como moderador mientras la clase entera discute los problemas y proveer alguna dirección.

Dividir la clase en grupos pequeños. en los cuales los problemas son discutidos y el instructor hará preguntas específicas que ayuden al estudiante a memorizar su proceso mientras se resuelve el problema.

Schoenfeld sugirió que el análisis de los estudiantes para resolver problemas incluiría:

- Su comprensión de las fuentes matemáticas.
- El uso de estrategias cognoscitivas y metacognoscitivas
- Conceptualización de las matemáticas y la resolución de problemas.

Según Mancera [10] (1993), en la actualidad algunas personas, consideran que un estudiante tiene formación matemática cuando muestra conocimiento y manejo de temas diversos de matemáticas.

Se privilegia la memoria, en vez de la capacidad de razonamiento.

Esta concepción ha propiciado muchos errores en la educación y formación de los estudiantes.

Se olvida frecuentemente que en la educación la pregunta clave no es ¿Qué?, sino ¿Para qué?. El contenido que se incorpora a los planes de estudio debe responder a necesidades sobre la formación de individuos o a perfiles de ciertas profesiones, pero también debe ser transmitido en formas adecuadas para el logro de las metas planteadas.

La matemática es una manera de "*Ver el mundo*", que permite participar en la creación y el descubrimiento.

El punto de despegue, fué el planteamiento de problemas y los intentos por resolverlos. "*Detrás de un gran tema de matemáticas hay un gran problema*". Incluso en la actualidad gran parte de la actividad matemática creativa es provocada por el surgimiento de un problema, por la inquietud de explorar nuevos horizontes. Sin embargo, no todos los problemas estuvieron ligados a necesidades sociales sino que los hay también provocados por el desarrollo de la teoría.

A pesar de la importancia que se da a los problemas en el desarrollo de la matemática, en los últimos 20 años se ha observado su ausencia en la enseñanza.

Tal vez como reacción a este abandono se ha planteado que los problemas matemáticos tienen un papel importante en la enseñanza.

Para Mancera [10] (1993) un problema debe ser una situación que despierte el interés del estudiante.

Hay consenso en que un problema no implica exclusivamente la aplicación de fórmulas o rutinas. Se espera que un problema propicie la reflexión. Entre nuestro estudiantes se requiere motivar esta curiosidad y actitud de búsqueda.

Los problemas que se refieran a situaciones conocidas por los estudiantes o que puedan ser entendidas por ellos, les permiten construir o imaginarse modelos para identificar las relaciones.

En relación con los aspectos didácticos, los problemas deben propiciar la presentación de muchas soluciones, porque la intención en el aula es buscar la discusión y asegurar que los estudiantes puedan resolver un problema de alguna manera, para evitar la frustración e incrementar su autoestima, con el fin de que se motiven por la posibilidad patente de enfrentar un problema a partir de sus propios recursos; con lo que saben o con lo que tienen. No importa que tengan limitaciones o defectos en la comunicación de sus ideas, pues la discusión permitirá corregir algunas de esas dificultades.

Mancera [10] (1993) señala que una de las objeciones principales para desarrollar el enfoque de solución de problemas es la falta de claridad de la manera en que se pueden alcanzar los objetivos educativos. Porque resolver un problema es una actividad que lleva mucho tiempo y esto limitaría el tratamiento de los contenidos que señala el programa.

En la enseñanza tradicional se considera que los problemas deben incluirse, pero al final de una clase expositiva donde se le indica al estudiante como resolverlos, o se le proporcionan las "herramientas" para construir la solución.

Se espera que una nueva propuesta pueda modificar la situación actual, pero lo que sí se conoce es que las prácticas tradicionales no han rendido los frutos esperados en el nivel medio superior. En los exámenes de diagnóstico de algunas facultades, como ingeniería, obtienen resultados insatisfactorios.

Los estudiantes resuelven problemas con los conocimientos que poseen, con las habilidades que tienen, con la perspectiva que les sienta mejor a su estilo. Eso está mal, si se queda en este nivel, no se exploran y mejoran las estrategias, y no se modifican los procedimientos erróneos.

El maestro debe utilizar las posibilidades de los alumnos como plataforma para construir el nuevo conocimiento.

Un alumno puede resolver un problema por una estrategia propia; esto puede hacer que dicha estrategia se arraigue en él y sea decisiva en un futuro, pero si somos capaces de mostrarle que esa es limitada o que existen otras mejores que le simplifican el trabajo, con toda seguridad que estará dispuesto al cambio.

En ésta nueva propuesta nuestro papel de maestro cambiará a la de orientador y coordinador de trabajo, y el papel del alumno se modificará, de una actitud pasiva y receptiva, a una de trabajo y búsqueda de sus propios caminos, en la resolución de problemas; se produce el ámbito propicio para la construcción del conocimiento.

Mancera [10] (1993) agrega que el enfoque de solución de problemas requiere una visión diferente no solo de la clase de matemáticas, sino también una revalorización de sus contenidos, metas y significados.

La perspectiva estructural y estática de las matemáticas ha conducido a desarrollar actitudes o creencias acerca de la solución de un problema. Cuando se le solicita a un alumno que encuentre la solución a un problema, algunas veces, entiende que sólo hay un camino para llegar a ella, por lo cual se tiene que aclarar que lo puede resolver de diversas formas.

La ventaja didáctica de esta actividad es la de evitar las inútiles repeticiones de procedimientos al resolver problemas del mismo tipo. Cuando los estudiantes discuten los problemas, resulta interesante la forma en que argumentan su propuesta, y como ellos mismos pueden identificar si la solución que proponen cumple, o no las condiciones solicitadas.

Por otra parte, se impulsa el desarrollo de aptitudes o habilidades matemáticas básicas como: flexibilidad del pensamiento, reversibilidad, generalización, estimación y transferencia, entre otras (Krutetskii; 1976)

La habilidad para resolver problemas, o mejor dicho, la aptitud para " hacer matemáticas", es lo más importante que puede aportarnos la escuela, ya sea como alumnos o como maestros. De nada sirve estudiar hasta el cansancio diversos temas de matemáticas si no aprendemos a relacionarlos, a utilizarlos para obtener nuevas estrategias.

Mancera [10] (1993) concluye que el usar los problemas como introducción a los temas del curso, permite a los estudiantes darse cuenta de la importancia, en términos de utilidad, de lo que se intenta abordar en clase. De esta forma, preguntas como: ¿Para que sirve?, quedan nulificadas o por lo menos, matizadas.

Evidentemente una propuesta como la presentada con anterioridad implicará modificar la tradicional "cátedra" de matemáticas. Requiere una transformación radical del trabajo del docente, en la que los estudiantes puedan discutir, exponer y valorar sus puntos de vista.

¿Cómo se puede desarrollar el pensamiento crítico sí no se ejerce continuamente en clase?. La matemática ha perdido este sentido educativo, y tenemos que recuperarlo.

Sobre todo hay que asegurarnos de que los estudiantes son capaces de procesar la información que obtienen. El conocimiento resulta inútil sí no se sabe como relacionarlo.

La matemática -se dice- tiene la función de apoyar a los estudiantes en el desarrollo del razonamiento.

¿Cómo se puede lograr esto por métodos que enfatizan la repetición y la imitación? Se aprende a leer, leyendo; a escribir, escribiendo; por extensión, podemos decir: se aprende matemáticas, haciendo matemáticas, participando con las creaciones personales, comprometiéndose en el descubrimiento de relaciones cuantitativas y espaciales.

La matemática no está acabada, no es un conocimiento terminado: se construye día a día, y en las aulas podemos participar en esa construcción creando nuestras matemáticas conjuntamente con nuestros alumnos. ¡Dejemos que las matemáticas entren a nuestra clase de matemáticas!.

Como se puede observar existen diversos estudios en cuanto a resolución de problemas. Estudios que a mi en particular se me hacen muy interesantes y acertados. Con esto quiero decir que comparto sus ideas.

En el inicio del CCH los profesores de matemáticas tenían presente que el alumno iba a ser el agente principal en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje. Tenían presente que el alumno debía reflexionar y participar activamente en el estudio del álgebra, calculo, etc. Aún así, algunos optaron por seguir un texto, que tampoco había como ahora. Otros más audaces empezaron a recopilar material o incluso a elaborarlo. Estos últimos se dieron cuenta entonces tal vez de manera diferente y sin una clara conciencia de lo que señalaba Schoendfeld (1987)

a) Identificar el uso de una estrategia en particular.
b) Discutir la estrategia con suficiente detalle de manera descriptiva.
c) Dar a los estudiantes un apropiado grado de entendimiento para su uso.

Todo esto ellos ponían en práctica, ahora como entonces los maestros están creando nuevo material para realizar su trabajo y en esto espero ayudar.

CAPITULO 2. PROPUESTA EDUCATIVA
"ECUACIONES LINEALES MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS"

En este capitulo se mencionan los temas de Matemáticas I, así como los objetivos de la unidad tanto generales como particulares. Se desarrollará el tema con problemas que se resuelven con diferentes métodos, que son por Tanteo, Diagrama, Graficación, Tabulación y Algebraico, siendo este último el de mayor interés para nosotros ya que una de las cosas que se pretende es que el alumno adquiera el lenguaje algebraico y sepa como obtener la información del problema para después obtener la ecuación lineal que lo resuelve. Teniendo un problema y resolviéndolo, al obtener su resultado nosotros alteramos la información del problema así como también su resultado para obtener otra serie de problemas como lo propone Schoenfeld. Se ve el mapa conceptual y por último, las partes de que consta la propuesta:

1) La planeación del curso. Solo es una sugerencia pero el profesor decidirá en que dosis se darán los problemas de acuerdo a las características de sus grupos.

2) Material didáctico. En donde el profesor verá que hay muchos ejercicios para que él seleccione solo algunos, basados en el método de Polya. También se ve la teoría de las ecuaciones y se aclaran dudas.

3) Los exámenes de evaluación. Con el examen de diagnostico se pretende ver qué conocimientos tienen los estudiantes para saber de donde partir para comenzar el tema. El objetivo del examen final es ver si logramos nuestro objetivo.

4) Ejercicios complementarios. Estos ejercicios se proponen para que el profesor los trabaje en conjunto con sus alumno, utilizando el método de Schoenfeld.

2.1 INTRODUCCIÓN.

En este capitulo se presenta una propuesta educativa para la enseñanza de la Unidad 2 "Ecuaciones Lineales" del curso de Matemáticas I del Colegio de Ciencias y Humanidades, en la cual se toman como bases teóricas, La Resolución de Problemas de Polya, Schoenfeld y Los Estándares Curriculares de la NCTM.

Se empieza con problemas sencillos (con naturales) que el maestro seleccionará solo algunos para después seleccionar otros de números Racionales y para finalizar propongo el problema de llenado de un tanque para trabajarlo con los alumnos así como los problemas marcados con asterisco "*".

La Propuesta Educativa fue diseñada de acuerdo al Plan de Estudios Actualizado del Colegio de Ciencias y Humanidades (1996).

La Unidad "Ecuaciones Lineales " es la segunda unidad del curso de Matemáticas I .

Primera Unidad : "Variación Proporcional y Funciones Lineales".

Las cinco últimas unidades son:
Sistemas de Ecuaciones Lineales
Ecuaciones Cuadráticas y Factorización
Geometría del Triángulo y Figuras Básicas
Prismas y Cilindros
Círculo y Esfera.

Como se especifica en el Programa los primeros cuatro temas de Álgebra y los últimos de Geometría, son independientes entre sí.

ver tablas 1,2 y 3

SECUENCIA DE UNIDADES POR SEMESTRE

1er SEMESTRE	2° SEMESTRE	3er SEMESTRE	4° SEMESTRE
MATEMÁTICAS I	**MATEMÁTICAS II**	**MATEMÁTICAS III**	**MATEMÁTICAS IV**
Variación proporcional y funciones lineales.	Funciones cuadráticas y aplicaciones.	Solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales.	Matrices y modelos matemáticos.
Ecuaciones lineales.	Expresiones racionales y con radicales.	Álgebra de los números complejos.	Técnicas de conteo y teorema del binomio
Sistemas de ecuaciones lineales.	Inecuaciones y regiones en el plano.	Ecuaciones de grado superior a dos.	Ajuste de curvas.
Ecuaciones cuadráticas y factorización.	Semejanza de figuras y teorema de Pitágoras.	Graficación de funciones.	Funciones exponenciales y logarítmicas.
Geometría del triángulo y figuras básicas.	Pirámides y conos.	Ecuación cartesiana de la recta.	Secciones cónicas.
Prismas y cilindros.	Razones trigonométricas y resolución de triángulos.	Ecuaciones cartesianas de la circunferencia y la parábola.	Ecuaciones cartesianas de la elipse y la hipérbola.
Círculo y esfera.	Funciones trigonométricas de un ángulo arbitrario.	Sistemas de coordenadas no rectangulares.	Áreas, volúmenes y métodos infinitesimales.

MAPA CURRICULAR DEL PLAN DE ESTUDIOS ACTUALIZADO

Semestre								Total Horas y Créd.
1°	Asignatura	Matemáticas I Álgebra y Geometría	Taller de Cómputo*	Química I	Historia Universal Moderna y Contemporánea I	Taller de Lectura, Redacción e Iniciación a la Investigación Documental I	Lengua Extranjera I	
	Horas	5	4	5	4	6	4	28 24
	Créditos	10	8	10	8	12	8	56 48
2°	Asignatura	Matemáticas II Álgebra y Geometría	Taller de Cómputo*	Química II	Historia Universal Moderna y Contemporánea II	Taller de Lectura, Redacción e Iniciación a la Investigación Documental II	Lengua Extranjera II	
	Horas	5	4	5	4	6	4	28 24
	Créditos	10	8	10	8	12	8	56 48
3°	Asignatura	Matemáticas III Álgebra y Geometría Analítica	Física I	Biología I	Historia de México I	Taller de Lectura, Redacción e Iniciación a la Investigación Documental III	Lengua Extranjera III	
	Horas	5	5	5	4	6	4	29
	Créditos	10	10	10	8	12	8	58
4°	Asignatura	Matemáticas IV Álgebra y Geometría Analítica	Física II	Biología II	Historia de México II	Taller de Lectura, Redacción e Iniciación a la Investigación Documental IV	Lengua Extranjera IV	
	Horas	5	5	5	4	6	4	29
	Créditos	10	10	10	8	12	8	58

Semestre		Primera Opción Optativas	Segunda Opción Optativas	Tercera Opción	Cuarta Opción Optativas	Quinta Opción Optativas	Total
5°	Asignatura	• Cálculo Integral y Diferencial I • Estadística y Probabilidad I • Cibernética y Computación I	• Biología III • Física III • Química III	Obligatoria Filosofía I 4 8 Optativa • Temas Selectos de Filosofía I	• Administración I • Antropología I • Ciencias de la Salud I • Ciencias Políticas y Sociales I • Derecho I • Economía I • Geografía I • Psicología I • Teorías de la Historia I	• Griego I • Latín I • Lectura y Análisis de Textos Literarios I • Taller de Comunicación I • Taller de Diseño Ambiental I • Taller de Expresión Gráfica I	
	Horas	4	4	4	4	4	28
	Créditos	8	8	8	8	8	56
6°	Asignatura	• Cálculo Integral y Diferencial II • Estadística y Probabilidad II • Cibernética y Computación II	• Biología IV • Física IV • Química IV	Obligatoria Filosofía II	• Administración II • Antropología II • Ciencias de la Salud II • Ciencias Políticas y Sociales II • Derecho II • Economía II • Geografía II • Psicología II • Temas Selectos de Filosofía II • Teorías de la Historia II	• Griego II • Latín II • Lectura y Análisis de Textos Literarios II • Taller de Comunicación II • Taller de Diseño Ambiental II • Taller de Expresión Gráfica II	
	Horas	4	4		4	4	28
	Créditos	8	8		8	8	56

TOTAL HORAS	166
TOTAL CRÉDITOS	332

La mitad de los alumnos cursará la asignatura en el primer semestre, la otra, en el segundo.
En quinto y sexto semestres los alumnos cursarán siete materias: Filosofía, una materia de las opciones primera, segunda, cuarta y quinta, una de las opciones primera o segunda y una más de las opciones cuarta o quinta o bien Temas Selectos de Filosofía.

MATEMÁTICAS I

UNIDAD 2: ECUACIONES LINEALES

HORAS	TEMÁTICA	OBJETIVOS EDUCATIVOS	ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS
10	•Problemas introductorios; su solución por inversión de operaciones y otros métodos, por ejemplo, por medio de una tabla de valores, de una gráfica o de un modelo o diagrama geométrico. •Métodos algebraicos de solución: operaciones con ambos miembros de una ecuación; trasposición de términos y solución de ecuaciones de la forma: $ax+b=c$; $ax+bx+c=d$; $ax+b=cx+d$; etcétera y casos sencillos de ecuaciones con paréntesis. •Planteo y solución de problemas que conducen a ecuaciones lineales.	**Objetivo particular:** El propósito de esta unidad es que el alumno desarrolle su habilidad para el planteo de problemas que conducen a ecuaciones lineales y su solución por métodos algebraicos. El profesor deberá tomar en cuenta que este es un tema conocido por los alumnos desde la secundaria por lo que en lugar de caer en repasos sistemáticos, deberán enfatizarse las actividades que permitan revisar lo olvidado y dotar de sentido a los procedimientos algebraicos. **Objetivo específico:** Al finalizar la unidad el alumno: —Sabrá plantear y resolver por métodos algebraicos problemas que dan lugar a una ecuación lineal operando con ambos lados de la igualdad, trasponiendo términos de un lado a otro y aplicando, cuando se requiera, la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma.	Usar modelos algebraicos lineales en situaciones concretas cercanas al estudiante para despertar su interés y atención hacia los tópicos que se abordan, en función del significado que poseen para él y de la utilidad práctica de tales conocimientos. Diversificar los problemas que se resuelven mediante el uso de ecuaciones lineales para enfatizar que una misma técnica puede; *a)* utilizarse en diferentes contextos; *b)* servir de fundamento para otras técnicas de resolución de problemas. Introducir casos de ecuaciones con decimales sólo hasta que los estudiantes hayan comprendido las técnicas de resolución en casos más simples. Obtener soluciones exactas y aproximadas de ecuaciones con decimales. Modelar y resolver problemas que involucren operaciones con fracciones. Destacar la relación entre ecuaciones y funciones de primer grado considerando a las primeras como casos especiales de estas últimas al adoptar alguna de las variables involucradas un valor específico. Solicitar un trabajo de investigación a los estudiantes sobre el desarrollo histórico del álgebra en relación al planteamiento y solución de ecuaciones lineales.	Número 4 Cap. 2

2.2 SUGERENCIAS PARA SU APLICACIÓN.

Al principio de la unidad, el profesor explica las características y los propósitos del plan de trabajo, el uso de materiales y evaluación, para que los estudiantes conozcan cómo se va a trabajar, qué se espera de ellos y cómo se va a evaluar.

Se pide a los alumnos formar equipos de 4 personas para trabajar lon problemas que el profesor llegará a plantear, se pretende que se resuelvan éstos para después discutirlos en el grupo. Esto enriquecerá y unificará los conocimientos del tema.

Para apoyar y reforzar el conocimiento se dejarán tareas, cuyas dudas serán resueltas en la clase.

De esta forma tenemos que:

a) En los problemas de Tanteo se pretende que los alumnos resuelvan los problemas a través de proponer, más o menos un valor solución, factible para después realizar los operaciones pertinentes y verificar que puede o no cumplir con las condiciones del problema, lo cual significa que si no cumple debe proponer otro valor para realizar las operaciones pertinentes hasta encontrar la solución correcta.

b) En los problemas de Diagrama se espera que los alumnos se apoyen en el uso de dibujos o diagramas, para poner sus datos en el dibujo y poder encontrar la solución del problema.

c) En los problemas de Tabulación los datos se escriben en una tabla y se encuentran los múltiplos de los datos que tenemos con la información dada, mediante los cuales se obtiene el valor solución.

d) En los problemas Gráficos se pretende que ellos puedan elaborar una gráfica a partir de los datos del problema, o sea dados algunos puntos se grafican, de donde pueden localizar el valor solución del problema.

e) En los problemas Algebraicos se busca que los alumnos puedan a partir del enunciado reconocer los datos y las incógnitas en el problema para poder pasarlo al lenguaje algebraico y después poder plantear y resolver la ecuación planteada por el problema.

Planeación de la Unidad 2 del Curso de Matemáticas I "Ecuaciones Lineales"

De acuerdo con el programa de estudio de Matemáticas I del CCH (1996) los objetivos de la unidad son:

Objetivos Generales:

Propiciar la solución de problemas, buscando que los conocimientos matemáticos adquieran sentido para los alumnos y se desarrolle su capacidad de trabajo personal, lo mismo que sus actitudes para la investigación.

El estudio de la Unidad 2 de Matemáticas I contribuirá a :

- La consolidación de significados y a la práctica frecuente de los procedimientos para operar con expresiones polinomiales y resolver ecuaciones lineales y cuadráticas.
- El estudio de las funciones lineales y sus gráficas, comportamiento y aplicaciones a la solución de problemas.

Objetivo Particular:

El propósito de esta unidad será que el alumno desarrolle su habilidad para el planteamiento de problemas que conduzcan a ecuaciones lineales y a su solución por métodos algebraicos.

Objetivos Específicos:

Plantear y resolver por métodos algebraicos problemas que dan lugar a una ecuación lineal.

Los contenidos de la unidad son:

° Problemas introductorios que se resuelven por diferentes métodos, entre los que se encuentran:

Método de Tanteo

Método de Diagrama o Modelo Geométrico

Método Gráfico

Método de Tabulación

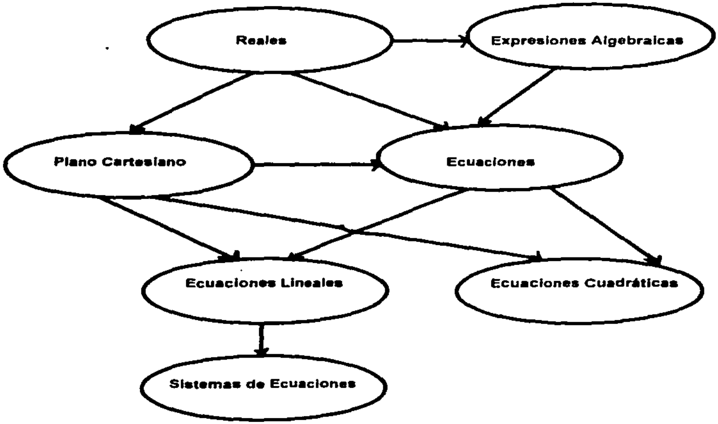
° Métodos Algebraicos de Solución.

° Problemas que conducen a ecuaciones lineales y su solución por el Método Algebraico.

Luego a partir del siguiente mapa conceptual de "Ecuaciones Lineales", podemos observar que para abordar esta unidad se requiere que el alumno conozca:

Números Reales, Expresiones Algebraicas y Plano Cartesiano.

Mapa conceptual



Así la propuesta educativa consta de cuatro partes:

La planeación del curso
Los materiales didácticos
El examen de evaluación
Ejercicios complementarios.

Y para la implementación de esta propuesta educativa:

- El profesor deberá propiciar la socialización del trabajo entre los estudiantes permitiéndoles la discusión en equipo y en grupo, de las diversas ideas matemáticas, al igual que alentar el uso de diferentes formas de expresión de las mismas.
- Muchos contenidos deberán tratarse a través de ejemplos. Las nociones y procedimientos matemáticos deberán introducirse mediante actividades y problemas que los doten de significado; las precisiones teóricas deberán establecerse cuando los alumnos dispongan de la experiencia y los ejemplos suficientes para garantizar su compresión.
- La deducción deberá abordarse a niveles locales y no bajo una perspectiva axiomática.
- Los conocimientos por aprender deben surgir como necesidades en la solución de problemas.
- Promover el desarrollo de estrategias para la resolución de problemas.

La etapa de planeación implica seleccionar y llevar a cabo uno o más métodos para resolver problemas. Algunos de los métodos útiles, es resolverlos por Tanteo, Diagrama Geométrico, Tabulación o Algebraico.

Se dispone de un total de 10 horas distribuidas de la siguiente manera:
(2 semanas) 4 clases de 2 horas y 2 clases de 1 hora.

Actividades:

Primera Clase. (2 horas)

Examen Diagnóstico

Introducción:

Problema 1 (Método de tanteo)

Problema 2 (Método de Diagrama Geométrico)

Tarea 1:

a) Problema 3 (Método de tanteo).

b) Repaso de las Propiedades de los números R.

c) Trabajo de Investigación Sobre el Desarrollo Histórico del Álgebra

Segunda Clase. (2 horas)

Problema 4 (Método gráfico)

Problema 5 (Método de tabulación)

Problema 6 (Método gráfico)

Problema 7 (Método de tabulación)

Tarea 2 :

a) Problema 8 (Método de tabulación).

b) Hacer un resumen de los métodos algebraicos de solución.

Tercera Clase. (1 hora)

Revisar y aclarar los métodos algebraicos de solución.

Tarea 3:

a) Resolver 3 ejercicios aplicando los métodos algebraicos.

b) Problema 9 (Método algebraico)

Cuarta Clase (2 horas).

Problema 10 (Método algebraico)

Problema 11 (Método algebraico)

Problema 12 (Método algebraico)

Tarea 4. Problema 13 (Método algebraico).

Quinta clase (2 horas)

Se sugiere resolver problemas del material complementario (*)

Problema 14 (Método de diagrama)

Problema 14 (Método de tabulación)

Problema 15 (Método de tabulación)

Integración del material estudiado en las sesiones anteriores.

Tarea 5.

Problema 16 (Método tanteo)

Problema 16 (Método diagrama)

Problema 16 (Método algebraico)

Sexta Clase. (1 hora)

Examen final.

2.3 MATERIAL DIDACTICO.

Actividades:

Primera Clase (2 horas)

Introducción

Vamos a estudiar el tema de ecuaciones lineales. La importancia que tiene este tema es que está relacionado con el tipo de ecuaciones más sencillas que hay en la teoría algebraica, por ejemplo, $ax + b = c$, $ax + bx + c = d$, $ax + b = cx + d$, etcétera ó ecuaciones sencillas con paréntesis. Además de que es un medio propicio para aplicar y adquirir práctica en el uso de las reglas algebraicas y de las propiedades de los números reales. Como los problemas que están relacionados con ecuaciones líneales son en cierta forma "sencillos", considero que es un buen punto de partida para enseñarles las diferentes formas de "atacar ", plantear y encontrar la solución de un problema dado, esto es, que aprendan a **razonar matemáticamente**. De esto dependerá la confianza que tengan en su capacidad para hacer matemáticas y poder aplicarla como herramienta en otras áreas de estudio.

Utilizaremos el **Método de Polya** para la solución de problemas, que consiste de los siguientes pasos:

* Entender el problema.
* Diseñar un plan.
* Llevar a cabo el plan.
* Regresar a analizar el proceso de solución.

Cuando se quiere resolver un problema puede utilizarse la siguiente guía para la resolución de problemas:

1.- ENTENDER EL PROBLEMA.

¿Qué trato de encontrar?

¿Qué datos tengo?

¿Cuál es la condición?

¿Qué deseo obtener ?

2.- DISEÑAR UN PLAN

¿Cuál es la incógnita?

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

¿Cuáles datos necesito para obtener el valor de la incógnita?

¿He resuelto algún problema similar?

¿Qué otros métodos puedo utilizar para resolver el problema?

3.- LLEVAR A CABO DICHO PLAN.

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

¿Encontré la solución al problema?

¿Encontré otros métodos para resolver el problema?

4.- REGRESAR A ANALIZAR EL PROCESO DE SOLUCIÓN

¿ Parece razonable la solución?

¿Establecí la solución con claridad?

La etapa de planeación implica la selección para llevar a cabo uno o más métodos para resolver problemas. Uno de los métodos, es resolverlos por tanteo.

Problema 1 (Método del Tanteo).

Un número es mayor en 12 respecto a otro . La suma de los dos números es 48. ¿Cuáles son los dos números?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Dos números

¿Qué datos tengo?

Un número es mayor en 12 respecto a otro y la suma de los dos números es 48.

2. Diseñar un plan.

¿Por qué medio puedo encontrar el valor de las incógnitas?

Por el método de tanteo.

3. Llevar a cabo dicho plan.

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

5 como primer número. $5 + 12 = 17$, el segundo número

$17 + 5 = 22$ Muy bajo. Intentemos con un número más grande.

20 como primer número. $20 + 12 = 32$, el segundo número

$20 + 32 = 52$ Alto, pero muy cerca. Intentemos con un número más chico.

18 como primer número. $18 + 12$ cx $= 30$, el segundo número

$18 + 30 = 48$ Correcto.

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que $18 + 30 = 48$ y $30 = 18 + 12$

Problema 2 (Método Diagrama o Geométrico).

La distancia entre la superficie del mar y la cima de una montaña submarina en el Océano Pacífico es de 8700 metros. La distancia desde la base de la montaña hasta la superficie es de 14250 metros. ¿Cuál es la altura de esta montaña?

1. Entender el problema.

¿Qué trato de encontrar?

¿Cuál es la altura de la montaña?.

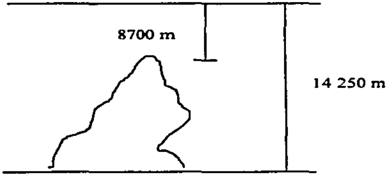
¿Qué datos tengo?

De la base a la superficie del mar hay 14250 metros; y de la cima de la montaña a la superficie del mar se tienen 8700 metros.

2. Diseñar un plan.

Hacemos un dibujo que ilustre la situación del problema

3. Llevar a cabo dicho plan.



¿Cuáles datos necesito para obtener el valor de la incógnita?

La altura de la base de la montaña a la superficie del mar (14250 metros), y la altura de la cima de la montaña a la superficie (8700 metro).

altura = 14250 - 8700 = 5550 m

¿Cuál es el resultado?

La altura de la montaña es 5550 m.

4.- Regresar a analizar el proceso de solución.

¿Parece razonable la solución ?

Sí, pues al sumar la altura de la montaña que encontramos con la distancia de la cima de la montaña a la superficie del mar, obtenemos la distancia de la base de la montaña a la superficie.

Tarea 1:

a) Problema 3 (Método de Tanteo).

Un número es cuatro veces mayor que otro. La suma de éstos es 60, ¿cuáles son esos números?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Dos números

¿Qué datos tengo?

60 que es la suma de los dos números y uno de ellos es cuatro veces mayor que el otro número.

2. Diseñar un plan.

¿Por qué medio puedo encontrar el valor de las incógnitas?

Por el método de tanteo, por ejemplo.

3. Llevar a cabo dicho plan.

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

5 como primer número. 4 * 5 = 20, el segundo número

5 + 20 = 25 Muy bajo. Intentemos con un número más grande.

20 como primer número. 4 * 20 = 80, el segundo número

20 + 80 = 100 Alto. pero muy cerca. Intentemos con un número más chico.

18 como primer número. 4 * 18 = 72, el segundo número

18 + 72 = 90 Alto. pero muy cerca. Intentemos con un número más chico.

15 como primer número. 4 * 15 = 60, el segundo número

15 + 60 = 75 Alto. pero más cerca. Intentemos con un número más chico.

7 como primer número. $4 * 7 = 28$, el segundo número

$7 + 28 = 35$. Muy bajo, pero muy cerca. Intentemos con un número más grande.

12 como primer número. $4 * 12 = 48$, el segundo número

$12 + 48 = 60$ Correcto.

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que $12 + 48 = 60$ y $48 = 4 * 12$

b) Repaso de las propiedades de los números Reales,

sugerencia bibliografica, Álgebra Barnett / Nolasco.

c) Trabajo de investigación sobre el desarrollo histórico del Álgebra en relación al planteamiento y solución de ecuaciones lineales (1 semana).

Iniciación al Algebra

Martín Manuel Socas

Editorial Síntesis

(Ecuaciones lineales)

Propiedades de los Números Reales [19]

(Material para que el alumno se apoye para la parte b) de la tarea 1)

El conjunto de los números Reales tiene definidas dos operaciones binarias, la suma +, y el producto *, las cuales operarán sobre éstos números. Además éstas operaciones cumplen con la popiedad de cerradura. Esto es si sumo o multiplico dos números Reales, me da otro número Real hora bien, para cualquier terna de números Reales a, b y c se tiene que se cumplen las siguientes propiedades:

Para números Reales a, b y c	Adición	Multiplicación
Propiedad Conmutativa	a + b = b + a	a * b = b * a
Propiedad Asociativa	(a + b) + c = a + (b + c)	(a * b) *c = a *(b * c)
Propiedad del elemento Neutro	a + 0 = 0 + a = a **(Al 0 se le conoce como elemento neutro de la adición)**	a * 1 = 1 * a = a **(al 1 se le conoce como elemento neutro de la multiplicación)**
Propiedad de la existencia del Inverso	a + (- a) = (- a) + a = a **(-a es el inverso aditivo de a)**	$a * \frac{1}{a} = \frac{1}{a} * a = 1$ $a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$ $a \neq 0$ ($\frac{1}{a} = a^{-1}$ **se le conoce cono el inverso multiplicativo o recíproco de a)**
Propiedad Distributiva (de la Multiplicación sobre la Adición)	a *(b + c) = a * b + a * c	

Resolver ecuaciones como $x + 5 = -7$, es dejar a la variable sola en uno de los lados de la ecuación. Para conseguir esto se pueden utilizar las siguientes propiedades.

Propiedad aditiva de la igualdad.

Para toda terna de números reales a, b y c, si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.

Ejemplo. Resolver la ecuación $x + 5 = -7$

$x + 5 = -7$	sumamos algún número a 5 para "deshacernos" del 5
	como -5 es el inverso aditivo de 5 entonces $5 + (-5) = 0$
$x + 5 + (-5) = -7 + (-5)$	sumamos a ambos lados -5
$x + 0 = -12$	como 0 es el neutro aditivo
$x = -12$	

Otra propiedad util es

Propiedad multiplicativa de la igualdad.

Para toda terna de números reales a, b y c, si $a = b$, entonces $a * c = b * c$

Aclaración, se acostumbra denotar una multiplicación con los signos: "( )", "*", "x" y "ab".

Por ejemplo. Resolver la ecuación $12s = 1440$

$12s = 1440$	multiplicamos 12s por algún número para "deshacernos" del 12
	como $\frac{1}{12}$ es el inverso multiplicativo de 12, $12 * \frac{1}{12} = 1$
$12s * \frac{1}{12} = 1440 * \frac{1}{12}$	multiplicamos ambos lados por $\frac{1}{12}$
$1s = 120$	como 1 es el neutro multiplicativo
$s = 120$	

Hay ejemplos en los cuales es necesario utilizar ambas propiedades.

Para resolver ecuaciones, podemos necesitar aplicaciones de las propiedades multiplicativa y aditiva de la igualdad

Ejemplo. Resolver la ecuación $3x + 4 = 13$

$$3x + 4 = 13$$

$$3x + 4 + (-4) = 13 + (-4)$$ utiliza la propiedad aditiva al sumar -4 en ambos lados

$$3x = 9$$

$$3x * \frac{1}{3} = 9 * \frac{1}{3}$$ utiliza la propiedad multiplicativa al multiplicar ambos lados por $\frac{1}{3}$

$$x = 3$$

Verificación: $\underline{3x + 4 = 13}$

$3(3) + 4$	13
$9 + 4$	13
13	13

$x = 3$ es la solución correcta.

Reducción de términos semejantes.

Si hay términos semejantes en un lado de la ecuación, los reducimos,

Ejemplo. Resolver la ecuación $6x + 2x = 15$.

$$6x + 2x = 15$$

$8x = 15$ reduce términos semejantes

$8x * \frac{1}{8} = 15 * \frac{1}{8}$ multiplica ambos lados por $\frac{1}{8}$

$x = \frac{15}{8}$

Ecuaciones lineales con paréntesis.

Resolver la ecuación $2(2y + 3) = 14$

$2(2y + 3) = 14$

$4y + 6 = 14$ utilizando la propiedad distributiva

$4y + 6 + (-6) = 14 + (-6)$ utilizando la propiedad aditiva

$4y = 8$

$4y * \frac{1}{4} = 8 * \frac{1}{4}$ utilizando la propiedad multiplicativa

$1y = 2$

$y = 2$

Resolver.

$3(n - 2) - 1 = 2 - 5(n + 5)$

$3n - 6 - 1 = 2 - 5n - 25$ aplicando la propiedad distributiva

$3n - 7 = -5n - 23$ simplifica, agrupando términos semejantes.

$3n + 5n - 7 = -5n + 5n - 23$ utiliza la propiedad aditiva.

$8n - 7 = -23$

$8n - 7 + 7 = -23 + 7$

$8n = -16$

$\frac{1}{8} * 8n = \frac{1}{8} * (-16)$ utiliza la propiedad multiplicativa.

$n = -2$

Verificando:

$$3\,(n - 2) - 1 = 2 - 5\,(n + 5)$$
$$3\,(-2 - 2) - 1 = 2 - 5\,(-2 + 5)$$
$$3\,(-4) - 1 = 2 - 5\,(3)$$
$$-12 - 1 = 2 - 15$$
$$-13 = -13$$

n = - 2 es la solución correcta.

Segunda Clase. (2 horas)

Problema 4 (Método Gráfico).

Ana camina a 4 km/h ¿Cuántos kilometros recorre en 5 horas?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

El número de kilómetros que caminó Ana.

¿Qué datos tengo?

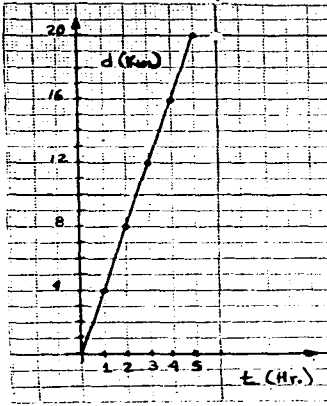
La velocidad que camina Ana es 4 km en cada hora y ha caminado durante 5 horas.

2. Diseñar un plan.

¿Por qué medio puedo encontrar el valor de la incógnita?

Por ejemplo haciendo una gráfica que represente la situación descrita.

3. Llevar a cabo dicho plan.



t (Hr.)	d(Km.)
0	0
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

En una hora camina 4 kilómetros, en dos horas camina 8 kilómetros y estos dos puntos determinan una recta. Por lo tanto la gráfica muestra que en 5 horas camina 20 kilómetros.

4. Regresar a analizar el proceso de solución.

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que si en 1 hora camina 4 km, en 5 horas camina 5 * (4 km) = 20 km

Problema 5 (Método de tabulación).

Lupe va a un almacén y observa que varios vestidos cuestan $ 87. Si tiene $1000 ¿para cuántos vestidos le alcanza?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

El número de vestidos que se puede comprar.

¿Qué datos tengo?

Un vestido cuesta $ 87 y tiene $ 1000 para gastar.

2. Diseñar un plan.

¿Por qué medio puedo encontrar el número de vestidos?

Por ejemplo haciendo una tabla.

3. Llevar a cabo dicho plan.

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$	87	174	261	348	435	522	609	696	783	870	957	1044

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

La tabla muestra que podemos comprar 11 vestidos.

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que 11 * 87 = 957 y le quedarian $ 43, lo cual no es suficiente para comprarse otro vestido.

Problema 6 (Método gráfico).

El modelo a escala de un avión experimental mide 2.5 metros de la punta de un ala a la punta de la otra. El avión real tendrá 60 metros entre esas mismas puntas. Si el modelo cabe justo debajo de un banco de trabajo de ½ metro de altura, ¿Qué altura debe tener el hangar del avión?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Los metros de altura del hangar

¿Qué datos tengo?

el modelo mide de un ala a la otra 2.5 metros,

el avión real tendrá 60 metros,

el modelo cabe debajo de un banco de ½ metro de altura.

2. Diseñar un plan.

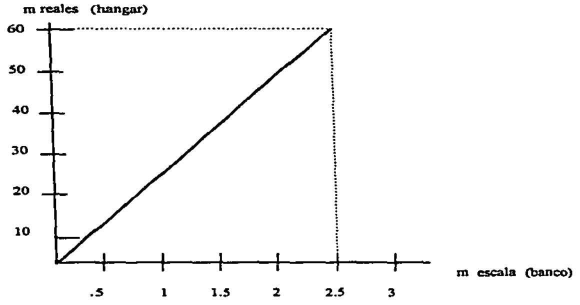
¿Cuál es la incógnita?

La altura real del hangar.

¿Por qué medio puedo encontrar la altura de hangar?

Haciendo una gráfica que represente la situación. Debido a que los rangos de las distancias que se manejan a nivel del módelo a escala y en la realidad son muy diferentes, nos vemos obligados a utilizar dos escalas distintas para poder realizar una gráfica en la cual se pueda apreciar con mayor claridad la situacion que se esta planteando en el enunciado del problema.

3. Llevar a cabo dicho plan.



¿Cuáles resultados se obtuvieron?

La gráfica muestra que 2.5 m del modelo, corresponden a una longitud real de 60 m; obviamente, para longitud cero del modelo, tenemos longitud real nula.

Estos dos puntos determinan una recta, trazándola se puede ver que 2.0 m de longitud del modelo corresponden a una longuitud real de 48 mts y análogamente 1.0 m a escala, corresponden a 24 m reales. Por lo tanto para 0.5 m a escala la altura real debe ser de 12 m.

4. Regresar a analizar el proceso de solución.

¿Parece razonable la solución?

Si, ya que observando la gráfica, su altura concuerda con la escala, pues

0.5 metros =12 metros

1 metros = 24 metros

1.25 metros = 30 metros

2 metros = 48 metro

2.5 metros = 60 metros.

Problema 7 (Método tabular)

Según la escala de un mapa de carreteras, 2 cm representan 40 km. Si en el mapa dos ciudades están separadas por 10 cm, ¿Qué distancia hay entre ellas?

1.-Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

La distancia de las ciudades.

¿Qué datos tengo?

2 cm representan 40 km,

en el mapa estan separadas las dos ciudades por 10 cm.

2.-Diseñar un plan

¿Cuál es la incógnita?

La distancia real de las dos ciudades.

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Planteando la siguiente tabla.

3.-Llevar a cabo dicho plan

cm	2	4	6	8	10	12
km	40	80	120	160	200	240

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

En la tabla se puede ver que la distancia real es de 200 km.

4.-Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, pues si vemos en la tabla concuerda resultado, por el renglón correspondiente a 10 cm,

esto es si 2 cm representan 40 km,

4 cm representan 80 km,

8 cm representan 160 km,

por lo tanto

10 cm representan 200 km.

Tarea 2:

a) Problema 8. Método Tabla de Valores.

Los empleados de una línea de carga estiman que pueden cargar 8 cajas en 20 minutos. A este ritmo, ¿ Cuántas cajas pueden cargar en una hora?

1.- Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuántas cajas pueden cargar en una hora.

¿Qué datos tengo?

Cargan 8 cajas en 20 minutos.

2.-Diseñar un plan

¿Por qué medios puedo saber el número de cajas que pueden cargar?

Planteando la siguiente tabla.

3.-Llevar a cabo dicho plan

min	cajas
20	8
40	16
60	24
80	32

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

De la tabla se puede apreciar que en una hora cargaran 24 cajas.

4.-Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, pues si vemos la tabla es correcta , esto es si en 20 min cargan 8 cajas

40 min cargan 16 cajas,

por lo tanto en 60 min cargan 24 cajas.

b) Estudiar, investigar (hacer un resumen) y realizar algunos ejercicios sobre los "Métodos Algebraicos de Solución", "Transposición de Términos", "Solución de Ecuaciones Lineales de la forma $5x + 8 = 18$; $3x + 7x + 1 = 21$; $5x - 3 = 2x - 2$; etcétera" y ecuaciones que contengan paréntesis.

Métodos algebraicos para la solución de ecuaciones lineales
(Material de apoyo para la parte b) de la tare 2)

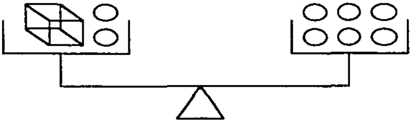
En el año 2000 a. C., los babilonios utilizaban métodos algebraicos para resolver problemas. Sin embargo, no usaban símbolos matemáticos más complejos que los numerales primitivos. Esta falta de símbolos en el álgebra persistió durante muchos siglos. Pero apenas cerca del año 1500 d. C., el álgebra simbólica comenzó a emerger.

En álgebra usamos símbolos para representar números. Uno de los tipos de símbolos que usamos se llama *variable*. Una variable es una letra, como v, x o m, que representa uno o más números.

Una expresión puede constar de uno, dos ó más números, en los que aparecen signos de operación (+, -, *, /). Una expresión que contiene al menos una *variable*, se llama *expresión algebraica*. Podemos reemplazar una *variable* con un número, que se llama *sustituto* de la variable. Para evaluar una expresión algebraica, sustituimos cada variable con un número y realizamos los cálculos. Los valores (sustituciones) que hacen verdadera a la ecuación se llama solución y Resolver una Ecuación significa encontrar todas sus soluciones.

Exploración.

Un cubo y dos canicas equilibran a seis canicas en una balanza. Si cada canica pesa un kilogramo, ¿cuánto pesa el cubo?



Una ecuación es una afirmación matemática que utiliza el signo = para establecer que dos expresiones representan el mismo número o son equivalentes. Esto es, una ecuación es como una balanza; si agregamos el mismo peso en ambos lados de la balanza, ésta permanecerá en equilibrio. De la misma manera, si sumamos la misma cantidad en ambos lados de una ecuación, las expresiones seguirán siendo equivalentes.

Si x representa el peso del cubo, entonces se tiene que

$$x + 2 = 6$$

Al número que resuelve la ecuación se le llama *solución*.

Apoyandonos en el módelo de la balanza, por las propiedades de los Reales y propiedades de la igualdad en una ecuación se puede sumar, restar, multiplicar y dividir las dos expresiones al lado del signo "=" por el mismo número y se obtendrá una ecuación equivalente (con la misma solución).

a) Usando lo antes dicho debemos restar 2 en ambas expresiones

$$x + 2 + (-2) = 6 + (-2)$$

$$x + 2 - 2 = 6 - 2$$

$$x = 6 - 2$$

$$x = 4$$

esto es, el cubo pesa 4 kilogramos. Solución $x = 4$

b) Análogo a lo anterior, si tuvieramos que resolver una ecuación como

$$x + 5 = 9$$

$$x + 5 - 5 = 9 - 5$$

$$x = 4$$

La solución es 4.

c)

$$x + 7 = 10$$

$$x + 7 - 7 = 10 - 7$$

$$x = 3$$

La solución es 3.

d)

$$3s = 12$$

$$3s/3 = 12/3$$

$$s = 4$$

La solución es 4.

e)

$$4x + 5 = 13$$

$$4x + 5 - 5 = 13 - 5$$

$$4x = 8$$

$$4x/4 = 8/4$$

$$x = 2$$

La solución es 2

Dos ecuaciones con las mismas soluciónes son *equivalentes.*

Ecuaciones equivalentes:	misma solución	Ecuaciones no equivalentes:	soluciones distintas
$x + 4 = 10$	6	$x + 8 = 10$	2
$x + 6 = 12$	6	$x + 8 = 14$	6

Teniendo en mente el concepto de la balanza, podemos decir que las ecuaciones

$$x + 7 = 12,$$

y

$$x + 9 = 14,$$

son equivalentes ya que a la primera ecuación se le sumó 2 para obtener la segunda.

De lo anterior podemos concluir que, se obtienen ecuaciones equivalentes si:

- **sumamos el mismo número en las dos expresiones de una ecuación,**
- **restamos el mismo número en las dos expresiones de una ecuación,**
- **multiplicamos las dos expresiones de una ecuación por el mismo número.**
- **dividimos las dos expresiones de una ecuación por el mismo número distinto de cero.**

Ejemplo:

- Las dos ecuaciones siguientes

$$x + 2 = 5$$

y

$$x + 5 = 8$$

son equivalentes porque a las dos expresiones, de la primer ecuación, se les sumó 3 a cada miembro para obtener la segunda

también

$$4x = 20$$

y

$$x = 5$$

son ecuaciones equivalentes porque se dividió la primer ecuación entre 4.

$$\frac{1}{3}x = 8$$

y

$$\frac{3}{3}x = 24$$

son equivalentes ya que la segunda se obtuvo de la primera al multiplicarla por 3. Obsérvese que la segunda ecuación es equivalente también a

$$x = 24$$

Usando propiedades de los Reales, resolveremos las siguientes ecuaciones.

$4x + 12 = 6x$

$4x - 6x = -12$

$-2x = -12$

$2x = 12$

$x = 12 / 2$

$x = 6$

$4x + 12 - 6x = 6x - 6x$

$4x - 6x + 12 = 0$

$-2x + 12 - 12 = -12$

$-2x = -12$

$x = \frac{-12}{-2}$

$x = 6$

$-3x + 4 = x + 1$

$-3x - x + 4 = 1$

$-4x = 1 - 4$

$-4x = -3$

$x = \frac{-3}{-4}$

$x = \frac{3}{4}$

$x + 3x + (x + 3x) - 60 = 180$

$4x + 4x - 60 = 180$

$8x = 180 + 60$

$8x = 240$

$x = 240 / 8$

$x = 30$

$(2a + 1) + (2a + 3) + (2a + 5) = 123$

$6a + 9 = 123$

$6a = 123 - 9$

$6a = 1146$

$a = 114 / 6$

$a = 19$

$4 + 5x / 2 = 14$

$5x / 2 = 14 - 4$

$5x / 2 = 10$

$5x = 10 (2)$

$5x = 20$

$x = 20 / 5$

$x = 4$

Tercera Clase (1 hora).

Lluvia de ideas para estudiar y aclarar los métodos algebraicos de solución (tarea 1 y 2) e integración del material estudiado en las clases anteriores.

Al resolver problemas no hay un camino único para llegar a la solución. Como podemos observar de los problemas anteriores para encontrar sus soluciones utilizamos varios metódos (método de tanteo, diagrama o modelo geométrico, gráfico y de tabulación)

Tarea 3:

a) Resolver tres ejercicios aplicando los métodos algebraicos.

Problema 9 (Método Algebraico).

El punto de ebullición del alcohol etílico es de 78.3 °c, 13.5 °c más que el del alcohol metílico. ¿Cuál es el punto de ebullición del alcohol metílico?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Punto de ebullición del alcohol metílico?

¿Qué datos tengo?

Punto de ebullición del alcohol etílico: 78.3 °c. Esto es 13.5 °c más que el del alcohol metílico.

2. Diseñar un plan.

¿Cuál es la incógnita?

Sea y = punto de ebullición del alcohol metílico

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

A través de la siguiente ecuación

$$y + 13.5 = 78.3$$

3. Llevar a cabo dicho plan.

$$y = 78.3 - 13.5$$

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$y = 64.8$ °c (Punto de ebullición del alcohol metílico)

4. Regresar a analizar el proceso de solución.

¿Parece razonable la solución?

Si, ya que ésta temperatura es menor que la del alcoho etílico, en 13.5°.

Cuarta Clase (2 horas)

Problema 10 (Método Algebraico).

En un cine entraron en taquilla $438.75 por 117 clientes. ¿Cuál era el precio del boleto?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuál es el precio del boleto.

¿Qué datos tengo?

Entradas en taquilla: $438.75. Número de clientes: 117

2. Diseñar un plan.

¿Cuál es la incógnita?

Sea z = el precio del boleto

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Planteando la siguiente ecuación y resolviéndola

$$z\ (117) = 438.75$$

3. Llevar a cabo dicho plan

$$z = 438.75/(117)$$

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$$z = 438.75/117$$

$$z = \$3.75$$

4. Regresar a analizar el proceso de solucion.

¿Parece razonable la solución?

Si, porque si tenemos 117 clientes y el precio del boleto es de \$3.75 obtenemos \$ 438.75.

Problema 11 (Método Algebraico).

La población de una ciudad en expansión es de 5 200 habitantes. Si la población crece 300 por año, ¿dentro de cuantos años llegará la población a 9 400 personas?.

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

En cuántos años la población será de 9 400 personas.

¿Qué datos tengo?

En la población hay 5 200 habitantes y crece 300 por año.

2. Diseñar un plan.

¿Cuál es la incógnita?

Sea x = número de años.

300 x = la población que habrá aumentado despues de x años.

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Planteando la ecuación y resolviéndola

Población actual + Incremento de población = Población futura

$$5\,200 + 300x = 9\,400$$

$$300x = 9\,400 - 5\,200$$

$$300x = 4\,200$$

3. Llevar a cabo dicho plan.

$$x = \frac{4200}{300}$$

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$$x = 14 \text{ años}$$

4. Regresar a analizar el proceso de solución.

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que 300 (14) = 4 200, entonces

5 200 habitantes que hay más 4 200 que es el incremento en 14 años dan un total de 9 400, que es lo que se quería tener.

Problema 12 (Método Algebraico),

Una universidad realiza investigaciones para determinar un método de distribución de terminales de computadoras en su campus. Considera dos opciones. La opción 1 es una minicomputadora de $65 000 cuyas terminales cuestan $1 500 cada una. La opción 2 es un sistema de red de $20 000 cuyas terminales cuestan $3 000 cada una. ¿Cuántas terminales tendría que instalar la universidad para que el costo total de la opción 2 fuera igual al costo total de la opción 1?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuántas terminales tendría que instalar la universidad para que el costo total del sistema de red fuera igual al costo total de la minicomputadora

¿Qué datos tengo?

La minicomputadora cuesta $65 000 y cada terminal $1 500 opción 1.

La red cuesta $20 000 y cada terminal $3 000 opción 2.

2. Diseñar un plan.

¿Cuál es la incógnita?

Sea x = el número de terminales, entonces

$1500\,x$ = costo de x número de terminales para la opción 1, y

$3000\,x$ = costo de x terminales para la red opción 2.

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Planteando la siguiente ecuación y resolviéndola

Costo de la opción 1 = Costo de la opción 2

$$65000 + 1500\,x = 20000 + 3000\,x$$

3. Llevar a cabo dicho plan.

$$65000 + 1500\,x = 20000 + 3000\,x$$

$$65000 - 20000 = 3000\,x - 1500\,x$$

$$45000 = 1500\,x$$

$$\frac{45000}{1500} = x$$

¿Cuál es el resultado?

$$x = 30$$

4. Regresar a analizar el proceso de solución.

¿Parece razonable la solución?

$$1500\,(30) = 45000$$

$$3000\,(30) = 90000$$

Por lo tanto

$$65000 + 45000 = 20000 + 90000$$

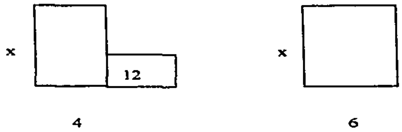
$$110\,000 = 110\,000$$

Atiende 30 terminales y gastan $110 000 en cualquiera de las dos opciones.

Tarea 4. Problema 13 (Método Algebraico).

Una persona tiene un terreno de 4 metros de ancho y x metros de largo. Esta persona compra un terreno contiguo al anterior de 12 metros cuadrados de área. Una segunda persona le propone intercambiar esta propiedad por otro terreno próximo que tiene la misma área total , el mismo largo con 6 metros de ancho, pero con una forma rectangular. ¿Cuál debe ser el largo de los terrenos para que el intercambio sea justo?

Supongamos que la situación es la que muestra en las siguientes figuras:



1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuál debe ser el largo de los terrenos para que las áreas sean iguales.

¿Qué datos tengo?

Uno mide de área $4x + 12$ y el otro $6x$.

2. Diseñar un plan.

¿Cuál es la incógnita?

Sea x = largo

¿Por qué medio puedo encontrar el valor de la incógnita?

Planteando la siguiente ecuacion y resolviéndola.

$$4x + 12 = 6x$$

3. Llevar a cabo dicho plan.

$$4x + 12 = 6x$$
$$4x - 6x = -12$$
$$2x = - 12$$
$$2x / (-2) = -12 / (-2)$$
$$x = 6$$

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$x = 6$ o sea el largo tiene que ser 6 metros.

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que si saco el área de los dos terrenos es $4(6) + 12 = 36$ y el otro su área sera $6(6) = 36$

Que es lo que deseábamos, que sus áreas sean iguales.

Quinta Clase (2 horas).

Problema 14 (Por dos métodos distintos).

Problema 14 (Método de Diagrama).

Una cuadrilla de una compañía minera necesita perforar cerca de 200 metros en una montaña para alcanzar los depósitos de minerales. Cada día pueden perforar 50 metros. Cada noche, cuando no están trabajando, cerca de 20 metros del túnel se llenan de roca. A este ritmo ¿cuántos días le tomará a la compañía llegar a los depósitos de minerales? (Adaptado de Smith y otros, 1994[19])

1.- Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

El número de dias que deben perforar pará llegar a los depósitos de minerales (200 metros)

¿Qué datos tengo?

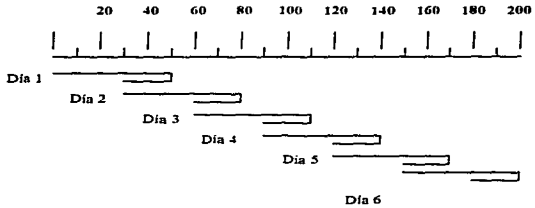
Cada dia ganan 50 metros; cada noche pierden 20 metros, se necesitan perforar 200 metros.

2.- Diseñar un plan.

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Podemos hacer un diagrama que muestre la situación del problema

3.- Llevar a cabo dicho plan.



¿Cuáles resultados se obtuvieron?

El diagrama muestra que la cuadrilla alcanzará el depósito en 6 días.

4.- Regresar a analizar el proceso de solución.

¿Parece razonable la solución?

Esta respuesta parece razonable puesto que cada día se avanza 30 metros, excepto el último día, que se avanzan 50 metros ya que se alcanzó el objetivo antes de que fuera de noche.

Problema 14 (Método de Tabulación).

Una cuadrilla de una compañía minera necesita perforar cerca de 200 metros en una montaña para alcanzar los depósitos de minerales. Cada día pueden perforar 50 metros. Cada noche, cuando no están trabajando, cerca de 20 metros del túnel se llenan de roca. A este ritmo ¿cuántos días le tomará a la compañía llegar a los depósitos de minerales? (Adaptado de Smith y otros, 1994[19])

1.- Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

El número de dias que deben perforar pará llegar a los depósitos de minerales (200metros)

¿Qué datos tengo?

Cada día ganan 50 metros; cada noche pierden 20 metros, se necesitan perforar 200 metros.

2.- Diseñar un plan.

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita

Podemos hacer una tabla que muestre la situación del problema

3.- Llevar a cabo dicho plan.

días	mts	noche
1	0 + 50 = 50	- 20
2	30 + 50 = 80	- 20
3	60 + 50 = 110	- 20
4	90 + 50 = 140	- 20
5	120 + 50 = 170	- 20
6	150 + 50 = 200	

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

La tabla muestra que la cuadrilla alcanzará el depósito en 6 días.

4.- Regresar a analizar el proceso de solución.

¿Parece razonable la solución?

Esta respuesta parece razonable puesto que cada día se avanza 30 metros, excepto el último día, que se avanzan 50 metros ya que se alcanzó el objetivo antes de que fuera de noche.

Problema 15 (Método de Tabulación).

Una televisión a color utiliza cerca de 420 kilovatios-hora (kvh) de energía eléctrica en un año. Que es 3.5 veces la cantidad que utiliza la de blanco y negro. ¿Cuántos kvh utiliza una de blanco y negro en un año?.

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuántos kvh utiliza en un año un equipo de blanco y negro.

¿Qué datos tengo?

Un equipo de color utiliza 420(kvh) en un año. Esta cantidad es 3.5 veces la utilizada por un equipo de blanco y negro.

2. Diseñar un plan.

¿Cuál es la incógnita?

Sea b = número de kvh utilizados por un equipo de blanco y negro.

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Si 3.5 b es igual al número de kvh utilizado por un televisor a color, entonces por medio de la siguiente ecuación, puedo encontrar el valor de b.

$$(3.5)\ b = 420$$

3. Llevar a cabo dicho plan

$$b = 420/3.5$$

$$b = 120 \text{ kvh}$$

por lo tanto la de blanco y negro utiliza 120 kvh.

4. Regresar a analizar el proceso de solución.

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que 3.5 veces 120 nos da como resultado 420.

Integración del material estudiado en las sesiones anteriores.

Como se puede observar, para resolver un problema no existe un camino único de solución, sino que hay varios métodos para llegar a ella.

Tarea 5:

Problema 16 (Método de Tanteo).

Un cohete tiene tres secciones: la de "carga y navegación" arriba, la de "combustible" en la parte media y el "propulsor" abajo. La sección de carga y navegación mide una sexta parte de la longitud del propulsor, y este último tiene la mitad de la longitud total del cohete. La longitud total es de 180 metros. ¿Qué longitud tiene cada sección?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuánto mide cada sección del cohete.

¿Qué datos tengo?

La longitud total del cohete: 180 mts.

longitud del propulsor: la mitad de la longitud total del cohete,

longitud de carga y navegación: un sexto de la longitud del propulsor.

2. Diseñar un plan

¿Por qué medios puedo obtener el valor de las partes del cohete?

Haciendo una tabla y resolviendo por tanteo

La longitud total del cohete: 180 mts.

longitud del propulsor: la mitad de la longitud total del cohete

$$180/2 = 90$$

longitud de carga y navegación: un sexto de la longitud del propulsor

$$90/6 = 15$$

3.- Llevar a cabo dicho plan

Tengo que la longitud del propulsor es 90

y la de navegación es 15

o sea sumando obtengo 105

entonces, quiero encontrar un número que al sumarlo con 105 me de 180. Para lo cual construyo la siguiente tabla

Número Propuesto	Resultado
25	130
42	147
85	190
70	175
73	178
75	180

¿Cuáles resultados se obtuvieron ?

De la tabla deduzco que

$$105 + 75 = 180$$

esto es, 75 es el número buscado.

Por lo tanto la longitud de la sección de:

combustible es de 75 metros.

propulsor es de 90

carga y navegación es de 15

4.-Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, pues si sumamos sus partes nos da el total de 180mts.

$$75 + 90 + 15 = 180$$

Problema 16 (Método por Diagrama).

Un cohete tiene tres secciones: la de "carga y navegación" arriba, la de "combustible" en la parte media y el "propulsor" abajo. La sección de carga y navegación mide una sexta parte de la longitud del propulsor, y este último tiene la mitad de la longitud total del cohete. La longitud total es de 180 metros. ¿Qué longitud tiene cada sección?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuánto mide cada sección del cohete.

¿Qué datos tengo?

La longitud total del cohete: 180 mts.

longitud del propulsor: la mitad de la longitud total del cohete,

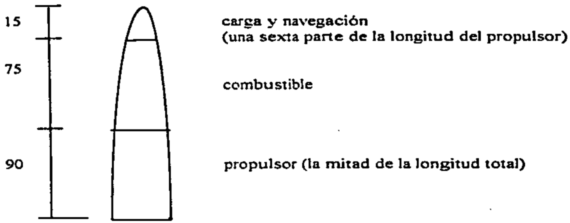
longitud de carga y navegación: un sexto de la longitud del propulsor.

2. Diseñar un plan

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Haciendo un dibujo o diagrama que ilustre la situación del problema.

3.- Llevar a cabo dicho plan



El cohete mide en total 180 metros.

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

Con las siguientes operaciones

propulsor: $\frac{180}{2} = 90$

carga y navegación: $\frac{90}{6} = 15$

$$90 + 15 = 105$$

entonces

$$180 - 105 = 75$$

por lo tanto la longitud de la sección de combustible es de 75 metros.

propulsor = 90

carga y navegación = 15

combustible = 75.

4.-Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, pues si sumamos sus partes nos da el total de 180mts.

$$75 + 90 + 15 = 180$$

Problema 16 (Método Algebraico).

Un cohete tiene tres secciones: la de "carga y navegación" arriba, la de "combustible" en la parte media y el "propulsor" abajo. La sección de carga y navegación mide una sexta parte de la longitud del propulsor, y este último tiene la mitad de la longitud total del cohete. La longitud total es de 180 metros. ¿Qué longitud tiene cada sección?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuánto mide cada sección del cohete.

¿Qué datos tengo?

La longitud total del cohete: 180 mts.

longitud del propulsor: la mitad de la longitud total del cohete,

longitud de carga y navegación: un sexto de la longitud del propulsor.

2. Diseñar un plan

¿Cuál es la incógnita?

Sea x la longitud de la parte (media) del combustible, entonces de los datos tengo que:

la longitud total del cohete: 180 mts.

longitud del propulsor: la mitad de la longitud total del cohete: 180/2 = 90

longitud de carga y navegación: un sexto de la longitud del propulsor: 90/6 = 15

¿Por qué medios puedo obtener la incógnita?

Planteando la siguiente ecuación y resolviéndola

$$90 + 15 + x = 180$$

3.- Llevar a cabo dicho plan

¿Cuáles resultados se obtuvieron ?

Despejando x obtenemos

$$105 + x = 180$$
$$x = 180 - 105$$
$$x = 75$$

por lo tanto la longitud de la sección de:

combustible es de 75 metros

propulsor es de 90

carga y navegación es de 15

4.-Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, pues si sumamos sus partes nos da el total de 180mts.

$75 + 90 + 15 = 180$

Sexta Clase (1 hora).

Examen final.

2.4 INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN.

Con este examen se pretende observar hasta donde los alumnos manejan este material, en especial los métodos que utilizan para la resolución de los problemas

Primera parte.

Examen de Diagnóstico.

a) $35 + 8 - 3 + 9 =$

b) $-(8 + (3 - 2) + 5) =$

c) $(3 + 5)(7 - 2) =$

d) $-((-12) - (5) + (-7)) =$

e) $\frac{9}{4} * \frac{1}{2} =$

f) $5 * \frac{7}{9} =$

g) $\frac{\frac{5}{11}}{3} =$

h) $\frac{1}{2} * (\frac{1}{4} + \frac{10}{6}) =$

i) $\frac{1}{2} * \frac{1}{4} + \frac{5}{3} =$

j) $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{1}{3} =$

k) $1 - \frac{4}{1+5} =$

l) $1 + \frac{3}{\frac{1}{3}} =$

m) $1 - \frac{2}{10} =$

n) $1 + \frac{1}{\frac{8}{10}} =$

ñ) $\frac{8 * 3}{9 * 5} + \frac{4(-2)}{\frac{1}{2}} * \frac{5}{2} =$

o) $5 + 8 = x + 3$

p) $\frac{1}{2} + 4 = x + 5$

q) $x + \frac{3}{4} = 8$

r) $(35 + 28)\ 16 =$

Segunda parte.

Problemas. Resuélvelos por el método que prefieras.

1) Un número es mayor en 12 que otro número. La suma de los dos números es 48. ¿Cuáles son los dos números?

2) Un científico experto en vida salvaje estima que en cierto año el número de cervatillos machos será $\frac{1}{3}$ del número de hembras adultas. Supongamos que nacieron 1131 cervatillos machos, ¿cuántas hembras hay?.

3) Al observar las calificaciones finales del grupo 1304 de matemáticas 1, se pudo notar que los alumnos que obtuvieron NP son $\frac{5}{2}$ de los que acreditaron, y los que obtuvieron NA son la quinta parte de los que obtuvieron NP. Si la lista consta de un total de 32 alumnos, ¿Cuántos acreditaron el curso?

Examen final

Con este examen se pretende evaluar la capacidad del alumno para aplicar el método solicitado, en especial el método algebraico, después de haber trabajado la propuesta educativa.

1) (Método de Tanteo). Un número es mayor en 12 que otro. La suma de los dos es 48. ¿Cuáles son ?

2) (Método de Diagrama). Un científico experto en vida salvaje estima que en cierto año el número de cervatillos machos será $\frac{1}{3}$ del número de hembras adultas. Supongamos que hay 1131 cervatillos machos, ¿cuántas hembras hay?.

3) (Método de Tabla de Valores). Un estudiante tiene que ir al museo y después a la biblioteca, por lo cual debe utilizar el metro dos veces. Para ir al museo va con siete de sus compañeros y después a la biblioteca con sus tres hermanos. Si el costo de un boleto es de $ 1.30, ¿cuánto dinero se gasta en boletos en su recorrido si el va a pagar lo de todos?

4) (Método Gráfico). Una bicicleta se mueve con una velocidad de 5 Km/hr. ¿Cuánto tiempo le tomará recorrer 60 Km?

5) (Método Algebraico). Al observar las calificaciones finales del grupo 1304 de matemáticas 1, se pudo notar que los alumnos que obtuvieron NP son $\frac{5}{2}$ de los que acreditaron, y los que obtuvieron NA son la quinta parte de los que obtuvieron NP. Si la lista consta de un total de 32 alumnos. ¿Cuántos acreditaron el curso?

Respuestas del examen final:

1)

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Dos números

¿Qué datos tengo?

Un número es mayor en 12 que el otro y la suma de los dos números es 48.

2. Diseñar un plan.

¿Por qué medio puedo encontrar el valor de las incógnitas?

Por el método de tanteo.

3. Llevar a cabo dicho plan.

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

5 como primer número. $5 + 12 = 17$, el segundo número

$17 + 5 = 22$ Muy bajo. Intentemos con un número más grande.

20 como primer número. $20 + 12 = 32$, el segundo número

$20 + 32 = 52$ Alto, pero muy cerca. Intentemos con un número más chico.

18 como primer número. $18 + 12 = 30$, el segundo número

$18 + 30 = 48$ Correcto.

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que $18 + 30 = 48$ y $30 = 18 + 12$

Respuesta: Los números buscados son el 18 y 30.

2)

1.- Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

El número de hembras que hay.

¿Qué datos tengo?

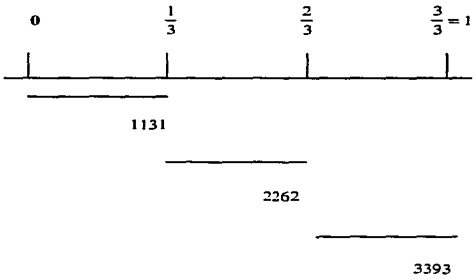
El número de cervatillos machos será un tercio de hembras adultas.

2- Diseñar un plan.

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Podemos hacer un diagrama que muestre la situación del problema.

3.- Llevar a cabo dicho plan.



¿Cuáles resultados se obtuvieron?

El diagrama muestra que la cantidad de hembras adultas es de 3393.

4.- Regresar a analizar el proceso de solución.

¿Parece razonable la solución?

Esta respuesta parece razonable puesto que el número de cervatillos machos es un tercio del número de hembras adultas y al sumar 1131 tres veces obtengo 3393 o sea la unidad.

3)

1.- Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuánto dinero gastará en los doce boletos que necesita comprar.

¿Qué datos tengo?

Tiene que llevar a siete amigos al museo y a tres de sus hermanos al biblioteca. Cada boleto cuesta $1.30.

2.- Diseñar un plan

¿Por qué medios puedo encontrar el dinero que gastará?

Planteando la siguiente tabla.

3.- Llevar a cabo dicho plan

$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Boletos	1.30	2.60	3.90	5.20	6.50	7.80	9.10	10.40	11.70	13.00	14.30	15.60	16.90

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

De la tabla se puede apreciar que en total tendrá un gasto de $15.60.

4.- Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, pues si vemos la tabla es correcta , esto es, si un boleto cuesta $1.30, entonces el costo de doce boletos es $15.60.

4)

1.- Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuánto tiempo le tomará recorrer 60 km.

¿Qué datos tengo?

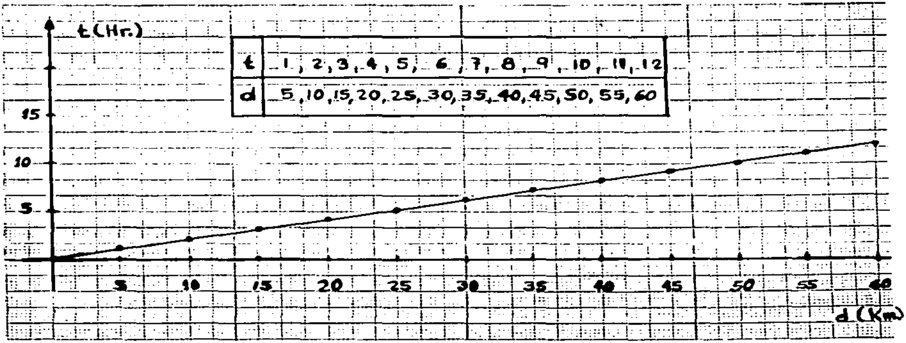
Tiene una velocidad de 5 km/hr

2.- Diseñar un plan

¿Por qué medios puedo encontrar el tiempo?

Haciendo la siguiente gráfica para representar la situación.

3.- Llevar a cabo dicho plan



¿Cuáles resultados se obtuvieron?

La gráfica muestra que en una hora recorre 5 km. y en dos horas 10 km. De donde estos dos puntos determinan una línea recta. Por lo tanto la gráfica muestra que en 12 horas recorrerá los 60 km.

4.- Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que en una hora recorre 5 km/hr, en 12 horas recorrerá

12 (5 km/hr) = 60 km.

5)

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuántos alumnos acreditaron el curso.

¿Qué datos tengo?

Hay un total de 32 alumnos. Los alumnos que obtuvieron NP son $\frac{5}{2}$ de los que acreditaron, y los que obtuvieron NA son la quinta parte de los que obtuvieron NP.

2. Diseñar un plan.

¿Cuál es la incógnita?

Sea x = el número de alumnos que acreditaron.

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Planteando la siguiente ecuación y resolviéndola.

$\frac{5}{2}x$ = número de alumnos que obtuvieron NP.

$\frac{1}{5}\left(\frac{5}{2}x\right)$ = número de los que obtuvieron NA.

por lo tanto la ecuación es.

$$x+\left(\frac{5}{2}x\right)+\left(\frac{1}{5}\left(\frac{5}{2}x\right)\right)=32$$

3.- Llevar a cabo dicho plan

$$x+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}x=32$$
$$2x+5x+x=64$$
$$8x=64$$
$$x=\frac{64}{8}$$
$$x=8$$

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$$x=8$$

4.- Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Se tiene que:

8 alumnos acreditaron,

20 alumnos sacaron NP y

4 alumnos sacaron NA

Sí, pues si sumo obtengo 32.

2.5 MATERIAL COMPLEMENTARIO.

Este mateiral complementario es para que el profesor tenga más opciones de donde elegir otro problemas, así como también, que los alumnos tengan más ejemplos para practicar y reafirmar los nuevos conocimientos adquiridos. Se trabaja con números Racionales y se aplican las sugerencias de como resolver un problema a traves de las sugerencias de Schoenfeld y Polya. Al final del capítulo hay más problemas con los cinco métodos.

Ejemplo 1.

Un automóvil viaja durante una hora a una velocidad de 90 km/h. ¿A qué velocidad debe viajar otra hora para que la velocidad promedio sea de 135 km/h?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

La velocidad durante la segunda hora.

¿Qué datos tengo?

La velocidad v_1 durante la primer hora: 90 km/h, y la velocidad promedio durante las dos horas: 135 km/h y el tiempo t de cada intervalo, que es de una hora.

Sea v_2 = la velocidad durante la segunda hora.

2. Diseñar un plan.

¿Por qué medio puedo encontrar el valor de la incógnita?

Planteando y resolviendo una ecuación.

Así para el primer recorrido se tiene que

$$d_1 = v_1 t$$

y para el segundo recorrido

$$d_2 = v_2 t$$

La distancia total que recorrió el automóvil es

$$d_1 + d_2 = v_1 t + v_2 t$$
$$d_1 + d_2 = (v_1 + v_2)t$$

Entonces se tiene que, la distancia promedio que recorrió el automóvil en cada hora fue.

$$\frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{(v_1 + v_2)t}{2}$$

entonces la velocidad promedio es

$$v = \frac{D}{T}$$

$$135 = \frac{\frac{d_1 + d_2}{2}}{t} = \frac{\frac{(v_1 + v_2)t}{2}}{t}$$

3. Llevar a cabo dicho plan.

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$$135 = \frac{(v_1 + v_2)t}{2t}$$
$$135 = \frac{v_1 + v_2}{2}$$
$$135 = \frac{90 + v_2}{2}$$
$$270 = 90 + v_2$$
$$270 - 90 = v_2$$
$$v_2 = 180 \text{ km/h}$$

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que concuerda con la media aritmética, como se muestra a continuación

$$135=\frac{90+v_2}{2}$$
$$135=\frac{90+180}{2}$$
$$135=\frac{270}{2}$$
$$135=135$$

Ejemplo 2.

Juan ha sacado en sus exámenes de matemáticas las siguientes calificaciones: 8, 7, 5 y 10. Como él quiere tener un promedio de 8 en esa materia, ¿cuál es la calificación que tiene que sacar en su último examen?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

La calificación x para su último examen.

¿Qué datos tengo?

Cuatro calificaciones conocidas 8, 7, 5 y 10, una calificación desconocida x. En total serían cinco calificaciones

2. Diseñar un plan.

¿Por qué medio puedo encontrar el valor de las incógnitas?

Planteando y resolviendo la siguiente ecuación.

$$8=\frac{8+7+5+10+x}{5}$$

3. Llevar a cabo dicho plan.

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$$\frac{30+x}{5}=8$$
$$x=(8*5)-30$$
$$x=10$$

Su última calificación tiene que ser de 10.

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que si saco el promedio de "todas" sus calificaciones, tengo que

$$\frac{8+7+5+10+10}{5}=\frac{40}{5}=8$$

encuentro el promedio 8 de las calificaciones.

Recuerda que se entiende por media aritmética de los datos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$, al cociente de su suma entre el número de ellos (N),

$$\overline{X}=\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_N}{N}$$

Si (N = 5) y el promedio que quiere tener es 8, que vendría siendo la media aritmética de sus calificaciones ($\overline{X}$ = 8) tenemos que:

$$\overline{X}=\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_N}{N}$$

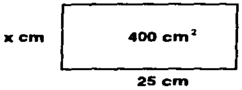
sustituyendo los datos obtengo

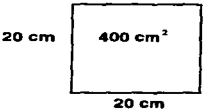
$$8=\frac{8+7+5+10+x}{5}$$
$$\frac{30+x}{5}=8$$
$$x=(8*5)-30$$
$$x=10$$

Su última calificación tiene que ser de 10.

Ejemplo 3.

Un rectángulo tiene de largo 25 cm. y tiene la misma área de un cuadrado de lado 20 cm. ¿Cuál es el ancho del rectángulo?.





1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

El ancho del rectángulo.

¿Qué datos tengo?

El largo del rectángulo, que es igual a 25 cm, y el lado del cuadrado que es igual a 20 cm. También que sus áreas son iguales.

2. Diseñar un plan.

¿Por qué medio puedo encontrar el valor de la incógnita?

Planteando y resolviendo la siguiente ecuación.

Sea x = al ancho del rectángulo, y como las áreas son iguales, por lo tanto

$$20\,(20) = 25\,x$$

3. Llevar a cabo dicho plan.

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$$20\,(20) = 25\,x$$

$$400 = 25\,x$$

$$x = \frac{400}{25} = 16$$

$$x = 16 \text{ cm.}$$

El ancho del rectángulo es 16 cm.

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que $20\,(20) = 25\,(16)$

$$400 = 400$$

¿Existe otro método para obtener la solución?

Sí, viéndolo desde otro punto de vista, esto es, se tienen dos números, un número conocido igual a 25 y otro desconocido, y se quiere que la media geométrica de los 2 números sea igual a 20.

Se define la media geométrica, $\overline{X}_G$, de los números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ como la raíz enésima del producto de ellos.

$$\overline{X}_G = \sqrt[N]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_N}$$

Ejemplo 4.

Un rectángulo tiene por largo una longitud de 25 cm. y tiene la misma área de un cuadrado de lado 20 cm. ¿Cuál es el ancho del rectángulo?.

Resolvamos el problema desde este nuevo enfoque.

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

El número desconocido, x.

¿Qué datos tengo?

Un número conocido, otro desconocido y su media geométrica.

2. Diseñar un plan

¿Por qué medios puedo encontrar el valor de la incógnita?

Planteando y resolviendo una ecuación

Sustituyendo datos del problema en sus parámetros correspondientes en la ecuación que define a la media geométrica, obtenemos la siguiente igualdad

$$20 = \sqrt{25(x)}$$

3. Llevar a cabo dicho plan

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$$20 = \sqrt{25(x)}$$

$$20^2 = 25(x)$$

$$\frac{400}{25} = x$$

$$x = 16 \text{ cm.}$$

El otro número es el 16.

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Si, ya que al sustituir 16 y si calculamos su media geométrica obtenemos que es 20

$$\overline{X}_G = \sqrt[2]{25(16)}$$

$$\overline{X}_G = \sqrt[2]{400}$$

$$\overline{X}_G = 20$$

que es la longitud de los lados del cuadrado.

De donde (20, 20) y (25, 16) ambas parejas de números tienen la misma media geométrica.

No solamente se habla de media geométrica para enteros puede ser para racionales e irracionales. Tanto la media geométrica como los datos pueden ser no enteros.

Ejemplo 5.

Se conoce la media geométrica de 3 números, que es 4, y los números son: x, 4 y 8. Calcular el valor de x.

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

El valor del número x.

¿Qué datos tengo?

Los siguientes números: 4 y 8, la media geométrica, que es 4, y la definición de media geométrica

$$\overline{X}_G = \sqrt[N]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_N}$$

2. Diseñar un plan.

¿Por qué medio puedo encontrar el valor de las incógnitas?

Sustituyendo los valores en la siguiente ecuación para n = 3

$$\overline{X}_G = \sqrt[N]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_N}$$

$$4 = \sqrt[3]{x * 4 * 8}$$

3. Llevar a cabo dicho plan.

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$$4^3 = (\sqrt[3]{x * 4 * 8})^3$$

$$4^3 = x * 4 * 8$$

$$64 = x * 32$$

$$x = \frac{64}{32}$$

$$x = 2$$

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Si, ya que si sustituimos los valores obtenemos

$$\overline{X}_G = \sqrt[3]{2*4*8} = \sqrt[3]{64}$$
$$\overline{X}_G = 4$$

que es el valor de la media geométrica que se tiene como dato.

Ejemplo 6.

Un automóvil recorre un circuito a una velocidad de 90 km/h. ¿A qué velocidad debe recorrer otra vez el mismo circuito para que la velocidad promedio de ambos recorridos sea 120 km/h?

Nota: La velocidad la utilizaremos en estos problemas, sin perder de vista que es realmente la rapidez en Física.

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

La velocidad con la que deberá recorrer de nuevo el circuito sea v tal velocidad .

¿Qué datos tengo?

Las siguientes velocidades: 90 km/h y la velocidad promedio de ambos que es 120 km/h .

La longitud d del circuito.

2. Diseñar un plan.

¿Por qué medio puedo encontrar el valor de la incógnita?

Planteando y resolviendo la siguiente ecuación.

Sabemos que el tiempo que le toma a un automóvil recorrer una distancia D cuando se desplaza con una velocidad V, esta dado por la ecuación

$$T = \frac{D}{V}$$

de donde para el primer recorrido, se tiene que el tiempo es

$$t_1 = \frac{d}{90}$$

y para el segundo recorrido, el tiempo es

$$t_2 = \frac{d}{v}$$

Se tiene que la distancia total que recorrió el automóvil es 2d y el tiempo que le tomó recorrer esa distancia es $t_1 + t_2 = \frac{d}{90} + \frac{d}{v}$.

Obsérvese que el automóvil debe recorrer dos veces el mismo circuito, 2d, desplazándose en cada ocasión con una velocidad distinta, de tal manera que su velocidad promedio sea de 120 km/h. Como el tiempo para realizar estos recorridos es $t_1 + t_2$ se puede plantear la siguiente ecuación

$$V = \frac{D}{T}$$

$$120 = \frac{2d}{\frac{d}{90} + \frac{d}{v}} = \frac{2}{\frac{1}{90} + \frac{1}{v}}$$

observa, como la velocidad promedio quedo en términos de las velocidades de los 2 recorridos 90 y v.

En general si las velocidades hubieran sido v y w y procediendo de manera igual a lo anterior encontraríamos que la velocidad promedio sería

$$\frac{2}{\frac{1}{v} + \frac{1}{w}}$$

A este número se le conoce como media armónica de v y w

3. Llevar a cabo dicho plan.

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$$120 = \frac{2}{\frac{1}{90}+\frac{1}{v}} = \frac{2}{\frac{v+90}{90v}} = \frac{180v}{v+90}$$

$$120 = \frac{180v}{v+90}$$

$$180v = 120(v+90)$$

$$180v = 120v + 10800$$

$$180v - 120v = 10800$$

$$60v = 10800$$

$$v = \frac{10800}{60}$$

$$v = 180 \text{ km/h}$$

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que al sustituir concuerda con la media armónica

$$120 = \frac{180v}{v+90}$$

$$120 = \frac{180(180)}{180+90}$$

$$120 = \frac{32400}{270}$$

$$120 = 120$$

✤ **Ejemplo 7.**

Un automóvil recorre un circuito con una velocidad de 150 km/h y posteriormente en otro recorrido recorre el mismo circuito a 175 km/h ¿Cuál es la velocidad Promedio?.

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

La velocidad promedio de las dos velocidades.

¿Qué datos tengo?

Las siguientes velocidades: 150 km/h, 175 km/h .

2. Diseñar un plan.

¿Por qué medio puedo encontrar el valor de la incógnita?

Recordemos que la distancia recorrida se obtiene multiplicando la velocidad por el tiempo si, d denota la distancia, v la velocidad y t es tiempo; obtenemos d = v t, que se lee, distancia = velocidad por tiempo.

Planteando y resolviendo la siguiente ecuación

Como el automóvil recorre siempre la misma distancia, (la del circuito, d) entonces para cada velocidad, se tiene que el tiempo que le toma es

$$T = \frac{D}{V}$$

de donde para el primer recorrido, el tiempo es

$$t_1 = \frac{d}{150}$$

y para el segundo recorrido, el tiempo es

$$t_2 = \frac{d}{175}$$

Se tiene que la distancia total que recorrió el automóvil es 2d y el tiempo que le tomó recorrer esa distancia es $t_1 + t_2 = \frac{d}{150} + \frac{d}{175}$

Por lo tanto la velocidad promedio del automóvil es:

$$v = \frac{d}{t} = \frac{2d}{\frac{d}{150} + \frac{d}{175}} = \frac{2}{\frac{1}{150} + \frac{1}{175}}$$

3. Llevar a cabo dicho plan.

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$$\overline{X}_A = \frac{2}{\frac{1}{150} + \frac{1}{175}} = \frac{2}{\frac{13}{1050}} = \frac{2100}{13} = 161.54 \text{ km/h}$$

$$\overline{X}_A = 161.54 \text{ km/h}$$

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

La media armónica ($\overline{X}_A$) de a y b es el valor inverso de la media de los inversos de a y b.

La media armónica de a y de b es un valor $\overline{X}_A$ tal que

$$\frac{2}{\overline{X}_A} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

También puede expresarse como

$$\overline{X}_A = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Cuando se tienen distancias iguales, la velocidad promedio es la Media Armónica de las velocidades.

*** Ejemplo 8 (Método Algebraico)**

Dos aviones salen de Puebla a la vez y vuelan en direcciones opuestas. Si uno viaja a 600 km/h y el otro a 500 km/h, ¿cuánto tiempo les tomará estar a 3 850 km. de distancia el uno del otro?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuánto tiempo t, les tomará estar a 3 850 km. de distancia el uno del otro.

¿Qué datos tengo?

Las velocidades de los aviones son 600 km/h y 500 km/h.

Los aviones viajan describiendo una recta y en direcciones opuestas.

La velocidad de un objeto esta dada por la ecuación $v = \frac{d}{t}$, donde v es la velocidad con la cual se esta moviendo el objeto, d la distancia que ha recorrido y t el tiempo que le toma recorrer esa distancia.

El tiempo t que les tomará a los aviones estar separados una distancia de 3 850 km es el mismo.

2. Diseñar un plan.

¿Cuál es la incógnita?

t = el tiempo que debe transcurrir para que estén separados esa distancia.

¿Por qué medio puedo encontrar el tiempo ?

Planteando la ecuación correspondiente y resolviéndola.

Por la forma en que se están desplazando los aviones, se tiene que la distancia que estén separados los aviones en un momento t será la suma de sus desplazamientos, esto es

$$d1 + d2 = 3\,850$$

donde d1 es la distancia que ha recorrido el avión de velocidad 600 km/h y d2 la distancia que ha recorrido el avión cuya velocidad es de 500 km/h Por lo tanto, usando la ecuación que define la velocidad de un objeto se tiene que:

$$600 = \frac{d1}{t} \qquad y \qquad 500 = \frac{d2}{t}$$

de estas dos igualdades se obtiene que

$$d1 = 600\,t \quad y \quad d2 = 500\,t$$

Por lo tanto la ecuación que describe el problemas es

$$600\,t + 500\,t = 3\,850$$

$$1100\,t = 3850$$

3. Llevar a cabo dicho plan.

$$t\,(600 + 500) = 3\,850$$

$$t\,1\,100 = 3850$$

$$t = \frac{3850}{1100}$$

$$t = 3.5 \text{ horas}$$

de esto se concluye que tienen que pasar 3.5 horas para que los aviones estén separados una distancia de 3 850 km

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

$$¿d1 + d2 = 3850?$$

Sí, porque tomando ese tiempo tenemos que,

$$d1 = 600\,t = 600\,(3.5)$$

$$d1 = 2100 \text{ km}$$

$$d2 = 500\,t = 500\,(3.5)$$

$$d2 = 1750 \text{ km}$$

entonces

$$d1 + d2 = 2100 + 1750$$

$$d1 + d2 = 3850 \text{ km}$$

¿Existe otro método para resolver este mismo problema?

Sí, con la regla de tres. Analizando el problema vemos que en 1 hora los aviones han recorrido las distancias de 600 km y 500 km, respectivamente.

Entonces los aviones estarán separados 1100 km en una hora. Entonces tenemos que:

1 hr —— 1 100 km

x hr —— 3 850 km

entonces el tiempo que les tomará estar separados una distancia de 3850 km está dada por:

$$x = \frac{1(3850)}{1100} = \frac{3850}{1100}$$

$$x = 3.5 \text{ hr}$$

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

$$¿d1 + d2 = 3850?$$

Sí, porque tomando ese tiempo tenemos que,

$$d1 = 600\,t = 600\,(3.5)$$

$$d1 = 2100 \; km$$

$$d2 = 500\,t = 500\,(3.5)$$

$$d2 = 1750 \; km$$

entonces

$$d1 + d2 = 2100 + 1750$$

$$d1 + d2 = 3850 \; km$$

Ahora modifiquemos los datos para que sean exactamente 4 horas. Esta condición que se plantea da origen el siguiente problema:

Dos aviones salen de Puebla a la vez y vuelan en direcciones opuestas. Después de 4 horas los aviones están separados una distancia de 3 850 km. Si uno de los aviones tiene una velocidad de 400 km/h. ¿cuál debe ser la velocidad del otro avión?

¿Porqué medios puedo obtener la solución?

Planteando y resolviendo la siguiente ecuación

Sea x = la velocidad desconocida, entonces la suma de las distancias que recorre cada uno de los aviones debe ser 3850 km. esto es,

$$400\,t + x\,t = 3850$$

pero como en este caso $t = 4$ hr, entonces

$$400\,(4) + x\,(4) = 3850$$

$$1600 + 4\,x = 3850$$

$$4\,x = 3850 - 1600 = 2250$$

$$x = \frac{2250}{4} = 562.5 \text{ km/h}$$

Por lo tanto la velocidad del segundo avión es de 562.5 km/h.

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que la distancia que recorren los aviones en 4 horas es,

$$400\,(4) + 562.5\,(4) =$$

$$1600 + 2250 =$$

$$3850 \text{ km}$$

que es la distancia que deben estar separados los dos aviones después de 4 horas.

Otra situación que surge de inmediato es la siguiente:

¿Qué distancia recorrió cada uno de los dos aviones tomando las mismas condiciones que del problema inmediato anterior?

¿Porqué medios puedo obtener la solución?

Planteando y resolviendo la siguiente ecuación

Sea x = la distancia de separación entre los aviones, entonces

4 hr ______ 3 850 km

1 hr ______ x km

$$x = \frac{3850}{4}$$

$$x = 962.5 \text{ km}$$

Esto nos dice que los dos aviones están separados una distancia de 962.5 km en una hora.

Ahora tenemos que encontrar la distancia recorrida de cada uno de ellos en una hora.

Para el avión que se desplaza a 400 km/h, se tiene que en una hora ha recorrido una distancia de 400 km. Por lo tanto la distancia d que ha recorrido el otro avión está dada por la siguiente igualdad,

$$d = 962.5 - 400$$

$$d = 562.5 \text{ km}$$

Los aviones recorrieron las distancias de 400 km y de 562.5 km, en una hora, así que en 4 horas los aviones recorrerán las distancias de 400 (4) y de 562.5 (4), esto es de 1600 km y de 2250 km.

Sumando las distancias recorridas en 4 horas por cada uno de los aviones nos da

$$1600 + 2250 = 3850 \text{ km}$$

¡Que es lo que esperábamos!

Ejemplo 9 (Método Algebraico)

Si una bomba de agua puede bombear a razón de 12 litros por minuto. ¿Cuánto tiempo le tomará bombear 30 litros?.

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuánto tiempo le tomará bombear 30 litros.

¿Qué datos tengo?

La bomba puede bombear a razón de 12 litros por minuto.

2. Diseñar un plan.

¿Cuál es la incógnita?

x = el tiempo que debe transcurrir para bombear 30 litros.

¿Por qué medio puedo encontrar el tiempo ?

Planteando la ecuación correspondiente y resolviéndola.

$$1 \text{ min} \quad \_\_\_\_ \quad 12 \text{ lt}$$

$$x \text{ min} \quad \_\_\_\_ \quad 30 \text{ lt}$$

$$x = \frac{30}{12} \text{ min}$$

3. Llevar a cabo dicho plan.

$$x = 2.5 \text{ min}$$

que es lo mismo que 2 minutos con 30 segundos.

De esto se concluye que tienen que pasar 2.5 min para que los pueda bombear.

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

¡ Sí, ya que en un min. bombea 12 si multiplico 12(2.5) = 30 !

Ahora modificaremos los datos para que sean exactamente 3 min. el tiempo que le toma bombear 30 litros. Entonces la preguntas es:

Si una bomba tarda 3 minutos en bombear 30 litros. ¿A cuántos litros por minuto trabajó la bomba?

¿Porqué medios puedo obtener la solución?

Planteando y resolviendo la siguiente ecuación.

Sí x = el número de litros que son bombeados en un minuto, entonces

$$\begin{array}{lcl} 30 \text{ lt} & \_\_\_\_\_ & 3 \text{ min} \\ x \text{ lt} & \_\_\_\_\_ & 1 \text{ min} \end{array}$$

$$x = \frac{30(1)}{3} = \frac{30}{3} = 10$$

$$x = 10 \text{ lt}$$

Esto nos dice que 10 litros son bombeados en 1 minuto.

Ahora comprobemos el resultado.

Sea x = los minutos que tarda en bombear 30 litros la bomba, entonces

$$\begin{array}{lcl} 30 \text{ lt} & \_\_\_\_\_ & x \text{ min} \\ 10 \text{ lt} & \_\_\_\_\_ & 1 \text{ min} \end{array}$$

$$x = \frac{30(1)}{10}$$

$$x = 3 \text{ min}$$

¡Que es lo que ya se sabía!

Consideremos ahora que 2 minutos exactos es el tiempo que tarda la bomba en bombear los 30 litros. ¿Cuál será el tiempo que tarda en bombear 12 litros?

¿Como puedo obtener la solución?

Planteando la siguiente ecuación y resolviéndola.

Sea x = el tiempo que le tomará bombear 12 litros, entonces

$$\begin{array}{lcl} 30 \text{ lt} & \_\_\_\_\_ & 2 \text{ min} \\ 12 \text{ lt} & \_\_\_\_\_ & x \text{ min} \end{array}$$

$$x = \frac{12(2)}{30}$$

$$x = \frac{24}{30}$$

$$x = 0.8 \text{ min}$$

Como comprobación utilicemos esta respuesta para ver en cuanto tiempo x, se bombean 30 litros.

$$\begin{array}{lcl} 12 & \_\_\_\_\_ & 0.8 \\ 30 & \_\_\_\_\_ & x \end{array}$$

$$x = \frac{30(0.8)}{12} = \frac{24}{12}$$

$$x = 2 \text{ min}$$

¡Que es lo que esperábamos encontrar, o sea 2 min!

*** Ejemplo 10 (Método Algebraico)**

Si una máquina puede llenar y tapar 20 botellas por minuto y otra puede llenar y tapar 30 botellas por minuto. ¿Cuánto tiempo les tomará a las dos máquinas trabajando juntas completar una orden de 30 000 botellas ?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuánto tiempo les tomará llenar y tapar 30 000 botellas, con las dos máquinas trabajando juntas.

¿Qué datos tengo?

Una máquina A, puede llenar y tapar 20 botellas por minuto, y otra máquina B, puede llenar y tapar 30 botellas por minuto.

2. Diseñar un plan.

¿Cuál es la incógnita?

Sea x = el tiempo que debe transcurrir para llenar y tapar las 30 000 botellas.

¿Por qué medio puedo encontrar el tiempo ?

Planteando la ecuación correspondiente y resolviéndola.

Se tiene que cuando las dos máquinas están trabajando

1 min _____ 50 botellas

x min _____ 30 000

3. Llevar a cabo dicho plan

$$x = \frac{30000}{50}$$

$$x = 600 \text{ min}$$

Recordemos que 60 minutos = 1 hora, por lo tanto

$$x = 10 \text{ horas}$$

De esto se concluye que tienen que pasar 10 horas para que las dos máquinas puedan terminar el trabajo.

¿Existe otra forma de solución?

Sí, planteando la siguiente ecuación.

Sea t = el tiempo en minutos entonces

$$20t + 30t = 30\,000$$

$$50t = 30\,000$$

$$t = \frac{30000}{50}$$

$$t = 600 \text{ min}$$

$$t = 10 \text{ hr}$$

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que por los dos caminos obtengo lo mismo. Ahora comprobemos el resultado. La máquina que trabaja a razón de 20 botellas por minuto, en 600 minutos llenará y tapará

20 botellas ——— 1 min

x botellas ——— 600 min

$$x = \frac{20(600)}{1}$$

x = 12 000 botellas

y la otra máquina que trabaja a razón de 30 botellas por minuto, en ese mismo tiempo llenará y tapará

30 botellas ——— 1 min

x botellas ——— 600 min

$$x = \frac{30(600)}{1}$$

x = 18 000 botellas

Por lo tanto en 600 minutos las dos máquina llenaron y taparon 30 000 botellas. ¡Que es lo que se pedía en el problema!

Ahora modificaremos un poco la situación descrita en el problema anterior.

Hallar el tiempo necesario para completar el trabajo si la segunda máquina (la más rápida, B) comienza a trabajar una hora más tarde que la primera, y ambas continúan hasta que el trabajo esté terminado.

La máquina A en 1 minuto llena y tapa 20 botellas, por lo tanto en 60 minutos (1 hr) llenará y tapará 1 200 botellas.

La máquina B en 1 minuto llena y tapa 30 botellas, por lo tanto en 60 minutos (1 hr) llenará y tapará 1 800 botellas.

De estos dos resultados se tiene que:

a) Las dos máquinas trabajando juntas, llenan y tapan 3 000 botellas en 1 hora.

b) En la primera hora de trabajo la máquina A llenó 1200 botellas, entonces sólo les resta a las dos máquinas por llenar y tapar 28 800 botellas.

De estos enunciados se tiene la siguiente relación

1 hr ______ 3 000 botellas

x hr ______ 28 800 botellas

$$x = \frac{28800}{3000}$$

$$x = 9.6 \text{ hr}$$

El tiempo total para llenar y tapar las 30 000 botellas es de 10.6 horas

¿Existe otra forma de encontrar la respuesta?

Sí, planteando una ecuación .

En el momento en que las dos máquinas empiezan a trabajar juntas ya hay 1200 botellas llenas y tapadas, ya que la máquina lenta estuvo trabajando durante una hora. Si

t = es el tiempo que se necesita para realizar el pedido, medido a partir de que las dos máquinas empiezan a trabajar juntas, tenemos que la ecuación que representa la situación de nuestro problemas es,

$$(1\,200 + 1\,200\,t) + 1\,800\,t = 30\,000$$

$$(1\,200 + 1\,800)\,t = 30\,000 - 1\,200$$

$$3\,000\,t = 28\,800$$

$$t = \frac{28800}{3000}$$

$$t = 9.6 \text{ horas}$$

Si tomamos en cuenta la hora que sólo trabajó la máquina A, el tiempo total para llenar y tapar las 30 000 botellas es 10.6 horas.

Modifiquemos el enunciado del problema.

Hallar el tiempo necesario para completar el trabajo si la segunda máquina (la más rápida, B) comienza a trabajar dos horas más tarde que la primera, y ambas continúan hasta que el trabajo esté terminado.

¿Cómo puedo obtener la solución?

Planteando la siguiente ecuación y resolviéndola

Como en 2 horas (A) produce 2 400 botellas, resto esta cantidad de 30 000

$$30\,000 - 2\,400 = 27\,600$$

Entonces como a partir de este momento las dos máquinas trabajan simultáneamente, puedo plantear la siguiente relación.

1 hr ______ 3 000 botellas

x hr ______ 27 600 botellas

$$x = \frac{27600}{3000}$$

$$x = 9.2 \text{ horas}$$

Ahora sumo las 2 horas que trabajo la máquina (A) sola, por lo tanto, el tiempo total que tardaron ambas máquinas en llenar y tapar 30 000 botellas es 11.2 horas.

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

¡ Sí, puesto que la máquina más rápida se tardó 2 horas en entrar a trabajar, entonces el tiempo que les toma para realizar el pedido debe ser mayor!

Además, como se observó más arriba, las dos máquinas trabajando juntas pueden llenar y tapar 3 000 botellas por hora, por lo tanto en 9.2 horas terminarán

$$3\,000\,(9.2) = 27\,600 \text{ botellas,}$$

si a esta cantidad le sumo la cantidad de botellas que llenó y tapó la máquina A

$$27\,600 + 2\,400 = 30\,000 \text{ botellas}$$

Ambas máquinas tardarán 9.2 horas en llenar y tapar 27 600 más 2 horas que tardó la máquina (A) esto da el total de 30 000 botellas.

Por lo tanto, tardan 11.2 horas

Modifiquemos aún más el enunciado del problema.

Hallar el tiempo necesario para completar el trabajo si la primer máquina (la más lenta, A) comienza a trabajar dos hora después de que lo hizo la máquina B.

¿Cómo puedo obtener la solución?

planteando la siguiente ecuación y resolviéndola

Como en 2 horas (B) produce 3 600 botellas, resto esta cantidad de 30 000

$$30\ 000 - 3\ 600 = 26\ 400$$

Entonces como a partir de este momento las dos máquinas trabajan simultáneamente, puedo plantear la siguiente relación,

1 hr _______ 3 000 botellas

x hr _______ 26 400 botellas

$$x = \frac{26400}{3000}$$

$$x = 8.8 \text{ horas}$$

Ahora sumo las 2 horas que trabajó la máquina (B) sola, por lo tanto, el tiempo total que tardaron ambas máquinas en llenar y tapar 30 000 botellas es 10.8 horas.

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

¡Sí, puesto que la máquina más lenta se tardo 2 horas en entrar a trabajar, entonces el tiempo que les toma para realizar el pedido debe ser menor al del problema anterior!

Ahora como las dos máquinas llenan y tapan 3 000 botellas en una hora, entonces en 8.8 horas terminarán

$$3\ 000\ (8.8) = 26\ 400 \text{ botellas}$$

si a esta cantidad le sumo las que terminó la máquina B, obtengo el total de botellas que se llenaron y taparon en 10.8 horas

$$26\,400 + 3\,600 = 30\,000 \text{ botellas}$$

¡Que es el resultado esperado!

Estos ejercicios son para que el profesor los trabaje con el alumno por tres métodos distintos para que observen una vez más que podemos llegar a la solución del problema por distintos caminos. Con estos ejemplos una vez más se pone de manifiesto el hecho de que aún cuando existen varios métodos para resolver problemas, algunos de ellos solo pueden resolver un cierto tipo de problemas, exceptuando al **método algebraico**, el cual es el más poderoso de todos ellos. Cabe señalar que se incluye este problema debido a que el proceso de análisis se considera interesante.

Resolveremos un problemas por medio de tres métodos para constatar lo antes dicho.

*** Ejemplo 11 (Método de Tanteo)**

Un depósito de agua puede llenarse con dos llaves, una de ellas puede hacerlo en 10 minutos, si descarga a toda su capacidad. La otra, también, a toda su capacidad, puede llenarlo en 40 minutos. Si ambas llaves descargan simultáneamente a toda su capacidad, ¿cuánto tiempo tardarán en llenar el tanque?

1. Entender el problema.

¿Que trato de encontrar?

El tiempo de llenado del tanque.

¿Qué datos tengo?

En 10 minutos lo llena una llave, otra llave lo hace en 40 minutos.

¿Cuál es la condición?

Que las dos llaves lo llenen simultáneamente.

2. Diseñar un plan.

¿Por qué medios puedo encontrar el valor de la incógnita?

Por el método de tanteo.

3. Llevar a cabo dicho plan.

2 minutos como primer número

La llave A llenará $\frac{2}{10}$ del tanque

La llave B llenará $\frac{2}{40}$ del tanque

Ambas llaves llenarán

$$\frac{2}{10}+\frac{2}{40}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$$

simplificando y realizando la suma obtengo

$$\frac{4}{20}+\frac{1}{20}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$$

De acuerdo al metodo que estoy empleando observo que es muy bajo. Intentemos con un número de minutos más grande.

5 minutos, entonces se llenaría

La llave A llenará $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ del tanque

La llave B llenará $\frac{5}{40}=\frac{1}{8}$ del tanque

Ambas llaves llenaran

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}+\frac{1}{8}$$

simplificando y realizando la suma obtengo

$$\frac{4}{8}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$$

Todavía bajo. Intentemos con un número de minutos más grande.

9 minutos, entonces se llenaría

La llave A llenará $\frac{9}{10}$ del tanque

La llave B llenará $\frac{9}{40}$ del tanque

Ambas llaves llenarán

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{40}=\frac{36}{40}+\frac{9}{40}$$

simplificando y realizando la suma obtengo

$$\frac{36}{40}+\frac{9}{40}=\frac{45}{40}=\frac{9}{8}$$

Lo cual excede la capacidad del tanque.

Intentemos con un número de minutos más pequeño.

8 minutos, entonces se llenaría

La llave A llenará $\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

La llave B llenará $\frac{8}{40}=\frac{1}{5}$

Ambas llaves llenarán

$$\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=1$$

Correcto, pues obtenemos el entero. o sea, que en 8 minutos se llena el tanque con las dos llaves, simultáneamente.

4. Regresar a analizar el proceso de solución.

¿Parece razonable la solución?

Sí, pues una sola llave lo llena en 10 minutos, por lo tanto las dos llaves lo deben de llenar en menos minutos.

✱ **Ejemplo 11 (Método Gráfico)**

Un depósito de agua puede llenarse con de dos llaves, una de ellas puede hacerlo en 10 minutos, si descarga a toda su capacidad. La otra, también a toda su capacidad, puede llenarlo en 40 minutos. Si ambas llaves descargan simultáneamente a toda su capacidad, ¿cuánto tiempo tardarán en llenar el tanque?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuánto tiempo tardarán en llenar el tanque.

¿Qué datos tengo?

En 10 minutos lo llena una llave, otra llave lo hace en 40 minutos.

2. Diseñar un plan.

¿Cuál es la incógnita?

El tiempo que tarda en llenarse el tanque.

¿Por qué medio puedo encontrar el tiempo de llenado?

Haciendo una gráfica que represente la situación

3. Llevar a cabo dicho plan.

Para encontrar la gráfica del problema, se necesitan al menos dos puntos. Del enunciado del problema tenemos que la llave A llena el tanque en 10 minutos, y la llave B lo llena en 40minutos. Para encontrar en cuanto ha contribuido cada llave para llenar el tanque durante un intervalo de tiempo de 2 minutos utilizamos la regla de tres. Haciendo esto, se encuentra que la llave A lo ha llenado en $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$, y la llave B lo lleno en $\frac{2}{40}=\frac{1}{20}$. Entonces, el tanque se habrá llenado con ambas llaves en

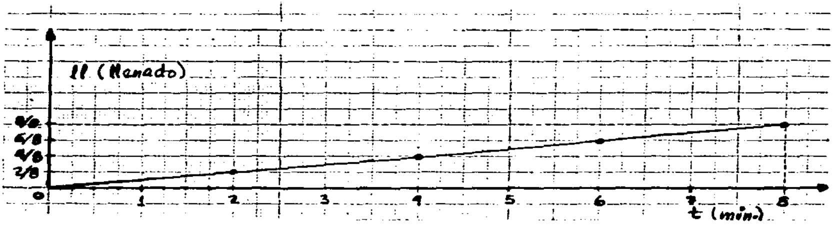
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{4}{20}+\frac{1}{20}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$$

Ahora en 5 minutos la llave A llena un $\frac{1}{2}$ del tanque, y la llave B $\frac{1}{8}$. Por lo tanto las dos llaves simultáneamente llenarán el tanque en

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$$

y con esto determino los dos puntos $\left(2,\ \frac{1}{4}\right)$ y $\left(5,\ \frac{5}{8}\right)$ por lo tanto obtengo la siguiente gráfica

Llenado



minutos

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

La gráfica muestra que:

en 2 minutos se llena el tanque en 2/8 = ¼ de su capacidad,

en 4 minutos se llena el tanque en 4/8 = ½ de su capacidad,

en 5 minutos se llena el tanque en 5/8 de su capacidad,

en 8 minutos se llena el tanque en 8/8 = 1 de su capacidad.

4. Regresar a analizar el proceso de solución.

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que observando la gráfica su llenado concuerda pues 2 min. se ha llenado $\frac{1}{4}$ del tanque,

en 4 min. se ha llenado $\frac{1}{2}$ del tanque

y finalmente en 8 min. se llena el tanque completo.

✳ Ejemplo 11 (Método Algebraico)

Un depósito de agua puede llenarse con dos llaves, una de ellas puede hacerlo en 10 minutos, si descarga a toda su capacidad. La otra, también a toda su capacidad, puede llenarlo en 40 minutos. Si ambas llaves descargan simultáneamente a toda su capacidad, ¿cuánto tiempo tardarán en llenar el tanque?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuánto tiempo tardarán en llenar el tanque.

¿Qué datos tengo?

En 10 minutos lo llena una llave, otra llave lo hace en 40 minutos.

2. Diseñar un plan.

¿Cuál es la incógnita?

x = el tiempo que tarda en llenarse el tanque.

¿Por qué medio puedo encontrar el tiempo de llenado?

Planteando la ecuación correspondiente y resolviéndola.

Como la llave (llamémosle A) lo llena en 10 minutos, entonces en 5 minutos, llenará $\frac{1}{2}$ del tanque, y la llave B en 5 minutos llenará $\frac{1}{8}$ de tanque, de manera que juntas llenan $\frac{5}{8}$ de tanque. Como

$$5/10 = 1/2$$

$$5/40 = 1/8$$

y

$$1/2 + 1/8 = (4+1)/8 = 5/8$$

por lo tanto en 5 minutos se llena 5/8 de tanque

si x es el tiempo obtenemos la proporción

5 min. ———— 5/8

x min. ———— 1

3. Llevar a cabo dicho plan. (resolviendo)

$$x = 5 / (5/8) = 40 / 5 = 8$$

de esto se concluye que tardan 8 min. en llenar el tanque.

4. Regresar a analizar el proceso de solución

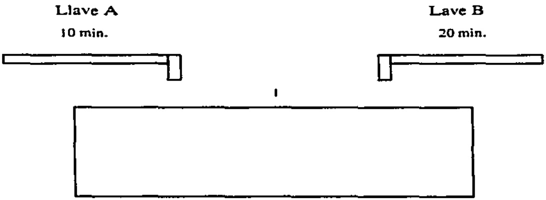
¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que dio el mismo resultado con los distintos metodos

✱ **Ejemplo 12 (Método Algebraico)**

(Resolviendolo de otra manera pero usando este método.)

Un depósito de agua puede llenarse con dos llaves, una de ellas puede hacerlo en 10 minutos, si descarga a toda su capacidad. La otra, también a toda su capacidad, puede llenarlo en 20 minutos. Si ambas llaves descargan simultáneamente a toda su capacidad, ¿cuánto tiempo tardarán en llenar el tanque?



1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

El tiempo de llenado del tanque.

¿Qué datos tengo?

En 10 min. lo llena una llave, otra llave lo hace en 20 min.

¿Cuál es la condición?

Que las dos llaves lo llenen simultáneamente.

2. Diseñar un plan

¿Cuál es la incógnita?

Sea x, el tiempo que tarda en llenarse el tanque con ambas llaves.

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Planteando la siguiente ecuación y resolviéndola.

Como una llave (llamémosle A), lo llena en 10 min. entonces en 5 minutos llenará la mitad (1/2) del tanque, y la llave B , en 5 min., llenará un ¼, de manera que juntas habrán llenado 1/2 +1/4 =3/4 del depósito, esto es

$$\left(\frac{3}{4}\right) \quad \text{——} \quad 5 \text{ min.}$$

$$3\left(\frac{1}{4}\right) \quad \text{——} \quad 5 \text{ min.}$$

esto es, en 5 min. se llenó el tanque en $\frac{3}{4}$.

3. Llevar a cabo dicho plan

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

De la proporción anterior se tiene que

$$\frac{1}{4} \quad \text{——} \quad \frac{5}{3} \text{ min.}$$

está relación nos dice que, el cuarto faltante se llenará en la tercera parte de 5 minutos.

De esta forma la solución sería:

$$5+\tfrac{5}{3}=5+1\tfrac{2}{3}=6\tfrac{2}{3} \text{ min.}$$

¿Encontré otros métodos para resolver el problema?

Si, otra solución sería usando una regla de tres.

✳ Ejemplo 12 (Método Algebraico) *

Un depósito de agua puede llenarse con dos llaves, una de ellas puede hacerlo en 10 minutos, si descarga a toda su capacidad. La otra, también a toda su capacidad, puede llenarlo en 20 minutos. Si ambas llaves descargan simultáneamente a toda su capacidad, ¿cuánto tiempo tardarán en llenar el tanque?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

El tiempo de llenado del tanque.

¿Qué datos tengo?

En 10 min. lo llena una llave, otra llave lo hace en 20 min.

¿Cuál es la condición?

Que las dos llaves lo llenen simultáneamente.

2. Diseñar un plan

¿Cuál es la incógnita?

Sea x, el tiempo que tarda en llenarse el tanque con ambas llaves.

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Planteando la siguiente ecuación y resolviéndola.

Como la llave A lo llena en 10 minutos, y la llave B en 20 minutos, entonces en 5 minutos la llave A lo llenará sólo a la mitad de su capacidad, y la llave B sólo lo llenará en un cuarto de su capacidad. Por lo tanto, en 5 minutos ambas llaves lograran llenar el tanque en $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. Así que, 5 minutos es a $\frac{3}{4}$, como x minutos es a 1, que es lo mismo que,

$$\begin{array}{lcc} 5 \text{ minutos} & \underline{\qquad} & \frac{3}{4} \\ x \text{ minutos} & \underline{\qquad} & 1 \end{array}$$

3. Llevar a cabo dicho plan

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

De la proporción anterior tengo que

$$x = \frac{5}{\frac{3}{4}} \text{ min.}$$

$$x = 6\frac{2}{3}$$

$$x = 6.66\bar{6}$$

por lo tanto, el tanque se llenará en $6\frac{2}{3}$ de minuto aproximadamente.

El método de regla de tres se usara frecuentemente.

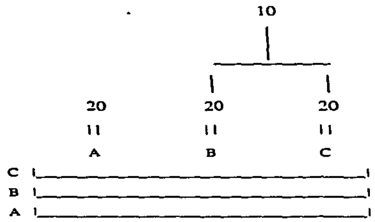
¿Encontré otros métodos para resolver el problema?

Sí, una solución muy ingeniosa, la propuso una niña.

Ejemplo 12.

Un depósito de agua puede llenarse con dos llaves, una de ellas puede hacerlo en 10 minutos, si descarga a toda su capacidad. La otra, también a toda su capacidad, puede llenarlo en 20 minutos. Si ambas llaves descargan simultáneamente a toda su capacidad, ¿cuánto tiempo tardarán en llenar el tanque?

Se tiene que "Una llave es la más lenta, la de 20 minutos; y otra es más rápida, la de 10 minutos, si la más rápida se divide en dos salidas de agua se obtienen dos llaves de 20 minutos, de tal manera que cuando la llave de 20 minutos llena la tercera parte del tanque la otra ya llenó lo que faltaba:



3. Llevar a cabo dicho plan

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

Entonces, se tiene que la solución es $20 / 3 = 6.66\overline{6}$

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Si, ya que por los tres métodos se llego a la misma solución.

Se encontró así la solución, y ¿ahora qué? Tradicionalmente esto significaría el fin de la actividad.

Pero coincidiendo con algunos investigadores (Schoenfeld), llegar a la solución de un problema es el inicio de una rica experiencia matemática.

Esta actividad completa el ciclo propuesto para manejar los problemas en clase y promover el trabajo matemático en el aula . Tal tipo de actividades simulan en parte, las que realiza un matemático formal.

En el problema anterior teníamos que en 5 min. se llenaban ¾ del tanque, nos preguntábamos en cuánto tiempo se llenará todo, es decir:

$$\frac{3}{4} \quad \text{——} \quad 5 \text{ min.}$$

$$1 \quad \text{——} \quad x \text{ min.}$$

de donde

$$x = \frac{5}{\frac{3}{4}} = \frac{20}{3} = 6.66\overline{6}$$

esto es, tarda en llenarse 6.666 minutos aproximadamente.

Veamos qué pasa con los mismos datos pero preguntándonos ¿cuánto se llena en 2 min.?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuanto se ha llenado el tanque.

¿Qué datos tengo?

En 10 min. lo llena una llave. La otra llave lo hace en 20 min.

¿Cuál es la condición?

Que las dos llaves lo llenen simultáneamente.

2. Diseñar un plan

¿Cuál es la incógnita?

El volumen que se llenará en 2 minutos.

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Planteando la siguiente ecuación y resolviéndola.

La llave de 10 min. llena 2/10 = 1/5 de tanque en 2 minutos

La llave de 20 min. llena 2/20 = 1/10 de tanque en 2 minutos

o sea que en 2 minutos se tiene que

a 10 min. corresponde 1/5

a 20 min. corresponde 1/10

Por lo tanto

1/5 + 1/10 = (2+1)/10 = 3/10

En 2 minutos las llaves juntas llenan el tanque a 3/10 de su capacidad.

Si, ya que para saber en cuánto tiempo se llenará el tanque, se plantea la siguiente relación con el dato encontrado

2 min. ____ 3/10

x min. ____ 1

3. Llevar a cabo dicho plan

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

De la proporción anterior tengo que

2 min. ____ 3 /10

x min. ____ 1

$x = 2/(3/10) = 20/3 = 6.66\overline{6}$

que es el mismo resultado que ya se había encontrado anteriormente.

$x = \frac{2}{\frac{3}{10}} = 6\frac{2}{3}$ min.

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Si, pues es el mismo resultado anterior. Por lo tanto el resultado es correcto.

Ahora qué pasa si le damos los mismos datos pero preguntándonos ¿qué fracción del tanque se llena en 7 minutos?.

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuanto se ha llenado el tanque.

¿Qué datos tengo?

En 10 min. lo llena una llave. La otra llave lo hace en 20 min.

¿Cuál es la condición?

Que las dos llaves lo llenen simultáneamente.

2. Diseñar un plan

¿Cuál es la incógnita?

En 7 minutos, cuanto se habrá llenado el tanque con ambas llaves.

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Analizando lo siguiente:

la llave de	10 min.	llena	7 / 10	de tanque en 7 minutos
y la llave de	20 min.	llena	7 / 20	de tanque en 7 minutos

Entre las dos llenan el tanque a

$$7/10 + 7/20 = 14/20 + 7/20 = 21/20 = 1\ \ 1/20$$

3. Llevar a cabo dicho plan

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$$x = 1\frac{1}{20}$$

éste resultado nos indica que, 7 minutos es demasiado tiempo para llenar el tanque, ya que ocasionará que el agua se derrame (puesto que hay un exceso de 1/20) de la capacidad del tanque.

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que para llenarse el tanque sólo se necesita de un tiempo de $6.66\bar{6}$ minutos aproximados.

Queda por realizar una actividad más, se concluye la experiencia regresando al problema original, pero solicitando que se den los datos necesarios para obtener como solución 7 minutos exactos. También se puede pedir que el tiempo de llenado de una de las llaves sea el mismo, la solución sea otra, y que se encuentre el tiempo de llenado con la otra llave.

Ahora se piden los datos necesarios para obtener 7 minutos exactamente, es decir que no exista derrame alguno. Para conseguir esto, la condición es ver que valores debe tener la división de fracciones (ley de la torta), para que el resultado me dé exactamente 7 minutos, o sea trabajamos en sentido contrario (de atrás para adelante).

Tomando como base el ejemplo principal (resuelto por la regla de tres)

$$\begin{array}{lcl} 3/4 & \_\_\_ & 5 \text{ min.} \\ 1 & \_\_\_ & x \text{ min.} \end{array}$$

de donde

$$x = 5 / 3/4 = 20/3 = 6.66\bar{6}$$

puesto que ahora queremos que el resultado sea 7, analicemos algunas fracciones que sean equivalentes al resultado buscado:

14/2 , 21/3 , 28/4 , 35/5 , 63/9, ...

Usando como ejemplo la cuarta fracción de la lista, se tendrá la siguiente igualdad:

$$x = 7 = \frac{35}{5} = \frac{7(5)}{5} = \frac{5}{\frac{5}{7}}$$

consideremos ahora el primer cociente de la lista 14/2, dejemos que el denominador permanezca igual y busquemos una pareja de números tal que al multiplicarlos den 14, (es decir, factoricemos el numerador) por ejemplo el 7 y el 2, esto nos da:

$$x = 7 = \frac{14}{2} = \frac{7(2)}{2} = \frac{2}{\frac{2}{7}}$$

o sea, vamos de atrás para adelante, tomando como base los pasos de la solución del problema inicial.

Analizando ambas expresiones, se observa que el numerador de la segunda fracción se factoriza para dar origen, por medio de la regla de la "torta", al cociente final que involucra un entero y una fracción más.

Esto nos indica, que la solución del problema (en el primer caso de la lista), se debería plantear de la manera siguiente:

$$\frac{2}{7} \quad \_\_\_\_ \quad 2 \text{ min}$$

$$1 \quad \_\_\_\_ \quad x \text{ min}$$

así que

$$x = \frac{2}{\frac{2}{7}} = \frac{14}{2} = 7$$

que es lo que se quiere.

Por lo tanto, el planteamiento del problema para que el tanque se llene exactamente en 7 minutos, sería que en 2 minutos ambas llaves deberán cubrir 2/7 del volumen total. Si arbitrariamente fijamos la velocidad de flujo de una de las llaves, el problema se reduce a encontrar la de la otra llave. Obviamente, cada una de las llaves por separado, deberá llenar una fracción menor a 2/7.

Supongamos entonces que una de las llaves llena 2/20 del tanque en 2 min (este valor lo doy arbitrario), necesitamos encontrar ahora la capacidad u que llena la otra llave en el mismo tiempo, pero con la condición de que u sea mayor que cero ($u > o$), puesto que no tiene sentido hablar de volúmenes negativos, entonces la contribución de las dos llaves para llenar el tanque debe estar expresada por

$$\frac{2}{20} + u = \frac{2}{7}$$

¿por qué 2/7 ?, porque esta condición se daba en el ejercicio anterior, o sea que juntas llenan el tanque en esa fracción. Despejando para encontrar el valor de u:

$$\frac{2}{20} - \frac{2}{20} + u = \frac{2}{7} - \frac{2}{20}$$

$$u = \frac{2}{7} - \frac{2}{20} = \frac{40-14}{140} = \frac{26}{140} = \frac{13}{70}$$

por lo tanto

$$u=\frac{13}{70}$$

Entonces en 2 minutos la otra llave llena $\frac{13}{70}$ del tanque por lo que juntas deberán llenar el tanque en $\frac{2}{7}$. Realizamos la operación

$$\frac{2}{20}+\frac{13}{70}$$

En donde

$$\frac{2}{20}=\frac{1}{10}.$$

$$\frac{1}{10}+\frac{13}{70}=\frac{7}{70}+\frac{13}{70}=\frac{20}{70}=\frac{2}{7}$$

Ahora veamos en cuantos minutos se llena el tanque con cada llave sola. Esto lo resolvemos de la siguiente manera: en 2 min se llenan $\frac{2}{20}$ con la primera llave (esta condición se dio antes), por lo tanto en x min deberá llenarse totalmente. Como se puede observar es una regla de tres.

$$\begin{array}{ccc} 2 & — & \frac{2}{20} \\ x & — & 1 \end{array}$$

al resolverla obtenemos

$$x=\frac{2}{\left(\frac{2}{20}\right)}=\frac{40}{2}=20$$

$$x=20 \text{ min.}$$

Por lo tanto, la llave A llena el tanque en 20 minutos.

Ahora veamos en cuanto tiempo se llena con la llave B

$$\begin{array}{ccc} 2 \text{ min.} & — & \frac{13}{70} \\ x \text{ min.} & — & 1 \end{array}$$

entonces

$$x = \frac{2}{\left(\frac{13}{70}\right)} = \frac{140}{13}$$

por lo tanto, la llave B lo llena en $\frac{140}{13}$ min.

Veamos, ¿cuánto se tardará en llenar el tanque si se usan las dos llaves?

$$\begin{array}{ccc} 2/7 & \_\_\_\_ & 2 \text{ min.} \\ 1 & \_\_\_\_ & x \text{ min.} \end{array}$$

De donde

$$x = \frac{2}{\left(\frac{2}{7}\right)} = \frac{14}{2} = 7$$

¡QUE ES LO QUE QUERÍAMOS!

Es decir, si A llena el tanque en 20 min y B lo hace 140/13, entonces juntas lo llenan exactamente en 7 min.

Ahora otra pregunta sería si consideramos un lapso de tiempo de 5 min. ¿Qué fracción del tanque llenará por separado cada llave, A y B? (del mismo ejemplo anterior).

Se tiene que en 5 minutos la llave A llena el tanque en 5/20 = 1/4, mientras que la llave B lo ha llenado en 5/(140/13) esto es:

$$\frac{5}{\frac{140}{13}} = \frac{5}{\frac{2(70)}{13}} = \frac{5}{\frac{2(10)(7)}{13}} = \frac{5}{\frac{2(2)(5)(7)}{13}} = \frac{1}{\frac{28}{13}} = \frac{13}{28}$$

En este tiempo, el tanque se ha llenado en

$$\frac{1}{4} + \frac{13}{28} = \frac{7}{28} + \frac{13}{28} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}$$

Por lo tanto, para calcular cuanto tarda en llenarse el tanque con las dos llaves se tiene que

$$\begin{array}{ccc} 5 \text{ min.} & \_\_\_\_ & \frac{5}{7} \\ x \text{ min.} & \_\_\_\_ & 1 \end{array}$$

Por lo que

$$x = \frac{5}{\left(\frac{5}{7}\right)} = 7$$

es decir el tanque se llena en 7 min.

Veamos ahora otro ejemplo para que el tanque se llene en 7 minutos. Consideremos la quinta fracción de la lista original, es decir 63/9, entonces:

$$x = 7 = \frac{63}{9} = \frac{21(3)}{9} = \frac{3}{\frac{9}{21}}$$

de aquí se infiere la regla de tres:

$$\frac{9}{21} \quad \text{——} \quad 3 \text{ min.}$$

$$1 \quad \text{——} \quad x \text{ min.}$$

por lo que se concluye que en 3 min., las dos llaves llenan $\frac{9}{21}$ del tanque,

Entonces, arbitrariamente proponemos que la llave A llene el tanque hasta $\frac{3}{9}$ de su capacidad total (opcional y múltiplo de 3 para facilitar los cálculos). Ahora para calcular en cuanto ha cooperado la llave B, se plantea la siguiente ecuación

$$\frac{3}{9} + u = \frac{9}{21}$$

$$\frac{3}{9} - \frac{3}{9} + u = \frac{9}{21} - \frac{3}{9}$$

$$u = \frac{9}{21} - \frac{3}{9} = \frac{3}{7} - \frac{3}{9} = \frac{27-21}{63} = \frac{6}{63} = \frac{2}{21}$$

entonces

$$u = \frac{2}{21}$$

Por lo tanto, en 3 minutos la llave A llena el tanque en $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ y la llave B en $\frac{2}{21}$, esto es, el tanque se ha llenado en $\frac{9}{21}$ con las llaves juntas. Comprobando:

$$\frac{3}{9}+\frac{2}{21}=\frac{(63+18)}{189}=\frac{81}{189}=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$$

en consecuencia, para averiguar en cuánto tiempo llena el tanque cada llave sola, planteamos las siguientes reglas de tres

3 min.	———	$\frac{3}{9}=1/3$	3 min.	———	$\frac{2}{21}$
x min.	———	1	x min.	———	1

esto nos da los tiempos buscados:

$$x=\frac{3}{\left(\frac{3}{9}\right)}=\frac{27}{3}=9 \text{ min.} \qquad x=\frac{3}{\left(\frac{2}{21}\right)}=\frac{63}{2}=31.5 \text{ min.}$$

El enunciado del problema sería: se tiene una llave A, que tarda en llenar el tanque 9 minutos, y otra llave B tarda $\frac{63}{2}$ min. ¿Qué fracción del tanque se llenará en 3 min. usando ambas llaves?

La llave A, llena $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ del tanque en 3 min. La llave B llena $\frac{3}{\left(\frac{63}{2}\right)}=\frac{6}{63}=\frac{2}{21}$

por lo tanto en 3 min. juntas llenarán

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{21}=\frac{7}{21}+\frac{2}{21}=\frac{9}{21}$$

Finalmente, para averiguar en cuántos minutos se llena el tanque con ambas llaves, tenemos:

3 min.	———	$\frac{9}{21}$
x min.	———	1

de donde

$$x=\frac{3}{\left(\frac{9}{21}\right)}=\frac{63}{9}=7$$

¡QUE ES LO QUE QUERÍAMOS!

Ahora, qué fracción del tanque se llenará en 5 min.

La llave A lo llena en 5/9 mientras que la llave B lo hace en 5/(63/2)= 10/63.

En este tiempo las dos llaves han llenado el tanque en

$$\frac{5}{9}+\frac{10}{63}=\frac{405}{567}$$

de donde, para saber cuanto tardan en llenar las dos llaves el tanque, se plantea lo siguiente

$$5 \text{ min.} \quad \text{———} \quad \frac{405}{567}$$

$$x \text{ min.} \quad \text{———} \quad 1$$

de donde x = 7 min. igual a lo anterior.

Ahora tomo minutos arbitrarios y el llenado que sea múltiplo de ese número por ejemplo:

7 min.

14 min. 7/ 14

35 min. 7/ 35

de donde

7/14 +7/ 35 = 1 /2 + 1/5 = (5+ 2)/10= 7/10

O sea las dos llaves llenan el tanque en 7 /10 de capacidad en 7 min.

Planteando esto tenemos

7 min.——— 7/10

x min. ——— 1

de donde

x = 7 / (7 / 10) = 70 / 7 = 10 min.

x = 10 min

Por lo tanto se llena en 10 min.

Ahora daremos minutos arbitrarios y llenado arbitrario.

7 min.

a) 1 /6 de tanque

b) 7/14 = ½ de tanque

Encontrar en cuanto tiempo llena el tanque cada llave.

a) 7 min. —— 1/6 (se llena 1/6 de tanque)

x min. —— 1 (en cuantos min. se llenara el tanque)

x =7 / (1/6) = 42/1 =42

x = 42

Por lo tanto se llena en 42 min. el tanque

En

b) 7 min. —— 7 / 14 = ½

x min. —— 1

x = 7 / (7 /14) = 98 / 7 = 14

x = 14

En 14 min. se llena el tanque

DE DONDE SE CONCLUYE QUE

a) llena en 42 min el tanque

b) llena en 14 min el tanque

¿En cuantos min. llenan el tanque las llaves?

En 7 min. las llaves llenan por separado 1/6 y 7/14 entonces

1 /6 + 7/14 = 1 /6 +1/2 (reduciendo) = 4 /6 = 2/3

7 min. —— 2/3

x min. —— 1

x = 7/(2/3) = 21/2 = 10.5

x = 10.5

Por lo tanto en 10.5 minutos se llena el tanque.

A continuación se presentaran algunos problemas que se resuelven por distintos método.

Ejemplo 13 (Método de Tanteo).

La suma de los dos números es 73, uno de ellos es 25. ¿Cuál es el otro número?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Un número que sumado con 25 sea igual a 73.

¿Qué datos tengo?

Un número es 25.

2. Diseñar un plan.

¿Por qué medio puedo encontrar el valor de las incógnitas?

Por el método de tanteo.

3. Llevar a cabo dicho plan.

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

5 como primer número. $5 + 25 = 30$,

Muy bajo. Intentemos con un número más grande.

20 como primer número. $20 + 25 = 45$,

Muy bajo. Intentemos con un número más grande.

65 como primer número. $65 + 25 = 90$,

Muy alto, pero muy cerca. Intentemos con un número más chico.

50 como primer número. $50 + 25 = 75$,

Alto, pero muy cerca. Intentemos con un número más chico.

48 como primer número. $48 + 25 = 73$,

El número 48 es el correcto.

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que $48 + 25 = 73$

Ejemplo 14 (Método de Tanteo)

Encontrar el número que falta en la ecuación

$$\frac{3 * (\ ) + 7}{2} = 11$$

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Un número que cumpla con la ecuación anterior.

¿Qué datos tengo?

La siguiente ecuación

$$\frac{3 * (\ ) + 7}{2} = 11$$

2. Diseñar un plan.

¿Por qué medio puedo encontrar el valor de las incógnitas?

Por el método de tanteo.

3. Llevar a cabo dicho plan.

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

8 como el número. Verificación $\frac{3 * 8 + 7}{2} = \frac{24 + 7}{2} = \frac{31}{2} = 15\frac{1}{2}$

ya que $15\frac{1}{2}$ es mayor que 11, entonces 8 es muy grande. Intentemos con 4.

4 como el número. Verificación $\frac{3*4+7}{2}=\frac{12+7}{2}=\frac{19}{2}=9\frac{1}{2}$

ya que $9\frac{1}{2}$ es menor que 11, por lo tanto 4 es muy pequeño. Intentemos con 5.

5 como el número . Verificación correcto $\frac{3*5+7}{2}=\frac{15+7}{2}=\frac{22}{2}=11$, correcto

El número que faltaba era el 5.

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que al sustituir el 5 en la ecuación se verifica la igualdad.

Problemas.

Resolver usando el método de Tanteo.

1) $2 * (\ ) - 1 = 39$

2) $5\ (3 + (\ )) = 40$

Resolución de Problemas Mediante Diagramas.

Otro de los métodos útiles es *hacer un diagrama* (dibujo) de la situación.

Ejemplo 15.

Se le pidió al administrador de una plaza comercial que cercara con una cuerda una sección rectangular del estacionamiento para una exhibición de autos. El área cercada fue de 250 por 300 metros. Se colocaron postes cada 25 metros alrededor de la sección. ¿Cuántos postes se necesitaron?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuántos postes se necesitan para delimitar el área.

¿Qué datos tengo?

Se da el ancho y la altura.

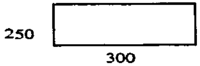
2. Diseñar un plan.

Como los postes se van ha colocar en el contorno de la superficie , entonces calculo el perímetro, esto es: 300 (2) + 250 (2) = 1100.

¿Cuál es la incógnita?

Conocerel número de postes caben en una longitud de 1100 metros, si se colocan cada 25 metros.

3. Llevar a cabo dicho plan.



Divido el perímetro entre la distancia que hay entre los postes

1100/25=44, por lo tanto se requieren 44 postes.

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

Se pueden colocar 44 postes alrededor del terreno.

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, pues si multiplicamos 44 x 25 nos da la longitud del perímetro del terreno.

Problema.

Una ranita estaba jugando y se cayó a un pozo. El pozo tiene 13 metros de profundidad. Durante el día la ranita sube por las paredes del pozo 4 metros y durante la noche se resbala 1 metro. ¿Cuántos días tardará en salir del pozo la ranita?.

Problema.

Una hormiga cayó en un recipiente de paredes lisas. El recipiente mide 12 centímetros de profundidad. Durante el día la hormiga sube por las paredes del recipiente 4 centímetros y durante la noche se resbala 1 centímetro. ¿Cuántas horas tardará en salir del recipiente la hormiga?.

Método por Tabla de Valores.

Otro de los métodos más usados es por medio de *una tabulación.* Se dan algunos ejemplos a continuación.

Ejemplo 16.

Un transporte colectivo recorre 5 Km. en 20 minutos. ¿Cuántos kilómetros recorrerá en 2 horas?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuántos kilómetros recorrerá un colectivo en 2 horas (120 minutos).

¿Qué datos tengo?

Un colectivo recorre 5 Km. en 20 minutos.

2. Diseñar un plan.

¿Por qué medio puedo encontrar el número de kilómetros recorridos?

Realizando la siguiente tabla.

3. Llevar a cabo dicho plan.

Min	Km.
20	5
40	10
60	15
80	20
100	25
120	30
140	35
160	40
180	45

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

La tabla muestra que en 120 minutos (2 Hrs.) el colectivo recorrerá 30 kilómetros.

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, puesto que con 6 intervalos de 20 minutos se obtiene en total un intervalo de 120 minutos, entonces en esos 6 intervalos se habrán recorrido 30 Km (= 5 Km.* 6).

Ejemplo 17.

Un taxi cobra $ 2 el banderazo y $ 7 por 5 minutos. ¿Cuanto cobrará por 45 minutos?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuanto cobrará un taxi por 45 minutos.

¿Qué datos tengo?

Un taxi cobra $ 7 por 5 minutos y $ 2 el banderazo.

2. Diseñar un plan.

¿Por qué medio puedo encontrar el costo o cuánto cobro?

Realizando la siguiente tabla

3. Llevar a cabo dicho plan.

Min	$
5	7
10	14
15	21
20	28
25	35
30	42
35	49
40	56
45	63
50	70
55	77
60	84

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

La tabla muestra que por 45 minutos , el taxista deberá de cobrar $63 más $ 2 del banderazo que es en total $65.

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que 45 es múltiplo de 5 (5 * 9 = 45) entonces el costo será $7 * 9 = $63

Resolución de problemas mediante gráficas.

Un método también muy útil es elaborar *una gráfica* para ver su relación y obtener el resultado.

Ejemplo 18.

Una maquina se tarda 3 minutos en cortar un tronco en dos piezas. ¿Cuánto se tardara cortarlo en 12 piezas?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuanto se tardará cortar un tronco en 12 piezas.

¿Qué datos tengo?

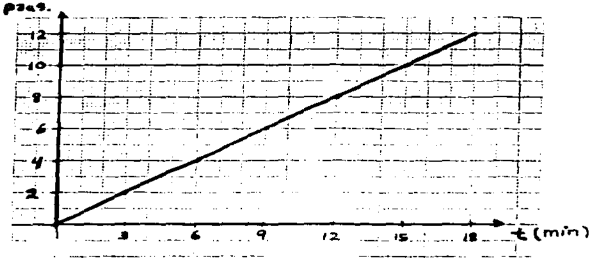
Se tarda 3 minutos cortar un tronco en dos piezas.

2. Diseñar un plan.

¿Por qué medio puedo encontrar el tiempo necesario para cortar un tronco en 12 piezas?

Haciendo una gráfica que represente la situación.

3. Llevar a cabo dicho plan.



¿Cuáles resultados se obtuvieron?

En 3 min se corta en 2 partes y en 6 min en 4, como estos dos puntos determinan una recta, entonces en 12 min se corta en 8 partes, en 15 min en 10 partes; por lo tanto, viendo la gráfica se concluye que se tardarán 18 minutos en cortarlo en 12 partes.

4. Regresar a analizar el proceso de solución.

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que observando la gráfica se tiene que en 3 minutos se cortó el tronco en 2 partes, en 6 minutos se corta en 4 partes, etc. Por lo tanto en 18 minutos se cortará en 12 partes.

Ejemplo 19.

Los Trabajadores de limpia del DDF, le comentan a su jefe que una persona puede limpiar de propaganda electoral ocho cuadras en dos horas. Si hay 48 cuadras por limpiar, ¿cuántas personas se necesitaran para limpiarlas en las mismas dos horas?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuántas personas se necesitaran para limpiar 48 cuadras en dos horas.

¿Qué datos tengo?

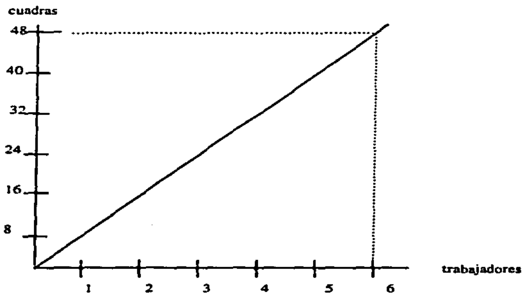
Una persona puede limpiar ocho cuadras en dos horas.

2. Diseñar un plan.

¿Por qué medio puedo encontrar el número de personas de limpia?

Haciendo una gráfica que represente la situación. Debido a que los rangos de las cuadras y el número de los trabajadores en muy diferente, nos vemos obligados a utilizar dos escalas distintas para poder realizar una gráfica en la cual se pueda apreciar con mayor claridad la situación que se esta planteando en el enunciado del problema.

3. Llevar a cabo dicho plan.



¿Cuáles resultados se obtuvieron?

La gráfica muestra que un trabajador puede limpiar 8 cuadras en 2 horas, 2 trabajadores 16 cuadras en el mismo tiempo, como estos dos puntos determinan una recta, la gráfica muestra que con 6 trabajadores se pueden limpiar las 48 cuadras en dos horas.

4. Regresar a analizar el proceso de solución.

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que la relación trabajador-cuadras es 1 trabajador limpia 8, 2 trabajadores limpian 16, etc. Por lo tanto con 6 trabajadores se limpiarán 48 cuadras.

Resolución de problemas mediante el planteamiento de una ecuación algebraica.

Anteriormente se han estudiado métodos que se pueden utilizar para resolver problemas matemáticos. Un método poderoso es *plantear una ecuación.* Muchos de los problemas con los que trabajaremos se pueden resolver planteando y resolviendo una ecuación.

Cómo plantear y resolver una ecuación.

¿Puedo usar una variable para representar un número desconocido?
¿Puedo representar otras condiciones en términos de la variable?
¿Puedo encontrar expresiones equivalentes?
¿Puedo plantear y resolver una ecuación?

Ejemplo 20.

El salario de José este año es de $23400. Esto es $1700 más de lo que ganó el año pasado. ¿Cuál fue su salario el año pasado?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar ?

Cuál fue el salario de José el año pasado.

¿Qué datos tengo?

José ganó $23400 este año. Esto es $1700 más de lo que ganó el año pasado.

2. Diseñar un plan.

¿Cuál es la incógnita?

Sea I el salario del año pasado. *Esta variable es utilizada para representar lo que tratamos de encontrar.*

¿Cuáles datos necesito para obtener el valor de la incógnita?

Nuestros datos nos dicen que 23400 es 1700 más que I. Esto es lo mismo que la ecuación

$$1700 + I = 23400$$

También podemos decir que el salario del año pasado fue 1700 menos que el salario de este año

$$I = 23400 - 1700$$

3. Llevar a cabo dicho plan.

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

De donde I = \$21700

4. Regresar a analizar el proceso de solución.

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que si sumo \$21700 que fué su salario del año pasado y los \$1700 que le dieron de más éste año, se obtiene los \$23400 que gano éste año.

Ejemplo 21.

Alberto tiene \$48 menos que Mariana. Si Mariana tiene \$115, ¿cuánto tiene Alberto?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuánto tiene Alberto.

¿Qué datos tengo?

Mariana tiene \$115. Alberto tiene \$48 menos que Mariana.

2. Diseñar un plan.

¿Cuál es la incógnita?

Sea x = lo que tiene Alberto

¿Por qué medio puedo encontrar el valor de la incógnita?

Planteando la siguiente ecuación y resolviéndola.

$$x = 115 - 48$$

3. Llevar a cabo dicho plan.

$$x = 115 - 48$$
$$x = 67$$

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$$x = 67$$

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que si sumo lo que tiene Alberto, 67, más 48 obtengo 115, ya que es lo que tiene Mariana

Ejemplo 22.

Una pulgada es igual a 2.54 centímetros. Un metro tiene 100 centímetros. ¿Cuántas pulgadas hay en un metro?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuántas pulgadas hay en un metro.

¿Qué datos tengo?

Una pulgada es igual a 2.54 centímetros. Un metro tiene 100 centímetros.

2. Diseñar un plan.

¿Cuál es la incógnita?

Sea y el número de pulgadas en un metro (o lo que es lo mismo, en 100 centímetros).

¿Por que medios puedo encontrar el valor de la incógnita?

Planteando la siguiente ecuación y resolviéndola.

Como sabemos que hay 2.54 cm en cada pulgada debe satisfacerse que

$$y(2.54) = 100$$

3. Llevar a cabo dicho plan.

$$y(2.54) = 100$$

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$$y = \frac{100}{2.54}$$

$$y = 39.37$$

4. Regresar a analizar el proceso de solución.

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que si multiplico 2.54 cm por 39.37 obtengo 100 cm, es decir un metro.

Ejemplo 23.

La suma de dos enteros positivos pares consecutivos es 94. ¿Cuáles son esos enteros?

1.Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuáles son los enteros buscados

¿Qué datos tengo?

Los enteros son pares consecutivos que sumados dan 94.

2. Diseñar un plan.

¿Cuáles son las incógnitas?

Sean z, w los enteros buscados.

¿Por qué medios puedo obtener el valor de las incógnitas?

Planteando la siguiente ecuación y resolviendola

Como son pares consecutivos, son de la siguiente forma

$$z = 2a, \quad w = 2a + 2$$

y como su suma es 94, tengo la siguiente ecuación

$$z + \quad w \quad = 94$$

$$2a + (2a + 2) = 94$$

3.- Llevar a cabo dicho plan.

$$2a + (2a + 2) = 94$$
$$4a + 2 = 94$$
$$4a = 92$$
$$a = 92/4 = 23$$

por lo tanto $z = 2a = 46$ y $w = 2a + 2 = 48$

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$z = 46$ y $w = 48$

4.- Regresar a analizar el proceso de solución.

¿Parece razonable la solución?

Sí, pues si sumo los dos números, se obtiene

$$46 + 48 = 94$$
$$94 = 94.$$

Ejemplo 24.

La suma de tres enteros impares consecutivos es 123. ¿Cuáles son esos enteros?

1.Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuáles son esos enteros impares

¿Qué datos tengo?

La suma de los tres enteros consecutivos impares es 123.

2. Diseñar un plan.

¿Cuál es la incógnita?

Sean x, y, z los números buscados.

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Planteando la siguiente ecuación y resolviéndola.

$$x + y + z = 123$$

como son impares consecutivos son de la siguiente forma

$x = 2a + 1$, $y = 2a + 3$,

$z = 2a + 5$ Para algun a en los enteros

$$(2a + 1) + (2a + 3) + (2a + 5) = 123$$

3.Llevar a cabo dicho plan

$$(2a + 1) + (2a + 3) + (2a + 5) = 123$$

$$6a + 9 = 123$$

$$6a = 123 - 9$$

$$6a = 114$$

$$a = 114/6$$

$$a = 19$$

por lo tanto $x = 2(19) + 1$, $x = 38 + 1$, $x = 39$, $y = 41$, $z = 43$.

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$$x = 39 \qquad y = 41 \qquad z = 43$$

4.- Regresar a analizar el proceso de solución.

¿Parece razonable la solución?

Sí, pues si sumo $39 + 41 + 43 = 123$,

$$123 = 123$$

obtengo lo esperado.

Ejemplo 25.

El ángulo de un triángulo es 4 veces la medida del otro. El tercer ángulo es igual a la suma de los otros dos. ¿Qué medida tiene el ángulo más pequeño? (Sugerencia: La suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180º.)

1.-Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Las medidas de los ángulos,en particular la del ángulo más pequeño

¿Qué datos tengo?

Un ángulo es 4 veces el tamaño del otro. El tercero es igual a la suma de los otros dos

2.-Diseñar un plan

¿Cuál es la incógnita?

Sea x el ángulo buscado el que mide menos.

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Planteando la siguiente ecuación y resolviendola.

Sea x el tamaño de uno de los ángulos, entonces los otros dos son 4x y

$$x + 4x = 5x$$

$$x + 4x + 5x = 180$$

3.-Llevar a cabo dicho plan

$$x + 4x + 5x = 180$$

$$10x = 180$$

$$x = 180/10$$

$$x = 18$$

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$$x = 18$$

Por lo tanto, los ángulos son: 18°, $4(18) = 72^\circ$ y $5(18) = 90^\circ$

$18^\circ + 72^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

4.-Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, pues sumo los ángulos $18 + 72 + 90$

obtengo 180°

Ejemplo 26.

Una varilla de 84 cm. de longitud está pintada de rojo y negro. La parte roja es 4 cm. menos que la parte pintada de negro. Encontrar la longitud de cada parte.

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Hallar la longitud de cada parte.

¿Qué datos tengo?

Longitud de la varilla: 84 cm. Sección roja es 4 cm. menos que la parte pintada de negro.

2. Diseñar un plan.

¿Cuál es la incógnita?

Sea x = la sección negra

$x - 4$ = la sección roja

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Planteando la siguiente ecuación y resolviendola.

$$x + (x - 4) = 84$$

3.-Llevar a cabo dicho plan

$$x + (x-4) = 84$$

$$x + x - 4 = 84$$

$$2x - 4 = 84$$

$$2x = 84 + 4 = 88$$

$$x = \frac{88}{2}$$

$$x = 44$$

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$$x = 44$$

longitud de la sección negra: 44 cm.

longitud de la sección roja : 40 cm.

4.-Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución

Sí, pues si sumo obtengo el total de la varilla.

Ejemplo 27.

Las edades de un padre y su hijo suman 83 años. La edad del padre excede en tres años al triple de la edad del hijo. Encontrar ambas edades.

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Hallar las edades del hijo y del padre.

¿Qué datos tengo?

La edad del hijo y del padre suman 83 años. La edad del padre excede en tres años al triple de la edad del hijo.

2. Diseñar un plan.

¿Cuál es la incógnita?

Sea x = la edad del hijo

$3x + 3$ = edad del padre

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Planteando la siguiente ecuación y resolviendola

$$(3x + 3) + x = 83$$

3.-Llevar a cabo dicho plan

$$4x = 83 - 3 = 80$$

$$x = \frac{80}{4}$$

$$x = 20$$

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$x = 20$

4.-Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí pues

la edad del hijo: 20 años,

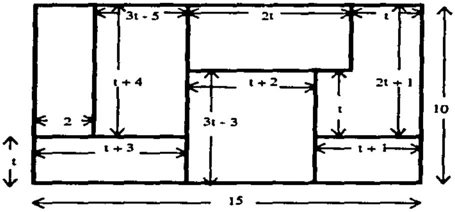
la edad del padre: 63 años

$3(20) + 3 = 63$ edad del padre es el triple de su hijo más 3

y sumando obtengo 83años.

Ejemplo 28.

Dado un plano donde algunas de sus medidas no están especificadas, tratar de encontrarlas, anotando sus ecuaciones.



1.-Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

La longitud de cada uno de los segmentos del plano.

¿Qué datos tengo?

La ecuación de varios segmentos que estan en función del parámetro t

2.-Diseñar un plan

¿Cuál es la incógnita?

Sea t la incógnita

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Sumando las ecuaciones que representan las longitudes de los segmentos inferiores del rectángulo, se plantea la siguiente ecuación y se resuelve.

$$(t+3) + (t+2) + (t+1) = 15$$

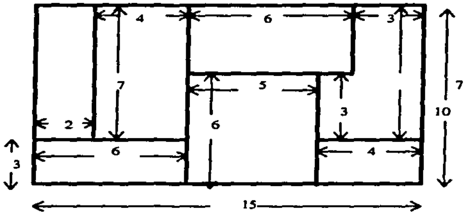
3.-Llevar a cabo dicho plan

$$t + 3 + t + 2 + t + 1 = 15$$
$$3t + 6 = 15$$
$$3t = 15 - 6$$
$$3t = 9$$
$$t = \frac{9}{3} = 3$$
$$t = 3$$

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$$t = 3$$

Sustituyendo este valor de t en todas las expresiones se encuentra la magnitud de los segmentos indicados en la figura siguiente



4.-Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

También podemos calcular el valor de t usando las expresiones de los segmentos del lado vertical izquierdo. De aquí se tiene la expresión

$$t + (2t + 1) = 10$$
$$3t = 9$$
$$t = 3$$

Ejemplo 29.

Dividir 254 en tres partes tales que: la segunda sea el triple de la primera y 40 unidades mayor que la tercera.

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Dividir 254 en tres partes.

¿Qué datos tengo?

la segunda parte es el triple de la primera y 40 unidades mayor que la tercera parte.

2. Diseñar un plan.

¿Cuál es la incógnita?

La segunda parte (de las tres en que se dividió 254)

¿Por qué medios puedo obtener el valor de las incógnitas?

Planteando la siguiente ecuación y resolviéndola.

Sea $\frac{x}{3}$ = la primera parte,

x = la segunda parte y

x - 40 = la tercera parte

$$\frac{x}{3} + x + (x - 40) = 254$$

3.-Llevar a cabo dicho plan

$$\frac{x}{3}+2x-40=254$$
$$\frac{x}{3}+2x=254+40=294$$
$$x+6x=882$$
$$7x=882$$
$$x=\frac{882}{7}$$
$$x=126$$

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

Por lo tanto:

primera parte: 42

segunda parte: 126

tercera parte: $\frac{86}{254}$

4.-Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, pues sumando obtengo el número 254

Ejemplo 30.

Al observar las calificaciones finales del grupo 1304 de matemáticas 1, se pudo observar que los alumnos que obtuvieron NP son $\frac{5}{2}$ de los que acreditaron, y los que obtuvieron NA son la quinta parte de los que obtuvieron NP. Si la lista consta de un total de 32 alumnos, ¿Cuántos alumnos acreditaron el curso?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuántos alumnos acreditaron el curso.

¿Qué datos tengo?

Hay un total de 32 alumnos. Los alumnos que obtuvieron NP son $\frac{5}{2}$ de los que acreditaron, y los que obtuvieron NA son la quinta parte de los que obtuvieron NP.

2. Diseñar un plan.

¿Cuál es la incógnita?

Sea x = el número de alumnos que acreditaron.

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Planteando la siguiente ecuación y resolviéndola.

$\frac{5}{2}$ x = número de alumnos que obtuvieron NP,

$\frac{1}{5}\left(\frac{5}{2}x\right)$ = número de los que obtuvieron NA.

por lo tanto la ecuación es.

$$x+\left(\frac{5}{2}x\right)+\left(\frac{1}{5}\left(\frac{5}{2}x\right)\right)=32$$

3.-Llevar a cabo dicho plan

$$x + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}x = 32$$
$$2x + 5x + x = 64$$
$$8x = 64$$
$$x = \frac{64}{8}$$
$$x = 8$$

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$$x = 8$$

4.-Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Se tiene que:

8 alumnos acreditaron,

20 alumnos sacaron NP y

4 alumnos sacaron NA

Sí, pues si sumo obtengo 32.

Ejemplo 31.

Después de la muerte de Diofanto (un famoso matemático griego), alguien describió su vida con un acertijo.

Fué niño durante un sexto de su vida.

Después de un doceavo más tuvo barba.

Después de un séptimo se casó.

En el quinto año de su matrimonio nació su hijo.

Su hijo vivió la mitad de los años que vivió él.

Diofanto murió cuatro años después que su hijo.

¿Cuántos años tenía Diofanto cuando murió?

1.Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

A qué edad murió Diofanto

¿Qué datos tengo?

Un sexto de su vida fué niño, un doceavo después tuvo barba, un séptimo posterior se casó, al quinto año de matrimonio nació su hijo, quien murió cuatro años antes que él habiendo vivido sólo la mitad de años que su padre.

2.- Diseñar un plan.

¿Cuál es la incógnita?

Sea x el número de años que vivió Diofanto

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Planteando la siguiente ecuación y resolviéndola

Entonces los acontecimientos de su vida dan origen a la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

3. Llevar a cabo dicho plan.

Resolviendo la ecuación anterior

$$\frac{2x}{12}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{6x}{12}+4=x$$
$$\frac{2x+x+6x}{12}+\frac{x}{7}+9=x$$
$$\frac{9x}{12}+\frac{x}{7}+9=x$$
$$\frac{3x}{4}+\frac{x}{7}+9=x$$
$$\frac{21x+4x}{28}+9=x$$
$$\frac{25x}{28}+9=x$$
$$9=x-\frac{25x}{28}$$
$$9=\frac{3x}{28}$$
$$\frac{28(9)}{3}=x$$
$$84=x$$

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$$x = 84$$

Diofanto vivió 84 años.

4.- Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

i.e. fué niño durante 14 años, después de los 21 años tuvo barba, a los 33 años se casó, a los 38 años nació su hijo, el cual vivió 42 años; Diofanto murió 4 años después que su hijo o sea a la edad de 84 años.

Sí, pues si sustituyo el valor de x en la ecuación, se obtiene

$$\frac{84}{6}+\frac{84}{12}+\frac{84}{7}+5+\frac{84}{2}+4=84$$

$$14+7+12+5+42+4=84$$
$$84=84$$

Ejemplo 32.

Cuatro personas se repartieron un número indeterminado de naranjas que había en un frutero. La primera de ellas tomo 6 naranjas, la segunda un sexto del total original, la tercera 14 naranjas y la última cinco catorceavos del total ¿Cuántas naranjas había originalmente en el frutero?

1. Entender el problema

¿Que trato de encontrar?.

Cuántas naranjas había en el frutero.

¿Qué datos tengo?

Cuatro personas se repartieron la fruta, tomaron 6, 1/6 del total, 14 y 5/14 del total.

2. Diseñar un plan.

¿Cuál es la incógnita?

Sea x el total de naranjas.

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Planteando y resolviendo la siguiente ecuación.

De los datos se tiene que

$$6+\frac{x}{6}+14+\frac{5x}{14}=x$$

3. Llevar a cabo dicho plan.

$$6+\frac{x}{6}+14+\frac{5x}{14}=x$$

$$20+\frac{x}{6}+\frac{5x}{14}=x$$

$$\frac{x}{6}+\frac{5x}{14}=x-20$$

$$\frac{14x+30x}{84}=x-20$$

$$\frac{44x}{84}=x-20$$

$$\frac{22x}{42}=x-20$$

$$\frac{11x}{21}=x-20$$

$$\frac{11x}{21}=\frac{21x}{21}-20$$

$$\frac{11x}{21}-\frac{21x}{21}=-20$$

$$\frac{-10x}{21}=-20$$

$$-10x=-20(21)$$

$$-10x=-420$$

$$\frac{-10x}{-10}=\frac{-420}{-10}$$

$$x=42$$

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

x = 42

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que si sustituimos el valor, se tiene que

6+ 42/6 +14 +5(42) /14 = 42

6 +7 +14 + 15 = 42

42 = 42

Ejemplo 33.

Seis personas se repartieron las manzanas que habían recolectado en una canasta. Se dió un tercio, un cuarto, un octavo y un quinto, respectivamente, a cuatro de las personas. La quinta persona obtuvo 10 manzanas, quedando una nada más para la sexta. Encontrar el número original de manzanas en la canasta.

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuántas manzanas había en la canasta.

¿Qué datos tengo?

Cuatro personas se repartieron un tercio, un cuarto, un octavo y un quinto del total, las dos personas restantes recibieron 10 y 1 manzana respectivamente.

2. Diseñar un plan.

¿Cuál es la incógnita?

Sea x el total de manzanas.

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Planteando y resolviendo la siguiente ecuación.

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x}{5}+10+1=x$$

3. Llevar a cabo dicho plan.

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x}{5}+10+1=x$$

$$\frac{40x+30x+15x+24x}{120}+11=x$$

$$\frac{109x}{120}+11=x$$

$$11=\frac{120x}{120}-\frac{109x}{120}$$

$$11 = \frac{11x}{120}$$
$$120(11) = 11x$$
$$1320 = 11x$$
$$\frac{1320}{11} = x$$
$$120 = x$$

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$$120 = x$$

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que se sustituye el valor x = 120 en la ecuación.

Verificando: $\frac{120}{3} + \frac{120}{4} + \frac{120}{8} + \frac{120}{5} + 10 + 1 = 120$

$40 + 30 + 15 + 24 + 10 + 1 = 120$

$120 = 120.$

Ejemplo 34.

Carola compartió un paquete de papel para graficar con tres de sus amigos. Dió un cuarto del paquete a Memo, Sara obtuvo un tercio de lo que quedó, luego Marce tomó un sexto de lo quedó en el paquete. Si Carola conservó 30 hojas, ¿Cuántas hojas había en el paquete originalmente?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuántas hojas había al principio.

¿Qué datos tengo?

Se repartieron: un cuarto del paquete, un tercio del resto y un sexto de lo que sobró; quedaron 30 hojas.

2. Diseñar un plan.

¿Cuál es la incógnita?

Sea x el total de hojas.

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Planteando y resolviendo la siguiente ecuación.

entonces

$$\frac{x}{4}+\frac{1}{3}(x-\frac{x}{4})+\frac{1}{6}((x-\frac{x}{4})-\frac{1}{3}(x-\frac{x}{4}))+30=x$$

3. Llevar a cabo dicho plan.

$$\frac{x}{4}+\frac{1}{3}(\frac{3x}{4})+\frac{1}{6}(\frac{3x}{4}-\frac{1}{3}(\frac{3x}{4}))+30=x$$

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{4}+\frac{1}{6}(\frac{3x}{4}-\frac{x}{4})+30=x$$

$$\frac{2x}{4}+\frac{1}{6}(\frac{2x}{4})+30=x$$

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{12}+30=x$$

$$\frac{6x+x}{12}+30=x$$

$$\frac{7x}{12}+30=x$$

$$30=x-\frac{7x}{12}$$

$$30=\frac{5x}{12}$$

$$\frac{12(30)}{5}=x$$

$$72=x$$

$$x=72$$

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$x = 72$

El número de hojas era de 72.

4. **Regresar a analizar el proceso de solución.**

¿Parece razonable la solución?

Sí, ya que si se sustituye el valor $x = 72$ en la ecuación se obtiene:

$$\frac{72}{4}+\frac{1}{3}(72-\frac{72}{4})+\frac{1}{6}((72-\frac{72}{4})-\frac{1}{3}(72-\frac{72}{4}))+30=72$$

$$18+\frac{1}{3}(54)+\frac{1}{6}((54)-\frac{1}{3}(54))+30=72$$

$$18+18+\frac{1}{6}(54-18)+30=72$$

$$18+18+6+30=72$$

$$72=72$$

PROPORCIONES

La razón de dos cantidades es su cociente. Por ejemplo, la razón entre la edad de un padre de 34 años y la de un niño de 10 años es 34 a 10. La razón de 34 a 10 se puede expresar de varias maneras.

$$34:10\,,\; 34/10,\; \frac{34}{10},$$

Una ecuación que establece que dos razones son iguales se llama **proporción** . Las siguientes son proporciones.

$$\frac{2}{3}=\frac{6}{9} \qquad \frac{5}{7}=\frac{25}{35} \qquad \frac{x}{24}=\frac{2}{3} \qquad \frac{9}{y}=\frac{32}{81}$$

Como las proporciones son ecuaciones, las propiedades que sirven para resolver ecuaciones también pueden usarse para resolver proporciones.

Ejemplo. Resolver.

$$\frac{x}{63} = \frac{2}{9}$$

$$63.\frac{x}{63} = 63.\frac{2}{9} \qquad \text{(utiliza la propiedad multiplicativa.)}$$

$$x = 14$$

Ejemplo. Resolver

$$\frac{65}{10} = \frac{13}{x}$$

$$10x\left(\frac{65}{10}\right) = 10x\left(\frac{13}{x}\right)$$

$$65x = 130$$

$$\frac{1}{65}(65x) = \frac{1}{65}(130)$$

$$x = 2$$

Ejemplo 35.

La escala de un mapa indica que 0.5 cm representan 25 km. En el mapa la distancia entre dos ciudades es 5 cm. Cuál es la distancia real de las dos ciudades

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

La distancia de las dos ciudades.

¿Qué datos tengo?

0.5cm son 25 km y en el mapa hay 5 cm de distancia.

2. Diseñar un plan

¿Cuál es la incógnita?

Sea x la distancia real de las dos ciudades.

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Planteando la siguiente ecuación y resolviéndola.

$0.5/25 = 5/x$

$x = 25(5) / 0.5$

3. Llevar a cabo dicho plan

$x = 25(5) / 0.5$

$x = 25(5) / .5$

$x = 115/ .5$

$x = 250$ km

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

250 km

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, pues $0.5/25 = 5/250$

Esto es si 0.5 cm representa 25 km,

1 cm representa 50 km,

Por lo tanto 5 cm representa 250 km.

Ejemplo 36.

Según la escala de un mapa de carreteras, tres pulgadas representan 40 millas. Si en el mapa dos ciudades están separadas por 10 pulgadas, ¿Qué distancia hay entre ellas?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

La distancia de las ciudades.

¿Qué datos tengo?

3 pulgadas representan 40 millas, en el mapa están separadas por 10 pulgadas.

2. Diseñar un plan

¿Cuál es la incógnita?

Sea x la distancia de las ciudades.

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Planteando la siguiente ecuación y resolviéndola.

$$3/40 = 10/x$$

3. Llevar a cabo dicho plan

$$3/40 = 10/x$$
$$x = 40(10)/3$$
$$x = (40\ (10)\ )/3$$
$$x = 400/3$$
$$x = 133.33 \text{ millas}$$

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$x = 133.33$ millas aproximadamente

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, pues si multiplico $3(133.33) \doteq 400$

Esto es si 3 pulgadas representan 40 millas

y 6 pulgadas representan 80 mill

Ejemplo 37.

Una escuela tiene un reglamento que indica que en viajes escolares, cada grupo de 15 estudiantes deben ser acompañados por 2 adultos. ¿Cuántos adultos se necesitan para llevar a 180 estudiantes de viaje?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuántos adultos necesito.

¿Qué datos tengo?

2 adultos deben ir por cada 15 estudiantes.

2. Diseñar un plan

¿Cuál es la incógnita?

Sea x el número de adultos.

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Planteando la siguiente ecuación y resolviéndola

$$2/15 = x/180$$ (Piensa " 2 es a 15 como x es a 180")

3. Llevar a cabo dicho plan

$$2/15 = x/180$$
$$x = 180(2)/15$$
$$x = 360/15$$
$$x = 24 \text{ adultos}$$

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$$x = 24 \text{ adultos}$$

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, pues 24(12) = 360 estudiantes.

Ejemplo 38.

Para hacer cemento se necesitan 4 paladas de arena por cada 5 de grava. ¿Cuántas paladas de grava se necesitan para 64 de arena?

1. Entender el problema

¿Qué trato de encontrar?

Cuántas paladas de grava se necesitan para 64 de arena.

¿Qué datos tengo?

Se necesitan 4 paladas de arena por cada 5 de grava.

2. Diseñar un plan

¿Cuál es la incógnita?

Sea x las paladas de grava.

¿Por qué medios puedo obtener el valor de la incógnita?

Planteando la siguiente ecuación y resolviéndola

$$4/5 = 64/x$$

3. Llevar a cabo dicho plan

$$4/5 = 64/x$$

$$x = 64(5)/4$$

$$x = 320/4$$

$$x = 80$$

¿Cuáles resultados se obtuvieron?

$x = 80$ paladas de grava

4. Regresar a analizar el proceso de solución

¿Parece razonable la solución?

Sí, pues $80(4) = 320$.

Comentarios finales.

El modelo educativo del C.C.H. contempla formar alumnos críticos y conscientes de su entorno. En el caso de la matemática ese modelo es igualmente aplicable y más aún, es compatible con el método de Resolución de Problemas.

En efecto, el aprendizaje del álgebra requiere que el alumno sea crítico, reflexivo y propositivo ante una expresión algebraica. Más aun, debe reflexionar qué significa una expresión algebraica y qué significa encontrar la solución a una ecuación. El alumno no debe quedarse en el mecanisismo usual. Esa no es una actividad de un alumno crítico.

Es por ello que considero útil y aplicable la resolución de problemas en el estudio de las Ecuaciones Lineales.

A continuación escribo algunas observaciones de varios especialistas en torno a la resolución de problemas, comentarios con los que estoy de acuerdo

"Encontrar la solución de un problema matemático no es la finalidad de las matemáticas, sino el punto inicial para encontrar otras soluciones, extensiones y generalizaciones de ese problema". Schoenfeld y Polya

Aprender matemáticas es un proceso activo el cual requiere discusión de conjeturas y pruebas. Schoenfeld y Polya

Con este proceso se puede guiar al estudiante a nuevas ideas matemáticas con esta finalidad en clase se pretende dividir en grupos de cuatro alumnos para que discutan problemas en clase, el maestro actuará como moderador y dará algunas direcciones que son de valor para la discusión Meyer (1982) representa dos estados en la resolución de problemas 1) la representación del problema, lo cual depende de la lingüística. 2) la solución del problema la cual esta asociada con algoritmos y estrategias del conocimiento.

Schoenfeld (1982) estableció que la razón para enseñar matemáticas es porque resultar ser la disciplina ideal para entrenar a los estudiantes en "como pensar" y hacerlos autónomos, él utiliza estas frases "convéncete a ti mismo, convence a tu amigo y después convence a un enemigo".

Según Mancera (1993) en la actualidad se privilegia la memoria, en vez de la capacidad de razonamiento esto ha propiciado muchos errores. Para él un problema debe despertar el interés y

curiosidad del estudiante, aunque resolver problemas lleva mucho tiempo, con esto se impulsan las habilidades matemáticas básicas como:
flexibilidad del pensamiento, reversibilidad, generalización, entre otras (Krutetskii 1976).

La actitud para "hacer matemáticas" es lo más importante que puede aportarnos la escuela, al ver problemas como introducción a los temas del curso permite a los estudiantes darse cuenta de la importancia de la utilidad de los que se intenta ver en clase.

De esta forma preguntas como:
¿Para qué sirve? queda nula de lo que se intenta abordar en clase.
¿Me servirá esto para otra clase ó materia? queda también anulada pues el nuevo programa contempla la resolución de problemas en todos los temas y cursos. Este trabajo retoma esto para su elaboración y desarrollo, se toman en cuenta las ideas de resolución de problemas de Polya y Schoenfeld y desarrollo estos problemas con estas bases.
Con este trabajo espero aportar algo para los alumnos y maestros del C.C.H. y para todo aquel que le interese.

En los problemas complementarios se desarrolló la idea de Schoenfeld sobre el ir cambiando los enunciados para enfrentar de forma diferente los problemas. Por ejemplo el del deposito de agua., con 2 llaves, los aviones que salen de Puebla, o las máquinas que tapan botellas entre otros.

BIBLIOGRAFÍA

1) Baldor, A. (1992). ÁLGEBRA, Ed. Publicaciones Culturales. 137, 141, 135
novena reimpresión México.

2) Barajas, A. (1994). SOBRE EDUCACIÓN SUPERIOR. Boletín de la Sociedad Mexicana de Física. México. vol. 8, no. 3, julio - septiembre de 1994.

3) Blanca M .Parra (1991) LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA CONSTRUCCIÓN DE ESQUEMAS DE RAZONAMIENTO. Educación Matemática, vol. 3, p. 58-61

4) De Oteyza / Hernández / Lam (1996). ALGEBRA, Prentice - Hall. Hispanoamericana, S. A. primera edicion edo de México.

5)Emma Castelnuovo. (1989), PANORAMA DE LA ENSEÑANZA MATEMÁTICA EN EL TIEMPO Y EN EL ESPACIO, Educación Matemática, vol. 1, no 3. p .24- 29.

6) Gutiérrez, Ángel. (1994) LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS: FUENTE DE REFLEXIONES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS. Universidad de Valencia.

7) Gutiérrez, A. Jaime, A. (1994). GEOMETRÍA Y ALGUNOS ASPECTOS GENERALES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA. Grupo Editorial Iberoamérica. Impreso en Colombia, 1 - 22.

8) Gutiérrez, Juan L. (1982) ESTADISTICA, Cultural, S. A. DE EDICIONES. 24- 30

9) Ludlow, Wiechers J. (1983) ÁLGEBRA Y MODELOS, Ed. Universidad Autónoma Metropolitana (Iztapalapa), México D. F.

10) Mancera, Martínez E., Escareño, Soberanes F. (1993). PROBLEMAS, MAESTROS Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. Educación Matemática, vol. 5, no. 3, 78 - 92.

11) Novak, J. (1982). EL PAPEL FUNDAMENTAL DE LA TEORÍA DEL APRENDIZAJE EN UNA TEORÍA DE LA INSTRUCCIÓN, De. Alianza Editorial, Madrid, España, p. 62-89.

12) Polya, George. (1967). LA ENSEÑANZA POR MEDIO DE PROBLEMAS. Departament of Mathematics, Stanford University. Stanford, Cal.

13) Rubio, G. (1990a) "¿Son los problemas verbales de álgebra un medio para entremezclar el pasado aritmético con los elementos algebraicos?. Parte I. Aspectos teórico-metodológicos de una propuesta no usual para la enseñanza de problemas verbales en álgebra. Parte II. Un experimento educativo en el aula " .CUADERNOS DE INVESTIGACIÓN.No. 16. Año IV . Abril de 1990. Pags. de 1- 79. Edit. Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas.

14) Rubio, G. (1995). "El Desarrollo de la capacidad para realizar el analisis lógico de los problemas aritmético/ algebraicos y su vinculación con su comprensión y uso competente". Cuaderno de INVESTIGACIÓN No. 22. Publicado por: Departamento de Matemáticas Educativa del CINVESTAV. Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas, SEP. Editores. Teresa Rojano y Eugenio Filloy. México, 1995.

15) Santos, Luz Manuel. (1992). RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS; EL TRABAJO DE ALAN SCHOENFELD: UNA PROPUESTA A CONSIDERAR EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS. EDUCACIÓN MATEMÁTICA, vol. 4, no. 2, 16 - 24.

16) Santos, Luz Manuel. (1993). LEARNING MATHEMATICS: A PERSPECTIVE BASE ON PROBLEM SOLVING. Dpto. de Mat. educativa. del CINVESTAV. 19-38.

17) Socas, R. ,Camacho, M.. Palarea, M. Hernandez, D. (1989) INICIACIÓN AL ÁLGEBRA, Ed. Síntesis, 37 - 67 y 169 - 181.

18) Schoenfeld A. (1992). EXPLORACIONES SOBRE LAS CREENCIAS Y CONDUCTA MATEMÁTICAS DE LOS ESTUDIANTES. antología en Educación Matemática, CINVESTAV. p. 53.70.

19) Smith, Charles, Dossey, Keedy, Bittinger. (1992) ÁLGEBRA. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, Impreso USA, , 44 - 60.

20) Spiegel, Murray R. (1991). ESTADISTICA, McGraw-Hill/Interamericana de España, S. A. Segunda Edición, 60-90.

21) Wenzelburger, E. (1989). CURRICULUM Y EVALUACIÓN ESTÁNDARES PARA ESCUELA DE MATEMÁTICAS. Educación Matemática. Iberoamérica. México. 1, 3, p. 58-64..

22) EL BACHILLERATO DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES. Dirección de la UACB, agosto de 1988. Gaceta UNAM.

23) CURRICULUM Y EVALUACIÓN ESTÁNDARES PARA ESCUELA DE MATEMÁTICAS, National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), USA. (1989), Educación Matemática, vol. 1, no. 3.

24) EL PROCESO DE REVISIÓN DEL PLAN DE ESTUDIOS DEL BACHILLERATO DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES. Cuadernillo número 28 de la Gaceta CCH, 4 de julio de 1994.

25)PLAN DE ESTUDIOS ACTUALIZADO CCH UNAM. 1996.

26) INFORME BIANUAL 1991-1992. UACPyP, abril de 1993.