32
2ej.

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

"Algunos equipamientos para el Museo de la Matemática de Querétaro"

TESIS

que para obtener el título de

MATEMÁTICO

presenta:

Rogelio Pichardo Díaz

Director de tesis:

M. en C. Guillermo Gómez Alcaraz

1997

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"Algunos equipamientos para el Museo de la Matemática de Querétaro"

realizado por Pichardo Díaz Rogelio

con número de cuenta 8552798-4 **, pasante de la carrera de** Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. Guillermo Gómez Alcaraz
Propietario	M. en C. María Eugenia Lecona Uribe
Propietario	Dra. María de la Paz Alvarez Scherer
Suplente	M. en C. Juan José Montellanos Ballesteros
Suplente	Mat. Concepción Ruíz Ruiíz Funes

Concepción Ruiz

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

CONTENIDO.

APÉNDICE.

INTRODUCCIÓN

Este proyecto es parte de la iniciativa de la M en C. María Eugenia Lecona Uribe, que bajo el título de **MITOS DE LA MATEMÁTICA EN NUESTRA SOCIEDAD Y SU INFLUENCIA EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE**, plantea como alternativa fundamental la creación del **MUSEO DE LA MATEMÁTICA EN QUERÉTARO**, en donde se patentiza lo que ha significado la Matemática en el desarrollo intelectual del hombre. Dicho proyecto se desarrolla actualmente, gracias al apoyo del Gobierno del Estado de Querétaro, quien manifiesta así su compromiso con la sociedad querétana y, de la Universidad Autónoma de Querétaro, bajo la dirección de su creadora la **M en C. María Eugenia Lecona Uribe.**

A través de este proyecto se hace evidente la justificación de la Matemática como ciencia subyacente de: La Física, La Química, La Astronomía, Las Ciencias de la Tierra, Las Ciencias de la Vida, y Las ciencias Sociales.

El material que se elabora va dirigido al público en general, por tanto, su comprensión no requiere ningún conocimiento especifico de la Matemática.

La investigación se divide en tres etapas:

INVESTIGACIÓN FUNDAMENTAL

Consiste en encontrar la manifestación más sobresaliente de la Matemática en las diferentes ciencias, hacer un índice de la bibliografía necesaria, así como catalogación de los diferentes apoyos bibliográficos con los que se cuenta en las bibliotecas de la Universidad y del Estado.

INVESTIGACIÓN APLICADA

Consiste en determinar la museografía, es decir, los apoyos que explican lo que ahí se exhibe y con base en lo que se va a presentar al público definir el material necesario para su presentación más idónea. Materiales para elaboración de gráficas, dibujos y grabados, videos, fotografías y objetos como pantógrafos, astrolabios, computadoras, etc.

DESARROLLO

En esta fase del proyecto se elaboran físicamente cada uno de los objetos que conforman las diferentes colecciones del Museo de la Matemática en Querétaro y se determinan el número de salas que exhibirán las colecciones. Inicialmente se ha pensado en tres colecciones conformadas de la siguiente manera:

-Historia y árbol genealógicos de la Matemática
-Objetos que manifiestan la incidencia de la Matemática en las otras ciencias
-Diferentes aparatos usados para la evolución de la Matemática y curiosidades afines.

Y una Galería que contendrá a los matemáticos mexicanos más destacados, tanto por su labor en el proceso Enseñanza-Aprendizaje, como por su labor en el campo de la Investigación y Aplicación de la Matemática.

El sistema del Museo de la Matemática en Querétaro como un todo cumple:

-Con los objetivos básicos de llevar la Cultura Matemática a la Comunidad con el objeto fundamental de desmitificar los estereotipos en dos de los protagonistas del proceso Enseñanza-Aprendizaje de la disciplina: el Didáctico y el Contenido.

-Con el Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica en lo referente a la mutua participación "...Cada comunidad, y la sociedad en su conjunto, deben participar en forma activa y creadora en lo que concierne a la educación y particularmente, en el sistema educativo del país..." es decir, se cumple con los objetivos nacionales en la formación de una población más informada y mejor preparada.

Actualmente el Museo de la Matemática en Querétaro cuenta con tres exposiciones:

La primera fue abierta al público el 13 de Septiembre de 1993, siendo itinerante, se encuentra recorriendo los diferentes Municipios del Estado de Querétaro. La segunda se inauguró el 6 de Octubre de 1994, siendo permanente y se encuentra en el Edificio "Dr. Octavio S. Mondragón" de la Universidad Autonóma de Querétaro. Y, una tercera exposición inaugurada el 24 de Agosto de 1995 que tiene como objetivo recorrer las diferentes Entidades Federativas de la República Mexicana, iniciandolo en el marco de la celebración del XXVIII Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana llevado a cabo en las instalaciones de la Universidad de Colima, en la ciudad de Colima, Col. Se hace notar que, estrictamente no existe ningún Museo que sea dedicado exclusivamente a la Matemática.

La Descripción y Fundamentación Matemática de algunos de los diferentes equipos que forman parte de las exposiciones del Proyecto "Museo de la Matemática en Querétaro" se dará a través de este trabajo.

La matemática es el lenguaje mágico
para hablar con la naturaleza

LOGO DEL MUSEO DE LA MATEMÁTICA EN QUERÉTARO

El Museo de la Matemática en Querétaro cuenta con un logo que conjuga a nuestras Culturas Mexicanas, las dos más importantes, la Cultura Maya que, trasciende en la Matemática por la aportación del Cero, que indicaba la ausencia de unidades, y, la Cultura Azteca por la creación de un Reloj Cósmico con una precisión que testifica el adelanto científico en la Matemática de su época, así, tomando del Reloj Cósmico un cuádrete que tiene tres escuadras cada una con un valor de diez; doce plumas que son números multiplicativos, y una columna de cinco unidades lo que hace un total de los 365 días del año solar. El fuego simbólico (fuego nuevo) se ha reemplazado por un glifo del Cero Maya, en su representación de Variante de Cabeza, usado comúnmente en las estelas y monolitos, rodeándole una Q estilizada con los colores patrios.

ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN.

La Matemática es una de las ciencias más antiguas. Los conocimientos matemáticos fueron adquiridos por los hombres ya en las primeras etapas del desarrollo bajo la influencia, incluso de la más imperfecta actividad productiva. A medida que se iba complicando ésta actividad cambió y creció el conjunto de factores que influían en el desarrollo de la Matemática. La mayor influencia en la formación de nuevos conceptos y métodos de la Matemática la ejercieron las Ciencias Naturales y exactas. Por Ciencias Naturales y exactas entendemos el complejo de Ciencias sobre la Naturaleza, para las cuales en una etapa dada de su desarrollo resulta posible la aplicación de los métodos matemáticos. En el progreso de la Matemática, antes que otras ciencias, influyen la Astronomía, la Mecánica y la Física.

Los diferentes aparatos de la exposición del Museo de la Matemática muestran que:
-La Matemática surgió de la actividad productiva de los hombres y,
-Los nuevos conceptos y métodos, en lo fundamental se formaron bajo la influencia de las Ciencias Naturales y exactas.

La aparición de la Matemática en las Ciencias Naturales ocurre como resultado de la aplicación de las teorías matemáticas existentes a problemas prácticos y de la elaboración de nuevos métodos para su resolución. La cuestión de la aplicabilidad a la práctica de una u otra teoria matemática no siempre obtiene inmediatamente solución satisfactoria. Antes de su solución transcurren frecuentemente años y decenios.

El campo de aplicación de la Matemática se amplia constantemente. A esta aplicación no es posible tenderle un límite. El crecimiento de las aplicaciones es una de las evidencias de la existencia y fortalecimiento de las relaciones de la Matemática con otras Ciencias. La Matemática no sólo se desarrolla bajo la acción de otras Ciencias. Ellas, a su vez, introducen en otras ciencias los métodos matemáticos de investigación

La aplicación de los métodos matemáticos en la Ciencia tiene dos facetas:
-Elección del modelo matemático, que corresponde aproximadamente al fenómeno o proceso, o sea, del modelo, y el hallazgo del método de su solución;
-Elaboración de nuevas formas matemáticas.

Cada año se amplia el campo de aplicación de los métodos matemáticos en la Ciencia y en la actividad práctica del hombre. Sin embargo, se mantiene el carácter no uniforme de la penetración de la Matemática en los distintos campos de la Ciencia y en la práctica. Así como en todos los tiempos, el progreso de ésto depende de la posibilidad de abstracción del objeto de estudio, de la elección del esquema lógico de los conceptos abstractos, que más o menos reflejan exactamente el contenido real de los procesos y fenómenos considerados.

Respecto de muchas Ciencias lo que resulta es que no está aún creada la Matemática adecuada para dicha Ciencia y al principio lo que siempre se intenta es aplicar la Matemática conocida a dichas Ciencias forzando las situaciones.

El proceso de formación de los conceptos matemáticos y de los procedimientos regulares de solución de determinadas clases de problemas elementales abarcan un gran intervalo de tiempo.

Los testimonios materiales, por lo que puede estudiarse este período, el más antiguo de la Historia de la Matemática, se vale de hechos de la Historia General de la cultura de la humanidad, fundamentalmente de materiales arqueológicos y de la historia del lenguaje, la Historia de la Matemática en el período de su surgimiento es prácticamente inseparable en toda la historia de la cultura.

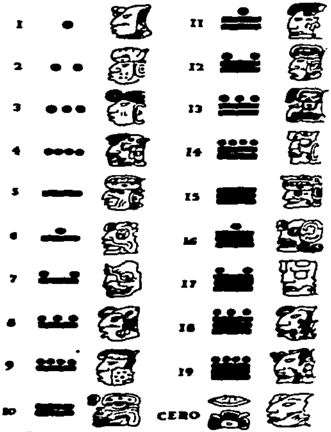
Las formas y vías del desarrollo de los conocimientos matemáticos en los diferentes pueblos son muy diversas. Sin embargo, a pesar de las diferentes vías del desarrollo, es común para todos los pueblos que todos los conceptos básicos de la Matemática: el concepto de número, figura, área, prolongación infinita de la serie natural, etc., surgieron de la práctica y atravesaron un largo período de perfeccionamiento.

Por ejemplo, el concepto de número surgió como consecuencia de la necesidad práctica de contar los objetos. Inicialmente se contaba con ayuda de los medios disponibles: dedos, piedras, conos de abetos. etc. Huellas de ésto se han conservado en las denominaciones de los cálculos matemáticos: por ejemplo, Cálculos en la traducción del latín significa Cuenta con Piedras. La reserva de números en las primeras etapas era muy limitada. La serie de los números naturales conocidos y utilizados era finita y se ha extendiendo sólo gradualmente. La conciencia de la prolongación ilimitada de la serie natural constituye un síntoma de alto nivel de conocimientos y cultura.

Junto a la utilización de más y más números surgieron y se desarrollaron sus símbolos, y los propios números formaron sistemas. Para los primeros períodos de la historia de la cultura material es característica la diversidad de sistemas numéricos. Gradualmente se perfeccionaron y unificaron los sistemas de numeración. El sistema posicional de numeración decimal, utilizado actualmente en todos los países, es el resultado de un largo proceso de desarrollo histórico. A él le precedieron entre otros un sistema posicional no decimal desarrollado en el Continente Americano por la Cultura Maya.

LA MATEMÁTICA EN MÉXICO
Los Mayas.

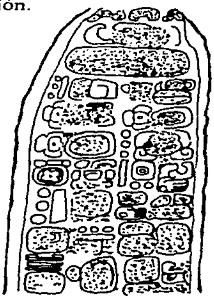
Los Mayas desarrollaron un conocimiento matemático de gran trascendencia, de lo cual, lo más importante se describe a continuación.



Para librarse del caos creciente de cifras, los sacerdotes mayas concibieron un sencillo sistema numérico que hoy se considera como una de las obras más brillantes del intelecto. Se trata de un Sistema de Numeración basado en la posición de los numerales, que implica la concepción y el uso del Cero. Ésto se tiene por un portentoso adelanto de orden abstracto.

Los Glifos Mayas tienen dos formas, una simbólica o geométrica y la otra humana, conocidos usualmente por la Forma Normal y la de Variante de Cabeza. Los Mayas heredaron y perfeccionaron de los Olmecas y Zapotecas un Sistema Numérico Vigésimal, usando tres signos como números: el punto (unidad), la barra (cinco unidades) y la estilización de una concha o de un caracol (cero). El valor de los números dependía de su posición.

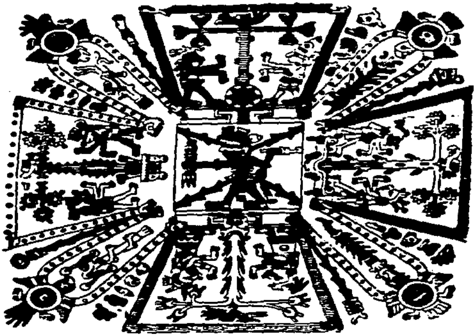
El Cero Maya se inventó como un resultado del empleo de la Numeración vigésimal Posicional en la cual, el valor de un número depende de la posición que ocupa y el Cero tiene el valor del conjunto vacío, la nada, cero unidades de tiempo. Thompson[1] opina respecto al Cero que: "Éste fue un descubrimiento de capital importancia, pero que no fue tan obvio como se cree a primera vista y



[1] LOS SEÑORES DEL CERO (El conocimiento matemático en mesoamérica); Juan Tonda, Francisco Noreña. Pág. 35

queda evidenciado por el hecho de que no lo hizo ningún pueblo de nuestro mundo occidental aún los grandes filosófos matemáticos jamás encontraron este medio tan simple que hubiera facilitado sus laboriosos cálculos. En Europa no se conoció hasta que les llego a nuestros ancestros por medio de los Árabes: estos lo habian tomado de la India; todo ello ocurrió cuando el periodo clásico de los Mayas se había terminado ya."

El significado esencial y la función del Cero Maya está determinado por dos factores: El carácter vigésimal de la computación Maya y el valor posicional de los números inscritos en una cantidad.



Los Mayas utilizaron el Cero para referirse a las fechas y periodos de tiempo en diversos monumentos y textos. Sin embargo, en ocasiones éste no representaba la ausencia de unidades, el conjunto vacio o la nada, sino que denotaba la terminación de un periodo de tiempo o fecha y el inicio del siguiente. Los términos que se han utilizado para describir ésta característica del Cero Maya son "cabalidad" o "completamiento" es decir, una fecha o periodo de tiempo acabado, completo o ajustado a la medida.

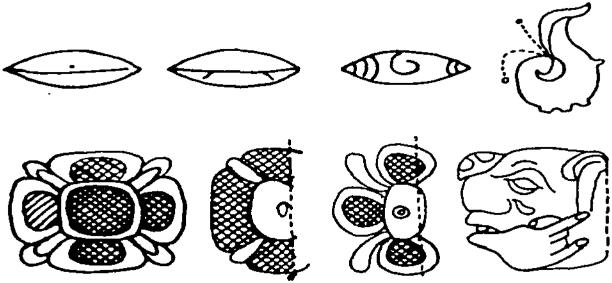
Otro argumento para tratar de probar el significado de cabalidad se encuentra en que la representación del caracol esta asociado con el Dios de la Muerte y la de Variante de Cabeza con los Dioses del Imframundo.

De ésta forma, la muerte se relaciona con la terminación de un ciclo de vida, pero también significa la nada.

La representación Maya más común del Cero, fuera de los códices, es la de una Flor o una Flor incompleta. Sin embargo existia La Variante de Cabeza, al igual que con los otros números. En ella aparece el perfil de una Cara Maya con una mano "haciendo cuernos" en la parte que corresponde a la mandibula, y un signo espiral en la frente, que se cree que tiene relación con la forma de caracol que aparece en los códices.

En otra Variante de Cabeza se piensa que representa al Dios de la Muerte, porque los ornamentos que lleva corresponden a los Dioses del imframundo. También existen otras formas en las que aparece una mano acompañada de ornamentos.

De las diversas representaciones que se han encontrado del Cero Maya, las cuales aparecen en la siguiente figura se tiene que: En la fila superior aparece una figura de un Caracol con sus respectivas variantes y una Concha de Bivalvo. Todas ellas corresponden al Cero Maya que aparece en los Códices Mayas. La identificación del Cero Maya en éstos documentos se debe a Ernest Förstemann, bibliotecario de Dresden, quien se interesó mucho por la Cultura Maya y la empezó a estudiar en el Códice Dresden.



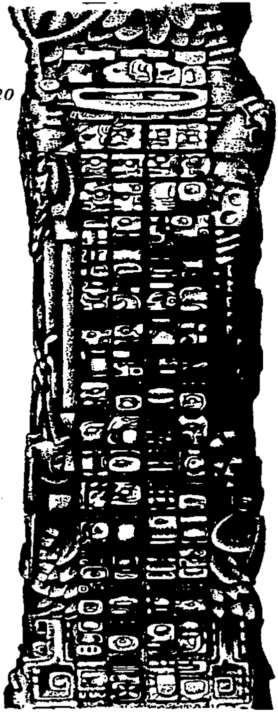
La fila inferior corresponde a las diferentes formas en que los Mayas denotaban el Cero en las estelas, monumentos y tableros.

La preocupación de los Mayas de medir el tiempo los llevo a hacer cálculos calendáricos y astronómicos tan precisos como los que realizan hoy en día los astrónomos modernos. Para la realización de éstos cálculos, se requiere de una herramienta que haga posible medir y contar con gran precisión. Surge así, el Sistema Posicional de la Numeración Maya con Base Vigésimal, y lo más importante la introducción del Cero.

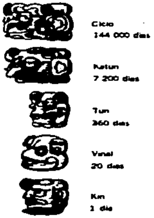
El año civil Maya o Haab se componía de 19 meses, 18 meses de 20 días cada uno y un mes adicional de 5 días, lo que da un total de 365 posiciones que los días podían ocupar en los meses de dicho año calendárico.

El año civil servía a los Mayas para medir un fenómeno astronómico que, según la ciencia moderna, requiere 365.2422 días para efectuarse.

Duración del año según la astronomía moderna 365.2422
Duración de nuestro año juliano sin corregir 365.2500
Duración de nuestro año actual gregoriano 365.2425
Duración del año según la antigüa Astronomía Maya 365.2420

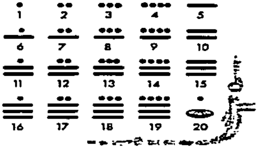


Los conocimientos Matemáticos y astronómicos de los Mayas erán patrimonio exclusivo de una casta especial de sacerdotes, los AH KIN, supremos sacerdotes del culto solar, quienes desarrollaron el Calendario Maya, antecedente del que después utilizaron los Mexicas, adaptándolo a los nombres de sus propios dioses.



La base del Sistema de Numeración Maya es Vigésimal, y representaba al propio Yo con 10 dedos en las manos y 10 en los pies.

Con la combinación de tres símbolos, un circulo que representaba la unidad; una barra, cinco unidades y una concha de caracol estilizada que representaba al Numeral Cero, se puede representar cualquier número, por grande que éste sea.



Estela maya que incluye los pictogramas numerales. Indica un sistema de numeración de base 20 con una sola excepción, debida a la duración del año solar. Los numerales ordinarios consisten en los 20 signos inferiores.

Para escribir los números mayores que 19 es cuando los Mayas empleaban su sistema posicional vigésimal. En nuestro sistema decimal las posiciones a la izquierda del punto decimal aumentan de valor de diez en diez. En el Sistema Maya Vigésimal, los valores de las posiciones aumentan en potencias de base 20, éstos números mayores de 19 se colocan en renglones de abajo hacia arriba realizándose la lectura de éstos de la misma manera.

20^4						
20^3						
20^2						
20^1						
20^0						
	20	**87**	**815**	**10229**	**48304**	**162545**

La tercera posición 20^2 cambiará a 20^1 X 18 cuando se desea computar el tiempo. Ésta fue la causa por la que los Mayas no podían usar éste sistema en toda su potencia, pues el sistema en base veinte quedaba alterado.

Los Mayas se dieron cuanta de la necesidad de crear un símbolo para su sistema posicional, que representara la nada. Se considera que el concepto Maya del Cero implica la ausencia de todo. Pero en su concepción el vacío absoluto era una posibilidad física, se cree que los Mayas no pretendían indicar ausencia o negación, sino que le daban al Cero un sentido de plenitud, pues al escribir el símbolo 20, representado por una concha de caracol y un punto o círculo encima de él, el Cero únicamente indicaba que la veintena estaba completa, que no le faltaba nada, lo que va en contraposición con el concepto de ausencia o carencia, por ello se dice que el símbolo del Cero no es una concha de caracol, sino un puño cerrado visto de frente que simboliza que los dedos están retenidos dentro de un espacio cerrado, contenidos, integrados y completos.

LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS EN EL SISTEMA POSICIONAL DE LA NUMERACIÓN MAYA CON BASE VIGÉSIMAL.

Las operaciones aritméticas que hoy en dia conocemos se pueden realizar con los numerales mayas.

La Suma es la operación más simple que los Mayas realizaban. Para comprenderla basta con un ejemplo:

Consideremos que queremos realizar la suma 21000 + 2000 + 206 + 24632 = 47838

1) Colocamos en un tablero las cantidades bajo el sistema posicional maya.

	1	2	3	4
a				
b				
c				
d				
	21000	2000	206	24632

ii) En una sola casilla se agrupan los simbolos usados en cada uno de los renglones, de manera tal que todos queden sólo en una columna.

	1	2	3	4
a				
b				
c				
d				

iii) Simplificamos la cantidad: cinco puntos son equivalentes a una barra y cada cuatro barras es un punto en el casillero inmediato superior.

	1	2	3	4
a				
b				
c				
d				

Comprobando el resultado

	1		
a		5×20^3	$= 40000$
b		19×20^2	$= 7600$
c		11×20^1	$= 220$
d		18×20^0	$= 18$
			47838

La sustracción:

Se desea sustraer 3961 de 23361 igual a 19400

1) Colocamos el minuendo en la primera columna del tablero

	1	2
a		
b		
c		
d		
	23361	

ii) Formamos el sustraendo a partir del minuendo. Si en uno de los cuadros no alcanza la cantidad correspondiente, tomamos un punto de la casilla inmediata superior.

	1	2
a		
b		
c		
d		
	23361	

	1	2
a	• •	
b	• • • —	• • • • —
c	— —	• • • — — —
d		•
	19400	3961

iii) Comprobando el resultado que ha quedado en la columna (1)

	1
a	• •
b	• • • —
c	— —
d	
	19400

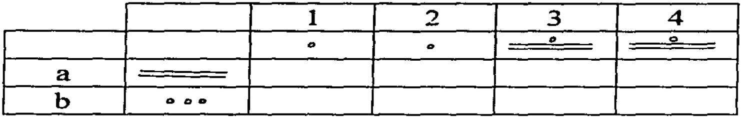
$$\begin{aligned} 2 \times 20^3 &= 16000 \\ 8 \times 20^2 &= 3200 \\ 10 \times 20^1 &= 200 \\ 0 \times 20^0 &= 0 \\ \hline & \ 19400 \end{aligned}$$

La multiplicación:

Si deseamos realizar el producto de 203 x 8631 = 1752093 en el Sistema Maya, entonces convertimos a dichas cantidades al Sistema Maya.

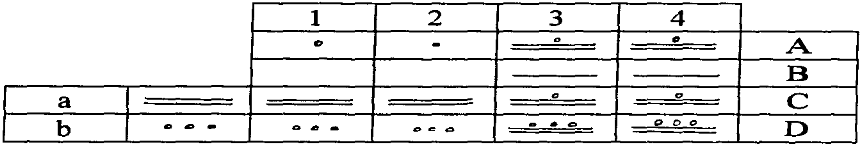
			•
			•
— —			• — —
• • •			• — —
203			8631

A lo largo del margen izquierdo de un tablero, se procede a colocar el multiplicando, y sobre el margen superior se coloca el multiplicador, ésto se hace de manera que las operaciones de mayor rango queden más cerca de la esquina superior izquierda:

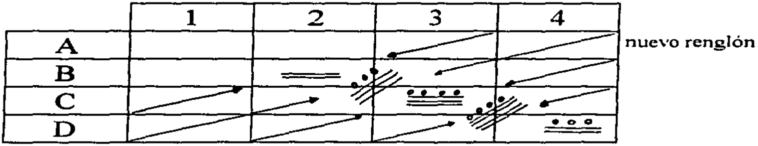


Ahora llenamos el tablero, entonces realizamos el producto parcial de los guarismos que corresponden al renglón y columna de cada casilla. Para comprender como se realiza éste producto parcial vamos a llenar el tablero de nuestro ejemplo:

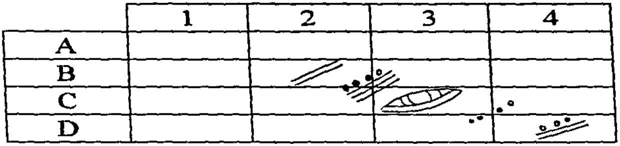
Para la casilla (a1), debe de ir 10 veces un punto. En la casilla (b1) la cantidad de tres veces un punto. Las casillas (a2) y (b2) son análogas a las casillas (a1) y (b1) respectivamente. La casilla (a3), el guarismo es 10 veces dos barras y un punto. Por lo tanto, en ésta casilla obtendríamos 20 barras y 20 puntos, es decir, el equivalente a 22 barras, de las cuales simplificando, obtendremos una barra que colocaremos en una casilla nueva que añadiremos en la parte superior de (a3) y, en (a3) nos quedamos con sólo dos barras. La casilla (b3), se llena con tres veces dos barras y un punto, que se puede simplificar mandando a la casilla inmediata superior un punto y quitar cuatro barras de la casilla (b3), quedándonos con dos barras y tres puntos en ella. Las casillas (a4) y (b4) se operan de manara análoga que en las casillas anteriores.



Ahora, ya llenas las casillas, juntamos todos los puntos y barras en la diagonal del tablero como lo muestro en la figura .

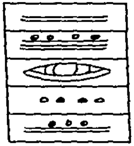


Simplificando:



Al tablero, como se ve, le aumentamos un renglón más para poder colocar adecuadamente en la diagonal los puntos y barras. Les di un nuevo nombre a los renglones (A, B, C, D) para facilitar la explicación: Los elementos de (A3), (B2) y (C1) se unen en (B2). Los elementos de (A4), (B3), (C2) y (D1) se unieron en el cruce que pertenece a la diagonal del tablero, los elementos de (B4), (C3) y D2) quedaron en (C3). Los de (C4) y (D3) se unieron en el cruce que pertenece a la diagonal del tablero. Por último, los puntos y barras de (D4) quedaron ahi.

El resultado obtenido y convertido a nuestro sistema decimal es:



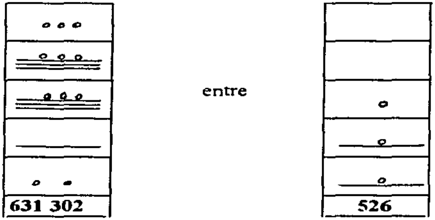
$$
\begin{array}{rcr}
10 \times 20^4 & = & 1\ 600\ 000 \\
19 \times 20^3 & = & 152\ 000 \\
0 \times 20^2 & = & 0 \\
4 \times 20^1 & = & 80 \\
13 \times 20^0 & = & \underline{13} \\
 & & 1\ 752\ 093
\end{array}
$$

Los Mayas podían multiplicar a base de sumas sucesivas, cuando se trataba de multiplicar cualquier cantidad por un "dígito", y para multiplicaciones de varios dígitos se usaba el sistema que hemos seguido en nuestro ejemplo.

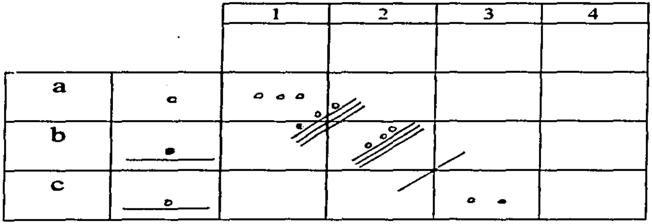
La División:

Se realiza a la inversa de la multiplicacion.

Dividamos las siguientes cantidades: 631 302 entre 526 que es igual a 1200 con un residuo de 102; en el Sistema Maya se tiene la siguiente interpretación:



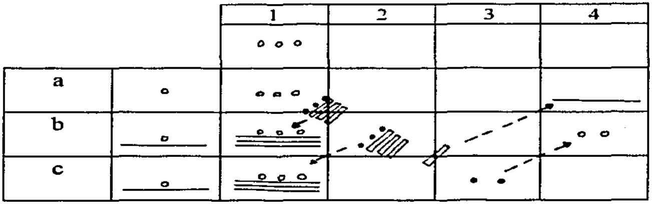
Para resolver la operación, colocamos el dividendo en la diagonal de un tablero y al dividisor en el margen izquierdo del mismo. Ésto lo hacemos de manera tal que, el número que representa las unidades del divisor quede en el mismo renglón que el número de la misma jerarquía del dividendo.



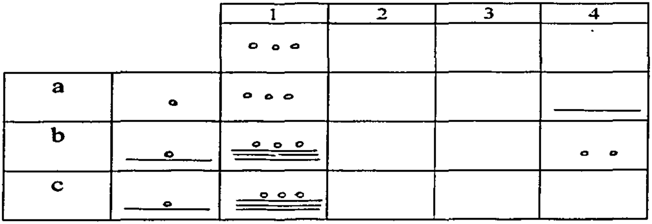
Empezamos la operación: Nos vamos a la casilla (a1); ahí tenemos tres puntos, para que eso diera el producto parcial adecuado tendría que haber tres puntos en el margen superior del tablero sobre la columna (1). Pero entonces en la casilla (b1) debemos colocar seis veces tres puntos (pues en el margen izquierdo aparece un punto y una barra que equivale a seis puntos, y en el superior hemos puesto tres puntos) que son 18 puntos o tres barras y tres puntos, los tomamos de la esquina superior derecha de ésta casilla.

Ya no nos queda nada que colocar en la casilla (a2); ésta casilla quedará vacía. Ahora en la casilla (c1) tenemos el mismo caso que en la casilla (b1). Necesitamos colocar ahí tres barras y tres puntos que tomamos en la casilla (b2), por lo tanto, las casillas (a3) y (b2) quedan vacías porque ya no hay nada que tomar de la diagonal para ellas.

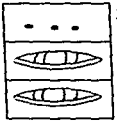
Pasamos a la columna (2), como las casillas (a2) y (b2) quedaron vacías al trabajar en la columna anterior, entonces en el margen superior de la columna (2) debe de ir un caracol (cero), pero entonces la casilla (c2) quedará también vacía, en consecuencia, la barra que tenemos en la esquina superior derecha de ella pasará a llenar las casillas (a4) y (b3) ya sea repartida entre las dos o llenando sólo una de las dos, dependiendo de lo que suceda en sus columnas que analizaremos ahora.



Como la casilla (a3) debe quedar vacía según vimos al llenar la casilla (c1), entonces en el margen superior de ésta columna (3) debe de ir un caracol (cero), pero entonces las casillas (b3) y (c3) también quedaran vacias. Así pues, la barra que tenemos en la parte superior derecha de la casilla (c2), pasa a la casilla (a4), y los dos puntos que teníamos en la casilla (c3) pasan a la casilla (b4).



El resultado de la división aparece en el margen superior del tablero, con tres puntos en la tercera posición del Sistema Maya (puesto que la cuarta columna no se toma en cuenta como la primera posición, es como haber añadido esa columna a nuestro tablero inicial, ahí sólo aparece el residuo de la división). Convertido a nuestro sistema posicional:



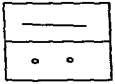
$3 \times 20^2 = 1200$

$0 \times 20^1 = 0$

$0 \times 20^0 = 0$

1200

Residuo



$5 \times 20^1 = 100$

$2 \times 20^0 = 2$

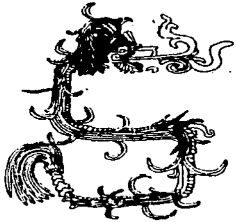
102

Se toma de la primera y segunda posición del Sistema Maya y no en la segunda y tercera como se ve en el tablero. Parece ser que afecta en eso el que ésta cuarta columna sea como adicional a un tablero inicial en cuya diagonal se colocó el dividendo.

EL PATRÓN GEOMÉTRICO DE LOS MAYAS

La víbora de cascabel, La CRÓTALUS DURISSUS DURISSUS, fue el principal símbolo religiosos de los Mayas. Creían que la crótalus,-víbora de cascabel, tenía la habilidad de medir el tiempo, participando así de la sabiduría y carácter de su principal divinidad, el Sol.

La serpiente emplumada, fue el símbolo principal de las civilizaciones mesoamericanas, sólo puede ser y es siempre una víbora de cascabel, puesto que es un símbolo cronológico. Mayas, Toltecas, Aztecas y otros pueblos, pensarón que esa víbora era una encarnación del Sol y, más aún, representarón a éste saliendo de la boca de una víbora "piedra del Calendario Azteca"



Los Mayas creían que la ringlera crótalica era un acumulador de tiempo. Ya que éste era el único objeto en el cual podían ver acumulados los años. Siendo que algunas víboras de cascabel añaden sólo un segmento a su cola por año. Hay la posibilidad de que los antiguos Mayas hayan tenido conocimiento de ésto y por lo tanto tomarón al cascabel como un símbolo del año.[2]

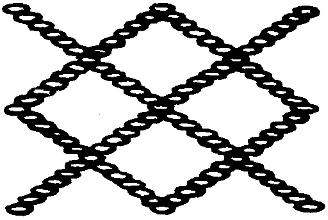
[2] Idea extendida por toda la América Septentrional y Central.

La serpiente emplumada, que es indígena, significó tiempo, cronología, calendario; lo cual se prueba mediante el hecho de tanto Itzamná, como Cuculcán y Quetzalcóatl fueron concebidos como los inventores de la ciencia de medir el tiempo. Ellos tenían como emblema a dicha víbora, y se llamaban serpientes (Can y Coatl)

El cascabel de la víbora significa Vida Nueva y según Diego de Landa en su "Relación de las cosas de Yucatán" que en el solsticio de verano, las víboras mudan de piel el día 16 de julio, día en que se inicia el año nuevo Maya. Ese día añaden un nuevo cascabel, por lo cual su regeneración coincide con la regeneración de la naturaleza, puesto que ese es el tiempo de la temporada de lluvias "CAPUT-ZIJIL"; (Volver a nacer) y la máxima precipitación. Posiblemente por esta coincidencia se creyó que la víbora sólo añade un cascabel a su cola por año.

Al igual que otros pueblos primitivos, los Mayas tenían ideas mágicas y creían que la virtud y eficacia de los cascabeles estaban en su forma, y que reproduciéndolos, dibujándolos, esculpiéndolos, podían apropiarse de sus benéficas virtudes, sus efectos. El cronológico podría ser mejor contador del tiempo, los artistas harían mejor arte, las bordadoras bordarían mejor y las gentes no envejecerían tan pronto, aparte de que el cascabel es un instrumento y modelo de simetría y, por consiguiente del arte, ello explica por qué los cascabeles eran reproducidos por doquiera, en cerámica arquitectura, escultura, pintura y tatuajes.

Los Mayas y otros pueblos creían ver en el cascabel el secreto de la vida y de la regeneración. Un símbolo o signo no era para ellos una cosa abstracta, sino real, como lo fue también para los egipcios.


Canamayté-Cuadrivértice en la piel del Crótalus Durissus Tzabcán yucateco.

El arte Maya se basó en el diseño o patrón geométrico de la Canamayté-Cuadrivértice del AJAU CAN-CRÓTALUS DURISSUS DURISSUS, víbora de cascabel típica de Yucatán y Centro América. Las artes de los Toltecas, Aztecas y Olmecas se basarón también en el mismo patrón. El Canamayté-Cuadrivértice es el cuadrado central que se encuentra en el lomo de la piel de la víbora de cascabel

La geometría de los Mayas estuvó basada en éste patrón geométrico natural de la víbora AJAU CAN-CRÓTALUS DURISSUS DURISSUS, cuyo patrón matemático también fue usado por otras culturas del Norte, Centro y Sur de América, como el pueblo Inca que se estableció en el Perú actual.

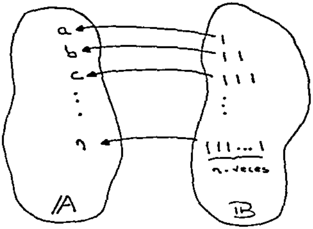
La arquitectura se desarrolló de acuerdo con el cuadrado de proporciones que tiene en la piel la AJAU CAN. Estuvó en Yucatan cientos, millares de años antes que cualquier civilización arqueológica o histórica. De éste diagrama se generarón y desarrollarón las formas de las principales artes precolombinas. Es un diagrama de proporciones para el cuerpo humano, las artes en general y aún, para fijar los puntos cardinales. Motivó la concepción del cielo en forma de cuadrado.

Sin el patrón geométrico del CANAMAYTÉ-CUADRIVÉRTICE en la piel de la CRÓTALUS DURISSUS DURISSUS maya o centroamericana, las culturas Maya, Tolteca y otras de las Américas, no hubieran existido tal cual las conocemos. El CANAMAYTÉ-CUADRIVÉRTICE fue la certeza matemática en medio del caos que ha llegado hasta nuestro tiempo, pues el CANAMAYTÉ-CUADRIVÉRTICE ha sido identificado en los bordados de los trajes regionales de Yucatán, Guatemala, Chiapas, Oaxaca y Perú. Hoy, las formas del arte indígenas basadas en ese patrón son copiadas e imitadas por artistas extranjeros y fabricantes de telas.[3]

APLICACIONES NUMÉRICAS

Durante la historia de la humanidad han existido diferentes sistemas numéricos que han evolucionado hasta llegar al sistema decimal.

La forma más simple de registrar una cantidad, que utilizó posiblemente el hombre primitivo, consistió en asociar una raya por cada elemento de un conjunto, haciendo así una correspondencia **1:1**, es decir, a las funciones tales que a cada elemento del rango **(conjunto (B))** tienen una preimagen única **(conjunto (A))** se llama uno a uno, es decir, **f: A→B** es uno a uno si **f(x) = f(y)** implica que **x = y** o, de un modo equivalente, si **x ≠ y** implica que **f(x) ≠ f(y)**[4]



---

[3] Ver en el Apéndice el resumen de la ponencia presentada en el XXVIII Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana, celebrado en las instalaciones de la Universidad de Colima, Col.

[4] pág. 500, Álgebra lineal, Stephen H. Friedberg; Publicaciones Cultural, S.A.

Éste procedimiento, aunque efectivo, resulta sumamente laborioso cuando se desea representar cantidades grandes. En consecuencia, se ocurrió utilizar símbolos sencillos que sustituyeron a un determinado grupo de rayas. Así, en el sistema de números romanos se tienen las siguientes equivalencias.

UNIDADES	SÍMBOLO
UNA	I
CINCO	V
DIEZ	X
CINCUENTA	L
CIEN	C
QUINIENTOS	D
UN MIL	M

UNIDADES	SÍMBOLO
CINCO MIL	$\overline{V}$
DIEZ MIL	$\overline{X}$
CIEN MIL	$\overline{C}$
QUINIENTOS MIL	$\overline{D}$
UN MILLÓN	$\overline{M}$

Sin embargo, aún en el sistema numérico romano, la representación de algunas cantidades cuya magnitud no es muy grande requiere un gran número de símbolos. Por ejemplo, la representación de tres mil ochocientas ochenta y ocho unidades, sería

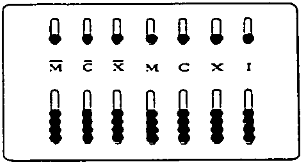
MMMDCCCLXXXVIII

Se observa que se requiere quince símbolos para representar la cantidad citada. Una forma de abreviar dicha representación en el sistema numérico romano es usando el Ábaco Ranurado Romano.

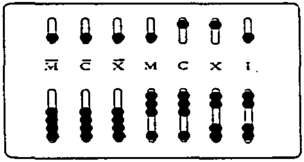
EL ÁBACO RANURADO ROMANO

El ábaco ranurado romano era una placa de metal con algunas ranuras en las cuales se colocaban guijarros. La palabra latina para el guijarro es CÁLCULUS, de la cual se deriva nuestra palabra cálcular.

Los lugares son de derecha a izquierda, el de las unidades (I), decenas (X), centenas (C),unidades de millar (M), decenas de millar ($\overline{X}$), centenas de millar ($\overline{C}$) y millares de millar o unidades de millón ($\overline{M}$). La barra (-) colocada por encima de un numeral, significa que se ha multiplicado el numeral por mil unidades.



En la ranura por debajo del numeral había cuatro guijarros, cada uno representaba una unidad. En la ranura por encima del numeral había un guijarro, representando cinco unidades.



Ejemplos de representaciones en el ábaco ranurado romano.

El número 4 se representaba subiendo cuatro guijarros en la ranura de las unidades. El número 50 se representaba subiendo el único guijarro que había en la ranura corta por encima del numeral de las decenas (X). El número 3872 está representado por 2 unidades, 7 decenas, 8 centenas y 3 unidades de millar.

Nuestro conocimiento del ábaco ranurado de los romanos nos viene de unos cuantos especímenes que han llegado a los tiempos modernos. Uno de éstos, que es de bronce, se encuentra en el Museo Kircheriano en Roma.

Los árabes en el viejo mundo y los mayas en el nuevo introdujeron en forma independiente dos grandes innovaciones en el arte de contar. Una de ellas fue el cero y la otra el concepto de multiplicadores posicionales.

El sistema numérico árabe, que se utiliza en la actualidad es un sistema decimal de multiplicadores posicionales. En éste sistema se requieren únicamente diez símbolos distintos para representar cualquier cantidad, a saber **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**

Sin, embargo, el valor que representa cada uno de estos símbolos depende de la posición que ocupa dentro de la cantidad expresada.

En cualquier sistema de multiplicaciones posicionales, una cantidad compuesta de parte entera y parte fraccionaria se escribe en la forma:

$$\mathbf{S_n\ S_{n-1} \ldots S_1\ S_0 . S_{-1}\ S_{-2} \ldots S_{-m}}$$

parte entera ↓ parte fraccionaria
punto

En ésta expresión, el punto separa la parte entera de la parte fraccionaria de la cantidad. Cada símbolo $\mathbf{S_i}$ corresponde a alguno de los símbolos distintos que existen en el sistema numérico en cuestión, pero su valor va a estar afectado por un multiplicador que es función de la posición que ocupa cada símbolo en la cantidad representada. Así el significado de la expresión anterior puede escribirse en la siguiente forma.

$$\mathbf{S_n b^n + S_{n-1} b^{n-1} + \ldots + S_1 b^1 + S_0 b^0 + S_{-1} b^{-1} + S_{-2} b^{-2} + \ldots + S_{-m} b^{-m}}$$

En donde **b** denota la base del sistema. Obsérvese que por tratarse de un sistema de operadores posicionales, la posición con respecto al punto de cada símbolo S_i determina la potencia **b** por la que hay que multiplicar el valor del símbolo S_i. La primera posición a la izquierda del punto corresponde a la potencia cero de la base. La siguiente posición a la izquierda se ve afectada por la primera potencia de la base. La siguiente se multiplica por el cuadrado de **b** y así sucesivamente. Las posiciones a la derecha del punto corresponden a potencias negativas de la base. En el sistema numérico decimal (base b = 10), el punto que separa la parte entera de la parte fraccionaria se denomina punto decimal y los diez símbolos distintos S_i, que se utilizan en el sistema se denominan dígitos.

Ejemplos de aplicación.
La cantidad 3088.3888 se escribe como una suma de términos del tipo mostrado en la expresión anterior, es decir;

$$\mathbf{3 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 8 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1} + 8 \times 10^{-2} + 8 \times 10^{-3} + 8 \times 10^{-4}}$$

esto es

$$3 \times 1000 + 0 \times 100 + 8 \times 10 + 8 \times 1 + 3 \times 1/10 + 8 \times 1/100 + 8 \times 1/1000 + 8 \times 1/100000$$

Obsérvese como la representación de la cantidad mostrada corresponde precisamente a lo que se aprende en aritmética elemental en lo que respecta a la posición de las unidades, decenas, centenas, etc.; a saber:

DM	UM	C	D	U	d	c	m	dm	cm
	3	0	8	8	3	8	8	8	8

La Matemática se desarrolla en un frente amplio. Además sufren cambios todos los elementos de su estructura: se desarrollan nuevas teorías, se proponen y comprueban nuevas hipótesis, se acumulan hechos, se completan la estructura de la Ciencia Matemática ya formada, se amplia la esfera de aplicación de los métodos matemáticos, se cambian las ideas generales sobre la naturaleza de la Matemática y sus posibilidades. El proceso de cambio abarca no sólo aquellas partes de la Matemática de la cual en el periodo histórico dado constituyen la cúspide de los logros de sus creadores. Se desarrolla y cambia la forma también, aquella parte, la cual se acostumbra a denominar Matemática Elemental, término que aún no ha encontrado definición y tratamiento único, el cual juega tan gran papel en el sistema de formación y actividad práctica masiva de los hombres. La división de la Matemática en superior y elemental que se utiliza en nuestra época tiene un carácter condicional históricamente limitado y no puede pretender ser científico. Entre la Matemática elemental y superior no hay delimitación, determinadas las ideas matemático-elementales se transforman en las ramas superiores de la Matemática; a su vez la Matemática Elemental se completa con nuevos hechos e ideas de las llamada Matemática Superior.

LAS TABLAS DE NAPIER.

Hacia finales del siglo XVI Napier preocupado porque los cálculos numéricos largos y difíciles, frenaban el proceso científico, concentró todos sus esfuerzos en el desarrollo de métodos que pudieran simplificarlos, con éste fin escribió su Rabdología, donde describe la utilización de varillas y cuadrillos para efectuar sumas de productos parciales. Los cuadrillos de Napier son tablas de multiplicación montadas sobre varillas de sección cuadrada.

Las varas o bastoncillos de Napier son una invención cuyo objeto es facilitar la multiplicación de los números dígitos, en donde se encuentra implícita la suma de los números naturales. Estas varas son de hecho 10 tiras sobre las cuales se escriben los productos del 0 al 9. Cada bastoncillo se divide en 10 celdas. En cada celda se separa el dígito de las decenas del dígito de las unidades por medio de una línea diagonal.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
2	4	6	8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8	0
3	6	9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7	0
4	8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6	0
5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5	0
6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4	0
7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3	0
8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2	0
9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1	0

Ejemplo de aplicación:

Supongamos que se desea realizar el producto 8350 x 951; entonces se hará de la siguiente manera.

Se coloca la regleta guía en primer termino y a su derecha se colocaran las regletas de los digitos 8,3,5,0, formando así la cantidad de 8350.

1	8	3	5	0
2	1/6	6/	1/0	0/
3	2/4	9/	1/5	0/
4	3/2	1/2	2/0	0/
5	4/0	1/5	2/5	0/
6	4/8	1/8	3/0	0/
7	5/6	2/1	3/5	0/
8	6/4	2/4	4/0	0/
9	7/2	2/7	4/5	0/

Se localizan los productos respectivos de las unidades, decenas, centenas, etc. de la cantidad dada, sumándose así los números contenidos dentro del paralelogramo formado por las diagonales de las regletas, siendo ésta suma de derecha a izquierda. Cuando la suma de los dígitos exceda a 9, la unidad correspondiente se sumara con los siguientes dígitos, obteniéndose así los productos buscados.

1	8	3	5	0	Unidades 8350 x 1= 8350
5	4/0	1/5	2/5	0/	Decenas 8350 x 5 = 41750
9	7/2	2/7	4/5	0/	centenas 8350 x 9 = 75150

Sumando las cantidades respectivas que se han obtenido en los productos de las unidades, decenas y centenas, se tendrá el producto final entre las cantidades dadas así:

8350 x 951	
8350	Unidades
41750	Decenas
75150	Centenas
7940850	

Si se han inventado reglas para encontrar los productos entre los números naturales, también podemos inventar un sistema que me pueda calcular la distancia entre dos puntos dados en la recta numérica.

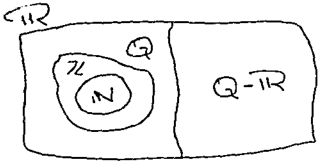
LA DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN LA RECTA NUMÉRICA DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

El problema más destacado que dejaron pendiente KHOWARIZMI y sus predecesores fue cómo interpretar los números negativos -inferiores al cero. ¿Quién tuvó jamás en sus manos menos que nada? En la actualidad en álgebra se aprende la llamada "ley de los signos" .

Para captar la idea de los números negativos, paso mucho tiempo antes de que se les permitiera la entrada en los dominios de las matemáticas y del sentido común. Uno de los primeros en darles abierta consideración fue el matemático italiano, Leonardo de Pisa, llamado también "Fibonacci", que vivió aproximadamente del 1170 al 1250. En una ocasión, mientras comprobaba un problema financiero, vio sencillamente que no podía resolverse si no era en términos de un número negativo. En lugar de quedarse indiferente ante éste número consideró su cuadrado y lo describió como una pérdida financiera "este problema -escribió- ha mostrado que es insoluble, a menos que se admitiera que el primer hombre tenia una deuda."

Los números negativos pueden, naturalmente, ser interpretados de otras muchas formas. Miden distancias inversas a lo largo de una carretera, temperaturas por debajo de cero, tiempos anteriores al presente o minutos anteriores a la hora. En general a éstos números los podemos representar graficamente en una recta numérica con una flecha de dirección en ellos, una flecha que señala hacia detrás del cero. Por lo que se refiere a los modernos matemáticos, los números negativos no necesitan ser interpretados en modo alguno; simplemente son útiles abstracciones.

A pesar del reconocimiento hipotético de Fibonacci de que una ecuación podía tener una solución negativa, la mayoría de los matemáticos continuaron considerando a los números negativos con un frio escepticismo hasta el siglo XVI. En éste siglo, la época del renacimiento, las matemáticas también disfrutaron de una nueva explosión de creatividad.



El conjunto de los números reales (ℜ) está compuesto por la unión de dos conjuntos diferentes, los números racionales (Q) y los números irracionales (Q-ℜ). Los números racionales (Q) a su vez están formados por el conjunto de los números enteros (Z) y éste contiene a los números naturales (ℵ).

Consideremos a los números reales (ℜ) como si fueran puntos de la recta numérica. En particular consideremos a los números enteros, por lo tanto:

←I—I ...— ...I—I—I—I—I—I—I...— ...I—I→
-X   -3 -2 -1 0 1 2 3   X

Tomemos una línea recta que se prolongue indefinidamente en ambas direcciones usando a los números enteros. Para determinar la escala se escoge un punto de partida que se designa con el cero (0) y a la derecha de éste se designa a otro punto con la unidad (1).

Cualquier número X a la derecha del cero es un punto que dista X unidades a la derecha del cero, mientras que cualquier número -X corresponde a un punto que dista X unidades a la izquierda del cero.

La distancia del punto X al punto 0 es el valor absoluto del número X, y se denota por $|X|$ y se define como:

$|X| = X$ para cualquier número X positivo
$|-X| = X$ para cualquier numero X negativo
$|X| = 0$ si $X=0$

Ejemplo de aplicación:

$|5| = |-5| = 5$ puesto que tanto 5 como -5 distan cinco unidades del cero

La distancia entre dos puntos cualesquiera x_1, x_2 que están en la recta numérica, se denota como $|x_2 - x_1|$ si $x_2 \geq x_1$, ésta diferencia no negativa es $\sqrt{(x_2 - x_1)^2}$, donde el radical $\sqrt{\ }$ proporciona siempre la raiz cuadrada no negativa del número.

Ejemplo:
Calcular la distancia entre los puntos -2 y 3 que se encuentran en la recta numérica.
La distancia se puede calcular por medio de alguna de éstas expresiones

$|-2-(3)| = |-2-3| = |-5| = 5$
$|3-(-2)| = |3+2| = |5| = 5$
$\sqrt{(3-(-2))^2} = \sqrt{(3+2)^2} = \sqrt{25} = 5$
$\sqrt{(-2-(3))^2} = \sqrt{(-2-3)^2} = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

La adición y la sustracción puede efectuarse sobre dos reglas numéricas. Una de ellas iniciará su escala en cero y la otra puede empezarla desde cualquier número negativo hacia los positivos.

.0 .1 .2 .3 .4 .5 .6 .7 .8 .9 .10 . •••	REGLA NUMÉRICA (A)
••• .-5 .-4 .-3 .-2 .-1 .0 .1 .2 .3 .4 .5 .6 .7 .8 .9 .10 . •••	REGLA NUMÉRICA (B)

Ejemplo de aplicación:

- Supongamos que queremos encontrar la suma 3 + 7

.0 .1 .2 .3 .4 .5 .6 .7 .8 .9 .10 . •••	REGLA (A)
••• .-5 .-4 .-3 .-2 .-1 .0 .1 .2 .3 .4 .5 .6 .7 .8 .9 .10 . •••	REGLA (B)

- La escala superior se desliza hacia la derecha hasta que su cero coincida con la marca del número 3 que se encuentra en la escala inferior.

.0 .1 .2 .3 .4 .5 .6 .7 .8 .9 .10 . •••	REGLA (A)
••• .-5 .-4 .-3 .-2 .-1 .0 .1 .2 .3 .4 .5 .6 .7 .8 .9 .10 . •••	REGLA (B)

- Se localiza la marca del número 7 en la escala superior y la suma, 10, se lee directamente debajo en la escala inferior.

- De modo inverso, estas reglas pueden emplearse para restar dos números.

.0 .1 .2 .3 .4 .5 .6 .7 .8 .9 .10 . •••	REGLA (A)
••• .-5 .-4 .-3 .-2 .-1 .0 .1 .2 .3 .4 .5 .6 7 .8 .9 .10 . •••	REGLA (B)

-Ejemplo, para calcular la sustracción 9 - 7: colocamos la marca del número 7 de la escala superior directamente encima de la marca del número 9 de la escala inferior.

- La diferencia, 2, se encuentra en la escala inferior directamente abajo del cero de la escala superior.

Desplazando la regla superior sobre la regla inferior y colocando el punto cero sobre el primer punto (x_1), localiza el segundo punto (x_2), la marca de la regla que coincide con un número, indica la distancia en valor absoluto entre éstos dos puntos.

$\lvert x_2 - x_1 \rvert = \lvert 5 - (-3) \rvert = \lvert 5+3 \rvert = \lvert 8 \rvert = 8$	VALOR ABSOLUTO
.0 .1 .2 .3 .4 .5 .6 .7 .8 .9 .10	REGLA (A)
... .-5 .-4 .-3 .-2 .-1 .0 .1 .2 .3 .4 .5 .6 .7 .8 .9 .10 . . . x_1 . x_2	REGLA (B)

Un tratamiento similar, pero con escalas logaritmicas es la base para el fundamento del instrumento llamado "regla de cálculo".

EL ÁLGEBRA COMO UNA SOLUCIÓN A LOS ACERTIJOS.

Poco se sabe acerca de la vida de Diofanto, a excepción de su edad al morir. Ésta se ha conservado en el famoso acertijo que tiene alrededor de 1500 años de haberse resuelto.

El acertijo divide la vida de Diofanto en segmentos, cada uno de los cuales es una parte de su total (representado por (x)).

El acertijo empieza así: " La juventud de Diofanto duró 1/6 de su vida (Haciendo x igual a su vida, su juventud fue x/6). Se dejó la barba después de 1/12 más. Después de 1/7 de su vida, Diofanto se casó. 5 años después tuvo un hijo. El hijo vivió exactamente ½ de tiempo que su padre, y Diofanto murió cuatro años después de su hijo. Todo ésto son los años que vivió Diofanto"

La ecuación completa es:

$$\mathbf{x = x/6 + x/12 + x/7 + 5 + x/2 + 4}$$

la cual se reduce a **3x/28 = 9** y finalmente a **84** años.

A Diofanto se le recuerda como el padre del álgebra puesto que fue el primero en abreviar sus pensamientos sistemáticamente con símbolos de su propia creación y debido a que resolvió lo que se conoce como ecuaciones indeterminadas o "diofánticas". Las ecuaciones indeterminadas no contienen suficiente información para ser resueltas con números específicos, pero sí suficientes para adscribir la respuesta a un tipo determinado.

El análisis de los números desarrollados a partir de las ecuaciones diofánticas recibe el nombre de "teoría de números" y se le considera la más pura de las ramas de la matemática actual. Su desarrollo por parte de Diofanto ayudo a los algebristas a considerar una ecuación como una forma de categorizar todos los números de un tipo dado, más que como una relación únicamente entre los números de un problema especifico.

Durante la edad media y las edades de ignorancia y superstición, una sucesión de matemáticos hindúes y musulmanes transmitieron el álgebra desde un oasis de cultura -un sultanato o califato- al siguiente. No crearon muchos conocimientos nuevos en el proceso, pero por lo menos a través de la práctica despojaron el arte de las ecuaciones de su rama de misterio. En 825 AL-KHOWARIZMI, el mismo sabio de Bagdad que había publicado el sistema posicional de base 10 para la escritura de los números, escribió el primer tratado claro de álgebra. El título de ésta obra fue *AL-JABR W'AL-MUQABALAH*, "el arte de unir las incógnitas simultáneas para encontrar una cantidad conocida" la palabra clave *AL-JBR*, o "unir" dio lugar a la palabra álgebra. En la edad media, "algebraico" indicaba a un hombre que unia los huesos o a un especialista en ecuaciones.[5]

SUBYACENCIA DE LA MATEMÁTICA EN LA ESCALA MUSICAL

Pitágoras averiguó que existía una conexión entre la armonía musical y los números enteros, es decir, descubrió las relaciones entre los números enteros y las notas musicales Do, Fa, Sol y Do inferior y, además, entre sus equivalentes en cualquier escala. Llegó a la convicción de que la armonía, la belleza, la naturaleza, pueden exprezarse por medio de relaciones entre números enteros. Incluso creyó que los planetas, al girar sobre sus órbitas deben producir una armonía celeste basada en los números enteros: la denomina " Música de las esferas".

El monocordio es el instrumento musical conocido por los matemáticos griegos, en particular por Pitágoras. Sus elementos esenciales son : Un alambre rigidamente fijo en los extremos salientes de la madera de una caja de resonancia tensado sobre un puente fijo y un puente móvil. Solamente el tramo tensado sobre los puentes se pone en vibración. El puente móvil se puede correr acortando o alargando la longitud de la cuerda. Se puede poner en vibración de diferentes maneras. Golpeando, como en el piano; pasando el arco, como en el violín; pulsando con un dedo, como en el arpa; incluso soplando sobre ella como en el arpa Eolia.

Ejemplo de aplicación:
Pulse una cuerda de una longitud "x" y haga sonar una nota, después, pulse una cuerda igual de tensa con una longitud al doble de la anterior (2x), entonces se oirá una nueva nota, justamente una octava armónica por debajo de la primera. Empezando por cualquier cuerda y considerando la nota musical que produce, se puede bajar la escala aumentando la longitud de la cuerda según simples fracciones que pueden expresarse mediante las relaciones de los números enteros; 16/15 de una cuerda cuya longitud sea (x) y que da la nota musical Do dan la nota baja siguiente Si; 6/5 (x) da la nota musical La; 4/3 (x) da la nota musical Fa; 3/2 (x) da la nota musical Mi; 16/9(x) da la nota musical Re; y exactamente 2 (x) vuelven a dar el tono de Do de octava más baja.

---

[5] Ver Apéndice " El Teorema de Fermat "

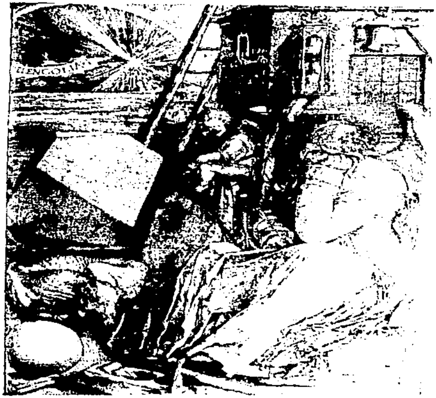
Los conocimientos adquiridos a través de éste experimento se resumen en las siguientes leyes, formuladas por primera vez por el Matemático Mersenne (Harmonie Universelle, 1936).

-Cuando la cuerda y su tensión permanecen inalterados, pero se varia su longitud, el periodo de la vibración es proporcional a la longitud. (Ley de Pitágoras). [6]
-Cuando una cuerda y su longitud permanecen inalterados, pero se varia la tensión, la frecuencia de la vibración es proporcional a la raíz cuadrada de la tensión.
-Para cuerdas de la misma longitud e igual tensión el periodo de la vibración es proporcional a la raíz cuadrada del peso de la cuerda.

La frecuencia de la vibración es la que determina el tono del sonido. Si no hay una frecuencia bien definida, no existe un tono claramente definido, porque el sonido ya no es musical.

LA MATEMÁTICA DE ALBERTO DURERO

"WAS ABER SHÖNHEIT SIE, DAS WEISS ICH NICHT"
A. DURERO



El grabado representa no sólo el autoretrato del artista, sino la esencia del humanismo. La desesperanza de ésta figura alada ilustra a la vez los peligros y las satisfacciones de la investigación intelectual y es la imagen del espíritu creador, del hombre a solas consigo mismo. El edificio con la escalera indica que está sin concluir, la campana quebrada, el perro hidrófobo, el reloj con la arena cayendo, la balanza vacía oscilando, todo sume en desesperación a la melancolía. Pero el tablero mágico en la pared tiene 16 cuadros cuyos números suman 34 en todas direcciones prediciendo una solución favorable. además en él se lee la fecha 1514 en la cual se realizo la obra.[7]

[6] Ver Apéndice " La ley Pitagórica de las cuerdas"
[7] Ver Apéndice "Los Cuadrados Mágicos"

SISTEMA NUMÉRICO BINARIO.

El diseño y fabricación de una computadora digital que operara enteramente con el sistema numérico decimal sería sumamente complicado. La máquina debería ser capaz de reconocer los 10 símbolos distintos del sistema decimal, o 10 estados de la naturaleza correspondientes a dichos símbolos. Para obviar esta dificultad, la casi totalidad de las computadoras operan internamente con el sistema numérico binario (base 2). El que la máquina opere internamente con el sistema binario simplifica considerablemente el diseño, ya que en este sistema existen únicamente dos símbolos distintos: 0 (cero) y 1 (uno). En consecuencia la máquina necesita discernir únicamente entre dos alternativas posibles, una de las cuales representa el símbolo 0 y la otra el símbolo 1. Estas dos alternativas pueden corresponder a estados de la naturaleza bien definidos que la maquina distingue fácilmente, a saber: la existencia o no existencia de un impulso magnético de algún lugar de la memoria, la presencia o ausencia de una perforación en determinado lugar de una tarjeta o de una cinta de papel, la circulación de uno u otro sentido de un impulso eléctrico en un circuito, la posición abierta o cerrada de un interruptor, etc.

La representación de alguna cantidad en el sistema binario se hace mediante una sucesión de "ceros" y "unos", los que estarán multiplicados por la potencia 2 correspondiente al lugar que ocupan a la derecha o a la izquierda del punto.

Por ejemplo: La cantidad $(107.375)_{10}$ equivalente a la representación $(1101011.011)_2$ en la que los subíndices $_{10}$ y $_2$ fuera del paréntesis denotan la base del sistema numérico en que esta escrito el número.

Utilizando la expresión:

$$\mathbf{S_nb^n + S_{n-1}b^{n-1} + \ldots + S_1b^1 + S_0b^0 + S_{-1}b^{-1} + S_{-2}b^{-2} + \ldots + S_{-m}b^{-m}}$$

se tiene que:

$$\begin{aligned}(1101011.011)_2 &= \mathbf{1x2^6 + 1x2^5 + 0x2^4 + 1x2^3 + 0x2^2 + 1x2 + 1x2^0 + 0x2^{-1} + 1x2^{-2} + 1x2^{-3}} \\ &= \mathbf{64 + 32 + 0 + 8 + 0 + 2 + 1 + 0 + 1/4 + 1/8} \\ &= \mathbf{107(3/8) = (107.375)_{10}}\end{aligned}$$

Hay que hacer notar que existen cantidades fraccionarias cuya representación en el sistema numérico dado se logra con un número finito de cifras, pero que al tratar de representarlas en otro sistema producen una cantidad "periódica", es decir, una forma repetitiva con un número infinito de cifras. Por ejemplo, el número fraccionario 0.1 del sistema decimal queda representado en el sistema binario en la forma $(0.0001100110011\ldots)_2$, si desarrollamos la cantidad periódica 0011 del sistema mediante la expresión:

$$\mathbf{S_nb^n + S_{n-1}b^{n-1} + \ldots + S_1b^1 + S_0b^0 + S_{-1}b^{-1} + S_{-2}b^{-2} + \ldots + S_{-m}b^{-m}}$$

se tendrá que :

$$
\begin{aligned}
&0x2^{-1}+0x2^{5-2}+0x2^{-3}+1x2^{-4}+1x2^{-5}+0x2^{-6}-0x2^{-7}+1x2^{-8}+1x2^{-9}+0x2^{-10}+0x2^{-11}+1x2^{-12}+1x2^{-13}\\
&= 0+0+0+1/16+1/32+0+0+1/256+1/512+0+0+1/4096+1/81920+\ldots+\\
&= 0.062\,500\,000\,000\,000\\
&+ 0.031\,250\,000\,000\,000\\
&+ 0.003\,906\,250\,000\,000\\
&+ 0.001\,953\,125\,000\,000\\
&+ 0.000\,244\,140\,625\,000\\
&+ 0.000\,122\,070\,312\,500\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad 0.099\,975\,585\,937\,500
\end{aligned}
$$

dicha cantidad es aproximadamente $(0.1)_{10}$

La máquina, durante la lectura de los datos, "traduce" los valores numéricos que recibe a su propio sistema binario, ejecuta las operaciones y almacena resultados en binario y vuelve a "traducir" los valores numéricos al sistema decimal antes de comunicarlos al usuario.

El transito del sistema decimal al binario de la computadora.

En 1834, Charles Babbage, tuvo la idea de una computadora, en el sentido moderno de la palabra. Las calculadoras tenían un repertorio fijo de "habilidades", las más sencillas sólo podían sumar y restar, otras podían también multiplicar y dividir. La computadora tal como Babbage la concebía, iba mucho más allá. Se trataba de una calculadora para uso general capaz de efectuar cualquier tipo de operación matemática que se le especificase.

En el siglo XX se utilizó la electricidad para accionar una serie de calculadoras, pero la primera completamente electrónica fue la integradora numérica y calculadora electrónica (eniac), fabricada en la Universidad de Pennsylvania en 1945. Contenía mas de 18,000 válvulas térmicas, pesaba 30 toneladas ocupando un área de 140 metros cuadrados y además tenía que ser programada manualmente mediante clavijas. Podía realizar 5,000 sumas o restas por segundo.

En el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton (Nueva Jersey), John Von Newmann dirigió la construcción de una computadora diseñada por él. La máquina no necesitaba de un cambio manual de conexión para cada nuevo tipo de cálculo. Recibía las instrucciones en forma de números y las almacenaba con los datos. La computadora también utilizaba la notación binaria en la que todos los números están representados por secuencias de ceros y unos, sustituyendo a los dígitos del 0 al 9 utilizados en la notación decimal.

El equipamiento realizado para el Museo, muestra el transito existente entre el sistema decimal al binario y el reciproco.

Por ejemplo:
Si deseamos transitar, 7 unidades + 8 decenas + 1 centena (187); del sistema decimal al sistema binario, realizamos las siguientes divisiones.

a) Para convertir la parte entera de una cantidad del sistema decimal al sistema binario se efectúan divisiones sucesivas de dicha parte entera y del cociente entero de cada división, entre la nueva base, agrupándose finalmente los residuos de todas las divisiones en orden inverso a como se obtuvieron.

a)
$$\begin{array}{r|l} & 93 \\ \hline 2 & 187 \\ & 07 \\ & \mathbf{1} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r|l} & 46 \\ \hline 2 & 93 \\ & 13 \\ & \mathbf{1} \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r|l} & 23 \\ \hline 2 & 46 \\ & 06 \\ & \mathbf{0} \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r|l} & 11 \\ \hline 2 & 23 \\ & 03 \\ & \mathbf{1} \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{r|l} & 5 \\ \hline 2 & 11 \\ & \mathbf{1} \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & 5 \\ & \mathbf{1} \end{array}$$

g)
$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ & \mathbf{0} \end{array}$$

h)
$$\begin{array}{r|l} & 0 \\ \hline 2 & 1 \\ & \mathbf{1} \end{array}$$

colocamos los residuos obtenidos en orden de derecha a izquierda

h)	**g)**	**f)**	**e)**	**d)**	**c)**	**b)**	**a)**
1	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**

$$(187)_{10} = (10111011)_2$$

Cada cuadro en la secuencia vale el doble que el precedente en lugar de diez veces como en la notación decimal, así en el sistema binario, el número 187 se representa por **10111011** **o bien** $2^7 + 0 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 0 + 2^1 + 2^0$ que significa $128 + 32 + 16 + 8 + 2 + 1$
Se puede realizar el reciproco del transito, es decir, del sistema binario al decimal, con base en lo anterior.

En el equipamiento del Museo, cada potencia de dos representa la cantidad:

16384+8192+4096+2048+1024+512+256+128+64+32+16+8+4+2+1 en el sistema decimal, por lo tanto, sólo se necesitan 15 espacios para representar los números del 0 al 32767 en el sistema binario.

Para operar el equipamiento se realizan los siguientes pasos:

- Seleccionar el número del sistema decimal.
- Realizar las divisiones correspondientes sobre una pizarra.
- Encender o dejar apagadas las lamparas correspondientes según el residuo obtenido en la división realizada (de derecha a izquierda), el primer residuo corresponde a la potencia 0 del 2, el segundo residuo a la primera potencia de 2 ; etc.
- Colocar los residuos correspondientes.
- Comprobar que el número binario obtenido en el tablero, debe coincidir con el número del sistema decimal elegido.

A la inversa se realizan los siguientes pasos:

- Seleccionar un grupo de números que correspondan al sistema binario.
- De derecha a izquierda, cada cuadro en la secuencia vale el doble que el precedente, por lo tanto, sobre la pizarra realizar la equivalencia en el sistema decimal, según el lugar que ocupan. Sumando todos los resultados, se obtendrá el equivalente en el sistema decimal.

b) Para convertir la parte fraccionaria de una cantidad del sistema decimal al sistema binario se efectúan multiplicaciones sucesivas de dicha parte decimal y de la porción decimal de cada producto, por la nueva base, agrupándose finalmente las porciones enteras de todos los productos en el orden en que se obtuvieron.

Ejemplo:
Transformar $(0.8)_{10}$ a binario

Binario	**Porción entera**
Primera multiplicación	$2 \times 0.8 = 1.6$ 1
segunda multiplicación	$2 \times 0.6 = 1.2$ 1
tercera multiplicación	$2 \times 0.2 = 0.4$ 0
cuarta multiplicación	$2 \times 0.4 = 0.8$ 0
quinta multiplicación	$2 \times 0.8 = 1.6$ 1

Asi se tiene que : $(0.8)_{10} = (0.11001\ldots)_2$

Comprobación:

$$1x2^{-1} + 1x2^{-2} + 0x2^{-3} + 0x2^{-4} + 1x2^{-5} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + 0 + 0 + 1/32 + \ldots$$
$$= 0.5 - 0.25 + 0 + 0 + 0.03125 \approx (0.78125)_{10}$$

Obsérvese que la cantidad decimal 0.8 no puede representarse con un número finito de cifras en el sistema binario.

Aritmética binaria

De un modo análogo a lo que acontece en el sistema numérico usual, para dominar la aritmética binaria es preciso aprender las tablas de sumar y multiplicar: en el sistema binario se tiene:

Adición $0+0 = 0$ $\qquad 0+1 = 1$ $\qquad 1+0 = 1$ $\qquad 1+1 = 10$

Obsérvese que en la ultima operación, cada vez que se suman "unos", el resultado es "cero" y se lleva un "uno" a la columna que sigue hacia la izquierda, o lo podemos interpretar como:

$$\begin{array}{r}1\\ 2\overline{)2}\\ \mathbf{0}\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r}0\\ 2\overline{)1}\\ \mathbf{1}\end{array}$$

$$\mathbf{(2)_{10} = (10)_2}$$

Producto: $0x0 = 0$ $\qquad 1x0 = 0$ $\qquad 0x1 = 0$ $\qquad 1x1 = 1$

Se pueden construir las tablas de adición y del producto en el sistema binario.

Tabla de la adición

+	0	1
0	0	0
1	1	10

Tabla del producto

*	0	1
0	0	1
1	0	1

LA EXPANSIÓN BINOMIAL Y EL TRIÁNGULO DE PASCAL .

Usted es un psicólogo que hace investigación con cierto tipo de animales. Le interesa saber la relación que existe entre la fuerza de la motivación y el aprendizaje. Especificamente, ¿cuáles serán los efectos de la fuerza del hombre sobre el número de ensayos que hace el animal para conocer un laberinto en forma de T?

Usted es un líder de un grupo político y con el objeto de planear la adhesión de nuevos miembros le es necesario conocer la proporción de adultos de su ciudad, cuyo deseo de pertenecer al grupo sea manifiesto. ¿Cómo podría obtener esta información?

Usted es un sociólogo y quiere conocer las diferencias de la educación dada a los hijos por los padres de niños delincuentes y los padres de niños que no son delincuentes.

Usted es un investigador en ciencia de la educación y quiere conocer la proporción de estudiantes que prefieren el área de física matemática y el área de humanidades.

Nos estamos interrogando acerca del valor de los parámetros de la población para la cual pretendemos generalizar una respuesta. pero no existe la posibilidad de estudiar la población completa.

Se define a una población como un conjunto completo de individuos, objetos o medida que tienen en común alguna característica observable. Con frecuencia es imposible estudiar todos los miembros de una población dada, ya sea porque la población, tal como ha sido definida, tiene un número infinito de miembros, o porque es tan vasta que imposibilita un estudio exhaustivo.

En este caso nuestro interés no esta dirigido a la estadística descriptiva, sino a la elaboración de inferencias a partir de datos.

Casi toda investigación utiliza la observación y medida de un número limitado de individuos o sucesos. Se supone que estas medidas nos proporcionarán alguna información sobre la población. Con el fin de comprender cómo podemos ser capaces de establecer inferencias sobre una población a partir de una muestra, es necesario presentar el concepto de distribución de muestras.

Una distribución de muestras es un distribución de probabilidad teórica de todos los valores posibles de algunos estadísticos[8] de las muestras que ocurrirían, si fuese posible obtener todas las muestras del mismo tamaño a partir de una población dada.

Cuando se quiere estimar un parámetro de población a partir de una muestra, nos hacemos preguntas tales como: ¿Qué tan buena es la estimación obtenida?, ¿Puedo llegar a la conclusión de que el parámetro de población es idéntico al estadístico de la muestra ? o ¿Es probable que exista algún error? Si es así, ¿Qué tan grande es?.

[8] Inferencias sobre los parámetros de una población con base en una nueva muestra de N observaciones, obtenidas al azar de una población estudiada.

Para responder a cada una de estas preguntas, compararemos los resultados obtenidos a partir de las muestras con los resultados "esperados". Los resultados esperados están dados, a su vez, por la apropiada distribución de las muestras. Pero ¿Cómo es en realidad una distribución de las muestras de un estadístico dado?, ¿Cómo podemos conocer la forma de la distribución y, por lo tanto, cuáles son los resultados esperados? Puesto que las inferencias que vamos a hacer implican el conocimiento de la forma de la distribución de la muestra, es necesario conocer un cierto número de modelos ideales. La curva normal y la distribución binomial son dos modelos cuyas propiedades matemáticas son bien conocidas. En consecuencia, estas dos distribuciones se emplean con frecuencia como modelos para la descripción de algunas distribuciones particulares.

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL.

Ejemplo para la construcción de la Distribución Binomial:

La determinación del sexo de un recién nacido tiene dos posibilidades, que sea varón o mujer. Si en una familia se planea el nacimiento de dos bebes, hay cuatro maneras diferentes en el orden de dichos nacimientos, a saber:

varón-varón varón-mujer mujer-varón mujer-mujer

Los resultados centrales pueden formarse como un mismo resultado ya que cada uno de ellos representa a un varón y a una mujer.

Obteniéndose así la siguiente distribución teórica de frecuencias.

RESULTADOS	NÚMERO DE VECES EN QUE OCURRE EL RESULTADO ESPECIFICO.
(2) VARÓN-VARÓN	UNA VEZ
(1) VARÓN-MUJER, (1) MUJER-VARÓN	DOS VECES
(2) MUJER-MUJER	UNA VEZ
TOTAL	**CUATRO VECES**

Debe notarse que en N nacimientos existen N+1 diferentes resultados y 2^N maneras diferentes de obtener estos N+1 resultados diferentes. Así, cuando N=2 existen cuatro maneras diferentes de obtener los tres diferentes resultados posibles.

Podemos cálcular la posibilidad asociada a cada resultado dividiendo el número de maneras en que cada resultado puede ocurrir entre 2^N. Usando la distribución de probabilidad.

$$P(A) = \frac{\text{Número de resultados favorables al suceso A}}{\text{Número total de sucesos}}$$ [9]

La posibilidad de obtener un varón y una mujer en dos nacimientos es:

$$P(1v, 1m) = 2/4 = 0.50$$

Para poder cálcular la probabilidad de cada resultado, tendríamos que enumerar todas las formas posibles en las cuales ocurren dos resultados. A medida que N aumenta, el proceso de enumeración llega a ser excesivo puesto que el número de formas en que los resultados ocurren (2^N) se duplican con cada nacimiento adicional.

Un método alternativo de obtener la distribución de la muestra de probabilidades para una población consiste de dos categorías mutuamente exhaustivas y exclusivas ($P + Q = 1.00$) está dado por la expansión binomial.

$$(P+Q)^N = P^N + \frac{NP^{N-1}Q^1}{1} + \frac{N(N-1)P^{N-2}Q^2}{(1)(2)} + \frac{N(N-1)(N-2)P^{N-3}Q^3}{(1)(2)(3)} + \ldots + Q^N$$

Existen N+1 términos a la derecha de la ecuación anterior, que representa cada uno un resultado diferente posible. El primer término a la derecha de la ecuación (P^N) proporciona la probabilidad de todos los eventos en la categoría P; y, finalmente, el último término (Q^N) es la probabilidad de todos los sucesos en la categoría Q.

Para ilustrar la expansión binomial, basémonos en el siguiente ejemplo de aplicación: Supongamos que hay 5 nacimientos en una familia, puesto que hay dos posibilidades para determinar el sexo de cada nacimiento, entonces la probabilidad de que sea varón es de ½ y la probabilidad de que sea mujer es de ½ , es decir, $P(v) = P(m) = ½$

Cuando N= 5, Hay 6 resultados posibles, es decir N+1= 5+1, entonces de la fórmula anterior:

$$(v+m)^5 = v^5 + \frac{5v^{5-1}m^1}{1} + \frac{5(5-1)v^{5-2}m^2}{(1)(2)} + \frac{5(5-1)(5-2)v^{5-3}Q^3}{(1)(2)(3)} + \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)v^{5-4}m^4}{(1)(2)(3)(4)} + m^5$$

$$(v+m)^5 = (1/2)^5 + \frac{5(1/2)^4(1/2)^1}{1} + \frac{5(4)(1/2)^3(1/2)^2}{(1)(2)} + \frac{5(4)(3)(1/2)^2(1/2)^3}{(1)(2)(3)} + \frac{5(4)(3)(2)(1/2)^1(1/2)^4}{(1)(2)(3)(4)} + (1/2)^5$$

$$(v+m)^5 = (1/2)^5 + 5(1/2)^4(1/2)^1 + 10(1/2)^3(1/2)^2 + 10(1/2)^2(1/2)^3 + 5(1/2)^1(1/2)^4 + (1/2)^5$$

---

[9] Aquellos sucesos favorales a A más aquellos sucesos no favorables a A.

$$(v+m)^5 = 1(1/2)^5 + 5(1/2)^5 + 10(1/2)^5 + 10(1/2)^5 + 5(1/2)^5 + 1(1/2)^5$$

$$(v+m)^5 = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32}$$

$$(v+m)^5 = 0.031 + 0.156 + 0.312 + 0.312 + 01.56 + 0.031$$

A los numeradores de las fracciones en la tabla (**1, 5, 10, 10, 5, 1**) generalmente se les llama coeficientes de la expansión binomial. Estos coeficientes corresponden exactamente a la frecuencia de ocurrencia de cada resultado. y además las probabilidades de cada uno de los resultados posibles a partir de la expansión binomial se dá dividiendo a cada coeficiente entre la suma toral de todos ellos.[10]

Estos coeficientes de la expansión decimal corresponden exactamente a los enteros que forman el Triángulo de Pascal, el cual se trata de una disposición triángular de números cuyos lados izquierdo y derecho son todos (1), y donde cada número es la suma de los dos inmediatamente superiores. Simbólicamente se tiene que: $\begin{array}{ccc} g & & d \\ & g+d & \end{array}$

Por ejemplo: $\begin{array}{cccc} & 1 \; 2 \; 1 & \\ 1 & 3 \; 3 & 1 \end{array}$

TRIÁNGULO DE PASCAL

$(P+Q)^0$	**1**
$(P+Q)^1$	**1 1**
$(P+Q)^2$	**1 2 1**
$(P+Q)^3$	**1 3 3 1**
$(P+Q)^4$	**1 4 6 4 1**
$(P+Q)^5$	**1 5 10 10 5 1**
$(P+Q)^6$	**1 6 15 20 15 6 1**
$(P+Q)^7$	**1 7 21 35 35 21 7 1**
$(P+Q)^8$	**1 8 28 56 70 56 28 8 1**
$(P+Q)^9$	**1 9 36 84 126 126 84 36 9 1**
$(P+Q)^{10}$	**1 10 45 120 210 256 210 120 45 10 1**

El Triángulo de Pascal, nos facilitará el hecho de poder cálcular las frecuencias de ocurrencia de cada resultado, así como las probabilidades correspondientes a los resultados posibles.

---

[10] 1+5+10+10+5+1 =32

LAS CONGRUENCIAS (mod 2) DEL TRIÁNGULO DE PASCAL.

Al trabajar con los enteros ***módulo m*** esencialmente se realizan las operaciones ordinarias de la aritmética, pero pasando por alto los múltiplos de m. Bajo un aspecto no se distingue entre a y $a + mx$, donde x es un entero cualquiera. Dado cualquier entero a, sea q y r el cociente y el residuo en la división de a por m: por tanto, por el algoritmo[11] de la división que dice:

Dados dos enteros cualesquiera a y b, con $a>0$ existen los enteros q y r tales que $b= qa + r$. Si a / b, (a es dividido por b) entonces r satisface las desigualdades $0<r<a$.

En la práctica, el cociente q y el residuo r se obtienen mediante la división aritmética de a entre b. Si $a = qm + r$, entonces $a \equiv r \ (mod\ m)$ y, dado que r satisface las desigualdades $0 \leq r < m$.

Se ve que todo entero es congruente ***módulo m*** para uno de los valores $0, 1, 2, \ldots, m-1$. No existen dos de estos enteros m que sean congruentes ***mod m***. Estos valores m constituyen un sistema completo de residuos ***mod m*** y a continuación se dará una definición general de éste término.

Definición:
Si $x \equiv y \ (mod\ m)$, entonces y recibe el nombre de residuo de x ***módulo m***.
Un conjunto $x_1, x_2, \ldots, x_m$ es un residuo completo de residuos ***módulo m*** si para todo entero y existe uno y solamente un x_j tal que $y \equiv x_j \ (mod\ m)$

Existe un número infinito de sistemas completos de residuos ***módulo m.*** Siendo otro ejemplo el conjunto $1,2,3,\ldots,m-1$.

Un conjunto de enteros forma un sistema completo de residuos ***módulo m*** si y solamente si no se tienen dos enteros en el conjunto que sean congruentes ***módulo m***. Una congruencia no es otra cosa que una afirmación acerca de la divisibilidad.

Definición:
Si un entero m, diferente de cero, divide a la diferencia $a - b$, se dice que a es congruente con ***b mod m*** y se escribe $a \equiv b (mod\ m)$. Si $a - b$ no es divisible entre m, se dice que a no es congruente con ***b módulo m*** y en este caso se escribe $a \not\equiv b (mod\ m)$.

Las congruencias tienen muchas propiedades en común con las igualdades. Algunas de las propiedades que se deducen fácilmente a partir de la definición se dan en el siguiente teorema.

[11] Un algoritmo es un procedimiento o método matemático que se realiza para obtener un resultado.

Teorema.
Supóngase que a,b,c,d,x,y, denotan enteros. Entonces

a) $a \equiv b \ (mod\ m)$, $b \equiv a \ (mod\ m)$ y $a - b \equiv 0 \ (mod\ m)$ son proposiciones equivalentes.
b) Si $a \equiv b \ (mod\ m)$, $b \equiv c \ (mod\ m)$, entonces $a \equiv c \ (mod\ m)$.
c) Si $a \equiv b \ (mod\ m)$ y $c \equiv d \ (mod\ m)$, entonces $ax + cy \equiv bx + dy \ (mod\ m)$
d) Si $a \equiv b \ (mod\ m)$ y $c \equiv d \ (mod\ m)$, entonces $ac \equiv bd \ (mod\ m)$.
e) Si $a \equiv b \ (mod\ m)$ y $d \setminus m$, $d>0$, entonces $a \equiv b \ (mod\ d)$.

Aplicando los resultados a los enteros que forman el Triángulo de Pascal, las congruencias en ***mod 2*** se obtienen a partir de que si un entero x del Triángulo de Pascal es par, debe de satisfacer la congruencia $x \equiv 0 \ (mod\ 2)$. Si un entero y del Triángulo de Pascal es impar, entonces debe de satisfacer la congruencia $y \equiv 1 \ (mod\ 2)$. Así es como construiremos las **congruencias *(mod 2)* del Triángulo de Pascal.**

TRIÁNGULO DE PASCAL

$(P+Q)^0$	1
$(P+Q)^1$	1 1
$(P+Q)^2$	1 2 1
$(P+Q)^3$	1 3 3 1
$(P+Q)^4$	1 4 6 4 1
$(P+Q)^5$	1 5 10 10 5 1
$(P+Q)^6$	1 6 15 20 15 6 1
$(P+Q)^7$	1 7 21 35 35 21 7 1
$(P+Q)^8$	1 8 28 56 70 56 28 8 1
$(P+Q)^9$	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
$(P+Q)^{10}$	1 10 45 120 210 256 210 120 45 10 1

LAS CONGRUENCIAS (mod 2) DEL TRIÁNGULO DE PASCAL.

1
1 1
1 0 1
1 1 1 1
1 0 0 0 1
1 1 0 0 1 1
1 0 1 0 1 0 1
1 1 1 1 1 1 1 1
1 0 0 0 0 0 0 0 1
1 1 0 0 0 0 0 0 1 1
1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1

Se puede representar como sigue:
Si **p** y **q** son elementos del triángulo de Pascal, entonces **(p+q) ≡ 0 (mod 2)** si **p+q** es número **par.**
Si **(p+q) ≡ 1 (mod 2)** entonces **p+q** es un número **impar**

LA MATEMÁTICA EN LA TELEGRAFÍA.

En 1835, en Estados Unidos Samuel Finley Breeze Morse propuso un dispositivo de registro fundamentado con una señalación de sonidos cortos y sonidos largos recibidos en forma de perforaciones -puntos y rayas- efectuados por un electroimán, ensayado por primera vez en 1844 en la línea experimental Washington--Baltimore, el primer mensaje fue *"what hath god wrought ?"*

CODIGO MORSE ORIGINAL		CODIGO MORSE INTERNACIONAL	
A	. _	A	. _
B	_ . . .	B	_ . . .
C	. . .	C	_ . _ .
D	_ . .	D	_ . .
E	.	E	.
F	. _ .	F	. . _ .
G	_ _ .	G	_ _ .
H	. . . .	H	. . . .
I	. .	I	. .
J	_ . _ .	J	. _ _ _
K	_ . _	K	_ . _
L	——	L	. _ . .
M	_ _	M	_ _
N	_ .	N	_ .
O	. .	O	_ _ _
P	. . . . .	P	. _ _ .
Q	. . _ .	Q	_ _ . _
R	. . .	R	. _ .
S	. . .	S	. . .
T	_	T	_
U	. . _	U	. . _
V	. . . _	V	. . . _
W	. _ _	W	. _ _
X	. _ . .	X	_ . . _
Y	. . . .	Y	_ . _ _
Z	. . . .	Z	_ _ . .

El telégrafo eléctrico, inventado por Samuel F. Morse, fue introducido a México por Juan de la Granja, empezando a funcionar el 5 de noviembre de 1851.

La telegrafía es la transmisión a distancia de la escritura de textos, con la ayuda de un soporte físico que, ordinariamente, es de tipo eléctrico, aunque también puede ser óptico o acústico. No existe la transmisión del documento físico, sino sólo del contenido del mensaje escrito y, contrariamente a la televisión donde la imagen es fugitiva, queda en la telegrafía, a la recepción; un documento o traza permanente.
El principio fundamental de la telegrafía es la codificación, en donde, las señales telegráficas son binarias. El código morse consiste en sustituir las letras y cifras por conjuntos de líneas y puntos que, naturalmente ocupaban espacios variables según las características del mensaje y el número de signos elementales que contenía. La duración de la línea equivale a la de tres puntos, el intervalo entre dos señales, a un punto; entre dos letras, a tres puntos, y entre dos palabras, a cinco puntos.

Los signos del código morse, en grupos bien ordenados de no más de cuatro, permite treinta especificaciones distintas. Ahora, si se permitiera el uso de un tercer signo, además del punto y de la raya, y empleáramos grupos de no más de diez, se podrían formar 29524 "caracteres distintos"; con cinco signos y grupos de hasta veinticinco, el número de caracteres es de 372 529 029 846 191 405 (trescientos setenta y dos mil quinientos veintinueve billones veintinueve mil ochocientos cuarenta y seis millones ciento noventa y un mil cuatrocientos cinco). En el código morse se ha empleado el análisis combinatorio.

Cada una de las ordenaciones que pueden formarse tomando algunos o todos los elementos de un conjunto se llama variación. Las diversas ordenaciones de todos los elementos, se llaman permutaciones. Dos ordenaciones cualesquiera contienen los mismos objetos y difieren solamente en el orden en que están colocados.

LOS NÚMEROS DÍGITOS

1	. - - .	1	. - - - -
2	. . - . .	2	. . - - -
3	. . . - .	3	. . . - -
4	. . . . -	4	. . . . -
5	- - -	5	. . . . .
6	. . . . . .	6	- . . . .
7	- - . .	7	- - . . .
8	-	8	- - - . .
9	- . . -	9	- - - - .
0	——	0	- - - - -

OTROS SÍMBOLOS

.	. . - - . .	.	. - . - . -
,	. - . -	,	- - . . - -
?	- . . - .	?	. . - - . .
:	- . - . .	:	- - - . . .
;	. . . . .	;	- . - . - .
-	. . . . . - . .	-	- . . . . -
/	. . - -	/	- . . - .
"	. . - . - .	"	. - . . - .

Cada uno de los grupos que pueden formarse tomando algunos o todos los elementos de un conjunto, de modo que dos cualesquiera de ellos difieran en algún objeto se llama combinación. Así, el número de variaciones que pueden formarse tomando los símbolos (.,-) de dos en dos, son dos, a saber, . -, - .

Para formar combinaciones sólo nos interesa el número de elementos que contiene cada selección, mientras que al formar variaciones tenemos que considerar también el orden de los elementos que forman cada ordenación; por ejemplo, si de cuatro letras **a,b,c,d,** hacemos una selección de tres, como **abc**, ésta única combinación admite ser ordenada de las siguientes maneras: **abc,acb,bca,bac,cab,cba** y así da lugar a seis variaciones diferentes.

Definiciones.

Si una operación puede efectuarse de **m** maneras, y (cuando ha sido efectuada por cualquiera de esas maneras) una segunda operación puede efectuarse de **n** maneras; las dos operaciones se podrán efectuar de $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ maneras.

El número de variaciones de **n** objetos diferentes tomados de **r** en **r**, es equivalente a cálcular el número de maneras de que podemos llenar **r** lugares cuando tenemos **n** objetos diferentes a nuestra disposición. Ésto está dado por $n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots$ hasta **r** factores, y el factor de lugar **r** es $n-(r-1)$, ó también $n-r+1$. Por lo tanto, el número de variaciones de **n** objetos tomados de **r** en **r** es $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$ y se designa como $^{n}V_{r}$

El número de variaciones de **n** objetos tomados todos a un tiempo, es decir, el número de permutaciones de **n** objetos, es **n(n-1)(n-2)...** hasta **n** factores; o sea, **n(n-1)(n-2)...3.2.1**; al cual designamos como $\mathbf{P_n = n!}$ (**n** factorial)

Al número de combinaciones de **n** objetos diferentes tomados de **r** en **r** lo designamos por $^{n}\mathbf{C_r}$. Cada una de éstas combinaciones consta de un grupo de **r** objetos diferentes que pueden ser ordenados entre sí de **r!** maneras.

Por consiguiente, $^{n}\mathbf{C_r} \times \mathbf{r!}$ es igual al número de variaciones de n objetos tomados de **r** en **r**; esto es, $^{n}\mathbf{C_r} \times \mathbf{r!} = {}^{n}\mathbf{V_r} = \mathbf{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}$; de donde $^{n}\mathbf{C_r} = \dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!}$

El número de combinaciones de **n** objetos tomados de **r** en **r** es igual al número de combinaciones de **n** objetos tomados de **n-r** en **n-r**.

Para hacer todas las combinaciones posibles de **n** objetos para cada grupo de **r** objetos que han sido seleccionamos, se ha dejado un grupo correspondiente de **n-r** objetos; es decir el número de combinaciones de **n** objetos tomados de **r** en **r** es el mismo que el número de combinaciones de **n** objetos tomados de **n-r** en **n-r**. Es decir, $^{n}\mathbf{C_r} = {}^{n}\mathbf{C_{n-r}}$

Utilizando éstas definiciones del análisis combinatorio podemos justificar no sólo el código Morse, sino además podemos crear algún código con el número de símbolos que queramos.

ALGUNOS ASPECTOS DE LA GEOMETRÍA.

CUADRO SINÓPTICO

El objetivo del estudio de la geometría implica que debemos saber y trazar geometría para después aplicarla a nuestra vida cotidiana.
Algunas clases de geometría son:

-Práctica o empírica. Ésta geometría la aprendió la humanidad con la práctica y nació de la necesidad de construcción y la medición. Los pueblos que la usaron fueron los Egipcios, Sumerios, Mayas, Aztecas, entre otros.

-Teórica o lógica. Ésta geometría tiene su origen en Grecia, está basada, toda ella en un razonamiento lógico y deductivo de los cinco postulados de Euclides. Es un monumento de deducción intelectual. La negación del quinto postulado de Euclides da origen a las geometrias No Euclidianas, teniendo su origen en Lovachevsky.

-Absoluta. Reconocida por primera vez por Bolyai (1802-1860) es la parte de la geometria euclidiana que depende solamente de los primeros cuatro postulados. El motivo de estudiar la geometría absoluta consiste en que estas proposiciones no solamente son válidas en la geometria euclidiana sino en la hipérbolica.

-Afín. Reconocida por primera vez por Euler (1707-1783), la paralela única tiene un papel muy importante . Los postulados tercero y cuarto de Euclides pierden su sentido, pues nunca se mencionan los círculos ni se miden los ángulos. De hecho, las únicas isometrías admisibles son los semigiros y las traslaciones.

La importancia de la geometría afín ha sido subrayada recientemente por la observación de que sus posiciones no son válidas solamente en la geometría euclidiana sino en la geometría de Minkowski del tiempo y del espacio, y que Einstein empleará en su teoria restringida de la relatividad.

-Analítica. Se puede describir como la representación de los puntos del espacio n-dimensional por medio de conjuntos ordenados de n (o más) números que se llaman coordenadas.

-Conforme. La inversión es una transformación del espacio inversivo (o "conforme"), que se deriva del espacio euclidiano mediante el postulado del punto en el infinito, que pertenece a todos los planos y rectas.

Los Egipcios tuvieron un conocimiento práctico de la geometría, debido a que las inundaciones periódicas del Nilo borraban todos los linderos y cada año era necesario medir de nuevo los terrenos. Éstos conocimientos fueron utilizados en la construcción de las pirámides y templos. Los griegos estudiaron la geometría egipcia, la ordenaron y le dieron una presentación lógica.

La geometría es la parte de la matemática que estudia las propiedades de la forma, tamaño y posición de los cuerpos. Un ***sólido, volumen o cuerpo geométrico***; es la porción limitada de materia, en las que se consideran tres dimensiones: *largo, ancho y profundidad.*

Una ***figura geométrica*** es toda representación de *punto, líneas, superficies o volúmenes*.

Una ***unidad*** es una cantidad conocida con la cual se comparan todas las cantidades de la misma especie. Un ***punto*** es la intersección o corte de dos líneas. Carece de extensión. No tiene ni largo ni ancho. La ***línea*** es la trayectoria que describe un punto en movimiento.

POSTULADOS DE EUCLIDES.
-Por dos puntos puede trazarse una y sólo una recta.
-Una recta puede prolongarse indefinidamente en ambos sentidos.
-Una circunferencia puede describirse con un centro y un segmento.
-Todos los ángulos rectos son congruentes entre sí.
-Por un punto exterior a una recta pasa una y solamente una recta paralela a ella.[12]

LAS SECCIONES CÓNICAS

Los matemáticos tienen la costumbre de dedicarse a investigar y estudiar nociones y conceptos que parecen perfectamente inútiles, casi por simple diversión; con frecuencia, pasados varios siglos, sus estudios resultan de enorme valor científico. No hay a éste respecto mejor ejemplo que el estudio de los antiguos griegos realizados acerca de las curvas de segundo grado no circulares: la *Elipse*, la *Hipérbola* y la *Parábola*. Fue Apolonio de Pergamo, geómetra griego del siglo III a.C. el autor del más importante tratado sobre las cónicas. En su obra demuestra por primera vez como podían obtenerse las tres curvas, además del círculo. Cortando un mismo cono con un plano orientado de diversos modos.

[12] Ver Apéndice, acerca de la negación del Quinto Postulado de Euclides.

En el **libro I de *De las cónicas*** aparecen las siguientes definiciones básicas:

1. Si desde un punto que no se encuentra en el plano de un círculo, se traza una recta a la circunferencia de éste, se prolonga en ambas direcciones y se hace que recorra la circunferencia, permaneciendo fijo el punto, hasta que llegue a su posición inicial, se llama ***superficie cónica*** a la que, descrita por la recta, se compone de dos superficies opuestas por el vértice que se extiende indefinidamente, lo mismo que la recta que describe, se llama ***vértice*** de la superficie al punto fijo y ***eje*** a la recta determinada por éste y el centro del círculo.

2. Se llama ***cono*** a todo sólido limitado por una superficie cónica y por un plano que corta todas las generatrices. La superficie cónica se llama *superficie lateral* del cono, y su vértice, *vértice* del cono. La *base* del cono es la superficie plana. Las *generatrices* del cono son las de la superficie cónica que lo limita. La *altura* de un cono es la longitud de la perpendicular del vértice al plano de la base: o sea, la distancia del vértice a la base.

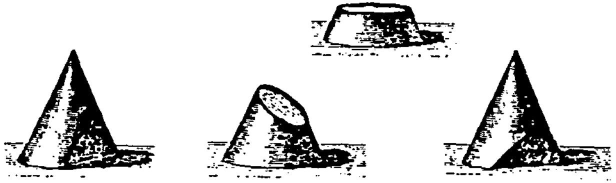
3. Se llama ***cono recto*** al cono que tiene el eje perpendicular a la base y ***oblicuo*** (o escaleno) al que no tiene el eje perpendicular a la base.

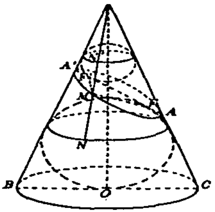
4. Se llama ***diámetro*** de toda curva a aquel que se encuentra en un mismo plano a la recta que al trazarse en la curva, divide en dos partes iguales a todas las paralelas a una recta cualquiera trazadas en la curva. El *vértice* de ésta curva es el extremo del diámetro que se localiza en la curva y se conoce como paralelas a las rectas trazadas en orden sobre el diámetro.

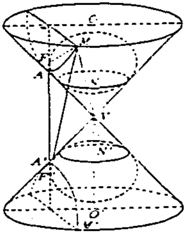
5. Se llama ***diámetros conjugados*** de una y dos curvas a cada una de las rectas que son un diámetro y dividen en dos partes iguales a las paralelas del otro.

Concluye con dos definiciones más y prosigue con sesenta proposiciones.

De las definiciones podemos apreciar que Apolonio considera los dos mantos de un cono y procede a estudiar las figuras obtenidas al seccionar el cono con el plano.





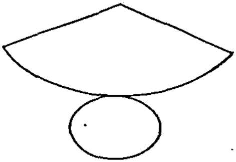


A cada curva así obtenida la relacionará con un determinado diámetro y con una familia de curvas conjugadas con respecto al mismo diámetro. De las clases de curvas obtenidas considerará como secciones cónicas a las figuras cónicas a las cuales los diámetros son perpendiculares a las cuerdas conjugadas a los mismos.

PROPIEDADES DEL CONO.

1. Si se corta un cono circular por un plano paralelo a la base, la razón de las áreas de la sección y de la base es igual al cuadrado de la razón de sus distancias al vértice del cono.

2. El desarrollo de la superficie de un cono de revolución es igual a la suma de un sector circular, cuyo radio es la generatriz del cono y cuyo arco es igual a la circunferencia de la base del mismo cono, más la superficie de la base.



ÁREA DE UN CONO DE REVOLUCIÓN.

1. El área lateral de un cono recto de revolución es igual al semiproducto de la longitud de la circunferencia de la base por la generatriz.

Si con *l* se designa la generatriz, se tiene:

$$L=\pi rl.$$

2. El área total es igual al área lateral más el área de la base:

$$T = \pi rl + \pi r^2 = \pi r\ (l+r)$$

VOLUMEN DE UN CONO CIRCULAR.

El volumen de un cono circular, sea recto u oblicuo, es igual al tercio del producto de la base por la altura.

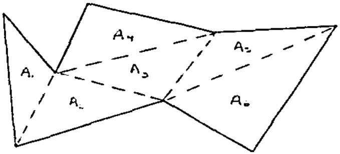
Sea ***a*** la altura, entonces:

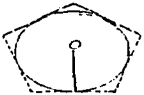
$$V = 1/3\ \pi r^2 a$$

LA CIRCUNFERENCIA

Uno de los conceptos más importantes de la matemática es el concepto de función, la idea de interdependencia de dos cantidades surgió aparentemente en Grecia, siendo las cantidades sólo de una naturaleza geométrica.

Los orígenes del cálculo se remontan por lo menos a 2500 años, con los antiguos griegos, quienes calcularón áreas empleando el "método de exhaución". Ellos sabían como cálcular el área de cualquier polígono dividiéndolo en triángulos y sumando áreas de los mismos.





Un problema que implica mayor dificultad es el encontrar el área de una figura limitada por curvas. Su método de exhaución consistía en inscribir un polígono alrededor de la misma y luego hacer que el número de lados de los polígonos aumentara. De aquí tenemos el siguiente teorema:
El área de un círculo es igual a la mitad del producto de la circunferencia por el radio.

Sean **r,c,s.** respectivamente el radio, la circunferencia y el área de un círculo. Por demostrar que: **s=1/2cr**[13]

En consecuencia del anterior teorema se desprenden los siguientes corolarios:

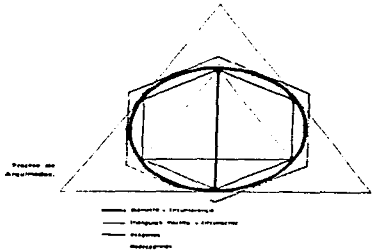
-El área de un círculo es igual a Πr^2, en efecto, $s = \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}r(2\Pi r) = \Pi r^2$

-Las áreas de dos círculos cualesquiera son entre sí como los cuadrados de los radios.

-El área de un sector circular es igual a la mitad del producto del arco por el radio.

ARQUÍMEDES Y EL NÚMERO Π

La circunferencia es una de las figuras más antiguas en matemáticas. La recta es la línea más simple, pero la circunferencia es la más simple de las curvas. Se le considera a menudo, como el límite de un polígono con un número infinito de lados. Se podrá observar que a medida que se inscribe en una circunferencia una serie de polígonos regulares en la que cada uno de estos tiene más lados que su antecesor, éste tiende a semejarse más y más a una circunferencia.



[13] Ver Apendice. Demostración del teorema.

Una circunferencia puede ser considerada como el límite de los polígonos de un número creciente de lados que pueden inscribirse sucesivamente en ella, o circunscribirse alrededor de ella.

Arquímedes demostró mediante 96 polígonos regulares inscritos y circunscritos a una circunferencia de radio igual a 1, que el número ∏ es menor que **3 1/7** y mayor que **3 10/71**. en algúna parte entre ambos números , se encuentra el número ∏ que es igual a la longitud de la circunferencia.

APROXIMACIONES SUCESIVAS AL VALOR DE ∏ OBTENIDAS POR EL MÉTODO DE ARQUÍMEDES			
CÍRCULO DE DIÁMETRO UNIDAD			
NÚMERO DE LADOS	**PERÍMETRO DE LOS POLÍGONOS INSCRITOS**	**PERÍMETRO DE LOS POLÍGONOS CIRCUNSCRITOS**	**MEDIA ARITMÉTICA**
3	**2.598076211**	**5.196152423**	**3.897114317**
6	**3.000000000**	**3.464101615**	**3.232050808**
12	**3.10582854**	**3.215390309**	**3.160609425**
24	**3.132628609**	**3.159659942**	**3.146144275**
48	**3.139350191**	**3.146086215**	**3.142718203**
96	**3.141031877**	**3.1427146**	**3.141873238**
192	**3.141452344**	**3.14187305**	**3.141662697**
384	**3.141556312**	**3.141662747**	**3.141609529**
768	**3.141579076**	**3.141610176**	**3.141594626**
1536	**3.141587525**	**3.141597034**	**3.14159228**
3072	**3.14148614**	**3.141593748**	**3.1415539944**
SIGUIENDO INDEFINIDAMENTE	**3.1415927**	**3.1415927**	**3.1415927**

LO TRASCENDENTE DEL NÚMERO ∏[14]

La aproximación dada para el número ∏ por Arquímedes es considerablemente más perfecta que la dada por la Biblia. En el *Libro de los Reyes y en las crónicas*, se asigna al número ∏ el valor de 3.

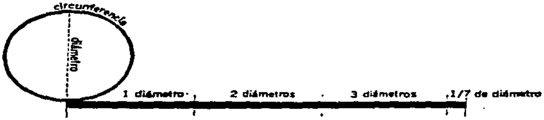
Los matemáticos egipcios dieron un valor más aproximado: 3.16; en los tiempos de Ptolomeo, (150 a.C.) se usaba para el número ∏ el valor de 3.1416

[14] Ver Apéndice. Aplicación del número ∏ en la computación

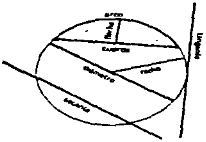
Simón Newcomb, astrónomo y matemático norteamericano dijo "diez cifras decimales son suficientes para dar la circunferencia de la Tierra hasta una fracción de una pulgada, y treinta decimales darían la circunferencia de todo el Universo visible hasta una cantidad imperceptible con el más poderoso telescopio."

Lindermann demostró que el número Π no solamente no es la raíz de una ecuación algebraica de primero o segundo grado, sino tampoco es la raíz de ningúna ecuación algebraica (con coeficientes enteros), no importa que tan grande sea el grado; en consecuencia el número Π es un número trascendente.

El número Π, es la razón de la circunferencia de un círculo y su diámetro.



PRINCIPALES LÍNEAS DE LA CIRCUNFERENCIA.



1.) ***Radio***, es la recta trazada desde el centro del círculo a la circunferencia.
2.) ***Diámetro***, es la recta que pasa por el centro y termina en la circunferencia, la divide en dos partes iguales. El diámetro mide el doble del radio.
3.) ***Cuerda***, es la línea trazada desde un punto a otro de un arco de círculo.

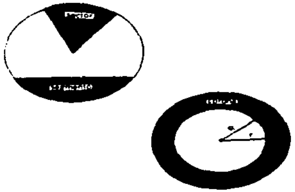
4.) ***Flecha o sagita***, es la recta que une la mitad del arco con la mitad de la cuerda que la subtiende.
5.) ***Secante***, es toda recta que corta un círculo: en realidad, es una cuerda prolongada.
6.) ***Tangente***, es una recta que toca a la circunferencia en un solo punto.como límite de rectas secantes, cuando los puntos de intersección de estas con la circunferencia tienden al otro punto de intersección fijo.

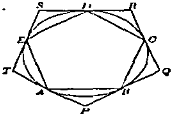
CÍRCULO, es la superficie plana contenida dentro de la circunferencia, y las partes que se consideran dentro de él son:

Sector circular, es la parte del círculo limitada por dos radios y el arco comprendido entre sus extremidades.

Segmento circular, es la parte de un círculo comprendida entre un arco y su cuerda.

Corona circular, es la porción de círculo comprendida entre dos circunferencias concéntricas.





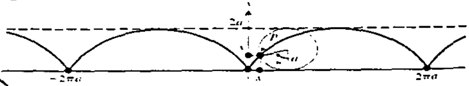
Sea $\mathbf{A_n}$ el área de un polígono inscrito de **n** lados. Cuando **n** aumenta, el valor de $\mathbf{A_n}$ se hace más y más cercano al área del círculo. Se dice que el área del círculo es el límite de las áreas de los polígonos inscritos y se escribe como $A = \lim_{n \to \infty} A_n$

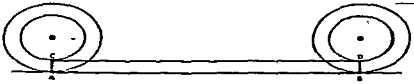
LA CICLOIDE

Consideremos la curva plana que un punto ***p*** de un círculo de radio ***a*** traza cuando el círculo rueda sin deslizarse a lo largo de una recta fija. Esta curva es una ***cicloide.***

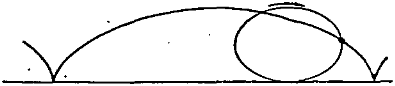
Se supone que el punto ***p*** del círculo toca a la recta fija que llamaremos **eje x** en los puntos **0 y ± 2n ∏a** al rodar sin deslizarse a lo largo del eje.

El círculo de la figura ha dado una revolución completa al rodar de **0** hasta **2∏a.** La distancia **2∏a** es, por lo tanto, igual a la longitud de la circunferencia del círculo.



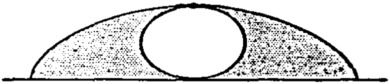


El círculo más pequeño, situado dentro del mayor, ha efectuado también una rotación completa recorriendo la distancia **CD**. Como la distancia **CD** es igual a la distancia **AB** y cada distancia es aparentemente igual a la circunferencia del círculo que la ha desarrollado, nos enfrentamos con el absurdo de que la circunferencia del círculo pequeño es igual a la circunferencia del círculo mayor. Para resolver ésta paradoja es necesario conocer a la curva llamada *cicloide.*

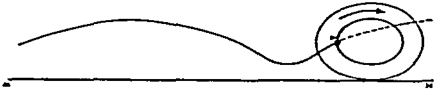


La conducta de la cicloide explica el hecho de que cuando una rueda está en movimiento, la parte más alejada del suelo se mueve en un instante dado en dirección horizontal y más rápidamente que la parte en contacto con el suelo.

Puede verse que cuando el punto de la rueda en contacto con el camino empieza a elevarse, se mueve cada vez con más velocidad, alcanzando su máxima velocidad horizontal cuando su posición está más alejada del suelo.

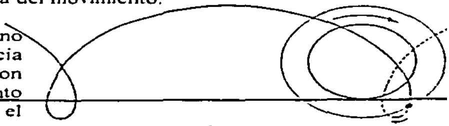


Con ayuda de la cicloide podemos construir el área exactamente igual al área del círculo dado. Basándonos en el hecho de que la longitud en una cicloide de cresta a cresta es igual a cuatro veces la longitud del diámetro del círculo generador. Puede verse que el área limitada por la porción de cicloide entre las dos crestas es la línea recta que une a las crestas y es igual a tres veces el área del círculo. De lo que se deduce que el área a cada lado del círculo central es exactamente igual al área del mismo círculo.

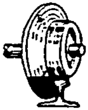


Un punto sobre la circunferencia de un círculo menor describe la cicloide alargada (tracoide) cuando el círculo mayor que lo contiene rueda sin resbalar.

Se debe señalar que el centro de un círculo, al ser un punto matemático, es decir, sin dimensiones no gira en absoluto, sino que la rueda lo transporta en su recorrido sobre el plano, con una trayectoria recta paralela a la recta del movimiento.



Es interesante mencionar además que, el camino recorrido por un punto fuera de la circunferencia de una rueda, tal como el extremo de la rueda con reborde que se usa en los ferrocarriles. Un punto de este tipo no está en contacto con el riel sobre el cual gira la rueda. La curva generada se denomina cicloide acortada y explica la curiosa paradoja de que, en cualquier instante de tiempo, un tren nunca se mueve enteramente en la dirección en que le arrastra la maquina. ¡Hay siempre partes del tren que se mueven en sentido opuesto!



Parametrizar a la *ciloide* en términos del ángulo θ, a través del cual rueda el círculo, a partir de θ = 0 y con *p* en el origen, se hace de la siguiente manera:

Se supone que θ es positivo cuando el círculo rueda hacia la derecha. A partir de la primera figura de la cicloide, se tienen

$$x = a\theta - a\ sen\ \theta$$
$$y = a - a\ cos\ \theta$$

que son las ecuaciones parametricas deseadas.

De las ecuaciones

$$x = a\theta - a\ sen\ \theta$$
$$y = a - a\ cos\ \theta$$

eliminando el parámetro θ puede obtenerse la ecuación de la curva en forma no paramétrica a costa, sin embargo, de la claridad de la expresión se tiene que

$$\cos\theta = \frac{a-y}{a}, \theta = \arccos\frac{a-y}{a}; \text{sen}\,\theta \pm \sqrt{1-\frac{(a-y)^2}{a^2}}$$

y por lo tanto $x = a \bullet \arccos\frac{a-x}{a} \mp \sqrt{y(2a-y)}$ obteniéndose así x como una función de y;

se tiene entonces que $x = a(1-\cos\theta), y = a\,\text{sen}\,\theta$.

y para la longitud de arcos se tiene $s = \int_0^\alpha \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,d\theta = \int_0^\alpha \sqrt{2a^2(1-\cos\theta)}\,d\theta$

puesto que $-\cos\theta = 2\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2}$,

el integrando es igual a $2a\,\text{sen}\frac{\theta}{2}$ y, por consiguiente,

con $0 \le \alpha \le 2\pi$, se tiene $s = 2a\int_0^\alpha \text{sen}\frac{\theta}{2}\,d\theta = -4a\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^\alpha = 4a\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right) = 8a\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}$,

si en particular, se considera la longitud del arco entre dos cúspides sucesivas, debe tomarse $\alpha = 2\pi$ ya que; el intervalo $0 \le \theta \le 2\pi$ de los valores del parámetro corresponde a una revolución del circulo giratorio. Así se obtiene el valor **$8a$**; esto es, la longitud de arco de la cicloide entre dos cúspides sucesivas es igual a cuatro veces el diámetro del círculo giratorio.

De manera análoga se cálcula el área limitada por un arco de la cicloide y el eje x:

$$I = \int_0^{2\pi} y\dot{x}\,d\theta = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta = a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta = a^2\left(\theta - 2\,\text{sen}\,\theta + \frac{\theta}{2} + \text{sen}\frac{2\theta}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} = 3a^2\pi$$

ésta área es, por consiguiente, tres veces el área del círculo giratorio.

Para el radio de curvatura $|\rho| = 1 / |k|$ se tiene por la ecuación para la curvatura

$$k = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dot\alpha}{\dot s} = \frac{\dot x\ddot y - \dot y\ddot x}{(\dot x^2 + \dot y^2)^{3/2}}\text{, en donde; } \dot\alpha = \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{\dot x\ddot y - \ddot x\dot y}{\dot x^2 + \dot y^2},$$

y en donde; $\dot s = \dfrac{ds}{d\theta} = \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}$

y que para $\rho = \dfrac{(\dot x^2 + \dot y^2)^{3/2}}{\ddot y\dot x - \dot y\ddot x} = -2a\sqrt{2(1-\cos\theta)} = -4a\left|\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}\right|$

En los puntos $\theta = 0$, $\theta = \pm 2\pi, \ldots$ ésta expresión tiene el valor cero. Éstos puntos son las cúspides; en ellos la cicloide intersecta al **eje x** en ángulo recto.

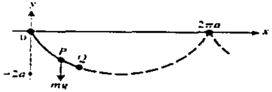
El área de la superficie de revolución que se forma al hacer girar un arco de la cicloide alrededor del **eje x** está dado por $A = 2\pi\int_0^{2a} y\,ds = 2\pi\int_0^{2\pi} a(\cos\theta)\bullet 2a\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8a^2\pi\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^3\frac{\theta}{2}\,d\theta$

que es igual a, $\quad 6a^2\pi\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^3 u\,du = 16a^2\pi\int_0^{\pi}(1-\cos^2 u)\operatorname{sen} u\,du$

la última integral puede evaluarse mediante la sustitución con $u = v$; y se encuentra que

$$A = 16a^2\pi\left(-\cos u + \frac{1}{3}\cos^2 u\right)\Big|_0^{\pi} = 64\frac{a^2\pi}{3}$$

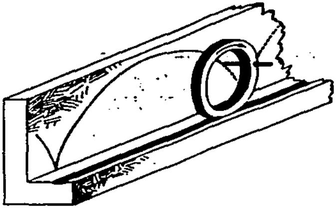
Ésta cicloide tiene algunas propiedades físicas muy interesantes.
Sea **Q** un punto dado en el curto cuadrante y supóngase que en **(0,0)** se ha colocado una gota de agua que se desliza (sin fricción a lo largo de una curva) desde el origen **(0,0)** hasta **Q**, sujeta únicamente a la fuerza de gravedad **mg** dirigida hacia abajo, como se muestra en la figura.



¿Qué forma tendrá la curva para que la gota se deslice entre **(0,0)** y **Q** en el menor tiempo posible? (Este es el problema de la braquistocrona; el nombre viene de dos palabras griegas que quieren decir el "menor tiempo"). Al empezar puede pensarse que la gota se desliza siguiendo el segmento de recta que une **(0,0)** y **Q**, pero después de un momento de reflexión es razonable pensar que la curva es más empinada al principio para dejar que la gota gane velocidad más rápidamente. Se demuestra que la curva "suave" (sin esquinas agudas) que corresponde al tiempo mínimo es una parte de un arco de una cicloide invertida,

$$x = a\theta - a\operatorname{sen}\theta$$
$$y = a - a\cos\theta$$

generada por un punto p que rueda *debajo* del **eje x**; el punto de partida de p es el origen. La cicloide es entonces la solución del problema de la braquistocrona.



Se demuestra que la cicloide invertida es también la solución del *problema tautocrónico* (que significa el "mismo tiempo"), puesto que si se coloca una gota de agua en cualquier punto distinto al punto bajo del arco de una cicloide invertida, el tiempo que se requiere para que se deslice al punto más bajo del arco es independiente del punto donde se colocó la gota originalmente. También describe la trayectoria de un péndulo cicloidal.

EL PÉNDULO CICLOIDAL.

El hecho de que el período de oscilación de un péndulo ordinario no es estrictamente independiente de la amplitud de oscilación hizo que Christian Huygens, en sus constantes esfuerzos por construir relojes precisos, buscase una curva **C** para la cual el período de oscilación fuese independiente de la posición sobre **C** desde la cual la partícula oscilante inicia su movimiento.[15] Huygens reconoció que la cicloide era tal curva.

Para que una partícula sea realmente capaz de oscilar sobre una cicloide, las cúspides de ésta curva deben apuntar en dirección opuesta a la gravedad; ésto es, la cicloide considerada anteriormente debe ser reflejada con respecto al eje x. Por consiguiente, escribimos las ecuaciones de la cicloide en la forma:

$$x=a\,(\theta+\pi+\operatorname{sen}\theta)$$
$$y=-a(1-\cos\theta)$$

la cual involucra también un cambio del parámetro θ *por* $\theta+\pi$

El tiempo que la partícula tarda en ir de un punto con altura $y_0=-a(1-\cos\theta_0\,);$ $(0<\theta_0<\pi)$ al punto más bajo y luego subir nuevamente a la altura y_0 es, por la formula:

$$\frac{T}{2}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\left|\int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{x'^2+y'^2}{y_0-y}\,d\theta\right|=\frac{1}{\sqrt{2g}}\left|\int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{\phi'^2(\theta)+\varphi'^2(\theta)}{\varphi(\theta_0)-\varphi(\theta)}\,d\theta\right|$$

se ha denotado por **T** al tiempo requerido para un viaje completo entre dos puntos y viceversa, el movimiento obviamente será periódico con periodo **T**. Si θ_0 y θ_1 son los valores del parámetro correspondiente a los dos puntos el semiperiodo está dado por la expresión anterior.

[15] Las oscilaciones se dice entonces que son isócromas.

Si θ_2 es el valor del parámetro correspondiente al punto más bajo de la curva, el tiempo que la partícula tarde en caer de un punto **A** hasta el punto **B** es:

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\left|\int_{\theta_0}^{\theta_2}\sqrt{\frac{x'^2+y'^2}{y_0-y}}\,d\theta\right|$$

entonces, la partícula tardará en ir de un punto a otro y viceversa

$$\frac{T}{2}=\sqrt{\frac{1}{2g}}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\sqrt{\frac{x'^2+y'^2}{y_0-y}}\,d\theta=\sqrt{\frac{2a}{g}}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{\cos\left(\theta/2\right)}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}$$

usando exactamente las mismas sustituciones para el periodo del péndulo simple se llega a la integral:

$$\frac{T}{2}=2\sqrt{\frac{a}{g}}\int_{-1}^{1}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\ \text{y por consiguiente}\ T=4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

El periodo de oscilación **T**, por lo tanto, es, sin duda, independiente de la amplitud de θ_0.

ESPACIOS EUCLIDIANOS

A principios del siglo XVII los matemáticos disponen ya de un rico arsenal de ideas. La obra de los grandes matemáticos de la época tuvó que estar sistematizada y enriquecida del saber de las nuevas aportaciones matemáticas, las cuales vinieron a uniformar a ésta disciplina.

Copérnico en su sistema astronómico ya la manera de vincular lo antiguo con lo nuevo, haciendo renacer conceptos griegos que no tuvieron en su tiempo la debida importancia. Kepler, ya en el siglo XVII, se opone a cuanto lo que no confirma la experiencia y Galileo logra impulsar la matemática en su franca lucha con los conceptos aristotélicos de la física.

Descartes (1596-1650) es el fundador del primer sistema matemático moderno. Su punto de partida es el hallazgo de un método de investigación. Busca un criterio de verdad, que encuentra en las nociones claras y distintas, carácter esencial de la matemática. Sólo sirviéndose de éste recurso es dable ir de lo complejo a lo sencillo y de las hipótesis a la evidencia.

Gracias a Descartes, el lenguaje matemático logra difusión generalizada, y con éste la matemática misma adquiere un instrumento de trabajo que la llevara a conquistas cada vez más fecundas.

En la constitución de la terminología y simbólica de la matemática tuvieron señaladas aportaciones durante el Renacimiento Juan Müler (1436-1476), Luca Paccioli (1445-1514), Francisco Viéte (1540-1603) y Simón Stevin (1548-1620).

Para hacer ver la transición desde el álgebra oral a la estenográfica y simbólica, pasando por la sincopada, se ofrece un cuadro aleccionador tomando como tema una ecuación de segundo grado.

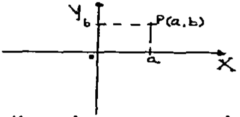
Juan Müler	*3 Census et demptes 5 rebus aequatur zero.*
Luca Paccíolli	*3 Census p 6 de 5 rebus ae 0.*
Francisco Viéte	*3 in A quad - in A plano + 6 aequatur 0.*
Simón Stevin	*3(2)-5(1)+6 ◉ = 0*
Descartes, año de 1637	$3x^2 + 5x + 6 = 0$

Desde Descartes se repite que la matemática no sólo tienen por objeto el estudio del número y medida, sino que también del orden. Así lo expresa el fundador del racionalismo: *"La matemática es la ciencia del orden y de la medida"*. El concepto de orden matemático fue un concepto clave, para fundar la geometría analítica, que unida al cálculo infinitesimal crea la matemática moderna. El propio concepto fecundará todavía siglos después las disciplinas de la teoría de los grupos y la topología.

El concepto de orden tiene que ver con otro concepto matemático: *la posición*. Los antiguos geómetras habían concebido la idea de lugar geométrico, ello es, el conjunto de puntos que satisfacen una condición, como en la circunferencia. Pero no lograron determinar su posición en un plano y expresarlo mediante una ecuación, invenciones llamadas respectivamente teoría de las coordenadas y geometría analítica.

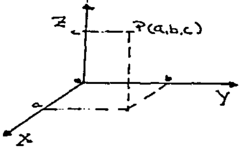
La teoría de las coordenadas tiene antecedentes, pero Descartes la precisa y la pone en circulación.

Recordemos que se pueden representar los puntos **P** en el plano mediante pares ordenados de números reales ***(a,b)***, que son las coordenadas cartesianas.



Si dibujamos dos rectas perpendiculares y las llamamos **eje x y eje y**, podemos trazar perpendiculares desde **P** hasta los ejes, ***a*** se llama la componente **x** de **P** y ***b*** se llama la componente **y.**

De manera análoga, los puntos en el espacio pueden representarse como ternas ordenadas de números reales. Para construir dicha representación escogemos tres rectas mutuamente perpendiculares que se intersequen en un punto en el espacio. Llamamos a estas rectas **eje x, eje y, y eje z**; al punto en que se cruzan lo lamamos el origen (este es nuestro punto de referencia).



A menudo nos referimos al conjunto de ejes como a un sistema de coordenadas y así lo dibujamos como se ha mostrado en la figura.

Si identificamos a un número real con cada punto en estos ejes, (como hicimos en la recta numérica de los enteros), entonces podemos asociar a cada punto **P** en el espacio una única terna ordenada de números reales **(a,b,c)** y recíprocamente, podemos asociar con cada terna un único punto en el espacio. Supongamos además que la terna **(0,0,0)** corresponde al origen del sistema de coordenadas y que las flechas en los ejes indican las direcciones positivas. Lo que hemos construido es un modelo del espacio tridimensional.

Se emplea a menudo las siguiente notación matemática para la recta, el plano y el espacio tridimensional.

NOTACIÓN	APLICACIÓN AL:
$\Re^1$	Conjunto de números reales que están en la recta real
$\Re^2$	Conjunto de todos los pares ordenados (x,y) de números reales.
$\Re^3$	Conjunto de todas las ternas ordenadas (x,y,z) de números reales.
$\Re^n$	Conjunto de todas las n-adas ordenadas (a,b,...,n) de números reales.

Las propiedades matemáticas del modelo matemático del espacio tridimensional son:

-La operación de suma puede extenderse $\Re^3$, a puesto que sus elementos son ternas ordenadas de números reales. Dadas dos ternas (x,y,z) y (x',y',z') definimos su suma por

$$(x,y,z) + (x',y',z') = (x+x',\ y+y',\ z+z').$$

-El elemento (0,0,0) se llama elemento cero u origen de $\Re^3$. El elemento (-x,-y,-z) se llama inverso aditivo de (x,y,z).

-Hay dos operaciones producto, muy importantes, en $\Re^3$. Una de ellas es el producto interno o escalar, que asocia un número real a cada par de elementos de $\Re^3$. La otra operación producto en $\Re^3$ se llama multiplicación por un escalar (número real). Éste producto combina escalares y elementos de $\Re^3$ para obtener otros elementos de $\Re^3$ como sigue: dado un escalar α y una terna (x,y,z) definimos la multiplicación por un escalar α

$$\alpha(x,y,z) = (\alpha x,\ \alpha y,\ \alpha z)$$

El hecho de que las operaciones de multiplicación por un escalar y suma en $\Re^3$ cumplen las identidades siguientes, es un resultado inmediato de las definiciones:

i)	$(\alpha\beta)(x,y,z) = (\alpha(\beta(x,y,z)))$	*asociatividad*
ii)	$(\alpha+\beta)(x,y,z) = \alpha(x,y,z) + \beta(x,y,z)$	
iii)	$\alpha((x,y,z) + (x',y',z')) = \alpha(x,y,z) + \alpha(x',y',z')$	*distributividad*
iv)	$\alpha(0,0,0) = (0,0,0)$	
v)	$0(x,y,z) = (0,0,0)$	*propiedades del elemento cero*
vi)	$1(x,y,z) = (x,y,z)$	*propiedades del elemento idéntico*

Para $\Re^2$, la suma se define como en $\Re^3$, por

$$(x,y) + (x', y') = (x+x', y+y')$$

y la multiplicación por un escalar α se define por

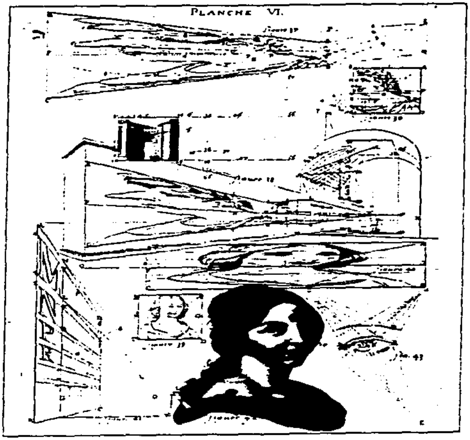
$$\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$$

Es de suponerse entonces que para una cuarta dimensión se cumplan las mismas propiedades que hemos enunciado.

La idea fundamental de una Geometría Pura provino del deseo de los pintores del Renacimiento de producir una geometría "visual". ¿Cuál es el verdadero aspecto de las cosas?. Por ejemplo, tenemos que no habrá paralelas, puesto que para el ojo siempre parecen converger.

El conjunto de las rectas que se trazan desde el ojo del artista a los distintos puntos del objeto constituyen la proyección del objeto y se llama **Cono Euclidiano**. Entonces la sección que de éste cono hace en el lienzo constituye el dibujo que se quiere construir. Las rectas paralelas del objeto convergen en el cuadro al punto donde el lienzo es agujerado por la recta que va del ojo y es paralela a las rectas dadas. Además de las rectas, círculos, planos y esferas que conoce cualquier estudiante de Euclides, los Griegos sabían las propiedades de las curvas que se obtienen al cortar un cono con un plano. Como ya lo habíamos afirmado anteriormente. Kepler descubrió al analizar sus observaciones astronómicas que los planetas describen Elipses. Así se hizo de la Geometría de la Grecia antigua piedra angular de la Astronomía.

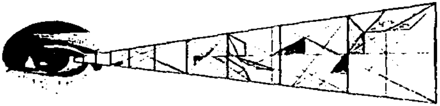
El principal interés que el científico siente por el orden se debe a las ordenadas leyes de qué, porqué, cuándo y al descubrir el orden que busca, con frecuencia también encuentra la belleza. El paisaje microscópico o macroscópico, que cautiva al científico, tiene simetria, elegancia y equilibrio. Según George Kepes, es un paisaje capas de deleitar "el cerebro científico, el corazón del poeta, el ojo del pintor que tiene el carácter de información, como la calidad de visión poética. Una vez constituida la perspectiva lineal, apareció la posibilidad de diversos desarrollos, tanto en el arte como en la matemática.

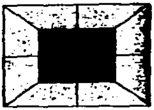


Este grabado tomado de un tratado del dibujante francés Georges Huret (1606-1670), evoca varias aplicaciones de la perspectiva y propone esquemas de anamorfosis; éstas ultimas consisten en deformar geométricamente las figuras, de tal manera que recuperan su aspecto normal si se les mira desde cierto ángulo.

En la matemática, Gerald Desargues (1593-1662) merece especial atención. Ingeniero y arquitecto, procedió a una intensa racionalización de la perspectiva y formuló en 1639 las nociones fundamentales de la Geometría Proyectiva (que estudia las propiedades de las figuras que se conservan por transformación homográfica).

¿El cerebro humano puede visualizar estructuras de cuatro dimensiones? El físico alemán del siglo XIX Hermann Von Helmhltz contestó afirmativamente, con la condición de que se le faciliten al cerebro los datos apropiados.

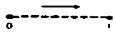




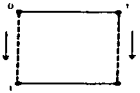
Nuestra experiencia se limita por desgracia al espacio tridimensional, y no hay la más ligera evidencia científica que la cuarta dimensión exista realmente. El espacio euclidiano de cuatro dimensiones no debe confundirse con el espacio-tiempo tetradimensional no-Euclidiano de la Teoría de la Relatividad, en la que el tiempo se maneja como una cuarta coordenada.

CONSTRUCCIÓN DE LA CUARTA DIMENSIÓN. EL HIPERCUBO.

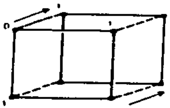
-Comencemos por tomar un punto y trasladarlo sobre una línea recta a una distancia igual a la unidad. Todos los puntos de éste segmento unitario pueden identificarse numerándolos desde cero, en un extremo, al uno en el otro.



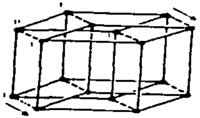
-Movamos ahora la línea unidad una distancia de una unidad en dirección perpendicular a ella. Se genera así un cuadrado unitario. Marquemos un vértice con **0** y a otro con **1**, éstos a lo largo de cada una de las dos aristas que se cortan en él. Podemos identificar ahora cualquier punto del cuadrado empleando éste par de **coordenadas (x,y)**.



-Traslademos el cuadrado una unidad en dirección perpendicular a ambos **ejes X** y **Y**. El resultado es un cubo unitario. Empleando como **coordenadas (x,y,z)** tres lados que se encuentran en un vértice, podemos identificar cualquier punto del cubo mediante una terna ordenada de números.



-No existe ninguna razón lógica por la que no podamos suponer que el cubo se desplaza una distancia en unidad y en dirección perpendicular a los tres ejes. Aunque nuestros poderes visuales zozobren al dar éste paso. El espacio generado por éste movimiento es un hipercubo unitario de cuatro dimensiones -un Tesseract- con cuatro aristas perpendiculares cortándose en cada vértice.



Los geómetras analíticos pueden operar igual de bien con cuatro ordenadas que con parejas o ternas ordenadas para resolver problemas en el plano y en el espacio. La Geometría Euclidiana puede extenderse de ésta manera a espacios cuyo número de dimensiones venga representado por cualquier entero positivo. Cada espacio es euclidiano pero topologicamente distinto. Su visualización queda evidenciado en el equipamiento que se diseño.

LOS FRACTALES

El estudio de los conjuntos fractales surgió de las exploraciones por computadora del espacio fase de sistemas dinamicos, dados por honomorfismos. El desorden se canaliza no en cualquier dirección, sino siguiendo patrones sujetos a reglas bien establecidas. Ésto proveyó a los exploradores del caos de un programa por desarrollar:
-La búsqueda de atractores extraños dondequiera que la naturaleza pareciera que se comporta azarosamente,
-La clasificación de éstos atractores en términos de su dimensión fractal.

EL COPO DE NIEVE

Sobre cada lado de un triángulo equilátero, constrúyase exactamente una **curva de Koch**, la curva cerrada que resulta se denomina a veces curva del copo de nieve. Ésta curva es continua, cerrada simple, de longitud infinita y queda encerrada en una área finita.

El sentido natural de una curva continua puede ser descrita por un punto que se mueve en forma regular y continua, llevando consigo las siguientes creencias intuitivas respecto a tal curva:

a) Una curva continua tiene una tangente, en cada uno de sus puntos, pues en uno cualquiera de éstos o en el punto que la describe se mueve en cierta dirección.

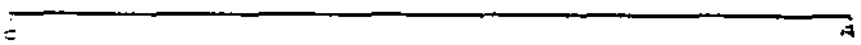
b) Una curva continua tiene un arco de longitud finita entre cualesquiera de sus puntos (es rectificable) porque el móvil describe dicho arco en un tiempo finito.

c) Una curva continua es unidimensional y no puede, por ejemplo, llenar completamente una área plana.
Las curvas que queremos construir infringen éstas hipótesis intuitivas, es decir, son curvas "patológicas".

CONSTRUCCIÓN DE LA CURVA DE KOCH.

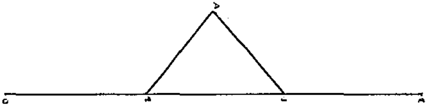
Una curva de Koch (Helge Von Koch 1870-1924) se describe como sigue:

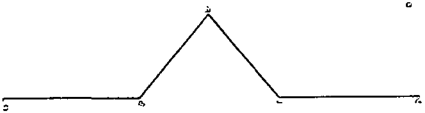
-Tomamos un segmento rectilineo de longitud unitaria **OA**.



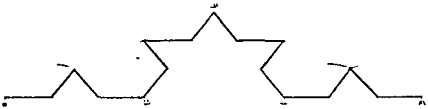
-Dividamos en tres partes iguales el segmento **OA** tal que **OB = BC = CA**

-Sobre el segmento **BC** construimos un triángulo equilátero cuya base sea **BC** y al nuevo vértice obtenido le llamaremos **D**



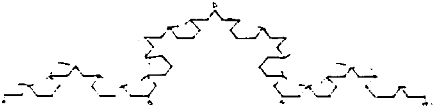


-Omitimos el segmento **BC**. Sobre ésta nueva figura dividamos cada uno de los segmentos **OB**; **BD**; **DC**; **CA**; en tres partes iguales.



-Sobre la parte media de cada segmento construimos un triángulo equilátero semejante al anterior cuya base son los segmentos medios correspondientes. Posteriormente omitimos a dichos segmentos medios.

-Sobre la nueva figura que está formada por 16 segmentos de recta de igual longitud, realizamos la misma construcción.



-Cada segmento lo dividimos en tres partes iguales.

-Sobre la parte central de cada segmento construimos un triángulo equilátero cuya base será la parte central.

-Omitimos la parte central (base del triángulo equilátero construido) y así, obtenemos la nueva figura que está formada por 64 segmentos.

-Repitiendo la construcción indefinidamente, ésta tiende hacia la línea o curva de Koch como límite, es decir; la curva de Koch es el límite de una sucesión de líneas poligonales continuas, es en sí misma una curva continua, aunque la curva límite es una curva formada por puros picos, o sea no diferenciable en ningún punto, es decir, sin recta tangente en cada punto.

ANÁLISIS DE LA CURVA DE KOCH

-Se toma un segmento unitario $\mathbf{E_1}$
-El segmento original se reduce a tres segmentos congruentes, omitiendo el segmento central, y aumentando dos segmentos congruentes sobre la parte media formando éstos un ángulo agudo de 60^0 entre si. El número de segmentos es de cuatro. Así: la longitud total de los segmentos en ésta etapa está dada por suma de la longitud de dichos segmentos, es decir: $4(1/3)=4/3$ donde; 4 es el número de segmentos; 1/3 es la longitud del segmento y, 4/3 es la longitud total de los segmentos. Siendo lo mismo la suma de la longitud anterior más la longitud incrementada, esto es; $1+1/3= 4/3$.

-En la segunda etapa la reducción de la longitud de cada segmento es 1/3 del correspondiente al segmento anterior, o sea $(1/3)^2$ del segmento original, siendo las partes medias de cada segmento reemplazadas por dos segmentos que forman un ángulo de 60^0 entre si. El número de segmentos de ésta etapa es de $4x4= 4^2$ y la longitud total de la curva, en ésta etapa es de $4^2\ (1/3^2) = (4/3)^2$;
esto es: $4/3 + 4(1/3^2) = 4/3(1+1/3) = 4/3 * 4/3 = (4/3)^2$;
en donde, 4/3 es la longitud anterior; $4(1/3^2)$ es el incremento; y $(4/3)^2$ es la longitud total.

-En la siguiente etapa, la longitud de cada segmento de la etapa anterior se reduce en 1/3; es decir, $(1/3^2)(1/3) = 1/3^3$ respecto al segmento original. En ésta etapa el número de segmentos aumenta a 4 con respecto a la etapa anterior, es decir: $4^2 *4 = 4^3$ siendo la longitud total de ésta etapa de $4^3*(1/3^3) = (4/3)^3$;
esto es: $(4/3)^2 + 4^2\,(1/3^3) = 4^2/3^2\ (1 + 1/3) = 4^2/3^2\,(4/3) = (4/3)^3$;
en donde, $(4/3)^2$ es la longitud anterior; $4^2 *(1/3^3)$ es el incremento y, $(4/3)^3$ es la longitud total.

-Para la k-ésima etapa, la longitud total se puede suponer con el modelo matemático siguiente:

$$4^k*(1/3^k) = (4/3)^k;\ \text{por demostrar que: } 4^{k+1}*(1/3^{k+1}) = (4/3)^{k+1}$$

Usando el método de inducción matemática se sigue que:
i) Se ha demostrado para cuando **k=1**
ii) Suponemos que es valido para cualquier número natural **k** por lo que: $(4/3)^k$ es valido. (Hipótesis de la longitud en la etapa k-ésima)

La longitud incrementada, que tiene una regularidad en segmentos agregados 4^k por la longitud de cada segmento $1/3^{k+1}$ por lo que $(4/3)^k + 4^k\ .\ (1/3)^{k-1} = (4/3)^k\ (1 + 1/3)$

$$= (4/3)^k\ (4/3\ )$$
$$=(4/3)^{k+1}$$

Ésto demuestra que por el principio de la inducción matemática, para cualquier número natural **k**, la longitud de la curva está dada por $(4/3)^k$

Luego cuando k tiende a infinito la longitud de la curva de Koch tenderá a infinito, ya que 4/3>1 elevado a potencias k cada vez más grandes tenderá precisamente a infinito.

El límite de la etapa n de la longitud de la curva de Koch es $L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$

Por lo tanto, la longitud de la curva de Koch será demasiado grande para la **etapa n**, en donde **n** sea un número natural demasiado grande.

La curva de Koch, es el límite de una sucesión de líneas poligonales continuas, es en sí misma una curva continua, aunque la curva límite es una curva formada por puros picos, o sea no diferenciable en ningún punto, es decir, sin recta tangente en cada punto.

DIMENSIÓN FRACTAL

Se establecerá el modelo matemático para el cálculo de la dimensión **(D)** teniendo en cuenta la relación que existe entre el factor de la escala, ya sea de contracción **(e)** o expansión **(E)** y el número de piezas en los que la estructura se divide **(N)**

DIMENSIONES TOPOLÓGICAS USUALES	
PUNTO	*DIMENSIÓN TOPOLÓGICA 0*
SEGMENTO	*DIMENSIÓN TOPOLÓGICA 1*
ÁREA	*DIMENSIÓN TOPOLÓGICA 2*
VOLUMEN	*DIMENSIÓN TOPOLÓGICA 3*

El modelo matemático $\mathbf{N = E^D}$, en donde; **N** es el número de partes en que se divide la estructura; **E** es el factor de escala; y, **D** es la dimensión topológica, se cumple para todo número real que se tome como factor de escala. Dicha fórmula al generalizarla sigue siendo cierta para todo valor real de la dimensión **D**.

Si $\mathbf{N = E^D}$, entonces le aplicamos logaritmos, $\mathbf{\log N = \log E^D}$;

$$\mathbf{\log N = D\log E};$$

por lo que
$$\frac{\log N}{\log E} = D$$

así, con
$$D = \frac{\log N}{\log E}$$

se podrá cálcular la dimensión fractal desconocida.

$N=E^D$ está relacionada con el cálculo para la dimensión de autosemejanza (dimensión fractal) que se expresa como $a=\frac{1}{S^D}$, donde a = **N** o factor de potencia; **D** es la dimensión y, **S= 1/E** es el factor de escala. Esto es:

$$N = E^D = \frac{1}{\frac{1}{E^D}} ; N = \frac{1}{\left(\frac{1}{E}\right)^D}$$

por lo que $a = \frac{1}{S^D}$

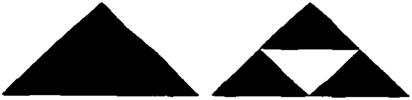
es equivalente a $D = \frac{\log a}{\log\left(\frac{1}{S}\right)}$;

donde, **D** es la dimensión de autosemejanza.

EL ESTUCHE DE SIERPINSKI (O TRIÁNGULO DE SIERPINSKI)

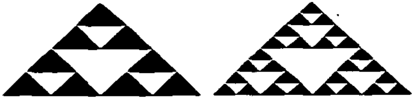
Comprobaremos que obtenemos la misma dimensión de autosemejanza para el Triángulo de Sierpinski con la nueva formula $a = \frac{1}{S^D}$ cálculando la dimensión del Triángulo de Sierpinski. La construcción del Triángulo de Sierpinski está basada en dividir cada lado del triangulo en dos partes iguales, unir dichos puntos por rectas, recortar dicho triangulo y en los triángulos que quedan de nuevo aplicar la misma construcción.

La dimensión cálculada de la etapa inicial a la primera etapa. La reducción de escala es **S=1/2** y el número de partes a=**N=3**; entonces:



$$a = \frac{1}{S^D} \Rightarrow a = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^D \Rightarrow 3 = 2^D \Rightarrow \log 3 = D\log 2 \Rightarrow D = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.5850$$

Si reducimos el factor en la escala a piezas más pequeñas, es decir, si el factor de la escala es de **S= 1/2²**, cuando el número de partes es a=**9** entonces:



$$a = \left(\frac{1}{1/2^2}\right)^D \Rightarrow 9 = 4^D \Rightarrow \log 9 = D\log 4 \therefore D = \frac{\log 9}{\log 4} = \frac{\log 3^2}{\log 2^2} \Rightarrow D = \frac{2\log 3}{2\log 2} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.5850$$

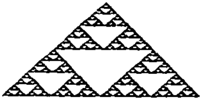
Si reducimos el factor a una escala **k-ésima** donde **S= $1/2^k$** cuando el número de partes sea de $\boldsymbol{a} = \mathbf{3^k}$, entonces se tiene que:

$$a=\left(\frac{1}{S^D}\right) \Rightarrow \log a = \log\left(\frac{1}{S}\right)^D \Rightarrow \log a = D\log\frac{1}{s} \therefore D=\frac{\log a}{\log\frac{1}{s}}$$

sustituyendo los valores de ***a*** y **S** en **D** obtenemos que la regla general para el Estuche o Triángulo de Sierpinski se expresa como:

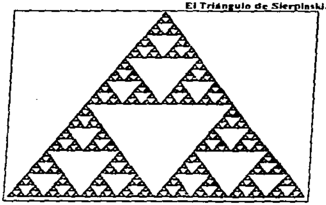
$$D=\frac{\log 3^k}{\log\left(\frac{1}{1/2^k}\right)} \Rightarrow D\frac{\log 3^k}{\log 2^k} \therefore D=\frac{k\log 3}{k\log 2} \Rightarrow D=\frac{\log 3}{\log 2}=1.5850$$

Entonces, la relación de la ley potencial entre el número de piezas ***a*** y la reducción en la escala **S** da la misma dimensión vía el número **D** independientemente de la escala que se use en la evaluación.



Se observa que el número $D=\frac{\log 3}{\log 2}$ está en el intervalo **1<D<2** y se le conoce como la dimensión de autosemejanza para el Estuche o Triángulo de Sierpinski.

El Triángulo de Sierpinski.



Modificando la construcción a que los nuevos triángulos aparezcan no con base en los puntos medios sino en ciertos puntos al azar cercanos a los puntos medios obtenemos una estructrura parecida al perfil de una montaña. En efecto, los objetos fractales pueden servir para simular fenómenos naturales

En 1916, el matemático polaco Waclaw Sierpinski descubrió lo que ahora llamamos Triángulo de Sierpinski. Éste es un ejemplo de un continuo autosimilar; esto significa que adentro de cualquier vecindad de cualquier punto del continuo, podemos encontrar una réplica del continuo.

Para obtener el Triángulo de Sierpinski tomamos un triángulo equilátero $T \subset \Re^2$ el cual dividimos en 4 triángulos iguales. Sean $\mathbf{T_0}$, $\mathbf{T_1}$ y $\mathbf{T_2}$ los que tienen algún vértice en común con $\mathbf{T}$. De la misma manera dividimos cada uno de los triángulos $\mathbf{T_0}$, $\mathbf{T_1}$ y $\mathbf{T_2}$ y nombramos $\mathbf{T_{01}}$, $\mathbf{T_{02}}$, $\mathbf{T_{03}}$. $\mathbf{T_{10}}$, $\mathbf{T_{11}}$, $\mathbf{T_{12}}$, $\mathbf{T_{20}}$, $\mathbf{T_{21}}$ y $\mathbf{T_{22}}$ a los triángulos que tienen vértices en común con $\mathbf{T_0}$, $\mathbf{T_1}$ y $\mathbf{T_2}$. Este proceso lo realizamos una infinidad de veces con los triángulos que vamos obteniendo.

$$\text{Así,}\quad S = \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i_1,\ldots,i_k \in I} T_{i_1\ldots i_k}\right)} \quad con\ I = \{0,1,2.\}$$

Se podría pensar que todos los puntos de este continuo son vértices de algún triángulo (puntos de orden 4), sin embargo, sólo hay una cantidad numerable de dichos puntos. El resto, una cantidad no numerable, son puntos de orden 3, con excepción de los vértices del triángulo **T** que son puntos de orden 2.

También podemos obtener el Triángulo de Sierpinski como **punto fijo** de una **contracción** en el **hiperespacio de compactos** del plano, $\mathbf{H}(\Re^2)$.

Sea :$\mathbf{H}(\Re^2) \rightarrow \mathbf{H}(\Re^2)$ tal que $\mathbf{(B)} = \bigcup_{i=0}^{2} W_i(\mathbf{B})$, determinada por las siguientes contracciones del plano:

$$\mathbf{w_i = \tfrac{1}{2}Id + v_i};\ \text{donde}\ \mathbf{v_0 = (0,0)},\ \mathbf{v_1 = (1,0)},\ \mathbf{v_2 = (\tfrac{1}{2},1)}.$$

El Triángulo de Sierpinski es el punto fijo de esta contracción, y por ello lo obtenemos como el límite de la iteración de cualquier subconjunto compacto del plano; ie.

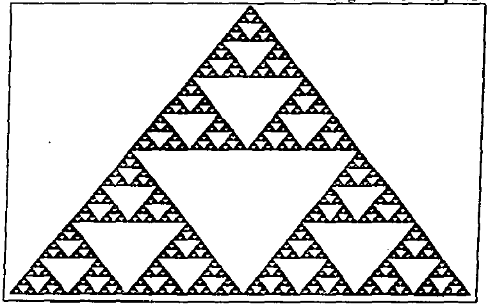
$$S = \lim_{n\to\infty} W^n(A), \forall A \in H(\Re^2).$$

Otra forma de obtener este continuo, la cual nos proporciona un algoritmo para dibujarlo con ayuda de una computadora, es construir una sucesión de puntos que se aproxime a todos los puntos del Triángulo de Sierpinski. Para esto, tomamos $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2} \in \Re^2$, tres puntos no colineales, $\mathbf{x_0} \in \Re^2$ cualquier otro punto en el plano y $\sigma(\mathbf{n})$ un número al azar en { 0, 1, 2} y definimos la siguiente sucesión: $\left\{x_n = \frac{x_{n-1} + a_{\sigma(n)}}{2}\right\}_{n=0}^{\infty}$, que significa tomar el punto medio entre $\mathbf{x_{n-1}}$ y alguno de las a_i.

En esta sucesión hay subsucesiones que convergen a todo punto del Triángulo de Sierpinski.

El patrón de autosimilitud que caracteriza al Triángulo de Sierpinski no sólo aparece en el contexto de la topología: si nos fijamos en el *Triángulo de Pascal* y coloreamos los números pares de un color y los impares de otro, sorprendentemente, nos encontraremos con el mismo diseño del Triángulo de Sierpinski.

El Triángulo de Sierpinski.



LA LEY DE LA PALANCA DE ARQUÍMEDES

Arquímedes, considerado el padre de la ciencia mecánica, vivió en Siracusa, capital de la colonia griega de Sicilia. Como hijo de un astrónomo, se interesó muy pronto por las matemáticas, en las que adquirió una gran destreza y en el transcurso de su vida hizo una serie de contribuciones muy importantes en las ramas de la matemática. Su obra más importante en el dominio de la matemática pura fue el descubrimiento de la relación entre la superficie y el volumen de una esfera y el cilindro que la circunscribe; en efecto, de acuerdo con su deseo, su tumba está señalada por una esfera inscrita en un cilindro. En su libro titulado *Psammites* (o cálculadores de arena) expone el método de escribir números muy largos dando a cada cifra un "orden" diferente según su posición[16] y aplicándolo al problema de escribir el número de granos de arena contenidos en una esfera del tamaño de la Tierra.

[16] El método que empleamos para escribir números en el sistema decimal; es decir, tantas unidades, tantas decenas, tantas centenas, tantos millares, etc.

En su famoso libro *Sobre el equilibrio de las superficies* (en dos volúmenes) desarrolla las leyes de la palanca y discute el problema de encontrar el centro de gravedad de cualquier cuerpo dado. En la época de Arquímedes, la matemática griega estaba limitada casi exclusivamente a la geometría, porque el álgebra fue inventada mucho después por los árabes. Así en diversas demostraciones en el campo de la mecánica y otras ramas de la física se valía de figuras geométricas más bien que formulando, como hacemos ahora, ecuaciones algebraicas. Como en la *Geometría de Euclildes*, Arquímedes formulaba las leyes fundamentales de la "estática" (es decir el estudio del equilibrio) comenzando por formular los "postulados" y derivando de ellos cierto número de "proposiciones". Reproducimos el comienzo del primer volumen:

POSTULADOS

1. Pesos iguales a igual distancia están en equilibrio y pesos iguales a distancias desiguales no están en equilibrio, sino que se inclinan hacia el peso que está a mayor distancia.

2. Si estando los pesos a cierta distancia y en equilibrio, se añade algo a uno de ellos, no hay equilibrio, sino que se inclinan hacia aquel al cual se ha añadido algo.

3. Análogamente, si se quita algo a uno de los pesos, no están en equilibrio, sino que se inclinan hacia el peso del que no se ha quitado nada.

4. Si figuras planas y similares coinciden cuando se superpone una a otra, sus centros de gravedad también coinciden.

5. Si las figuras son desiguales, pero similares, sus centros de gravedad estarán situados similarmente. Entendiendo que puntos situados similarmente en relación con figuras similares, puestos tales que, si se trazan líneas a través de los ángulos iguales, resultan ángulos iguales con los lados correspondientes.

6. Si dos pesos a cierta distancia están en equilibrio, otros dos pesos iguales a ellos estarán también en equilibrio a las mismas distancias.

7. En una figura cuyo perímetro es cóncavo en la misma dirección, el centro de gravedad debe estar dentro de la figura.

A éstos postulados siguen quince proposiciones derivadas de ellos por directos argumentos lógicos. Damos aquí las primeras cinco proposiciones omitiendo su prueba y citamos las pruebas exactas de la sexta proposición que implica la ley fundamental de la palanca.

PROPOSICIONES.

1. Pesos que se equilibran a igual distancia son iguales.

2. Pesos desiguales a igual distancia no se equilibran, sino que se inclinarán hacia el peso mayor.

3. Pesos desiguales a distancias desiguales se equilibrarán (o más bien pueden equilibrarse) cuando el peso mayor está a menor distancia.

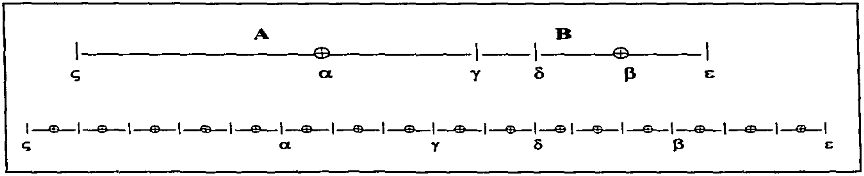
4. Si dos pesos iguales no tienen el mismo centro de gravedad, el centro de gravedad de los dos juntos es el punto medio de la línea que une sus centros de gravedad.

5. Si tres pesos iguales tienen sus centros de gravedad en línea recta a distancias iguales, al centro de gravedad del sistema coincidirá con el del peso medio.

Veamos ahora la prueba de la proposición sexta.

6. Dos pesos se equilibran a distancias recíprocamente proporcionales a sus pesos.

Supongamos que los pesos **A** y **B** son conmensurables[17] y los puntos representan sus centros de gravedad.



[17] Es decir, que la relación de los dos pesos está representada por una fracción racional.

Tracemos la línea $\alpha\beta$ dividida en γ, de modo que $\mathbf{A}:\mathbf{B} = \beta\gamma:\gamma\alpha$

Tenemos que probar que γ es el centro de gravedad de los dos pesos tomados en conjunto. Como **A** y **B** son conmensurables, también lo serán $\beta\gamma$ y $\gamma\alpha$. Supongamos que $\mu\sigma$ es la medida común de $\beta\gamma$ y $\gamma\alpha$.
Hagamos $\beta\delta$ y $\beta\varepsilon$ cada uno igual a $\alpha\gamma$, y $\alpha\sigma$ igual a $\gamma\beta$;
entonces, $\alpha\delta=\gamma\beta$, puesto que $\beta\delta=\gamma\alpha$.
Por tanto, $\sigma\delta$ está dividida en dos partes iguales en α como lo está $\delta\varepsilon$ en β.
Así pues, $\sigma\delta$ y $\delta\varepsilon$ deben contener cada una a $\mu\nu$ un número de veces.

Tomemos un peso Ω tal que Ω esté contenido varias veces en **A** como $\mu\nu$ está contenido en $\sigma\delta$, de donde

$$A:\Omega=\sigma\delta:\mu\nu$$

pero

$$\mathbf{B}:A=\gamma\alpha:\beta\alpha=\delta\varepsilon:\sigma\delta$$

por tanto, *ex aequalis* $\mathbf{B}:\Omega=\delta\varepsilon:\mu\nu$,
o sea, que Ω está contenido tantas veces en **B** como $\mu\nu$ es contenido en $\delta\varepsilon$.
Así, pues, Ω es una medida común de **A** y **B**.

Dividamos $\sigma\delta$ y $\delta\varepsilon$ en partes cada una igual a $\mu\nu$ y **A** y **B** en partes iguales a Ω.
Las partes de **A** serán, por tanto, iguales en número a las de $\sigma\delta$ y las partes de **B** serán iguales en número a las de $\delta\varepsilon$.

Colocamos una de las partes **A** en el punto medio de cada parte $\mu\nu$ de $\sigma\delta$ y una de las partes de B en el punto medio de cada parte de $\mu\nu$ de $\delta\varepsilon$.

Entonces, el centro de gravedad de las partes de **A** situadas a igual distancia de $\sigma\delta$ estará en α, el punto medio de $\sigma\gamma$, y el centro de gravedad de las partes de **B** situadas a distancias iguales a lo largo de $\delta\varepsilon$ estará en **B**, el punto medio de $\delta\varepsilon$. Pero el sistema formulado por las partes Ω de **A** y **B** juntas en un sistema de pesos iguales en números situados a igual distancia a lo largo de $\sigma\varepsilon$. Y como $\sigma\alpha=\gamma\beta$ y $\alpha\gamma=\beta\varepsilon$, $\sigma\gamma=\gamma\varepsilon$, así que γ es el punto medio de $\sigma\varepsilon$. Por tanto, γ es el centro de gravedad del sistema colocado a lo largo de $\sigma\varepsilon$. Por tanto, **A** actuando en α y **B** actuando en β se equilibran sobre el punto γ.

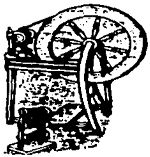
Esta proposición es seguida de la séptima en la cual se prueba la misma tesis cuando los pesos son inconmensurables.[18]

[18] Es decir, cuando la relación de los dos pesos es un número irracional.

El descubrimiento del principio de la palanca y sus diversas aplicaciones produjo gran sensación en el mundo antiguo como puede verse en la descripción dada por Plutarco en su "Vida de Marcelo", un general romano que capturó Siracusa durante la segunda guerra púnica y que fue en parte responsable del asesinato de Arquímedes, que había contribuido en gran medida a la defensa de la ciudad construyendo ingeniosas máquinas de guerra.

El principio de la palanca desempeña un papel importante en todos los caminos de la vida, desde el labrador que emplea una barra de hierro para mover un pesado peñasco, hasta la complicada maquinaria empleada en la ingeniería moderna. La ley de la palanca formulada por Arquímedes nos permite introducir el importante concepto mecánico de *trabajo* desarrollado por una fuerza actuante.

LA RUECA



El modo de trabajar del engrane para aumentar la fuerza motriz se aprecia en estos diagramas.

fig (1)

Un engranaje actúa como palanca, FIG.(1), cuyo momento depende de dos factores: la fuerza (indicada por un peso **(W)**) que se aplica a un extremo de la palanca, y la distancia **(D)** entre la fuerza y el punto de apoyo.

fig (2)

Si una palanca hace presión sobre otra, fig.(2), de doble longitud el momento de la segunda será el doble del de la primera. La combinación de dos ruedas de un engranaje funciona como un par de palancas.

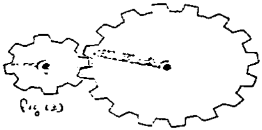


fig (3)

La rueda grande, FIG.(3) dos veces mayor que la pequeña, duplica la fuerza de ésta, pero reduce a la mitad su velocidad de rotación.

INGENIERÍA MECÁNICA DEL ORGANISMO. (PALANCA COMPUESTA DE CARGA EXTREMA).

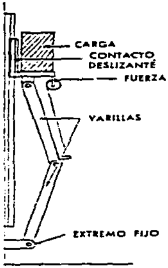
Las máquinas son artificios para efectuar un trabajo. Levantan pesos, giran ruedas y, en general, ejercen fuerzas para efectuar un trabajo moviendo objetos a lo largo de una distancia en contra de alguna resistencia.

El diseñador del organismo humano eligió el músculo como primer móvil. Es una máquina no reversible, no rotativa, de velocidad limitada, capaz únicamente de contracciones fuertes pero muy limitadas. El propósito de la máquina del organismo es trasformar éste pequeño repertorio para cumplir esencialmente cuatro tipos de trabajo:**1)** levantar pesos; **2)** caminar (o correr); **3)** asir; **4)** golpear. Evidentemente, muchos movimientos son combinaciones de los anteriores y podría eligirse otro sistema distinto de clasificación, pero el que se da, resulta útil.

El primer móvil de la ingeniería libera energía generalmente en forma de una torsión de un volante giratorio. La máquina fisiológica, en contraste, no tiene partes rotativas, sino que está formada por vigas y alambres interconectados, ésto es: huesos y músculos. Dado que el músculo puede ejercer la fuerza únicamente por contracción, cada movimiento requiere un par de músculos, ésto es: el flexor y el extensor que trabajan en forma opuesta. Finalmente, los tipos de trabajo requeridos por el organismo varían ampliamente, desde el levantar objetos pesados hasta el movimiento rápido involucrado en el golpe o en el lanzamiento.

PALANCA COMPUESTA

Las palancas simples existentes en el cuerpo son, en general, de muy pocas ventajas mecánicas y más adecuadas para movimientos rápidos con pequeñas cargas que para grandes cargas. Cuando el cuerpo debe levantar un gran peso, se utiliza una disposición muy inteligente que rara vez se ve en ingeniería. Esta disposición se denomina palanca compuesta de carga extrema.



— Modelo que ilustra la palanca compuesta de carga extrema.

Éste sistema está formado simplemente por dos largos huesos unidos por una articulación y cargado longitudinalmente cuando los huesos están casi en línea. Ejemplos de ella son: la pierna cuando está aproximadamente derecha, la espalda ligeramente flexionada y el brazo ligeramente estirado. La ventaja mecánica de ésta máquina simple es muy grande y resultará instructivo demostrar éste hecho.

Consideremos dos palancas, cada una de ellas de longitud l , articuladas y cargadas en su extremo por una carga **P**.

Un músculo, que ejerza una fuerza **f**, endereza el par efectuando un proceso de longitud **s**. El trabajo hecho al enderezar el par desde un ángulo $\theta = \theta o$ hasta un ángulo $\theta = 0$ es:

$$\tau = 2\, P_1\, (1 - \cos\ \theta o\,)$$

o bien para pequeños ángulos $P_1\theta o$ éste trabajo es igual al que efectúa la fuerza **f**, para un pequeño θo:

$$\tau = f\, s\ \ \theta o = P_1\theta o$$

la ventaja mecánica es: $\frac{P}{f} = \frac{s}{l}$

Para ángulos pequeños, ésta relación se hace muy grande y ésto es lo mísmo que decir que para permanecer erguido hay muy poco gasto de energia, que es posible levantar cargas muy pesadas enderezando la espalda previamente flexionada y que en boxeo, por ejemplo, se ejercen grandes fuerzas justamente en el momento en que el brazo del boxeador se endereza. Ejemplo de éste sistema de palancas en ingeniería se encuentra en el gato hidráulico.

Es evidente que tanto el caminar como el levantar pesos involucran el tipo de máquina que hemos descrito.

MODELO MATEMÁTICO PARA UNA EPIDEMIA

El estudio de los brotes epidémicos y sus posibles causas data de tiempos muy antiguos. Hipócrates (458-377 a.C.), en su ensayo sobre "Aires, aguas y lugares", escribió que el temperamento de las personas, así como sus hábitos y el medio ambiente que les rodea, son factores importantes para el desarrollo de una enfermedad, lo cual suena razonable aún en estos tiempos.

En 1760, el matemático Daniel Bernoulli presentó ante la Academia Real de Ciencias de París un trabajo en el cual, aparentemente por vez primera, usó un modelo matemático para estudiar la difusión de una enfermedad infecciosa en la población (la viruela) y las ventajas de un programa de vacunación. Bernoulli, quien además de matemático era médico, se interesó en el problema, y para evaluar la efectividad de la técnica de valoración, con miras de influir en las políticas de salud vigentes de esa época, formuló y resolvió su famosa ecuación diferencial y evaluó los resultados en términos de las medidas de control involucradas. Así, éste problema teórico no sólo surgió de un problema real, sino que sus conclusiones se relacionaron directamente con acciones prácticas.

Ecuación diferencial de Bernoulli.
Si **n** es una constante diferente de **0** ó **1**, entonces la ecuación $$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$$ es una ecuación diferencial de Bernoulli, si **n=0**, ó **n=1**, entonces la ecuación diferencial de Bernoulli es una ecuación líneal. Para otros valores de **n**, la sustitución **u** = **y**$^{1-n}$ permite reducir la solución de la ecuación de Bernoulli a una ecuación diferencial líneal en **u**. $$\frac{du}{dx}+(1-n)P(x)u=(1-x)Q(x)$$

Los modelos matemáticos pueden ayudarnos a predecir el curso de una epidemia dentro de una población; pueden también ser una herramienta útil para detectar los umbrales de población más allá de los cuales existe el riesgo de una epidemia.

En el contexto de una enfermedad endémica (ésto es, que permanece todo el tiempo con la población). Los modelos matemáticos dan información acerca de cómo los niveles de endemicidad están relacionados con factores que pueden ser controlados por la intervención de las autoridades sanitarias. Ayudan, asimismo, a la elección de programas óptimos de vacunación o de técnicas para la erradicación de ciertas enfermedades.

Al estudio de la ocurrencia de una enfermedad que ataca a un número de personas mayor que el esperado se le llama *Epidemiología.*

Una *epidemia* es un brote temporal mayor de lo usual en una población.
Una *enfermedad* se dice que es endémica si persiste todo el tiempo en la población.
La *prevalencia* se define como el número de casos de una enfermedad en un tiempo dado.
La *incidencia* se define como el número de casos nuevos por unidad de tiempo.
La *propagación* de una infección dentro de una población depende tanto de factores biológicos como de factores demográficos, sociales, económicos, geográficos, etc.

Entre los factores biológicos destacan: tipo de agente infeccioso, modo de transmisión de la enfermedad, susceptibilidad del huésped al agente patógeno, periodo de incubación, período de infecciosidad, tipo de inmunidad que confiere el agente infeccioso al huésped, etc.

El proceso de difusión de la enfermedad dentro de una población puede estudiarse a partir de modelos compartamentales. Ésto es, se subdivide a la población huésped en diferentes clases; usualmente se distinguen tres:

1. De susceptibles **(S)**, consistente en todos aquellos individuos que son propensos a adquirir la infección.
2. De infecciosos **(I)**, compuesta por quienes padecen la enfermedad y pueden transmitirla.
3. De recuperados **(R)**, a la que pertenecen los individuos restablecidos de la enfermedad y, por tanto, inmunes a ella, ya sea temporalmente o de por vida.

Se pueden considerar otras clases epidemiológicas: la de los infecciosos latentes, que incluye a todos áquellos individuos que han adquirido la enfermedad, pero aún no la transmiten; la de los portadores asintomáticos integrada por quienes están aparentemente sanos, pero son portadores del agente infeccioso y capaces de trasmitirlo. La incomparación de otras clases al modelo dependerá, por supuesto, de las características de la enfermedad en cuestión.

Los procesos epidémicos del SIDA se caracterizan por estar formados por muchas componentes (la epidemia alcanza simultáneamente a varios grupos de riesgo y a varios grupos de población del país en cuestión), es además, multiconexo (complicada red de contagiosidad y circulación del VIH intra e intergrupal) y, presenta simultaniedad de varias vías en la transmisión en distintos estadíos de contagiosidad.

En relación con ésto la construcción de modelos matemáticos adecuados de la epidemia del SIDA, su prueba sobre estadísticas reales de la enfermedad resulta ser un problema suficientemente complicado.

El transcurso del estado del proceso epidémico del SIDA se refleja en el siguiente modelo matemático a través de la cinética de interacción de los flujos de personas susceptibles: **x(t)**, con las afectadas por el VIH en los tres primeros estadíos de latencia de la enfermedad: $u_1\ (t,\tau)$, $u_2\ (t,\tau)$, $u_3\ (t,\tau)$. Las ecuaciones iniciales del modelo en forma de un sistema de ecuaciones integrodiferenciales no lineales en derivadas parciales responden a conocidas ecuaciones de la física matemática.

Ecuación de conservación de la "masa" en el flujo de los susceptibles al VIH, en cuyo segundo termino se refleja la influencia sumada de los infecciosos sobre los susceptibles.

$$\frac{dx(t)}{dt} = (1-\alpha+\beta)x(t) - \left[\lambda(t)\frac{x(t)}{p(t)}\right]\sum_{j=1}^{3}\int_{0}^{T} q(u_j)u_j(\tau,t)d\tau$$

La ecuación representa una ley de conservación en el flujo de los portadores del VIH en el primer estadío de la enfermedad.

$$\frac{\partial u_1(\tau,t)}{\partial\tau}+\frac{\partial u_1(\tau,t)}{\partial t}=-\left[\gamma_1(\tau)+\alpha\right]u_1(\tau,t)$$

Ésta es una ecuación para el flujo de los portadores del VIH en el segundo estadío de la enfermedad.

$$\frac{\partial u_2(\tau,t)}{\partial\tau}+\frac{\partial u_2(\tau,t)}{\partial t}=\gamma_1(\tau)u_1(\tau,t)-\left[\gamma_2(\tau)+\alpha\right]u_2(\tau,t)$$

Ecuación para el flujo de individuos que se encuentran en el estadío pre-SIDA

$$\frac{\partial u_3(\tau,t)}{\partial\tau}+\frac{\partial u_3(\tau,t)}{\partial t}=\gamma_2(\tau)u_2(\tau,t)-\left[\gamma_3(\tau)+\alpha\right]u_3(\tau,t)$$

Ecuación que caracteriza el proceso dinámico para los "enfermos de SIDA"

$$\frac{\partial y(\tau,t)}{\partial\tau}+\frac{\partial y(\tau,t)}{\partial t}=\gamma_0(\tau)u_6(\tau,t)-\left[\delta(\tau)+\alpha\right]y(\tau,t)$$

Ecuación que caracteriza el proceso dinámico de los que mueren por causa del SIDA

$$\frac{dz(t)}{dt}=\int_0^{T_4}\delta(t)y(\tau,t)d\tau$$

Ecuación que está relacionada con la dinámica de los tamaños de las poblaciones que tienen contacto con el grupo de riesgo.

$$p(t)=x(t)+\sum_{i=1}^{3}\int_0^{T_i}u_i(\tau,t)dt$$

Ecuación que caracteriza el tamaño en ese momento de la morbilidad del SIDA entre la población de riesgo.

$$w(t)=\int_0^{T_4}\gamma_3(\tau)u_3(\tau,t)d\tau$$

Ecuación que está relacionada con el sistema de condiciones a la frontera de los cuatro estadíos del proceso infeccioso del VIH/SIDA.

$$u_1(0,t)=\frac{\lambda(t)x(t)}{p(t)}\sum_{j=1}^{3}\int_0^{T_j}q(u_j)u_j(\tau,t)d\tau\ ;\ \ u_i(0,t)=0\ \ |i=2,3|,\ y(0,t)=0;$$

Ecuación que caracteriza las condiciones iniciales en el grupo de riesgo.

$$x(t_0)=x_0,\quad u_i(\tau,t_0)=f_i(\tau)u_i(0,t_0-\tau)\quad |i=1,2,3|,\quad y(\tau,t_0)=g(\tau)u_1(0,t_0-\tau),\ z(t_0)=z_0$$

El modelo descrito define valores promedios de los parámetros de la epidemia de SIDA a través del sistema de funciones de distribución: $u_1(t,\tau)$, $u_2(t,\tau)$, $u_3(t,\tau)$, $y(t,\tau)$, $z(t)$, donde
t= "tiempo calendárico"
τ "tiempo a partir de que un individuo es infectado por el VIH"

En el modelo matemático las variables, los parámetros y las funciones tienen la siguiente interpretación médico biológica:
t= tiempo calendárico. τ= tiempo transcurrido desde que el individuo es infectado por el VIH. $u_i(\tau)\Delta\tau$ = probabilidad del desarrollo des estadio de latencia u_{i+1} a partir del estadío u_i durante el tiempo $\Delta\tau$. $\delta(\tau)\Delta\tau$ = probabilidad de muerte por SIDA durante el tiempo $\Delta\tau$. $\alpha\Delta\tau$ = probabilidad de muerte, por causas ajenas, de un individuo afectado por la infección del VIH/SIDA. $\beta\Delta\tau$ = probabilidad de que aparezcan "nuevos" individuos en el grupo por diferentes motivos sociales o por otros motivos. $\mathbf{T_i}$ = extensión máxima del correspondiente estadío u_i de la enfermedad para **i = 1,2,3**. $\mathbf{T_4}$ = extensión máxima del estadío "enfermo de SIDA" $\lambda(\tau)$ = frecuencia promedio de transmisión del VIH de los infectados a los susceptibles, el cual se determina experimentalmente. $\mathbf{q}(u_i)$ = contagiosidad del i-ésimo estadío de la infección (latencia) del VIH/SIDA por la via sexual, que depende de la concentración del virus en el material infeccioso del infectado, el cual se determina experimentalmente. $f_i(\tau)$= funciones de distribución de los afectados por el VIH en los estadíos u_i del proceso de infección VIH/SIDA $\mathbf{g}(\tau)$ = la función de distribución de los "enfermos del SIDA" $\mathbf{h}(\tau)$ = la función de distribución de los muertos por SIDA $\mathbf{w}(\tau)$ = morbilidad por SIDA.

La realización computacional del modelo matemático de la epidemia del SIDA fue realizada por Prokopieva N.V., obteniéndose como resultado el programa AIDSGBS.C para PC/AT, que realiza el análisis y pronóstico de la morbilidad del SIDA entre la población homo/bisexual de México.[19]

[19] Veáse bibliografía. Boyer, Gómez

APÉNDICE

LA MATEMÁTICA DE LA NATURALEZA

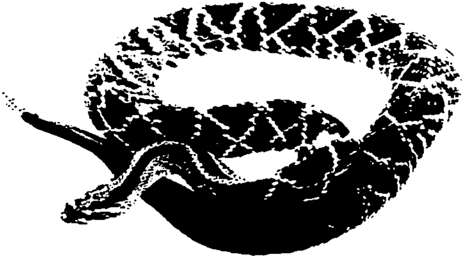
EL CANAMAYTÉ CUADRIVÉRTICE

MAT. ROGELIO PICHARDO DIAZ
MUSEO DE LA MATEMÁTICA DE QUERÉTARO
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO.

LA MATEMÁTICA DE LA NATURALEZA.
(EL CANAMAYTÉ CUADRIVÉRTICE).

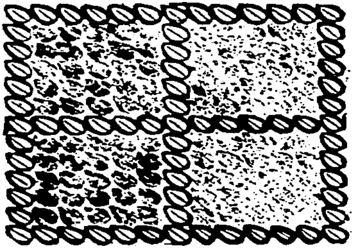
Cuando hablamos de Geometría, generalmente pensamos en la Geometría Euclidiana, pero rara vez pensamos en la Geometría que nos heredaron nuestros ancestros, en especial los Mayas y los Aztecas. Éste trabajo lo que pretende es el de retroceder en el tiempo a nuestras Raices Matemáticas, a la Geometria de la Naturaleza. Motivando así, a una investigación más profunda sobre ésta geometría, ya que hasta nuestros días no se ha profundizado en ella.

El canamayté cuadrivértice es el cuadrado central en la hilada de cuadrados en el dorso de la víbora de cascabel (La crótalus durissus durissus o cascabel tropital Tzabcán y Abaucán Yucateco).



El Ajau Cán - Crótalus Durissus Durissus con el patrón geométrico en la piel.

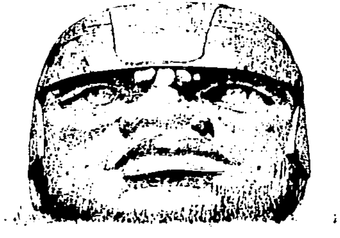
Los cuatro lados del cuadrado representan el número cuatro, que es atributo del Sol y de esa víbora, que lo posee en varias formas, y simboliza también las cuatro direcciones cardinales y la cuadratura del Sol y la Luna.



Es un cuadrado vertical o cuadrivértice con una cruz inscrita simétricamente en el cuadrado con el eje al centro de éste.

Antes de proseguir hablemos algo sobre el pueblo Maya.

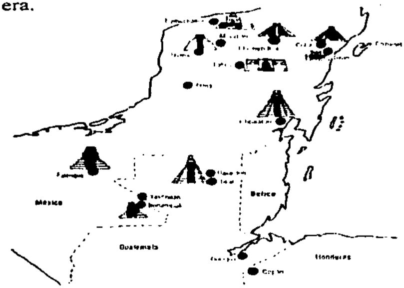
Se cree que las civilizaciones mesoamericanas más antiguas surgieron hacia finales del siglo XIV a.C. La cultura Olmeca por ejemplo, se sitúa entre los años 1000 y 300 antes de nuestra era.



El inicio de la cultura Maya.

Cronología.
El inicio de la Cultura Maya, que se denomina período formativo, se desarrolló alrededor del año 500 a.C.

Posteriormente se presentó el llamado período clásico, comprendido entre los años 300 y 800 de nuestra era. El apogeo de la civilización maya ocurrió alrededor del año 708 d.C. y la caída de su imperio se sitúa entre los años 800 y 925 de nuestra era.

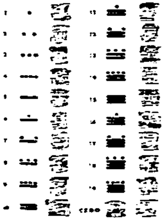


En el esplendor de la Cultura Maya, como lo denominan algunos historiadores, arqueólogos y antropólogos, se levantaron grandes centros ceremoniales en el Sureste de la República Mexicana (Yucatán, Campeche, Quintana Roo, gran parte de Tabasco y la mitad oriental de Chiapas) así como Oaxaca, casi toda Guatemala y parte de Honduras y El Salvador.

La preocupación de los Mayas por medir el tiempo los llevó a hacer cálculos calendáricos y astronómicos tan precisos como los que realizan hoy en día los astrónomos modernos.

ERIC S. THOMPSON
Al referirse a los Mayas ha escrito.- "La observación paciente y cuidadosa a través de cientos de años de transmición de datos de una generación a otra y la existencia de mentes ágiles dispuestas a descartar los cálculos inexactos, fueron los factores principales de su éxito".

Para realizar cálculos calendáricos y astronómicos precisos se requiere una herramienta que haga posible medir y contar con gran precisión. Surge así el sistema vigésimal, y lo más importante la invención del Cero.



Es a través de una escritura que se basa en imágenes pictográficas es como se ha logrado conocer las costumbres y descifrar los conocimientos mayas, así como su sistema de numeración posicional.

En el Sistema Vigésimal Maya se usan sólo tres elementos (punto, línea y las diferentes representaciones del Cero), debe señalarse que existe otra manera de representar a los números mayas: a través del uso de las llamadas variantes de cabeza, a las que se consideran a los Dioses de cada uno de los números del sistema vigésimal.

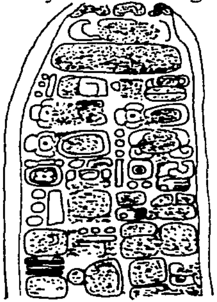
Al parecer, la única razón por la que las culturas prehispánicas escogieron el Sistema Vigésimal es bastante obvia; no sólo se puede contar con los dedos de las manos, sino también con los dedos de los pies. Los Mayas prefirieron utilizar todos los dedos, asociando así, el Sistema Vigésimal al "Propio yo".

Los Mayas representaban al Cero de varias formas: en la fila superior aparece la figura de un caracol con sus respectivas variantes y una concha bivalva. Todos ellas corresponden al Cero que aparece en los códices mayas (Ernest Förstemann, Códice Dresde).

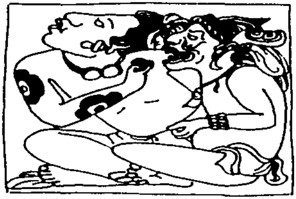
La fila inferior, corresponde a las diferentes formas en que los Mayas denotaban el Cero en las estelas, tableros, monumentos y otros objetos arqueológicos.

La representación maya más común del Cero; fuera de los códices, es la de una flor o una flor incompleta. Sin embargo, existía la variante de cabeza, al igual que con los otros números. En ella aparece el perfil de una cara maya con una mano "haciendo cuernos" en la parte que corresponde a la mandíbula, y un signo espiral en la frente, que se cree que tiene relación con la forma de caracol que aparece en los códices.

Los mayas utilizaban el Cero para referirse a las fechas y períodos de tiempo en diversos monumentos y textos. Sin embargo, en ocasiones éste no representaba la ausencia de unidades, el conjunto vacío o la nada, sino que denotaba la terminación de un período de tiempo o fecha y el inicio del siguiente.



Estela 18 de Uaxactún, la cual tiene los ceros esculpidos más antiguos del mundo.



Thompson opina respecto al Cero que: "...éste fue un descubrimiento de capital importancia, pero no fue tan obvio como se cree a primera vista, queda evidenciado por el hecho de que no lo hizo ningún pueblo de nuestro mundo occidental. Aún, los grandes filósofos y matemáticos jamás encontraron éste medio tan simple que hubiera facilitado sus laboriosos cálculos. En Europa no se conoció hasta que no les llegó a nuestros ancestros por medio de los árabes: éstos lo habían tomado de la India; todo ello ocurrió cuando el período clásico de los Mayas se había terminado ya".

La idea cosmogónica del Canamayté puede ser comprendida a través del siguiente pasaje del Popol Buj, libro sagrado de los Maya-Quiche. En la versión de Dora M. Burgess. Litt y Patricio Xec.

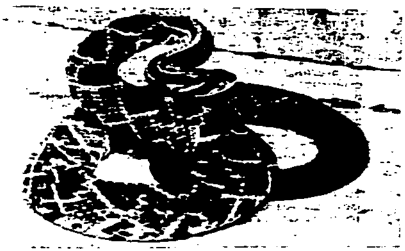
"(...) Es pues con grandes detalles la descripción y narración de cómo fue formado Todo, el Cielo y la Tierra, cómo fue hecho por cuatro esquinas y cuatro lados (es decir, regiéndose por el cuadrado de la Crótalus Durissus), cómo fue medidas y fueron puestas cuatro estacas, como fue doblada y extendida la cuerda. Para medir la extensión del Cielo y de la Tierra. Fue hecho de cuatro lados por Tz'akol Bitol, se dice, la madre y el padre de la vida y de la creación; la creadora y el cuidador; la que dio a luz y el que mira por el bien de la verdadera raza de las verdaderas hijas y los hijos; pensadores que tenían sabiduría para Todo dondequiera que hay Cielo y Tierra, lagos y mares.

La creación fue hecha de acuerdo con el principio geométrico de la víbora, según los Mayas.

El creador Maya es un matemático. La raíz para Tz'akol es Tsa o Tza, que es la Tzamná o Itzamná: raíz originada en Tzab, cascabel, y que es onomatopeya del cascabeleo de la víbora. Con ésta raíz se forma Tzabcán, o sea, víbora de cascabel. Tz'akol es pues, el mismo Dios-hombre-pájaro-serpiente de cascabel conocido con el nombre de Cuculcán o Quetzalcóatl, el matemático y geómetra por excelencia (por ser el creador de todas las cosas).

Hemos hablado ya sobre la fase de la aritmética maya, ahora trataremos la parte geométrica.

La serpiente emplumada, que es indígena, significa tiempo, cronología, calendario; lo cual se prueba mediante el hecho de que tanto Zamna, como Cuculcán y Quetzalcóatl fueron reputados como los inventores de la ciencia de medir el tiempo. Ellos tenían como emblema a dicha víbora, y se llamaban (Can y Coatl).



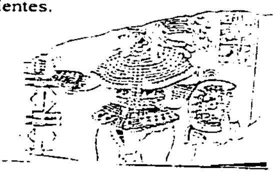
El número 4 fue asignado a Cuculcán, así como a Quetzalcóatl, el 4 corresponden a los lados del cuadrado y está en los dibujos de la piel de la crótalos

.La Crótalus Durissus. Durissus de centroamérica, la Tzabcán o Yucateco y la Totonacus, son las que tienen en sus cuerpos el patrón de la proporción Ad Quadratum.

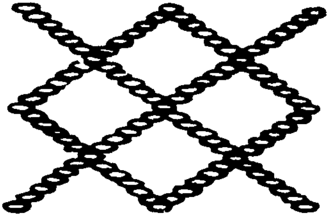
La Crótalus Durissus provee la base para la aritmética astronómica de los Mayas, pues esa aritmética tiene los números 4 y 13 que se repiten en varios aspectos en el modelo geométrico de la víbora. Entre sus méritos tenemos las bases matemáticas del arte maya, el modelo de la bóveda falsa, 23 paralelismos con el Sol, no menos de 2 ejes de simetría y el símbolo de las cuatro aspas solsticiales llamadas Can O Nahui olin.

Algunos individuos de la Crótalus Durissus tienen 13 escamas en cada una de las cuatro filas de escamas labiales, sumando en total 52, número de años del ciclo astronómico Maya y Tolteca conocido como "centuria", o sea, período mayor en que se combinan los movimientos del Sol, la Luna y Venus.

En toda el área Maya hallamos relieves pétreos de sacerdotes que sostienen con ambas manos una barra ceremonial que tiene, al centro, la hilada de cuadrados verticales del Ajau Can. Generalmente, esas barras terminan en cabezas de serpientes.



Esa barra es la insignia matemática crotalométrica de los sabios sacerdotes que hicieron construir los templos mayas.



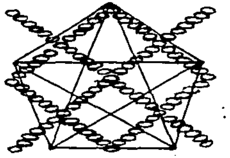
Canamayté - Cuadrivértice en la piel de la Crótalus Durissus Tzabcán Yucateco.

El Canamayté-cuadrivértice es un modelo geométrico anterior a toda cultura arqueológica o histórica y que ofreció sus bases matemáticas a todas las culturas precolombinas.

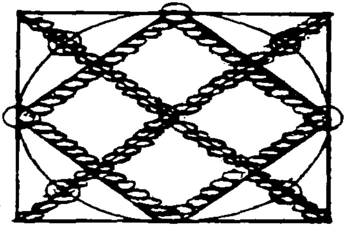
Teniendo como expresión básica el diagrama del movimiento lunar, teniendo también el cuadrado que es, en geometría, la forma perfecta y el círculo de 360°.

Al moverse la víbora produce una geometría dinámica, puesto que sus cuadrados se transforman en rombos para volver inmediatamente a ser lo que eran, revelando así la Geometría, la Aritmética, la Cosmologia y la Arquitectura.

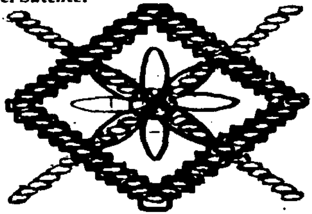
Siendo la Geometría el alma del pensamiento terrestre y celeste de los Mayas de igual modo que las matemáticas fueron el alma de la cultura griega.



El pentágono y el circulo trazado con sólo la ayuda matemática del Canamayté, al centro.



El Canamayté cuadrivértice inscrito en otro cuadrado; la cruz de octantes de la Luna y las fases del Satélite.



Canamayté de Uxmal, trazado sin la ayuda de instrumento alguno y con sólo el dechado o base del Canamayté. Al centro la flor de fases lunares y el botón del movimiento helicoidal Solsticial.

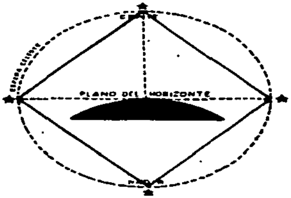


Diagrama del plano del horizonte en relación con el Cenit y el Nadir.

Cerrado con sendas líneas los extremos marcados con estrellas, obtenemos un cuadrado o rombo como aparece en el monolito de "Iglesia Vieja", Tónala, el rombo es característico de la Crótalus.

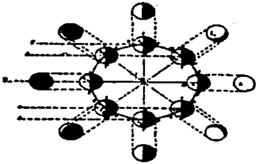
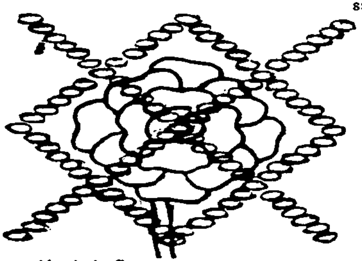
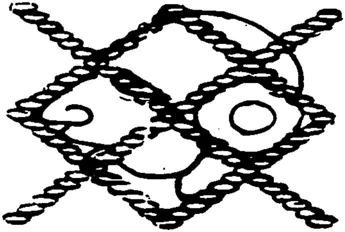


Diagrama de las fases lunares

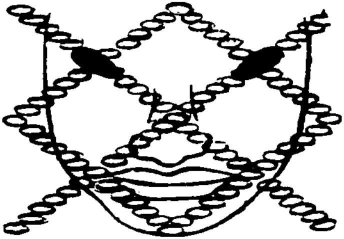
Tanto de las Zizigias, como de las cuadraturas y octantes, se obtienen cuadrados. Estos tres diagramas explican por qué los Mayas concibieron el Cielo como un rombo o un cuadrado. Como hemos visto, la Crótalus posee una columna de rombos en el dorso



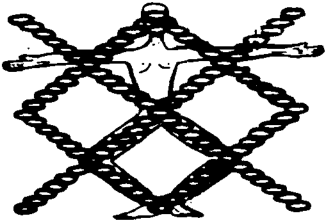
Proporción de la flor



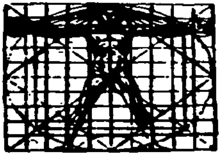
Proporción del perfil maya



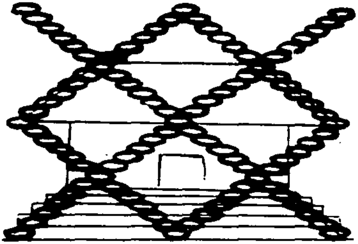
Proporción del rostro



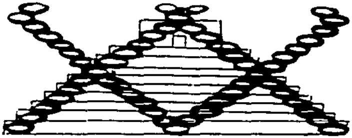
Proporción del cuerpo humano exactamente como en el conocido dibujo de Leonardo Da Vinci, ilustrando la teoría pitagórica del Número de Oro, proporción Ad Quadratum.



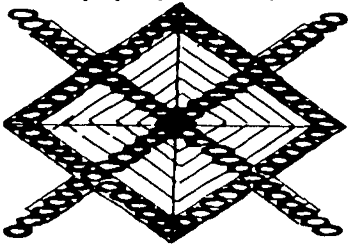
Trazo regulador del cuadrado, el Número de Oro y el cuerpo humano; igual al trazo regulador de las fases lunares.



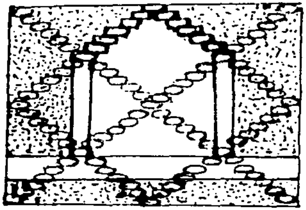
Proporción de la choza de paja.



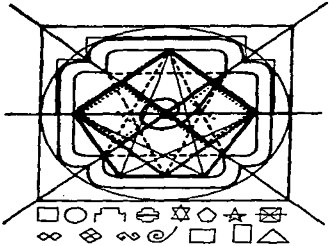
El Canamayté y los primeros templos mayas.



Plantilla de una pirámide.

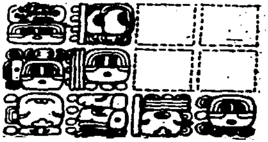


Modelo del arco maya, llamado falso; pero auténtico para ellos, la posición de las piedras salientes en el arco es exactamente la misma que en las escamas, incluyendo la canal bajo la clave que cierra el arco. (corte transversal de una cámara maya).



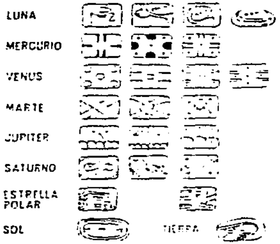
Proporciones del arte maya correspondientes a la Sección Áurea, la cual es de carácter matemático.

Trazo regulador de dos cascabeles unidos por sus bases, hallando que de un trazo se originan no menos de 15 cuerpos geométricos, es decir, aparecen todos los tipos de líneas necesarias para realizar cualquier dibujo, todos característicos del arte maya.

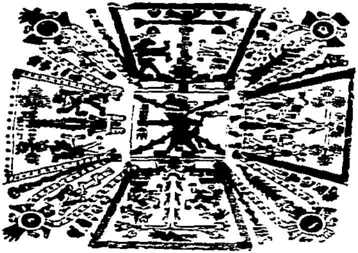


Proporción Ad-Quadratum de los signos cronológicos mayas. Detalle del dintel 21. de Yaaxchilan, península Yucateca tomado de "El Calendario y los Jeroglíficos mayas", (Enrique Juan Palacios).

Hemos observado en los glifos mayas una proporción Ad-Quadratum. La cual ejemplificamos con algunas enmarcados en cuatro líneas de lados iguales y cuatro esquinas, todas los códices mayas ilustran éste carácter cuadrangular de la mayoria de los glifos.



Si la arquitectura es en proporción Ad-Quadratum por ser ésta la "forma" del Cielo para los Mayas, nada de extraño tiene que la escritura calendárica posea igual carácter, mucho más cuanto que los signos se refieren al computo del tiempo, que es una forma, cualidad o virtud del Sol y la Luna. Esto indica que la escritura maya se refiere principalmente a las cosas del Cielo y no a cosas humanas, como también sostiene, a su vez, Oswaldo Cámara Peón.



Nuestros descubrimientos en torno a la víbora de cascabel y su relación con el cuadrado y el Número de Oro (1. 618 •••) nos ha permitido hallar el origen de éste en la marcha solar y, sobre todo, en los movimientos o fases de la Luna.

Meton de Atenas, contemporáneo de Pericles. Fijo un gran ciclo lunar de 19 años. Los años a partir de éste gran ciclo eran llamados Áurea medida; de donde colegimos que el Número de Oro o medida Áurea, y por consiguiente la proporción Ad Quadratun, fue tomada por los griegos, o por los egipcios u otro pueblo, de la Luna y el Sol.

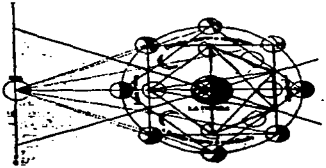


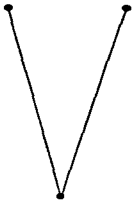
Diagrama de las fases lunares y su proporción Ad-Cuadratum.

LOCALIZACIÓN DE LOS PUNTOS CARDINALES.

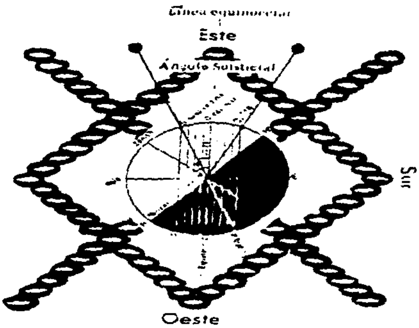
Las cuatro direcciones pueden fijarse mediante el Canamayté de la víbora. Para ello, fijemos dos puntos, uno para cada solsticio o, sea, donde el Sol se detiene en su marcha horizontal, a la izquierda y a la derecha así:

Luego, tal como dice en el Popol Buj; libro sagrado Maya-Quiche. Tendemos una cuerda, entre ambos puntos solsticiales; y, también como en ese libro se dice, doblemos la cuerda. Tenemos ya el punto equinoccial, que es la mitad del camino entre un alto del Sol en verano y otro alto en invierno.

Hecho lo anterior, busquemos el ángulo 46°54', que es el ángulo solsticial para ello pondremos un punto inferior, en la línea equinoccial. Así:



Obteniendo el ángulo solsticial, ajustemos el Canamayté de acuerdo con el punto inferior y el punto equinoccial superior.



Entonces colocado así el Canamayté, éste señala con sus cuatro vértices: Este, Sur, Oeste y Norte; teniendo en cuenta que el Este es el punto principal de Orientación, como bien lo dice ésta palabra: Orientación. Es decir, que la verdadera orientación es el Este, puesto que hacia allá nace el Sol, el cual deriva de un solsticio a otro. Prueba de que la orientación se logro con el Canamayté de la víbora la tenemos en la creencia de que había cuatro grandes serpientes de cascabel una para cada "esquina" del Cielo, que no son (esas esquinas) sino los ángulos del Canamayté Crotálico.

Para las cuentas de éste, el número cuatro es fundamental, puesto que es solar y crotálico a la vez (las cuatro aspas del sol, la cruz de cuatro aspas del Canamayté y los cuatro vértices del mismo). Contando a partir del vértice Oriental del Canamayté cuatro escamas hacia la izquierda y, cuatro hacia la derecha y situándonos en la escama central del mismo, tenemos el ángulo de la abertura solsticial.

Si trazamos una recta entre los vértices Oriente-Poniente, tenemos el punto equinoccial y la fijación exacta del Canamayté en su función cosmográfica, puesto que:

a) El Canamayté con su proporción geométrica Sol-Lunar y con su propiciación del círculo cuyo trazo se facilita, permite la división de la circunferencia no sólo mediante los ángulos de 45°, evidentes en dicho Canamayté, sino en las cuentas de las escamas que regula a modo de ábaco la división aritmética de la circunferencia, por "grados" de acuerdo con la ciencia maya.

b) Se obtiene la rosa de los vientos.

Prueba: La prueba de que el Canamayté sirvió para la fijación de los puntos cardinales la tenemos en que la Piedra del Sol o Calendario Azteca está trazada exactamente sobre dicho patrón. Esta piedra debe yacer en posición horizontal pues señala el ángulo solsticial y su división es de acuerdo con los movimientos del Sol y la Luna. Estuvo orientada, con sus vértices colocados sobre la línea equinoccial y los puntos cardinales. Las divisiones de la Piedra del Sol son, sin la menor discrepancia, las divisiones del Canamayté.

CONCLUSIONES

Desde el punto de vista de la Ciencia, resulta singular el que las formas de la Geometría Euclidiana estén implícitas en el patrón geométrico de la piel en las víboras de cascabel; o sea, la Crótalus Durissus, la cual expresa las bases científicas de ésta y en varias disciplinas, como son la Arquitectura y la Cosmología. Ello demuestra, una vez más, que la mente humana, o la ciencia, intenta descubrir aquello que está en la Naturaleza.

Los Mayas y los postulados de Euclides

E_1)-Por dos puntos es posible trazar una línea recta.

M_1)-El punto lo usaban como la unidad.
-La línea para marcar cinco unidades
-El canamayté está formado por trazos de líneas rectas.

E_2)-Una línea recta es prolongable por sus extremos.

M_2)-Las líneas que determinan el ángulo solsticial son prolongables.

E_3)-Dado un punto y un segmento es posible trazar una circunferencia.

M_3)-El centro de una circunferencia era para los Mayas laTierra. El centro del Universo era el Sol.
-El radio de dicha circunferencia era el segmento dado por la distancia Tierray la Luna.
-La circunferencia estaba descrita por las fases Lunares trazadas sobre el Canamayté.

E_4)-Todos los ángulos rectos son congruentes.

M_4)-En el Canamayté la cruz inscrita sobre él tiene todos sus ángulos rectos.
-El cuadrado y los cuatro cuadrados interiores, y, todos sus ángulos interiores son congruentes.

E_5)-Dos rectas son paralelas si éstas no se cortan en algún punto.

M_5)-El Canamayté es un cuadrivértice que tiene lados paralelos por lo que si éstos son prolongados hacia el infinito, nunca se cortarán el algún punto.

Y de esto se puede concluir que:
Si los mayas hubieran llegado a la axiomatización de sus observaciones, ¿cuánto conocimiento adicional se hubiera tenido ?.

BIBLIOGRAFÍA

"LOS SEÑORES DEL TIEMPO". Horacio García y Norma Herrera, Pangea Editores, S. A. De C. V., 1ra. Edición, México.1991
"LOS SEÑORES DEL CERO ".Juan Tonda y Francisco Noreña. Editores, S. A. De C. V., 1ra. Edición, México.1991
"LA GEOMETRÍA DE LOS MAYAS Y EL ARTE CRÓTALICO", José Díaz Bolio, Sin Edit, Edición Mérida, Yucatán, México 1975.
"LOS ATLANTES EN YUCATÁN", Arq. Manuel Amabilis Dominguez, Edit. Orion, 2da. Edición, México, 1994.
"HISTÓRIA GRÁFICA DE MÉXICO", Vol. 1, LOS DIOSES DE LAS PIEDRAS ÉPOCA PHEHISPANICA, Archivo casasola, Novedades, México, 1952.

EL TEOREMA DE FERMAT

Diofanto llegó a estar disponible a la lectura pública latina en 1621.[20] En la copia de Fermat de esta traducción se encuentran sus famosas notas marginales, las cuales su hijo publicó en 1670. Entre ellas encontramos el "gran teorema" de Fermat de que $\mathbf{X^n + Y^n = Z^n}$ es posible para valores enteros positivos de **X, Y, Z, n** si $\mathbf{n > 2}$, lo cual condujo a Kummer en 1847 a su teoría de los números ideales. Una prueba válida para toda **n** aún no se ha dado,[21] aunque el teorema es ciertamente correcto para un gran número de valores grandes.

Fermat escribió en el margen junto a Diofanto II, 8; " Dividir un número cuadrado en otros dos números cuadrados", las siguientes palabras: ***"Dividir a un cubo en otros dos cubos, una cuarta potencia, o en general, cualquier potencia en dos potencias de la misma denominación, arriba de la segunda, es imposible y yo sin duda he encontrado una admirable prueba de esto, pero el margen es demasiado estrecho para contenerla".***

Otra nota marginal de Fermat afirma que un número primo de la forma $\mathbf{4n + 1}$ puede expresarse una vez, y sólo una, como la suma de dos cuadrados, teorema que fue demostrado más tarde por Euler. El otro "teorema de Fermat", que afirma que $\mathbf{a^{p-1} - 1}$ es divisible entre **p** cuando **p** es primo y **a** es primo para **p**, aparece en una carta de 1640; este teorema puede ser demostrado por medios elementales. Fermat fue también el primero en afirmar que la ecuación $\mathbf{X^2 - AY^2 = 1}$ (**A** un entero no-cuadrado) tiene un limitado número de soluciones enteras (1657)

El último teorema de Fermat tiene que ver con ecuaciones de la forma $\mathbf{X^n + Y^n = Z^n}$.

El caso $\mathbf{n= 2}$ es conocido como el teorema de Pitágoras, donde los cuadrados de las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo igualan al cuadrado de la longitud de la hipotenusa. Una ecuación tal es digamos $\mathbf{3^2 + 4^2 = 5^2}$, pues **9+16=25**

El último teorema de Fermat afirma que no hay soluciones para tales ecuaciones cuando **n** es un número entero mayor que 2. Esto significa, por ejemplo, que sería imposible hallar números enteros **X, Y, y Z** tales que $\mathbf{X^3 + Y^3 = Z^3}$. Así. $\mathbf{3^3 + 4^3 = (27 + 64) = 91}$, lo cual no es el cubo de ningún entero.

---

[20] Primeras traducciones Latinas: Euclides, 1482; Ptolomeo, 1515; Arquimedes, 1558; Apolonio I-IV 1556, V-VII, 1661; Pappo, 1589; Diofanto, 1621.

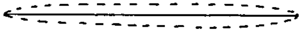
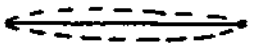
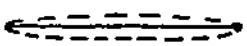
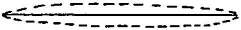
[21] Ver "**ACERCA DEL ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT**" Revista del Seminario de Enseñanza y Titulación Vol. IX; Núm 85 Publicación del departamento de matemáticas de la facultad de ciencias de la UNAM.

LA LEY PITAGÓRICA DE LAS CUERDAS.

Pitágoras filosofo griego, convencido de que el mundo está gobernado por los números, investigó la relación entre las longitudes de las cuerdas en los instrumentos musicales que producen combinaciones armónicas. A éste propósito empleó el llamado "monocordio", es decir una sola cuerda, cuya longitud se puede variar y sostener a diferentes tensiones producidas por un peso suspendido a su extremo. Usando el mismo peso y variando la longitud de la cuerda, vió que los pares de sonidos armónicos se producían cuando la longitud de la cuerda estaban en relaciones numéricas sencillas.

La razón de longitud **2:1** correspondía a lo que llamaremos **"octava"**, la razón **3:2** a una **"quinta"**, la razón **4:3** a una **"cuarta"**. Éste descubrimiento no fue probablemente la primera formulación matemática de una ley física y se puede muy bien considerar como el primer paso en el desarrollo de lo que hoy conocemos como física teórica.

En la moderna terminología física podemos formular de nuevo el descubrimiento de Pitágoras diciendo que: **la frecuencia, es decir, el número de vibraciones por segundo de una cuerda determinada sujeta a una tensión dada, es inversamente proporcional a la longitud.**

LEY PITAGÓRICA DE LAS CUERDAS.		
a) 240 vibraciones por segundo		
b) 48 vibraciones por segundo.		UNA OCTAVA
c) 36 vibraciones por segundo		UNA QUINTA
d) 32 vibraciones por segundo		UNA CUARTA

Así, la longitud de la segunda cuerda es la mitad de larga que la primera, su frecuencia será dos veces mayor. Si las longitudes de las dos cuerdas están en la proporción de **3:2** ó **4:3**, sus frecuencias estarán en la proporción de **2:3** ó **3:4**.

Como la parte del cerebro humano que recibe las señales de los nervios del oído está constituida de tal forma que una sencilla relación de frecuencias como **3:4** proporciona "placer", mientras que una compleja como **137: 171** "desplacer" (hecho que tendrán que explicar los futuros fisiólogos del cerebro), la longitud de las cuerdas que dan un acorde perfecto deben estar en una relación numérica sencilla.

Pitágoras intentó dar un paso más al sugerir que, como el movimiento de los planetas "debe ser armonioso", sus distancias de la Tierra deben estar en las mismas relaciones que la longitud de las cuerdas (bajo la misma tensión) que producen las siete notas fundamentales de la lira, el instrumento musical nacional de los griegos. Ésta idea ha sido probablemente el primer ejemplo de lo que ahora se llama a menudo "teoria física patológica".

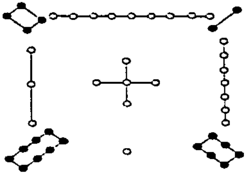
LOS CUADRADOS MÁGICOS

Tomemos un cuadrado y dividámoslo en **4**, **9**, ó **16** cuadros iguales, que llamaremos "casillas". El cuadrado mágico de **4** casillas no se puede construir.

En cada una de esas casillas coloquemos un número entero. La figura obtenida será un cuadrado mágico cuando la suma de los números que figuran en una columna, en una línea o en cualquiera de las diagonales, sea siempre la misma. Éste resultado invariante es denominado "constante" del cuadrado y el número de casillas de una línea es el *módulo* del cuadrado.

Los números que ocupan las diferentes casillas del cuadrado mágico deben de ser todos diferentes y tomados en el orden natural.

Es obscuro el origen de los cuadrados mágicos. Se cree que la construcción de éstas figuras constituía ya en la época remota un pasatiempo que captaba la atención de un gran número de curiosos. Como los antiguos atribuían a ciertos números propiedades cabalísticas, era muy natural que vieran virtudes mágicas en éstos cuadrados mágicos. En la india, muchos usaban el cuadrado mágico como amuleto. Un sabio del Yemen afirmaba que los cuadrados mágicos servían para prevenir ciertas enfermedades. Un cuadrado mágico de plata, colgado al cuello, evitaba según ciertas tribus el contagio de la peste. Los antiguos magos de Persia, que también ejercían la medicina, pretendieron curar las enfermedades aplicando a la parte enferma un cuadrado mágico, siguiendo el conocido principio: ***primum non nocere*** o sea: primer principio no dañar.



Sin embargo es en el terreno de la matemática, el cuadrado mágico tiene una curiosa particularidad. Cuando el cuadrado mágico presenta ciertas propiedades, como por ejemplo, ser susceptible de descomposición en varios cuadrados mágicos, lleva el nombre de hipermágico.

Entre los cuadrados hipermágicos podemos citar los diabólicos. Así se denominan los cuadrados que continúan siendo mágicos cuando trasladamos una columna que se halla a la derecha hacia la izquierda o cuando pasamos una línea de abajo hacia arriba.

El cuadrado mágico de dieciséis casillas pertenece a aquellos que los matemáticos denominan "diabólicos" y tiene una constante de treinta y cuatro, dicho número no solamente se obtiene sumando los números de una misma columna, hilera o diagonal sino también sumando de otras maneras cuatro números del mismo cuadro obteniéndose así ochenta y seis modos diferentes.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Definiciones

Entenderemos que un cuadrado mágico es un cuadrado dividido en $\mathbf{n^2}$ celdas, en las cuales se colocan números desde uno hasta $\mathbf{n^2}$, de modo tal que las sumas son idénticas a lo largo de las filas, de las columnas y de ambas diagonales.

El orden de un cuadrado mágico es el número de filas, o de columnas. Así, un cuadrado mágico con $\mathbf{n^2}$ celdas tiene orden $\mathbf{n}$.

La suma común de las filas, columnas y diagonales de un cuadrado mágico con $\mathbf{n^2}$ celdas es

$$\frac{n \times (n^2+1)}{2}$$

Ésto podemos demostrarlo fácilmente. Sabemos que la suma de $1+2+3+...+n^2$ es

$$\frac{n^2 \times (n^2+1)}{2}.$$

Puesto que la suma se ha de dividir entre $\mathbf{n}$ filas o $\mathbf{n}$ columnas, la suma de cada fila o columna es

$$\frac{n^2 \times (n^2+1)}{2} \div n = \frac{n \times (n^2+1)}{2}.$$

MÉTODO PARA CONSTRUIR CUADRADOS MÁGICOS.

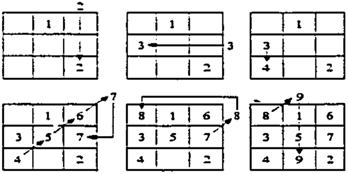
Existe un método general para construir cuadrados mágicos de un orden cualquiera. Éste método llamado el ***método La Loubre***. Ilustraremos éste método construyendo el cuadrado mágico de tercer orden. Los pasos son los siguientes.

1. Los números sucesivos se disponen en las celdas en su orden natural y a lo largo de la línea diagonal que va hacia arriba y hacia la derecha. Empezamos con **1** en la celda central de la fila superior.

2. Cuando se alcanza la fila superior, el número siguiente se escribe en la celda inferior que está en la fila más baja y en la columna contigua hacia la derecha.

3. Cuando se alcanza la columna extrema derecha, el número siguiente se escribe en la columna de la extrema izquierda como si ésta columna fuese la siguiente hacia la derecha.

4. Cuando una celda que está ya ocupada se alcanza nuevamente, o cuando se alcanza la esquina superior derecha, coloque el siguiente número en la celda que está inmediatamente abajo del último número escrito.



2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

6	1	8
7	5	3
2	9	4

8	1	6
3	5	7
4	9	2

2	7	6
9	5	1
4	3	8

4	3	8
9	5	1
2	7	6

6	7	2
1	5	9
8	3	4

8	3	4
1	5	9
6	7	2

El **método La Loubre** puede usarse para construir cualquier cuadrado mágico de orden impar. La construcción de cuadrados mágicos de orden par es más difícil que la construcción de cuadrados mágicos de orden impar.

El cuadrado mágico que aparece en el grabado de Durero conocido como Melancolía. A primera vista puede éste parecer un cuadrado mágico ordinario de orden cuatro, pero ésto es tan sólo el comienzo. La fecha en que el grabado fue hecho, 1514, aparece en las celdas centrales de la fila inferior. La suma de los números de las dos filas superiores es igual a la suma de los números de las dos filas inferiores:

$$\mathbf{16+3+2+13+5+10+11+8=68;}$$
$$\mathbf{9+6+7+12+4+15+14+1=68.}$$

Ésto es muy notable de por sí, pero más notable aún es el hecho de que las sumas de los cuadrados de éstos números sean iguales:

$$16^2+3^2+2^2+13^2+5^2+10^2+11^2+8^2=748;$$
$$9^2+6^2+7^2+12^2+4^2+15^2+14^2+1^2=748.$$

Otra propiedad de éste cuadrado es, que la suma de números en filas alternativas (primera y tercera, segunda y cuarta) es el mismo número, y también son iguales las sumas de los cuadrados de éstos números.

16+3+2+13+9+6+7+12=68
5+10+11+8+4+15+14+1=68
$$16^2+3^2+2^2+13^2+9^2+6^2+7^2+12^2=748$$
$$5^2+10^2+11^2+8^2+4^2+15^2+14^2+1^2=748$$

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Otro hecho asombroso acerca de éste cuadrado mágico es que la suma de los números situados en las diagonales iguala a la suma de los números que no están en las diagonales, dicha suma es igual a **34**

AXIOMAS DE CAMPO

Un campo **F** es un conjunto, en el cual se definen dos operaciones (+, .), la adición y el producto respectivamente, de modo que para cualquier par de elementos **a,b** $\in$ **F** existen elementos únicos **a+b** y **a.b** en **F** tales que se cumplen los siguientes axiomas para todos los elementos **a,b,c** en **F** :

F_1	a+b = b+a y a.b =b.a	Conmutatividad de la adición y el producto
F_2	(a+b)+c = a+(b+c) y (a.b).c = a.(b.c)	Asociatividad de la adición y el producto
F_3	Existen elementos distintos 0 y 1 en F tales que: $0+\alpha = \alpha$ y $1.\alpha = \alpha$	Existencia de elementos identidad para la adición y el producto
F_4	Para cada elemento α en F y cada elemento no nulo b en F existen elementos c y d tales que: a+c = o y b.d = 1	Existencia del inverso para la adición y el producto
F_5	a.(b+c) = a.b + a.c	Distributividad del producto sobre la adición.

Los elementos **a+b** y **a.b** se llaman respectivamente suma y producto de **a** y **b**. Los elementos **0** y **1** se llaman elementos identidad de la adición y el producto, respectivamente, y los elementos **c** y **d** en **F** se denominan inverso aditivo de **a** e inverso multiplicativo de **b** respectivamente.

El conjunto de los Números Reales con las definiciones ordinarios de adición y del producto es un campo que se denota por $\Re$.

El conjunto de los números enteros positivos unión el cero con las definiciones ordinarias de adición y producto no es un campo, pues no satisface la propiedad del inverso aditivo e inverso multiplicativo.

El conjunto $\mathbf{Z_2}$ formado por los elementos **0,1** forman un campo con las operaciones de adición y producto.

Tabla de la adición

+	0	1
0	0	0
1	1	0

Tabla del producto

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Corolario
La identidad aditiva de un campo no tiene inverso multiplicativo.

En un campo cualquiera **F**, puede suceder que la suma **1+1+1+...+1** (**p** sumandos) sea igual a cero para algún entero positivo **p**.

Por ejemplo, en el campo $\mathbf{Z_2}$ (definido anteriormente), **1+1=0**.

En éste caso el entero positivo más pequeño posible **p** para la cual una suma **p** de **1's** es igual a cero, se llama característica de **F**; si no existe tal entero positivo, se dice que **F** tiene característica cero. Así pues, $\mathbf{Z_2}$ tiene característica dos, y $\Re$ tiene característica cero.

Obsérvese que si **F** es un campo de característica $\mathbf{p \neq 0}$, entonces **x+x+...+x** (**p** sumandos) es igual a **0** para toda $\mathbf{x \in F}$. En un campo de característica finita (especialmente de característica dos) surgen muchos problemas no usuales.

LA GEOMETRÍA NO-EUCLIDIANA.

Lobachevski logró desarrollar rigurosamente una teoría geométrica nueva de mayor generalidad, constituida sobre la negación del postulado euclídeo de las paralelas y conservando los otros cuatro postulados y las 23 definiciones de Euclides. De esa manera, puso de manifiesto que la sustitución geométrica fundamental por su opuesta, no conduce a contradicciones, sino a una geometría cuya estructura lógica es tan correcta, consecuente y susceptible de formulación analítica como lo es la geometría euclidiana. En particular, las ecuaciones lobachevskianas de la geometría No-Euclidiana, constituyeron la prueba de la independencia lógica del postulado de las paralelas, con respecto a los otros postulados. Por ende, también prueban el carácter indemostrable de dicho postulado.

Las consideraciones de las orisferas y las asíntotas permitió al genio matemático ruso Nicolai Ivanovich Lobachevski establecer una geometría No-Euclidiana.
La orisfera es la superficie límite a la cual tiende la esfera cuando su radio se hace infinito; las asíntotas son las rectas paralelas que, en vez de ser equidistantes, se acercan continuamente sin llegar a encontrarse.

La pangeometría, nombre dado por Lobachevski a su teoría geométrica No-Euclidiana, en lugar de empezar con el plano y la recta de la geometría ordinaria, parte de la esfera y el círculo, cuyas definiciones son dinámicas.[22] De esa, manera, el plano resulta definido como:

"El lugar geométrico de las intersecciones de las parejas de esferas iguales descritas tomando como centros, respectivamente, a dos puntos fijos".

A su vez la línea es definida como:

"El lugar geométrico de las intersecciones de las parejas de círculos iguales, situados en el mismo plano y trazados tomando como centros a dos puntos fijos, respectivamente, de dicho plano".

Tomando una línea y un punto en el mismo plano, Lobachevski definió como paralela a dicha recta por ese punto, a la línea límite entre las rectas que cortan a la línea dada y las que no la cortan -de todo el haz de rectas trazadas por el punto en cuestión cuando se prolongan hacia un mismo lado de la perpendicular bajada desde el punto a la recta-. Así, a cada lado de ésta perpendicular existe una paralela a la recta considerada. Por consiguiente el Postulado de Euclides queda sustituido por éste otro:

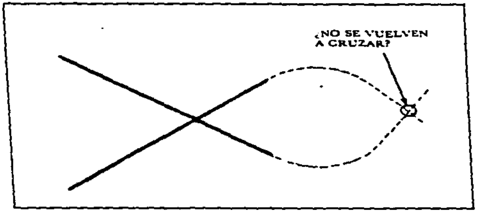
Por un punto dado pasan dos rectas paralelas a otra recta dada.[23]

---

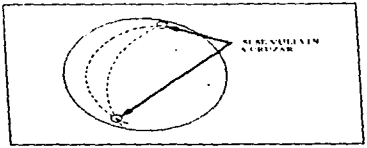
[22] Oriciclo. Circunferencia límite a la cual tiende el círculo cuando su radio se hace infinito.

[23] Las paralelas de Lobachevski no se cortan entre sí y están contenidas en el mismo plano, tal como ocurre con las paralelas Euclidianas.

Existen triángulos rectilíneos cuyos ángulos suman dos rectos y triángulos curvilíneos cuyos ángulos suman menos que dos rectos. Entonces, si a los lados de los primeros triángulos les damos el nombre de rectas, trabajamos con la geometría euclidiana; mientras que, si denominamos rectas a los lados de los triángulos curvilíneos nos encontramos dentro de la geometría No-Euclidiana de Lobachevski



Según la geometría clásica, dos rectas que se cruzan en un punto no vuelven a cruzarse.



Pero dos "rectas" si se cruzan sobre una superficie curva

El establecimiento de la geometría No-Euclidiana vino a poner de manifiesto que los diferentes sistemas geométricos reflejan, de cierta manera propiedades definidas del Espacio real y de las configuraciones espaciales entre los objetos. En la geometria de Lobachevski se encuentra implicada la curvatura constante y negativa del Espacio.

Actualmente el Espacio Físico tiene efectivamente una curvatura constante que no es nula, pero no hacen posible todavía que se pueda decidir si dicha curvatura es negativa o positiva. Cuando se logre establecer esa decisión, si la curvatura es positiva, el Universo resultará ser cerrado y finito, conforme a la geometría de Riemann, mientras que, si dicha curvatura es negativa, entonces el Universo será abierto e infinito de acuerdo con la geometría de Lobachevski.

Kant, postuló al Espacio como una representación necesaria a priori, para servir como condición de posibilidad de fenómenos y constituir su fundamento ineludible. Frente a esa concepción kantiana, los resultados de Lobachevski y sus seguidores mostraron de un modo irrefutable que la geometría euclidiana no es la única representación del Espacio, sino que, por lo contrario, son posibles muchas geometrías.

Las paralelas de Lobachevski no se mantienen equidistantes, sino que, por lo contrario, su distancia va decreciendo hacia un lado de manera asintótica, o sea , que cada vez se aproximan más pero sin tocarse jamás, como sucede con la imagen en perspectiva de una larga avenida.

En realidad, la paralela euclidiana única viene a ser, simplemente, el caso particular en que las dos paralelas No-Euclidianas coinciden y se confunden en una sola

Se puso de manifiesto que la concepción humana del Espacio es la que depende de las cualidades existentes en los objetos, y no al revés como lo pretendía Kant.

La geometría No-Euclidiana dio lugar a la elaboración definida de las filosofías logísticas de la matemática, que han traído consigo la hechura de amplias alteraciones en la lógica formal tradicional.

Berhard Riemann, matemático alemán, generalizó la geometría No-Euclidiana y estableció su interpretación concreta sobre una superficie de curvatura constante, que puede ser positiva o negativa. En dicha interpretación, la geometría euclidiana representa el caso particular en que esa curvatura es nula.

Como geometría riemanniana, la geometría No-Euclidiana del Espacio tuvo un papel sumamente importante en la formulación de la Teoría de la Relatividad y, sin duda, comparte la verificación experimental lograda ulteriormente para la física de Einsten.

El cuerpo geométrico es el cuerpo físico del cual se abstrae, por medio de la razón, un grupo de sus posibilidades de todas las demás. Éste grupo es el de las propiedades espaciales. Todos los cuerpos geométricos forman en su conjunto un cuerpo geométrico único, el cual denominamos espacio.

"Al unirse dos cuerpos", dice textualmente Lobachevski,
"se forma con ellos un cuerpo; por consiguiente podemos imaginar que todos los cuerpos juntos forman uno sólo; el Espacio".

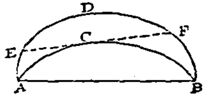
Entonces, de la misma manera en que el cuerpo geométrico no existe por sí sólo en la naturaleza aparte o sin cuerpo físico, tampoco existe el Espacio por sí sólo, separado aparte o sin cuerpos físicos. Por eso, las propiedades geométricas de los objetos existentes dependen de sus propiedades físicas; y entre las leyes que sirven de fundamento a la geometría, se encuentran desde luego las leyes que estudia la física.

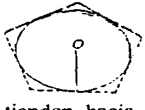
LA CIRCUNFERENCIA

Demostración:

Circunscríbase al círculo un polígono regular de **n** lados.
Sean **p** su perímetro y **s'** su área.
Su apotema es **r**, por tanto **s'=1/2pr** (el área de un polígono regular es igual a la mitad del producto del perímetro por el apotema).

Supóngase que **n** aumenta indefinidamente,
p tiende hacia el límite **c**; (las dos proposiciones siguientes se suponen consecuencia del teorema;
Un arco circular cualquiera situado dentro del espacio determinado por su cuerda y una línea cualquiera es menor que ésta línea.
-La circunferencia es el límite del perímetro de un polígono inscrito o circunscrito cuyo número de lados aumenta sin cesar.
El área del círculo es el límite del área de un polígono inscrito o circunscrito cuyo número de lados aumentará sin cesar)





r es constante;
por lo tanto **1/2pr** tiende hacia el límite **1/2cr**
además, **s'** tiende a **s**,
pero **s'**, es siempre igual a **1/2pr**
por lo tanto **s=1/2cr** (teorema de los límites: si dos variables tienden hacia sus límites pero permanecen siempre iguales, los límites son iguales).

EL NÚMERO PI (π) Y SU APLICACIÓN EN LA COMPUTACIÓN.

El doctor Yasumasa Kanada, investigador la Universidad de Tokio, Japón realizó el cálculo de las primeras **201 326 000 cifras decimales** del número trascendente **pi (π)**. El cociente que resulta de dividir la circunferencia de un círculo entre su diámetro.

En 1987, el mismo doctor Kanada calculó las primeras 134 cifras decimales del número π utilizando una supercomputadora nec-sx-2 durante aproximadamente 36 horas. El cálculo que realizó un año después, lo completó en tan sólo 6 horas con la ayuda de una supercomputadora fabricada por la empresa Hitachi; en gran medida, éste hecho refleja los portentosos avances tecnológicos logrados año con año en lo que a construcción de computadoras se refiere.

El hecho de conocer millones de cifras decimales del número π en realidad tiene muy poco valor práctico, puesto que incluso para aplicaciones científicas, con las primeras diez cifras decimales se tiene más que suficiente. Sin embargo, para el doctor Kanada y otros expertos en ciencias de la computación, el cálculo del número π es una manera de probar la velocidad y exactitud de las computadoras, así como de comparar diferentes computadoras entre sí, puesto que además de la velocidad del cálculo, un error en tan sólo uno de los millones de dígitos del número π será una señal de la existencia de algún problema en la computadora o en su programa.

El doctor Kanada, junto con su equipo de colaboradores planean realizar el cálculo de los primero 400 millones de cifras decimales del número Π, para lo cual requieren de una supercomputadora que tenga una memoria principal lo suficientemente grande para poder almacenar los resultados de los pasos intermedios, así como los medios más rápidos posibles para que ésta envíe y reciba los datos de la unidad de procesamiento.

CONCLUSIÓN.

Este trabajo de tesis ha dado como resultado la realización de diferentes equipamientos para el **Museo de la Matemática en Querétaro**, el desarrollo de éstos, han cumplido con las tres etapas fundamentales que se plantearon en la parte introductoria. Han sido creados para que cumplan con los objetivos básicos del Museo de la Matemática en Querétaro y además con el Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica en el renglón de la formación de una población más informada.

Todos los equipamientos que se han realizado, se han creado con diversos materiales destacándose la presencia de espejos, maderas en colores, fotografías, etc. y, ya han sido exhibidos ante un público heterogéneo y además tienen un lugar en alguna de las salas del Museo de la Matemática en Querétaro. Han participado en diferentes exposiciones de divulgación científica a nivel Local, Estatal y al nivel Nacional, de las cuales se puede mencionar a los diferentes Centros de Cultura del Estado de Querétaro, y del Municipio Centro. Han estado presentes en los Congresos organizados por la Sociedad Matemática Mexicana y la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas entre otros. La aceptación de estos equipamientos por el público asistente a las diferentes exposiciones ha quedado manifiesta por los comentarios que han hecho de ella.

A continuación se describen de una manera muy general cada uno de los equipamientos realizados:

1.- EL CERO MAYA.

El objetivo de éste equipamiento ha sido el de mostrar una breve historia del Sistema Vigésimal creado por el Pueblo Maya y sobre todo, dar a conocer todos los glifos empleados para representar al Cero Maya, esto a través de un álbum montado sobre un bastidor de madera.

El apoyo museográfico se complementa con tres grabados en piel que muestran: El Calendario Maya, El Dios del Cero Maya y Los Glifos del Cero Maya. También se compone por un cartel del Diagrama Solar, además, cuenta con algunas fotografías originales del Museo de la Venta, de la ciudad de Villahermosa, Tab. del Museo de Sitio de Palenque, Chis. así como de la Zona Arqueológica de Palenque.

El público accede a toda la información a través del álbum.

2.- EL CANAMAYTÉ-CUADRIVÉRTICE.

El objetivo principal de éste equipamiento es el de redescubrir el conocimiento geométrico que los Mayas tenían, esto a través del patrón geométrico que ellos tomaron de la Naturaleza, llamado Canamayté-Cuadrivétrice. Contiene diferentes dibujos realizados con el patrón geométrico. Todos estos dibujos se encuentran montados sobre un rotafolio.

La cédula informativa se ha complementado con la piel original de una víbora de cascabel, que se ha montado sobre un bastidor con cubierta de cristal. La piel muestra el patrón geométrico referido.

La manera de interactuar a través de éste equipamiento es con la utilización del rotafolio y ver la coincidencia del patrón geométrico con los dibujos realizados.

3.- EL ÁBACO ROMANO RANURADO.

El objetivo de éste equipamiento ha sido el de rescatar el modelo de ábaco que los romanos utilizaban en sus cálculos, siendo éste una replica realizada en hierro, y los guijarros de piedra lapizlasuli.

El público puede interactuar con el equipamiento tal y como lo usaron los romanos.

4.- LAS TABLAS DE NAPIER.

El Objetivo del equipamiento ha sido el de mostrar una manera sencilla de manejar las tablas de multiplicación, además el público puede descubrir que ésta se define a través de sus sumas parciales. El equipamiento ha sido realizado en madera rotulada.

El público puede interactuar con el equipamiento acomodando las tablas de acuerdo a la cantidad que se desee multiplicar.

5.- EL VALOR ABSOLUTO.

El equipamiento que se ha realizado en hierro y madera, muestra una manera de calcular la distancia entre dos puntos de la recta numérica de los Números Enteros. Además, muestra el concepto del Valor Absoluto de un Número Entero.

El público puede interactuar a través del desplazamiento de las dos barras de hierro que se encuentran rotuladas.

6.- DIOFANTO Y EL ÁLGEBRA.

El equipamiento de característica contemplativa, describe a través de dibujos el famoso acertijo de Diofanto. Con éste, se muestra la necesidad de conocer las ecuaciones diofantinas.

El equipamiento se ha realizado con dibujos en papel albanene montados sobre bastidor.

7.- EL MONOCORDIO.

El equipamiento se realizó en madera y muestra como a través de la variación de la longitud de una cuerda el número de vibraciones que se generan también varia.

El público puede interactuar con el equipamiento variando la longitud de la cuerda y las notas musicales.

8.- LA MATEMÁTICA DE ALBERTO DURERO.

La fotografía del grabado de La Melancolía de Alberto Durero muestra al público diferentes aspectos de la matemática en sus raices como es la aritmética y la geometría, además este grabado se realizó en los inicios de la geometría proyectiva.

El equipamiento se complementa con algunos cuadrados mágicos y un cartel del Escorzo montada sobre bastidor.

El público asistente puede interactuar con el cuadrado mágico de 4x4 realizando los diferentes cuadrados mágicos que se sugieren.

9.- EL TRANSITO DEL SISTEMA DECIMAL AL BINARIO EN LA COMPUTADORA.

El equipamiento muestra al público el proceso interno que realiza una computadora en el momento de digitar una cantidad en el sistema decimal como ésta es trasformada a su número binario correspondiente. También se muestra el proceso inverso, es decir, del sistema binario al sistema decimal.

El equipamiento formado por un tablero de madera, muestra la correspondencia de cada uno de los dígitos del número binario con su correspondiente potencia del número dos.

El público puede interactuar con el equipamiento encendiendo los apagadores que lo complementan.

10.- EL TRIÁNGULO DE PASCAL

El equipamiento de característica contemplativa se encuentra realizado en madera y plástico con una cubierta de acrílico, el objetivo de éste es el de mostrar los diferentes coeficientes que se tienen al desarrollar un binomio elevado a cierta potencia.

El público asistente a través de la cédula informativa comprende la necesidad de este concepto matemático para el cálculo de las probabilidades de dos eventos.

11.- LAS CONGRUENCIAS (MOD 2) DEL TRIÁNGULO DE PASCAL.

El equipamiento de característica contemplativa se encuentra realizado en madera y cubierta de acrílico, con él podemos ver dos conceptos: El Fractal del Triángulo de Pascal y las Congruencias (mod 2) del triángulo de Pascal.

El público asistente puede descubrir la operación binaria bajo la adición ya que los números obtenidos en el Triángulo Binario, se obtienen de la misma manera que los números del Triángulo de Pascal.

12.- LA MATEMÁTICA EN LA TELEGRAFÍA.

El equipamiento muestra a un aparato de telegrafía usado en el siglo pasado, se ha activado sólo para mostrar los golpeteos que se usaban para mandar los mensajes. El objetivo principal es de involucrar al público dentro del análisis combinatorio y el de mostrarle la necesidad de la ciencia matemática para poder crear estos aparatos que han dado el desarrollo de los medios de comunicación actuales como los satélites y el telefax. Se complementa con un equipo de Emisor-Receptor.

La cédula informativa se complementa con el Código Morse Internacional sobre un bastidor con una cubierta de acrílico.

El público puede interactuar el equipamiento mandando mensajes en Código Morse o creando sus propios códigos

13.- LAS SECCIONES CÓNICAS.

El equipamiento se realizó en madera y acetatos para mostrar los conos y la intersección de los planos con ellos y ver así la generación de las cónicas. Esto se puede apreciar a través de la proyección generada sobre una superficie.

El público puede ver a las cónicas en dos espacios euclidianos: el tridimensional y el bidimensional.

14.- LO TRASCENDENTE DEL NÚMERO Π.

El equipamiento muestra como la longitud de una circunferencia equivale a un número irracional llamado (Pi). Para poder reafirmarle al público asistente el concepto de circunferencia, perímetro y sobre todo lo trascendental del número Π.

El apoyo museografico se complementa con un hilograma el cual muestra una aproximación al número Π a través del método empleado por Arquimedes.

El público asistente descubre el concepto de circunferencia y perímetro de un círculo unitario a través de un hilo que se encuentra sobre su periferia y como éste es equivalente al número Π al hacer girar dicho círculo sobre el bastidor.

15.- LA CICLOIDE.

El equipamiento se realizó en madera. Muestra la manera de trazar una cicloide sobre una pizarra deslizando sin resbalar un círculo sobre una barra fija.

El público asistente interactua con el equipamiento deslizando el círculo sobre la barra, y descubre algunas propiedades de la cicloide a través de la cédula informativa.

16.- ESPACIO EUCLIDIANO

Con éste equipamiento se muestra el concepto de la tercera dimensión a través de un cubo de proyección múltiple, cuyos elementos principales son seis espejos montados dentro de una caja de madera, esto complementado con unos focos en su interior. Este modelo no sólo muestra los tres planos perpendiculares entre si, sino también la objetivización del concepto de infinito.

Su cédula informativa ha sido complementada con un cartel (Trabesaños) del grabador Holandés Escher.

El público asistente puede observar el Espacio Euclidiano y el concepto de infinito a través de una ventana del cubo de madera que lo protege.

17.- LA CUARTA DIMENSIÓN.

Mostrarle al público la necesidad de aprender la geometría para incidir en el arte, es el objetivo de éste equipamiento, ya que no es suficientes hablarles de una geometría plana y/o del espacio, sino que también que visualicen la cuarta dimensión de la geometría euclidiana trasladada a la tercera dimensión. Esto ha sido posible gracias a la colocación adecuada de unos espejos y luces dentro de una caja de madera.

El equipamiento se complementa con una composición de la obra de Salvador Dalí "Corpus Hypercubus" ya que en esta obra podemos aprecias una combinación adecuada de la geometría en diferentes dimensiones. También cuenta con una pequeña escultura realizada en cristal reflectasol.

La manera de que el público asistente comprenda éste concepto es mirar a través del cristal que contiene a la cuarta dimensión y apreciar desde diferentes puntos la composición fotográfica de la obra de Dalí.

18.- EL ESTUCHE DE SIERPINSKI.

El equipamiento es de característica contemplativa y fue realizado en madera con una cubierta de acrilico. Muestra al Estuche de Sierpinski.

El público asistente se acerca al concepto de autosemejanza a través de éste equipamiento.

19.- LA RUECA.

El equipamiento muestra a una Rueca original, siendo el objetivo el de mostrar el concepto de la palanca de segundo genero.

El público asistente puede manipular la Rueca.

20.- LA PALANCA COMPUESTA.

El equipamiento tiene como objetivo el de mostrar un modelo usado en Biofisica y que es una palanca compuesta de carga extrema, siendo esta un modelo de la ingenieria mecánica del organismo.

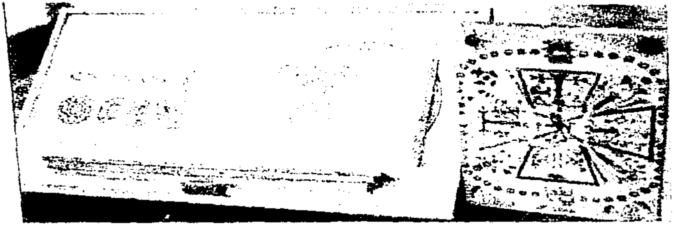
El público asistente puede interactuar con dicho modelo, sintiendo los diferentes esfuerzos que se realizan al ejercer una fuerza.

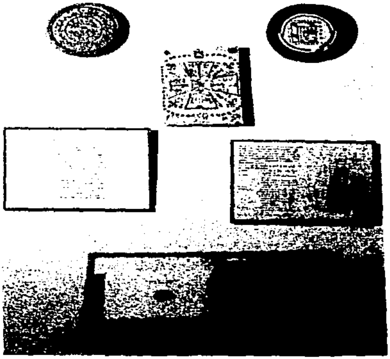
21.- MODELO MATEMÁTICO PARA UNA EPIDEMIA.

El equipamiento de caracteristica contemplativa es un claro ejemplo del uso de la matemática en el desarrollo de modelos matemáticos para pronosticar las enfermedades, en particular el Síndrome de Inmuno Deficiencia Adquirida.

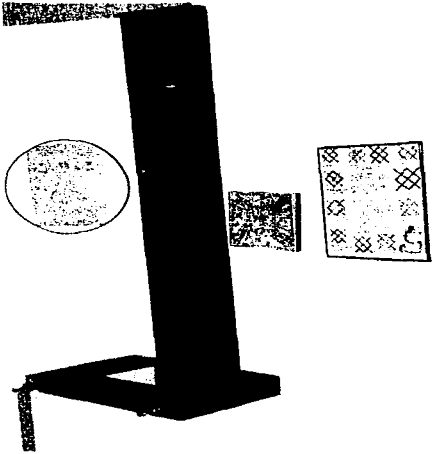
El modelo matemático se encuentra rotulado sobre madera, y rescata las características más importante del modelo matemático para pronosticar a los enfermos de SIDA.

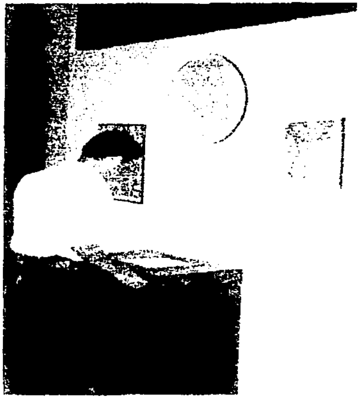
1.- EL CERO MAYA.



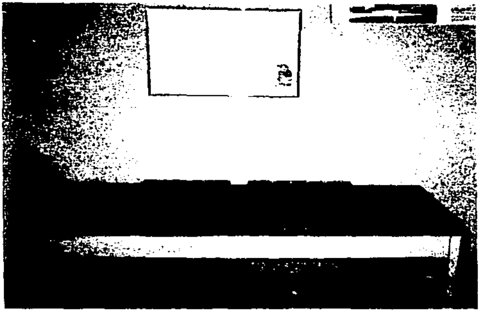


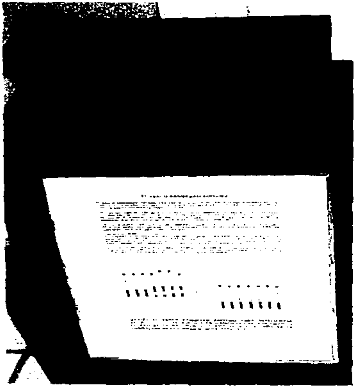
2.- EL CANAMAYTÉ-CUADRIVÉRTICE.



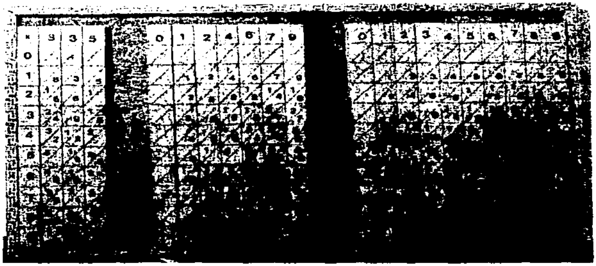


3.- EL ÁBACO ROMANO RANURADO.

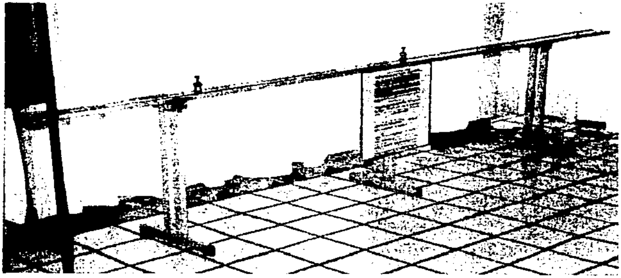




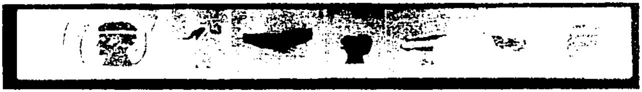
4.- LAS TABLAS DE NAPIER.



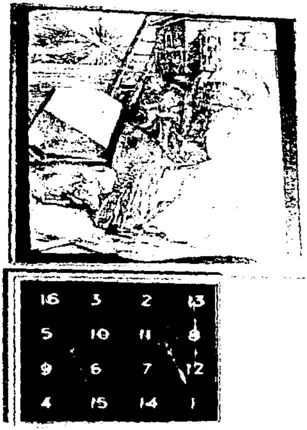
5.- EL VALOR ABSOLUTO.

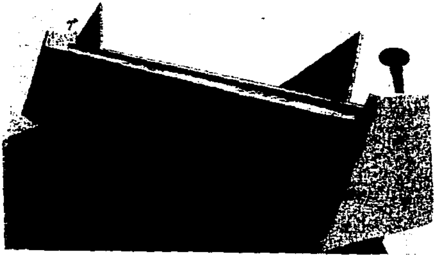


6.- DIOFANTO Y EL ÁLGEBRA.



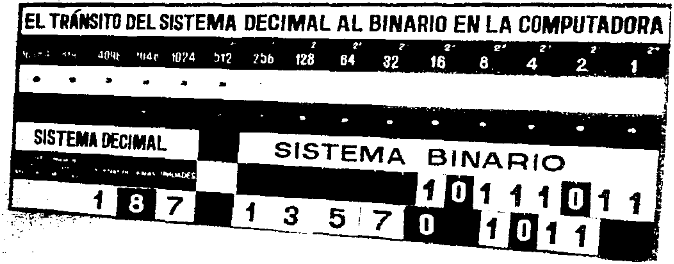
7.- EL MONOCORDIO.



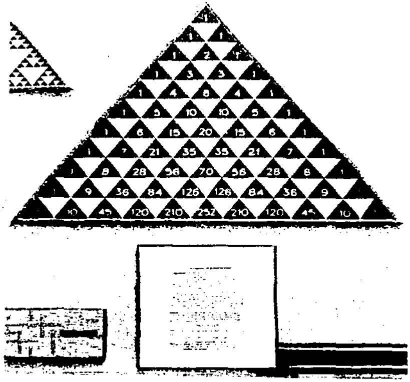


8.- LA MATEMÁTICA DE ALBERTO DURERO.

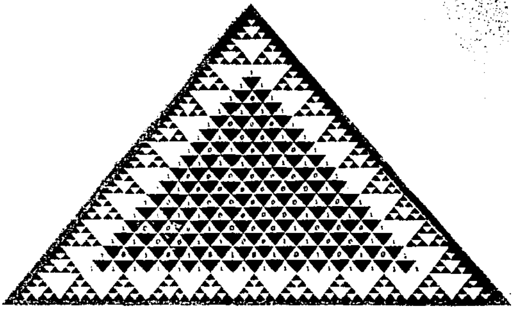
9.- EL TRANSITO DEL SISTEMA DECIMAL AL BINARIO EN LA COMPUTADORA.



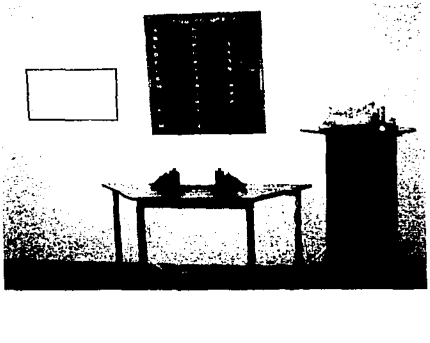
10.- EL TRIÁNGULO DE PASCAL



11.- LAS CONGRUENCIAS (MOD 2) DEL TRIÁNGULO DE PASCAL.

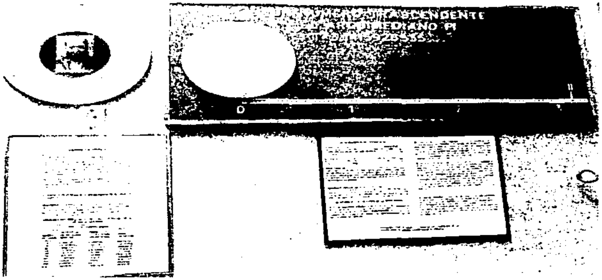


12.- LA MATEMÁTICA EN LA TELEGRAFÍA.

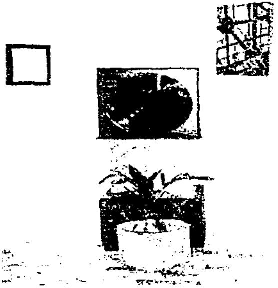


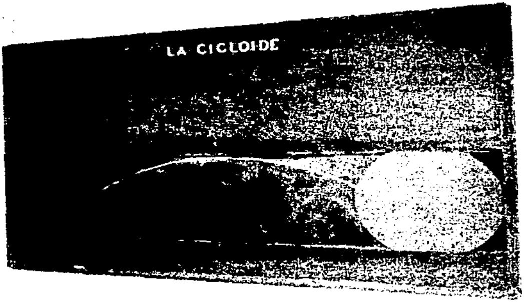
13.- LAS SECCIONES CÓNICAS.

14.- LO TRASCENDENTE DEL NÚMERO Π.



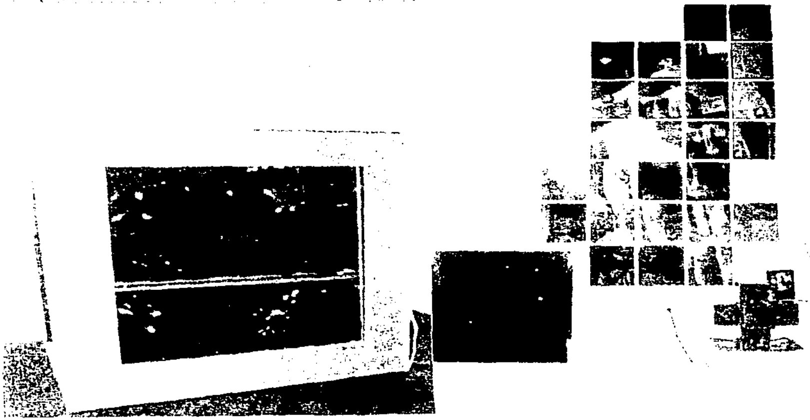
15.- LA CICLOIDE.

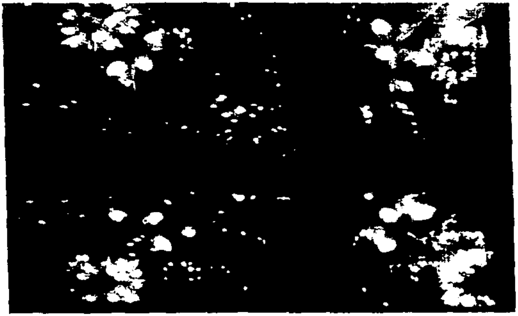




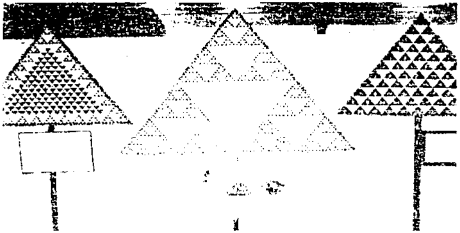
16.- ESPACIO EUCLIDIANO

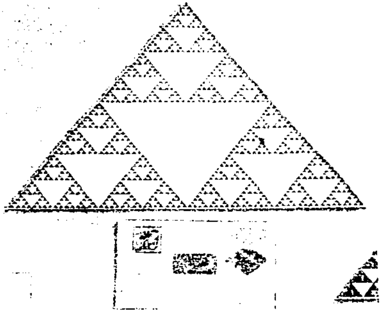
17.- LA CUARTA DIMENSIÓN.



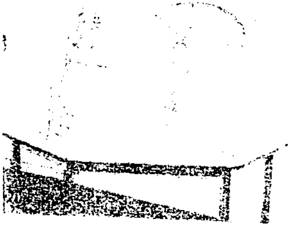


18.- EL ESTUCHE DE SIERPINSKI

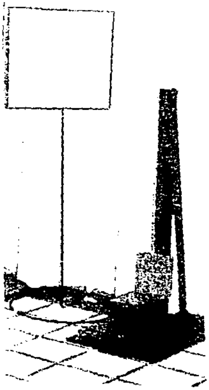


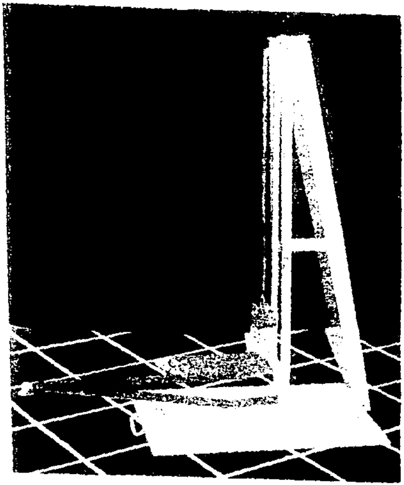


19.- LA RUECA.

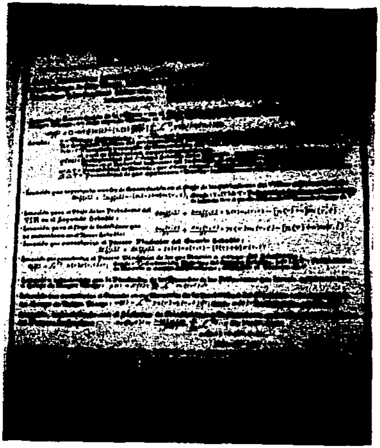


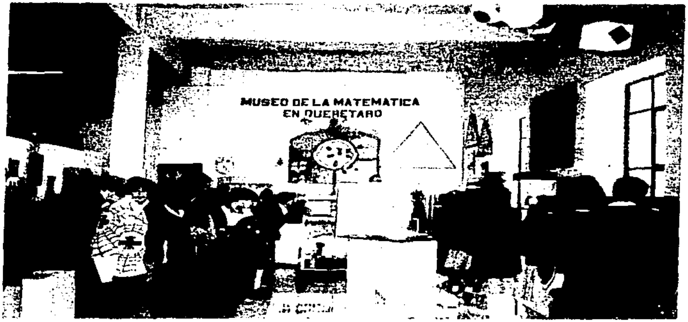
20.- LA PALANCA COMPUESTA.

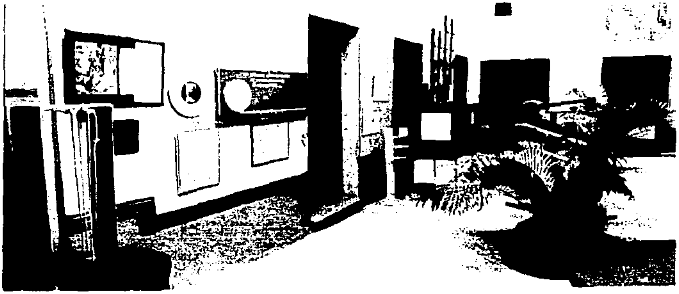


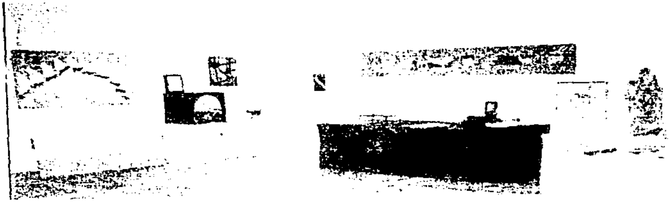


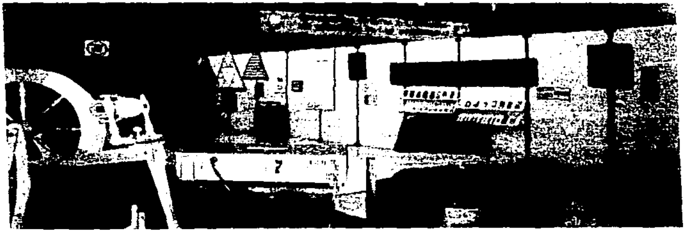
21.- MODELO MATEMÁTICO PARA UNA EPIDEMIA.




MUSEO DE LA MATEMATICA
EN QUERETARO







BIBLIOGRAFÍA

[1] Bernoit Mandelbrot, **LA GEOMETRÍA FRACTAL DE LA NATURALEZA**, San Francisco, Freeman 1992.

[2] Boyev B.V., Gomez A. G. **MODELO MATEMÁTICO PARA PRONOSTICO DEL SIDA ENTRE HOMOSEXUALES/BISEXUALES EN MÉXICO.** Revista Seminario y Titulación, UNAM, Vol. VII, N' 59, 1991, 1-27

[3] Charles V. Jones, **LA INFLUENCIA DE ARISTÓTELES EN EL FUNDAMENTO DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES**. Mathesis vol. III, N' 4, UNAM. 1987 (375-387)

[4] Charles V. Jones, **LAS PARADOJAS DE ZENON Y LOS PRIMEROS FUNDAMENTOS DE LAS MATEMÁTICAS**, Mathesis vol.III, N' 3, UNAM. 1987 (3-14)

[5] Ciencia y Desarrollo, Julio-Agosto, 1988 N' 81 Vol. XIV, pág. 14-15, **LO TRASCENDENTE DEL NUMERO PI.**

[6] Ciencia y Desarrollo, Enero- Febrero 1994, N' 114, Vol. XIX , **EL CAOS, LA FÍSICA, LAS NUEVAS MATEMÁTICAS Y SUS APLICACIONES A LAS CIENCIAS SOCIALES.**

[7] D.C. Nurdoch. **GEOMETRÍA ANALÍTICA CON VECTORES Y MATRICES**. México 1968 Ed. Limusa-Wiley S.A.

[8] Edward Kasner y Janes R. Newman, **NUEVOS NOMBRES PARA LO VIEJO**

[9] Felix Oyarzabal Velázquez, **LECCIONES DE FÍSICA**, México 1979, CECSA.

[10] Fraleigh, **CALCULO CON GEOMETRÍA ANALÍTICA**, México 1984, Fondo educativo interamericano, S.A.

[11] Francisco Larroyo, **FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS**, México 1976, Ed. Porrua, S.A.

[12] George Gamow, **BIOGRAFÍA DE LA FÍSICA**, España 1971, Biblioteca General SALVAT

[13] Haber, Runyon, **ESTADÍSTICA GENERAL**, México 1989, Addison - Wesley Iberoamericana

[14] Hall Knight, **ÁLGEBRA SUPERIOR**, México 1982, Ed. UTEHA

[15] Henry Parker Manning, **CARNAVAL MATEMÁTICO, GEOMETRÍA DE CUATRO DIMENSIONES**, Dover 1966.

[16] Hervert Westren Turnbull; **LOS GRANDES MATEMÁTICOS**, El Mundo de las Matemáticas, Janes R. Newman; Ed. Grijalbo, Barcelona 1985.

[17] H.M. Cundy, A.P. Rollet. **MODELOS MATEMÁTICOS**; Oxford University Press, 1961

[18] Horacio García, Norma Herrera **LOS SEÑORES DEL TIEMPO** (Sistemas calendaricos en mesoamerica) México 1991, Pangea Editores S.A. de C.V.

[19] H.S.M. Coxeter, **INTRODUCTIÓN TO GEOMETRY**, Wiley 1961

[20] H.S.M. Coxeter, **REGULAR POLYTOPES**

[21] Janes Stewart, **CÁLCULO**, México 1994, Grupo editorial Iberoamericano S.A. de C.V.

[22] José A Nieto Ramírez, **MÉTODOS NUMÉRICOS EN COMPUTADORAS DIGITALES**, México 1980, Ed. Limusa.

[23] José Díaz Bolio, **LA GEOMETRÍA DE LOS MAYAS Y EL ARTE CROTÁLICO**, Talleres Bassó, Mérida, Yuc. México 1975

[24] José Díaz Bolio, **LA SERPIENTE EMPLUMADA EJE DE CULTURAS**, Talleres Bassó, 4ta. Edición, Mérida, Yuc. México 1975

[25] Juan Tonda, Francisco Noreña. **LOS SEÑORES DEL CERO** (El conocimiento matemático en mesoamerica), México 1991, Pangea Editores, S.A. de C.V.

[26] Manuel Amabilis Domínguez, **LOS ATLANTES EN YUCATÁN**, México 1994, Ed. Orion, 2da. Edición.

[27] K, Ribnikov, **HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS**, Moscú 1987, Ed. Mir.

[28] Marsden Jerrold E., Tromba Anthony J., **CÁLCULO VECTORIAL**, México 1981, Fondo Educativo Interamericano, S.A.

[29] Margaret F. Willerding. **CONCEPTOS MATEMÁTICOS**. Un enfoque histórico. México, 1979, 4ta. Reimpresión, Ed. CECSA.

[30] María Eugenia Lecona Uribe, **MUSEO DE LA MATEMÁTICA (CATÁLOGO)**; Universidad Autónoma de Queretaro, 1995.

[31] María Eugenia Lecona Uribe. **UNA APROXIMACIÓN A LA MATEMÁTICA**, Concyteq, Gobierno del Estado de Querétaro, 1995.

[32] Miguel Lara Aparicio. **LOS MATEMÁTICOS GRIEGOS**; Universidad, Autónoma de Querétaro, 1991.

[33] Newton Issac, **PRINCIPIOS MATEMÁTICOS DE LA FILOSOFÍA NATURAL Y SU SISTEMA DEL MUNDO**. Madrid: Editora Nacional, 1982 (223-253)

[34] Niven y Zuckerman, **INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LOS NÚMEROS**, México 1985, Ed. Limusa.

[35] Pablo Cantú Villarreal, **SISTESIS DE MATEMÁTICAS**, México 1965, Ed. Trillas, S.A.

[36] Ralph W. Stacy, David T. Williams, Ralph E. Worden, Rex O. McMorris, **PRINCIPIOS DE BIOFÍSICA Y DE FÍSICA MÉDICA**. México-Barcelona, Ed. "El Ateneo"

[37] R. Courant, F. John, **INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO Y AL ANÁLISIS MATEMÁTICO**, México 1985, Quinta reimpresión, Ed. Limusa. (Vol. 1)

[38] Raymundo L. Wilder; **EL MÉTODO AXIOMÁTICO**, El Mundo de las Matemáticas, Janes R. Newman: Ed. Grijalbo, Barcelona 1985.

[39] Sir Janes Jeans; **MATEMÁTICA DE LA MÚSICA**, El Mundo de las Matemáticas, Janes R. Newman; Ed. Grijalbo, Barcelona 1985.

[40] Stephen H. Friedberg, Arnorl J. Insel, Laurence E. Spence, **ÁLGEBRA LINEAL**, México 1982, Publicaciones Cultural S.A. Primera Edición.

[41] Takeuchi- Ramírez-Ruiz, **ECUACIONES DIFERENCIALES**, México 1984, 4ta. Reimpresión, Ed. Limusa.
UNESCO, **HISTORIA DE LA HUMANIDAD**, Tomo 7. Barcelona 1982, De. Sudamericana-Ed. Planeta.

[42] Vilienkin N. Ya. **NARRACIONES SOBRE (CONJUNTOS) FUNCIONES**. Revista del Seminario de Enseñanza y Titulación, vol.III, N' 68, 1992

[43] Weber Write Manning. **FÍSICA PARA CIENCIA Y TECNOLOGÍA**. Ed. Del Castillo, S.A., Madrid 1965.

[44] Wentwort Smith, **GEOMETRÍA PLANA Y DEL ESPACIO**, México 1988.Ed. Porrua, S.A.