



01161

12  
24.

---

---

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

TESIS

Análisis de Sistemas Simples no Lineales Mediante  
el Método de Parámetros Lentamente Variables

PRESENTADA POR:

EUGENIO MACIAS CORTES

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERIA  
(ESTRUCTURAS)

DIRIGIDA POR:

DRA. SONIA E. RUIZ GOMEZ

Ciudad Universitaria,

México, D. F. 1997

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**Tesis de Maestría en Ingeniería**  
**( Estructuras )**

**Eugenio Macias Cortés**

**Asesora: Dra. Sonia E. Ruiz Gómez**

Agradezco a la Dra. Sonia E. Ruiz Gómez, el gran apoyo, comprensión y paciencia para que el presente trabajo pudiera concluirse.

A: Dr. José G. Macías y Sra. Sara Cortés Velez.

In memoriam del Dr. Ralph W. Shaw y a Ms. Carmen M. Shaw.

**Análisis de Sistemas Simples no  
Lineales Mediante el Método de  
Parámetros Lentamente Variables**

## INDICE

I.-INTRODUCCIÓN -----	1
II.-EL MÉTODO DE LOS PARÁMETROS LENTAMENTE VARIABLES -----	17
II.1.-Planteamiento del problema -----	18
II.2.-Aplicación del método a un problema específico ----	23
III.-APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS PÁRAMETROS LENTAMENTE VARIABLES PARA EL ANÁLISIS DE UN OSCILADOR CON COMPORTAMIENTO HISTERÉTICO BILINEAL, SOMETIDO A UNA EXCITACIÓN ARMÓNICA -----	30
III.1.-Introducción -----	31
III.2.-Aplicación del Método de los Parámetros Lentamente Variables en la Respuesta Histerética Bilineal de un Oscilador Sometido a una Excitación Armónica -----	35
III.2.1.-Cálculo de las funciones $S(R)$ y $C(R)$ -----	48
III.2.1.a.-Cálculo de $S(R)$ -----	49
III.2.1.b.-Cálculo de $C(R)$ -----	52
III.2.2.-Respuesta Estacionaria -----	55

<b>IV.-APLICACIÓN DEL MÉTODO PLV EN LA RESPUESTA DE UN OSCILADOR BILINEAL ANTE EXCITACIÓN ALEATORIA</b>	<b>-----73</b>
IV.1.-Formulación del problema	----- 74
IV.2.-Método de solución	----- 79
<b>V.-CONCLUSIONES</b>	<b>----- 116</b>
<b>VI.-REFERENCIAS</b>	<b>----- 118</b>
<b>APÉNDICE A. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE Y.K. WEN.</b>	<b>----- 123</b>
A.1.-Introducción	----- 124
A.2.-Modelo de Wen	----- 125



## **I.- Introducción**

## **I. - Introducción**

Estudios para predecir la respuesta a fuerzas externas fluctuantes en sistemas mecánicos y estructurales han tenido mucha importancia en las últimas décadas.

Las vibraciones con amplitudes grandes en las estructuras de todo tipo son indeseables, debido a las condiciones de uso que se tienen, así como a la posibilidad de la falla de algunos componentes estructurales, lo cual se puede acompañar de una falla o un colapso catastrófico.

Durante muchos años, los ingenieros estuvieron principalmente interesados en la respuesta de sistemas a la excitación de señales periódicas simples.

A mediados de los años 50, un nuevo tipo de problemas sobre vibraciones se hizo patente en la industria aeroespacial; los cuales no podían ser resueltos por los métodos clásicos. Se descubrió que el fuselaje de los aviones alcanzaba altos niveles de vibración, debido a excitación acústica y que se podían presentar y expandir grietas con bastante rapidez, producidas por fatiga. Los estudios sobre esto, mostraron que la vibración responsable era extremadamente compleja, (8).

El problema consiste en que estas vibraciones son no periódicas y altamente irregulares. De manera que dos experimentos llevados a cabo bajo condiciones idénticas mostraban comportamientos que eran bastante diferentes, aunque se observó que el comportamiento promedio era muy similar, (8).

Debido a esto, se desarrolló, un punto de vista probabilístico, en el cual tanto la excitación como la respuesta son modelados como procesos estocásticos o aleatorios. Los cuales pueden especificarse en términos de un número bastante pequeño de parámetros estadísticos y funciones tales como el espectro de potencia. Tales procesos pueden verse como un conjunto infinito de eventos.

Se encontró que se podía obtener con relativa facilidad una metodología para abordar casos de sistemas lineales sometidos a excitaciones aleatorias. Se produjo una cantidad importante de literatura sobre procesos estocásticos, la cual se originaba a partir de trabajos previos de físicos, tales como el trabajo de Einstein (1905) sobre el movimiento browniano.

Así, al menos para sistemas lineales se encontró que una teoría relativamente simple y completa se podía desarrollar y adaptar en el caso de la Dinámica Estructural, a partir del conocimiento previo.

Pronto se vio que toda ésta teoría lineal de vibraciones aleatorias era aplicable no solamente al campo aeroespacial, sino a una gran variedad de otros problemas de la ingeniería. Así, se vio su aplicación a embarcaciones y a plataformas marinas en la respuesta ante el oleaje y en estructuras de ingeniería civil tales como edificios y puentes ante la acción de sismos.

La aplicación de esta teoría lineal tuvo bastante apoyo con el desarrollo de las computadoras y la aparición de algoritmos adecuados, lo cual permitió procesar datos experimentales con rapidez y eficiencia.

En las aplicaciones ingenieriles, el uso de un modelo lineal para el sistema en consideración lleva a resultados bastante simples y útiles.

Es importante, sin embargo, tener en mente que ningún sistema real es exactamente lineal. En sistemas mecánicos y estructurales las no linealidades pueden surgir de varias maneras y por lo general se tornan progresivamente más importantes conforme la amplitud de la vibración se incrementa.

Partiendo del hecho de que las estructuras deben diseñarse para soportar con una probabilidad determinada los niveles más severos de excitación que pueden sufrir durante su tiempo de vida, es con frecuencia muy importante tomar en cuenta el efecto de estas no linealidades. El no considerarlas puede resultar, en el mejor de los casos, en un diseño demasiado conservador, y en el peor de ellos, en una estructura con bastante probabilidad de falla.

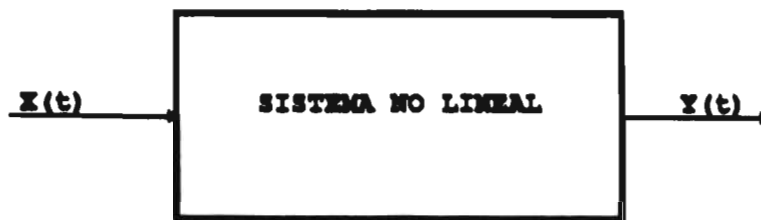
Un caso importante de presencia de no linealidades se presenta en el problema de estructuras resistentes a sismos. Aquí los componentes estructurales presentan frecuentemente un comportamiento significativamente hysterético, cuando sobre las estructuras actúan altos niveles de carga.

Tal histéresis es normalmente altamente no lineal y por lo tanto el comportamiento global de la estructura puede representarse solamente, con la suficiente aproximación, mediante un modelo diferencial no lineal. En combinación con una representación estocástica apropiada de la excitación sísmica, tal sistema no lineal, nos da la base para la formulación de análisis y diseño realistas.

Si un modelo matemático no lineal del sistema bajo consideración se elige junto con un modelo de proceso aleatorio para la excitación, entonces nos enfrentamos con el problema de encontrar la respuesta del sistema.

Ya que la excitación se describe en forma probabilista en términos de varias funciones y parámetros estadísticos, entonces se desea poder predecir aquellas funciones y parámetros estadísticos de la respuesta que nos lleven a un conocimiento probabilístico completo de ésta.

En su forma más simple, el sistema tiene una sola función de entrada y una de salida de interés. Este problema está representado en la figura 1. El proceso excitador  $X(t)$ , se transforma en un proceso de respuesta  $Y(t)$ , por el sistema no lineal y lo que se desea conocer son las características estadísticas de  $Y(t)$  partiendo de un conocimiento del carácter estadístico de  $X(t)$  y del modelo dinámico no lineal del sistema.



**FIGURA 1.** Caracterización de la respuesta de un sistema

El modelo dinámico invariablemente tomará la forma de una ecuación diferencial ordinaria entre  $X(t)$  y  $Y(t)$ . Ya que tanto  $X(t)$  como  $Y(t)$  son estocásticos por naturaleza, nos encontramos con el problema de resolver una ecuación diferencial no lineal estocástica.

Con frecuencia el problema es más complicado que lo señalado por la figura 1. Una vez que se tienen un cierto número de señales de entrada y sus respuestas correspondientes, se tiene que el modelo dinámico es un conjunto de ecuaciones diferenciales. Aquí es necesario especificar las características estadísticas de cada proceso de entrada y salida pero también la relación existente entre los diferentes procesos.

En un nivel más complejo, la excitación puede ser una función del tiempo y del espacio, como es el caso de la excitación acústica en el caso de los aviones. Aquí se puede proceder proponiendo un modelo diferencial en derivadas parciales para el sistema, tomando en cuenta las dificultades de análisis.

O de forma alternativa, se puede simplificar el problema colocando masas concentradas de tal manera que el nuevo modelo se aproxime al sistema diferencial parcial original. Esto tiene como ventaja reducir el modelo del sistema a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias, entonces tendremos un modelo discretizado respecto al espacio, en vez de tener el modelo espacialmente continuo, con una excitación que consiste en un conjunto de procesos aleatorios, en donde cada uno dependerá solamente del tiempo.

## **I.1.- CRITERIOS DE LINEALIZACIÓN**

Las ecuaciones diferenciales no lineales estocásticas son mucho más complejas de resolver que las ecuaciones diferenciales estocásticas lineales. Esto no resulta sorprendente en vista de la situación similar que existe en la teoría determinista de vibraciones. Existe una Teoría Lineal completa, pero no existe un marco teórico para resolver problemas no lineales. Trataremos de forma breve las aproximaciones que se han desarrollado a lo largo de varios años.

### **I.1.1.- Linealización Equivalente**

Una forma natural de resolver problemas no lineales, es remplazar el conjunto de ecuaciones no lineales por un conjunto equivalente de ecuaciones lineales, reduciendo la diferencia entre los dos conjuntos a un mínimo, de alguna forma conveniente.

Este método ha sido aplicado extensamente en el estudio de ecuaciones diferenciales no lineales deterministas (Bogoliuboff (15), Kryloff (15), Caughey (6), Mitropolsky (23)). Una aproximación para tratar con problemas estocásticos lo desarrolló primeramente Booton et al. (3), (1954) y Kazakov (14), (1954).

El método fue propuesto por primera vez por Caughey (6), (1963), como una forma de resolver problemas no lineales estocásticos en la Dinámica Estructural.

El método actualmente se conoce con los nombres de: 'Linealización Equivalente', 'Linealización Estadística' o 'Linealización Estocástica'.

Como una ilustración simple de la idea básica de este método, podemos considerar la siguiente forma muy general para una ecuación diferencial estocástica de un oscilador no lineal de un grado de libertad.

$$g(Y) = X(t) \quad 1.1$$

Aquí  $Y(t)$  es el vector:

$$Y(t) = [Y(t), \dot{Y}(t), \ddot{Y}(t)]^T \quad 1.2$$

en donde,  $Y(t)$  es la respuesta de los desplazamientos,  $\dot{Y}(t)$  es la velocidad y  $\ddot{Y}(t)$  la aceleración.  $g(Y)$  denota una función no lineal arbitraria de  $Y$  y  $X(t)$  es la entrada. Esta notación es de la figura 1.  $X(t)$  y  $Y(t)$  se toman para modelar el proceso estocástico. Por lo tanto, el sistema no lineal transforma  $X(t)$  en el proceso  $Y(t)$ .

El método de linealización equivalente consiste en remplazar la ecuación 1.1 por la forma lineal equivalente siguiente:

$$m\ddot{Y} + c\dot{Y} + kY = X(t) \quad 1.3$$

en donde  $m$ ,  $c$  y  $k$  son parámetros, que pueden ser dependientes del tiempo si la naturaleza estadística de  $X(t)$  varía con el tiempo. El error entre las ecuaciones 1.1 y 1.3, está claramente dado por:

$$\varepsilon = g(Y) - m\ddot{Y} - c\dot{Y} - kY \quad 1.4$$



El error  $\varepsilon$  puede minimizarse de alguna forma conveniente. El método usual es minimizar el valor cuadrático medio de  $\varepsilon$ , con respecto a los parámetros  $m$ ,  $c$  y  $k$ . Este procedimiento nos conduce a un conjunto de ecuaciones en las que intervienen los valores promedio de varias funciones de  $\mathbf{Y}$ .

Para encontrar estos promedios de forma exacta, es necesario conocer las leyes que gobiernan a  $\mathbf{Y}(t)$ . Estas leyes son por lo general desconocidas, de hecho si fueran conocidas entonces la solución del problema inicial no lineal sería conocida y no habría necesidad de realizar la linealización equivalente.

Esta dificultad es con frecuencia resuelta suponiendo a  $\mathbf{Y}(t)$  como un vector gaussiano. La justificación para esta suposición reside en el hecho de que la respuesta del sistema lineal equivalente sería exactamente gaussiana si la excitación  $\mathbf{X}(t)$  es gaussiana, y será aproximadamente lo mismo si  $\mathbf{X}(t)$  es no gaussiano.

Una vez que se supone que  $\mathbf{Y}(t)$  es gaussiano, entonces mediante la aplicación de la Teoría Lineal se puede encontrar un conjunto de ecuaciones no lineales, el cual se desprende de los parámetros  $m$ ,  $c$  y  $k$ . La ecuación será algebraica si los parámetros son constantes y diferencial si estos parámetros dependen del tiempo. Esto en ambos casos se puede resolver fácilmente mediante análisis numérico y en algunos casos, puede resolverse analíticamente.

En varias áreas de estudio, tales como la ingeniería sísmica, la función histerética es no lineal, por ejemplo puede depender del curso del movimiento en vez del movimiento instantáneo.

En este caso, tal y como fue demostrado originalmente por Caughey (6), (1963), el principio de promediar a lo largo de un ciclo tal y como fue establecido por Kryloff y Bogoliuboff (15), (1937), puede aplicarse. Esto presupone que la respuesta del movimiento  $Y(t)$ , se parece a una senoide cuya amplitud y ángulo de fase son **parámetros lentamente variables**.

En esta tesis se analiza con detalle el método de los Parámetros Lentamente Variables, aplicado a un oscilador de un grado de libertad, el cual presenta histéresis bilineal.

Cuando se aplica este método, la validez del mismo, está limitada a situaciones en donde la energía disipada por cada ciclo histerético es pequeña.

El cálculo de las cantidades promedio, de los parámetros que se presentan en la ecuación puede realizarse viendo cual es el valor promedio de estos parámetros a lo largo de un ciclo completo, partiendo de la base de que los valores de la amplitud y la fase de  $Y(t)$  son razonablemente constantes a lo largo de un período. Esta técnica fue aplicada por primera vez por Caughey (4), (1960), para osciladores con histéresis bilineal y su exactitud ha sido sistemáticamente estudiada por Takemiya (30), (1973); Lutes y Takemiya (17), (1974); Takemiya y Lutes (31), (1977).

La disipación histerética de energía en estructuras, puede ser relativamente grande. En tales circunstancias el proceso de la respuesta no puede encontrarse a partir de promediar a lo largo de un ciclo, es decir, en este caso no es recomendable aplicar el método de los Parámetros Lentamente Variables.

Un método para salvar ésta dificultad es representar la fuerza histerética mediante una ecuación diferencial no lineal de primer orden. Una amplia variedad de formas de lazos histeréticos se pueden modelar satisfactoriamente partiendo de esta base (Suzuki y Minai (29), 1987; Wen, (34), 1986; (35), 1989). En el apéndice A de este trabajo se realiza un estudio de estas formas y la influencia de los parámetros de la ecuación diferencial no lineal de primer orden en las diferentes formas.

Una combinación del modelo histerético diferencial con la ecuación diferencial de movimiento del sistema nos lleva a un modelo del sistema, definido por una ecuación diferencial no lineal, a partir de la cual puede construirse un modelo lineal equivalente por medio de una extensión del método.

La importancia de este criterio en el diseño de estructuras resistentes a sismos se ha puesto de manifiesto en la gran cantidad de investigación sobre este tema realizada últimamente (Roberts y Dunne (22), (1988); Y.K. Wen (34)y(35), (1986, 1989)).

La Linealización Equivalente, ha mostrado ser una herramienta muy útil en muchas áreas de la ingeniería. Por ejemplo, en el análisis del movimiento aleatorio de una estructura al desplazarse sobre una superficie (Constantinou y Tadjbakhsh (10), (1984); Noguchi (20), (1985)). También se ha aplicado a la respuesta de plataformas marinas ante oleaje, (Spanos y Agarwal (27) (1984); Gumestad y Connor (13), (1983); Leira (16), (1987); Grigoriu y Allbe (12), (1986)).

### **I.1.2.- Ecuaciones no lineales equivalentes**

Una alternativa interesante en la solución de estos problemas fue presentada por Caughey (7), (1986). La idea es remplazar el conjunto original de ecuaciones diferenciales no lineales por otro conjunto de ecuaciones no lineales equivalentes, para las cuales se puede encontrar una solución exacta. Desafortunadamente, el tipo de ecuaciones diferenciales no lineales que tienen solución exacta, es muy reducido, y por consiguiente el grado de aplicación de este método es muy restringido.

### **I.1.3.- El Método de las Perturbaciones**

Si las no linealidades en el sistema son suficientemente pequeñas, se puede aplicar el método de las Perturbaciones. Este método es muy conocido en la teoría determinista de las vibraciones desde hace tiempo y fue generalizado para el caso de excitación estocástica por Crandall (11), (1963).

La idea general de este método es expandir la solución de las ecuaciones no lineales a varios términos, de los cuales el primero es la respuesta lineal cuando las no linealidades en el sistema se quitan. Los siguientes términos indican la influencia de las no linealidades.

En general son largos y tediosos. En la práctica aún se tienen dificultades para no linealidades grandes.

#### **Y.1.4.- Métodos Markovianos**

Una solución totalmente diferente para la solución de problemas no lineales de vibración aleatoria está basada en la Teoría de los procesos de Markov.

Desde los primeros trabajos realizados por físicos sobre el movimiento browniano, se ha tenido conocimiento que la respuesta de sistemas puede modelarse de forma exacta, desde un enfoque matemático, como procesos markovianos multidimensionales.

La función de probabilidad en tales procesos está gobernada por una ecuación diferencial parcial lineal, conocida como la ecuación de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK). Esta ecuación es similar a la ecuación que define la difusión del calor en problemas de flujo térmico.

Desafortunadamente el tipo de problemas no lineales para los cuales la ecuación de FPK puede ser resuelta exactamente, es aún muy limitado, a pesar de los avances teóricos que se han realizado últimamente.

Los problemas para los cuales se ha reportado solución son los relativos a sistemas con un grado de libertad, para los cuales la solución estacionaria de la ecuación de FPK se puede determinar. En este caso el amortiguamiento y la rigidez del oscilador son función del desplazamiento y de la velocidad.

Este tipo de soluciones no incluyen modelos importantes de sistemas estructurales sometidos a vibración tales como los que se presentan cuando se tiene la carga de un fluido.

Adicionalmente, existen grandes dificultades al aplicar este método a sistemas con más de un grado de libertad.

#### **I.1.5.- Simulación de Monte Carlo**

Un método alternativo para estimar, con el deseado grado de precisión, la respuesta estadística de sistemas excitados de forma aleatoria, se basa en experimentos aleatorios realizados en computadora, los cuales se conocen como simulación de Monte Carlo (Shinozuka (26), (1972); Rubinstein (24), (1981)).

La base teórica de la simulación de Monte Carlo está en el hecho de que las ecuaciones diferenciales estocásticas que gobiernan el movimiento de algún sistema, se puede interpretar como un conjunto infinito de ecuaciones diferenciales deterministas. Para cada elemento del conjunto, la señal de entrada es un elemento del conjunto de funciones que definen el proceso de excitación y la respuesta o salida es el correspondiente elemento del conjunto de funciones que definen el proceso de salida.

Lo esencial para realizar cualquier estudio mediante simulación es algún algoritmo que genere un conjunto de números pseudo aleatorios los cuales pertenezcan a un conjunto con cierta distribución de probabilidad. El adecuado proceso de este conjunto

de números nos lleva a funciones aleatorias que representan la excitación, con un preseleccionado contenido de frecuencias y variaciones de la intensidad.

Después de haber generado una muestra de la excitación aleatoria, la respuesta debe calcularse por cualquiera de las subrutinas disponibles para la integración numérica de ecuaciones diferenciales. Entonces, se puede generar otra muestra de la excitación y calcular los valores de la respuesta estructural. Este método puede aplicarse tanto a problemas estacionarios como a transitorios.

Resulta claro que entre más muestras sean simuladas, la desviación esperada de los valores de respuesta será menor. Desafortunadamente, el número de muestras que son necesarias para determinar los resultados, dentro de niveles aceptables de confiabilidad es alto. Este hecho hace que el costo de la simulación en computadora sea significativo, sobre todo para el caso de sistemas vibratorios con muchos grados de libertad.

Sin embargo, la necesidad de procesar un gran número de muestras puede reducirse si el problema consiste en encontrar la respuesta estacionaria solamente. Esto es conveniente realizarlo en el análisis dinámico con modelos probabilísticos que nos describen el efecto del oleaje o la turbulencia atmosférica. Pero, no es recomendable para el caso de modelos estocásticos no estacionarios, como es el caso del análisis de respuesta estructural ante sismos.

## **I.2.- Alcances de esta tesis**

En el capítulo II, se explica el método de los Parámetros Lentamente Variables (PLV), aplicándolo a la solución de una ecuación diferencial no lineal de segundo orden.

En el capítulo III se aplica el método de los Parámetros Lentamente Variables (PLV) en la solución de la respuesta de un oscilador con histéresis bilineal, en el cual actúa una excitación armónica.

En el capítulo IV se plantea la solución aleatoria de un oscilador con histéresis bilineal considerando como excitación un proceso gaussiano estacionario. Se aplica el método de los Parámetros Lentamente Variables (PLV).

Con el fin de tener un punto de vista más amplio con relación a las facilidades que se tienen para poder plantear matemáticamente una cantidad muy grande de modelos histéreticos, en el apéndice A se resuelve la ecuación de Wen-Bouc mediante un procedimiento numérico.



## **II.- El Método de los Parámetros Lentamente Variables**

## II.1.- Planteamiento del problema

Este método fue propuesto por primera vez por Kryloff y Bogoliuboff (1937). Permite encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales, mediante algunas consideraciones que ayudan a simplificar el problema de la no linealidad.

Se partirá de la siguiente ecuación general:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu \phi(x, \dot{x}, t) = 0 \quad 2.1$$

En donde  $\phi(x, \dot{x}, t)$  es una función tal que hace que, la ec. 2.1, sea una ecuación no lineal y  $\mu$  es una constante.

Para el siguiente caso particular :

$$\phi(x, \dot{x}, t) = 0 \quad 2.2$$

La ec. 2.1, se transforma en:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad 2.3$$

la cual es una ecuación lineal, que nos define el comportamiento no forzado de un oscilador lineal.

La solución de la ecuación diferencial 2.3 puede escribirse como:

$$x = A \cos (\omega_0 t + \theta) \quad 2.4$$

Si derivamos con respecto al tiempo esta última ecuación:

$$\dot{x} = -w_0 A \text{ Sen } (w_0 t + \theta) \quad 2.4a$$

Por otro lado, para solucionar la ec. 2.1 por el método de Parámetros Lentamente Variables se considera lo siguiente:

a).- La solución del sistema no lineal es de la forma de la solución del sistema lineal.

b).- La amplitud  $A$  y el ángulo de fase  $\theta$ , son funciones del tiempo y su variación es lenta.

De acuerdo con el punto b, se puede escribir:

$$A = f(t) \quad ; \quad \theta = g(t)$$

Entonces la solución de la ecuación no lineal estará dada en forma general por:

$$x = A(t) \text{ Cos } (w_0 t + \theta(t)) \quad 2.5$$

Por conveniencia haremos los siguientes cambios de variable:

$$\psi = w_0 t + \theta \quad 2.6$$

$$\dot{\psi} = w_0 + \dot{\theta} \quad 2.7$$

La ec. 2.5 entonces podemos escribirla de forma más simple como:

$$x = A(t) \text{ Cos } \psi(t) \quad 2.8$$

Derivamos respecto al tiempo a la ec. 2.5:

$$\dot{x} = \dot{A} \cos(w_0 t + \theta) + A \frac{d(\cos(w_0 t + \theta))}{dt} \quad 2.8a$$

$$\dot{x} = \dot{A} \cos(w_0 t + \theta) - A (w_0 + \dot{\theta}) \text{Sen}(w_0 t + \theta) \quad 2.9$$

Tomando en cuenta la ec. 2.6 en la ec. 2.9:

$$\dot{x} = \dot{A} \cos\psi - A (w_0 + \dot{\theta}) \text{Sen}\psi \quad 2.10$$

De acuerdo con la ec. 2.6, la ec. 2.4a puede escribirse como:

$$\dot{x} = -w_0 A \text{Sen}\psi \quad 2.11$$

Si restamos la ec. 2.10 a la ec. 2.11 se tiene:

$$-w_0 A \text{Sen}\psi - \dot{A} \cos\psi + A (w_0 + \dot{\theta}) \text{Sen}\psi = 0 \quad 2.12$$

$$\boxed{\dot{A} \cos\psi - A \dot{\theta} \text{Sen}\psi = 0} \quad 2.13$$

La igualdad 2.13 es muy importante en el Método de PLV. De esta igualdad puede verse que debido a la suposición de variación lenta de las funciones  $A(t)$  y  $\theta(t)$ , entonces:

$$\frac{dA(t)}{dt} \approx 0 \quad ; \quad \frac{d\theta(t)}{dt} \approx 0$$

La ec. 2.10 puede por lo tanto simplificarse tomando en cuenta la ec. 2.13 y la ec. 2.6.

$$\dot{x} = \dot{A} \operatorname{Cos} \psi - A \dot{\theta} \operatorname{Sen} \psi - A \omega_0 \operatorname{Sen} \psi \quad 2.14$$

$$\dot{x} = -A \omega_0 \operatorname{Sen} (\omega_0 t + \theta) \quad 2.15$$

Se hace notar que en la ec. 2.15 tanto  $A$  como  $\theta$  son funciones del tiempo.

Ahora derivamos la ec. 2.15 respecto al tiempo:

$$\ddot{x} = -\omega_0 \dot{A} \operatorname{Sen} (\omega_0 t + \theta) - \omega_0 A (\omega_0 + \dot{\theta}) \operatorname{Cos} (\omega_0 t + \theta) \quad 2.16$$

Considerando la ec. 2.6 en la ec. 2.16:

$$\ddot{x} = -\omega_0 \dot{A} \operatorname{Sen} \psi - \omega_0 A (\omega_0 + \dot{\theta}) \operatorname{Cos} \psi \quad 2.17$$

Por otro lado, volviendo a la ec. 2.1:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu \phi(x, \dot{x}, t) = 0$$

como:

$$x = A \operatorname{Cos} \psi$$

$$\dot{x} = -\omega_0 A \operatorname{Sen} \psi$$

entonces la función  $\phi(x, \dot{x}, t)$  puede escribirse como:

$$\phi(A \operatorname{Cos} \psi, -\omega_0 A \operatorname{Sen} \psi, t)$$

Ahora sustituimos las ecs. 2.5 y 2.16 en la ec. 2.1, y se obtiene:

$$\begin{aligned} (-w_0 \dot{A} \operatorname{Sen} \psi - w_0 A (\dot{w}_0 + \dot{\theta}) \operatorname{Cos} \psi + w_0^2 (A \operatorname{Cos} (w_0 t + \theta)) = \\ = -\mu \phi(R \operatorname{Cos} \psi, -w_0 A \operatorname{Sen} \psi, t) \end{aligned}$$

$$\boxed{-w_0 \dot{A} \operatorname{Sen} \psi - w_0 A \dot{\theta} \operatorname{Cos} \psi = -\mu \phi(A \operatorname{Cos} \psi, -w_0 A \operatorname{Sen} \psi, t)} \quad 2.18$$

Las ecs. 2.13 y 2.18 forman un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden, de las cuales pueden despejarse  $\dot{A}$  y  $\dot{\theta}$ . De la ec. 2.13 despejamos  $\dot{\theta}$ :

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{A} \operatorname{Cos} \psi}{A \operatorname{Sen} \psi} \quad 2.19$$

Sustituyendo la ec. 2.19 en la ec. 2.18:

$$-w_0 \dot{A} \operatorname{Sen} \psi - w_0 \dot{A} \operatorname{Cos} \psi \frac{\operatorname{Cos} \psi}{\operatorname{Sen} \psi} = -\mu \phi(A \operatorname{Cos} \psi, -w_0 A \operatorname{Sen} \psi, t)$$

$$\dot{A} \operatorname{Sen} \psi + \dot{A} \frac{\operatorname{Cos}^2 \psi}{\operatorname{Sen} \psi} = \frac{\mu}{w_0} \phi(A \operatorname{Cos} \psi, -w_0 A \operatorname{Sen} \psi, t) \quad 2.20$$

$$\dot{A} \operatorname{Sen} \psi + \dot{A} \frac{(1 - \operatorname{Sen}^2 \psi)}{\operatorname{Sen} \psi} = \frac{\mu}{w_0} \phi(A \operatorname{Cos} \psi, -w_0 A \operatorname{Sen} \psi, t) \quad 2.21$$

$$\frac{\dot{A}}{\operatorname{Sen} \psi} = \frac{\mu}{w_0} \phi(A \operatorname{Cos} \psi, -w_0 A \operatorname{Sen} \psi, t) \quad 2.22$$

$$\boxed{\dot{A} = \frac{\mu}{w_0} \operatorname{Sen} \psi \phi(A \operatorname{Cos} \psi, -w_0 A \operatorname{Sen} \psi, t)} \quad 2.23$$

Al sustituir en la ec. 2.19 a la ec. 2.23 se tiene:

$$\dot{\theta} = \left[ \frac{\mu}{w_0} \text{Sen}\psi \phi(A \text{Cos}\psi, -w_0 A \text{Sen}\psi, t) \right] \frac{\text{Cos}\psi}{A \text{Sen}\psi}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\mu \text{Cos}\psi}{w_0 A} \phi(A \text{Cos}\psi, -w_0 A \text{Sen}\psi, t) \quad 2.24$$

En este método para poder encontrar los valores  $\dot{A}$  y  $\dot{\theta}$  se considera que debido a que  $A(t)$  y  $\theta(t)$  varían lentamente respecto del tiempo, entonces resulta una buena aproximación el considerar los promedios de los valores  $\dot{A}(t)$  y  $\dot{\theta}(t)$  en un ciclo y estos valores promedio se consideran los valores instantáneos.

Con el fin de diferenciar  $\dot{A}$  y  $\dot{\theta}$  de los valores promedio, llamaremos a estos valores promedios como sigue:

$$\dot{A} \text{ promedio} = \dot{A}_{prom.}$$

$$\dot{\theta} \text{ promedio} = \dot{\theta}_{prom.}$$

Al integrar en un ciclo a la ec. 2.23, nos resulta:

$$\dot{A}_{prom} = \frac{\mu}{2\pi w_0} \int_0^{2\pi} \text{Sen}\psi \phi(A \text{Cos}\psi, -w_0 A \text{Sen}\psi, t) d\psi \quad 2.25$$

Para  $\dot{\theta}$  (ec. 2.24) tenemos:

$$\dot{\theta}_{prom} = \frac{\mu}{2\pi w_0 A} \int_0^{2\pi} \cos \psi \phi(A \cos \psi, -w_0 A \sin \psi, t) d\psi \quad 2.26$$

Una vez encontradas estas integrales, se procede a integrar  $\dot{A}_{prom}$  y  $\dot{\theta}_{prom}$  con respecto al tiempo, encontrándose así los valores promedio de  $A$  y  $\theta$ , Estos se sustituyen en la ecuación solución:

$$x = A \cos (w_0 t + \theta) \quad 2.27$$

Debe notarse que tanto  $A$  como  $\theta$  son funciones que varían con el tiempo.

## II.2.- Aplicación del método a un problema específico

Para ver la aplicación directa de las ecs. 2.25 y 2.26 se resolverá la siguiente ecuación diferencial no lineal.

$$\ddot{x} + w_0^2 x + hx^3 = 0 \quad 2.28$$

donde las variables significan lo siguiente:

$x$  = Desplazamientos

$w_0$  = Frecuencia natural

$h$  = Parámetro

La ec. 2.28 puede escribirse en forma más general como:

$$\ddot{x} + w_0^2 x + \mu \phi(x, \dot{x}, t) = 0 \quad 2.29$$



Puede verse que:

$$\mu \phi(x, \dot{x}, t) = h x^3 \quad 2.30$$

La solución de la ecuación diferencial podemos escribirla como:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \theta) \quad 2.31$$

Como tenemos:

$$\psi = \omega_0 t + \theta \quad 2.32$$

la ec. 2.31 la escribiremos:

$$x = A \cos \psi \quad 2.33$$

De la ec. 2.23:

$$\dot{A}_{prom.} = \frac{\mu}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \text{Sen} \psi \phi(A \cos \psi, -\omega_0 A \text{Sen} \psi, t) d\psi \quad 2.34$$

como:

$$\mu = h$$

$$\phi(x, \dot{x}, t) = \phi(A \cos \psi, -\omega_0 A \text{Sen} \psi, t) = x^3$$

Sustituyendo en la ec. 2.34:

$$\dot{A}_{prom.} = \frac{h}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \text{Sen} \psi x^3 d\psi \quad 2.35$$

Sustituyendo la ec. 2.33 en la ec. 2.35:

$$\dot{A}_{prom.} = \frac{h}{2\pi w_0} \int_0^{2\pi} \text{Sen}\psi (A \text{Cos}\psi)^3 d\psi \quad 2.36$$

integrando se tiene:

$$\dot{A}_{prom.} = \frac{hA^3}{2\pi w_0} \left[ \frac{-\text{Cos}^4\psi}{4} \right]_0^{2\pi} \quad 2.37$$

tomando límites,

$$\dot{A}_{prom.} = 0 \quad 2.38$$

Esto indica que A no varía con respecto al tiempo, sino que se mantiene constante.

Para el ángulo de fase  $\theta$  tenemos de la ec. 2.26:

$$\dot{\theta}_{prom.} = \frac{\mu}{2\pi w_0 A} \int_0^{2\pi} \text{Cos}\psi \phi(A \text{Cos}\psi, -w_0 A \text{Sen}\psi, t) d\psi \quad 2.39$$

$$\dot{\theta}_{prom.} = \frac{h}{2\pi w_0 A} \int_0^{2\pi} \text{Cos}\psi x^3 d\psi \quad 2.40$$

$$\dot{\theta}_{prom.} = \frac{h}{2\pi w_0 A} \int_0^{2\pi} \text{Cos}\psi (A \text{Cos}\psi)^3 d\psi \quad 2.41$$

$$\dot{\theta}_{prom.} = \frac{hA^2}{2\pi w_0} \int_0^{2\pi} \text{Cos}^4 \psi \, d\psi \quad 2.42$$

$$\dot{\theta}_{prom.} = \frac{hA^2}{2\pi w_0} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{Cos}2\psi \right)^2 d\psi \quad 2.43$$

$$\dot{\theta}_{prom.} = \frac{hA^2}{2\pi w_0} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \text{Cos}2\psi + \frac{1}{4} \text{Cos}^2 2\psi \right) d\psi \quad 2.44$$

$$\dot{\theta}_{prom.} = \frac{hA^2}{2\pi w_0} \int_0^{2\pi} \left( \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \text{Cos}2\psi + \frac{1}{8} \text{Cos}4\psi \right) d\psi \quad 2.45$$

integrando:

$$\dot{\theta}_{prom.} = \frac{hA^2}{2\pi w_0} \left[ \frac{3}{8} \psi + \frac{1}{8} \text{Sen}2\psi + \frac{1}{32} \text{Sen}4\psi \right]_0^{2\pi} \quad 2.46$$

tomando límites se obtiene:

$$\dot{\theta}_{prom.} = \frac{3hA^2}{8w_0} \quad 2.47$$

Esto indica que  $\theta$  presenta variación con respecto al tiempo. Como:

$$A = f(t) \quad ; \quad \theta = f(t)$$

Se integrará respecto del tiempo  $\dot{A}_{prom}$  y  $\dot{\theta}_{prom.}$ , para así encontrar  $A$  y  $\theta$ .

Integrando la ec. 2.38:

$$A = C_1 \quad 2.48$$

Integrando la ec. 2.47:

$$\theta = \int \frac{3A^2}{8w_0} dt + C_2$$
$$\theta = \frac{3A^2}{8w_0} t + C_2 \quad 2.49$$

Se puede observar que  $\theta$  varía en función del tiempo en forma lineal. El valor de las constantes  $C_1$  y  $C_2$  depende de las condiciones iniciales. Suponiendo que estas son:

$$x(0) = A_0 \quad 2.50a$$

$$\dot{x}(0) = 0 \quad 2.50b$$

Como la ecuación solución es de la forma:

$$x = A \cos (w_0 t + \theta) \quad 2.51$$

es decir:

$$x = C_1 \cos \left( w_0 t + \frac{3A^2}{8w_0} t + C_2 \right) \quad 2.52$$

Sustituyendo la condición 2.50a:

$$A_0 = C_1 \text{ Cos } C_2 \quad 2.53$$

Para poder sustituir la condición 2.50b, es necesaria la primera derivada de la ec. 2.52 respecto al tiempo.

$$\dot{x} = -C_1 \left[ \omega_0 + \frac{3hA^2}{8\omega_0} \right] \text{ Sen } \left[ \omega_0 t + \frac{3hA^2}{8\omega_0} t + C_2 \right] \quad 2.54$$

Sustituyendo en la ec. 2.54 la condición 2.50b:

$$-C_1 \left[ \omega_0 + \frac{3hA^2}{8\omega_0} \right] \text{ Sen } C_2 = 0 \quad 2.55$$

$$-C_1 \text{ Sen } C_2 = 0 \quad 2.56$$

Si se divide la ec. 2.56 entre la ec. 2.53:

$$\text{Tan } C_2 = 0 \quad 2.57$$

$$C_2 = 0 \quad 2.58$$

Sustituyendo el valor de  $C_2$  en la ec. 2.53:

$$C_1 = A_0 \quad 2.59$$

Encontrado el valor de las constantes, sustituimos en la solución de la ec. 2.52.

$$x = A_0 \text{ Cos } \left( \omega_0 + \frac{3hA_0^2}{8\omega_0} \right) t \quad 2.60$$

Esta ecuación 2.60 es la solución de la ecuación diferencial no lineal dada en la ec. 28.

En el capítulo que sigue se hará una aplicación del método de PLV a un oscilador cuyo comportamiento es histerético bilineal, ante una señal armónica.

**III.- Aplicación del Método de los  
Parámetros Lentamente Variables  
para el Análisis de un Oscilador  
con Comportamiento Histerético  
Bilineal, Sometido a una Excitación  
Armónica**

### **III.1.- Introducción**

En los fenómenos físicos que ocurren, al querer describir su comportamiento cualitativo y cuantitativo, se presentan diversos grados de complejidad.

Para la descripción del comportamiento de un fenómeno, por lo general, se adopta un modelo matemático, con el cual se trata de reproducir con la mejor fidelidad posible el fenómeno. En términos generales, pueden adoptarse diferentes modelos matemáticos para un solo fenómeno, los cuales varían en complejidad.

Para realizar una descripción más fiel del fenómeno, generalmente se incorporan más variables, lo que nos conduce a modelos matemáticos más elaborados. Aquí se presenta un dilema: para mayor aproximación al fenómeno se tendrá un modelo elaborado, entre menor aproximación se tenga, el modelo matemático se simplifica. Así, por ejemplo los fenómenos de tipo biológico, presentan un grado de complejidad tan grande, que se pueden abordar solamente de forma muy limitada.

Uno de los fenómenos físicos que son de interés en la ingeniería es el relacionado con las oscilaciones o vibraciones de un cuerpo, como es el caso de edificios sometidos a diferentes tipos de excitaciones.

Como primer intento de describir el comportamiento de estructuras



al presentarse vibración en ellas, se supone que el comportamiento del material constituyente de la estructura es lineal, es decir: los esfuerzos y las deformaciones cumplen una relación lineal.

Pero hay muchos problemas que se presentan en la realidad que son precisamente relacionados con materiales que no tienen el comportamiento lineal que se supone.

Otro problema bastante grande es que el material de muchas estructuras al soportar cargas sísmicas, por lo general comienza a trabajar en una zona que no corresponde al comportamiento elástico, a éste se le conoce como inelástico.

Una característica que exhibe cualquier material que ha incurrido en el rango inelástico, es que se presentan deformaciones permanentes al dejar de actuar las cargas externas.

El problema es que al tratar de encontrar un modelo matemático que nos reproduzca el comportamiento inelástico de un material, no resulta un modelo tan sencillo, respecto de la descripción matemática del comportamiento elástico del material.

El tipo de modelo matemático que describe el comportamiento de un material o una estructura ante cargas externas, dentro del rango inelástico, es un modelo no lineal.

Dentro de la Teoría Matemática de Ecuaciones, se ve que siempre los modelos no lineales son mucho más difíciles de resolver que los modelos lineales. Incluso, en la actualidad no se cuenta con una teoría completa de solución de ecuaciones no lineales, en contraste con el gran desarrollo que ha tenido el caso lineal.

Si tratamos de reproducir fenómenos no lineales sujetándonos solamente a las ecuaciones lineales, tendríamos una representación bastante pobre de estos fenómenos y en algunos casos incluso totalmente impropia.

Por ésta razón, es necesario, aún con los pocos elementos que contamos, el tratar de resolver los problemas de fenómenos no lineales, tratando de resolver el modelo matemático no lineal correspondiente.

La mayoría de los problemas de Dinámica Estructural pueden ser modelados, con una primera aproximación, en términos de ecuaciones diferenciales lineales de movimiento, si es que las amplitudes son relativamente bajas, ya que el resolver ecuaciones diferenciales lineales es una tarea relativamente sencilla. El asociar a un fenómeno determinado, ecuaciones lineales, viene a ser deseable en muchos problemas de investigación.

Pero existen casos en los cuales un modelo lineal, para definir el problema físico, no es adecuado ya que este modelo no nos describe las propiedades cualitativas y cuantitativas del fenómeno.

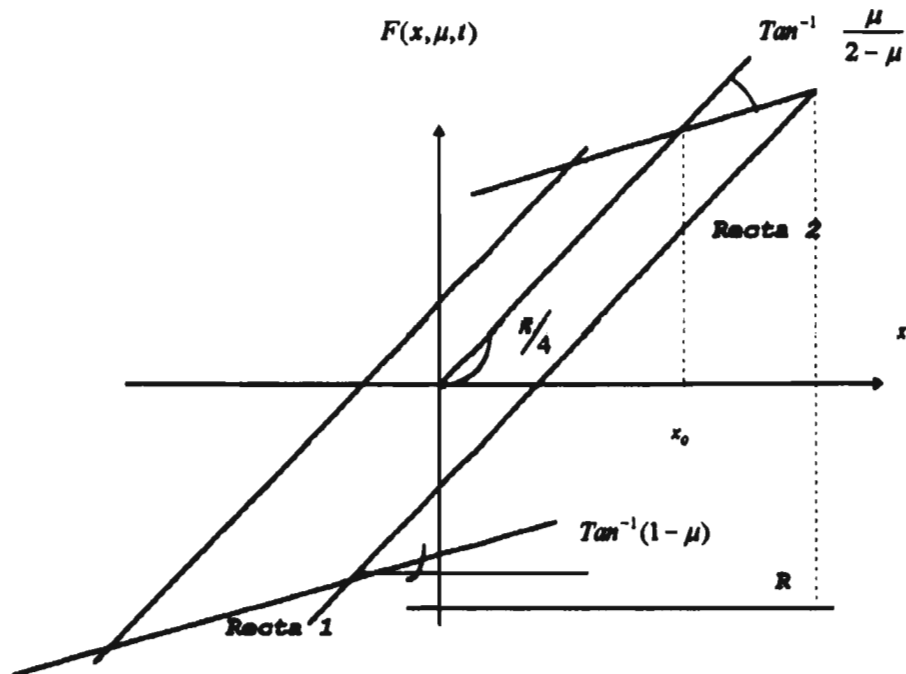
Un ejemplo clásico de este tipo de fenómenos es la oscilación de un péndulo, el cual presenta amplitudes grandes. Aquí la ecuación lineal utilizada para describir la oscilación de péndulos deja de tener validez, y en su lugar debemos aplicar una ecuación no lineal.

En este capítulo resolveremos una ecuación diferencial no lineal, la cual nos describe el comportamiento no lineal de un material, para el cual se está suponiendo un comportamiento histerético bilineal.

**III.2.- Aplicación del Método de los PLV en la Respuesta Histerética Bilineal de un Oscilador Sometido a una Excitación Armónica**

Algunos sistemas presentan un comportamiento bilineal ante cargas alternadas. Tal comportamiento puede ser presentado en un material elasto-plástico. Aquí analizaremos la respuesta de un oscilador con un grado de libertad el cual tiene histéresis bilineal, y está sometido a una señal armónica.

Consideremos la vibración forzada de un sistema de un grado de libertad, con un resorte, el cual presenta un comportamiento como el mostrado en la figura 2.



**FIGURA 2. Modelo de Histéresis Bilineal**

La ecuación diferencial del movimiento del sistema está dada por:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k F(x, \mu, t) = P \cos wt \quad 3.1$$

En donde  $F(x, \mu, t)$  es la fuerza histéretica restauradora.

$F(x, \mu, t)$  es tal que cuando:

$$\mu \rightarrow 0$$

entonces:

$$F(x, \mu, t) \rightarrow x$$

y entonces tendríamos el caso lineal:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = P \cos wt$$

La señal externa que excita al sistema es  $P \cos wt$ .

Al tomar en cuenta las siguientes igualdades:

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad 3.2$$

$$\tau = w_0^{-1} \quad 3.3$$

$$X_s = \frac{P}{k} \quad 3.4$$

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0} \quad 3.5$$

Sustituimos la ec. 3.2 en la ec. 3.3:

$$\tau = \sqrt{\frac{k}{m}} t \quad 3.6$$

Despejamos t:

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \tau$$

Dividimos la ec. 3.1 entre k:

$$\frac{m}{k} \frac{d^2 x}{dt^2} + F(x, \mu, t) = \frac{P}{k} \text{Cos } \omega t$$

De la ec. 3.4 se tiene:

$$\frac{m}{k} \frac{d^2 x}{dt^2} + F(x, \mu, t) = X_s \text{Cos } \omega t \quad 3.7$$

De la ec. 3.3:

$$\tau = \omega_0 t ; \quad t = \frac{\tau}{\omega_0}$$

Derivamos respecto a  $\tau$  :

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{w_0}$$

Como:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} \quad 3.8$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{w_0} \frac{dx}{dt} \quad 3.8a$$

Derivando la ec. 3.8a nuevamente respecto de  $\tau$ :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{1}{(w_0^2)} \frac{d^2x}{dt^2}$$

De aqui se obtiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = w_0^2 \frac{d^2x}{d\tau^2} \quad 3.9$$

Sustituyendo la ec. 3.9 en la ec. 3.7:

$$\frac{m}{k} w_0^2 \frac{d^2x}{d\tau^2} + F(x, \mu, t) = X_s \cos wt \quad 3.10$$

De la ec. 3.2 se tiene:

$$\frac{m}{k} = \frac{1}{w_0^2}$$

Sustituyendo en la ec. 3.10:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F(x, \mu, t) = X_s \cos \omega t \quad 3.11$$

De las ecs. 3.3 y 3.4 tenemos:

$$t = \frac{\tau}{\omega_0} \quad ; \quad \omega = \eta \omega_0$$

Sustituyendo en la ec. 3.11:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + F(x, \mu, \tau) = X_s \cos \left( \frac{\eta \tau \omega_0}{\omega_0} \right)$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{d\tau^2} + F(x, \mu, \tau) = X_s \cos \eta \tau} \quad 3.12$$

Como antes se dijo si  $\mu = 0$ , entonces la ecuación de movimiento es lineal. De esta forma la solución  $x(\tau)$  es armónica. Si  $\mu$  no es cero, pero es pequeño, el carácter esencial de la respuesta no cambia y continúa siendo armónica.

El método de solución que sigue se basa en el trabajo de Kryloff y Bogoliuboff (1937), (Método de los Parámetros Lentamente Variables).

Partiendo de lo anterior, podemos proponer como solución  $x(\tau)$  a la función:

$$x(\tau) = R \cos (\eta \tau + \phi) \quad 3.13$$



En la solución propuesta, tanto  $R$  como  $\phi$  son funciones de  $\tau$  y se parte de suponer que tanto  $R$  como  $\phi$ , varían lentamente respecto de  $\tau$ , de ahí el nombre de Método de los Parámetros Lentamente Variables.

Para simplificar haremos un cambio de variable:

$$\theta = (\eta\tau + \phi) \quad 3.14$$

O sea que  $x(\tau)$  puede escribirse como:

$$x(\tau) = R \text{ Cos } \theta \quad 3.15$$

Derivando la ec. 3.13 respecto de la variable  $\tau$ :

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dR}{d\tau} \text{ Cos } (\eta\tau + \phi) + \left[ -R \left( \frac{d(\eta\tau + \phi)}{d\tau} \right) \right] [\text{Sen } (\eta\tau + \phi)]$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dR}{d\tau} \text{ Cos } (\eta\tau + \phi) - R \left( \left( \eta + \frac{d\phi}{d\tau} \right) \text{ Sen } (\eta\tau + \phi) \right)$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dR}{d\tau} \text{ Cos } (\eta\tau + \phi) - \eta R \text{ Sen } (\eta\tau + \phi) - R \frac{d\phi}{d\tau} \text{ Sen } (\eta\tau + \phi)$$

Como:

$$\theta = (\eta\tau + \phi)$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dR}{d\tau} \text{ Cos } \theta - \eta R \text{ Sen } \theta - R \frac{d\phi}{d\tau} \text{ Sen } \theta \quad 3.16$$

Ya que se está partiendo de la consideración de que  $R$  y  $\phi$  son

funciones de  $\tau$  que varían lentamente, entonces sus derivadas pueden suponerse aproximadamente iguales a cero, es decir:

$$\frac{dR}{d\tau} \approx 0 \quad ; \quad \frac{d\phi}{d\tau} \approx 0$$

Entonces en la ec. 3.16 tendremos:

$$\frac{dR}{d\tau} \text{Cos}\theta - R \frac{d\phi}{d\tau} \text{Sen}\theta = 0 \quad 3.17$$

Y la ec. 3.16 se transforma en:

$$\frac{dx}{d\tau} = -\eta R \text{Sen}\theta \quad 3.18$$

Si derivamos nuevamente respecto a  $\tau$  la ec. 3.18, se tiene:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{d(-\eta R \text{Sen}(\eta\tau + \phi))}{d\tau}$$

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\eta \left( \frac{dR}{d\tau} \text{Sen}(\eta\tau + \phi) + R \frac{d(\eta\tau + \phi)}{d\tau} \text{Cos}(\eta\tau + \phi) \right)$$

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\eta \left( \frac{dR}{d\tau} \text{Sen}(\eta\tau + \phi) + R \left( \eta + \frac{d\phi}{d\tau} \right) \text{Cos}(\eta\tau + \phi) \right)$$

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\eta^2 R \text{Cos}(\eta\tau + \phi) - \eta \frac{dR}{d\tau} \text{Sen}(\eta\tau + \phi) - \eta R \frac{d\phi}{d\tau} \text{Cos}(\eta\tau + \phi)$$

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = -\eta^2 R \cos\theta - \eta \frac{dR}{d\tau} \operatorname{Sen}\theta - \eta R \frac{d\phi}{d\tau} \cos\theta \quad 3.19$$

Sustituyendo la ec. 3.19 en la ec. 3.12:

$$\begin{aligned} \left( -\eta^2 R \cos\theta - \eta \frac{dR}{d\tau} \operatorname{Sen}\theta - \eta R \frac{d\phi}{d\tau} \cos\theta \right) + F(x, \mu, \tau) &= \\ &= X_s \cos \eta \tau \end{aligned} \quad 3.20$$

Ya que:

$$x = f(R \cos\theta) \quad 3.21$$

y como:

$$\begin{aligned} \theta &= \eta \tau + \phi \\ \eta \tau &= \theta - \phi \end{aligned} \quad 3.22$$

Sustituyendo la ec. 3.21 y la ec. 3.22 en la ec. 3.20:

$$\begin{aligned} -\eta^2 R \cos\theta - \eta \frac{dR}{d\tau} \operatorname{Sen}\theta - \eta R \frac{d\phi}{d\tau} \cos\theta + F(R \cos\theta, \mu, \tau) &= \\ &= X_s \cos (\theta - \phi) \end{aligned} \quad 3.23$$

Multiplicamos la ec. 3.17 por  $\eta \cos \theta$ :

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\tau} \cos\theta (\eta \cos\theta) - R \frac{d\phi}{d\tau} \operatorname{Sen}\theta (\eta \cos\theta) &= 0 \\ \eta \frac{dR}{d\tau} \cos^2\theta - \eta R \frac{d\phi}{d\tau} \operatorname{Sen}\theta \cos\theta &= 0 \end{aligned} \quad 3.24$$

Ahora multiplicamos la ec. 3.23 por  $\text{Sen } \theta$ :

$$\begin{aligned}
 & -\eta^2 R \text{Cos} \theta \text{Sen} \theta - \eta \frac{dR}{d\tau} \text{Sen} \theta \text{Sen} \theta - \eta R \frac{d\phi}{d\tau} \text{Cos} \theta \text{Sen} \theta + \\
 & + F(R \text{Cos} \theta, \mu, \tau) \text{Sen} \theta = X_s \text{Cos} (\theta - \phi) \text{Sen} \theta
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Al restar la ec. 3.24 a la ec. 3.25 se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & -\eta^2 \frac{dR}{d\tau} \text{Sen}^2 \theta - \eta \frac{dR}{d\tau} \text{Cos}^2 \theta + F(R \text{Cos} \theta, \mu, \tau) \text{Sen} \theta - \eta^2 R \text{Cos} \theta \text{Sen} \theta \\
 & = X_s \text{Cos} (\theta - \phi) \text{Sen} \theta
 \end{aligned}$$

Con las igualdades trigonométricas de  $\text{Sen}^2 x$  y  $\text{Cos}^2 x$  la igualdad anterior se transforma en:

$$\begin{aligned}
 & -\eta \frac{dR}{d\tau} - \eta^2 R \text{Cos} \theta \text{Sen} \theta + F(R \text{Cos} \theta, \mu, \tau) \text{Sen} \theta \\
 & = X_s \text{Cos} (\theta - \phi) \text{Sen} \theta
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Ya que se parte de la suposición de que  $R$  y  $\phi$  tienen variación lenta, podemos integrar en un ciclo para valores de  $\theta$  desde 0 a  $2\pi$ . Entonces en la ec. 3.26 tendremos:

$$\begin{aligned}
& -\eta \frac{dR}{d\tau} \int_0^{2\pi} d\theta - \eta^2 R \int_0^{2\pi} \text{Cos}\theta \text{ Sen}\theta d\theta + \int_0^{2\pi} F(R \text{ Cos}\theta, \mu, \tau) \text{ Sen}\theta d\theta = \\
& = \int_0^{2\pi} X_s \text{ Cos} (\theta - \phi) \text{ Sen}\theta d\theta \\
& -2\eta\pi \frac{dR}{d\tau} + \int_0^{2\pi} F(R \text{ Cos}\theta, \mu, \tau) \text{ Sen}\theta d\theta \\
& = X_s \int_0^{2\pi} \text{Cos} (\theta - \phi) \text{ Sen}\theta d\theta \qquad 3.27
\end{aligned}$$

De la ec. 3.27 es conveniente evaluar de forma independiente la integral del lado derecho:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \text{Cos} (\theta - \phi) \text{ Sen}\theta d\theta \\
& \int_0^{2\pi} \text{Cos} (\theta - \phi) \text{ Sen}\theta d\theta = \int_0^{2\pi} (\text{Cos}\theta \text{ Cos}\phi + \text{Sen}\theta \text{ Sen}\phi) \text{ Sen}\theta d\theta \\
& \int_0^{2\pi} \text{Cos} (\theta - \phi) \text{ Sen}\theta d\theta = \frac{1}{2} \text{Cos}\phi \int_0^{2\pi} \text{Sen}2\theta d\theta + \text{Sen}\phi \int_0^{2\pi} \text{Sen}^2\theta d\theta \\
& \int_0^{2\pi} \text{Cos} (\theta - \phi) \text{ Sen}\theta d\theta = \pi \text{Sen}\phi \qquad 3.28
\end{aligned}$$

Por lo tanto, sustituyendo la ec. 3.28 en la ec. 3.27, y dividiendo entre  $\pi$ :

$$-2\eta \frac{dR}{d\tau} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(R \cos\theta, \mu, \tau) \text{Sen}\theta \, d\theta = Xs \text{Sen}\phi \quad 3.29$$

Para simplicidad de notación, no se ha hecho distinción entre  $R$  y el valor promedio de  $R$  en un ciclo de  $\theta$ .

Por otro lado, multiplicamos la ec. 3.17 por  $\eta \text{Sen}\theta$ :

$$\eta \frac{dR}{d\tau} \text{Cos}\theta \text{Sen}\theta - \eta R \frac{d\phi}{d\tau} \text{Sen}^2\theta = 0 \quad 3.30$$

Multiplicamos la ec. 3.23 por  $\text{Cos}\theta$ :

$$\begin{aligned} -\eta^2 R \text{Cos}^2\theta - \eta \frac{dR}{d\tau} \frac{\text{Sen}\, 2\theta}{2} - \eta R \frac{d\phi}{d\tau} \text{Cos}^2\theta + F(R \cos\theta, \mu, \tau) \text{Cos}\theta &= \\ &= Xs \text{Cos}(\theta - \phi) \text{Cos}\theta \end{aligned} \quad 3.31$$

Sumamos las ecs. 3.30 y 3.31:

$$\begin{aligned} -\eta^2 R \text{Cos}^2\theta - \eta R \frac{d\phi}{d\tau} + F(R \cos\theta, \mu, \tau) \text{Cos}\theta &= \\ &= Xs \text{Cos}(\theta - \phi) \text{Cos}\theta \end{aligned} \quad 3.32$$

Integramos respecto a  $\theta$ , en un ciclo desde 0 a  $2\pi$ , en la ec. 3.31:

$$-\eta^2 R \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta - \eta R \frac{d\phi}{d\tau} \int_0^{2\pi} d\theta + \int_0^{2\pi} F(R \cos \theta, \mu, \tau) \cos \theta \, d\theta =$$

$$= X_s \int_0^{2\pi} \cos (\theta - \phi) \cos \theta \, d\theta$$

$$- \eta^2 \pi R - 2\eta \pi R \frac{d\phi}{d\tau} + \int_0^{2\pi} F(R \cos \theta, \mu, \tau) \cos \theta \, d\theta =$$

$$= X_s \int_0^{2\pi} \cos (\theta - \phi) \cos \theta \, d\theta$$

3.33

Evaluaremos la integral:

$$\int_0^{2\pi} \cos (\theta - \phi) \cos \theta \, d\theta$$

de la ec. 3.33.

$$\int_0^{2\pi} \cos (\theta - \phi) \cos \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} (\cos \theta \cos \phi + \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Sen} \phi) \cos \theta \, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \cos (\theta - \phi) \cos \theta \, d\theta = \cos \phi \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta + \operatorname{Sen} \phi \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{Sen} 2\theta}{2} \, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(\theta - \phi) \cos\theta \, d\theta = \pi \cos\phi \quad 3.34$$

Sustituimos la ec. 3.34 en la ec. 3.33 y dividimos entre  $\pi$ :

$$-\eta^2 R - 2\eta R \frac{d\phi}{d\tau} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(R \cos\theta, \mu, \tau) \cos\theta \, d\theta = X_s \cos\phi \quad 3.35$$

Rescribiendo las ecs. 3.29 y 3.35 tenemos:

$$-2\eta \frac{dR}{d\tau} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(R \cos\theta, \mu, \tau) \operatorname{Sen}\theta \, d\theta = X_s \operatorname{Sen}\phi \quad 3.29$$

$$-\eta^2 R - 2\eta R \frac{d\phi}{d\tau} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(R \cos\theta, \mu, \tau) \cos\theta \, d\theta = X_s \cos\phi \quad 3.35$$

Si definimos las igualdades:

$$C(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(R \cos\theta, \mu, \tau) \cos\theta \, d\theta$$

$$S(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(R \cos\theta, \mu, \tau) \operatorname{Sen}\theta \, d\theta$$

Las ecuaciones 3.29 y 3.35 se pueden escribir como:



$$-2\eta \frac{dR}{d\tau} + S(R) = Xs \operatorname{Sen}\phi \quad 3.29a$$

$$-\eta^2 R - 2\eta R \frac{d\phi}{d\tau} + C(R) = Xs \operatorname{Cos}\phi \quad 3.35a$$

### III.2.1.- Cálculo de las funciones S(R) y C(R)

Resulta claro que para poder evaluar las integrales  $S(R)$  y  $C(R)$  es preciso realizar la integral a lo largo de todo un ciclo histerético, de acuerdo con el diagrama mostrado en la fig. 2. En esta integral intervienen las variables  $\theta$ ,  $\mu$  y  $\tau$ . Por lo tanto, es necesario encontrar las ecuaciones de las rectas que nos describen el comportamiento de  $F(x, \mu, t)$ , las cuales se obtienen a partir del mismo diagrama.

Se tendrán dos casos para el valor de  $S(R)$ . El primero es considerar que la función  $F(x, \mu, t)$  está definida por las rectas que nos dan el comportamiento histerético en la fig. 2. Es decir para:

$$R > x_0$$

En el segundo caso, se considerará el comportamiento lineal elástico del oscilador, es decir cuando se presenta:

$$R < x_0$$

Enseguida encontraremos las ecuaciones de las rectas para el caso en que  $R > x_0$ .

Para la recta señalada como recta 1 en la fig. 2 se tiene la ecuación:

$$F(x, \mu, \tau)_1 = -\mu x_0 + (1 - \mu)x \quad 3.36$$

Como:

$$x(\tau) = R \cos\theta$$

entonces:

$$F(R \cos\theta, \mu, \tau)_1 = -\mu x_0 + (1 - \mu) R \cos\theta \quad 3.36a$$

Para la recta 2 tenemos a partir del diagrama de histéresis:

$$F(x, \mu, \tau)_2 = \mu x_0 - \mu R + x \quad 3.37$$

$$F(R \cos\theta, \mu, \tau)_2 = \mu x_0 - \mu R + R \cos\theta \quad 3.38$$

Para el caso en que  $R < x_0$ , la ecuación de la recta es:

$$F(x, \mu, \tau) = x \quad 3.38a$$

$$F(R \cos\theta, \mu, \tau) = R \cos\theta \quad 3.38b$$

### III.2.1.a.- Cálculo de $S(R)$

Si definimos:

$$\theta^* = \cos^{-1} \left( 1 - \frac{2x_0}{R} \right) \quad 3.39$$

$$S(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(R \cos\theta, \mu, \tau) \operatorname{Sen}\theta \, d\theta \quad 3.40$$

Podemos integrar a lo largo de dos rectas y así consideraremos un ciclo total, considerando que la integral anterior cambia a:

$$S(R) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(R \cos\theta, \mu, \tau) \operatorname{Sen}\theta \, d\theta \quad 3.41$$

Como son dos rectas, tendremos dos partes a integrar:

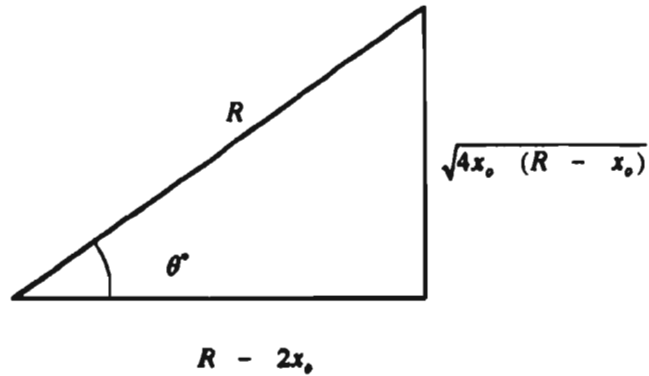
$$S(R) = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\theta'} F(R \cos\theta, \mu, \tau)_2 \operatorname{Sen}\theta \, d\theta + \int_{\theta'}^{\pi} F(R \cos\theta, \mu, \tau)_1 \operatorname{Sen}\theta \, d\theta \right] \quad 3.42$$

$$S(R) = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\theta'} (\mu x_0 - \mu R + R \cos\theta) \operatorname{Sen}\theta \, d\theta \right] + \\ + \frac{2}{\pi} \left[ \int_{\theta'}^{\pi} (-\mu x_0 + (1-\mu)R \cos\theta) \operatorname{Sen}\theta \, d\theta \right] \quad 3.43$$

$$S(R) = \frac{2}{\pi} \left[ -4\mu x_0 + \frac{4\mu x_0^2}{R} + \frac{\mu R}{2} \operatorname{Sen}^2\theta' \right] \quad 3.44$$

Para poder simplificar un poco la expresión 3.44, es necesario ver que como:

$$\operatorname{Cos}\theta' = \left( 1 - \frac{2x_0}{R} \right)$$



**Figura 3. Triángulo para ver los valores posibles de R**

Entonces se forma un triángulo rectángulo tal y como se muestra en la fig. 3. De aquí tenemos que el cateto opuesto debe de cumplir la desigualdad:

$$4x_0 R - 4x_0^2 \geq 0$$

para que el valor del cateto opuesto no resulte un número imaginario, de ésta desigualdad se tiene que:

$$R \geq x_0$$

La ecuación 3.44 puede escribirse como:

$$S(R) = \frac{2}{\pi} \left[ -4\mu x_0 \left( 1 - \frac{x_0}{R} \right) + \frac{\mu R}{2} \text{Sen}^2 \theta \right] \quad 3.45$$

$$S(R) = \frac{2}{\pi} \left[ -\mu R \frac{(4Rx_0 - 4x_0)}{R^2} + \frac{\mu R}{2} \text{Sen}^2 \theta \right] \quad 3.46$$

$$S(R) = \frac{2}{\pi} \left[ -\mu R \operatorname{Sen}^2 \theta' + \frac{\mu R}{2} \operatorname{Sen}^2 \theta' \right] \quad 3.47$$

$$S(R) = -\frac{\mu}{\pi} \operatorname{Sen}^2 \theta' \text{ para } R > x_0 \quad 3.48$$

El valor de  $S(R)$  para el caso en que  $R < x_0$  es:

$$S(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(R \operatorname{Cos} \theta, \mu, \tau) \operatorname{Sen} \theta \, d\theta \quad 3.48a$$

$$S(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \operatorname{Sen} \theta \, d\theta \quad 3.48b$$

$$S(R) = \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Cos} \theta \, d\theta \quad 3.48c$$

$$S(R) = 0 \text{ para } R < x_0 \quad 3.48d$$

### III.2.1.b.- Cálculo de $C(R)$

Partimos de la integral que nos define a  $C(R)$ :

$$C(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(R \operatorname{Cos} \theta, \mu, \tau) \operatorname{Cos} \theta \, d\theta \quad 3.49$$

Se debe integrar a lo largo de las líneas rectas que nos definen el diagrama de histéresis, cuyas ecuaciones ya se tienen.

$$C(R) = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\sigma} F(R \cos \theta, \mu, \tau)_2 \cos \theta \, d\theta + \int_{\sigma}^{\pi} F(R \cos \theta, \mu, \tau)_1 \cos \theta \, d\theta \right] \quad 3.50$$

$$C(R) = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\sigma} (\mu x_0 - \mu R + R \cos \theta) \cos \theta \, d\theta \right] +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \left[ \int_{\sigma}^{\pi} (-\mu x_0 + R(1-\mu) \cos \theta) \cos \theta \, d\theta \right] \quad 3.51$$

$$C(R) = \frac{2}{\pi} \left[ \mu \operatorname{Sen} \theta^{\circ} (2x_0 - R) + \frac{\pi R (1-\mu)}{2} + \frac{\mu R \theta^{\circ}}{2} + \frac{\mu R}{4} \operatorname{Sen} 2\theta^{\circ} \right] \quad 3.52$$

De la fig. 3 tenemos:

$$R - 2x_0 = R \cos \theta^{\circ} \quad 3.53$$

De la ec. 3.53 sustituida en la ec. 3.52:

$$C(R) = \frac{2}{\pi} \left[ -\mu \operatorname{Sen} \theta^{\circ} (R \cos \theta^{\circ}) + \frac{\pi R (1-\mu)}{2} + \frac{\mu R \theta^{\circ}}{2} + \frac{\mu R}{4} \operatorname{Sen} 2\theta^{\circ} \right] \quad 3.54$$

$$C(R) = \frac{1}{\pi} \left[ -\mu R \operatorname{Sen} 2\theta^\circ + \pi R(1-\mu) + \mu R\theta^\circ + \frac{\mu R}{2} \operatorname{Sen} 2\theta^\circ \right] \quad 3.55$$

$$C(R) = \frac{R}{\pi} \left[ \mu\theta^\circ + (1-\mu)\pi - \frac{\mu}{2} \operatorname{Sen} 2\theta^\circ \right] \quad \text{para } R > x_0 \quad 3.56$$

Ahora para el caso en que  $R < x_0$ , tenemos:

$$C(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(R \operatorname{Cos}\theta, \mu, \tau) \operatorname{Cos}\theta \, d\theta \quad 3.56a$$

$$C(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \operatorname{Cos}\theta \, d\theta \quad 3.56b$$

$$C(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} R \operatorname{Cos}^2\theta \, d\theta \quad 3.56c$$

$$C(R) = \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Cos} 2\theta \right) d\theta \quad 3.56d$$

Integrando tenemos que:

$$C(R) = R \quad \text{para } R < x_0 \quad 3.56e$$

### III.2.2.- Respuesta estacionaria

Para el análisis de la respuesta estacionaria se deben considerar constantes tanto  $R$  como  $\phi$ . Por consiguiente, se puede afirmar que se cumple en forma rigurosa que:

$$\frac{dR}{d\tau} = 0 \quad ; \quad \frac{d\phi}{d\tau} = 0 \quad 3.57$$

En el par de ecuaciones 3.29a y 3.35a se sustituyen estas derivadas, y resultan las siguientes igualdades:

$$S(R_0) = X_s \text{ Sen}\phi_0 \quad 3.58$$

$$C(R_0) - \eta^2 R_0 = X_s \text{ Cos}\phi_0 \quad 3.59$$

Aquí el subíndice cero indica que se trata del caso estacionario.

Eliminaremos  $\phi_0$  de las ecs. 3.58 y 3.59, elevándolas al cuadrado y sumándolas.

$$[C(R_0) - \eta^2 R_0]^2 + [S(R_0)]^2 = X_s^2 \quad 3.60$$

Ahora, dividiendo la ec. 3.58 entre la ec. 3.59, podemos desaparecer a  $X_s$ :

$$\frac{S(R_0)}{C(R_0) - \eta^2 R_0} = \frac{\text{Sen}\phi_0}{\text{Cos}\phi_0} = \text{Tg}\phi_0 \quad 3.61$$

De la ec. 3.60 despejamos  $\eta^2$ :



$$C(R_o) - \eta^2 R_o = \pm \left[ (X_s)^2 - (S(R_o))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad 3.62$$

$$\eta^2 = \frac{C(R_o)}{R_o} \pm \left[ \left( \frac{X_s}{R_o} \right)^2 - \left( \frac{S(R_o)}{R_o} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad 3.63$$

La amplitud máxima ocurrirá en donde las raíces de  $\eta$  sean iguales, Esto se debe a que para  $\eta$  (de acuerdo con la ec. 3.63) obtendremos dos valores diferentes, pero solamente existe un punto en donde los valores de  $\eta$  se repiten, y es precisamente en donde tenemos un máximo, que corresponde a la respuesta máxima. Entonces podemos afirmar que para esta respuesta máxima, el valor dentro de la raíz lo podemos igualar a cero.

$$\left( \frac{X_s}{R_o} \right)^2 - \left( \frac{S(R_o)}{R_o} \right)^2 = 0 \quad 3.64$$

$$\left( \frac{X_s}{R_o} \right)^2 = \left( \frac{S(R_o)}{R_o} \right)^2 \quad 3.65$$

Como se tenía de la ec. 3.40 que:

$$S(R_o) = \frac{-\mu R_o}{\pi} \text{Sen}^2 \theta_o \quad 3.66$$

Sustituyendo la ec. 3.66 en la ec. 3.65:

$$\left( \frac{X_s}{R_o} \right)^2 = \frac{\left( \frac{-\mu R_o}{\pi} \text{Sen}^2 \theta_o \right)^2}{R_o^2} \quad 3.67$$

$$(X_s)^2 = \left(\frac{\mu R_o}{\pi}\right)^2 (\text{Sen}^2 \theta)^2 \quad 3.68$$

$$(X_s) = \left(\frac{\mu R_o}{\pi}\right) [1 - \text{Cos}^2 \theta] \quad 3.69$$

$$X_s = \left(\frac{\mu R_o}{\pi}\right) \left[1 - \left(1 - \frac{2x_e}{R_o}\right)^2\right] \quad 3.70$$

$$X_s = \frac{4\mu x_e}{\pi} \left(1 - \frac{x_e}{R_o}\right) \quad 3.71$$

De la ec. 3.71 despejaremos  $R_o/x_e$  :

$$\frac{R_o}{x_e} = \frac{1}{1 - \frac{\pi X_s}{4\mu x_e}} \quad 3.72$$

Dividiendo y multiplicando la ec. 3.72 por  $4\mu/\pi$  :

$$\frac{R_o}{x_e} = \frac{\frac{4\mu}{\pi}}{\frac{4\mu}{\pi} - \frac{X_s}{x_e}} \quad 3.73$$

Ya que por definición  $R_o/x_e$  es positivo, debe de cumplirse que:

$$\frac{4\mu}{\pi} - \frac{Xs}{x_0} > 0 \quad 3.74$$

$$\frac{Xs}{x_0} < \frac{4\mu}{\pi} \quad 3.75$$

Observése que si suponemos el caso para:

$$\frac{4\mu}{\pi} - \frac{Xs}{x_0} = 0 \quad 3.76$$

Entonces la relación  $R_0/x_0$ , tiende a infinito, es decir cuando:

$$\frac{Xs}{x_0} = \frac{4\mu}{\pi} \quad 3.77$$

De la ec. 3.63 se ve que en la respuesta máxima, la frecuencia está dada por:

$$\eta^2 = \frac{C(R_0)}{R_0}$$

Debe observarse que como la pendiente de la línea está definida como:

$$m = \tan (1-\mu)$$

De aquí puede afirmarse que:

$$\mu < 1$$

Finalmente los valores de  $\mu$  quedan entre:

$$0 < \mu < 1$$

Para graficar las curvas de respuesta estacionaria del sistema es conveniente introducir algunas variables adimensionales. Ya que de la ec. 3.75 teniamos que:

$$\frac{X_s}{x_0} < \frac{4\mu}{\pi}$$

De aquí se puede afirmar que:

$$\frac{X_s}{\mu x_0} < \frac{4}{\pi} \quad 3.78$$

Definiremos entonces:

$$f = \frac{X_s}{\mu x_0} \quad 3.79$$

También definiremos la amplificación como:

$$A = \frac{R_2}{x_0} \quad 3.80$$

Si dividimos la ec. 3.79 entre la 3.80 se tendrá:

$$\frac{f}{A} = \frac{\frac{X_s}{R_0}}{\frac{\mu x_0}{x_0}}$$

$$\frac{f}{A} = \frac{X_s}{\mu R_0} \quad 3.80a$$

Tambi3n para la relaci3n de frecuencias tenemos:

$$\bar{X} = \frac{\eta^2 - 1}{\mu} \quad 3.81$$

Sustituyendo la ec. 3.63 en la ec. 3.81:

$$\bar{X} = \frac{\left[ \frac{C(R_0)}{R_0} \pm \left( \left( \frac{X_s}{R_0} \right)^2 - \left( \frac{S(R_0)}{R_0} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] - 1}{\mu} \quad 3.82$$

Como para  $R > x_0$ , se tenia:

$$S(R_0) = \frac{-\mu R_0}{\pi} \text{Sen}^2 \theta' \quad 3.83$$

$$C(R_0) = \frac{R_0}{\pi} \left[ \mu \theta' + (1-\mu)\pi - \frac{\mu}{2} \text{Sen} 2\theta' \right] \quad 3.84$$

Sustituyendo las ecs. 3.83 y 3.84 en la ec. 3.82:

$$\bar{X} = \frac{1}{\mu\pi} \left[ \mu\theta^\circ + (1-\mu)\pi - \frac{\mu}{2} \text{Sen}^2 2\theta^\circ \right] \pm \frac{1}{\mu} \left[ \left( \frac{X_s}{R_o} \right)^2 - \frac{\left( \frac{-\mu R_o}{\pi} \text{Sen}^2 \theta^\circ \right)^2}{R_o^2} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\mu} \quad 3.85$$

$$\bar{X} = \left[ \frac{\theta^\circ}{\pi} - 1 - \frac{1}{\pi} \frac{\text{Sen} 2\theta^\circ}{2} \right] \pm \left[ \left( \frac{X_s}{\mu R_o} \right)^2 - \frac{(\text{Sen}^2 \theta^\circ)^2}{\pi^2} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\mu} \quad 3.86$$

Al considerar la igualdad de la ec. 3.80a en la ec. 3.86:

$$\bar{X} = \left[ -1 + \frac{\theta^\circ}{\pi} - \frac{1}{2\pi} \text{Sen} 2\theta^\circ \pm \left( \left( \frac{f}{A} \right)^2 - \left( \frac{\text{Sen}^2 \theta^\circ}{\pi} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad 3.87$$

Puesto que se está considerando:

$$S(R_o) \text{ y } C(R_o) \text{ para } R_o > x_o$$

Y como:

$$A = \frac{R_o}{x_o}$$

esto implica que la ec. 3.87 se aplica cuando:

$$A > 1$$

Para el caso en que:

$$S(R_0) = 0 \text{ para } R_0 < x_0 \quad 3.88$$

$$C(R_0) = R_0 \text{ para } R_0 < x_0 \quad 3.89$$

entonces:

$$A < 1$$

El valor de  $\bar{X}$  se encuentra para este caso al sustituir las ecs. 3.88 y 3.89 en la ec. 3.90.

$$\bar{X} = \frac{\eta^2 - 1}{\mu} \quad 3.90$$

$$\bar{X} = \frac{R_0}{\mu R_0} \pm \frac{1}{\mu} \left[ \left( \frac{X_s}{R_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\mu}$$

$$\bar{X} = \pm \frac{X_s}{\mu R_0} \quad 3.91$$

Si en la ec. 3.91 consideramos la ec. 3.80a, tendremos:

$$\bar{X} = \pm \frac{f}{A} \quad 3.92$$

válida para  $A < 1$ .

Enseguida se obtiene una gráfica de la respuesta estacionaria. Para ello se fija el parámetro  $f$  y se dan diferentes valores al parámetro  $A$ , el cual se representa en el eje vertical. Dependiendo de si el valor de  $A$  es mayor o menor de la unidad, se aplicarán las ecs. 3.87 y 3.92 respectivamente, para encontrar dos valores de  $\bar{X}$  por cada valor de  $A$ . Estos valores se grafican en el eje horizontal.

Para encontrar los valores de  $\theta^o$  se parte de lo siguiente. Se puede observar que:

$$\theta^o = \text{arc cos} \left[ 1 - \frac{2x_o}{R_o} \right]$$

Y como:

$$A = \frac{R_o}{x_o}$$

entonces:

$$\theta^o = \text{arc cos} \left[ 1 - \frac{2}{A} \right]$$

En las figs. 4a-4f se muestran las gráficas de las respuestas estacionarias para distintos valores de  $f$ . Se debe observar que cuando  $f < 4/\pi$ , las curvas son acotadas. Y cuando  $f > 4/\pi$ , el sistema deja de estar acotado cayendo por lo tanto en resonancia. Esto es debido a la ec. 3.75:



$$\frac{X_s}{x_0} < \frac{4\mu}{\pi}$$

$$\frac{X_s}{\mu x_0} < \frac{4}{\pi}$$

Como:

$$f = \frac{X_s}{\mu x_0}$$

Para:

$$f < \frac{4}{\pi}$$

la curva es acotada. Y para:

$$f > \frac{4}{\pi}$$

la curva no es acotada.

La fig. 5 muestra la gráfica de comportamiento de la función  $S(R)$ , tomando en cuenta la soluciones anteriores para esta función.

Como:

$$S(R) = \frac{-\mu R}{\pi} \operatorname{Sen}^2 \theta'$$

Al dividir entre  $x_0$ , ambos lados:

$$\frac{S(R)}{x_0} = \frac{-\mu R}{\pi x_0} \text{Sen}^2 \theta'$$

O también, se puede escribir como:

$$\boxed{\frac{S(R)}{x_0} = \frac{\mu A}{\pi} \text{Sen}^2 \theta'} \quad 3.93$$

donde:

$$\boxed{\theta' = \text{arc cos} \left[ 1 - \frac{2}{A} \right]} \quad 3.94$$

Se supuso un valor positivo a la ec. 3.93 para realizar la gráfica. Esta se realizó para tres valores de  $\mu$ : 0.10, 0.50 y 1.00. Obsérvese el comportamiento asintótico conforme A crece.

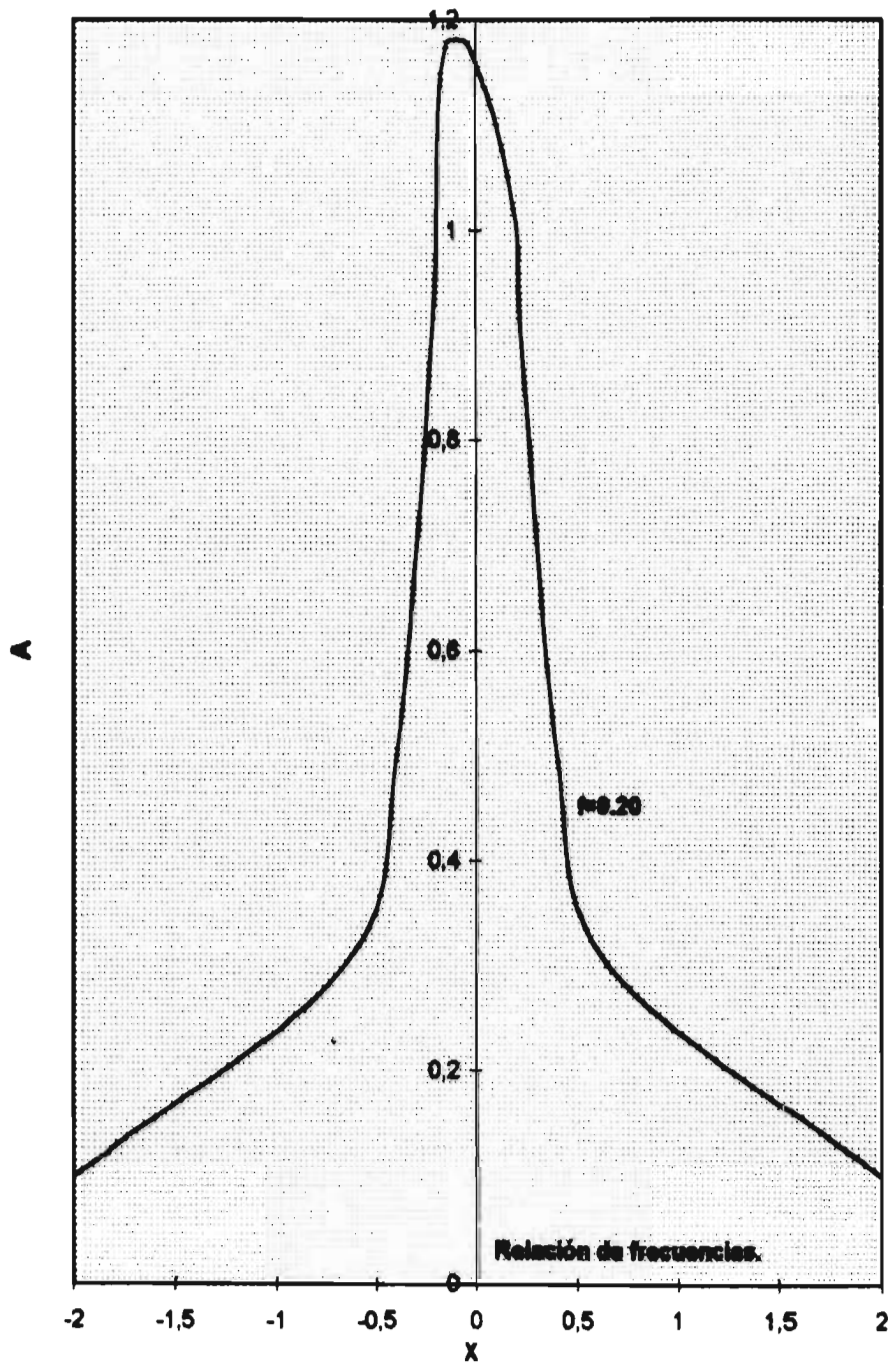


Fig. 4a. Respuesta para diferentes relaciones de frecuencia,  $f=0.20$

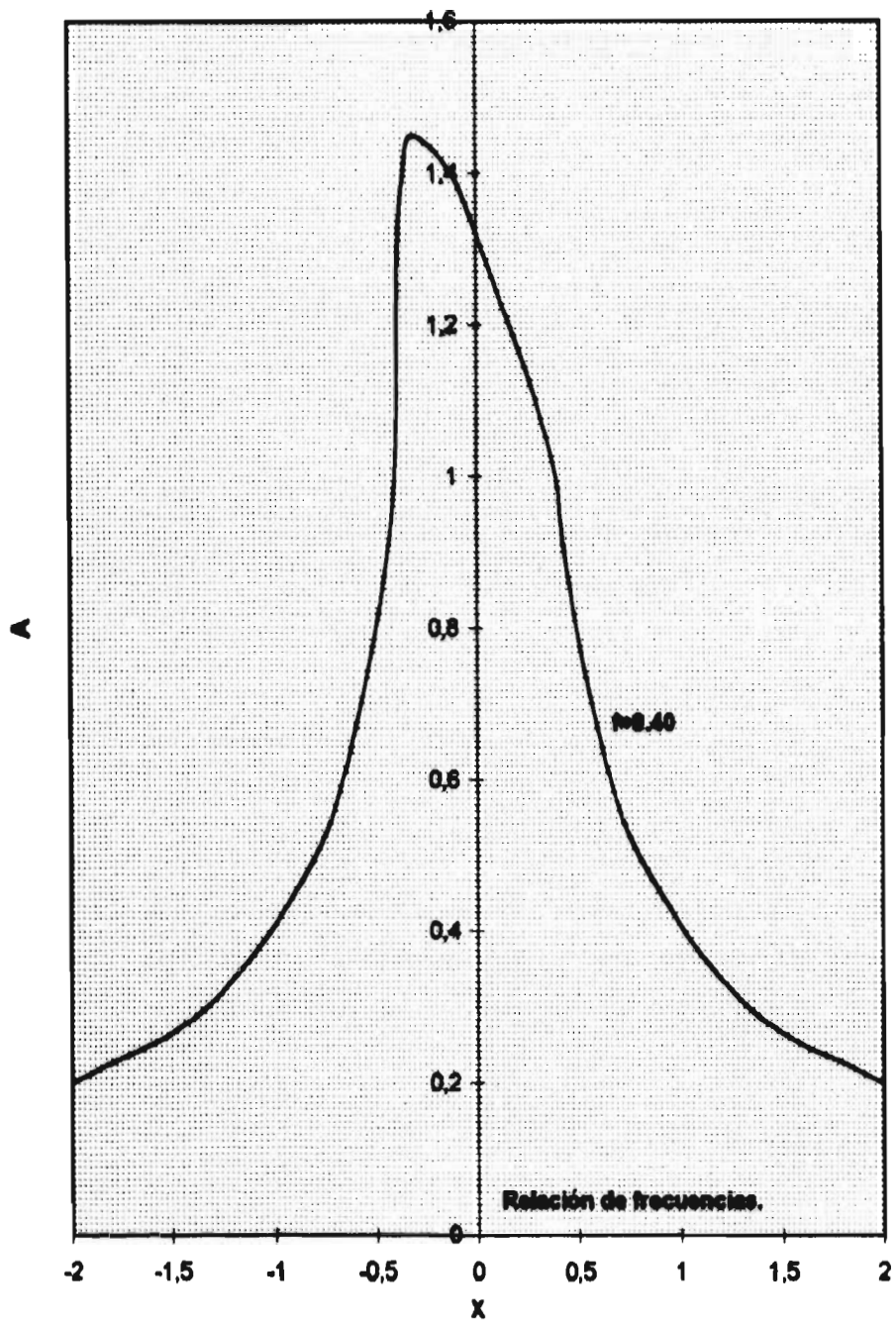


Fig. 4b. Respuesta para diferentes relaciones de frecuencia,  $f=0.40$

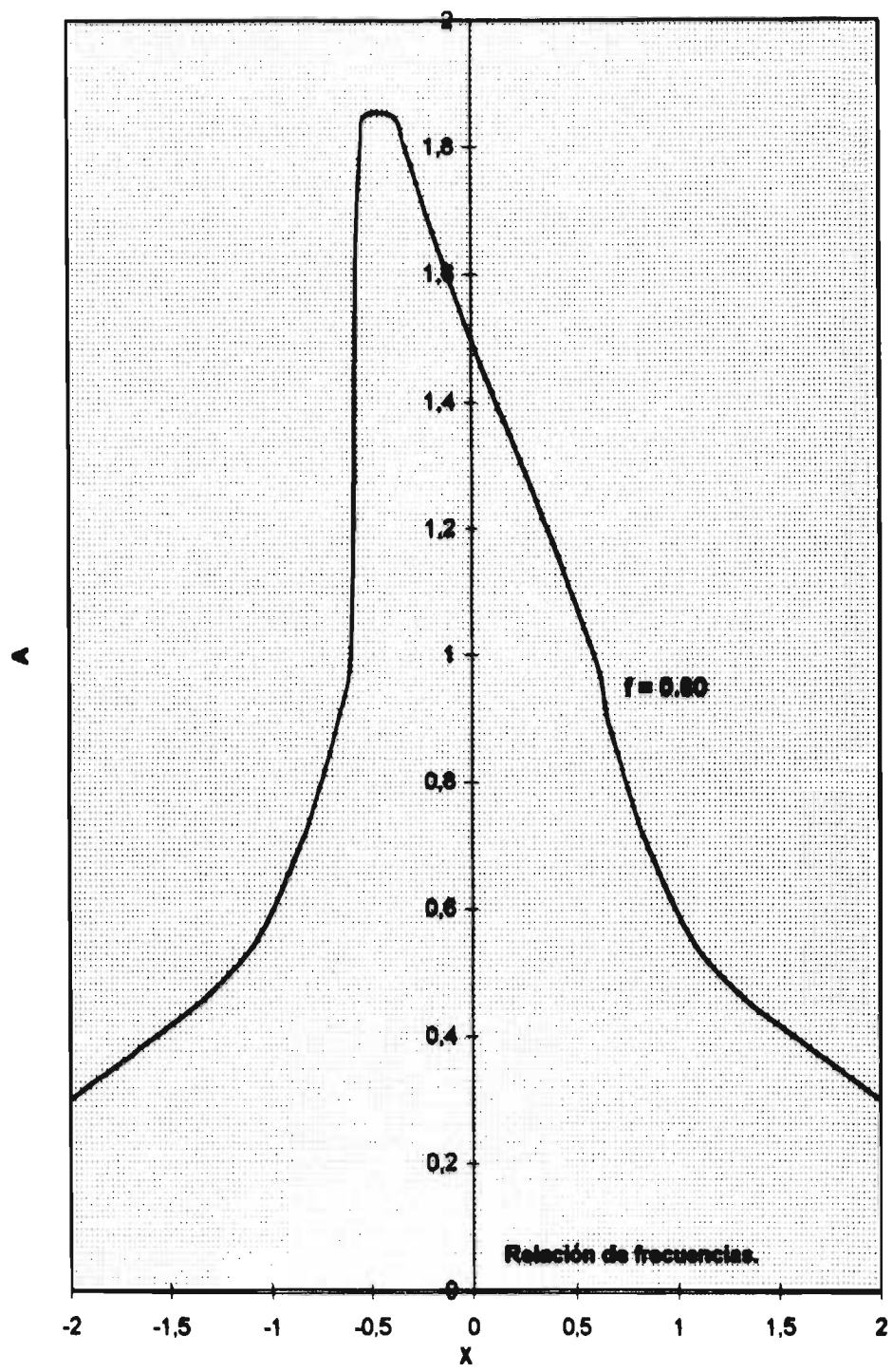


Fig. 4c. Respuesta para diferentes relaciones de frecuencia,  $\gamma=0.80$

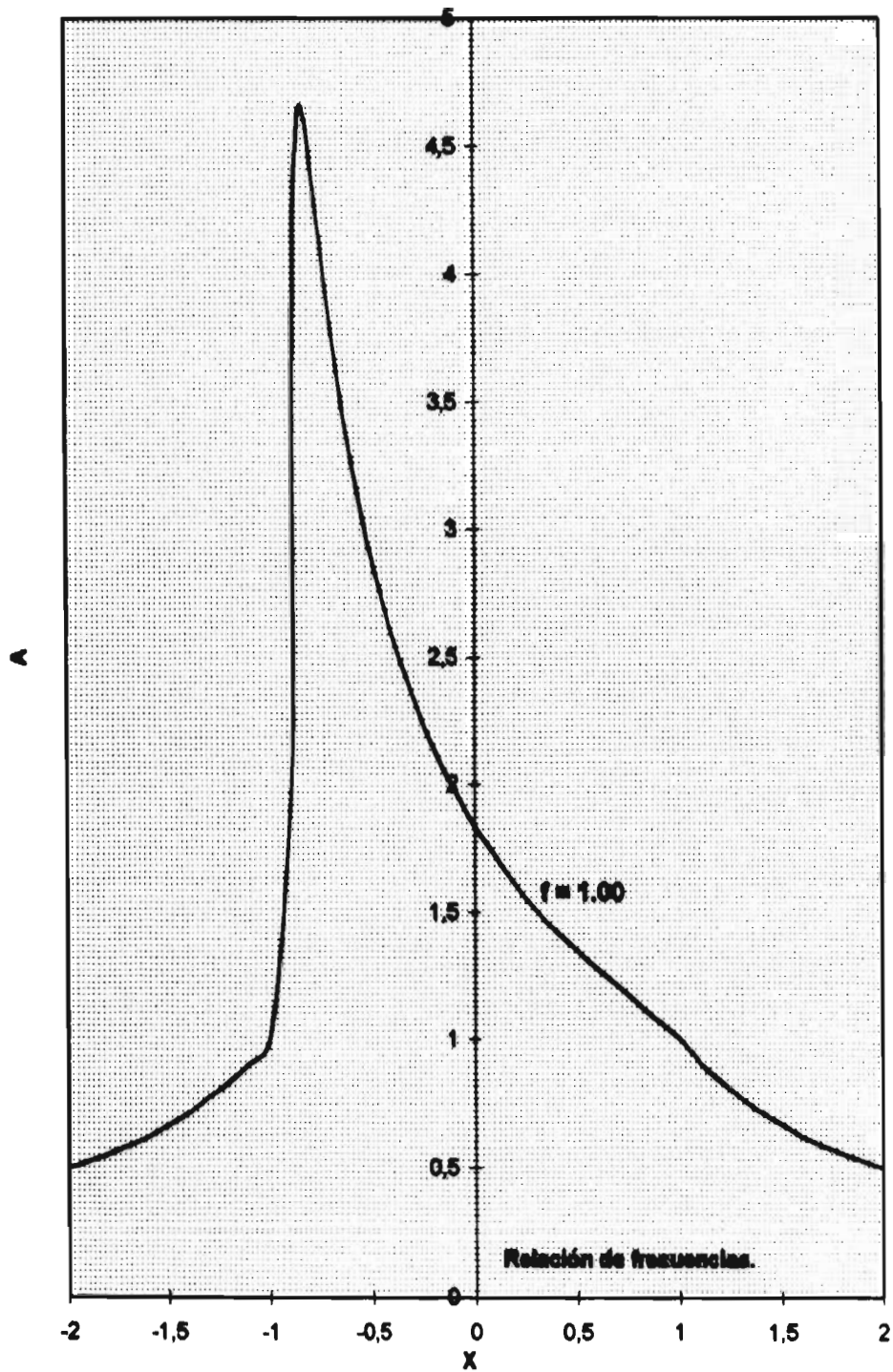


Fig. 4d. Respuesta para diferentes relaciones de frecuencia,  $f=1.00$

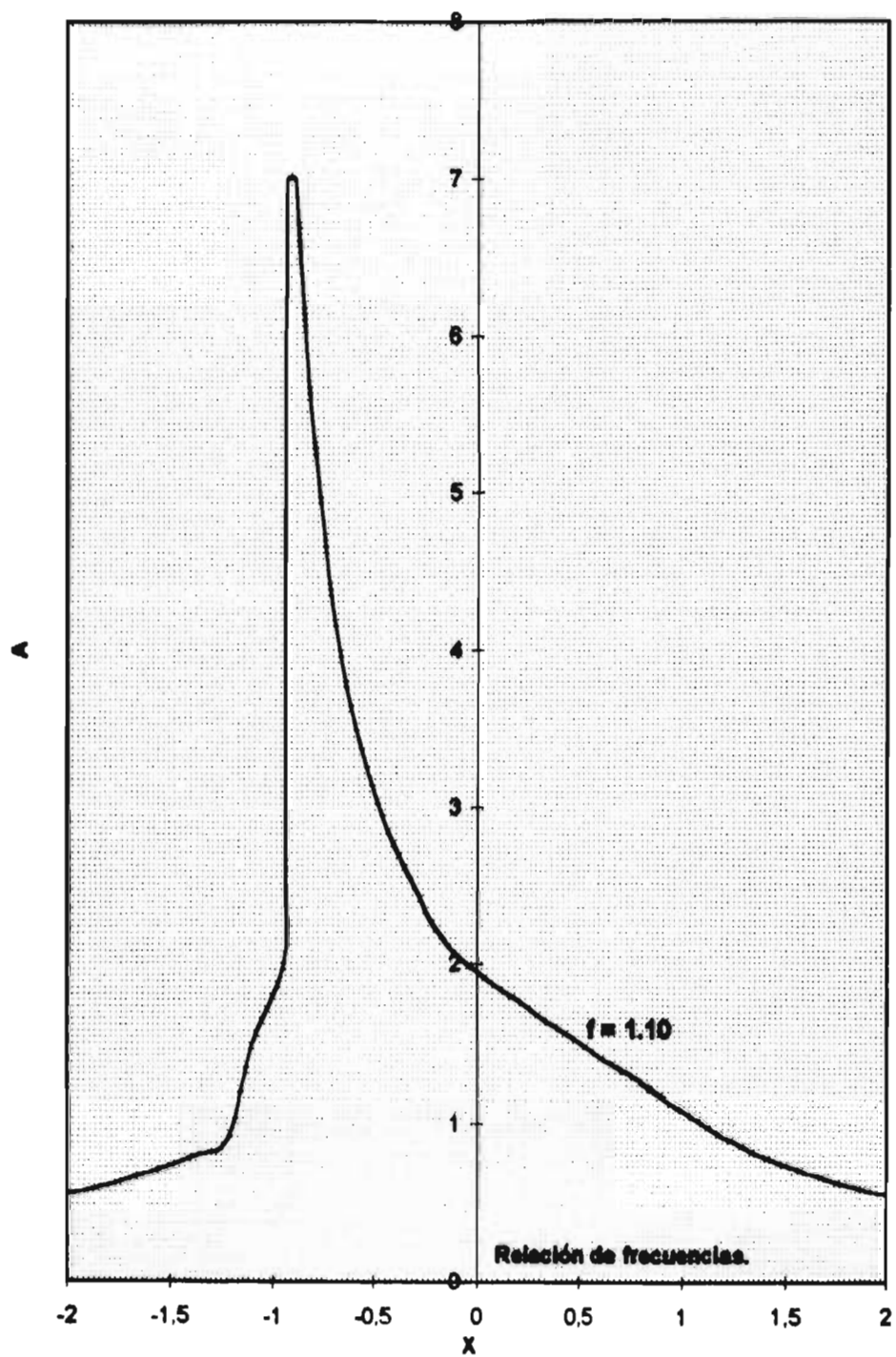
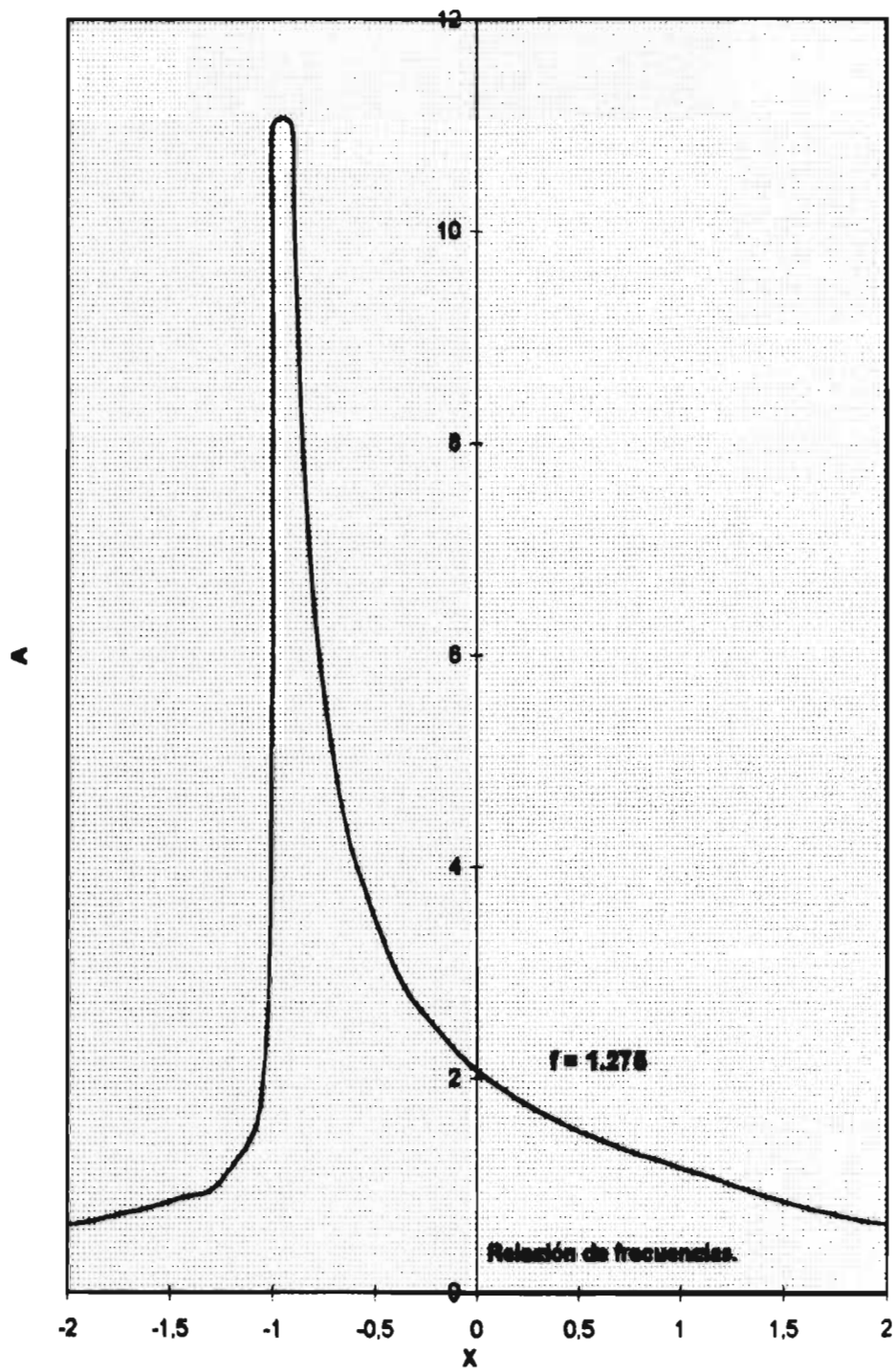
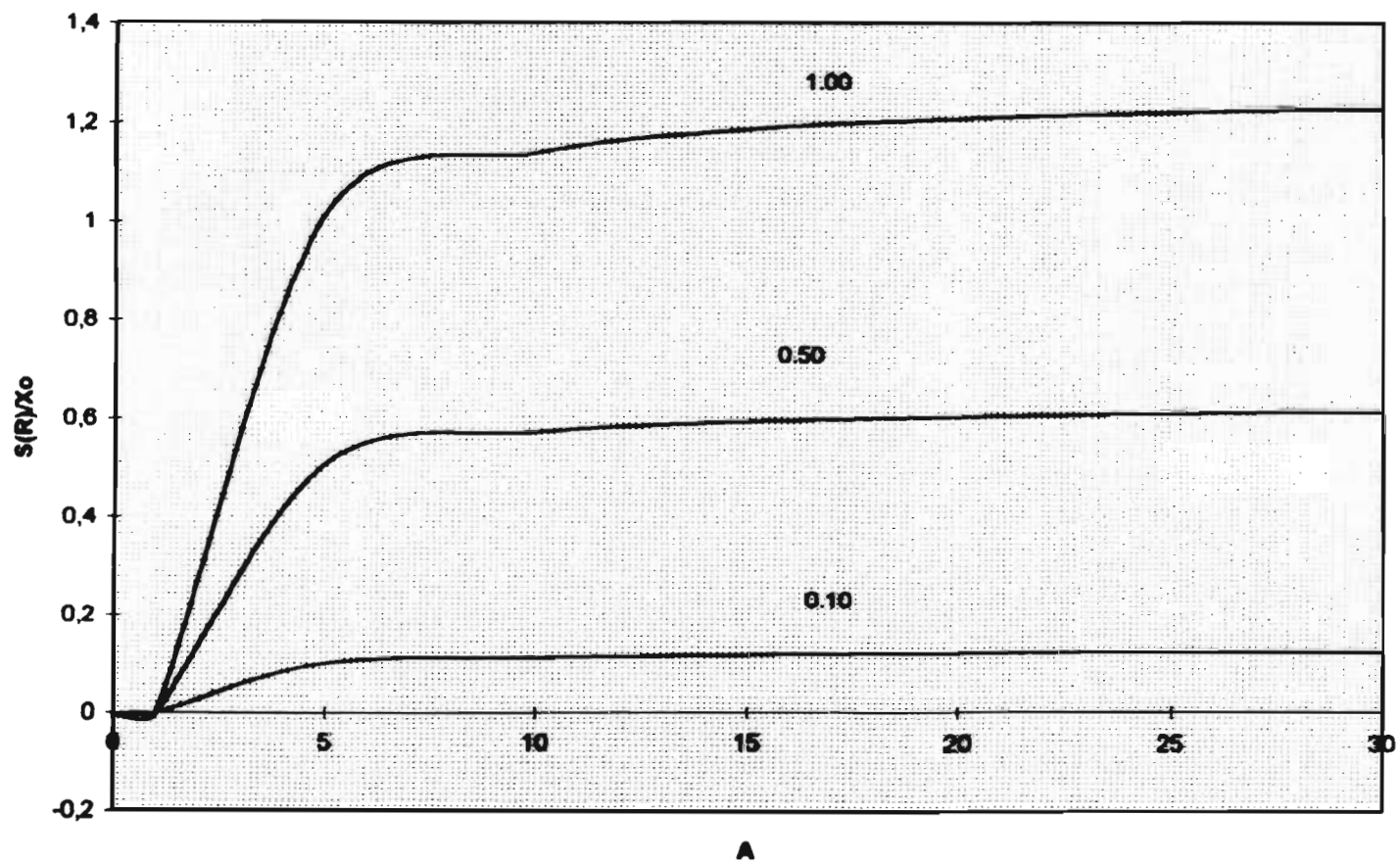


Fig. 4e. Respuesta para diferentes relaciones de frecuencia,  $f=1.10$



**Fig. 4f.** Respuesta para diferentes relaciones de frecuencia,  $f=1.275$





**Figura 5. Variación de la función  $S(R)$ .**

**IV.- Aplicación del Método PLV en la  
Respuesta de un Oscilador Bilineal  
ante Excitación Aleatoria**

#### IV.1.- Formulación del problema

Consideremos un sistema dinámico, en el cual la fuerza restauradora presenta histéresis bilineal.

El sistema se somete a una excitación aleatoria estacionaria y gaussiana, a la cual llamaremos  $N(t)$ .

La ecuación de movimiento del sistema es:

$$\boxed{m\ddot{x} + m\beta\dot{x} + k F(x,\mu,t) = N(t)} \quad 4.1$$

En donde:

$$F(x,\mu,t)$$

es la fuerza histerética restauradora de la fig. 2.

$F(x,\mu,t)$  es tal que cuando:

$$\mu \rightarrow 0 \quad ; \quad F(x,\mu,t) \rightarrow x$$

con lo que se tendría el caso lineal.

Si consideramos las siguientes igualdades:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad 4.2$$

$$\tau = \omega_0 t \quad 4.3$$

$$X_s(\tau) = \frac{N(t)}{k} \quad 4.4$$

$$\bar{\beta} = \frac{\beta}{\omega_0} \quad 4.5$$

Tenemos de la ec. 4.3:

$$t = \frac{\tau}{\omega_0} \quad 4.6$$

Derivando respecto de  $\tau$ :

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\omega_0} \quad 4.7$$

Y como:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} \quad 4.8$$

Sustituyendo la ec. 4.7 en la ec. 4.8:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{w_0} \frac{dx}{dt} \quad 4.9$$

$$\frac{dx}{dt} = w_0 \frac{dx}{d\tau} \quad 4.9a$$

Repitiendo el proceso de derivación, se obtiene:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{1}{w_0^2} \frac{d^2x}{dt^2} \quad 4.10$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = w_0^2 \frac{d^2x}{d\tau^2} \quad 4.11$$

Dividimos la ec. 4.1 entre k:

$$\frac{m}{k} \ddot{x} + \frac{m\beta}{k} \dot{x} + F(x, \mu, t) = \frac{N(t)}{k} \quad 4.12$$

Como:

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad 4.13$$

$$\frac{1}{w_0} = \sqrt{\frac{m}{k}} \quad 4.14$$

Sustituyendo las ecs. 4.4 y 4.14 en la ec. 4.12:

$$\frac{1}{w_0^2} \ddot{x} + \frac{m\beta}{k} \dot{x} + F(x, \mu, t) = X_S(\tau) \quad 4.15$$

De las ecs. 4.9a y 4.10 sustituidas en la ec. 4.15:

$$\frac{1}{w_0^2} w_0^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{m\beta w_0}{k} \frac{dx}{d\tau} + F(x, \mu, \tau) = X_S(\tau) \quad 4.16$$

Sustituyendo la ec. 4.14 en la ec. 4.16:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{1}{w_0^2} \beta w_0 \frac{dx}{d\tau} + F(x, \mu, \tau) = X_S(\tau)$$

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{\beta}{w_0} \frac{dx}{d\tau} + F(x, \mu, \tau) = X_S(\tau) \quad 4.17$$

Sustituyendo la ec. 4.5 en la ec. 4.17:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \bar{\beta} \frac{dx}{d\tau} + F(x, \mu, \tau) = X_s(\tau) \quad 4.18$$

Si en la ec. 4.18  $\mu$  es igual a cero y  $\bar{\beta}$  es pequeño, entonces la solución puede escribirse:

$$x = R(\tau) \text{ Cos } [\tau + \theta(\tau)] \quad 4.19$$

Se deriva respecto de  $\tau$  a la ec. 4.19:

$$\frac{dx}{d\tau} \approx -wR(\tau) \text{ Sen } [\tau + \theta(\tau)] \quad 4.20$$

En donde  $R$  y  $\theta$  se consideran funciones de  $\tau$  las cuales tienen la característica de variar lentamente respecto del tiempo.

Ahora bien, si en la ec. 4.18:

$$\mu \neq 0$$

pero es pequeño, la naturaleza de la variación lenta de parámetros de la solución sera conservada.

#### IV.2.-Método de solución

El método de solución que se empleará es remplazar la ecuación 4.18 por una ecuación diferencial lineal equivalente.

Reescribiremos la ec. 4.18 en la forma siguiente:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \beta_{eq} \frac{dx}{d\tau} + w_{eq}^2 x + \sigma(x, x', \tau) = X\tau(\tau) \quad 4.21$$

en donde:

$\sigma(x, x', \tau)$ .- Término que nos indica el error al linealizar la ecuación diferencial original.

$\beta_{eq}$ .- Amortiguamiento en la ecuación diferencial lineal.

$w_{eq}^2$ .- Frecuencia natural al cuadrado del sistema lineal equivalente.

Si en la ec. 4.21 el término  $\sigma(x, x', \tau)$  no se considera, entonces la ecuación diferencial se transforma en lineal.



Entre más pequeño sea  $\varepsilon(x, x', \tau)$  entonces menor será el error al linealizar.

Se puede ver de la ec. 4.21 que las constantes equivalentes  $\beta_{eq}$  y  $w_{eq}^2$  deben tener valores tales que el error  $\varepsilon(x, x', \tau)$  se reduzca a un mínimo.

Podemos minimizar este error haciendo que el valor cuadrático medio de  $\varepsilon(x, x', \tau)$  sea mínimo, es decir al restar la ec. 4.21 a la ec. 4.18 tenemos:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \bar{\beta} \frac{dx}{d\tau} + F(x, \mu, \tau) = Xx(\tau) \quad 4.18$$

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \beta_{eq} \frac{dx}{d\tau} + w_{eq}^2 x + \varepsilon(x, x', \tau) = Xx(\tau) \quad 4.21$$

$$\bar{\beta} \frac{dx}{d\tau} + F(x, \mu, \tau) - \beta_{eq} \frac{dx}{d\tau} - w_{eq}^2 x - \varepsilon(x, x', \tau) = 0 \quad 4.22a$$

$$(\bar{\beta} - \beta_{eq}) \frac{dx}{d\tau} + F(x, \mu, \tau) - w_{eq}^2 x - \varepsilon(x, x', \tau) = 0 \quad 4.22b$$

Como la ec. 4.21 se considera la ecuación lineal equivalente de la ec. 4.18, la cual no es lineal, entonces el error cometido al hacer ésta linealización está dado por  $\varepsilon(x, x', \tau)$  y tenemos que:

$$\varepsilon(x, x', \tau) = (\bar{\beta} - \beta_{eq}) x' + F(x, x', \tau) - w_{eq}^2 x \quad 4.22c$$

Aquí tenemos que:

$$x' = \frac{dx}{d\tau}$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la ec. 4.22c, encontramos el valor cuadrático medio del error  $\varepsilon(x, x', \tau)$ :

$$\overline{\varepsilon^2(x, x', \tau)} = \overline{[(\bar{\beta} - \beta_{eq}) x' + F(x, \mu, \tau) - w_{eq}^2 x]^2} \quad 4.22d$$

En la ec. 4.22d la barra indica promedio con respecto al tiempo.

Podemos minimizar el valor cuadrático medio del error, primero encontrando el valor de  $\beta_{eq}$  que nos minimiza el error. Para esto se debe cumplir:

$$\frac{\partial}{\partial \beta_{eq}} \overline{\varepsilon^2(x, x', \tau)} = 0 \quad 4.23$$

Derivando parcialmente respecto de  $\beta_{eq}$  se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial \beta_{eq}} \overline{\varepsilon^2(x, x', \tau)} = 2 \overline{[(\bar{\beta} - \beta_{eq})x' + F(x, \mu, \tau) - w_{eq}^2 x]^2} [-x'] \quad 4.24$$

Igualando a cero la ec. 4.24:

$$2 \left[ (\bar{\beta} - \beta_{eq})x' + F(x, x', \tau) - w_{eq}^2 x \right] \overline{[x']} = 0 \quad 4.25$$

$$\left[ (\bar{\beta} - \beta_{eq})x' + F(x, \mu, \tau) - w_{eq}^2 x \right] = 0 \quad 4.26$$

$$\overline{(\beta_{eq} x')} = \overline{\beta x'} + \overline{F(x, \mu, \tau) - w_{eq}^2 x} \quad 4.26a$$

$$\beta_{eq} = \frac{\overline{\beta x'} + \overline{F(x, \mu, \tau) - w_{eq}^2 x}}{\overline{[x']}} \quad 4.27$$

Multiplicando y dividiendo por  $x'$  el lado derecho de la ec. 4.27:

$$\beta_{eq} = \frac{\overline{\beta (x')^2 + x' F(x, \mu, \tau) - w_{eq}^2 (xx')}}{\overline{[x']^2}} \quad 4.28$$

Se supone que la velocidad y el desplazamiento no están correlacionados, entonces tenemos:

$$\overline{xx'} = 0$$

De aquí la ec. 4.28 se transforma a:

$$\beta_{eq} = \frac{\overline{\beta (x')^2 + x' F(x, \mu, \tau)}}{\overline{[x']^2}} \quad 4.29$$

$$\beta_{eq.} = \bar{\beta} + \frac{x' F(x, \mu, \tau)}{[x']^2} \quad 4.30$$

Minimizando la ec. 4.22d, respecto de  $w_{eq.}$ , derivando e igualando a cero.

$$\frac{\partial}{\partial w_{eq.}} \overline{\epsilon^2(x, x', \tau)} = 0$$

$$\overline{\epsilon^2(x, x', \tau)} = \overline{[(\bar{\beta} - \beta_{eq.})x' + F(x, \mu, \tau) - w_{eq.}^2 x]^2} \quad 4.31$$

$$\frac{\partial}{\partial w_{eq.}} \overline{[(\bar{\beta} - \beta_{eq.})x' + F(x, \mu, \tau) - w_{eq.}^2 x]^2} = 0 \quad 4.32$$

$$\frac{\partial}{\partial w_{eq.}} \overline{\epsilon^2(x, x', \tau)} = 2 \overline{[(\bar{\beta} - \beta_{eq.})x' + F(x, \mu, \tau) - w_{eq.}^2 x]} \overline{[-2w_{eq.} x]} \quad 4.33$$

$$\overline{[(\bar{\beta} - \beta_{eq.})x' + F(x, \mu, \tau) - w_{eq.}^2 x]} \overline{[w_{eq.} x]} = 0 \quad 4.34$$

$$\overline{[(\bar{\beta} - \beta_{eq.})x' + F(x, \mu, \tau) - w_{eq.}^2 x]} = 0 \quad 4.35$$

$$w_{eq.}^2 = \frac{\overline{[(\bar{\beta} - \beta_{eq.})x' + F(x, \mu, \tau)]}}{\overline{[x]}} \quad 4.36$$

Multiplicando y dividiendo por  $x$ , la parte derecha de la ec. 4.36:

$$w_{eq}^2 = \frac{(\bar{\beta} - \beta_{eq})xx' + x F(x, \mu, \tau)}{x^2} \quad 4.37$$

Pero como la velocidad y el desplazamiento no están correlacionados, entonces:

$$\overline{xx'} = 0$$

Y la ec. 4.37 resulta ser:

$$w_{eq}^2 = \frac{x F(x, \mu, \tau)}{x^2} \quad 4.38$$

Si en la ec. 4.21,  $\epsilon(x, x', \tau)$  no se considera debido a que su valor es pequeño, entonces la ecuación diferencial es lineal. Y también de la ec. 4.30 se ve que si  $\bar{\beta}$  y  $\mu$  son pequeños, entonces  $\beta_{eq}$  será pequeño.

La solución a la ec. 4.21, al considerar la ecuación diferencial lineal, podemos escribirla como:

$$x = R(\tau) \cos [w_{eq} \tau + \theta(\tau)] \quad 4.39$$

Al derivar  $x$  respecto de  $\tau$ :

$$x' = \frac{dx}{d\tau} = -w_{eq} R(\tau) \text{Sen} [w_{eq} \tau + \theta(\tau)] \quad 4.40$$

Si definimos:

$$\psi = [w_{\text{eq}} \tau + \theta(\tau)] \quad 4.40a$$

Entonces las ecs. 4.40 y 4.40a puede escribirse como:

$$x = R \text{ Cos} \psi \quad 4.40b$$

$$x' = -w_{\text{eq}} R \text{ Sen} \psi \quad 4.40c$$

En estas ecuaciones se parte de la suposición de que  $R(\tau)$  y  $\theta(\tau)$  son variables que **varian lentamente respecto del tiempo**, de acuerdo con el método de Kryloff y Bogoliuboff.

Las ecs. 4.30 y 4.38 pueden remplazarse por su valor promedio a lo largo de un ciclo de  $\psi$ , ya que  $R$  y  $\theta$  tienen **variación lenta respecto al tiempo**. Reescribiendo las ecs. 4.30 y 4.38 tenemos:

$$\beta_{\text{eq}} = \bar{\beta} + \frac{[x' F(x, \mu, \tau)]}{[(x')^2]} \quad 4.41$$

$$w_{\text{eq}}^2 = \frac{[x F(x, \mu, \tau)]}{[x^2]} \quad 4.42$$

Para la ec. 4.41 debemos evaluar a  $[(x')^2]$ .

$$\overline{[(x')^2]} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-w_{eq} \bar{R} \text{Sen}\psi)^2 d\psi \quad 4.43$$

$$\overline{[(x')^2]} = \frac{w_{eq}^2 \bar{R}^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Sen}^2\psi d\psi \quad 4.44$$

$$\overline{[(x')^2]} = \frac{w_{eq}^2 \bar{R}^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{Cos}2\psi \right] d\psi \quad 4.45$$

$$\overline{[(x')^2]} = \frac{w_{eq}^2 \bar{R}^2}{2\pi} [\pi] \quad 4.46$$

$$\boxed{\overline{[(x')^2]} = \frac{w_{eq}^2 \bar{R}^2}{2}} \quad 4.47$$

Asi la ec. 4.41 puede escribirse como:

$$\beta_{eq} = \bar{\beta} + \frac{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x' F(x, \mu, \tau)) d\psi}{\left[ \frac{w_{eq}^2 \bar{R}^2}{2} \right]} \quad 4.48$$

De la ec. 4.40c, podemos escribir la ec. 4.48 de la forma:

$$\beta_{eq} = \bar{\beta} + \frac{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-w_{eq} R \text{ Sen}\psi F(R \text{ Cos}\psi, \mu, \tau)] d\psi}{\frac{w_{eq}^2 \bar{R}^2}{2}} \quad 4.49$$

$$\beta_{eq} = \bar{\beta} - \frac{\frac{\bar{R}}{\pi} \int_0^{2\pi} \text{Sen}\psi F(R \text{ Cos}\psi, \mu, \tau) d\psi}{[w_{eq} \bar{R}^2]} \quad 4.50$$

Si definimos:

$$S(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \text{Sen}\psi F(R \text{ Cos}\psi, \mu, \tau) d\psi \quad 4.51$$

Entonces la ec. 4.50 queda:

$$\beta_{eq} = \bar{\beta} - \frac{\bar{R} S(R)}{w_{eq} \bar{R}^2} \quad 4.52$$

Para la ec. 4.42 debemos evaluar  $\overline{[x^2]}$ , a lo largo de un ciclo.

$$\overline{[x^2]} = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2 d\psi \right] \quad 4.53$$

De la ec. 4.40b, sustituida en la ec. 4.53:



$$[x^2] = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} (R \cos\psi)^2 d\psi \right] \quad 4.54$$

$$[x^2] = \frac{\overline{R^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2\psi d\psi$$

$$[x^2] = \frac{\overline{R^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\psi \right] d\psi \quad 4.55$$

$$[x^2] = \frac{\overline{R^2}}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \psi + \frac{1}{4} \operatorname{Sen} 2\psi \right]_0^{2\pi}$$

$$\boxed{[x^2] = \frac{\overline{R^2}}{2}} \quad 4.56$$

Como:

$$w_{eq}^2 = \frac{\overline{x F(x, \mu, \tau)}}{[x^2]} \quad 4.57$$

$$w_{eq}^2 = \frac{\frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{2\pi} x F(x, \mu, \tau) d\psi \right]}{\overline{R^2}} \quad 4.58$$

Ya que:

$$x = R \cos\psi$$

Entonces la ec. 4.58 se puede escribir como:

$$w_{eq}^2 = \frac{\bar{R}}{\pi} \frac{\int_0^{2\pi} \text{Cos}\psi F(R \text{ Cos}\psi, \mu, \tau) d\psi}{R^2} \quad 4.59$$

Si definimos:

$$C(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \text{Cos}\psi F(R \text{ Cos}\psi, \mu, \tau) d\psi \quad 4.60$$

Se tendrá en la ec. 4.59:

$$w_{eq}^2 = \frac{\bar{R} C(R)}{R^2} \quad 4.61$$

Así hemos obtenido dos igualdades para los valores de  $\beta_{eq}$  y  $w_{eq}^2$ :

$$\beta_{eq} = \bar{\beta} - \frac{\bar{R} S(R)}{w_{eq} R^2} \quad 4.62$$

$$w_{eq}^2 = \frac{\bar{R} C(R)}{R^2} \quad 4.63$$

Si el proceso es ergódico, los promedios respecto al tiempo pueden reemplazarse por promedios estocásticos, así las ecs. 4.62 y 4.63 pueden escribirse:

$$\beta_{sq} = \bar{\beta} - \frac{\int_0^{\infty} R S(R) P(R) dR}{w_{sq} \int_0^{\infty} R^2 P(R) dR} \quad 4.64$$

$$w_{sq}^2 = \frac{\int_0^{\infty} R C(R) P(R) dR}{\int_0^{\infty} R^2 P(R) dR} \quad 4.65$$

En donde  $P(R) dR$  es la probabilidad de que  $R$  este entre  $R$  y  $R+dR$ .

Si en la ec. 4.21,  $\mu$  se hace igual a cero, entonces la ecuación diferencial es lineal, y ya que  $X_s(\tau)$  es gaussiano, entonces  $x(\tau)$  y  $x'(\tau)$  son también gaussianos.

Si el amortiguamiento es pequeño, de tal forma que se cumplan las ecs. 4.19 y 4.20, entonces la distribución de densidad de probabilidad  $P(R)$  es la distribución de Rayleigh.

En el sistema no lineal la respuesta del sistema no será en general gaussiana, sin embargo si la no linealidad es pequeña, entonces se tendrá aproximadamente una distribución gaussiana, es decir:

$$P(R) dR \approx \frac{R}{\sigma^2} \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right] dR \quad 4.66$$

En donde:

$$\sigma^2 = \overline{x^2}$$

Tomando en consideración esta función de densidad de probabilidad, la ec. 4.64 puede escribirse como:

$$\beta_{uq} = \bar{\beta} - \frac{\left[ \int_0^{\infty} R S(R) \left[ \frac{R}{\sigma^2} \exp \left( \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right) \right] dR \right]}{w_{uq} \int_0^{\infty} R^2 \left[ \frac{R}{\sigma^2} \exp \left( \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right) \right] dR} \quad 4.67$$

$$\beta_{uq} = \bar{\beta} - \frac{\left[ \int_0^{\infty} \frac{R^2}{\sigma^2} S(R) \exp. \left( \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right) dR \right]}{w_{uq} \int_0^{\infty} \frac{R^3}{\sigma^2} \exp \left( \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right) dR} \quad 4.68$$

Para el caso de  $w_{uq}^2$  en la ec. 4.65 tenemos:

$$w_{eq}^2 = \frac{\int_0^{\infty} R C(R) \left[ \frac{R}{\sigma^2} \exp \left( \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right) \right] dR}{\int_0^{\infty} R^2 \left[ \frac{R}{\sigma^2} \exp \left( \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right) \right] dR} \quad 4.69$$

$$w_{eq}^2 = \frac{\int_0^{\infty} \frac{R^2}{\sigma^2} C(R) \exp \left( \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right) dR}{\int_0^{\infty} \frac{R^3}{\sigma^2} \exp \left( \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right) dR} \quad 4.70$$

Ahora la tarea es poder evaluar las integrales de las ecs. 4.68 y 4.70.

Como la distribución considerada es de Rayleigh, para esta distribución se tiene que:

$$\int_0^{\infty} \frac{R^3}{\sigma^2} \exp \left( \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right) dR = 2\sigma^2 \quad 4.71$$

Esta integral, es la que se tiene en el denominador de las ecs. 4.68 y 4.70. Por lo tanto, estas ecuaciones se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\beta_{eq} = \bar{\beta} - \frac{\int_0^{\infty} \frac{R^2}{\sigma^2} S(R) \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right] dR}{2w_{eq} \sigma^2} \quad 4.72$$

$$\beta_{eq} = \bar{\beta} - \frac{1}{2\sigma^4 w_{eq}} \int_0^{\infty} R^2 S(R) \exp\left[\frac{-R^2}{2\sigma^2}\right] dR \quad 4.72a$$

Para  $w_{eq}^2$  se tiene:

$$w_{eq}^2 = \frac{\int_0^{\infty} \frac{R^2}{\sigma^2} C(R) \exp\left[\frac{-R^2}{2\sigma^2}\right] dR}{2\sigma^2} \quad 4.73$$

$$w_{eq}^2 = \frac{1}{2\sigma^4} \int_0^{\infty} R^2 C(R) \exp\left[\frac{-R^2}{2\sigma^2}\right] dR \quad 4.73a$$

Para poder calcular la integral de la ec. 4.72a. debemos evaluar  $S(R)$ . Pero obsérvese que esto ya no es necesario porque ya se evaluó cuando se analizó el comportamiento histerético bilineal ante una excitación armónica. De ahí teníamos que:

$$S(R) = \frac{-\mu R}{\pi} \text{Sen}^2\theta^* \text{ para } R > x_0 \quad 4.74a$$

$$S(R) = 0 \text{ para } R < x_0 \quad 4.74b$$

Sustituimos en 4.72a:

$$\beta_{u_1} = \bar{\beta} - \frac{1}{2\sigma^4 w_{u_1}} \int_0^{x_1} R^2 S(R) \exp\left[\frac{-R^2}{2\sigma^2}\right] dR -$$

$$- \frac{1}{2\sigma^4 w_{u_1}} \int_{x_1}^{\infty} R^2 S(R) \exp\left[\frac{-R^2}{2\sigma^2}\right] dR \quad 4.75$$

Se puede ver de la ec. 4.74b, que la primera integral es cero, por lo tanto, la ec. 4.75 resulta más sencilla.

$$\beta_{u_1} = \bar{\beta} - \frac{1}{2\sigma^4 w_{u_1}} \int_{x_1}^{\infty} R^2 \left(\frac{-\mu R}{\pi} \text{Sen}^2 \theta^o\right) \exp\left[\frac{-R^2}{2\sigma^2}\right] dR \quad 4.75a$$

$$\beta_{u_1} = \bar{\beta} + \frac{1}{2\sigma^4 w_{u_1}} \int_{x_1}^{\infty} \frac{\mu}{\pi} R^3 \text{Sen}^2 \theta^o \exp\left[\frac{-R^2}{2\sigma^2}\right] dR \quad 4.75b$$

Como:

$$\text{Cos} \theta^o = \left[1 - \frac{2x_1}{R}\right] \quad 4.76$$

ya que:

$$\text{Sen}^2 \theta^o = (1 - \text{Cos}^2 \theta^o) \quad 4.77$$

$$\beta_{u_1} = \bar{\beta} + \frac{1}{2\sigma^4 w_{u_1}} \frac{\mu}{\pi} \int_{x_1}^{\infty} R^3 (1 - \text{Cos}^2 \theta^o) \exp\left[\frac{-R^2}{2\sigma^2}\right] dR \quad 4.78$$

$$\beta_{\mu} = \bar{\beta} + \frac{\mu}{2\sigma^4 w_{\mu} \pi} \int_{x_0}^{\infty} R^3 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{2x_0}{R} \right)^2 \right] \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right] dR \quad 4.78a$$

$$\beta_{\mu} = \bar{\beta} + \frac{\mu}{2\sigma^4 w_{\mu} \pi} \int_{x_0}^{\infty} R^3 \left[ \frac{4x_0}{R} - \frac{4x_0^2}{R^2} \right] \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right] dR \quad 4.79$$

$$\beta_{\mu} = \bar{\beta} + \frac{\mu}{2\sigma^4 w_{\mu} \pi} \int_{x_0}^{\infty} (4x_0 R^2 - 4x_0^2 R) \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right] dR \quad 4.80$$

Se calculará de forma independiente:

$$\int_{x_0}^{\infty} (4x_0 R^2 - 4x_0^2 R) \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right] dR \quad 4.80a$$

$$\int_{x_0}^{\infty} (4x_0 R^2 - 4x_0^2 R) \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right] dR = 4x_0 \int_{x_0}^{\infty} R^2 \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right] dR -$$

$$-4x_0^2 \int_{x_0}^{\infty} R \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right] dR \quad 4.81$$

La primera integral de la ec. 4.81 resulta:

$$4x_0 \int_{x_0}^{\infty} R^2 \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right] dR = 4x_0 \left[ -\sigma^2 R \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right] \right]_{x_0}^{\infty} + \sigma^2 \int_{x_0}^{\infty} \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right] dR \quad 4.82$$



La segunda integral de la ec. 4.81 es:

$$4x_0^2 \int_{x_0}^{\infty} R \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right] dR = -4x_0^2 \sigma^2 \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right]_{x_0}^{\infty} \quad 4.83$$

Al sustituir los resultados de 4.82 y 4.83 en 4.81, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{\infty} (4x_0 R^2 - 4x_0^2 R) \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right] dR &= -4x_0 \sigma^2 R \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right]_{x_0}^{\infty} + \\ &+ 4x_0 \sigma^2 \int_{x_0}^{\infty} \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right] dR + 4x_0^2 \sigma^2 \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right]_{x_0}^{\infty} \end{aligned} \quad 4.84$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{\infty} (4x_0 R^2 - 4x_0^2 R) \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right] dR &= \left[ \frac{-4x_0 \sigma^2 R}{\exp \left( \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right)} \right]_{x_0}^{\infty} + \\ &+ \left[ \frac{4x_0^2 \sigma^2}{\exp \left( \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right)} \right]_{x_0}^{\infty} + 4x_0 \sigma^2 \int_{x_0}^{\infty} \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right] dR \end{aligned} \quad 4.85$$

Al tomar límites, se tiene que la integral 4.80a es:

$$\int_{x_0}^{\infty} (4x_0 R^2 - 4x_0^2 R) \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right] dR = 4x_0 \sigma^2 \int_{x_0}^{\infty} \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right] dR \quad 4.86$$

Al sustituir la ec. 4.86 en la ec. 4.80, se obtiene:

$$\beta_{u_1} = \bar{\beta} + \frac{\mu}{2\pi\sigma^4 w_{u_1}} \left[ 4x_0\sigma^2 \int_{x_0}^{\infty} \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right] dR \right] \quad 4.87$$

$$\beta_{u_1} = \bar{\beta} + \frac{2\mu x_0}{\pi\sigma^2 w_{u_1}} \int_{x_0}^{\infty} \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right] dR \quad 4.88$$

Se debe encontrar el valor de la integral:

$$\int_{x_0}^{\infty} \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right] dR \quad 4.89$$

Se puede ver que ésta integral puede calcularse a partir de lo que se conoce como *función complementaria de error*, la cual está definida como:

$$f_{cer}(x) = 1 - f_{er}(x) \quad 4.90$$

Aquí:

$f_{cer}(x)$  es la función complementaria de error

$f_{er}(x)$  es la función de error

La función complementaria de error queda definida por la integral siguiente:

$$\boxed{f_{cer}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp -u^2 du} \quad 4.90a$$

Entonces para la integral 4.89 se tiene:

$$\int_x^{\infty} \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right] dR = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp \left( \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right) \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} dR \right] \sigma\sqrt{2} \quad 4.91$$

$$\boxed{\int_x^{\infty} \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right] dR = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \sigma f_{cer} \left( \frac{x}{\sigma\sqrt{2}} \right)} \quad 4.92$$

Sustituyendo la ec. 4.92 en la ec. 4.88:

$$\beta_{uq.} = \bar{\beta} + \frac{2\mu x_0}{\pi\sigma^2 w_{uq.}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \sigma f_{cer} \left( \frac{x_0}{\sigma\sqrt{2}} \right) \quad 4.93$$

$$\boxed{\beta_{uq.} = \bar{\beta} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\mu}{w_{uq.}} \frac{x_0}{\sigma\sqrt{2}} f_{cer} \left( \frac{x_0}{\sigma\sqrt{2}} \right)} \quad 4.94$$

Para graficar la ec. 4.94, se harán los siguientes cambios:

$$\eta = \frac{\sqrt{2} \sigma_0}{x_0} \quad 4.95$$

$$y = \frac{\sigma}{\sigma_0} \quad 4.96$$

$$\lambda = \eta^2 y^2 \quad 4.97$$

$$\lambda = \frac{2 \sigma^2}{x_0^2} \quad 4.97a$$

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{\sqrt{2} \sigma}{x_0} \quad 4.98$$

Sustituyendo las igualdades anteriores en la ec. 4.94, resulta:

$$\beta_{u_1} = \bar{\beta} + \frac{2\mu}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{w_{u_1} \lambda^{\frac{1}{2}}} f_{cer} \left( \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \right) \quad 4.99$$

Si se escribe la ec. 4.99 en la forma siguiente resulta más sencilla de graficar.

$$\boxed{\frac{(\beta_{u_1} - \bar{\beta}) w_{u_1}}{\mu} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} f_{cer} \left( \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \right)} \quad 4.100$$

Aun más, al tomar en cuenta la definición de la función complementaria de error, la ec. 4.100 se puede escribir como:

$$\frac{(\beta_{u_1} - \bar{\beta}) w_{u_1}}{\mu} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}}^{\infty} \exp(-u^2) du \right] \quad 4.101$$

Lo cual finalmente resulta:

$$\frac{(\beta_{eq} - \bar{\beta}) w_{eq}}{\mu} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2) du \quad 4.102$$

En la fig.6 se grafica la ec. 4.102 para diferentes valores de  $\lambda$ . Se considera por sencillez que:

$$B = \frac{(\beta_{eq} - \bar{\beta}) w_{eq}}{\mu} \quad 4.103$$

Se puede observar que la función vale cero cuando  $\lambda$  es cero, alcanza un máximo alrededor del valor de  $\lambda$  igual a tres, y después tiene un comportamiento asintótico respecto del eje horizontal.

Para  $w_{eq}^2$  teníamos de la ec. 4.73:

$$w_{eq}^2 = \frac{\int_0^{\infty} \frac{R^2}{\sigma^2} C(R) \exp\left[\frac{-R^2}{2\sigma^2}\right] dR}{2\sigma^2} \quad 4.104$$

Pero del análisis de un oscilador con comportamiento bilineal ante una carga armónica, se tenía que:

$$C(R) = \frac{R}{\pi} \left[ \mu \theta^{\circ} + (1-\mu)\pi - \frac{\mu}{2} \text{Sen } 2\theta^{\circ} \right] \text{ para } R > x_0 \quad 4.105$$

$$C(R) = R \text{ para } R < x_0 \quad 4.106$$

Al sustituir las ecs. 4.105 y 4.106 en la ec. 4.104, se tiene:

$$w_{\eta}^2 = \frac{1}{2\sigma^2} \left[ \int_0^z \frac{R^2}{\sigma^2} R \exp\left(\frac{-R^2}{2\sigma^2}\right) dR \right] +$$

$$+ \frac{1}{2\sigma^2} \left[ \int_{z_0}^{\infty} \frac{R^2}{\sigma^2} \frac{R}{\pi} \left( \mu\theta^{\circ} + (1-\mu)\pi - \frac{\mu}{2} \text{Sen } 2\theta^{\circ} \right) \exp\left[\frac{-R^2}{2\sigma^2}\right] dR \right] \quad 4.107$$

$$w_{\eta}^2 = \frac{1}{2\pi\sigma^4} \left[ \int_0^z \pi R^3 \exp\left[\frac{-R^2}{2\sigma^2}\right] dR \right] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi\sigma^4} \left[ \int_{z_0}^{\infty} R^3 \left( \mu\theta^{\circ} + (1-\mu)\pi - \frac{\mu}{2} \text{Sen } 2\theta^{\circ} \right) \exp\left[\frac{-R^2}{2\sigma^2}\right] dR \right] \quad 4.108$$

$$w_{\eta}^2 = \frac{1}{2\pi\sigma^4} \left[ \int_0^z \pi R^3 \exp\left(\frac{-R^2}{2\sigma^2}\right) dR + \int_{z_0}^{\infty} \pi R^3 \exp\left(\frac{-R^2}{2\sigma^2}\right) dR \right] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi\sigma^4} \left[ \int_{z_0}^{\infty} R^3 \left( \mu\theta^{\circ} - \mu\pi - \frac{\mu}{2} \text{Sen } 2\theta^{\circ} \right) \exp\left[\frac{-R^2}{2\sigma^2}\right] dR \right] \quad 4.109$$

$$w_{\eta}^2 = \frac{1}{2\pi\sigma^4} \left[ \pi \int_0^{\infty} R^3 \exp\left[\frac{-R^2}{2\sigma^2}\right] dR \right] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi\sigma^4} \left[ \int_{z_0}^{\infty} -\mu R^3 \left( \pi - \theta^{\circ} + \frac{1}{2} \text{Sen } 2\theta^{\circ} \right) \exp\left[\frac{-R^2}{2\sigma^2}\right] dR \right] \quad 4.110$$

Llamando:

$$w_{eq.}^2 = w_{eq.1}^2 + w_{eq.2}^2 \quad 4.111$$

En donde:

$$w_{eq.}^2 = \frac{1}{2\pi\sigma^4} \left[ \pi \int_0^{\infty} R^3 \exp\left(\frac{-R^2}{2\sigma^2}\right) dR \right] \quad 4.112$$

$$w_{eq.2}^2 = \frac{1}{2\pi\sigma^4} \left[ \int_{\pi_0}^{\infty} -\mu R^3 \left( \pi - \theta^\circ + \frac{1}{2} \text{Sen } 2\theta^\circ \right) \exp\left[\frac{-R^2}{2\sigma^2}\right] dR \right] \quad 4.113$$

Como:

$$\int_0^{\infty} \frac{R^3}{\sigma^2} \exp\left[\frac{-R^2}{2\sigma^2}\right] dR = 2\sigma^2 \quad 4.114$$

Entonces de 4.112,  $w_{eq.1}^2$  resulta:

$$w_{eq.1}^2 = \frac{1}{2\pi\sigma^2} (\pi \cdot 2\sigma^2) = 1 \quad 4.115$$

Sustituyendo la ec. 4.115 en 4.111:

$$w_{\theta}^2 = 1 + \frac{1}{2\pi\sigma^4} \left[ \int_{x_0}^{\infty} -\mu R^3 \left( \pi - \theta^{\circ} + \frac{1}{2} \text{Sen}2\theta^{\circ} \right) \exp \left[ \frac{-R^2}{2\sigma^2} \right] dR \right] \quad 4.116$$

Si se hace el siguiente cambio de variable:

$$z = \frac{R}{x_0} \quad 4.117$$

De donde diferenciando se tiene:

$$dR = x_0 dz \quad 4.118$$

Y como:

$$R = zx_0$$

para:

$$z = 1 \quad ; \quad R = x_0$$

entonces el límite inferior será:

$$z = 1$$

Al hacer el cambio de variable en 4.116, e integrar por partes, se tiene:



$$w_{eq}^2 = 1 - \frac{8\mu}{\pi} \int_1^{\infty} \left[ \frac{(z-1)^{\frac{1}{2}}}{z\lambda} + \frac{(z-1)^{\frac{1}{2}}}{z^3} \right] \exp\left(\frac{-z^2}{\lambda}\right) dz \quad 4.119$$

En donde:

$$\lambda = \frac{2\sigma^2}{x_0^2} \quad 4.120$$

La ec. 4.119 se puede escribir en una forma más conveniente del siguiente modo:

$$\frac{(1 - w_{eq}^2)}{\mu} = \frac{8}{\pi} \int_1^{\infty} \left[ \frac{(z-1)^{\frac{1}{2}}}{z\lambda} + \frac{(z-1)^{\frac{1}{2}}}{z^3} \right] \exp\left[\frac{-z^2}{\lambda}\right] dz \quad 4.121$$

Esta integral debe evaluarse numéricamente para diferentes valores de  $\lambda$ . Por sencillez se considera:

$$W = \frac{(1 - w_{eq}^2)}{\mu} \quad 4.122$$

La gráfica correspondiente a la ec. 4.121 se muestra en la fig. 7. Se puede observar que la función inicia en cero cuando  $\lambda$  vale cero. Se incrementa el valor de la función conforme  $\lambda$  es mayor, y tiene un comportamiento asintótico respecto a uno conforme  $\lambda$  tiende a infinito.

La interpretación del significado de las ecs. 4.102 y 4.121 se puede hacer a partir de las gráficas correspondientes de estas ecuaciones, figs. 6 y 7 respectivamente.

En la fig. 7 se observa que cuando:

$$\lambda \rightarrow 0$$

entonces:

$$W = \frac{(1 - w_{eq}^2)}{\mu} \rightarrow 0$$

Esto conduce a que:

$$w_{eq}^2 \rightarrow 1$$

Este resultado resulta claro ya que para bajos niveles de excitación los desplazamientos se mantienen en el rango elástico en donde la pendiente es igual a uno.

Para el caso opuesto, es decir cuando:

$$\lambda \rightarrow \infty$$

entonces:

$$W = \frac{(1 - w_{eq}^2)}{\mu} \rightarrow 1$$

es decir:

$$1 - w_{eq}^2 = \mu$$

de donde:

$$w_{eq}^2 = (1 - \mu) \quad 4.123$$

Este resultado se debe a que cuando  $\sigma$  es grande, la mayor parte de los desplazamientos están en el régimen inelástico y la frecuencia natural equivalente corresponde a la tangente de la recta 1, del diagrama de histéresis bilineal que se tiene en la fig. 2, es decir, la frecuencia natural equivalente es igual al valor de la pendiente de la línea que nos describe el comportamiento plástico.

En la fig. 6 se tiene que cuando:

$$\lambda \rightarrow 0$$

entonces:

$$B = \frac{(\beta_{eq} - \bar{\beta})}{\mu} w_{eq} \rightarrow 0$$

en el límite tendremos:

$$\beta_{eq.} = \bar{\beta}$$

Es decir, para bajos niveles de excitación el amortiguamiento equivalente  $\beta_{eq.}$  es similar a  $\bar{\beta}$ .

Se hará el siguiente ejemplo considerando que:

$$\lambda = 5$$

De la fig.7:

$$W = \frac{(1 - w_{eq.}^2)}{\mu} = 0.635 \quad 4.124$$

es decir:

$$w_{eq.}^2 = 1 - 0.635\mu$$

$$\boxed{w_{eq.} = \sqrt{1 - 0.635\mu}} \quad 4.125$$

Con el valor de  $\lambda = 5$  se entra a la fig. 6, de donde se tiene:

$$B = \frac{(\beta_{eq.} - \bar{\beta}) w_{eq.}}{\mu} = 0.267$$

Se despeja  $\beta_{eq.}$ :

$$\beta_{eq} = \frac{0.267\mu}{w_{eq}} + \bar{\beta} \quad 4.126$$

Sustituyendo la ec. 4.125 en la ec. 4.126:

$$\beta_{eq} = \frac{0.267\mu}{\sqrt{1 - 0.635\mu}} + \bar{\beta} \quad 4.127$$

Las ec. 4.125 nos da la frecuencia equivalente  $w_{eq}$  y la ec. 4.127 el amortiguamiento equivalente  $\beta_{eq}$ .

Para encontrar la respuesta se debe tomar de nuevo en consideración la ecuación de movimiento pero ya linealizada.

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \beta_{eq} \frac{dx}{d\tau} + w_{eq}^2 x = Xs(\tau) \quad 4.128$$

Esta ecuación diferencial es lineal y los valores de  $\beta_{eq}$  y  $w_{eq}^2$  pueden encontrarse de las figs. 6 y 7 tal y como se mostró.

De acuerdo con la ec 4.128 se puede encontrar la función del sistema  $H(w)$ :

$$H(w) = \frac{1}{(w_{eq}^2 - w^2) + i\beta_{eq}w} \quad 4.129$$

La norma de esta función del sistema es:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_{eq}^2 - \omega^2)^2 + (\omega\beta_{eq})^2}} \quad 4.130$$

La norma al cuadrado es:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega_{eq}^2 - \omega^2)^2 + (\omega\beta_{eq})^2} \quad 4.131$$

Si se llama a  $X(\omega)$  al espectro de potencia de la respuesta  $X(\tau)$  y  $X_s(\omega)$  es el espectro de potencia de la entrada  $X_s(\tau)$ , entonces se tiene que  $X_s(\omega)$  y  $X(\omega)$  están relacionados por:

$$X(\omega) = |H(\omega)|^2 X_s(\omega) \quad 4.132$$

Sustituyendo la ec 4.131 en la ec. 4.132:

$$X(\omega) = \frac{1}{(\omega_{eq}^2 - \omega^2)^2 + (\omega\beta_{eq})^2} X_s(\omega) \quad 4.133$$

La varianza  $\sigma^2$  de la respuesta será:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega \quad 4.134$$

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(w_{eq}^2 - w^2)^2 + (w\beta_{eq})^2} X_s(w) dw \quad 4.135$$

Si el espectro de potencia de  $X_s(t)$  es ruido blanco con una ordenada  $S_0$ , entonces la ec. 4.135 tiene la forma:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_0}{(w_{eq}^2 - w^2)^2 + (w\beta_{eq})^2} dw \quad 4.136$$

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{\pi S_0}{\beta_{eq} w_{eq}^2}} \quad 4.137$$

La ec. 4.137 da la respuesta para el caso de ruido blanco.

Si se tiene que cuando  $\mu = 0$ , la varianza  $\sigma_0^2$  está dada por:

$$\sigma_0^2 = \frac{\pi S_0}{\beta} \quad 4.138$$

Despejando de las ecs. 4.137 y 4.138 a  $\pi S_0$ , e igualando:

$$\sigma^2 \beta_{eq} w_{eq}^2 = \sigma_0^2 \bar{\beta}$$

$$\boxed{\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = \frac{\bar{\beta}}{\beta_{eq} w_{eq}^2}} \quad 4.139$$

La ec. 4.139 se puede graficar de la siguiente manera:

Se consideran valores de  $\lambda$  con los cuales se calculan  $w_{eq}^2$  y  $\beta_{eq}$ , tal y como se realizó en el ejemplo numérico.

Enseguida se resuelve la ec. 4.139 para  $\sigma^2/\sigma_0^2$ . De la ec. 4.96 se tenía:

$$y^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} \quad 4.140$$

Se puede hacer la gráfica de  $y$  contra  $\eta$  tomando en cuenta la ec. 4.95:

$$\lambda = \eta^2 y^2 \quad 4.141a$$

de donde:

$$\eta = \frac{\sqrt{\lambda}}{y} \quad 4.141b$$

y de la ec. 4.97:

$$\eta = \frac{\sqrt{2} \sigma_0}{x_0} \quad 4.142$$



Como ejemplo se considerará:

$$\mu = \bar{\beta} = 0.02$$

Por consiguiente  $w_{eq}^2$  estará dado por:

$$W = \frac{1 - w_{eq}^2}{\mu} = \frac{1 - w_{eq}^2}{0.02} \quad 4.143$$

$$\boxed{w_{eq}^2 = 1 - 0.02W} \quad 4.144$$

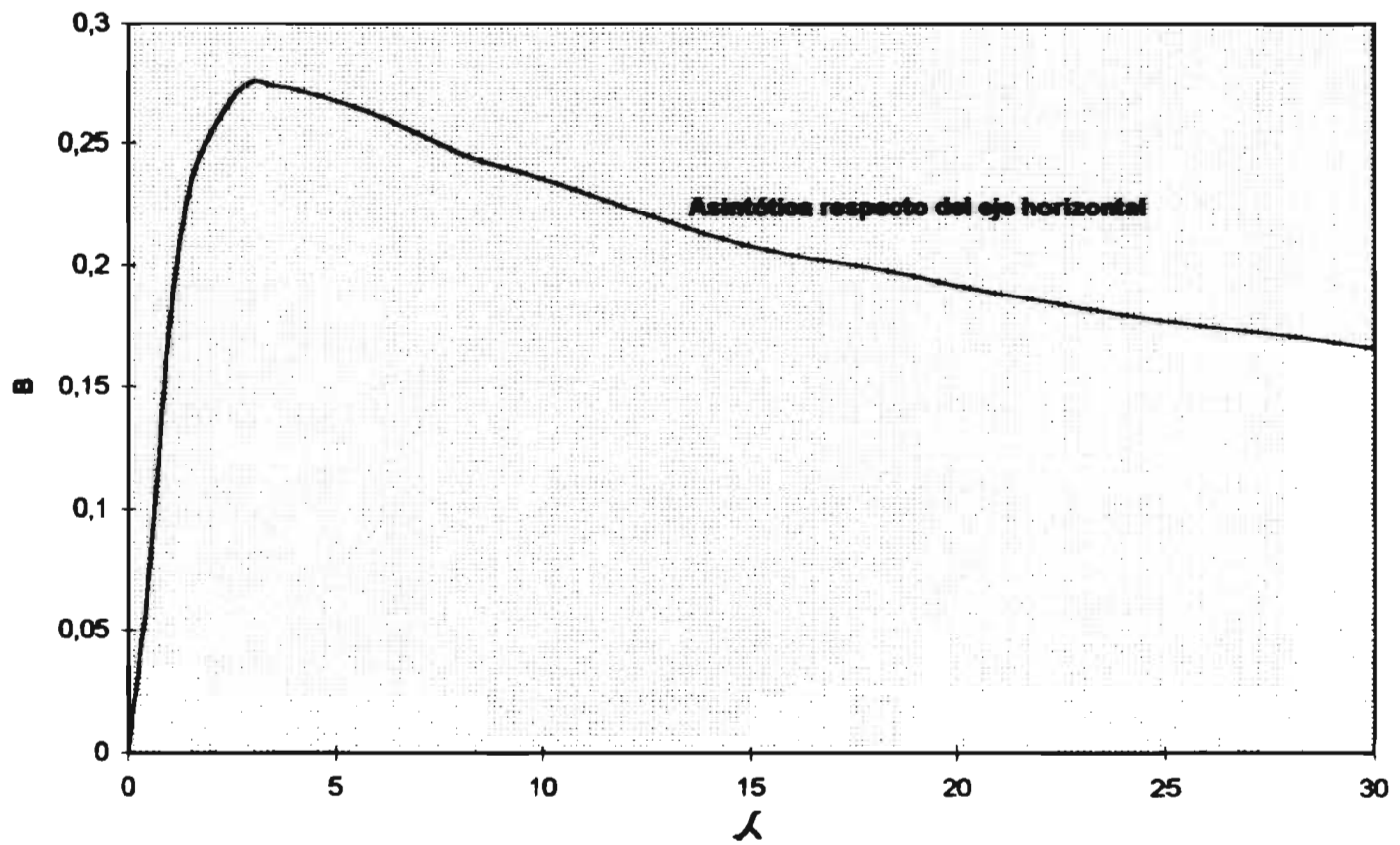
$\beta_{eq}$  está dado por:

$$B = \frac{(\beta_{eq} - \bar{\beta}) w_{eq}}{\mu} = \frac{(\beta_{eq} - 0.02) w_{eq}}{0.02} \quad 4.145$$

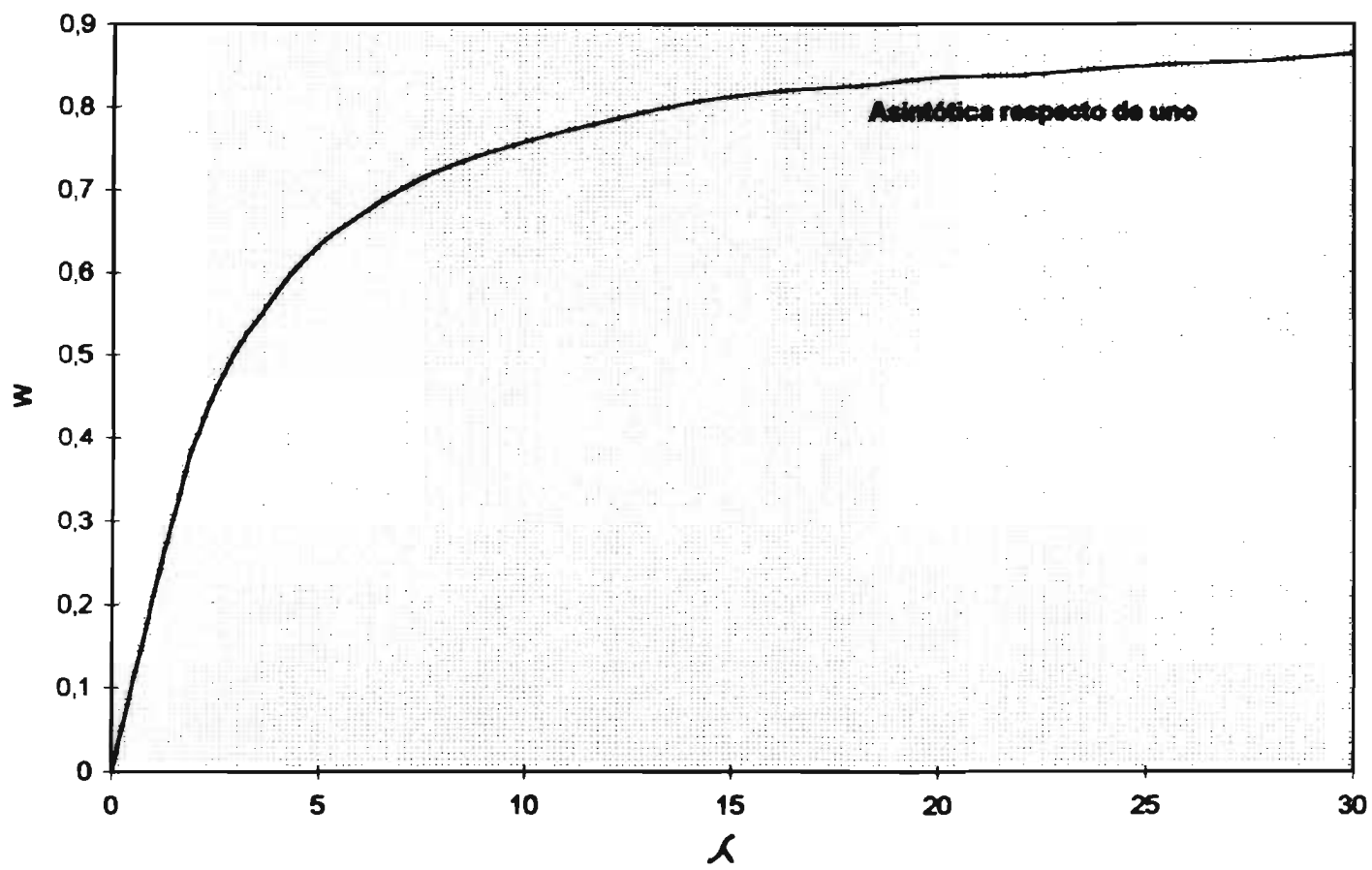
de aquí  $\beta_{eq}$  será:

$$\boxed{\beta_{eq} = \frac{0.02 B}{w_{eq}} + 0.02} \quad 4.146$$

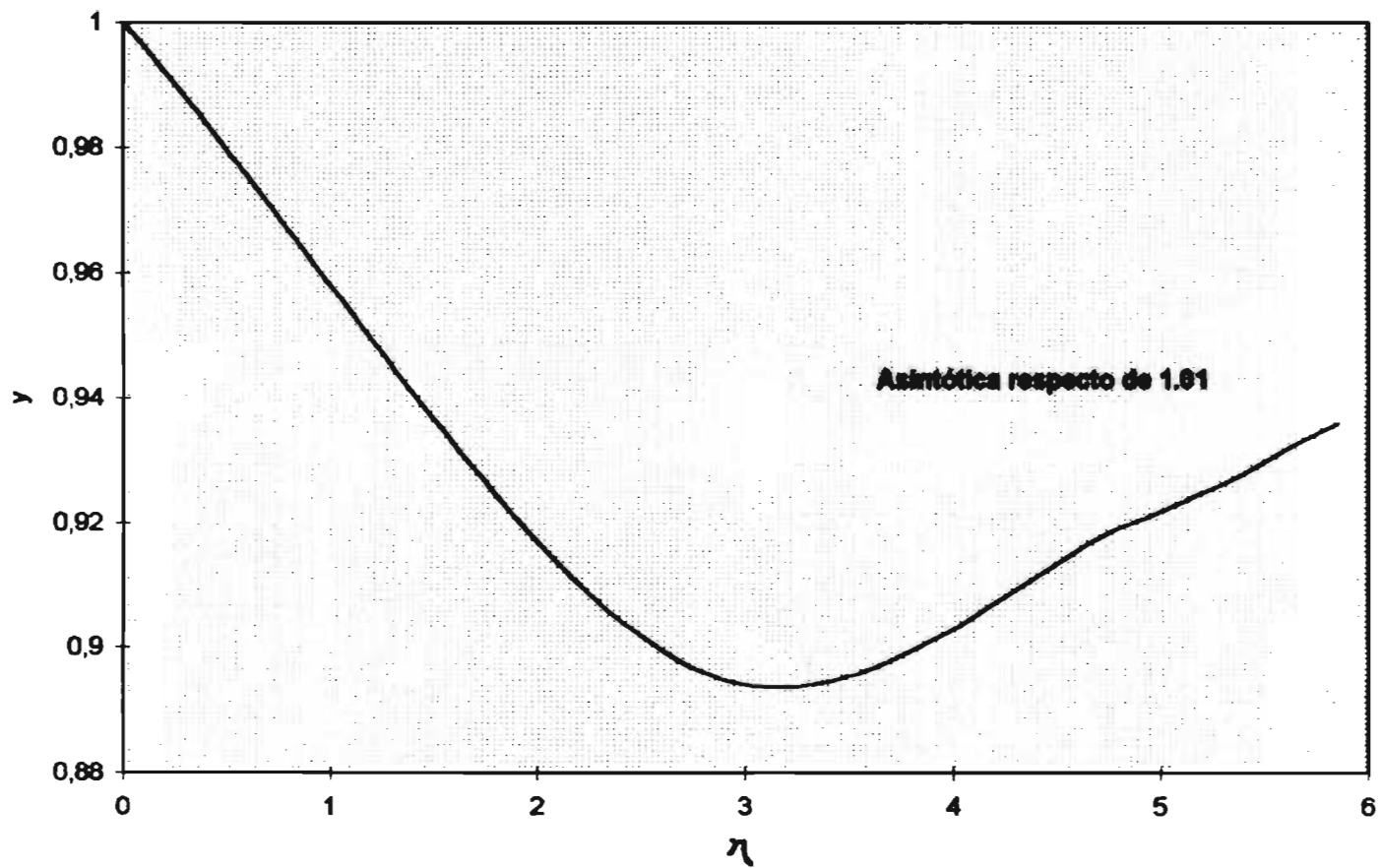
La gráfica resultante se muestra en la fig. 7a, en donde se puede observar el comportamiento de la varianza. Se puede ver que para valores pequeños de  $\eta$  prácticamente no se presenta ningun efecto. Para valores moderados de  $\eta$  se presenta una reducción apreciable del valor de  $y$ . Mientras que para valores grandes de  $\eta$ , el comportamiento de  $y$  es asintótico respecto del valor 1.01.



**Figura 6. Comportamiento del amortiguamiento equivalente.**



**Figura 7. Comportamiento de la frecuencia equivalente**



**Figura 7a. Comportamiento de la varianza**

## **V.- Conclusiones**

En este trabajo se ha deducido con detalle el método de los Parámetros Lentamente Variables, y se ha aplicado a sistemas simples con excitación tanto determinista como aleatoria.

Se han enumerado las limitaciones que presenta este criterio. En particular, se recomienda emplearlo cuando la disipación de energía en cada ciclo histerético no es alta. Si esto último no se cumpliera se podrían emplear modelos matemáticos como el propuesto por Wen-Bouc. Sobre este último se presentan las ecuaciones en el Apéndice A de este trabajo.

El método de los Parámetros Lentamente Variables puede aplicarse a diferentes tipos de comportamiento histerético. En esta tesis se dedujeron las ecuaciones para comportamiento bilineal, sin embargo la metodología puede extenderse fácilmente a comportamiento trilineal. En general si las funciones que representan dicho comportamiento son simples se podrán extrapolar las deducciones más fácilmente.

Los casos que se presentan en esta tesis se limitan a problemas estacionarios; sin embargo, se podrían extender a excitaciones no estacionarias mediante métodos paso a paso en el tiempo.

## **VI.- Referencias**

- 1.-Atalik T.S. y Utku. "Stochastic Linearization of Multi-Degree-of-Freedom Non Linear Systems", **Earthquake Engng. & Struct. Dynamics**, **4**, 411-420. (1976).
- 2.-Baber T.T. y Wen Y.K., "Random Vibration of Hysteretic Degrading Systems". **J. Engng. Mech. ASCE**, **111**, 1010-1026. (1981).
- 3.-Booton, R.C. "Non-Linear Control Systems with Random Inputs", **IRE Trans. Circuit Theory, CT-1**, 9-18. (1954).
- 4.-Caughey T.K., "Random Excitation of a System with Bilinear Hysteresis". **Journal of Applied Mechanics**. 649-652. (1960).
- 5.-Caughey T.K., "Sinusoidal Excitation of a System with Bilinear Hysteresis". **Journal of Applied Mechanics**. 640-643. (1960).
- 6.-Caughey T.K., "Equivalent Linearization Techniques". **J. Acoust. Soc. Am.**, **35**, 1706-1711. (1963).
- 7.-Caughey T.K., "On the Response of Non-Linear Oscillators to Stochastic Excitation", **Prob. Engng Mech.**, **1**, 2-4. (1986).
- 8.-Clarkson, B.L. y Mead, D.J. "High Frequency Vibration of Aircraft Structures". **J. Sound Vib.**, **28**, 487-504. (1973).
- 9.-Clough R.W. y Penzien J. "**Dynamics of Structures**". Mc Graw Hill International Editions. (1993).
- 10.-Constantinou, M.C. y Tadjbakhsh, I.G. "Response of a Sliding Structure to Filtered Random Excitation", **J. Struct. Mech.**, **12**, 401-418. (1984).



- 11.-Crandall, S.H. "Perturbation Techniques for Random Vibration of Non-Linear Systems", **J. Acoust. Soc. Am.**, **35**, 1700-1705. (1963).
- 12.-Grigoriu, M. y Allbe, B. "Response of Offshore Structures to Waves", **J. Engng. Mech.**, **112**, 729-744. (1986).
- 13.-Gumestad, O.T. y Connor, J.J. "Linearization Methods and the Influence of Current on the Non-Linear Hydrodynamic Drag", **Appl. Ocean Research**, **5**, 184-194. (1983).
- 14.-Kazakov, I.E. "Approximate Probability Analysis of Operational Precision of Essentially Nonlinear Feedback Control Systems", **Auto. Remote Control**, **17**, 423-450. (1955).
- 15.-Kryloff, N. y Bogoliuboff, N. "Introduction a la Mechanique Nonlineaire: les Methodes Approchaes et Asymptotiques", **Ukr. Akad. Nauk. Inst. de la Mecanique, Chaire de Phys. Math. Ann.** (1937).
- 16.-Leira, B.J. "Multidimensional Stochastic Linearization of Drag Forces", **Appl. Ocean Research**, **9**, 150-162. (1987).
- 17.-Lutes, L.D. y Takemiya, H. "Random Vibration of a Yielding Oscillator", **J. Engng. Mech. Div., ASCE**, **100**, 343-358. (1974).
- 18.-Maisel Louis., "**Probabilidad y Estadística**". Fondo Educativo Interamericano. (1971).
- 19.-Meirovitch Leonard., "**Elements of Vibration Analysis**". Mc Graw Hill International Editions. Segunda Edición. (1986).

20.-Noguchi, T. "The Response of a Building on Sliding Pads to Two Earthquake Models", **J. Sound Vib.**, **103**, 437-442. (1985).

21.-Papoulis A., "**Probability, Random Variables and Stochastic Processes**". Mc Graw Hill International Editions. (1991).

22.-Roberts, J.B. y Dunne, J.F. "Nonlinear Random Vibration in Mechanical Systems", **Shock Vib. Digest**, **20**, 16-25. (1988).

23.-Roberts J.B. y Spanos P.D. "**Random Vibration and Statistical Linearization**". John Wiley & Sons. (1990).

24.-Rubinstein, R.Y. "**Simulation and the Monte Carlo Method**", Wiley, New York. (1981).

25.-Ruiz S.E. y Venini P. "Equivalent Linearization for Systems under Nonstationary Motions", **Structural Dynamics**. Institute of Sound and Vibration. Southampton, U.K., Vol 1. 383-392, (1994).

26.-Shinozuka, M. "Monte Carlo Solution of Structural Dynamics", **Comps. Structs.**, **2**, 855-874. (1972).

27.-Spanos, P.D. y Agarwal, V.K. "Response of a Simple Tension Leg Plattform Model to Wave Forces Calculated at Displaced Position", **J. Energy Resources Techn.**, ASME, **106**, 437-443. (1984).

28.-Spiegel M. "**Ecuaciones Diferenciales Aplicadas**", Prentice Hall International, (1983).

29.-Suzuki, Y. y Minai, R. "Application of Stochastic Differential Equations to Seismic Reliability Analysis of Hysteretic

Structures". In Y.K. Lin and R. Minai (eds). **Lecture Notes in Engng.**, **32**, Springer, Berlin. (1987).

**30.**-Takemiya, H. "Equivalent Linearization for Randomly Excited Bilinear Oscillators", **Proc. Jap. Soc. Civ. Engng.**, **219**, 1-13. (1973).

**31.**-Takemiya, H. y Lutes, L.D. "Stationary Random Vibration of Hysteretic Structures", **J. Engng. Mech. Div.**, ASCE, **103**, 673-688. (1977).

**32.**-Wen Y.K., "Equivalent Linearization for Hysteretic Systems under Random Excitation", **Transactions of ASME**, **47**, (1980).

**33.**-Wen Y.K., "Method for Random Vibration of Hysteretic Systems". **Journal of Engineering Mechanics Division**, ASCE. **102**. 249-264, (1976).

**34.**-Wen Y.K., "Stochastic Response and Damage Analysis of Inelastic Structures", **Prob. Engng, Mech.**, **1**, 49-57. (1986).

**35.**-Wen Y.K., "Methods of Random Vibration for Inelastic Structures". **Applied Mechanics Revs**, ASME, **42**, 39-52, (1989).

# **Apéndice A**

**Solución Numérica de la Ecuación**

**Diferencial de Y.K. Wen**

### **A.1. - Introducción**

En la mayoría de las estructuras que se encuentran en movimiento, las fuerzas que tienden a mantenerlas en su estado de equilibrio, pueden ser de algún tipo, como las que siguen: fuerzas gravitacionales, presión hidrostática, esfuerzos internos generados por la deformación de sólidos, etc.

El material de los elementos estructurales genera una fuerza restauradora, en virtud de que se da cierto grado de deformación.

La variación de la deformación resultante depende primeramente de las propiedades del material del cual está formado un componente estructural. En muchos casos, particularmente si la deformación es pequeña, la relación fuerza-desplazamiento sigue la ley de Hooke.

Sin embargo, cuando se tienen grandes desplazamientos, se presenta una desviación con respecto a las características lineales. Esta desviación puede ser de endurecimiento o ablandamiento.

La palabra elástico en este contexto significa que el material no permanece deformado cuando dejan de actuar las fuerzas externas. Así, cuando un material tiene comportamiento elástico, se entiende que regresa a su estado original cuando no tiene cargas sobre él. Evidentemente, la fuerza elástica restauradora es una fuerza conservativa.

Algunos materiales tienen un comportamiento aproximadamente elástico, pero las propiedades que se muestran en el diagrama esfuerzo- deformación, puede indicar que el material no es lineal.

Las cargas dinámicas que llevan al material más allá del comportamiento elástico, hacen que este presente disipación de energía mediante fuerzas histeréticas las cuales no son conservativas y la energía disipada en cada ciclo, está determinada por el tamaño de los ciclos de histéresis realizados.

#### **A.2.-Modelo de Wen**

Se han propuesto ecuaciones diferenciales que nos describen el comportamiento de las estructuras en cierto intervalo de esfuerzos y deformaciones.

Existe un modelo propuesto por Wen y Bouc (32), (1980), a partir del cual se pueden encontrar una gran variedad de formas en los lazos de histéresis.

Esto nos permite modelar el comportamiento inelástico de gran número de elementos estructurales, sometidos a cargas externas dinámicas que estén formados de materiales tales como: acero, concreto, madera, etc.

A partir de este modelo se puede salvar la limitación que presenta el modelo histerético bilineal, ya que a partir de éste se puede representar el comportamiento histerético bilineal, pero también otra cantidad muy grande de comportamientos no lineales.

Como se comentó anteriormente, el método de Kryloff y Bogoliuboff (15), (1937), es adecuado cuando se tiene poca disipación de energía. Con el modelo de Wen, podemos establecer disipación de energía baja o alta indistintamente.

La ecuación diferencial de este modelo relaciona la fuerza  $z$  requerida para producir un desplazamiento  $x$ , relación que está dada por la siguiente ecuación diferencial no lineal de primer orden:

$$\dot{z} = -\gamma |\dot{x}| z |z|^{n-1} - \beta \dot{x} |z|^n + A \dot{x} \quad A.1$$

En esta ecuación:

$\gamma$  y  $\beta$  son constantes que nos definen la forma del lazo histéretico. Estas constantes se encuentran experimentalmente, dependiendo del caso que se estudie.

$A$  es una constante que nos permite modelar el tamaño del lazo histerético. Para valores grandes de  $A$ , se tendrán lazos de mayor amplitud.

$n$  nos define la transición de la respuesta elástica a la plástica. Para valores grandes de  $n$ , se tendrá una respuesta casi elasto-plástica.

Supongamos que la fuerza histerética se represente con la siguiente ecuación general:

$$\phi(x,t) = \alpha k x + (1 - \alpha) k z \quad \text{A.2}$$

En donde:

$k$  es la rigidez elástica lineal.

$\alpha$  es la operación resultante de dividir la rigidez última entre la rigidez elástica, es decir:

$$\alpha = \frac{k'}{k} \quad \text{A.3}$$

Aquí,

$k'$  es la rigidez última.

Es común que el valor de  $\alpha$  se encuentre entre 0.01 y 0.05.

Para poder ver las formas de lazos de histéresis que se pueden obtener a partir de la ecuación diferencial de Wen, es necesario resolver la ec. A.1, junto con la ecuación diferencial de movimiento del sistema. Dicha ecuación de movimiento está dada por:

$$\ddot{x} + 2\zeta_0 \omega_0 \dot{x} + \alpha \omega_0^2 x + (1 - \alpha) \omega_0^2 z = \frac{f(t)}{m} \quad \text{A.4}$$

Aquí:



$x$  es el desplazamiento del oscilador,

$\zeta_0$  es el porcentaje de amortiguamiento crítico,

$w_0$  es la frecuencia natural del oscilador, en el rango elástico.

$\alpha$  es el porcentaje de la rigidez elástica, definido por medio de la ec. A.3.

Se pueden resolver las ecs. A.1 y A.4 simultáneamente, notando que las variables dependientes son  $x$  y  $z$ , y la variable independiente es el tiempo  $t$ .

Para solucionar estas ecuaciones (A.1 y A.4), se reducen primero a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Como la ec. A.1 ya es una ecuación de primer orden, entonces no hay necesidad de reducir esta ecuación. Pero la ecuación de movimiento (ec. A.4), es de segundo orden por lo tanto debemos reducirla. Despejamos de ésta ecuación a la aceleración  $\ddot{x}$ :

$$\ddot{x} = \frac{f(t)}{m} - 2\zeta_0 w_0 \dot{x} - \alpha w_0^2 x - (1 - \alpha)w_0^2 z \quad \text{A.5}$$

Si ahora definimos las siguientes variables:

$$x = x_1 \quad \text{A.6a}$$

$$\dot{x} = x_2 \quad \text{A.6b}$$

Podemos afirmar que existirá la siguiente relación entre las nuevas variables definidas:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x} \quad \text{A.7a}$$

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{x} \quad \text{A.7b}$$

Al considerar las ecs. A.6 y A.7 en las ecs. A.1 y A.5, podemos escribir el siguiente sistema de tres ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \text{A.8a}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{f(t)}{m} - 2\zeta_0 \omega_0 x_2 - \alpha \omega_0^2 x_1 - (1 - \alpha) \omega_0^2 z \quad \text{A.8b}$$

$$\dot{z} = -\gamma |x_2| z |z|^{n-1} - \beta x_2 |z|^n + A x_2 \quad \text{A.8c}$$

Las ecs. A.8a, A.8b y A.8c forman un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, el cual puede resolverse por cualquier método numérico, una vez que se han asignado valores a las constantes.

Al resolver el sistema de ecuaciones, se obtienen lazos como los que se presentan en las figs. 8 a 11. Para dichas figuras se partió de suponer que:

$$f(t) = 2 \text{ Sen } t$$

$$m = 1.00$$

$$\alpha = 0.07$$

$$A = 1$$

$$w_0 = 157$$

Las condiciones iniciales para todos los casos graficados son:

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, z(0) = 0.$$

En las figs. 8a-8e se consideró:

$$\gamma = \beta = 0.50$$

$$n = 5$$

Debido a que  $\eta$  tiene un valor alto, entonces podemos observar con toda claridad en la fig. 8a, que la gráfica nos muestra un carácter claramente de tipo elasto-plástico. En esta se puede ver la influencia del valor de  $\eta$ .

Para las figs. 9a, 10a y 11a se tiene un comportamiento de endurecimiento del material.

En las figs. 8a, 9a, 10a y 11a se tiene la gráfica de  $z$  (variable auxiliar) contra  $x$  (desplazamiento).

En las figs. 8b, 9b, 10b y 11b se graficó el desplazamiento  $x$  contra el tiempo  $t$ . Puede verse con toda claridad la influencia de la respuesta transitoria al inicio del movimiento.

En las figs. 8c, 9c, 10c y 11c se tiene la gráfica de  $z$  contra el tiempo  $t$ . Puede verse en la gráfica 8c que debido al comportamiento de tipo elasto-plástico, en los valores máximos de  $z$  se presenta una meseta o línea horizontal.

Las figs. 8d, 9d, 10d y 11d muestran la gráfica de la velocidad ( $v$ ) contra  $z$ .

Para las figs. 8e, 9e, 10e y 11e se tiene la gráfica de la velocidad ( $v$ ) contra el tiempo  $t$ .

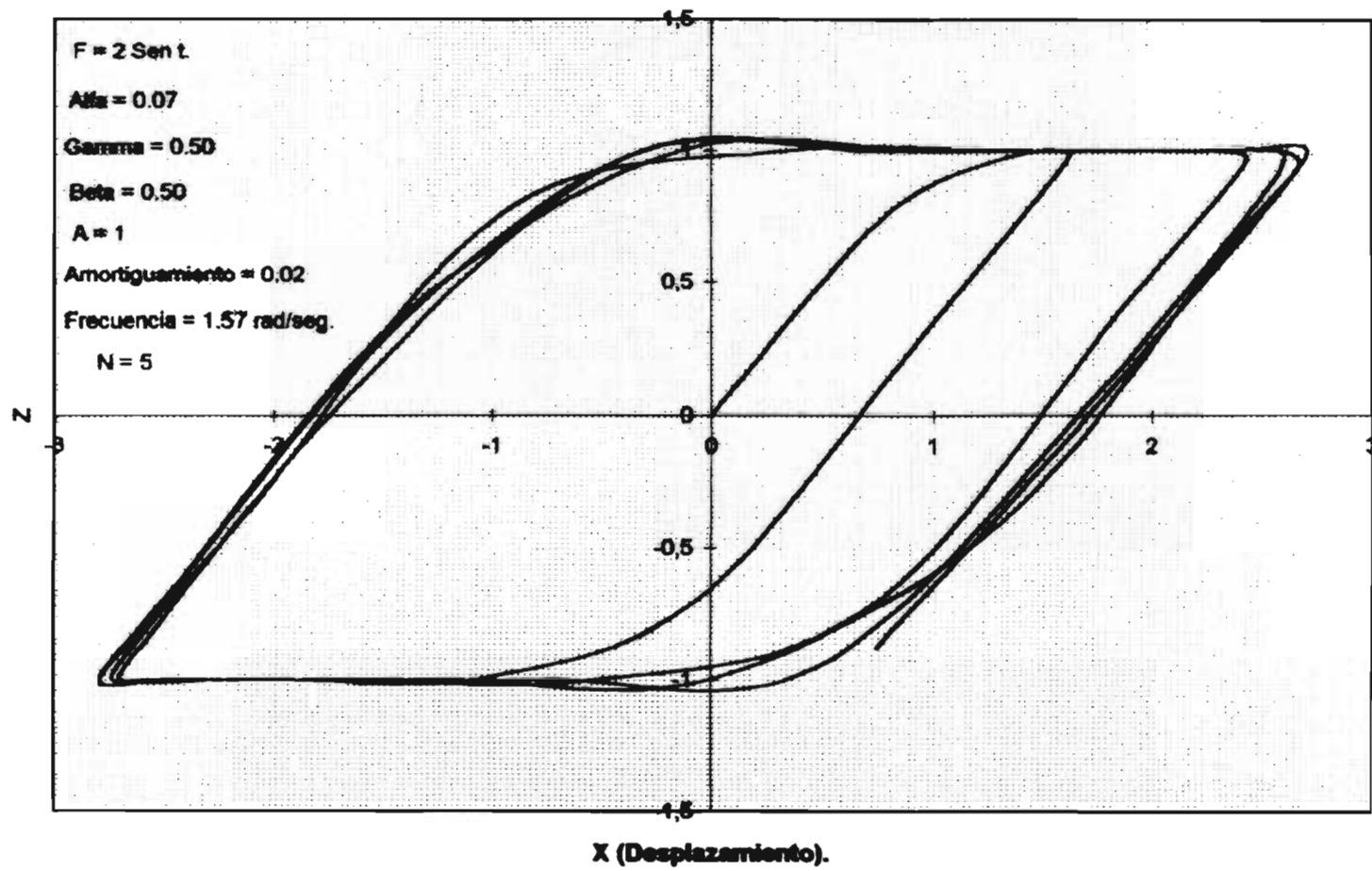
En las diferentes figuras (8a, 9a, 10a y 11a) podemos destacar que el área de los diferentes lazos de histéresis es muy variable, la cual depende de los valores de  $\gamma$  y  $\beta$ , ya que la señal de entrada permanece constante.

Para cualquier fenómeno en particular, deberán de establecerse los valores de las diferentes constantes que nos describen el proceso físico.

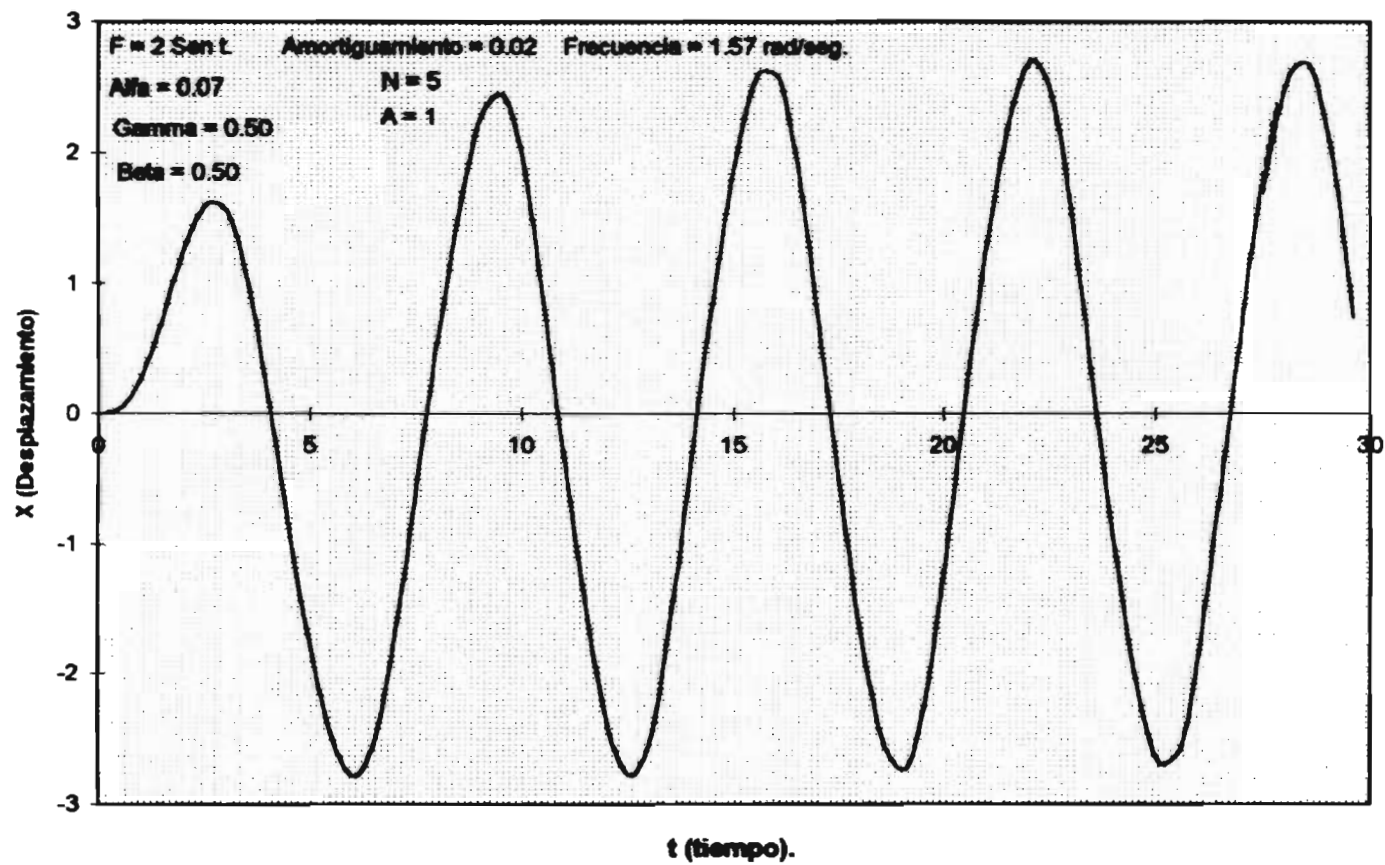
De esta forma podemos apreciar que el modelo diferencial de Wen-Bouc, nos puede describir cualquier fenómeno de histéresis que se presente, lo cual le da una aplicación demasiado amplia.

Existe un inconveniente grande con esta ecuación, y es precisamente que *no es lineal*. Esto nos conduce al problema de que no se tiene una expresión algebraica que proporcione la solución de esta ecuación.

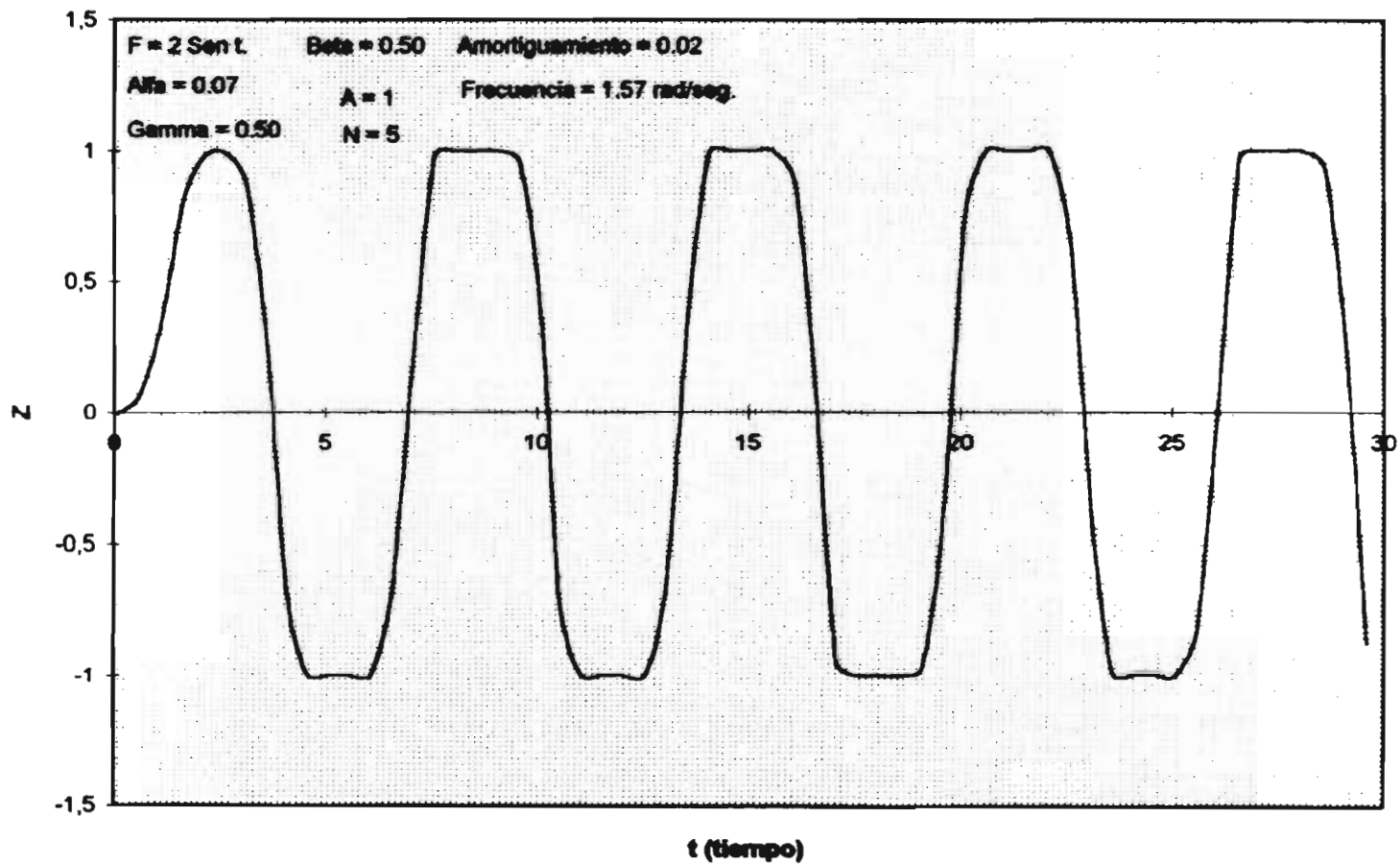
Y aun más, se presenta el inconveniente de la *no linealidad* de la ecuación de movimiento. Por lo que el sistema de ecuaciones diferenciales A.8, no es lineal, y nos vemos forzados a resolverlo numéricamente o bien mediante linealización equivalente.



**Figura 8a. RESPUESTA HISTERETICA Z vs. X.**

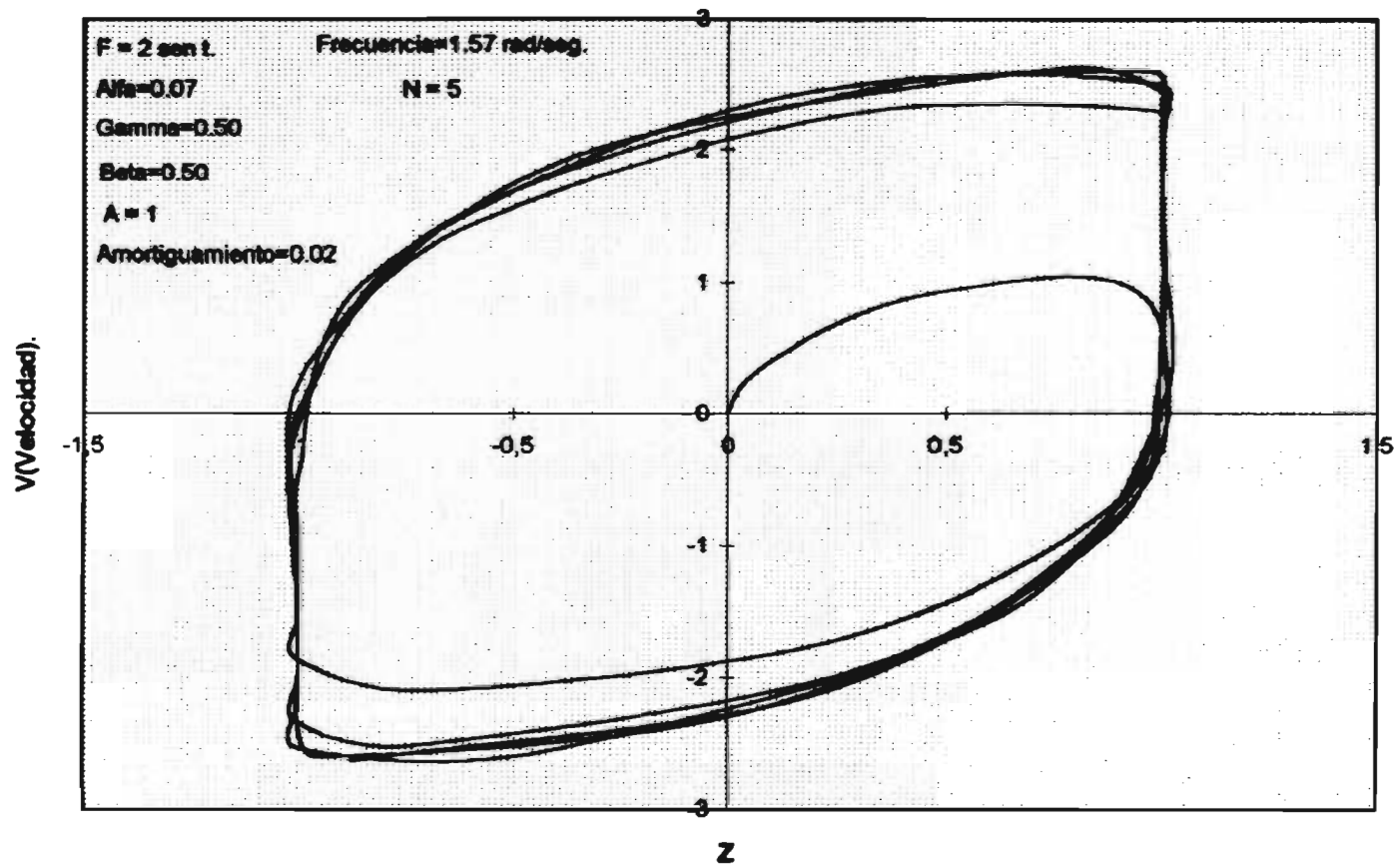


**Figura 8b. RESPUESTA X vs. t.**

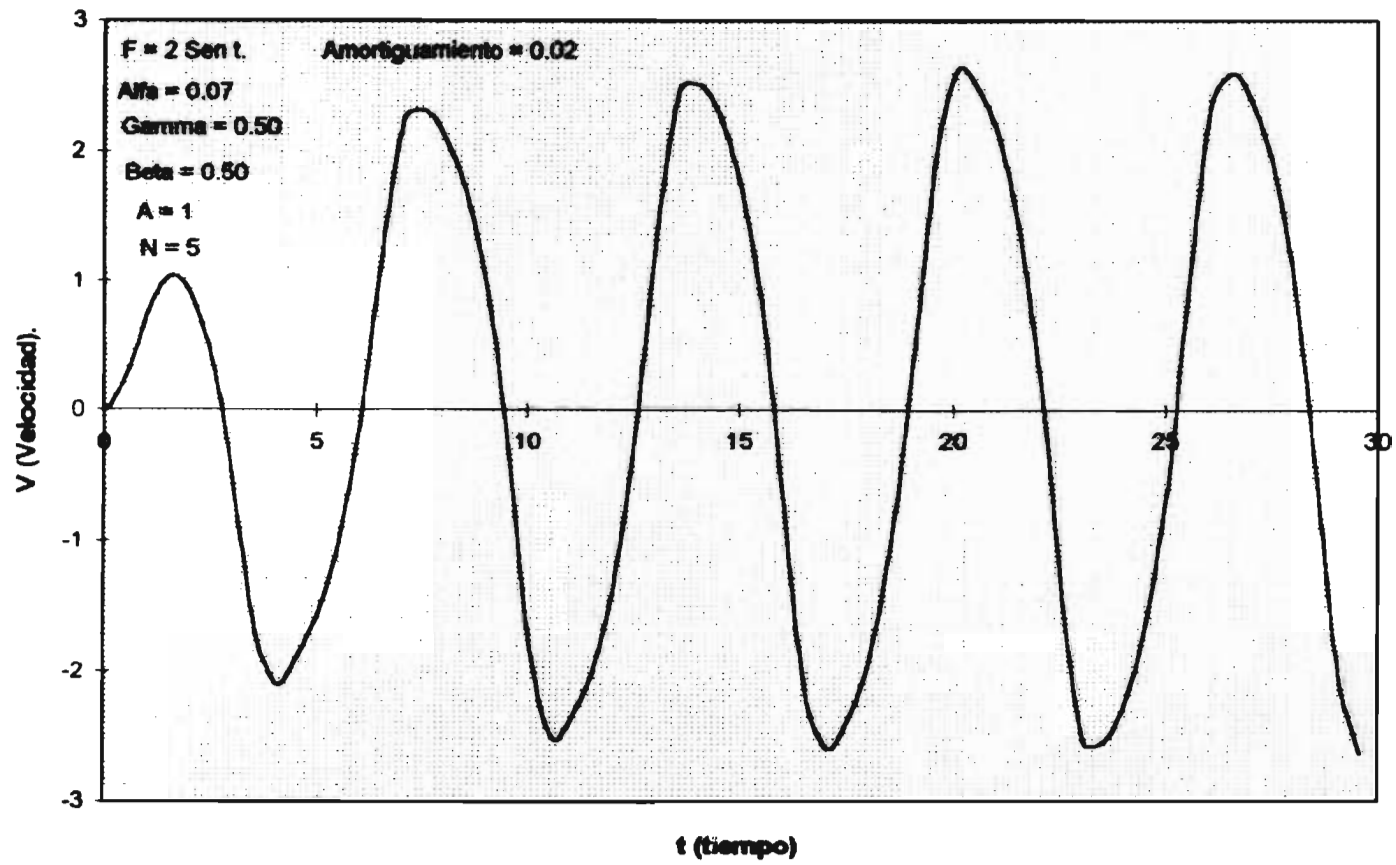


**Figura 8c. RESPUESTA Z vs. t.**

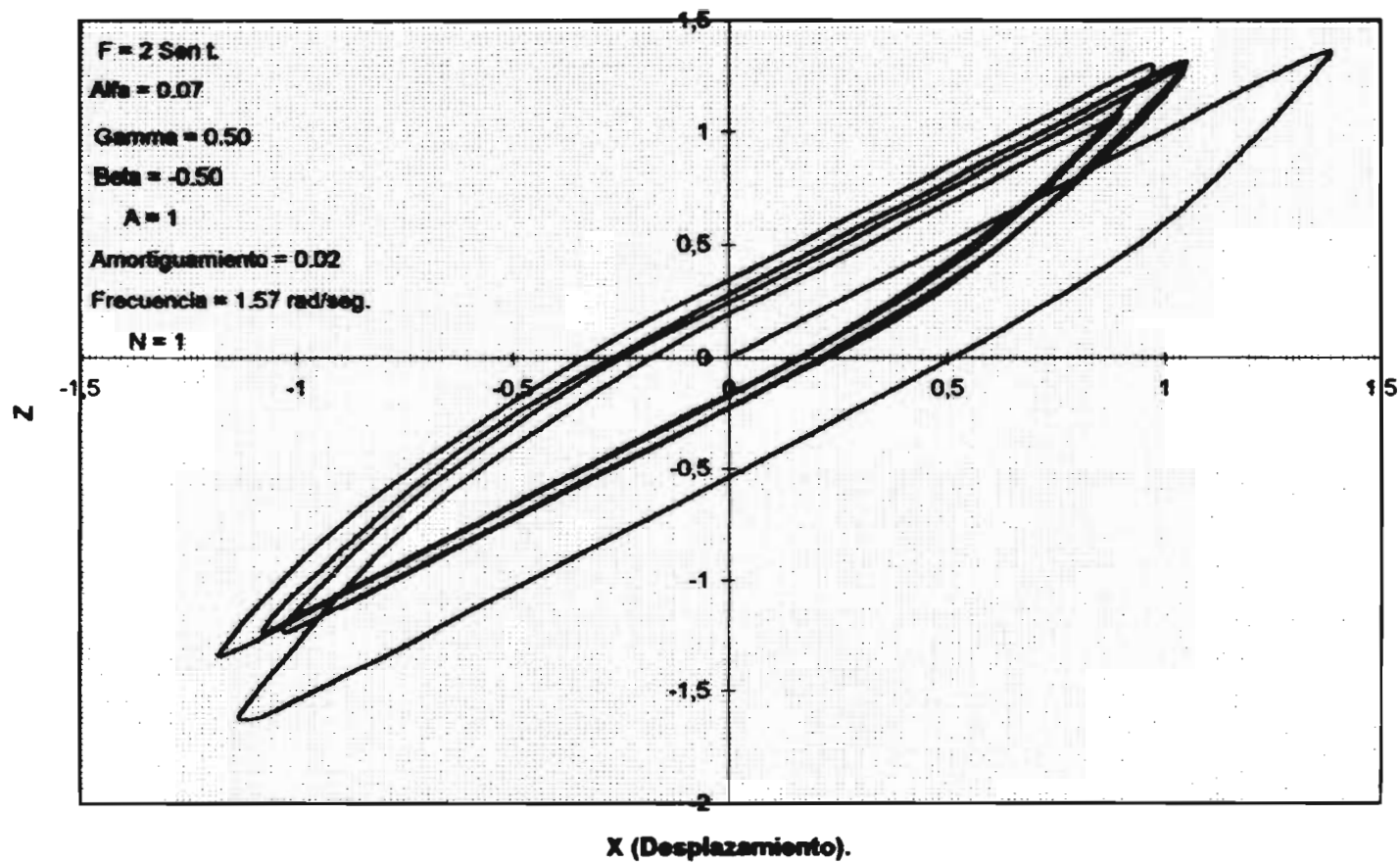




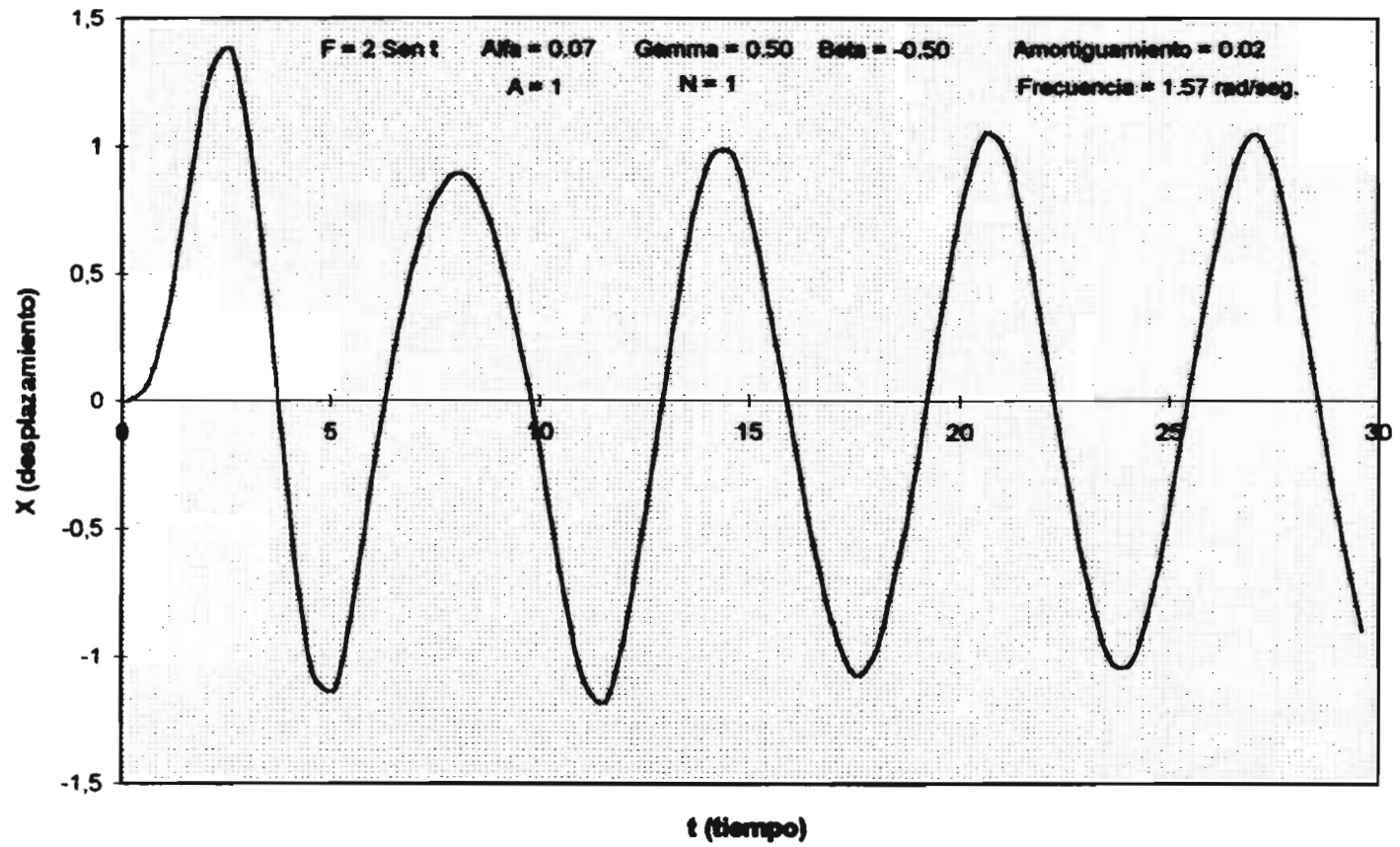
**Figura 8d. RESPUESTA HISTERETICA V vs. Z.**



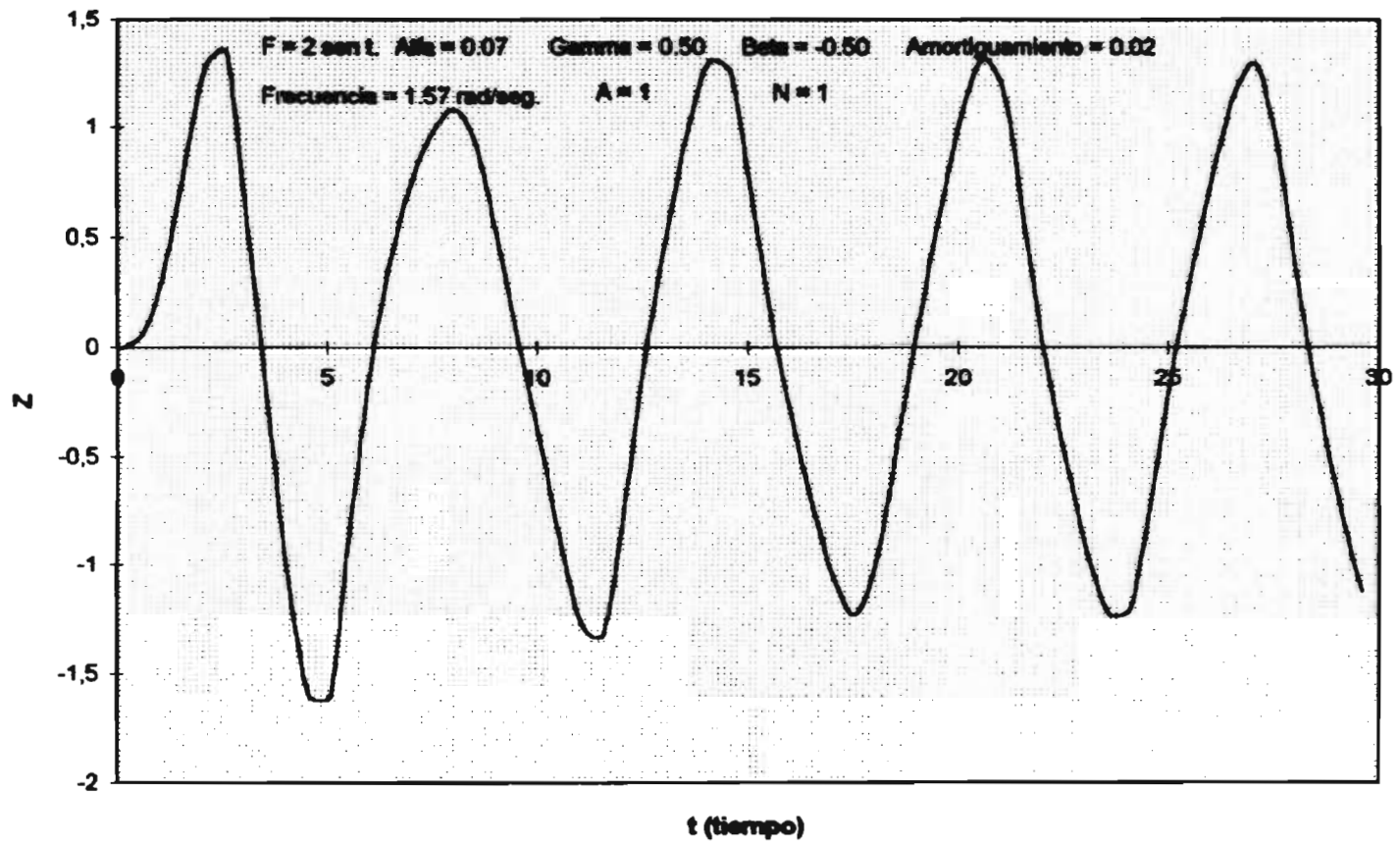
**Figura 8e. RESPUESTA V vs. t.**



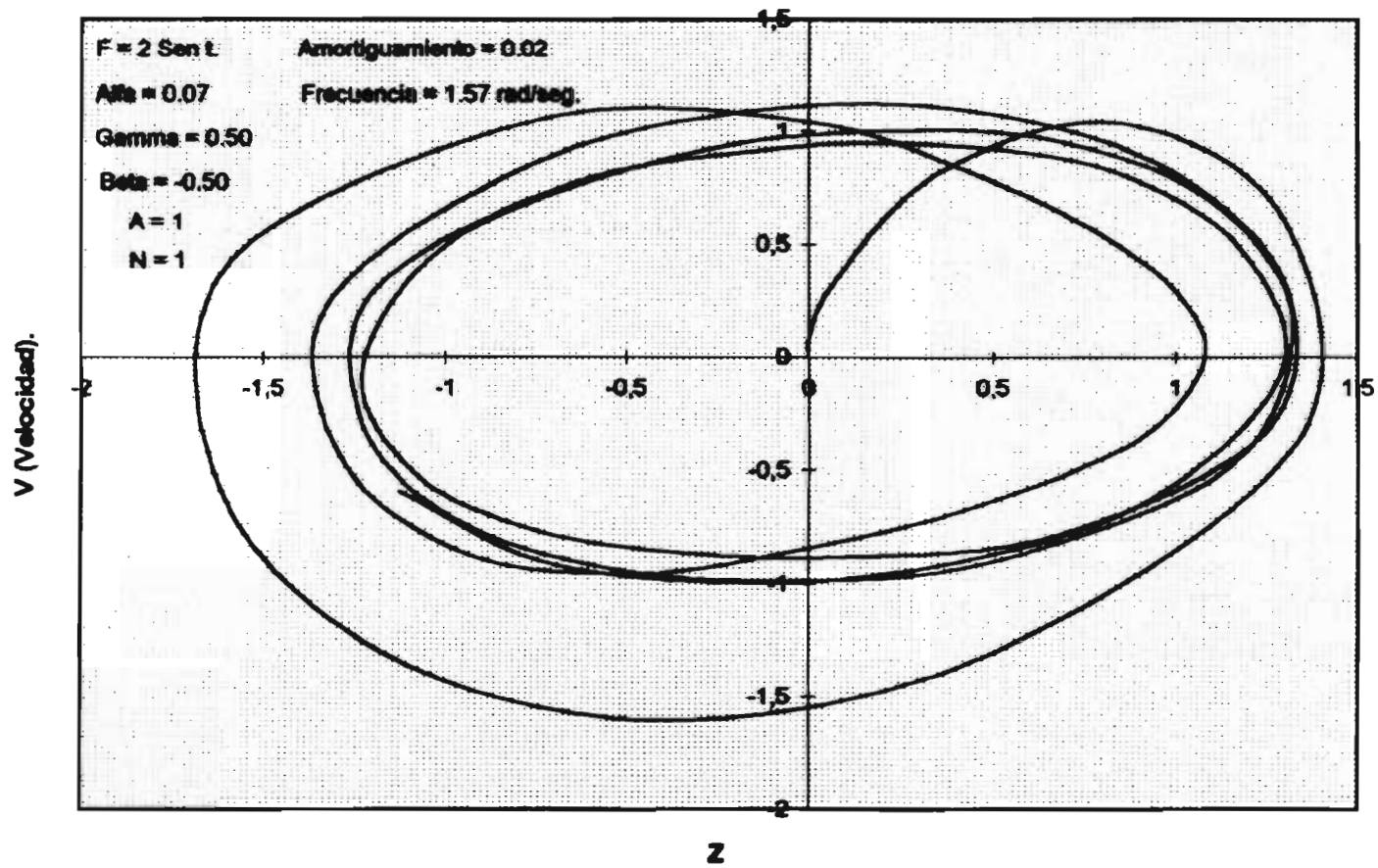
**Figura 9a. RESPUESTA HISTERETICA Z vs. X.**



**Figura 9b. RESPUESTA X vs. t.**



**Figura 9c. RESPUESTA Z vs. t.**



**Figura 9d. RESPUESTA HISTERETICA V vs. Z.**

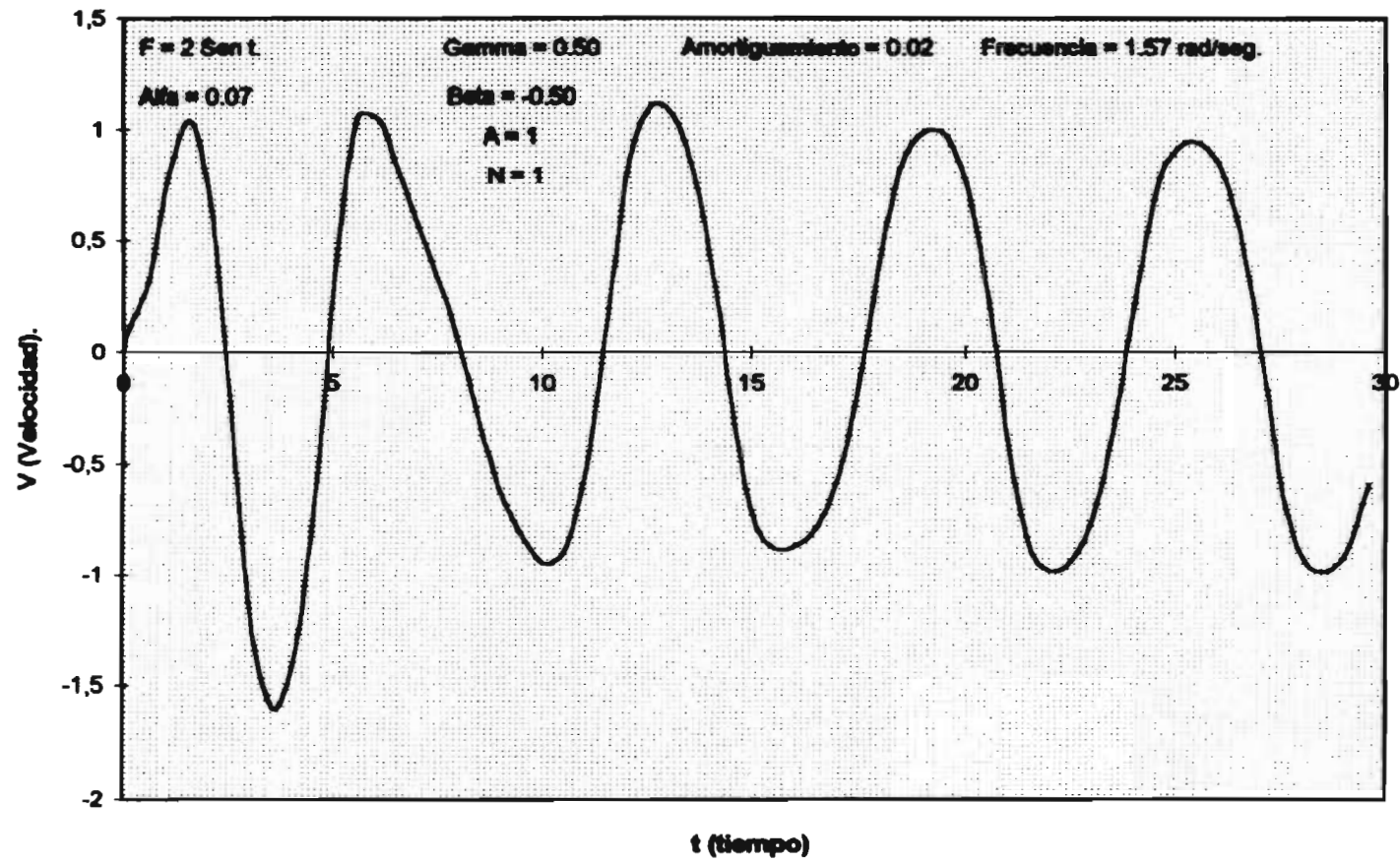
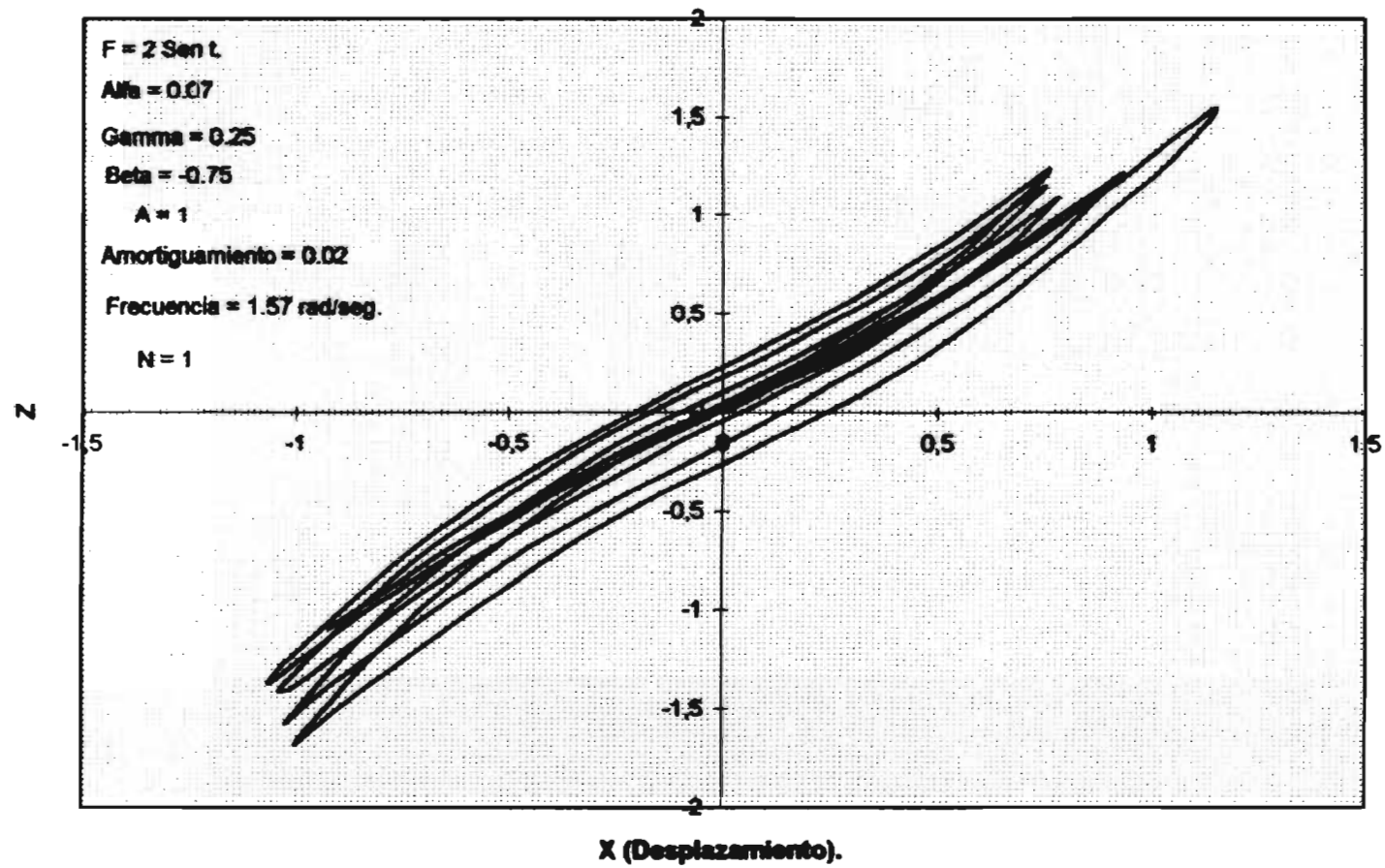
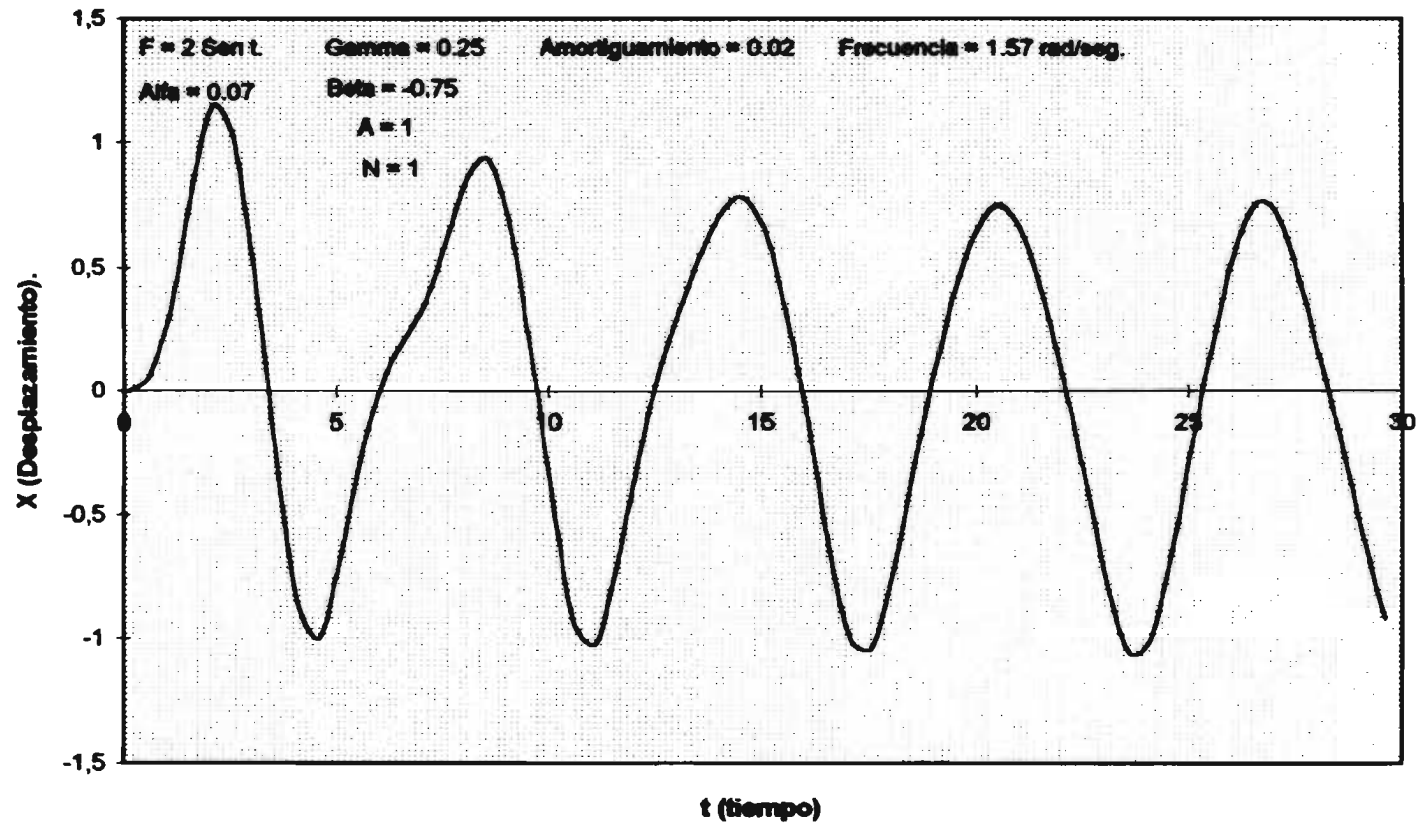


Figura 9e. RESPUESTA V vs. t.

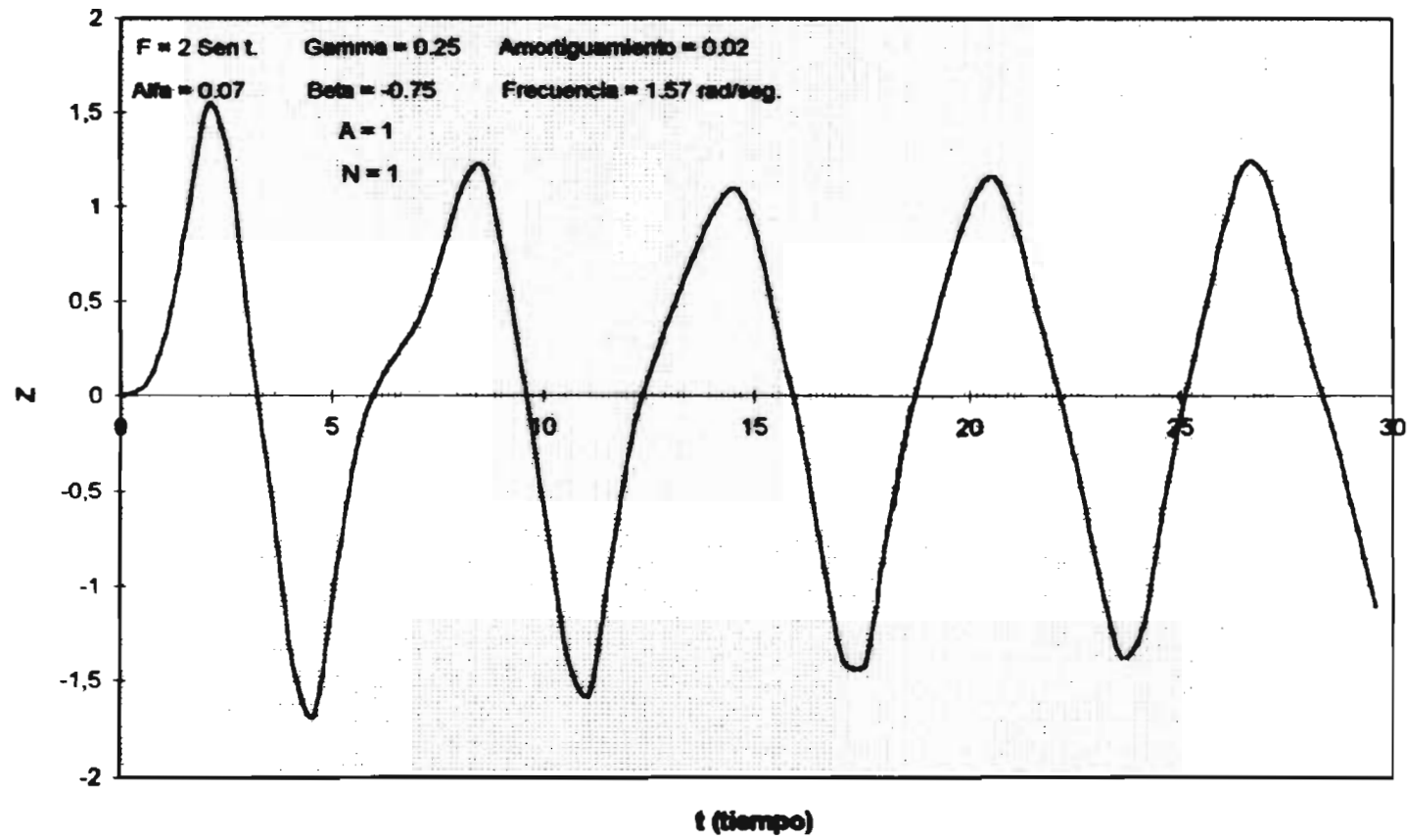


**Figura 10a. RESPUESTA HISTERETICA Z vs. X.**

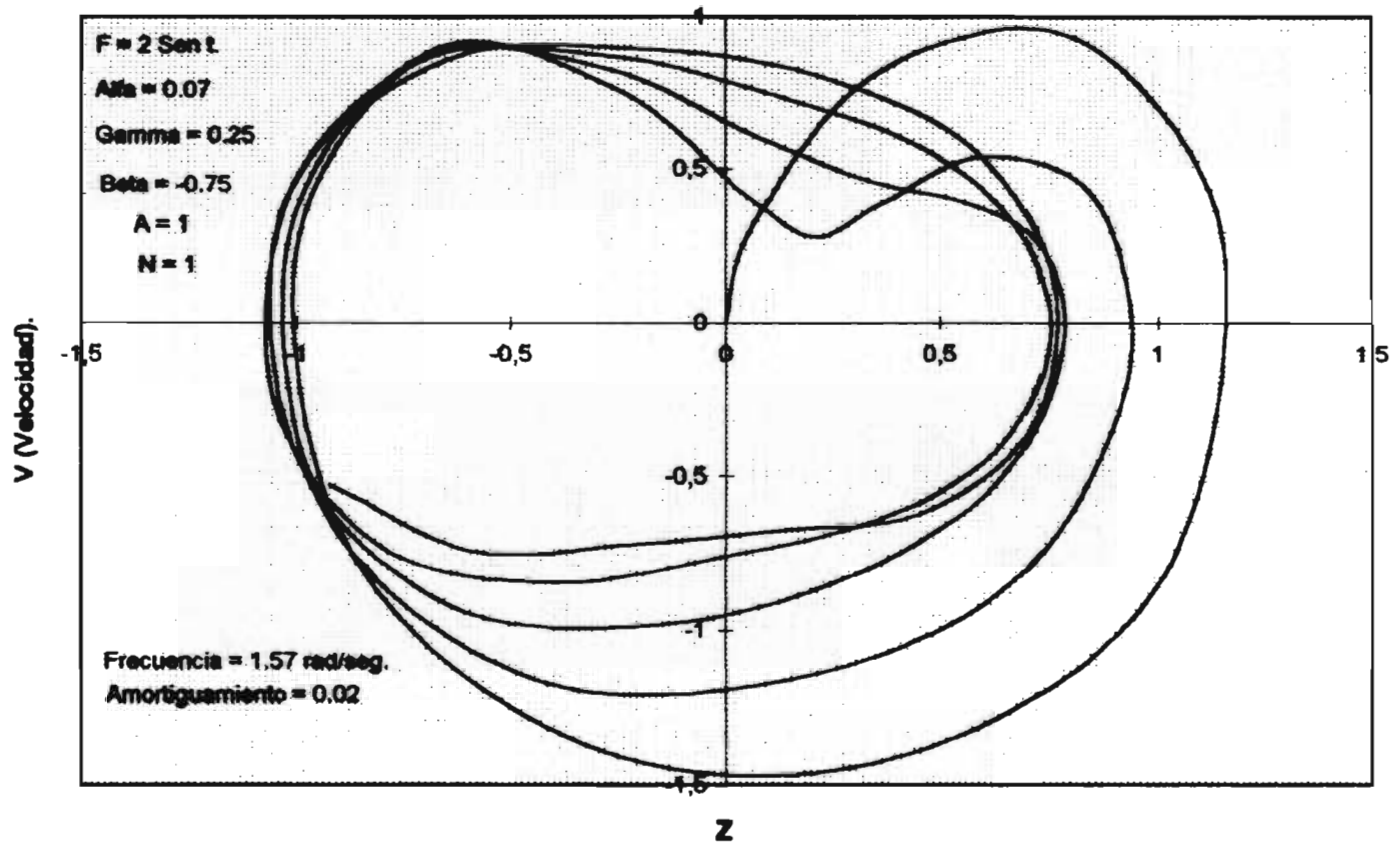




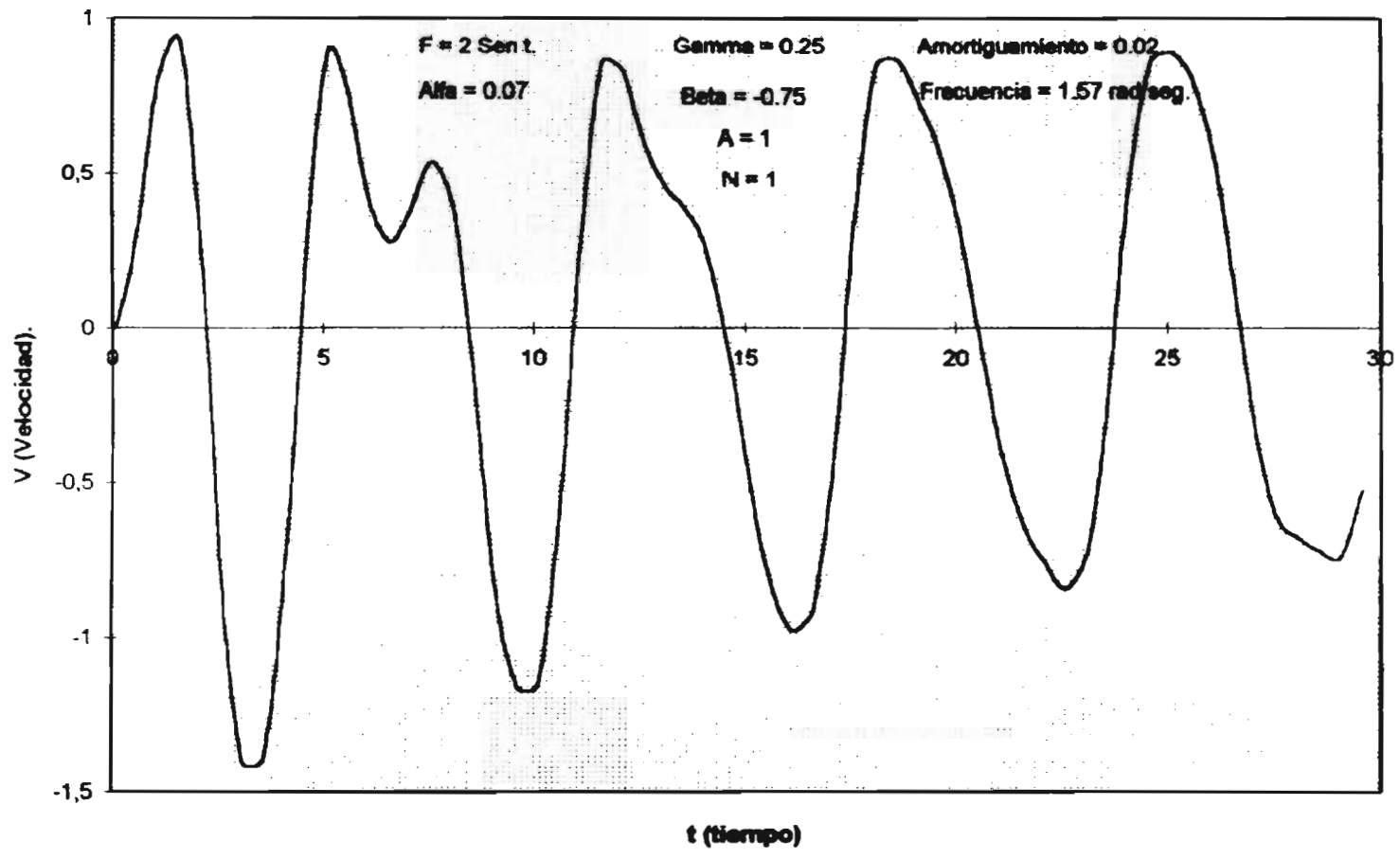
**Figura 10b. RESPUESTA X vs. t.**



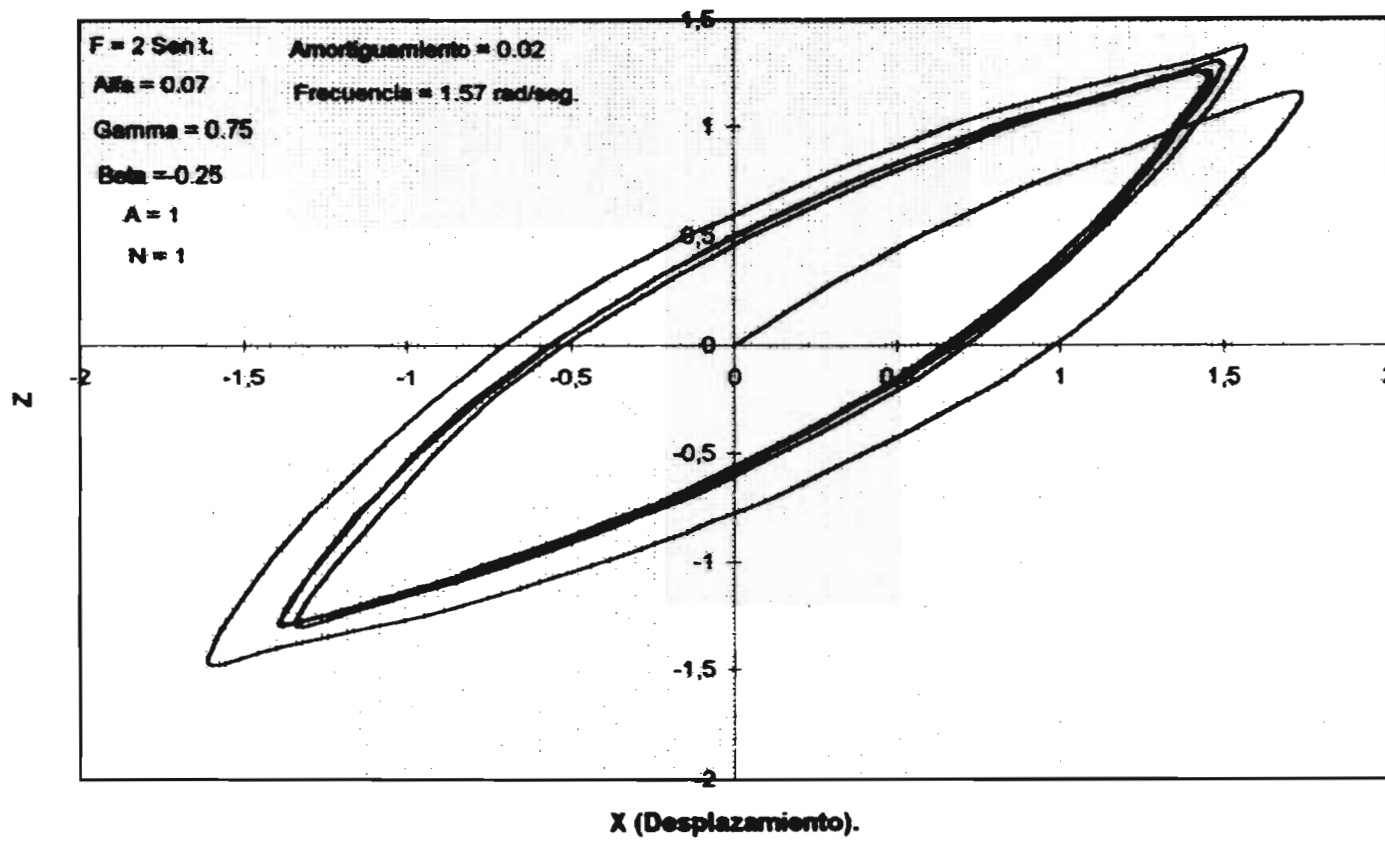
**Figura 10c. RESPUESTA Z vs. t.**



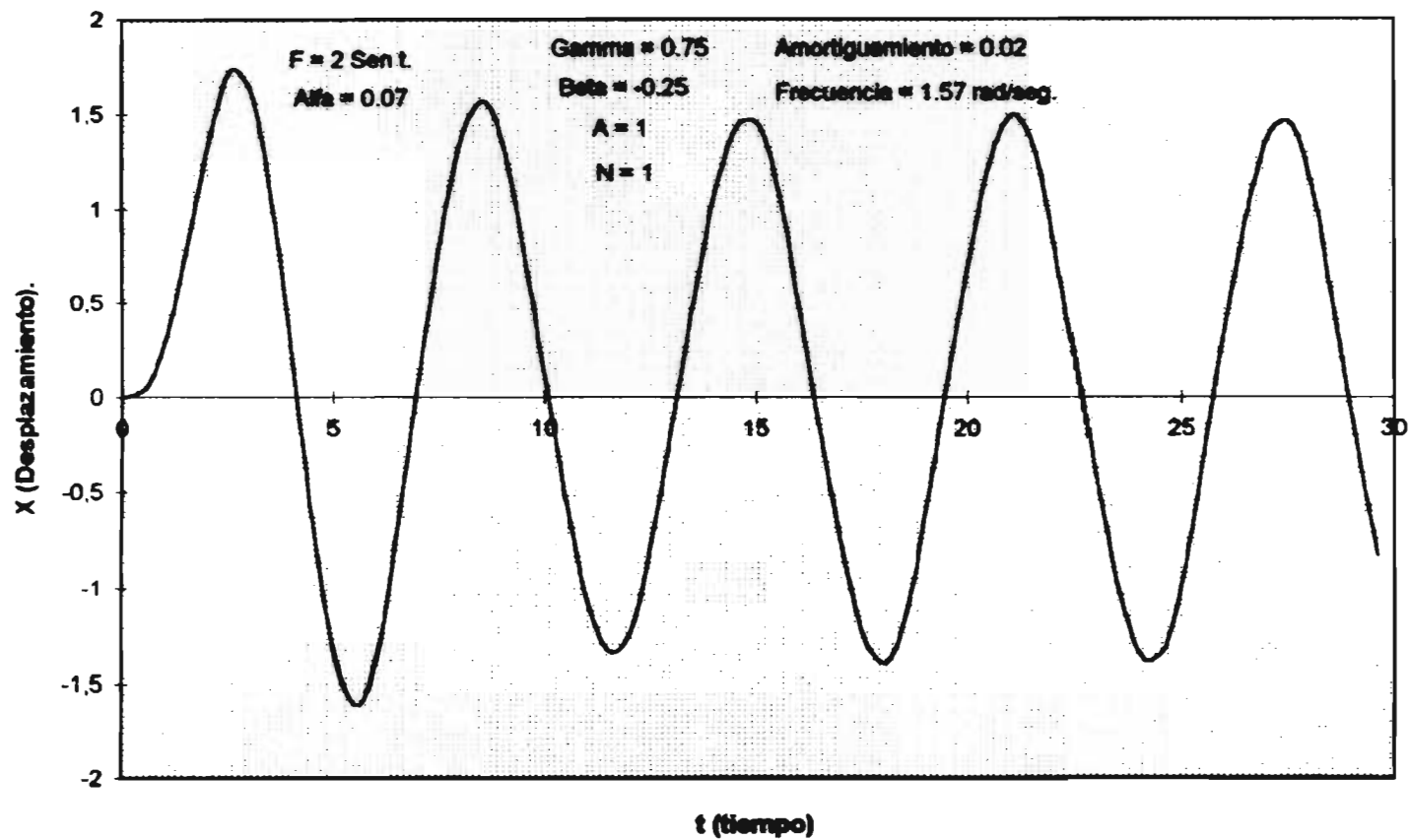
**Figura 10d. RESPUESTA HISTERETICA V vs. Z.**



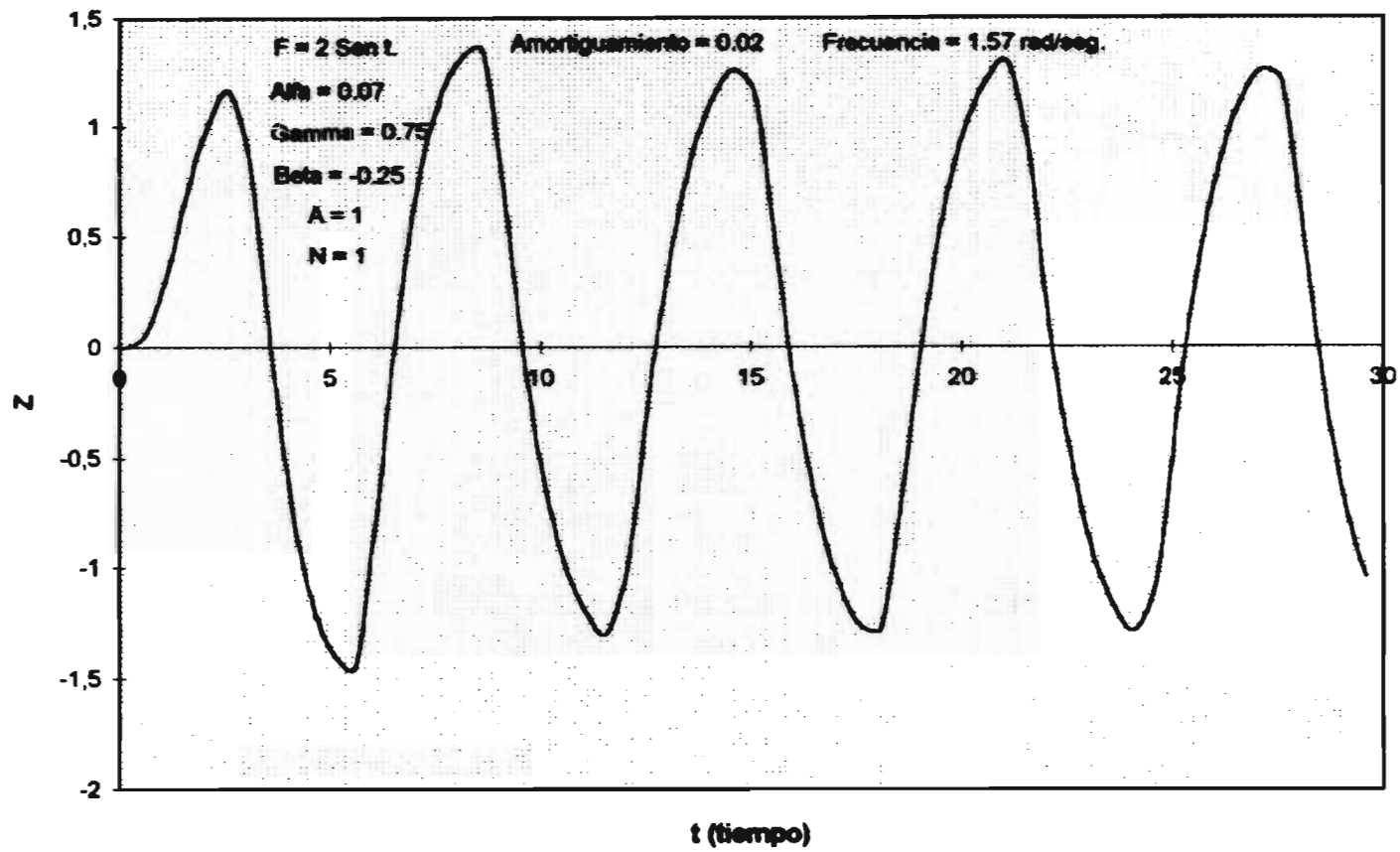
**Figura 10e. RESPUESTA V vs. t.**



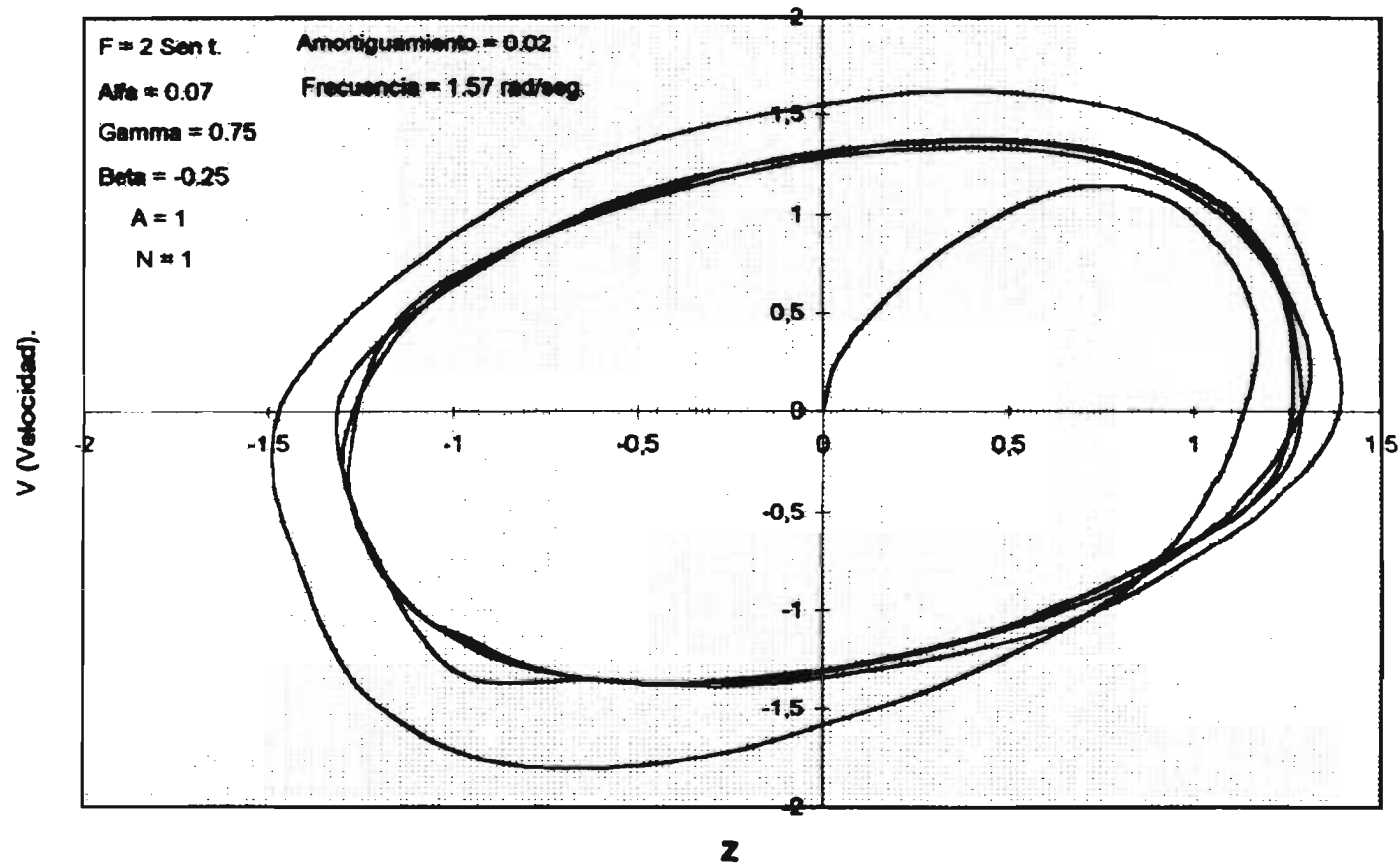
**Figura 11a. RESPUESTA HISTERETICA Z vs. X.**



**Figura 11b. RESPUESTA  $X$  vs.  $t$ .**

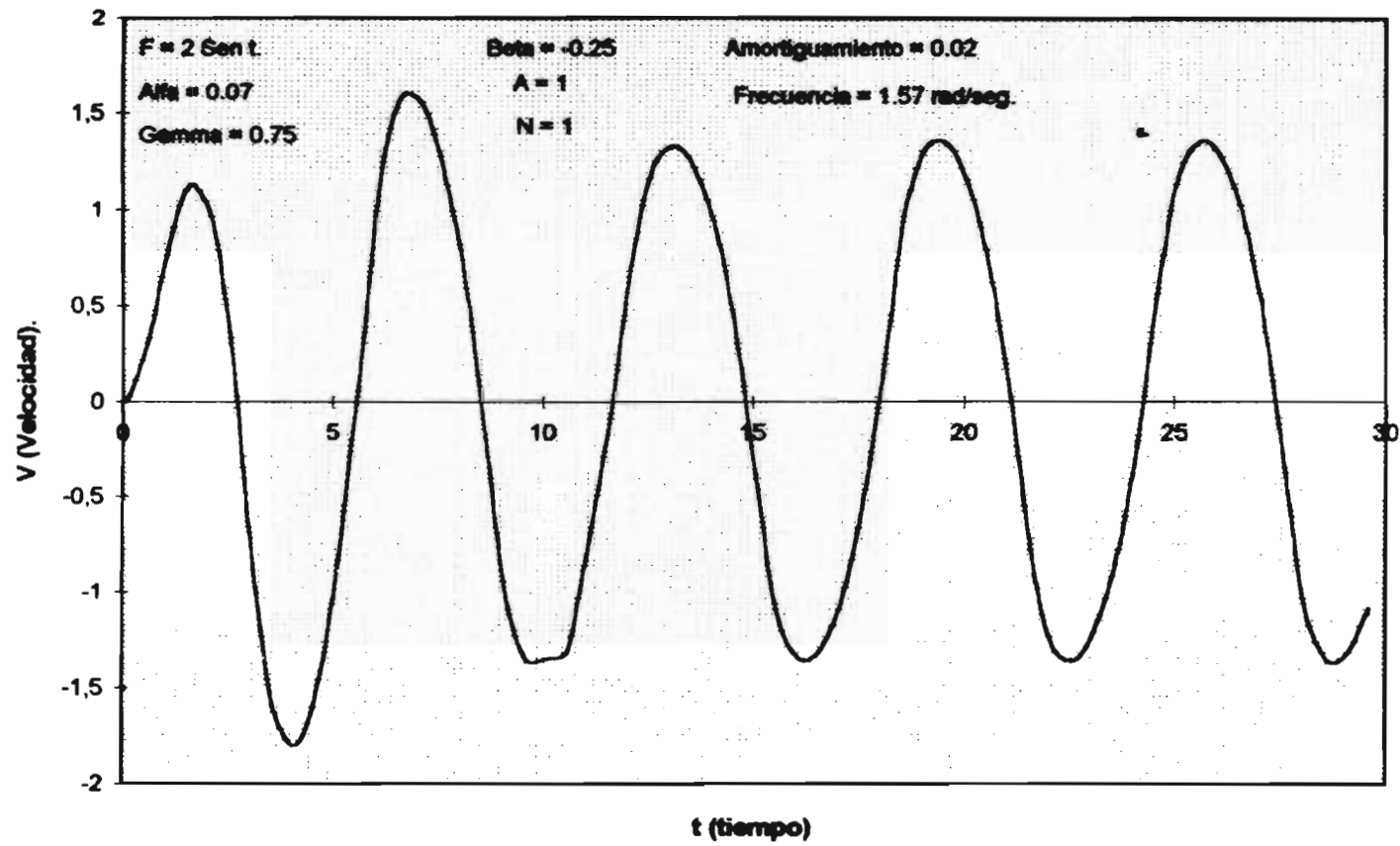


**Figura 11c. RESPUESTA Z vs. t.**



**Figura 11d. RESPUESTA HISTERETICA V vs. Z.**





**Figura 11e. RESPUESTA  $V$  vs.  $t$ .**