UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ACERCA DE LA INTERRELACION HISTORICA DEL ALGEBRA LINEAL CON LOS MODELOS INTERSECTORIALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

CESAR EDUARDO SOUSA MONDRAGON

DIRECTOR DE TESIS: M. en C. SERGIO HERNANDEZ CASTAÑEDA

MEXICO, D. F. 1997

ACERCA DE LA INTERRELACIÓN HISTÓRICA DEL ÁLGEBRA LINEAL CON LOS MODELOS INTERSECTORIALES

CÉSAR EDUARDO SOUSA MODRAGÓN

1997

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis ACERCA DE LA INTERRELACION HISTORICA DEL ALGEBRA LINEAL CON LOS MODELOS INTERSECTORIALES.

realizado por CESAR EDUARDO SOUSA MONDRAGON

con número de cuenta 7852992-8 , pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. SERGIO HERNANDEZ CASTAÑEDA	
Propietario	M. en C. PALOMA ZAPATA LILLO	Paloma Zapata
Propietario	M. en C. MIGUEL LARA APARICIO	
Suplente	M. en C. SALVADOR FERRER RAMIREZ	
Suplente	M. en C. JORGE RUIZ MORENO	Jorge Ruiz M.

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

Dedicatoria

A mi madre Asminda. Gracias por tu apoyo, tu paciencia y por tu amor.

A mi abuelita Tere que me llevaba, cuando era chamaquito, a ver "las fontes" y a Chapultepec.

A mis carnales: La Nena, Ceci, y Pedro

A la familia de Conchita por su amistad y constante apoyo.

A Magdalena por su constante apoyo y por su amor.

INTRODUCCIÓN

En el trabajo presente me propuse dar un pequeño panorama acerca de los orígenes y la evolución de los conceptos sobre "linealidad", en economía y en matemáticas, con la finalidad de cumplir con el requisito de terminar una tesis y titularme. Pero siempre es riesgoso escribir sobre algún tema, pues casi siempre alguien ya escribió algo muy parecido a lo que uno tenía planeado "y se adelantó". Por ello, si hay coincidencia con algún autor que haya abordado este tema con anterioridad, es pura coincidencia ya que este tema es uno de los más desarrollados.

El tema que me propuse presentar tiene la finalidad de mostrar algunos de los modelos económicos lineales más importantes y se puede clasificar como "interdisciplinario" pues trata de integrar problemáticas que son comunes a las dos áreas involucradas: economía y matemáticas.

La **economía matemática lineal** es un área interdisciplinaria que emplea básicamente el álgebra lineal. Sin embargo, espero que no existan puntos de vista que crean que esta rama tiene "muchas matemáticas", las que sólo "sirven para oscurecer el entendimiento de los fenómenos económicos reales", y agreguen quienes crean que "matematizando todo", redundará en una mayor objetividad. El problema es más complejo todavía que el decir, por ejemplo, "situémonos en el punto medio". Por su parte, algunos matemáticos que crean que este campo aborda solamente"sumas y restas, quizás alguna multiplicación o división" y nada más. En otras palabras, piensen que aplicar las matemáticas al campo económico no es más que un fiasco. Algo innecesario e irrelevante. La discusión estaría abierta.

En el conjunto de la economía matemática, los modelos lineales no son sino el comienzo de una serie de métodos muy "sencillos" de emplear. La economía matemática en general es muy amplia. Pero los modelos lineales son, digamos, "modelos Mickey Mouse" de la "realidad económica", que usan muy seriamente los gobiernos que han editado sus tablas de insumo-producto para llevar la contabilidad de sus respectivas naciones. Todavía un número significativo de economistas usan los modelos matemáticos convencidos de que les ayudarán en sus análisis económicos y en sus perspectivas de normatividad, pese a que el área de la planeación en economía haya quedado hoy en día, lamentablemente, en la prehistoria, es tal vez el área más interesante, pero el problema es quién debería planear. Hoy en día se han generalizado políticas económicas neoliberales o glorificadoras del más descarnado "capitalismo salvaje".

En lo que respecta a nuestra realidad mexicana, las tablas de insumo-producto editadas por el INEGI no parecen muy confiables, ya que las cifras estadísticas gubernamentales se han dado "por decreto" durante muchos sexenios en México. Esto, de alguna manera se presenta sincronizado con los medios de difusión masiva, ya que se observa un paralelismo con las noticias y nos informan sólo lo que le conviene al sistema, entregándonos una visión optimista del país. Pero por algún lado debemos comenzar, por tanto, supongamos que sean verdaderas y veamos a dónde nos pueden llevar.

La **primera parte** esboza un breve panorama de algunos conceptos del álgebra lineal que tenían un vida propia, y que iban a ser utilizados posteriormente por los economistas, a partir de Quesnay, le se hacían preguntas de matemáticas implícita o explícitamente, las cuales podían responderse, en su momento, con ecuaciones o sistemas de ecuaciones lineales. Otras interrogantes las continuaron haciendo Marx, Walras, Leontief, von Neumann, etc., aunque desde diversas visiones económicas y filosóficas. Las respuestas logradas tenían para ellos un significado económico concreto, con base en sus respectivos modelos. La tesis principal que intenta desarrollar esta primera parte es que muchas de las las primeras aproximaciones a la economía , se hicieron con base en modelos lineales, teniendo en cuenta que, Quesnay era médico de profesión, Marx era doctor en filosofía, von Neumann ingeniero químico, etc. Con esto sólo quiero mencionar que *algunos* modelos económicos fueron formulados por no economistas. Estos modelos se hicieron sin ser completamente conscientes de cuál era la problemática matemática utilizada o cuál era la herramienta matemática requerida.

Conforme avanzó y se consolidó el capitalismo, coincidentemente aumentó el número de dimensiones, y refinamiento, de cada modelo, hasta hacerse cada vez más complicados.

La **segunda parte** esboza un breve panorama de algunos conceptos del álgebra lineal que iban a usar posteriormente los economistas, y estos conceptos se desarrollaron casi independientemente de que cada economista estuviera desarrollando su modelo. Aquí se dan elementos para la discusión acerca de cómo se fueron elaborando algunos conceptos familiares del álgebra lineal, a partir del estudio de fenómenos astronómicos, mecánicos o geométricos, entre otros. En geometría, por ejemplo, cuando tuvo un gran auge el estudio de las curvas planas y la solución de sistemas de ecuaciones lineales, como asimismo la física se vio desde temprano apoyada por las matemáticas y recíprocamente aportó conceptos a esta. Áreas distintas de la matemática, abrieron nuevas áreas de la misma.

Esta segunda parte abarca desde la creación de la geometría analítica por Fermat y Descartes e intenta explicar cómo se fueron creando las bases del álgebra lineal en general, para llegar a la creación del álgebra lineal de las matrices no-negativas en particular, con el teorema de Perron-Frobenius y su aplicación a las matrices productivas, que representan los resultados centrales de la economía matemática lineal. Estos conceptos los utilizarían economistas como Leontief, desde principios de este siglo XX. Se intenta mostrar, en el capítulo relativo a las matrices no-negativas, que una serie de matemáticos, cada uno independientemente, demostró al menos una parte de lo que conocemos como el teorema de Perron-Frobenius, y que bien debiera llamarse **Teorema Perron-Frobenius-König-Markov** y quizás más guiones con más nombres de sus descubridores, sólo hay que atenerse a la ley de Boyer (para la historia de la ciencia). La tesis central de esta parte se refiere a que los conceptos del álgebra lineal provienen de los trabajos que hicieron físicos, matemáticos, ingenieros topógrafos, astrónomos, etc. Cada uno fue expresando sus resultados sin imaginar las repercusiones que tendrían sus descubrimientos, por ejemplo, en la economía matemática lineal.

La tercera parte expone una síntesis de algunos resultados matemáticos relativos a las matrices no negativas, a la teoría de gráficas, al teorema de Perron-Frobenius y las matrices productivas. Una de las finalidades de esta última parte es la pretensión de ayudar a que los economistas se vayan familiarizando con la teoría de las matrices no-negativas y desarrollen su intuición (matemática) acerca de cómo fluyen las mercancías y los servicios, en las economías que se comportan linealmente. Por esta misma razón, se introduce en esta tercera parte un capítulo acerca de la teoría de gráficas dirigidas y otro sobre matrices productivas. Y también pretende interesar a los matemáticos por el álgebra lineal de operadores lineales no-negativos.

Por último, este trabajo incluye apéndices y los artículos con mis correspondientes traducciones de los artículos originales de Perron, G. F. Frobenius, D. König y John von Neumann, como también algunas cartas de la correspondencia Marx-Engels, en español y alemán.

En cuanto a las ilustraciones, habría que prevenir al lector de que las considere como mera alusión y ambientación. Ellas sólo pretenden crear una cierta "atmósfera de sincronización" con el tema que se expone.

Por último, sólo queda añadir que este trabajo es fruto de una labor colectiva, aunque naturalmente mi responsabilidad por los errores o "dedazos" de todo tipo que aparezcan es exclusiva del autor. De allí que muchas personas han hecho posible esta tesis, pues sin ellos jamás podría haber sido terminada. En momentos de desaliento, normales y hasta necesarios a veces en nuestro desarrollo, debo decir que recibí toda la ayuda y la orientación necesaria para salir adelante. Para todas estas personas, vayan a continuación mis agradecimientos explícitos.

En primer lugar, deseo agradecer la ayuda conceptual que me brindaron los miembros del **Seminario de Economía Matemática y Teoría de Juegos**. En orden alfabético, mis agradecimientos a sus integrantes: Luz Adriana Caudillo Fuentes, Salvador Ferrer Ramírez; Sergio Hernández Castañeda; José Ibarra Corrales; Jorge Ruiz Moreno y Paloma Zapata Lillo.

También agradezco aquí a Urbano Tapia, quien fotocopió casi todos los artículos que conseguí en la ex-Biblioteca de Posgrado del Departamento de Matemáticas (que funcionaba muy bien por cierto) e hizo las ampliaciones y/o reducciones del material que fui utilizando, lo que me fue permitiendo avanzar. En verdad, el trabajo de Urbano eso casi un arte. Junto a él, quiero que vayan mis agradecimientos a los miembros de la ex-Biblioteca citada por su constante apoyo, especialmente a María del Pilar Ladrón, Olga, Raúl y Rosita.

Agradezco también a quienes me ayudaron con la mecanografía, a Mirna (secretaria de Departamento de Matemáticas), a Magdalena quien aparte de conseguirme algunos artículos, junto con Coralia me ayudaron, al comienzo, con parte de la captura del texto, en la computadora. Y agradezco también a Oscar Palmas su ayuda en ciertos giros y matices de las traducciones, y hasta párrafos completos, cuando traduje del alemán los artículos de Frobenius, Perron y König (que estaban en un alemán muy arcaico, por cierto, de principios de siglo).

Finalmente, agradezco a los compañeros del laboratorio de Computación del Departamento de Matemáticas por resolver mis permanentes dudas y ayudarme a salir de los innumerables problemas que me fueron apareciendo con el uso del paquete "Scientific Word, versión 1.1". Aquí debo enfatizar la permanente ayuda de Guilmer González y Mauricio Plaza. Si el solo uso de un paquete de computación crea problemas a los iniciados, con mayor razón los crea un paquete de computación que incorpore el modo matemático. A todos estos compañeros, ¡gracias!

Y a todos los arriba citados, nuevamente...¡gracias!

CESAR EDUARDO SOUSA MONDRAGÓN

México, D.F, Febrero de 1997

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Índice general

PRIMERA PARTE

HISTORIA DE ALGUNOS DE LOS MODELOS ECONÓMICOS LINEALES

SEGUNDA PARTE

HISTORIA DE LOS PRINCIPALES CONCEPTOS DEL ÁLGEBRA LINEAL

TERCERA PARTE

LAS MATRICES NO NEGATIVAS Y EL TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS

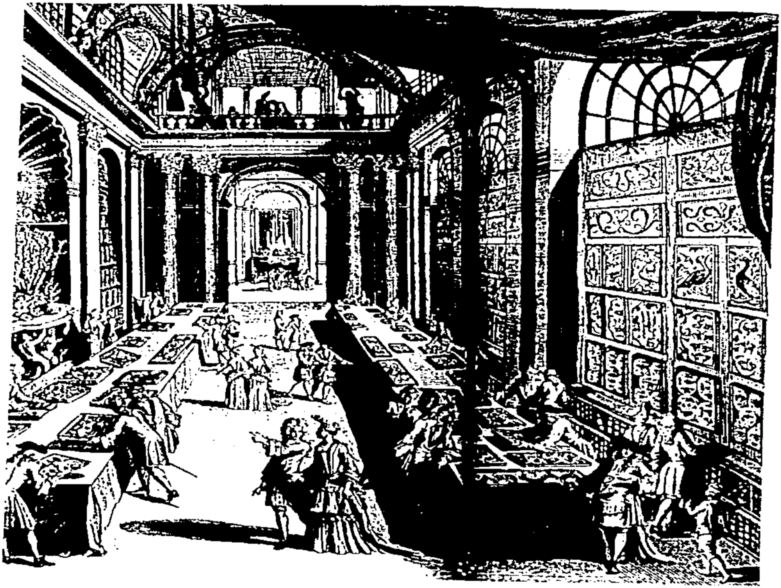
CUARTA PARTE

APLICACIONES A LA ECONOMÍA

APÉNDICE

BIBLIOGRAFÍA

PRIMERA PARTE



Capítulo 1

Capítulo 1 LOS FISIÓCRATAS

EL PLANTEAMIENTO DE LOS PRIMEROS MODELOS ECONÓMICOS LINEALES

ANTECEDENTES

Las ciencias sociales adquirieron un nivel muy importante de desarrollo con la aparición de la sociedad capitalista, pero no fue sino hasta el Renacimiento donde se originaron y comenzaron a desarrollar los estados europeos. La riqueza aparecía entonces como necesaria para el desarrollo del poder del príncipe o del soberano y el conocimiento científico alcanzó también un nivel envidiable, acrecentado posteriormente con el desarrollo capitalista, especialmente a partir del siglo XVII. Al interior de la Iglesia, a su vez, aparecen vigorosos movimientos de emancipación de las rígidas concepciones medievales, en tanto que la *Reforma* y el *Renacimiento* proclaman, si bien de forma muy diferente, la autonomía del poder del Estado con respecto al poder religioso y a las nuevas relaciones entre el hombre y lo divino.

Durante aquella época la economía de mercado se desarrolló en forma paralela a una serie de hechos científicos, en donde destacan mejores medios de transporte y comunicación y notables avances en el descubrimiento de las leyes básicas de la física y de la astronomía, así como sus tecnologías derivadas como la invención del telescopio, la brújula, la pólvora y la imprenta. Este marco se vio inmerso y de alguna manera favorecido por un afán colonizador generalizado y por las guerras de intervención en otros territorios.

LA ECONOMÍA AL SERVICIO DEL PODER. EL MERCANTILISMO

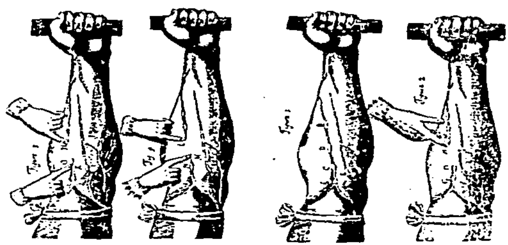
El **mercantilismo** era la corriente predominante del siglo XVII, impulsada en muchos estados europeos. Para los mercantilistas, el Estado aumentaba su fuerza y su poder al favorecer el enriquecimiento de los ciudadanos. La prosperidad del comercio, en una nación, se daba generalmente en función de la expansión del poder político del soberano y del éxito de sus campañas militares, fueran éstas por mar o tierra.

Por tanto, era muy importante dar impulso a estas actividades. Sus principios básicos se sustentaban en la idea de mantener la superioridad del comercio sobre la industria, ya que lo fundamental de las distintas actividades radicaba, según sus partidarios, en la fe ciega en el mercado. Pero había voces disidentes, por supuesto; o al menos, no incondicionalmente adeptas.

Antoine de Montchretien era una de aquellas voces y para exponer sus puntos de vista escribió su *Traité de L' Economie Politique*, en 1616. Allí sostenía que no se podía separar a la economía de la política y, por lo tanto, el Estado debía estimular la producción y los cambios para aumentar las riquezas y ganancias de comerciantes, manufactureros y financieros. Mediante la acumulación e inversión de estas ganancias, debido a las nuevas actividades, se generarían riquezas (y ganancias) adicionales.

El intercambio que se producía entonces en los mercados era muy importante para el aumento de las ganancias. Los mercantilistas sostenían que el desarrollo de las exportaciones y de las industrias exportadoras permitía no sólo el desarrollo de sus intereses específicos, sino también la realización de los fines propios del Estado, cuyo poder dependía efectivamente de las posibilidades que se le presentaran para formar ejércitos. Por otra parte, este desarrollo también dependía de la abundancia de dinero, ya que rendía el financiamiento más fácil de las operaciones industriales y comerciales y, en consecuencia, provocaba el aumento de los tesoros y reforzaba el poder político. Por lo anterior, los mercantilistas buscaron favorecer tanto el desarrollo de las poblaciones como la masa monetaria, en cantidad y calidad.


EXERCITATIO
ANATOMICA DE
MOTV CORDIS ET SAN-
GVINIS IN ANIMALI-
BVS,
GVILIELMI HARVEI ANGLI,
FRANCOFVRTI,
Sumptibus GVILIELMI FITZERI.



Para los mercantilistas, la riqueza de una nación estaba relacionada con la *posesión de grandes cantidades de moneda* (metales preciosos). Establecieron, así, una relación entre esta abundancia y las condiciones de financiamiento de las operaciones comerciales. Con monedas en circulación, le era mucho más fácil al Estado y a los mercaderes pedir prestado y realizar sus operaciones provechosamente.

De aquí que pusieran el acento en el desarrollo de las exportaciones y en el mantenimiento de un saldo excedente, en la balanza comercial. Esto era lo novedoso para los mercantilistas. Con el objetivo de que la nación dispusiera de un flujo suplementario de metales preciosos, era necesario que las relaciones con el exterior se dieran de tal manera, que las exportaciones (de bienes y servicios) fueran superiores a las importaciones. La exigencia de un aumento en las exportaciones por empresas capitalistas necesitaba, asimismo, de la creación de mercados en regiones lejanas.

La conquista de estos mercados demandaba apoyo del Estado, particularmente en el caso de los mercados coloniales. Por tanto, existía una política económica mercantilista fundada en la *intervención del Estado y en una estricta reglamentación de las importaciones y del mercado interno.*

En el arsenal clásico de las medidas recomendadas por los mercantilistas, podemos señalar la privación de derechos de la clase de materias primas necesarias para la industria nacional. La limitación de la importación de productos manufacturados, con excepción hecha a estas medidas proteccionistas, se hizo favoreciendo las materias primas útiles a la industria nacional.

Montchretien insistió particularmente, además, en la necesidad de reservar el comercio a las naciones y de impedir que los mercaderes extranjeros sacaran el oro y la plata del reino. Igualmente, sostuvo la aplicación de medidas en favor del desarrollo industrial. Apoyaba los reglamentos que garantizaran la experiencia profesional de los artesanos y demandó, por otra parte, que se apoyara a los manufactureros del Estado. Reconocía, asimismo, las recomendaciones típicas del "colbertismo" y el conjunto de medidas intervencionistas, para desarrollar el poder del Rey-Sol.

Lentamente, en relación con el progreso de la economía capitalista, cuando los productores se fueron emancipando de la tutela y del apoyo del Estado apareció una nueva posición, según la cual, a partir de mecanismos naturales y con base en un orden natural, se gobernaba la vida económica en su conjunto.

La libertad, por tanto, se vislumbraba como una condición necesaria y suficiente para el desarrollo del orden y el progreso económicos, para lo cual se tenía que romper con la concepción económica dominante que preconizaba que el Estado debía intervenir, necesaria y constantemente, para regular el enriquecimiento de la nación.

Transfusión experimental producida por los trabajos de Harvey.

Aparato quirúrgico grosero para reducir fracturas y luxaciones (imagen Seultet, 1666)

La ruptura con el mercantilismo no se dio de inmediato y fue producto de un proceso que llevó varios años. Una importante contribución al establecimiento de nuevas ideas fue la de **Pierre Boisguillebert** (1646-1714), a comienzos del siglo XVIII, con sus trabajos *Factum de la France* y *Detail de la France*, de 1707, los que tuvieron que esperar 10 años para ser difundidos. Contrariamente a los mercantilistas, que confundían tesoros y riquezas y sólo buscaban la retención de metales preciosos, Boisguillebert buscaba las condiciones que permitieran al máximo la producción interna del reino, con base en la producción agrícola. En su opinión, era necesario abolir las trabas al comercio y asegurar la libertad de los mercados. Dedujo un equilibrio natural que permitiera a cada productor vender normalmente su producción y, por tanto, que cada uno produjera al máximo.

Las diversas profesiones de un país se sirven, efectivamente, de las exportaciones mutuas. La creación incesante de éstas era la base de la prosperidad general y estaba asegurada, por poco que se permitiera actuar a la naturaleza. Con toda intención, por ejemplo, a fin de rebajar los precios de los granos, va al reencuentro del objetivo buscado. Lejos de contribuir a superar los infortunios, ayudó a la miseria cuando no obstaculizó la circulación normal de las cosechas. Según Boisguillebert, existían leyes naturales a las cuales convenía someterse, en el dominio de la producción y del intercambio. En este punto, el autor parece romper con la política intervencionista sostenida por los mercantilistas como tema de fondo, quienes, de hecho, hicieron disminuir la producción. Bajo ese contexto, a mediados del siglo XVIII, **Richard Cantillon (1680-1734)**, un reconocido economista inglés, presentó sus pesimistas puntos de vista en cuanto a las posibilidades de enriquecer indefinidamente a una nación a través del comercio exterior.

EL DESCUBRIMIENTO DEL CIRCUITO ECONÓMICO Y LA DEFENSA DEL CAPITALISMO AGRARIO

Una importante oposición al mercantilismo se dio con la formación de la primera escuela económica que reflexionó, *desde la perspectiva del trabajo*, sobre el proceso de producción, distribución y consumo, aplicando la idea del derecho natural al dominio económico. Esta escuela de pensamiento económico fue conocida como *escuela fisiocrática* o *fisiocracia* y debió su nombre y sus orígenes a **François Quesnay** (1694-1774), destacado médico de la corte de Luis XV.

Con base en su formación profesional, Quesnay reflexionó y aplicó criterios fisiológicos a la anatomía y fisiología económicas. De ahí el nombre de la escuela. La circulación de la sangre era entonces un hecho conocido. Quesnay se preguntaba, paralelamente: ¿cómo se realiza la circulación de la mercancías en la sociedad? Además, influido por las ideas iluministas, escribió importantes artículos para la Enciclopedia, como *Granos* (1756).[1] También era conocido como un eminente biólogo, aparte de hábil cirujano y terapeuta. En 1749 se le nombró médico de la Corte, cuando tenía 55 años.

Quesnay reunió extensamente los puntos de vista de Boisguillebert y se levantó contra aquella política que renunciaba a la agricultura y sólo estimulaba a la industria y el comercio. Esta política permitió que se derrumbaran los precios de los productos agrícolas, al prohibir la libre circulación de granos. De ahí la causa de la miseria de los campesinos y del estancamiento de la agricultura.

Por un lado, Quesnay concedió importancia al curso de la producción. En la medida en que el agricultor dispusiera de fondos en plata que le permitieran comprar medios de producción (estiércol, animales de tiro, aparejos de cultivos, etc.), la renta (*revenu*) extraída de la tierra cultivada sería lo más importante. De allí la idea de "*avances*" de fondos que era necesario movilizar (adelantar), antes de extraer una renta aumentada.

Los fisiócratas pensaban, por otro lado, que el fenómeno de la producción era propio de la actividad agrícola. Para ellos, sólo este sector era productivo, el único capaz de crear un "*producto neto*"; éste no se producía ni en la industria ni en el comercio, cuyas actividades eran calificadas de "estériles", no productivas.

---

[1] FROIS, Abraham *Economie Politique*. p.6

La renta tampoco podía originarse con los terratenientes. Las actividades de los artesanos producían algunas mercancías, es cierto, pero no añadían nada al costo, a lo que ya se había producido en el campo. Sólo había producto neto en el sector agrícola. El producto entero se daba a los terratenientes y esto constituía la renta de estos últimos. En consecuencia, sólo la clase agrícola era productiva. la única capaz de crear realmente un producto neto.

Por tanto. Quesnay se adhirió a la defensa del liberalismo económico. A fin de obtener un "buen precio" (*bon prix*) para los granos. defendió la libertad para exportar y, en general. la libertad de comercio.

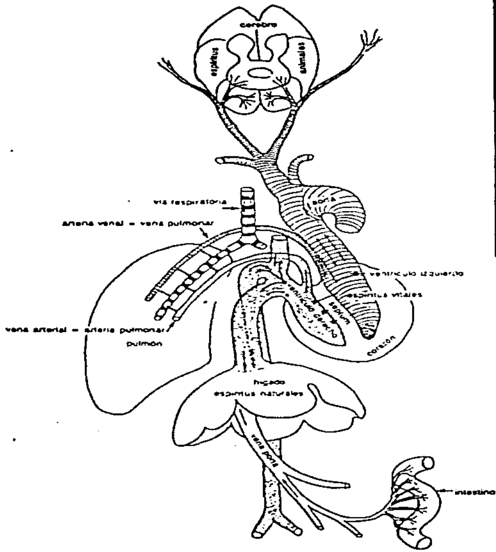
Leonhard Euler (1707-1783) (Courtesy AIP Emilio Segrè Visual Archives)

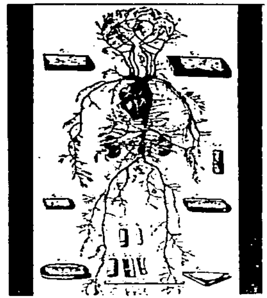
Isaac Newton (1642-1727) (Permission of National Portrait Gallery. Courtesy AIP Emilio Segrè Visual Archives)

Los fisiócratas rompieron naturalmente con los mercantilistas. quienes. apoyados en toda la tradición medieval. sostenían el almacenamiento de granos y las restricciones a las exportaciones. El objetivo de estos últimos era disponer de permanentes reservas de grano. base de la alimentación popular, debiendo venderse éste al menor precio posible. Los fisiócratas sostenían. por el contrario. que el "mejor precio" contra el "bajo precio" (*bas prix*) aseguraría ingresos convenientes a los agricultores. quienes podrían así realizar ganancias sustanciales para pagar toda la renta a los terratenientes. Razonaban con una *lógica de circuito*: el nivel elevado de ganancias y rentas permitiría aumentar el capital invertido en la agricultura y. con ello. asegurar la prosperidad general.

En el *Tableau economique* (tal vez su libro más conocido). Quesnay nos presenta uno de los primeros intentos históricos para darle representación matemática a los mecanismos de la vida económica. Respondió en ella a su visión, según la cual todos los sectores dependían de todos: es decir. actuaban bajo una interdependencia de circuito...¡visión bastante moderna! A fin de lograr la finalidad de que el sistema económico funcionara. veía necesaria la venta de productos para la reconstrucción de capitales. Por tanto. postulaba que la renta nacida de la producción se gastara normalmente.

Un mejor precio del grano aseguraría la circulación permanente de dinero y la reconstrucción de los "*avances*", que los economistas del siglo XIX llamarían





. Diagrama del sistema fisiológico de Galeno. De Charles Singer, *The Discovery of the Circulation of the Blood* (Londres, Wm. Dawson and Sons, Ltd., 1956). Cortesía de A. W. Singer.

posteriormente *capital*. Por "*avances*" los fisiócratas entendían, simplemente, las sumas de dinero adelantadas en cada período por la clase productiva, para crear los medios de producción necesarios para la creación del producto neto. Estas sumas, naturalmente, debían recuperarse. Se denominaba "*reprises*" a las recaudaciones, al final de cada proceso de producción o período.

La aspiración a la libertad de Quesnay se explica por la evolución económica y social de la Francia de entonces. Las reglamentaciones económicas y sociales, numerosas en el Antiguo Régimen, eran cada vez resentidas como trabas insoportables por la burguesía mercantil y la industrial, quienes las juzgaban como inútiles; en lo sucesivo, igualmente resultarían molestas las intervenciones del Estado y del sistema de gremios.

Tal vez por estos antecedentes y para iniciar la fórmula de un intendente influido por el ideal fisiocrático, como lo fue **Vincent de Gournay** (1712-1759), la consigna a seguir fue: "*laissez-faire, laissez-passer*" (dejar hacer; dejar pasar).

La influencia de los fisiócratas en la economía de Francia no fue nada despreciable. Fueron los inspiradores del Edicto Real de 1764, que autorizó la exportación de granos. En 1770 se regresó a la reglamentación antigua, pero las ideas liberales se fueron imponiendo. Turgot, ministro de finanzas durante 1774-76, por un lado restableció la libertad de comercio de granos y, por otro, intentó suprimir las corporaciones de artesanos. Desde un principio, estas medidas fueron aplicadas y él afrontaría la revolución de 1789 para ver el triunfo del liberalismo en materia económica.

BIOGRAFÍA DE QUESNAY

François Quesnay (1694-1774) fue hijo de un abogado relativamente famoso, que aparte de ejercer la medicina se dedicó en forma secundaria a la economía. Autor (entre muchas otras obras) de un tratado sobre los efectos de las sangrías, fue Secretario General de la Academia de Cirugía y director de la revista de esa institución, llegando a ser posteriormente cirujano del rey y primer médico de la corte. En realidad, fue consejero médico de la Marquesa de Pompadour (Mme. Pompadour), amante del rey Luis XV, cuyo verdadero nombre era Juana Antonia Poisson (1721-1764). En ella encontró Quesnay una verdadera protectora, que lo apoyó en todo momento para darle una sólida posición en la vida intelectual de París y Versalles. *Les économistes* (los economistas), como eran también conocidos los fisiócratas, le tuvieron gratitud por ese hecho. Quesnay fue en realidad la única fuerza creadora de su círculo, pero este hecho se vio en parte oscurecido por su aversión o incapacidad para desarrollar sus ideas en forma completa y sistemática. Su *Essai physique sur l'economie animal* (1736), constituye su única obra voluminosa.

Entre sus *escritos económicos*, debemos mencionar primeramente los artículos redactados para la Enciclopedia: *Fermiers* (1756), *Grains* (1757), *Hommes* (1757) y *Tableau* (1758), además de su artículo *Droit natural* (1765) y el diálogo *Du commerce*, publicados estos dos últimos en el *Journal de l'agriculture du commerce et des finances*. También cabría mencionar aquí su artículo *Despotisme de la Chine* (*Éphémérides*, 1767), el que ha suscitado algunas especulaciones acerca de la posible influencia china sobre los fisiócratas. Por último, publicó *Máximes* (1758) y *Oeuvres économiques et philosophiques* (1888).

Recordemos un hecho importante. En 1764 Adam Smith estuvo en Francia y allí conoció y reverenció a Voltaire. Primero llegó a Toulouse, luego siguió a Ginebra, y por último arribó a París, en donde sostuvo largas conversaciones con Quesnay. Por ello Smith conoció el *Tableau* y la posición de los fisiócratas, contrapuesta al mercantilismo, que identificaba la riqueza con los metales sólidos oro y plata. Igualmente conoció la consigna *laissez faire* y algunas ideas fisiocráticas (como la idea de circulación de la riqueza), aunque no aceptó la idea de que la industria era una actividad estéril y yerma.[2]

Quesnay, François (b. June 4, 1694, near Paris—d. Dec. 16, 1774, Versailles, Fr.).

Quesnay, engraving by J.G. Wille after a portrait by J. Chevalier

[2]HEILBRONER, Robert. *Vida y doctrina de grandes economistas*. Barcelona. Ed. Orbis. Tomo I, pp 69-70

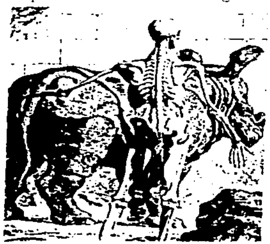
LOS PROBLEMAS QUE PLANTEA EL ESTUDIO DE LA ESCUELA FISIOCRATICA.

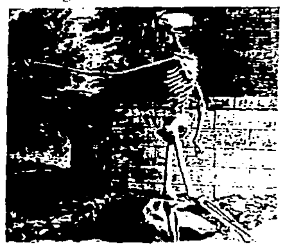
Quesnay fue el primero en aportar una interpretación a su propio *Tableau*, cuando se enteró de que su amigo Mirabeau tenía problemas con la interpretación económica original de la *versión zig-zag* (versión que se explicará con algún detalle, más adelante). Quesnay le envió entonces a Mirabeau su *Explicación*, quien la incluiría no sólo en la sexta parte de su libro *El Amigo de la Humanidad* (*L'Ami des hommes*), sino también en *Filosofía Rural*. Después apareció la versión zig-zag en dos obras posteriores de Quesnay: *Primer Problema Económico* y *Segundo Problema Económico*, como asimismo en la *Explicación*, de Nicolás Baudeau (1730-1792).

En 1846, Louis-François-Eugene Daire (1748-1847) publicó dos volúmenes con selecciones de la literatura fisiocrática, donde incluía *Análisis*, *Primer Problema* y *Segundo Problema* (de Quesnay) y la *Explicación*, de Baudeau, difundiendo la doctrina de los fisiócratas. A comienzos de los años 1860, Marx estudió extensamente el *Análisis* de Quesnay y sobre este libro escribiría una crítica detallada, en el Tomo I de su *Teorías de la Plusvalía*. También dedicó un capítulo a este tema en el *Anti-Dühring*. A partir de esas fechas se han realizado importantes descubrimientos de documentos fisiocráticos, pero aún no se ha resuelto claramente la influencia que tuvo Cantillon sobre Quesnay.

EL PRIMER PROBLEMA

El objetivo de los fisiócratas era presentar la relación existente entre "gasto y productos" de tal manera, que fuese lo suficientemente comprensible como para hacer una estimación de lo que pudiera suceder con la organización (o desorganización) que la política económica del gobierno pudiera generar.



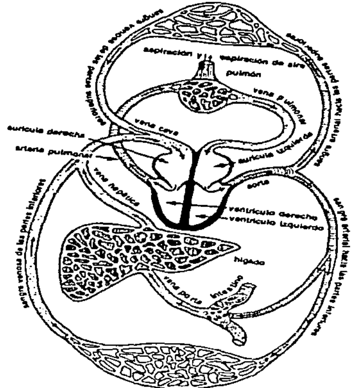


HIPÓTESIS DEL MODELO FISIOCRÁTICO.

Esquemáticamente, podemos exponer algunos supuestos en los que se basaba el modelo económico fisiocrático:

1) El régimen general de arriendos se supone generalizado; 2) El reino está cultivado con los mejores métodos posibles; 3) Hay agricultura generalizada, a

Portada del *De fabrica* (Basilea, 1543). Adviértase que es el propio Vesalio quien diseca el cuerpo —una escena muy distinta de la ilustración de Mondino de 1493. Cortesía de la Newberry Library, Chicago.



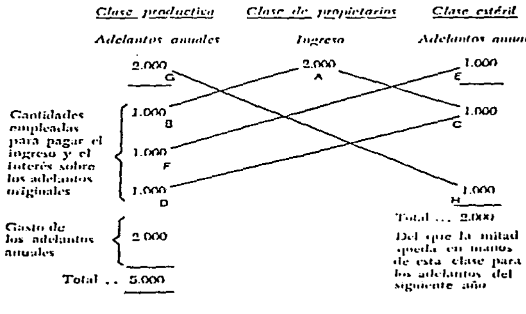
La circulación de la sangre según William Harvey. De Charles Singer, *The Discovery of the Circulation of the Blood* (Londres, Wm. Dawson and Sons, Ltd., 1956). Cortesía de A. W. Singer.

gran escala: 4) Se tienen precios constantes, reproducción simple e inversión nula: 5) Sólo se considera la circulación entre clases sociales diferentes; 6) El total de compras y ventas entre dos clases (por ej., en un año) se resume en una única suma total: y 7) Se supone que se han realizado las reformas económicas y sociales que proponían los fisiócratas.

Es decir, *dejar hacer, dejar pasar*. En otras palabras: libre competencia, mejor precio y eliminación de las restricciones al comercio agrícola.

Para los fisiócratas, el director de la economía era el arrendatario. Pero el *Tableau* no consideró el instrumental ni los medios de producción.

LA FORMA ZIG-ZAG DEL TABLEAU



Indumentaria de un médico de Peste

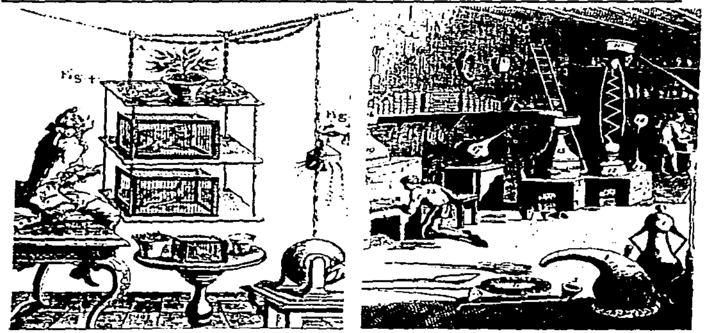
Principios del siglo XVIII, durante la peste de Marsella, 1720

Como lo podemos deducir de la figura de zig-zag precedente, los adelantos "anuales (*avances*), capital circulante de la clase productiva, son 2000 unidades monetarias (*u*., en adelante). Los adelantos originales comprenden el conjunto de los gastos realizados, antes de su cobro, por los rendimientos de la primera cosecha.

Principalmente, estos adelantos se componen de capital fijo y aunque no aparecen en el *Tableau* mismo constituyen, en general, como 5 veces los adelantos anuales: es decir, alcanzarían a 10000 *u*. Los adelantos anuales producen, a su vez, un 100%. La producción anual total es entonces 4000 *u*., el ingreso 1000 *u*. y el valor de la producción anual, 2000 *u*.

La clase de los propietarios gasta la mitad de sus ingresos con la clase productiva y la otra mitad con la clase estéril.

TABLEAU ECONOMIQUE



Esta forma del *Tableau* ilustra las actividades y cambios que tienen lugar a lo largo del año:

a) el empleo, por la clase productiva, de 2000 *u*. por concepto de adelantos anuales en la producción, da un ingreso de 2000 *u*., el que se paga a la clase de los propietarios en forma de "renta"; b) la clase de los propietarios utiliza esos 2000 *u*. para comprar 1000 *u*. de alimentos a la clase productiva y 1000 *u*. de bienes manufacturados a la clase estéril; c) de los 1000 *u*. recibidos de esa forma por la clase productiva, 500 *u*. se dedican a comprar bienes manufacturados a la clase estéril, mientras que la clase estéril, a su vez, de los 1000 *u*. percibidos, utiliza 500 *u*. para adquirir alimentos a la clase productiva. La mitad, respectivamente, de las sumas de los 500 *u*. recibidos de esta forma por las dos clases, se devuelve a la otra. El proceso de cambio entre ambas continúa de esa manera, hasta el límite de la serie geométrica:

$$
\begin{aligned}
1000 + 500 + 250 + \cdots &= \\
&= 10^3 + \frac{10^3}{2} + \frac{10^3}{4} + \frac{10^3}{8} + \cdots + \frac{10^3}{2^n} + \cdots \\
&= 10^3\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots \frac{1}{2^n} + \cdots\right)
\end{aligned}
$$

La serie geométrica

$$
\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots \frac{1}{2^n} + \cdots
$$

converge a 1, ya que la razón

$$
\left|\frac{1}{2}\right| = r < 1
$$

y, por tanto,

$$
10^3 + 10^3(1) = 2000.
$$

Los cobros totales de la clase estéril, 2000 *a.*, son iguales al valor de su producto total y representan un reembolso de sus adelantos anuales. El empleo de estos adelantos, en la producción, proporciona una cuantía equivalente de ingreso neto. Este ingreso neto está representado en el *Tableau* por las cantidades de la columna del centro, para cada fase del proceso. El ingreso producido es 2000 *a.*

Se hizo abstracción de los intercambios que ocurren tanto en el interior de la clase productiva, como en el de la clase estéril. Sin embargo, cabe mencionar que:

a) sólo aparecen las transacciones intersectoriales; b) el ingreso se presenta neto, libre de impuestos y diezmos; c) se hizo abstracción del interés del 10%, supuesto por Quesnay como recibiéndolo habitualmente los empresarios agrícolas sobre sus adelantos originales y anuales; y d) el *Tableau* deja de lado los salarios de dirección de los empresarios agrícolas y retribuciones por concepto de riesgos, los que no aparecieron sino hasta la publicación de *Filosofía Rural*. Sólo recién en la tercera edición del *Tableau* se incluye, al pie, un cálculo del interés del 10% sobre los adelantos originales. Otros cálculos parecidos se incluyen en *Explicación*, en el *Tableaux* de Mirabeau, en *El amigo de la humanidad* y en *Análisis*. Los intereses se incluyeron en el *Tableau* mismo; e) el *Tableau* hace abstracción de la parte de compras que la clase estéril tiene que hacer a la clase productiva, para producir un total de 2000 *a.*

El valor total del producto de la clase estéril no es arbitrario, sino que se concibe como determinado por la cantidad total gastada en bienes manufacturados, dividida entre dos; y la cantidad total gastada por la clase estéril, dividida por la cuarta parte restante. El consumo personal per cápita, de la clase productiva, es igual al de la clase estéril y sólo a la mitad de lo que inicialmente posee la clase de los propietarios. En cada uno de ellos, el consumo se reparte por igual entre alimentos y bienes manufacturados. Ya vimos que este consumo sigue la serie:

$$
1000 + 500 + 250 + 125 + \cdots
$$

Escuela de Zoología. Grabado de Prevost.

Leonhard Euler, grabado de B. Hall. Los diversos tratados escritos por Euler y los trabajos de D'Alembert permitían familiarizarse con los métodos clásicos de la geometría analítica y el cálculo integral y hacer un buen empleo de los grandes avances efectuados durante el siglo. Foto J. Novak/ Agencia Salmer

Ahora veamos la segunda forma del *Tableau*, que apareció en *Filosofía Rural* y que constituye una especie de síntesis de la distribución primeramente descrita. Además, omite las progresiones geométricas del zig-zag y se centra en los resultados finales de las transacciones.

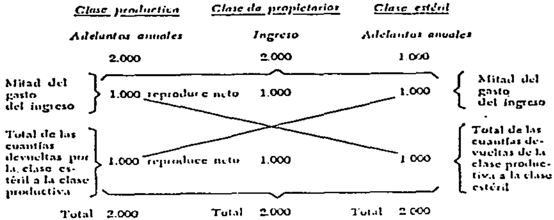
Para esta síntesis del *Tableau* que aparece en *Filosofía Rural*, debemos hacer notar algunas de sus características más sobresalientes:

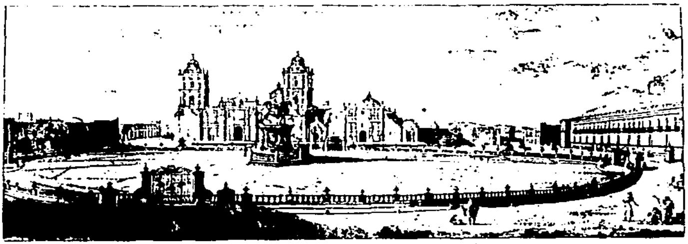
i) se sigue haciendo abstracción de las transacciones que ocurren dentro de las clases, productiva y estéril. También se hace abstracción del interés y de otras retribuciones, en los arrendatarios, como asimismo del agente de compras de la clase estéril, a la clase productiva; *ii*) Se aclara el misterio del déficit, en las compras de la clase estéril a la clase productiva. Ahora se afirma, más particularmente, que la clase estéril utiliza sus adelantos anuales de 1000 *u.* para comprar materias primas a la clase no productiva. Por la clase estéril son ahora 2000 *u.*, que consisten de 1000 *u.* para alimentos y 1000 *u.* para materias primas, todo lo cual lo emplea la clase estéril para la manufactura de su producto total, que es de 2000 *u.* La reproducción anual total tiene que estar 1000 *u.* por encima del nivel de 4000 *u.*, que aparece en el *Tableau* para proporcionar esas materias primas; *iii)* Los cobros de la clase productiva, por concepto de tales materias primas, comprenden el interés por sus adelantos; *iv)* Como se supone que la cantidad total de esos intereses se gasta cada año en bienes reales, parecería que la reproducción anual tendría que elevarse en 1000 *u.* más; es decir, llegaría hasta 6000 *u.* para proporcionar esos bienes. Sin embargo, en *Filosofía Rural* las cifras se mantienen en 5000 *u.*, lo que produjo confusión entre quienes interpretaron la misma; *v)* la solución al problema estaría en que la reproducción anual total permanece en 5000 *u.* porque los 1000 *u.* de forraje para el ganado, que se incluían en los primeros *Tableaux*, ahora se han excluido.

El salón de Madame Geoffrin, alrededor de 1755.

1, Buffon; 2, Mlle. Lespinasse; 3, Mlle. Clairon; 4, Le Kain; 5, D'Alembert; 6, Charles Vanloo; 7, Helvetius; 8, Duclos; 9, Piron; 10, Crébillon; 11, el abate de Bernis; 12, el Duque de Nivernois; 13, la Duquesa de Anville; 14, el Príncipe de Conti; 15, Mme. Geoffrin; 16, Fontenelle; 17, Joseph Vernet; 18, Mme. d'Houdetot; 19, Montesquieu; 20, Clairaut; 21, Daguesseau; 22, Mairan; 23, Maupertuis; 24, el mariscal De Richelieu; 25, Malesherbes; 26, Turgot; 27, Diderot; 28, Quesnay; 29, el abate Barthelemy; 30, el Conde de Caylus; 31, D'Anville; 32, Soufflot; 33, Bouchardon; 34, St. Lambert; 35, Dargental; 36, el busto de Voltaire; 37, el Duque de Choiseul; 38, Henault; 39, Rameau; 40, Rousseau; 41, Raynal; 42, La Condamine; 43, Thomas; 44, Vien; 45, Marmontel; 46, Marivaux; 47, Gresset; 48, Vaucanson; 49, Pigalle; 50, Bernard de Jussieu; 51, Daubenton; 52, el abate de Condillac; 53, Mme. de Graffigny; 54, Réaumur, y 55, Mme. du Bocage.

SEGUNDA FORMA DEL *Tableau*, EN *Filosofía Rural*





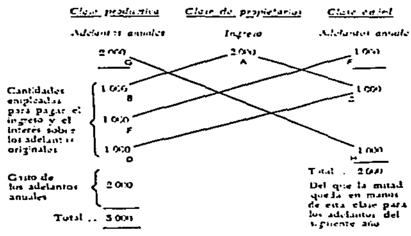
Plaza mayor de México, a raíz de la inauguración de la estatua de Carlos IV. De un grabado en cobre hecho en México por Fabregat.

Del total anual de los 5000 *u.* que aparecen en el resumen del *Tableau* de *Filosofía Rural*: 1000 *u.* corresponden a alimentos vendidos a propietarios: 1000 *u.* a alimentos consumidos *in natura* por la clase productiva: 1000 *u.* a materias primas vendidas a la clase estéril: y 1000 *u.* a producción en la que se gasta el interés. Quesnay aclara, en *Primer problema económico*, que los 1000 *u.* que faltaban para completar las 5000 *u.* de la cuenta anterior, corresponden a alimentos consumidos *in natura* que "no entran en el comercio" y, por lo mismo, no aparecen en la *Segunda Forma*. Si se quiere incluir la alimentación de los animales, basta con añadir los 1000 *u.* de forraje a la producción total, los adelantos anuales y los retornos, para que la suma dé los 5000 *u.* Los "bienes de interés" son los formados p productos agrícolas de diversos tipos (ganado de reemplazo del perdido, stocks de semillas, etc.), que cubren emergencias y atienden la subsistencia de los hombres dedicados a la reparación de edificios y maquinarias, etc.[3]

Sólo cuando se introducen los forrajes, en las cuentas de los adelantos anuales, se pueden entender, en las cuentas del *Tableau*, las retribuciones que hacen los empresarios agrícolas por encima del interés sobre sus adelantos. El interés se considera como una especie de fondo de reserva y amortización. En el capítulo 7, de *Filosofía Rural*, Quesnay reconoce que la renta normal del empresario agrícola incluye "retribución debida a las dificultades, trabajo y riesgos de su empresa". Esta abstracción se ha hecho debido a que la renta se mezcla con el gasto de los adelantos anuales del granjero y con el producto del ganado, que mantiene para obtener beneficio como elemento secundario del cultivo de granos.

Quesnay estima la retribución variando el número de arados de tierra. Un hombre con dos fanegas consigue el doble de retribución que un hombre con una. Para el caso medio, que supone el empleo de 2 fanegas de tierra, Quesnay estima la retribución en 12000 *u.* por granjero, lo que incluye los costos de vida, equivalentes a 600 *u.* Por otra parte, todas las rentas del *Tableau* se gastan enteramente, a lo largo del año.

La forma general del *Tableau* que se presenta en *Análisis*, es la siguiente:



[3]MARX, Carlos. *Teorías de la Plusvalía*. Ed. Cartago. Bs. As. 1971 p.38

Para esta formulación del *Tableau* en *Análisis*, Quesnay introdujo la transacción de materias primas y el pago de interés a granjeros. Además, hay que resaltar que:

$\overline{AB}$ representa la compra a la clase productiva, por parte de los propietarios, de 1000 *u.* de alimentos;

$\overline{AC}$ representa la compra a la clase estéril, por parte de los propietarios, de 1000 *u.* de bienes manufacturados;

Las transacciones $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ proporcionan, a los propietarios, todos los bienes manufacturados y alimentos que necesitan;

$\overline{EF}$ representa la compra, por parte de la clase estéril, de 1000 *u.* de materias primas;

$\overline{CD}$ representa la compra a la clase productiva, por parte de la clase estéril, de 1000 *u.* de alimentos. Ambas transacciones proporcionan a la clase estéril las materias y alimentos que ésta requiere;

$\overline{GH}$ representa la compra de 1000 *u.* de bienes manufacturados a la clase estéril, por parte de la clase productiva;

B, F y D representan los cobros que hace la clase productiva, por sus ventas a los propietarios y a la clase estéril; y

C y D representan, respectivamente, los cobros que hace la clase estéril, por sus ventas a los propietarios y a la clase productiva.

Al comienzo, las posesiones de las tres clases son las siguientes:

TABLA I

Clase productiva	Clase propietaria	Clase estéril
1000 *u.* dinero 1000 *u.* bienes de interés 1000 *u.* materias primas (*para la clase estéril*) 1000 *u.* alimentos (*para la clase estéril*) 1000 *u.* de alimentos (*para la clase productiva*) 1000 *u.* de forraje	Derecho a 2000 *u.* ingreso	1000 *u.* dinero

La clase estéril compra ahora 1000 *u.* de materias primas a la clase productiva, de modo que las tendencias pasan a ser las siguientes:

TABLA II

Clase productiva	Clase propietaria	Clase estéril
2000 *u.* dinero 1000 *u.* bienes de interés 500 *u.* alimentos 500 *u.* producción (*para la clase estéril*) 1000 *u.* alimentos (*para la clase productiva*) 1000 *u.* forraje	Derecho a 2000 *u.* ingreso	1000 *u.* materias primas

La clase productiva paga a los propietarios 2000 *u.* de dinero como ingreso y la clase estéril transforma sus 1000 *u.* de materias primas en 2000 *u.* de bienes manufacturados, de modo que la posición de las tres clases pasa a ser ahora la siguiente:

TABLA III

Clase productiva	Clase propietaria	Clase estéril
1000 *u.* bienes de interés 500 *u.* alimentos y 500 *u.* producción para explotación (*para la clase estéril*) 1000 *u.* alimentos (*para los propietarios*) 1000 *u.* alimentos (*para la clase productiva*) 1000 *u.* forraje	2000 *u.* dinero	1000 *u.* bienes manufacturados

Se completan así las condiciones de los principales cambios intersectoriales, cambios que empiezan con la compra, por parte de los propietarios, de 1000 *u.* de alimentos a la clase productiva y 1000 *u.* de bienes manufacturados a la clase estéril. La situación es ahora la siguiente:

La Escuela de Minas. Magnífico edificio construído por el arquitecto y escultor D. Manuel Tolsá.

TABLA IV

Clase productiva	Clase propietaria	Clase estéril
1000 *u.* dinero 1000 *u.* bienes de interés 500 *u.* alimentos y 500 *u.* producción para exportación (*para la clase estéril*) 1000 *u.* alimentos (*para la clase productiva*) 1000 *u.* forraje	1000 *u.* alimentos 1000 *u.* bienes manufacturados	1000 *u.* dinero 1000 *u.* bienes manufacturados

La clase estéril compra, a su vez, 500 *u.* de alimentos y 500 *u.* de productos, para su exportación a la clase productiva, con lo que ahora:

TABLA V

Clase productiva	Clase propietaria	Clase estéril
2000 *u.* dinero 1000 *u.* bienes de interés 1000 *u.* alimentos (*para la clase productiva*) 1000 *u.* forraje	1000 *u.* alimentos	1000 *u.* bienes manufacturados 5000 *u.* alimentos 500 *u.* producción para la exportación

La clase estéril cambia ahora, gracias al comercio exterior, sus 500 *u.* de producción destinados a la exportación, por 500 *u.* de bienes manufacturados de origen extranjero, de modo que las tendencias pasan a ser esta vez:

TABLA VI

Clase productiva	Clase propietaria	Clase estéril
2000 *u.* dinero 1000 u. bienes de interés 1000 *u.* alimentos (*para la clase productiva*) 1000 *u.* forraje	1000 *u.* alimentos 1000 *u.* bienes manufacturados	1500 *u.* bienes manufacturados 500 *u.* alimentos

Al comenzar la producción, el análisis de la clase productiva se divide en empresarios y asalariados. Los empresarios alquilan a los asalariados y les pagan sus salarios anuales de 2000 *u.*, una mitad en dinero y la otra mitad en alimentos. La situación, entonces, es como sigue:

TABLA VII

Clase productiva	Empresarios	Clase propietaria	Clase estéril
Asalariados			
1000 *u.* dinero 1000 *u.* alimentos	1000 *u.* dinero 1000 *u.* bienes de interés 1000 *u.* forraje	1000 *u.* alimentos 500 *u.* alimentos	1500 *u.* bienes manufacturados

Los asalariados de la clase productiva compran, ahora, 1000 *u.* de bienes manufacturados a la clase estéril, con lo que la nueva posición pasa a ser:

TABLA VIII

Clase productiva	Empresarios	Clase propietaria	Clase estéril
1000 *u.* alimentos 1000 *u.* bienes manufacturados	1000 *u.* dinero 1000 *u.* bienes de interés 1000 *u.* forraje	1000 *u.* alimentos 1000 *u.* bienes manufacturados	1000 *u.* dinero 500 *u.* alimentos manufacturados

A medida que avanza la producción de la clase productiva, se consumen las reservas monetarias de las diferentes clases y el proceso económico tiende a agotarse. Los asalariados de la clase productiva consumen sus 1000 *u.* de alimentos y sus 1000 *u.* de bienes manufacturados. Los empresarios, a su vez, utilizan sus 1000 *u.* de dinero para comprarse, unos a otros, los 1000 *u.* de bienes de interés, empleando esos bienes en la reposición y reparación de su capital fijo, stocks, etc., al mismo tiempo que alimentan a sus caballos con los 1000 *u.* de forraje. Los propietarios, por su parte, consumen sus 1000 *u.* alimentación y sus 1000 *u.* de bienes manufacturados, mientras que la clase estéril hace lo mismo con sus 500 *u.* de alimentos y sus 500 *u.* de bienes manufacturados. Cuando la cosecha aparece, todo el ciclo económico se repite desde la fase 1.

Los *Tableaux* de las primeras tres ediciones y el *Análisis* estaban pensados para explicar y presentar la situación dentro de un Estado de máximo bienestar, mientras que la mayoría de los *Tableaux* (que aparecen en *El amigo de la Humanidad, Filosofía rural* y en los dos *Problemas económicos*) se pensaron para mostrar el funcionamiento de las causas que conducen hacia ese Estado ideal de bienestar máximo; o bien, a su contrario.

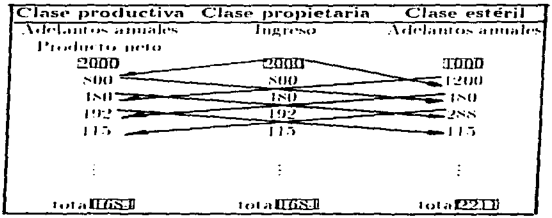
UNA SITUACIÓN DE DESEQUILIBRIO

En su *Explicación*, Quesnay supone que los propietarios deciden gastar en lujos ornamentales más de la mitad de su renta con la clase estéril y, el complemento, con la clase productiva. El resultado sería una reducción del ingreso y la nación se arruinaría, sólo por este cambio de preferencias. Quesnay basa sus argumentaciones en las tres siguientes hipótesis generales:

HIPÓTESIS GENERALES

i) se parte de una situación de máximo bienestar; *ii)* los propietarios deciden repentinamente aumentar su gasto, comprándole productos a la clase estéril; *iii)* las clases estéril y productiva siguen el mismo ejemplo.

En *El amigo de la humanidad*, Mirabeau ilustra la situación mediante el esquema de zig-zag:



Los cálculos correspondientes a por qué convergen estas series y hacia qué tipos de valores, se exponen a continuación.

Sea $x_0 \in \mathrm{R}$ un número fijo; además, la flecha " $\rightarrow$ " significa la dirección en la que un sector compra a otro.

Sea

$$
\begin{array}{ccc}
\vdots & x_0 & \vdots \\
\frac{1}{2}x_0 - (\frac{1}{2}x_0) = & \cdots\cdots & x_1 = \frac{1}{2}x_0 + ax_0 = \\
\frac{1}{2}x_0 - (1-a) = x_2 & & \frac{1}{2}x_0(1+a) \\
\frac{1}{2}x_1 - a\frac{1}{2}x_1 = & & x_3 = \frac{1}{2}x_2 + a\frac{1}{2}x_2 = \\
(\frac{1}{2}x_1)(1-a) & & \frac{1}{2}x_2(1+a) \\
\frac{1}{2}x_3(1-a) = x_6 & & x_5 = \frac{1}{2}x_4(1+a) \\
\frac{1}{2}x_5(1-a) = x_8 & & x_7 = \frac{1}{2}x_6(1+a)
\end{array}
$$

A partir de aquí, vamos a deducir la forma que tendrían estas dos series:

i) **La primera serie es:**

$$x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + x_{10} + \ldots + x_{2n} + \ldots$$

que corresponde a la serie de la columna de la izquierda; y *ii)* **la segunda serie es:**

$$x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + \ldots + x_{2n+1} + \ldots$$

Sea ahora $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, que corresponde a la serie de la columna derecha:

$$x_0\left[\frac{1}{2}(1-a)+\frac{1}{2}(1+a)\frac{1}{2}(1-a)+\frac{1}{2}(1-a)\frac{1}{2}(1-a)\frac{1}{2}(1+a)\frac{1}{2}(1+a)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(1-a)\frac{1}{2}(1-a)\frac{1}{2}(1+a)+\frac{1}{2}(1-a)\frac{1}{2}(1-a)\frac{1}{2}(1+a)\frac{1}{2}(1+a)\frac{1}{2}(1-a)+\cdots\right]$$
$$x_0\left[\frac{1}{2}(1-a)+\frac{1}{2^2}(1+a)(1-a)+\frac{1}{2^3}(1-a)^2(1+a)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2^4}(1-a)^2(1+a)^2+\frac{1}{2^5}(1-a)^3(1+a)^2+\cdots\right].$$

Esta serie se puede expresar como una serie de dos sumas distintas:

$$\Rightarrow x_0\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^2}(1+a)(1-a)\right]^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^{n+1}}(1+a)^{n+1}(1-a)^n\right]\right]$$

$$\Rightarrow x_0\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^2}(1+a)(1-a)\right)^n-1+\frac{(1-a)}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^2}(1+a)(1-a)\right)^n\right]$$

$$\Rightarrow x_0\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-a^2}{4}\right)^n-1+\frac{(1-a)}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-a^2}{4}\right)^n\right].$$

Factorizando, obtenemos:

$$x_0\left[\left(1+\frac{1-a}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-a^2}{4}\right)^n-1\right].$$

$$\Rightarrow x_0\left[\left(\frac{2+(1-a)}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-a^2}{4}\right)^n-1\right]=x_0\left[\left(\frac{3-a}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-a^2}{4}\right)^n-1\right].$$

Como se cumple la condición $|r|=\left|\frac{1-a^2}{4}\right|<1$, la serie converge; pero si se cumpliera que $a=0$, $\Rightarrow \left|\frac{1}{4}\right|<1$ y la serie también convergería. Por último, si $a=1$, $\Rightarrow \left|\frac{0}{4}\right|<1$ y la serie igualmente converge.

Entonces, podemos expresar la serie como:

$$x_0\left[\left(\frac{3-a}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-a^2}{4}\right)^n-1\right].$$

que converge al siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} x_0\left[\left(\frac{3-a}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-a^2}{4}\right)^n - 1\right] = x_0\left(\frac{3-a}{2}\right)\lim_{n\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-a^2}{4}\right)^n - x_0$$

$$= \frac{x_0(3-a)}{2}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{1-a^2}{4}\right)}\right) - x_0 = \frac{x_0(3-a)}{2}\left(\frac{4}{3+a^2}\right) - x_0$$

$$= \frac{2x_0(3-a)}{3+a^2} - x_0 = x_0\left(\frac{6-2a}{3+a^2} - 1\right).$$

Si sustituimos los valores de $x_0 = 2000$ y $a = \frac{1}{5}$, entonces la serie converge a:

$$2000\left(\frac{6-2\frac{1}{5}}{3+\left(\frac{1}{5}\right)^2} - 1\right) = 2000\left(\frac{\frac{28}{5}}{\frac{76}{5}} - 1\right) = \frac{280000}{76} - 1 \cong 1684.2105.$$

La segunda serie tiene la forma:

$$x_1 + x_3 + x_5 + \cdots = \sum x_{2n+1}$$

$n \in \mathcal{N} \cup \{0.\}$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(1+a)x_0 + \frac{1}{2}(1+a)\frac{1}{2}(1-a)x_0 +$$
$$+\frac{1}{2}(1+a)\frac{1}{2}(1-a)\frac{1}{2}(1+a)\frac{1}{2}(1-a)$$
$$+\frac{1}{2}(1+a)\frac{1}{2}(1-a)\frac{1}{2}(1+a)\frac{1}{2}(1-a)\frac{1}{2}(1-a) + \cdots$$

Factorizamos primero x_0 y simplificamos:

$$= x_0\left[\frac{1}{2}(1+a) + \frac{1}{2^2}(1+a)(1-a) + \frac{1}{2^3}(1+a)^2(1-a) +\right.$$
$$\left.\frac{1}{2^4}(1+a)^2(1-a)^2 + \cdots\right].$$

Esta serie también la podemos expresar como una suma de dos series:

$$x_0\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^2}(1+a)(1-a)\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{2n+1}}(1+a)^{n+1}(1-a)^n\right)\right] =$$
$$= x_0\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-a^2}{4}\right)^n - 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(1+a)}{2}\right)\left(\frac{(1+a)(1-a)}{4}\right)^n\right] =$$
$$= x_0\left[\left(1+\frac{1+a}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-a^2}{4}\right)^n - 1\right]$$

$$= x_0\left[\left(\frac{3+a}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-a^2}{4}\right)^n - 1\right].$$

Ahora, si

$$a \in (0,1) \Rightarrow r = \left|\frac{1-a^2}{4}\right| < 1$$

y, además, si

$$a = 1 \Rightarrow r = \left|\frac{1-a^2}{4}\right| = \left|\frac{0}{4}\right| < 1.$$

Por último, si

$$a = 0 \Rightarrow r = \left|\frac{1}{4}\right| < 1;$$

Por tanto, la serie converge. En esta serie sustituimos ahora $x_0 = 2000$ y $a = \frac{1}{5}$.

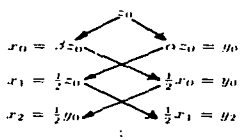
$$\Rightarrow 2000\left[\left(\frac{3+\frac{1}{5}}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}{4}\right)^n - 1\right] =$$

$$2000\left[\left(\frac{8}{2}\right)\left(\frac{25}{19}\right)^n - 1\right] = 2000\left(\frac{10-19}{19}\right)$$

$$= 2000\left(\frac{21}{19}\right) \cong 2210.5263.$$

obtenemos la cantidad aproximada 2210.5263[4].

Sea $z_0 \in R_+$ fijo. La flecha indica la dirección en la que se hace la compra desde un sector a otro. Sean $\alpha, \beta \in R_+$ tales, que $\alpha + \beta = 1$



En general, podemos replantear todo como un sistema de ecuaciones en diferencias:

$$\begin{cases} x_{t+1} = \frac{1}{2} y_t \\ y_{t+1} = \frac{1}{2} x_t \end{cases}$$

[4]La fracción $\frac{21}{19} = 1.\overline{105263157894736842}$ tiene expansión decimal infinita periódica. La segunda serie converge a 2210.5263 aproximadamente.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$$

y donde

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \sum_{t=0}^{\infty} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{A}^t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{A}^t\right) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Pero

$$\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{A}^t = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha z_0 \\ \beta z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha \frac{4}{3} + \beta \frac{2}{3}) z_0 \\ (\alpha \frac{2}{3} + \beta \frac{4}{3}) z_0 \end{pmatrix}$$

como en el caso anteriormente analizado
si

$$\alpha \in (0, 1)$$

la serie converge y si

$$\alpha = 1 \Rightarrow r = \left|\frac{1 - \alpha^2}{4}\right| < 1;$$

y ahora, si

$$\alpha = 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{4}\right| < 1;$$

$$\Rightarrow 2000 \left[\left(\frac{3 + \frac{1}{5}}{2}\right) \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2}{4}\right) - 1 \right] =$$

$$2000 \left[\left(\frac{8}{2}\right) \left(\frac{25}{19}\right)^{n} - 1 \right] = 2000 \left(\frac{40 - 19}{19}\right)$$

$$= 2000 \left(\frac{21}{19}\right) \cong 2210.5263.$$

21/19 es una fracción decimal, con una expansión que contiene 18 dígitos, ya mencionada anteriormente. Si

$$\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \beta = 1 - \alpha = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5},$$

y entonces, sustituyendo los valores $z_0 = 2000$ y $\alpha \neq \frac{3}{5}, \beta = \frac{2}{5}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\frac{3}{5})\frac{2}{3}2000 \\ (1+\frac{2}{5})\frac{2}{3}2000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{8}{5})(\frac{2}{3})2000 \\ (\frac{7}{5})(\frac{2}{3})2000 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2122 \\ 1866 \end{pmatrix}$$

$$\frac{16}{15} = 1.0\overline{66}$$
$$\frac{14}{15} = 0.9\overline{33}$$

¿Qué ocurrirá al año siguiente?

Si suponemos que las compras a la clase estéril se mantienen en la misma proporción, por parte de las clase productiva y de los propietarios, entonces aplicaremos las dos series para los cálculos pertinentes. Lo único que cambia es x_0, que ahora vale1684.2105.

Al final del **segundo año**, la clase productiva tendrá

$$1684.2105\left(\frac{7}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{6}{25}\right)^n - 1\right) = 1684.2105\left(\frac{16}{19}\right) = 1418.2825$$

y la clase estéril obtendrá:

$$1684.2105\left(\frac{8}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{6}{25}\right)^n - 1\right) = 1684.2105\left(\frac{21}{19}\right) = 1861.4958.$$

Esta vez los ingresos disminuyeron, de modo que como la cantidad gastada por los propietarios se vio por ello disminuida, las percepciones de la clase estéril también disminuyen. Según los fisiócratas, esta conclusión opera porque, al tener un ingreso menor la clase productiva, la renta disminuye. Si observamos este proceso para 5 años, observaremos lo que sucede a partir del año3 (los dos años anteriores fueron desarrollados con anterioridad):

Año	Ingreso de la clase productiva	Propietarios	Clase estéril
3	1194.3432	1194.3432	1320.0635
4	1005.7627	1005.7627	1111.6325
5	846.95806	846.95806	936.11151
6	713.22784	713.22784	788.30115
7	600.61292	600.61292	663.83533

A la larga, todo mundo perderá si permanecen iguales las proporciones de las compras. Según la lógica fisiocrática, lo único que podría detener la caída sería cambiar las proporciones en que se deben consumir los productos agrícolas, los cuales se deben incrementar.

Los fisiócratas buscaron, en la política impositiva y en la política fiscal, las causas de los movimientos hacia un Estado de bienestar completo o de malestar completo. Si se aligeraban las restricciones al comercio (interno y externo) de las materias primas, aumentaría el precio del producto y, con ello, el volumen de los ingresos; si no, ocurriría lo contrario.

Si por ejemplo Hacienda (en nuestro país y en nuestro tiempo) aumentara los impuestos "indirectos" sobre las personas, los bienes o el consumo, entonces aumentaría el ingreso, mientras que cualquier movimiento en dirección contraria lo haría disminuir. Para los fisiócratas, los impuestos "indirectos" serían aquellos que no recaen directamente sobre el producto neto de la tierra (suponiendo, además, la existencia de libre comercio e impuesto único). Por ello, el objetivo de estos *Tableaux* era mostrar que la causa principal del fracaso de la economía, respecto al Estado de máximo bienestar descrito en el *Tableau* básico, era la incapacidad del gobierno para adoptar las medidas necesarias para el cumplimiento de estas condiciones[5].

En su *Primer problema económico*, Quesnay trata de los efectos de un incremento del precio del producto, como consecuencia de la supuesta restauración del libre comercio. El problema es: ¿compensará la ventaja del aumento de precio, para los vendedores, la desventaja que esto significa para los compradores?

Quesnay parte de que el cociente entre el ingreso y los adelantos anuales de la clase productiva es mucho menor ahora que en el *Tableau* básico, al mismo tiempo que supone que sus adelantos anuales se ven gravados por impuestos indirectos pesados. Como consecuencia de la restauración del libre comercio, Quesnay hace sus cálculos aumentando parte del precio del producto y luego elabora los efectos económicos de esta subida, llegando así a un *Tableau* que muestra que habrían aumentado las percepciones de las tres clases. Pero Quesnay también reconoce que lo anterior no dice nada, en términos reales.

Quesnay realiza seguidamente otro cálculo, en donde explícitamente pone el gasto monetario de las distintas clases, al lado de los cálculos del producto real que cada clase puede comprar. La conclusión general es que, con el incremento de precios, las clases de los propietarios y la clase estéril estarán mejor, en términos reales, mientras que la clase productiva no sufrirá deterioros.

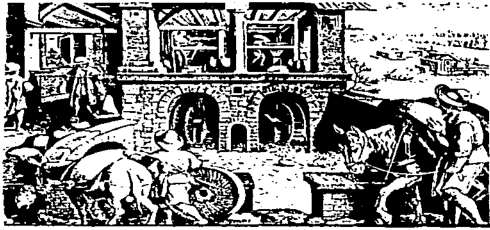
Uno de los objetivos centrales de los fisiócratas era mostrar la "desorganización" económica producida por una política impositiva distinta a la que ellos proponían. Para ilustración, ponían el siguiente ejemplo:

i) Se recaudan 50 *u.* de impuestos, la mitad a la clase productiva y la mitad a la clase estéril;

ii) Se supone que los adelantos anuales de la clase productiva se mantienen en 2000 *u.* y sus compras a la clase estéril en 1000 *u.* Deduciendo 25 *u.*, por las compras a la clase estéril que efectúan los propietarios, quedan 975 *u.* El producto total de la clase estéril se ve así reducido de 2000 *u.* a 1975 *u.*, de modo que sus adelantos anuales se reducirán a $\frac{1975}{2} = 987.5$. La reproducción anual no es entonces 5000 *u.*, sino 4950 *u.*

---

[5] *ibid.* MEEK p.82



Antes de la invención de la máquina de vapor, las únicas fuentes inanimadas de energía de que disponía el hombre eran el agua y el aire. Abajo: Un molino de agua (c. 1600). Página siguiente: Un molino de viento (1762) de la Enciclopedia de Diderot.

Los primeros capitalistas fueron mercaderes. Derecha: Portada del tratado de Jacques Savary Le Parfait Negociant (El Comerciante Ideal), 1675. A medida que el comerciante acumulaba excedentes, se convertía en banquero. Abajo izquierda: Nathan Rothschild (1777-1836) caracteriza la figura tradicional del "gordo capitalista". Para mediados del siglo XX, el promotor o industrial se había convertido en el capitalista por excelencia.

El primer gran escándalo bursátil involucró a una empresa comercial, ilustrado aquí en una caricatura holandesa contemporánea sobre La Burbuja del Pacífico (1720): "Los compradores de aire o cazadores de aire quedan, por el aire, pierden dinero y bienes y arruinan a sus esposas e hijos."

Como los retornos a la clase productiva son aún 5000 *u.* y como ésta tiene que pagar 2000 *u.* completos a los propietarios, entonces al siguiente período se reducirán sus adelantos anuales. Por tanto, esta clase reducirá en 50 *u.* el ingreso reproducido, si se mantiene la misma razón entre adelantos anuales y el ingreso.

Mirabeau y Quesnay utilizaron el *Tableau* para apoyar la consigna: "¡Abajo el lujo ornamental!" También lo utilizaron para ver los efectos de un incremento en la propensión a consumir bienes manufacturados de lujo. Además, el *Tableau* muestra el incremento de bienestar si se abolieran las restricciones y el incremento de precios consiguiente. De allí su consigna: "¡Abajo los impuestos indirectos!", que el *Tableau* muestra que recaen sobre el ingreso.

El *Tableau* está relacionado con trabajos posteriores que establecieron *enfoques de conjunto* de la economía, como los esquemas de reproducción de Marx.

El "equilibrio" que se propone en el *Tableau* es inestable y sólo se conseguiría bajo determinadas políticas públicas. De otra forma, sólo se conseguiría una disminución progresiva de la producción y de la productividad. También podemos observar en el *Tableau* que:

i) Los principales tipos de "desorganización" se pensaron como una consecuencia de errores de la política estatal y por una inadecuada orientación del gasto de los propietarios, pero no como algo inherente al mecanismo económico;

ii) Se hace énfasis en las reducciones de la producción y no en el empleo. Hay un paralelismo entre el *Tableau* y el método de insumo-producto de Leontief. Si lo entendemos como un sistema cerrado, los propietarios lo pondrían como "servicios de alquiler". Si no, se puede poner como demanda exterior. Tomaremos este último modelo.

TABLA DE TRANSACCIONES PARA EL TABLEAU ECONOMIQUE

Ahora vamos a expresar el modelo de Quesnay visto desde el punto de vista del modelo de insumo-producto de Leontief. En esta parte no vamos a [illegible] papel económico de los príncipes, del alto clero ni de los terratenientes.

	Clase productiva	Artesanos	Propietarios	Consumo	Producción total
	I	II	D	(I) + (II)	
I	2	2	1	1	5
II	1	0	1	1	2
Compras Totales	3	2	2	5	7

Sea **A** la *matriz de coeficientes técnicos*:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea ahora **X** = vector de producción total; entonces **AX** = consumo total de producción de los sectores I y II y, por tanto, **X** - **AX** = demanda total = **D.**

$$\mathbf{X} - \mathbf{AX} = \mathbf{D}$$

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{X}=\mathbf{D}$$

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & 1\\ \frac{1}{5} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -1\\ \frac{-1}{5} & 1\end{pmatrix}.$$

Si representamos $(\mathbf{I}-\mathbf{A})=\mathbf{B}$, esta expresión es conocida como *matriz de Leontief.*

$$\det \mathbf{B}=\begin{vmatrix}\frac{3}{5} & -1\\ -\frac{1}{5} & 1\end{vmatrix}=\frac{2}{5}\neq 0.$$

A su vez, la matriz $\mathbf{B}^{-1}$ es conocida como *matriz inversa de Leontief*.

$$\mathbf{B}\mathbf{X}=\mathbf{D}$$

$$\Rightarrow \mathbf{X}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}$$

$$\mathbf{B}^{-1}=\frac{5}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & \frac{5}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & \frac{5}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\left(\frac{10}{2},\frac{4}{2}\right)^{t}=(5,2)^{T}$$

$$\mathbf{X}=(5,2)^{t}=\begin{pmatrix}5\\ 2\end{pmatrix}.$$

A partir del Siglo de las Luces, se comenzaron a usar implícitamente modelos lineales y quienes emplearon dichos modelos provenían de distintas áreas de conocimiento. En forma explícita, las aproximaciones lineales se utilizaron a partir de principios de nuestro siglo para modelar la economía, lo que no quiere decir que los modelos no lineales no se comenzaran a estudiar ya en aquella época. Pero esto ya no corresponde a nuestro tema.

CRONOLOGÍA DE LA ESCUELA FISIOCRÁTICA

1763. La escuela comienza a propagandizarse. Quesnay y el resto de los fisiócratas se reunían frecuentemente y mantenían reuniones regulares con otras escuelas de pensamiento, en el Palacio de Versalles;

1764-1766. Las reuniones de los "martes", auspiciadas por Mirabeau, intercambiaban opiniones y materiales fisiocráticos. Cada vez había más simpatizantes, entre los que cabe mencionar a Le Trosne, Saint-Péravy, Mercier de la Rivière y Badeau;

1765. Los fisiócratas controlaban el *Journal de l'agriculture, du Commerce et de Finances*, en el que Dupont era director;

1765. Cuando Badeau se adhirió a los fisiócratas, éstos pudieron adquirir una revista propia, de carácter literario y político, titulada *Éphémérides*. Esta Revista se convirtió en el órgano oficial de la escuela fisiocrática. Su diseño seguía el modelo del *Spectator*, de Addison. Dicha revista pertenecía antes al propio Badeau y se llamaba *Éphémérides du citoyen;*

1765. Quesnay publica *Droit natural* y el *Diálogo*, dentro de *Du commerce*;

1767. Este año de 1767 fue prolífico en acontecimientos y publicaciones diversas:

Mirabeau publica un resumen de *Filosofía rural* (*Elementos de Filosofía natural*), conteniendo ensayos de Quesnay. Fueron editados por Du Pont bajo el título *Fisiocracia* y el artículo encabezador de la obra fue *El derecho natural*, publicado en fecha anterior;

Du Pont edita su libro *Origen y progreso de una nueva ciencia*;

Badeau publica (en *Éphémérides*) un nuevo comentario explicativo del *Tableau*, buscando integrar la teoría económica fisiocrática con su análisis político y filosófico;

Quesnay escribe *El despotismo chino*, aparecido en *Éphémérides*. Allí tuvo oportunidad de exponer su doctrina del "despotismo legal";

Mercier de la Rivière elabora, con algún detalle, este último concepto de Quesnay en su obra *Orden natural y esencial de las sociedades políticas*, considerada de gran importancia para la escuela;

Se inventa el nombre de "fisiocracia", para referirse en conjunto a los aspectos conceptuales y doctrinarios de la escuela;

Los fisiócratas establecen relaciones con la escuela de Gournay, en particular, con Turgot. De allí surge el ya famoso y conocido principio: *laissez faire, laissez passer*;

También se relacionan los fisdiócratas con los enciclopedistas. Diderot aparece frecuentemente citado en el libro de Mercier de la Rivère;

Los fisiócratas influyeron en sociedades de agricultura y parlamentos, al abogar por el fomento gubernamental en agricultura y la eliminación de trabas al libre comercio;

1769. Va creciendo la oposición a la escuela fisiocrática, por los intereses afectados. Se formaron jóvenes que ocuparon cargos públicos;

1772. *Éphémérides* comienza a disminuir su circulación e influencia. Este año ve todavía la publicación del cuarto volumen de la revista;

Se retira Quesnay de la economía, para dedicarse de lleno a "la alta especulación matemática";

1774. Muere Quesnay en diciembre, un poco después de que Turgot accediera al poder;

1776. Cae Turgot y se desmantelan las reformas fisiocráticas. Se publica *La Riqueza de las Naciones*, de Adam Smith.

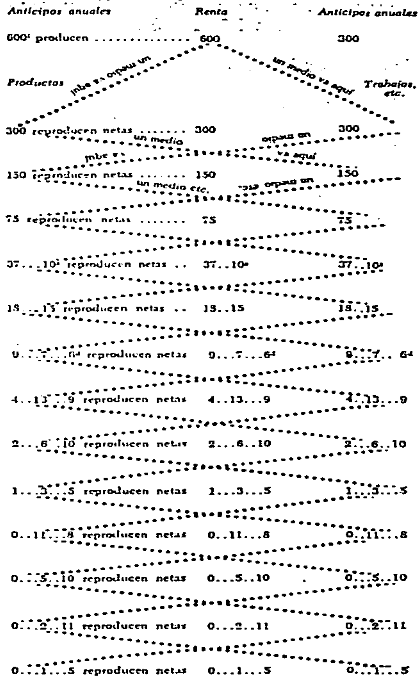
Provistos por la agricultura, las praderas, pastizales, bosques, minas, pesca, etc. Para granos, bebidas, carnes, leña, ganado, materias primas para mercancías manufacturadas, etc.

Expendio recíproco de una clase de gastos a la otra, que distribuye la renta de 600 libras de una parte y de otra, dando 300 libras de cada lado, además de los anticipos, que se conservan íntegros. El propietario subsiste gracias a las 600 libras que gasta. Las 600 libras que se distribuyen en cada una de las clases de gastos pueden dar sustento a un hombre en una y en otra; por lo que 600 libras de renta pueden dar sustento a tres jefes de familia. Partiendo de aquí, 600 millones de renta pueden dar subsistencia a tres millones de familias, calculándose tres personas por familia. Los costos de la clase productiva, que se reproducen también cada año, son la mitad para sueldos, y agregan 300 millones, que pueden dar subsistencia a otro millón de jefes de familia, tocando 300 libras a cada uno. De este modo, estos 900 millones, que anualmente se reproducen de los bienes raíces, podrían dar la subsistencia de doce millones de personas, de acuerdo con este orden de distribución y circulación de la renta anual. Por circulación entendemos aquí las compras pagadas con la renta, y la distribución que divide la renta entre los hombres mediante el pago de compras de primera mano, descontando el comercio, que multiplica las ventas y las compras, sin multiplicar las cosas, y que no es sino aumento de gastos estériles.

TABLEAU ECONOMIQUE

GASTOS DE LA RENTA

gastos productivos — *Una vez descontado el impuesto se dividen entre los gastos productivos y los gastos estériles* — gastos estériles



Total reproducido .... 600l de renta y los costos anuales de la agricultura por 600 libras, que la tierra restituye. De esta suerte, la reproducción es de 1 200 libras.

En mercancías manufacturadas, alojamientos, vestido, intereses del dinero, criados, costos del comercio, productos extranjeros, etc.

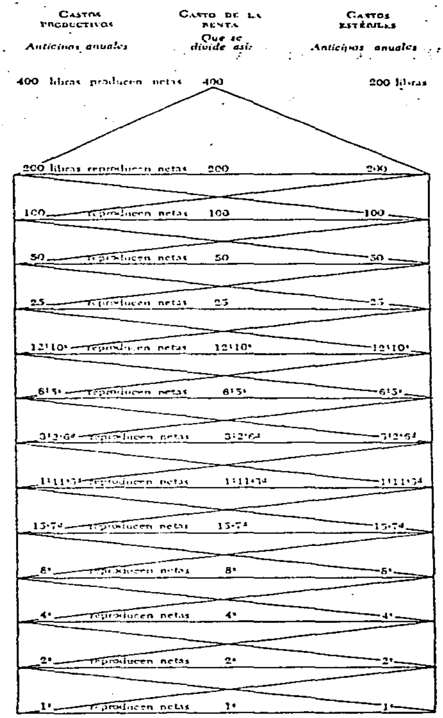
Las compras recíprocas entre una clase de gastos y otra distribuyen la renta de 600 libras.

Las dos clases gastan una parte en ellas mismas, y la otra en la parte contraria.

La circulación trae 600 libras a esta columna, de las que hay que retirar las 300 libras de los anticipos anuales; quedan 300 libras para sueldos.

El impuesto, que pertenece a esta clase, se deduce de la renta que se obtiene gracias a los gastos reproductivos y viene a perderse en esta clase, salvo la parte que regresa a la circulación que la reproduce en el mismo orden que la renta, y se distribuye del mismo modo entre las dos clases. Pero siempre se recauda en perjuicio de la renta de los propietarios o de los anticipos de los cultivadores o del ahorro en el consumo. En los dos últimos casos es destructivo, pues disminuye en otro tanto la reproducción: lo mismo sucede con lo que pasa al extranjero, sin regresar, y con lo que es detenido como fortunas pecuniarias por los encargados de la recaudación y de los gastos. Pues esas partes del impuesto, que se distraen o sustraen a los gastos productivos, mediante el ahorro, o las que se deducen de los anticipos de los cultivadores, apagan la reproducción, resultan en doble pérdida para los propietarios, y finalmente destruyen el total de la renta que proporciona el impuesto: éste no debe fijarse sino al propietario, y no a los gastos reproductivos porque arruina al cultivador, al propietario, y al Estado.

TABLEAU ÉCONOMIQUE



Renta total: 400 libras, reproducidas con los costos agrícolas de 400 libras.

Provistos por la agricultura, praderas, pastizales, bosques, etc., para granos, bebidas, carne, leña, vino, ganado, materias primas para las mercancías manufacturadas, etc. Expendio recíproco de una clase de gastos a la otra, que distribuye la renta de 400 libras en una y otra parte, lo que da 200 libras para cada lado, además de los anticipos, que se conservan íntegros. El propietario gasta la renta de 400 libras en su subsistencia. Las 200 libras que se distribuyen en cada una de las clases de gastos pueden dar sustento a un hombre en una y en otra: por lo que 400 libras de renta pueden dar sustento a tres jefes de familia. Partiendo de aquí, 400 millones de renta pueden dar sustento a tres millones de familias, calculándose tres personas adultas por familia. Los costos de la clase productiva, que se reproducen también cada año, son la mitad para sueldos, y agregan 200 millones, que pueden dar subsistencia a otro millón de jefes de familia, tocando 200 libras a cada uno. De este modo, los 600 millones, que anualmente se reproducen de los bienes raíces, podrían dar la subsistencia de doce millones de personas, de acuerdo con este orden de distribución y circulación de la renta anual.

En mercancías manufacturadas, alojamientos, impuestos, intereses del dinero, criados, costos del comercio, productos extranjeros, etc. Expendio recíproco de una clase de gastos a la otra, lo que distribuye la renta de 400 libras.

Las dos clases gastan una parte en ellas mismas, y la otra en la parte contraria.

La circulación lleva 400 libras a esta columna, de las cuales hay que retirar las 200 de los anticipos anuales. Quedan 200 para el gasto.

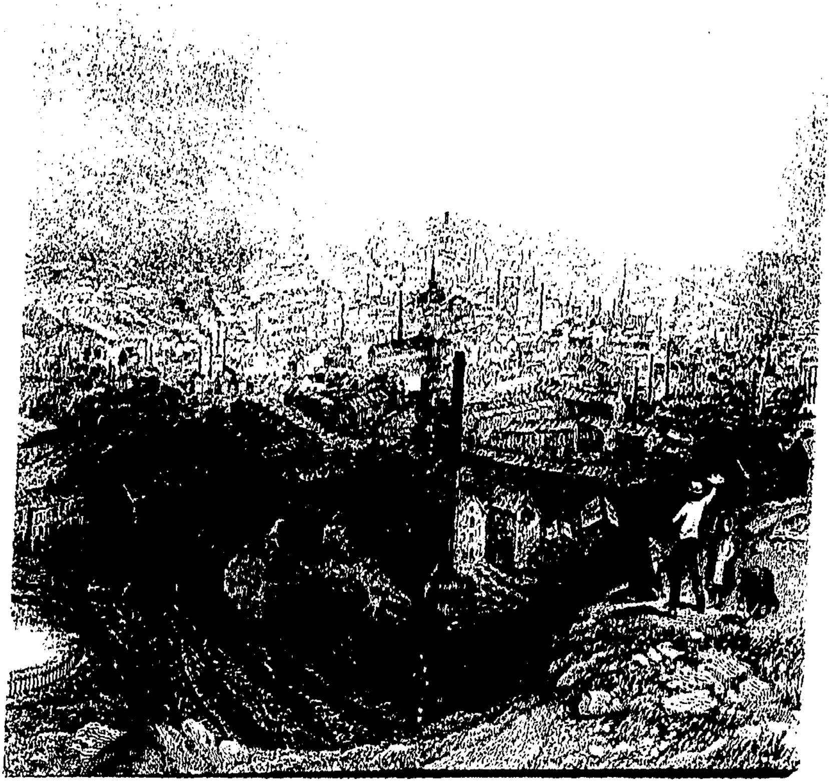
El impuesto, que pertenece a esta clase, es provisto por la renta y por la clase de gastos reproductivos, y viene a perderse aquí, salvo aquella parte que regresa a la clase reproductiva, que la reproduce en el mismo orden que la renta que se distribuye en esta misma clase. Pero siempre se recauda en perjuicio de la renta de los propietarios o de los anticipos de los cultivadores, o del ahorro en el consumo. En los dos últimos casos es destructivo, pues disminuye en otro tanto la reproducción. Lo mismo sucede con lo que pasa al extranjero, sin regresar, y con lo que es retenido como fortunas pecuniarias por los encargados de la recaudación y de los gastos.

III. LA "TERCERA EDICIÓN" DEL "TABLEAU ÉCONOMIQUE" [1]

Objetos que considerar: *1.* tres clases de gastos; *2.* su fuente; *3.* sus anticipos; *4.* su distribución; *5.* sus efectos; *6.* su reproducción; *7.* relaciones entre ellas; *8.* sus relaciones con la población; *9.* con la agricultura; *10.* con la industria; *11.* con el comercio; *12.* con el conjunto de riquezas de la nación.

Gastos productivos relativos a la agricultura, etc.	Gastos de la renta una vez descontado el impuesto, se dividen entre los gastos productivos y los gastos estériles	Gastos estériles relativos a la industria, etc.
Anticipos anuales para producir una renta de 600ˡ son 600ˡ	*Renta anual de*	*Anticipos anuales para los trabajos de los gastos estériles, son*
600ˡ producen netas	600ˡ	300ˡ
Productos		Trabajos, etc.
300ˡ reproducen netas	300ˡ un medio va aquí	300ˡ
150ˡ reproducen netas	150ˡ un medio	150
	va aquí	
75ˡ reproducen netas	75 un medio etc.	75
37...10ˢ reproducen netas	37...10ˢ	37...10ˢ
18...15 reproducen netas	18...15	18...15
9... 7... 6ᵈ reproducen netas	9... 7... 6ᵈ	9... 7... 6ᵈ
4...13... 9 reproducen netas	4...13... 9	4...13... 9
2... 6...10 reproducen netas	2... 6...10	2... 6...10
1... 3... 5 reproducen netas	1... 3... 5	1... 3... 5
0...11... 8 reproducen netas	0...11... 8	0...11... 8
0... 5...10 reproducen netas	0... 5...10	0... 5...10
0... 2...11 reproducen netas	0... 2...11	0... 2...11
0... 1... 5 reproducen netas	0... 1... 5	0... 1... 5
etc.		

TOTAL REPRODUCIDO .... 600ˡ de renta; además, los gastos anuales de 600ˡ y los intereses de los anticipos primitivos del labrador, de 300ˡ, que restituye la tierra. De esta suerte, la reproducción es de 1 500ˡ, incluida la renta de 600ˡ, que es base del cálculo, sin contar el impuesto deducido y los anticipos requeridos para su reproducción anual, etc. Véase la Explicación de la página siguiente.



Capítulo 2 LOS ESQUEMAS DE REPRODUCCIÓN

"El capital se vuelve audaz si la ganancia es adecuada. Con el 10% asegurado, se lo puede colocar por doquier; con el 20%, se torna eficaz; con el 50%, positivamente temerario; por un 100% pisotea todas las leyes humanas y por un 300% no existe ya crimen al que no se arriesgue, aún bajo el peligro del patíbulo. Si el tumulto y la reyerta aportan ganancias, el capital los avivará... ".
(*El Capital*. Tomo I. *La acumulación originaria*).

PRIMERA PARTE

Marx le dio mucha importancia al uso de las matemáticas en la economía, como instrumento de análisis. En su carta del 11 de enero de 1858, Marx le decía a Engels: "Estoy detenido por errores en los cálculos cuando estoy trabajando los principios económicos que, con desesperación, he reunido nuevamente por mí mismo, con el objetivo de terminar de estudiar álgebra rápidamente. La aritmética no me parece difícil. Debido a esta desviación por el álgebra, sin embargo, he estado ejercitándome con rapidez otra vez."

En otra de sus cartas a Engels, el 31 de mayo de 1873, Marx escribía: "¿Conoces esas tablas que muestran los movimientos de los precios, los descuentos y cosas parecidas, con sus fluctuaciones en el curso de un año o algún otro período? Con frecuencia he tratado de encontrar las curvas irregulares para estas alzas y bajas (*sic*) con el fin de analizar las crisis, creyendo (y aún creo que esto sería posible, si uno tuviese información lo suficientemente fidedigna) que las principales leyes de las crisis se pueden deducir matemáticamente de esto".

Finalmente, en una de sus cartas (que se anexa al final de este capítulo y que no se encontró completa en las ediciones de *El Capital* en español o en su correspondencia), Marx le decía a Engels: "En las vacaciones estoy estudiando cálculo diferencial e integral. *A propos!*, tengo un profuso escrito sobre esto y quiero enviártelo, si quieres iniciarte en la materia. Creo que es más o menos necesario para tus estudios militares. Sin embargo, es un poco más fácil el nivel de matemática (fue abordado sólo técnicamente), como por ejemplo, con un nivel de álgebra superior. Salvo por el conocimiento de la historia usual del álgebra y la trigonometría, no es necesario tener conocimientos previos, excepto un conocimiento general de las secciones cónicas".(Ver carta al final, en alemán).

Las citas de las cartas anteriores son pequeñas muestras de que Marx estudió álgebra y cálculo con el fin de aplicarlo a sus investigaciones económicas, aunque nunca las aplicó explícitamente. En su mayor parte, a primera vista *El Capital* aparece como no matematizado, pero, leyendo cuidadosamente, podemos encontrar que muchas de las discusiones económicas verbales pueden traducirse a un lenguaje rigurosamente matemático[1].

---

[1] MORISHIMA, Michio Econometrica. *Marx in the light of modern economic theory* Vol 42, no. 4, julio 1974, pp 611-632

A continuación, haremos una introducción esquemática de los modelos de reproducción, simple y ampliada, de Marx.

EL MODELO DE REPRODUCCIÓN SIMPLE DE MARX

Algunas suposiciones de este modelo son:

1.- La economía es capitalista pura;
2.- No interviene el Estado en la economía;
3.- Hay escaso o ningún progreso de las fuerzas productivas;
4.- No existe comercio exterior (el modelo es cerrado);
5.- Los precios son constantes;
6.- Las tasas de beneficio son constantes;
7.- Los salarios son consumidos totalmente;
8.- Los capitalistas sólo intervienen en su propio departamento;
9.- Los capitales no emigran desde una rama de producción a otra;
10.- Hay ausencia de mecanismos de crédito;
11.- La rotación de los capitales es constante, año con año;
12.- Todo el plusvalor se consume improductivamente ($p_I + p_{II}$);
13.- El capital constante es consumido totalmente en un período;
14.- No se considera el papel del dinero, como mediador de la reproducción; y
15.- El modelo no depende del tiempo.

DESCRIPCIÓN GENERAL DEL MODELO

1.- V representa el valor del producto total o producto bruto, en un período de tiempo dado. Además, V está dividido en tres partes, c, v, p, donde:

c: representa el valor de los medios de producción o capital constante, usados durante un período dado;

v: representa el valor del capital variable o fuerza de trabajo total, empleado en el proceso productivo en el mismo período; y

p: representa el valor de la plusvalía.

$$\Rightarrow V = c + v + p \tag{2.1}$$

2.- La economía está dividida en dos departamentos:

El departamento I, que produce medios de producción; y

El departamento II, que produce medios de consumo.

Sean ahora V_I y V_{II} tales, que:

V_I: representa el valor total de la producción de los medios de producción; y

V_{II}: representa el valor total de la producción de los medios de consumo.

Entonces, la composición orgánica de V_I y V_{II} será:

$$\begin{cases} V_I = c_I + v_I + p_I \text{ y} \\ V_{II} = c_{II} + v_{II} + p_{II} \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{c} V = V_I + V_{II} \\ V = (c_I + v_I + p_I) + (c_{II} + v_{II} + p_{II}) \end{array}$$

3.-

$$\Longrightarrow \begin{cases} c = c_I + c_{II} & \boxed{\text{valor de la demanda total de los medios de producción.}} \\ v = v_I + v_{II} & \boxed{\text{valor de la demanda capitalista de la fuerza de trabajo}} \\ p = p_I + p_{II} & \boxed{\text{plusvalor total, obtenido en un período dado.}} \end{cases} \qquad (2.3)$$

Los departamentos I y II requieren de medios de producción; pero, solamente el departamento I los produce. Por tanto, el departamento I tiene que vender parte de su producción al departamento II.

Además, el departamento II necesita maquinaria para seguir produciendo bienes de consumo, por lo que parte de lo que producen lo revenden al departamento I.

Por consiguiente, ***la demanda total de medios de producción*** es igual a las exigencias de reposición, en ambos departamentos:

$$(c_I + c_{II})$$

y la demanda total de bienes de consumo es igual al fondo de salarios y al excedente, que muestran ambos departamentos:

$$(v_I + v_{II} + p_I + p_{II}).$$

Si hay producción simple

$$\Rightarrow \cancel{c_I} + c_{II} = \cancel{c_I} + v_I + p_I \qquad (2.4)$$

$$\boxed{c_{II} = v_I + p_I} \qquad (2.5)$$

La ecuación (2.4) nos dice que la demanda total de medios de producción es igual a la producción total del departamento I, en lo que concierne a dichos medios.

Pero los trabajadores y capitalistas del departamento I tienen que obtener sus bienes de consumo en el departamento II. Por consiguiente, la producción total de los bienes de consumo del departamento II, debe ser consumida totalmente por los trabajadores y capitalistas de ambos departamentos.

$$c_I + p_I + \cancel{v_{II}} + \cancel{p_{II}} = c_{II} + \cancel{v_{II}} + \cancel{p_{II}} \qquad (2.6)$$

$$\boxed{c_{II} = v_I + p_I} \qquad (2.7)$$

El departamento I produce y consume su propio capital constante (c_I), a la vez que reemplaza lo restante ($v_I + p_I$) por bienes de consumo del departamento II.

El departamento II reproduce y consume los bienes de consumo que requiere para subsistir, pero necesita de medios de producción.

Por tanto, se debe cumplir la condición

$$c_{II} = v_I + p_I,$$

que es la condición de equilibrio entre los departamentos I y II, con reproducción simple.

Como V_I representa el valor del producto del departamento I, en tanto que V_{II} representa el valor del producto del departamento II, podemos definir ahora el consumo para cada departamento.

Consumo del departamento I:

$$c_I = V_I - c_{II} \tag{2.8}$$

Consumo del departamento II:

$$c_I = V_I - c_{II} \tag{2.9}$$

En términos de los esquemas de Marx, que divide cada parte del producto total por departamentos, este autoconsumo está dado por:

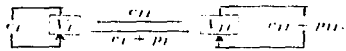
$$\begin{array}{c} c_I + \boxed{v_I + p_I} = V_I \\ \boxed{c_{II}} + v_{II} + p_{II} = V_{II} \\ \hline c + v + p = V \end{array} \tag{2.10}$$

Marx llamó a estas ecuaciones "sistema balanceado de influencias intersectoriales", para el caso de la reproducción simple.

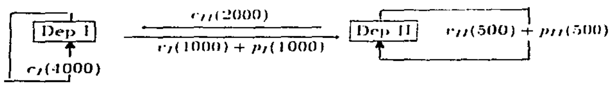
El sistema (2.5) también se puede representar como:

$$\begin{array}{ccc} c_I & \boxed{c_{II}} & c \\ + & + & + \\ v_I & v_{II} & v \\ + & + & + \\ p_I & p_{II} & p \\ \hline V_I & + V_{II} & = V \end{array} \tag{2.11}$$

y, en general, a la representación gráfica de este mismo proceso como:



Marx da un ejemplo numérico, que puede ser representado de la manera siguiente:



$$\begin{array}{ccccc} 4000\ c_I & & \boxed{2000 c_{II}} & & 6000 \\ + & & + & & + \\ 1000\ v_I & & 500\ v_{II} & & 1500 \\ + & & + & & + \\ 1000\ p_I & & 500\ p_{II} & & 1500 \\ \hline 6000 & + & 3000 & & 9000 \end{array}$$

Aquí se suponen dos situaciones:

i) La producción de medios de producción, que se obtiene a través de:

$$4000\, c_I + 1000\, v_I = 5000.$$

supone una tasa de plusvalía de 100 %. A su vez, la producción del departamento I es:

$$4000\, c_I + 1000\, v_I + 1000\, p_I = 6000.$$

que existe bajo la forma física de medios de producción; y

ii) La producción de medios de consumo, que se obtiene a través de:

$$2000\, c_{II} + 500\, v_{II} = 2500.$$

Como la tasa es de 100 %, entonces

$$2000\, c_{II} + 500\, v_{II} + 500\, p_{II} = 3000.$$

que existe físicamente como medios de consumo.

En estos esquemas no se considera la circulación del dinero, ya que esta circulación mediatiza la reproducción. Aquí se hace a un lado lo más imprescindible para el capital, lo que constituye su razón de ser, su existencia: *el interés*. Su ambición por acumular más, por ampliar el capital. La acumulación es una de las grandes fuerzas motrices del desarrollo capitalista.

ESQUEMAS DE DE REPRODUCCIÓN AMPLIADA DE MARX

En una economía en expansión, se presentan las siguientes variantes:

1) Se supone que hay condiciones técnicas para ampliar el capital, ya sea constante o variable;

2) Puede ocurrir que si se convierte el plusvalor en dinero, éste puede atesorarse;

3) El departamento I acumula el 50% de su plusvalor y el departamento II sólo se ajusta a este hecho; y

4) Las actividades del departamento II están determinadas por las del departamento I.

Dividamos el plusvalor p, en cada departamento, en tres partes:

$$p = p_c + p_v + p_e \tag{2.12}$$

p_c = parte del plusvalor, destinado a la compra de nuevo capital constante;
p_v = parte del plusvalor, destinado a la compra de nueva fuerza de trabajo; y
p_e = la parte que se consume del excedente.

La estructura del producto bruto, en los dos departamentos, se encuentra como sigue:

Departamento I:

$$c_I + v_I + (p_{Ic} + p_{Iv} + p_{Ie}) = V_I \tag{2.13}$$

que representa el valor total de medios de producción.

Departamento II:

$$c_{II} + v_{II} + (p_{IIc} + p_{IIv} + p_{IIe}) = V_{II} \tag{2.14}$$

que representa el valor total de los bienes de consumo. Finalmente,

$$V = c + v + (p_c + p_v + p_e) \tag{2.15}$$

representa el producto nacional total.
En síntesis

$$\begin{array}{ll} Dep\ I & c_I + v_I + (p_{Ic} + p_{Iv} + p_{Ie}) = V_I \\ Dep\ II & \underline{c_{II} + v_{II} + (p_{IIc} + p_{IIv} + p_{IIe}) = V_{II}} \\ \text{Total} & c + v + (p_c + p_v + p_e) = V \end{array} \tag{2.16}$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{lcl} c & = & c_I + c_{II} \\ v & = & v_I + v_{II} \\ p_c & = & p_{Ic} + p_{IIc} \\ p_v & = & p_{Iv} + p_{IIv} \\ p_e & = & p_{Ie} + p_{IIe} \end{array} \right. \tag{2.17}$$

Además, la demanda total de medios de producción es:

$$c_I + c_{II} + p_{Ic} + p_{IIc} \tag{2.18}$$

y la demanda total de bienes de consumo es:

$$v_I + v_{II} + p_{Iv} + p_{IIv} + p_{Ie} + p_{IIe}. \tag{2.19}$$

La demanda total de medios de producción es igual a las exigencias de reposición y ampliación del capital, de ambos departamentos. También podemos afirmar que la demanda total de bienes de consumo es igual al fondo conjunto de salarios, a la expansión de éste y al excedente consumido por ambos departamentos.

"Con los esquemas de Marx y las consideraciones ulteriores de Lenin, quedó aceptada la suposición simplificada de que la acumulación está situada en el mismo departamento del cual proviene".[2]

En una economía planificada, la acumulación ocurre principalmente en el departamento II y estas acumulaciones se localizan generalmente en el departamento I.

La igualdad de la demanda y la producción de medios de producción implica que:

$$c_I + p_{Ic} + c_{II} + p_{IIc} = c_I + v_I + p_{Ie} + p_{Ic} + p_{Iv}.$$

Simplificando, tenemos:

$$\boxed{c_{II} + p_{IIc} = v_I + p_{Ie} + p_{Iv}} \tag{2.20}$$

[2]LENIN, V.I. *Acerca de la llamada cuestión de los mercados*. Ed. Quinto sol. México, 1985.

El mismo resultado lo podemos obtener a partir de la condición de la demanda y del producto de bienes de producción.

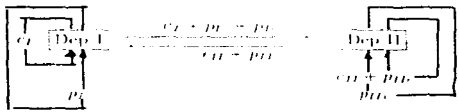
La ecuación (2.20) indica la relación de equilibrio insumo-producto de la reproducción ampliada. Cuando hay equilibrio de los factores, no importa saber dónde está situada la acumulación, pero sí importa saber de dónde ésta se obtiene:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Dep.I:} & c_I + p_{I_c} + \boxed{c_I + p_{I_v} + p_{I_k} = V_I} \\ \text{Dep.II} & \boxed{c_{II} + p_{II_c}} + c_{II} + p_{II_v} + p_{II_k} = V_{II} \end{array}\right\} \qquad (2.21)$$

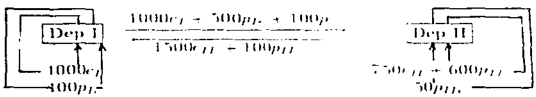
En el departamento I se retiene, para la reposición de los medios de producción desgastados y para la ampliación del *stock* de los medios de producción mismos, una parte de su producto, que es igual en valor a $c_I + p_{I_c}$. El resto, $c_I + p_{I_v} + p_{I_k}$, se transmite al departamento II a cambio de bienes de consumo.

A su vez, en el departamento II se retiene, para el consumo propio, una parte de su producto, con valor igual a $c_{II} + p_{II_v} + p_{II_k}$. El restante, $c_{II} + p_{II_c}$, se transmite al departamento I en calidad de intercambio, por medios de producción fabricados por aquel, necesarios para reponer los gastos y para ampliación de la producción. La ecuación (2.21) expresa el equilibrio entre los dos departamentos.

Esquemáticamente:



En términos numéricos, según el concepto de Marx, con condiciones iniciales:



$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{DepI:} & 4000\,c_I & + & 1000\,c_I & + & 1000\,p_I & = & 6000\,V_I \\ \text{DepII:} & 1500\,c_{II} & + & 750\,c_{II} & + & 750\,p_{II} & = & 3000\,V_{II} \\ \hline & 5500\,c & + & 1750\,c & + & 1750\,p & = & 9000\,V \end{array}$$

Utilizando la ecuación (2.26)

Departamento I:

$$4000\,c_I + 1000\,c_I + (400\,p_{I_c} + 100\,p_{I_v} + 500\,p_{I_k}) = 6000$$

Departamento II:

$$1500\,c_{II} + 750\,c_{II} + (100\,p_{II_c} + 50\,p_{II_v} + 600\,p_{II_k}) = 3000.$$

Entonces, por la ecuación (2.21):

$$\begin{cases} 1000c_I + 400p_{I_c} + \boxed{1000c_I + 500p_{I_c} + 100p_{I_c}} = 6000 \\ \boxed{1500c_{II} + 100p_{II_c}} + 750c_{II} + 600p_{II_c} + 50p_{II_c} = 3000 \end{cases}$$

y, por tanto:

$$1500c_{II} + 100p_{II_c} = 1000c_I + 500p_{I_c} + 100p_{I_c}.$$

Simplificando, tenemos ahora:

$$\begin{gathered} 4400c_I + (1000c_I + 100p_{I_c}) + 500p_{I_c} \\ 1600c_{II} + (750c_{II} + 50p_{II_c}) + 600p_{II} \end{gathered}$$

y entonces

$$\begin{array}{r} 4400c_I + 1100c_I + 500p_{I_c} = 6000 \\ 1600c_{II} + 800c_{II} + 600p_{II_c} = 3000 \\ \hline 6000c + 1900c + 1100p = 9000 \end{array}$$

A partir de ahora, se da un esquema para ver cuánto se acumula hasta el año 6.

Esquemáticamente, los supuestos utilizados en el ejemplo son:

1) Hay reproducción ampliada;

2) Se acumula el 50% del plusvalor;

3) El departamento II sólo se adapta a las condiciones impuestas;

4) Las actividades de los capitalistas del departamento II están completamente determinadas por el comportamiento del sector I;

5) La tasa de plusvalor es la misma en los dos sectores y equivalente al 100%.

Si el departamento I acumula 500, debe dedicar 400 a incrementar c y 100 para incrementar v, si se quisiera mantener constante la composición orgánica.

En el segundo período, para el sector I tenemos:

$$4400c + 1100v.$$

El departamento I le compra 100v suplementarios al departamento II, lo que implica que el departamento II le compra 100c suplementarios al departamento I, el que sólo podrá funcionar con 50v suplementarios, en el segundo período. Es así como tenemos, para el primer año:

*Dep.*I	4000 + 400	1000 + 100	1000 + 400 + 100	60
*Dep.*II	4000 + 400	1000 + 100	1000 + 400 + 100	6000
	6000	1900	1000	9000

y al año siguiente:

Dep.I	4400	......	1100	500 + 600	6600
Dep.II	1600		800	800	3200
	6000	.....	1900	1900	9800

$$\begin{array}{ll} \text{Dep I} & 4400c + 1100v + 6600p = 6600 \\ \text{Dep II} & 1600c + 800v + 3200p = 3200 \\ \hline & 6000c + 1900v + 1900p = 9800 \end{array}$$

ESQUEMA PRESENTE PARA EL AÑO 2
AÑO 2

$$\begin{array}{ll} \text{Dep I} & 4840c + 1210v + 550p = 6600 \\ \text{Dep II} & 1760c + 880v + 560p = 3200 \\ \hline & 6600c + 2090v + 1110p = 9800 \end{array}$$

ESQUEMA INICIAL PARA EL AÑO 3
AÑO 3

$$\begin{array}{ll} \text{Dep I} & 4840c + 1210v + 1210p = 7260 \\ \text{Dep II} & 1760c + 880v + 880p = 3520 \\ \hline & 6600c + 2090v + 2096p = 10780 \end{array}$$

ESQUEMA PRESENTE PARA EL AÑO 3

$$\begin{array}{ll} \text{Dep I} & 5324c + 1331v + 605p = 7260 \\ \text{Dep II} & 1930c + 968v + 616p = 3520 \\ \hline & 7260c + 2299v + 1221p = 10780 \end{array}$$

ESQUEMA INICIAL PARA EL AÑO 4

$$\begin{array}{ll} \text{Dep I} & 5324c + 1331v + 1331p = 7986 \\ \text{Dep II} & 1930c + 968v + 968p = 3872 \\ \hline & 7260c + 2299v + 2299p = 1158 \end{array}$$

ESQUEMA PRESENTE PARA EL AÑO 4

$$\begin{array}{ll} \text{Dep I} & 5856c + 1464v + 666p = 7986 \\ \text{Dep II} & 2129c + 1065v + 667p = 3872 \\ \hline & 7985v + 2529v + 1344p = 11858 \end{array}$$

ESQUEMA INICIAL PARA EL AÑO 5

$$\begin{array}{ll} \text{Dep I} & 5856c + 1464v + 1464p = 8784 \\ \text{Dep II} & 2129c + 1065v + 1065p = 4254 \\ \hline & 7.985c + 2.529v + 2.529p = 13.043 \end{array}$$

ESQUEMA PRESENTE PARA EL AÑO 5

$$
\begin{array}{ll}
\text{Dep I} & 6442c + 1610v + \ \ 732p = \ \ 8784 \\
\text{Dep II} & \underline{2342c + 1172v + \ \ 745p = \ \ 4259} \\
 & 8784c + 2782v + 1477p = 13043
\end{array} .
$$

ESQUEMA INICIAL PARA EL AÑO 6

$$
\begin{array}{ll}
\text{Dep I} & 6442c + 1610v + 1610p = \ \ 9662 \\
\text{Dep II} & \underline{2342c + 1172v + 1172p = \ \ 4682} \\
 & 2342c + 1172v + 1172p = \ \ 4682
\end{array}
$$

LA REPRODUCCIÓN AMPLIADA EXPRESADA CON ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Por último, podremos resolver el problema acerca de qué sucede con la reproducción ampliada, cuando se considera el tiempo. Al respecto, Morishima afirma que en el modelo de Marx hay una tendencia al crecimiento equilibrado.

El siguiente modelo no está directamente relacionado con el concepto propuesto por Marx. Si a_I y a_{II} representan las tasas de acumulación de plusvalor en los departamentos I y II, respectivamente, a_I se mantiene constante mientras que a_{II} varía, adaptándose a las exigencias del equilibrio. El plusvalor acumulado se divide en:

$$\frac{c_I}{c_I + v_I} a_I s_I y_I(0) \text{ y } \frac{v_I}{c_I + v_I} a_I s_I y_I(0).$$

De la suma del primero de estos componentes y del capital constante del departamento I, en el año 0, $c_I y_I(0)$ resulta ser el capital constante de dicho departamento, en el año 1. Si la inversión neta de los capitalistas del departamento II fuera nula, el exceso de oferta de bienes de capital se elevaría a:

$$y_I(0) - \left[c_I + \frac{c_I}{c_I + v_I} a_I s_I\right] y_I(0) - c_{II} y_{II}(0).$$

La tasa adaptativa de acumulación para el año 1, a_{II}, se determina a partir de las ecuaciones:

$$a_{II}(1)\left[\frac{c_I}{c_I + v_I} s_{II}\right] y_{II}(0) =$$

$$= y_I(0) - \left[c_I + \frac{c_I}{c_I + v_I} a_I s_I\right] y_I(0) - c_{II} y_{II}(0) \qquad (2.22)$$

A su vez, la tasa de crecimiento del departamento I, entre los años 0 y 1, viene dada por:

$$g_I(0) = \frac{a_I s_I}{c_I + v_I}. \qquad (2.23)$$

siendo la correspondiente al departamento II igual a:

$$g_I(0) = \frac{a_I(1)s_I}{c_I + v_I} = \frac{1}{c_{II}}\left[1 - c_I - \frac{c_I}{c_I + v_I}a_I s_I\right]\frac{y_I(0)}{y_{II}(0)} - 1 \qquad (2.24)$$

en virtud de la ecuación (2.22).

Del mismo modo, las tasas de crecimiento entre el año 1 y 2, serán:

$$g_I(1) = \frac{a_I s_I}{c_I + v_I} \qquad (2.25)$$

para el departamento I y

$$g_{II}(1) = \frac{a_I(2)s_I}{c_I + v_I} = \frac{1}{c_{II}}\left[1 - c_I - \frac{c_I}{c_I + v_I}a_I s_I\right]\frac{y_I(0)}{y_{II}(0)} - 1 \qquad (2.26)$$

para el departamento II.

Por otro lado, tenemos

$$y_I(0) = [1 + g_{II}(0)]\, y_{II}(0),$$
$$y_{II}(1) = [1 + g_{II}(0)]\, y_{II}(0),$$

y

$$1 + g_{II}(0) = \frac{1}{c_{II}}\left[1 - c_I - \frac{c_I}{c_I + v_I}a_I s_I\right],$$

en virtud de la ecuación (2.24).

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (2.26), es fácil comprobar que

$$g_{II}(0) = g_I(0).$$

Ahora bien, dado que

$$g_I(0) = g_I(1),$$

por ser a_I constante, tenemos que

$$g_{II}(1) = g_I(1),$$

lo que quiere decir que las producciones de los departamentos I y II crecen equilibradamente, a partir del año 1 y en todos los sucesivos.

Morishima propone sustituir las hipótesis de Marx por otras. Suponemos que éstas son:

i) los capitalistas de los departamentos I y II tienen la misma propensión al ahorro a; y

ii) están conjuntamente interesados en invertir en cualquiera de los dos departamentos, ya que en ambos rige la misma cuota de ganancia de equilibrio. Del plusvalor total, dedican a acumulación:

$$a\left[s_I y_I(t) + s_{II} y_{II}(t)\right],$$

en donde una parte, equivalente a

$$c_I \Delta y_I(t) + c_{II} \Delta y_{II}(t)\,,$$

es invertida por los capitalistas de ambos departamentos en bienes de capital, gastándose el resto en capital variable. Dado que partimos del supuesto de que la propensión al ahorro de los obreros es cero, la inversión en capital variable (esto es, el total de los salarios reales que corresponden al aumento de empleo) deberá ser igual al consumo de los bienes-salario realizados por los obreros recién incorporados a la producción. Las ecuaciones de demanda y oferta de bienes, de ambos departamentos, pueden escribirse del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} y_I(t) \\ y_{II}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_I & c_{II} \\ v_I & v_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_I(t+1) \\ y_{II}(t+1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ bs_I & bs_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_I(t) \\ y_{II}(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_I(t) \\ y_{II}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ bs_I & bs_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_I(t) \\ y_{II}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_I & c_{II} \\ v_I & v_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_I(t+1) \\ y_{II}(t+1) \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ bs_I & bs_{II} \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} y_I(t) \\ y_{II}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_I & c_{II} \\ v_I & v_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_I(t+1) \\ y_{II}(t+1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -bs_I & 1-bs_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_I(t) \\ y_{II}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_I & c_{II} \\ v_I & v_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_I(t+1) \\ y_{II}(t+1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_I(t) \\ y_{II}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -bs_I & 1-bs_{II} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c_I & c_{II} \\ v_I & v_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_I(t+1) \\ y_{II}(t+1) \end{pmatrix},$$

ya que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -bs_I & 1-bs_{II} \end{pmatrix} = 1 - bs_{II}$$

$$\text{y} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -bs_I & 1-bs_{II} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1-bs_{II}} \begin{pmatrix} 1-bs_{II} & 0 \\ bs_I & 1 \end{pmatrix}$$

y entonces

$$= \begin{pmatrix} \frac{1-bs_{II}}{1-bs_{II}} & 0 \\ \frac{-bs_I}{1-bs_{II}} & \frac{1}{1-bs_{II}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-bs_I}{1-bs_{II}} & \frac{1}{1-bs_{II}} \end{pmatrix};$$

por tanto,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-bs_I}{1-bs_{II}} & \frac{1}{1-bs_{II}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_I & c_{II} \\ v_I & v_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_I(t+1) \\ y_{II}(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_I(t) \\ y_{II}(t) \end{pmatrix}.$$

Multiplicando matrices, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} c_I & c_{II} \\ \frac{c_I bs_I + v_I}{1-bs_{II}} & \frac{c_{II} bs_I + v_{II}}{1-bs_{II}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_I(t+1) \\ y_{II}(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_I(t) \\ y_{II}(t) \end{pmatrix}.$$

Las entradas de esta matriz las podemos sustituir por:

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_I(t+1) \\ y_{II}(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_I(t) \\ y_{II}(t) \end{pmatrix}.$$

para trabajar con un sistema de ecuaciones simplificado:

$$\mathbf{M}\mathbf{Y}(t+1) = \mathbf{Y}(t).$$

$$\mathbf{Y}(t+1) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Y}(t)$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{M}} \begin{pmatrix} \frac{c_{II}bs_I + v_{II}}{1-bs_{II}} & -c_{II} \\ -\frac{c_I bs_I + v_I}{1-bs_{II}} & c_I \end{pmatrix},$$

y

$$\det \mathbf{M} = \frac{c_I v_{II} - c_{II} v_I}{1 - bs_{II}}.$$

Entonces:

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{c_I v_{II} - c_{II} v_I}{1 - bs_{II}} \begin{pmatrix} \frac{c_{II}bs_I + v_{II}}{1-bs_{II}} & -c_{II} \\ -\frac{c_I bs_I + v_I}{1-bs_{II}} & c_I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{c_{II}bs_I + v_{II}}{c_I v_{II} - c_{II} v_I} & \frac{-c_{II}(1-bs_{II})}{c_I v_{II} - c_{II} v_I} \\ -\frac{c_I bs_I + v_I}{c_I v_{II} - c_{II} v_I} & \frac{c_I(1-bs_{II})}{c_I v_{II} - c_{II} v_I} \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \mathbf{Y}(t+1) = \begin{pmatrix} \frac{c_{II}bs_I + v_{II}}{c_I v_{II} - c_{II} v_I} & \frac{-c_{II}(1-bs_{II})}{c_I v_{II} - c_{II} v_I} \\ -\frac{c_I bs_I + v_I}{c_I v_{II} - c_{II} v_I} & \frac{c_I(1-bs_{II})}{c_I v_{II} - c_{II} v_I} \end{pmatrix} \mathbf{Y}(t)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{c_{II}bs_I + v_{II}}{c_I v_{II} - c_{II} v_I} & \frac{-c_{II}(1-bs_{II})}{c_I v_{II} - c_{II} v_I} \\ -\frac{c_I bs_I + v_I}{c_I v_{II} - c_{II} v_I} & \frac{c_I(1-bs_{II})}{c_I v_{II} - c_{II} v_I} \end{pmatrix} = \mathbf{A}.$$

Si las raíces características de $\mathbf{A}$ son distintas, $\lambda_I \neq \lambda_{II}$, entonces las soluciones tienen la forma

$$\mathbf{Y}(t) = \lambda_I \mathbf{c}_1 + \lambda_{II}\mathbf{c}_2$$

con

$$\mathbf{c}_I = \frac{\mathbf{A} - \lambda_{II}\mathbf{I}}{\lambda_I - \lambda_{II}}\mathbf{Y}(0), \; \mathbf{c}_{II} = \frac{\mathbf{A} - \lambda_I\mathbf{I}}{\lambda_{II} - \lambda_I}\mathbf{Y}(0),$$

donde $\mathbf{c}_I$ y $\mathbf{c}_{II}$ son los vectores característicos asociados a las raíces λ_I, λ_{II}.

La solución general es:

$$\mathbf{Y}(t) = \lambda_I^t \left[\frac{\mathbf{A} - \lambda_{II}\mathbf{I}}{\lambda_I - \lambda_{II}}\mathbf{Y}(0)\right] + \lambda_{II}^t \left[\frac{\mathbf{A} - \lambda_I\mathbf{I}}{\lambda_{II} - \lambda_I}\mathbf{Y}(0)\right].$$

Estas ecuaciones se pueden escribir como las llamadas **ecuaciones fundamentales de la teoría de la producción**:

$$\begin{cases} y_I(t) = \eta_1 m_{11}(1+g_1)^t + \eta_2 m_{21}(1+g_2)^T \\ y_{II}(t) = \eta_1 m_{12}(1+g_1)^t + \eta_2 m_{22}(1+g_2)^T \end{cases}$$

donde η_1 y η_2 son constantes, determinadas por las producciones iniciales $y_I(0)$ e $y_{II}(0)$; $1+g_1$ y $1+g_2$.

$$y_I(t) = \eta_1 m_{11}(1+g_1)^t + \eta_2 m_{22}(1+g_2)^T.$$

Carlos Marx, dirigiéndose a la Sociedad de Instrucción de Obreros Alemanes de Londres, en 1850.

El rápido crecimiento de la industria inglesa del carbón en el

siglo XIX se debió a la máquina de vapor. Este grabado de la industria carbonera de Helton muestra la potencia de vapor haciendo funcionar las bombas dentro de una mina y una locomotora Stephenson al frente.

199

Engels an Marx
in London

Manchester, 24. Juni 1863

Lieber Mohr,

Ich weiß gar nicht, was der kleine busybody[1] will. Warum schreibt er mir nicht, daß er *jetzt* die Sache arrangiert haben will? *Mir* schrieb er, daß, *wenn ich ihm* nicht *antworte*, er auf mich ziehen würde, wie abgemacht. Da bei mir abgemachte Sachen abgemacht sind, so hielt ich es durchaus nicht für nötig, 14 Tage vor der Zeit nochmals eine schriftliche Versicherung abzugeben, daß ich das tun würde, wozu ich mich schon früher mündlich und schriftlich verpflichtet. Auf *Deinen* Brief hin, wo er mit ganz andern Motiven herauskommt, hab' ich ihm nun das Nötige geschrieben. Mein Akzept wird für £ 250 sein. Sieh, daß er Dir die *ganze Summe* schickt, da er sich verpflichtet hat, Kosten und Zinsen selbst zu tragen.

Kinglake ausgelesen. Etwas Oberflächlicheres (bei teilweise sehr gutem Material, aber lückenhaftem), Dummeres, Unwissenderes als die Alma-schlacht noch nie dagewesen. Nur la part des français[2] gut und richtig dargestellt, wenigstens im Ganzen. Sonst manches für den militärischen Leser höchst komisch.[375]

In Polen geht's faul. Der große Effekt der polnischen Regierung, der Massenaufstand im Juni, ist offenbar am Waffenmangel gescheitert, und jetzt ist, wenn keine äußern Verwicklungen eintreten, ein allmähliches Abnehmen nicht zu vermeiden.[376]

Deine Politik dem Itzig gegenüber ist ganz recht. Was kann all die Gemütlichkeit helfen gegenüber einem Kerl, der im entscheidenden Moment doch entweder durch die Verhältnisse gezwungen wird, mit uns zu gehn, oder aber der offen unser Feind wird. Sich noch von dem Narren jahrelang intellektuell exploitieren lassen und zum Dank dafür verpflichtet zu sein, für alle seine Dummheiten einzustehn, das ist eppes zu arg.

Ich werde abgerufen.

Dein
F. E.

[1] Wichtigtuer (Dronke) – [2] der Anteil der Franzosen

200

Marx an Engels
in Manchester

London, 6. Juli 1863

Lieber Engels,

D'abord[1] meinen besten Dank für die £ 250. Dronke hatte mir vor ...ut[2] vier Monaten 50 £ geschickt und heute 200.

Jennychen ist leider immer noch nicht so, wie sie sein sollte. Der Husten noch nicht ganz fort, und das Kind ist zu „leicht" geworden. Ich schicke ins Bad mit den andern, sobald ihr Schulturnus am Ende. Obgleich ich Vertrauen in Allen habe, so wäre es mir sehr lieb, wenn *Gumpert*, der ...h wahrscheinlich nach dem Kontinent auf Ferien reist, hier vorspräche, vom Tatbestand überzeugte und mir seine Ansicht mitteilte. Ich muß ...ffen sagen, daß ich in großer Angst wegen dem Kind bin. Das Ab...nen von Fleisch in diesem Alter scheint mir sehr bedenklich.

...lmerston plays his old tricks[3] in der polnischen Affäre. Die den Russen ...tellten Noten sind originaliter[4] von Petersburg nach London geschickt ...en! Den *Hennessy* hat Pam dem Urquhart *abgekauft*, indem er beseg...nischem Lumpen eine einträgliche Stelle (Sinekure) an einer fran...ch-englischen Eisenbahn in Frankreich verschafft hat. Die *Verkäuf*...t der hiesigen politicians[5] drängt in der Tat alles in den Hintergrund, ...er Art auf dem Kontinent vorkömmt. Man hat weder bei uns noch in ...reich einen Begriff von dieser absoluten Schamlosigkeit. Was den „*Zamoyski*" angeht, so hatte ich den Urquhartiten wiederholt ge...daß der Kerl 1830/31 die Polen verriet, indem er ein unversehrtes ...statt *gegen* die Russen, *über* die östreichische Grenze führte. Endlich ...n dieser Bursche wegen seiner fortwährenden persönlichen Mogelei ...m auch verdächtig geworden.[377]

...e Expedition der Southerners gegen den Norden[378] ist nach meiner ...cht Lee aufgezwungen worden durch das Geschrei der Richmond ... und ihrer supporters[8]. Ich betrachte es als einen coup de désespoir[9].

...em – [2] ungefähr – [3] gebraucht seine alten Tricks – [4] ursprünglich – [5] Politiker – ...[7] Richmonder Blätter – [8] Hintermänner – [9] Verzweiflungsstreich

Übrigens wird dieser Krieg sich in die Länge schleppen, und das ist im *europäischen* Interesse sehr wünschenswert.

Itzig hat mir eine neue Broschüre[379] geschickt, seine Rede in Frankfurt a. M. Da ich jetzt 10 Stunden des Tags ex officio[10] Ökonomie treibe, ist nicht zu verlangen, daß ich meine Nebenstunden mit dem Lesen dieser Schülerpensa töten soll. Also einstweilen ad acta gelegt. In der freien Zeit treibe ich Differential- und Integralkalkul. Apropos! Ich habe Überfluß an Schriften dadrüber und will Dir eine zuschicken, wenn Du das Fach in Angriff nehmen willst. Ich halte es für Deine Militärstudien fast für nötig. Dabei ist es ein viel leichterer Teil der Mathematik (was das bloß Technische angeht) als z. B. die höhern Teile der Algebra. Außer Kenntnis der gewöhnlichen algebraischen und trigonometrischen Geschichte nichts an Vorstudium nötig, außer allgemeine Bekanntschaft mit den Kegelschnitten.

Über die beiliegende Broschüre des „Duc du Roussillon"[11], dessen Du Dich vielleicht noch unter dem Namen „Pi" erinnerst, schreibe mir ein etwas motiviertes Urteil, da dieser Kerl jeden Tag mich schriftlich auffordert, ihm mein „Urteil" mitzuteilen.

Das einliegende „*Tableau Économique*"[380], das ich an die Stelle des Tab[leau] des Quesnay[288] setze, sich Dir, wenn es Dir in dieser Hitze möglich, etwas sorglich an und teile mir Deine etwaigen Bedenken mit. Es umfaßt den gesamten Reproduktionsprozeß.

Du weißt, daß *A. Smith* den „*natural*" oder „*necessary price*"[12] zusammensetzt aus Salär, Profit (Zins), Rente – also ganz in *Revenue* auflöst. Dieser Unsinn ist auf Ricardo übergegangen, obgleich er Rente, als bloß akzidentell[13], aus dem Katalog ausschließt. Fast *alle* Ökonomen haben dies von Smith akzeptiert, und die es bekämpfen, fallen in andern Blödsinn.

Smith selbst fühlt den Unsinn, das *Gesamtprodukt* für die Gesellschaft in *bloße Revenue* (die jährlich verzehrt werden kann) aufzulösen, während er für *jeden einzelnen* Zweig der Produktion den Preis in *Kapital* (Rohstoff, Maschinerie, etc.) und *Revenue* (Arbeitslohn, Profit, Rente) auflöst. Danach müßte die Gesellschaft jedes Jahr de novo[14] *ohne Kapital* anfangen.

Was nun meine Tabelle angeht, die als *Zusammenfassung* in einem der letzten Kapitel meiner Schrift figuriert, so ist dabei folgendes zum Verständnis nötig:

1. Die Zahlen gleichgültig, bedeuten Millionen.

2. Unter *Lebensmittel* ist hier *alles* zu verstehn, was in den *Konsumtions*-

[10] von Amts wegen – [11] „Herzogs du Roussillon" – [12] „natürlichen" oder „notwendigen Preis"
[13] zufällig – [14] von neuem

fonds jährlich eingeht (oder *ohne Akkumulation*, die von der Tabelle *ausgeschlossen* ist, in den Konsumtionsfonds eingehn könnte).

In der Klasse I (Lebensmittel) besteht das *ganze Produkt* (700) aus *Lebensmitteln*, die also der Natur der Sache nach *nicht* in das *konstante Kapital* (Rohmaterial und Maschinerie, Baulichkeiten etc.) eingehn. Ebenso besteht in der Klasse II das *ganze Produkt* aus Waren, die *konstantes Kapital* bilden, i. e. als Rohmaterial und Maschinerie wieder in den Reproduktionsprozeß eingehn.

3. Wo die Linien *aufsteigen* ist *punktierte*, wo sie *niedersteigen*, *grade* Linie.

4. *Konstantes Kapital* ist der Teil des Kapitals, der aus Rohstoff und Maschinerie besteht. *Variables Kapital*, der sich gegen Arbeit austauscht.

5. In der Agrikultur z. B. etc. bildet ein Teil desselben Produkts (z. B. Weizen) Lebensmittel, während ein andrer Teil (Weizen z. B.) wieder in ...er Naturalform (als *Samen* z. B.) als Rohstoff in die Reproduktion ein... Dies ändert aber nichts an der Sache. Da solche Produktionszweige ...einen Eigenschaft nach in Klasse II, der andern nach in Klasse I figu...

... Der Witz der ganzen Geschichte also der:

Kategorie I. Lebensmittel. Arbeitsmaterial und Maschinerie (d. h. der ...*derselben*, der als *Dechet*[15] in das jährliche Produkt eingeht; der nicht ...mierte Teil der Maschinerie etc. figuriert überhaupt *nicht* in der ...lle) = 400 £ z. B. Das gegen Arbeit ausgetauschte variable Kapital ... reproduziert sich als 300, indem 100 den Arbeitslohn im Produkt ... 200 den Mehrwert (*unbezahlte Surplusarbeit*) darstellt. Das Produkt ... wovon 400 den Wert des konstanten Kapitals vorstellt, das aber ...n das Produkt übergegangen ist, also ersetzt werden muß.

...st bei diesem Verhältnis von variablem Kapital und Mehrwert an...en, daß der Arbeiter $1/3$ des Arbeitstags für sich, $2/3$ für his natural ... arbeitet.

(variables Kapital) wird also, wie durch punktierte Linie angedeutet, als Arbeitslohn ausgezahlt; der Arbeiter kauft mit diesen 100 (an... durch die niedersteigende Linie) *Produkt* dieser Klasse, i. e. Lebens... für 100. Das Geld fließt so an die Kapitalistenklasse I zurück.

Mehrwert von 200 in seiner allgemeinen Form = *Profit*, der sich ...tet in *industriellen Profit* (*kommerziellen* eingeschlossen), ferner in ...n der industrielle Kapitalist in Geld zahlt, und in Rente, die er ...

... – [16] seine natürlichen Vorgesetzten ebenfalls in Geld zahlt. Dies für industriellen Profit, Zins, Rente gezahlte Geld strömt zurück (durch die niedersteigenden Linien angedeutet), indem dafür Produkt der Klasse I gekauft wird. Das sämtliche innerhalb Klasse I von dem industriellen Kapitalisten ausgelegte Geld strömt also zu ihm zurück, während 300 von dem Produkt 700 aufgezehrt wird von den Arbeitern, entrepreneurs, monied men und landlords[17]. Bleibt in der Klasse I Überschuß an Produkt (in Lebensmitteln) von 400 und Defizit an konstantem Kapital von 400.

Kategorie II. Maschinerie und Rohstoff.

Da das *ganze Produkt dieser Kategorie*, nicht nur der Teil des Produkts, der das konstante Kapital ersetzt, sondern auch der, der Äquivalent des Arbeitslohns und den Mehrwert vorstellt, besteht aus *Rohstoffen* und *Maschinerie*, kann die Revenue dieser Kategorie nicht in ihrem eignen Produkt, sondern nur im Produkt der Kategorie I realisiert werden. Akkumulation beiseite gelassen, wie es hier geschieht, kann aber Kategorie I von Kategorie II nur so viel kaufen, als sie zum Ersatz ihres konstanten Kapitals braucht, während Kategorie II nur den Teil ihres Produkts, der Arbeitslohn und Mehrwert *(Revenue)* vorstellt, in dem Produkt der Kategorie I auslegen kann. Die Arbeiter der Kategorie II legen also ihr Geld, = 133 1/3, aus im Produkt der Kategorie II. Dasselbe findet statt mit dem Mehrwert der Kategorie II, der sich wie sub[18] I in industriellen Profit, Zins und Rente spaltet. Es fließen also 400 in Geld dem industriellen Kapitalisten der Kategorie I von der Kategorie II zu; die dafür an diese ihren Rest an Produkt = 400 abläßt.

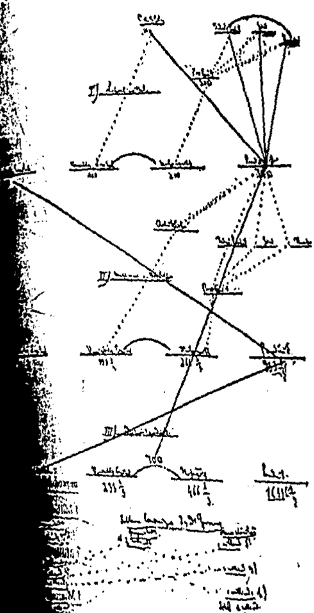
Mit diesen 400 Geld kauft Klasse I das zum Ersatz ihres konstanten Kapitals = 400 Nötige von Kategorie II, der also in dieser Art das in Arbeitslohn und Konsum (der industriellen Kapitalisten selbst, der monied men und der landlords) verausgabte Geld wieder zuströmt. Von ihrem Gesamtprodukt bleibt der Kategorie II daher 533 1/3, womit sie ihr eignes aufgearbeitetes konstantes Kapital ersetzt.

Die Bewegung teils innerhalb der Kategorie I, teils zwischen Kategorie I und II, zeigt zugleich, wie den respektiven industriellen Kapitalisten beider Kategorien das Geld zurückströmt, womit sie von neuem Arbeitslohn, Zins und Grundrente zahlen.

Kategorie III stellt die Gesamtreproduktion dar.

Das Gesamtprodukt von Kategorie II erscheint hier als konstantes Kapital der ganzen Gesellschaft und das Gesamtprodukt der Kategorie I der Teil des Produkts, der das variable Kapital (den Fonds des Arb

[17] Unternehmern, Geldleuten und Grundherren – [18] unter



Anlage zu Marx' Brief an Engels vom 6. Juli 1863

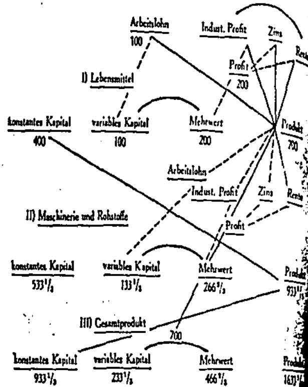
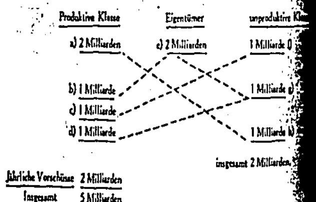


Tableau Économique des Dr. Quesnay



lohns) und die Revenuen der Klassen, die sich in den Mehrwert teilen, esetzt.

Ich habe Quesnays Tableau drunter gesetzt, das ich im nächsten Brief[1381] erklären werde in some words[19].

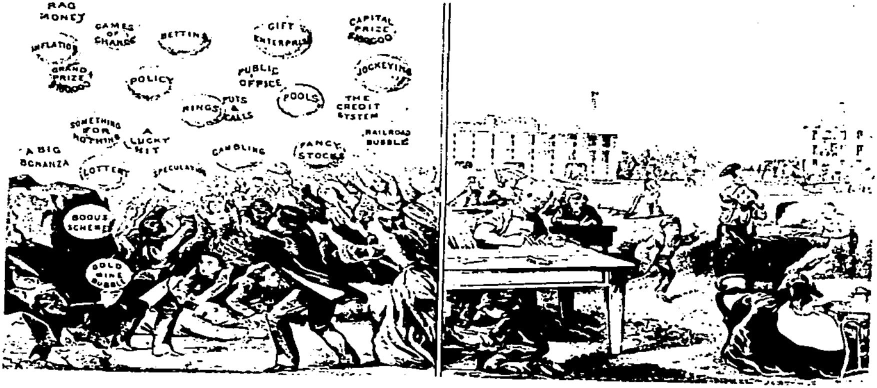
Salut.

Dein

K.M.

Apropos. Edgar Bauer hat Posten erhalten im – preußischen Preß-partement.

Worten



''La manera de hacerse pobre (izquierda)· la manera de hacerse rico'' (derecha). Especulación en Norteamérica, 1875.

El obrero es libre sólo en tanto obedezca a las armas de la policía, quien protege los intereses del patrón: Kupka —''La Liber[illegible]'', c. 1905.

Capítulo 3 REPRODUCCIÓN DEL CAPITAL

EL ENFOQUE DEL TOMO II. de *El Capital*

Este capítulo, sobre la reproducción del capital,[1] tiene por objeto hacernos una idea de cómo fueron usadas las figuras que aparecen en el tomo II de *El Capital*.

Por esta razón, el desarrollo que aquí haremos considera básicamente cómo el proceso de circulación del capital social conjunto mediatiza el proceso de reproducción social y, con ello, la reproducción del carácter capitalista del proceso de producción, en su conjunto.

La figura de circulación, a considerar, es el ciclo del capital-mercancías:

$$M' - D' \cdot \begin{cases} D - M \left\langle \begin{matrix} FT \\ MP \end{matrix} \right. \cdots \; P \; \cdots \; M' \\ \\ d - m \end{cases}$$

Los capitales individuales, partes integrantes del capital social, aparecen en el producto-mercancías anual como capital-mercancías. El movimiento del producto-mercancías anual comprende el movimiento individual de los capitales, incorporados en su producto-mercancías como eslabones del proceso de producción social. El producto-mercancías conjunto contiene tanto a los productos que reponen capital (y medios de producción: la reproducción social de las condiciones de la producción) como a los productos que constituyen el fondo de consumo social, los cuales, consumidos por la clase trabajadora y por la clase capitalista, crean las condiciones tanto de su reproducción como de su reproducción como clases.

La producción capitalista se reparte en dos departamentos:

I. Producción de medios de producción.

Estos productos están destinados a ser consumidos en la producción de otros productos. Su circulación mediatiza su reintegración al proceso productivo social y forma parte de éste, en cuanto distribución social. Son producto en cuanto mercancías, capital bajo la figura de mercancías, capital-mercancías que realiza su metamorfosis circulando como mercancía. Su circulación aparece como interrupción y mediatización del proceso de producción del capital. Su figura de circulación es:

$$M'_I - D'_I \cdot \begin{cases} D \;-\; M \;\cdots\; P \;\cdots\; M' \\ d \;-\; m \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} D(MP) - M(MP) \\ \\ D(FT) - M(FT) \end{Bmatrix} \cdots P \cdots M' - D'.$$

[1] Este capítulo se formó íntegramente en base a las notas tomadas en los Seminarios de Filosofía de la Ciencia I a IV, impartidos por Oscar Falcón en 1983

Tomemos como ejemplo 100 toneladas de carbón, que son capital-mercancías M' de las minas. Su integración al capital productivo, como medios de producción $M(MP)$ de la industria siderúrgica, comprende su metamorfosis

$$M' - D' \cdot \begin{cases} D - M \\ d - m \end{cases} .$$

como capital-mercancías en el ciclo del capital de las minas de carbón. Metamorfosis en mercancía, en la cual el valor capital, incorporado en ella, se realiza como valor capital valorizado. Trabajo objetivado en la producción capitalista $c + v + p$: trabajo objetivado c, consumido en su producción: y trabajo vivo: trabajo y más trabajo, $v + p$, valor capital constante en la figura $M(MP)$, con la determinación de absorber trabajo y más trabajo, en el proceso de producción como parte del capital productivo P. La mercancía forma valor, en su doble movimiento

$$\begin{array}{c} M'(c+v+p) - D'(c+v+p) \\ D(C) - M(C) \end{array}$$

y pone, por la identidad consigo misma, la igualdad

$$M'(c+v+p) = M(C).$$

la que redobla la igualdad

$$D(C) = D'(c+v+p)$$

en su forma dinero, puesta por la identidad consigo misma de la mercancía dinero, que mediatiza su circulación.

El movimiento

$$M'(c+v+p) - D'(c+v+p)$$

de las 100 toneladas de carbón, abre su ciclo como capital-mercancías de las minas de carbón. El carbón se ha transformado en 10 onzas de oro. Estas 10 onzas de oro pueden ser guardadas en los cofres de la empresa minera por un período más o menos largo y reunidas con más carbón transformado en oro, para pagar la reposición del capital fijo de la mina. O pueden ser pagadas en salarios o gastados para beneficio de los capitalistas de la mina. Las 10 onzas de oro son la forma dorada del valor capital $c + v + p$. Son $D'(c+v+p)$ en cuanto constituyen la forma dinero de las 100 toneladas de carbón y forman parte del retorno del producto anual, en su forma de dinero. También son parte integrante de 100.000 toneladas de carbón, milésima parte del valor capital $c + v + p$, incorporado en el producto de la misma. Éste, en su movimiento anual,

$$M' - D' \cdot \begin{cases} D - M \left\langle \begin{array}{l} FT \\ \cdots P \cdots M'. \\ MP \end{array} \right. \\ \\ d - m \end{cases}$$

comprende tanto la reposición de los MP y de la FT consumidos en su producción, como el consumo individual de los capitalistas, el gasto $d - m$. Si tiene lugar reproducción simple del capital, entonces el movimiento

$$M'(c+v+p) - D'(c+v+p) \cdot \left\{ \begin{array}{l} D(C) - M(C) \\ D(V) - M(V) \\ d(b) - m(b) \end{array} \right\} \cdots P \cdots M'$$

confirma la suma $c + v + p$; la que no podría repartirse más que en su forma dinero

$$D'(c+v+p) \left\{ \begin{array}{l} D'(c).D(c) \\ D'(v).D(v) \\ D'(p).d(p) \end{array} \right.$$

y, con ello, en el carbón mismo:

$$M'(c+v+p) \left\{ \begin{array}{l} M'(c) - D'(c) \\ M'(v) - D'(v) \\ M'(p) - D'(p) \end{array} \right. .$$

Una locomotora, sin embargo, no podría repartirse en $c + v + p$ más que en su forma dinero $D'(c + v + p)$.

Puede también tener lugar reproducción ampliada y las minas pueden ser cerradas. De todos modos, M' es $M'(c + v + p)$, valor capital valorizado, pues M'-D' abre el ciclo del capital-mercancías y cierra el ciclo del capital-dinero de las minas de carbón:

$$D - M \left\langle \begin{array}{l} FT \\ \\ MP \end{array} \right. \cdots P \cdots M' - D' .$$

La relación

$$D'(c+v+p) = D(c) - D(v) + d(g),$$

es decir,

$$\begin{array}{c} D'(c) = D(c) \\ D'(v) = D(v) \\ D'(p) = d(g), \end{array}$$

expone, en forma de dinero, el proceso de creación del valor y valorización del capital

$$c + v + p$$

en la rotación del capital, en el reflujo de su circulación como D'.

(El análisis de un capital individual tiene que hacerse después de la reproducción del capital social (nota y desarrollo posterior de O.F.).

Sea $D(C)$ la forma dinero del capital C. Entonces

$D(c) + D(v) = D(k)$, costo de producción; y

$d(g) = d' \cdot D(C)$, ganancia.
Resulta que

$$D'(p) = d(g) = d'D(C).$$

Es decir, tenemos dos mercancías: 100 toneladas de carbón y 10 onzas de oro. En la identidad de cada una consigo misma, incorporan el trabajo objetivado. M' y D' pueden ser iguales y pueden ser distintos.

El carbón se transforma en oro: 100 toneladas de carbón son 10 onzas de oro: ni una onza más, ni una onza menos.

A su vez, $c + v + p$ es el capital C, $M(c)$, de altos hornos. Su forma dinero es 10 onzas de oro, el capital dinero $D(c)$ en $D - M$. *¿Cuánto valen las 10 onzas de oro?* Valen 100 toneladas de carbón. *¿Cuánto valen las 100 toneladas de carbón?* Valen 10 onzas de oro.

Si D' es $D' = D(k) + d'D(C)$, 10 onzas de oro son el precio de producción de 100 toneladas de carbón. *¡Voilà tout!* 10 onzas de oro son $D'(c + v + p)$, trabajo objetivado en oro en las minas de oro, no en las minas de carbón. En las minas de carbón son $D'(c + v + p)$, trabajo objetivado en el carbón, en su forma dorada.

Consideremos ahora el producto-mercancías del departamento I, en su conjunto. El capital- mercancías es,

$$M'_I = M'_I(c_I + v_I + p_I),$$

que incorpora el trabajo objetivado C_I, consumido en su producción, en la jornada anual de trabajo objetivada en $M'_I, v_I + p_I$.

Aquí la paradoja de Adam Smith (Nota de O.F.).

M_I representa los medios de producción que aparecen como producto-mercancías durante el año. Medios de producción destinados a reponer los medios de producción consumidos en su propia producción. Éste es trabajo objetivado, presupuesto en su producción: capital constante C_I, frente al trabajo vivo. M'_I es trabajo objetivado en producto-mercancías. Contiene el trabajo objetivado C_I, que reproduce al capital constante consumido en su producción de los medios de producción, destinado a reponer a los consumidos en su propia producción.

Sea $M'_I(C_I)$ esta parte del producto-mercancías:

$$M'_I(c_I + v_I + p_I) = M'_I(C_I) + M'_I(v_I + p_I).$$

Lo característico de esta fórmula es la reproducción del capital constante C_I. Medios de producción de medios de producción. $M'_I(C_I)$ representa la *reposición* del capital constante consumido en la producción de M'_I: esto es, su reposición como trabajo objetivado presupuesto, *in natura*. El trabajo social concreto, aplicado a la producción de medios de producción, comprende la reproducción de los MP consumidos en el mismo proceso de trabajo; es decir, es trabajo creador de valor de uso, porque repone el trabajo objetivado que presupone en *su producto*. Éste es trabajo objetivado: $C_I + (v_I + p_I)$.

Puesto C_I en $M'_I(C_I)$, el trabajo vivo aparece objetivado en el *producto neto*. A su vez, los MP en que se incorpora $v_I + p_I$, el capital-mercancías $M'_I(v_I + p_I)$ es tanto producto neto como valor de uso, *como valor*. Trabajo creador de valor (de valor y de valor de uso), el cual, en su carácter concreto, adecuado a su objeto, *conserva* el trabajo objetivado presupuesto *reproduciéndolo* como valor de uso (como MP de MP) y *produce* el producto neto, en el que su objetivo como valor es $M'_I(v_I + p_I)$.

La figura de circulación de $M'_I(C_I)$ es:

$$M'_I(C_I) - D'_I(C_I) \cdot \begin{cases} D - M \quad \cdots P \cdots M' \\ \qquad d - m \end{cases}$$

y

$$\left\{ \begin{array}{ccc} D_I(C_I) & - & M_I(C_I) \\ D_I(v_I) & - & M_I(v_I) \end{array} \right\} \cdots \quad P_I \quad \cdots \quad M'_I \quad \cdots \quad D'_I \, .$$

El movimiento pertenece a la reproducción simple en I, lo que no excluye que sea reproducción ampliada si $M'_I(v_I + p_I)$ contiene a ΔC_I, que es acumulado.

La reposición de capital constante de I tiene lugar por medio de la circulación de $M'_I(C_I)$. Su capital variable está incorporado en $M'_I(v_I + p_I)$. Para los capitalistas, el capital-mercancías $M'_I(v_I)$ ya está en forma de dinero. Pero ahora

$$D_I(C_I) \cdot \begin{cases} D \\ d \end{cases}$$

abre la segunda parte de su metamorfosis.

$D'_I(C_I)$ supone $D_I(C_I, I_C)$, intercambio de MP de MP, entre los productores de $M'_I(C_I)$. Además, supone $D_I(C_I, II_C)$. Este dinero $D_I(C_I, II_C)$ está en manos de los productores de $M'_I(C_I)$; es decir:

$$D'_I(C_I) \begin{cases} D'_I(C_I, I_C) & = & D_I(C_I, I_C) \\ D'_I(C_I, II_C) & = & D_I(C_I, II_C) \end{cases} .$$

Si hay reproducción simple, entonces

$$D'_I(C_I) \begin{cases} D'_I(C_I, I_C) & \cdot & D_I(C_I, I_C) \\ D'_I(C_I, II_C) & \cdot & \begin{cases} D_I(v_I, I_C) \\ d_I(g_I, I_C) \end{cases} \end{cases} .$$

Cada capital incorporado en $M'_I(C_I)$ es $M'(c + v + p)$, luego que $D'_I(C_I)$ es $D'(c + v + p)$. Pero la metamorfosis sigue en

$$D' \cdot \begin{cases} D \\ d \end{cases} ,$$

permitida por las metamorfosis de los capitales individuales. Como sea que se crucen los capitales en este punto; es decir, en forma dinero (capital dinero, moviéndose de una rama de la producción a otras o de una empresa a otras), la reproducción simple supone que $P_I(I_C)$ tenga lugar. Siguiendo la metamorfosis de $M'_I(C_I)$,

$$M'_I(C_I) - D'_I(C_I) \cdot \begin{cases} D_I(I_C) - M_I(I_C) \left\langle \begin{array}{l} FT \\ \\ MP \end{array} \right. \quad P_I(I_C) \quad M'_I(I_C) \quad \cdots M'_I(I_C) \\ \qquad d_I(I_C) - m_I(I_C) \end{cases}$$

en donde el dinero $D_I(v_I, I_C) + d_I(g_I, I_C)$ proviene de $D_I(C_I, II_C) - M_I(C_I, II_C)$.

$D_I(C_I, II_C) - M_I(C_I, II_C)$ es una *compra sin venta en I*, correspondiendo a la venta sin compra $M'_I(C_I, II_C) - D'_I(C_I, II_C)$.

Hay que distinguir el movimiento del producto mercancías del movimiento del dinero (nota de O.F.).

Como sea que se crucen los capitales, con $M'_I(C_I) - D'_I(C_I)$ *el dinero* circula en I, que ha repuesto su capital constante.

Entonces:

$$\frac{}{\begin{array}{c} M_I(C_I)|D_I(C_I) \\ D_I(C_I)|M_I(C_I)\ . \end{array}}$$

El capital incorporado en $M'_I(C_I)$ está en forma dinero, $D'_I(C_I)$.

Esto es, $M'_I(C_I) - D'_I(C_I)$. Supone $D_I(C_I) - M_I(C_I)$, *reposición* del capital constante en I. La dificultad radica en que los capitales se pueden cruzar en

$$D' \cdot \begin{cases} D \\ d \end{cases} .$$

Supongamos primero que no se cruzan. En ese caso tendremos

Reproducción simple:

$$M'_I(C_I) - D'_I(C_I) \cdot \begin{cases} D_I(C_I, I_C) & - & \left.\begin{array}{l} M_I(C_I, I_C) \\ \end{array}\right\} \cdots P_I(I_C) \cdots M'_I(C_I) \\ D_I(v_I, I_C) & - & M_I(v_I, I_C) \\ d_I(g_I, I_C) & - & m_I(g_I, I_C) \end{cases} .$$

en donde $D_I(C_I)$, $D_I(C_I, I_C)$ incluido, pone $M'_I(C_I)$ en forma de dinero, $D'_I(C_I) = D_I(C_I)$.

Los productores de *MP* de *MP*, transforman su mercancía en $D'_I(C_I)$. Reponen su capital constante comprando unos a los otros, pero estos últimos no necesariamente venden exclusivamente a los primeros.

Resulta que

$$D'_I(C_I) \cdot \begin{cases} D'_I(C_I, I_C) & = & D_I(C_I, I_C) \\ D'_{II}(C_I, II_C) & = & D_I(C_I, II_C) \end{cases}$$

$$y$$

$$D'_I(C_I, II_C) \cdot \begin{cases} D_I(v_I, I_C) \\ d_I(g_I, I_C) \end{cases}$$

II. Producción de objetos de consumo social.

La producción de objetos de consumo social constituye el fondo de consumo social. Pero la forma salario tiene un modo peculiar de producir el consumo individual. La propiedad privada sobre los medios de producción también tiene sus modos. Sobre el hecho general de que el producto sea mercancía, tenemos:

$$M'_{II} \text{ es } M'_{II}(c_{II} + v_{II} + p_{II}).$$

Lo primero a considerar es el movimiento de $M_I(v_I + p_I)$, en la reproducción simple del capital.

Veamos ahora la reposición del capital variable.

La figura de circulación

$$M_{II_2} - D'_{II_2} \cdot \begin{cases} D & - \quad M & \cdots \quad P \quad \cdots \quad M' \\ d & - \quad m \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} D(MP) - M(MP) \\ \\ D(FT) - M(FT) \end{Bmatrix} \cdots P \cdots M' - D'$$

$$FT - d(ft) - m(FT)$$

pone en evidencia que la compra de fuerza de trabajo (pago de salarios: función $D(FT) - M(FT)$, del capital dinero), supone la metamorfosis

$$FT - d(FT) - m(FT),$$

la cual, a su vez, supone la metamorfosis de una parte del capital-mercancías M'_{II} que circula en el año que se está considerando, por medio de la metamorfosis $FT - d(FT) - m(FT)$, la que, a su vez, depende de las circunstancias (el capital fijo, el precio y la costumbre le dan cierta rigidez). Lo anterior hay que considerarlo como un hecho. Así, tenemos que

$$M'_{II} = M'_{II_1} + M'_{II_2}.$$

El departamento I produce capital constante. La figura de circulación

$$M'_I - D'_I \cdot \begin{cases} D & - \quad M & \cdots \quad P \quad \cdots \quad M' \\ d & - \quad m \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\begin{Bmatrix} D(MP) - M(MP) \\ \\ D(FT) - M(FT) \end{Bmatrix} \cdots P \cdots M' - D'$$

expone, al trabajo social objetivado en M'_I, esto es, a $M'_I(c_I + v_I + p_I)$, como $M(C)$: medios de producción $M(MP)$, que se integran en el capital productivo P como valor capital constante c, en el proceso de producción capitalista. Los medios de producción en donde está incorporado el capital $M'_I(C_I)$, reponen el trabajo objetivado consumido en la producción de M'_I. De igual manera, los medios de producción en donde está incorporado el capital $M'_I(v_I + p_I)$ reponen, en caso de tener lugar la reproducción simple, el trabajo objetivado consumido en la producción de M'_{II}:

$$c_I + v_I + p_I = c_I + c_{II};$$

es decir,

$$M'_I(c_I + v_I + p_I) = M_I(C_I) + M_{II}(C_{II}).$$

El departamento II, por su parte, produce objetos de consumo social, mercancía m que es consumida fuera de la producción capitalista de mercancías. Aquí, la forma salario presupone la metamorfosis

$$FT - d(FT) - m(FT)$$

y, con ello, la circulación del capital mercancías M'_{II_2}:

$$M'_{II_2} - D'_{II_2} \cdot D_{II_2} - M_{II_2} \cdots P_{II_2} \cdots M'_{II_2} - D'_{II_2}$$

$$FT - d(FT) - m(FT) \cdots (P) \cdots FT - d(FT) - m(FT)$$

$$D \left\{ \begin{array}{c} D(FT) - M(FT) \\ D(MP) - M(MP) \end{array} \right\} \cdots P \cdots M' - D' \cdot \left\{ \begin{array}{ccc} D(FT) & - & M(FT) \\ D(MP) & - & M(MP) \\ d & - & m \end{array} \right\}.$$

M'_{II_2} es $M'_{II_2}(c_2 + v_2 + p_2)$, capital-mercancías. El primer movimiento de su metamorfosis, $M'_{II_2} - D'_{II_2}$, es el término final de la metamorfosis de la fuerza de trabajo $FT - d(FT) - m(FT)$. La fuerza de trabajo es mercancía. Su metamorfosis tiene a $m(FT)$ como término final. El valor capital M'_{II_2} se ha transformado en oro; D_{II_2} es la mercancía en que estaba incorporado, en manos de sus compradores, mientras que $m(FT)$ es producto del trabajo, valor de la producción $c_2 + v_2 + p_2$. Pero D'_{II_2} es la forma dinero de $c_2 + v_2 + p_2$:

$$D'_{II_2} = D'_{II_2}(c_2 + v_2 + p_2).$$

La forma dinero de $m(FT)$ es d y, este mismo dinero, es la forma dinero de la mercancía fuerza de trabajo $D(FT) - M(FT)$.

$D(FT)$ es capital variable, en forma dinero: $D(v)$.

A su vez, la mercancía $m(FT)$, cuya forma dinero $d(FT)$ es el mismo dinero $D(FT)$, representa el término de la metamorfosis de la mercancía fuerza de trabajo, la cual es mercancía en el doble movimiento

$$\begin{array}{c} D(FT) - M(FT) \\ FT - d(FT) - m(FT) \end{array}$$

que aparece como:

1) Forma mercancía del salario: salario real, los objetos de consumo $m(FT)$; y

2) Término equivalente de la metamorfosis de la fuerza de trabajo.

El dinero $D(FT)$, lanzado a la circulación por los capitalistas en la compra de $M(FT)$, se transforma, en manos de los asalariados que *han vendido ya* su fuerza de trabajo, en *la mercancía* $m(FT)$. La mercancía $m(FT)$ es el *motivo* de la venta de (FT). Luego aparece $m(FT)$, como *forma mercancía* del capital variable y como equivalente de la mercancía fuerza de trabajo. La mercancía $m(FT)$ consiste en medios de consumo para la vida de la población trabajadora. Ésta, desprovista de medios de producción, se produce y reproduce a sí misma, *en la vida*, por medio del consumo de los medios de vida en (FT). La metamorfosis

$$m(FT) \cdots (P) \cdots FT$$

tiene lugar en la vida.

El proceso de producción de la fuerza de trabajo tiene la figura *de circulación*

$$\begin{array}{c}
M'_{II_2} - D_{II_2} \cdot \left\{ \begin{array}{ccccccc} D & - & M & \cdots & P & \cdots & M' \\ d & - & m & & & & \end{array} \right. \\
d(FT) - m(FT) \cdots (P) \cdots FT \rightarrow d(FT) \\
D \left\{ \begin{array}{c} D(FT) - M(FT) \\ D(MP) - M(MP) \end{array} \right\} \cdots P \cdots M' - D'
\end{array}$$

El movimiento $D(FT) - M(FT)$ presupone la existencia de la fuerza de trabajo FT, encarnada en los trabajadores, la cual, a su vez, supone la subsistencia de la clase trabajadora, el consumo de los medios de subsistencia $m(FT)$ y asimismo su producción: es decir, presupone al capital mercancías M'_{II_2}.

El movimiento

$$M'_{II_2} \longrightarrow m(FT) \cdots (P) \cdots FT \longrightarrow M(FT)$$

hace aparecer a la producción de M'_{II_2} como producción de capital variable, puesto que la fuerza de trabajo FT se reúne con los medios de producción $M - P$ al final del movimiento y, por medio de $D(FT) - M(FT)$: es decir, la función del capital variable, en forma dinero de M'_{II_2}, es ese dinero $D(v)$. El valor capital M'_{II_2} aparece, en su movimiento social, como valor capital variable v:

$$c_2 + v_2 + p_2 = v_I + v_{II}.$$

Esto equivale a decir que $D(v)$ es la forma dinero de M'_{II_2}.

El capital $D(v)$ y el capital M'_{II_2} mediatizan, en su movimiento, tanto a la producción de la fuerza de trabajo FT y la reproducción del capital variable, como a la producción y la reintegración de la fuerza de trabajo $M(FT)$ al capital productivo P.

Ni el dinero $D(FT) = d(FT)$ ni la mercancía $M'_{II_2} = m(FT)$ se integran al capital productivo, ni uno ni otra trabajan. Son capitales variables $D(v)$ y $m(v)$, en cuanto medios para producir fuerza de trabajo y bajo forma de mercancía.

La figura de circulación de M'_{II_2} es la exposición de la forma salario, como figura de circulación del capital. El ciclo del capital está mediatizado por:

1) *la metamorfosis de la fuerza de trabajo*, según la circulación

$$FT - d(FT) - m(FT);$$

y por

2) *el ciclo del salario*

$$d(FT) - m(FT) \cdots (P) \cdots FT - d(FT).$$

Comparemos ahora el ciclo del salario con el ciclo del capital dinero:

$$D - M \cdots P \cdots M' - D'.$$

Ambos son ciclos del dinero: $d - d$ y $D - D'$. Ambos tienen la contraposición de mercancías distintas, *m(ft)* y *ft*, *M* y *M'*. Ambos tienen, como mediatización de la transformación de una mercancía en otra, procesos en donde la primera mercancía es consumida en la producción de la segunda, *(P)* y *P*. Pero ambos se diferencian en que, en el ciclo del capital dinero, D' es mayor que D, mientras que en el ciclo del salario d, la forma de la fuerza de trabajo es igual a d, que simboliza a la forma dinero de la mercancía m: ni un centavo más, ni un centavo menos.

Puesto que $D' -$ (la forma dinero de $M' -$) es más dinero que $D -$ (la forma dinero de $M -$), el capital, en su rotación, expresa que M' vale más que M, en vista de que d es igual a d. Lo cual está puesto en la circulación:

$$FT - d - m.$$

En su movimiento conjunto, el capital nos dice que FT vale, no lo mismo que m, sino precisamente m. Textualmente dice: "El valor del trabajo es el salario real". Puesto que la valorización del trabajo es, en forma dinero,

$$D'(c + v + p) \left\{ \begin{array}{lcccc} D'(c) & = & D(c) & & \\ D'(v) & = & D(v) & & \\ D'(p) & = & D(g) & = & d'D(c) \end{array} \right\} D(k)$$

y $D(v)$ es precisamente D'_{II_2} (forma dinero del capital-mercancías M'_{II_2}), estamos en presencia de un negocio entre capitalistas. Los capitalistas de II_2 producen capital variable v, cuya forma dinero es $D(v)$, así como los capitalistas de I producen capital constante c, cuya forma dinero es $D(c)$. El capital se valoriza porque el trabajo, en I y en II, produce un valor mayor que M'_{II_2}. Esta es la teoría de Marx.

Es evidente que *(P)* es la economía secreta del modo de producción capitalista. Se trabaja en la fábrica, en la oficina, etc. En la casa, en la calle o "en la vida", no se trabaja. Cuestión de costumbres, de moral, de tiempo libre.

Entonces,

$$M'_{II_2}(c_2 + v_2 + p_2) = m(v) = M(v).$$
$$D'_{II_2}(c_2 + v_2 + p_2) = d(v) = D(v).$$

¡O tempora! ¡O mores! A diferencia de la costumbre de trabajar en la fábrica y mandar a los niños a trabajar en ella, hoy las amas de casa trabajan en la casa, lo que según el capital esta actividad no es trabajo productivo.

Intercambio entre I y II.

$M'_I(v_I + p_I)$, el valor capital en donde está incorporada la jornada de trabajo en I, consiste en medios de producción. Tiene lugar aquí reproducción simple del capital, los MP consisten en el capital mercancías $M'_I(v_I + p_I)$ y reponen el capital constante C_{II}, consumido en la producción de M'_{II}.

M'_{II} es $M'_{II}(c_{II} + v_{II} + p_{II})$. El que una parte del capital mercancías de II incorpore el trabajo objetivado consumido en su producción, se funda en el carácter concreto del trabajo creador de objetos de consumo social. M'_{II} encarna tanto al valor capital constante c_{II} como al *capital mercancías*, trabajo vivo objetivado en su producción. *Su movimiento*

$$M'_{II}(c_{II} + v_{II} + p_{II}) - D'_{II}(c_{II} + v_{II} + p_{II})$$

posibilita, al estar la mercancía en forma dinero, la segunda fase de su metamorfosis por medio de

$$D' \cdot \begin{cases} D \\ d \end{cases} .$$

Es decir, M'_{II} tiene que transformarse en los MP, que reponen al trabajo objetivado consumido en su producción y objetivado en ella, mediante objetos de consumo social.

El movimiento tiene lugar según tres modalidades:

1) Mediante la reposición del capital variable de I.

$D(v_I)$ tiene lugar continua e ubicuamente, pues los trabajadores viven al día (otra costumbre de nuestros tiempos). La figura de circulación

$$\begin{array}{c} \left.\begin{array}{r} D_I(MP) - M_I(MP) \\ D_I(FT) - M_I(FT) \end{array}\right\} \cdots P \cdots M' - D' \\ FT_I - d_I(FT) \longrightarrow m_I(FT) \\ M'_{II}(I_v) - D'_{II}(I_v) \cdot \begin{cases} D & - & M & \cdots & P & \cdots M' \\ d & - & m \end{cases} \end{array}$$

corresponde a 1) y representa la incorporación de la fuerza de trabajo al capital productivo de I, por una *compra sin venta* a la clase trabajadora, compra unilateral de la mercancía *$M(FT)$:*

2) Mediante la metamorfosis de la mercancía FT de la clase trabajadora, por medio de la venta a I y de la compra a II, mediante el salario. La clase trabajadora obtiene mercancía m, para el consumo de sus necesidades vitales: compra sin venta a II: venta sin compra a I:

3) Veamos qué sucede con la metamorfosis $M'_{II}(I_v) - D'_{II}(I_v)$. La compra $d_I(FT) - m_I(FT)$ pone al capital-mercancías M'_{II} y lo incorpora en $m_I(FT)$ en forma dinero. $M'_{II}(I_v)$.Tiene *su precio* en el dinero pagado en salarios por I, el cual forma dinero de su capital variable $D_I(v_I)$.

Los capitales incorporados en $M'_{II}(I_v)$ prosiguen su metamorfosis, a través de

$$D'_{II}(I_v) \cdot \begin{cases} D \\ d \end{cases} .$$

$D - M(MP)$, reposición del capital constante, es compra a I. A su vez, $D - M(FT)$ y $d - m$ indican compra en II; *el dinero* aparecerá como D'_{II}, forma dinero de M'_{II}. Como sea que circule y se reparta en II, el dinero $D_I(v_I)$ aparece como D'_{II}, proveniente de $D_I(v_I)$, como *$D_{II}(I_v)$*.

La reposición de una parte del capital constante II está prefigurada en el dinero $D'_{II}(I_v)$. La compra de MP, $D_{II}(MP)$-$M_{II}(MP)$, supone dinero: capital dinero $D_{II}(MP)$. Por diverso que pueda ser el destino de las monedas en que se incorpora $D'_{II}(I_v)$, la reposición del capital variable de I pone en manos de II, continua y más o menos ubicuamente, dinero. Capital-dinero en la figura D', que constituye o reemplaza al dinero de que está constituido parte de $D_{II}(MP)$. Es decir, el movimiento

$$D'_{II}(I_v) \cdot D_{II}(C_{II}, I_v)$$

tiene lugar por medio del dinero lanzado a la circulación por I, mediante pago de salarios. La figura de circulación

$$\begin{array}{c}
\{D_I(FT) - M_I(FT)\} \cdots P \cdots M' - D' \\
FT_I - d_I(FT) - m_I(FT) \\
M'_{II}(I_v) - D'_{II}(I_v) \cdot D_{II}(C_{II}, I_v) - M_{II}(C_{II}, I_v) \\
M'_I(II_C, (I_v)) - D'_I(II_C, I_v)
\end{array}$$

comprende el retorno del dinero $D_I(FT)$, lanzado por I a la circulación mediante pago de salarios, como figura dinero del capital-mercancías $M'_I(II_C(I_v))$:

$$D_I(FT) \rightarrow d_I(FT) \rightarrow D'_{II}(I_v) \cdot D_{II}(C_{II}, I_v) \rightarrow D'_I(II_c(I_v)).$$

I recobra el capital dinero $D_I(FT)$, por medio del cual integra a su capital productivo la fuerza de trabajo vendida por la clase trabajadora, como forma dinero del capital-mercancías. A su vez, $M'_I(II_C(I_v))$ — recobra el dinero lanzado a la circulación a través de la mercancía consistente en MP para II, con lo cual II repone parte de su capital constante. $D_{II}(C_{II}, I_v) - M_{II}(C_{II}, I_v)$ es compra sin venta a I, con dinero procedente (considerando a II en conjunto) de la venta, sin compra, a los trabajadores de I.

$D_I(FT)$ se confirma, con ello, como forma dinero del *capital* variable de I. La mercancía $M'_I(II_C(I_v))$, cuya forma dinero es $D'_I(II_C(I_v))$, repone con su circulación a $D_I(FT)$. $M'_I(II_C(I_v))$, parte de $M'_I(II_C) = M'_I(v_I + p_I)$, vale por $M'_I(v_I)$. Por su parte, $D_I(FT)$ es la forma dinero de la mercancía fuerza de trabajo, integrada al capital productivo. Retorna por medio de la circulación de la mercancía-producto $M'_I(v_I)$, parte de $M'_I(v_I + p_I)$, donde está objetivado el consumo de la fuerza de trabajo:

$$M'_I(v_I + p_I) = M'_I(v_I) + M'_I(p_I).$$

$D_I(FT)$ retorna con la circulación de $M'_I(II_C)$, dejando un plus producto $M'_I(p_I)$, en tanto que $D_I(FT)$ es capital variable, en forma dinero, $D_I(v_I)$. *El dinero* pagado por I, en salarios, cumple una sucesión de funciones:

$$D_I(FT) \rightarrow d_I(FT) \rightarrow D'_{II}(I_v) \cdot D_{II}(C_{II}, I_v) \rightarrow D'_I(II_C, I_v)$$

y ese mismo dinero mediatiza el movimiento de tres mercancías:

$$FT_I \rightarrow M_I(FT): \text{capital dinero } D_I(FT) \text{ salario } d_I(FT).$$
$$M'_{II}(I_v) \rightarrow m_I(FT): \text{dinero } d_I(FT) \text{ gastado en mercancía } m.$$
$$\text{forma dinero } D'_{II}(I_v) \text{ del capital-mercancía } M'_{II}.$$
$$M'_I(v_I) \rightarrow M_{II}(C_{II}, I_v): \text{capital dinero } D_{II}(C_{II}, I_v).$$
$$\text{forma dinero } D'_I(v_I) \text{ del capital mercancías } M'_I.$$

Cada una de las mercancías asume, a su vez, dos funciones distintas.

Cada una de las cuatro mercancías (las tres mercancías y la mercancía dinero) es valor trabajo social objetivado, forma valor del valor capital social en movimiento.

El valor capital variable v_I y el valor capital constante $C_{II}(I_v)$ forman el movimiento recíproco:

$$\begin{array}{c}
\{D_I(v_I) \rightarrow M_I(v_I)\} \cdots P_I \\
FT_I = d_I(FT) \leftarrow m_I(FT) \cdots (P) \\
M'_{II}(I_v) = D'_{II}(I_v) \cdot \{D_{II}(C_{II}(I_v)) \rightarrow M_{II}(C_{II}(I_v))\} \cdots P_{II} \\
M'_I(v_I) = D_I(v_I) \cdot \{D_I(v_I) \rightarrow M_I(v_I)
\end{array}$$

La figura de circulación es presuposición de P_I, (P), y P_{II}. Presupone que FT_I, $M'_{II}(I_v)$, y $M'_I(v_I)$. Presupone también los procesos de producción (P), P_{II}, y P_I.

En la metamorfosis de M'_I, el valor capital describe el ciclo

$$M'_I(v_I), \; D'_I(v_I) - D_I(v_I), \; D_I(v_I), \; M_I(v_I),$$

dejando, en cada P_I, el plus producto $M'_I(p_I)$.

En la metamorfosis de M'_{II}, el valor capital describe el ciclo

$$M'_{II}(C_{II}(I_v)), \; D'_{II}(C_{II}(I_v)), \; D_{II}(C_{II}(I_v)), \; M_{II}(C_{II}(I_v)), \; M'_{II}(C_{II}, (I_v))$$

, conservándose dicho ciclo en cada P_{II}.

Ahora bien, los *valores* $M'_I(v_I)$, FT_I y $M'_{II}(I_v)$ describen su movimiento social *en unidad*, en cuanto mercancías como forma-valor, expresando todos su valor *en el mismo dinero*. Es en la *forma precio que* $M'_I(v_I)$ es forma-mercancía de v_I, $M'_{II}(C_{II}(I_v))$ y de $C_{II}(I_v)$. Y es en la forma precio que $m_I(FT)$ es forma-mercancía de FT_I, y, con ello, que $D_I(v_I)$ es forma dinero de v_I.

En suma, tenemos *tres mercancías con el mismo precio de producción*.

Dicho de otra manera, el trabajo social objetivado en *la mercancía* $M'_I(v_I)$ y en la mercancía $M'_{II}(C_{II}(I_v))$ no tiene su medida en la unidad de su movimiento, que las pone en equivalencia, según su precio de producción: como productos capitales, en I y en II; y como forma-mercancía, del capital dinero que se valoriza.

El valor capital $C_{II}(I_v)$ es el trabajo social objetivado en $M'_I(v_I)$; es decir, en ambos es distinto e inconmensurable, con el trabajo social objetivado en $M'_I(v_I)$. Pero no es inconmensurable en el proceso conjunto de la producción capitalista. (Sobre eso se verá después). Del mismo modo, el valor capital v_I es el trabajo objetivado en $M'_{II}(C_{II}(I_v))$ y en los MP que constituyen $m_I(FT)$. Las formas valor $M'_I(v_I)$ y $D_I(v_I)$ son mercancías en las que el trabajo social, distinto e (inmediatamente) inconmensurable, está objetivado. Lo mismo sucede con FT_I y sus formas valor d_I y m_I. La unidad del proceso está en *la forma de su valor* (en su *precio)*, debido justamente a *su precio de producción*. La mercancía *forma valor*, es *forma mercancía de su precio de producción.* Y es precisamente por eso que tiene lugar el movimiento de los valores capital v_I, $C_{II}(I_0)$, en cuanto a su producción y reproducción.

La transformación de los valores-mercancía, en sus precios de producción, no se expresa en la reproducción simple del capital. Así, tenemos que v_I y $C_{II}(I_v)$ se han reproducido y cada centavo lanzado a la circulación ha retornado a su origen. La repartición de la plusvalía se expresa en la transformación, de la plusvalía, en ganancia del capital.

La circulación de la plusvalía de I.

$M_I'(v_I + p_I)$ representan a los medios de producción que reponen el capital constante de II, no llevan escrito en la frente cuál mercancía ha de circular (según la figura anterior) y, con ello, cuál es parte integrante de $M_I'(v_I)$ — y cuál ha de circular, según $M_I'(p_I)$. De hecho, el secreto de la plusvalía reside precisamente en que la separación del trabajo vivo, objetivado en la mercancía en v y en p, no es visible ni como mercancía ni en su forma dinero.

Hay dos figuras de circulación que se entrelazan:

1) II compra medios de producción (repone su capital constante):

$$\begin{array}{l} \{D_{II}(C_{II}) - M_{II}(C_{II})\} \cdots P_{II} \cdots M_{II}' - D_{II}' \\ M_I'(p_I) - D_I'(p_I) \cdot \begin{array}{c} D - M \\ d - m \end{array} \cdots P \cdots M' \end{array}$$

Se distingue de $D_{II}(C_{II}(I_v))$ en que *el dinero* no proviene de $D(v_I)$. II inicia el movimiento *para compra* de MP:

2) I compra OC (mercancía m):

$$M_{II}'(I_v) - D_{II}'(I_v) \cdot \left\{ \begin{array}{c} d_I - m_I \\ D - M \\ d - m \end{array} \right. \cdots P \cdots M'$$

I compra *de su dinero* mercancía m. Este dinero, igual que $D_{II}(C_{II}(I_p))$, tiene que estar ahí.

Suponiendo reproducción simple del capital, no hay acumulación y tiene lugar la metamorfosis:

$$M_I' \left\{ \begin{array}{c} M_I'(C_I) - D_I'(C_I) \\ M_I'(v_I + p_I) - D_I'(v_I + p_I) \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} D_I(C_I) - M_I(C_I) \\ D_I(v_I) - M_I(v_I) \end{array} \right\} \cdots P_I \cdots M_I' \; .$$
$$\{d_I(g_I) - m_I(b_I)\}$$

Los capitales se cruzan en

$$D'\begin{cases} D \\ d \end{cases} .$$

pero, conjuntamente, $D'_I(C_I) = D_I(C_I)$; $D'_I(v_I) = D_I(v_I)$.
Luego,

$$\begin{gathered} D'_I(C_I) \cdot D_I(C_I) \\ D'_I(v_I) \cdot D_I(v_I) \end{gathered}$$

es la reinversión característica de la reproducción simple (en I), del capital.

Se sigue que el capital $M'_I(p_I)$, que circula por la compra de II y que constituye su forma dinero por

$$D_{II}(C_{II}(I_p) - M_{II}(C_{II}(I_p)),$$

se mueve según:

$$M'_I(p_I(II_C)) - D'_I(p_I(II_C)) \cdot d_I(II_C) - m_I(II_C)$$

(movimiento conjunto de I, como antes lo hacía $D'_{II}(C_{II}(I_p))$.

Tenemos la figura de circulación:

$$\begin{gathered} \{D_{II}(C_{II}(I_p)) - M_{II}(C_{II}(I_p))\} \\ M'_I(p_I(II_C)) - D'_I(P_I(II_C)) \cdot d_I(P_I(II_C)) - m_I(P_I(II_C)) \ . \\ M'_{II}(I_P(II_C)) - D'_{II}(I_P(II_C)) \end{gathered}$$

El dinero $D_{II}(C_{II}(I_P))$, forma-dinero del capital constante de II, es recobrado por medio de la circulación de $M'_{II}(I_P(II_C))$. Su forma dinero es

$$D_{II}(C_{II}(I_P)) : M'_{II}(I_P(II_C))$$

capital constante de I en forma mercancía, $M'_{II}(C_{II}(I_P))$.

Recíprocamente, la metamorfosis de $M'_I(p_I(II_C))$ en $m_I(p_I(II_C))$, cuya forma dinero $d_I(p_I(II_C))$ es $d_I(b_I)$, *beneficio* de los capitalistas de I, confirma a $D'_I(p_I(II_C))$ como forma dinero de la plusvalía.

La unidad del movimiento reside, de nuevo, en la forma dinero de las mercancías.

Este es el punto decisivo, en $d_I - m_I$. Se trata de ver cómo circula la plusvalía de I. Su forma mercancías $M'_I(p_I)$ circula, en parte, por $D_{II}(C_{II}(I_p))$.

Circula en parte. Y *el resto*, $M'_I(p_I(b_I))$, por el dinero que I mismo lanza a la circulación, en la pura compra de OC *(objetos de consumo)*.

Se trata de la figura de circulación:

$$\begin{gathered} d_I - m_I \\ M'_{II}(I_b) - D'_{II}(I_b) \cdot D_{II}(C_{II}(I_b)) - M_{II}(C_{II}(I_b)) \ . \\ M_I(p_I(I_b)) - D'_I(p_I(I_b)) \end{gathered}$$

en donde

1) $d_I - m_I$ inicia el movimiento que completa la circulación de $M'_I(p_I)$.

2) Con ello, se completa la circulación de $M'_I(v_I + p_I)$; es decir, la reposición de C_{II}.

La mercancía

$$m_I = m_I(p_I(II_C)) + m_I(b_I)$$

completa, junto con $m_I(FT)$, la determinación del capital-mercancías $M'_{II}(C_{II})$, de la forma mercancías del capital constante de II. Esto es evidente. Si $d_I - m_I$ es mayor que lo que admite la figura de circulación, el dinero no retorna, pues ya no queda mercancía I que vender a II. Y si es demasiado pequeña ($-D_{II}(C_{II}(I_P))$ ya supuesto), no hay dinero para completar la circulación de $M'_I(P_I)$ y II no será capaz de reponer su capital constante en esa medida, ya que $M'_I(v_I + p_I)$ es, aquí, $M_{II}(C_{II})$. O bien, II paga con dinero que no retorna.

Cada centavo lanzado a la circulación define la unidad del proceso.

El movimiento del capital variable de I, es decir, el valor capital variable de I se constituye, con el movimiento complementario de $C_{II}(I_v)$, en la identidad consigo misma de la mercancía dinero que mediatiza su circulación, en donde $M'_I(v_I)$ y $M'_{II}(C_{II}(I_v))$ son mercancías del mismo precio de producción y del mismo precio que FT_I. Junto con ello, la realización de la plusvalía de I se constituye con el movimiento complementario de $C_{II}(I_P)$, en donde

$$d_I \to D'_{II}(I_b) \cdot D_{II}(C_{II}(I_b)) \to D'_{II}(p_I(I_b))$$
$$\text{y}$$
$$D_{II}(C_{II}(I_P)) \to D'_I(P_I(II_C)) \cdot d_I(P_I(II_C)) \to D'_{II}(I_P(II_C))$$

hace de $M'_{II}(C_{II}(I_b))$ una forma-mercancía del dinero d_I y de $M'_I(p_I(I_b))$ forma-mercancía del dinero $D_{II}(C_{II}(I_b)) = d_I$, al mismo tiempo que hace de $M'_I(P_I(II_C))$ la forma-mercancía del dinero $D_{II}(C_{II}(I_P))$ y, de $M'_{II}(I_P(II_C))$, la forma-mercancía del dinero $d_I(p_I(II_C)) = D_{II}(C_{II}(I_P))$.

Con ello, $M'_I(v_I + p_I)$ es forma capital-mercancías de FT_I y m_I, en tanto que $M_{II}(C_{II})$ es forma capital- mercancías de $M_{II}(MP)$.

Las ecuaciones

$$D'_I(v_I + p_I) = D_I(v_I) + d_I(g_I)$$
$$D'_{II}(C_{II}) = D_{II}(C_{II})$$

son la forma dinero de la reproducción del capital variable v_I y de la plusvalía p_I recobrada, como asimismo de la reproducción del capital constante C_{II}. Esta reproducción de los valores capital, en cada *departamento*, resulta de la mediatización del movimiento social de los valores capital

$$M'_I(v_I + p_I) \to M_I(C_{II})$$
$$M'_{II}(C_{II}) \to M_I(v_I) + m_I(g_I)$$

por las mercancías producto del capital, como forma-valor, las que circulan a sus precios de producción.

Intercambio en I.

La metamorfosis de M'_I

$$M'_I - D'_I \cdot \begin{cases} D_I - M_I \\ d_I - m_I \end{cases} \cdots P_I \cdots M'_I$$

es reproducción del capital en I, por medio de

$$M_I'(c_I + v_I + p_I) = M_I'(c_I) + M_I'(v_I + p_I).$$

M_I' es capital incorporado en MP. $M_I'(C_I) - D_I'(C_I)$ y tiene lugar en la figura de circulación:

$$M_I'(C_I) - D_I'(C_I)\left\{\begin{array}{l} D - M \quad \cdots \quad P \quad \cdots \quad M' \\ d - m \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l} D_I(C_I) - M_I(C_I) \\ D_I(v_I) - M_I(v_I) \end{array}\right\}\cdots P_I \cdots M_I' - D_I'$$

Ésta mediatiza la reposición del trabajo objetivado en los MP de MP consumidos en la producción de M_I', reproducción del valor y valor de uso $M_I(C_I)$. El ciclo del capital mercancías $M_I'(C_I)$ supone el ciclo del capital dinero $D_I(C_I)$, ciclo del capital dinero en I.

A diferencia del ciclo del capital-mercancías y del ciclo capital-productivo, mediatizados por

$$D' \cdot \left\{\begin{array}{l} D \\ d \end{array}\right. .$$

esto es, el punto en que el capital que ha retornado a la forma dinero *puede*, como dinero, dejar el ciclo (*puede*, por *la forma* del movimiento, bajo las restricciones impuestas por P y su concatenación, en el movimiento social del capital dinero). El ciclo del capital dinero obliga, *por su forma*, al valor capital en proceso a describir el ciclo de D a D'.

$M_I'(C_I) \rightarrow D_I'(C_I)$ supone, con ello, que con

$$M_I'(C_I) \rightarrow M_I(C_I),\ D_I - M_I \cdots P_I \cdots M_I' - D_I'$$

tenga lugar. En otras palabras, supone la existencia del departamento I en la producción capitalista.

Los capitales individuales, incorporados en $M_I'(C_I)$, describen a su vez el ciclo del capital- mercancías

$$M_I'(C_I) - D_I'(C_I) \cdot \begin{array}{l} D - M \quad \cdots P \cdots M' \\ d - m \end{array}$$

cada uno en su movimiento individual, del cual el movimiento de su mercancía forma parte. Si A acumula, el movimiento

$$D' \cdot \left\{\begin{array}{l} D \\ d \end{array}\right.$$

de su mercancía, en forma dinero, puede quedar suspendido (todo o en parte), si la D' de B está en $D - D - M \cdots P \cdots M' - D' - D'$. Los intereses a pagar, D', dejan el ciclo de su capital; etc.

Dejando de lado su forma de crédito y acumulación, la reproducción simple, en cuanto comprende el movimiento del capital fijo que comprende que $D' \cdot \left\{\begin{array}{l} D \\ d \end{array}\right.$ quede suspendida, lo mismo que el tiempo de circulación de la mercancía, comprende que $D' \cdot \left\{ \begin{array}{l} D \\ d \end{array} \right.$ quede suspendida. Y admite, dentro de ciertos límites, que se crucen los capitales en $D' \cdot \left\{ \begin{array}{l} D \\ d \end{array} \right.$.

Dicho esto, $M_I'(C_I) - D_I'(C_I)$, puesto *que supone* $D_I - M_I \cdots P_I \cdots M_I' - D_I'$, supone asimismo de MP de MP, como consecuencia de su movimiento. Tiene lugar aquí reproducción simple (como parte de reproducción ampliada o no) y con ello la metamorfosis

$$M_I'(C_I) - D_I'(C_I) \cdot \left\{ \begin{array}{l} D_I(C_I(I_c)) - M_I(C_I(I_c)) \\ D_I(v_I(I_c)) - M_I(v_I(I_c)) \\ d_I(g_I(I_c)) - m_I(g_I(I_c)) \end{array} \right\} \cdots P_I(I_c) \cdots M_I'(C_I).$$

en el movimiento conjunto del capital en I, pues $D_I - M_I$ contiene la reposición del capital constante a ser consumido en la producción de MP de MP. Es decir, si A invierte su carbón transmutado en oro en una compañía naviera de Hamburgo, o bien, en una cadena de puestos de hamburguesas, el movimiento conjunto supone que B invierta su dinero en la producción de carbón o de petróleo, pues el dinero $D_I(C_I(I_c))$, forma-dinero de la reposición del capital constante en la producción de MP de MP, está supuesto en $M_I'(C_I) - D_I'(C_I)$, que a su vez presupone $D_I - M_I \cdots P_I \cdots M_I' - D_I'$.

Entonces, en las figuras de circulación

$$\begin{array}{l} M_I'(C_I) - D_I'(C_I) \cdot \left\{ \begin{array}{l} D - M \quad \cdots \quad P \quad \cdots \quad M' \\ d - m \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} D_I(C_I) - M_I(C_I) \\ D_I(v_I) - M_I(v_I) \end{array} \right\} \cdots P_I \cdots M_I' - D_I' \end{array}$$

y

$$\begin{array}{l} M_I'(v_I + p_I) - D_I'(v_I + p_I) \cdot \left\{ \begin{array}{l} D - M \quad \cdots \quad P \quad \cdots \quad M' \\ d - m \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} D_{II}(C_{II}) - M_{II}(C_{II}) \\ D_{II}(v_{II}) - M_{II}(v_{II}) \end{array} \right\} \cdots P_{II} \cdots M_{II}' - D_{II}' \end{array}$$

:

1) los capitales individuales, incorporados en M_I', prosiguen su movimiento en el ciclo del capital social conjunto; y

2) $M_I'(C_I) - D_I'(C_I)$ supone

$$D_I - M_I \cdots P_I \cdots M_I' - D_I'$$

en tanto que

$$M_I'(v_I + p_I) - D_I'(v_I + p_I)$$

supone

$$D_{II} - M_{II} \cdots P_{II} \cdots M'_{II} - D'_{II}.$$

Ambos constituyen el ciclo

$$D - M \cdots P \cdots M' - D'$$

del capital social $D(I_C) - M(I_C)$ y $D(II_C) - M(II_C)$, a la vez que son parte integrante de $D - M$, $d(I_C) - m(I_C)$, mientras que $d(II_C) - m(II_C)$ no lo es. El movimiento presupone

$$M'_{II}(C_{II}) = \underbrace{D'_{II}(C_{II}) \cdot D_{II}(C_{II})}_{d_I = m_I} - M_{II}(C_{II})$$

donde

$$d_I = d_I(FT) + d_I(g_I)$$
$$m_I = m_I(FT) + m_I(g_I)$$

siendo $M'_I(C_I) - D'_I(C_I)$ reposición del capital constante en I; y $M'_I(r_I + p_I) - D'_I(r_I + p_I)$ reposición del capital constante en II.

La reposición del capital variable en I, supone *el dinero* $D_I(r_I)$ lanzado a la circulación: movimiento presupuesto por $M'_I(C_I) - D'_I(C_I)$, en cuanto forma parte de $D_I - M_I \cdots P_I \cdots M'_I - D'_I$.

El dinero $D_I(r_I)$ retorna a I por la circulación de $M'_I(r_I + p_I)$, $D'_I(r_I)$, cuya forma capital- mercancías es $M'_I(r_I)$.

La metamorfosis de $M'_I(C_I)$ supone, a su vez, que *el dinero* $D_I(r_I(I_C))$ retorne como parte de $D'_I(C_I)$. Este dinero está, ya sea en $D'_I(r_I)$, ya en I, pero no en su forma-dinero $M'_I(C_I)$.

La plusvalía de I se realiza en mercancía m_I y supone *al dinero* d_I, lanzado por I a la circulación. Retorna a I o proviene de I, por la circulación de $M'_I(r_I + p_I)$, $D'_I(p_I)$, cuya forma capital-mercancías es $M'_I(p_I)$.

El dinero $D_I(r_I(I_C)$ y $d_I(g_I(I_C))$ es parte de $D'_I(r_I + p_I)$. Tiene que *retornar* a $I(I_C)$ por la circulación de $M'_I(C_I)$; o bien, *provenir* de ésta. Es decir,

$$D'_I(C_I) = D_I(C_I(I_C)) + D_I(r_I(I_C)) + d_I(g_I(I_C))$$

es la fórmula de la *rotación* del capital, en $I(I_C)$.

Si retorna, $d_I(g_I(I_C))$ *proviene* de la circulación porque fue gastado por adelantado; a su vez, $d_I - m_I$ proviene de la bolsa de los fabricantes.

Retornar es rotación; provenir es inversión.

En $D_I(C_I(I_C))$ se curvan ambas determinaciones: es D para A; D' para B; D para B; D' para C; etc.

Importante para la circulación en I.

La reproducción simple del capital *en I* tiene la fórmula:

$$D'_I(C_I) = D_I(C_I(I_C)) + D_I(C_I(II_C)).$$

El dinero retorna a $I(I_C)$ por medio de la reposición del capital constante en I. Con

$$D_I(C_I(II_C)) = D'_I(C_I(v+p))$$

retorna el dinero a $I(I_C)$, por medio de:

1) la circulación del capital constante; y

2) la reposición del capital constante en $I(II_C)$.

¿Y entonces? El que $M_I(v_I + p_I)$ sea la forma capital-mercancías del capital variable y de la plusvalía de I, en su conjunto:

$$M'_I \left\{ \begin{array}{ll} M'_I(C_I) - D'_I(C_I) \cdot & D_I(C_I) - M_I(C_I) \\ M_I(v_I + p_I) - & \left\{ \begin{array}{l} D'_I(v_I) \cdot D_I(v_I) - M_I(v_I) \\ d_I(p_I) \cdot d_I(g_I) - m_I(g_I) \end{array} \right. \end{array} \right\} \cdots P_I \cdots M'_I$$

y que los capitales se crucen en

$$D' \cdot \left\{ \begin{array}{l} D \\ d \end{array} \right. .$$

es constitutivo del movimiento. Pero son capitales (*valor* capital) *en este movimiento*, como partes integrantes de éste.

Este es el ciclo del capital mercancías de I.

Especificar más la metamorfosis de los capitales en

$$M'_I(C_I) - D'_I(C_I) \cdot \left\{ \begin{array}{l} D - M \quad \cdots \quad P \quad \cdots \quad M' \\ d - m \end{array} \right.$$

$$y$$

$$M'_I(v_I + p_I) - P'_I(v_I + p_I) \cdot \begin{array}{l} D - M \quad \cdots \quad P \quad \cdots \quad M' \\ d - m \end{array}$$

no sólo es innecesario: *es erróneo*. La función de $M'_I(v_I + p_I)$ es que retorne o venga *el dinero* $D'_I(v_I + p_I)$, que constituye $D_I(v_I) + d_I(g_I)$ en la rotación de I en *conjunto*. Con ello, son los capitales individuales incorporados en M'_I *valor* capital: *capital*. Entonces sigue cada uno su camino.

Queda por determinar el intercambio en I, desde el punto de vista del precio de producción.

En la parte correspondiente, el sistema de ecuaciones de Bortkiewich consta de cuatro departamentos, sin restricciones.

$I(I_C)$ *vende* en I; vende unilateralmente a $I(II_C)$ y vende y compra en $I(I_C)$.

$I(II_C)$ compra en I, vende a II. ¿Qué pasa?

$$D'_I(C_I) = D_I(C_I)$$

$$D_I(v_I + p_I) \left\{ \begin{array}{l} D'_I(v_I) = D_I(v_I) \\ D'_I(p_I) = d_I(g_I) \end{array} \right\} D_I(v_I) + d_I(g_I)$$

Ahora bien,

$$D_I(C_I) = D_I(C_I(I_C)) + D_I(C_I(II_C)),$$

pero como

$$D'_I(v_I + p_I) = D_I(v_I(II_C)) + d_I(g_I(II_C)) + d_I(g_I(I_C)),$$

se sigue que

$$D_I(C_I(II_C)) = D_I(v_I(I_C)) + d_I(g_I(I_C)).$$

Con

$$D_{II}(C_{II}) = D_I(C_I(II_C)) + D_I(v_I(II_C)) + d_I(g_I(II_C))$$

las ecuaciones están completas. La diferencia es aquella entre $D_I(C_{II})$ y $D_I(C_I(II_C))$ y, por tanto, entre $D(v)$ y $d(g)$ en general se cumple, y también lo hace $D_I(C_I(I_C))$ en las ecuaciones de Bortkevich, como asimismo se expresa en la formación de la ganancia. Por tanto, hay tres variables X_I, para el departamento II.

¿Tenemos suficientes ecuaciones?

Sea

$$G''_I = X_I W''_I$$

Ahora, para el departamento II, tenemos las ecuaciones

$$G'_I(v_I + p_I) = G_{II}(C_{II}) = X_I(C_{II})W_{II}(C_{II})$$

y para ambos departamentos, las ecuaciones:

$$G'_I(C_I) - G_I(C_I(I_d)) = G_I(C_I(II_C)) = X_I(C_I(II_C))W_I(C_I(II_C)).$$

Sea ahora

$$G_I(C_I(I_C)) = X_I(C_I(I_C))W_I(C_I(I_C)).$$

Entonces tenemos

$$I\begin{cases} X_I(C_I(I_C))C_I(I_C) + X_{II}v_I(I_d)(1+d') = X_I(C_I(I_C)C_I(I_C) + X_I(C_I(II_C).C_I(II_C)) \\ (X_I(C_I(II_C))C_I(II_C) + X_{II}v_I(II_C))(1+d') = X_{II}(C_{II})C_{II} \end{cases}$$

$$II\ \ (X_{II}(C_{II})C_{II} + X_{II}v_{II})(1+d^1) = X_{11}v_{11} + X_2.$$

Como $X_I(C_I(I_C))$ es exactamente indeterminado, aparece con d'. Por tanto, es en la forma de las ecuaciones que el álgebra está pendiente.

El problema es que la circulación (su forma) es, por otro lado, indiferente, cuando $G'(m)$ es conocida.

Que

$$G'(m) = g'(D(k)) \text{ o } g'. D(C)$$

es una suposición, que aquí no está considerada. El problema, sin embargo, es que no hay ningún problema. Se observa en la producción.

Intercambio en II.

El intercambio entre I y II determina

$$M'_{II}(C_{II}) \text{ en } M'_{II}(c_{II} + v_{II} + p_{II}).$$

$M'_{II}(v_{II} + p_{II})$ constituyen OC.

La reproducción del capital variable, en II, tiene la figura:

$$\begin{array}{c} \{D_{II}(v_{II}) - M_{II}(v_{II})\} \cdots P_{II} \cdots M'_{II} - D'_{II} \\ FT_{II} - d_{II}(FT_{II}) - m_{II}(FT_{II}) \\ M'_{II}(v_{II}) - D'_{II}(v_{II}) \cdot \left\{ \begin{array}{l} D - M \quad \cdots P \cdots M' \\ d - m \end{array} \right. \end{array}$$

La forma dinero de $M'_{II}(v_{II})$ es $D_{II}(v_{II})$, forma dinero del capital variable de II, mientras que $M'_I(v_I)$ lo es de I. Pero aquí $M'_{II}(v_{II})$ está incorporada en la misma mercancía $m_{II}(FT_{II})$, que constituyen los OC y que revienen a la clase trabajadora por la venta de su fuerza de trabajo a II. La forma salario hace aparecer al trabajo social objetivado en $m(FT)$ como valor capital variable v. En esta mistificación, como relación del capital consigo mismo en su circulación, el valor capital v_{II} es el trabajo social objetivado en $m'_{II}(v_{II})$.

La figura de circulación

$$\begin{array}{c} M'_{II}(v_{II}) - D'_{II}(v_{II}) \cdot D_{II}(v_{II}) - M_{II}(v_{II}) \cdots P_{II} \cdots M'_{II}(v_{II}) - D'_{II}(v_{II}) \\ FT_{II} - d_{II}(FT) - m_{II}(FT) \cdots (P) \cdots FT_{II} - d_{II}(FT) - m_{II}(FT) \\ \{D_{II}(v_{II}) - M_{II}(v_{II})\} \cdots P_{II} \cdots M'_{II} - D_{II} \cdot \{D_{II}(v_{II}) - M_{II}(v_{II})\} \end{array}$$

contiene:

1) el movimiento del valor capital social v_{II}, en

$$M'_{II}(II_v) = M'_{II}(v_{II}),$$

es decir,

$$M'_{II}((c + v + p)(II_v)) = M'_{II}(v_{II});$$

y el movimiento

$$M'_{II}(v_{II}) \rightarrow m_{II}(FT) \cdots (P) \cdots FT_{II} \rightarrow M_{II}(v_{II}),$$

producción del capital variable v_{II}; y

2) el duplicado por el movimiento

$$\{M'_{II}(v_{II}) - D'_{II}(v_{II})\} \cdot \{D_{II}(V_{II}) - M_{II}(V_{II})\} \cdots P_{II} \cdots M'_{II}(V_{II}).$$

del valor capital $M'_{II}(v_{II})$. en II.

En

$$M'_{II}(V_{II}) - D'_{II}(v_{II}) \cdot D_{II}(V_{II}) - M_{II}(v_I)$$

la forma dinero aparece como pura mediatización de *la metamorfosis*

$$M'_{II}(v_{II}) - M_{II}(v_{II}).$$

del valor capital variable v_{II}. en

$$\{M_{II}(v_{II}) \cdots P_{II} \cdots M'_{II}(v_{II})\}.$$

proceso de producción P_{II}. como consumo y reproducción del valor capital variable v_{II}.

El trabajo social. consumido en la producción de $M'_{II}(v_{II})$. aparece como reproducción del valor de la fuerza de trabajo $M_{II}(FT)$. Con ello, ésta aparece como valor capital variable v_{II} en el *capital* productivo P_{II}: y como $M_{II}(v_{II})$. en cuanto

$$M'_{II}(v_{II}) - D'_{II}(v_{II}) \cdot D_{II}(v_{II}) - M_{II}(v_{II})$$

aparece como metamorfosis del valor capital $M_{II}(v_{II})$. El valor capital variable es la *ficción* de que

$$M_{II}(v_{II}) \cdots P_{II} \cdots M'_{II}(v_{II})$$

sea la reproducción de la fuerza de trabajo FT_{II}.

En el departamento I, el trabajo es trabajo productor de medios de producción.

La mercancía $M'_I(v_I)$ es capital variable, puesto que es la forma mercancía del dinero $D'_I(v_I) = D_I(v_I)$. del capital variable en forma dinero. Por su parte. $m_I(FT)$ y $M'_I(v_I)$ son mercancías del mismo precio, en donde el trabajo social objetivado en ellas es inconmensurable.

En el departamento II, $M'_{II}(v_{II})$ y $m_{II}(FT)$ son la misma mercancía. El trabajo en II es trabajo productor de objetos de consumo directo. es decir. son la contraposición entre M'_I y $M(MP)$. que hace aparecer a los medios de producción como producto. como capital-mercancías. El trabajo en I aparece en C_{II} y en el movimiento de reproducción de C_I. Puesto que $C_{II} = v_I + p_I$. el producto de II aparece en la reproducción simple como $v + p$. $M_I(C_I)$ es inconmensurable con $M'_I(v_I + p_I)$: pero $M_{II}(C_{II})$ es la misma mercancía que $M'_I(v_I + p_I)$. ya que $M'_I(C_I)$ y $M_I(C_I)$ son la misma mercancía.

Entonces

$$C_I = C_I$$
$$C_{II} = v_I + p_I$$
$$c_{II} + v_{II} + p_{II} = v + p$$

Hay que desarrollar esto un poco más. El movimiento social del capital aparece como producción de objetos de consumo y como repartición de éstos, según

$$m = m(FT) + m(B).$$

Como siempre, en II tenemos:

$$M'_{II}(v_{II} + p_{II}) = M'_{II}(v_{II}) + M'_{II}(p_{II}),$$

pero como $M'_{II}(C_{II})$ es inconmensurable con $M'_I(v_I + p_I)$, que es $M_{II}(C_{II})$, resulta que

$$M'_{II}(c_{II} + v_{II} + p_{II}) = M'_{II}(v_{II}) + M'_{II}(c_{II} + p_{II}).$$

La separación de $M'_{II}(c_{II}+p_{II})$ conlleva la transformación de la plusvalía producida, p_{II}, en ganancia g_{II}.

De hecho, tenemos que

$$M'_{II}(c_{II} + p_{II}) \text{ es } M'_{(II)}(v_I + p_I + p_{II}) \text{ en manos de II.}$$
$$M'_{(II)}(v_I + p) = m_I(FT) + M'_{II}(P).$$

Está por verse cómo se constituye $M'_{(II)}(p)$ en $m_I(g_I) + m_{II}(g_{II})$; o también, cómo se convierte la plusvalía en ganancia.

M'_{II} se separa en $m(FT)$ y $M(B)$.

Las figuras de circulación son:

$$M'_{II}(v) - D'_{II}(v) \cdot \begin{cases} D - M & \cdots P \cdots M' \\ d - m & \end{cases}$$
$$FT - d(FT) = m(FT) \cdots (P) \cdots FT - d(FT)$$
$$\{D(v) - M(v)\} \cdots P \cdots M' - D' \cdot \{D(v) = M(v)\}$$
$$M'_{II}(b) - D'_{II}(b) \cdot \begin{cases} D - M & \cdots P \cdots M' \\ d - m & \end{cases}$$

$$\begin{cases} d - m & \\ D - M & \cdots P \cdots M' - D' \end{cases}$$

La circulación de $M'_{II}(C_{II})$ ya ha sido considerada en el intercambio con I.

30.5 MILLONES DE MISERABLES ■ Helguera

CAPÍTULO 4

Capítulo 4 EL PROBLEMA DE LA TRANSFORMACIÓN DE VALORES EN PRECIOS DE PRODUCCIÓN

El debate sobre este tema comenzó cuando aparecieron los trabajos de **Eugen von Böhm-Bawerk** (1851-1914) y **Ladislaus von Bortkievich** (1868-1931) y a partir del momento en que éstos y otros autores niegan la ley del valor establecida por Marx.

¿Cómo presentó Marx esta cuestión, en el tomo III de *El Capital*? Se considera que hay *m* mercancías que se deben tomar en cuenta, en diversas combinaciones productivas representadas por relaciones de capital constante y variable de distinta importancia. Cada capitalista debería organizar su composición utilizando mucho capital variable y poco capital constante, ya que sólo la fuerza de trabajo es creadora de valor. Pero, en realidad, los capitales emigran hacia los sectores donde la composición orgánica del capital es más elevada. Globalmente, esto ocasiona un aumento en la composición orgánica media del capital de la economía. Pareciera que no se cumple la ley del valor y que hay otros factores "creadores de valor". Dada la competencia capitalista, hay que proceder a la transformación de los valores en precios de producción (metamorfosis del valor en "precios de producción", según la expresión de Marx).

Marx demuestra que la base de la producción de la riqueza está en la explotación de la fuerza de trabajo por el capital y que esta explotación ocurre en la esfera de la producción, no en la de la circulación. La explotación proviene de que, en la esfera de la producción, la fuerza de trabajo se transforma en capital variable y es fuente de creación de valor.

Sólo en la etapa del análisis es necesario buscar la transformación de los valores en precios, porque allí se explica el movimiento real de los distintos capitales y se descubre el fundamento de clase de los capitalistas, aparentemente opuestos en la competencia.

Cuando Engels publicó el tomo III de *El Capital*, en 1894, un representante de la escuela austríaca, Böhm-Bawerk, llamó a concurso literario para sugerir soluciones al problema de la transformación. Partía de las siguientes hipótesis:

1) La economía se divide en tres ramas, sectores o departamentos:

El departamento I, que produce medios de producción;

El departamento II, que produce bienes de consumo (bienes salario); y

El departamento III, que produce bienes de consumo para los capitalistas (bienes de lujo);

2) Todas las empresas de la misma rama tienen la misma composición orgánica de su capital; y

3) Todas las ramas tienen la misma composición orgánica y una tasa de plusvalor de 100%.

Veamos ahora el problema de la transformación con un enfoque de matrices. Sea $\mathbf{A}$ una matriz de insumos unitarios, $m \times m$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{L}$ es el vector de requerimiento de trabajo directo:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix}$$

y también tenemos al vector $\mathbf{\Lambda} \in R^m$, vector de valores de las mercancías:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}.$$

Analizaremos ahora el sistema de valores, tales que

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{A}\mathbf{\Lambda} + \mathbf{L}.$$

Si e es la tasa de explotación, $\mathbf{d}$ es el vector canasta de bienes, por hora trabajada.

$$e = \frac{1 - \mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda}}{\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda}}$$

$$\Rightarrow e\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda} + \mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda} = 1$$

$$(e + 1)\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda} = 1$$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{A}\mathbf{\Lambda} + \mathbf{L}(1 + e)\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{A}\mathbf{\Lambda} + \mathbf{L}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda}) + e\mathbf{L}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda})$$

$$\mathbf{A}_{(i)}$$

es un vector renglón. Para cualquier mercancía,

$$\mathbf{\Lambda}_i = \lambda_i = \mathbf{A}_i\mathbf{\Lambda} + \mathbf{L}_i(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda}) + e\mathbf{L}_i(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda})$$

donde el valor de la mercancía es $c + v + m$:

$$c = \mathbf{A}_i\mathbf{\Lambda}$$

$$v = L_i(\mathbf{d} \cdot \mathbf{L})$$

$$m = eL_i(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda}).$$

Introducimos un nuevo vector, $\mathbf{Y} \in R^m$. Entonces $\mathbf{Y} = (y_1, \ldots, y_m)$, que representa el vector de cantidades producidas de cada uno de los bienes.

Por consiguiente,

$$\mathbf{Y} \cdot \mathbf{\Lambda} = \mathbf{Y}\mathbf{A}\mathbf{\Lambda} + (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda}) + e(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda})$$

representa el valor global del conjunto de mercancías producidas y

$$\mathbf{Y}\mathbf{A}\mathbf{\Lambda}$$

el valor del conjunto de medios de producción utilizados; es decir, capital constante total, expresado en valor.

$$(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda})$$

representa al capital variable total, expresado en valor; finalmente,

$$e(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda})$$

es la plusvalía total.

Si definimos la tasa de ganancia r tal como hizo Marx, es decir, el plusvalor total entre el capital total adelantado, tendremos

$$r = \frac{e(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda})}{(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda}) + \mathbf{Y}\mathbf{A}\mathbf{\Lambda}} = \frac{e}{1 + \frac{\mathbf{Y}\mathbf{A}\mathbf{\Lambda}}{(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda})}}$$

siendo

$$k = \frac{\mathbf{Y}\mathbf{A}\mathbf{\Lambda}}{(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda})}$$

la composición orgánica del capital

$$\Rightarrow r = \frac{e}{1 + k}.$$

Esta tasa de *beneficio medio*, aplicada a los capitales totales adelantados en cada rama, permite determinar los precios de producción $\mathbf{P}$.

$$\Rightarrow \mathbf{P} = (1 + r)[\mathbf{A}\mathbf{\Lambda} + \mathbf{L}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda})]$$

$$\mathbf{P} \in R^m_+$$

representa el vector de precios de producción, de las m mercancías. El conocimiento previo de los valores determina los precios. La suma de los beneficios es igual a la plusvalor total.

SEGUNDA RELACIÓN FUNDAMENTAL

La suma de los precios de la producción de todas las mercancías producidas en la sociedad, es decir, en la totalidad de las ramas de la producción, es igual a la suma de sus valores:

$$\mathbf{Y} \cdot \mathbf{P} = (1 + r)\mathbf{Y} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{\Lambda} + \mathbf{L}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda}))$$

siendo el vector de cantidades físicas de mercancías producidas por el vector de precios:

$$\mathbf{Y}\cdot\mathbf{P} = \mathbf{Y}\cdot(\mathbf{A}\Lambda + \mathbf{L}(\mathbf{d}\cdot\Lambda)) + r\mathbf{A}\Lambda + \mathbf{L}(\mathbf{d}\cdot\Lambda).$$

Según la primera relación fundamental:

$$\mathbf{Y}\cdot\mathbf{P} = \mathbf{Y}\cdot(\mathbf{A}\Lambda + \mathbf{L}(\mathbf{d}\cdot\Lambda)) + e(\mathbf{A}\Lambda + \mathbf{L}(\mathbf{d}\cdot\Lambda))$$

$$= \mathbf{Y}\cdot\mathbf{A}\Lambda + \mathbf{L}(\mathbf{d}\cdot\Lambda) + e\mathbf{L}(\mathbf{d}\cdot\Lambda)$$

$$\Rightarrow \mathbf{Y}\cdot\mathbf{P} = \mathbf{Y}\cdot\Lambda,$$

lo que equivale a decir que la suma de los precios de producción es igual a la suma de sus valores.

¿Cuál fue el error de Marx?

Bortkievich afirma que las ecuaciones de precios de producción no son correctas, ya que

$$\mathbf{P} = (1+r)(\mathbf{A}\Lambda + \mathbf{L}(\mathbf{d}\cdot\Lambda)).$$

Los críticos de Marx afirman que esta ecuación es errónea, puesto que lo que entra en el precio de producción de una mercancía (esto es, su costo de producción) debe calcularse a su precio de producción; es decir, estos mismos insumos no deben evaluarse a sus valores, sino a sus precios de producción.

En la solución que propone Marx, la misma mercancía se evalúa de dos maneras diferentes:

i) Como insumo, es evaluada a su valor; y

ii) como producto, es evaluada a su precio de producción.

Supongamos ahora una economía en la que no hay acumulación neta. Hay una utilización de $\mathbf{YA}^i$, donde $\mathbf{A}^i$ es el vector columna *i-ésima* de la matriz $\mathbf{A}$ y

$$\mathbf{YA}^i$$

representa la cantidad utilizada de la mercancía *i-ésima*.

Y_i es la cantidad utilizada de la mercancía *i-ésima*. La condición de equilibrio contable, en términos físicos, es

$$Y_i = \mathbf{YA}^i.$$

Es decir, por un lado tenemos el monto de la mercancía i producida y, por el otro, la cantidad de la mercancía i, que se utiliza como insumo.

Marx planteó el sistema de valorización como

$$Y_i P_i = YA^i\lambda_i.$$

Se observa una incoherencia del sistema, ya que la condición de equilibrio relaciona mercancías evaluadas a sus precios de producción, con sus valores:

i) en el espacio de valores-trabajo, que es donde surge la tasa de explotación; y

ii) en el espacio de los precios de producción, que es donde surge la tasa de beneficio.

El sistema de valores de producción es:

$$\mathbf{P} = (1+r)(\mathbf{AP} + \mathbf{L}w).$$

$\mathbf{A}$ = matriz tecnológica
$\mathbf{P}$ = vector de precios de producción
$\mathbf{L}$ = vector de requerimientos de trabajo
w = tasa de salario, definida como

$$w = \mathbf{d} \cdot \mathbf{P}$$

Si hay m mercancías, entonces hay $(m-1)$ incógnitas, que son los precios. Un bien puede servir como numerario. Hay $m - 1 + 1 = m$ incógnitas y m ecuaciones.

PRIMERA CONSECUENCIA

No todos los sectores participan de la determinación de la tasa de ganancia general.

Por un lado, la tasa de ganancia está determinada por las ecuaciones de producción, en los sectores que producen los medios de producción; y, por otro lado, esta tasa está también determinada por los bienes de consumo obrero. Las condiciones de producción de los bienes de lujo no ejercen ninguna influencia sobre la determinación de la tasa general de ganancia.

Ejemplo:

Sean

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{matrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y un vector de requerimientos de trabajo directo:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que $w = d_2 P_2$, porque los asalariados sólo consumen mercancías producidas en el segundo sector y ésta ha sido la cantidad fijada ($\mathbf{d}_2$) en la época considerada.

El sistema de precios de producción es

$$\mathbf{P} = (1+r)[\mathbf{AP} + \mathbf{L}w]$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = (1+r)\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} d_2 P_2$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = (1+r)\begin{pmatrix} p_1 a_{11} \\ p_2 a_{21} \\ p_3 a_{31} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 d_2 P_2 \\ l_2 d_2 P_2 \\ l_3 d_2 P_2 \end{pmatrix}$$

$$= (1+r)\begin{pmatrix} p_1 a_{11} + l_1 d_2 P_2 \\ p_2 a_{21} + l_2 d_2 P_2 \\ p_3 a_{31} + l_3 d_2 P_2 \end{pmatrix}.$$

$$p_1 = (1+r)(p_1 a_{11} + l_1 d_2 P_2) \tag{4.1}$$

$$p_2 = (1+r)(p_2 a_{21} + l_2 d_2 P_2) \tag{4.2}$$

$$p_3 = (1+r)(p_3 a_{31} + l_3 d_2 P_2) \tag{4.3}$$

P_3 es una variable endógena, correspondiente al precio de producción de los bienes de lujo. Sólo aparece en la ecuación (4.3), mientras que P_2 y P_1 aparecen en todas las demás. El sistema de ecuaciones (4.1) y (4.2) es un subsistema, con dos incógnitas: 1) el precio de producción de los medios de producción, es decir, del capital constante; y 2) la tasa de ganancia, que no toma en cuenta la ecuación (4.3) para su solución. Aquí se trata de mostrar que, para las mercancías del departamento III, los bienes de lujo no son utilizados como instrumentos de producción en los otros departamentos.

Bortkievich propuso sustituir la expresión "teoría de la explotación" por "teoría de la deducción". Sin embargo, no corrigió en lo fundamental la teoría marxista.

SEGUNDA CONSECUENCIA

Por un lado, tenemos un plusvalor, una suma de precios y una suma de valor.

Cuando representamos las ecuaciones de valor

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{A\Lambda} + \mathbf{L}$$

y las ecuaciones de precios de producción

$$\mathbf{P} = (1+r)[\mathbf{AP} + \mathbf{L}w]$$

con

$$w = \mathbf{d} \cdot \mathbf{P}.$$

entonces aparece la tasa de ganancia. Por tanto, existen dos sistemas de valorización: 1) el sistema o espacio de valores, donde se define la tasa de explotación; y 2) el sistema de precios de producción, donde aparece la tasa de beneficio. Por eso la suma de plusvalores, por un lado, y la suma de los precios y la suma de valores, por el otro, *son inconmensurables*. La consistencia lógica que permite la construcción del sistema de precios y del sistema de valores, radica en que la comparación es imposible y la igualdad no verificable. Para ciertos casos particulares, se puede encontrar que la suma de beneficios y plusvalor, y la suma de precios y valores, se cumple. Para Bortkievich, las dos igualdades son inconmensurables y no tiene sentido su comparación.

EL ERROR DE BORTKIEVICH

Podemos aplicar a Bortkievich el mismo tipo de reproche que éste hizo a Marx. En efecto, cada uno de los tres sectores está compuesto por agregados. Por ejemplo, del sector I podemos decir que se trata de un conjunto de bienes diferentes de producción, producidos cada uno con composiciones orgánicas distintas. La composición orgánica del sector I, tal como aparece, sólo es una composición orgánica media. Las k composiciones orgánicas, en el sector I, no pueden aplicarse al capital constante bajo un coeficiente de transformación único. Lo mismo sucede con los dos sectores. Considerar un solo coeficiente de transformación, para cada sector, equivale a considerar que las diversas mercancías que constituyen el capital constante se intercambian a su valor, aunque para producirlas se necesiten composiciones orgánicas diferentes.

Ejemplo.

Sean dos bienes de producción, c_1 y c_2. Si se les aplica el coeficiente de transformación x, entonces xc_1 y xc_2, como relación de intercambio entre estos dos bienes de producción, es:

$$\frac{xc_1}{xc_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Es evidente que estamos en presencia de un intercambio de valores y no de precios de producción.

Por tanto, es necesario disgregar cada uno de los sectores y aplicar a cada elemento que los compone un coeficiente de transformación particular. Siguiendo la corrección de Bortkievich, no nos limitaremos a los agregados representados por cada sector; si no, cometemos el mismo error que nos proponemos corregir. Se establece una ecuación de precios a partir del valor, gracias a los coeficientes de transformación que se determinan para cada mercancía, ya sea ésta bien de producción, salario o bien de lujo. Como ya hemos visto, en un esquema de valor cada mercancía se establece en cantidades de trabajo. Llamemos L_{ij} a la cantidad de trabajo incorporado en la mercancía j, necesaria para la producción de la mercancía i, que incorpora la cantidad de trabajo L_i.

Sea

$$\mathbf{P} = (p_1, \ldots, p_n)$$

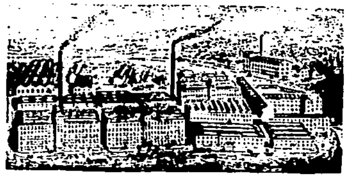
y entonces

$$(1+r)\begin{pmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{m1} & \cdots & L_{mm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 p_1 \\ \vdots \\ L_m p_m \end{pmatrix}$$

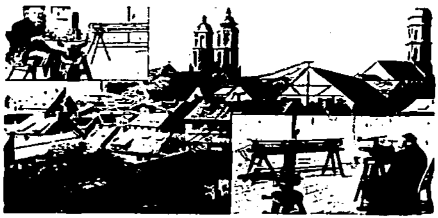
es la matriz $\mathbf{L}$ es $m x m$. Como hay k ecuaciones para el capital constante, b ecuaciones para el capital variable y r ecuaciones para la plusvalía, entonces $k + b + r = m$ ecuaciones. Tenemos m coeficientes por determinar P y la tasa de beneficio r'; es decir, m+1 incógnitas. Por tanto, a partir de los valores medidos en *unidades de trabajo* se puede pasar a *precios de producción*, con un coeficiente haciendo $p_m = 1$. También podemos pasar, a partir de dichos valores, a la misma problemática que la definida por Bortkievich, pero sin sus insuficiencias; es decir, sin los errores contenidos en su propio planteamiento. Como la matriz $\mathbf{L}$ y los L_i

son los únicos datos, entonces el conocimiento de los vectores es la condición previa lógica indispensable para la determinación de la tasa de ganancia y de los precios de producción".[1]

The Great Hall of Marshall's flax mill at Leeds, c. 1870. Although a 'late' picture, this illustrates well the separate pieces of belt-driven machinery with the operatives at work under their overseer. From *Great Industries of Great Britain*, London, undated



By the latter decades of the nineteenth century, the large factory was commonplace. J. & J. Clark's Anchor Thread Works at Paisley. From *Great Industries of Great Britain*, London, c. 1880.



A contemporary illustration showing Gauss and Weber with their electromagnetic telegraph. Courtesy of Fremdenverkehrsverein, Göttingen.

---

[1] BENETTI, Carlo *Valor y repartición*, FCE, México

Capítulo 5 APÉNDICE

SOBRE LA ACUMULACIÓN

En este capítulo presentaremos con un enfoque de matrices, el problema de la acumulación capitalista. La notación usada se presentará a continuación:

Sea

$\mathbf{A}$ = la matriz de coeficientes técnicos;

$\mathbf{L}$ = el vector de requerimientos de trabajo directo;

$\mathbf{d}$ = el vector canasta de bienes que recibe el trabajador por hora trabajada;

e = la tasa de explotación; y

$\mathbf{\Lambda}$ = el vector de valores.

Ahora

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{A\Lambda} + \mathbf{L} \tag{5.1}$$

Por definición,

$$e = \frac{1 - \mathbf{d}\cdot\mathbf{\Lambda}}{\mathbf{d}\cdot\mathbf{\Lambda}} \tag{5.2}$$

$$\Rightarrow e\mathbf{d}\cdot\mathbf{\Lambda} = 1 - \mathbf{d}\cdot\mathbf{\Lambda}$$

$$e\mathbf{d}\cdot\mathbf{\Lambda} + \mathbf{d}\cdot\mathbf{\Lambda} = 1.$$

Factorizando $\mathbf{d}\cdot\mathbf{\Lambda}$, entonces

$$(e+1)\mathbf{d}\cdot\mathbf{\Lambda} = 1 \tag{5.3}$$

y permutando, en la suma, tenemos que

$$(1+e)\mathbf{d}\cdot\mathbf{\Lambda} = 1\ .$$

Luego, sustituyendo (5.3) en (5.1), tenemos:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{A\Lambda} + \mathbf{L} = \mathbf{A\Lambda} + \mathbf{l}\cdot 1$$

$$= \mathbf{A\Lambda} + \mathbf{L} = \mathbf{A\Lambda} + \mathbf{l}\cdot((1+e)\mathbf{d}\cdot\mathbf{\Lambda})$$

y factorizando el vector Λ, en el segundo miembro de la igualdad, concluimos que

$$\mathbf{\Lambda} = [\mathbf{A} + \mathbf{l}\cdot((1+e)\mathbf{d})]\cdot\mathbf{\Lambda}. \tag{5.4}$$

Si en una economía, en el instante t, se producen mercancías cuyas cantidades físicas son:

$$\widetilde{\mathbf{Y}}^t = (y_1^t, \ldots y_n^t)\ ,$$

podemos, a partir de aquí, considerar al vector $\mathbf{Y}^t$:

$$\mathbf{Y}^t = (y_1^t, \ldots y_n^t, t) \in R_+^{n+1}.$$

Si multiplicamos el vector de cantidades físicas por el vector de valores de R_+^{n+1}, obtenemos el valor de las mercancías, medido en horas de trabajo:

$$\mathbf{Y}^t\cdot\mathbf{\Lambda} = \mathbf{Y}^t(\mathbf{A\Lambda} + \mathbf{L}) =$$

$$= \mathbf{Y}'\mathbf{A}\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{Y}^t \cdot \mathbf{L} =$$

$$= \mathbf{Y}'\mathbf{A}\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{Y}^t \cdot \mathbf{L}(1+e)\mathbf{d} \cdot \mathbf{L}$$

$$\mathbf{Y}'\cdot\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{Y}'\mathbf{A}\boldsymbol{\Lambda} + (\mathbf{Y}^t \cdot \mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{L}) + e(\mathbf{Y}'\cdot\mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\Lambda}) \ ,$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}'\mathbf{A}\boldsymbol{\Lambda} &= c \\ (\mathbf{Y}^t \cdot \mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{L}) &= v \ . \\ e(\mathbf{Y}'\cdot\mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\Lambda}) &= p \end{aligned} \tag{5.5}$$

Se supone que las mercancías se venden por su valor. El sistema productivo se mantiene a un nivel constante.

Supuestos:

1) Se reemplaza el valor del capital constante usado; es decir,

$$c = \mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{L} \ ;$$

2) Se reemplaza el valor de la fuerza de trabajo empleada, que es

$$v = (\mathbf{Y}^t \cdot \mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\Lambda}) \ ;$$

3) Se reemplazan las cantidades de medios de producción utilizados; es decir,

$$\mathbf{Y}'\mathbf{A} \ ;$$

4) Se precisa reemplazar los medios de subsistencia necesarios para la fuerza de trabajo; es decir,

$$(\mathbf{Y}^t \cdot \mathbf{L})\mathbf{d}.$$

El plusvalor p es igual a la tasa de explotación e, multiplicada por el valor del capital variable $(\mathbf{Y}^t \cdot \mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\Lambda})$

$$\Rightarrow p = e(\mathbf{Y}^t \cdot \mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\Lambda}).$$

Si este plusvalor se consume íntegramente por los capitalistas, entonces hay *reproducción simple.*

La reproducción ampliada se da a partir de la acumulación, es decir, cuando se transforma el plusvalor en capital.

¿Qué destino va a tener el excedente?

Hay dos destinos posibles para el plusvalor: 1) ser consumido; 2) ser ahorrado. Se hace abstracción del atesoramiento. Quien decide cómo se hace el reparto, es el capitalista.

Partimos de un excedente total:

$$p = \epsilon(\mathbf{Y^t} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda}).$$

Una parte, $\gamma \in (0,1)$, es ahorrada; es decir, usada como fondo de acumulación. El complemento $(1-\gamma)$ es consumido:

$$\Rightarrow \gamma\left[\epsilon(\mathbf{Y^t} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda})\right] + (1-\gamma)\left[\epsilon(\mathbf{Y^t} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda})\right]$$

donde lo acumulado es:

$$\gamma\left[\epsilon(\mathbf{Y^t} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda})\right]$$

y lo consumido:

$$(1-\gamma)\left[\epsilon(\mathbf{Y^t} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda})\right]. \tag{5.6}$$

Lo que interesa es el valor de cambio y el crecimiento continuo. La tendencia es que

$$\gamma \rightarrow 1.$$

Cada capital necesita crecer continuamente, ya que la competencia se presenta como una ley coercitiva externa, que presiona a cada capitalista y lo obliga a aumentar su capital. Éste aumenta sólo con la acumulación progresiva.

Acumular es conquistar el mundo de la riqueza social y significa extender el dominio personal, aumentando el número de sujetos bajo el comando capitalista. Si "para la economía clásica el proletariado no es más que una máquina para producir plusvalor, en justa reciprocidad el proletariado no ve tampoco, en el capitalista, más que una máquina para transformar este plusvalor en capital"[1].

Si k representa la composición orgánica del capital, vamos a definir esta composición como la relación entre capital constante y variable; es decir, entre

$$\mathbf{Y}^t\mathbf{A\Lambda} \text{ y } (\mathbf{Y^t} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda})$$

respectivamente. Si suponemos que la relación es constante para cada t,

$$\Rightarrow \Delta(\mathbf{Y}^t\mathbf{A\Lambda}) = k\Delta\left[(\mathbf{Y^t} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda})\right] \tag{5.7}$$

Se supone una ausencia de progreso técnico, para que se mantenga constante la composición orgánica. Los niveles de actividad económica se suponen variables. Se supone, además, que $\gamma \in (0,1)$.

La fracción γ de plusvalor que se dedica a la acumulación, es:

$$\Delta(\mathbf{Y}^t\mathbf{A\Lambda}) + \Delta\left[(\mathbf{Y^t} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda})\right] = \gamma\epsilon(\mathbf{Y^t} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda}). \tag{5.8}$$

Sustituyendo (5.7) en (5.8), nos queda:

$$k\Delta\left[(\mathbf{Y^t} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda})\right] + \Delta\left[(\mathbf{Y^t} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda})\right] = \gamma\epsilon(\mathbf{Y^t} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda}) \tag{5.9}$$

y multiplicando por

$$\frac{1}{(\mathbf{Y^t} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda})} \neq 0$$

[1] Marx, K. *El Capital* F.C.E. p. 500

tenemos:

$$\frac{k\Delta\left[(\mathbf{Y^t}\cdot\mathbf{L})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{\Lambda})\right]}{(\mathbf{Y^t}\cdot\mathbf{L})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{\Lambda})}+\frac{\Delta\left[(\mathbf{Y^t}\cdot\mathbf{L})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{\Lambda})\right]}{(\mathbf{Y^t}\cdot\mathbf{L})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{\Lambda})}=\gamma e. \tag{5.10}$$

Factorizando, resulta

$$(k+1)\frac{\Delta\left[(\mathbf{Y^t}\cdot\mathbf{L})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{\Lambda})\right]}{(\mathbf{Y^t}\cdot\mathbf{L})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{\Lambda})}=\gamma e \tag{5.11}$$

y dividiendo entre $(k+1)$.

$$\Rightarrow\frac{\Delta\left[(\mathbf{Y^t}\cdot\mathbf{L})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{\Lambda})\right]}{(\mathbf{Y^t}\cdot\mathbf{L})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{\Lambda})}=\frac{\gamma e}{(k+1)}. \tag{5.12}$$

En el numerador aparece el incremento del producto del capital variable por el capital constante y, en el denominador, el producto del capital variable por el constante. El cociente es igual a la división del escalar $\gamma\in(0,1)$, por la tasa de explotación e.

Ahora obtendremos la tasa de crecimiento relativo, en términos del capital constante.

Si

$$\Delta\left[(\mathbf{Y^t}\cdot\mathbf{L})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{\Lambda})\right]+\Delta\left[(\mathbf{Y^t}\cdot\mathbf{L})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{\Lambda})\right]=\gamma e(\mathbf{Y^t}\cdot\mathbf{L})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{\Lambda})$$

$$\Rightarrow\Delta\left[(\mathbf{Y^t}\cdot\mathbf{L})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{\Lambda})\right]=\frac{\Delta(\mathbf{Y'A\Lambda})}{k} \tag{5.13}$$

y

$$\Delta(\mathbf{Y'A\Lambda})+\frac{\Delta(\mathbf{Y'A\Lambda})}{k}=\gamma e(\mathbf{Y^t}\cdot\mathbf{L})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{\Lambda}) \tag{5.14}$$

Como la composición orgánica es constante:

$$\frac{\Delta c}{\Delta v}=\frac{c}{v}=k$$

$$\Rightarrow\frac{\Delta(\mathbf{Y'A\Lambda})}{\Delta\left[(\mathbf{Y^t}\cdot\mathbf{L})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{\Lambda})\right]}=\frac{\mathbf{Y'A\Lambda}}{(\mathbf{Y^t}\cdot\mathbf{L})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{\Lambda})}=k$$

$$\Rightarrow(\mathbf{Y^t}\cdot\mathbf{L})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{\Lambda})=\frac{\mathbf{Y'A\Lambda}}{k}. \tag{5.15}$$

Sustituyendo (5.15) en (5.14), tenemos:

$$\Delta(\mathbf{Y'A\Lambda})+\frac{\Delta(\mathbf{Y'A\Lambda})}{k}=\frac{\gamma e\mathbf{Y'A\Lambda}}{k} \tag{5.16}$$

y dividiendo $\mathbf{Y'A\Lambda}$ entre k, en la ecuación (5.16), obtenemos

$$\frac{\Delta(\mathbf{Y'A\Lambda})}{\mathbf{Y'A\Lambda}}+\frac{\Delta(\mathbf{Y'A\Lambda})}{k\mathbf{Y'A\Lambda}}=\frac{\gamma e}{k}.$$

Multiplicando ahora por k, tenemos

$$k\frac{\Delta(\mathbf{Y}^t\mathbf{A}\mathbf{A})}{\mathbf{Y}^t\mathbf{A}\mathbf{A}} + \frac{\Delta(\mathbf{Y}^t\mathbf{A}\mathbf{A})}{\mathbf{Y}^t\mathbf{A}\mathbf{A}} = \gamma\epsilon$$

y factorizando

$$(k+1)\frac{\Delta(\mathbf{Y}^t\mathbf{A}\mathbf{A})}{\mathbf{Y}^t\mathbf{A}\mathbf{A}} = \gamma\epsilon$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta(\mathbf{Y}^t\mathbf{A}\mathbf{A})}{\mathbf{Y}^t\mathbf{A}\mathbf{A}} = \frac{\gamma\epsilon}{(k+1)} \tag{5.17}$$

· es la tasa de crecimiento del capital constante.

Suponemos que la tasa de explotación constante, en el período t, es igual a la tasa de explotación para el período $t+1$. El valor total de las mercancías producidas, en el período $t+1$, es igual a:

$$\mathbf{Y}^t\mathbf{A} = \mathbf{Y}^t\mathbf{A}\mathbf{A}\left(1+\frac{\gamma\epsilon}{1+k}\right) + (\mathbf{Y}^t\cdot\mathbf{L})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{A})\left(1+\frac{\gamma\epsilon}{1+k}\right) +$$

$$+\epsilon(\mathbf{Y}^t\cdot\mathbf{L})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{A})\left(1+\frac{\gamma\epsilon}{1+k}\right)$$

Factorizando $\left(1+\frac{\gamma\epsilon}{1+k}\right)$, queda entonces:

$$\mathbf{Y}^t\mathbf{A} = \left(1+\frac{\gamma\epsilon}{1+k}\right)\left[\mathbf{Y}^t\mathbf{A}\mathbf{A} + (\mathbf{Y}^t\cdot\mathbf{L})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{L}) + \epsilon(\mathbf{Y}^t\cdot\mathbf{L})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{A})\right]$$

$$\mathbf{Y}^t\mathbf{A} = \mathbf{Y}^t\mathbf{A} + \mathbf{Y}^t\mathbf{A}\gamma\frac{\epsilon}{1+k}$$

y, finalmente,

$$\mathbf{Y}^t\mathbf{A} - \mathbf{Y}^t\mathbf{A} = \mathbf{Y}^t\mathbf{A}\gamma\frac{\epsilon}{1+k}. \tag{5.18}$$

Si definimos a g' como la tasa de expansión del sistema, escribimos

$$g' = \frac{\mathbf{Y}^{(t+1)}\mathbf{A} - \mathbf{Y}^t\mathbf{A}}{\mathbf{Y}^t\mathbf{A}} = \gamma\frac{\epsilon}{1+k} = \frac{\left(\mathbf{Y}^{(t+1)} - \mathbf{Y}^t\right)\mathbf{A}}{\mathbf{Y}^t\mathbf{A}}.$$

en donde $\mathbf{Y}^t$ y $\mathbf{Y}^{(t+1)}$ son vectores que representan producciones físicas heterogéneas.

CONCLUSIONES

i) La tasa relativa de expansión del sistema g' depende de tres variables:

$$g' = g'(\epsilon, \mathbf{d}, \mathbf{A}).$$

En palabras, g' depende de la tasa de explotación (ϵ); del nivel de salarios reales por trabajador ($\mathbf{d}$); y de la productividad del trabajo, en el sector que produce (directa o indirectamente) los bienes de salario ($\mathbf{A}$).

Si ϵ aumenta, entonces g' aumenta, suponiendo que γ y k permanezcan constantes.

$$\epsilon = \frac{1-\mathbf{d}\cdot\mathbf{A}}{\mathbf{d}\cdot\mathbf{A}}, \quad \gamma \in (0,1)$$

$$g' = g'(\gamma, c, k) = g'(\gamma, \frac{1 - \mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda}}{\mathbf{d} \cdot \mathbf{\Lambda}}, \frac{c}{r})$$

También g' depende de k, que representa la composición orgánica del capital. Si k aumenta, entonces g' *disminuirá*.

El tercer factor del que depende la tasa relativa de expansión del sistema es $\gamma \in (0, 1)$, que es el factor de propensión a la acumulación del plusvalor, de los capitalistas.

ii) En los modelos de Kaldor y Pasinetti se plantea la relación según la cual r, la tasa de ganancia, es igual a g; es decir, la tasa de crecimiento del sistema de partida, dividida por la propensión al ahorro de los capitalistas.

Si p es la masa de beneficios, k el stock de capital, r la tasa de ganancia, g la tasa de crecimiento y γ la propensión al ahorro de los capitalistas, estos modelos teóricos establecen que:

$$r = \frac{p}{k} = \frac{g}{c}.$$

La expresión

$$\frac{c}{q + k}$$

es la tasa de beneficio que definió Marx. La tasa de crecimiento global es igual a

$$g' = \gamma r$$

$$\Rightarrow r = \frac{g}{r}.$$

Patio de la Real y Pontificia Universidad de México, a principio del siglo XIX. De una antigua litografía de P. Gualdi. Este edificio fué completamente destruido a fines de dicho siglo por orden de D. Justo Sierra.

Capítulo 6 OTROS MODELOS LINEALES

En esta parte, sólo haremos mención de los rasgos más sobresalientes de algunas discusiones que involucraron modelos lineales en la problemática económica.

ROSA LUXEMBURG (1871-1919) Y LOS ESQUEMAS DE REPRODUCCIÓN

Rosa Luxemburg, en su libro *La Acumulación del Capital* (1913), precisó el papel de los mercados externos en el desarrollo del sistema capitalista. Con base en las ecuaciones de reproducción ampliada de Marx, intentó mostrar que el sistema debe encontrar continuamente mercados para desarrollarse y poder dar salida a sus mercancías, en particular en el caso de las colonias. Desde su origen, el capitalismo debe conquistar para extenderse y la forma hacia la que tiende es el imperialismo. Los mercados externos no sólo constituyen un beneficio extra, sino que también son vitales para la subsistencia capitalista.

Rosa Luxemburg basó sus planteamientos en el tomo II de *El Capital*, de Marx, aunque Lenin criticó esta forma de utilizar este fundamental escrito. Rosa Luxemburg de alguna manera quería unificar la obra de Marx y para ello integra, en el tomo I, los esquemas con las conclusiones del tomo III (donde Marx analiza en concreto el sistema capitalista). Veamos algunos razonamientos de Rosa Luxemburg en torno a estos puntos.

Cuando $\frac{c}{v} = \frac{\text{capital constante}}{\text{capital variable}}$ aumenta, ello conduce a desequilibrios. La oferta de bienes de consumo es superior a la demanda. Ejemplo:

Sea

$$c_I, c_{II}$$

el capital constante de los sectores I y II,

$$v_I, v_{II}$$

el capital variable,

$$p_I, p_{II}$$

la plusvalía y

$$r_I, r_{II}$$

la parte de la plusvalía destinada a comprar fuerza de trabajo. Entonces:

Período I

La oferta de medios de producción será:

$$l_I + v_I + p_I = 44 + 11 + 11 = 66$$

y la oferta de bienes de consumo:

$$c_{II} + v_{II} + p_{II} = 16 + 4 + 4 = 24.$$

Por tanto la relación $\frac{c}{v}$, para el sector I, es

$$\frac{c}{v} = \frac{44}{11} = 4$$

y para el sector II
$$\frac{c}{v} = \frac{16}{4} = 4.$$
Como se observa, la tasa de plusvalor en ambos sectores es del 100 %.

Supongamos ahora que la mitad de la plusvalía se divide de nuevo en compra de medios de producción y fuerza de trabajo, en la misma proporción que 4; es decir, que la relación c/v sea constante.

Entonces, el plusvalor acumulado es p_{II} es igual a 2 y se divide en la suma

$$p_{c_{II}} + p_{v_{II}} = 1.6c + 0.4v = 2.$$

La oferta de medios de producción, por tanto, es igual a 66 y la demanda de medios de producción es también 66:

$$c_I + c_{II} + p_{c_{II}} + p_{v_{II}} = 44 + 16 + 4.4 + 1.6 = 66.$$

Por consiguiente, la oferta de medios de producción es igual a la demanda de medios de producción.

Para el sector II, productor de bienes de consumo, tenemos una oferta de bienes de consumo igual a 24. La demanda de bienes de consumo es

$$c_I + c_{II} + r_I + r_{II} + p_{c_{II}} + p_{v_{II}} = 11 + 4 + 5.5 + 2 + 1.1 + 0.4 = 24.$$

Esto es, la oferta de bienes de consumo iguala a la demanda de bienes de consumo.

Supongamos ahora que aumenta la productividad del trabajo. Entonces c/v aumenta de 1 a 7 y la plusvalía acumulada, p_{II}, en el segundo sector, se divide en la suma
$$p_{II} = 2 = 1.75c + 0.25v;$$
en donde 1.75 se destina a comprar capital constante (c) y 0.25 a comprar capital variable (v).

La oferta de medios de producción es igual a 66 y la demanda de medios de producción a 66.55:

$$c_I + c_{II} + p_{c_{II}} + p_{v_{II}} = 44 + 16 + 4.8 + 1.75 = 66.55.$$

La oferta de medios de producción es menor que la demanda de medios de producción, en el sector II.

Por otra parte, la oferta de bienes de consumo igual a 24 y la demanda de bienes de consumo es de 23.45:

$$c_I + c_{II} + r_I + r_{II} + p_{c_{II}} + p_{v_{II}} = 11 + 4 + 5.5 + 2 + 0.7 + 0.25 = 23.45.$$

La oferta de bienes de consumo es mayor que la demanda de bienes de consumo (24 > 23.45).

Si la reproducción es ampliada, habrá un déficit creciente de medios de producción y un excedente de bienes de consumo.

La existencia de mercados externos posibilita la venta del excedente de producción de bienes de consumo, al darse la metamorfosis $M - D$. Esta operación permite materializar la demanda excedente del capital constante, con relación a la oferta.

Si se exporta el excedente de bienes de consumo, entonces se posibilita la importación de capital constante. Los mercados externos cumplen la función de ser demanda de bienes de consumo y le dan al sector I materias primas como parte del capital constante, que es deficitario.

Para Rosa Luxemburg, los mercados externos no implicaban espacios económicos fuera de las fronteras nacionales, sino de la esfera capitalista misma. Corresponden a nociones ya establecidas de economía social. El mercado interno es un concepto que comprende tanto a las fronteras nacionales como a los territorios externos, si se toma desde el punto de vista de la producción capitalista. El mercado externo, en cambio, es el medio social que lo rodea, dentro o fuera de las fronteras nacionales.

Dicho de otra manera, los mercados externos precapitalistas definirían tanto una demanda (de bienes de consumo) como una oferta (de materias primas), necesarias para el capitalismo. La contradicción principal se expresa en que sólo puede extenderse bajo la condición de absorber colonias. Las colonias se vuelven capitalistas y pierden con ello su carácter de mercados externos, para absorber el excedente de lo producido dentro de la esfera capitalista. Rosa Luxemburg afirmó que el modo capitalista de producción, para expandirse, necesita desarrollar una economía de guerra para anexionarse tierras ya invadidas, aunque éstas hayan perdido su carácter de mercados externos. Para modificar estas condiciones, se requiriría del asalto del proletariado.

Lenin criticó el papel que le asignó Rosa Luxemburg a las ecuaciones de reproducción. Ellas forman un instrumento de análisis de las condiciones abstractas de equilibrio contable y no del funcionamiento real del sistema, bajo el conjunto de sus contradicciones. Las ecuaciones de reproducción sólo dan condiciones teóricas de una reproducción equilibrada del capital, como condiciones de continuidad de la acumulación y de la producción capitalista en su conjunto, estando determinadas por las proporciones que deben cumplir en el intercambio los sectores I y II. No considera la lucha de clases, la competencia capitalista, ni el desarrollo desigual y combinado entre ramas, regiones y países. En general, los esquemas no pueden explicar en concreto el desarrollo del capitalismo.

Las funciones que cumplen las ecuaciones de reproducción, al analizar las condiciones de una reproducción ampliada del capital, son las condiciones de continuidad de la acumulación y de la producción capitalista, en conjunto, con una visión muy teórica.

Lenin debatió con los populistas y "marxistas legales" el uso erróneo de las ecuaciones de reproducción ampliada. Los "marxistas legales" (Struve, Bulgakof y Tugan-Baranovsky) intentaron demostrar que el capitalismo, en general (el de Rusia, en particular), era susceptible de un desarrollo ilimitado de las fuerzas productivas y, por tanto, *el capitalismo sería eterno*[1]. Entonces no valdría la teoría socialista.

En consecuencia, los esquemas sólo serían un marco de referencia de las condiciones del equilibrio contable y no podrían explicarnos ni la causa ni el surgimiento de la crisis capitalista.

[1] Algo así como *El Fin de la Historia*, de Fukuyama

LOS PLANIFICADORES SOVIÉTICOS

Durante los primeros años de la construcción socialista en la URSS, se comenzaron proyectos de investigación sobre balances económicos de tipo cuantitativo, principalmente en torno a cereales y combustibles. En 1924 el Gobierno comenzó a compilar el primer balance de la economía nacional abarcando el período 1923-1924, año en que se publica un escrito titulado *Relación de la producción expandida*[2]. Los resultados de estos balances se publicaron en diversas revistas soviéticas.

El balance de la producción y del uso del producto social se dividieron en ramas: *cuatro*, para la industria de la extracción; y *once*, para la manufacturera. La construcción y la impresión también se distinguieron como ramas independientes. Los productos finales, materias primas y materiales, combustibles y bienes de equipo, se consideraron en ramas separadas.

Los soviéticos fueron tal vez los primeros en preocuparse por planificar su economía. Es así como se abre, en el Instituto Universitario de Matemáticas e Ingeniería de Leningrado, una cátedra de planeación o programación matemática, como técnica para resolver ciertos problemas de producción asociados al logro de planes óptimos para la madera, actividades en las que era necesario programar metas relacionadas con una gama de productos. El conocimiento público de esta técnica data de la publicación de los *Métodos matemáticos de organización y planificación de la producción*, del profesor L. V. Kantoróvich, quien la denominó "*método del multiplicador de resolución*". Posteriormente, en Europa Occidental, se la conoció como técnica de "*programación lineal*".

Uno de los planificadores soviéticos más sobresalientes fue sin duda Leontief, quien estudió en la Universidad de Leningrado. Leontief fue uno de los primeros en darle una mayor formalización matemática a las ecuaciones de balance (insumo-producto), tal como lo habían sugerido L. Walras y V. K. Dimitriev, en 1904.

Esta caricatura holandesa de c. 1900 lo denomina "el hombre del siglo".

[2] *Balance de la economía nacional de la URSS para 1923-1924*, en transacciones de la Comisión Central de Estadística de la URSS, Vol 29, Moscú, 1926.

Capítulo 7 LOS MARGINALISTAS

Los *marginalistas* constituyeron una escuela de pensamiento económico que se centró en aspectos de la economía muy diferentes a los que ocuparon la atención de los economistas clásicos, ya que le dieron mayor importancia a las visiones de largo plazo y a una perspectiva dinámica de la economía, que algunos calificaron de "grandiosa". Además, pusieron el acento en los problemas de la acumulación de capital, del crecimiento económico y en el desarrollo general del sistema económico.

A partir de 1870 se produjo un cambio completo de perspectiva para enfocar los problemas económicos, cuando los problemas analíticos se transformaron. A diferencia de los clásicos, los autores neoclásicos marginalistas fundamentaron la hipótesis de una oferta dada de factores de producción, disponible en cantidad fija. En suma, el objeto esencial de estudio se centró en la afectación óptima (la mejor posible), con usos alternativos concurrentes, de una fuente determinada.

¿Qué puede hacer un consumidor que dispone de un presupuesto determinado, para alcanzar la situación óptima?

¿Cómo puede un productor actuar, para obtener una ganancia mayor a partir de una cantidad dada?

En términos generales, los marginalistas reemplazaron la teoría clásica del desarrollo económico por un razonamiento de *equilibrio general*, dentro de un marco esencialmente estático, en donde se deben encontrar las modalidades de afectación y las modalidades de asignación, cuando existen recursos escasos. El concepto económico fundamental fue el de *escasez*, en cuyo caso los clásicos razonaban sobre la hipótesis de *reproducibilidad*, porque se encontraban situados en una perspectiva temporal diferente.

CARACTERÍSTICAS DE LA "REVOLUCIÓN" MARGINALISTA

En la segunda mitad del siglo pasado, se estaba asistiendo a una verdadera desintegración de la economía política clásica. A partir de 1850 **J. S. Mill**, el sucesor de David Ricardo, abandonó explícitamente la teoría del valor trabajo y **León Walras** hizo una exposición extremadamente crítica acerca de la teoría ricardiana en su *Elementos de Economía Pura*, buscando refutar la "teoría inglesa del precio de los productos" y la "teoría inglesa del arrendamiento".

Los neoclásicos de aquella época adoptaron una teoría *subjetiva* del valor, lo cual era coherente con lo que en aquel momento caracterizaba su posición. Algunos autores tratan de ubicar a dichos neoclásicos dentro del conjunto de las corrientes económicas europeas, a partir de 1850. En el continente europeo dominaba entonces *la teoría de la utilidad*, sobre todo en Francia y en Italia.

Recolección de café por esclavos negros brasileños, grabado de Rugendas. Biblioteca Nacional, São Paulo. Foto Archivo Titus.

Castigo público de esclavos en la plaza de Santa Ana de Río, grabado de Rugendas. Biblioteca Nacional, São Paulo. Foto Archivo Titus.

El centro de los análisis apuntaba a las decisiones nacionales del sujeto económico. Dicho sujeto económico era aprehendido a partir de su comportamiento en la producción o en el consumo, con una psicología que a fin de cuentas resultaba bastante poco diversificada.

Uno de los neoclásicos más destacados de aquella época fue **Nicolás Bujarin** (1888-1938), economista ruso, quien en su obra *La economía de la Renta* (1919) sostiene que la psicología de los consumidores apunta básicamente a la renta.

La corriente neoclásica, en general, representaba los intereses de la burguesía, la que por supuesto quería eliminar la idea de la lucha de clases en el proceso de producción. Pero a medida que se fue profundizando el desarrollo económico, se disoció la relación entre rentista y empresario y se fueron acentuando las diferencias entre empresarios y trabajadores, siendo ahora el administrador una persona encargada de asignar capitales distinto del empresario, aunque ambos sostengan la misma ideología.

El desarrollo económico fue en lo sucesivo considerado por los marginalistas como un hecho conocido, además de que los problemas del estancamiento a largo plazo desaparecieron de su preocupación. La explicación acerca de por qué apareció el marginalismo y su posterior desarrollo, la expresa la economía "burguesa" académica tradicional como oposición al marxismo. No es fácil responder a esta pregunta en forma categórica, pero, a partir de 1880, hubo quienes desarrollaron su crítica del marxismo oponiéndole a éste los conceptos que los neoclásicos habían creado.

Los fundadores de la corriente neoclásica desarrollaron su pensamiento independientemente de toda referencia al marxismo. Y en esta misma dirección podemos decir que si el primer tomo de *El Capital* apareció en 1867, los primeros trabajos de **S. Jevons** se remontan a 1862. Una crítica más específicamente centrada en responder a los marxistas se produjo en una *fase posterior* al desarrollo del pensamiento neoclásico y no propiamente en sus inicios.

UNIDAD Y DIFERENCIA ENTRE LOS NEOCLÁSICOS

Los "nuevos" clásicos, disidentes contestatarios de la escuela clásica, se caracterizaron por establecer cambios tanto en la dirección del objeto de análisis, como en el cuadro temporal examinado:

1) El primer punto concierne a la *naturaleza del capital* y a la definición misma del término. Para los clásicos, el capital aparecía esencialmente como un *avance de dinero* aportado por los capitalistas, quienes no sólo esperaban recuperar este "avance", sino, incluso, incrementarlo. Para los neoclásicos, en cambio, el capital era considerado solamente como una *herramienta de producción*, un conjunto de instrumentos que contribuía a la producción de manera física:

2) Una segunda oposición se manifestó al nivel de la *teoría del valor*. Según los neoclásicos, se tiene una *teoría simétrica del valor* cuando "el" capital y "el" trabajo tienen funciones de equilibrio simétricas. Por el contrario, para la visión clásica, el trabajo sólo juega un papel secundario en la definición misma:

3) El tercer problema concierne a la *repartición de la renta* global. Para los clásicos, hay un *enfrentamiento de clases sociales* (capitalistas, trabajadores, terratenientes) y la repartición aparece, ampliamente, como una deducción operada sobre la ganancia producida, en donde el papel del trabajo (la fuerza de trabajo) era

esencial, si acaso exclusiva, en la formación de esta ganancia. Para los neoclásicos la óptica era muy diferente y aparece mucho más "pacífica". Eluden o soslayan razonar en términos de clases sociales, evitando el enfrentamiento en esta dirección analítica.

Los neoclásicos basaron sus enfoques en términos de *factores de producción:* tierra, trabajo, capital. Cada uno de estos factores de producción recibe una compensación cuyo nombre es distinto: venta, salario, ganancia e interés. Pero el principio de determinación es idéntico. Para los clásicos, *la renta* es recibida por los propietarios de las tierras, *la ganancia* por los capitalistas y empresarios y *el salario* por los trabajadores. Para la óptica neoclásica, sin embargo, se hace necesaria la participación activa de los factores de producción: tierra, capital, trabajo.

Entre los neoclásicos hay diferencias y se pueden considerar, entre ellos, tres grandes corrientes de pensamiento.

LA ESCUELA DE VIENA Y LA TEORÍA DE LA UTILIDAD MARGINAL

La escuela de Viena se desarrolló en el último tercio del siglo XIX, a partir de los trabajos de **Karl Menger** (1840-1921), uno de los tres pioneros en la materia. (Los otros dos son S. Jevons y L. Walras, ya citados). Para los clásicos, *el valor* derivaba de sus características intrínsecas, *objetivas* (teorías objetivas del valor), pero para la escuela de Viena esto no era así, como tampoco lo era para el conjunto de los neoclásicos. El valor de un bien se fundaba más propiamente en la capacidad que tenía ese bien (o más exactamente, una cantidad determinada de ese bien) para satisfacer las necesidades de los sujetos, los llamados *agentes económicos.*

En sus inicios, la primera escuela de Viena va a caracterizar el sistema de **K. Menger**, pero es de justicia citar también a **Eugen Böhm-Bawerk** (1851-1914) y a **F. Von Wieser** (1851-1926).

A partir de 1920 se desarrolló *la escuela neomarginalista*, derivada naturalmente de la escuela de Viena. En su nombre, se ha convenido en llamar *neomarginalismo* a la teoría del cálculo económico que hace la apología del sistema liberal. **Friedrich August von Hayec** (1899-) es particularmente representativo de esta corriente.

LA ESCUELA DE LAUSANA Y LA TEORÍA DEL EQUILIBRIO ECONÓMICO GENERAL

León Walras (1834-1910) fue un distinguido catedrático de Lausana, a tal grado que sus enseñanzas llegaron a constituir una escuela de pensamiento económico. De allí salió su sucesor, **Vilfredo Pareto** (1848-1923).

Esta corriente de pensamiento ignoraba la teoría de la utilidad marginal, que Walras fue uno de los primeros en enfatizar. Este mismo autor esbozó un esquema de *interdependencia general* en donde el papel del empresario, disociado del papel que juega el capitalista, aparecía jugando un rol fundamental. De esta forma, el empresario aseguraba la unión entre los mercados de productos y los mercados de los factores de producción.

Para llevar a bien la actividad de producción o alquiler de los servicios del mismo, el empresario intervenía, como comprador, sobre los mercados de factores (tierra, trabajo, capitales, etc.); y, como vendedor, en los mercados de bienes (y servicios) que se producían en los mercados de productos. Cada empresario estaba, así, en una situación de *concurrencia pura* y en equilibrio, debiendo existir una igualdad entre el precio de venta y el precio de la reventa y el costo de producción, incluyendo allí la remuneración, a tasa normal, del conjunto de los factores de producción.

El problema del *equilibrio* ocupaba el centro de las preocupaciones de los integrantes de la escuela de Lausana. Los autores buscaban definir las condiciones para la existencia de un equilibrio estable, aceptándolo entonces bajo el supuesto de que, al existir las fuerzas del mercado, automáticamente se compensarían las desviaciones y ello permitiría el regreso al equilibrio, en el conjunto de los mercados. En otras palabras, se recuperaba el *equilibrio económico general* (del cual se hablará con algún detalle más adelante).

Se debe mencionar aquí que L. Walras fue fuertemente influido por el francés **Agustin Cournot** (1801-1877), quien fuera primeramente profesor de matemáticas y después inspector de enseñanza. Entre sus principales obras figura su *Traité de l'enchaînement des idées fundamentales dans les sciences et dans l'histoire*. En 1838 publica *Principes mathematiques de la theorie des richesses*, obra considerada el punto de partida de la teoría matemática de la economía.

La escuela de Lausana fue posteriormente continuada por el británico **John Richard Hicks** (1904- ?), premio Nobel de Economía 1972. *Value and Capital* (1934) es considerada una de sus principales obras.

LA ESCUELA DE CAMBRIDGE Y LA TEORÍA DEL EQUILIBRIO PARCIAL.

Alfred Marshall (1842-1924) es el principal representante de esta escuela. Una de sus principales obras es *Principles of Economics*, publicada en 1870. Esta obra influyó notoriamente en J.M. Keynes, quien vio en ella el inicio de la era moderna de la ciencia económica británica.

En sus análisis Marshall tenía en cuenta, por supuesto, los problemas de la interdependencia de los factores que contribuyen al equilibrio general en un sistema económico dado, pero prefirió razonar en términos de una situación de *equilibrio parcial*, que él mismo juzgó manejable y más cómoda. Este autor se basaba en el concepto de *"firmas representativas"*, en donde era necesario considerar firmas de tamaño mediano (de mediana importancia) frente al resto de la economía de tal manera, que produjeran una mercancía particular que no absorbiera más que una pequeña parte (relativamente mínima) de la renta de los consumidores.

Marshall analizó enseguida las interacciones del sistema económico. Para este autor, la economía no era otra cosa más que un efecto de interdependencia, por lo que parecía ser útil estudiar los cambios (las perturbaciones) que se produjeran en la economía, en tres fases:

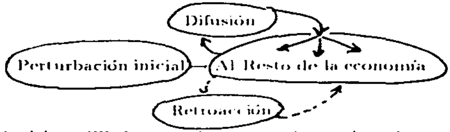
(i) el efecto de impacto, de una modificación inicial;

(ii) la difusión de esta modificación, en los otros sectores de la economía; y

(iii) la rotación de las modificaciones, en el sector donde el impacto de origen tuvo lugar.

Visualmente, una perturbación que se produce en el sector A puede deberse a una ruptura en el aprovisionamiento de las materias primas, debido, por ejemplo, a una tempestad o una guerra; o bien, a una modificación de los costos de producción, por efectos del progreso tecnológico; o también, a las diferencias de venta del producto fabricado; etc.

Las modificaciones introducidas al nivel del sector A vienen a irrumpir en los otros sectores de la economía y acarrean cambios, tanto en la relación de los precios como en las cantidades producidas (y demandadas). Algunos de estos cambios pueden retroactuar sobre el sector A y así sucesivamente.



En el análisis del equilibrio parcial, se suponía que los efectos de retroacción o interacción eran débiles y podían ser ignorados. Por ejemplo, si se producía un aumento en la producción de dulces, dentro de la industria correspondiente, la interacción era despreciable; pero si se producía en la industria del acero, esto ocasionaría el aumento de los precios en el resto de las industrias, especialmente en aquellas que dependían de dicho metal. La interacción débil, por consiguiente, sólo tenía validez para un pequeño número de industrias.

A Marshall le siguió, como representante de la escuela de Cambridge, **A. C. Pigou** (1877-1959), quien sería el blanco favorito de Keynes en su *Teoría general del Empleo, el interés y el Dinero* (1936).[1]

CONCLUSIONES

El conjunto de los neoclásicos, en tanto fervientes abogados defensores del liberalismo, son asimismo defensores indiscutibles del capitalismo. En general, todos ellos han manifestado y profesado una aversión real contra el *marxismo*, en especial contra el socialismo revolucionario. También se han manifestado contra la intervención del Estado en la vida económica. Pero entre ellos es posible detectar diferencias.

Los estudios de estas escuelas culminaron en planteamientos un tanto axiomáticos.

¿Se puede suponer que el productor busca maximizar su ganancia, cualesquiera que sean las reglas de gestión que el economista pueda dar?

El *principio de maximización* es fundamental dentro del análisis marginalista. Utiliza un gran instrumental matemático, muy formulado. Busca maximizar una función (llamada *de utilidad* o dirigida hacia el logro de una *utilidad*), maximización sujeta a restricciones. El productor busca maximizar su ganancia (utilidad) aplicando restricciones al monto de los recursos de que dispone, habida cuenta de que los recursos financieros totales disponibles sean recursos propios o aquellos

[1] No confundir la corriente de pensamiento económico "nueva escuela de Cambridge", con la corriente de pensamiento pos-keynesiano y crítica de la ortodoxia neoclásica. Esta escuela tomó fuerza a partir de 1950 y algunos de sus representantes distinguidos son N. Kaldor, L. Pasinetti, J. Robinson y P. Sraffa.

Sustitutos del pan, grabado satírico de fines del siglo XVIII alusivo a los nuevos impuestos obra de Gillray. Foto Colour Library International.

La hora de la comida, *por Eyre Crowe. Haigh Hall Museum, Wigan.*

Un desplazamiento de riquezas tan manifiesto como el que se produjo del siglo XVI al XVIII no actuó en forma idéntica sobre los beneficiarios y sobre las víctimas. Foto Colour Library International.

que tiene en caja. Las restricciones presupuestales aplicadas, por tanto, tienden a maximizar sus utilidades.

Para el *consumidor,* habrá que suponer que busca maximizar su utilidad sobre las restricciones del presupuesto total o monto de la renta de que dispone. Es la idea de *racionalidad limitada,* restringida. La limitación se basa esencialmente en la hipótesis de un comportamiento con restricciones (de las funciones objetivo de su contenido, esencialmente limitadas), en donde sitúa su análisis. Dicho análisis es *microeconómico y* razona sobre la base de un equilibrio.

LA TEORÍA DE LA PRODUCCIÓN DE LEÓN WALRAS

El fenómeno productivo fue planteado originalmente por Walras, en términos de *coeficientes de producción.* Por esta razón, se le considera como uno de los economistas que más contribuyera a la teoría de las relaciones intersectoriales que profundizaría más tarde Leontief. Por esta razón, en esta parte solamente se hará énfasis en la teoría de la producción de Walras y la relación que ésta tiene con la teoría de Leontief.

TEORÍA DE LA PRODUCCIÓN DE WALRAS

Walras empleó las siguientes ecuaciones generales de producción:

1) Los m productos terminados (consumidos), dentro de un período de tiempo dado:

$$(A, B, C, \ldots) = M \in \mathbf{R}^m_+$$

2) Los n servicios productivos de la tierra, por unidad de tiempo:

$$(T, T', T'', \ldots) = T \in \mathbf{R}^n_+$$

los servicios de trabajo, por unidad de tiempo:

$$(P, P', P'', \ldots) = P$$

y los servicios de capital, por unidad de tiempo:

$$(K, K', K'', \ldots) = K$$

3) Las funciones de utilidad marginal del individuo, para cualquier bien:

$$r = \Phi(q).$$

Cada individuo, a su vez, posee una función de utilidad para servicios productivos y para bienes de consumo.

4) Vectores de precios, dados al individuo:

$$\left.\begin{aligned} P_T &= (p_T, p_{T'}, p_{T''}, \ldots) \\ p_P &= (p_P, p_{P'}, p_{P''}, \ldots) \\ P_K &= (p_k, p_{K'}, p_{K''}, \ldots) \end{aligned}\right\} \text{por los servicios productivos}$$

$$P_M = (*, p_b, p_c, \ldots) \text{ precios de bienes de consumo}$$

$p_a = 1$ *numerario.* Todos los precios se definen en términos del *numerario,* como mercancía A.

5) Cada individuo posee cantidades iniciales de dinero, dadas por los servicios productivos:

$$(q_T, q_K, q_P, \ldots) = q,$$

en donde q representa las cantidades demandadas y suministradas de servicios productivos. Si $q > 0$, entonces son ofrecidas:

$$(o_T, o_P, o_K, \ldots) = 0$$

y si $q < 0$, entonces se trata de cantidades demandadas.

$\mathbf{d} = (d_a, d_b, d_c, \ldots)$, representa el vector de bienes terminados, demandados a precios de equilibrio.

6) Los coeficientes técnicos de producción se representan por:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_t & a_k & a_p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_t & b_k & b_p & \cdots \end{pmatrix}.$$

En las primeras tres ediciones de los *Elementos*, estos coeficientes se suponen que están determinados por factores de tipo técnico, aceptándose, de hecho, que son variables.

En 1926 Walras hace la promesa de determinar con rigurosidad, en fecha posterior, estos coeficientes técnicos.

Se establecen las condiciones de equilibrio general, para el individuo:

$$\underset{\text{consumo = demanda}}{O \cdot \hat{P} = d \cdot P, \quad \hat{P} = (P_T, P_P, P_K, \ldots)} \tag{7.1}$$

A esta relación se la conoce como la condición general de *satisfacción máxima* o ley de Say.

Esta Ley contiene $m + n - 1$ ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned} \Phi_t(q_t - o_t) &= P_t\Phi_a(d_a) \\ \Phi_p(q_p - o_p) &= P_t\Phi_a(d_a) \\ &\vdots \end{aligned}\right\} n \text{ ecuaciones}$$

$$\left.\begin{aligned} \Phi_a(d_a) &= p_a\Phi_a(d_a) \\ \Phi_b(d_b) &= p_b\Phi_a(d_a) \\ \Phi_c(d_c) &= p_b\Phi_a(d_a) \\ &\vdots \end{aligned}\right\} m \text{ ecuaciones} \tag{7.2}$$

lo que da un total de $m + n$ ecuaciones, en donde:

$\Phi_a(d_a)$ representa una constante de proporcionalidad; y

$q_i - o_i$ representa la utilidad marginal (lo que tiene y lo que ofrece).

Las incógnitas son:

$$(o_t, o_p, o_k, \ldots) = o \in R^m \ldots, d = (d_a, d_b, d_c, \ldots) \in R^n$$

es decir, m y n, respectivamente. Estas indeterminadas deben expresarse en términos de los precios, que son fijos y conocidos, para cada individuo. A su vez, las funciones de demanda están aseguradas por:

$$\begin{aligned} o_t &= f_t\left(\hat{P}, P_m\right) \\ o_p &= f_p\left(\hat{P}, P_n\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Las ecuaciones de oferta se pueden despejar, porque hay $n+m$ ecuaciones y $n+m$ incógnitas.

De acuerdo a las mercancías, las funciones de demanda para cada individuo son:

$$\begin{aligned} d_a &= f_a\left(\hat{P}, P_n\right) \\ d_b &= f_b\left(\hat{P}, P_m\right) \\ d_c &= f_c\left(\hat{P}, P_n\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

en donde la demanda, para A, está asegurada por la ecuación (6.1).

En el caso del *equilibrio general* del mercado, se emplean tres conjuntos adicionales de símbolos:

$O_t = \sum o_t$ representa el suministro total de tierra.

$D_a = \sum d_a$

$F_t = \sum f_t$

El equilibrio de mercado general se define por cuatro conjuntos de ecuaciones:

i) Las cantidades de servicios productivos proporcionados, son funciones de los precios dentro de un total de n ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} O_t &= F_t\left(\hat{P}, P_m\right) \\ O_p &= F_p\left(\hat{P}, P_n\right) \\ &\vdots \end{aligned}\right\};$$

ii) Las cantidades de bienes terminados (demandados) son funciones de los precios:

$$\left.\begin{aligned} D_a &= F_a\left(\hat{P}, P_n\right) \\ D_b &= F_b\left(\hat{P}, P_m\right) \\ D_c &= F_c\left(\hat{P}, P_n\right) \\ &\vdots \end{aligned}\right\};$$

$$D_a = O\cdot\hat{P} - (D_bP_b + D_cP_c + \cdots) = O\cdot\hat{P}$$

iii) La cantidad de servicios empleados, debe ser igual a la cantidad ofrecida:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{D} = O\left\{\begin{aligned} D &= (D_a, D_b, D_c, \ldots) \\ O &= (O_t, O_p, \ldots) \end{aligned}\right. \tag{7.3}$$

que contiene un total de n ecuaciones; y *iv)* Los costos de producción deben igualar a los precios:

$$\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{P}} = d \,. \tag{7.4}$$

relación que también contiene un total de m ecuaciones.

Walras no da ninguna indicación acerca de las condiciones económicas del empresario individual.

Este sistema registra un en total de $2m + 2n$ ecuaciones.

	Indeterminadas	Número
I.	Cantidades de servicios productivos ofrecidos $(O_t, O_p, \ldots) = \mathbf{O}$	n
II.	Cantidades de bienes terminados demandados $(D_a, D_b, \ldots) = \mathbf{D}$	m
III.	Precios de los servicios productivos $(p_t, p_s, p_k, \ldots) = \hat{\mathbf{p}}$	n
IV.	Precios de los bienes terminados $(p_a, p_b, p_c, \ldots) = \mathbf{p}$	m
		$2m + 2n$

Los empresarios ni ganan ni pierden; por tanto, los gastos de cada clase se pueden considerar proporcionales.

La teoría del equilibrio económico general de Walras trató de mostrar que, bajo competencia perfecta, el pleno empleo de recursos es compatible con el deseo de cada individuo por maximizar su ganancia, a partir de sus recursos disponibles.

UN CONTRAEJEMPLO

Cuando los coeficientes de producción son fijos, no se puede medir la productividad marginal en términos de una cantidad física de producto.

La productividad marginal de un factor es la suma algebraica de los valores de diversas mercancías. La medición de la productividad de un factor requiere, por tanto, de la introducción de un sistema de valores relativos.

Supongamos una economía que produce dos mercancías, A y B, utilizando sólo 2 factores de producción, x e y, en proporciones definidas por los coeficientes de producción a_x y a_y, para A; y b_x y b_y, para B. Entonces tendremos los siguientes vectores:

$$(a_x, a_y), (b_x, b_y).$$

Supongamos que la proporción requerida de x es mayor que la requerida para B:

$$\Rightarrow \frac{a_x}{a_y} > \frac{b_x}{b_y}.$$

En este caso, el incremento marginal de la cantidad disponible de x, permaneciendo constante y, nos permitirá aumentar la cantidad producida de B. La "productividad marginal" de x queda definida, entonces, por la diferencia entre el valor del incremento de A y el valor de la disminución de B. Pero bajo equilibrio de competencia, el precio del incremento marginal de x sería igual a esa diferencia.

Si renunciamos a una unidad de B, quedarán disponibles b_x unidades de x y b_y unidades de y. Con ellas podemos producir $\frac{b_y}{a_y}$ unidades de A, siempre que podamos disponer de $\left(\frac{b_y}{a_y}a_x - b_x\right)$ unidades adicionales de x. Así, pues, si el vector de precios (p_a, p_b, px) de (A, B, X) está en equilibrio, entonces tendremos, respectivamente:

$$p_x = \frac{\left(\frac{b_y}{a_y}p_a - p_b\right)}{\left(\frac{b_y}{a_y}a_x - b_x\right)}.$$

Con un procedimiento análogo,

$$p_y = \frac{\left(\frac{b_x}{a_x}p_a - p_b\right)}{\left(\frac{b_x}{a_x}a_y - b_y\right)}$$

$$(p_x, p_y) = \left(\frac{\left(\frac{b_y}{a_y}p_a - p_b\right)}{\left(\frac{b_y}{a_y}a_x - b_x\right)}, \frac{\left(\frac{b_x}{a_x}p_a - p_b\right)}{\left(\frac{b_x}{a_x}a_y - b_y\right)}\right),$$

queremos demostrar que la introducción de una elasticidad de la oferta, para usos productivos de los servicios, modifica las ecuaciones obtenidas bajo la suposición de que las cantidades de los servicios disponibles, para usos productivos, están dadas.

Ahora queremos demostrar que es imposible determinar (p_x, p_y), cuando

$$\frac{a_x}{a_y} = \frac{b_x}{b_y}.$$

En efecto, si

$$\frac{a_x}{a_y} = \frac{b_x}{b_y} \Rightarrow \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y}.$$

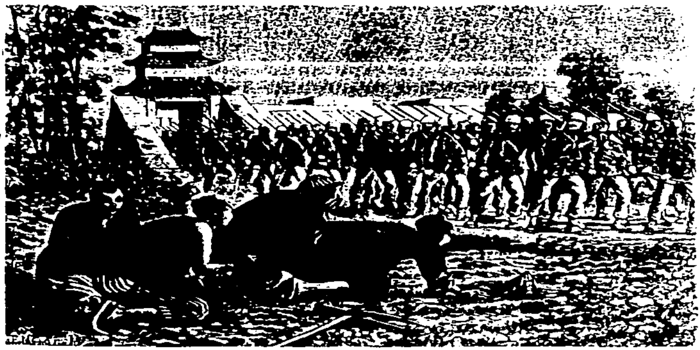
Sustituyendo $\frac{b_y}{a_y}$ por $\frac{b_x}{a_x}$, en la ecuación

$$p_x = \frac{\left(\frac{b_y}{a_y}p_a - p_b\right)}{\left(\frac{b_y}{a_y}a_x - b_x\right)}$$

$$\Rightarrow p_x = \frac{\left(\frac{b_x}{a_x}p_a - p_b\right)}{\left(\frac{b_x}{a_x}a_x - b_x\right)} = \frac{\frac{b_x}{a_x}p_a - p_b}{b_x - b_x} = \infty.$$

El valor de p_x queda así indeterminado y lo mismo sucede con p_y.

Asalto de Delhi, toma de la puerta de Cachemira por las fuerzas británicas, grabado de la época (1857). Es significativo que la gran rebelión llamada de los cipayos estallara precisamente en los momentos en que el más decidido de los gobernadores filántropos, Dalhousie, quiso dotar al país de ferrocarriles. Foto Archivo Fito-Fito.



ropas coloniales rancesas en los lrededores de Hanoi, rabado de 'Illustration (1884). a colonización francesa e Indochina adolecía el carácter dministrativo que revelaba, en el mismo aris, el desarrollo ecnológico en la época y que el sansimonismo y sus ecuaces contribuían a ar su estilo al reinado Napoleón III rchivo Antonio artin

Capítulo 8 ALGUNOS ANTECEDENTES ACERCA DE LA INFLUENCIA DE LAS MATEMÁTICAS Y DE LAS CIENCIAS NATURALES, EN LOS NEOCLÁSICOS

En su obra *A mathematical exposition, some doctrines of political economy* (1829), el inglés **William Whewell** usó matemáticas en economía política. Era discípulo directo de David Ricardo (1772-1823) y su objetivo era buscar un método de exposición preciso para abordar los problemas económicos, ejemplo que después fuera imitado por otros economistas de la época. Entre éstos destacaron especialmente Say y Cournot, a su vez influidos por distinguidos filósofos y pensadores, como Compte y Kant.

Jean-Baptiste Say (1767-1832), economista francés que originalmente intentara dedicarse a los negocios para después interesarse por la economía motivado por la lectura de *La riqueza de las naciones*, de Adam Smith, se vio fuertemente influido por Carnot. En 1814 el gobierno francés lo envió a Inglaterra, para que estudiara allí las condiciones económicas de ese país. De sus observaciones en Inglaterra surgió *De L'Anglaterre et des Anglais*.

Una vez de regreso en Francia, en 1816, empezó a enseñar economía y se creó para él la cátedra de Economía Industrial, en el Conservatorio de Artes y Oficios, en 1819. En 1831 fue nombrado profesor de economía en el Collège de France. Sus obras principales son: *Traté d'économie politique* (1803) y *Cours complet d'économie practique*, siguiendo la tradición de Cantillon y Turgot. Su concepto de equilibrio económico conocido como *Ley de Say*, que sustentaba el principio según el cual la oferta creaba su propia demanda, tuvo gran influencia en el pensamiento económico de aquella época.

Antoine Augustin Cournot (1801-1877), por su parte, fue un matemático y economista francés de gran renombre. Impartió matemáticas en la Universidad de Lyon a partir de 1834 y más tarde fue Rector de la Academia de Dijon. Se distinguió principalmente por sus conocimientos científicos y por sus contribuciones a las matemáticas, las que aplicó ampliamente en el campo de la economía. Entre sus principales obras destacan: *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* (1838), *Principes de la théorie des richesses* (1863) y *Revue sommaire des richesses* (1863). En ellas empleó "funciones de oferta y demanda" para demostrar cómo se formaba el precio bajo condiciones de monopolio puro, duopolio y competencia perfecta. Se le considera uno de los fundadores de la economía matemática.

En su parte medular, los principios de Cournot constituían una teoría de los precios de monopolio. Intentó determinar la función de demanda de un bien vendido por una sola empresa, cuyo precio era fijado por esta empresa. En el caso más simple, cuando el costo del producto es mínimo (agua mineral, por ejemplo). el precio de equilibrio se fijaba de acuerdo a la ganancia máxima de la empresa.

Si se conoce la relación entre la demanda D y el precio p, es decir, si se supone conocida la función $f(p)$, el precio alcanza un máximo cuando la derivada de esta expresión es igual a cero:

$$f(p) + pf'(p) = 0.$$

Cournot no conoció el positivismo de **Auguste Compte** (1798-1857) sino hasta en los últimos años de su vida. Cournot afirmaba que: "los positivistas, que son geómetras, ¿olvidan acaso que constituyeron la base de la filosofía matemática (...) discusiones siempre abiertas entre geómetras (...) sobre el origen y naturaleza de las cantidades llamadas negativas, imaginarias, infinitesimales (...) sobre la desaprobación o la admisión de la idea de fuerza y sobre la forma de introducirla y utilizarla?"

Cournot atacó el positivismo de Compte y se declaró seguidor de Kant. En 1843 publicó *Exposition de la theorie des Chances et des probabilités.*

A su vez, el notable pensador alemán **I. Kant** (1724-1804) escribió:

"...tampoco (...) como la agrimensura merece el nombre de geometría práctica, distinta de la geometría pura, de la misma manera, y menos aún, debe considerarse el arte mecánico o químico de los experimentos o de las observaciones como una parte práctica de la teoría de la naturaleza: (ni) la economía doméstica, rural o política, el arte de las relaciones sociales, las prescripciones de la dialéctica (...) como pertenecientes a la filosofía práctica, ya que ellas no contienen más que normas de un comportamiento y, por tanto, (constituyen) técnicas que sirven para producir un cierto efecto posible, según los conceptos naturales de causa y efecto: normas que forman parte de la filosofía teórica... "

Para Cournot, en economía lo aseverado por Kant se traducía en que, aunque fueran producto del hombre, las actividades económicas no ponían en juego la moral y la libertad. Para él, la naturaleza nos da a conocer los hechos que se podían conocer científicamente, porque es difícil darle a esos hechos un *tratamiento matemático.* A nivel social, en cambio, existía la posibilidad de aplicar el método matemático principalmente en el cálculo de probabilidades, para hacer posible un conocimiento científico. Cournot opinaba que "lo que el hombre hace, aquello para lo que encuentra un modelo, si es necesario, estudiando los *fenómenos puramente físicos*, y que la naturaleza viva no sabe o no quiere hacer, es lo que se hace por lógica y método, por geometría y cálculo, por combinaciones y disposiciones de elementos yuxtapuestos."

Para Cournot, la sociedad funciona como una máquina, que es la economía positiva, vista como el conjunto de las "ciencias calificadas como económicas, que tienen por objeto esencial las leyes bajo cuyo imperio se forman y circulan los productos de la industria humana, numerosas como para que las individualidades desaparezcan, y donde no haya que considerar más que masas sumisas a una especie de mecanismo, muy semejante al que gobierna los fundamentos del mundo físico."

Cournot se adhería asimismo al dogma según el cual el método científico es el método matemático. En economía, estimaba necesario que la libertad económica fuera el régimen del futuro, pues, aferrada a esta condición, la sociedad podría desarrollarse. El liberalismo económico, por tanto, definiría las condiciones de un desarrollo armonioso de la ciencia social.

A Court for King Cholera *(fragmento): caricatura publicada en* Punch, *Londres (1852). Malthus, al comprobar la fecundidad de la miseria, sintió miedo de las consecuencias que esto tendría para la humanidad y convenció a su primer ministro para que en las casas de trabajo destinadas a los indigentes se separaran los sexos.* Foto Ann Ronan Picture Library.

Movimiento comercial en los muelles de Londres, fragmento de un grabado publicado en The Illustrated London News *(1869). Los éxitos de su navegación por mares y océanos procuraron a los europeos no solamente la fortuna necesaria para la expansión de su capitalismo moderno, sino también una prolongada superioridad de orden emocional.* Foto Camera Press.

Capítulo 9 EL MODELO DE INSUMO-PRODUCTO DE LEONTIEF

Las ideas básicas de Leontief (sobre el análisis de insumo-producto) surgieron del estudio y trabajo realizados en los balances de la economía nacional soviética. Leontief se encontraba todavía en Rusia cuando publicó en 1925 su artículo "*Balans Narodnogo Chopziasva SSSR*", en la revista "*Planovoje Choziaslsva*". En dicho artículo desarrolló sus ideas sobre el análisis de costos y sus consecuencias en la producción.

La primeras aplicaciones del modelo de insumo-producto fueron realizadas con la finalidad de resolver los problemas planteados por la economía soviética y posteriormente de la economía estadounidense. En este último caso, primero para responder a la movilización bélica de la Segunda Guerra Mundial y, después, para estudiar las repercusiones de la suspensión de las actividades bélicas sobre los niveles de empleo, así como instrumento de análisis para los problemas generales del desarrollo agrícola e industrial y para análisis regionales y mundiales.

El modelo insumo-producto estático es, quizá, el modelo lineal más sencillo que existe. Los supuestos centrales en los que se basa este modelo consisten en:

1) Las técnicas de producción permanecen constantes; es decir, hay un único procedimiento o receta para producir cada mercancía;

2) No hay producción conjunta y cada industria produce únicamente un solo producto; y

3) La relación funcional entre insumos y productos es de carácter lineal; es decir, la economía crece homotéticamente. La cantidad de mercancía i, necesaria para producir una unidad de mercancía j, es constante, independientemente del nivel de producción.

Supongamos ahora una economía dividida en m sectores y con m productos. Designemos a los sectores con la letra i y designemos con la letra j a los productos.

X_j = volumen de producción bruto del sector j; es decir, de la mercancía j;

X_{ij} = cantidad de la mercancía i, necesaria como insumo para la producción global bruta del sector j.

d_i = producto final (o neto) del sector i. Corresponde a las ventas del sector i que no van a ninguno de estos sectores; es decir, representa el producto final, el que puede ser consumido, exportado o acumulado para fines de inversión.

Las ecuaciones de balance físico, necesarias entre el producto y el insumo, pueden describirse por medio del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} X_1 = x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1m} + d_1 \\ X_2 = x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2m} + d_2 \\ \qquad\vdots \\ X_m = x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mm} + d_m \end{array}\right. \tag{9.1}$$

Como la relación entre insumos y productos es de carácter lineal, entonces

$$x_{ij} = a_{ij}X_j. \tag{9.2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1m}X_m + d_1 \\ X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2m}X_m + d_2 \\ \vdots \\ X_m = a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mm}X_m + d_m \end{array}\right. . \tag{9.3}$$

Representando este sistema en su forma matricial, tenemos:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} . \tag{9.4}$$

y entonces

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} ; \tag{9.5}$$

y en forma sintética:

$$\mathbf{X} - \mathbf{AX} = \mathbf{D} . \tag{9.6}$$

A la matriz **A** la conocemos como la matriz de coeficientes técnicos y al vector **X** como el vector de producción, mientras que el vector **D** es usualmente conocido como el vector de demanda. Ahora bien, si factorizamos al vector **X**, tenemos:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{D}. \tag{9.7}$$

Denotamos a la matriz **I - A** como **B** *(es decir,* **I - A = B***)* y la llamamos **matriz de Leontief.** Entonces, el sistema de arriba queda como:

$$\mathbf{BX} = \mathbf{D} . \tag{9.8}$$

Todo el problema se centra ahora en definir las condiciones que nos permitan encontrar la inversa de Leontief. Más concretamente: dado un vector de demanda **D**, ¿podemos encontrar un vector de producción **X** tal, que tenga solución el sistema (9.8)? Si la matriz **B** tiene inversa, entonces

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} .$$

En la tercera parte de esta tesis se discutirá esta pregunta. Por ahora, mencionaremos que cuando el sistema depende del tiempo t, el modelo se llama **insumo-producto dinámico.**

DATOS BIOGRAFÁFICOS DE WASSILY LEONTIEF

"El entusiasta acrítico por la formulación matemática [en economía], tiende a encubrir el efímero contenido sustantivo del argumento tras la fachada formidable de los signos algebraicos."

Wassily Leontief nació en Leningrado, hoy San Petersburgo, en 1906. Su padre era profesor de economía, disciplina que estudió en Alemania. A temprana edad, Wassily conoció a Tolstoi y a Lenin en un mitín, desde la tribuna colocada frente al Palacio de Invierno. A los 15 años ingresó a la Universidad de Leningrado. Al principio se inclinó por la filosofía y la sociología, pero luego decidió estudiar economía. Al igual que su padre, Leontief se interesó por la economía, pues le pareció una ciencia más concreta. Desde los quince años tenía suficientes conocimientos de alemán y pudo traducir un tratado de teoría económica al ruso. También tenía, desde niño, conocimientos de francés.

Terminó la Universidad en 1924 y fue designado ayudante en el Departamento de Geografía. Al año siguiente, 1925, recibió el grado de economista en Leningrado, a pesar de haber tenido algunos problemas con las autoridades de esa universidad.

Según el propio Leontief, sus influencias intelectuales las recibió "principalmente de Smith, Ricardo y Marx."[1]

Al terminar la universidad, a Leontief le fue diagnosticado un tumor maligno en la cara y el médico ruso que lo atendió lo consideró un caso perdido. Le daban un mes de vida. Con ese diagnóstico, Leontief se presentó a las autoridades de emigración y argumentó que le gustaría viajar a Alemania, antes de morir. Las autoridades accedieron. Cuando llegó a Alemania, se examinó con un médico de Berlín, quien consideró que no era un tumor maligno y procedió a extirparlo. Recuperó su salud y esto le permitió inscribirse en la Universidad de Berlín, donde trabajó dos años en su tesis doctoral, la que versó sobre la economía como un sistema de circulación de bienes, servicios y factores de producción. Entonces afirmó: "me inspiré en la tabla económica de Quesnay", agregando que "ese trabajo fue importante para desarrollar más tarde la metodología de insumo-producto"[2].

Entre 1927 y 1929 trabajó como investigador de la Universidad de Kiel, al norte de Alemania, en el Instituto sobre la Economía Mundial. Allí se dedicó a la derivación de curvas estadísticas de oferta y demanda. Estas labores académicas se interrumpieron en 1929, cuando lo contrataron como asesor del Ministerio de Ferrocarriles de China.

Después de China pasó a Estados Unidos, habiendo sido contratado en 1931 en el National Bureau of Economic Research y en 1932 en el Departamento de Economía de la Universidad de Harvard. Allí publicó varios trabajos originales en revistas especializadas, lo que le facilitó su ingreso como docente en dicho centro de enseñanza.

En 1932 se casó con la poetisa Estella Marks. Tuvieron una hija, Svetlana, actualmente profesora de Historia del Arte en la Universidad de California. En ese mismo año firmó un contrato de investigación con esta Universidad, para la

[1] PIZANO, Diego *La estructura del desarrollo, escritos escogidos* por Diego Pizano, Ed. Tercer Mundo 1991, Colombia, p. 73.

[2] *ibid.*, p 9

compilación de las primeras tablas de insumo-producto acerca de la economía estadounidense. Concluyó que su análisis del sistema económico era muy parcial, resolviendo entonces desarrollar un sistema de equilibrio general apropiado para una aplicación empírica. En 1935 utilizó una de las primeras computadoras de gran escala y en 1943 se convirtió en uno de los primeros investigadores en usar la *Mark I*, la primera computadora electrónica.

Antiguo colegio de San Ildefonso

En 1941 Leontief publica el libro *La Estructura de la Economía Norteamericana*, que lo hizo famoso en los círculos académicos internacionales. Allí demostró la utilidad práctica de la metodología de insumo-producto. Durante la Segunda Guerra Mundial siguió trabajando en esta área, solicitando luego apoyo financiero al gobierno estadounidense para seguir mejorando las bases estadísticas y conceptuales de su método de análisis. Los funcionarios norteamericanos le señalaron que no existían fondos para financiar ese tipo de investigaciones y que la única posibilidad sería incluir una partida especial, en la Ley de Presupuesto. Pero dado que ningún congresista entendía los trabajos de Leontief, era difícil que lo aprobaran los legisladores. El Congreso estaba en ese tiempo (igual que hoy en día) dedicado mayormente a aprobar presupuestos de gastos militares. Por esta razón, el mismo Leontief ayudó a redactar la solicitud respectiva. Una de sus cláusulas decía: "Se aprueba una partida para financiar la construcción de una tabla de insumo-producto en Cambridge, Massachusetts, para luego ser transportada a Washington."[3] Los legisladores creyeron que se trataba de un equipo militar nuevo y aprobaron sin vacilación el proyecto. Meses después, Leontief terminaría este trabajo y se lo entregaría a las autoridades de Washington.

En 1945, el presidente Roosvelt le solicitó al Departamento del Trabajo un estudio sobre las consecuencias económicas de la Segunda Guerra Mundial, para los Estados Unidos. Las tablas estimadas por Leontief permitieron entonces comparar los niveles de producción y empleo, en una economía de guerra, con aquellas que se podrían dar en un período de paz. Como resultado del descenso de los gastos militares, los expertos estadounidenses pronosticaban una crisis en la industria del acero, pero el modelo de simulación de Leontief predecía lo contrario.

---

[3] *Ibid.* p. 10.

Entre otros datos significativos de la trayectoria de Leontief, sabemos que en 1946 fue nombrado profesor titular en la Universidad de Harvard (cargo que sólo se les confiere a académicos sobresalientes) y que en 1948 organizó el Grupo de Investigación Económica de dicha Universidad, de la que fue su director hasta 1973.

En 1953 publicó un trabajo sobre el desempeño del sector externo de la economía estadounidense. Demostró que E.E.U.U. se había especializado en exportar bienes intensivos en trabajo y no bienes en capital, como suponía la mayoría de los economistas. Este resultado se bautizó como *Paradoja de Leontief* y fue muy controvertido.

En 1954 fue elegido Presidente de la Sociedad Econométrica (a nivel mundial) y en 1970 fue nombrado Presidente de la Sociedad Norteamericana de Economistas. Ha recibido muchas distinciones honoríficas, la principal de las cuales tuvo lugar el 11 de diciembre de 1973, al recibir el premio Nobel de Economía.

Entre sus alumnos más sobresalientes figuran Paul Samuelson (Premio Nobel de Economía) y el profesor Hollis Chenery, quien fuera vicepresidente del Banco Mundial y hoy profesor titular de Harvard. Este último publicó, junto con Paul G. Clark, un libro acerca de la economía interindustrial.[4]

A comienzo de los ochentas tuvo divergencias con las autoridades de Harvard y se fue a la Universidad de New York, donde le ofrecieron crear un Instituto de Análisis Económico que operaría bajo su dirección. Allí ha estado trabajando y enseñando todos estos años, siendo consultado frecuentemente por diversos gobiernos.

En 1984 el emperador de Japón le otorgó la Orden del Sol Naciente, por su contribución a la implementación de políticas económicas efectivas.

En otras actuaciones significativas de su brillante trayectoria, en años recientes Leontief dirigió un programa para modernizar el transporte en Italia, como también asesoró al gobierno de España evaluando la factibilidad de un proyecto enfocado a la construcción de un puente capaz de conectar a África con la Península Ibérica.

De Leontief habría que decir, por último, que aunque se le considera el constructor indiscutible de las tablas de insumo-producto, en realidad sus investigaciones han abarcado los múltiples temas de interés general de la economía, tales como los problemas epistemológicos, la teoría keynesiana, los problema del desempleo y el control de la contaminación ambiental, así como los problemas del cambio tecnológico y del desarme, junto a los problemas de las patentes y de los controles

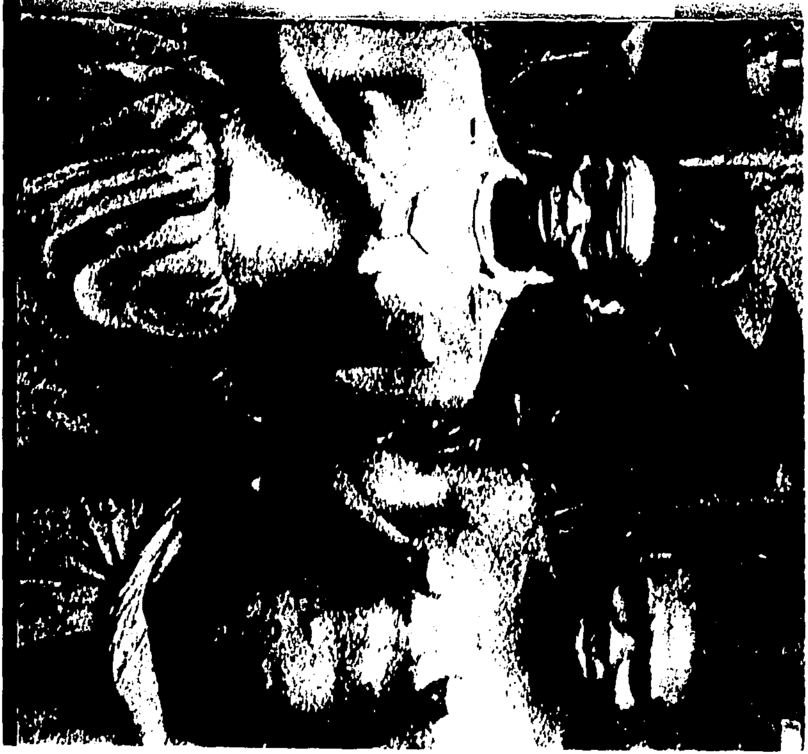
---

[4]CHENERY, Hollis y CLARK, Paul. *La economía interindustrial insumo-producto y programación lineal*, FCE, México, 1980.

legales y aduaneros en los puertos marítimos, entre tantos otros, problemas que de alguna manera esbozan y van perfilando los grandes trazos del futuro de la economía mundial.

Asesinato del archiduque Francisco Fernando de Austria y su esposa en Sarajevo, ilustración de una publicación de 1914. Apenas se produjo la chispa con el asesinato del archiduque austriaco el 28 de junio de 1914, el continente ardió por los cuatro costados. Durante un mes se hicieron esfuerzos para localizar el conflicto, pero, cuando Austria declaró finalmente la guerra a Servia, los países se vieron rápidamente arrastrados uno tras otro a la refriega. Foto Archivo Carmen López.

Obreros nativos de una plantación del Congo, mutilados por no producir suficiente caucho



Capítulo 10 EL MODELO DE JOHN VON NEUMANN

Veamos ahora otro modelo económico relevante, mejor conocido como el Modelo de Neumann. Este modelo considera una economía que transforma un vector

$$\mathbf{X} \in R^n$$

de n mercancías, a partir de existencias en un vector $\mathbf{Y} \in R^n$ de existencias, en un período de tiempo t. Este período de tiempo se considera como una unidad, dentro de un "período de producción":

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in R^n \times R^n$$

en donde $\mathbf{X}$ es el vector de insumos y $\mathbf{Y}$ el vector de productos.

El conjunto de $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, técnicamente posible en una economía, contiene las combinaciones insumo-producto. A este conjunto se le llama de *tecnología* o de *producción de la economía*. Se denota por T:

$$T = \{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in R^n \times R^n\}.$$

en donde $\mathbf{X}$ es el vector de insumos, mientras que $\mathbf{Y}$ es el vector de productos.

Sea a_{ij} = la cantidad de la *i-ésima* mercancía, necesaria como insumo, para la producción del *j-ésimo* proceso o "actividad"; y

Sea b_{ij} la cantidad de la *i-ésima* mercancía, producida en una operación unitaria, del *j-ésimo* proceso.

Existen n mercancías y m procesos en la economía. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ matrices $m \times m$, tales que $\mathbf{A}, \mathbf{B} \geq O$.

Sea ahora $\mathbf{a} \in R^n$ tal, que

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{im} \end{pmatrix};$$

y sea $\mathbf{b} \in R^n$ tal, que

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{i1} \\ \vdots \\ b_{ij} \\ \vdots \\ b_{im} \end{pmatrix}.$$

Una operación *j-ésima*, del *j-ésimo* proceso, transforma $\mathbf{a}^j$ en $\mathbf{b}^j$.

Sea $\mathbf{Z}(t)$ un vector en R^n_+ cuyo *j-ésimo* elemento significa el nivel de operación del *j-ésimo* proceso, en el período t:

$$\mathbf{Z}(t) \geq O, \forall t.$$

El vector $\mathbf{Z}(t)$ se llama vector de *nivel de actividad* o vector de *nivel del proceso*, en el período t.

$\mathbf{X}(t)$ es un vector de insumos, en el período t. Esto significa que lo podemos escribir como:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{AZ}(t).$$

Análogamente, $\mathbf{Y}(t)$ es un vector producto, en el período t. Entonces

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{BZ}(t).$$

Si T es constante, entonces $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ son constantes, en el período t.

Existe disponibilidad libre; es decir, si $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in$ T, entonces existe un $\mathbf{Z} \in R^m_+$ tal, que

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{AZ} \text{ y } \mathbf{O} \leq \mathbf{Y} \leq \mathbf{BZ}.$$

El conjunto de la tecnología de von Neumann, T_N, se puede escribir entonces como:

$$T_N = \{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in R^n \times R^n \mid \mathbf{X} \geq \mathbf{AZ} \text{ y } \mathbf{O} \leq \mathbf{Y} \leq \mathbf{BZ}\},$$

para alguna $\mathbf{Z} \geq \mathbf{O}$. T_N es un poliedro convexo, con vértice en el origen. Algunos supuestos de los que se parte son los siguientes:

(A_{n-1})

$$\mathbf{A} \geq \mathbf{O}, \mathbf{B} \geq \mathbf{O}$$

(A_{n-2})

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} > \mathbf{O}$$

(A_{n-1}) significa que si

$$a_{ij} = 0 \Rightarrow b_{ij} > 0$$

y que si

$$b_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ij} > 0$$

lo que significa que cada mercancía es: o bien, usada como insumo; o bien, producida como producto, en cada proceso de producción. Veamos ahora las suposiciones de Kemeny, Morgenstern y Thompson:

(A_i)

$$\mathbf{A} \geq O, \mathbf{B} \geq O$$

(A_{ii})

$$\forall j \exists i \mid a_{ij} > 0.$$

(A_{iii})

$$\forall j \exists j \mid b_{ij} > 0.$$

Pero, según Karlin:

(A-1) T es un cono convexo, cerrado en R_+^{2n}.
(A-2) (Libre disponibilidad):

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in T, \mathbf{X}' \geq \mathbf{X}$$

$$y\ \mathbf{O} \leq \mathbf{Y}' \leq \mathbf{Y} \Rightarrow (\mathbf{X}', \mathbf{Y}') \in T.$$

(A-3) (La imposibilidad de la tierra de Cockaigne):

$$(\mathbf{O}, \mathbf{Y}) \in T \Rightarrow \mathbf{Y} = 0.$$

(A-4) (La productividad):

$$\forall i \exists (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in T \text{ tal, que } y_i > 0$$

(cada mercancía es producible).
De acuerdo con (A-1), (A-4) es equivalente a (A-4'):

$$\exists (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in T \text{ tal, que } y > 0.$$

Von Neumann restringió su consideración al conjunto de trayectorias de crecimiento balanceado; es decir, a las trayectorias:

$$(x(t), y(t)) \in T$$

y

$$\mathbf{Y}(t) = \alpha \mathbf{X}(t), \text{ para alguna } \alpha > 0.$$

Si $\alpha < 1$, la economía tiene más posiblidades de decrecer que crecer.
Definición.
Definimos una función

$$\alpha : T \longrightarrow R$$

como

$$\alpha(x, y) \equiv \max_{\alpha \in R} \{\alpha \mid \mathbf{Y} \geq \alpha \mathbf{X}\}.$$

donde $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \neq \mathbf{O}$.
El valor $\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ se llama **tasa de expansión** del proceso $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in T$.
Pero $\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ no está definida en $(\mathbf{O}, \mathbf{O})$. Por (A-3), $(\mathbf{O}, \mathbf{Y}) \notin T$, si $\mathbf{Y} \geq \mathbf{O}$.
Sea $\alpha_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, $i = 1, \ldots, n$

$$\alpha_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \begin{cases} \frac{y_i}{x_i} \text{ si } x_i > 0 \\ \infty \text{ si } x_i = 0 \text{ y } y_i > 0 \\ \text{indefinida si } x_i = 0 \text{ y } y_i = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \min_i \alpha_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \forall \mathbf{X} \geq \mathbf{O}.$$

Teorema 1.
(A-1) T es un dominio convexo, cerrado en R_+^{2n}.
(A-2)

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in T, \mathbf{X}' \geq \mathbf{X}, y\ \mathbf{O} \leq \mathbf{Y}' \leq \mathbf{Y} \Rightarrow (\mathbf{X}', \mathbf{Y}') \in T$$

(A-3) $(\mathbf{O}, \mathbf{Y}) \in T \Rightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{O}$

(A-4)

$$\forall i \exists (\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in T \text{ tal, que } \mathbf{Y} > 0$$

$$\Rightarrow \exists (\widehat{\mathbf{X}},\widehat{\mathbf{Y}}) \in T \text{ tal, que } \widehat{\mathbf{Y}} = \hat{\alpha}\widehat{\mathbf{X}}$$

donde

$$\hat{\alpha} \equiv \hat{\alpha}(\widehat{\mathbf{X}},\widehat{\mathbf{Y}}) \text{ y } \hat{\alpha} \geq \alpha(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \forall (\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in T.$$

con $\mathbf{X} \geq 0$. También tenemos que $\hat{\alpha} \in R_+$.

Demostración.

Sea

$$\overline{T} = T \cap B_1(0) \subseteq R^{2n}.$$

Como T es cerrado, entonces $\overline{T}$ es también cerrado; por tanto, $\overline{T}$ es compacto.

Supongamos ahora que $\alpha(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ es continua para todo $(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in T$ o $\overline{T}$. Entonces, $\alpha(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ alcanza un máximo sobre $\overline{T}$, por el teorema de Weierstraß. También α puede ser discontinua y entonces definimos

$$T_i \subset T$$

como:

$$T_i = \{(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in T; \alpha(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \alpha_i(\mathbf{X},\mathbf{Y})\}.$$

por lo que, claramente:

$$T \setminus \{0\} = \bigcup_i T_i.$$

Sea ahora

$$\tilde{T}_i = T_i \cup \{0\}$$

y sea $(\mathbf{X}_q,\mathbf{Y}_q)$ una sucesión convergente en $\tilde{T}_i$ con límite $(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0)$. Entonces, como

$$\frac{y_k^{(q)}}{x_k^{(q)}} = \frac{y_i^{(q)}}{x_i}$$

para $(\mathbf{X}^{(q)},\mathbf{Y}^{(q)}) \neq 0$, entonces $\frac{y_k^{(0)}}{x_k^{(0)}} \geq \frac{y_i^{(0)}}{x_i^{(0)}}$ y, por tanto, $\alpha(\mathbf{X}^0,\mathbf{Y}^0) = \alpha_i(\mathbf{X}^0,\mathbf{Y}^0)$ es continua, excepto en los puntos donde no está definida.

Sea ahora $\mathrm{T}_i^* = \tilde{T}_i \cap B_1(0)$, $B_1(0) \in R_+^{2n}$. Entonces $\alpha_i(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ alcanza el máximo de los b_i sobre T_i^*.

Elegimos el máximo de los b_i sobre i, que existe claramente. Queremos demostrar que existe un $(\mathbf{X}^*,\mathbf{Y}^*) \in \overline{T}$ tal, que $\alpha(\mathbf{X}^*,\mathbf{Y}^*) \geq \alpha(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ para cada $(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in \overline{T}$:

$$\text{por tanto,} \bigcup_i T_i = T_i \setminus \{0\}.$$

Escribimos

$$\hat{\alpha} = \alpha(\mathbf{X}^*,\mathbf{Y}^*).$$

Como T es un cono, para cada $(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in T$ con $\mathbf{X} \geq 0$ existe:

$$(\overline{\mathbf{X}},\overline{\mathbf{Y}}) = \frac{(\mathbf{X},\mathbf{Y})}{\|(\mathbf{X},\mathbf{Y})\|}.$$

Sin embargo, por definición de

$$\alpha(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \alpha(\lambda\overline{\mathbf{X}}.\lambda\overline{\mathbf{Y}}) = \alpha(\overline{\mathbf{X}},\overline{\mathbf{Y}}),$$

ya que

$$\alpha(\mathbf{X}^*,\mathbf{Y}^*) \geq \alpha(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \forall(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in T \text{ con } \mathbf{X} \geq \mathbf{O}$$

y entonces $\alpha(\mathbf{X}^*,\mathbf{Y}^*) = \alpha(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \forall(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in T$; con $\mathbf{X} \geq \mathbf{O}$. De la suposición de disponibilidad libre (A-2) podemos encontrar un $(\widehat{\mathbf{X}},\widehat{\mathbf{Y}}) \in T$ tal, que

$$\hat{\alpha} = \alpha(\widehat{\mathbf{X}},\widehat{\mathbf{Y}}) = \alpha(\mathbf{X}^*,\mathbf{Y}^*)$$

y $\widehat{\mathbf{Y}} = \hat{\alpha}\widehat{\mathbf{X}}$. De esta manera

$$\hat{\alpha} = \alpha(\widehat{\mathbf{X}},\widehat{\mathbf{Y}}) \geq \alpha(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \forall(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in T,$$

con $\widehat{\mathbf{Y}} = \hat{\alpha}\widehat{\mathbf{X}}$.

Finalmente, mostraremos que $\hat{\alpha} \in R^+$. De (A-4), sabemos que existe un $(\widetilde{\mathbf{X}},\widetilde{\mathbf{Y}}) \in T$ tal, que $\widetilde{\mathbf{Y}} > \mathbf{0}$. Como $\alpha(\widetilde{\mathbf{X}},\widetilde{\mathbf{Y}}) > 0$ y $\hat{\alpha} \geq \alpha(\widetilde{\mathbf{X}},\widetilde{\mathbf{Y}})$, entonces $\hat{\alpha} > 0$, $\hat{\alpha} < \infty$. Se sigue de (A-3) y de (A-4) que $\widehat{\mathbf{Y}} = \hat{\alpha}\widehat{\mathbf{X}}$.

QED.

Pag. opuesta, arriba: El director del IAS, Robert Oppenheimer, y von Neumann junto al ordenador del IAS, alrededor de 1952. (Cortesía del Instituto de Estudios Avanzados — Biblioteca de Estudios Históricos y Ciencias Sociales)

El teorema 1 es equivalente al problema:

$$\begin{gathered}\max_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})} \alpha \\ s.a.\ \mathbf{Y} - \alpha\mathbf{X} \geq 0, \forall(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in T.\end{gathered}$$

Como α es una función $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, ni las restricciones ni la función son lineales.

La solución se denotó por

$$\hat{\alpha} = \alpha(\widehat{\mathbf{X}},\widehat{\mathbf{Y}}).$$

Si introducimos la tecnología von Neumann,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{BZ} \text{ y } \mathbf{X} = \mathbf{AZ}.$$

que se puede escribir como:

$$\max : \alpha$$
$$\text{s.a. } (\mathbf{B} - \alpha \mathbf{A})\mathbf{Z} \geq \mathbf{O} \text{ y } \mathbf{Z} \geq \mathbf{O}.$$

El problema dual consiste en:

$$\min : \beta$$
$$\text{s.a.} \mathbf{P}\ (\mathbf{B} - \beta \mathbf{A}) \leq \mathbf{O} \text{ y } \mathbf{P} \geq \mathbf{O}.$$

Existe una solución $\hat{\beta}$.

En general, como $\hat{\beta} \leq \hat{\alpha}$.

$$\mathbf{PA}^j > \mathbf{O}.$$

y la razón

$$\frac{\mathbf{PB}^j}{\mathbf{PA}^j}$$

es el retorno entre el costo, una clase de razón de ganancia de la actividad ***j-ésima***.

$$\mathbf{P}\ (\mathbf{B} - \beta \mathbf{A})$$

significa

$$\frac{\mathbf{PB}^j}{\mathbf{PA}^j} \leq \beta \text{ si } \mathbf{PA}^j > \mathbf{O}.$$

en donde β es la razón de ganancia máxima. Se interpreta como **factor de interés.**

Teorema 2

(A-1) T es un cono convexo en R^{2n}_{+}.

(A-2) $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in T$, $\mathbf{X}' \geq \mathbf{X}$, y $\mathbf{O} \leq \mathbf{Y}' \leq \mathbf{Y} \Rightarrow (\mathbf{X}', \mathbf{Y}') \in T$.

(A-3) $(0, \mathbf{Y}) \in T$ tal, que $\mathbf{Y} > \mathbf{O}$.

Entonces existe un $\hat{\mathbf{P}}$ tal, que $\hat{\mathbf{P}} \geq \mathbf{O}$ y

$$\mathbf{P}\ (\mathbf{Y} - \hat{\alpha}\mathbf{X}) \leq 0, \forall (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in T.$$

Demostración

Por definición de $\hat{\alpha}$, no existe un $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in T$ tal, que

$$(\mathbf{Y} - \hat{\alpha}\mathbf{X}) > 0,$$

y por tanto

$$\exists (\mathbf{X}', \mathbf{Y}') \in T \text{ tal, que } (\mathbf{Y}' - \hat{\alpha}\mathbf{X}') > 0$$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ tal, que } \mathbf{Y}' - (\hat{\alpha} + \varepsilon)\mathbf{X}' > 0 .$$

¡Entonces $\hat{\alpha}$ no es la tasa de expansión máxima!

Como T es convexo y

$$f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{Y} - \hat{\alpha}\mathbf{X}$$

es cóncava (y de hecho lineal, por el teorema fundamental de las funciones convexas), entonces existe un $\hat{\mathbf{P}}$ tal, que

$$\hat{P}f(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \leq 0, \forall(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in T.$$

QED.

Teorema 3(von Neumann)
Sean **A** y **B** las matrices de insumo-producto, respectivamente, en la tecnología von Neumann. Entonces, bajo las afirmaciones (A-1) y (A-4), tenemos que

$$\exists\hat{\alpha} > 0, \hat{\mathbf{Z}} \geq \mathbf{0}, \text{ y } \hat{\mathbf{P}} \geq \mathbf{0}$$

en donde

$$\hat{\alpha} > 0, \hat{\mathbf{Z}} \in R^m \text{ y } \hat{\mathbf{P}} \in R^n \text{ tales, que:}$$

(i)

$$(\mathbf{B} - \hat{\alpha}\mathbf{A})\mathbf{Z} \geq \mathbf{O};$$

(ii)

$$(\mathbf{B} - \hat{\alpha}\mathbf{A}) \leq \mathbf{O};$$

(iii)

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{B} - \hat{\alpha}\mathbf{A})\mathbf{Z} = 0.$$

Demostración
Sea $(\widehat{\mathbf{X}}, \widehat{\mathbf{Y}})$ el proceso que origina la tasa de expansión máxima $\hat{\alpha}$ en el teorema 1. Entonces

$$\exists\hat{\mathbf{Z}} \geq \mathbf{O} \text{ tal, que } \widehat{\mathbf{Y}} - \hat{\alpha}\widehat{\mathbf{X}}$$
$$\widehat{\mathbf{Y}} \leq \mathbf{B}\hat{\mathbf{Z}} \text{ y } \widehat{\mathbf{X}} \geq \mathbf{A}\hat{\mathbf{Z}}.$$

Entonces

$$\mathbf{B}\hat{\mathbf{Z}} \geq \hat{\alpha}\mathbf{A}\hat{\mathbf{Z}}.$$

(i) queda demostrado.
Como por hipótesis $\hat{\alpha} > 0$ y $\widehat{\mathbf{Y}} \geq \mathbf{0}$.
$\hat{\mathbf{Z}} \geq \mathbf{0}$. Para mostrar (ii), del teorema 3, que concluye

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{B} - \hat{\alpha}\mathbf{A})\mathbf{Z} \leq 0$$

con $\hat{\mathbf{P}} \geq \mathbf{0}, \forall\mathbf{Z} \geq \mathbf{O}$ tal, que

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{B} - \hat{\alpha}\mathbf{A})\mathbf{Z} \leq 0 \text{ con } \hat{\mathbf{P}} \geq \mathbf{O}.$$

Por tanto, (ii) se ha demostrado.
Para probar (iii), tómese en cuenta que (i) y $\hat{\mathbf{P}} \geq \mathbf{O} \Rightarrow \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{B} - \hat{\alpha}\mathbf{A})\hat{\mathbf{Z}}=0$ tal, que $\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{B} - \hat{\alpha}\mathbf{A})\hat{\mathbf{Z}} = 0$, en virtud de (ii).

Q.E.D.

Si tenemos una matriz $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, sean $\mathbf{Z}(t)$ y $\mathbf{P}(t)$ los vectores de nivel de actividad y el vector de precios en el período t, respectivamente. Sea $\beta(t)$ el factor de interés, en el período t. Entonces tenemos las siguientes relaciones de "equilibrio":

(i)

$$\mathbf{AZ}(t+1) \leq \mathbf{BZ}(t);$$

(ii)

$$\hat{\mathbf{P}}(t+1)\left[\mathbf{BZ(t)} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{Z}}(t+1)\right] = 0;$$

(iii)

$$\beta(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{A} \geq \mathbf{P}(t+1)\mathbf{B};$$

(iv)

$$[\beta(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{A} - \mathbf{P}t+1)\mathbf{B}]\,\mathbf{Z}(t) = 0.$$

(i) Es imposible consumir más de lo que cada mercancía (en el proceso de producción) es capaz de proporcionar;

(ii) Si una mercancía está suministrada en exceso, su precio se hace cero;

(iii) El proceso de producción no tendrá ganancia positiva y la ganancia máxima es cero;

(iv) Si un proceso reditúa ganancias negativas, no será utilizado.

Supongamos un crecimiento balanceado, en el sentido de que:

$$\mathbf{Z}(t+1) = \alpha\mathbf{Z}(t).$$
$$\mathbf{P}(t+1) = \mathbf{P}(t) \text{ constante} \forall t$$

y $\beta(t) = \beta$ sea constante para toda t.

Entonces, escribiendo $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}$, podemos reescribir las cuatro relaciones como:

(i')

$$(\mathbf{B}-\alpha\mathbf{A})\mathbf{Z} \geq 0;$$

(ii')

$$\mathbf{P}(\mathbf{B}-\alpha\mathbf{A})\mathbf{Z} = 0;$$

(iii')

$$\mathbf{P}(\mathbf{B}-\beta\mathbf{A}) \leq 0;$$

(iv')

$$\mathbf{P}(\mathbf{B}-\beta\mathbf{A})\mathbf{Z} = 0.$$

A esta cuarteta $(\hat{\mathbf{Z}}, \hat{\mathbf{P}}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$ la llamamos: **cuarteta von Neumann.**

El teorema 3 prueba la existencia de tal cuarteta, con $\hat{\alpha} = \hat{\beta} > 0$ y $\hat{\mathbf{Z}} \geq \mathbf{O}$. $\hat{\mathbf{P}} \geq \mathbf{O}$.

Aquí, $\hat{\alpha}$ no se define como el factor de expansión máxima.

IRREDUCIBILIDAD

Según el teorema 3, probamos la existencia de $(\hat{\alpha}, \hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{Z}})$ con $\hat{\alpha} > 0$, $\hat{\mathbf{Z}} \geq \mathbf{O}, \hat{\mathbf{P}} \geq \mathbf{O}$ tal, que

$$
\begin{gathered}
(\mathbf{B} - \hat{\alpha}\mathbf{A})\hat{\mathbf{Z}} \geq \mathbf{0} \\
\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{B} - \hat{\alpha}\mathbf{A}) \leq \mathbf{0} \text{ y} \\
\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{B} - \hat{\alpha}\mathbf{A})\hat{\mathbf{Z}} = 0
\end{gathered}
$$

Definición

Llamamos a la tercia $(\hat{\alpha},, \hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{Z}})$ **el equilibrio von Neumann,** de la economía $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Definición

El conjunto de índices $\mathbf{1} \subseteq N = \{1, 2, \ldots, n\}$ se llama un **subconjunto independiente**, siempre que sea posible producir la mercancía $i \in \mathbf{1}$ sin consumir cualquier mercancía $i \in \mathbf{1}^c$, donde $\mathbf{1}^c = N \setminus I$. Es decir, es independiente si existe $J \subset M = \{1, 2, \ldots m\}$ tal, que

$$
\begin{gathered}
a_{ij} = 0, \forall i \in I^C \text{ y } \forall j \in J, \text{ y} \\
b_{ij} > 0, \forall i \in I \text{ para alguna } j \in J.
\end{gathered}
$$

La matriz insumo-producto $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ se llama **irreducible** si, y sólo si, $I = \emptyset$.

Si el modelo es irreducible, entonces existe un matriz $\mathbf{P}$ de permutaciones tal, que $\mathbf{PAP}^{\prime}$ se descompone como:

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ O & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}.
$$

Teorema 4

Sea $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ la matriz insumo-producto de la tecnología von Neumann. Supongamos que existe $\hat{\alpha} > 0, \hat{\mathbf{Z}} \geq \mathbf{O}, \hat{\mathbf{P}} \geq \mathbf{O}, \hat{\mathbf{Z}} \in R^m$ y $\hat{\mathbf{P}} \in R^n$ tal, que

$$
\begin{gathered}
(\mathbf{B} - \hat{\alpha}\mathbf{A}) \geq \mathbf{O} \\
\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{B} - \hat{\alpha}\mathbf{A}) \leq \mathbf{O} \\
\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{B} - \hat{\alpha}\mathbf{A})\hat{\mathbf{Z}} = 0
\end{gathered}
$$

se cumplen. Entonces, si la matriz insumo-producto $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ es irreducible, tenemos

$$
\hat{\mathbf{P}}\mathbf{B}\hat{\mathbf{Z}} > 0.
$$

Demostración

Reenumeremos j y particionemos $\hat{\mathbf{Z}}$ de tal manera, que

$$
\begin{gathered}
\hat{\mathbf{Z}} = (\hat{\mathbf{Z}}^0, \hat{\mathbf{Z}}^1), \text{ donde} \\
\hat{\mathbf{Z}}^0 > 0 \text{ y } \hat{\mathbf{Z}}^1 = 0.
\end{gathered}
$$

Sea ahora J el conjunto de índices donde $\hat{\mathbf{Z}}^0 > 0$ (entonces $J^c = M \setminus J$ es el conjunto de índices donde $\hat{\mathbf{Z}}^1 = 0$). Sea también $b_i \in R^m_+$ cuyo j-*ésimo* elemento es b_{ij}; y sea, además, I el conjunto de índices i tales, que $b_i\hat{\mathbf{Z}} = 0$).

Reenumerando i y j, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, respectivamente, pueden particionarse como:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}.$$

Por la hipótesis del teorema, se cumple que

$$\mathbf{B}\hat{\mathbf{Z}} \geq \hat{\alpha}\mathbf{A}\hat{\mathbf{Z}}.$$

lo cual significa:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{Z}}^0 \\ \hat{\mathbf{Z}}^1 \end{pmatrix} \geq \hat{\alpha} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{Z}}^0 \\ \hat{\mathbf{Z}}^1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{11}\hat{\mathbf{Z}}^0 \geq \hat{\alpha}\mathbf{A}_{11}\hat{\mathbf{Z}}^0 \text{ y}$$
$$\mathbf{B}_{21}\hat{\mathbf{Z}}^0 \geq \hat{\alpha}\mathbf{A}_{21}\hat{\mathbf{Z}}^0$$

y, por tanto, $\hat{\mathbf{Z}}^1 = 0$.

Pero $\mathbf{B}_{21}\hat{\mathbf{Z}}^0 = 0$ por definición de I y J. (Por tanto, $\mathbf{O} = \mathbf{B}_{21}\hat{\mathbf{Z}}^0$ tal, que $\mathbf{B}_{22}\hat{\mathbf{Z}}^1 = \mathbf{B}_{21}\hat{\mathbf{Z}}^0$). Entonces $\hat{\alpha}\mathbf{B}_{21}\hat{\mathbf{Z}}^0 \leq 0$ o $\mathbf{A}_{21}\hat{\mathbf{Z}}^0 \leq 0$, ya que $\hat{\alpha} > 0$.

Pero $\mathbf{A}_{21}\hat{\mathbf{Z}}^0 \geq 0$ ya que $\mathbf{A}_{21} \geq \mathbf{O}$ y $\hat{\mathbf{Z}}^0 > 0$, de tal manera que debemos tener $\mathbf{A}_{21}\hat{\mathbf{Z}}^0 = 0$. Esto, en vista de que $\mathbf{A}_{21} \geq \mathbf{O}$ y $\hat{\mathbf{Z}}^0 > 0$; es decir, $a_{ij} = 0, \forall i \in I^c, j \in J$.

Como $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ es irreducible por hipótesis, entonces $I^c = \emptyset$. Luego, $I = N$; por tanto:

$$b_i\hat{\mathbf{Z}} > 0, \forall i = 1, \ldots, n$$
$$\Rightarrow \mathbf{B}\hat{\mathbf{Z}} > \mathbf{O}$$
$$\Rightarrow \hat{\mathbf{P}}\mathbf{B}\hat{\mathbf{Z}} > \mathbf{O}.$$

QED.

(Arriba) Oskar Morgenstern y von Neumann en Spring Lake, Nueva Jersey. (Cortesía del Instituto de Estudio Avanzado — Biblioteca de Estudios Históricos y Ciencias Sociales)

Capítulo 11 EL MODELO DE PIERO SRAFFA

Descripción general

Sraffa estudia esencialmente el sistema de precios de producción y la influencia que tienen sobre él las variables de distribución, es decir, las **tasas de beneficio y de salario**. Otros problemas, como los niveles de producción, empleo, distribución del ingreso y del crecimiento, no se toman en cuenta. La causa de esta limitación en el análisis se debe a que Sraffa se centra en el sistema económico, cuyas propiedades no dependen de las variaciones de las escala de producción o de las proporciones de los "factores". Esta limitación lo hace susceptible de tratarse de manera "exacta", en el sentido matemático.

El análisis de Sraffa se divide en cuatro partes. En primer lugar, nos presenta un proceso productivo completamente cerrado; es decir, un proceso en donde las mercancías aparecen tanto como medios de producción, que como productos. Además, las cantidades producidas de cada bien que se toman como constantes, son iguales exactamente a las cantidades empleadas como medios de producción. El problema se reduce, entonces, a encontrar los precios relativos de las distintas mercancías. Estos precios deben ser tales que, respetando la regla de que los "valores" de la producción (los precios de las cantidades físicas de los productos) y los valores de los costos (precios por cantidades físicas de medios de producción) sean iguales, permitan reestablecer la posición inicial del sistema.

El sistema de precios se puede plantear de la siguiente manera: llamamos A, B, ..., K a las cantidades producidas anualmente de las mercancías "a", "b", ..., "k" y llamamos $A_a, B_a, \ldots, K_a$ a las cantidades de estas mercancías necesarias para la producción de A, como asimismo, necesarias para la producción de B ... K. Los montos de producción y los requerimientos tecnológicos son datos conocidos. Las incógnitas por determinar serán los precios de las k mercancías $P_a, P_b, \ldots, P_k$; es decir, estos precios son una resultante de la tecnología y no desempeñan ningún papel en la reasignación de recursos. Lo único que hacen es señalar los "valores" de las unidades de mercancías "a", "b", ..., "k", los que, si son adoptados, permitirán reestablecer la posición inicial del sistema. El sistema de subsistencia puede escribirse de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{c}
A_a P_a + B_a P_a + \cdots + K_a P_k = A P_a \\
A_b P_a + B_b P_b + \cdots + K_b P_k = B P_b \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_k P_a + B_k P_a + \cdots + K_k P_k = K P_k
\end{array}
$$

Como por definición la economía de subsistencia es

$$A = A_a + A_b + \cdots + A_k,$$

lo mismo sucede para B,..., K. Cualesquiera de las ecuaciones puede deducirse de la suma de las otras. Este sistema tiene, entonces, $k - 1$ ecuaciones, las que a su vez determinan $k - 1$ precios relativos. Los precios se expresan en términos de una mercancía elegida como unidad de medida, cuyo precio es igual a 1 (los precios siempre son relativos: la noción de precio absoluto, en cambio, no tiene sentido).

Uno de los efectos de la aparición de un excedente se debe a la introducción de la noción de productos de lujo; esto es, productos no esenciales. Los productos de lujo se definen como los que no son utilizados ni como instrumentos de producción, ni como medios de subsistencia, en la producción de otros. Esta categoría de productos no puede existir en el modo de subsistencia, ya que, por el hecho de ser el excedente igual a cero, por hipótesis cada mercancía tiene, a la vez, el papel de producto y de instrumento de producción.

Los productos de lujo no intervienen en la determinación de un sistema de ecuaciones; su papel es puramente pasivo. Sraffa dice que si de una de las ecuaciones elimináramos una incógnita (por ejemplo, el precio de un bien), las ecuaciones restantes continuarían formando un sistema determinado, que admitiría las mismas soluciones que el anterior. Esto no ocurriría en el caso de que elimináramos un bien esencial (es decir, un bien que entra en la producción de todos los bienes, directa o indirectamente).

Sraffa nos presenta un esquema del proceso económico caracterizado por la aparición de un excedente. Mantiene la hipótesis de que tanto la producción, por un lado, como el conjunto de los medios de producción, por el otro, están constituidos por las mismas mercancías. Pero, a diferencia de lo que ocurre en el primer esquema, se supone que la estructura tecnológica es de tal naturaleza, que la cantidad producida de cada bien puede ser mayor o igual que la usada como medio de producción.

El "valor" de la producción (es decir: precios, por cantidades físicas de producto) supera al de los costos (precios, por cantidades físicas de los medios de producción), razón por la cual se dispone de un excedente. El sistema de ecuaciones con el que puede expresarse este esquema determina, simultáneamente, el conjunto de los precios relativos y la tasa general de ganancia. Esta tasa general de ganancia es la manifestación del hecho de que el excedente (o beneficio) se distribuye, en cada actividad productiva, en proporción al "valor" de los medios de producción utilizados. Igual que en el esquema anterior, denotamos por r a la tasa de ganancia y el sistema de precios de producción se escribe como:

$$\begin{array}{l}(A_a P_a + B_a P_a + \cdots + K_a P_k)(1 + r) = A P_a \\ (A_b P_a + B_b P_b + \cdots + K_b P_k)(1 + r) = B P_b \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (A_k P_a + B_k P_a + \cdots + K_k P_k)(1 + r) = K P_k\end{array}$$

Como sabemos, además, que:

$$A \geq A_a + A_b + \cdots + A_k$$

$$B \geq B_a + B_b + \cdots + B_k, \text{ etc.}$$

tenemos, al menos, una desigualdad estricta. El sistema contiene k ecuaciones independientes, que determinan simultáneamente los $k - 1$ precios relativos y la tasa de beneficio.

Sraffa altera el supuesto acerca de salarios, que había establecido en los dos primeros esquemas. Hasta este momento se ha supuesto que los salarios están representados por los medios de subsistencia necesarios para los trabajadores, de tal manera que los salarios intervienen en el sistema en el mismo plano que el combustible de los motores; pero, en realidad, los salarios pueden contener no sólo al elemento siempre presente de la subsistencia (que es constante), sino, además, a una participación del excedente (que es variable). Tal vez lo más conveniente frente a situación sería dividir el salario en sus partes componentes; es decir, seguir tratando a los bienes necesarios para la subsistencia de los trabajadores como medios de producción (al igual que el combustible) y, al elemento variable, como parte del excedente del sistema.

Para evitar manipular el concepto tradicional del salario, Sraffa prefiere considerar al salario entero como variable, esto es, como parte del excedente. En este esquema, la tasa de salario y la tasa de ganancia no se determinan simultáneamente por el sistema de ecuaciones en las que el mismo esquema se expresa, puesto que una de las dos magnitudes se determina desde el exterior y, la otra, en función de la primera. En este caso, Sraffa afirma: "el sistema puede moverse con un grado de libertad, y si una de las variables se fija, las demás se fijarán también".[1]

Ahora bien, si llamamos $L_a, L_b, \ldots, L_k$ a las cantidades dadas de trabajo de calidad uniforme (y no "fuerza de trabajo", como algunos autores sostienen de manera errónea) y w a la tasa de salario, por unidad de trabajo, el sistema de precios de producción se presenta de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
(A_a P_a + B_a P_b + \cdots + K_a P_k)(1 + r) + L_a w &= A P_a \\
(A_b P_a + B_b P_b + \cdots + K_b P_k)(1 + r) + L_b w &= B P_b \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(A_k P_a + B_k P_b + \cdots + K_k P_k)(1 + r) + L_k w &= K P_k
\end{aligned}
$$

Si se iguala el precio del producto neto global a 1, tendremos la siguiente ecuación adicional:

$$
\begin{aligned}
&[A - (A_a + B_b + \cdots + A_a)]\, P_a + [B - (B_a + B_b + \cdots + B_k)]\, P_b + \\
&\cdots + [K - (K_a + K_b + \cdots + K_k)]\, P_k = 1.
\end{aligned}
$$

El sistema constaría entonces de $k + 1$ ecuaciones y $k + 2$ variables (es decir, k precios, el salario w y la tasa de ganancia r). El sistema tiene un grado de libertad si se establece, exógenamente, una de las variables de distribución (salario o tasa de ganancia) como variable de distribución.

Uno de los aspectos importantes de la obra de Sraffa, es que introduce una particular unidad de medida de los valores. Para comprender la naturaleza de dicha medida, es necesario referirse a los intentos de Ricardo por explicar la tasa general de ganancia, a partir de la tasa de ganancia que se forma en la agricultura. Si se admite (como lo hace Ricardo en su famoso ensayo de 1815)[2] que en la agricultura se produce un solo bien (digamos, el trigo) y que las subsistencias de los trabajadores agrícolas también están constituidas sólo por ese bien (el trigo), entonces la tasa de beneficio en la agricultura, es decir, la relación entre el producto agrícola como excedente, y lo que ha sido anticipado, como subsistencia para los trabajadores agrícolas, puede calcularse directamente como tal sin necesidad de recurrir al precio

[1] SRAFFA, Piero *Producción de mercancías por medio de mercancías*. Oikos, Barcelona, 1966, p. 28

[2] RICARDO, David "*an essay on the influence of a low price of corn on the profits of stock*". FCE, México, 1960, pp. 3-27.

de los bienes, dado que los dos términos de la relación son físicamente homogéneos. Así, en el sector agrícola, la tasa de ganancia no varía como resultado de cambios en los precios relativos, sino como resultado de cambios en los salarios reales. Pero como la tasa de beneficio tiene que ser la misma, iguala a las tasas de beneficio de los distintos sectores con la que se fija en la agricultura.

Malthus puso en evidencia un importante defecto de este razonamiento. Para él, no existe ningún sector económico, ni siquiera el agrícola, en el cual el capital adelantado y todos los resultados de la producción se definan en base a un único y exclusivo producto. Los salarios no están constituidos únicamente por trigo: los trabajadores consumen también algunos bienes manufacturados. Eso significa que el cálculo de la tasa de beneficio implica la comparación de agregados de bienes heterogéneos (como comparar el producto, los salarios y la inversión total); pero, para comparar estos bienes heterogéneos, hay que convertirlos a una misma unidad.

Con el fin de superar este problema, Ricardo pretendió encontrar una unidad de valor capaz de medir, como si se tratara de una sola cantidad, la masa de los bienes heterogéneos producidos. Su teoría requería de una **medida de valor** que permitiera convertirse en una simple medida homogénea, análoga a la unidad de trigo de su modelo simple, en donde los grupos heterogéneos de los bienes se reparten bajo la forma de renta, salarios y beneficios. Ahora bien, los bienes heterogéneos pueden convertirse en una medida homogénea en función de sus relaciones de cambio en el mercado; es decir, en función de los precios relativos. Pero aquí surge una complicación, ya que estos precios dependen de la tasa de ganancia.

Ante este problema, Adam Smith intentó formular una teoría del valor trabajo. Para explicar el valor de cambio, Smith se sitúa en una sociedad hipotética donde todos trabajan y cambian los productos de su trabajo. En esta sociedad, los productos deben cambiarse en función de la cantidad de trabajo necesario para su producción, para que el sistema de cambios pueda funcionar.

Al definir su modelo, Adam Smith piensa en un tipo primitivo de sociedad; pero los sociólogos contemporáneos han demostrado que el intercambio primitivo es muy diferente de lo que hemos imaginado. En realidad, hay que llegar quizás hasta la economía precapitalista para encontrar un modo de vida en donde el trabajo gastado en la producción determine las relaciones de cambio. Smith, por el contrario, piensa que su propia explicación del valor no es válida para la economía capitalista. Para este autor, en efecto, si el precio natural de una mercancía fuera igual al monto de los salarios pagados para obtenerla, todo sería muy fácil. Un objeto pagado dos veces más caro, sería necesariamente un objeto que ha costado dos veces más trabajo.

Pero el precio incluye el beneficio del capital. ¿Se puede decir que el beneficio del capital sea la remuneración de una clase de trabajo: el de dirección de la empresa? No, dado que las ganancias, para Smith, se fijan completamente sobre el monto del capital empleado y son más o menos determinantes, de acuerdo a la extensión del capital. Por lo anterior a Smith no le parece posible sostener que, en la economía que tiene bajo sus ojos, los valores de cambio de los productos se determinen por sus costos en trabajo. Sin embargo, intentando mantener una relación entre valor de cambio y trabajo, declara finalmente que el precio normal de cada objeto corresponde a la cantidad de trabajo que se puede "encargar"; es decir, se puede comprar con otra mercancía. Esta es, a grandes rasgos, la famosa teoría del valor trabajo encomendada o encargada a Adam Smith, en la cual el problema de la interdependencia, entre la tasa de ganancia y los precios, todavía no se ha resuelto.

Para generalizar su modelo simple del trigo, Ricardo trató de encontrar un "patrón invariable de valores" que permitiera evitar las complicaciones de la interdependencia entre los precios relativos y la tasa de ganancia. Probó diversas ideas (como elaborar una teoría del valor trabajo), pero se dio cuenta de que los valores-trabajo no reflejan exactamente los precios relativos. Intentó también tomar un bien "medio" como patrón, pero descubrió que por este camino no llegaría muy lejos. En efecto, respecto a esto señala, en sus *Principios*: "cuando los bienes variasen en su valor relativo, sería deseable averiguar con certeza cuáles de ellos bajaron y cuáles subieron en su valor real, y ello sólo podría lograrse comparándolos sucesivamente con cierta medida normal invariable de valor, que no debe estar sujeta a ninguna de las fluctuaciones a las cuales están expuestos los demás bienes". Desgraciadamente, agrega Ricardo: "es imposible poseer una mercancía de esta clase, ya que no existe ningún bien que no se halle expuesto a las mismas variaciones que las cosas cuyo valor queremos determinar; o sea, no hay ninguno que no esté expuesto a requerir más o menos trabajo para su producción"[3]. Esta idea la sostuvo en su último trabajo escrito, que era una medida perfecta del valor".[4]

La idea de Ricardo de utilizar un "bien medio", como patrón de valor, resurgirá después con Sraffa. En efecto, nos demostrará cómo tal bien puede ser concebido como un bien compuesto y utilizado en el análisis de la distribución del ingreso, en una época dada y en una economía que produce bienes reproducibles. Esta cuestión, importante en el plano general, no es trascendental para Sraffa, ya que este autor sólo se preocupa por estudiar las relaciones entre los precios y el nivel de las variables de distribución, cualesquiera que sean los factores que las determinan y actúen sobre su variación.

Ahora bien, Sraffa se propone analizar los efectos de una variación del salario sobre los precios y la tasa de ganancia, si la tasa de ganancia es la misma en todas las ramas (es decir, haciendo una hipótesis de precaución de las tasas). Supone, además, que los métodos de producción no se modifican y que las cantidades producidas están dadas. Bajo estas condiciones Sraffa busca una mercancía que, aunque "no sería menos susceptible que cualquier otra, para aumentar o disminuir en el precio respecto a otras mercancías individuales",[5] como resultado de movimientos en el salario, sea una mercancía tal, que supiéramos con certeza que esa "fluctuación tendría su origen exclusivamente en las peculiaridades de la producción de la mercancía que estaba siendo comparada con ella y no en las de su propia producción",[6] agregando que: "No es probable que pueda encontrarse una mercancía individual que poseyera, ni siquiera aproximadamente, los requisitos necesarios."[7]

Pero se puede construir "una mercancía compuesta"; es decir, un agregado de

[3] RICARDO, David *Principios de economía política y tributación*. México, FCE1960, pp 273-311.

[4] RICARDO, David "Valor absoluto y valor de cambio", *Obras y correspondencia IV*, FCE, Méx. 1960, pp 273-311

[5] Sraffa *op. cit.* p. 37.

[6] *Idem.*

[7] *Idem.*,

mercancías en donde las mismas mercancías que forman el producto se vuelvan a encontrar, en las mismas *proporciones*, con los medios de producción del agregado. Sraffa llama a este agregado *mercancía-patrón*, designando con la expresión *sistema-patrón* al conjunto de las industrias que tienen responsabilidad en las proporciones que producen dicha mercancía-patrón.

El planteamiento formal de la construcción de la mercancía-patrón equivale a encontrar un conjunto de k multiplicadores adecuados (que se pueden llamar $q_a, q_b, \ldots, q_k$) y aplicarlos, respectivamente, a las ecuaciones de producción, en las mercancías "a", "b" ....,"k". Los multiplicadores, afirma Sraffa, deben ser tales, que las cantidades resultantes de las varias mercancías mantengan entre sí las mismas proporciones, en el primer miembro de la igualdad (como productos), que las que mantienen en el total del segundo miembro, en dicha igualdad (como medios de producción)."[8] Esto significa que el porcentaje, por el cual la producción de una mercancía excede la cantidad que entra en el conjunto de los medios de producción, será igual para todas las mercancías. Sraffa llama a este porcentaje *relación-patrón* y lo designa con la letra R.

Bajo estas condiciones, el sistema q puede escribirse como:

$$
\begin{aligned}
&(A_a q_a + B_a q_b + \cdots + K_k q_k)(1 + R) + L_a w = A q_a \\
&(B_b q_a + B_b q_b + \cdots + B_k q_k)(1 + R) + L_b w = B q_b \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&(K_a q_a + K_b q_b + \cdots + K_k q_k)(1 + R) + L_k w = K q_k
\end{aligned}
$$

Podemos definir la unidad en la cual los multiplicadores están expresados, mediante una ecuación adicional que incorpore la condición de que la cantidad de trabajo empleado, en el sistema-patrón, sea la misma que el sistema concreto:

$$L_a q_a + L_b q_b + \cdots + L_k q_k = 1$$

Tenemos así un sistema de $k + 1$ ecuaciones, las que determinan k multiplicadores. Al resolver este sistema de ecuaciones, obtenemos un conjunto de números para los multiplicadores:

$$(q'_a, q'_b, \ldots, q'_k)$$

números que Sraffa aplica a las ecuaciones del sistema de producción. (Pero es evidente que el sistema concreto de que se parte comprende sólo ramas fundamentales.) Aplicando estos multiplicadores, Sraffa convierte el sistema concreto en sistema-patrón, de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&q'_a [(A_a P_a + B_a P_b + \cdots + K_a P_k)(1 + r) + L_a w] = q'_a A P_a \\
&q'_b [(A_b P_a + B_b P_b + \cdots + K_b P_k)(1 + r) + L_b w] = q'_b B P_b \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&q'_k [(A_k P_a + B_k P_a + \cdots + K_k P_k)(1 + r) + L_k w] = q'_k K P_k
\end{aligned}
$$

De aquí, Sraffa deriva el ingreso nacional patrón que adopta como unidad de medida de los salarios y de los precios, para el sistema de producción original. La ecuación establece que el precio del producto neto es igual a 1 y se reemplaza por

[8] *Ibid.*, p. 44

la siguiente ecuación, donde las q' representan números conocidos, mientras que las p son variables. Tenemos así la ecuación adicional:

$$\begin{aligned} &[q'_a A - (q'_a A_a + q'_b A_b + \cdots + q'_k A_k)]\, P_a + \\ &+ [q'_b B - (q'_a B_a + q'_b B_b + \cdots + q'_k B_k)]\, P_b \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \cdots + [q'_k K - (q'_a K_a + q'_b K_b + \cdots + q'_k K_k)]\, P_k = 1 \end{aligned}$$

Esta mercancía "compuesta" corresponde al patrón de los salarios y los precios. La introducción de la condición de normalización, en el sistema-patrón, establece ahora $k + 1$ ecuaciones (k ecuaciones de precios y una ecuación de normalización) y $k + 2$ incógnitas (k ecuaciones de precios y dos variables de distribución). El sistema sigue disponiendo de *un grado de libertad.*

En el sistema-patrón, la relación entre el producto neto y los medios de producción puede calcularse en términos físicos, puesto que se trata de dos agregados en los cuales las mercancías son iguales. Bajo esta perspectiva, la mercancía-patrón equivale al "trigo" del primer Ricardo. Con la mercancía-patrón, Sraffa resuelve sólo en parte el problema que Ricardo no pudo superar, al pasar del trigo al trabajo incorporado.

Ricardo, en efecto, buscaba un patrón que fuera invariable tanto para cambios en las condiciones de producción de las mercancías, como para las condiciones de producción dadas, cuando se modifica la distribución del ingreso. Sraffa abandona la búsqueda de un patrón invariable, con respecto a variaciones en las condiciones de producción, encaminando su análisis únicamente a la búsqueda de un patrón de precios que sea "invariable", cuando la distribución del ingreso varía (considerando que las condiciones de producción de las mercancías están dadas).

Así como la tasa de ganancia resultante del cultivo de trigo se obtenía , para el primer Ricardo, de la tasa de ganancia, que en el sistema-patrón se mantiene como relación entre cantidades de mercancías, en el sistema efectivo se obtendrá de la relación de los valores agregados. Más específicamente, si recordamos que R es la relación que se establece, en el sistema-patrón, entre el producto neto y los medios de producción (lo que implica, entonces, la tasa de ganancia máxima para el sistema real), en Sraffa la cantidad total de trabajo es igual a la unidad (salario y tasa de salario coinciden). Por consiguiente, la tasa de beneficio prevaleciente en el sistema real está dada por $r = R(1 - w)$.

Después de demostrar que el sistema-patrón es único, Sraffa utiliza abundantemente la relación entre la tasa de salario y la tasa de ganancia, para atacar múltiples problemas teóricos. Así, por ejemplo, analiza el caso donde se fabrican mercancías con medios de producción diferentes y se pregunta cómo varían los precios relativos de las mercancías, al cambiar la tasa de ganancia.

En la segunda parte de su libro, Sraffa estudia los nuevos problemas que surgen al considerar la existencia de ramas con productos múltiples (producción conjunta) y capital fijo. Además, Sraffa introduce el factor *tierra* en sus análisis y construye un sistema de ecuaciones más complicado, en donde, al estar dados los salarios, por este mismo hecho quedan determinados tanto los precios de todas las mercancías, como la tasa de beneficio y la renta de las tierras de calidad diferente.

SEGUNDA PARTE

Capítulo 1 BREVE HISTORIA DEL ÁLGEBRA LINEAL

LOS SISTEMAS DE COORDENADAS Y LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

En el año de 1637 **René Descartes** publicó, en el apéndice de su *Discurso del Método*, *Geometría*, en donde colocó todo el campo de la geometría clásica al alcance de los algebristas. Una de las características del pensamiento cartesiano era que evidenciaba una "finalidad cósmica", es decir, tenía el propósito de generalizar y absolutizar. Por lo mismo, se dio a la tarea de perseguir una física general capaz de explicar completamente todo lo que encierra el universo, en la tierra y en los cielos, meta que creyó alcanzar en 1644, con sus *Principios de la filosofía*. Descartes consideraba como un modelo de la ciencia aquella que dictará sus preceptos lógicos y sirviera como un método general de análisis, basándose sobre todo en las matemáticas. Con tal meta y a fin de establecer la relación entre geometría y álgebra, tomó lo mejor del análisis geométrico y del álgebra, corrigiendo los defectos del primero por el otro análisis, el algebraico.

Descartes aspiraba también a una "matemática universal", que tendría que explicar "todo aquello que pueda preguntarse acerca del orden y de la medida, no importando que la medida pueda buscarse en números, figuras, astros, sonidos o cualquier otro objeto". Matemática universal, de la cual "las matemáticas" (en plural) constituirían la envoltura.

Descartes participó, así, en la *revolución matemática*, contribuyendo a la unión del álgebra con la geometría. En su libro *Geometría* no vemos ejes "cartesianos" por ningún lado y allí no derivó ecuaciones de la línea recta ni de las secciones cónicas, aunque aparece una ecuación particular de segundo grado, que él interpretó como una sección cónica. En *Geometría*, Descartes aplicó el álgebra a la geometría y esto aparece fundamentado como un método.

Por aquellos años otro notable matemático, **Pierre Fermat** (1601 -1665), fue leal con los ideales griegos del conocimiento especulativo y de los placeres intelectuales. Estudió literatura griega y escribió poesía. Fermat "sabía griego antiguo y conocía profundamente las obras clásicas griegas de Euclides, Apolonio, Diofanto. De este último reconstruyó obras perdidas y, como consecuencia, escribió *Ad locos et solidos isagoge*, escrita antes de 1637 y publicada póstumamente en 1679, donde aparecieron los fundamentos del método de las coordenadas en forma más clara. En su memoria aparece explícitamente la ecuación de la recta."[1]

Otros matemáticos de esa época contribuyeron también al desarrollo de la geometría analítica. Uno de ellos, el profesor neerlandés **Franciscus van Schooten**, dio en 1649 la versión latina de la *Geometría* de Descartes, haciendo los comentarios pertinentes. Posteriormente se dedicó a difundir y perfeccionar el método de coordenadas, así como el de su transformación.

Pintura de Frans Hals

Poco después de mediados del siglo XVII aparecieron publicaciones como el *Tractatus de Sectionibus Conicis* (1655) de **John Wallis** y, poco más tarde (1659), el neerlandés **Johan De Witt** publica *Elementa curvarum linearum*. Estos dos

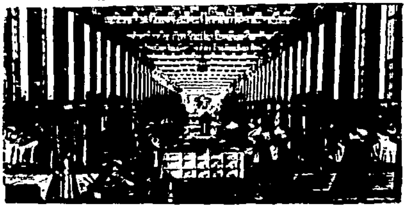
[1] **KLINE**, Morris *Matemáticas para los estudiantes de Humanidades*, Mex, F.C.E., 1992, p.258

Joseph Louis Lagrange, grabado de The Gallery of Portraits *de Charles Knight, Londres (1833). La mecánica, eclipsada por el monumental trabajo de Lagrange* La mecánica analítica, *se manifestaba como el símbolo perfecto de la física matemática.* Foto Ann Ronan Picture Library.

Gaspar Monge, retrato que encabeza la edición parisina de 1850 de Application de l'analyse à la géométrie. *Monge dio su forma moderna a la geometría analítica elemental e introdujo los elementos de primer grado: línea recta y plano.* Servicio Documental Planeta.

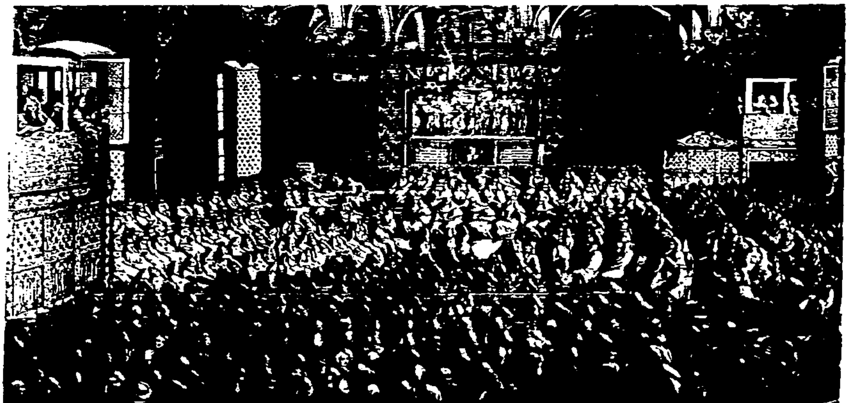
trabajos registran una fuerte influencia de Descartes.

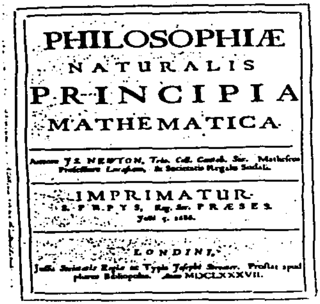
Por último, la idea de coordenadas en tridimensionales ($\mathbf{R}^3$) apareció en un escrito de **Phillipe de la Hire** (1640-1718) en 1679, aunque sus ideas no se sistematizaron sino hasta el siglo XVIII.

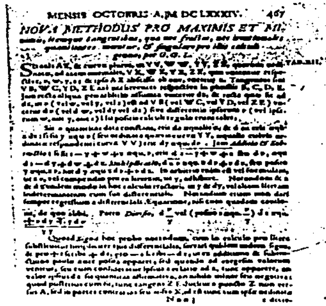


Hospital de la Claridad, París 1635

Una reunión de los Estados Generales, en Francia.




PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.
Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.
LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.


MENSIS OCTOBRIS A. MDCLXXXIV. 467
NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MI-

En síntesis, con el desarrollo del método de coordenadas se sustituyeron los puntos por pares de números ordenados y las curvas por ecuaciones. Con ello, se daban los primeros pasos para la "reducción" de la geometría al álgebra.

LA MATEMÁTICA, EN EL SIGLO XVIII

EL SIGLO NEWTONIANO

Este siglo fue llamado "siglo de las luces", "siglo del iluminismo", "siglo de la ilustración" y " siglo de la razón". Fue un siglo newtoniano, porque las leyes de la mecánica permitieron traducir en *ecuaciones diferenciales* los movimientos de los cuerpos celestes. En ese tiempo se logró "ver" la historia presente y futura de los fenómenos mecánicos, los que hasta ese momento parecían esconder un secreto inviolable.

La mecánica le dio un notable impulso a la matemática del siglo XVIII, elaborando nuevas ramas y ampliando las aplicaciones. El avance de los descubrimientos técnicos contrastó con el éxito de las aplicaciones, al mismo tiempo que subsistía una gran debilidad conceptual en los fundamentos teóricos de las matemáticas.

Las ideas de Newton y Leibniz se difundieron durante el siglo XVIII en forma muy lenta, debido a las notaciones inusuales y distintas y a su esporádica publicación en memorias aisladas y fragmentarias y también, en general, debido a que las comunicaciones de ese tiempo no permitían una mayor velocidad en la difusión de las ideas. Los primeros en aplicar el cálculo fueron Euler, Gauss y los Bernoulli, entre otros.[2]

Durante este siglo hubo importantes avances en el desarrollo del álgebra, la que finalmente, implícita o explícitamente, serviría como herramienta para el estudio de la economía.

ANTECEDENTES AL SURGIMIENTO DEL CONCEPTO DE DETERMINANTE EN EL SIGLO XVIII

En el año de 1683, en una carta que **Gottfried von Leibniz** enviara al marqués **Guillaume de L'Hopital** (1661-1701), aquel escribió allí un sistema de tres ecuaciones, con dos incógnitas y con coeficientes "numéricos" abstractos, como sigue:

$$\begin{aligned} 10 + 11x + 12y &= 0 \\ 20 + 21x + 22y &= 0 \\ 30 + 31x + 32y &= 0 \end{aligned}$$

Leibniz observó que cada número coeficiente tenía dos caracteres: el primero marca en qué ecuación se presenta; el segundo marca a qué letra pertenece. Después procedió a eliminar y, primeramente, y después x, hasta demostrar que si el sistema tenía solución tenía que cumplirse:

$$10 \cdot 21 \cdot 32 + 11 \cdot 22 \cdot 30 + 12 \cdot 20 \cdot 31 = 10 \cdot 22 \cdot 32 + 11 \cdot 21 \cdot 30 + 12 \cdot 21 \cdot 30$$

que equivalía a la condición del determinante para una matriz de coeficientes que se debe anular. La carta no se publicó sino hasta 1850, por lo que no influyó en trabajos posteriores.

Los determinantes aparecieron también por esas fechas en los trabajos del matemático japonés **Takakazu Seki** (1642-1708).[3]

Por su parte el inglés **Edward Waring** (1734-1798), independientemente de las investigaciones de **Christian Goldbach** (1690-1761), quien afirmara que *todo número par es la suma de dos números primos y todo impar no primo es la suma de tres números primos*, también en forma de conjetura expresó el teorema relativo a *la descomposición de todo número en una suma de potencias de igual exponente*, problema que no fue resuelto en aquella época sino a principios de este siglo.[4] Su amigo **John Wilson** (1741-1793) escribió un teorema de congruencias.

[2]En un trabajo sobre cálculo integral, Pierre Simon Laplace (1745-1783) trató de sistemas de ecuaciones lineales repitiendo el trabajo de Cramer, pero también enunció y probó la regla de intercambio de dos columnas adyacentes del determinante cambia el signo, y mostró que un determinante con dos columnas linealmente independientes es igual a cero

[3]FRALEIGH, John y BEAUREGARD, Raymond, *Algebra Lineal*, Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, México, 1989, p.188

[4]BABINI, José , *Historia de las Matemáticas*, Ed. Gedisa, Barcelona,1975, T II, p. 116.

Waring se ocupó de las transformaciones de ecuaciones y llevan su nombre las relaciones entre los coeficientes de una ecuación y las sumas de las potencias de igual exponente de sus raíces, relaciones que más tarde usaría Lagrange. Un teorema más de Waring establece que el producto de los cuadrados de las raíces de una ecuación es proporcional al producto de los valores de la función, para los ceros de la derivada. También se ocupó de la separación de las raíces y de la aproximación de raíces complejas, encontrándose entre sus escritos el criterio del cociente para la convergencia de las series y la fórmula de interpolación, que luego desarrollaría Lagrange.[5]

Por último, **Gabriel Cramer** (1704-1752) estudió en forma especial la teoría de curvas planas, las que desarrolló sistemáticamente, referidas en cada caso a un sistema adecuado de referencia. En la determinación de los coeficientes de la ecuación de una curva algebraica en donde se conoce un número suficiente de puntos por la que pasa, dio la *regla* conocida por su nombre. Esta regla permite resolver, mediante series, el problema de la investigación de puntos singulares.[6]

PRIMERAS CLASIFICACIONES DE LAS SUPERFICIES CUADRÁTICAS

La primera clasificación de las superficies cuadráticas la hizo Leonhard Euler, en su texto *Introductio in analysorum infinitorum* (1748). La clasificación de Euler era parecida a la que estableció De Witt para las secciones cónicas. Con base en el anterior estudio, Euler consideró la ecuación de segundo grado en tres variables:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + Dpq + Epr + Gp + Hq + Ir + K = 0 \tag{1.1}$$

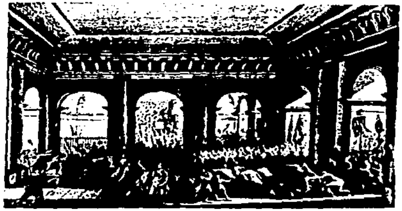
como representativa de una superficie de $\mathbf{R}^3$. Dio formas canónicas para estas superficies y mostró cómo rotar y trasladar los ejes, para reducir cualquier ecuación dada a una forma canónica como

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + K = 0 \tag{1.2}$$

Un análisis de los signos de los nuevos coeficientes determinaba en qué casos la ecuación dada representaba un elipsoide, un hiperboloide de una o dos hojas, un paraboloide elíptico o hiperbólico o uno de los casos degenerados. Euler no usó explícitamente valores propios, pero dio una fórmula para la rotación de los ejes en $\mathbf{R}^3$, como funciones de ciertos ángulos t. Después mostró cómo elegir esos mismos ángulos, para que los coeficientes D, E y F fueran cero.

[illegible]. During the American War of Independence (see pages [illegible] and [illegible]) armoured ships - monitors - were used in sea battles. A woodcut from the *Illustrated London News* of 1862 from a sketch by their special artist at Memphis.

[5] *ibid., T II, p. 116.*
[6] *ibid., p. 117.*



Copperplate engraving of a mob storming the Tuileries on 20 June 1792, taken from an original by Romain Prieur (?-1879).

The evils of spirit drinking as depicted by William Hogarth (1697-1764) in his famous engraving 'Gin Lane'. Oblivion could be bought although it generated worse poverty, as Hogarth depicts.

En el siglo XVII, la geometría analítica y los métodos infinitesimales habían sido instrumentos para la solución de problemas geométricos y para la investigación de las leyes naturales, pero en el siglo XVIII el análisis, sin dejar de proseguir esos fines, se estudió por sí mismo, mientras se continuaba con el estudio de los fenómenos naturales con desarrollos nuevos y problemas analíticos. A fines de siglo, este carácter de la matemática era puramente algorítmico, alcanzando recién entonces la importancia que antes sólo tenía la geometría.

LA ECUACION DEL PLANO EN $\mathbf{R}^3$

Jacob Hermann (1678-1733), en 1732, dio una definición para la ecuación de un plano en $\mathbf{R}^3$. El plano en $\mathbf{R}^3$ que pasa por $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, con vector ortogonal distinto de cero $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$, es el conjunto de todos los puntos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ que satisfacen:

$$\mathbf{d} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0 \tag{1.3}$$

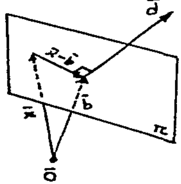
es decir:

$$d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 = c\,. \tag{1.4}$$

Hermann pudo así determinar la posición del plano coordenado con el que trabajaba:

$$\frac{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}} \tag{1.5}$$

Por otra parte **Gaspard Monge** (1746-1818), a fines del siglo XVIII, relacionó la ecuación de un plano con los tres planos coordenados y dio los cosenos de los ángulos que forma el plano con cada uno de éstos, llamados *cosenos directores*. Monge participó en el gobierno revolucionario francés como Ministro de Marina y sirvió a Napoleón, siendo nombrado senador vitalicio.



GASPARD MONGE
New York Public Library Collection

Podemos decir que el siglo XVIII fue el siglo del algoritmo, cuando tanto el análisis como el álgebra adquirieron vida propia y tiñeron a toda la matemática de un carácter formal, aunque no estrictamente riguroso. El análisis se independizó entonces de la geometría y, en cierto sentido, también de la ciencia natural.

La geometría analítica y los métodos infinitesimales habían sido instrumentos analíticos para las solución de problemas geométricos y para la investigación de las leyes naturales. En ese mismo siglo y sin dejar de proseguir esos fines, los matemáticos siguieron motivándose en la geometría y en los fenómenos naturales, creando nuevos desarrollos y problemas analíticos. A fines de siglo este carácter puramente algorítmico de la matemática se fue perdiendo, cuando la geometría volvió a penetrar en el campo de la matemática; pero ahora, con la jerarquía de geometría y con un grado de abstracción mayor.

La figura representativa del período algorítmico fue **Leonhard Euler** (1707-1783), quien, además de la matemática, cultivó la física-matemática y otras disciplinas, inquietudes que compartió con los matemáticos franceses que sobresalieron en ella durante el periodo comprendido entre Euler y Gauss. Al igual que muchos matemáticos de la época, en "el siglo de la razón" Euler depositó una excesiva confianza en la matemática. No se dudó en ese tiempo de que toda ecuación algebraica siempre tenía solución ni de que toda ecuación diferencial podía integrarse, como asimismo, el que cualquier serie podía sumarse.

La obra de Euler, su *Opera Omnia*, comprende *69 volúmenes* publicados y su recopilación llevó más de cincuenta años.

Colegio de San Ignacio de la Ciudad de México.

Formado en el ambiente de los Bernoulli, Euler, quien nunca fue profesor, desarrolló una intensa actividad científica gracias a la protección de las cortes de San Petersburgo y Berlín, donde publicó muchísimos artículos y dio vida a estas academias durante muchos años, casi sin colaboración de otros matemáticos. Cuando quedó ciego, en la última mitad de su vida, dictaba sus trabajos a algún colaborador.[7]

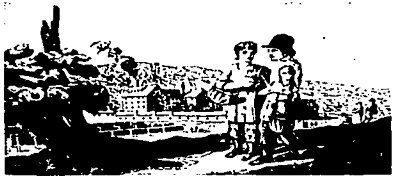
Su actividad se manifestó en todos los campos de la matemática y ciencias afines. Sus memorias (más de mil) tratan de aritmética, teoría de números, álgebra y cálculo de probabilidades, cálculo infinitesimal y geometría, mecánica teórica y aplicada, astronomía, física y geodesia.

En álgebra, Euler dio métodos originales de eliminación y descomposición de

[7] *ibid.*, p119.

fracciones parciales simples. Se ocupó en general de las ecuaciones con la esperanza de hallar un método general para resolver ecuaciones de grado arbitrario, encontrando sólo un procedimiento para resolver ecuaciones hasta de cuarto grado. Expuso sus métodos para desarrollar en series el valor de las raíces, que tanta importancia adquiriría posteriormente, en la teoría general de las ecuaciones algebraicas.

Su *Introductio in analysis infinitorum* (1748), de dos volúmenes, es un tratado de geometría analítica plana y del espacio, en su forma actual. Introdujo las coordenadas polares, las fórmulas de transformación de coordenadas y las propiedades generales de las curvas algebraicas, hasta las de cuarto grado. Se ocupó también de la intersección de curvas y superficies.



'The Factory Children' from *The Costume of Yorkshire*, Leeds, 1885. The originals for this work were prepared in 1814 by George Walker (1781–1856). The picture shows two stunted children in front of the mill where they are employed.

El concepto de valor propio, apareció por primera vez en relación con la solución de ecuaciones diferenciales. En 1743 Euler introdujo el método normal, para resolver una ecuación diferencial de n-ésimo orden, con coeficientes constantes:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0 \tag{1.6}$$

usando funciones de la forma

$$y(t) = e^{\lambda t} \; . \tag{1.7}$$

donde λ es un valor propio de la ecuación característica

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0 \; . \tag{1.8}$$

Esta es la misma ecuación que se obtiene al hacer las sustituciones

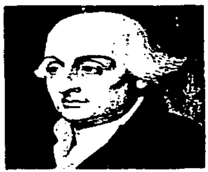
$$\begin{cases} y_1 = y, \\ y_2 = y^{(1)}, \\ \vdots \\ y_n = y^{(n-1)} \end{cases} , \tag{1.9}$$

reemplazando la única ecuación de orden n por un sistema de n ecuaciones de primer orden

ADRIEN-MARIE LEGENDRE
David Smith Collection

$$\begin{cases} y_1' &= & y_2 & & & \\ y_2' &= & & y_3 & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ y_n' &= & -a_0y_1 & -a_1y_2- & \cdots & -a_{n-1}y_n \end{cases} \tag{1.10}$$

y calculando la ecuación característica, de la matriz de coeficientes de este sistema.



JOSEPH LOUIS LAGRANGE
Brown Brothers

JEAN LE ROND D'ALEMBERT
Library of Congress

En el año 1763, aproximadamente, Lagrange dio una versión más explícita para hallar la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales por medio de las raíces latentes, que es lo equivalente a la ecuación característica asociada a la matriz de coeficientes. El sistema particular de ecuaciones diferenciales surgió del examen de los "movimientos infinitesimales" de un sistema mecánico, en la vecindad del punto posición de equilibrio.

[illegible]

[illegible]

Capítulo 2 HISTORIA BREVE ACERCA DEL ORIGEN CONCEPTUAL DE LOS DETERMINANTES

La matemática del siglo XIX se puede caracterizar por los siguientes rasgos generales:

1) Al compás del gran desarrollo científico y tecnológico del siglo, los matemáticos escribieron miles de artículos, en particular sobre determinantes y matrices;

2) Se crearon sociedades y revistas especializadas en matemáticas;

3) Se celebraron las primeras Reuniones (nacionales e internacionales) de matemáticas. El Primer Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Zurich en 1897, pertenece a este siglo.

4) Los progresos realizados en este siglo en matemáticas triplicaron, aproximadamente, los realizados durante los cuarenta siglos anteriores;

5) Durante el siglo XIX, la matemática adquirió unidad y autonomía. Esta se había desarrollado en varias ramas:

a) Aritmética y teoría de números;

b) Geometría elemental, analítica y descriptiva;

c) Álgebra; y

d) Cálculo diferencial e integral.

Two contrasting pictures of social conditions in London in the 1870s. A poor street trader and his family in the Houndsditch area of London's East End, and a fashionable croquet party. From *London: A Pilgrimage*, by Gustave Doré (1832–83) and Blanchard Jerrold (1826–84). London, 1872

Los determinantes y las matrices no influyeron profundamente en el curso de las matemáticas, a pesar de su utilidad para servir como expresiones compactas y de que las matrices sugerían el concepto de grupos concretos, a partir de los cuales se podían discernir teoremas generales para la mencionada teoría de grupos. De cualquier modo, siguen siendo herramientas muy útiles. Hoy en día son parte fundamental del aparato de las matemáticas.

ORÍGENES DEL CONCEPTO DE DETERMINANTE

El concepto de determinante se originó cuando se trabajaba en la solución de determinados problemas, expuestos aquí en forma esquemática:

1) En la solución de sistemas de ecuaciones lineales;

2) En la teoría de la eliminación;

3) En los problemas de la transformación de coordenadas;

4) En el cambio de variables en integrales múltiples;

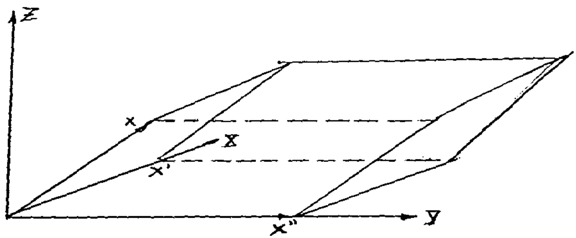
5) En la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales, los que a su vez se originaron al estudiar el movimiento planetario;

6) En la reducción de formas cuadráticas de tres o más variables;

7) En la reducción de haces de formas,[1] a formas normales.

Como se vio en la sección anterior, estos estudios fueron la continuación de los que se hicieron en el siglo XVIII, a partir de las aportaciones de Cramer, Bezout, Vandermonde, Lagrange y Laplace.

La interpretación de un determinante, como *volumen*, apareció aproximadamente en 1773, en un artículo de Joseph Louis Lagrange (1736-1813) sobre mecánica. Lagrange observó que si los puntos P, P', P'', tienen coordenadas (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z''), respectivamente, entonces el tetraedro con vértice en el origen tendrá un volumen:



$$\frac{1}{6}\{z(x'y''-y'x'')+z'(yx''-xy'')+z''(xy'-yx')\} \qquad (2.1)$$

[1] Una haz es el conjunto $A+\lambda B$, donde A y B son formas específicas y λ un parámetro arbitrario.

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Determinante fue la palabra que usó Gauss (1777-1855) para nombrar el discriminante de la forma cuadrática:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 . \tag{2.2}$$

Sin embargo, Cauchy ya aplicaba este término en sus obras del siglo XVIII.

El **arreglo** de los elementos, como arreglo cuadrado y doble notación de subíndices, se debe a Gauss. El escribía:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{2.3}$$

Las **barras verticales** las introdujo Cayley en 1841, para representar un determinante de tercer orden, de la forma:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{2.4}$$

El primer tratamiento sistemático de los determinantes lo hizo Cauchy, en 1815. Demostró el teorema de la multiplicación de los determinantes:

$$|a_{ij}|\,|b_{ij}| = |c_{ij}| . \tag{2.5}$$

Aunque no lo generalizó, Lagrange obtuvo el resultado para determinantes de tercer orden, pensándolo sólo para las coordenadas de un tetraedro. Pero **Jacques P. M. Binet** (1786-1856) ya lo había establecido en 1812, en forma poco satisfactoria.

ARTHUR CAYLEY
Library of Congress

JOHANN HEINRICH LAMBERT
David Smith Collection

Propiedades nuevas de los determinantes fueron mostradas por **Heinrich F. Scherk** (1798-1885) en su *Mathematische Abhandlungen:* cuando dos matrices tienen un renglón y una columna en común, como asimismo el producto de un determinante por una constante. También estableció que:

a) Si en un determinante hay un renglón que es combinación lineal de otro, entonces el determinante vale cero; y

b) *El valor de un determinante triangular (superior o inferior) es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.*

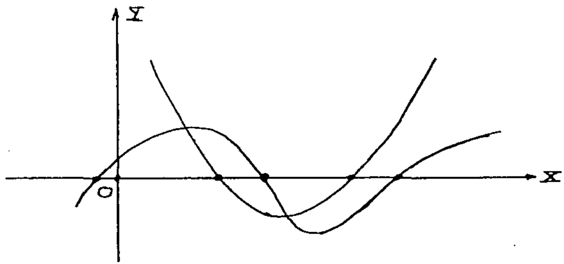
James Joseph Sylvester (1828-1897), por su parte, contribuyó con un método para eliminar x de un polinomio de grado *n-ésimo*. Aunque no lo demostró, lo llamó el **método dialítico**. Por ejemplo, para eliminar x de las ecuaciones

$$\begin{cases} a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \\ b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

formó una ecuación de quinto grado:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = D \tag{2.7}$$

$D = 0$ si, y sólo si, ($\Leftrightarrow$) las ecuaciones (1.16) tienen una raíz en común. Sylvester no aportó ninguna demostración, pero su método lo llevó al mismo resultado que lograron Euler y Bezout.



EL DETERMINANTE JACOBIANO

El concepto conocido como **determinante jacobiano** fue introducido por primera vez por Euler en 1790, cuando desarrolló la noción de integral doble. Usó métodos formales para calcular el jacobiano, cambiando una variable cada vez. Cuatro años después Lagrange usó el jacobiano en $\mathbf{R}^3$, cuando trató el fenómeno de la atracción que ejercía un esferoide elíptico sobre cualquier punto de su interior. Tuvo que integrar una función sobre todo el cuerpo. Para calcular esa integración, fue necesario hacer un cambio de coordenadas.

JAMES JOSEPH SYLVESTER (1814-1897)

Mijail Ostragradsky (1801 -1862), a su vez, generalizó el resultado de Lagrange y su método de demostración, cuando trató integrales múltiples en $\mathbf{R}^3$, en 1836. Sin embargo, sus demostraciones (al igual que las de Euler y Lagrange) no cubrieron los requerimientos modernos.

EL DETERMINANTE FUNCIONAL O JACOBIANO

En 1841, **Carl Gustav Jacob Jacobi** (1804-1851) le dio un tratamiento detallado a lo que él llamó **determinante funcional**. Sus demostraciones se reconocieron, en general, como válidas. Poco después, el determinante recibió su nombre.

La derivada de un determinante la desarrolló Jacobi en 1841, cuando los elementos que lo componen son funciones de una variable t. Por tanto, si

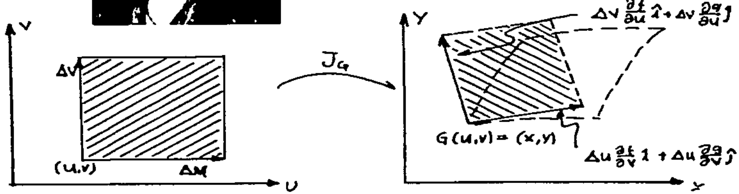
$$a_{ij} = a_{ij}(t) \tag{2.8}$$

y A_{ij} es el cofactor asociado de a_{ij} y representa al determinante, entonces

$$\frac{\partial D}{\partial a_{ij}} = A_{ij} \text{ y } \frac{dD}{dt} = \sum A_{ij} a'_{ij} \ , \tag{2.9}$$

en donde las primas representan derivación, con respecto a t.

CARL GUSTAVE JACOBI
David Smith Collection



CAMBIO DE VARIABLES EN UNA INTEGRAL MÚLTIPLE

Resultados particulares a este problema los encontró primero Jacobi, como ya se mencionó. Después hizo lo mismo **Eugene Charles Catalan** (1814-1894), en 1839. Su resultado fue el siguiente:

$$\int\int F(x,y)dxdy \text{ y } x = f(u,v), \ y = g(u,v) \tag{2.10}$$

$$\Rightarrow \int\int G(x,y) \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} dudv \tag{2.11}$$

donde

$$G(x,y) = F(x(u,v), y(u,v)). \tag{2.12}$$

El determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{2.13}$$

se llama **jacobiano** de y y x, con respecto a u y v. También se le conoce como **determinante funcional.**

Pierre Simon Laplace, grabado de la época. Biblioteca Nacional. París. Laplace preconizó una formulación muy precisa de las bases psicológicas de la teoría de las probabilidades y sugirió su aplicación a los problemas demográficos y jurídicos. Foto Archivo Planeta.

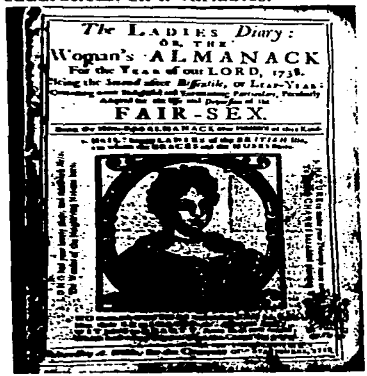
C. G. J. Jacobi, retrato de autor desconocido. W. R. Hamilton y Jacobi hicieron una serie de descubrimientos notables, más o menos inspirados por la mecánica racional, ciencia fundada esencialmente sobre la aplicación de ecuaciones diferenciales. Servicio Documental Planeta.

Sobre este problema, Jacobi desarrolló un importante artículo importante en 1841, donde trataba de los determinantes funcionales de grado *n*.

FORMAS CUADRÁTICAS Y LOS DETERMINANTES

El problema de la transformación de las ecuaciones cuadráticas a formas simples, por medio de la elección de ejes coordenados que tuvieran las direcciones de los ejes principales, fue introducido en el siglo XVIII. Pero la clasificación de superficies cuadráticas, en términos de los signos de los términos de segundo grado cuando los ejes principales coinciden con los ejes coordenados, fue recién dado por Cauchy en 1826, en su *Leçons sur les aplications du calcul infinitesimal á la géometrie*. Sin embargo, no era claro que el mismo número de términos positivos y negativos siempre se obtuviera, a partir de esta reducción a la forma normal. Sylvester respondió a esto con su **ley de inercia de las formas cuadráticas, en n variables.**

Maria Gaetana Agnesi



The Ladies' Diary (1704-1841): Cover, 1738. The Ladies' Diary, a contemporary magazine for women which contained many problems and puzzles in mathematics, was probably not the one referred to as having inspired Mary Somerville's interest in mathematics. (The Ladies' Diary contained no "colored plates of dresses.") However, the problems included in it were probably of the same type.

En ese tiempo ya se sabía ya que

$$\mathbf{XAX}. \tag{2.14}$$

o bien,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

se puede reducir a una suma de r cuadrados, donde r es el rango de la forma; es decir, de la forma

$$y_1^2 + \cdots + y_s^2 - y_{s-1}^2 - \cdots - y_{r-s}^2 , \tag{2.15}$$

realizada por medio de una transformación lineal

$$\mathbf{X} = \mathbf{BY} \text{ tal, que } \det \mathbf{B} \neq 0 .$$

La ley de inercia de Sylvester establece que el número s de términos positivos y de $r - s$ negativos es siempre el mismo, no importando qué transformación real se aplique. Sylvester, sin embargo, no aportó demostración.

Si una forma cuadrática $\mathbf{X'AX}$ de rango r se transforma, mediante dos transformaciones de números reales no singulares, $\mathbf{X} = \mathbf{TX}$, $\mathbf{X} = \mathbf{SZ}$, en una suma de r cuadrados de la forma:

$$\begin{aligned} X'AX &= b_1 y_1^2 + \cdots + b_r y_r^2 \\ &= c_1 z_1^2 + \cdots + c_r z_r^2 . \end{aligned} \tag{2.16}$$

entonces el número de $b_i > 0$ es igual al número de $c_i > 0$.

La ley fue redescubierta y probada por Jacobi, en 1857. Por este motivo, ahora se la conoce como **ley de inercia de Jacobi-Sylvester.**

Gauss introdujo, en sus *Disquisitiones Arithmeticae*, la siguiente terminología: *Si una forma cuadrática es positiva o cero para todos los valores reales de las variables, se la llama* **positiva definida;**[2]

Se la llama **semidefinida positiva**, si $\mathbf{XAX'} \geq \mathbf{O}, \forall \mathbf{X}$; y

se la llama **seminegativa definida, si $\mathbf{XAX'} \leq \mathbf{O}, \forall \mathbf{X}$; OJO Poner (ec. 17) en código**

Estudios posteriores de las formas cuadráticas involucraron la noción de **ecuación característica**, para una forma cuadrática o determinante.

El el siglo XVIII, una forma cuadrática se escribía frecuentemente como:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{2.17}$$

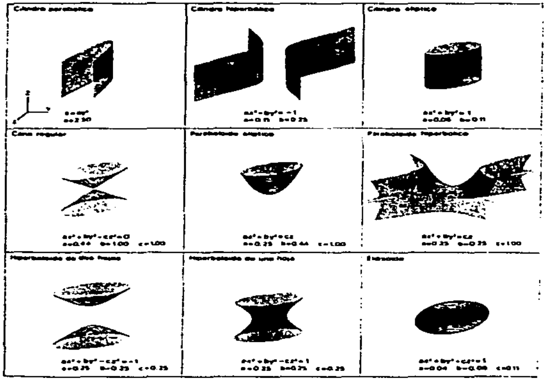
$$a_{ij} = a_{ji}$$

La **ecuación latente o característica**, de la forma en cuestión, es el determinante:

[2]**KLINE, Morris** , ***History of Mathematics from Ancient to Modern Times*, Ed. Oxford University Press, sexta reimpresión, U.S.A., p.799.**

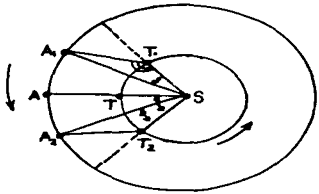
$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{2.18}$$

Los de valores de λ que satisfacen esta ecuación característica, se llaman **raíces características o raíces latentes.** A partir de los valores de las λ, se obtienen las longitudes de los ejes principales.



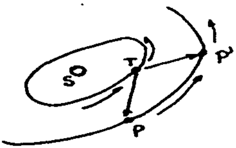
Como ya se mencionó, el concepto de ecuación característica lo descubrieron simultáneamente varios matemáticos: Euler aplicó la noción en 1748, cuando trabajaba en la reducción de formas de tres variables, pero no presentó teoremas que establecieran las condiciones bajo las cuales las raíces tuvieran valores reales; Lagrange aplicó este concepto entre 1763-65, cuando trabajaba con sistemas de ecuaciones diferenciales lineales; finalmente, Laplace aplicó esta noción en 1772, cuando trabajaba con ecuaciones diferenciales.

El llamado método de solución de Gauss apareció descrito en uno de sus artículos, donde detallaba los cálculos para determinar la órbita del asteroide **Palas.** Los parámetros de la órbita tenían que determinarse mediante observaciones del asteroide, durante el período comprendido entre los años 1803 y 1809. Gauss estableció seis ecuaciones, con seis incógnitas y coeficientes bastante complicados. Para resolver estas ecuaciones, las fue reemplazando sistemáticamente por un nuevo sistema, en donde sólo la tercera ecuación tenía seis incógnitas; y así sucesivamente, hasta que la sexta sólo tenía una incógnita. Resolvió la última ecuación, hallando las restantes por sustitución regresiva.

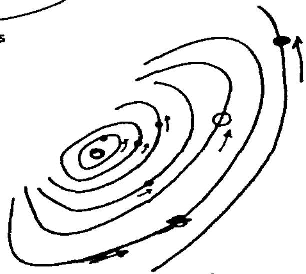


A = asteroide Palas

PIERRE-SIMON LAPLACE
Brown Brothers



T : tierra
P : a. Palas

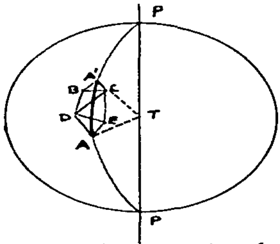


Raíces características
$\lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i,j = 1,\dots,6 \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$.

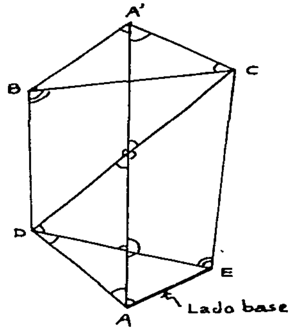
EL MÉTODO GAUSS-JORDAN

Wilhelm Jordan (1842-1899) era un profesor alemán de geodesia cuando descubrió su método, publicado (en alemán) en 1873 . Él mismo atribuyó el método a **Friedrich Robert Helmet** y a **Peter Andreas Hansen**, situándolo unos años antes. La técnica de Jordan consistía también en la sustitución regresiva.

Jordan participó en varias exploraciones geodésicas de fines del siglo XIX, en Alemania, así como en la primera exploración importante del desierto de Libia. Editor una revista de godesia, su interés en hallar un método para resolver sistemáticamente grandes sistemas de ecuaciones lineales surgió de la frecuente aparición de estos problemas, en la triangulación geodésica que usan los ingenieros.



Método de triangulación



Durante 1762-65 Lagrange había representado, en un sistema de ecuaciones diferenciales, el movimiento de los seis planetas conocidos hasta ese momento. Su preocupación, dado que ya se conocía la ley de la gravitación universal de Newton, se condensaba en la pregunta: ¿cuál es la relación entre las perturbaciones (de período largo) que ejercen unos planetas sobre otros? Llamó a su ecuación característica **ecuación secular**, la que exigía un determinante de sexto grado. Obtuvo, a través de éste, información acerca de las raíces características.

A su vez Laplace, en su *Mécanique Céleste*, mostró que si todos los planetas se mueven en la misma dirección, entonces las seis raíces características son reales y distintas. Las condiciones bajo las cuales encontrar los **valores característicos**, para el problema cuadrático en tres variables, fue establecido por Hachette, Monge y Poisson, aproximadamente en 1801.

Cauchy, a su vez, estudió el valor característico común en los trabajos de Euler, Lagrange y Laplace. En 1820, en sus *Leçons*, se ocupó del problema de la reducción de una forma cuadrática en tres variables y mostró que la ecuación característica es invariable, para cualquier cambio de ejes rectangulares. Tres años más tarde, en sus *Exercices de mathématiques* (1829), se ocupó del problema de las desigualdades seculares de las órbitas planetarias. A lo largo de su trabajo mostró que dos formas cuadráticas, en n variables:

$$\begin{aligned} a &= \mathbf{XAX} \text{ y} \\ b &= \mathbf{XBX} \end{aligned} \tag{2.19}$$

XBX es la suma de cuadrados. Se podría reducir, simultáneamente, por medio de una transformación lineal

$$\mathbf{X} = \mathbf{CX}' .$$

a una suma de cuadrados. El problema lo resolvió encontrando los ejes principales, para formas con cualquier número de variables. En este mismo trabajo usó nuevamente el concepto de raíces características.

Su trabajo apuntó a que si

$$\begin{aligned} a &= \mathbf{XAX}\text{y} \\ b &= \mathbf{XBX} \end{aligned}$$

representan dos formas cuadráticas cualesquiera, entonces se puede considerar un haz de formas

$$ua + vb, \tag{2.20}$$

donde u, v representan parámetros arbitrarios. Las raíces latentes del haz del cociente $-u/v$, para el cual el determinante del haz

$$|ua_{ij} + vb_{ij}| = 0. \tag{2.21}$$

Cauchy probó en 1840, en sus *Leçons*, que las raíces latentes son todas seculares, en particular cuando una de las formas es positiva, definida para todos los valores no nulos de las variables. Como

$$|ua_{ij} + vb_{ij}|$$

es simétrico y **B** pudiera ser el determinante simétrico identidad. Cauchy probó también que cualquier determinante simétrico, de cualquier orden, tiene raíces características reales. El término **ecuación característica** se debe a Cauchy (1830).

El concepto **determinantes similares** también surgió del tratamiento de transformaciones. Así, *dos determinantes* **A** *y* **B** *son singulares si, y sólo si, existe un determinante* **P** *tal, que* $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{BP}$.

En 1826 Cauchy mostró asimismo, en la obra mencionada, que *dos transformaciones similares tienen los mismos valores característicos*. Las **transformaciones similares** sirven para clasificar las transformaciones proyectivas, un problema que fue tratado en forma sintética durante mucho tiempo.

En 1858, Karl Weierstraß aportó un método general para reducir, simultáneamente, dos formas cuadráticas a sumas de cuadrados. También probó que si una de las formas es positiva definida, la reducción es posible aún cuando algunas de las raíces latentes sean iguales. Su interés en este tipo de problemas se originó al estudiar las oscilaciones pequeñas alrededor de un punto de equilibrio y mostró, en su trabajo sobre formas cuadráticas, que la estabilidad no se destruye por la presencia de períodos iguales en el sistema. Esto iba en contra de las suposiciones de Lagrange y Laplace.

Por su parte Sylvester, en 1851, trabajando con el contacto y la intersección de las curvas y superficies de segundo grado, llegó a considerar la **clasificación de haces de tales cónicas y superficies cuadráticas**. En particular buscó la forma canónica para cualquier haz, al escribir un haz de la forma

$$\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B} \tag{2.22}$$

donde

$$A = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2ezx + 2fxy \tag{2.23}$$

$$B = Ax^2 + Bby^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eezx + 2Fxy \tag{2.24}$$

$$\begin{vmatrix} a + \lambda A & f + \lambda F & e + \lambda E \\ f + \lambda F & b + \lambda B & d + \lambda D \\ e + \lambda E & d + \lambda E & c + \lambda C \end{vmatrix} . \tag{2.25}$$

Este método de clasificación introdujo el concepto de divisores elementales. Los elementos del determinante de $\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$ son polinomios en λ. Sylvester probó que si todos los menores

$$|A + \lambda B| ,$$

de cualquier orden, tienen un factor $\lambda + \varepsilon$ en común, este factor será también factor común del mismo sistema de menores, cuando **A** y **B** se transforman simultáneamente por medio de una transformación lineal de sus variables.

Mostró, asimismo, que si los menores de *i-ésimo* orden tienen un factor $(\lambda + \varepsilon)^{\alpha}$, los menores de $(i{+}h)$*-ésimo* orden contendrán, al menos, factores lineales a la potencia que ocurren en el máximo común divisor $D_i\ (\lambda)$ por $D_{i-1}\ (\lambda)$. Para i, se llaman los **factores invariantes** de $|A + \lambda B|$.

Dadas dos formas cuadráticas, Sylvester probó, además, que los factores invariantes constituyen un conjunto completo de invariantes.

En 1868, Weierstraß completó la teoría de las formas cuadráticas y extendió dicha teoría a formas bilineales. Además, aportó la definición de la forma bilineal: dada una matriz **A** cualquiera, tenemos que la expresión

$$\mathbf{XAY} = \sum_{i,j}^{n} a_{ij} x_i y_j \tag{2.26}$$

se llama una **forma bilineal**.

Al usar el concepto de **divisores elementales** de Weierstraß, Sylvester obtuvo la forma canónica para un haz en donde **A** y **B** no son necesariamente simétricas, pero están sujetas a la condición:

$$|\mathbf{A} + \lambda \mathbf{B}| \neq 0. \tag{2.27}$$

También demostró el inverso del teorema que establece que *si el determinante* $|\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}|$ *coincide con el valor del determinante* $|\mathbf{A}' + \lambda\mathbf{B}'|$, *entonces, al menos, un par de transformaciones lineales se pueden encontrar, las cuales transforman, simultáneamente,* **A** *en* **A'** *y* **B** *en* **B'**.

CLAUDE ALEXIS CLAIRAUT
David Smith Collection

JOHANN BERNOULLI
David Smith Collection

Entre los innumerables teoremas que existen sobre determinantes, algunos están relacionados con la solución de m ecuaciones lineales, en n indeterminadas. **Henry J. S. Smith** (1836-1883), en 1861, introdujo los términos **arreglo aumentado** y **arreglo no aumentado**, para discutir la existencia y el número de soluciones del sistema. Por ejemplo, en

$$\begin{aligned} a_1 x + a_2 y &= f \\ b_1 x + b_2 y &= g \\ c_1 x + c_2 y &= h. \end{aligned} \tag{2.28}$$

los arreglos, aumentado y no aumentado, se representan como

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & f \\ b_1 & b_2 & g \\ c_1 & c_2 & h \end{vmatrix}. \tag{2.29}$$

Una serie importante de resultados sobre el tema se deben tanto a **Leopold Kronecker** (1823-1911) como a **Arthur Cayley** (1821-1899), quienes llegaron a las mismas conclusiones generales hoy en día admitidas en términos de matrices, pero que en la mitad del siglo XIX lo fueron en términos de determinantes, aumentado y no aumentado. Los resultados generales sobre m ecuaciones en n incógnitas, con $m \geq n$, en donde las ecuaciones pueden ser homogéneas (los términos constantes son cero) o no homogéneas, fueron demostrados por **Charles L. Dodgson** (Lewis Carroll 1832-1898) en su *An Elementary Theory of Determinants* (1867). En los últimos textos se encuentra la condición siguiente: *un conjunto de m ecuaciones lineales no homogéneas, en n indeterminadas, puede ser consistentes si, y sólo si, el menor de orden mayor no nulo sea del mismo orden, en el arreglo no aumentado.* En otras palabras, en términos del lenguaje de matrices, que los rangos de las dos matrices sean los mismos.

Resultados nuevos sobre determinantes fueron obtenidos a lo largo del siglo XIX. Por ejemplo, existe un teorema probado por **Jacques Hadamard** (1865-1963), en 1893, conocido como el **teorema de la desigualdad de Hadamard:** *para cualquier matriz cuadrada* $\mathbf{A}$ *tal, que* $|a_{ij}| \leq \mathbf{M}$, *entonces*

$$\det \mathbf{D} \leq \mathbf{M}^n n^{\frac{n}{2}}. \tag{2.30}$$

Los resultados sobre determinantes mostrados aquí son tan sólo una pequeña muestra de la gran cantidad de resultados que han sido establecidos. Más allá de éstos, existe una gran variedad de otros teoremas relativos a determinantes, como por ejemplo, teoremas especiales sobre **determinantes simétricos** (que cumplen con la condición $a_{ij} = a_{ji}$); o bien, **determinantes antisimétricos,** que cumplen con la condición:

$$(a_{ij} = -a_{ji}) \ . \tag{2.31}$$

También hay teoremas sobre **determinantes ortogonales** (determinantes de transformaciones de coordenadas ortogonales); **determinantes acotados** (determinantes extendidos por al suma de columnas y renglones); determinantes **compuestos** (sus elementos mismos son determinantes); y otros, de formas especiales.

Mary Fairfax Somerville

Instruction in chemistry at the Ecole Polytechnique, Paris. Note the absence of women in the lecture hall. Although women were not admitted to the recently organized Ecole Polytechnique, the eighteen year old Sophie Germain was able to obtain the lecture notes of courses given there.

Emilie du Châtelet

Siméon Denis Poisson (1781–1840), the French rival of Cauchy in analysis and physical mathematics. Photograph by J. L. Charmet, permission of the Académie des Sciences.

Capítulo 3 HISTORIA DEL SURGIMIENTO DEL CONCEPTO DE MATRIZ

Desde el punto de vista cronológico, el concepto de determinante apareció históricamente antes de que apareciera la noción de matriz. Sin embargo, con fines didácticos o lógicos, en los cursos ordinarios de Álgebra lineal se expone primero la teoría de los matrices y luego la de los determinantes

La palabra **matriz** fue usada primeramente por Sylvester en 1893, cuando quería referirse a un *arreglo rectangular de números* y no podía usar la palabra *determinante* (que se refiere a un número real, porque se aplicaba solamente a matrices cuadradas). Posteriormente se usaron libremente los arreglos aumentados, sin hacer ninguna referencia a matrices.

Las propiedades básicas de las matrices se desarrollaron con base en las propiedades de los determinantes.

Cayley afirmaba: "*No obtuve la noción de matriz de ninguna forma por medio de los cuaternios. Fue gracias al determinante o a una expresión conveniente: las ecuaciones*

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}\text{''}. \tag{3.1}$$

Entonces introdujo la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

que representa la información esencial acerca de la transformación.[1]

A Cayley se le considera como el creador de la **teoría de matrices**, por haber sido el primero en *separar* el concepto de matriz del concepto de determinante y porque fue el primero en publicar una serie de artículos (alrededor de 200) sobre la materia. Colaboró con Sylvester durante muchos años y fue un escritor prolífico y creador, abarcando entre otras áreas temas como la geometría analítica de n dimensiones; la teoría de los determinantes; las transformaciones lineales; las superficies oblicuas y la teoría de matrices. Juntos crearon la teoría de los invariantes.

Cayley introdujo primeramente las matrices con la finalidad de simplificar la notación involucrada, al estudiar transformaciones lineales. En su artículo *On the Theory of Matrices*, en el año de 1858, introdujo algunas notaciones básicas.

[1] KLINE, *ibid* p. 805

Uno de los conceptos que demostró fue que *dos matrices* **A** *y* **B** *son iguales si, y sólo si, sus elementos son iguales.* También definió la matriz **cero** y la matriz **identidad.** La suma de dos matrices se define como la matriz cuyos elementos corresponden a la suma de los elementos correspondientes. Afirmó que esta definición se aplica a cualesquiera matrices m por n, y que, además, la suma es asociativa y convertible (conmutativa).

Si λ es un escalar y **A** una matriz, entonces $\lambda\mathbf{A}$ se define como la matriz cuyos elementos son, cada uno, λ veces el elemento correspondiente de **A**.

Para la definición del producto de dos matrices, Cayley tomó directamente la representación del efecto de dos transformaciones sucesivas.

Si

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX} \;\text{ y }\; \mathbf{X}'' = \mathbf{BX}\ ,$$

$$\Rightarrow \mathbf{X}'' = \mathbf{BAX}\ ; \tag{3.3}$$

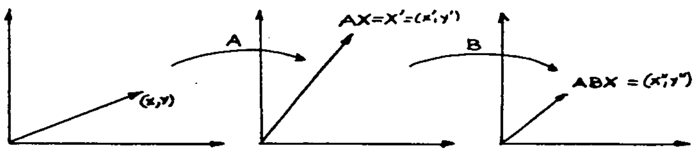
y si, además

$$\mathbf{BA} = \mathbf{C} \;\text{ y }\; \mathbf{X}'' = \mathbf{C}\ .$$

entonces

$$\mathbf{X}'' = \mathbf{CX}\ . \tag{3.4}$$

donde c_{ij} es la suma de productos de los elementos del i-*ésimo* renglón, del factor de la izquierda, y los elementos correspondientes de la j-*ésima* columna, del factor de la derecha. El producto es asociativo, pero no necesariamente conmutativo. Cayley señaló que una matriz, m por n, sólo podría ser multiplicada por otra matriz, n por p.



En este mismo artículo, Cayley estableció que la inversa de

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

está dada por

$$\frac{1}{\nabla}\begin{pmatrix} \partial_a\nabla & \partial_{a'}\nabla & \partial_{a''}\nabla \\ \partial_b\nabla & \partial_{b'}\nabla & \partial_{b''}\nabla \\ \partial_c\nabla & \partial_{c'}\nabla & \partial_{c''}\nabla \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \tag{3.5}$$

donde ∇ = determinante de la matriz **A** y $\partial_x\nabla$ representa al cofactor de X, en este determinante. El producto de una matriz **T**, su inversa, es la matriz unidad. denotada por **I**.

William Rowan Hamilton (1805-1865)

Si $\nabla = 0$, la matriz es **indeterminante** (**singular**, en la terminología moderna) y no tiene inversa. Cayley afirmó que *si* $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ *y* $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$ *son dos matrices, puede ocurrir que* $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, *pero sólo a condición de que una sea indeterminante.* Cayley aquí se equivocó, ya que si

$$\mathbf{AB} = \mathbf{O}, \mathbf{A} \neq \mathbf{O} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} \neq \mathbf{O},$$

y solamente **A** es indeterminante

$$\Rightarrow \exists \quad \mathbf{B}^{-1}$$

y

$$\mathbf{ABB}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Por lo tanto.

$$\mathbf{AI} = \mathbf{O} \quad \text{o} \quad \mathbf{A} = \mathbf{O}.$$

Siguiendo a Cayley, la matriz **transversa** (**transpuesta** o **conjugada**) se define como aquella en la cual se intercambian renglones y columnas. La proposición fue hecha sin demostración, afirmando que

$$(\mathbf{LMN})' = \mathbf{N}'\mathbf{M}'\mathbf{L}', \tag{3.6}$$

donde "′" denota transposición. Si dos matrices son iguales, por ejemplo.

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M},$$

entonces una matriz se llama **simétrica** y la otra **antisimétrica**. Cualquier matriz puede expresarse como una matriz simétrica y una antisimétrica.

EL CONCEPTO DE ESPACIO N-DIMENSIONAL

La noción de espacio n-dimensional, para $n > 3$, se fue aceptando gradualmente en el siglo XIX, pero es difícil señalar cuándo se inventó el concepto. (Véase el trabajo de Descartes). Los primeros que usaron esta noción fueron el ruso **Mijail Ostragradsky** (1801-1862), en su teorema de la divergencia (escrito en 1836) y **Hermann Grassmann** (1809-1879), en sus tratados geométricos (escrito a principios de la década de 1840), como asimismo en un artículo breve de Arthur Cayley, de 1846. El trabajo de Grassmann era muy filosófico y difícil de leer, en tanto que el artículo de Cayley sólo menciona que se podría generalizar a dimensiones mayores que 3. **William Hamilton** (1805-1865), a su vez, en una carta de 1841, observó que "debe ser no sólo ternas sino poliadas (polyplets), de modo que en cierto sentido se satisfaga la ecuación simbólica

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad . \tag{3.7}$$

donde **a** es un símbolo indicativo de un concepto complejo, a la vez que

$$a_1, \ldots, a_n$$

denotan n números reales, positivos o negativos".

En 1862 apareció un tratamiento sin coordenadas sobre el espacio vectorial, en la segunda versión del *Ausdehungslehr* (el cálculo de la extensión), suscrito por Hermann Grassmann.[2] En este trabajo Grassmann elude la difícil interpretación filosófica que hacía en su primer trabajo, concentrándose esta vez en sus nuevas ideas matemáticas. Entre ellas incluía ideas básicas acerca de la teoría de los espacios vectoriales de dimensión n, incluyendo combinaciones lineales, independencia lineal y nociones de subespacios y base.

Grassmann desarrolló la idea de dimensión de un subespacio, como el número máximo de vectores linealmente independientes. Además, probó la relación fundamental para dos subespacios, V y W:[3]

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) \quad . \tag{3.8}$$

Las nociones de Grassmann derivaron del intento de traducir las ideas geométricas sobre espacios n-dimensionales al lenguaje del álgebra, pero sin introducir coordenadas, tal como se hace en geometría analítica ordinaria. Después entraron estos conceptos a distintos campos (como al análisis vectorial y al álgebra exterior).

Grassmann nunca logró su objetivo de ser profesor de una Universidad alemana, pasando la mayor parte de su vida profesional como maestro de matemáticas de

[2] Grassmann, Hermann *Teoría de la Extensión*. Ed. Espasa-Calpe Argentina, Colección Historia y Filosofía de la Ciencia. Bs. As-México, 1947.

[3] FRALEIGH, John y BEAUREGARD, Raymond A. *Álgebra Lineal*, Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, México, 1989, p. 116.

una escuela secundaria (en Stettin). En las últimas décadas de su vida se alejó de las matemáticas, convirtiéndose en un experto en lingüística.

Por su parte, en el año de 1858, Cayley anunció lo que hoy se conoce como teorema de Cayley-Hamilton, para matrices cuadradas de cualquier orden. Entonces afirmó: "*Toda matriz cuadrada es raíz de su polinomio característico*". Esto lo demostró para matrices de tres por tres, en su *Lectures on Quaterniones*. En 1853 introdujo la noción de **función vectorial lineal r' de otro vector r** (o función vectorial lineal, de variable vectorial). Probó que la matriz asociada a esta transformación lineal satisface la ecuación característica de aquella matriz, a pesar de que no la expresó formalmente en términos de matrices.

EL CONCEPTO DE FUNCIÓN VECTORIAL LINEAL

Este concepto data del siglo XVIII, pero no fue aceptado sino hasta que los físicos se habituaron a manejar el concepto de **vector**, el que a su vez llevó al concepto de **función vectorial**. Uno de los fundadores del análisis vectorial fue **Oliver Heaviside** (1850-1925), quien introdujo la idea de **operador vectorial lineal** en uno de sus trabajos sobre electromagnetismo (1885). Lo definió usando coordenadas.

LEOPOLD KRONECKER
David Smith Collection

Si

$$\overrightarrow{B} = (b_1, b_2, b_3)$$

y

$$\overrightarrow{H} = (h_1, h_2, h_3) .$$

entonces $\overrightarrow{B}$ proviene de $\overrightarrow{H}$, mediante un operador lineal, si existen 9 números

$$\lambda_{ij},\ i,j = 1,2,3.$$

tales, que

$$\begin{cases} b_1 = \lambda_{11} h_1 + \lambda_{12} h_2 + \lambda_{13} h_3 \\ b_2 = \lambda_{21} h_1 + \lambda_{22} h_2 + \lambda_{23} h_3 \\ b_3 = \lambda_{31} h_1 + \lambda_{32} h_2 + \lambda_{33} h_3 \end{cases} . \qquad (3.9)$$

Oliver Heaviside fue un autodidacta experto en física-matemática, que contribuyó a la teoría electromagnética y a sus aplicaciones. En 1901 predijo la existencia de una región ionizada reflectora que rodea a la Tierra. La existencia de esta capa, hoy llamada ionósfera, no tardó en confirmarse.

En 1901, **J. Willard Gibbs** llamó a esta transformación **función vectorial lineal**. La definió, en forma abstracta, como una f función continua tal, que

$$f\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right)=f\left(\overrightarrow{v}\right)+f\left(\overrightarrow{w}\right). \tag{3.10}$$

Más tarde, en 1918, en *Space-Time-Matter*, **Hermann Weil** dio una definición completamente abstracta de la función vectorial lineal.

$$T : V \rightarrow W,$$

en donde V, W son espacios vectoriales. T es una transformación lineal si, y sólo si,

$$\begin{cases} i)\ T(v_1)+T(v_2)=T(v_1+v_2),\forall v_1,v_2\in V \\ ii)\ T(\lambda v_1)+\lambda T(v_2).\ \lambda\in R \end{cases} \tag{3.11}$$

Hermite, en 1855, mostró que si la matriz $\mathbf{M}=\mathbf{M}^*$, siendo $\mathbf{M}^*$ la transpuesta de una matriz, es decir, la formada por la sustitución de cada elemento por su complejo conjugado (tales matrices **M** se llaman hermitianas), entonces las raíces características no nulas, de una matriz real antisimétrica, son imaginarias puras. **Rudolf Friedrich Alfred Clebsch** (1845-1879) dedujo, en 1861, el mismo resultado. Después **Arthur Buchheim** (1859-1888), en 1885, demostró que si **M** es simétrica y sus elementos son reales, las raíces características son reales. Este resultado ya había sido establecido por Cauchy, para determinantes. **Henry Taber** (1860-?), en un artículo de 1890, afirmó como evidente que si

$$x_1-mx^{n+1}+m_2x^{n+2}-\ldots\pm m_n=0 \tag{3.12}$$

es la ecuación característica de cualquiera matriz cuadrada **M**, *entonces el determinante de* **M** *es* m_n y si, por **menor principal** de una matriz entendemos el determinante formado a partir de los elementos de la diagonal principal de **M**, entonces m_i, que es también la suma de las raíces características, es la suma de los elementos de la diagonal principal. Esta suma se llama **traza de la matriz**. Las demostraciones respectivas fueron dadas por **William Henry Metzler** (1863-7), entre 1891 y 1892.

ARTHUR CAYLEY (1821-1895)

En 1878, **Ferdinand Georg Frobenius** (1849-1917) inició una cuestión relacionada con la ecuación característica. Buscó el polinomio mínimo (el de grado menor) que satisface la matriz. Estableció que, si se forma de factores, el polinomio característico es único. No fue sino hasta 1904 que **Kurt Hensel** (1861-1941) demostró esta afirmación de unicidad de Frobenius. En ese mismo artículo Hensel demostró que una matriz **A** *cuadrada, cuyo polinomio mínimo es $f(x)$ y $g(x)$, es cualquier otro polinomio que la satisface, entonces $f(x)/g(x)$.*

La noción de **rango** de una matriz fue introducida por Frobenius en 1879, en conexión con el estudio de los determinantes. Una matriz **A** *mxm*, tiene rango igual al máximo de sus menores diferentes de cero.

Dadas dos matrices **A** y **B**, que se relacionan de diferentes maneras, son **equivalentes** si existen **U** y **V** matrices no singulares tales, que **A** = **UBV**. Sylvester mostró, en su trabajo sobre determinantes de 1851, que el máximo común divisor d_i' de los determinantes del menor *i-ésimo* de **B**, es igual al m.c.d. d_i de los determinantes del menor *i-ésimo* de **A**. Después **Henry John Stephen Smith** (1826-1883), trabajando matrices con elementos enteros, mostró en 1862-62 que cada matriz **A**, de rango ρ, es equivalente a una matriz diagonal con elementos

$$h_1, h_2, \ldots, h_\rho \tag{3.13}$$

que se encuentran debajo de la diagonal principal y tales, que h_i/h_{i+1}. Los cocientes

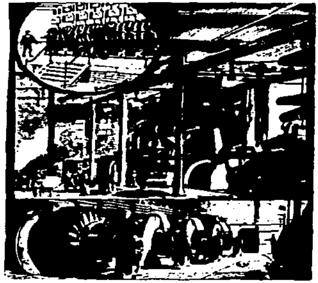
$$h_1 = d_1, h_2 = d_2/d_1 \ldots \tag{3.14}$$

se llaman **factores invariantes de A**. Además, si

$$h_i = p_1^{l_{i1}} p_2^{l_{i2}} \cdots p_k^{l_{ik}}$$

donde los p_i son primos, estas diferentes potencias $p_i^{l_{ij}}$ son los divisores elementales de **A**. Los factores invariantes determinan los divisores elementales; e inversamente.

Las ideas sobre factores invariantes y divisores elementales que provienen de la obra de Sylvester y de la obra de Weierstraß, sobre determinantes, fueron llevadas a matrices por Frobenius en su artículo de 1878. El significado de los factores invariantes y divisores elementales, para matrices, es que la matriz **A** es equivalente a la matriz **B** si, y sólo si, tienen los mismos divisores elementales o factores invariantes.



Frobenius, además, trabajó con factores invariantes en su artículo *Über lineare Substitutionen und bilineare Formen*, de 1878. Posteriormente, en 1894, organizó la teoría de factores invariantes y divisores elementales en forma lógica, en un trabajo llamado *Über die Elementarteiler der Determinanten*. El trabajo de 1878 le permitió a Frobenius dar la primera demostración general del teorema de Cayley-Hamilton y modificar el teorema cuando alguna de las raíces latentes (raíces características) de la matriz son iguales. En este artículo mostró que cuando

$$\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\,,$$

en cuyo caso hay un cociente ambiguo, $\mathbf{A}/\mathbf{B}$, entonces $(\mathbf{A}/\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}/\mathbf{A}$ y

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)' = \left(\mathbf{A}'\right)^{-1}. \tag{3.15}$$

donde $\mathbf{A}'$ es la transpuesta de **A**.

MATRICES ORTOGONALES

Las matrices ortogonales recibieron mucha atención en esa época. El término **matriz ortogonal** lo usó por primera vez Hermite en 1854 y no fue sino hasta 1878 que fue publicada su definición formal, por Frobenius. Este último probó que *si* **S** *es una matriz simétrica y* **T** *una matriz antisimétrica, una matriz ortogonal, entonces puede escribirse en la forma*

$$(\mathbf{S} - \mathbf{T})/(\mathbf{S} + \mathbf{T}) \tag{3.16}$$

o simplemente

$$(I - T)/(I + T). \tag{3.17}$$

Las propiedades de las matrices ortogonales, para sistemas cuadrados, aparecieron en varios trabajos a principios del siglo XIX. **Carl Gustav Jacob Jacobi,** en 1833, intentó hallar una sustitución lineal

$$\begin{aligned} y_1 &= \sum a_{1i} X_i \\ y_2 &= \sum a_{2i} X_i \\ &\vdots \\ y_n &= \sum a_{ni} X_i \end{aligned} \tag{3.18}$$
$$\text{tal, que } \sum y_i^2 = \sum x_{ij}^2 ,$$

descubriendo que los coeficientes de la sustitución lineal deben satisfacer la propiedad de ortogonalidad

$$\sum a_{ij} a_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq k \\ 1, & \text{si } j = k. \end{cases} \tag{3.19}$$

La definición formal de matriz ortogonal también apareció en un artículo de **Georg Ferdinand Frobenius** (1843-1917), titulado ***Über lineare Substitutionen und bilinare Formen.*** Allí, como ya se mencionara anteriormente, trató los valores propios de dicha matriz.

MATRICES SIMILARES

Esta noción apareció antes de que se le diera un nombre y se usaba ya desde 1820. Cauchy, en su trabajo de 1826, habla sobre formas cuadráticas relacionadas, una con otra, por un cambio de variable: es decir, si las matrices asociadas con las formas son similares, entonces sus ecuaciones características son iguales. Al introducir el concepto de **ortogonalidad,** Georg Frobenius fue el primero que analizó y definió formalmente el concepto de **similitud**, en 1878.

Frobenius comenzó analizando el caso general. Llamó **equivalentes** a dos matrices, **A** y **B,** si existían otras dos matrices invertibles **U** y **V** tales, que **B** = **UAV**. Estas últimas matrices se llamaron **sustituciones,** mediante las cuales una

(**A**) se transformaba en la otra (**B**). Frobenius trató después los casos particulares de $\mathbf{U} = \mathbf{V}'$ (el caso de similitud) y pasó luego a demostrar varios resultados sobre similitud, incluyendo el teorema de que si **A** es similar a **D**, entonces $f(\mathbf{A})$ es similar a $f(\mathbf{B})$, donde f es cualquier función matricial polinomial.

Al igual que otras nociones de la teoría de matrices, el concepto de **matrices similares** provino de las primeras obras sobre determinantes y es tan antigua como la obra de **Cauchy** (1789-1857). *Dos matrices* **A** *y* **B** *cuadradas son similares, si existe una matriz no singular* **P** tal, que

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}. \tag{3.20}$$

Es decir, las ecuaciones características de dos matrices similares, **A** y **B**, son las mismas si estas matrices tienen los mismos factores invariantes y los mismos divisores elementales. Para matrices con elementos complejos Weierstraß probó esto mismo en su artículo de 1868, a pesar de que él trabajó con determinantes. Como una matriz representa una transformación lineal homogénea, las matrices similares pueden pensarse como representando la misma transformación, sólo que referida a dos sistemas de coordenadas diferentes.

Usando la noción de matrices similares y la ecuación característica, **Camille Jordan** (1838-1922) mostró, en 1870, que una matriz puede ser transformada a la forma canónica.

FORMA CANONICA DE JORDAN

La forma canónica de Jordan apareció en su *Tratado* (sobre sustituciones y ecuaciones algebraicas), obra maestra del matemático francés, aparecida en 1870. El teorema que contiene la forma canónica no trata en realidad con matrices sobre los números reales, sino con entradas, en el campo finito de orden p. Además, como lo refiere el título de su libro, Jordan no consideró matrices, sino sustituciones lineales.

Si la ecuación característica de una matriz **J** es

$$\begin{gathered} f(\lambda) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \cdots + b_n = 0 \text{ y si} \\ f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{l_k} \end{gathered} \tag{3.21}$$

contiene submatrices de orden l_i-ésimo, Jordan mostró que **J** puede ser transformada en una **matriz similar** que tiene la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix} = \mathbf{J}_i. \tag{3.22}$$

denota la matriz de orden l_i-ésimo, Jordan mostró que J puede ser transformada en una matriz similar que tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_k \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

Esta es la forma canónica de Jordan; no normal, de una matriz.

La transformación de similaridad de **A** y **B** fue tratada por Frobenius en su artículo de 1878, bajo el nombre de transformación contragrediente. En la misma discusión trató el concepto de las **matrices congruentes o transformaciones cogredientes**. Éste nos dice que si $\mathbf{A} = \mathbf{P}^t\mathbf{BP}$, entonces **A** es congruente con **B**, que escribimos como $\mathbf{A} \stackrel{c}{=} \mathbf{B}$. Por ejemplo, la transformación de la matriz **A** que resulta del intercambio simultáneo de los mismos renglones y columnas de **A**, es una transformación de congruencia o matriz de permutación. Asimismo una matriz simétrica **A** de rango *r* puede ser reducida, por una **transformación congruente**, a una matriz diagonal del mismo rango; es decir,

$$\mathbf{PAT} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d \end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

Hay muchos teoremas básicos sobre matrices congruentes. Por ejemplo, si **S** es simétrica y $\mathbf{S}_1$ es congruente con **S**, entonces $\mathbf{S}_1$ es antisimétrica.

A fines de siglo XIX, las condiciones estaban dadas para el desarrollo de lo que se ha llamado **análisis matricial**.

William Henry Metzler, en un artículo aparecido en 1892 en el *American Journal of Mathematics*, introdujo las **funciones trascendentales de una matriz**, escribiendo cada una como una serie de potencias en una matriz. Estableció las series para e^{M}, e^{-M};

$$\log M, \quad sen\ M, \quad arcsen\ M, \quad \text{así}$$

$$e^{\mathbf{M}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{M}}{n!} \quad . \tag{3.25}$$

Las ramificaciones de la teoría de matrices son numerosas. Las matrices se usaron para representar formas cuadráticas y bilineales. La reducción de tales formas a formas canónicas simples, forman el corazón del trabajo sobre **invariantes de matrices** y éstas se relacionan íntimamente con hipernúmeros, como matrices.

Tanto el estudio de los determinantes, como el de las matrices, se extendió al estudio de las matrices de orden infinito. Los determinantes infinitos se relacionaron con la obra de **Joseph Fourier** (1768-1830), respecto a la determinación de los coeficientes de series de expansión de Fourier de una función; como también a los trabajos de Hill, en lo que concierne a la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Artículos aislados sobre los determinantes infinitos se escribieron entre estas dos sobresalientes investigaciones del siglo XIX, pero la mayor actividad data de Hill.

Las matrices infinitas se relacionaron, implícita o explícitamente, con los trabajos de Fourier, Hill y **Henri Poincaré** (1854-1912). El gran ímpetu para el estudio de las matrices infinitas, sin embargo, provino del estudio de las ecuaciones integrales.

Leopold Kronecker (1823-1891)
Courtesy of Springer-Verlag Archives

William Rowan Hamilton

Francis Galton (1822–1911) was the first to use statistics in studies of inheritance. His views were coloured by his relationship with the Darwins, and in this woodcut of a collection of the 'Most Distinguished Fellows' of the Royal Society that appeared in the Graphic in 1886 the following are depicted (from left to right, standing) G. H. Darwin, Galton, Thiselton Dyer, R. H. Scott, William Huggins, (and sitting) Gabriel Stokes, Joseph Hooker, J. J. Sylvester and T. H. Huxley)

Marketplace, St. Petersburg, Rusia, 1880. "Receiving a moderate inheritance upon her father's death, Sonya and Vladimir moved to St. Petersburg. There they entered into the whirl of social life ..."

Sonya Kovalevskaya

Polytechnicians climb over the wall on July 28, 1830 and repulse the insurgents.
Published by permission of the Ecole Polytechnique

Capítulo 4 LAS MATRICES NO NEGATIVAS

Muchos de los problemas que surgieron de los distintos campos de las ciencias naturales y sociales abordaron primeramente la aproximación más sencilla: el concepto matemático de linealidad y la no negatividad.

Cada vez que se intentaba modelar una fenómeno natural (fuera éste económico o matemático, etc.), se intentaba hacerlo suponiendo que tenía un comportamiento lineal. Luego se podían hacer ir "refinando" dichos fenómenos hasta que se aproximaran, en primera instancia, a su comportamiento real, aunque después se concluyera que este comportamiento distara mucho de ser lineal.

Veamos algunos ejemplos de problemas en donde surge la necesidad de plantear matrices no negativas. Esta necesidad se vislumbra para los siguientes campos:

1) *Biología* (por ejemplo en problemas de transporte celular de sustancias)

a) Ecología

b) Fisiología

c) Epidemiología

d) Farmaco-dinámica;

2) *Meteorología*;

3) *Física*:

a) Generación de partículas elementales

b) Fisión nuclear y cascadas de rayos cósmicos

c) Problemas de mecánica de fluidos

d) Física matemática:

Dirk Jan Struik (1894-) during his student days

4) *Economía*;

a) En el análisis de las relaciones interindustriales:

5) *En ramas de la matemática* que surgieron históricamente, ante la necesidad de resolver problemas concretos de planeación o de estrategia, como:

a) Programación matemática (planeación)

b) Cadenas de Markov

c) Teoría de gráficas

d) Programación dinámica

e) Topología

f) Algebra lineal

h) Métodos numéricos.

Estos son sólo algunos ejemplos en donde se presenta la necesidad de trabajar con nociones de linealidad y no negatividad.

Los estudios fundamentales con relación a las matrices no negativas no fueron establecidos, en sus rasgos generales, sino hasta principios del siglo XX.

La confluencia de diversas áreas de la matemática y de la economía, en particular, motivaron mucho su estudio. Un primer resultado válido para las matrices positivas fue establecido por el matemático alemán **Oskar Perron**, en conexión con su investigación sobre los desarrollos multidimensionales de J.J. Jacobi,[1] acerca del **algoritmo (jacobiano) de las fracciones continuas**.[2]

Otro resultados provinieron de estudios acerca de la programación lineal, de la teoría de juegos de **Emile Borel** (1871-1956) y de los trabajos de **John Von Neumann** (1903-1957).

Otra corriente confluyó de los desarrollos provenientes del álgebra, el matemático alemán F.G. Frobenius apoyándose en resultados de O. Perron, generalizó los teoremas cerca de matrices positivas y estableció bases para ver bajo qué condiciones una matriz no negativa tiene valores y vectores propios no negativos. El enfoque que le dio, fue desde el punto de vista algebraico. Sin embargo, hacia el final de su vida, Frobenius habían recibido un artículo del matemático húngaro **Denés König** (1884-1944), a quien se considera como uno de los fundadores de la **teoría de gráficas**, aplicó su teoría a las matrices no negativas, ofreciendo teoremas nuevos y casi independientemente de la teoría desarrollada por Frobenius.

Por su lado, en Rusia, los matemáticos Markov (1856-1922), Minkovsky (1862-1909) y V. Romanvsky trabajaron en el área de la probabilidad, con lo que se ha dado en llamar **matrices de entradas de probabilidad** o **estocásticas**, también conocidas como **cadenas de Markov**. Ellos también demostraron teoremas en donde parcialmente demostraron el teorema Perron-Frobenius.

---

[1]JACOBI, J.J. *Allgemeine Theorie der Kettenbruchdähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei Vorger gehenden gebidet wird.* (Teoría general sobre el algoritmo de las fracciones continuas) Burhard Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 69, pp. 29-64. O bien en *Gesammelte Werke*, tomo 6. Herausgegeben auf Veranlassug der koniglich Pressischen Akademie der Wissenschaften.

[2]Este artículo se puede ver en el apéndice.

La historia de las matemáticas nos muestra, que las distintas aportaciones a la teoría de las matrices no-negativas se desarrollaron desde la óptica particular de muy diversas disciplinas matemáticas, como algebristas, analistas matemáticos, topólogos, etc. Entre ellos podemos mencionar a algunos matemáticos sobresalientes: Olga Taussky; A. Ostrowsky (suizo); A. Kreiny; M.A. Rutman; P. Alexandrov (ruso); Ky Fan; M.V. Romanovsky (ruso); Helmut Wielandt y V. Gantmajer (ruso; también se escribe Gantmacher). En otras palabras, los economistas han hecho muchísimas aportaciones dentro de la teoría de las matrices no negativas, como asimismo muchos otros matemáticos y físicos. La lista es inmensa.

Paralelamente a los resultados anteriores, el francés **Jacques Hadamard** (1865-1963), trabajando sobre el problema de límites de las funciones armónicas, encontró condiciones para encontrar la inversa de una matriz de entradas no negativas. Dichas matrices se conocen como matrices de diagonal dominante, en el sentido de Hadamard.[3]

La síntesis de tales resultados abrió la ruta de la **teoría de operadores lineales no negativos.**

El desarrollo del álgebra lineal de operadores no negativos ha servido de base a uno de los instrumentos del área interdisciplinaria, el **análisis económico lineal.**

Históricamente, la **programación lineal** nació en la Unión Soviética como consecuencia de los problemas de la planificación a que se enfrentó la Revolución Rusa en los años posteriores a la toma del poder. De allí saldría W. Leontief (como ya se mencionó en la primera parte), por lo que cabe recordar aquí que fue él quien retomó, en su período de formación, muchas de las ideas ya existentes sobre programación lineal, para después desarrollar una metodología que aplicaría a la economía norteamericana en el período posterior a la crisis de 1929, cuando Norteamérica necesitaba planear su economía para afrontar las secuelas de la crisis ocurrida.

LOS CONCEPTOS DE IRREDUCIBILIDAD Y LA INDESCOMPONIBILIDAD

El primero en publicar trabajos acerca de las matrices positivas fue Oskar Perron.[4] Sin embargo, Frobenius publicó dos demostraciones que caracterizan a las matrices totalmente indescomponibles e irreducibles, usando álgebra.

Otro resultado fue el proporcionado por el matemático húngaro Denés König,[5] quien se lo envió a Frobenius para mostrarle una aplicación de la teoría la gráficas a las matrices. En particular, aplicando el concepto de indescomponibilidad **(irreducibilidad).**

Markov, por su parte, mostró una condición que coincide con el concepto de irreducibilidad de Frobenius. Markov probó algunos teoremas sobre matrices estocásticas, del tipo Perron-Frobenius.

[3] HADAMARD, Jacques *Leçons sur la propagation des ondes et les equations de l'hydrodynamique.* Ed. Chelsea Publishing Company, New York, 1949, p 43

[4] PERRON, Oskar (1907) *Über Theorie der Matrizen*, Math. Ann. 64, 248-263. Ver apéndice.

[5] KÖNIG, Denés *Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre*, Mathematische Annalen, tomo 77, 1916. Ver apéndice con los artículos originales.

Hans Schneider, en un artículo de 1977, conjeturó que la versión final que dio Frobenius (1917) a su artículo[6] no fue preparada por él mismo, sino que alguien debió haberlo hecho por él, ya que Frobenius se encontraba muy enfermo y murió ese mismo año.

A Frobenius se le atribuye la introducción del concepto de indescomponibilidad de una matriz y su aplicación a las matrices no negativas.

At a 1976 symposium, mathematicians from distant points came to honor Olga Taussky-Todd. Pictured (left to right) are R. C. Thompson, University of California, Santa Barbara; R. Varga, Kent State University; H. Schneider, University of Wisconsin; and D. Carlson, Oregon State University.

Markov introdujo el mismo concepto de irreducibilidad que Frobenius y, más aún, la noción de aperiodicidad o aciclicidad. En 1908 demostró una parte de lo que conocemos como el teorema de Perron-Frobenius, para una matriz no negativa irreducible.[7] Por tanto, podemos asegurar fehacientemente que lo demostró antes que Frobenius. Pero el problema no radica tanto en establecer quién demuestra primero un teorema, sino reconocer que, en un momento dado, hay condiciones para que un resultado sea probado por más de una persona, una vez que se hayan conjuntado una serie de condiciones. En suma, alguien sintetiza lo que antes se encontraba relativamente disperso y le da generalidad y coherencia.

Jules Henri Poincaré

---

[6] SCHNEIDER, Hans *The concepts of Irreducibility and Full Indecomposibility of a Matrix in the Works of Frobenius, König and Markov,* Linear Algebra and its Applications. 18, 139-162 (1977).

[7] *ibid.*, pp. 139-140.

Para mostrar la unicidad de la descomposición de una matriz reducible en componentes irreducibles algebraicamente, Frobenius aportó dos demostraciones. En 1917, con 68 años de edad, reformuló la primera versión del teorema que demostró en 1912.[8] En el último artículo escribió: "La demostración que di aquí es un producto incidental, que surge de las propiedades ocultas [*verborgen*] de los determinantes con elementos no negativos". Después explica que dará una demostración elemental.

Schneider afirma, enfáticamente, que en 1912 Frobenius no dio una demostración estricta de su teorema. Pero en 1917, en su artículo *Über zerlegbare Determinanten,* Frobenius basó su teorema 16 en el artículo de 1912 y en el lema 102, del artículo de 1917. König, en un artículo de 1915, dio una demostración del teorema de Frobenius usando la teoría de gráficas. El teorema de König dice lo siguiente: "*Si en un determinante de elementos no negativos las cantidades en cada renglón y en cada columna tienen la misma suma, distinta de cero, entonces no todos los términos del determinante pueden anularse*". Lo probó para matrices con elementos enteros, pero después indicó que este resultado también era válido para matrices reales.

Frobenius observó, en su artículo de 1917: "La teoría de gráficas, por medio de la cual el Sr. König dedujo el teorema de arriba, es en mi opinión una herramienta [*Hilfsmittel*] apta para el desarrollo de la teoría de determinantes. En este caso conduce a un teorema muy especial, de poco valor [*ein ganz spezieller Satz von geringem Werte*]. Lo que es valioso, en su contenido, se expresa en el teorema II..." (Aquí, *speziell* se traduce del alemán como *no general*).

A.M. Ostrowski (nacido en 1893-?), a este respecto hizo en 1937 la siguiente observación: "La última oración, en los artículos reunidos de Frobenius, da además una torpe impresión. Expresa, sin embargo, un sentimiento generalizado por aquellos días. La argumentación de Frobenius pertenece por supuesto a la **teoría de gráficas**. Pero tuvo, obviamente, la sensación de que introduciendo nombres nuevos para argumentos viejos, no se añadía nada de contenido".

"Es desde luego, diferente hoy si trato de analizar por qué es así. La razón principal parece ser que con el advenimiento de las computadoras, cadenas muy grandes de argumentos se volvieron accesibles y la necesidad de combinaciones sistemáticas se convirtió en algo muy urgente".

"Es interesante observar que, en este caso, también el avance en la tecnología hizo necesario el desarrollo de una nueva rama en las matemáticas puras."[9].

König había enviado su demostración (1915) a Frobenius en traducción alemana, como ocurrió con muchos artículos de matemáticos húngaros de aquel tiempo. ¿Por qué criticó Frobenius el artículo de König tan duramente? Según Schneider: "El artículo de Frobenius (1917) fue preparado sobre notas del mismo Frobenius, por otra persona; pero la versión final no fue escrita por él. Debido a circunstancias no completamente conocidas por mí, no fue leído cuidadosamente y revisado por Frobenius. Esta hipótesis es especulación de mi parte (y puede no ser generalmente aceptable), pero, en respuesta a una pregunta, he recibido una interesante carta (fechada en diciembre 4, 1975) de K.R. Biermann, de la Academia de Ciencias de la R.D.A. (Berlín), quien dio alguna credibilidad a una hipótesis como la de arriba".

---

[8]Se refiere al art. *Über Matrizen, aus nicht negativen Elementen*. Sitzunsber. Preuss. Akad. Wiss., Berlin 1912, pp. 456-477.

[9]*ibid.* p. 156

Cito (la traducción es mía C.E.S.M.):

"Frobenius no aporta la discusión concerniente a determinantes reducibles en abril de 1917, en las clases de física matemática de la Academia berlinesa misma. Además, fue representado por H.A Schwarz."[10]

10 cm

En ese año Frobenius estaba muy enfermo y solamente participó una vez más (en abril 26) en una sesión de la clase,[11] muriendo el 3 de Agosto de 1917.

Para concluir este punto, diremos que Schneider enuncia la hipótesis de que el texto final del artículo de Frobenius de 1917 lo preparó otra persona, quien apoyaba los puntos de vista de Frobenius en su crítica contra König.

Fue **A. A. Markov** quien introdujo los conceptos de matriz **primitiva** y matriz **aperiódica** (o matriz **cíclica, de orden** 1). Este último concepto es equivalente al concepto de irreducibilidad de Frobenius, con el de aperiodicidad de Markov[12]. También demostró que una matriz estocástica aperiódica irreducible es primitiva. Con ese fin, usó el teorema de dominancia de la diagonal para matrices estocásticas irreducibles de valor propio 1. Con este teorema demostró, por tanto, una parte del teorema de Perron-Frobenius.

Sólo hasta comienzos de los años 1930 el resultado de Perron-Frobenius fue aplicado por los matemáticos a las cadenas de Markov,[13] con lo que aquí estamos afirmando que existía un cierto aislamiento, o bien, poca difusión en Rusia, acerca de los resultados que lograban los matemáticos rusos.

Una interesante presentación de los resultados de Markov lo hizo el matemático ruso **V. Romanovski** (1920, 1930, 1931), aparentemente independiente (1933 y 1936). Este matemático hizo más referencias a Frobenius que al mismo Markov y sus estudios son interesantes. A partir de aquellas fechas, podemos decir que la matemática ha crecido a ritmos casi exponenciales, de modo que tratar de hacer un resumen de lo realizado en este siglo implicaría una tarea verdaderamente titánica. El panorama esbozado sólo constituye un material que se considera muy general, en relación a la gran cantidad de descubrimientos matemáticos que se originaron en las diversas áreas y disciplinas de la ciencia por aquel tiempo.

---

[10] HERMANN Amandus Schwartz (1849-1921) Fue alumno y sucesor de Weierstraß en Berlín. Bartle, Robert *Introducción al Análisis Matemático*. Ed. LIMUSA, México, 1982, p.77.

[11] SCHNEIDER, *ob. cit.*, p.144.

[12] SCHNEIDER, H. *op. cit.*, p.146.

[13] *ibid.*, p. 147.

ALGUNAS CONCLUSIONES GENERALES

Muchos conceptos que ahora utilizamos del álgebra lineal y que actualmente tienen muchas aplicaciones, fueron creados a partir del estudio de fenómenos en otras áreas de la ciencia, como la astronomía, la mecánica celeste, la geometría, la geodesia, etc.

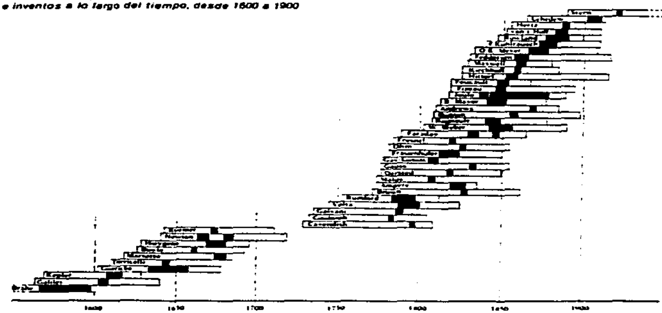
La creación de los conceptos que se utilizan en alguna área de la ciencia a menudo sirven de herramienta a otras. Es el caso particular de nuestro estudio, los economistas se sirvieron de los conceptos del álgebra lineal para aplicarlos a la economía matemática lineal. Por ejemplo, Leontief aplicó el teorema de Perron-Frobenius en su modelo de insumo-producto.

Recíprocamente, con el desarrollo de modelos económicos cada vez más complicados, los economistas requieren de una matemática que responda a sus necesidades (una matemática *ad hoc*) para el estudio de los fenómenos económicos. Esto, a su vez, tiene como consecuencia la creación de nuevas áreas de la matemática. Los estudios simultáneos, en una u otra área, implican frecuentemente una realimentación entre áreas científicas diferentes, aunque complementarias. Un área común e interdisciplinaria es la economía matemática lineal.

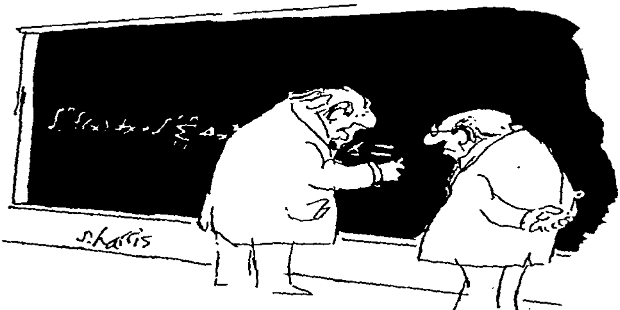
Si, como es de esperarse, el ritmo histórico de la ciencia continúa al ritmo en que ha venido haciéndolo, la creación de conceptos en otras áreas de la ciencia va a servir de herramienta tanto a la economía como a la matemática. Esto impone, por consiguiente, que el estudioso de la economía matemática esté enterado de los nuevos conceptos que constantemente están surgiendo y sea capaz de mantener una actitud siempre receptiva, a pesar de que también es observable que muchos de esos conocimientos nuevos aparecen y desaparecen, a la manera de un "desfile de modas".

La moda actual es la teoría del caos. Aunque sabemos que hay modas, dicho en el buen sentido, que "llegan para quedarse".

Crecimiento exponencialoide del número de inventores e inventos a lo largo del tiempo, desde 1600 a 1900



TERCERA PARTE

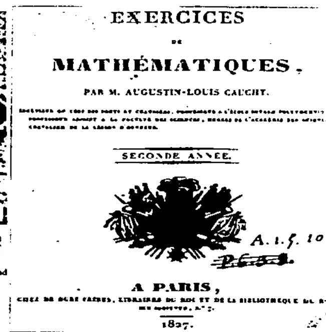


"Ésta es la parte que siempre he detestado"

Emmy Noether

Mikhail Ostrogradski (1801–1862). This Russian mathematician took part in the invention of the calculus of residues. Photograph by J. L. Charmet. permission of the Académie des Sciences

The Mathematics Club of Gottingen, 1902. Seated in the first row with Mrs. Young are Hilbert and Klein (third and fourth from the left).



EXERCICES

DE

MATHÉMATIQUES,

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY.

SECONDE ANNÉE.

A. 1. 5. 10

A PARIS,

1827.

Exercices de Mathématiques, 2, 1827. Collection of papers by Cauchy, publi... his father-in-law, de Bure, between 1826 and 1830. Published by permission École Polytechnique.

Capítulo 1 EL TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS

En ésta tercera y última parte se expondrán algunos resultados de la teoría de las matrices no-negativas cuadradas.

Según hemos visto en las dos partes anteriores, el estudio de las matrices positivas cuadradas precedió al estudio de las matrices no-negativas cuadradas. Ambos estudios se hicieron a principios de siglo, en un contexto meramente matemático; es decir, aún no se utilizaba la teoría para aplicarla con algún propósito en economía, como sería el desarrollo de modelos económicos.

El matemático alemán Oskar Perron encontró algunos resultados interesantes sobre matrices cuadradas con elementos estrictamente positivos, utilizando como herramienta el análisis. Debemos tener en cuenta que casi toda la teoría que conocemos del álgebra lineal ya había sido desarrollada, cuando se formuló el **teorema de Perron**[1]. Podemos enunciar este teorema de la siguiente manera:

(Perron, 1907)

Si $\mathbf{A} > \mathbf{O}$ $m \times m$, entonces:

(i) Existe un valor propio $\hat{\lambda} > 0$ de $\mathbf{A}$ tal, que tiene asociado un vector propio, $\hat{\mathbf{X}} > \mathbf{O}$;

(ii) Si $\alpha \geq 0$ y $\mathbf{Y} > \mathbf{O}$, entonces

$$\mathbf{AY} = \alpha\mathbf{Y} \Rightarrow \alpha = \hat{\lambda} \text{ y } \mathbf{Y} = \mu\hat{\mathbf{X}}, \mu > 0;$$

(iii) Si λ es cualquier valor propio de $\mathbf{A}$, entonces

$$\lambda \neq \hat{\lambda} \Rightarrow |\lambda| < \hat{\lambda};$$

(iv) $\hat{\lambda}$ es una raíz simple, del polinomio característico asociado con $\mathbf{A}$.

A la raíz $\hat{\lambda}$ la definimos como **la raíz de Perron**.

Existen algunos resultados que podemos establecer acerca de las matrices estrictamente positivas:

Teorema 1.2

Si $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ y

(i) si $\hat{\lambda}$ es la raíz de Perron de $\mathbf{A}$ y β un valor propio de $\mathbf{B}$,

$$\Rightarrow |\beta| \leq \hat{\lambda};$$

(ii) y si $\exists\beta$ es tal, que

$$|\beta| = \hat{\lambda} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

Podemos interpretar este resultado como una matriz $\mathbf{B}$, a la cual se le ha aumentado el valor de por lo menos una de sus entradas, para formar la matriz $\mathbf{A}$.

Un resultado que nos puede ayudar a hacer una *estimación para la raíz de Perron*, es la siguiente:

Teorema 1.3

Si $\mathbf{A} > \mathbf{O}$ $m \times m$ tiene como raíz de Perron a $\hat{\lambda}$, entonces

[1] *Mathematische Annalen*, 64 (1907), pp. 248-263

(*i*)

$$\min_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \leq \hat{\lambda} \leq \max_i \sum_{J=1}^{m} a_{ij}; \tag{1.1}$$

(*ii*) y si

$$\sum_{j=1}^{m} a_{i_0 j} = \hat{\lambda}$$

para algún $i_0 = 1, 2, \ldots, m$, entonces

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}, \forall j \in \overline{m} \tag{1.2}$$

Es decir, estamos sumando todos los elementos de cada renglón y luego calculamos los números, máximo y mínimo, de cada suma. El valor de la raíz de Perron está entre estos dos valores. Análogamente, para la suma de los elementos que están en cada columna, podemos afirmar lo siguiente:

(*i*)

$$\max_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \leq \hat{\lambda} \leq \min_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij};$$

(*ii*) y si

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij_0} = \hat{\lambda}$$

para algún $j_0 = 1, 2, \ldots, m$ entonces

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = \hat{\lambda}, \forall j \in \overline{m} \tag{1.3}$$

En este contexto, podemos pensar a las matrices **A** $m \times m$, que estamos desarrollando, como un subconjunto de las matrices de insumo-producto; esto es, como aquellas matrices que tienen entradas estrictamente positivas.

Capítulo 2 PERMUTACIONES Y MATRICES DE PERMUTACIÓN

Las matrices de permutación nos ayudarán con la definición de reducibilidad e irreducibilidad de una matriz.

Sea $\overline{m} = \{1, 2, \ldots, m\}$ un conjunto de índices y sea

$$S_m = \{\sigma . \overline{m} \longrightarrow \overline{m} \mid \sigma \text{ es biyectiva}\} \tag{2.1}$$

el conjunto de permutaciones de m elementos, que usualmente representamos como:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & m \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(m) \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Este conjunto forma un grupo, bajo la composición de funciones. Y sea

$$B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m\}.$$

el conjunto de vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^m$.

$\mathbf{P}_m$ = es el conjunto de matrices $m x m$ tales, que tienen un 1 en cada renglón y columna y ceros, en los demás lugares.

Este conjunto forma un grupo, bajo el producto de matrices.

Ejemplo

Un elemento del conjunto $\mathbf{P}_4$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{P}$$

A cada permutación le podemos asociar una matriz de permutación, de la siguiente forma:

$$\sigma \longmapsto \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_{\sigma(1)} \\ \mathbf{e}'_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{e}'_{\sigma(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_{i_1} \\ \mathbf{e}'_{i_2} \\ \vdots \\ \mathbf{e}'_{i_m} \end{pmatrix} = \mathbf{P}_\sigma \tag{2.3}$$

Definición 2.1

Una matriz de permutación puede ser expresada como:

$$\mathbf{P}_\sigma = (p_{ij}) = \begin{cases} 1 \text{ para } \sigma(i) = j, \ i = 1, 2, \ldots, m \\ 0 \text{ para } \sigma(i) \neq j \end{cases} . \tag{2.4}$$

Teorema 3.4
Los grupos $(S_m, \circ)$ y $(P_m, \cdot)$ son isomorfos.
Demostración

Sea

$$f(\sigma) \longmapsto \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_{\sigma(1)} \\ \mathbf{e}'_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{e}'_{\sigma(m)} \end{pmatrix} = \mathbf{P}_\sigma. \tag{2.5}$$

una función que asocia a cada permutación una matriz de permutaciones. Por tanto, la composición de funciones (es decir, el producto de permutaciones) tiene asociada el producto de matrices (de permutación):

$$f(\sigma \circ \tau) = \mathbf{P}_{\sigma\circ\tau} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_{\sigma\circ\tau(1)} \\ \mathbf{e}'_{\sigma\circ\tau(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{e}'_{\sigma\circ\tau(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_{\sigma(1)} \\ \mathbf{e}'_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{e}'_{\sigma(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_{\tau(1)} \\ \mathbf{e}'_{\tau(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{e}'_{\tau(m)} \end{pmatrix}$$

$$= f(\sigma)f(\tau).$$

Por otro lado, el inverso de una permutación tiene asociado la matriz:

$$f(\sigma) = f(\tau) \Rightarrow \mathbf{P}_{\sigma^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_{\tau(1)} \\ \mathbf{e}'_{\tau(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{e}'_{\tau(m)} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{e}'_{\sigma(1)} = \mathbf{e}'_{\tau(1)}, \ldots, \mathbf{e}'_{\sigma(m)} = \mathbf{e}'_{\tau(m)}$$

$$\Leftrightarrow \sigma(1) = \tau(1), \ldots, \sigma(m) = \tau(m) \Leftrightarrow \sigma = \tau.$$

Cualquier matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_{i_1} \\ \mathbf{e}'_{i_2} \\ \vdots \\ \mathbf{e}'_{i_m} \end{pmatrix}$$

proviene de la permutación

$$\sigma(1) = \tau(1), \ldots, \sigma(m) = \tau(m).$$

Ejemplo:

Sean las permutaciones

Evariste Galois (1811-1832)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y entonces, la composición

$$\sigma \circ \tau = \sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

nos da una nueva permutación. Al aplicarle la función f, tenemos:

$$f(\sigma\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P_{\sigma\tau}$$

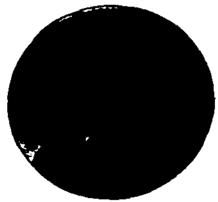
Ejemplo:

Sea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

una permutación que tiene asociada la matriz:

$$\Rightarrow P_\sigma = \begin{pmatrix} \mathbf{e'}_3 \\ \mathbf{e'}_4 \\ \mathbf{e'}_2 \\ \mathbf{e'}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Niels Henrik Abel (1802-1829)

La matriz transpuesta de $\mathbf{P}_\sigma$ es $\mathbf{P}'_\sigma$:

$$\mathbf{P}'_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y la matriz inversa de $\mathbf{P}_\sigma$ es:

$$\mathbf{P}_\sigma^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{P}_\sigma}\mathbf{P}'_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.6)$$

ya que $|det\mathbf{P}_\sigma| = 1$; por tanto, $\mathbf{P}_\sigma = \mathbf{P}_\sigma^{-1}$.

Ahora bien, la permutación inversa de σ es:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}_{\sigma^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e'}_3 \\ \mathbf{e'}_4 \\ \mathbf{e'}_2 \\ \mathbf{e'}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y entonces se cumplen las igualdades:

$$\mathbf{P}_{\sigma^{-1}} = \mathbf{P}'_\sigma = \mathbf{P}_\sigma^{-1}. \qquad (2.7)$$

Ahora bien, ¿cómo afecta el producto de una matriz de permutación a las matrices cuadradas arbitrarias?

Comencemos con el producto de una matriz de permutaciones y vectores arbitrarios, de dimensión m.

Sean $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$ y sea $\mathbf{P}\sigma$ una matriz de permutaciones mxm :

$$\mathbf{P}_\sigma \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{e'}_{\sigma(1)} \\ \mathbf{e'}_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{e'}_{\sigma(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix} = (\mathbf{e'}_{\sigma(1)}, \mathbf{e'}_{\sigma(2)}, \ldots, \mathbf{e'}_{\sigma(m)}) \tag{2.8}$$

$$= (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(m)} = \mathbf{X}_\sigma$$

$$\mathbf{P}_\sigma \mathbf{X} = (x_{\sigma(i)}) = \mathbf{X}_\sigma \, .$$

$\mathbf{X}_\sigma$ es el vector al que se le han permutado sus entradas, por medio de σ.

Si $\mathbf{A}$ es una matriz mxm arbitraria, entonces tiene la forma:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Si la multiplicamos por la izquierda por $\mathbf{P}_\sigma$, tendremos:

$$\mathbf{P}_\sigma \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{e'}_{\sigma(1)} \\ \mathbf{e'}_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{e'}_{\sigma(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e'}_{\sigma(1)} \\ \mathbf{e'}_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{e'}_{\sigma(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{A}^{(2)} & \ldots & \mathbf{A}^{(m)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{e'}_{\sigma(1)}\mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{e'}_{\sigma(1)}\mathbf{A}^{(2)} & \cdots & \mathbf{e'}_{\sigma(1)}\mathbf{A}^{(m)} \\ \mathbf{e'}_{\sigma(2)}\mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{e'}_{\sigma(2)}\mathbf{A}^{(2)} & \cdots & \mathbf{e'}_{\sigma(2)}\mathbf{A}^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{e'}_{\sigma(m)}\mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{e'}_{\sigma(m)}\mathbf{A}^{(2)} & \cdots & \mathbf{e'}_{\sigma(m)}\mathbf{A}^{(m)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)1} & a_{\sigma(1)2} & \cdots & a_{\sigma(1)m} \\ a_{\sigma(2)1} & a_{\sigma(2)2} & \cdots & a_{\sigma(2)m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\sigma(m)1} & a_{\sigma(m)2} & \cdots & a_{\sigma(m)m} \end{pmatrix} = \left(a_{\sigma(i)j}\right)'$$

$$= \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)1} & a_{\sigma(1)1} & \cdots & a_{\sigma(1)1} \\ a_{\sigma(2)2} & a_{\sigma(2)2} & \cdots & a_{\sigma(2)2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\sigma(m)m} & a_{\sigma(m)m} & \cdots & a_{\sigma(m)m} \end{pmatrix} = \left(a_{\sigma(i)j}\right)' \ .$$

$\mathbf{P}_\sigma \mathbf{A} = \left(a_{\sigma(i)j}\right)$ es la matriz cuyos renglones han sido permutados, por medio de σ.

Ahora, si $\mathbf{A}$ es mxm y la multiplicamos por $\mathbf{P}_\sigma$, por la derecha, entonces tendremos:

$$\mathbf{AP}_\sigma = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e'}_{\sigma(1)} \\ \mathbf{e'}_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{e'}_{\sigma(m)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{(1)}\mathbf{e'}_{\sigma(1)} & \mathbf{A}_{(1)}\mathbf{e'}_{\sigma(2)} & \cdots & \mathbf{A}_{(1)}\mathbf{e'}_{\sigma(m)} \\ \mathbf{A}_{(2)}\mathbf{e'}_{\sigma(1)} & \mathbf{A}_{(2)}\mathbf{e'}_{\sigma(2)} & \cdots & \mathbf{A}_{(2)}\mathbf{e'}_{\sigma(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{(m)}\mathbf{e'}_{\sigma(1)} & \mathbf{A}_{(m)}\mathbf{e'}_{\sigma(2)} & \cdots & \mathbf{A}_{(m)}\mathbf{e'}_{\sigma(m)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1\sigma(1)} & a_{1\sigma(2)} & \cdots & a_{1\sigma(m)} \\ a_{2\sigma(1)} & a_{2\sigma(2)} & \cdots & a_{2\sigma(m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m\sigma(1)} & a_{m\sigma(2)} & \cdots & a_{m\sigma(m)} \end{pmatrix} = \left(a_{i\sigma(j)}\right)' = \left(a_{i\sigma^{-1}(j)}\right) .$$

Así obtenemos la matriz $\mathbf{A}$, cuyas columnas fueron permutadas por medio de σ.

Calculemos ahora el producto $\mathbf{AP}_\sigma = \mathbf{X}'$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e'}_{\sigma(1)} \\ \mathbf{e'}_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{e'}_{\sigma(m)} \end{pmatrix} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{e'}_{\sigma(1)}, \mathbf{X}'\mathbf{e'}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{X}'\mathbf{e'}_{\sigma(m)}\right)$$

$$= \left(\mathbf{X}_{\sigma(1)}, \mathbf{X}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{X}_{\sigma(m)}\right) = \mathbf{X}_{\sigma^{-1}} \Rightarrow \mathbf{X}'\mathbf{P}_{\sigma^{-1}}. \qquad (2.9)$$

Si multiplicamos la matriz $\mathbf{A}$ simultáneamente por P_σ y $\mathrm{P}_{\sigma^{-1}}$, por la izquierda y por la derecha, respectivamente, tenemos:

$$\mathbf{P}_\sigma \mathbf{AP}_{\sigma^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e'}_{\sigma^{-1}(1)} \\ \mathbf{e'}_{\sigma^{-1}(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{e'}_{\sigma^{-1}(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e'}_{\sigma(1)} \\ \mathbf{e'}_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{e'}_{\sigma(m)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)1} & a_{\sigma(1)2} & \cdots & a_{\sigma(1)m} \\ a_{\sigma(2)1} & a_{\sigma(2)2} & \cdots & a_{\sigma(2)m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\sigma(m)1} & a_{\sigma(m)2} & \cdots & a_{\sigma(m)m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e'}_{\sigma(1)} \\ \mathbf{e'}_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{e'}_{\sigma(m)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)\sigma(1)} & a_{\sigma(1)\sigma(2)} & \cdots & a_{\sigma(1)\sigma(m)} \\ a_{\sigma(2)\sigma(1)} & a_{\sigma(2)\sigma(2)} & \cdots & a_{\sigma(2)\sigma(m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\sigma(m)\sigma(1)} & a_{\sigma(m)\sigma(2)} & \cdots & a_{\sigma(m)\sigma(m)} \end{pmatrix}$$

$$= \left(a_{\sigma(i)\sigma(j)}\right). \tag{2.10}$$

lo que representa la permutación simultánea de renglones y columnas de una matriz **A**.

Teorema 2.2

Si $\mathbf{P}_\sigma$ es una matriz de permutación $m x m$ **cíclica** completa, entonces:

(i) el polinomio característico, para $\mathbf{P}_\sigma$, es $\lambda^m - 1 = 0$; es decir, sus raíces tienen la forma

$$\lambda_k = e^{i\left(\frac{2\pi k}{m}\right)}, k = 1, 2, \ldots, m-1. \tag{2.11}$$

Demostración

Como σ forma un ciclo completo, entonces

$$\left\{\iota, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{m-1}\right\} \cong \left\{\mathbf{I}, \mathbf{P}_\sigma, \mathbf{P}_\sigma^2, \ldots, \mathbf{P}_\sigma^{m-1}\right\} \tag{2.12}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}^m = \mathbf{I};$$

(ii) Si

$$|\mathbf{P}^m - \mathbf{I}| = \lambda^m - 1 = 0,$$

entonces sus raíces tienen la forma

$$\lambda_1 = e^{i\left(\frac{2\pi}{m}\right)}, \lambda_2 = e^{i\left(\frac{4\pi}{m}\right)}, \ldots, \lambda_{k-1} = e^{i\left(\frac{2\pi(k-1)}{m}\right)}. \tag{2.13}$$

Definición 2.2

Sean

$$\sigma, \pi \in S_m,$$

en donde al **producto de permutaciones** lo definimos como:

$$(\pi \circ \sigma)(i) = \pi(\sigma(i)), \ i \in \overline{m}. \tag{2.14}$$

Definición 2.3
Una permutación $\sigma \in \mathbf{S}_m$ **tiene un ciclo de longitud r**

$$\Leftrightarrow \exists\, i_1, i_2, \ldots, i_r \in \overline{m}$$

tal, que

$$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \ldots, \sigma(i_{r-1}) = i_1 .$$

También se conoce a esta permutación como un **r-ciclo.**

Si $\sigma \in S_m$ y $r = m$, decimos que σ es una permutación de ciclo completo.

Definición 2.4

Sea $\overline{m}$ y $\sigma \in S_m$. Para un $i_0 \in \overline{m}$ fijo, definimos el conjunto

$$O_{i_0,\sigma} = \{\sigma^n(i_0) \mid n \in N\} = \left\{\sigma(i_0), \sigma^2(i_0), \sigma^3(i_1), \ldots\right\}. \tag{2.15}$$

Teorema 2.3

$\forall\ \sigma \in S_m$ es producto de ciclos ajenos.
Demostración

Sea $\overline{m}$ y sin pérdida de generalidad, consideremos $1, \sigma(1), \sigma^2(1), \ldots$
Como $\overline{m}$ es finito, no pueden ser distintos sus elementos.

Sea ahora $\sigma^r(1)$ el primer elemento de la sucesión que se repite.

$$\Rightarrow \sigma^r(1) = 1$$

porque si

$$\sigma^r(1) = \sigma^s(1)$$

con $0 < s < r$.

$$\Rightarrow \sigma^{r-s}(1) = 1.$$

con $r - s < r$. **¡Pero esto es un absurdo!**

Ahora, sea

$$\Upsilon_1 = \left\{1, \sigma(1), \sigma^2(1), \ldots, \sigma^{r-1}(1)\right\}.$$

Entonces obtenemos un ciclo ajeno, es decir:

$$\Upsilon_1 \cap \Upsilon_2 = \emptyset$$

Gaspard Monge (1746–1818) Cauchy replaced him at the Académie des Sciences in 1816.

si

$$j \in \Upsilon_1 \cap \Upsilon_2 \Rightarrow \exists \sigma^u(i) = j \in \overline{m}. \Rightarrow \Upsilon_1 = \Upsilon_2.$$

Sea ahora $w \in \overline{m}$ tal, que $w \notin \Upsilon_1$ y $w \notin \Upsilon_2$. A partir de éstos se construye Υ_3, etc. Como $\overline{m}$ es finito, el proceso termina con alguna Υ_m.

$$\Rightarrow \Upsilon_1 \Upsilon_2 \cdots \Upsilon_m$$

y tiene el mismo efecto en cada elemento de $\overline{m}$ que σ. Por tanto,

$$\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_m.$$

QED.

Ejemplo:

Sea

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Si π_{l_k} designa a la matriz π de orden l_k y, además,

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_n = m.$$

$\Rightarrow \exists$ una matriz de permutación $m x m$ tal, que

$$\mathbf{RPR}^{-1} = \pi_{l_1} \dotplus \pi_{l_2} \dotplus \cdots \dotplus \pi_{l_n}.$$

Recordemos que si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices cuadradas, la **suma directa** de ellas se define como:

$$\mathbf{A} \dotplus \mathbf{B} = diag(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Como el polinomio característico de π_{l_k} es $(-1)^{k_k}(\lambda^{l_k} - 1)$, se sigue que el polinomio característico de π es $\prod_{k=1}^{m}(-1)^{k_k}(\lambda^{l_k} - 1)$.

Los valores propios de una matriz de permutación son, por tanto, las raíces *n-ésimas* de la unidad, de las n ecuaciones:

$$\lambda^{l_k} = 1, \; k \in \overline{n}. \tag{2.17}$$

Ejemplo:

Sea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 6 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

que puede factorizarse en ciclos ajenos como:

$$\sigma = (152))(4)(36).$$

Por tanto, $m = 3$ y las longitudes correspondientes son $l_1 = 3, l_2 = 1, l_3 = 2$. La matriz $\mathbf{P}_\sigma$ es:

$$\mathbf{P}_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y la matriz $\mathbf{R}$, asociada con

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

es el producto:

$$\mathbf{RP}_\sigma\mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios correspondientes a $\mathbf{P}_\sigma$, son:

$$(\lambda^3 - 1)(\lambda - 1)(\lambda^2 - 1).$$

Como existe un homomorfismo entre los grupos $(\mathrm{S}_m, \circ)$ y $(\mathrm{P}_m, \cdot)$, entonces el elemento neutro de S_m tiene, por imagen, al elemento neutro de $\mathbf{P}_m$. Si i es el neutro de S_m, entonces $\mathrm{f(i)} = \mathbf{P}_i = \mathbf{I}_m$, matriz identidad de orden mxm. La imagen del simétrico de un elemento de S_m, es el simétrico de la imagen; es decir:

$$\forall\sigma \in S_m \;\; \mathrm{f}(\sigma^{-1}) = [\mathrm{f}(\sigma)]^{-1}$$
$$f(\sigma^{-1}) = \mathbf{P}_{\sigma^{-1}} = [\mathbf{P}\sigma]^{-1}$$

El kernel (núcleo) del homomorfismo f, de los grupos $(\mathrm{S}_m, \circ)$ y $(\mathrm{P}_m, \cdot)$, es la imagen recíproca del elemento neutro de S_m:

$$Ker(f) = f^{-1}(I_m) = \{\sigma \mid \sigma \in S_m, \; f(\sigma) = I_m\} = \iota. \tag{2.18}$$

Teorema 2.4

Sea $\sigma \in S_m$ un ciclo de orden m; entonces:

$$\mathbf{P}_\sigma = \begin{pmatrix} \mathbf{e'}_{\sigma(1)} \\ \mathbf{e'}_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{e'}_{\sigma(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e'}_2 \\ \mathbf{e'}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{e'}_1 \end{pmatrix}.$$

Demostración

Como

$$\sigma(1) = 2, \sigma(3) = 3, ..., \sigma(m) = 1$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}_\sigma = \begin{pmatrix} \mathbf{e'}_{\sigma(1)} \\ \mathbf{e'}_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{e'}_{\sigma(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e'}_2 \\ \mathbf{e'}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{e'}_1 \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.5
Si $\sigma \in S_m$ forma un ciclo de orden m,

$$\Rightarrow \mathbf{P}_\sigma^m = \mathbf{I}. \tag{2.19}$$

Demostración

$$\mathbf{P}_\sigma = \begin{pmatrix} \mathbf{e'}_{\sigma^m(1)} \\ \mathbf{e'}_{\sigma^m(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{e'}_{\sigma^m(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e'}_1 \\ \mathbf{e'}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e'}_1 \end{pmatrix} .$$

Sabemos que la propiedad anterior se cumple con la igualdad $\mathbf{P}_\sigma^m = \mathbf{P}_{\sigma^m}$. Entonces

$$\mathbf{P}_\sigma = \begin{pmatrix} \mathbf{e'}_{\sigma(1)} \\ \mathbf{e'}_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{e'}_{\sigma(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e'}_2 \\ \mathbf{e'}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{e'}_m \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

Teorema 2.6

Los valores propios de una matriz cíclica $\mathbf{P}_\sigma$ de orden mxm, son:

$$\lambda_1 = e^{i(\frac{4\pi}{m})}, \lambda_2 = e^{i(\frac{4\pi}{m})}, \ldots, \lambda_{k-1} = e^{i(\frac{2\pi(k-1)}{m})}. \qquad (2.20)$$

Demostración

Como $\mathbf{P}_\sigma$ es cíclica, entonces

$$\mathbf{P}_\sigma^m = \mathbf{I} = \mathbf{P}_{\sigma^m} \Rightarrow |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\sigma^m}| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^m - 1 = 0 \, .$$

Sus raíces son:

$$\lambda_k = e^{i(\frac{2\pi k}{m})}, k = 0, 1, \ldots, m-1 \, .$$

Teorema 2.7

Los valores propios de una matriz cíclica de $\mathbf{P}_\sigma$ cíclica, se pueden generar mediante la siguiente fórmula:

$$\lambda_k = e^{i(\frac{2\pi k}{m})}, k \in \overline{m-1}. \qquad (2.21)$$

Demostración

Sea

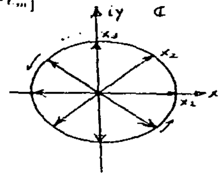
$$\mathbf{X}_j = \sum_{k=1}^{m} \lambda^{kj} e_k, \; j \in \overline{m} \Rightarrow \mathbf{P}_\sigma \mathbf{X}_j = \sum_{k=1}^{m} \lambda^{kj} P e_k.$$

Como por hipótesis $\mathbf{Pe}_{i-1} = \mathbf{e}_i$, $i \in \overline{m}$,

$$\Rightarrow \mathbf{PX} = \lambda^{j} e_2 + \lambda^{2j} e_3 + \cdots + \lambda^{(m-1)j} e_m + \lambda^{mj} e_1$$

$$\lambda^{m-j} \left[\lambda^{(m+1)j} e_1 + \lambda^{2j} e_2 + \cdots + \lambda^{mj} e_m \right]$$

$$\lambda^{m-j} \left[\sum_{k=1}^{m} \lambda^{kj} e_k \right];$$



y como

$$\lambda^{-j} = \lambda^{m-j}$$

$$\lambda^{m-j} = [X_j].$$

por tanto

$$\mathbf{P}\overline{\mathbf{X}}_j = \lambda_j \overline{\mathbf{X}}_j \tag{2.22}$$

y entonces λ^{m-j} es un valor propio de $\mathbf{P}_\sigma$, cuyo vector propio asociado es:

$$\overline{\mathbf{X}} = (\lambda^{j}, \lambda^{2j}, \ldots, \lambda^{mj})' = (e^{i(\frac{2\pi j}{m})}, e^{i(\frac{2\pi 2j}{m})}, \ldots, e^{i2\pi j})', \ j \in \overline{m}.$$

Ejemplo:

Entre las matrices de permutación podemos encontrar una matriz muy interesante, que asociamos con la permutación:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & m-1 & m \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & m & 1 \end{pmatrix}.$$

la cual corresponde al ciclo $\sigma = (123\cdots m)$, el que a su vez genera al grupo cíclico de orden m.

La matriz asociada hace rotar, a los vectores de la base canónica, un lugar hacia adelante:

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

y su cuadrado se calcula como:

$$\pi^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

lo que corresponde a

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & m-1 & m \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & m-1 & m \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & m & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & m-1 & m \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Al igual que las matrices π^k y σ^k, la matriz π^m corresponde a la permutación $\sigma^m = \iota$ tal, que $\pi^m = \mathbf{I}$. Observemos que se cumple con la siguiente relación:

$$\pi' = \pi^{-1} = \pi^{m-1}. \tag{2.23}$$

Ejemplo:
Sea

$$\mathbf{L} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)'.$$

Entonces, $\forall\ \mathbf{P}_\sigma$:

$$\mathbf{P}_\sigma(diag\,L)\mathbf{P}_\sigma = \mathbf{P}_\sigma \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix} \mathbf{P}_\sigma' = diag(\mathbf{P}_\sigma\mathbf{L})$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\sigma(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{\sigma(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{\sigma(m)} \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.8

Si $\mathbf{A}$ es una matriz mxm y $\mathbf{P}_\sigma$ una matriz de permutación, entonces $\mathbf{PAP}'$ tienen los mismos valores propios.

Demostración

Queremos demostrar que

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{PAP}'| = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|.$$

Si multiplicamos, dentro del valor absoluto del segundo miembro de la igualdad, por las matrices $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}'$, respectivamente por la derecha y por la izquierda, tenemos:

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{PAP}'| = |\mathbf{P}\lambda\mathbf{I}\mathbf{P}' - \mathbf{PAP}'| = |\mathbf{P}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{P}'|.$$

Pero el determinante de un producto es el producto de determinantes, por tanto:

$$|\mathbf{P}|\,|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|\,|\mathbf{P}'| = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|$$

y, finalmente,

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{PAP}'| = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|. \tag{2.24}$$

Teorema 2.9

Sea π la matriz que definimos anteriormente como:

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$I + \pi + \pi^2 + \ldots + \pi^{m-1} = \mathbf{J}\,, \tag{2.25}$$

donde **J** es la matriz $m x m$, que tiene un 1 en cada renglón y en cada columna.

Demostración

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{J}.$$

The Founding Members of the Deutsche Mathemtiker-Vereinigung, Bremen, 1890

Joseph Liouville (1809–1882), the best French mathematician of the 1840s, founder of the Journal de Mathématiques Pures et Appliquées

Jean Victor Poncelet (1788–1867), the inventor of projective geometry. Photograph by J. L. Charmet, permission of the Académie des Sciences

Capítulo 3 MATRICES NO-NEGATIVAS

El propósito de este capítulo es comenzar a caracterizar algunas propiedades generales de las **matrices no-negativas**. En la economía matemática lineal es bien conocida la importancia que estas matrices tienen, como por ejemplo en el modelo de insumo-producto estático. Por esta razón se exponen aquí las principales propiedades que estas matrices tienen, para, una vez conocidas, resulten más fácilmente manipulables por los economistas.

Teorema 3.1

Sea $\mathbf{A} > \mathbf{O}$ mxm, entonces $(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1} > \mathbf{O}$.

Demostración

$$(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{m-1} = \mathbf{I}^{m} + \frac{1}{1!}\mathbf{I}^{m-1}\mathbf{A} + \frac{(m-1)(m-2)}{2!}\mathbf{I}^{m-2}\mathbf{A}^{2} + \cdots + \mathbf{A}^{m-1}$$

$$= \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{(m-1)(m-2)}{2!}\mathbf{A}^{2} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}\mathbf{A}^{3} + \cdots + \mathbf{A}^{m-1};$$

pero

$$\mathbf{A} > O \Rightarrow \mathbf{AA} > O \Rightarrow \mathbf{A}^{m-1} > \mathbf{O}$$

$$\Rightarrow \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{(m-1)(m-2)}{2!}\mathbf{I}^{m-2}\mathbf{A}^{2} + \cdots + \mathbf{A}^{m-1} > \mathbf{O}.$$

Teorema 3.2

Sea $\mathbf{A} > \mathbf{O}$ mxm; entonces $\mathbf{A}$ y $(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1}$ conmutan.

Demostración

$$\mathbf{A}(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{m-1} = \mathbf{A}(\mathbf{I}+\mathbf{A} + \frac{(m-1)(m-2)}{2!}\mathbf{A}^{2} + \cdots + \mathbf{A}^{m-1}) > \mathbf{O}\,.$$

Factorizando por la derecha a la matriz $\mathbf{A}$, tenemos:

$$= \mathbf{IA}+\mathbf{AA}+\frac{(m-1)(m-2)}{2!}\mathbf{A}^{2}\mathbf{A}+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}\mathbf{A}^{3}\mathbf{A}+\cdots+\mathbf{A}^{m-1}\mathbf{A}) > \mathbf{O}$$

$$= (\mathbf{A} + \mathbf{A}^{2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2!}\mathbf{A}^{3} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}\mathbf{A}^{4} + \cdots + \mathbf{A}^{m})\mathbf{A}$$

$$= (\mathbf{I}+\mathbf{A})^{m-1}\mathbf{A}\,.$$

MATRICES IRREDUCIBLES

En esta sección se definirá el concepto de **matriz irreducible**, ya que constituyen un conjunto que cumple con una serie de propiedades importantes, dentro del modelo de insumo-producto (estático). Dichas propiedades se desarrollarán más adelante.

Definición 3.1

Sea $\mathbf{X}$ una matriz $m\text{x}m$. Decimos que $\mathbf{X}$ es **cogrediente** con una matriz $\mathbf{Y}$ $m\text{x}m$ si, y sólo si, existe una matriz de permutación $\mathbf{P}$ $m\text{x}m$ tal, que

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}'\mathbf{Y}\mathbf{P}.$$

Definición 3.2

Si $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ y es una matriz $m\text{x}m$, decimos que $\mathbf{A}$ es una matriz **reducible** (o **descomponible**) si, y sólo si, $\mathbf{A}$ es cogrediente con una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

en donde $\mathbf{B}$ y $\mathbf{D}$ son submatrices cuadradas, en general de distinto tamaño. En caso contrario, $\mathbf{A}$ es **irreducible** (o **indescomponible**).

Teorema 3.3

Si $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$, $m\text{x}m$ irreducible y $\mathbf{Y} \geq \mathbf{O}$ semipositivo, con k coordenadas positivas, $k \geq 0$

$(\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{Y}$ tiene, al menos, una coordenada positiva más que $\mathbf{Y}$.

Demostración

Supongamos que $\mathbf{Y}$ tiene k coordenadas positivas y las demás son cero. Sea, además, $\mathbf{P}$ una matriz de permutación $m\text{x}m$ tal, que

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{Y}$$

coloca a las k coordenadas positivas en los primeros lugares y a los ceros en los últimos lugares. Como $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$:

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix} \in R^k_{++}, \mathbf{O} \in R^{m-k}$$

$$\Rightarrow (\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{X} = \left(I + \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} \\ \mathbf{X}_{21} & \mathbf{X}_{22} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{X} + \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11}\mathbf{R} \\ \mathbf{X}_{12}\mathbf{R} \end{pmatrix}$$

y como $\mathbf{A}$ es irreducible, el bloque $\mathbf{X}_{12}$ no tiene ni renglones ni columnas con ceros.

Supongamos ahora que $\mathbf{X} + \mathbf{AX}$ es un vector con $m - k$ coordenadas no nulas:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11}\mathbf{R} \\ \mathbf{X}_{12}\mathbf{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} + \mathbf{X}_{11}\mathbf{R} \\ \mathbf{O} + \mathbf{X}_{12}\mathbf{R} \end{pmatrix}.$$

Si $\mathbf{X}_{12} = \mathbf{O}$ y es una submatriz de orden $(m - k)$xk, entonces existiría una matriz $\mathbf{P}$ de permutación mxm tal, que

$$\mathbf{P'AP} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} \\ \mathbf{O} & \mathbf{X}_{22} \end{pmatrix}$$

y $\mathbf{A}$ sería una matriz reducible. **¡Pero esto es un absurdo!** *Por* tanto, la submatriz $\mathbf{X}_{12} \geq \mathbf{O}$ es semipositiva, sin que tenga la primera columna y el primer renglón de ceros y, además, el vector $\mathbf{Y} + \mathbf{AY}$ tiene más de k coordenadas positivas.

Corolario 3.1

Si $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ mxm irreducible y $\mathbf{Y} \geq \mathbf{O} \Rightarrow (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1}\mathbf{Y} > \mathbf{O}$.

Demostración

Sea

$$\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$$

$$\Rightarrow (\mathbf{I} + \mathbf{A}) \geq \mathbf{O}$$

Sea $\mathbf{Y} \geq \mathbf{O}$ semipositivo, un vector con k coordenadas positivas, $k \leq m - 1$.

Por el teorema 1, si multiplicamos $(\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{Y}$ sabemos que este producto forma, al menos, un vector con $k + 1$ coordenadas positivas.

$$\Rightarrow (\mathbf{I} + \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{Y}$$

es un vector con $k + 2$ coordenadas positivas. Aplicando esta operación $m - k$ veces, obtendremos un vector con m coordenadas positivas y entonces tendremos:

$$(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1}\mathbf{Y} > \mathbf{O}.$$

La transformación lineal $(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1}$ va de R^m_+ a R^m_{++} ; es decir, manda vectores semipositivos al primer ortante de vectores estrictamente positivos. Como $(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1}$ es una función continua, entonces manda conjuntos compactos del primer ortante, en conjuntos compactos.

Por ejemplo, el conjunto

$$S^{m-1} = \left\{ \mathbf{Y} \in R^m_+ : Y = \sum_{i=1}^{m} Y_i^2 = 1 \right\} \qquad (3.2)$$

forma un conjunto compacto.

$$\Rightarrow (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1} S^{m-1} \text{ es compacto}$$

Corolario 3.2

Si $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ y es una matriz mxm y además irreducible, si, y sólo si, $(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{m-1} > \mathbf{O}$.

Demostración

$\Rightarrow$) Por el corolario 1, tenemos que

$$(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{m-1}\mathbf{Y} > \mathbf{O}, \ \forall \mathbf{Y} \text{ vector semipositivo}$$

y en particular es válido si $\mathbf{Y} = \mathbf{e}_i$; $i \in \overline{m}$ son vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^m$. Entonces

$$(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{m-1}\mathbf{e}_i > \mathbf{O} \ \forall i \in \overline{m}.$$

lo cual quiere decir que todas las columnas de la matriz $(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{m-1}$ son estrictamente positivas.

$$\Rightarrow (\mathbf{I}+\mathbf{A})^{m-1} > \mathbf{O}.$$

$\Leftarrow$) Si

$$(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{m-1} > \mathbf{O}$$

$$\Rightarrow \mathbf{I} + (m-1)\mathbf{A} + \frac{(m-1)(m-2)}{2!}\mathbf{A}^2 + \cdots + (m-1)\mathbf{A}^{m-2} + \mathbf{A}^{m-1} > \mathbf{O}\,.$$

Supongamos ahora que $\mathbf{A}$ es reducible

$$\Rightarrow \exists \mathbf{P} \text{ tal que } \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}'$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}'\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{pmatrix}\mathbf{P} = \mathbf{A}.$$

Sustituyendo el valor de $\mathbf{A}$, en la expresión desarrollada de $(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{m-1}$, tenemos:

$$I + (m-1)\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{pmatrix} + \frac{(m-1)(m-2)}{2!}\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{pmatrix}^2 +$$

$$\cdots + (m-1)\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{pmatrix}^{m-2} + \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{pmatrix}^{m-1}.$$

Pero cada potencia de

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{pmatrix}^r$$

es de la forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}^r & \mathbf{W} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^r \end{pmatrix} \forall r \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

$$\Rightarrow (\mathbf{I}+\mathbf{A})^{m-1}$$

es reducible. **¡Pero esto es un absurdo!**

$$\Rightarrow (\mathbf{I}+\mathbf{A})^{m-1}$$

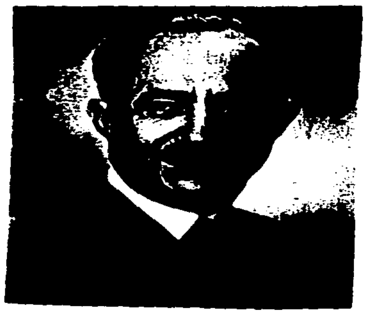
no tiene bloques de ceros;

$$\Rightarrow (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1} > \mathbf{O}\,.$$

Lema 3.1

Sea $\bar{\mathbf{X}}$ un vector propio, de una matriz $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ $m x m$ irreducible: entonces $\bar{\mathbf{X}} > \mathbf{O}$.

A. A. MARKOV AND B. A. KUSHNER: PHOTOGRAPH SHOT IN MARKOV'S MOSCOW STUDY, MARCH 1979



MORRIS KLINE

Demostración

Supongamos que

$$\mathbf{A}\widehat{\mathbf{X}} = \lambda\widehat{\mathbf{X}}$$

y

$$\widehat{\mathbf{X}} = \mathbf{P}\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix};$$

$\mathbf{R} > \mathbf{O}$, como antes, donde $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ es irreducible y $\widehat{\mathbf{X}} \geq \mathbf{O}$:

$$\Rightarrow \lambda\widehat{\mathbf{X}} - \mathbf{A}\widehat{\mathbf{X}} = \mathbf{O} \Rightarrow (\hat{\lambda}\mathbf{I} - \mathbf{A})\widehat{\mathbf{X}} = \mathbf{O}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}\widehat{\mathbf{X}} = \lambda\widehat{\mathbf{X}} \Rightarrow \widehat{\mathbf{X}} + \mathbf{A}\widehat{\mathbf{X}} = \widehat{\mathbf{X}} + \lambda\widehat{\mathbf{X}}$$

$$\Rightarrow (\mathbf{I} + \mathbf{A})\widehat{\mathbf{X}} = (1 + \hat{\lambda})\widehat{\mathbf{X}} \Rightarrow (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1}\widehat{\mathbf{X}} = (1 + \hat{\lambda})^{m-1}\widehat{\mathbf{X}}$$

$$\mathbf{O} < (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1}\widehat{\mathbf{X}} = (1 + \hat{\lambda})^{m-1}\widehat{\mathbf{X}}.$$

Entonces $(1 + \hat{\lambda})^{m-1}\widehat{\mathbf{X}}$ forma una vector con m entradas estrictamente positivas, por el teorema 2.1:

$$(1 + \hat{\lambda})^{m-1}\widehat{\mathbf{X}} > \mathbf{O} \Leftrightarrow \hat{\lambda} > \mathbf{O} \text{ y } \widehat{\mathbf{X}} > \mathbf{O}.$$

Recordemos que

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{m} \cdots \sum_{i_{k-1}}^{m} a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{k-1}j} \tag{3.4}$$

representa la entrada (i, j), de la matriz $\mathbf{A}^k$.

Teorema 3.4
Si $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$, mxm, irreducible,

$$\Leftrightarrow \forall (i, j) \in \overline{m}x\overline{m} \exists k \in Z$$

tal. que

$$a_{ij}^{(k)} > 0.$$

Demostración
$\Rightarrow$)
Supongamos que $\mathbf{A}$ es irreducible. Por el corolario 2.2, tenemos que

$$(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1} > \mathbf{O}$$

$$\Rightarrow \mathbf{I} + (m-1)\mathbf{A} + \frac{(m-1)(m-2)}{2!}\mathbf{A}^2 + \cdots + (m-1)\mathbf{A}^{m-2} + \mathbf{A}^{m-1} > \mathbf{O}.$$

Si multiplicamos la expresión anterior por $\mathbf{A}$,

$$\Rightarrow \mathbf{A} + (m-1)\mathbf{A}^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{2!}\mathbf{A}^3 + \cdots + (m-1)\mathbf{A}^{m-1} + \mathbf{A}^m > \mathbf{O}$$

es un polinomio de matrices con la forma

$$\Rightarrow \mathbf{A} + C_2\mathbf{A}^2 + C_3\mathbf{A}^3 + \cdots + C_{m-1}\mathbf{A}^{m-1} + \mathbf{A}^m > \mathbf{O}$$

$$\Rightarrow \exists A^{(k)} > O \Rightarrow a_{ij} + C_2 a_{ij}^{(2)} + \cdots + C_{m-1} a_{ij}^{(m-1)} + a_{ij}^{(m)} > 0 \ \forall (i,j) \in \overline{m} x \overline{m}.$$

De aquí se sigue que

$$\forall (i,j) \in \overline{m} x \overline{m} \ \exists k \in Z \ tal\ que \ 1 \leq k \leq m, a_{ij}^{(k)} > 0.$$

$\Leftarrow$) Vamos a demostrar el regreso.

$$\forall (i,j) \in \overline{m} x \overline{m} \ \exists k \in Z \ tal\ que \ 1 \leq k \leq m, a_{ij}^{(k)} > 0.$$

Demostraremos ahora que si $\mathbf{A}$ es reducible, entonces $a_{ij}^{(k)} = 0$ para algún $(i, j) \in \overline{m} x \overline{m}$ $\forall k \in Z^+$. Supongamos que $\mathbf{A}$ es reducible entonces existe una matriz $\mathbf{P}$ tal, que

$$\mathbf{P}'\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{pmatrix}.$$

donde $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ son matrices cuadradas.

$$\Rightarrow \mathbf{P}'\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{pmatrix}\mathbf{P}'$$

$$\Rightarrow (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1} = \mathbf{P}(\mathbf{I} + \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{pmatrix})^{m-1}\mathbf{P}' =$$

$$= \mathbf{P}(\mathbf{I} + (m-1)\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{pmatrix} + \frac{(m-1)(m-2)}{2!}\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{pmatrix}^2 + \cdots + \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{pmatrix}^{m-1})\mathbf{P}$$

$$\Rightarrow \exists \text{ una entrada } (i,j) \in \overline{m} x \overline{m} \text{ tal que } a_{ij}^{(k)} = 0.$$

¡Pero esto es un absurdo! $\mathbf{A}$ no es reducible; por tanto, $a_{ij}^{(k)} > 0$.

LA FUNCIÓN COLLATZ-WIELANDT

La **función Collatz-Wielandt** no va a servir para hacer un caracterización de la raíz de Perron-Frobenius.

Dada $\mathbf{X} \in R_+^m$, definimos

$$\lambda_A(\mathbf{X}) = \{\lambda \mid \mathbf{AX} \geq \lambda\mathbf{X},\ \lambda \in R_+\} \tag{3.5}$$

que represesenta un suconjunto de números reales.

$$\text{Sea } (\mathbf{AX})_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}X_j.$$

Definimos, además, la función

$$\lambda_i : R_+^m \rightarrow R_+$$

$$\lambda_i(\mathbf{X}) = \begin{cases} \frac{(\mathbf{AX})_i}{\mathbf{X}_i} \text{ si } \mathbf{X}_i > 0; \\ \infty \text{ si } \mathbf{X}_i = 0 \text{ y } (\mathbf{AX})_i \neq 0; \\ \textit{indefinido} \text{ si } \mathbf{X}_i = 0 \text{ y } (\mathbf{AX})_i = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

$\lambda_A(\mathbf{X})$ se puede escribir también como :

$$\lambda_A(\mathbf{X}) = \min_{i \in \overline{m}} \lambda_i(\mathbf{X}) =$$

$$= \min \begin{cases} \frac{(\mathbf{AX})_i}{\mathbf{X}_i} \text{ si } \mathbf{X}_i > 0; \\ \infty \text{ si } \mathbf{X}_i = 0 \text{ y } (\mathbf{AX})_i \neq 0; \\ \text{indefinida si } \mathbf{X}_i = 0 \text{ y } (\mathbf{AX})_i = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \min_i \frac{(\mathbf{AX})_i}{\mathbf{X}_i} \text{ si } \mathbf{X}_i > 0; \\ \infty \text{ si } X_i = 0 \text{ y } (\mathbf{AX})_i \neq 0; \\ \text{indefinida si } X_i = 0 \text{ y } (\mathbf{AX})_i = 0 \end{cases}$$

Definición 3.3

Si $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$, $m \times m$, irreducible, definimos la función

$$\lambda_A : R_+^m - \{O\} \rightarrow R_+$$

$$\lambda_A(X) = \begin{cases} \min_{X > O} \frac{(\mathbf{AX})_i}{\mathbf{X}_i} \text{ si } \mathbf{X}_i > 0; \\ \infty \text{ si } \mathbf{X}_i = 0 \text{ y } (\mathbf{AX})_i \neq 0; \\ \text{indefinida si } \mathbf{X}_i = 0 \text{ y } (\mathbf{AX})_i = 0 \end{cases}$$

A esta función la llamamos: **función Collatz Wielandt asociada con A.**

Queremos establecer ahora la existencia de un valor $\widehat{\mathbf{X}} \geq \mathbf{O}$ semipositivo tal, que maximice a la función Collaz-Wielandt. El máximo será la raiz de Perron-Frobenius de $\mathbf{A}$ y un $\widehat{\mathbf{X}} \geq \mathbf{O}$ será el vector de Perron-Frobenius asociado con $\widehat{\lambda} = \lambda(\widehat{\mathbf{X}})$. Veamos qué propiedades tiene la función Collaz-Wielandt.

Teorema 3.5

Sea $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$, $m \times m$, irreducible y sea $\lambda_A(\mathbf{X})$ la función Collatz-Wielandt **(C-W)** asociada con $\mathbf{A}$. Entonces:

(i) λ_A es homogénea de grado cero $\forall \lambda \in R_+$;
(ii) Si $\mathbf{X} \geq \mathbf{O}$ y $\lambda \in R_+$ es el real mayor tal, que

$$\mathbf{A}\widehat{\mathbf{X}} - \hat{\lambda}\widehat{\mathbf{X}} \geq \mathbf{O} \Rightarrow \hat{\lambda} = \lambda_A(\mathbf{X});$$

(iii) Si $\mathbf{X} \geq \mathbf{O}$ y

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1}\mathbf{X} \Rightarrow \lambda_A(\mathbf{Y}) = \lambda_A(\mathbf{X}).$$

entonces, : $\lambda_A(\mathbf{Y}) = \lambda_A(\mathbf{X})$.
Demostración

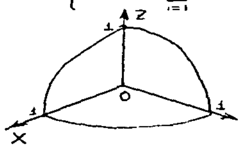
(i) λ_A es homogénea de grado cero

$\forall t > 0$ y $\mathbf{X} \geq \mathbf{O}, i \in \overline{m}$ se cumple lo siguiente:

$$\lambda_A(t\mathbf{X}) = \min_{X>O} \frac{(\mathbf{A}(t\mathbf{X}))_i}{(t\mathbf{X})_i} = \min_{X>O} \frac{t(\mathbf{AX})_i}{t\mathbf{X}_i} = \min_{X>O} \frac{(\mathbf{AX})_i}{\mathbf{X}_i} = \lambda_A(\mathbf{X}).$$

para la maximización de $\lambda_A(\mathbf{X})$ sobre el conjunto de todos los vectores $\mathbf{X} \geq \mathbf{O}$. Si restringimos el dominio de la función C-W, al primer ortante de $\mathbb{R}^m_+$, en la sección de esfera ($S^{(m-1)}$)que se encuentra en el primer ortante:

$$S^{(m-1)} = \left\{\mathbf{X} \in R^m_+ \mid \sum_{i=1}^{m} X_i^2 = 1, \mathbf{X} \geq \mathbf{O}\right\} \tag{3.7}$$



Si la función C-W fuese continua sobre S, entonces estaría garantizada la existencia de un $\widehat{X} \in S^{(m-1)}$ tal, que maximice a λ_A por el teorema de Weierstrass.

Pero λ_A es discontinua en la frontera del conjunto $S^{(m-1)}$, ya que, al menos, una de sus coordenadas es cero si el vector es semipositivo; en cambio, es totalmente continua si tomamos como su dominio $S^{(m-1)} - \partial S^{(m-1)}$. Donde ∂S significa la frontera topológica del conjunto S.

Una manera ingeniosa de evitar las discontinuidades sobre S^{m-1}, es tomar

$$\overline{S} = \left\{ \mathbf{Y} > \mathbf{O} \mid \mathbf{Y} = (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1}\mathbf{X},\ \mathbf{X} \in S^{(m-1)} \right\}. \tag{3.8}$$

$S^{(m-1)}$ es un conjunto compacto en R^m y $\overline{S}$ es la imagen directa, bajo $(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1}$, que es un operador continuo. Entonces $\overline{S}$ consta de solamente vectores estrictamente positivos.

Por definición de $\lambda_A(\mathbf{X})$.

$$\lambda_A(\mathbf{X}) = \min \lambda_i(\mathbf{X}) \Rightarrow \lambda_A(\mathbf{X})\mathbf{X} \leq \mathbf{A}\mathbf{X}.$$

Multiplicando ambos lados por $(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1} > \mathbf{O}$.

$$\Rightarrow \lambda_A(\mathbf{X})(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1}\mathbf{X} \leq (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1}\mathbf{A}\mathbf{X}.$$

como las matrices $\mathbf{A}$ y $(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1}$ conmutan.

$$\Rightarrow \lambda_A(X)(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1}\mathbf{X} \leq A(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1}\mathbf{X};$$

y como

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1}\mathbf{X} > \mathbf{O}.$$

$$\Rightarrow \lambda_A(\mathbf{X})\mathbf{Y} \leq \mathbf{A}\mathbf{Y}$$

$$\Rightarrow \lambda_A(\mathbf{X})\mathbf{Y} \leq \mathbf{A}\mathbf{Y} = \lambda_A(\mathbf{Y})\mathbf{Y}.$$

Si multiplicamos ahora por el vector

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in R^m.$$

$$\Rightarrow \lambda_A(\mathbf{X})\mathbf{Y} \cdot \mathbf{J} \leq \lambda_A(\mathbf{Y})\mathbf{Y} \cdot \mathbf{J}$$

y dividiendo entre $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{J} > 0$.

$$\Rightarrow \lambda_A(\mathbf{X}) \leq \lambda_A(\mathbf{Y}).$$

En lugar de considerar la maximización de $\lambda_A(X)$ sobre el conjunto $S^{(m-1)}$, es suficiente considerar la maximización de $\lambda_A(\mathbf{X})$ sobre el conjunto $\overline{S}$. A la vez, como $\mathbf{Y} \in \overline{S}$, entonces $\mathbf{Y} > \mathbf{O}$ y $\lambda_A(\mathbf{Y})$ es continua sobre $\overline{S}$, alcanza su valor máximo sobre el conjunto $\overline{S}$.

Sea ahora $\widehat{\mathbf{X}} > \mathbf{O}$, $\widehat{\mathbf{X}} \in \overline{S}$.

Definimos el **valor máximo de la función C-W** como la raíz de P-F y, al vector asociado, le llamaremos el vector de P-F. Con esta parte, demostramos el primer inciso del teorema de P-F, que afirma que :

(i) Si $\mathbf{A}$ es una matriz no-negativa irreducible, entonces existe un valor propio $\hat{\lambda} > 0$ el cual, a su vez, tiene asociado un vector propio, $\hat{\mathbf{X}} > \mathbf{O}$.

La matriz $\mathbf{A}$ tiene un valor propio $\hat{\lambda} > 0$.
Sea

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in R^m.$$

Tullio Levi-Civita (1873-1941)

Evaluando la función C-W en $\mathbf{J}$, tenemos:

$$\lambda_A(\mathbf{J}) = \min \sum_{j=1}^{m} a_{ij},$$

como $\mathbf{A}$ no tiene renglones ni columnas de ceros, ya que es irreducible.

$$\Rightarrow \lambda_A(\mathbf{J}) > \mathbf{O}.$$

Y como

$$\Rightarrow \hat{\lambda} \geq \lambda_A(\mathbf{J}) > \mathbf{O}$$

$$\hat{\lambda} > 0.$$

Si $\hat{\mathbf{X}}$ es el vector propio asociado con $\hat{\lambda} > 0$, entonces $\hat{\mathbf{X}} > \mathbf{O}$. Al vector $\hat{\mathbf{X}}$ lo llamaremos el vector de P-F, asociado con $\hat{\lambda}$.

Veamos otra forma de demostrar que λ_A está acotada.

Demostración

Sea la función

$$\lambda_A(\mathbf{X}) \geq 0, \forall\, \mathbf{X} > O$$

entonces λ_A está acotada, por abajo, por el cero.

Tenemos que demostrar ahora que λ_A está acotada, por arriba, por alguna suma mayor de elementos de columna de la matriz $\mathbf{A}$.

Sea

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in R^m \Rightarrow \lambda_A(\mathbf{J}) = \min \frac{(\mathbf{AJ})_i}{J_i}, \; J_i = 1$$

$$\Rightarrow \min(\mathbf{AJ})_i = \min \left\{ \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \right\}, \forall i \in \overline{m}$$

$$= \min \left\{ \sum_{j=1}^{m} a_{1j}, \sum_{j=1}^{m} a_{2j}, \ldots, \sum_{j=1}^{m} a_{mj} \right\};$$

por otro lado, tenemos que

$$\mathbf{AX} - \lambda_A(\mathbf{X})\mathbf{X} \geq \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{JAX} - \lambda_A(\mathbf{X})\mathbf{J}\cdot\mathbf{X} \geq \mathbf{O}$$

y como $\mathbf{J}\cdot\mathbf{X} > 0$, dividimos por este mismo número

$$\Rightarrow \frac{\mathbf{JAX}}{\mathbf{J}\cdot\mathbf{X}} - \hat{\lambda}_A(X)\frac{\mathbf{J}\cdot\mathbf{X}}{\mathbf{J}\cdot\mathbf{X}} \geq 0 \Rightarrow \frac{\mathbf{JAX}}{\mathbf{J}\cdot\mathbf{X}} - \hat{\lambda}_A(\mathbf{X}) \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathbf{JAX}}{\mathbf{J}\cdot\mathbf{X}} \geq \hat{\lambda}_A(\mathbf{X}),\ \forall\, \mathbf{X} \geq \mathbf{O}.$$

Ahora, sea

$$K = \max_j \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \right\}. \tag{3.9}$$

$$\Rightarrow \mathbf{JA} = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{1j}, \sum_{i=1}^{m} a_{2j}, \ldots, \sum_{j=1}^{m} a_{mj} \right) \leq (K, K, \ldots, K) = K(1, \ldots, 1) = K\mathbf{J}$$

$$\Rightarrow \mathbf{JA} \leq K\mathbf{J}$$

$$\Rightarrow \lambda_A(\mathbf{X}) \leq \frac{(\mathbf{JA})\cdot\mathbf{X}}{\mathbf{J}\cdot\mathbf{X}} \leq \frac{(K\mathbf{J})\cdot\mathbf{X}}{\mathbf{J}\cdot\mathbf{X}} = \frac{K(\mathbf{J}\cdot\mathbf{X})}{\mathbf{J}\cdot\mathbf{X}}$$

$$\Rightarrow \lambda_A(\mathbf{X}) \leq K,\ \forall\, \mathbf{X} > \mathbf{O}.$$

Por tanto, $\lambda_A(\mathbf{X})$ está acotada superiormente.

¿Qué sucedería ahora si, por ejemplo, $\mathbf{X}$ fuera un vector semipositivo?

Si

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A},\ \text{y}\ \mathbf{X}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \frac{1}{1+\varepsilon}, \forall \varepsilon > 0.$$

$$\Rightarrow \mathbf{AX}(\varepsilon) = \frac{1}{1+\varepsilon} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \frac{1}{1+\varepsilon}(2+\varepsilon, 2+\varepsilon, \varepsilon)$$

$$= \left(\frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon}, \frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right),$$

$$\lambda_A(\mathbf{X}(\varepsilon)) = \min \left\{ \frac{(\mathbf{AX}(\varepsilon))_i}{\mathbf{X}(\varepsilon)_i} \right\} = \min \left\{ \frac{\left(\frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon}, \frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)_i}{\frac{1}{1+\varepsilon}(1, 0, \varepsilon)_i} \right\}$$

Pero como es homogénea de grado cero, entonces

$$\lambda_A(\mathbf{X}(\varepsilon)) = \min \left\{ \frac{\frac{1}{1+\varepsilon}(2+\varepsilon, 2+\varepsilon, \varepsilon)_i}{\frac{1}{1+\varepsilon}(1, 0, \varepsilon)_i} \right\} = \min \left\{ \frac{(2+\varepsilon, 2+\varepsilon, \varepsilon)_i}{(1, 0, \varepsilon)_i} \right\}$$

$$\lambda_A(\mathbf{X}(\varepsilon)) = \min\left\{\frac{2+\varepsilon}{1}, \frac{\varepsilon}{\varepsilon}\right\} = 1$$

Pero,

$$\lambda_A(\mathbf{X}(0)) = 2 \neq 1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_A(\mathbf{X}(\varepsilon))$$

Richard Dedekind (1831-1916)
Courtesy of Springer-Verlag Archives

Ejemplo:
Para la matriz no-negativa

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

y para los vectores no-negativos

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_6 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Heinrich Weber (1842-1913)
Courtesy of Springer-Verlag Archives

evalúese $\mathbf{AX} = \mathbf{W}$, para cada $\mathbf{X} \in \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_6\}$. Y luego para la función

$$\lambda(\mathbf{X}) = \min_i \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j}{X_i} \right\}, \; i \in \overline{m}. \tag{3.10}$$

Evalúese también como lo indica la expresión:

$$\mathbf{Z} = \lambda(\mathbf{X})\mathbf{X}.$$

Solución
Hacemos el primer producto

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (2 + 4 + 1, 1 + +6 + 1, 1 + 4 + 2)' = (7, 8, 7)'$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ 1+3 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Hacemos el priducto tomando el segundo vector:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ahora hacemos el producto de la matriz **A** con el tercer vector de la lista:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{4}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{6}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{4}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{\sqrt{6}} \\ \frac{8}{\sqrt{6}} \\ \frac{7}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Ahora, hacemos multiplicamos el cuarto vector:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

El producto de **A** con el último de los vectores de la lista es:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{3}} \\ \frac{5}{\sqrt{3}} \\ \frac{5}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Ahora queremos evaluar la función $\lambda(\mathbf{X})$ en cada uno de los vectores

$$\lambda(\mathbf{X}_1) = \lambda(1,2,1) = \min\left\{7, \frac{8}{2}, 7\right\} = \min\{7,4,7\} = 4$$

$$\lambda(\mathbf{X}_2) = \lambda(4,4,3) = \min\{4,4,0\} = 0$$

$$\lambda(\mathbf{X}_3) = \lambda(1,1,1) = \min\{5,5,5\} = 5$$

$$\lambda(\mathbf{X}_4) = \lambda\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \min\left\{\frac{\frac{7}{\sqrt{6}}}{\frac{1}{\sqrt{6}}}, \frac{\frac{8}{\sqrt{6}}}{\frac{2}{\sqrt{6}}}, \frac{\frac{7}{\sqrt{6}}}{\frac{1}{\sqrt{6}}}\right\} = \min\{7,4,7\} = 4$$

$$\lambda(\mathbf{X}_5) = \lambda\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \min\left\{\frac{\frac{4}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \frac{\frac{4}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right\} = 4$$

$$\lambda(\mathbf{X}_6) = \lambda\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \min\left\{\frac{\frac{5}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}, \frac{\frac{5}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}, \frac{\frac{5}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right\} = 5$$

Finalmente, hacemos los productos $\lambda(\mathbf{X})\mathbf{X}$ para cada uno de los vectores dados.

$$Z_1(X_0) = \lambda(X_1)(1,2,1)' = 4(1,2,1)' = (4,8,4)'$$

$$Z_2 = \lambda(X_2)(4,4,3)' = 4(4,4,3)' = (16,16,12)'$$

$$Z_3 = 5(1,1,1)' = (5,5,5)'$$

$$Z_6 = 5\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}}\right).$$

para

$$\mathbf{X} = (1,2,1)' \Rightarrow \mathbf{W} = \mathbf{AX} = (1,8,4)' \text{ y } \lambda(1,2,1)' = 4 = c$$

y

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \geq 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Continuemos ahora con la demostración del **teorema de Perron-Frobenius**,
(ii) $\hat{\mathbf{X}}$ es único, excepto por un múltiplo escalar.
Supongamos que $\hat{\mathbf{Y}} > \mathbf{O}$ es otro vector propio, asociado con $\hat{\lambda}$
Sea

$$\theta = \min \frac{\hat{Y}_i}{\hat{X}_i}, \text{ y sea } \mathbf{Y} = \hat{\mathbf{Y}} - \theta\hat{\mathbf{X}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{AY} = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{Y}} - \theta\hat{\mathbf{X}}) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{Y}} - \theta\mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}.$$

Por definición de θ, $\mathbf{Y}$ no es mayor que cero. Supongamos ahora que $\mathbf{Y} \neq \mathbf{O}$.

$$\Rightarrow \mathbf{AY} = \hat{\lambda}\mathbf{Y}.$$

$\mathbf{Y}$ es también un vector propio de $\mathbf{A}$, asociado con $\hat{\lambda}$.

Como se cumplen las hipótesis de (ii), sabemos que $(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1}$ es una matriz estrictamente positiva, tenemos que el producto

$$\hat{\mathbf{Z}} = (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1}\mathbf{Y} > \mathbf{O}$$

nos da un vector estrictamente positivo. Pero los valores propios de $(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1}$ tienen la forma $(1 + \hat{\lambda})^{m-1}$ entonces al multiplicar por el vector $\mathbf{Y}$

$$\hat{\mathbf{Z}} = (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1}\mathbf{Y} = (1 + \hat{\lambda})^{m-1}\mathbf{Y} > \mathbf{O}$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{Z}} = (1 + \hat{\lambda})^{m-1}\mathbf{Y} > \mathbf{O} \Rightarrow \hat{\mathbf{Z}} > \mathbf{O}.$$

¡Pero esto es un absurdo! Entonces $\mathbf{Y} > \mathbf{O}$; por tanto, $\mathbf{Y} = \mathbf{O}$ o $\hat{\mathbf{Y}} = \theta\hat{\mathbf{X}}$.

(iii)

$$\mathbf{AX} = \mu\mathbf{X}, \mathbf{X} \geq \mathbf{O};$$

entonces

$$\mu = \hat{\lambda}.$$

$\mathbf{A}$ es irreducible, si, y sólo si $\mathbf{A}'$ es irreducible.

Sea $\hat{\lambda}$ la raíz de P-F, de $\mathbf{A}$; y $\hat{\beta}$ la raíz de P-F de $\mathbf{A}'$.
Queremos demostrar que:

$$\hat{\lambda} = \hat{\beta}.$$

Entonces, existe un $\mathbf{Y} > \mathbf{O}$ tal que $\mathbf{A}'\mathbf{Y} = \hat{\beta}\mathbf{Y}$. Supongamos ahora que

$$\mathbf{AX} = \hat{\lambda}\mathbf{X}, \mathbf{X} \geq \mathbf{O}.$$

Consideremos el producto escalar de la expresión anterior con el vector $\mathbf{Y}$

$$\hat{\lambda}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}) = (\hat{\lambda}\mathbf{X})\cdot\mathbf{Y} = (\mathbf{AX})\cdot\mathbf{Y} = \mathbf{X}\cdot(\mathbf{A}'\mathbf{Y})$$

$$= \mathbf{X}\cdot(\hat{\beta}\mathbf{Y}) = \hat{\beta}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}) \Rightarrow \hat{\lambda}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}) = \hat{\beta}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y})$$

simplificando, tenemos

$$\Rightarrow \hat{\lambda}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}) - \hat{\beta}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}) = 0$$

$$(\hat{\lambda} - \hat{\beta})(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}) = 0.$$

Pero $\mathbf{X} \geq \mathbf{O}$ (vector semipositivo) y $\mathbf{Y} > \mathbf{O}$.

$$\Rightarrow (\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}) > O$$

$$(\hat{\lambda} - \hat{\beta}) = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \hat{\beta}$$

(iv) $|\lambda| = \hat{\lambda}$. Sea λ un valor propio de $\mathbf{A}$ tal, que

$$\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}, \text{ para algún } \mathbf{X} \neq \mathbf{O}.$$

Si definimos

$$\mathbf{X}^+ = \begin{pmatrix} |X_1| \\ |X_2| \\ \vdots \\ |X_m| \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

aplicando la desigualdad del triángulo.

$$\Rightarrow \mathbf{AX}^+ \geq |\lambda|\mathbf{X}^+$$

pero los valores propios de $\mathbf{AX}^+$ son de la forma $\hat{\lambda}\mathbf{X}^+$, entonces

$$\hat{\lambda}\mathbf{X}^+ = \mathbf{AX}^+ \geq |\lambda|\mathbf{X}^+$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda}\mathbf{X}^+ \geq |\lambda|\mathbf{X}^+$$

si ahora, tomamos el vector J que está formado por puros unos, y hacemos el producto escalar

$$\Rightarrow \hat{\lambda}\mathbf{J}\cdot\mathbf{X}^{+} \geq |\lambda|\mathbf{J}\cdot\mathbf{X}^{+}$$

y como $\mathbf{J}\cdot\mathbf{X}^{+} > 0$, dividimos entre el mismo número

$$\Rightarrow \hat{\lambda} \geq |\lambda|;$$

(v) La raíz de Perron Frobenius es una raíz simple:

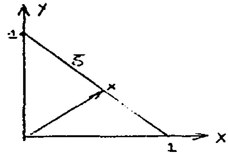
$$\overline{S} = \left\{ X \in R_{+}^{m} : \sum_{i=1}^{m} X_i = 1 \right\}$$

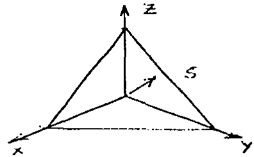
es el m - 1 **simplejo unitario**. Ahora definimos

$$T : \overline{S} \longrightarrow \overline{S}$$

$$T(\mathbf{X}) = \frac{1}{\hat{\lambda}}\mathbf{AX}, \text{ donde } \hat{\lambda} > 0$$

geométricamente.





$$\Rightarrow T(\mathbf{X}) \in \overline{S}.$$

$T(\mathbf{X})$ es continua sobre $\overline{S}$, pero $\overline{S}$ es un conjunto compacto y convexo en $\mathbf{R}^m$.

Por el teorema de punto fijo de Brouwer,

$$\exists \hat{X} \in \overline{S} \text{ tal, que } \hat{X} = T(\hat{X}) = \frac{1}{\hat{\lambda}}AX$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda} \text{ es una raíz simple.}$$

Con esto, hemos demostrado el:
Teorema de Perron-Frobenius (1917) 3.6

Si $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ $m\times m$ irreducible, entonces:

(i)La matriz $\mathbf{A}$ tiene un valor propio $\hat{\lambda} > 0$, el cual tiene asociada un vector propio $\hat{\mathbf{X}} > \mathbf{O}$;

(ii)

$$\mathbf{AX} = \mu\mathbf{X}, \mathbf{X} \geq \mathbf{O};$$

entonces $\mu = \hat{\lambda}$.

(iii) $|\lambda| = \hat{\lambda}$. Sea λ un valor propio de $\mathbf{A}$ tal, que

$$\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}, \text{ para algún } \mathbf{X} \neq \mathbf{O};$$

(iv) La raíz de Perron-Frobenius es una raíz simple de la ecuación característica.

Los incisos que faltan se demostrarán más adelante.

Teorema 3.7

Si $\mathbf{A}_1 \geq \mathbf{A}_2 \geq \mathbf{O}$

$$\Rightarrow \hat{\lambda}(\mathbf{A}_1) > \hat{\lambda}(\mathbf{A}_2). \tag{3.12}$$

con $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ irreducibles.

Demostración

Sea

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2).$$

$$\Rightarrow \mathbf{C} \text{ es también irreducible.}$$

Consideremos $\hat{\lambda}(\mathbf{C})$. Sea $\hat{\mathbf{Z}} > \mathbf{O}$ su vector propio;

$$\Rightarrow \hat{\lambda}(\mathbf{C})\hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{Z}} \leq \mathbf{A}_1\hat{\mathbf{Z}}.$$

ya que $\mathbf{C} \leq \mathbf{A}_1$.

Sea ahora $\mathbf{Y} > \mathbf{O}$ un vector propio asociado con $\hat{\lambda}(\mathbf{A}_1)$ y consideremos el producto punto:

$$\hat{\lambda}(\mathbf{C})(\mathbf{Y} \cdot \hat{\mathbf{Z}}) = \mathbf{Y}(\hat{\lambda}(\mathbf{C}) \cdot \hat{\mathbf{Z}}) = \mathbf{Y} \cdot (\mathbf{C}\hat{\mathbf{Z}}) < \mathbf{Y} \cdot (\mathbf{A}_1\hat{\mathbf{Z}})$$

$$= (\mathbf{A}_1'\mathbf{Y}) \cdot \hat{\mathbf{Z}} = (\hat{\lambda}(\mathbf{A}_1)\mathbf{Y}) \cdot \hat{\mathbf{Z}} = \hat{\lambda}(\mathbf{A}_1)(\mathbf{Y} \cdot \hat{\mathbf{Z}}).$$

$$\hat{\lambda}(\mathbf{C})(\mathbf{Y} \cdot \hat{\mathbf{Z}}) < \hat{\lambda}(\mathbf{A}_1)(\mathbf{Y} \cdot \hat{\mathbf{Z}}) \Rightarrow \hat{\lambda}(\mathbf{A}_1)(\mathbf{Y} \cdot \hat{\mathbf{Z}}) - \hat{\lambda}(\mathbf{C})(\mathbf{Y} \cdot \hat{\mathbf{Z}}) > 0.$$

Pero $\mathbf{Y} > \mathbf{O}$ y $\hat{\mathbf{Z}} > \mathbf{O}$

$$\Rightarrow (\mathbf{Y} \cdot \hat{\mathbf{Z}}) > 0$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda}(\mathbf{C}) - \hat{\lambda}(\mathbf{A}_1) > 0 \Rightarrow \hat{\lambda}(\mathbf{C}) > \hat{\lambda}(\mathbf{A}_1).$$

Análogamente, para A_2,

$$\Rightarrow \hat{\lambda}(A_1) > \hat{\lambda}(A_2).$$

La raíz de P-F se puede interpretar como una función creciente, cuyo dominio es el conjunto de las matrices no negativas irreducibles.

Ahora vamos a caracterizar a las matrices primitivas (acíclicas) y a las imprimitivas (cíclicas), con el fin de preparar la última parte de la demostración del teorema de P-F.

Pólya in the classroom urging students to "Guess and Test" when doing mathematics. Pólya, through his writing and teaching, has been a powerful influence on three generations of teachers of mathematics. In his ninety-seventh year, he remains active and just published his 250th paper.

Warren Weaver (1894–1978), left, and Richard Courant (1888–1972), with shovel in hand, at the Groundbreaking Ceremony for Warren Weaver Hall, Courant Institute for Mathematical Sciences, November 20, 1962
Courtesy of Springer-Verlag Archives

Capítulo 4 MATRICES NO-NEGATIVAS DOMINANTES

En este capítulo vamos a estudiar el teorema de Perron-Frobenius con el enfoque que le da Gantmacher, es decir, a través de las matrices no negativas dominantes. También se aplica la función Collatz-Wielandt. Se define lo que es la imprimitividad de una matriz con un enfoque distinto del que se presenta a través de la teoría de gráficas, para llegar a la **forma normal de Perron-Frobenius.**[1]

Definición 4.1

Sea $\mathbf{C} \in M_m(C)$ una matriz compleja mxm y $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ mxm,

$$\mathbf{C}^+ = (|c_{ij}|) \tag{4.1}$$

tal, que

$$\mathbf{C}^+ \leq \mathbf{A}.$$

Entonces decimos que **A domina a C.**

Lema (Wielandt) 4.1

Si

$$\mathbf{C} \in M_m(C)$$

es dominada por una matriz irreducible $\mathbf{A}$, con raíz de P-F $\hat{\lambda}$, entonces, para cada valor propio de $\mathbf{C}$,

$$|\zeta| \leq \hat{\lambda}$$

se cumple la igualdad si, y sólo si

$$\mathbf{C} = e^{i\varphi}\mathbf{DAD}^{-1}, \tag{4.2}$$

donde

$$\zeta = \hat{\lambda}e^{i\varphi} \text{ con } \mathbf{D}^+ = \mathbf{I}.$$

$\mathbf{I}$ es la matriz identidad de orden m.

Demostración

[1] Es decir, una matriz como la que aparece en la ecuación (4.8) de este capítulo.

Sea

$$\mathbf{C}\mathbf{Y} = \zeta\mathbf{Y}.$$

donde $\mathbf{Y} \neq \mathbf{O}$

Queremos demostrar

$$\mathbf{C}^{+}\mathbf{Y}^{+} \geq |\zeta|\,\mathbf{Y}^{+}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m} c_{ij} Y_j = \zeta Y_j$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{j=1}^{m} c_{ij} Y\right| = |\zeta Y_j|$$

$$\Rightarrow |\zeta|\,|Y_j| = |c_{1j}Y_j + c_{2j}Y_j + \cdots + c_{mj}Y_j|.$$

por la desigualdad del triángulo

$$|c_{1j}Y_j + c_{2j}Y_j + \cdots + c_{mj}Y_j| \leq |c_{1j}|\,|Y_j| + \cdots + |c_{mj}|\,|Y_j|$$

$$\Rightarrow \zeta\mathbf{Y}^{+} \leq \mathbf{C}^{+}\mathbf{Y}^{+}.$$

Pero $\mathbf{A} \geq \mathbf{C}^{+}$ y, por tanto,

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}^{+} \geq \mathbf{C}\mathbf{Y}^{+} \geq |\zeta|\,\mathbf{Y}^{+}.$$

por el inciso (ii) del teorema de P-F

$$\Rightarrow |\zeta| \leq \lambda_A(\mathbf{Y}^{+}).$$

donde $\lambda_A(\mathbf{Y}^{+})$ es la función Collatz-Wielandt asociada con $\mathbf{A}$ y, por tanto,

$$|\zeta| \leq \lambda_A(\mathbf{Y}^{+}) \leq \widehat{\lambda}; \tag{4.3}$$

$\Rightarrow$) supongamos que

$$\zeta = \widehat{\lambda}e^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow |\zeta| = \left|\widehat{\lambda}e^{i\varphi}\right| = \widehat{\lambda};$$

entonces

$$|\zeta| \leq \lambda_A(\mathbf{Y}^{+}) \leq \widehat{\lambda}$$

implica que

$$\lambda_A(\mathbf{Y}^{+}) = \widehat{\lambda}$$

De aquí resulta que $\mathbf{Y}^{+}$ es un vector de P-F y por

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}^{+} \geq \mathbf{C}\mathbf{Y}^{+} \geq |\zeta|\,\mathbf{Y}^{+}$$

$$AY^+ = CY^+ = \hat{\lambda}Y^+$$

$$\Rightarrow (A - C^+)Y^+ = O$$

donde $\mathbf{Y}^+$ es el vector de P-F

$$\Rightarrow Y^+ > O$$

$$\Rightarrow (A - C^+) = O \Rightarrow A = C^+.$$

Definimos ahora

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{Y_1}{|Y_1|} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{Y_2}{|Y_2|} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{Y_m}{|Y_m|} \end{pmatrix} = diag(\frac{Y_1}{|Y_1|}, \ldots, \frac{Y_m}{|Y_m|}) \qquad (4.4)$$

y

$$\mathbf{G} = (g_{ij}) = e^{-i\varphi}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{D}$$

Al ser $\mathbf{CY} = \zeta\mathbf{Y}$ obtenemos

$$\mathbf{CDY}^+ = \zeta\mathbf{DY}^+ = \hat{\lambda}e^{i\varphi}\mathbf{CY}^+$$

$$\Rightarrow \mathbf{GY}^+ = \hat{\lambda}\mathbf{Y}^+;$$

y como

$$\mathbf{AY}^+ = \mathbf{CY}^+ = \hat{\lambda}\mathbf{Y}^+$$

$$\Rightarrow \mathbf{GY}^+ = \mathbf{AY}^+. \qquad (4.5)$$

Ahora, por definición de $\mathbf{G}$,

$$\mathbf{G}^+ = \left|e^{-i\varphi}\right|(\mathbf{D}^{-1})^+\mathbf{C}^+\mathbf{D}^+ = \mathbf{C}^+$$

y por $\mathbf{A} = \mathbf{C}^+$,

$$\Rightarrow \mathbf{G}^+ = \mathbf{A}.$$

De $\mathbf{GY}^+ = \mathbf{AY}^+$ tenemos que

$$\mathbf{G}^+\mathbf{Y}^+ = \mathbf{GY}^+ \text{ o } \mathbf{G}^+ - \mathbf{G} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \mathbf{G} = \mathbf{G}^+ = \mathbf{A}$$

y de la definición de $\mathbf{G}$, obtenemos

$$\mathbf{C} = e^{i\varphi}\mathbf{DAD}^{-1}. \qquad (4.6)$$

Definición 4.2

Sea $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ mxm irreducible, con raíz de P-F $\hat{\lambda}$, y supongamos que tiene exactamente h valores propios, de valor absoluto iguales a $\hat{\lambda}$. Al número h lo llamamos **índice de imprimitividad de A**; o sencillamente, **índice de A**.

Si $h = 1$, decimos que la matriz es primitiva; en caso contrario, decimos que es **imprimitiva (o cíclica)**.

(vi)(Wielandt)

Sea $\mathbf{A} \geq O$ mxm irreducible, con raíz de P-F $\hat{\lambda}$ e índice h. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ valores característicos de $\mathbf{A}$ tales, que

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \cdots = |\lambda_h| = \hat{\lambda}.$$

Entonces,

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$$

son las distintas raíces de la ecuación

$$\lambda^h - \hat{\lambda} = 0.$$

Demostración

Sea $\lambda_t = \hat{\lambda} e^{i\varphi_t}$ con $t \in \overline{h}$. Como $|\lambda_t| = \hat{\lambda}$, se cumple la igualdad del lema anterior, mientras que $\mathbf{C} = \mathbf{A}$ y $\zeta = \lambda_t$ implica que

$$\mathbf{A} = e^{i\varphi_t}\mathbf{D}_t\mathbf{A}\mathbf{D}_t^{-1},\ t \in \overline{h}.$$

De aquí que $\mathbf{A}$ y la matriz $e^{i\varphi}\mathbf{A}$ son similares. Como $\hat{\lambda}$ es una raíz simple de la ecuación característica de $\mathbf{A}$, se sigue que, para toda t ,

$$\hat{\lambda} e^{i\varphi_t} = \lambda_t$$

es una raíz simple de la matriz $e^{i\varphi}\mathbf{A}$, y, por tanto, una raíz simple de $\mathbf{A}$.

Ahora, como $\mathbf{A} = e^{i\varphi_t}\mathbf{D}_t\mathbf{A}\mathbf{D}_t^{-1}$

$$\Rightarrow A = e^{i\varphi_t}\mathbf{D}_t(e^{i\varphi_s}\mathbf{D}_s\mathbf{A}\mathbf{D}_s^{-1})\mathbf{D}_t^{-1} =$$

$$A = e^{i(\varphi_t+\varphi_s)}(\mathbf{D}_t\mathbf{D}_s)A(\mathbf{D}_t\mathbf{D}_s)^{-1}.$$

Por consiguiente, $\mathbf{A}$ y $e^{i(\varphi_t+\varphi_s)}\mathbf{A}$ son similares para toda s y para toda t.

Podemos concluir que $\hat{\lambda}e^{i(\varphi_t+\varphi_s)}$ es un valor propio de $\mathbf{A}$ y, por tanto, $e^{i(\varphi_t+\varphi_s)}$ es un valor propio de $\mathbf{A}$. Entonces, $e^{i(\varphi_t+\varphi_s)}$ debe ser uno de los números $e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \ldots, e^{i\varphi_h}$. De aquí que los h números distintos $e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \ldots, e^{i\varphi_m}$ formen un grupo bajo el producto, y, por tanto, son las *h-ésimas* raíces de la unidad.

(vii) todo el espectro de la matriz $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ mxm irreducible, de índice $h > 1$, es invariante bajo una rotación alrededor de $\frac{2\pi}{h}$, pero no alrededor de un ángulo positivo menor que $\frac{2\pi}{h}$.

Demostración

Sea

$$\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\} \tag{4.7}$$

el espectro de la matriz **A**. Entonces, el espectro de $e^{i\frac{2\pi}{h}}\mathbf{A}$ es

$$\Upsilon = \left\{\lambda_1 e^{i\frac{2\pi}{h}}, \lambda_2 e^{i\frac{2\pi}{h}}, \dots, \lambda_m e^{i\frac{2\pi}{h}}\right\}; \tag{4.8}$$

es decir, el espectro Λ, rotado un ángulo $\frac{2\pi}{h}$. Ya demostramos, en el teorema anterior, que las matrices **A** y $e^{i\frac{2\pi}{h}}\mathbf{A}$ son similares y, por tanto, Υ es también el espectro de Λ. Ahora bien, por el lema anterior, cualquier rotación por un ángulo $< \frac{2\pi}{h}$ no deja el espectro fijo, ya que el conjunto de valores propios de **A**, con valor absoluto $\widehat{\lambda}$, no se preserva.

Corolario 4.1

Sea $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ irreducible, con índice $h > 1$, y sea el polinomio característico asociado con

$$\lambda^m + a_1\lambda^{n_1} + a_2\lambda^{n_2} + \cdots + a_k\lambda^{n_k},$$

en donde

$$m > n_1 > n_2 > \cdots > n_k$$

y $a_k \neq 0, t \in \overline{k}$. Entonces tendremos:

$$h = mcd(m - n_1, n_1 - n_2, \dots, n_{k-1} - n_k). \tag{4.9}$$

Demostración

Supongamos que $r \geq 2$ sea un entero tal, que **A** y $m - n_1, n_1 - n_2, \dots, n_{k-1} - n_k$ tengan el mismo espectro. Entonces, sus polinomios característicos son iguales a

$$\lambda^m + a_1\lambda^{n_1} + a_2\lambda^{n_2} + \cdots + a_k\lambda^{n_k} =$$
$$= \lambda^m + a_1\theta^{m-n_1}\lambda^{n_1} + a_2\theta^{m-n_2}\lambda^{n_2} + \cdots + a_k\theta^{m-n_k}\lambda^{n_k}.$$

donde

$$\theta = e^{i\frac{2\pi}{r}} \Rightarrow a_t = a_t\theta^{m-n_t}$$

para toda $t \in \overline{k}$ y, por tanto, r divide a cada uno de los números

$$m - n_1, m - n_2, \dots, m - n_k.$$

Ahora bien, por el inciso (vii) las matrices **A** y $e^{i\frac{2\pi}{r}}\mathbf{A}$ tienen el mismo espectro para $r = h$, pero no para $r > h$. Esto, junto con el argumento anterior, implica que

$$h = mcd(m - n_1, m - n_2, \dots, m - n_k) = 1$$

y el resultado se cumple.

(viii)

Sea $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ mxm irreducible, con índice de imprimitividad $h > 1$. Entonces, $\mathbf{A}$ es cogrediente con una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} O & \mathbf{A}_{12} & O & \cdots & O \\ O & O & \mathbf{A}_{23} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & \mathbf{A}_{h-1h} \\ \mathbf{A}_{h1} & O & O & \cdots & O \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

donde existen bloques cuadrados de ceros en la diagonal principal.

Demostración (Wielandt).

Sea $\hat{\lambda}$ la raíz de P-F de $\mathbf{A}$. Entonces, por el lema anterior,

$$\hat{\lambda}_t e^{i\frac{2\pi t}{h}} = \lambda_t, \; t = 0, 1, \ldots, h-1$$

son todos los valores propios de $\mathbf{A}$ que tienen valor absoluto igual a $\hat{\lambda}$:

$$\mathbf{A} = e^{i\frac{2\pi t}{h}}\mathbf{D}_t\mathbf{A}\mathbf{D}_t^{-1}, \; t = 0, 1, \ldots, h-1,$$

donde $\mathbf{D}_t^{+} = \mathbf{I}$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que la entrada (1,1) de cada $\mathbf{D}_t$ es 1. Sea ahora $\hat{\mathbf{Z}}$ el vector propio positivo de $\mathbf{A}$, asociado con $\hat{\lambda}$.

Definimos

$$\hat{\mathbf{Z}}^t = \mathbf{D}_t\hat{\mathbf{Z}}, \; t \in \overline{h-1}. \tag{4.11}$$

$$\hat{\mathbf{Z}}^t = \mathbf{D}_t\hat{\mathbf{Z}}, \; t = 0, 1, \ldots, h-1.$$

Por las dos últimas fórmulas, tenemos

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{Z}}^t = e^{i\frac{2\pi t}{h}}\mathbf{D}_t\mathbf{A}\mathbf{D}_t^{-1}\hat{\mathbf{Z}} = e^{i\frac{2\pi t}{h}}\mathbf{D}_t\mathbf{A}\mathbf{D}_t^{-1}(\mathbf{D}_t\hat{\mathbf{Z}})$$

$$= e^{i\frac{2\pi t}{h}}\mathbf{D}_t\mathbf{A}(\mathbf{D}_t^{-1}\mathbf{D}_t)\hat{\mathbf{Z}} = e^{i\frac{2\pi t}{h}}\mathbf{D}_t\mathbf{A}\hat{\mathbf{Z}}$$

$$= e^{i\frac{2\pi t}{h}}\mathbf{D}_t\hat{\lambda}\hat{\mathbf{Z}}$$

y como $\hat{\lambda}e^{i\frac{2\pi t}{h}} = \lambda_t \Rightarrow \lambda_t e^{-i\frac{2\pi t}{h}} = \hat{\lambda}$,

$$= e^{i\frac{2\pi t}{h}}\mathbf{D}_t\lambda_t e^{-i\frac{2\pi t}{h}}\hat{\mathbf{Z}} = \lambda_t\mathbf{D}_t\hat{\mathbf{Z}} = \lambda_t\hat{\mathbf{Z}}^t.$$

Por tanto, $\hat{\mathbf{Z}}^t$ es un vector propio de $\mathbf{A}$, correspondiente a λ_t. Como el espacio propio de cada λ_t es de dimensión igual a 1, entonces $\hat{\mathbf{Z}}^t$ (y, por tanto, $\mathbf{D}_t$, $t =$ *0, 1,..., h-1*) está determinado por una constante. Pero la primera coordenada es 1 y, por tanto, $\mathbf{D}_l$ está unívocamente determinado. Ahora bien, aplicando $\mathbf{A} = e^{i\frac{2\pi l}{h}}\mathbf{D}_l\mathbf{A}\mathbf{D}_l^{-1}$ dos veces, tenemos:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A} = e^{i\frac{2\pi l}{h}}\mathbf{D}_l\mathbf{A}\mathbf{D}_l^{-1} = \mathbf{A} = e^{i\frac{2\pi}{h}}\mathbf{D}_l(e^{i\frac{2\pi l}{h}}\mathbf{D}_s\mathbf{A}\mathbf{D}_s^{-1})\mathbf{D}_l^{-1} =$$

$$e^{i\frac{2\pi(s+l)}{h}}(\mathbf{D}_l\mathbf{D}_s)\mathbf{A}(\mathbf{D}_s^{-1}\mathbf{D}_l^{-1}) = e^{i\frac{2\pi(s+l)}{h}}(\mathbf{D}_l\mathbf{D}_s)\mathbf{A}(\mathbf{D}_l\mathbf{D}_s)^{-1}.$$

Análogamente, siguiendo a

$$\hat{\mathbf{Z}}' = \mathbf{D}_l\hat{\mathbf{Z}} \Rightarrow \mathbf{D}_l\mathbf{D}_s\hat{\mathbf{Z}}$$

es un vector propio correspondiente a $\hat{\lambda}\, e^{i\frac{2\pi(s+l)}{h}}$. Por la unicidad de $\mathbf{D}_l$, entonces

$$\mathbf{D}_1^h = \mathbf{I}$$

son las entradas de las diagonal principal de $\mathbf{D}_1$, esto es, las *h-ésimas* raíces de la unidad.

Sea ahora $\mathbf{P}$ una matriz de permutación tal, que

$$\mathbf{P}_1'\mathbf{D}\mathbf{P} = \bigoplus_{t=1}^{s} e^{ik_t\frac{2\pi}{h}} I_{k_t}$$

$$e^{ik_1\frac{2\pi}{h}} I_{k_1} \oplus e^{ik_2\frac{2\pi}{h}} I_{k_2} \oplus \cdots \oplus e^{ik_s\frac{2\pi}{h}} I_{k_s}$$

donde

$$0 = k_1 < k_2 < \cdots < k_s \leq h-1$$

divide a $\mathbf{P}'\mathbf{A}\mathbf{P}$ en bloques, según la partición $\mathbf{P}_1'\mathbf{D}\mathbf{P}$.

Sea

$$\mathbf{P}'\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1s} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \mathbf{A}_{s2} & \cdots & \mathbf{A}_{ss} \end{pmatrix}$$

donde los bloques $\mathbf{A}_{pq}$ son de $m_p x m_q$, p,q $\in \overline{s}$.

Igualando los bloques *(p,q)* de ambos lados, tenemos

$$\mathbf{P}'\mathbf{A}\mathbf{P} = e^{i\frac{2\pi}{h}}(\mathbf{P}_1'\mathbf{D}\mathbf{P})(\mathbf{P}'\mathbf{A}\mathbf{P})(\mathbf{P}_1'\mathbf{D}\mathbf{P})$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}_{pq} = e^{i(1+m_p-m_q)\frac{2\pi}{h}}\mathbf{A}_{pq}, \forall(p,q);$$

o bien,

$$\mathbf{A}_{pq} = O;$$

o bien,

$$k_q - k_p \equiv 1(mod\ h). \tag{4.12}$$

La matriz $\mathbf{A}$ es irreducible y no existe un p tal, que $\mathbf{A}_{pq} = \mathbf{O}, \forall q$, así como no existe un q tal, que $\mathbf{A}_{pq} = \mathbf{O}$ para cada p.

Si $p = 1$, entonces la congruencia anterior es

$$k_q \equiv (mod\ h);$$

y como

$$0 = k_1 < k_2 < \cdots < k_s \leq h - 1,$$

la única solución de $k_q \equiv (mod\ h)$ es $k_2 = 1$. Entonces, $\mathbf{A}_{1q} = O$ para cada $p = 2$, y la condición

$$k_q - k_p \equiv 1(mod h)$$

se convierte en

$$k_q - k_2 \equiv 1(mod\ h) \Rightarrow k_q \equiv 2(mod\ h).$$

Como hicimos arriba, $k = 2$, y $\mathbf{A}_{2q} = \mathbf{O}$, para cada $q \neq 3$. Continuando de la misma manera, concluimos que $k_{p+1} = p$, $\mathbf{A}_{pq} = \mathbf{O}, \forall\ q \neq p+1$, $p \in \overline{s-1}$.

Consideremos ahora el caso cuando $p = s$. Como $\mathbf{A}_{pq} = \mathbf{O}$ y $k_q - k_p \equiv 1(mod\ h)$ establecen que, para cada q: o bien $\mathbf{A}_{sq} = \mathbf{O}$; o bien, $h_q - h_s \equiv 1(mod\ h)$. Como $\mathbf{A}_{s1} \neq O$ (no puede ser cero), ya que todas las demás $\mathbf{A}_{rq}$ son cero, de aquí resulta que

$$m_1 \equiv s(mod\ h). \qquad (4.13)$$

lo cual implica que $s = h$ y $m_q \neq s(mod\ h)$, para cada $q \neq 1$. Se sigue que $\mathbf{A}_{sq} = \mathbf{O}$ para toda $q \neq 1$.

Que es lo que se quería demostrar.

George Pólya

V. M. Tikhomirov, A. N. Kolmogorov, and S. Sadikova-Prokhorova

Capítulo 5 ALGUNAS NOCIONES DE LA TEORÍA DE GRÁFICAS

El capítulo que a continuación se expone, tiene la finalidad de mostrar teóricamente todas las formas de circulación de bienes y servicios en una economía que se comporta linealmente, poniendo énfasis en el concepto de imprimitividad. Esta teoría pude ser de gran ayuda al economista, en cuanto a intuir cómo circulan los bienes y servicios en el modelo.

El matemático húngaro **Dénes König (1884-1944)**[1] fue uno de los primeros en formular, en 1916, una parte de lo que hoy conocemos como el teorema P-F. Para ello desarrolló en la teoría de gráficas. Enseguida daremos algunas definiciones básicas acerca de esta teoría.

Definición 5.1

Sea

$$\overline{m} = \{1, 2, \ldots, m\}$$

un conjunto no vacío de elementos convenientemente etiquetados, a los que llamamos **vértices**;

y sea $\dot{A} \subsetneq \overline{m}x\overline{m}$, a cuyos elementos llamamos **aristas o arcos.**

Un elemento $(i, j) \in \dot{A}$, decimos que es una **arista** que une a i con el vértice j. Vamos a suponer que la industria i envía sus insumos a la industria j.

Al par $(\dot{A}, \overline{m})$ lo llamamos **gráfica dirigida** o **digráfica** y a una sucesión de vértices

$$(i, t_1), (t_1, t_2), \ldots, (t_{k-1}, j) \tag{5.1}$$

la llamamos una **trayectoria dirigida, que une a i con j.** También la podemos denotar como

$$i \longrightarrow j.$$

En economía, podemos interpretar una trayectoria dirigida como un movimiento según el cual la industria i envía sus insumos a la industria t_1; a su vez, la industria t_1 envía sus insumos a la industria t_2; y así sucesivamente, hasta que, finalmente, la industria t_{k-1} envía sus insumos a la industria j. Todo eso, dentro de un mismo período de tiempo (un año, por ejemplo).

La longitud de una trayectoria dirigida es el **número de aristas** que aparecen en ella;

Un **ciclo** es una trayectoria de longitud $r \geq 1$ tal, que une al vértice i con él mismo; y

[1] Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinatentheorie und Mengenlehre, *Mathematische Annalen*, 77 (1916).

Un **rizo** es un ciclo de longitud 1.

Definición 5.2

De una digráfica D decimos que es **fuertemente conexa** si, y sólo si,

$$\forall (i, j) \in \overline{m}x\overline{m}\ \exists \text{ una trayectoria } i \rightarrow j. \tag{5.2}$$

Ejemplo
Dada la matriz **A**

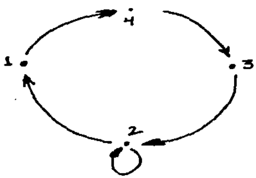
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

¿Podemos saber cuál es la estructura de **A**?

Primero asociamos su matriz de incidencia $\mathbf{I}_A$ que es

$$I_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, construimos su digráfica:
$D(\mathbf{I}_A)$:



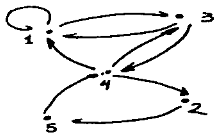
Dada una matriz **A** mxm no negativa, podemos asociarle su **matriz de incidencia $\mathbf{I}_A$**, la que definimos de la siguiente forma:

$$\mathbf{I}_A = (c_{ij}) = \begin{cases} 1 \text{ si } a_{ij} > 0; \\ 0 \text{ si } a_{ij} = 0 \end{cases} \tag{5.3}$$

La digráfica D(**A**), asociada a la matriz **A**, es aquella en la cual $i \rightarrow j$, si $a_{ij} \neq 0$; y además, donde no hay arista si $a_{ij} = 0$. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{I}_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, su digráfica es:



Teorema 5.1

$\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ $m \times m$. Sea I_A la matriz de incidencia asociada con **A** y D(**A**) la digráfica asociada con la matriz **A**. Entonces, el número de trayectorias distintas de longitud k, que conectan al vértice i con j, es igual a

$$I_{ij}^{(k)},$$

recordando que

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{t=1}^{m} \sum_{t_1}^{m} \cdots \sum_{t_{k-1}}^{m} a_{it_1} a_{t_1t_2} \cdots a_{t_{k-1}j}.$$

Demostración

$$I_{ij}^{(k)} = \sum_{t=1}^{m} \sum_{t_1}^{m} \cdots \sum_{t_{k-1}}^{m} I_{it_1} I_{t_1t_2} \cdots I_{t_{k-1}j},$$

en donde

$$t_1, t_2, \ldots, t_{k-1} \in \overline{m}.$$

Probaremos que

$$I_{it_1} I_{t_1t_2} \cdots I_{t_{k-1}j} = 1 \Leftrightarrow (i, t_1), (t_1, t_2), \ldots, (t_{k-1}, j) \in \hat{A}$$

si

$$I_{it_1} I_{t_1t_2} \cdots I_{t_{k-1}j} = 1 \Leftrightarrow I_{it_1} = I_{t_1t_2} = \cdots = I_{t_{k-1}j} = 1$$

$$\Leftrightarrow a_{it_1} > 0, a_{t_1t_2} > 0, \cdots, a_{t_{k-1}j} > 0 \Leftrightarrow (i, t_1), (t_1, t_2), \ldots, (t_{k-1}, j) \in \hat{A}.$$

Definición 5.3

Sea D(**A**) una digráfica, al **máximo común divisor de de las longitudes de todos los ciclos** lo llamamos **índice de imprimitividad de D(A).**

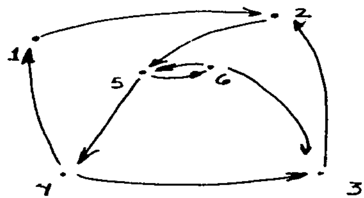
Ejemplo

¿Cuál es el índice de imprimitividad de **A**, donde

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

Primero. Construimos su digráfica

D(**A**):



Segundo. Comprobamos que para cada par de vértices existe una trayectoria dirigida que los conecta.

VÉRTICE	**TRAYECTORIA**
(1, 1)	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$
(1, 2)	$1 \rightarrow 2.$
(1, 3)	$1 \rightarrow 4 \rightarrow 3$
(1, 4)	$1 \rightarrow 4$
(1, 5)	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 5$
(1, 6)	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6$
(2, 1)	$2 \rightarrow 1$
(2, 2)	$2 \rightarrow 1 \rightarrow 2$
(2, 3)	$2 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 3$
(2, 4)	$2 \rightarrow 5 \rightarrow 4$
(2, 5)	$2 \rightarrow 5$

$(4,4)$	$4 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4$
$(4,5)$	$4 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$
$(4,6)$	$4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6$
$(5,1)$	$5 \rightarrow 4 \rightarrow 1$
$(5,2)$	$5 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 2$
$(5,3)$	$5 \rightarrow 6 \rightarrow 3$
$(5,4)$	$5 \rightarrow 4$
$(5,5)$	$5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5$
$(5,6)$	$5 \rightarrow 6$
$(6,1)$	$6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 1$
$(6,2)$	$6 \rightarrow 3 \rightarrow 2$
$(6,3)$	$6 \rightarrow 3$
$(6,4)$	$6 \rightarrow 5 \rightarrow 4$
$(6,5)$	$6 \rightarrow 5$
$(6,6)$	$6 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6$

También podemos encontrar otras trayectorias.
Por tanto la digráfica es fuertemente conexa.
Tercero. Observamos que existe un ciclo de longitud 2 a través del vértice 1.

CICLOS	LONGITUD
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$	2
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 1$	4
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$	6
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1$	4

Se pueden encontrar trayectorias diferentes para comprobar que la digráfica es fuertemente conexa.

El $\text{mcd}\{2,4,6\} = 2$. Concluimos que el índice de imprimitividad de la digráfica y por tanto el índice de imprimitividad de $D(\mathbf{A})$ es 2.

Si agregamos un arco dirigido, por ejemplo, el *(2,6)* a la digráfica anterior, tendríamos además, los ciclos siguientes:

CICLOS	LONGITUD
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$	5
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 1$	5

el $\text{mcd}\{2,4,5,6\} = 1$

Por tanto, el índice de imprimitividad de una gráfica así es 1.

¿Cómo sabemos que el índice de imprimitivada es único?

Definición 5.4

Sea

$$S = \{s_n\} \subseteq Z - \{0\} \tag{5.4}$$

una sucesión de números enteros positivos. Podemos construir de la manera siguiente:

$$m_1 = s_1$$

$$m_2 = (s_1, s_2) = mcd\{s_1, s_2\}$$

continuando de esta manera, tenemos que el término general es:

$$m_k = (s_1, s_2, \dots, s_k).$$

Lema 5.1

$$\lim_{k \to \infty} m_k = m$$

$$m_{k+1} = ((s_1, s_2, \dots, s_k), s_{k+1}) = (s_1, s_2, \dots, s_k, s_{k+1}).$$

Ahora bien, sabemos que

$$m_{m+1} | m_k \Rightarrow m_{k+1} \leq m_k$$

es una sucesión monótona decreciente, acotada inferiormente. Por tanto, converge:

$$m = mcd\{s_n\} = \lim_{k \to \infty} m_k.$$

Definimos

$$m = \lim_{k \to \infty} m_k. \tag{5.5}$$

Vamos a demostrar que m es un número entero.

Si $m \in Z$ está entre dos números enteros, tomamos la distancia al entero más próximo entre ellos. Sea d esta distancia. Tenemos entonces que si

$$\epsilon = d(m, z).$$

entonces existe un k tal, que $k > K$ y

$$m \leq m_k < z$$

estamos suponiendo que m_k está entre dos números enteros:

$$\Rightarrow m_k \notin Z$$

Pero esto es un absurdo, ya que m_k es un número entero, para cada $k \in Z$.

Lema 5.2

A partir de un cierto K, la sucesión m_k es constante.

Dada la sucesión

$$m = \lim_{k\to\infty} m_k,$$

a partir de un cierto K la sucesión es constante.

Demostración
Sea

$$m_k = (m_{k-1}, s_k)$$

el máximo común divisor de los primeros k términos, como lo definimos anteriormente. Entonces

$$\exists K \in N$$

tal, que

$$\begin{cases} (i)\ \lim_{K\to\infty} m_K = s \\ (ii) \exists K \text{ tal que } \forall k \geq K \Rightarrow m_k = s \end{cases}$$

Ahora vamos a demostrar que, si S' es un reordenamiento de los elementos de S, entonces

$$med\ S = med\ S'.$$

Definición 5.5

Sean S, S'$\subseteq Z - \{0\}$. Decimos que S' es un **reordenamiento** del conjunto S, si, y sólo si existe un función $\Theta : N \longrightarrow N$ biyectiva tal, que:

$$s'_{\Theta(k)} = s_{k'}. \tag{5.6}$$

Lema 5.3

Sea S como antes y S' un reordenamiento de S. Entonces, $med\ S = med\ S'$.

Demostración

Existe una función

$$\Theta : N \to N$$

biyectiva tal, que

$$S'_{\Theta(k)} = S_{k'}.$$

Por el lema anterior, sabemos que existe un K a partir del cual todos los demás términos son constantes; es decir, si

$$k \geq K \Rightarrow m_k = m.$$

Consideremos la imagen inversa de $\{1, 2, \ldots, K\}$, bajo Θ

$$\Theta^{-1}\{1, 2, \ldots, K\}.$$

Sabemos que Θ^{-1} es un conjunto finito, por ser Θ biyectiva. Sea $K' = \max \Theta^{-1}\{1, 2, \ldots, K\}$.
Entonces

$$(s'_1, \ldots, s'_{K}) = m' \; \forall k' \geq K'$$

$$\Rightarrow m_k = m$$

$\{1, 2, \ldots, K\} \supset \Theta^{-1}\{1, 2, \ldots, K\}$, y tiene la forma

$$\{1, 2, \ldots, K, \ldots, K'\}$$

$$\{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \subset \{s'_1, s'_2, \ldots, s'_{k'}, \ldots, s'_{k'}\}$$

de donde se desprende que

$$(s'_1, s'_2, \ldots, s'_{k'}, \ldots, s'_{k'}) = m'_k.$$

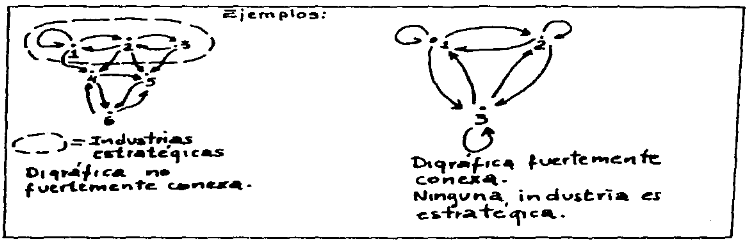
Como $m = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ entonces $m \geq m_{k'}$. Ahora tomamos la imagen directa de

$$\Theta\{1, 2, \ldots, K, \ldots, K'\}.$$

$$\Rightarrow \max \Theta\{1, 2, \ldots, K, \ldots, K'\} = L$$

$$\Rightarrow L \geq K \Rightarrow m_L \leq m_{K'}.$$

Como $L > K$, entonces $m_l = m$.



Por último un teorema que relaciona la imprimitividad de A con la de su digráfica.

El índice de imprimitividad de una matriz irreducible es igual al índice de imprimitividad de la digráfica asociada.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

$\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ mxm es imprimitiva o cíclica

(i) Si $\exists$ una partición $J_1, J_2, \ldots, J_s$ de $\overline{m}$;

(ii) Si $j \in \overline{J}_i$ $\sum_{i \in J_{\overline{k-1}}} a_{ij} > 0$;

donde $\overline{J}_i$ son las clases residuales módulo el índice de imprimitividad de la digráfica D.

$\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ mxm. $\mathbf{A}$ es imprimitiva si

$$D_A = \left\{ \lambda_i \mid \lambda_i \text{ es valor propio de } \mathbf{A} \text{ tal que } |\lambda_i| = \hat{\lambda} \right\}.$$

El número de elementos de $D_A = h > 1$.

Si $D_A = h = 1$ la matriz $\mathbf{A}$ es primitiva.

$$\mathbf{P}_\sigma \mathbf{A} \mathbf{P}_\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{A}_{23} & \cdots & \mathbf{O} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \ldots & \mathbf{O} & \mathbf{A}_{h-1h} \\ \mathbf{A}_{h1} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \ldots & \mathbf{O} \end{pmatrix}$$

donde los elementos de la diagonal principal son submatrices cuadradas de ceros. A esta matriz se le llama también **forma normal de Frobenius.**

La interpretación económica es que la economía se divide en $J_1, J_2, J, \ldots, J_s$ conjuntos de industrias que pertenecen al conjunto J_0 mandan sus productos a las industrias que pertenecen al conjunto J_1 exclusivamente, al mismo tiempo las del bloque J_1 envían sus productos al bloque J_2 ,y así sucesivamente hasta llegar a J_{s-1} quienes envían su producción al bloque J_0 donde se cierra el ciclo de circulación de las mercancías. Por tanto si tomamos como base el conjunto de industrias J_0, cuando se cierra el ciclo, los productos que enviaron llegan en forma indirecta. Si la matriz de insumo-producto no es cíclica, entonces no se cumple con esta forma de circulación.

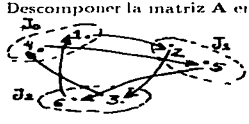
Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es su índice de imprimitividad? Descomponer la matriz $\mathbf{A}$ en bloques de industrias ajenas.

El índice de imprimitividad es 6.

D(A):



$J_0 = \{1,4\}$, $J_1 = \{2,6\}$ $J_2 = \{5,3\}$. $\Rightarrow J_0 \cup J_1 \cup J_2 = \overline{6}$
Ahora construimos una permutación de la siguiente forma.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \underbrace{1 \quad 4}_{J_0} & & \underbrace{2 \quad 6}_{J_1} & & \underbrace{5 \quad 3}_{J_2} \end{pmatrix}, \ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&5&0\\0&0&0&3&0&0\\0&4&0&0&0&0\\6&0&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1\\0&4&0&0&0&0\\0&0&0&0&5&0\\0&0&2&0&0&0\\6&0&0&0&0&0\\0&0&0&3&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0\\0&0&4&0&0&0\\0&0&0&0&5&0\\0&0&0&0&0&2\\6&0&0&0&0&0\\0&3&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_\sigma \mathbf{A} \mathbf{P}_{\sigma^{-1}}$$

Pero la descomposición no es única, tomando, por ejemplo

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&3&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&5&0\\0&0&0&3&0&0\\0&4&0&0&0&0\\6&0&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&3&0&0\\0&4&0&0&0&0\\0&0&0&0&5&0\\6&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&\boxed{1}&0&0&0&0\\0&0&\boxed{2}&0&1&0\\0&0&0&\boxed{3}&0&0\\0&.&0&0&\boxed{4}&0\\0&0&0&0&0&\boxed{5}\\6&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

MATRICES PRIMITIVAS O ACÍCLICAS

Las matrices primitivas o acíclicas expresan una característica económica que se puede presentar el modelo insumo-producto: que pueden existir ciclos en el intercambio de bienes y servicios.

Definición 5.6

Decimos que una matriz $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ $m \times m$ es **primitiva**, si, y sólo si existe un $k \in Z^+$ tal, que $\mathbf{A}^k > \mathbf{O}$.

Una matriz de incidencia $\mathbf{I}_A$, asociada con la matriz **A**, es aquella que vale

$$\begin{cases} 1 \ si \ a_{ij} > 0 \\ 0 \ si \ a_{ij} = 0. \end{cases} \tag{5.7}$$

Recordemos que ya hemos demostrado este resultado.

Teorema 5.2

Sea $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ mxm irreducible si, y sólo si, $(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{m-1} > \mathbf{O}$.

Lema 5.4

Si $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ mxm es irreducible y si todas las entradas de la diagonal principal de $\mathbf{A}$ son positivas, entonces $\mathbf{A}^{m-1} > \mathbf{O}$.

Demostración

Si

$$\alpha = \min \{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}\}$$

y si definimos

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} - \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{B} + \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

$$\Rightarrow \mathbf{B} \geq \mathbf{O}.$$

$\mathbf{B}$ es ireducible, ya que $\mathbf{A}$ es irreducible.

Ahora

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \geq \alpha \mathbf{I}$$

$$\mathbf{B} + \alpha\mathbf{I} \leq \mathbf{B} + \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \geq \alpha\mathbf{I} + \mathbf{B} = \alpha \left[\mathbf{I} + \frac{1}{\alpha}\mathbf{B}\right] \Rightarrow \mathbf{A}^{m-1} \geq \alpha^{m-1} \left[\mathbf{I} + \frac{1}{\alpha}\mathbf{B}\right]^{m-1} > \mathbf{O}.$$

Por el resultado anterior,

$$\Rightarrow \mathbf{A}^{m-1} > \mathbf{O}. \tag{5.8}$$

Lema 5.5
Si $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ mxm es primitiva entonces $\mathbf{A}^k \geq \mathbf{O}$ es irreducible y primitiva $\forall k \in N$

Demostración

Como $\mathbf{A}$ es primitiva, para k suficientemente grande se cumple que

$$\mathbf{A}^k > \mathbf{O}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}^k$$

es irreducible y existe $r \in Z^+$ tal, que

$$\left(\mathbf{A}^k\right)^r > \mathbf{O}. \tag{5.9}$$

Por tanto, $\mathbf{A}$ es primitiva.

Lema 5.6

Si $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ es mxm primitiva, entonces

$$\exists k \leq (m-1)m^m \tag{5.10}$$

tal, que

$$\mathbf{A}^k > \mathbf{O}.$$

Demostración

Como $\mathbf{A}$ es irreducible, entonces existe una trayectoria en la digráfica D($\mathbf{A}$) tal, que une, en particular, a los vértices $i \longrightarrow i$. La trayectoria más corta tiene una longitud

$$k_1 \leq m.$$

La matriz $\mathbf{A}^{k_1}$ tiene, por lo tanto, una entrada positiva en $a_{11}^{(k_1)}$ y, para cada potencia de $\mathbf{A}^{k_1}$, tendrá una entrada positiva en el lugar (1,1). Como $\mathbf{A}$ es primitiva, entonces existe una trayectoria, desde el vértice 2 hacia el vértice 2, en la digráfica de D($\mathbf{A}^{k_1}$). La trayectoria más corta tiene una longitud

$$k_2 \leq m.$$

La matriz

$$(\mathbf{A}^{k_1})^{k_2} = \mathbf{A}^{k_1 k_2}$$

tiene sus entradas (1,1), (2,2), ambas positivas. Este proceso puede continuarse sobre la diagonal principal, hasta que obtengamos la matriz

$$\mathbf{A}^{k_1 k_2 \cdots k_m}$$

con cada $k_i \leq m$, $i \in \overline{m}$, la cual es irreducible y tiene sus entradas positivas sobre la diagonal principal. Por el lema 1, tenemos que

$$\Rightarrow \left[\mathbf{A}^{k_1 k_2 \cdots k_m}\right]^{m-1} > \mathbf{O}$$

y como

$$\left.\begin{array}{l} k_1 \leq m \\ k_2 \leq m \\ \quad\vdots \\ k_m \leq m \end{array}\right\} \Rightarrow k_1 k_2 \cdots k_m \leq m^m$$

$$\Rightarrow k = k_1 k_2 \cdots k_m (m-1) \leq m^m (m-1)$$

$$\Rightarrow \exists k \leq (m-1) m^m$$

tal, que

$$\mathbf{A}^k > \mathbf{O}.$$

Princeton University Department of Mathematics, 1951. Front row: A. W. Tucker, E. Artin, S. Lefschetz, A. Church, W. Feller. Back row: J. T. Tate, J. W. Tukey, D. C. Spencer, R. C. Lyndon, V. Bargmann. Absent: S. Bochner, R. H. Fox, N. E. Steenrod, E. Wigner, S. S. Wilks.

Teorema 5.3

Sea $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ $m x m$ primitiva y supongamos que el ciclo dirigido simple más corto. en $D(\mathbf{A})$, tiene longitud l.

$$\Rightarrow \mathbf{A}^{m+l(m-2)} > \mathbf{O}; \tag{5.11}$$

es decir, el índice de imprimitividad de $\mathbf{A}$ es $\leq m + l(m-2)$.

Demostración

Como $\mathbf{A}$ es irreducible, para todo i en $\overline{m}$, $i \to i$ forma un ciclo en donde el ciclo más corto, de cualquier vértice con él mismo, será un ciclo simple de longitud máxima m. Supongamos ahora que, por medio de una permutación de los vértices, en el ciclo más corto que une a i con él mismo: son $1, 2, \ldots, l$. Observemos además que

$$m + l(m-2) = (m-l) + l(m-1)$$

y consideremos

$$\mathbf{A}^{(m-l)+l(m-1)} = \mathbf{A}^{m-l}(\mathbf{A}^{l})^{m-1}.$$

Ahora escribimos $\mathbf{A}^{(m-l)}$ en forma de bloques,

$$\mathbf{A}^{(m-l)} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} \\ \mathbf{X}_{21} & \mathbf{X}_{22} \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{X}_{11}$ es una submatriz, $l \times l$, y $\mathbf{X}_{22}$ es $(m-l)x(m-l)$. Entonces $\mathbf{X}_{11}$ tiene al menos una entrada no nula en cada renglón, porque sus vértices $1, 2, \ldots, l$ comprenden un ciclo en $D(\mathbf{A})$. De aquí que, desde cada $i \in \overline{m}$ en $D(\mathbf{A}^{m-l})$, existe al menos algún otro vértice que está unido hacia algún vértice j (y tal vez ocurra que $i = j$), en $D(\mathbf{A}^{m-l})$; es decir, es verdad que: si $(i, j) \in \overline{m}x\overline{m}$ entonces, existe una entrada no nula, a lo más, en cada renglón de $\mathbf{X}_{21}$, porque para cada vértice $l+1, l+2, \ldots, m$, fuera del ciclo, debería existir una trayectoria en $D(\mathbf{A})$, de longitud máxima $-l$(el número de vértices no dentro del ciclo), hacia algún vértice dentro de dicho ciclo. Por la continuación de un número suficiente de pasos adicionales alrededor del ciclo, es claro, que existe una trayectoria dirigida, de longitud exactamente igual a $m - l$, en $D(\mathbf{A})$, desde cada vértice en el ciclo. Ahora escribimos $(\mathbf{A}^{l})^{m-1}$ en forma de bloques como

$$(\mathbf{A}^{l})^{m-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{Y}_{11}$ es $l \times l$ y $\mathbf{Y}_{22}$ es $(m-l)x(m-l)$. Como $1, 2, \ldots, l$ comprende un ciclo en $D(\mathbf{A})$, existe un rizo, en cada vértice $1, 2, \ldots, l$, en $D(\mathbf{A}^{l})$. Como $\mathbf{A}$ es primitiva, entonces $\mathbf{A}^{l}$ también es primitiva; por tanto, $\mathbf{A}^{l}$ es irreducible.

A partir de cada vértice 1, 2, ..., l, en $D(\mathbf{A}^l)$, existe una trayectoria en $D(\mathbf{A}^l)$ de longitud máxima $m - l$, hacia cualquier otro vértice. Primero, siguiendo un número suficiente de veces alrededor de un rizo, en el nodo inicial podemos construir tal trayectoria, de longitud exactamente $m - l$. Esto muestra que $\mathbf{Y}_{11} > \mathbf{O}$ y $\mathbf{Y}_{12} > \mathbf{O}$. Para completar el argumento, calculamos ahora

$$\mathbf{A}^{m-l}(\mathbf{A}^l)^{m-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} \\ \mathbf{X}_{21} & \mathbf{X}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11}\mathbf{Y}_{11} + \mathbf{X}_{12}\mathbf{Y}_{21} & \mathbf{X}_{11}\mathbf{Y}_{12} + \mathbf{X}_{12}\mathbf{Y}_{22} \\ \mathbf{X}_{21}\mathbf{Y}_{11} + \mathbf{X}_{22}\mathbf{Y}_{21} & \mathbf{X}_{21}\mathbf{Y}_{12} + \mathbf{X}_{22}\mathbf{Y}_{22} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11}\mathbf{Y}_{11} & \mathbf{X}_{11}\mathbf{Y}_{12} \\ \mathbf{X}_{21}\mathbf{Y}_{11} & \mathbf{X}_{21}\mathbf{Y}_{12} \end{pmatrix}.$$

Como cada renglón en los bloques $\mathbf{X}$en la última expresión contiene a lo más, una entrada no nula, y como cada uno de los bloques $\mathbf{Y}$ en la última expresión es positivo y

$$\mathbf{A}^{m-l}(\mathbf{A}^l)^{m-1} > \mathbf{O}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}^{m-l}\mathbf{A}^{l(m-1)} = \mathbf{A}^{m+l(m-2)} > \mathbf{O}.$$

Corolario 5.1

Si $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ mxm es primitiva, si, y sólo si,

$$\mathbf{A}^{m^2-2m+2} > \mathbf{O}. \tag{5.12}$$

Demostración

$\Rightarrow$) si para toda $k > k_0$, $\mathbf{A}^k > \mathbf{O}$, entonces $\mathbf{A}$ es primitiva;
$\Leftarrow$) si $n = 1$, entonces $\mathbf{A} \ > \mathbf{O}$.

Supongamos que $n > 1$. Si $\mathbf{A}$ es primitiva, entonces $\mathbf{A}$ es irreducible y existen ciclos en $D(\mathbf{A})$. Si el ciclo menor en $D(\mathbf{A})$ tiene longitud m, entonces la longitud de cada ciclo, en $D(\mathbf{A})$, es un múltiplo de m, y de aquí, que $\mathbf{A}$ no pueda ser primitiva, por el teorema 1. De esta manera, la longitud del ciclo menor, en $D(\mathbf{A})$, sea m - 1 o menor y por el teorema 2, si denotamos

$$i_p(\mathbf{A}) = \text{ índice de imprimitividad de } \mathbf{A} \tag{5.13}$$

$$\Rightarrow i_p(\mathbf{A}) \leq m + l(m-2) \leq m + (m-1)(m-2) = m^2 - 2m + 2.$$

Teorema 5.4

Sea

$\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ $m\times m$ irreducible y supongamos que $\mathbf{A}$ tiene entradas positivas en la diagonal principal.

$$1 \leq d \leq m \Rightarrow \mathbf{A}^{2m-d-1} > \mathbf{O}; \tag{5.14}$$

es decir,

$$i_p(\mathbf{A}) \leq 2m - d - 1.$$

Demostración

Por la hipótesis establecida, $\mathbf{A}$ debe ser primitiva, y el ciclo de longitud mínima en $\mathrm{D}(\mathbf{A})$, tiene longitud 1. de hecho, existen d ciclos. Usando una matriz de permutación, supongamos que $1, 2, \ldots, d$ son los vértices en la digáfica $\mathrm{D}(\mathbf{A})$ en donde existen rizos. Consideremos

$$\mathbf{A}^{2m-d-1} = \mathbf{A}^{m-d}(\mathbf{A})^{m-1}$$

y escribimos

$$\mathbf{A}^{m-d} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} \\ \mathbf{X}_{21} & \mathbf{X}_{22} \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{A}^{m-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{X}_{11}$. $\mathbf{Y}_{11}$ son submatrices d x d y $\mathbf{X}_{22}$ y $\mathbf{Y}_{22}$ son de $(m - d)x(m - d)$. Por los mismos argumentos del teorema anterior. Para tratar de demostrar que los bloques colocados correspondientemente de $\mathbf{A}^{m-d}$ y $(\mathbf{A}^t)^{m-1}$ que cada uno de los bloques $\mathbf{X}_{11}$ y $\mathbf{X}_{21}$ contienen al menos una entrada no nula, y los bloques $\mathbf{Y}_{11}$ y $\mathbf{Y}_{12}$ son positivos entonces el poducto

$$\mathbf{A}^{m-d}\mathbf{A}^{m-1} > \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{A}^{2m-d-1} > \mathbf{O} \tag{5.15}$$

por el mismo argumento del teorema 2.

Mac Lane

Birkhoff

Capítulo 6 MATRICES SIMILARES

En este capítulo haremos un pequeño repaso de las propiedades de las **matrices similares**, cuando una matriz está relacionada con otra por medio de una transformación lineal.

Si

$$M_m(S) = \{\text{matrices } mxm \text{ con entradas en S}\} \tag{6.1}$$

donde S puede ser el conjunto R, C etc.

Teorema 6.1

Si $\mathbf{A} \in M_m(S)$. **UAV** es una transformación lineal tal que deja fijo el determinante de cada matriz, entonces $\exists$ matrices **U**, **V** $\in M_m(S)$ tales que $\det(\mathbf{UV}) = 1$, y

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{UAV} \tag{6.2}$$

$\forall$ **A** $\in M_m(S)$.

Demostración

$$\left|\widetilde{A}\right| = |\mathbf{UAV}| = |\mathbf{U}||\mathbf{A}||\mathbf{V}| = |\mathbf{U}||\mathbf{V}||\mathbf{A}| = |\mathbf{UV}||\mathbf{A}| = |\mathbf{A}|$$

$$\Rightarrow |\mathbf{UV}| = 1. \tag{6.3}$$

Teorema 6.2

Sea **A** $\in M_m(C)$ **A** preserva el determinante y la traza de cada matriz, es decir,

$$\left|\widetilde{\mathbf{A}}\right| = |\mathbf{UAV}| \;\; \forall \mathbf{A} \in M_m(C) \Rightarrow \left|\widetilde{\mathbf{A}}\right| = |\mathbf{A}|$$

$$tr(\mathbf{UAV}) = Tr(\mathbf{A}), \mathbf{A} \in M_m(C)$$

$$\Rightarrow \text{ una matriz } \mathbf{V} \in M_m(C) \text{ tal que } \widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{VAV}^{-1}, \forall \mathbf{A} \in M_m(C)$$

o bien se cumple que

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{VA'V}^{-1}, \mathbf{A} \in M_m(C) \tag{6.4}$$

Demostración

Como la matriz **A** preserva los determinantes, por el teorema1 existen **U,V** matrices con coeficientes complejos tales que $|\mathbf{UV}| = 1$ o bien $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{UAV}$ $\forall \mathbf{A} \in M_m(C)$ o bien

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{UA'V} \;....\forall \mathbf{A} \in M_m(C)$$

Si **I** es las matriz idéntica, entonces el producto de arriba toma la forma

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{UAV} \Rightarrow \tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{UIV} = \mathbf{UV}$$

ahora

$$tr(\mathbf{I}) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}.$$

y

$$tr(\tilde{\mathbf{I}}) = tr(\mathbf{UIV}) = (\mathbf{VU})_{ij}$$

pero como $\mathrm{tr}(\tilde{\mathbf{I}}) = tr(\mathbf{I})$

$$\Rightarrow (\mathbf{UV})_{ij} = \delta_{ij} \forall ij \in \overline{m}$$

por tanto,

$$\mathbf{VU} = \mathbf{I} \text{ es decir, } \mathbf{U} = \mathbf{V}^{-1}$$

es decir,

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{AV}$$

Si

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{UA'V}$$

$$\forall \mathbf{A} \in M_m(C)$$

de manera similar

$$tr(\tilde{\mathbf{I}}) = (\mathbf{UV})_{ij} \forall ij \in \overline{m}$$

por tanto,

$$\mathbf{UV} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{U} = \mathbf{V}^{-1}$$

En este caso

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A'V} \;\forall \mathbf{A} \in M_m. \tag{6.5}$$

Lema 6.1
Si

$$\mathbf{A} \in M_m(R_+),\ \mathbf{A}^{-1} \in M_m(R_+) \Leftrightarrow \mathbf{A} \text{ es una matriz de permutación}$$

D*emostración*
Sea

$$\forall \mathbf{A} \in M_m(R_+)$$

por hipótesis

$$\forall \mathbf{A}^{-1} \in M_m(R_+) \Rightarrow \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$$

Teorema 6.3
Si tenemos el producto $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{UAV}$ y preserva el espectro de cada matriz $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ mxm entonces existe una matriz de permutación $\mathbf{P}$ mxm tal que

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP},\ \forall \mathbf{A} \geq \mathbf{O}\ mxm$$

$$\text{o bien } \widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{P}.\ \forall \mathbf{A} \geq \mathbf{O}$$

Demostración
Como el producto

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$$

preserva espectros $\forall \mathbf{A} \geq \mathbf{O}$,entonces el producto preserva trazas y determinantes.

Cualquier transformación lineal que preserva la traza de cada matriz cuadrada no-negativa, y en particular, cada matriz idéntica preservará las trazas de todas las matrices cuadradas mxm en los complejos. Mostraremos que el producto $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ también fija el determinante de cada matriz compleja constante.

Sea $\mathbf{X}$ una matriz cuadrada mxm con coeficientes complejos. Las entradas de $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{P}$ son combinaciones lineales fijas de las entradas en $\mathbf{X}$.

$$\Rightarrow \left|\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{P}\right| - |\mathbf{X}|$$

es un polinomio de las indeterminadas X_{ij}. Este polinomio se anula si

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \geq \mathbf{O}$$

cualquiera. Se sigue que el polinomio

$$\left|\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{P}\right| - |\mathbf{X}| = 0 \Rightarrow \left|\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{P}\right| = |\mathbf{X}|\ \ \forall \mathbf{A} \geq \mathbf{O}.$$

de aquí que el producto preserve tanto la traza como el determinanté de cada matriz compleja mxm y por el teorema 2. $\exists$ $\mathbf{S}$ una matriz mxm tal que

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{A}}\ \forall \mathbf{A}$$

o bien

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{S}.\ \forall \mathbf{A}.$$

Si

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$$

tiene esta forma

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{S} \geq \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{S}^{-1} \geq \mathbf{O}.$$

Ahora bien, no todas las entradas de $\mathbf{S}^{-1}$ tienen que ser cero

$$\Rightarrow \exists \alpha \in C$$

tal que

$$S_{ij} = \alpha\, |S_{ij}|\ \forall ij \in \overline{m}.$$

Entonces $\mathbf{S}$ es un múltiplo escalar de una matriz $\mathbf{P} \geq \mathbf{O}$, y por tanto.

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}.\ \forall \mathbf{A}.$$

Tenemos

$$\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} \geq \mathbf{O}.$$

Definición 6.1

Una matriz $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ mxm decimos que es **primitiva** $\Leftrightarrow \exists k \in Z^+$ tal que $\mathbf{A}^k > \mathbf{O}$.

Una matriz de incidencia $\mathbf{I}_A$ asociada con la matriz $\mathbf{A}$ es aquella que vale 1 si $a_{ij} > 0$ y vale 0 si $a_{ij} = 0$.

Teorema 6.4

Si $\mathbf{I}_A$ es primitiva $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ es primitiva

Demostración

$\Leftarrow$) Si $\mathbf{A}$ es primitiva entonces $\exists k$ tal que $\mathbf{A}^k > \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{I}_{A^k}$ es la matriz compuesta de puros unos, por tanto, existe un $h \in Z^+$ tal que $\mathbf{I}^h_{A^k} > \mathbf{O}$ por tanto es imprimitiva.

$\Rightarrow$) Si $\mathbf{I}_A$ es imprimitiva $\Rightarrow \exists k > o$ tal que $\mathbf{I}^k_A > \mathbf{O}$

Teorema de Perron-Frobenius 6.5 para matrices primitivas.

Sea $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ mxm primitiva entonces

(i) Existe un valor propio $\hat{\lambda}$ de $\mathbf{A}$ tal que $\hat{\lambda} > 0$;

(ii) $\hat{\lambda}$ tiene asociado un vector propio estrictamente positivo $\widehat{\mathbf{X}} > \mathbf{O}$;

(iii) $\hat{\lambda} > |\lambda|$ para cualquier $\lambda \neq \hat{\lambda}$;

(iv) los vectores propios asociados con $\hat{\lambda}$ son únicos excepto por múltiplos constantes.

(v) Si $\mathbf{O} \leq \mathbf{B} \leq \mathbf{A}$ y β es un valor propio de $\mathbf{B}$, entonces $|\beta| \leq \hat{\lambda}$. Además $|\beta| = \hat{\lambda} \Rightarrow B = \mathbf{A}$;

(vi) $\hat{\lambda}$ es una raíz simple del polinomio característico de A.

demostración de (i)

Sea $\mathbf{X} \geq \mathbf{O}$ es un vector columna semipositivo, y sea el producto $\mathbf{AX}$.

(i) P.d. Existe un valor propio $\hat{\lambda}$ de $\mathbf{A}$ tal que $\hat{\lambda} > 0$.

Sea

$\mathbf{X} \in R^m_+$ un vector semipositivo y el producto $\mathbf{AX}$

$$\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X} \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} a_{ij} X_j = \lambda X_i \ \ \mathrm{i} \in \overline{m}$$

entonces si $\mathbf{X} \neq \mathbf{O}$ y definimos

$$(\mathbf{AX})_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} X_j$$

$$\frac{(\mathbf{AX})_i}{X_i} = \frac{\sum_{j=1}^{m} a_{ij} X_j}{X_i} = \lambda_i(\mathbf{X})$$

$$\hat{\lambda}(\mathbf{X}) = \min \lambda(\mathbf{X}) = \min_i \frac{\sum_{j=1}^{m} a_{ij} X_j}{X_i}$$

existe porque se trata del

$$\min\left\{\sum_{j=1}^{m} a_{1j} X_j, \sum_{j=1}^{m} a_{2j} X_j, \ldots, \sum_{j=1}^{m} a_{mj} X_j\right\}$$

existe porque se trata de un número finito de elementos. En general tenemos la función Collatz-Wielandt

$$\lambda_i(\mathbf{X}) = \begin{cases} \frac{(\mathbf{AX})_i}{X_i} = \frac{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}X_j}{X_i} \text{ si } X_i > 0 \\ \infty \text{ si } X_i = 0 \text{ y } (\mathbf{AX})_i \neq 0 \\ \text{indefinido si } X_i = 0 \text{ y } (AX)_i = 0 \end{cases}$$

entonces

$$\hat{\lambda} : R_+^m \longrightarrow R_+.$$

Ahora tomamos

$$\{\lambda \in R_+ : \mathbf{AX} \geq \lambda\mathbf{X}\}$$

$$\lambda_i(\mathbf{X})\, X_j \leq \sum_{j=1}^{m} a_{ij}X_j\ \forall i \in \overline{m}$$

$$\Rightarrow \lambda_i(\mathbf{X})\,\mathbf{X} \leq \mathbf{AX} \text{ y si } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in R_+^m$$

si multiplicamos por el vector **J**

$$\lambda_i(\mathbf{X})\,\mathbf{J}\cdot\mathbf{X} \leq \mathbf{JAX}$$

pero

$$\mathbf{JA} \leq K\mathbf{J}$$

JA es el vector formado por la suma de los elementos de cada columna de **A**

$$\mathbf{JA} = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{i1}, \quad \sum_{j=1}^{m} a_{i2}, \quad \cdots \quad , \sum_{j=1}^{m} a_{im} \right)$$

Ahora definimos

$$K = \max_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

$$\Rightarrow \mathbf{JA} \leq K\mathbf{J}$$

de la relación

$$\lambda_i(\mathbf{X})\,\mathbf{J}\cdot\mathbf{X} \leq \mathbf{JAX} \text{ y de } \mathbf{JA} \leq K\mathbf{J}$$

$$\lambda_i(\mathbf{X}) = \frac{\mathbf{JAX}}{\mathbf{JX}} \leq \frac{K\mathbf{JX}}{\mathbf{JX}} = K$$

$$\Rightarrow \lambda_i(\mathbf{X}) \leq K\ \forall\mathbf{X} > \mathbf{O}$$

por tanto $\lambda_i(\mathbf{X})$ está acotada superiormente

$$\Rightarrow \exists \sup \lambda_i(\mathbf{X}) = \hat{\lambda}(\mathbf{X}) \leq K$$

una interpretación geométrica en R_+^2 sería la siguiente:

Ahora bien, como $\mathbf{A}$ es primitiva entonces $\mathbf{A}$ no tiene columnas con ceros (si tuviera alguna no sería irreducible).

$$\lambda_i(J) \leq \frac{K(\mathbf{J}\cdot\mathbf{J})}{(\mathbf{J}\cdot\mathbf{J})} = K = \max \sum_{i=1}^{m} a_{ij} = \bar{\lambda}(\mathbf{J}) > 0$$

y además

$$\lambda_i(\mathbf{J}) = \min_i (\mathbf{AJ})_i = \min_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} > 0$$

pero

$$\min_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \leq \max_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij}.$$

$$\hat{\lambda} =_{def} \sup_{X>0} \min_i \frac{(\mathbf{AX})_i}{\mathbf{X}_i}.$$

$$\Rightarrow 0 < \lambda_i(\mathbf{J}) \leq \hat{\lambda} \leq K < \infty.$$

La raíz de Perron-Frobenius está entre esos dos valores.

Otra propiedad que presenta esta función es la siguiente:

$$\hat{\lambda}(\alpha\mathbf{X}) = \sup_{X>0} \min_i \frac{(\mathbf{A}(\alpha\mathbf{X}))_i}{\alpha\mathbf{X}_i} = \sup_{X>0} \min_i \frac{\alpha(\mathbf{AX})_i}{\alpha\mathbf{X}_i}$$

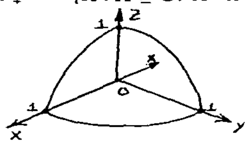
$$= \sup_{X>0} \min_i \frac{(\mathbf{AX})_i}{\mathbf{X}_i} = \hat{\lambda}(\mathbf{X})$$

$$\hat{\lambda}(\alpha\mathbf{X}) = \hat{\lambda}(\mathbf{X})$$

por tanto, la función es homogénea de grado cero.

Tanto el numerador como el denominador no se alteran por la normalización de los vectores del dominio.

$$S_+^{m-1} = \{\mathbf{X} : \mathbf{X} \geq \mathbf{O},\ \mathbf{X}\cdot\mathbf{X} = 1\}$$



$$\lambda_i : S_+^{m-1} \to R_+$$

S_+^{m-1} es un conjunto compacto en $\mathbf{R}^m$.

λ_i es una función semicontinua superior en este conjunto S_+^{m-1}. $\Rightarrow \lambda_i$ alcanza su supremo $\hat{\lambda}$ en S_+^{m-1} en el punto $\widehat{\mathbf{X}} \in S_+^{m-1}$.

Definición 6.2

Una matriz $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ decimos que es **primitiva** $\Leftrightarrow \mathbf{A}^k > \mathbf{O}$.

Teorema Perron-Frobenius para matrices promitivas 6.6

Si $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ primitiva entonces

(i) Existe un valor propio $\hat{\lambda} > 0$;

(ii) $\hat{\lambda}$ tiene asociado dos vectores propios : uno, por la derecha $\widehat{\mathbf{X}} > \mathbf{O}$ y otro por la izquierda $\widehat{\mathbf{Y}} > \mathbf{O}$;

(iii) $\hat{\lambda} > |\lambda|\ \forall \hat{\lambda} \neq \lambda$ donde λ es cualquier valor propio de $\mathbf{A}$;

(iv) los vectores propios asociados con $\hat{\lambda}$ son únicos excepto por múltiples constantes.

(v) si $\mathbf{O} \leq \mathbf{B} \leq \mathbf{A}$ y β es un valor propio de B. Entonces $|\beta| \leq \hat{\lambda}$. Además $|\beta| = \hat{\lambda} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B}$;

(vi) $\hat{\lambda}$ es una raíz simple del polinomio característico de $\mathbf{A}$.

Demostración

(i) Sea $\mathbf{X} \geq \mathbf{O}$ vector columna, y el producto $\mathbf{AX}$

Sea

$$\lambda(\mathbf{X}) = \min_j \frac{(\mathbf{AX})_j}{\mathbf{X}_j}$$

entonces

$$\lambda(\mathbf{X}) = \begin{cases} \infty \text{ si } X_j = 0 \\ X_j \text{ si } X_j \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda(\mathbf{X})\mathbf{X} \leq \mathbf{AX}$$

tomamos el vector

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

y multiplicamos la última desigualdad por $\mathbf{J}$ entonces

$$\lambda(\mathbf{X})\mathbf{J} \cdot \mathbf{X} \leq \mathbf{JAX}$$

como

$$\mathbf{AJ} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} a_{1j} \\ \sum_{j=1}^{m} a_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} a_{mj} \end{pmatrix}$$

si

$$K = \max \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$$

entonces

$$\mathbf{AJ} \leq K \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda(\mathbf{X}) \leq \frac{K(\mathbf{J} \cdot \mathbf{X})}{(\mathbf{J} \cdot \mathbf{X})} = K = \max \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$$

$$\Rightarrow \lambda(\mathbf{X}) \leq K$$

entonces $\lambda(\mathbf{X})$ es una función uniformenete acotada $\forall \mathbf{X}$. Como $\mathbf{A}$ es primitiva, no contiene columnas de ceros, entonces calculamos $\lambda(\mathbf{J})$

$$\lambda(\mathbf{J}) \leq \frac{K(\mathbf{J} \cdot \mathbf{J})}{(\mathbf{J} \cdot \mathbf{J})} = K = \max \sum_{j=1}^{m} a_{ij} > 0$$

$$\Rightarrow \lambda(\mathbf{J}) > 0$$

$$\Rightarrow \sup_{X \geq O} \min_{i} \frac{(\mathbf{AX})_i}{\mathbf{X}}$$

$$\Rightarrow 0 < \lambda(\mathbf{J}) \leq \lambda(\mathbf{X}) \leq K < \infty.$$

Ahora bien si tomamos los vectores unitarios, es decir sobre el conunto

$$S = \{\mathbf{X} \in R^m \,/\, \mathbf{X} \cdot \mathbf{X} = 1\}$$

este es un conjunto compacto en $\mathbb{R}^m$ y $\lambda(\mathbf{X})$ es una función semicontinua superior de $\mathbf{S}$ a $\mathbb{R}$

$$\lambda : S \longrightarrow R$$

entonces esta función alcanza su supremo $\hat{\lambda}$ digamos en el vector $\widehat{\mathbf{X}}$. Así existe un vector $\widehat{\mathbf{X}} \geq \mathbf{O}$ semipositivo, es decir si

$$\min_{i} \frac{(\mathbf{A}\widehat{\mathbf{X}})_i}{\widehat{\mathbf{X}}_j} = \hat{\lambda}$$

y como es el mínimo entonces

$$(\mathbf{A}\widehat{\mathbf{X}})_i \geq \hat{\lambda}\widehat{\mathbf{X}}_j$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}\widehat{\mathbf{X}} \geq \hat{\lambda}\widehat{\mathbf{X}}$$

con igualdad para alguna $\widehat{\mathbf{X}}$.

Ahora consideremos

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{A}\widehat{\mathbf{X}} - \hat{\lambda}\widehat{\mathbf{X}} \geq 0$$

o bien

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{O} \text{ o } \mathbf{Z} \neq \mathbf{O}.$$

Si $\mathbf{Z} \neq \mathbf{O}$ sabemos que $\forall k \geq k_0$. $\mathbf{A}^k > \mathbf{O}$ ya que $\mathbf{A}$ es primitiva

$$\Rightarrow \mathbf{A}^k\mathbf{Z} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^k\widehat{\mathbf{X}}) - \hat{\lambda}(\mathbf{A}^k\widehat{\mathbf{X}}) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathbf{A}(\mathbf{A}^k\widehat{\mathbf{X}})_i}{(\mathbf{A}^k\widehat{\mathbf{X}})_j} > \hat{\lambda}\ \forall j \in \overline{m}$$

pero esto es un absurdo.

$$\Rightarrow \mathbf{Z} = \mathbf{O}.$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}\widehat{\mathbf{X}} = \hat{\lambda}\widehat{\mathbf{X}}$$

Q.E.D.

(ii) Si iteramos, es decir, multiplicamos sucesivamente

$$\mathbf{A}\widehat{\mathbf{X}} = \hat{\lambda}\widehat{\mathbf{X}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}^k\widehat{\mathbf{X}} = \hat{\lambda}^k\widehat{\mathbf{X}}$$

tomando $\hat{\lambda}$ suficientemente grande $\mathbf{A}^k > \mathbf{O}$, y como $\widehat{\mathbf{X}} \geq \mathbf{O}$, de hecho $\widehat{\mathbf{X}} > \mathbf{O}$.

(iii) $\forall \lambda \neq \hat{\lambda} \Rightarrow \hat{\lambda} > |\lambda|$.

Sea λ cualquier valor propio de $\mathbf{A}$, entonces para algún $\mathbf{X} \neq \mathbf{O}$ y posiblemente complejo, es decir, en C^m.

$$\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{A}^k\mathbf{X} = \lambda^k\mathbf{X}$$

definimos el vector $\mathbf{X}^+$ tomando $\mathbf{X} \in C^m$ como:

$$X^+ = \begin{pmatrix} |X_1| \\ |X_2| \\ \vdots \\ |X_m| \end{pmatrix} \in R^m$$

$$\mathbf{AX}^+ \geq \lambda\mathbf{X}^+$$

$$\Rightarrow |\lambda| \leq \frac{(\mathbf{AX}^+)_i}{|\mathbf{X}_j|}$$

$$|\lambda| \leq \min_j \frac{(\mathbf{AX}^+)_i}{|\mathbf{X}_j|}$$

y por definición

$$|\lambda| \leq \hat{\lambda}.$$

Ahora supongamos que $|\lambda| = \hat{\lambda}$

$$\Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{X}^+ \geq \hat{\lambda}\mathbf{X}^+ > \mathbf{O}$$

$$\mathbf{A}^k\mathbf{X}^+ \geq \hat{\lambda}^k\mathbf{X}^+ > \mathbf{O}$$

es decir,

$$\mathbf{A}^k\mathbf{X} = \hat{\lambda}^k\mathbf{X}$$

k puede elegirse, de tal manera que $\mathbf{A}^k > \mathbf{O}$, por la hipótesis de primitividad de la matriz **A**.

Tomande en cuenta una propiedad de los números complejos que dice lo siguente:

$$\forall \gamma, \delta \neq 0 \in C \;\Rightarrow\; |\gamma + \delta| = |\gamma| + |\delta| \Leftrightarrow \gamma = k\delta \;\forall k \in R$$

$$\Leftrightarrow \text{ tienen igual dirección en } C$$

Así escribiendo

$$X_j = |X_j| \exp i\theta_j$$

$\mathbf{A}^k\mathbf{X} = \hat{\lambda}^k\mathbf{X}$ implica que $\theta_j = \theta$ es independiente de j$\in \overline{m}$.

$$\mathbf{A}\mathbf{X}^+ \exp i\theta_j = \exp i\theta_j \mathbf{A}\mathbf{X}^+ = \exp i\theta_j \lambda\mathbf{X}^+$$

cancelando $\exp i\theta_j$

$$\Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{X}^+ = \hat{\lambda}\mathbf{X}^+$$

como $\mathbf{X}^+ \geq \mathbf{O}$ $, \lambda \in R_+$, y como

$$|\lambda| = \hat{\lambda} \Rightarrow \lambda = \hat{\lambda}.$$

(iv) Supongamos que $\mathbf{X} \neq \mathbf{O}$ es un vector propio (posiblemente con algunas entradas $\mathbf{X}_i \in C$) correspondiente a $\hat{\lambda}$.

Entonces por (iii)

$$\Rightarrow \mathbf{X}^+ \neq \mathbf{O} \text{ es decir, } \mathbf{X}^+ > \mathbf{O}$$

entonces se cumple con la relación

$$\overline{\eta} = \widehat{\mathbf{X}} - c\mathbf{X}$$

también es un valor propio correspondiente a $\hat{\lambda}, \forall c$ tal que $\overline{\eta} \neq \mathbf{O}$ y de aquí lo mismo se puede afirmar para $\overline{\eta}$; en particular $\overline{\eta}^+ > \mathbf{O}$.

Ahora bien o **X** es un múltiplo de $\widehat{X}$ o no lo es.

Si no es múltiplo, podemos elegir c de tal manera que $\overline{\eta} \neq \mathbf{O}$, excepto si algún elemento de $\overline{\eta}$ es cero, pero esto es imposible cuando $\eta^+ > \mathbf{O}$.

de aquí que **X** sea un múltiplo de $\widehat{\mathbf{X}}$.

(v) Sea $\mathbf{Y} \neq \mathbf{O}$ un vector propio de $\mathbf{B}$ correspondiente al valor propio β. Entonces tomando los valorees absolutos como vimos anteriormente

$$|\beta|\,\mathbf{Y}^+ \leq \mathbf{B}\mathbf{Y}^+ \leq \mathbf{A}\mathbf{Y}^+.$$

y usando el mismo vector $\widehat{X}$ que antes

$$|\beta|(\widehat{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Y}^+) \leq \widehat{\mathbf{X}}\mathbf{B}\mathbf{Y}^+ \leq \widehat{\mathbf{X}}(\mathbf{A}\mathbf{Y}^+) = \hat{\lambda}(\widehat{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Y}^+),$$

y como

$$(\widehat{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Y}^+) > 0 \Rightarrow |\beta| \leq \hat{\lambda}.$$

Supongamos ahora que $|\beta| = \hat{\lambda}$ entonces como

$$|\beta|\,\mathbf{Y}^+ \leq \mathbf{B}\mathbf{Y}^+ \leq \mathbf{A}\mathbf{Y}^+.$$

$$\hat{\lambda}\mathbf{Y}^+ \leq \mathbf{A}\mathbf{Y}^+ > \mathbf{O};$$

de donde, a partir del mismo resultado

$$\hat{\lambda}\mathbf{Y}^+ = \mathbf{B}\mathbf{Y}^+ = \mathbf{A}\mathbf{Y}^+;$$

al cual quieríamos llegar:

$$\mathbf{B} \leq \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}.$$

(vi) Las siguientes identidades son verdaderas para todos los números reales y complejos, incluyendo valores propios de $\mathbf{A}$:

$$\left.\begin{aligned} (x\mathbf{I} - \mathbf{A})Adj(x\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \det(x\mathbf{I} - \mathbf{A})I \\ Adj(x\mathbf{I} - \mathbf{A})(x\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \det(x\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{I} \end{aligned}\right\} \qquad (6.6)$$

la relación es clara, para x, cuando no es un valor propio, ya que se cumpliría que $\det(x\mathbf{I} - \mathbf{A}) \neq 0$; como x es un valor propio, se sigue por continuidad.

Haciendo $x = \hat{\lambda}$ entonces cualquier de $Adj(x\mathbf{I} - \mathbf{A})$ o bien (i) es un valor propio correspondiente a $\hat{\lambda}$ o bien (ii) un renglón de ceros; y análogamente para las columnas. Por (ii) y (iv) del teorema, $Adj(x\mathbf{I} - \mathbf{A})$ o bien es (i) una matriz sin elementos cero o (ii) una matriz con todos los elementos cero.

Probaremos que un elemento de $Adj(x\mathbf{I} - \mathbf{A})$ es positivo, entonces se cupliría (i), el elemento *(m, m)* es

$$\det(\hat{\lambda}\mathbf{I} - \mathbf{A})_{(m-1)}$$

donde $\mathbf{A}_{(m-1)}$ es el menor de $\mathbf{A}$, cuyo último renglón y última columna se suprimen: $\mathbf{I}_{(m-1)}$ y corresponde a la matriz unitaria del tamaño correspondiente

$$\mathbf{A} \geq \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{(m-1)} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \geq \mathbf{O}, \qquad (6.7)$$

y es distinta de $\mathbf{A}$.

Como $\mathbf{A}$ es primitiva entonces no puede tener columnas cero se sigue por (v) que ningún valor propio de $\mathbf{A}_{(m-1)}$ puede ser tan grande en valor absoluto que $\hat{\lambda}$.

$$\Rightarrow \det(\widehat{\lambda}_{(m-1)}\mathbf{I} - \mathbf{A}_{(m-1)}) > 0$$

como se quería. Y además deduciremos que $adj(x\mathbf{I} - \mathbf{A})$ tiene todos sus elementos positivos.

Escribimos

$$\phi(x) = \det(x\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

entonces derivando la relación

$$\left.\begin{array}{r}(x\mathbf{I} - \mathbf{A})Adj(x\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(x\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{I} \\ Adj(x\mathbf{I} - \mathbf{A})(x\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(x\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{I}\end{array}\right\}$$

derivando el producto, tenemos

$$\frac{d}{dx}\left[(x\mathbf{I} - \mathbf{A})Adj(x\mathbf{I} - \mathbf{A})\right] = \phi(x)\mathbf{I}$$

que corresponde a la derivada del polinonio característico

$$\frac{d}{dx}\left[(x\mathbf{I} - \mathbf{A})Adj(x\mathbf{I} - \mathbf{A})\right] = \frac{d}{dx}\left[\phi(x)\mathbf{I}\right].$$

$$\frac{d}{dx}(x\mathbf{I} - \mathbf{A})Adj(x\mathbf{I} - \mathbf{A}) + (x\mathbf{I} - \mathbf{A})\frac{d}{dx}\left[Adj(x\mathbf{I} - \mathbf{A})\right] = \phi'(x)\mathbf{I},$$

finalmente

$$Adj(x\mathbf{I} - \mathbf{A}) + (x\mathbf{I} - \mathbf{A})\frac{d}{dx}\left[Adj(x\mathbf{I} - \mathbf{A})\right] = \phi'(x)\mathbf{I}.$$

Sustituyendo $x = \widehat{\lambda}$ y multiplicando por $\widehat{X}$

$$Adj(\widehat{\lambda}\mathbf{I} - \mathbf{A})\widehat{\mathbf{X}} + (\widehat{\lambda}\mathbf{I} - \mathbf{A})\widehat{\mathbf{X}}\frac{d}{dx}\left[Adj(x\mathbf{I} - \mathbf{A})\right] = \phi'(x)\mathbf{I}\widehat{\mathbf{X}} \qquad (6.8)$$

como

$$\mathbf{AY} = \widehat{\lambda}\mathbf{Y} \Rightarrow \mathbf{AY} - \widehat{\lambda}\mathbf{Y} = \mathbf{O} \Rightarrow (\widehat{\lambda}\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{Y} = \mathbf{O}\ \forall\mathbf{Y}$$

$$(\widehat{\lambda}\mathbf{I} - \mathbf{A})\widehat{\mathbf{X}} = \mathbf{O}$$

$$\mathbf{O} < adj(\widehat{\lambda}\mathbf{I} - \mathbf{A})\widehat{\mathbf{X}} = \phi'(\widehat{\lambda})\widehat{\mathbf{X}}$$

los demás términos se anulan

$$\Rightarrow \phi'(\widehat{\lambda}) > 0$$

por tanto $\widehat{\lambda}$ es una raíz simple de la ecuación característica. Con este apéndice, pasamos ahora a mostrar algunas de las consecuencias de estos resultados.

NOTACIÓN

La notación que usamos aquí es la siguiente:

$\overline{m} = \{1, 2, ..., m\}$ representa el conjunto de índices de 1 hasta m el cual representa, a su vez, al conjunto de las idustrias.

$\mathbf{A} > \mathbf{O} \Leftrightarrow \exists\, a_{ij} > 0\ \forall ij \in \overline{m}$

$\mathbf{A} \geq \mathbf{O} \Leftrightarrow \exists\, a_{i_0 j_0} > 0$ para alguna $i_0, j_0 = 1, 2, ..., m$

$\mathbf{A}\ \ \mathbf{O} \Leftrightarrow a_{ij} 0\ , \forall ij \in \overline{m}$

Si $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{X}'$ o $\mathbf{X}^T$ es el vector transpuesto.

Si $\mathbf{A}$ es una matriz $\mathbf{A}'$ o $\mathbf{A}^T$ es su transpuesta.

$\mathbf{I}$ es la matriz identidad y su orden se entiende por el contexto.

P_m es el conjunto de las matrices de permutación mxm.

S_m es el conjunto de permutaciones con m elementos.

$\mathbf{P}_\sigma$ es una matriz de permutaciones mxm asociada con $\sigma \in S_m$

$\widehat{\lambda}(\mathbf{A})$. $\widehat{\lambda}$ es la raíz de Perron-Frobenius o de Perron según el contexto.

$\mathrm{D}(\mathbf{A})$ la digráfica asociada con la matriz $\mathbf{A}$.

$a_{ij}^{(k)}$ es la entrada (i, j) de la matriz $\mathbf{A}^k$.

$\widetilde{j}$ Es el conjunto de clases residuales módulo h.

$Adj\,\mathbf{A}$ es la matriz adjunta de $\mathbf{A}$.

$\mathbf{Y}^+$ representa al vector cuyas entradas son los valores absolutos de las componentes del vector $\mathbf{Y}$.

A. N. Kolmogorov

L. S. Pontryagin

P. S. Aleksandrov

Uno de los efectos de la crisis ha sido el fuerte crecimiento del sector público, que ha aumentado sus competencias y su peso en la economía. Las diferencias entre países son muy grandes, pero la [illegible] es [illegible] en todo el mundo.

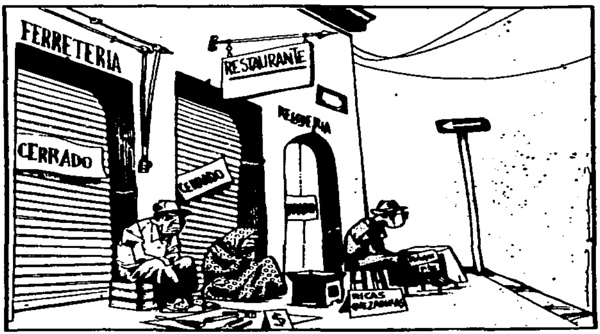
¿Por qué ha crecido tanto el Estado? La Primera Guerra Mundial [illegible]

CUARTA PARTE

APLICACIONES

DOCTORES EN ECONOMIA ■ Helguera

MERCADOS EMERGENTES ■ Helguera



Capítulo 7 MATRICES PRODUCTIVAS

En este capítulo veremos algunas consecuencias del teorema de Perron-Frobenius en la teoría de matrices productivas. En este contexto la matriz **A** representa la matriz de insumo-producto de Leontief, en el modelo estático, cuyas características ya se mencionaron el capítulo correspondiente a Leontief. Por esto mismo denotaremos con **B** a la matriz **I** - **A** que es la matriz de Leontief.

Primero veremos algunas propiedades generales de las matrices no negativas.

1. Si

$$\mathbf{A} \geqq \mathbf{O} \text{ y } \mathbf{X} \geqq \mathbf{0}, \lambda \in R_+ \Rightarrow \lambda\mathbf{X} \geqq \mathbf{0} \text{ y } \lambda\mathbf{A} \geqq \mathbf{O}.$$

2.

$$\text{Si } \mathbf{X}, \mathbf{Y} \geqq \mathbf{0} \text{ y } \mathbf{A}, \mathbf{B} \geqq \mathbf{O} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} i) \ldots \mathbf{X} + \mathbf{Y} \geqq \mathbf{0}, \\ ii) \ldots \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} \geqq \mathbf{0}, \\ iii) .. \ \mathbf{A} + \mathbf{B} \geqq \mathbf{O}, \\ iv) \ldots \mathbf{AB} \geqq \mathbf{O}, \\ v) \ldots \mathbf{AX} \geqq \mathbf{0}. \end{array}$$

3. Si

$$\mathbf{X} \geqq \mathbf{Y}, \mathbf{A} \geqq \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{AX} \geqq \mathbf{AY}.$$

4. Si $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in R_+^m$, entonces

$$\begin{array}{l} i) \ldots \ \mathbf{X} - \mathbf{Y} > \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{X} > \mathbf{Y}, \\ ii) .. \ \mathbf{X} - \mathbf{Y} \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{X} \geq \mathbf{Y} \\ iii) \ldots \ \mathbf{X} - \mathbf{Y} \geqq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{X} \geqq \mathbf{Y}. \end{array}$$

Si **A**, **B** matrices mxm, entonces

$$\begin{array}{l} i) \ldots \ \mathbf{A} - \mathbf{B} > \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{A} > \mathbf{B}, \\ ii) .. \ \mathbf{A} - \mathbf{B} \geq \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{A} \geq \mathbf{B} \\ iii) \ldots \ \mathbf{A} - \mathbf{B} \geqq \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{A} \geqq \mathbf{B}. \end{array}$$

Definición

Si **A** es una matriz mxm, decimos que es una **matriz de diagonal dominante en el sentido de Hadamard**, si y sólo si

$$|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \forall j \in \overline{m}$$

esto significa que la suma de los valores absolutos de los elementos de la columna de la matriz es menor que el valor absoluto del elemento que se encuentra sobre la diagonal principal.

Ejemplo

Tenemos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |5| > |1| + |1|, |6| > |1| + |3|, |9| > |4| + |1|$$

Ejemplo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 9 \\ 7 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |5| < |7| + |1|, |6| > |1| + |3|, |9| < |9| + |1|,$$

entonces no es una matriz de diagonal dominante en el sentido de Hadamard.

Definición

Si **A** es una matriz mxm, decimos que es de **diagonal dominante**

$$\Leftrightarrow \exists \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_m \end{pmatrix}, d_i > 0 \forall i \in \overline{m}$$

tal que

$$\mathbf{DA} = \begin{pmatrix} d_1a_{11} & d_2a_{12} & \cdots & d_ma_{1m} \\ d_2a_{21} & d_2a_{22} & \cdots & d_2a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_ma_{m1} & d_ma_{m2} & \cdots & d_ma_{mm} \end{pmatrix}.$$

y tal que

$$|d_ja_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \forall j \in \overline{m},$$

$$d_j\,|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \forall j \in \overline{m}.$$

Teorema 1

Si **A** es una matriz de diagonal dominante, entonces **A** es no singular

Demostración

Por hipótesis, existe una matriz diagonal $\mathbf{D}$ tal que

$$\mathbf{DA} = \begin{pmatrix} d_1 a_{11} & d_2 a_{12} & \cdots & d_m a_{1m} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} & \cdots & d_2 a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_m a_{m1} & d_m a_{m2} & \cdots & d_m a_{mm} \end{pmatrix} = \mathbf{E} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1m} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{m1} & e_{m2} & \cdots & e_{mm} \end{pmatrix}, y$$

$$d_i \, |a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \,, \forall j \in \overline{m}.$$

queremos demostrar que $\mathbf{A}$ es no singular. Supongamos lo contrario,

$$\Rightarrow |\mathbf{A}| = 0.$$

$$\Rightarrow |\mathbf{D}|\,|\mathbf{A}| = |\mathbf{DA}| = 0,$$

llamemos al producto $\mathbf{DA}$ como la matriz $\mathbf{E}$. Entonces la matriz $\mathbf{E}$ es una matriz singular, por tanto, existe una vector $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$, tal que $\mathbf{XE} = \mathbf{0}$, ahora consideremos los vectores de la base canónica de R^m.

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots \mathbf{e}_m\}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m} x_k e_k = 0, \forall j \in \overline{m}.$$

Consideremos el vector

$$X^+ = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_m| \end{pmatrix},$$

sea j_0 tal que $|x_{j_0}| = \max \{|x_j|\}$ o cumple con el **teorema AL**[1] que afirma que la única solución para que

$$\mathbf{EX} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

esto implica que existe un

$$\mathbf{X} \neq \mathbf{0} \text{ tal que } \mathbf{EX} = \mathbf{0}.$$

Si ocurre esto, entonces

$$\sum_{k=1}^{m} e_{kj} x_k = 0, \forall j \in \overline{m}$$

donde $\mathbf{X}$ es una solución no trivial. Sea j_0 uno de los índices para el cual

$$|x_{j_0}| = \max \{|x_j| \; j \in \overline{m}\}$$

[1] Que mencionaré al final de éste capítulo

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m} e_{kj_0}x_k = e_{j_01} + e_{j_02} + \cdots + e_{j_0j_0} + \cdots + e_{j_0m} = 0$$

$$\Rightarrow e_{j_0j_0}x_{j_0} + \sum_{k\neq j}^{m} e_{kj_0}x_k = 0$$

$$\Rightarrow e_{j_0j_0}x_{j_0} = -\sum_{k\neq j}^{m} e_{kj_0}x_k$$

$$\Rightarrow |e_{j_0j_0}x_{j_0}| = \left|-\sum_{k\neq j}^{m} e_{kj_0}x_k\right|$$

$$\Rightarrow |e_{j_0j_0}|\,|x_{j_0}| = \left|-\sum_{k\neq j}^{m} e_{kj_0}x_k\right| \leq \left|\sum_{k\neq j}^{m} |e_{kj_0}|\,|x_k|\right| \leq \sum_{k\neq j}^{m} |e_{kj_0}|\,|x_k|$$

$$\Rightarrow |e_{j_0j_0}|\,|x_{j_0}| \leq \sum_{k\neq j}^{m} |e_{kj_0}|\,|x_k|\,.$$

esto ocurre para un j_0 donde

$$|x_{j_0}| = \max|x_j|\,.$$

Por otra parte, como **E** es de diagonal dominante en el sentido de Hadamard, por tanto, **E** cumple con la desigualdad

$$\Rightarrow d_k\,|e_{j_0j_0}| > \sum_{k\neq j}^{m} d_k\,|e_{kj_0}| \;\; \text{y} \;\; |e_{j_0j_0}|\,|x_{j_0}| \leq \sum_{k\neq j}^{m} |e_{kj_0}|\,|x_k|$$

pero esto es un absurdo. Por tanto, es falso suponer que **E** tiene soluciones no triviales. Por tanto, **E** tiene un solución trivial. por tanto es falso que **A** sea no singular, es decir. **A** es singular, por el teorema AL, existe $\mathbf{A}^{-1}$.

Corolario

Si **A** es un matriz de diagonal dominante, entonces $det\,\mathbf{A} \neq 0$.

Demostración

Si $|\mathbf{A}| = 0$ entonces existe un $\mathbf{X} \neq 0$, tal que $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$. Sea j_0 uno de los índices para el cual

$$|x_{j_0}| = \max\{|x_i|\, i \in \overline{m}\}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m} a_{j_0k}x_k = 0$$

$$\Rightarrow a_{j_0j_0}x_{j_0} + \sum_{k\neq 1}^{m} a_{j_0k}x_k = 0$$

$$a_{j_0j_0}x_{j_0} = -\sum_{k\neq 1}^{m} a_{j_0k}x_k$$

$$|a_{j_0j_0}x_{j_0}| = \left|-\sum_{k\neq 1}^{m} a_{j_0k}x_k\right|$$

$$|a_{j_0j_0}|\,|x_{j_0}| \leq \left|\sum_{k\neq 1}^{m} |a_{j_0k}|\,|x_k|\right| \leq \sum_{k\neq 1}^{m} |a_{j_0k}|\,|x_k|$$

$$|a_{j_0j_0}|\,|x_{j_0}| \leq \sum_{k\neq 1}^{m} |a_{j_0k}|\,|x_k|$$

pero esto es un absurdo, por tanto, det. $\mathbf{A} \neq 0$.

Corolario

Si

$$\mathbf{B} = \begin{cases} b_{ij} \leq 0, \forall i \neq j \\ b_{ij} > 0, i \in \overline{m} \end{cases}$$

B es de diagonal dominante, si y sólo si, **B'** (su transpuesta) es de diagonal dominante.

Teorema 2

Sea

$$\mathbf{B} = \begin{cases} b_{ij} \leq 0, \forall i \neq j \\ b_{ij} > 0, i \in \overline{m} \end{cases}$$

B es de diagonal dominante si y sólo si,

$$\forall \mathbf{C} \exists! \mathbf{X} \geq \mathbf{O} \text{ tal que } \mathbf{BX} = \mathbf{C}.$$

Demostración

$\Rightarrow$) Sea **D** tal que **DB** es de diagonal dominante en el sentido de Hadamard,

$\Rightarrow$ **B** es no-singular, por el teorema anterior,

$\Rightarrow$ existe $\mathbf{B}^{-1}$ por el teorema de AL,

Sea $\mathbf{C} \geqq O$ y sea $X = B^{-1}C$, queremos demostrar que $\mathbf{X} \geqq \mathbf{O}$

Sea $J = \{j \in \overline{m} : X_j < 0\}$ y $X_j > 0$ si $j \notin J$.

Supongamos que $J \neq \emptyset$; si $i \in \overline{m}$

$$\sum_{k=1}^{m} b_{ik} X_k = c_i$$

$$\Rightarrow \sum_{k\notin J}^{m} b_{ik} X_k + \sum_{k\in J}^{m} b_{ik} X_k = c_i$$

si $i \in J$ entonces en la primera suma tenemos

$$b_{ik} \leq 0 \text{ y } X_k \geq 0,$$

además

$$b_{ii} > 0 \text{ y } X_i < 0$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{k\notin J \\ i=k}}^{m} b_{ik} X_k \leq 0 \text{ y } \sum_{\substack{k\in J \\ k\neq i}}^{m} b_{ik} X_k \geq 0_i$$

si esta última suma la multiplicamos por $d_i > 0$ y sumamos sobre las $i \in J$ entonces

$$\sum_{k\in J}^{m}\sum_{\substack{k\notin J\\ i=k}}^{m} d_i b_{ik} X_k = c_i \tag{7.1}$$

Ahora bien, como B es una matriz de diagonal dominante

$$d_j\,|b_{jj}| > \sum_{i\neq j} d_i\,|b_{ij}|\,, \forall j \in \overline{m}.$$

en particular si $j \in J$. Pero

$$\sum_{\substack{i\neq j\\ i\in J}}^{m} d_i\,|b_{ij}| < \sum_{i\neq j} d_i\,|b_{ij}| < d_j\,|b_{jj}|\,,$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{i\neq j\\ i\in J}}^{m} d_i\,|b_{ij}| < d_j\,|b_{jj}|\,,$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{i\neq j\\ i\in J}}^{m} d_i\,(-\,|b_{ij}|) + d_j\,|b_{jj}| = \sum_{i\in J} d_i b_{ij}$$

$$= \sum_{\substack{i\neq j\\ i\in J}}^{m} d_i b_{ij} + d_j b_{jj} \Rightarrow \sum_{i\in J} d_i b_{ij} > 0.$$

Si esta última suma la multiplicamos por X_j, que sabemos que es negativa:

$$\sum_{i\in J}^{m} d_i b_{ik} X_k,\ \text{ para } j \in J,$$

y sumamos sobre los índices j.

$$\Rightarrow \sum_{j\in J}^{m}\sum_{i\in J}^{m} d_i b_{ij} X_j \tag{7.2}$$

Pero las ecuaciones (1) y (2) son incompatibles, por tanto, es incorrecto suponer que $J \neq \varnothing$, entonces $J = \varnothing$ y $\mathbf{X} \geqq \mathbf{0}$

$\Leftarrow$) Sea $\mathbf{C} > \mathbf{0}$ y sabemos que existe un $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{BX} = \mathbf{C}$,

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m} b_{ij} X_j = C_i > 0$$

$$\Rightarrow b_{ii} X_i + \sum_{j\neq i}^{m} b_{ij} X_j = C_i >.$$

$$\Rightarrow b_{ii} X_i > \sum_{j\neq i}^{m} (-b_{ij})\, X_j \geq 0,$$

pero como $b_{ii} X_i > 0$, para $i \in \overline{m}$ entonces $X_i > 0$.

Sea $d_i = X_i > 0, \forall i \in \overline{m}$,

$$\Rightarrow d_i\,|b_{ii}| = X_i b_{ii} > \sum_{j \neq i}^{m} (-b_{ij})\, X_j = \sum_{j \neq i} |b_{ij}|\, d_j$$

por tanto, $\mathbf{B}^t$ (la transpuesta) es una matriz de diagonal dominante.

Como $\mathbf{B}^t$ cumple con las hipótesis de este mismo teorema, podemos aplicar la primera parte, es decir,

$$\forall \mathbf{C} \exists! \mathbf{Y} \geq \mathbf{O} \text{ tal que } \mathbf{B}^t\mathbf{Y} = \mathbf{C}.$$

y haciendo lo mismo que hicimos con $\mathbf{B}$ obtenemos que $(\mathbf{B}')' = \mathbf{B}$ es una matriz de diagonal dominante.

Corolario

Si $\mathbf{B}$ es una matriz tal que

$$\mathbf{B} = \begin{cases} b_{ij} \leq 0, \forall i \neq j \\ b_{ij} > 0, i \in \overline{m} \end{cases}$$

entonces $\mathbf{B}$ es de diagonal dominante, si, y sólo si, $\mathbf{B}'$ es de diagonal dominante.

Definición

Decimos que una matriz es **productiva** si y sólo si, existe un vector $\mathbf{X}$ no negativo tal que $\mathbf{X} > \mathbf{AX}$, es decir, $\mathbf{X} - \mathbf{AX} > \mathbf{0}$, si factorizamos $\mathbf{X}$ tenemos $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{BX} = \mathbf{C}$.

Teorema 3

Sea $\mathbf{A} \geqq \mathbf{O}$ mxm y sea $\mathbf{B} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

i) $\mathbf{A}$ es productiva, es decir, existe un $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{X} > \mathbf{AX}$, es decir, $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} > 0$, $\mathbf{BX} > \mathbf{0}$;

ii) Más en general, para todo $\mathbf{C} \geq \mathbf{0}$, existe un $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{BX} = \mathbf{C}$;

iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k$ converge;

iv) $\hat{\lambda}(\mathbf{A}) < 1$

Demostración

La estructura de la demostración es la siguiente:

(v)$\Leftrightarrow (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv)$

i)

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m} b_{ij} X_j > 0, i \in \overline{m}$$

$$\Rightarrow b_{ii} X_i + \sum_{j \neq 1}^{m} b_{ij} X_j > 0$$

por tanto, $b_{ii}X_i > 0$, y entonces se cumple que o bien $b_{ii} > 0$ o bien $\mathbf{X}_i > 0$, sea $d_i = X_i > 0$

$$\Rightarrow d_i\,|b_{ii}| = X_i b_{ii} > \sum_{i \neq j} |b_{ij}|\, d_j$$

$$\Rightarrow d_i |b_{ii}| > \sum_{i \neq j} |b_{ij}| d$$

$$\Rightarrow \mathbf{B} \text{ es de diagonal dominante}$$

entonces hemos demostrado i)$\Rightarrow$ *ii*)

Por tanto se cumplen las hipótesis del teorema 2, entonces concluimos que

$$\forall \mathbf{C} \geq 0 \exists! \mathbf{X} \geq \mathbf{O} \text{ tal que } \mathbf{BX} = \mathbf{C}.$$

entonces $\mathbf{B}$ es no-singular, existe $\mathbf{B}^{-1} \geqq \mathbf{O}$

Por hipótesis de ii) elegimos un $\mathbf{C}$ particular igual al vector de la base canónica $\mathbf{e}_j$

$$\Rightarrow \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_j \geqq 0$$

y representa la columna j-ésima de la matriz $\mathbf{B}$, por tanto, $\mathbf{B}^{-1}$ es no-negativa.

Demostraremos iii) $\Rightarrow$ *ii*)

Como $\mathbf{B}$ es no-singular y existe $\mathbf{B}^{-1} \geqq \mathbf{O}$, entonces si $\mathbf{C} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{X} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}$ y $\mathbf{BX} = \mathbf{C} > \mathbf{0}$.

Ya demostramos i)$\Leftrightarrow$ *ii*) $\Leftrightarrow$ *iii*)

Demostraremos iii)$\Leftrightarrow$ *iv*)

Sea

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \cdots + \mathbf{A}^n$$

consideremos el producto

$$\mathbf{T}_n\mathbf{B} = (\mathbf{I} + \mathbf{A} + \cdots + \mathbf{A}^n)(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{I} - \mathbf{A}^{n+1}$$

$$\Rightarrow \mathbf{T}_n\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{A}^{n+1}$$

$$\Rightarrow \mathbf{T}_n\mathbf{B} \leqq \mathbf{I}$$

Sabemos que existe $\mathbf{B}^{-1} \geqq \mathbf{O}$

$$\mathbf{T}_n\mathbf{B} \leqq \mathbf{I}$$

$$\mathbf{T}_n\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1} \leqq \mathbf{B}^{-1}$$

$$\mathbf{T}_n \leqq \mathbf{B}^{-1}$$

tenemos una sucesión creciente de matrices no-negativas acotadas superiormente por $\mathbf{B}^{-1}$.

Es creciente porque

$$\mathbf{T}_n \leqq \mathbf{T}_{n+1} \forall n \in N$$

entonces existe el límite

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{T}_n = \mathbf{T}$$

y la serie converge.

El término general converge a cero

$$\lim A^{n+1} = \mathbf{O}$$

sabemos que

$$\mathbf{T}_n\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{A}^{n+1}$$

esta afirmación no depende de si $\mathbf{B}$ es singular y sabemos que $\mathbf{A}^{n+1}$ converge a cero

$$\lim_{n\to\infty}(\mathbf{T}_n\mathbf{B}) = \lim_{n\to\infty}\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{n+1}\right)$$

$$\mathbf{TB} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{TBB}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \Rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

Por tanto

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{A}^k = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

con esto demostramos iv)$\Leftrightarrow$ *iii*).

Ahora vamos a demostrar *i*)$\Leftrightarrow$ *v*)

Como $\mathbf{A}$ es una matriz no-negativa productiva

$$\mathbf{X} > \mathbf{AX} = \hat{\lambda}\mathbf{X}$$

$$\Rightarrow 1\cdot\mathbf{X} > \mathbf{AX} = \hat{\lambda}\mathbf{X} \Rightarrow 1\cdot\mathbf{X} > \hat{\lambda}\mathbf{X}$$

aplicamos el teorema de Perron-Frobenius y concluimos que la raíz de Perron-Frobenius tiene que ser estrictamente menor que 1.

Una economía con crecimiento equilibrado

Consideremos el sistema

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{P} = \mathbf{D} \tag{7.3}$$

en donde:

$\mathbf{A} \geqq \mathbf{O}$: es una matriz de insumo-producto mxm

$\mathbf{I}$: es la matriz identidad de orden m.

$\mathbf{P} \geqq \mathbf{0}$: representa al vector de producción.

$\mathbf{D} \geqq \mathbf{0}$: representa al vector de demanda.

Supongamos que existe una diferencia temporal entre la producción y el consumo. En general primero se produce y el consumo. En general primero se produce y luego viene el consumo. Este retraso se llama *retraso temporal*. (*time-lag*). Supongamos que el retraso es igual a 1. Y supongamos que tanto el vector de demanda como el vector de producción cambian con el tiempo t. Entonces

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(t) \geqq 0, \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{t}) \geqq \mathbf{0} \tag{7.4}$$

En esta economía $\mathbf{P}(t)$ se produce en el período t y se consume en el período $t+1$, es decir, $\mathbf{P}(t)$ cubre la demanda final $\mathbf{D}(t+1)$ y los insumos $\mathbf{AP}(t+1)$ se requieren en el período $t+1$. Esta relación se expresa como:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{AP}(t+1) + \mathbf{D}(t+1) \tag{7.5}$$

¿Cuándo se produce un crecimiento equilibrado?

Esto se cumple cuando hay un crecimiento proporcional. Es decir, cuando existe $\gamma \geqq 0$ tal que

$$\begin{cases} \mathbf{P}(t+1) = \gamma \mathbf{P}(t) \\ \mathbf{D}(t+1) = \gamma \mathbf{D}(t) \end{cases} \tag{7.6}$$

Si $\gamma = 1 + \alpha$, α representa la *tasa de crecimiento*

$$\begin{cases} \mathbf{P}(t+1) = (1+\alpha)\mathbf{P}(t) \\ \mathbf{D}(t+1) = (1+\alpha)\mathbf{D}(t) \end{cases} \tag{7.7}$$

Cambiando (3) y (4) se deduce que

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{A}\gamma\mathbf{P}(t) + \gamma\mathbf{D}(t)$$

entonces

$$\frac{1}{\gamma}\mathbf{P}(t) - \mathbf{A}\mathbf{P}(t) = \mathbf{D}(t)$$

$$(\mathbf{I}\frac{1}{\gamma} - \mathbf{A})\mathbf{P}(t) = \mathbf{D}(t).$$

Llamo $\lambda = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{1+\alpha}$

$$(\lambda I - \mathbf{A})\mathbf{P}(t) = \mathbf{D}(t) \tag{7.8}$$

Este sistema representa una relación entre $\mathbf{P}(t)$ y $\mathbf{D}(t)$ en el mismo período de tiempo.

Además si $t = 0$ entonces

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{P}(0) = \mathbf{D}(0).$$

Dado $\mathbf{D}(0) > 0$, tiene una solución no negativa

$$\mathbf{P}(0) \geqq 0 \Longleftrightarrow \lambda \leq \hat{\lambda}(\mathbf{A}) \tag{7.9}$$

donde $\hat{\lambda}(\mathbf{A})$ es la raíz de Perron-Frobenius, entonces

$$\frac{1}{\gamma} = \lambda = \frac{1}{1+\alpha} \leq \hat{\lambda}(\mathbf{A})$$

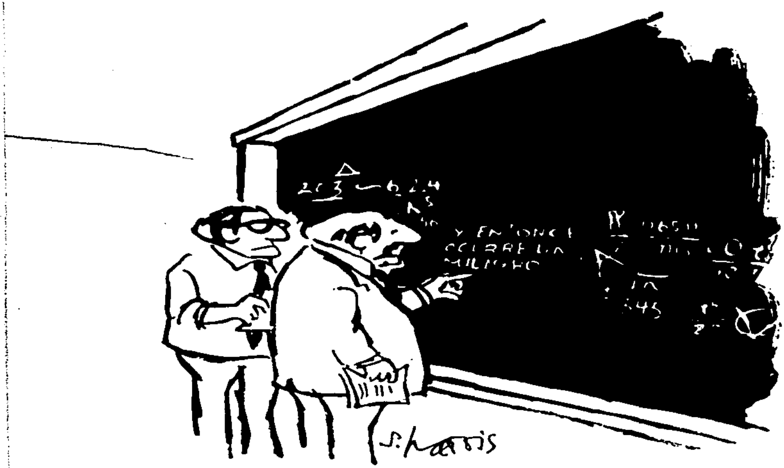
Si γ satisface (6) entonces existe un crecimiento equilibrado, entonces

$$\frac{1}{1+\alpha} \leq \hat{\lambda}(\mathbf{A}) \;\Rightarrow 1+\alpha \geq \frac{1}{\hat{\lambda}(\mathbf{A})}$$

$$\alpha \geq \frac{1}{\hat{\lambda}(\mathbf{A})} - 1 \text{ y } \alpha > 0$$

representa la tasa de crecimiento positiva, ya que $\hat{\lambda} < 1$.

APÉNDICE



"Creo que debería explicar mejor el segundo paso"

Mathematische Annalen 64, (1907)

Zur Theorie der Matrices.

Von

Oskar Perron in München.

In dieser Note werden zum Teil bekannte Sätze aus der Theorie der Matrices und ihrer charakteristischen Gleichung auf neue, höchst einfache Weise bewiesen, zum Teil neue Sätze entwickelt. Unter den Anwendungen der Theorie hebe ich ein der Gräffeschen Methode analoges Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung hervor.

§ 1.

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

das Koeffizientensystem einer linearen Substitution von n Variabeln, E das der identischen Substitution. Soweit im folgenden bloß solche Koeffizientensysteme oder kürzer *Matrices* vorkommen, die rationale Funktionen von A, also miteinander vertauschbar sind, dürfen alle rationalen Rechenoperationen genau wie bei Zahlen ausgeführt werden. Bezeichnet man die Elemente der Potenz A^ν mit $a_{ik}^{(\nu)}$, so daß also $a_{ik}^{(1)}$ mit a_{ik} gleichbedeutend ist, so ist wegen $A^{\nu+\mu} = A^\nu A^\mu$:

$$a_{ik}^{(\nu+\mu)} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda}^{(\nu)} a_{\lambda k}^{(\mu)}. \tag{1}$$

Konsequenterweise sollen auch die Elemente der Einheitssubstitution $E = A^0$ mit $a_{ik}^{(0)}$ bezeichnet werden; es ist also

$$a_{ik}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k, \\ 1 & \text{für } i = k, \end{cases}$$

und (1) gilt auch noch, wenn ν oder μ oder beide gleich Null sind.

Sind $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$, $C = (c_{ik})$ beliebige Matrices, so sind die Gleichungen

$$A = B \quad \text{oder} \quad A = BC$$

gleichbedeutend mit

$$a_{ik} = b_{ik} \quad \text{bez.} \quad a_{ik} = \sum_{\lambda=1}^{n} b_{i\lambda} c_{\lambda k} \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n).$$

Die im folgenden häufig ausgeführte Umsetzung der ersten in diese zweite Form mag kurz als *Übergang von den Matrices zu ihren Elementen* bezeichnet werden.

Die Elemente $a_{ik}^{(\nu)}$ sind ganze Funktionen von $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{nn}$. Für ihre partiellen Differentialquotienten findet man durch den Schluß von ν auf $\nu + 1$ die Formel:

$$\frac{\partial a_{ik}^{(\nu)}}{\partial a_{rs}} = \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} a_{ir}^{(\lambda)} a_{sk}^{(\nu-1-\lambda)}. \tag{2}$$

Die Determinante $|E\varrho - A|$ werde mit $f(\varrho)$ bezeichnet, so daß $f(\varrho) = 0$ die *charakteristische Gleichung* der Matrix A ist; ihre Minoren mit $g_{ik}(\varrho)$, und zwar

$$\frac{\partial |E\varrho - A|}{\partial(-a_{ki})} = g_{ik}(\varrho),$$

so daß

$$\frac{Ef(\varrho)}{E\varrho - A} = \begin{pmatrix} g_{11}(\varrho) & g_{12}(\varrho) & \cdots & g_{1n}(\varrho) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1}(\varrho) & g_{n2}(\varrho) & \cdots & g_{nn}(\varrho) \end{pmatrix} \tag{3}$$

wird. Daher ist die Matrix $Ef(\varrho)$ als Funktion von ϱ teilbar durch $E\varrho - A$; da aber offenbar das gleiche von

$$Ef(\varrho) - f(A) = f(E\varrho) - f(A)$$

gilt, so muß auch $f(A)$ durch $E\varrho - A$ teilbar sein, und da $f(A)$ von ϱ gar nicht abhängt, so ist

$$f(A) = 0. \tag{4}$$

Bedeutet $\vartheta(\varrho)$ den größten gemeinsamen Faktor der Funktionen $g_{ik}(\varrho)$, so ist wegen (3) auch schon $E\frac{f}{\vartheta}(\varrho)$ teilbar durch $E\varrho - A$, und daher nach der gleichen Deduktion auch

$$\frac{f}{\vartheta}(A) = 0.$$

Soll umgekehrt φ die Funktion niedrigsten Grades sein, für welche $\varphi(A) = 0$ ist, so muß, weil $\varphi(E\varrho) - \varphi(A)$ durch $E\varrho - A$ teilbar ist, auch schon $E\varphi(\varrho)$ durch $E\varrho - A$ teilbar sein. Die Elemente von $\frac{E\varphi(\varrho)}{E\varrho - A}$ sind aber nach (3): $\frac{g_{ik}(\varrho)\varphi(\varrho)}{f(\varrho)}$, und dies sind dann und nur dann lauter ganze Funktionen, wenn $\varphi(\varrho)$ durch $\frac{f}{\vartheta}(\varrho)$ teilbar ist, also muß $\varphi = \frac{f}{\vartheta}$ sein. Diese Herleitung der bekannten Sätze erscheint mir einfacher als die bis jetzt gegebenen.

Zwischen den Funktionen $g_{ik}(\rho)$ besteht die interessante Beziehung

$$(5)\qquad \sum_{\kappa=1}^{n} g_{i\kappa}(\rho)\, g_{\kappa k}(\sigma) = \frac{1}{\rho-\sigma}\left(f(\rho)\, g_{ik}(\sigma) - f(\sigma)\, g_{ik}(\rho)\right).$$

Der Beweis folgt sehr einfach aus der Identität:

$$E = \frac{1}{\rho-\sigma}\left[(E\rho - A) - (E\sigma - A)\right];$$

multipliziert man diese nämlich beiderseits mit $\frac{Ef(\rho)}{E\rho-A}\,\frac{Ef(\sigma)}{E\sigma-A}$, so folgt:

$$\frac{Ef(\rho)}{E\rho-A}\,\frac{Ef(\sigma)}{E\sigma-A} = \frac{1}{\rho-\sigma}\left[f(\rho)\,\frac{Ef(\sigma)}{E\sigma-A} - f(\sigma)\,\frac{Ef(\rho)}{E\rho-A}\right]$$

und hieraus Formel (5) einfach durch Übergang von den Matrices zu ihren Elementen. Für $\sigma = \rho$ ergibt sich aus (5):

$$(5a)\qquad \sum_{\kappa=1}^{n} g_{i\kappa}(\rho)\, g_{\kappa k}(\rho) = f'(\rho)\, g_{ik}(\rho) - f(\rho)\, g'_{ik}(\rho)\,{}^{*)}$$

Aus Formel (5) fließt ein neuer sehr einfacher Beweis des Satzes von der Realität der Wurzeln der Säkulargleichung und sogar des folgenden allgemeineren Satzes von **Hermite**:

*Wenn die Zahlenpaare a_{ik}, a_{ki} komplex-konjugiert sind, also insbesondere auch a_{ii} reell, so hat die Gleichung $f(\rho) = 0$ lauter reelle Wurzeln.***)

Zunächst ist leicht zu sehen, daß die Koeffizienten von $f(\rho)$ reell sind; denn die Determinante $|E\rho - A|$ ändert sich nicht, wenn man die Zeilen zu Kolonnen macht und gleichzeitig $\sqrt{-1}$ durch $-\sqrt{-1}$ ersetzt. Wenn jetzt $f(\rho)$ ein Paar komplex-konjugierter Wurzeln ρ_0, ρ_1 hat, so setze man in (5): $\rho = \rho_0$, $\sigma = \rho_1$; dann folgt für $i = k$:

$$\sum_{\kappa=1}^{n} g_{i\kappa}(\rho_0)\, g_{\kappa i}(\rho_1) = 0.$$

Hier sind aber nach unserer Voraussetzung über die a_{ik} die Terme der linken Seite sämtlich Normen von komplexen Zahlen, also $\geqq 0$; sie müssen daher einzeln verschwinden. Insbesondere wird $g_{ii}(\rho_0) = 0$. Jede komplexe Wurzel würde also auch die Hauptunterdeterminanten zum Verschwinden bringen; indem man von diesen wieder zu den Hauptunterdeterminanten übergeht, usw., folgt schließlich, daß auch $\rho_0 - a_{ii} = 0$ sein müßte, was nicht angeht, da a_{ii} reell ist.

Unter den gleichen Voraussetzungen über die a_{ik}, als speziell auch für die Säkulargleichung, ergibt sich ebensoleicht durch Zuziehung von (5a): *Für eine Doppelwurzel von $f(\rho) = 0$ verschwinden auch sämtliche Unterdeterminanten $g_{ii}(\rho)$.*

*) Diese spezielle Formel entsteht auch, wenn man die bekannte Determinantenbeziehung

$$\frac{\partial f}{\partial(-a_{ii})}\,\frac{\partial f}{\partial(-a_{\kappa\kappa})} - \frac{\partial f}{\partial(-a_{i\kappa})}\,\frac{\partial f}{\partial(-a_{\kappa i})} = f\,\frac{\partial^2 f}{\partial(-a_{ii})\,\partial(-a_{\kappa\kappa})}$$

nach κ summiert.

) **Hermite, Comptes Rendus 41, pag. 181, wo der Beweis mittels Sturmscher Ketten geführt wird.

§ 2.

Für die Beurteilung des gleichzeitigen Verschwindens der Unterdeterminanten von $|E\rho - A|$ ist von Wichtigkeit die Kenntnis der *Resultante von $f(\rho)$ und $g_{ik}(\rho)$.* Um diese zu bilden, setze man

$$f(\rho) = \rho^n + c_1\rho^{n-1} + c_2\rho^{n-2} + \cdots + c_n$$

und führe weiter die Funktionen ein:

$$\begin{aligned} f_0(\rho) &= 1,\\ f_1(\rho) &= \rho + c_1,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ f_{n-1}(\rho) &= \rho^{n-1} + c_1\rho^{n-2} + \cdots + c_{n-1}. \end{aligned}$$

Dann ist identisch

$$(6)\qquad \begin{aligned} A^\nu\,\frac{f(\rho)}{E\rho-A} &= A^\nu\,\frac{f(E\rho)-f(A)}{E\rho-A}\\ &= A^\nu\left(Ef_{n-1}(\rho) + Af_{n-2}(\rho) + \cdots + A^{n-1}f_0(\rho)\right)\\ &= A^\nu f_{n-1}(\rho) + A^{\nu+1}f_{n-2}(\rho) + \cdots + A^{\nu+n-1}f_0(\rho); \end{aligned}$$

andererseits ist aber auch

$$(7)\qquad \begin{aligned} A^\nu\,\frac{f(\rho)}{E\rho-A} &= \frac{E\rho^\nu f(\rho)}{E\rho-A} - (E\rho^\nu - A^\nu)\,\frac{f(\rho)}{E\rho-A}\\ &= \rho^\nu\,\frac{f(\rho)}{E\rho-A} - f(\rho)\,\frac{(E\rho)^\nu - A^\nu}{E\rho-A}\\ &= \rho^\nu\,\frac{f(\rho)}{E\rho-A} - f(\rho)\left(E\rho^{\nu-1} + A\rho^{\nu-2} + \cdots + A^{\nu-1}\right). \end{aligned}$$

Indem man die rechten Seiten von (6) und (7) einander gleichsetzt und von den Matrices zu ihren Elementen übergeht, erhält man:

$$(8)\qquad \begin{aligned} &a_{ik}^{(\nu)} f_{n-1}(\rho) + a_{ik}^{(\nu+1)} f_{n-2}(\rho) + \cdots + a_{ik}^{(\nu+n-1)} f_0(\rho)\\ &= \rho^\nu g_{ik}(\rho) - f(\rho)\left(a_{ik}^{(0)}\rho^{\nu-1} + a_{ik}^{(1)}\rho^{\nu-2} + \cdots + a_{ik}^{(\nu-1)}\right), \end{aligned}$$

eine Formel, die sich auch durch den Schluß von ν auf $\nu + 1$ erweisen ließe; für $\nu = 0$ fällt rechts in (7) und also auch in (8) das zweite Glied weg.

Sind $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ die Wurzeln von $f(\rho)$, so folgt aus (8) insbesondere:

$$(8a)\quad a_{ik}^{(\nu)} f_{n-1}(\rho_\lambda) + a_{ik}^{(\nu+1)} f_{n-2}(\rho_\lambda) + \cdots + a_{ik}^{(\nu+n-1)} f_0(\rho_\lambda) = \rho_\lambda^{\nu} g_{ik}(\rho_\lambda)$$
$$(\lambda = 1, 2, \cdots, n).$$

Für $\nu = 0, 1, \cdots, n-1$, $\lambda = 1, 2, \cdots, n$ entspringt aus (8a) ein System von n^2 Gleichungen, welche zusammen die Übereinstimmung der beiden Matrixprodukte aussagen:

$$(9)\quad \begin{pmatrix} a_{ik}^{(0)} & a_{ik}^{(1)} & \cdots & a_{ik}^{(n-1)} \\ a_{ik}^{(1)} & a_{ik}^{(2)} & \cdots & a_{ik}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{ik}^{(n-1)} & a_{ik}^{(n)} & \cdots & a_{ik}^{(2n-2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-1}(\rho_1) & \cdots & f_{n-1}(\rho_n) \\ f_{n-2}(\rho_1) & \cdots & f_{n-2}(\rho_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_0(\rho_1) & \cdots & f_0(\rho_n) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \rho_1 & \cdots & \rho_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_1^{n-1} & \cdots & \rho_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{ik}(\rho_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{ik}(\rho_2) & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & g_{ik}(\rho_n) \end{pmatrix}.$$

Geht man hier zu den Determinanten über, so wird der zweite Faktor links, vom Zeichen $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ abgesehen, gleich dem ersten Faktor rechts, und da dieser, wenn die ρ_λ beliebig sind, bekanntlich nicht verschwindet, so folgt schließlich:

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{ik}^{(0)} & a_{ik}^{(1)} & \cdots & a_{ik}^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{ik}^{(n-1)} & a_{ik}^{(n)} & \cdots & a_{ik}^{(2n-2)} \end{vmatrix} = \prod_{\lambda=1}^{n} g_{ik}(\rho_\lambda) = R(f, g_{ik}).$$

Hiermit ist bereits ein Ausdruck für die gesuchte Resultante gewonnen. Indes ist die Determinante links keine irreduzible Funktion der a_{ik}, vielmehr folgt leicht vermittels (1), daß sie das (zeilenweise gebildete) Produkt der beiden Determinanten ist:

$$(10)\quad P_i = \begin{vmatrix} a_{i1}^{(0)} & a_{i2}^{(0)} & \cdots & a_{in}^{(0)} \\ a_{i1}^{(1)} & a_{i2}^{(1)} & \cdots & a_{in}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1}^{(n-1)} & a_{i2}^{(n-1)} & \cdots & a_{in}^{(n-1)} \end{vmatrix}, \qquad Q_k = \begin{vmatrix} a_{1k}^{(0)} & a_{2k}^{(0)} & \cdots & a_{nk}^{(0)} \\ a_{1k}^{(1)} & a_{2k}^{(1)} & \cdots & a_{nk}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1k}^{(n-1)} & a_{2k}^{(n-1)} & \cdots & a_{nk}^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Die Resultante $R(f, g_{ik})$ zerfällt also in zwei Faktoren, deren erster nur von i, deren zweiter nur von k abhängt:

$$(11)\quad R(f, g_{ik}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} P_i Q_k.$$

Multipliziert man (9) mit einer Unbestimmten u_{ik} und summiert über i, k, so liefert die gleiche Betrachtung auch die allgemeinere Formel:

$$(12)\quad R\left(f, \sum u_{ik} g_{ik}\right) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} \sum u_{ik} a_{ik}^{(0)} & \sum u_{ik} a_{ik}^{(1)} & \cdots & \sum u_{ik} a_{ik}^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum u_{ik} a_{ik}^{(n-1)} & \sum u_{ik} a_{ik}^{(n)} & \cdots & \sum u_{ik} a_{ik}^{(2n-2)} \end{vmatrix}.$$

Die Funktionen $g_{ik}(\rho)$ haben daher dann und nur dann alle eine gemeinsame Wurzel, wenn die Determinante (12) identisch in $u_{11}, u_{12}, \cdots, u_{nn}$ verschwindet. Wenn, etwas weniger allgemein, $u_i v_k$ an Stelle von u_{ik} tritt, so zerfällt die Determinante (12) wieder in zwei Faktoren, nämlich

$$(13)\quad (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} R\left(f, \sum u_i v_k g_{ik}\right)$$
$$= \begin{vmatrix} \sum u_i a_{i1}^{(0)} & \sum u_i a_{i2}^{(0)} & \cdots & \sum u_i a_{in}^{(0)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum u_i a_{i1}^{(n-1)} & \sum u_i a_{i2}^{(n-1)} & \cdots & \sum u_i a_{in}^{(n-1)} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sum v_k a_{1k}^{(0)} & \sum v_k a_{2k}^{(0)} & \cdots & \sum v_k a_{nk}^{(0)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum v_k a_{1k}^{(n-1)} & \sum v_k a_{2k}^{(n-1)} & \cdots & \sum v_k a_{nk}^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Setzt man alle u gleich 0 bis auf eines, u_i, so folgt hieraus speziell, daß $R\left(f, \sum_k v_k g_{ik}\right)$ den Faktor P_i hat. Wenn also P_i verschwindet, so haben die Funktionen $f(\rho)$ und $\sum_k v_k g_{ik}(\rho)$ für beliebige v_k eine Nullstelle gemein, und daher haben

$$f(\rho),\ g_{i1}(\rho),\ g_{i2}(\rho),\ \cdots,\ g_{in}(\rho)$$

eine gemeinsame Wurzel. Wenn umgekehrt diese Funktionen eine gemeinsame Wurzel haben, so muß auch notwendig $P_i = 0$ sein. Denn addiert man in der Determinante P_i (Formel (10)) zu den Elementen der letzten Zeile die mit $f_{n-1}(\rho)$ multiplizierten Elemente der ersten, die mit $f_{n-2}(\rho)$ multiplizierten Elemente der zweiten usw., so nimmt P_i wegen (8) (für $\nu = 0$) die Gestalt an:

$$P_i = \begin{vmatrix} a_{i1}^{(0)} & a_{i2}^{(0)} & \cdots & a_{in}^{(0)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1}^{(n-2)} & a_{i2}^{(n-2)} & \cdots & a_{in}^{(n-2)} \\ g_{i1}(\rho) & g_{i2}(\rho) & \cdots & g_{in}(\rho) \end{vmatrix} = \sum_k \Phi_{ik} g_{ik}(\rho),$$

woraus die Behauptung folgt.

Analoges gilt bezüglich der Funktionen Q_i. Damit also alle $g_{ik}(\rho)$ eine gemeinsame Wurzel haben, ist notwendig, daß alle P_i und alle Q_i verschwinden. Es wäre aber ein Irrtum, aus dem Obigen schließen zu wollen, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind. Das gleichzeitige Verschwinden von P_i und P_k bewirkt nämlich nur, daß $f(\rho)$ sowohl mit

$$g_{i1}(\rho),\ g_{i2}(\rho),\ \cdots,\ g_{in}(\rho),$$

als auch mit

$$g_{1k}(\rho),\ g_{2k}(\rho),\ \cdots,\ g_{nk}(\rho)$$

je eine Wurzel gemein hat; doch ist dies im allgemeinen, wie man sich leicht durch Beispiele überzeugt, *nicht die gleiche Wurzel*. Damit letzteres der Fall ist, müssen noch weitere Bedingungen erfüllt sein.

§ 3.

Daß die Resultante $R(f, g_{ik})$ in zwei Faktoren zerfällt, deren erster nur von i, deren zweiter nur von k abhängt, läßt sich nach bekannten Determinantensätzen a priori erwarten. Denn es ist ja

$$\begin{vmatrix} g_{rr}(\rho) & g_{rs}(\rho) \\ g_{sr}(\rho) & g_{ss}(\rho) \end{vmatrix} = f(\rho)\,\frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial(-a_{rr})\,\partial(-a_{ss})}.$$

Wenn also $f(\rho)$ und $g_{ik}(\rho)$ verschwindet, so muß zugleich auch $g_{ir}(\rho)g_{sk}(\rho)$ verschwinden für beliebige r, s, also entweder $g_{i1}, g_{i2}, \cdots, g_{in}$ oder $g_{1k}, g_{2k}, \cdots, g_{nk}$. Die Resultante $R(f, g_{ik})$ wird also einen Faktor haben, der nur von i, und einen, der nur von k abhängt.

Es fragt sich nun weiter, ob etwa die P_i, Q_i irreduzible Funktionen der a_{rs} sind, oder ob sie wieder zerfallen. Mit der Entscheidung dieser Frage verbinden wir eine genauere Diskussion der betreffenden Funktionen.

Differenziert man in der Determinante P_i (Formel (10_i)) die Elemente einer beliebigen, etwa der $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Zeile nach a_{ri}, so werden nach (2) die Elemente dieser Zeile

$$\frac{\partial a_{i1}^{(\nu)}}{\partial a_{ri}} = \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} a_{ir}^{(\lambda)} a_{i1}^{(\nu-1-\lambda)},\ \frac{\partial a_{i2}^{(\nu)}}{\partial a_{ri}} = \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} a_{ir}^{(\lambda)} a_{i2}^{(\nu-1-\lambda)},\ \cdots,\ \frac{\partial a_{in}^{(\nu)}}{\partial a_{ri}} = \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} a_{ir}^{(\lambda)} a_{in}^{(\nu-1-\lambda)};$$

sie setzen sich also linear aus den Elementen der vorhergehenden Zeilen zusammen.*) Daher verschwindet die Determinante und es folgt:

$$\frac{\partial P_i}{\partial a_{ri}} = 0.$$

Somit hängt P_i von $a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}$ gar nicht ab, und man kann unbeschadet der Allgemeinheit bei Bildung von P_i statt die Matrix A die

*) Für $\nu = 0$ sind diese Formeln nicht anwendbar; aber in diesem Fall sind die fraglichen Elemente offenbar alle gleich Null.

speziellere wählen, bei der die Elemente der i^{ten} Kolonne sämtlich verschwinden.

Die Irreduzibilität von P_i beweisen wir nun durch vollständige Induktion. Für $n = 2$ ist

$$P_1 = a_{12},\quad P_2 = -a_{21},$$

also irreduzibel; wir setzen daher für ein bestimmtes n voraus, daß $P_1, P_2, \cdots, P_n$ irreduzibel sind, und bilden dann die $(n+1)$-reihige Matrix:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & 0 & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,i-1} & 0 & a_{i-1,i} & \cdots & a_{i-1,n} \\ u_1 & \cdots & u_{i-1} & 0 & u_i & \cdots & u_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & 0 & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Die ν^{te} Potenz hiervon wird, wie leicht zu sehen,

$$A'^{\nu} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(\nu)} & \cdots & a_{1,i-1}^{(\nu)} & 0 & a_{1i}^{(\nu)} & \cdots & a_{1n}^{(\nu)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1}^{(\nu)} & \cdots & a_{i-1,i-1}^{(\nu)} & 0 & a_{i-1,i}^{(\nu)} & \cdots & a_{i-1,n}^{(\nu)} \\ \sum_s u_s a_{s1}^{(\nu-1)} & \cdots & \sum_s u_s a_{s,i-1}^{(\nu-1)} & 0 & \sum_s u_s a_{si}^{(\nu-1)} & \cdots & \sum_s u_s a_{sn}^{(\nu-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}^{(\nu)} & \cdots & a_{n,i-1}^{(\nu)} & 0 & a_{ni}^{(\nu)} & \cdots & a_{nn}^{(\nu)} \end{pmatrix}.$$

Bezeichnet man daher mit P_i' diejenige Determinante, welche in bezug auf die Matrix A' die gleiche Bedeutung hat wie P_i in bezug auf die Matrix A (Formel (10_i)), so wird, wenn δ_{ik} die 0 oder 1 bedeutet, je nachdem $i \neq k$ oder $i = k$ ist,

$$P_i' = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \cdots & \delta_{i,i-1} & \delta_{ii} & \delta_{i,i+1} & \cdots & \delta_{i,n+1} \\ u_1 & \cdots & u_{i-1} & 0 & u_i & \cdots & u_n \\ \sum u_s a_{s1} & \cdots & \sum u_s a_{s,i-1} & 0 & \sum u_s a_{si} & \cdots & \sum u_s a_{sn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum u_s a_{s1}^{(n-1)} & \cdots & \sum u_s a_{s,i-1}^{(n-1)} & 0 & \sum u_s a_{si}^{(n-1)} & \cdots & \sum u_s a_{sn}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} \sum u_s a_{s1}^{(0)} & \cdots & \sum u_s a_{sn}^{(0)} \\ \sum u_s a_{s1}^{(1)} & \cdots & \sum u_s a_{sn}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum u_s a_{s1}^{(n-1)} & \cdots & \sum u_s a_{sn}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i-1}(u_1^n P_1 + \cdots + u_i^n P_i + \cdots).$$

Da $P_1, P_2, \cdots, P_n$ nach Voraussetzung irreduzibel sind, so kann hiernach P_i' offenbar nur in der Weise zerfallen, daß ein Faktor $\varphi(u_1, \cdots, u_n)$ sich abspaltet, der von den a_{ik} ganz frei ist. Dies ist aber nicht möglich; denn es müßte alsdann die Determinante P_i' für gewisse numerische Werte von $u_1, \cdots, u_n$ verschwinden, und da sie nach (13) ein Faktor von $R\left(f, \sum u_i r_i g_{ii}\right)$ ist, so müßten für diese Werte $f(\varrho)$ und $\sum u_i r_i g_{ii}(\varrho)$ eine Wurzel gemein haben. Dies ist aber nicht möglich, weil $f(\varrho)$ von höherem Grad als $\sum u_i r_i g_{ii}(\varrho)$ und bekanntlich irreduzibel ist.

Die obige Darstellung von P_i' zeigt zugleich, daß dies eine homogene Funktion n^{ten} Grades von $u_1, \cdots, u_n$ ist, und dies kann sich nach dem zuvor Bewiesenen auch nicht ändern, wenn in der Matrix A' an Stelle der Nullen in der i^{ten} Kolonne beliebige Elemente treten. Ebenso wird, indem man wieder n an Stelle von $n+1$ setzt, P_1 homogen vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad in $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}$ sein. Diese Resultate fassen wir zusammen in folgendem

Satz: *Die Funktionen $P_1, P_2, \cdots, P_n$ sind irreduzibel im Bereich der Variabeln a_{ik} (und beliebiger numerischer Werte); P_i hängt von $a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}$ nicht ab und ist eine homogene Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ (a_{ii} ausgeschlossen)*

Analog ergibt sich auch:

Die Funktionen $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ sind irreduzibel im Bereich der Variabeln a_{ik} (und beliebiger numerischer Werte); Q_i hängt von $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ nicht ab, und ist eine homogene Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von $a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}$ (a_{ii} ausgeschlossen).

Wenn die a_{ik} nicht unabhängig voneinander sind, so können natürlich die P_i, Q_i sehr wohl zerfallen. Doch mag bemerkt werden, daß sie noch irreduzibel bleiben, wenn die Matrix A eine symmetrische, d. h. $a_{ik} = a_{ki}$ ist, sonst aber die a_{ik} keiner Bedingung unterliegen. Außerdem ist dann $P_i = Q_i$, und ebenfalls wieder P_i homogen vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad in $a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}$ (a_{ii} ausgeschlossen); von a_{ii} hängt P_i wieder nicht ab.

§ 4.

Für die Berechnung der $a_{ik}^{(\nu)}$ ist in (1) eine Rekursionsformel angegeben, *sie lassen sich aber mit Hilfe der Wurzeln der charakteristischen Gleichung auch in independenter Form darstellen.* Seien $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_m$ die verschiedenen Wurzeln von $f(\varrho)$, und zwar ϱ_i eine $r_i$fache, so daß

$$(14) \qquad f(\varrho) = (\varrho-\varrho_1)^{r_1}\varphi_1(\varrho) = \cdots = (\varrho-\varrho_m)^{r_m}\varphi_m(\varrho)$$

gesetzt werden kann, wo nun $\varphi_i(\varrho_i) \neq 0$ ist. Dann liefert die Theorie der Partialbrüche die Identität:

$$\frac{x^\nu}{f(x)} = E(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(r_i-1)!} D_\zeta^{r_i-1}\left[\frac{\zeta^{r_i}(\varrho_i+\zeta)^\nu}{f(\varrho_i+\zeta)(x-\varrho_i-\zeta)}\right]_{\zeta=0} \text{*)},$$

wo $E(x)$ eine ganze Funktion bedeutet, und durch das Zeichen D_ζ^r die r^{te} Ableitung nach ζ angedeutet wird. Statt dessen kann man auch schreiben, wenn man $\varrho_i + \zeta = \varrho$ setzt und mit $f(x)$ multipliziert:

$$x^\nu = E(x)f(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(r_i-1)!} D_\varrho^{r_i-1}\left(\frac{\varrho^\nu}{\varphi_i(\varrho)}\frac{f(x)}{x-\varrho}\right)_{\varrho=\varrho_i}$$

Nun ist offenbar

$$D_\varrho^{r_i-1}\left(\frac{\varrho^\nu}{\varphi_i(\varrho)}\frac{f(\varrho)}{x-\varrho}\right)_{\varrho=\varrho_i} = D_\varrho^{r_i-1}\left(\frac{\varrho^\nu(\varrho-\varrho_i)^{r_i}}{x-\varrho}\right)_{\varrho=\varrho_i} = 0,$$

so daß an Stelle der letzten Gleichung auch die folgende treten kann:

$$x^\nu = E(x)f(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(r_i-1)!} D_\varrho^{r_i-1}\left(\frac{\varrho^\nu}{\varphi_i(\varrho)}\frac{f(\varrho)-f(x)}{\varrho-x}\right)_{\varrho=\varrho_i}$$

Da dies eine Identität in x ist, so entsteht auch eine richtige Gleichung, wenn an Stelle von x die Matrix A tritt; wegen $f(A) = 0$ folgt dann

$$A^\nu = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(r_i-1)!} D_\varrho^{r_i-1}\left(\frac{\varrho^\nu}{\varphi_i(\varrho)}\frac{Ef(\varrho)}{E\varrho-A}\right)_{\varrho=\varrho_i},$$

oder, indem man von den Matrices zu ihren Elementen übergeht:

$$(15) \qquad a_{ik}^{(\nu)} = \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{(r_l-1)!} D_\varrho^{r_l-1}\left(\frac{\varrho^\nu g_{ki}(\varrho)}{\varphi_l(\varrho)}\right)_{\varrho=\varrho_l}$$

Dies ist die gesuchte Formel. Von jetzt ab soll der Einfachheit wegen vorausgesetzt werden, daß die Wurzeln der charakteristischen Gleichung alle verschieden sind (prinzipielle Schwierigkeiten würde die Behandlung des allgemeinen Falles nicht bieten). Formel (15) geht dann über in

$$(15a) \qquad a_{ik}^{(\nu)} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\varrho_l^\nu g_{ki}(\varrho_l)}{f'(\varrho_l)}.$$

Ist ϱ_1 absolut größer als die andern Wurzeln, so folgt hieraus

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_{ik}^{(\nu)}}{\varrho_1^\nu} = \frac{g_{ki}(\varrho_1)}{f'(\varrho_1)},$$

*) Man sehe etwa: Serret, Handbuch der höhern Algebra, 2. Aufl. Art. 223.

und daraus wieder, sofern nur $g_{ik}(\varrho_1) \neq 0$ ist*):

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{a_{ik}^{(\nu)}} = \varrho_1 \quad \text{und} \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{ik}^{(\nu)}} = \varrho_1;$$

allgemeiner auch:

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\sum_{i,k} u_{ik} a_{ik}^{(\nu)}} = \varrho_1 \quad \text{und} \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{\sum_{i,k} u_{ik} a_{ik}^{(\nu+1)}}{\sum_{i,k} u_{ik} a_{ik}^{(\nu)}} = \varrho_1,$$

wo die u_{ik} irgend welche Werte sind, für welche $\sum u_{ik} g_{ik}(\varrho_1) \neq 0$ ist.

Diese Formeln können zur näherungsweisen Berechnung der Wurzel ϱ_1 benutzt werden. Man bilde zu diesem Zweck sukzessive die Matrices

$$A^2, A^4, A^8, \cdots, A^{2^\nu}.$$

Die Wurzeln der zugehörigen charakteristischen Gleichungen sind bez. die $2, 4, 8, \cdots^{\text{te}}$ Potenzen der Wurzeln von $f(\varrho)$, und das Verfahren ist also ganz analog der *Näherungsmethode von Gräffe*, die sogar als Spezialfall daraus hervorgeht, wenn

$$u_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = k, \\ 0 \text{ für } i \neq k \end{cases}$$

gesetzt wird (es ist nämlich $\sum_i a_{ii}^{(\nu)}$ die ν^{te} Potenzsumme der Wurzeln der charakteristischen Gleichung). Das bei der Gräffeschen Methode notwendige Ausziehen der $2^{\nu\text{ten}}$ Wurzel, wodurch eine Vieldeutigkeit entsteht, kann aber hier vermieden werden, indem man die Matrix A^{2^ν} noch mit A multipliziert; man erhält dann in $\dfrac{a_{ik}^{(2^\nu+1)}}{a_{ik}^{(2^\nu)}}$ einen Näherungswert von ϱ_1.

Aus (15a) folgt weiter:

$$\begin{vmatrix} a_{ik}^{(\nu)} & a_{is}^{(\nu)} \\ a_{rk}^{(\nu)} & a_{rs}^{(\nu)} \end{vmatrix} = \sum_{\lambda,\mu} \frac{\varrho_\lambda^\nu \varrho_\mu^\nu}{f'(\varrho_\lambda) f'(\varrho_\mu)} \begin{vmatrix} g_{ik}(\varrho_\lambda) & g_{is}(\varrho_\mu) \\ g_{rk}(\varrho_\lambda) & g_{rs}(\varrho_\mu) \end{vmatrix};$$

dabei ist über λ und μ von 1 bis n zu summieren; es verschwinden aber offenbar diejenigen Summanden, für welche $\lambda = \mu$ ist. Wenn daher $|\varrho_1| > |\varrho_2|$ und ϱ_2 seinerseits wieder absolut größer ist als die übrigen Wurzeln, so ergibt sich

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\begin{vmatrix} a_{ik}^{(\nu)} & a_{is}^{(\nu)} \\ a_{rk}^{(\nu)} & a_{rs}^{(\nu)} \end{vmatrix}}{\varrho_1^\nu \varrho_2^\nu} = \frac{\begin{vmatrix} g_{ik}(\varrho_1) & g_{is}(\varrho_2) \\ g_{rk}(\varrho_1) & g_{rs}(\varrho_2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{ik}(\varrho_2) & g_{is}(\varrho_1) \\ g_{rk}(\varrho_2) & g_{rs}(\varrho_1) \end{vmatrix}}{f'(\varrho_1) f'(\varrho_2)},$$

*) Man beachte, daß $g_{ik}(\varrho_1) = 0$ gewiß nicht für alle Werte i, k sein kann, weil ϱ_1 als einfache Wurzel von $f(\varrho)$ vorausgesetzt ist.

und hieraus erhält man analog wie oben Näherungswerte für $\varrho_1 \varrho_2$. Wenn weiter $|\varrho_1| > |\varrho_2| > |\varrho_3|$ und ϱ_3 wieder absolut größer ist als die noch fehlenden Wurzeln, so liefern die dreireihigen Determinanten der Matrix A^ν ebenso Näherungswerte für $\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3$ usw., so daß man durch Division auch sukzessive $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \cdots$ erhält, genau wie bei der Gräffeschen Methode.

§ 5.

Wenn die charakteristische Gleichung eine Wurzel ϱ_1 hat, welche alle andern an absolutem Betrag übertrifft, so ist nach dem vorigen Paragraphen:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{ik}^{(\nu)}} = \varrho_1, \quad \text{sofern} \quad g_{ik}(\varrho_1) \neq 0 \quad \text{ist.}$$

Umgekehrt kann unter Umständen, wenn die Existenz dieses Grenzwertes von vornherein bekannt ist, daraus ein Rückschluß auf die Wurzeln der charakteristischen Gleichung gezogen werden.

Seien alle a_{ik} reell und > 0; dasselbe gilt dann auch von den Zahlen $a_{ik}^{(\nu)}$. Bezeichnet man daher die kleinste, bez. größte der n Zahlen

$$\frac{a_{i1}^{(\nu)}}{a_{r1}^{(\nu)}}, \frac{a_{i2}^{(\nu)}}{a_{r2}^{(\nu)}}, \cdots, \frac{a_{in}^{(\nu)}}{a_{rn}^{(\nu)}}$$

mit $\beta^{(\nu)}$ bez. $B^{(\nu)}$, so daß $0 < \beta^{(\nu)} \leqq B^{(\nu)}$ ist, so folgt*)

$$(16) \qquad \frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{rk}^{(\nu+1)}} = \sum_{s=1}^{n} \frac{a_{is}^{(\nu)} a_{sk}}{a_{rk}^{(\nu+1)}} = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{(\nu)} \frac{a_{is}^{(\nu)}}{a_{rs}^{(\nu)}} \begin{cases} \geqq \beta^{(\nu)} \left(\lambda_1^{(\nu)} + \lambda_2^{(\nu)} + \cdots + \lambda_n^{(\nu)}\right) \\ \leqq B^{(\nu)} \left(\lambda_1^{(\nu)} + \lambda_2^{(\nu)} + \cdots + \lambda_n^{(\nu)}\right), \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{a_{rs}^{(\nu)} a_{sk}}{a_{rk}^{(\nu+1)}} = \lambda_s^{(\nu)}$$

gesetzt ist.*) Da aber offenbar $\lambda_s^{(\nu)} > 0$ und $\lambda_1^{(\nu)} + \lambda_2^{(\nu)} + \cdots + \lambda_n^{(\nu)} = 1$ ist, so folgt aus (16) auch: $\beta^{(\nu+1)} \geqq \beta^{(\nu)}$ und $B^{(\nu+1)} \leqq B^{(\nu)}$, also:

$$0 < \beta^{(\nu)} \leqq \beta^{(\nu+1)} \leqq B^{(\nu+1)} \leqq B^{(\nu)}.$$

Nach einem bekannten Satz existieren daher die Grenzwerte

$$\lim_{\nu=\infty} \beta^{(\nu)} = \beta, \quad \lim_{\nu=\infty} B^{(\nu)} = B,$$

und es ist

$$\beta^{(\nu)} \leqq \beta \leqq B \leqq B^{(\nu)}.$$

Wenn somit ε eine beliebig kleine positive Größe bedeutet, so wird für

*) Es sind bei β, B, λ allemal nur die Indizes angemerkt, auf welche es im Lauf der gegenwärtigen Untersuchung allein ankommt.

hinreichend große ν gewiß $\frac{a^{(\nu)}_{ik}}{a^{(\nu)}_{rk}} > \beta - \varepsilon$, und folglich nach (16), wenn ϱ eine beliebige der Zahlen $1, 2, \cdots, n$ bedeutet:

$$\frac{a^{(\nu+1)}_{ik}}{a^{(\nu+1)}_{rk}} > \left(\lambda_1^{(\nu)} + \lambda_2^{(\nu)} + \cdots + \lambda_n^{(\nu)} - \lambda_\varrho^{(\nu)}\right)(\beta - \varepsilon) + \lambda_\varrho^{(\nu)} \frac{a^{(\nu)}_{i\varrho}}{a^{(\nu)}_{r\varrho}}$$

$$= \left(1 - \lambda_\varrho^{(\nu)}\right)(\beta - \varepsilon) + \lambda_\varrho^{(\nu)} \frac{a^{(\nu)}_{i\varrho}}{a^{(\nu)}_{r\varrho}}$$

oder auch

$$\text{(17)} \qquad \frac{a^{(\nu+1)}_{ik}}{a^{(\nu+1)}_{rk}} - \beta > \lambda_\varrho^{(\nu)} \left(\frac{a^{(\nu)}_{i\varrho}}{a^{(\nu)}_{r\varrho}} - \beta\right) - \varepsilon.$$

Nun ist aber

$$\frac{\lambda_s^{(\nu)}}{\lambda_\varrho^{(\nu)}} = \frac{a_{sk} a^{(\nu)}_{rs}}{a_{\varrho k} a^{(\nu)}_{r\varrho}} = \frac{a_{sk}}{a_{\varrho k}} \cdot \frac{\sum_t a^{(\nu-1)}_{rt} a_{ts}}{\sum_t a^{(\nu-1)}_{rt} a_{t\varrho}}.$$

Da alle a_{ik} größer als Null vorausgesetzt sind, so sind die n^4 Quotienten $\frac{a_{ik}}{a_{rs}}$ $(i, k, r, s = 1, 2, \cdots, n)$ endliche positive Zahlen und daher sämtlich kleiner als eine Zahl N; daher folgt

$$\frac{\lambda_s^{(\nu)}}{\lambda_\varrho^{(\nu)}} < N \frac{\sum_t a^{(\nu-1)}_{rt} N a_{t\varrho}}{\sum_t a^{(\nu-1)}_{rt} a_{t\varrho}} = N^2,$$

und somit

$$1 = \lambda_1^{(\nu)} + \lambda_2^{(\nu)} + \cdots + \lambda_n^{(\nu)} < n N^2 \lambda_\varrho^{(\nu)}, \quad \text{d. h.} \quad \lambda_\varrho^{(\nu)} > \frac{1}{nN^2}.$$

Daher bleibt $\lambda_\varrho^{(\nu)}$ stets über einer von ν unabhängigen Grenze c, und aus (17) ergibt sich

$$\frac{a^{(\nu+1)}_{ik}}{a^{(\nu+1)}_{rk}} - \beta > c\left(\frac{a^{(\nu)}_{i\varrho}}{a^{(\nu)}_{r\varrho}} - \beta\right) - \varepsilon.$$

Da hierbei k und ϱ beliebig sind, so können sie speziell so gewählt werden, daß

$$\frac{a^{(\nu+1)}_{ik}}{a^{(\nu+1)}_{rk}} = \beta^{(\nu+1)} \leqq \beta; \qquad \frac{a^{(\nu)}_{i\varrho}}{a^{(\nu)}_{r\varrho}} = B^{(\nu)} \geqq B$$

wird, worauf aus der vorigen Ungleichung die weitere hervorgeht:

$$0 > c(B - \beta) - \varepsilon.$$

Da ε beliebig klein angenommen werden kann und c eine feste positive Zahl ist, so folgt hieraus $\beta = B$. *Das besagt aber, daß die Grenzwerte*

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a^{(\nu)}_{i1}}{a^{(\nu)}_{r1}}, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{a^{(\nu)}_{i2}}{a^{(\nu)}_{r2}}, \quad \cdots, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{a^{(\nu)}_{in}}{a^{(\nu)}_{rn}}$$

existieren und einander gleich sind. Ebenso wird bewiesen, daß auch die Grenzwerte

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a^{(\nu)}_{1k}}{a^{(\nu)}_{1s}}, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{a^{(\nu)}_{2k}}{a^{(\nu)}_{2s}}, \quad \cdots, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{a^{(\nu)}_{nk}}{a^{(\nu)}_{ns}}$$

existieren und einander gleich sind. Setzt man daher

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a^{(\nu)}_{ik}}{a^{(\nu)}_{rk}} = \frac{x_i}{x_r}, \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{a^{(\nu)}_{ik}}{a^{(\nu)}_{is}} = \frac{y_k}{y_s},$$

so folgt weiter:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a^{(\nu+1)}_{ik}}{a^{(\nu)}_{ik}} = \lim_{\nu=\infty} \sum_{s=1}^{n} \frac{a_{is} a^{(\nu)}_{sk}}{a^{(\nu)}_{ik}} = \sum_{s=1}^{n} \frac{a_{is} x_s}{x_i}$$

und auch:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a^{(\nu+1)}_{ik}}{a^{(\nu)}_{ik}} = \lim_{\nu=\infty} \sum_{s=1}^{n} \frac{a^{(\nu)}_{is} a_{sk}}{a^{(\nu)}_{ik}} = \sum_{s=1}^{n} \frac{a_{sk} y_s}{y_k}.$$

Somit existiert auch der Grenzwert

$$\text{(18)} \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{a^{(\nu+1)}_{ik}}{a^{(\nu)}_{ik}} = \varrho'$$

und ist sowohl von k als von i unabhängig; ferner ist ϱ' positiv, und wegen

$$\varrho' x_i = \sum_{s=1}^{n} a_{is} x_s = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n$$

ist ϱ' eine Wurzel der charakteristischen Gleichung.

Da alle $a^{(\nu)}_{ik}$ positiv sind, so folgt aus (18) leicht auch

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\sum_i a^{(\nu+1)}_{ii}}{\sum_i a^{(\nu)}_{ii}} = \varrho'.$$

Nun ist aber $\sum_i a^{(\nu)}_{ii}$ nichts anderes als die ν^{te} Potenzsumme der Wurzeln von $f(\varrho)$, und daher ist aus der Existenz des obigen Grenzwertes zu schließen, daß ϱ' jede andere Wurzel der charakteristischen Gleichung an absolutem Betrag übertrifft. Der Beweis ist wörtlich so zu führen wie in meiner Habilitationsschrift (Math. Ann. 64 pag. 50, Zeile 4 v. u. bis pag. 51, Zeile 5). In der gleichen Arbeit (pag. 47, Hilfssatz) ist außerdem gezeigt, daß ϱ' eine *einfache* Wurzel ist, und daher ergibt sich folgender

Satz: *Wenn alle a_{ik} reell und > 0 sind, so hat die charakteristische Gleichung eine einfache positive Wurzel, welche alle anderen Wurzeln an absolutem Betrag übertrifft.*

Obwohl dies ein rein algebraischer Satz ist, so ist mir doch sein Beweis mit den gewöhnlichen Hilfsmitteln der Algebra nicht gelungen. Der Satz bleibt übrigens auch zu Recht bestehen, wenn die a_{ik} nur zum Teil positiv, die übrigen aber gleich Null sind, *sofern nur eine gewisse Potenz der Matrix A existiert, bei der kein Element mehr verschwindet.* Wenn nämlich für ein bestimmtes ν alle $a_{ik}^{(\nu)}$ größer als Null sind, so gilt dann das gleiche auch für jeden größeren Wert von ν. Sind also $\varrho_1, \cdots, \varrho_n$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung, so ist ϱ_1^{ν} positiv und absolut größer als die übrigen ϱ_{λ}^{ν}; ebenso ist $\varrho_1^{\nu+1}$ positiv, und daher auch ϱ_1 positiv und absolut größer als die übrigen ϱ_{λ}.

Es gilt daher der obige Satz und die Wurzel ϱ_1 kann somit nach der Methode von Gräffe oder auch nach der in § 4 auseinandergesetzten Methode berechnet werden.

Wir betrachten beispielsweise die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \cdots 0 & a_1 \\ 1 & 0 \cdots 0 & a_2 \\ 0 & 1 \cdots 0 & a_3 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \cdots 1 & a_n \end{pmatrix},$$

deren charakteristische Gleichung lautet

$$f(\varrho) = \varrho^n - a_n \varrho^{n-1} - a_{n-1}\varrho^{n-2} - \cdots - a_2 \varrho - a_1 = 0.$$

Aus der Formel $A^{\nu+1} = A^{\nu} A$ geht jetzt hervor:

$$\left.\begin{array}{lll} (\alpha) & a_{ik}^{(\nu+1)} = a_{i,k+1}^{(\nu)} & (k = 1, 2 \cdots n-1) \\ (\beta) & a_{in}^{(\nu+1)} = a_{i1}^{(\nu)} a_1 + a_{i2}^{(\nu)} a_2 + \cdots + a_{in}^{(\nu)} a_n & \end{array}\right\} (i = 1, 2, \cdots n).$$

Nun sei $a_1 > 0$, $a_n > 0$, die übrigen a_i nur ≥ 0; dann folgt aus (α)

$$a_{in}^{(1)} = a_{i1}^{(n)}, \quad a_{in}^{(2)} = a_{i2}^{(n)}, \cdots, a_{in}^{(n-1)} = a_{i,n-1}^{(n)}.$$

Wenn daher

$$a_{in}^{(1)}, \quad a_{in}^{(2)}, \cdots, a_{in}^{(n)}$$

alle verschwinden würden, so würde das gleiche von

$$a_{i1}^{(n)}, \quad a_{i2}^{(n)}, \cdots, a_{in}^{(n)}$$

gelten; dies sind aber die Elemente der i^{ten} Zeile der Matrix A^n; also müßte die Determinante verschwinden, was nicht der Fall ist. Daher gibt es einen Index ν, für welchen $a_{in}^{(\nu)} > 0$ ist; nach (β) ist dann auch $a_{in}^{(\nu+1)} > 0$, folglich $a_{in}^{(\nu+2)} > 0$ etc. Nach (α) ist aber weiter $a_{in}^{(\nu)} = a_{ik}^{(\nu+k-n)}$, also von einem gewissen ν ab auch $a_{ik}^{(\nu)} > 0$. Somit gibt es eine Potenz von A, bei der kein Element mehr verschwindet, und wir erhalten den

Satz: *Wenn die Koeffizienten der Gleichung*

$$\varrho^n - a_n \varrho^{n-1} - \cdots - a_2 \varrho - a_1 = 0$$

den Ungleichungen genügen

$$a_1 > 0, \quad a_n > 0,$$

$$a_i \geq 0 \quad \text{für } i = 2, 3, \cdots, n-1,$$

so existiert eine positive Wurzel, welche alle anderen Wurzeln an absolutem Betrag übertrifft.

Dieser spezielle Satz ist auch ganz leicht rein algebraisch einzusehen; er ist überdies auch ein Spezialfall von Satz IX meiner Habilitationsschrift (loc. cit. pag. 51). Man bemerke übrigens, daß der Satz nicht mehr allgemein richtig wäre, wenn man auch für a_n den Wert 0 zulassen wollte; denn beispielsweise hat die Gleichung

$$\varrho^n - a_1 = 0$$

lauter Wurzeln von *gleichem* absolutem Betrag. In der Tat ist auch leicht zu sehen, daß im Fall $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$ eine Potenz A^{ν}, bei der kein Element mehr verschwindet, nicht existiert.

München, 25. Juli 1906.

APENDICE

MATHEMATISCHE ANNALEN 64, 1907

ZUR THEORIE DER MATRICES
VON
OSKAR PERRON IN MÜNCHEN

ACERCA DE LA TEORIA DE MATRICES
POR
OSKAR PERRON EN MUNICH

En este artículo se tratará de demostrar, por un lado, proposiciones de la teoría de matrices y sus ecuaciones características de un modo más fácil, y por otro se desarrollan nuevas proposiciones. Con el empleo de la teoría pongo de relieve uno de los métodos análogos a los de Gräffe, métodos sobre el cálculo de aproximaciones de raíces de una ecuación algebraica.

§ 1.

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

el sistema de coeficientes de una sustitución lineal de n variables, E es la sustitución idéntica. En lo sucesivo consideraremos tal sistema de coeficientes o para abreviar *matrices*, las funciones racionales de A, también son intercambiables una con la otra, deben cumplirse todas operaciones aritméticas racionales exactamente como las cumplen los números. Se designa los elementos de la potencia A^{ν} con $a_{ik}^{(\nu)}$ de manera que $a_{ik}^{(\nu)}$ es idéntico a a_{ik}, asi que, por tanto, $A^{\nu+\mu} = A^{\nu}\cdot A^{\mu}$:

$$(1) \qquad a_{ik}^{(\nu+\mu)} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}^{(\nu)}\, a_{sk}^{(\mu)}.$$

Consecuentemente tambiém señalaremos los elementos de la sustitución unitaria $E = A^{0}$, por $a_{ik}^{(0)}$; por tanto,

$$a_{ik}^{(0)} = \begin{cases} 0 \text{ para } i \neq k, \\ 1 \text{ para } i = k, \end{cases}$$

y (1) se cumple también cuando ν o μ o ambos sean iguales a cero.

Sí $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$, $C = (c_{ik})$ para cualesquiera matrices, las igualdades

$$A = B \qquad \text{o} \qquad A = BC$$

son idénticamente iguales a

$$a_{ik} = b_{ik} \quad \text{y} \quad a_{ik} = \sum_{s=1}^{n} b_{is}c_{sk}, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

respectivamente.

La transformación que frecuentemente haremos de la primera a la segunda forma, la llamaremos *transición de las matrices a sus elementos*.

Los elementos $a_{ik}^{(\nu)}$ son funciones enteras $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$. Los coeficientes diferenciales parciales del término de ν hasta $\nu+1$ están dados por las fórmulas:

$$(2) \qquad \frac{\partial\ a_{ik}^{(\nu)}}{\partial\ a_{rs}} = \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} a_{ir}^{(\lambda)} a_{sk}^{(\nu-1-\lambda)}.$$

El determinante $|E\rho - A|$ se indica con $f(\rho)$, de manera que $f(\rho)=0$ es la *ecuación característica* de la matriz A; sus menores los indicamos con $g_{ik}(\rho)$, o sea

$$\frac{\partial |E\rho - A|}{\partial(-a_{ik})} = g_{ki}(l),$$

así que será

$$(3) \qquad \frac{E\ f(\rho)}{E\rho - A} = \begin{bmatrix} g_{11}(\rho) & g_{12}(\rho) & \ldots & g_{1n}(\rho) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n1}(\rho) & g_{n2}(\rho) & \ldots & g_{nn}(\rho) \end{bmatrix}$$

De aquí la matriz $Ef(\rho)$ como función de ρ es divisible entre $E\rho - A$; pero es claro que se cumple

$$Ef(\rho) - f(A) = f(E\rho) - f(A),$$

por tanto también debe ser divisible $f(A)$ entre $E\rho - A$ y como $f(A)$ no depende de ρ, se tiene

$$(4) \qquad f(A) = 0.$$

$\vartheta(\rho)$ representa el factor común mayor de las funciones $g_{ik}(\rho)$, entonces por (3) también $E\frac{f}{\vartheta}(\rho)$ es divisible entre $E\rho$ - A, y de la misma deducción también

$$\frac{f}{\vartheta}(A) = 0.$$

Por el contrario ϕ debe ser la función de grado menor para la cual $\phi(A) = 0$, así debe ser, porque $\phi(E\rho) - \phi(A)$ es divisible entre $E\rho - A$. Los elementos de $\frac{E\phi(\rho)}{E\rho - A}$ son desde luego según (3) $\frac{g_{ik}(\rho)\phi(\rho)}{f(\rho)}$ y entonces, y sólo entonces son claramente funciones enteras, si $\phi(\rho)$ es divisible entre $\frac{f}{\vartheta}(\rho)$ entonces debe ser $\phi = \frac{f}{\vartheta}$. Esta deducción de los teoremas conocidos me parece más sencilla que las hasta ahora dadas.

Entre las funciones $g_{ik}(\rho)$ existe la relación interesante:

$$\sum_{s=1}^{n} g_{si}(\rho)\ g_{sk}(\sigma) = \frac{1}{\rho - \sigma}\ (f(\rho)\ g_{ik}(\sigma) - f(\delta)\ g_{ik}(\sigma). \tag{5}$$

La prueba se sigue muy fácilmente de la identidad:

$$E = \frac{1}{\rho - \sigma}\left[(E\rho - A) - (E\sigma - A)\right];$$

se multiplica esta misma a ambos lados por $\frac{Ef(\rho)}{E\rho - A}\frac{Ef(\sigma)}{E\sigma - A}$, se sigue que:

$$\frac{E\ f(\rho)}{E\rho - A}\,\frac{E\ f(\sigma)}{E\sigma - A} = \frac{1}{\rho - \sigma}\left[f(\rho)\ \frac{E\ f(\sigma)}{E\sigma - A} - f(\sigma)\ \frac{E\ f(\rho)}{E\rho - A}\right],$$

y de aqui la fórmula (5) se deduce sencillamente a través de la transición de aquellas matrices en sus elementos para $\sigma = \rho$ se obtiene de (5):

$$\sum_{s=1}^{n} g_{si}(\rho)\ g_{sk}(\rho) = f'(\rho)\ g_{ik}(\rho) - f(\rho)\ g'_{ik}(\rho).\ ^{*)} \tag{5a}$$

De la fórmula (5) surge una nueva prueba muy fácil de la proposición canónica y hasta de las siguientes proposiciones generalizadas por Hermite:

Si los números a_{ik}, a_{ki} son complejos conjugados, entonces en particular a_{ii} es real, entonces la ecuación $f(\rho) = 0$ tiene claramente raíces reales **
En primer lugar es fácil ver que los coeficientes de $f(\rho)$ son reales; por tanto el determinante $|E\rho - A|$ no cambia, se se sustituye el renglón por la columna y $\sqrt{-1}$ por $-\sqrt{-1}$. Si ahora $f(\rho)$ tiene par de raíces complejas conjugadas $\rho_0 \rho_1$, por tanto se pone en (5): $\rho = \rho_0$, $\delta = \rho_1$; entonces se sigue para $i = k$:
1

$$\sum_{s=1}^{n} g_{si}(\rho_0)\ g_{si}(\rho_1) = 0.$$

Aquí, según nuestra suposición sobre los a_{ik}, los términos de la parte izquierda son las normas de números complejos, y por tanto ≥ 0; deben anularse sencillamente. En particular $g_{ii}(\rho_0) = 0$. Para cada raíz compleja, también el determinate principal se anula mientras que esta se transforma nuevamente al deteminante principal, etc., finalmente se deduce que también debe ser $\rho_0 a_{ii} = 0$, lo que no puede suceder, pues a_{ii} es real.

Bajo las mismas suposiciones sobre las a_{ik}, en particular también para la ecuación canónica, se cumple simplemente por (5a); *para una raíz doble de $f(\rho)=0$ se anulan completamente los subdeterminates g_{ik} (ρ).*

§ 2

Para la discusión de la anulación simultánea de las sudeterminantes de $|E\rho - A|$ es de importancia el conocimiento de la resultante de $f(\rho)$ y $g_{ik}(\rho)$. Para ilustrar esto, se establece
$f(\rho) = \rho^n + c_1\rho^{n-1} + c_2\rho^{n-2} + \ldots + c_n$
y se introducen las funciones

$$\begin{aligned} f_0(\rho) &= 1 \\ f_1(\rho) &= \rho + c_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n-1}(\rho) &= \rho^{n-1} + \ldots + c_{n-1}. \end{aligned}$$

1

*) Esta fórmula particular también existe, cuando se suma la conocida relación de determinantes

$$\frac{\partial f}{\partial(-a_{ki})}\frac{\partial f}{\partial(-a_{sz})} - \frac{\partial f}{\partial(-a_{si})}\frac{\partial f}{\partial(-a_{ks})} = f\frac{\partial^2 f}{\partial(-a_{ki})\partial(-a_{sz})}$$ según la suma sobre s.

**) Hermite, Comptes Rendus 41, pág. 181, donde la demostración se sigue de las cadenas de Strum.

Por lo tanto se cumple la igualdad

$$(6) \qquad A^{\nu}\frac{f(\rho)}{E\rho - A} = A^{\nu}\,\frac{f(E\rho) - f(A)}{E\rho - A}$$
$$= A^{\nu}\,(E\,f_{n-1}(\rho) + A\,f_{n-2}(\rho) + \ldots + A^{n-1}f_0(\rho))$$
$$= A^{\nu}\,f_{n-1}(\rho) + A^{\nu+1}\,f_{n-2}(\rho) + \ldots + A^{\nu+n-1}f_0(\rho);$$

Por otro lado también es

$$A^{\nu}\frac{f(\rho)}{E\rho - A} = \frac{E\rho^{\nu}f(\rho)}{E\rho - A} - (E\rho^{\nu} - A^{\nu})\,\frac{f(\rho)}{E\rho - A}$$
$$(7) \qquad = \rho^{\nu}\frac{f(\rho)}{E\rho - A} - f(\rho)\,\frac{(E\rho)^{\nu} - A^{\nu}}{E\rho - A}$$
$$= \rho^{\nu}\frac{f(\rho)}{E\rho - A} - f(\rho)\,(E\rho^{\nu-1} + A\rho^{\nu-2} + \ldots + A^{\nu-1}).$$

Puesto que los lados derechos de (6) y (7) son iguales entre sí, al hacer la transición de las matrices a sus elementos se obtiene:

$$(8) \qquad a_{ik}^{(\nu)}\,f_{n-1}(\rho) + a_{ik}^{(\nu+1)}\,f_{n-1}(\rho) + \ldots + a_{ik}^{(\nu+n-1)}\,f_0(\rho)$$
$$= \rho^{\nu}g_{ik}(\rho) - f(\rho)\,(a_{ik}^{(0)}\,\rho^{\nu-1} + \ldots + a_{ik}^{(\nu+n-1)}f_0(\rho),$$

fórmula que puede obtener también a través del término, se deja mostrar que de ν hasta $\nu+1$; si $\nu=0$ lleva a la derecha en (7) y también en (8) los dos miembros.

Las raíces son $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ de $f(\rho)$, de tal forma que se sigue de (8) en particular:

$$(8a) \qquad a_{ik}^{(\nu)}\,f_{n-1}(\rho_\lambda) + \ldots + a_{ik}^{(\nu+n-1)}f_0(\rho_\lambda) = \rho_\lambda^{\cdot}g_{ik}(\rho_\lambda)$$
$$(\lambda = 1,2,\ldots,n).$$

Para $\nu = 0,1,\ldots,n-1$, $\lambda = 1,2,\ldots,n$ se origina de (8) un sistema de n^2 ecuaciones, las cuales se enuncian juntas mediante coincidencia de ambos productos de matrices:

$$(9) \qquad \begin{bmatrix} a_{ik}^{(0)} & a_{ik}^{(1)} & \ldots & a_{ik}^{(n-1)} \\ a_{ik}^{(1)} & a_{ik}^{(2)} & \ldots & a_{ik}^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{ik}^{(n-1)} & a_{ik}^{(n)} & \ldots & a_{ik}^{(2n-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n-1}(\rho_1) & \ldots & f_{n-1}(\rho_n) \\ f_{n-1}(\rho_1) & \ldots & f_{n-2}(\rho_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_0(\rho_1) & \ldots & f_0(\rho_n) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \rho_1 & \dots & \rho_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_1^{n-1} & \dots & \rho_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{ik}(\rho_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_{ik}(\rho_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & g_{ik}(\rho_n) \end{bmatrix}.$$

Al pasar el deteminante, así se transforma del segundo factor de la izquierda, con el signo $(-1)\dfrac{n(n+1)}{2}$, se prescinde igual que del primer factor de la derecha, y entonces estos, si los a_{ik} son arbitrarios, es claro que no se anulan, así se sigue finalmente:

$$(-1)\frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} a_{ik}^{(0)} & a_{ik}^{(1)} & \dots & a_{ik}^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ik}^{(n-1)} & a_{ik}^{(n)} & \dots & a_{ik}^{(2n-2)} \end{vmatrix} = \prod_{d=1}^{n} g_{ik}(P_1) = R(f, g_{ik}).$$

Con esto ya se gana una expresión para el resultante buscado. No obstante el determinante de la izquierda no es función reductible de as a_{rs}, más bien se sigue fácilmente por medio de (1), que es (formado en el sentido de los renglones) el producto de ambos determinantes:

$$(10)\quad P_1 = \begin{vmatrix} a_{11}^{(0)} a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} \\ a_{11}^{(1)} a_{11}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{11}^{(n-1)} a_{12}^{(n-1)} & \dots & a_{1n}^{(n-1)} \end{vmatrix}, \quad Q_k = \begin{vmatrix} a_{1k}^{(0)} a_{2k}^{(0)} & \dots & a_{nk}^{(0)} \\ a_{1k}^{(1)} a_{2k}^{(1)} & \dots & a_{nk}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1k}^{(n-1)} a_{2k}^{(n-1)} & \dots & a_{nk}^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

La resultante $R(f, g_{ik})$ se divide, por tanto, se divide, por tanto, en dos factores, donde el primero solamente depende de i, y el segundo sólo de k:

(11) $$R(f,g_{ik}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} P_i Q_k.$$

Se multiplica (9) por una u_{ik} indeterminada y se suma sobre i, k para obtener madiante el mismo procedimiento la fórmula general:

(12)
$$R(f,\sum u_{ik}g_{ik}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} \sum u_{ik}u_{ik}^{(0)} & \sum u_{ik}u_{ik}^{(0)} \dots & \sum u_{ik}^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum u_{ik}u_{ik}^{(n-1)} & \sum u_{ik}u_{ik}^{(n)} \dots & \sum u_{ik}u_{ik}^{(2n-2)} \end{vmatrix}.$$

Las funciones $g_{ik}(\rho)$ tienen por eso, entonces y sólo entonces, una raíz común, cuando el determinate (12) se anula idénticamente en $u_{11}, u_{12}, \dots u_{nn}$. Algo menos general ocurre cuando se sustituye $u_i\nu_k$ en lugar de u_{ik}, así se divide el determinante (12) en dos factores, a saber:

(13) $$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} R(f,\sum u_i\nu_k g_{ik})$$

$$= \begin{vmatrix} \sum u_i a_{11}^{(0)} & \sum u_i a_{12}^{(0)} \dots & \sum u_i a_{1n}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum u_i a_{11}^{(n-1)} & \sum u_i a_{12}^{(n-1)} \dots & \sum u_i a_{1n}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$\times \begin{vmatrix} \sum \nu_k a_{1k}^{(0)} & \sum \nu_k a_{2k}^{(0)} \dots & \sum \nu_i a_{uk}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum \nu_k a_{1k}^{(n-1)} & \sum \nu_k a_{2k}^{(n-1)} \dots & \sum \nu_k a_{nk}^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Se juntan todas las u iguales a 0 en una, u_i, se sigue de aquí en especial, que $R(f,\sum\nu_k g_{ik})$ tiene al factor P_i. Si también P_i se anula, entonces tienen las funciones $f(\rho)$ y $\sum_k \nu_k g_{ik}(\rho)$ para cualquier ν_k un núcleo común y de aquí tienen una raíz común

$f(\rho), g_{11}(\rho), g_{12}(\rho), \ldots, g_{1n}(\rho)$.
Recíprocamente, si estas funciones tienen una raíz común, entonces debe, incluso, ser necesariamente $P_1=0$. Entonces se suma en el determinante P_1 (fórmula (10)) a los elementos del último renglón con $f_{n-1}(\rho)$ multiplican elementos de la primera, aquellos con $f_{n-2}(\rho)$ multiplican elementos de la segunda, etc., entonces por (8) (para ($\nu=0$) P_1 toma la forma:

$$P_1 = \begin{vmatrix} a_{11}^{(0)} a_{12}^{(0)} \ldots a_{1n}^{(0)} \\ a_{11}^{(n-2)} a_{12}^{(n-2)} \ldots a_{1n}^{(n-2)} \\ g_{11}(\rho) g_{12}(\rho) \ldots g_{1n}(\rho) \end{vmatrix} = \sum_k \phi_{1k} g_{1k}(\rho),$$

de donde se sigue la afirmación.

Análogamente vale lo referente a las funciones Q_k con ello para que todas las funciones $g_{ik}(\rho)$ tengan una raíz común, es necesario que todas pas P_i y todas las Q_k se anulen. Sería un error, deducir de lo anterior, que estas condiciones son también suficientes. La anulación simultánea de P_1 y P_2 solo causa que $f(\rho)$ tenga una raíz común con

$$g_{11}(\rho),\ g_{12}(\rho), \ldots, g_{1n}(\rho)$$

como también con

$$g_{21}(\rho),\ g_{22}(\rho), \ldots, g_{2n}(\rho)$$

Sin embargo, aunque esto es general, como se comprueba fácilmente a través del ejemplo, *no es la misma raiz*. De aquí, en caso de que ocurra lo último, deben ser satisfechas condiciones adicionales.

§ 3.

El hecho de que la resultante $R(f, g_{ik})$ se divida en dos factores, donde el primero sólo depende de *i* y el segundo sólo de *k*, era de esperarse por las conocidas proposiciones de los determinantes. Entonces

$$\begin{vmatrix} g_{ik}(\rho) & g_{is}(\rho) \\ g_{rk}(\rho) & g_{rs}(\rho) \end{vmatrix} = f(\rho) \frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial(-a_{ki})\,\partial(-a_{sr})}$$

Si también $f(\rho)$ y $g_{ik}(\rho)$ se anulan, entonces debe anularse también al mismo tiempo $g_{ik}(\rho)g_{rk}(\rho)$ para cualesquiera r,s, entonces o bien $g_{11}, g_{12}, \ldots, g_{1n}$ o bien $g_{1k}, g_{2k}, \ldots, g_{nk}$ se anulan. La resultante $R(f, g_{ik})$ tendrá, por tanto, un factor, que sólo depende de *i*, y otro que sólo depende de *k*.

Se pregunta ahora en seguida, si algunas de las funciones irreducibles de a_{rs} *o si se anulan nuevamente.* La decisión de combinar esta cuestión ligaremos un análisis detallado de las funciones respectivas.

Se diferencia en el determinate P_i (fórmula (10)) los elementos de uno cualquiera, por ejemplo derivamos el renglón $(\nu+1)$-énesimo, con respecto de a_{ri}, entonces según (2) los elementos de este renglón son:

$$\frac{\partial\ a_{11}}{\partial\ a_{ri}} = \sum_{d=0}^{\nu-1} a_{1r}^{(\lambda)} a_{11}^{(\nu-1-\lambda)}, \frac{\partial\ a_{12}^{(\nu)}}{\partial\ a_{ri}} = \sum_{d=0}^{\nu-1} a_{1r}^{(\lambda)} a_{12}^{(\nu-1-\lambda)}, \ldots$$

$$\frac{\partial\ a_{1n}^{(\nu)}}{\partial\ a_{ri}} = \sum_{d=0}^{\nu-1} a_{1r}^{(\lambda)} a_{1n}^{(\nu-1-\lambda)};$$

se establecen entonces como lineales de los elementos de los renglones precedentes (*). De aquí se anula el determinante y se sigue que:

$$\frac{\partial\ P_i}{\partial\ \cancel{P_i}\, a_{ri}} = 0.$$

Por tanto P_i no depende de $a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}$, y se puede escoger a pesar de la generalidad de la construcción de P_i, en lugar de la matriz A, una forma especial en la que aquellos elementos la *i*-ésima columna se anulan completamente.

La irreducibilidad de P_i la probamos ahora, por medio de la inducción completa.

Para n = 2

$$P_1 = a_{12},\ P_2 = -\ a_{21},$$

que por tanto es irreducible; de aquí suponemos para una *n* particular que $P_1, P_2, \ldots, P_n$ son irreducibles, y construimos entonces el (n+1)-ésimo renglón de la matriz:

2

2

(*) Para ν = 0 son aplicables estas fórmulas; pero en este caso los elementos dudosos son evidentemente iguales a cero.

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & 0 & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,i-1} & 0 & a_{i-1,i} & \cdots & a_{i-1,n} \\ u_1 & \cdots & u_{i-1} & 0 & u_i & \cdots & u_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & 0 & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

La potencia ν-ésima es, como es fácil observar,

$$A'^{\nu} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(\nu)} & \cdots & a_{1,i-1}^{(\nu)} & 0 & a_{1i}^{(\nu)} & \cdots & a_{1n}^{(\nu)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1}^{(\nu)} & \cdots & a_{i-1,i-1}^{(\nu)} & 0 & a_{i-1,i}^{(\nu)} & \cdots & a_{i-1,n}^{(\nu)} \\ \sum u_s a_{s1}^{(\nu-1)} & \cdots & \sum u_s a_{s,i-1}^{(\nu-1)} & 0 & \sum u_s a_{si}^{(\nu-1)} & \cdots & \sum u_s a_{sn}^{(\nu-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^{(\nu)} & \cdots & a_{n,i-1}^{(\nu)} & 0 & a_{ni}^{(\nu)} & \cdots & a_{nn}^{(\nu)} \end{bmatrix}.$$

Aquí se define P_i como el determinatne, tal que, con respecto a la matriz A' tiene el significado igual que P_i tiene con respecto a la matriz A (fórmula (10)), entonces si δ_{ik} es 0 o 1, según si $i \neq k$ o $i = k$;

$$P''_{ii} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} \cdots \delta_{i,i-1} & & \delta_{ii} & \delta_{i,i+1} \cdots \delta_{i,n+1} \\ u_1 \quad \cdots & u_{i-1} & 0 & u_i \quad \cdots \quad u_n \\ \sum u_s a_{s1} \quad \cdots & \sum u_s a_{s,i-1} & 0 & \sum u_s a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum u_s a_{s1}^{(n-1)} \cdots & \sum u_s a_{s,s-1}^{(n-1)} & 0 & \sum u_s a_{sn}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} \sum u_s a_{s1}^{(0)} & \cdots & \sum u_s a_{sn}^{(0)} \\ \sum u_s a_{s1}^{(1)} & \cdots & \sum u_s a_{sn}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum u_s a_{s1}^{(n-1)} & \cdots & \sum u_s a_{sn}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i-1}\ (u_1^n\ P_1\ +\ \dots\ +\ u_2^n\ P_2\ +\ \dots).$$

Entonces $P_1, P_2, \dots, P_n$ según la hipótesis son irreductibles, por lo que P_i se puede dividir evidentemente solo en el sentido de que un factor $\varphi\ (u_1, \dots, u_n)$ se separe, de forma que sea libre de los a_{rs}. Pero esto no es posible; por tanto se debía anular el determinante P_i' para valores numéricos conocidos de $u_1, \dots, u_n$, y entonces según (13) es un factor de $R(f, \sum u_i \nu_i g_{ik})$, por tanto se deberían tener, para estos valores $f(\rho)$ y $\sum u_i \nu_k g_{ik}(\rho)$ una raíz común. Pero esto no es posible, porque $f(\rho)$ es de grado mayor que $\sum u_i \nu_k g_{ik}(\rho)$ y es notoriamente irreducible.

La descripción anterior de P_i muestra al mismo tiempo que esta es una función homogénea de n-ésimo grado de $u_1, \dots, u_n$, y esto no puede ser de otra forma según lo demostrado, cuando en la matriz A' en lugar de ceros en la i-ésima columna se sustituyen cuales quiera elementos. Así mismo, si se sutituye n en lugar de $n+1$, P_i son homogéneas de $(n-1)$-ésimo grado en $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$. Reunimos estos resultados en la siguiente

Proposición: *Las funciones* P_1, $P_2, \dots, P_n$ *son irreducibles en el dominio de las variables* a_{rs} *(y valores numéricos arbitrarios);* P_i *no depende de* $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}$ *y es una función homogénea de* $(n-1)$*-ésimo grado de* $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ *(*a_{ii}*excluidos).*

Análogamente resulta también:

Las funciones $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ *son irreducibles dentro de las variables* a_{rs} *(y valores numéricos arbitrarios);* Q_k *no depende de* $a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}$, *y es una función homogénea de* $(n-1)$*-ésimo grado de* $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk}$ *(excepto* a_{kk}*).*

Si las a_{rs} son independientes unas de las otras, entonces naturalmente deberían anularse las P_i, Q_k muy probablemente, sin embargo debía de observarse, que permanecen irreducibles, si la matriz A es simétrica, *i.e.* $a_{rs} = a_{sr}$ sin poner condiciones a las a_{rs}. Además, $P_i = Q_i$, y nuevamente P_i es homogénea de grado $(n-1)$-ésimo en $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}$ (excepto a_{ii}), P_i no depende de a_{ii}.

§ 4.

Para el cálculo de a_{ik}^{ν} (1) de una fórmula recursiva; *sin embargo deben presentarse con ayuda de las raíces de las ecuaciones características en forma más independiente.* Sean $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ las raíces distintas de $f(\rho)$ y para ρ_λ existe r_λ particular, tal que

(14) $\qquad f(\rho) = (\rho - \rho)^{r1}\psi_1(\rho) = \ldots = (\rho - \rho_m)^{rm}\psi_m(\rho)$

donde ahora $\psi_\lambda(\rho) \neq 0$. Por tanto proporciona la teoría de fracciones parciales la identidad:

$$\frac{x^r}{f(x)} = E(x) + \sum_{d=1}^{m} \frac{1}{(r_\lambda - 1)!} D_\zeta^{r_\lambda} \left[\frac{\zeta^{r_\lambda}(\rho_\lambda + \zeta)^\nu}{f(\rho_\lambda + \zeta)(x - \rho_\lambda - \zeta)} \right]_{\zeta=0}^{*)} .$$

donde $E(x)$ representa una función completa, y por medio del símbolo D_ζ^r se indica la r-ésima derivada en ζ. Se puede escribir en lugar de ello, si $\rho_\lambda + \zeta = \rho$ y se mutiplica por $f(x)$:

$$x^\nu = E(x)f(x) + \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{1}{(r_\lambda - 1)!} D_\rho^{r_\lambda} \left(\frac{\rho^\nu f(x)}{\psi_\lambda(\rho)\ x - \rho} \right)_{\rho=\rho_\lambda}$$

Ahora es evidente que:

$$D_\rho^{r_\lambda} \left(\frac{\rho^\nu f(x)}{\psi_\lambda(\rho) x - \rho} \right)_{\rho=\rho_\lambda} = D_\rho^{r_\lambda} \left(\frac{\rho^\nu (\rho - \rho_\lambda)^{r_\lambda}}{x - \rho} \right)_{\rho=\rho_\lambda} = 0,$$

entonces en lugar de la última ecuación, la siguiente también puede derivarse:

$$x^\nu = E(x)f(x) + \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{1}{(r_\lambda - 1)!} D_\rho^{r_\lambda - 1} \left(\frac{\rho^\nu f(\rho) - f(x)}{\psi_\lambda(\rho)\rho - x} \right)_{\rho=\rho_\lambda}$$

Por tanto, esta identidad está en x, entonces se deduce también una ecuación correcta, si en lugar de la x aparece la matriz A; a causa de $f(A) = 0$ se sigue entonces que

$$A^\nu = \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{1}{(r_\lambda - 1)!} D_\rho^{r_\lambda - 1} \left(\frac{\rho^\nu E f(\rho)}{\psi_\lambda(\rho) E\rho - A} \right)_{\rho=\rho_\lambda},$$

o, mientras que se convierte de las matrices en sus elementos:

$$a_{ik}^{(\nu)} = \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{1}{(r_\lambda - 1)!} D_\rho^{r_\lambda - 1} \left[\frac{\rho^\nu g_{ik}}{\psi_\lambda(\rho)}\right]_{\rho=\rho_\lambda} \tag{15}$$

Esta es la fórmula buscada. Ahora se puede suponer a causa de la simplicidad, que las raíces de la ecuación característica todas son simples (en un inicio las principales dificultades se presentaría el manejo del caso general). La fórmula (15) se convierte en:

$$a_{ik}^{(\nu)} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\rho_\lambda^\nu g_{ik}(\rho_\lambda)}{f'(\rho_\lambda)}. \tag{15a}$$

ρ_1 es mayor en valor absoluto que todas las demás raíces, por tanto se sigue de aquí que:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_{ik}^{(\nu)}}{\rho_1^\nu} = \frac{g_{ik}(\rho_1)}{f'(\rho_1)},$$

y de aquí otra vez, en tanto que solamente $g_{ik}(\rho_1) \neq 0$ **):

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{a_{ik}^{(\nu)}} = \rho_1 \quad y \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{ik}^{(\nu)}} = \rho_1;$$

así mismo en general:

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\sum_{i,k} u_{ik} a_{ik}^{(\nu)}} = \rho_1 \quad y \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{\sum_{i,k} u_{ik} a_{ik}^{(\nu+1)}}{\sum_{i,k} u_{ik} a_{ik}^{(\nu)}} = \rho_1,$$

donde las u_{ik} son valores cualesquiera para los que $\sum u_{ik} g_{ik} \neq 0$.

Estas fórmulas deben ser utilizadas en el cálculo de aproximaciones de la raíz ρ_1. Se construyen con este propósito sucesivamente las matrices

$$A^2, A^4, A^8, \ldots, A^{2^r}.$$

Las raíces de las ecuaciones características correspondientes son en particular las 2, 4, 8, ...ésimas potencias de las raíces de $f(\rho)$, y el procedimiento es totalmente análogo al del *método de* aproximación *de Gräffe*, que es un caso especial, si se establece

$$u_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ para } i = k \\ 0 \text{ para } i \neq k \end{cases}$$

(es decir, $\sum_i a_i^{(\nu)}$ es la ν-ésima suma de potencias de las raíces de la ecuación característica). El cual por el método de Gräffe se extrae necesariamente la 2^ν-ésima raíz, con lo cual se establece una ambigüedad pero puede evitarse aquí, si se multiplica la matriz A^{2^ν} por A; se encuentra entonces $\dfrac{a_{ik}^{(2^\nu+1)}}{a_{ik}^{(2^\nu)}}$ un valor aproximado de ρ_1.

De (15a) se sigue además:

$$\begin{vmatrix} a_{ik}^{(\nu)} a_{is}^{(\nu)} \\ a_{rk}^{(\nu)} a_{rs}^{(\nu)} \end{vmatrix} = \sum_{\lambda,\mu} \frac{\rho_\lambda^\nu \ \rho_\mu^\mu}{f'(\rho_\lambda) f'(\rho_\mu)} \begin{vmatrix} g_{ik}(\rho_\lambda) g_{is}(\rho_\lambda) \\ g_{rk}(\rho_\mu) g_{rs}(\rho_\mu) \end{vmatrix};$$

aunque se suma sobre λ y μ desde 1 hasta n; pero claramente los sumandos para los cuales $\lambda = \mu$ se anulan. Si de aquí $|\rho_1| > |\rho_2|$ y ρ_2 por su parte otra vez es mayor en valor absoluto que las raíces restantes, entonces resulta

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\begin{vmatrix} a_{ik}^{(\nu)} a_{is}^{(\nu)} \\ a_{rk}^{(\nu)} a_{rs}^{(\nu)} \end{vmatrix}}{\rho_1^\nu \rho^\nu{}_2} = \frac{\begin{vmatrix} g_{ik}(\rho_1) g_{is}(\rho_1) \\ g_{rk}(\rho_2) g_{rs}(\rho_2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{ik}(\rho_2) g_{is}(\rho_2) \\ g_{rk}(\rho_1) g_{rs}(\rho_2) \end{vmatrix}}{f'(\rho_1) f'(\rho_2)},$$

y de aquí se otiene análogamente, como antes los valores aproximados de arriba para $\rho_1\rho_2$. Si bien además $|\rho_1|>|\rho_2|>|\rho_3|$ y ρ_3 es mayor en valor absoluto que las raíces faltantes, de manera que suministran los tres determinantes en serie de la matriz A^ν así mismo el valor aproximado para $\rho_1\rho_2\rho_3$, ..., exactamente como en el método de Gräffe.

§ 5.

Si la ecuación característica tiene una raíz ρ_1, la cual supera a las demás en valor absoluto, así según el parágrafo anterior:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_{1k}^{(\nu+1)}}{a_{1k}^{(\nu)}} = \rho_1, \text{ con tal de que sea } g_{1k}(\rho_1) \neq 0$$

El inverso puede obtenerse si las circunstancias lo permiten; si la existencia de estos valores límite se conocen desde un principio se obtiene una conclusión acerca de las raíces de la ecuación característica

Sean a_{ik} todos reales y >0; lo mismo vale, entonces, para los números $a_{ik}^{(\nu)}$. Se designa aquí el menor, de los n números

$$\frac{a_{11}^{(\nu)}}{a_{r1}^{(\nu)}} \frac{a_{12}^{(\nu)}}{a_{r2}^{(\nu)}}, \ldots, \frac{a_{1n}^{(\nu)}}{a_{rn}^{(\nu)}}$$

con $\beta^{(\nu)}$, se designa con $B^{(\nu)}$, por lo que $0<\beta^{(\nu)}$, por lo que $0<\beta^{(\nu)} \leq B^{(\nu)}$, se sigue que *)[3]

(16)

$$\frac{a_{1k}^{(\nu+1)}}{a_{rk}^{(\nu+1)}} = \sum_{s=1}^{n} \frac{a_{1s}^{(\nu)} a_{sk}}{a_{rk}^{(\nu+1)}} = \sum_{s=1}^{n} 1_s^{(\nu)} \frac{a_{1s}^{\nu)}}{a_{rs}^{(\nu)}} \begin{cases} \geq \beta^{(\nu)}(\lambda_1^{(\nu)}+\lambda_2^{(\nu)}+\ldots+\lambda_n^{(\nu)}) \\ \leq B^{(\nu)}(\lambda_1^{(\nu)}+\lambda_2^{(\nu)}+\ldots+\lambda_n^{(\nu)}) \end{cases}$$

donde por observación

$$\frac{a_{rs}^{(\nu)} a_{sk}}{a_{rk}^{(\nu+1)}} = \lambda_s^{(\nu)}$$

se establece que *). Entonces como es claro, $\lambda_s^{(\nu)} > 0$ y $\lambda_1^{(\nu)}+\lambda_2^{(\nu)}+\ldots+\lambda_n^{(\nu)} = 1$ se sigue de (16) también: $\beta^{(\nu+1)} \geq \beta^{(\nu)}$ y $B^{(\nu+1)} \leq B^{(\nu)}$, por tanto:

$$0 < \beta^{(\nu)} \leq \beta^{(\nu+1)} \leq B^{(\nu+1)} \leq B^{(\nu)}.$$

Según una conocida proposición, existen los valores límite

$$\lim_{\nu=\infty} \beta^{(\nu)} = \beta, \qquad \lim_{\nu=\infty} B^{(\nu)} = B,$$

y

$$\beta^{(\nu)} \leq \beta \leq B \leq B^{(\nu)}$$

---

3 *) Para, β, B, λ solamente se observan los indices, dependiendo sólo del que se examine.

Si entonces ε significa una cantidad positiva pequeña cualquiera, entonces para ν suficientemente grande es verdad que $\dfrac{a_{rs}^{(\nu)}}{a_{rs}^{(\nu)}} > \beta - \varepsilon$, por consiguiente según (16), si ρ representa un número cualquiera 1,2,...,n:

$$\frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{rk}^{(\nu+1)}} \rightarrow (\lambda_1^{(\nu)} + \lambda_2^{(\nu)} \ldots + \lambda_n^{(\nu)} - \lambda_\rho^{(\nu)})(\beta - \varepsilon) + \lambda_\rho^{(\nu)} \frac{a_{i\rho}^{(\nu)}}{a_{r\rho}^{(\nu)}}$$

$$= (1 - \lambda_\rho^{(\nu)})(\beta - \varepsilon) + \lambda_\rho^{(\nu)} \frac{a_{i\rho}^{(\nu)}}{a_{r\rho}^{(\nu)}}$$

o también

$$\text{(17)} \qquad \frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{rk}^{(\nu+1)}} \; \beta > \lambda_\rho^{(\nu)} \left(\frac{a_{i\rho}^{(\nu)}}{a_{r\rho}^{(\nu)}} - \beta \right) - \varepsilon .$$

Pero ahora

$$\frac{\lambda_s^{(\nu)}}{\lambda_\rho^{(\nu)}} = \frac{a_{sk} a_{rs}^{(\nu)}}{a_{\rho k} a_{r\rho}^{(\nu)}} = \frac{a_{sk}}{a_{\rho k}} \frac{\sum_{r} a_{r\tau}^{(\nu-1)} a_{\tau s}}{\sum_{\tau} a_{r\tau}^{(\nu-1)} a_{\tau\rho}}.$$

Si suponemos que todos los a_{ik} son mayores que cero. Así, son también los n^4 cocientes $\dfrac{a_{ik}}{a_{rs}}$ $(i,k,r,s = 1,2,\ldots,n)$ un conjunto finito de números positivos y de aquí todos juntos menores que un número N; de aquí sigue:

$$\frac{\lambda_s^{(\nu)}}{\lambda_\rho^{(\nu)}} < N \frac{\sum_{\tau} a_{r\tau}^{(\nu-1)} N a_{\tau\rho}}{\sum_{\tau} a_{r\tau}^{(\nu-1)} a_{\tau\rho}} = N^2,$$

y por tanto

$$1 = \lambda_1^{(\nu)} + \lambda_2^{(\nu)} + \ldots + \lambda_n^{(\nu)} < nN^2\lambda_\rho^{(\nu)}, \quad \text{i.e. } \lambda_\rho^{(\nu)} > \frac{1}{nN^2}.$$

De aquí $\lambda_\rho^{(\nu)}$ es siempre mayor que un límite c independiente de ν y de (17) resulta $\dfrac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{rk}^{(\nu+1)}} - \beta > c\left(\dfrac{a_{i\rho}^{(\nu)}}{a_{r\rho}^{(\nu)}} - \beta\right) - \varepsilon.$

Como k y ρ son arbitrarios, así se pueden elegir de forma especial, tal que

$$\frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{rk}^{(\nu+1)}} = \beta^{(\nu+1)} \quad \frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{rk}^{(\nu+1)}} = \beta^{(\nu+1)} \leqq \beta; \quad \frac{a_{i\rho}^{(\nu)}}{a_{r\rho}^{(\nu)}} = B^{(\nu)} \geqq B$$

de donde la última desigualdad resulta la siguiente:

$$0 > c\,(B - \beta) - \varepsilon.$$

Como ε puede tomarse arbitrariamente pequeña y c es un número positivo fijo, se sigue de aquí que $\beta = B$. *Esto implica, que existen los valores límite y son iguales entre sí.*

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_{i1}^{(\nu)}}{a_{r1}^{(\nu)}}, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{a_{i2}^{(\nu)}}{a_{r2}^{(\nu)}}, \quad \ldots \quad , \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{a_{in}^{(\nu)}}{a_{rn}^{(\nu)}}$$

De la misma manera se comprueba, que también los valores límite

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_{1k}^{(\nu)}}{a_{1s}^{(\nu)}}, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{a_{2k}^{(\nu)}}{a_{2s}^{(\nu)}}, \quad \ldots \quad , \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{a_{nk}^{(\nu)}}{a_{ns}^{(\nu)}}$$

existen y son iguales entre sí. Se establece de aquí que

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_{ik}^{(\nu)}}{a_{rk}^{(\nu)}} = \frac{x_i}{x_r}, \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{a_{ik}^{(\nu)}}{a_{is}^{(\nu)}} = \frac{y_k}{y_{n(s)}},$$

entonces se sigue:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{ik}^{(\nu)}} = \lim_{\nu=\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_{is}a_{sk}^{(\nu)}}{a_{ik}^{(\nu)}} = \sum_{s=1}^{n} \frac{a_{is}x_s}{x_i}$$

y también

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{ik}^{(\nu)}} = \lim_{\nu=\infty} \sum_{s=1}^{n} \frac{a_{is}^{(\nu)}a_{sk}}{a_{ik}^{(\nu)}} \sum_{s=1}^{n} \frac{a_{sk}y_s}{y_k}.$$

Por tanto existe tambien el valor límite

(18) $$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_{ik}^{(\nu+1)}}{a_{ik}^{(\nu)}} = \rho'$$

y es independiente de k y de i; además de eso ρ' es positivo,

$$\rho' x_i = \sum_{s=1}^{n} a_{is}x_s = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n$$

ρ' es una raíz de la ecuación característica

Como todos los $a_{ik}^{(\nu)}$ son positivos, se sigue de (18) fácilmente también que:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\sum a_{ii}^{(\nu+1)}}{\sum_i a_{ii}^{(\nu)}} = \rho'.$$

Ahora bien $\sum_i a_{ii}^{(\nu)}$ no es otra cosa que las ν-ésima suma de potencias de las raíces de $f(\rho)$, y de la existencia de los valores límite arriba citados se concluye que el valor absoluto de ρ es mayor que el de cualquiera otra raíz de la ecuación característica. La prueba es literalmente igual a la que aparece en mi escrito de habilitación (Math. Ann vol. 64 p. 50, renglón 4 y desde p. 51, renglón 5) En el mismo trabajo (p 47 lema) se muestra además que ρ' es una *raíz simple*, y de aquí resulta la siguiente proposición: *Si todos los* a_{ik} *son reales y* > 0, *entonces la ecuación característica tiene una raíz simple positiva la cual excede a todas las demás raíces en valor absoluto.*

Si bien esta es una proposición meramente algebraica no he hecho la demostración con los recursos de costumbre del álgebra. La proposición sigue siendo válida aún cuando solo algunos a_{ik} sean positivos y los demás sean iguales a cero. *En tanto que exista una potencia conocida de la matriz A en la cual no se anula ningún elemento más.* Si a saber: para una ν particular todos los $a_{ik}^{(\nu)}$ son mayores que cero, por tanto, vale lo mismo para cada valor mayor que ν. Si $\rho_1, \ldots, \rho_n$ son las raíces de la ecuación caractarística entonces ρ_1^{ν} es positiva y mayor en valor absoluto que los demás ρ_λ^{ν}, así mismo $\rho_1^{\nu+1}$ es positivo, y de aqui también, ρ_1 es positivo y mayor en valor absoluto que las restantes ρ_λ.

Vale de quí la citada proposición, y la raíz puede calcularse según el método de Gräffe o también mediante el método del § 4.

Consideremos por ejemplo la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a_3 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_n \end{bmatrix},$$

cuya ecuación caracteristica dice

$$f(\rho) = \rho^n - a_n\rho^{n-1} - \ldots - a_2\rho - a_1 = 0.$$

$$(\alpha) \qquad a_{ik}^{(\nu+1)} = a_{i,k+1}^{(\nu)} \qquad (= 1,2 \ldots n - 1)$$

Ahora sean $a_1 > 0$, $a_n > 0$, y además a_i solo $\geqq 0$; por tanto se sigue de (α)

$$a_{in}^{(1)} = a_{i1}^{(n)}, \quad a_{in}^{(2)} = a_{i2}^{(n)}, \quad \ldots, \quad a_{in}^{(n-1)} = a_{i,n-6}^{(n)}$$

si de aquí

$$a_{in}^{(1)}, a_{in}^{(2)}, \ldots, a_{in}^{(n)}$$

todos fueran diferentes, entonces valdría lo mismo que:

$$a_{i1}^{(n)}, a_{i2}^{(n)}, \ldots, a_{in}^{(n)}$$

estos son los elementos del *i*-ésimo renglón de la matriz A^n, entonces debería anularse el determinante, lo que no ocurre de ninguna manera. De aquí que se da un índice ν, para el cual $a_{1n}^{(\nu)} > 0$; según (β) entonces es también $a_{1n}^{(\nu+1)} > 0$, consecuentemente $a_{1n}^{(\nu+2)} > 0$, etc. Según (α) es nuevamente $a_{1n}^{(\nu)} = a_{1k}^{(\nu+k-n)}$, entonces para un ν indicado se tiene también $a_{1k}^{(\nu)} > 0$. Por ello, existe una potencia de A, en el que ningún elemento de A se anula, y establecemos la proposición: Si los coeficientes de la ecuación

$$\rho^n - a_n\rho^{n-1} - \ldots - a_2\rho - a_1 = 0$$

se cumplen las desigualdades

$$a_1 > 0,\ a_n > 0,$$

$$a_i \geqq 0 \text{ para } i = 2, 3, \ldots, n-1,$$

entonces existe una raíz positiva la cual excede a todas las demás raíces en valor absoluto.

Este teorema especial así mismo es facilísimo darse cuenta que es solamente algebraico; por lo demás es un caso particular de la proposición IX de mi escrito de Habilitación (loc. cit. pág. 51). Se observa además, que la proposición no sería verdadera en general. Si para cada a_n puede tomar el valor 0 ; por tanto, a manera de ejemplo, la ecuación

$$\rho^n - a_1 = 0$$

son las raíces simples de los mismos valores absolutos. En efecto, es fácil ver, que en el caso de que $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ no existe una potencia A^ν por el que ningún elemento se anule.

Munich, julio 25, 1906.

Gesammelte Abhandlungen
Band III
Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1968.

79.

Über Matrizen aus positiven Elementen

Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin
471 – 476 (1908)

Sind die Elemente einer Matrix alle reell und positiv, so hat ihre charakteristische Determinante und deren Unterdeterminanten einige merkwürdige Eigenschaften, von denen Hr. Oskar Perron die wichtigsten entdeckt und in zwei Abhandlungen *Grundlagen für eine Theorie der Jacobischen Kettenbruchalgorithmen* und *Zur Theorie der Matrizes* im 64. Bande der *Mathematischen Annalen* abgeleitet hat. Den Beweis hat er, wie er selbst hervorhebt, nur mit Anwendung von Grenzbetrachtungen durchführen können. Es ist mir gelungen, diese zu vermeiden, die Beweise zu vereinfachen und die Sätze in einigen Punkten zu vervollständigen.

§ 1.

Sind die Elemente einer Matrix A alle reell und positiv, so hat ihre charakteristische Gleichung eine Wurzel r, die reell, positiv, einfach und absolut größer ist als jede andere Wurzel. Ist $s > r$, so sind die Elemente der zu $sE - A$ adjungierten Matrix alle positiv.

Die Elemente $a_{\varkappa\lambda}$ der Matrix n^{ten} Grades A seien alle positiv (> 0). Die Determinante $|sE - A|$ bezeichne ich mit $\varphi(s)$ oder $A(s)$, die dem Elemente $se_{\varkappa\lambda} - a_{\varkappa\lambda}$ komplementäre Unterdeterminante $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades mit $A_{\lambda\varkappa}(s)$.

Ich nehme an, die Behauptung sei für eine Matrix, deren Grad $< n$ ist, bereits bewiesen. Sind dann $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \nu$ die Zahlen $1, 2, 3, \cdots n$ in irgendeiner Anordnung, und ist

$$B(s) = A_{\alpha\alpha}(s) = \begin{vmatrix} -a_{\beta\beta}+s & \cdots & -a_{\beta\nu} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ -a_{\nu\beta} & \cdots & -a_{\nu\nu}+s \end{vmatrix},$$

so hat die Gleichung $B(s) = 0$ eine Wurzel q, die positiv, einfach und absolut größer ist als jede andere Wurzel. Ferner ist die Unterdeterminante $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades $B_{\varkappa\lambda}(s)$, die dem Elemente $se_{\lambda\varkappa} - a_{\lambda\varkappa}$ in $B(s)$ komplementär ist, positiv (> 0), falls $s \geqq q$ ist.

Nun ist

$$A(s) = (s - a_{\alpha\alpha})\, B(s) - \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\alpha\varkappa} a_{\lambda\alpha} B_{\varkappa\lambda}(s),$$

wo $\varkappa$ und λ die Werte $\beta, \gamma, \cdots \nu$ durchlaufen. Da $B(q) = 0$ und $B_{\varkappa\lambda}(q) > 0$ ist, so ist $A(q) < 0$. Folglich hat die Gleichung $A(s) = 0$ eine positive Wurzel, die $> q$ ist. Ist r die größte Wurzel dieser Art, so ist $r > q$ für jeden Wert von α. Ist also $s \geqq r$, so ist $s > q$, und mithin $A_{\alpha\alpha}(s) > 0$. Sei

$$C(s) = \begin{vmatrix} -a_{\gamma\gamma}+s & \cdots & -a_{\gamma\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{\nu\gamma} & \cdots & -a_{\nu\nu}+s \end{vmatrix}$$

und $C_{\varkappa\lambda}(s)$ die Unterdeterminante $(n-3)^{\text{ten}}$ Grades, die dem Elemente $se_{\lambda\varkappa} - a_{\lambda\varkappa}$ in $C(s)$ komplementär ist. Ist p die größte positive Wurzel der Gleichung $C(s) = 0$, so ist $p < q < r$. Ist $s > p$, so ist $C(s)$ und $C_{\varkappa\lambda}(s)$ positiv. Nun ist

$$-A_{\alpha\beta}(s) = \begin{vmatrix} -a_{\beta\alpha} & -a_{\beta\gamma} & \cdots & -a_{\beta\nu} \\ -a_{\gamma\alpha} & -a_{\gamma\gamma}+s & \cdots & -a_{\gamma\nu} \\ \cdot & & & \\ -a_{\nu\alpha} & -a_{\nu\gamma} & \cdots & -a_{\nu\nu}+s \end{vmatrix},$$

demnach

$$(1.) \qquad A_{\alpha\beta}(s) = a_{\beta\alpha} C(s) + \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\alpha} a_{\beta\lambda} C_{\varkappa\lambda}(s).$$

Daher ist $A_{\alpha\beta}(s) > 0$, falls $s > p$ ist, also um so mehr, falls $s \geqq r$ ist.

Ist $\varphi(s) = A(s)$, so ist die Ableitung

$$\varphi'(s) = \sum_{\alpha} A_{\alpha\alpha}(s)$$

die Summe aller Hauptunterdeterminanten $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades der Matrix $sE - A$. Daher ist $\varphi'(r) > 0$, und mithin ist r eine einfache Wurzel der Gleichung $\varphi(r) = 0$.

Wenn die Gleichung $\varphi(s) = 0$ eine negative Wurzel hat, so sei $-q$ die kleinste; dann kann nicht $q = r$ sein. Denn auch die Elemente der Matrix A^2 sind alle positiv. Ihre größte reelle positive charakteristische Wurzel wäre aber gleich $r^2 = q^2$, sie wäre also keine einfache Wurzel.

Es kann aber auch nicht $q > r$ sein. Denn sonst wären auch die Elemente der Matrix $A + \frac{1}{2}(q-r)E$ alle positiv, ihre größte positive Wurzel wäre $r' = \frac{1}{2}(q+r)$, ihre kleinste negative $-q' = -\frac{1}{2}(q+r) = -r'$, was nicht möglich ist. Demnach ist $q < r$.

Wie übrigens leicht zu sehen, ist sogar $r - q > 2k$, wenn k kleiner ist als jedes der Hauptelemente $a_{11}, a_{22}, \cdots a_{nn}$.

Sei $a+bi$ eine Wurzel der Gleichung $\varphi(r)=0$, deren absoluter Betrag möglichst groß ist. Sollte es außer $a\pm bi$ noch andere Wurzeln desselben absoluten Wertes geben, so wähle man $a+bi$ so, daß a (mit Berücksichtigung des Zeichens) möglichst klein ist. Ist also $a'+b'i$ eine von $a\pm bi$ verschiedene Wurzel der Gleichung $\varphi(r)=0$, so ist $a'^2+b'^2 \leqq a^2+b^2$, und falls $a'^2+b'^2=a^2+b^2$ ist, so ist $a'>a$. Dann kann man eine positive Größe y so wählen, daß, falls $0<k<y$ ist, für jede Wurzel $a'+b'i$

$$(a-k)^2+b^2>(a'-k)^2+b'^2$$

ist, oder

$$a^2+b^2-a'^2-b'^2>2k(a-a').$$

Denn ist $a^2+b^2=a'^2+b'^2$, so ist $a-a'<0$. Ebenso ist jene Bedingung von selbst erfüllt, wenn zwar $a^2+b^2>a'^2+b'^2$ ist, aber $a\leqq a'$ ist. Ist aber $a>a'$, so muß dann

$$k<\frac{a^2+b^2-a'^2-b'^2}{2(a-a')}$$

sein. Man bestimme diese positive Größe für jede von $a\pm bi$ verschiedene Wurzel $a'+b'i$, für die $a'<a$ ist. Zu diesen Größen nehme man noch die Elemente $a_{11}, a_{22}, \cdots a_{nn}$ hinzu und bezeichne mit y die kleinste aller dieser positiven Größen.

Ist dann $0<k<y$, so sind die Elemente der Matrix $A-kE$ alle positiv. Ihre charakteristische Gleichung hat die Wurzeln $a-k\pm bi$, jede andere ihrer Wurzeln $a'-k+b'i$ ist absolut kleiner. In dem angegebenen Intervalle kann man ferner k so wählen, daß die *Phase* der Größe $a-k+bi=\rho e^{\vartheta i}$ zu 2π in einem rationalen Verhältnis $\frac{l}{m}$ steht, $\vartheta=\frac{2l\pi}{m}$. Dann sind auch alle Elemente der Matrix $(A-kE)^m$ positiv, und ihre absolut größte Wurzel ist $(a-k\pm bi)^m=\rho^m$, ist also eine reelle positive Größe. Wäre also b von Null verschieden, so wäre diese Wurzel keine einfache. Die absolut größte Wurzel der Gleichung $\varphi(s)=0$ ist folglich reell; demnach ist, wie oben gezeigt, a positiv. Ist ferner $a'+b'i$ eine andere Wurzel, so kann auch nicht $a'^2+b'^2=a^2$ sein, weil sonst $a'<a$ wäre.

Für die größte Wurzel r sind nicht nur die Unterdeterminanten $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von $rE-A$ positiv, sondern auch alle Hauptunterdeterminanten aller Grade. Insbesondere ist r größer als jedes der Hauptelemente $a_{11}, a_{22}, \cdots a_{nn}$.

§ 2.

Sei q die größte Wurzel der Gleichung $A_{\alpha\alpha}(s)=0$, q' die von $A_{\beta\beta}(s)=0$, q'' die von $A_{\gamma\gamma}(s)=0$ usw. Dann ist r die einzige positive Wurzel der Gleichung $A(s)=0$, die $>q$ ist. Dies ist klar, wenn

q die größte der Zahlen $q, q', q'', \cdots$ ist. Denn ist dann $s>q$, so sind die Größen $A_{\alpha\alpha}(s)$, $A_{\beta\beta}(s)$, $A_{\gamma\gamma}(s)$, $\cdots$ alle positiv, folglich auch ihre Summe $\varphi'(s)$. Wenn demnach s von q an wächst, so wächst auch $\varphi(s)$ beständig, kann also höchstens einmal verschwinden.

Es ist mithin nur noch zu zeigen, daß $\varphi(s)$ nicht verschwindet, falls s zwischen irgend zwei jener Größen q und q' liegt. Nun ist

$$A(s)\,\varphi(s)=A_{\alpha\alpha}(s)\,A_{\beta\beta}(s)-A_{\alpha\beta}(s)\,A_{\beta\alpha}(s).$$

Sei etwa $q>q'$, dann ist $q>q'>p$. Für die Determinante $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $A_{\alpha\alpha}(s)$ kann die Behauptung schon als bewiesen angesehen werden. Diese verschwindet also für keinen Wert zwischen q und p und ist daher, weil q eine einfache Wurzel ist, in diesem Intervalle beständig negativ. $A_{\beta\beta}(s)$ ist positiv, falls $s>q'$ ist. $A_{\alpha\beta}(s)$ und $A_{\beta\alpha}(s)$ sind positiv, falls $s>p$ ist. Daher kann $A(s)$ zwischen q und q' nicht verschwinden.

Ist $q>s>q'$, so kann $A_{\alpha\alpha}(s)$ nicht verschwinden, weil $q>s>p$ ist, und $A_{\beta\beta}(s)$ nicht, weil $s>q'$ ist. Ist $q>q'>q''$, und liegt s zwischen q und q'', so verschwindet $A_{\beta\beta}(s)$ nur für $s=q'$, aber für keinen Wert zwischen q und q' und keinen zwischen q' und q''. In dem ganzen Intervall zwischen der größten und der kleinsten der Größen $q, q', q'', \cdots$ verschwindet also $A_{\alpha\alpha}(s)$ nur für $s=q$, $A_{\beta\beta}(s)$ nur für $s=q'$ usw. Ist etwa q die größte und q' die kleinste dieser Größen, so ist

$$A_{\alpha\alpha}(q)=0,\quad A_{\beta\beta}(q)\geqq 0,\quad A_{\gamma\gamma}(q)\geqq 0,\cdots$$
$$A_{\alpha\alpha}(q')\leqq 0,\quad A_{\beta\beta}(q')=0,\quad A_{\gamma\gamma}(q')\leqq 0,\cdots.$$

Mithin ist $\varphi'(q)>0$ und $\varphi'(q')<0$.

Die Gleichung $\varphi'(s)=0$ hat eine reelle positive Wurzel zwischen der größten und der kleinsten der Größen $q_1, q_2, \cdots q_n$, falls q_α die größte Wurzel der Gleichung $A_{\alpha\alpha}(s)=0$ ist.

Hat die Gleichung $\varphi(s)=0$ noch andere positive Wurzeln als r, so sind diese alle kleiner als die kleinste der Größen $q_1, q_2, \cdots q_n$.

§ 3.

Wenn die charakteristische Gleichung $\varphi(s)=0$ der Matrix A eine einfache Wurzel r hat, die absolut größer ist als jede andere Wurzel, so ist die Reihe

$$(1.)\qquad (sE-A)^{-1}=\frac{E}{s}+\frac{A}{s^2}+\frac{A^2}{s^3}+\cdots+\frac{A^\nu}{s^{\nu+1}}+\cdots$$

konvergent, falls $|s|>|r|$ ist. Denn sie ist die Entwicklung einer rationalen Funktion (d. h. von n^2 rationalen Funktionen) mit dem Nenner $\varphi(s)$, konvergiert also, falls s größer ist als jede Wurzel der

Gleichung $\varphi(s)=0$. Die *adjungierte Matrix* von P möge mit $\overline{P}$ bezeichnet werden. Dann ist

$$(sE-A)^{-1} = \frac{1}{\varphi(s)}(\overline{sE-A}).$$

Ist $\varphi(s) = (s-r)\psi(s)$, so erhält man durch Partialbruchzerlegung

$$(sE-A)^{-1} = \frac{1}{\varphi'(r)(s-r)}(\overline{rE-A}) + \frac{1}{\psi(s)}B, \tag{2.}$$

wo B eine ganze Funktion von s ist. Ist

$$\frac{B}{\psi(s)} = \Sigma \frac{B_k}{s^{k+1}}, \tag{3.}$$

so konvergiert diese Reihe, falls s größer ist als jede Wurzel der Gleichung $\psi(s)=0$, also für $s=r$. Daher ist

$$\lim \frac{B_k}{r^k} = 0 \qquad (k=\infty).$$

Nach (1.), (2.) und (3.) ist

$$A^k = \frac{1}{\varphi'(r)}(\overline{rE-A})\, r^k + B_k$$

und folglich

$$\lim \frac{A^k}{r^k} = \frac{1}{\varphi'(r)}(\overline{rE-A}),$$

oder wenn die Elemente der Matrix A^k mit $a^{(k)}_{\alpha\beta}$ bezeichnet werden,

$$\lim \frac{a^{(k)}_{\alpha\beta}}{r^k} = \frac{A_{\alpha\beta}(r)}{\varphi'(r)} \tag{4.}$$

und demnach, wenn $A_{\alpha\beta}(r)$ von Null verschieden ist,

$$\lim \frac{a^{(k+1)}_{\alpha\beta}}{a^{(k)}_{\alpha\beta}} = r. \tag{5.}$$

Die Formel (5.) gilt auch, falls r eine mehrfache Wurzel der Gleichung $\varphi(r)=0$ ist, die absolut größer ist als jede andere Wurzel. Nur muß dann $p_{\alpha\beta}$ von Null verschieden sein, falls die Matrix $P=(p_{\alpha\beta})$ der Koeffizient des Anfangsgliedes in der Entwicklung von $(sE-A)^{-1}$ nach steigenden Potenzen von $s-r$ ist.

§ 4.

Wird von der Matrix A nur vorausgesetzt, daß ihre Elemente $a_{\alpha\beta} \geqq 0$ sind, so lassen sich durch Benutzung der obigen Beweismethoden und durch Stetigkeitsbetrachtungen leicht die Modifikationen feststellen, unter denen die entwickelten Sätze gültig bleiben. Die größte Wurzel r der Gleichung $\varphi(s)=0$ ist reell und positiv ($\geqq 0$).

Sie kann eine mehrfache Wurzel sein, aber nur, wenn die Hauptunterdeterminanten $A_{\alpha\alpha}(r)$ sämtlich verschwinden. Ist sie eine $k$fache Wurzel, so verschwinden alle Hauptunterdeterminanten $(n-1)^{ten}$, $(n-2)^{ten}$, $\cdots (n-k+1)^{ten}$ Grades der Matrix $rE-A$.

7. Den Wert 0 kann r nur dann haben, wenn die Größen $a_{\alpha\alpha}$, $a_{\alpha\beta}a_{\beta\alpha}$, $a_{\alpha\beta}a_{\beta\gamma}a_{\gamma\alpha}$, $a_{\alpha\beta}a_{\beta\gamma}a_{\gamma\delta}a_{\delta\alpha}$, $\cdots$ sämtlich verschwinden.

Sind die Größen $a_{\alpha\beta}$ beliebig, so liegen die reellen Teile der Wurzeln der Gleichung $|a_{\alpha\beta}-se_{\alpha\beta}|=0$ zwischen der größten und der kleinsten Wurzel der Gleichung

$$\left|\tfrac{1}{2}(a_{\alpha\beta}+\bar{a}_{\beta\alpha})-se_{\alpha\beta}\right| = 0,$$

wo $\bar{a}_{\alpha\beta}$ die zu $a_{\alpha\beta}$ konjugierte komplexe Größe ist. (Hirsch, *Sur les racines d'une équation fondamentale*, Acta math. Bd. 25.) Ist also $a_{\alpha\beta}$ positiv, so ist die größte Wurzel r der Gleichung $\varphi(s)=0$ kleiner als die größte Wurzel der Gleichung

$$\left|\tfrac{1}{2}(a_{\alpha\beta}+a_{\beta\alpha})-se_{\alpha\beta}\right| = 0. \tag{1.}$$

Betrachtet man die n^2 Elemente $a_{\alpha\beta}$ als reelle positive Veränderliche, so ist r eine eindeutige Funktion derselben. Differenziert man die Gleichung $\varphi(r)=0$ nach $a_{\alpha\beta}$, so erhält man

$$\varphi'(r)\frac{\partial r}{\partial a_{\alpha\beta}} = A_{\beta\alpha}(r).$$

Mithin ist die Ableitung positiv, und folglich wächst r, wenn eins der Elemente zunimmt. Mit Hilfe dieser Bemerkung kann man auf verschiedene Arten Grenzen finden, zwischen denen r liegt.

Sind die Elemente $a_{\alpha\beta}$ einer Matrix n^{ten} Grades alle positiv, so liegt ihre größte charakteristische Wurzel zwischen der größten und der kleinsten der n Zahlen

$$a_\alpha = a_{\alpha1} + a_{\alpha2} + \cdots + a_{\alpha n} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots n).$$

Man addiere in der Determinante $\Delta(r)=0$ zu den Elementen der n^{ten} Spalte die der $(n-1)$ anderen Spalten und entwickle dann die Determinante nach den Elementen jener Spalte. So erhält man

$$(r-a_1)A_{1n}(r) + (r-a_2)A_{2n}(r) + \cdots + (r-a_n)A_{nn}(r) = 0.$$

Da die Unterdeterminanten $A_{\alpha\beta}(r)$ alle positiv sind, so können daher die Differenzen $r-a_1, r-a_2, \cdots r-a_n$ nicht alle dasselbe Zeichen haben, und folglich muß r zwischen der größten und der kleinsten der Größen $a_1, a_2, \cdots a_n$ liegen. Sind speziell diese Größen alle einander gleich, so muß auch r ihnen gleich sein.

80.

Über Matrizen aus positiven Elementen II

Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin
514–518 (1909)

Eine Matrix A nenne ich *positiv*, $A > 0$, wenn jedes Element $a_{\alpha\beta} > 0$ ist, *nicht negativ*, $A \geqq 0$, wenn $a_{\alpha\beta} \geqq 0$ ist. Die in meiner Arbeit *Über Matrizen aus positiven Elementen*, Sitzungsberichte 1908 entwickelten Sätze lassen sich verallgemeinern. Für den Satz, daß die größte positive Wurzel von A absolut größer ist als jede andere Wurzel, wird sich dabei ein erheblich einfacherer Beweis ergeben.

§ 5.

Die charakteristische Gleichung $\varphi(s) = 0$ jeder positiven Matrix A hat eine positive Wurzel. Die größte r, die ich die *Maximalwurzel* von A nennen will, ist eine einfache Wurzel, und für $s > r$ sind die Unterdeterminanten $A_{\alpha\beta}(s)$ der Determinante $|sE - A|$ alle positiv. Daher kann man den n linearen Gleichungen

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta} z_\beta = r z_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n)$$

durch lauter positive (> 0) Werte $z_1, z_2, \cdots z_n$ genügen.

Dieser Satz läßt sich umkehren. Es sei q irgendeine Wurzel der Gleichung $\varphi(s) = 0$, und es sei möglich, den n Gleichungen

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta} y_\beta = q y_\alpha$$

durch nicht negative Werte $y_1, y_2, \cdots y_n$ zu genügen, die aber nicht alle Null sind; dann zeigen diese Gleichungen zunächst, daß q reell und positiv ist. Nun kann man, wenn r die Maximalwurzel von A ist, den Gleichungen

$$\sum_\alpha a_{\alpha\beta} x_\alpha = r x_\beta$$

durch positive Werte $x_1, x_2, \cdots x_n$ genügen. Daher ist

$$q \sum_\alpha x_\alpha y_\alpha = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = r \sum_\beta x_\beta y_\beta,$$

also $q = r$, da $\sum x_\alpha y_\alpha$ von Null verschieden ist.

Die Maximalwurzel r ist als die größte positive Wurzel der Gleichung $\varphi(s) = 0$ definiert. Ich will nun zeigen, daß sie auch absolut größer ist als jede negative oder komplexe Wurzel dieser Gleichung. Denn sei p eine solche. Dann kann man $x_1, x_2, \cdots x_n$ so bestimmen, daß

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta} x_\beta = p x_\alpha$$

wird. Ist y_β der absolute Wert von x_β, so ist

$$\left|\sum_\beta a_{\alpha\beta} x_\beta\right| < \sum_\beta a_{\alpha\beta} y_\beta.$$

Die Gleichheit ist ausgeschlossen. Denn sie könnte nur eintreten, wenn sich $x_1, x_2, \cdots x_n$ von $y_1, y_2, \cdots y_n$ alle um denselben komplexen oder negativen Faktor unterschieden. Dieser würde sich in der obigen Gleichung heben, es wäre $\sum a_{\alpha\beta} y_\beta = p y_\alpha$, und mithin wäre p eine reelle positive Größe.

Ist also q der absolute Wert von p, so ist

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta} y_\beta > q y_\alpha.$$

Nun kann man, da r die Maximalwurzel von A ist, n positive Größen $z_1, z_2, \cdots z_n$ so bestimmen, daß

$$\sum_\alpha a_{\alpha\beta} z_\alpha = r z_\beta$$

ist. Demnach ist

$$r \sum y_\beta z_\beta = \sum a_{\alpha\beta} z_\alpha y_\beta > q \sum y_\alpha z_\alpha$$

und mithin $r > q$. Dieser überaus einfache Beweis zeigt die große Fruchtbarkeit der Methode von Cauchy.

Auf demselben Wege kann man aber zu einem weit allgemeineren Resultate gelangen. Die Elemente der Matrix A seien jetzt beliebige komplexe Größen. Ist p eine Wurzel von A, so kann man $x_1, x_2, \cdots x_n$ so bestimmen, daß

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta} x_\beta = p x_\alpha$$

wird. Seien y_β, q die absoluten Werte von x_β, p, und sei $b_{\alpha\beta}$ eine positive (> 0) Größe, die nicht kleiner als der absolute Wert von $a_{\alpha\beta}$ ist. Dann ist

$$\sum_\beta b_{\alpha\beta} y_\beta \geqq q y_\alpha.$$

Ist r die Maximalwurzel der positiven Matrix B, so kann man positive Größen $z_1, z_2, \cdots z_n$ so bestimmen, daß

$$\sum_\alpha b_{\alpha\beta} z_\alpha = r z_\beta$$

wird. Aus diesen Beziehungen ergibt sich wie oben $q \leq r$. Da diese Ungleichheit gilt, solange $b_{\alpha\beta} > 0$ und $b_{\alpha\beta}$ nicht kleiner als der absolute Wert von $a_{\alpha\beta}$ ist, so bleibt sie bestehen, wenn für $a_{\alpha\beta} = 0$ auch $b_{\alpha\beta} = 0$ ist.

Ist $b_{\alpha\beta}$ der absolute Wert der komplexen Größe $a_{\alpha\beta}$, so ist keine Wurzel der Matrix A absolut größer als die Maximalwurzel der nicht negativen Matrix B.

Erst dieser Satz setzt die Bedeutung der Maximalwurzel einer nicht negativen Matrix in das rechte Licht. Sie ist die obere Grenze der absoluten Werte der Wurzeln aller Gleichungen $|A - sE| = 0$, deren Elemente $a_{\alpha\beta}$ absolut $\leq b_{\alpha\beta}$ sind. Daraus ergibt sich ohne Benutzung der Differentialrechnung, daß r wächst, wenn irgendein Element der nicht negativen Matrix B zunimmt.

§ 6.

Ist v die größte Wurzel der *symmetrischen* positiven Matrix C, und ist $s > v$, so ist die quadratische Form

$$s\sum x_\alpha^2 - \sum c_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$$

eine *positive Form*, weil ihre Hauptunterdeterminanten alle positiv sind. Daher ist für alle Werte der Variabeln

$$\sum c_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \leq v\sum x_\alpha^2$$

Ist nun r die Maximalwurzel der positiven Matrix A, und ist

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta} x_\beta = r x_\alpha,$$

so ist

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = r\sum x_\alpha^2,$$

oder wenn man

$$a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha} = 2c_{\alpha\beta} = 2c_{\beta\alpha}$$

setzt,

$$r\sum x_\alpha^2 = \sum c_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta < v\sum x_\alpha^2$$

und mithin $r < v$. Der Beweis stimmt mit dem von Hasen überein, benutzt aber nicht die Sätze über die Maxima und Minima der Funktionen mehrerer Variabeln.

Ferner ist, wenn $x_1, \cdots x_n$ und $y_1, \cdots y_n$ positive Größen sind,

$$(a_{\alpha 1}x_1 + \cdots + a_{\alpha n}x_n)(a_{1\alpha}y_1 + \cdots + a_{n\alpha}y_n) > (\sqrt{a_{\alpha 1}x_1}\sqrt{a_{1\alpha}y_1} + \cdots + \sqrt{a_{\alpha n}x_n}\sqrt{a_{n\alpha}y_n})^2.$$

Nun sei

$$a_{\alpha 1}x_1 + \cdots + a_{\alpha n}x_n = rx_\alpha, \quad a_{1\alpha}y_1 + \cdots + a_{n\alpha}y_n = ry_\alpha$$

und

$$\sqrt{a_{\alpha\beta}a_{\beta\alpha}} = b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}, \quad \sqrt{x_\alpha y_\alpha} = z_\alpha.$$

Dann ist

$$(1.) \qquad b_{\alpha 1}z_1 + \cdots + b_{\alpha n}z_n < rz_\alpha.$$

Nun sei u die größte Wurzel der symmetrischen positiven Matrix B und

$$(2.) \qquad b_{\alpha 1}t_1 + \cdots + b_{\alpha n}t_n = ut_\alpha,$$

wo $t_1, \cdots t_n$ positiv sind. Dann folgt aus (1.) und (2.)

$$u\sum t_\alpha z_\alpha = \sum b_{\alpha\beta} t_\alpha z_\beta < r\sum t_\alpha z_\alpha$$

und mithin ist $r > u$. Demnach ist

$$(3.) \qquad u < r < v,$$

wenn r, u, v die größten Wurzeln der Gleichungen

$$|a_{\alpha\beta} - se_{\alpha\beta}| = 0, \quad |\sqrt{a_{\alpha\beta}a_{\beta\alpha}} - se_{\alpha\beta}| = 0, \quad \left|\frac{1}{2}(a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha}) - se_{\alpha\beta}\right| = 0$$

sind.

§ 7.

Ist $\varphi(s)$ die charakteristische Funktion einer positiven Matrix, so hat die Gleichung $\varphi^{(\mu)}(s) = 0$ eine reelle positive Wurzel. Die größte r_μ ist eine einfache Wurzel, und es ist $r_0 > r_1 > r_2 > \cdots > r_{n-1}$.

Sind die Elemente der Matrix reelle positive Variabele, so wächst r_μ, wenn eins dieser Elemente zunimmt.

Der letzte Teil dieses Satzes läßt sich noch schärfer so ausdrücken:

Ist r die größte positive Wurzel der Gleichung $A^{(\mu)}(s) = 0$, und ist $s \geq r$, so ist $A^{(\mu)}_{\alpha\beta}(s) > 0$. Dagegen ist $A^{(\mu-1)}(r) < 0$.

Für positive Matrizen $B, C, \cdots$, deren Grad $< n$ ist, nehme ich diese Behauptungen schon als erwiesen an. Ist der Grad von A gleich n, so ist der Satz für $\mu = 0$ richtig. Ich setze ihn auch für alle Ableitungen von $\varphi(s) = A(s)$ als richtig voraus, deren Ordnung $< \mu$ ist.

Nach § 1 ist

$$A(s) = (s - a_{nn})B(s) - \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha n}a_{n\beta}B_{\alpha\beta}(s)$$

und

$$A_{\alpha\beta}(s) = a_{\alpha\beta}C(s) + \sum_{\kappa,\lambda} a_{\alpha\kappa}a_{\lambda\beta}C_{\kappa\lambda}(s).$$

Differenziert man die erste Gleichung μmal, so erhält man

$$A^{(\mu)}(s) = (s - a_{nn})B^{(\mu)}(s) + \mu B^{(\mu-1)}(s) - \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha n}a_{n\beta}B^{(\mu)}_{\alpha\beta}(s).$$

Da $B(s) = A_{\omega\omega}(s)$ nur vom $(n-1)^{ten}$ Grade ist, so hat die Gleichung $B^{(\mu)}(s) = 0$ eine positive Wurzel q, wofür $B^{(\mu)}_{\alpha\alpha}(q) > 0$ und $B^{(\mu-1)}(q) < 0$ ist. Daher ist $A^{(\mu)}(q) < 0$. Folglich hat die Gleichung $A^{(\mu)}(s) = 0$ eine positive Wurzel, die $> q$ ist. Ist r die größte, so ist $r > q$ für jeden Wert von α. Ist $s \geqq r$, so ist $s > q$ und mithin $A^{(\mu)}_{\alpha\alpha}(s) > 0$.

Ist p die größte positive Wurzel der Gleichung $C^{(\mu)}(s) = 0$, so ist demnach $p < q < r$. Ist $s > p$, so ist $C^{(\mu)}(s)$ und $C^{(\mu)}_{\kappa\lambda}(s)$ positiv, also auch

$$A^{(\mu)}_{\alpha\beta}(s) = a_{\alpha\beta}\, C^{(\mu)}(s) + \sum_{\kappa,\lambda} a_{\alpha\kappa} a_{\lambda\beta}\, C^{(\mu)}_{\kappa\lambda}(s)$$

Ist $\mu = n-2$, so ist

$$A^{(n-2)}_{\alpha\beta}(s) = (n-2)!\, a_{\alpha\beta}$$

eine positive Konstante. Endlich ist

$$A^{(\mu+1)}(s) = \sum_{\alpha} A^{(\mu)}_{\alpha\alpha}(s)$$

Daher ist $A^{(\mu+1)}(r) > 0$, also ist r eine einfache Wurzel der Gleichung $A^{(\mu)}(s) = 0$.

Ist r' die größte positive Wurzel der Gleichung $\psi(s) = A^{(\mu-1)}(s) = 0$, und ist $s \geqq r'$, so ist $A^{(\mu-1)}_{\alpha\alpha}(s) > 0$ und mithin auch $\psi'(s) = A^{(\mu)}(s) > 0$. Da nun $A^{(\mu)}(r) = 0$ ist, so muß $r < r'$ sein. Ferner ist r' die einzige Wurzel der Gleichung $\psi(s) = 0$, die $> r$ ist. Denn wäre noch $r'' > r$, also $r' > r'' \geqq r$, so müßte nach dem Satze von Rolle zwischen r' und r'' eine Wurzel der Gleichung $\psi'(s) = 0$ liegen, es wäre also r nicht die größte Wurzel der Gleichung $\psi'(s) = 0$. Da r' eine einfache Wurzel der Gleichung $\psi(s) = 0$ ist, so ist demnach $A^{(\mu)}(r') > 0$.

Aus der Beziehung

$$A^{(\mu)}_{\alpha\beta}(s) = -\frac{\partial A^{(\mu)}(s)}{\partial a_{\alpha\beta}}$$

folgt, wie in § 4, daß $r = r_\mu$ wächst, falls irgendeine der Größen $a_{\alpha\beta}$ zunimmt.

Ist $s \geqq r$, so sind auch die μten Ableitungen aller Hauptunterdeterminanten von $A(s)$ positiv, z. B. derjenigen vom Grade $\mu+1$, d. h. r ist größer als das arithmetische Mittel von irgend $\mu+1$ der Hauptelemente $a_{11}, a_{22}, \cdots a_{nn}$.

Für $\mu = n-2$ ist z. B.

$$n r_{n-2} = a_{11} + \cdots + a_{nn} + \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum \left((a_{\alpha\alpha} - a_{\beta\beta})^2 + 2n\, a_{\alpha\beta} a_{\beta\alpha}\right)},$$

wo α, β die $\frac{1}{2} n(n-1)$ Paare der Indizes $1, 2, \cdots n$ durchlaufen.

81.

Über die mit einer Matrix vertauschbaren Matrizen

Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 3–15 (1910)

Ist C eine Matrix des Grades n, so ist die Anzahl r der linear unabhängigen Matrizen R, die mit C vertauschbar sind,

$$r = n + 2(n_1 + n_2 + n_3 + \cdots),$$

wo n_λ der Grad des größten gemeinsamen Divisors aller Determinanten $(n-\lambda)$ten Grades der Matrix

$$xE - C = B$$

ist. Diese Formel habe ich am Ende des § 7 meiner Arbeit *Über lineare Substitutionen und bilineare Formen*, CRELLES *Journal, Bd. 84*, ohne Beweis angegeben. Hr. MAURER in seiner Dissertation *Zur Theorie der linearen Substitutionen*, 1887, Hr. Voss, Sitzungsber. d. Bayr. Akad. d. Wiss. 1889, und Hr. HENSEL, CRELLES Journal Bd. 127, haben diese Formel aus der Transformation von C in die Normalform von WEIERSTRASS hergeleitet. Einen anderen Beweis, der nur rationale Operationen erfordert, hat Hr. LANDSBERG in seiner Arbeit *Über Fundamentalsysteme und bilineare Formen*, CRELLES *Journal Bd. 116*, entwickelt mit Hilfe der Normalform A, auf die ich B durch zwei Transformationen L und M gebracht habe, deren Koeffizienten ganze Funktionen von x sind, während ihre Determinanten von x unabhängig sind. Dieser Beweis ist aber durch das Hineinziehen des Begriffs des Fundamentalsystems unnötig kompliziert worden. Wenn die Transformation von B in A bekannt ist, so ist die folgende Methode, alle mit C vertauschbaren Matrizen R zu finden und die Anzahl r der unabhängigen darunter zu ermitteln, die natürlichste und einfachste.

§ 1.

Wenn die Elemente einer Matrix ganze Funktionen einer Variabeln x sind (und nur solche Matrizen werden hier benutzt), so nenne ich sie eine *ganze* Matrix; wenn die Elemente von x unabhängig sind, eine *konstante* Matrix. Sind die Determinanten von L und M gleich 1, so sind auch die reziproken Matrizen L^{-1} und M^{-1} ganz.

Acerca de las matrices de Elementos positivos II

Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin

514 − 518(1909)

Llamo *positiva* a una matriz **A**, **A** > **O**, si a cada elemento $a_{\alpha\beta} > 0$, *no-negativa* si $\mathbf{A} \geqq \mathbf{O}$, si cada elemento $a_{\alpha\beta} \geqq 0$. En mi trabajo *Acerca de las matrices de elementos positivos*, Sitzungsberichte (Actas) 1908 se desarrollaron teoremas que se pueden generalizar. Para la proposición que afirma que la raíz positiva mayor de **A** es mayor en valor absoluto que las demás raíces, se probará que apartir de esta, una demostración muchísimo más simple.

§5

La ecuación característica $\varphi(s) = 0$ de cada matriz positiva **A** tiene una raíz positiva. La raíz mayor r, la cual llamo *raíz máxima* de **A**, es una raíz simple, y para $s \geqq r$ son los subdeterminantes $\mathbf{A}_{\alpha\beta}(s)$ del determinante $|s\mathbf{E} - \mathbf{A}|$ todos son positivos. De aquí que sea posible satisfacer las n ecuaciones lineales

$$\sum_{\beta} a_{\alpha\beta} z_\beta = r z_\alpha, \dots (\alpha = 1, 2, \dots, n)$$

por medio de valores positivos (> 0) $z_1, z_2, \dots, z_n$.

Este teorema se puede invertir. Sea q una raíz cualquiera de la ecuación $\varphi(s) = 0$, y sea posible, que las n ecuaciones

$$\sum_{\beta} a_{\alpha\beta} y_\beta = q y_\alpha$$

se satisfagan nada más que para valores no negativos ($\geqq 0$) $y_1, y_2, \dots, y_n$, donde no todos sean cero; entonces, en primer lugar que, estas ecuaciones muestran que r es la raíz máxima de **A**; las ecuaciones

$$\sum_{\beta} a_{\alpha\beta} x_\alpha = r x_\beta$$

puede satisfacerse por medio de valores positivos $x_1, x_2, \dots, x_n$. De aquí que

$$q \sum_{\alpha} x_\alpha y_\alpha = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = r \sum_{\beta} x_\beta y_\beta.$$

por tanto si $q = r$, entonces

$$\sum_\alpha x_\alpha y_\alpha$$

es diferente de cero.

La raíz máxima r se define como la raíz positiva mayor de la ecuación $\varphi(s) = 0$. Ahora quiero mostrar que r es mayor que el valor absoluto de cada raíz negativa o compleja de esta ecuación. Sea p una de esas raíces. Entonces se puede determinar así $x_1, x_2, \ldots, x_n$ para que sea

$$\sum a_{\alpha\beta} x_\beta = p x_\alpha.$$

Si y y_β es el valor absoluto de x_β, entonces

$$\left|\sum_\beta a_{\alpha\beta} x_\beta\right| < \sum_\beta a_{\alpha\beta} y_\beta.$$

Se excluye la igualdad. Por tanto sólo podría ocurrir que, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ todos sobre un mismo factor complejo o un factor negativo. Estos si pudieran aumentar la igualdad de arriba, entonces sería igual a $\sum a_{\alpha\beta} y_\beta = p y_\alpha$, y por tanto, p sería una cantidad positiva real.

Si por tanto q es el valor absoluto de p, entonces

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta} y_\beta > p y_\alpha.$$

Ahora bien, dado que r es la raíz máxima de **A**, se pueden determinar las n cantidades positivas $z_1, z_2, \ldots, z_n$, tales que

$$\sum_\alpha a_{\alpha\beta} z_\alpha = r z_\beta.$$

Por consiguiente

$$r \sum y_\beta z_\beta = \sum a_{\alpha\beta} z_\alpha y_\beta > q \sum y_\alpha z_\alpha$$

y por tanto, $r > q$. Estas cantidades, sobre todo, se demuestran con una demostración sencilla el fructífero método de CAUCHY.

De la misma manera, pueden ser suficientes los resultados, pero con una mayor generalidad. Los elementos de la matriz **A** sean ahora cantidades cualesquiera complejas. Si p es una raíz simple de **A**, entonces $x_1, x_2, \ldots, x_n$ están determinadas

$$\sum_{\beta} a_{\alpha\beta} x_{\beta} = p x_{\alpha}.$$

Sean y_{β}, q los valores absolutos de x_{β}, p, y sea $b_{\alpha\beta}$ una cantidad positiva ($>$ 0), la cual no es menor en valor absoluto que $a_{\alpha\beta}$. Entonces

$$\sum_{\beta} b_{\alpha\beta} y_{\beta} \geqq q y_{\alpha}.$$

Si r es la raíz máxima de la matriz positiva B, entonces se pueden determinar las cantidades $z_1, z_2, \ldots, z_n$, las cuales llegan a ser:

$$\sum_{\alpha} b_{\alpha\beta} z_{\alpha} = r z_{\beta}.$$

De esta relación resulta, como arriba, que $q \leqq r$. Puesto que estas cantidades son distintas, en tanto que $b_{\alpha\beta} > 0$ y $b_{\alpha\beta}$ no es menor que el valor absoluto que el valor de $a_{\alpha\beta}$, entonces queda por demostrar que si para $a_{\alpha\beta} = 0$ entonces $b_{\alpha\beta}$.

***Si $a_{\alpha\beta}$ es el valor absoluto de las cantidades complejas $a_{\alpha\beta}$, entonces ninguna raíz de la matriz* A*, es mayor valor absoluto, que la raíz máxima de la matriz no-negativa* B.**

En primer lugar, este teorema pone de relieve el correcto significado de la raíz máxima de una matriz no-negativa. Si esa raíz es la cota superior de los valores absolutos de las raíces de todas las ecuaciones $|A - sE| = 0$, cuyos elementos $a_{\alpha\beta}$ su valor absoluto es $\leqq b_{\alpha\beta}$. De donde se sigue sin necesidad del calculo diferencial, que r crece, si algún elemento de la matriz no-negativa B aumenta.

§6.

Si v es la raíz máxima de la matriz *simétrica* positiva C, y si $s > v$, entonces la forma cuadrática

$$s \sum_{\beta} x_{\alpha}^2 - \sum c_{\alpha\beta} x_{\alpha} x_{\beta}$$

es una ***forma positiva***, porque sus determinantes principales son todos positivos. Por tanto, es positiva para todos los valores de las variables

$$\sum c_{\alpha\beta} x_{\alpha} x_{\beta} \leqq v \sum x_{\alpha}^2.$$

Ahora, si

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta} x_\beta = r x_\alpha.$$

entonces

$$\sum c_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = r \sum x_\alpha^2.$$

o si

$$a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha} = 2c_{\beta\alpha} = 2c_{\alpha\beta}$$

se tiene que:

$$r \sum x_\alpha^2 = \sum c_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta < v \sum x_\alpha^2$$

y por tanto $r < v$. La demostración coincide con la de HIRSCH, pero no utiliza los teoremas de máximos y mínimos de funciones de varias variables.

Además, si las cantidades $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son cantidades positivas,

$$(a_{\alpha 1} x_1 + \cdots + a_{\alpha n} x_n)(a_{1\alpha} y_1 + \cdots + a_{n\alpha} y_n)$$
$$> (\sqrt{a_{\alpha 1} x_1} \sqrt{a_{1\alpha} y_1} + \cdots + \sqrt{a_{\alpha n} x_n} \sqrt{a_{n\alpha} y_n}).$$

Ahora sea

$$a_{\alpha 1} x_1 + \cdots + a_{\alpha n} x_n = r x_\alpha,\; a_{1\alpha} y_1 + \cdots + a_{n\alpha} y_n = r y_\alpha$$

y

$$\sqrt{a_{\alpha\beta} a_{\beta\alpha}} = b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha},\; \sqrt{x_\alpha y_\alpha} = z_\alpha.$$

Entonces

$$(1.) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, b_{\alpha 1} z_1 + \cdots + b_{\alpha n} z_n < r z_\alpha.$$

Ahora bien, sea u la raíz máxima de la matriz positiva **A**, y si

$$(2.) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, b_{\alpha 1} t_1 + \cdots + b_{\alpha n} t_n = u t_\alpha.$$

donde $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son cantidades positivas. Entonces se sigue de (1.) y (2.)

$$u \sum_\beta t_\alpha z_\alpha = \sum_\beta b_{\alpha\beta} t_\beta z_\beta < r \sum_\beta t_\alpha z_\alpha$$

y por tanto, $r > u$. Consiguientemente

$$u < r < v.$$

si r, u, v son las mayores raíces de las ecuaciones:

$$|a_{\kappa\lambda} - se_{\kappa\lambda}| = 0, |\sqrt{a_{\kappa\lambda}a_{\lambda\kappa}} - se_{\kappa\lambda}| = 0, \left|\frac{1}{2}(a_{\kappa\lambda} + a_{\lambda\kappa})\right| = 0.$$

§7.

Si $\varphi(s)$ es la función característica de una matriz positiva, entonces la ecuación $\varphi(s) = 0$ tiene una raíz positiva real. Las cantidades r_μ es una raíz simple, y $r_0 > r_1 > r_2 > \cdots > r_{n-1}$.

Si uno de los elementos de la matriz real positiva variable crece, entonces crece r_μ.

La última parte de este teorema se pueden expresar, todavía en forma más rigurosa como:

Si r es la raíz positiva mayor de la ecuación $A^{(\mu)} = 0$, y si $s \geqq r$, entonces $A^{(\mu)}_{\alpha\beta}(s) > 0$. En caso contrario $A^{(\mu-1)}(r) = 0$.

Para matrices positivas **B**, **C**, ..., cuyo grado $< n$, considero a estas afirmaciones como ya demostradas. Si el grado de **A** es igual a n, entonces el teorema para $\mu = 0$ es verdadero. Supongo también verdaderas todas las secciones de $\varphi(s) = A(s)$ como verdadera y cuyo orden es $< \mu$.

Por §1

$$A(s) = (s - a_{\alpha\alpha})B(s) - \sum_{\kappa,\lambda} a_{\alpha\kappa}a_{\lambda\alpha}B_{\kappa\lambda}(s) = rx_\alpha.$$

y

$$A_{\alpha\beta}(s) = a_{\alpha\beta}C(s) + \sum_{\kappa,\lambda} a_{\alpha\kappa}a_{\lambda\beta}C_{\kappa\lambda}(s)$$

Si se deriva la primera ecuación $\mu-$*ésima*, entonces se cumple:

$$A^{(\mu)}(s) = (s - a_{\alpha\alpha})B^{(\mu)}(s) + \mu B^{(\mu)}(s) - \sum_{\kappa,\lambda} a_{\alpha\kappa}a_{\lambda\alpha}B^{(\mu)}_{\kappa\lambda}(s).$$

Como $B(s) = A_{\alpha\alpha}(s)$ sólo es de *(n-1)-ésimo* grado, entonces la ecuación $B^{(\mu)}(s) = 0$ tiene una raíz positiva q, porque $B^{(\mu)}_{\kappa\lambda}(q) > 0$ y $B^{(\mu-1)}(q) < 0$. De aquí que $A^{(\mu)}(q) < 0$. Consecuentemente la ecuación $A^{(\mu)}(s) = 0$ tiene una raíz positiva, la cual es $> q$. Si r es la mayor, entonces tanto $C^{(\mu)}(s)$ como $C^{(\mu)}_{\kappa\lambda}(s)$ son positivas, entonces también

$$A^{(\mu)}_{\alpha\beta}(s) = a_{\alpha\beta}C^{(\mu)}(s) + \sum_{\kappa,\lambda} a_{\alpha\kappa}a_{\lambda\beta}C^{(\mu)}_{\kappa\lambda}(s).$$

Si $\mu = n - 2$, entonces

$$A_{\alpha\beta}^{(n-2)}(s) = (n-2)!a_{\alpha\beta}$$

es una constante positiva. Finalmente

$$A_{\alpha\beta}^{(n+1)}(s) = \sum_{\alpha} A_{\alpha\alpha}^{(\mu)}(s).$$

De ahí que si $A^{(\mu+1)}(r) > 0$, entonces r es una raíz simple de la ecuación $A^{(\mu)}(s) = 0$.

Si r' es la raíz positiva mayor de la ecuación $\psi(s) = A^{(\mu-1)}(s) = 0$, y si $s \geqq r'$, entonces $A_{\alpha\alpha}^{(\mu-1)}(s) > 0$ y por tanto, también $\psi'(s) = A^{(\mu)}(s) > 0$. Puesto que $A^{(\mu)}(r) = 0$, entonces debe ser $r < r'$. Además r' es la única raíz de la ecuación $\psi(s) = 0$,la cual es $> r$. Entonces también sería $r'' > r$, una raíz de la ecuación $\psi'(s) = 0$. Como r' es una raíz simple de la ecuación característica $\psi(s) = 0$, entonces $A^{(\mu-1)}(r) < 0$.

De la relación

$$A_{\alpha\beta}^{(\mu)}(s) = -\frac{\partial A^{(\mu)}(s)}{\partial a_{\alpha\beta}}$$

se sigue, como en §4, que $r = r_{\mu}$ crece, en el caso de que alguna de las cantidades $a_{\alpha\beta}$ aumente.

Si $s \geqq r$, entonces las $\mu-ésimas$ derivadas de todos los subdeterminantes principales de $A(s)$ son positivos, por ejemplo, los de grado $\mu + 1-ésimo$ es decir, r es mayor que la media aritmética de alguno de los elementos principales $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

Para $\mu = n$,por ej.,

$$nr_{n-2} = a_{11} + \cdots + a_{nn} + \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum((a_{\alpha\alpha} - a_{\beta\beta})^2 + 2na_{\alpha\beta}a_{\beta\alpha})},$$

donde α, β son los $\frac{1}{2}n(n-1)$ pares de índices que corren en 1, 2, ...n.

Gesammelte Abhandlungen
Band III
Springer-Verlag Berlin 1968

92.

Über Matrizen aus nicht negativen Elementen

Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 456–477 (1912)

In meinen Arbeiten *Über Matrizen aus positiven Elementen*, Sitzungsberichte 1908 und 1909, die ich hier mit *P. M.* zitieren werde, habe ich die Eigenschaften der positiven Matrizen entwickelt und durch Grenzbetrachtungen mit den nötigen Modifikationen auf nicht negative übertragen. Die letzteren aber erfordern eine weit eingehendere Untersuchung, worauf ich durch die in § 11 behandelte Aufgabe gekommen bin.

Eine nicht negative Matrix A, die *unzerlegbar* ist, hat fast alle Eigenschaften mit den positiven Matrizen gemeinsam (§ 5). Nur wenn r die größte positive Wurzel oder Maximalwurzel ihrer charakteristischen Gleichung $\varphi(s) = 0$ ist, kann der absolute Betrag einer andern Wurzel zwar nie $> r$, wohl aber $= r$ sein. Jede der k Wurzeln $r, r', r'', \cdots$, die absolut gleich r sind, ist einfach, und ihre Verhältnisse, $1, \frac{r'}{r}, \frac{r''}{r}, \cdots$ sind die k Wurzeln der Gleichung $\rho^k = 1$.

Ist $k = 1$, so nenne ich die Matrix A *primitiv*, ist $k > 1$, *imprimitiv*. Jede Potenz einer primitiven Matrix ist wieder primitiv, eine gewisse Potenz und jede folgende ist positiv.

Ist A imprimitiv, so besteht A^m aus d unzerlegbaren *Teilen*, wo d der größte gemeinsame Divisor von m und k ist, und zwar zerfällt A^m *vollständig*. Die charakteristischen Funktionen der Teilmatrizen unterscheiden sich nur durch Potenzen von s untereinander.

Die Matrix A^k ist die niedrigste Potenz von A, deren unzerlegbare Teile alle primitiv sind. Die Anzahl dieser Teile ist dem Exponenten k gleich. Ist

$$\psi(s) = s^m + a_1 s^{m-1} + a_2 s^{m-2} + \cdots + a_m$$

die charakteristische Funktion eines dieser k Teile, so ist

$$\varphi(s) = s^n + a_1 s^{n-k} + a_2 s^{n-2k} + \cdots + a_m s^{n-mk} = s^{n-mk}\psi(s^k)$$

die von A. Die Maximalwurzel r^k der Gleichung $\psi(s) = 0$ ist absolut größer als jede andere Wurzel.

In § 11 dehne ich die Untersuchung auf zerlegbare Matrizen aus, und in § 12 zeige ich, daß eine solche nur auf eine Art in unzerlegbare Teile zerfällt werden kann. Dabei ergibt sich der merkwürdige Determinantensatz:

I. *Die Elemente einer Determinante nten Grades seien n^2 unabhängige Veränderliche. Man setze einige derselben Null, doch so, daß die Determinante nicht identisch verschwindet. Dann bleibt sie eine irreduzible Funktion, außer wenn für einen Wert $m < n$ alle Elemente verschwinden, die m Zeilen mit $n - m$ Spalten gemeinsam haben.*

§ 1.

Ist die Matrix $n$ten Grades $A > 0$, und ist q_m $(m \leqq n)$ die Maximalwurzel der Gleichung

$$A_m(s) = \begin{vmatrix} -a_{11} + s & \cdots & -a_{1m} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mm} + s \end{vmatrix} = 0,$$

so ist $q_1 < q_2 < \cdots < q_n = r$ (*P. M.* § 1). Ist A nicht negativ, so ergibt sich auf demselben Wege durch eine Grenzbetrachtung, daß

$$q_1 \leqq q_2 \leqq \cdots \leqq q_n = r$$

ist. Daraus folgt, falls $A \geqq 0$ und r die Maximalwurzel von A ist:

II. *Wenn eine Hauptunterdeterminante $P(s)$ von $A(s)$ für $s = r$ verschwindet, so verschwinden auch alle Hauptunterdeterminanten von $A(r)$, die $P(r)$ enthalten. Ist aber $P(r) > 0$, so sind auch alle Hauptunterdeterminanten jeden Grades von $P(r)$ positiv.*

Ist $A > 0$, so haben die n linearen Gleichungen

$$(1.) \qquad a_{\alpha 1}x_1 + \cdots + a_{\alpha n}x_n = r x_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n)$$

nur eine Lösung, falls man von einem gemeinsamen Faktor absieht, und diesen kann man so wählen, daß die Werte der Unbekannten alle positiv werden. Aber auch wenn $A \geqq 0$ ist, kann man diesen Gleichungen immer durch Werte genügen, die alle nicht negativ, und nicht alle Null sind. Denn da ihre Determinante $A(r) = 0$ ist, so ist eine dieser Gleichungen, etwa die αte, eine Folge der $n - 1$ andern, und kann daher weggelassen werden. Die übrig bleibenden seien (vgl. *P. M.* § 1)

$$\begin{aligned} -(a_{22} - r)x_2 - \cdots - a_{2n}x_n &= a_{21}x_1, \\ &\cdots \\ -a_{n2}x_2 - \cdots - (a_{nn} - r)x_n &= a_{n1}x_1. \end{aligned}$$

Ist $B(r)$ ihre Determinante und q die Maximalwurzel der Gleichung $B(s) = 0$, so ist $q \leqq r$. Ist $q = r$, also $B(r) = 0$, so setze man $x_1 = 0$. Dann erhält man $n - 1$ homogene lineare Gleichungen zwischen den $n-1$ Unbekannten $x_2, \cdots x_n$ von derselben Beschaffenheit wie die n Gleichungen (1.). Da ihre Anzahl nur $n-1$ ist, so kann man annehmen, daß für sie die Behauptung bereits bewiesen ist.

Ist aber $q < r$, so ist nicht nur die Determinante $B(r) > 0$, sondern es sind auch, wie eine Grenzbetrachtung zeigt, ihre Unterdeterminanten $B_{\alpha\beta}(r) \geqq 0$. Setzt man dann $x_1 = 1$, so wird

$$B(r)x_2 = \sum_\beta B_{2\beta}(r)a_{\beta 1}, \cdots \quad B(r)x_n = \sum_\beta B_{n\beta}(r)a_{\beta 1}.$$

Mithin ist $x_2 \geqq 0, \cdots x_n \geqq 0$ und $x_1 > 0$.

§ 2.

Eine Matrix oder Determinante des Grades $p+q$ nenne ich *zerfallend* oder *zerlegbar*, wenn darin alle Elemente verschwinden, welche p Zeilen mit den q Spalten gemeinsam haben, deren Indizes den Indizes der p Zeilen *komplementär* sind (sie zu $1, 2, \cdots p+q$ ergänzen). Unter den pq Elementen, deren Verschwinden die Zerlegbarkeit der Matrix bedingt, kommt also kein Hauptelement $a_{\alpha\alpha}$ vor. Sei z. B.

$$A = \begin{pmatrix} P & V \\ U & Q \end{pmatrix},$$

seien P und Q Matrizen der Grade p und q, V eine Matrix von p Zeilen und q Spalten, U eine Matrix von q Zeilen und p Spalten. Dann *zerfällt* A in die *komplementären Teile* P und Q, wenn $U = 0$ oder $V = 0$ ist. Ist $U = 0$ und $V = 0$, so heißt A *vollständig zerlegbar*.

Dasselbe gilt, wenn A erst nach einer Umstellung der Zeilen und der *entsprechenden* Umstellung der Spalten auf jene Form gebracht werden kann. Eine solche *kogrediente Permutation* der Zeilen und Spalten, wobei die Hauptelemente nur unter sich vertauscht werden und konjugierte Elemente konjugiert bleiben, ist im folgenden immer gemeint, wo von einer *Umstellung der Reihen* einer Matrix gesprochen wird.

Jeder der beiden *Teile* oder *Teilmatrizen* kann weiter zerlegbar sein. So zerfällt die Matrix der Determinante

(1.) $$\begin{vmatrix} P & 0 & 0 \\ U & Q & V \\ W & 0 & R \end{vmatrix} = |P|\,|Q|\,|R|$$

in die 3 Teile P, Q und R, die verschwindenden Matrizen können in jedem der weiter zerlegbaren Teile beliebig links oder rechts von der Diagonale stehen. Durch Umstellung der Reihen kann man die Matrix auf die Formen

$$\begin{matrix} P & 0 & 0 \\ W & R & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} Q & V & U \\ 0 & R & W \end{matrix}$$

bringen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man daher in die Definition der Zerlegbarkeit die Bedingung aufnehmen, daß die Elemente, deren Verschwinden das Zerfallen der Matrix bedingt, alle rechts von der Diagonale stehen, oder alle links.

§ 3.

Ist A, wie stets im folgenden, eine nicht negative Matrix, und zerfällt die Determinante $A(s)$ in die Teile $P(s)$, $Q(s)$, $R(s)$, $\cdots$, so muß einer dieser Faktoren, also eine Hauptunterdeterminante von $A(s)$ für $s = r$ verschwinden. Umgekehrt gilt der Satz:

III. *Wenn eine Hauptunterdeterminante* P *von* $A(r)$ *verschwindet, so zerfällt* $A(r)$. *Wenn außerdem keine Hauptunterdeterminante von* P *verschwindet, so ist* P *einer der unzerlegbaren Teile von* $A(r)$.

Sei $P = A_\alpha(r)$, seien $P_{\kappa\lambda}$ $(\kappa, \lambda = 1, 2, \cdots m)$ die Unterdeterminanten $(m-1)$ten Grades von P, sei stets $P_{\kappa\kappa} > 0$. Ist $P = 0$, so ist $P_{\kappa\kappa}P_{\lambda\lambda} = P_{\kappa\lambda}P_{\lambda\kappa}$, also nicht $P_{\kappa\lambda} = 0$, und mithin $P_{\kappa\lambda} > 0$.

Daher kann man den m linearen Gleichungen

$$a_{1\alpha}y_1 + \cdots + a_{m\alpha}y_m = ry_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots m)$$

durch Werte genügen, die alle positiv sind. Ist Y eine Matrix von nur einer Zeile $y_1, y_2, \cdots y_m$, so kann man diese Gleichungen in der Gestalt $YP = 0$ schreiben, wo jetzt P die Matrix der Determinante $A_\alpha(r)$ bezeichnet. Ebenso kann man die n Gleichungen

(1.) $$a_{\alpha 1}x_1 + \cdots + a_{\alpha n}x_n = rx_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n)$$

in der Gestalt $AX = rX$ schreiben, falls X eine Matrix von nur einer Spalte ist, worin die n nicht negativen Größen $x_1, x_2, \cdots x_n$ untereinander stehen. Wir teilen X in U und Z, wo U die Größen $x_1, \cdots x_m$, Z die Größen $x_{m+1}, \cdots x_n$ enthält. Ist

$$rE - A = \begin{pmatrix} P & L \\ M & N \end{pmatrix},$$

so nehmen die Gleichungen (1.) die Gestalt

$$PU + LZ = 0,$$
$$MU + NZ = 0$$

an. Dann ist $Y(PU + LZ) = 0$, also weil $YP = 0$ ist, $Y(LZ) = 0$, und da $Y > 0$ und $LZ \leqq 0$ ist, $LZ = 0$, mithin auch $PU = 0$.

Sind $x_{m+1}, \cdots x_n$ alle positiv, ist also $Z > 0$, so ist $L = 0$, da die Elemente von L alle negativ oder Null sind. (Das letztere gilt auch von M, aber nicht von den Diagonalmatrizen P und N.)

Sind dagegen $x_{m+1}, \cdots x_n$ alle Null, ist also $Z = 0$, so sind diese aber nur eine Lösung hat, so ist $U > 0$ (weil die Größen $P_{\alpha\beta}$ alle > 0 sind). Nun ist $MU + NZ = 0$, also da $Z = 0$, $U > 0$ ist, $M = 0$.

Ist aber $L = 0$ oder $M = 0$, so zerfällt $A(r)$ in zwei Teile, von denen der eine P ist.

Endlich seien von den Größen $x_{m+1}, \cdots x_n$ einige Null, die andern positiv. Dann besteht Z aus zwei Abteilungen V und W, von denen $V = 0$ und $W > 0$ ist. Teilt man L, M, N entsprechend ein, so wird nach passender Umstellung der Reihen

$$rE - A = \begin{pmatrix} P & Q & R \\ P' & Q' & R' \\ P'' & Q'' & R'' \end{pmatrix},$$

und die Gleichungen (1.) nehmen die Gestalt an

$$\begin{aligned} P\,U + Q\,V + R\,W &= 0, \\ P'U + Q'V + R'W &= 0, \\ P''U + Q''V + R''W &= 0. \end{aligned}$$

Wie oben gezeigt, zerfällt die erste in $PU = 0$ und $QV + RW = 0$. Da aber $V = 0$ und $W > 0$ ist, so ist $R = 0$.

Die zweite Gleichung lautet, da $V = 0$ ist, $P'U + R'W = 0$. Da $P' \leqq 0$, $R' \leqq 0$ und $U \geqq 0$, $W > 0$ ist, so muß einzeln $P'U = 0$ und $R'W = 0$ und mithin $R' = 0$ sein.

Demnach ist $R = 0$ und $R' = 0$, und folglich zerfällt $A(r)$ in $|R''|$ und

$$T(r) = \begin{vmatrix} P & Q \\ P' & Q' \end{vmatrix}.$$

Da die Matrix dieser Determinante P enthält und in $rE - A$ enthalten ist, so ist r nach Satz II in § 1 die Maximalwurzel der Gleichung $T(s) = 0$. In $T(r)$ verschwindet die Hauptunterdeterminante m ten Grades P. Endlich ist der Grad von $T(r)$ kleiner als der von $A(r)$. Daher können wir für $T(r)$ den behaupteten Satz bereits als erwiesen ansehen. Demnach zerfällt $T(r)$ in Teile, deren einer P ist, und folglich gilt dasselbe von $A(r)$.

§ 4.

Ist A unzerlegbar, so verschwindet keine der Größen $A_{\alpha\alpha}(r)$, und mithin ist r eine einfache Wurzel der charakteristischen Gleichung $\varphi(s) = 0$. Wenn umgekehrt keine Hauptunterdeterminante $(n-1)$ten Grades von $A(r)$ verschwindet, so ist A unzerlegbar. Da $A_{\alpha\beta}(r)A_{\beta\alpha}(r) = A_{\alpha\alpha}(r)A_{\beta\beta}(r)$ ist, so ist auch $A_{\alpha\beta}(r) > 0$. (Ist $A_{\alpha\alpha}(r) = 0$, aber $A_{\beta\beta}(r) > 0$, so verschwindet $A_{\alpha\beta}(s)A_{\beta\alpha}(s)$ identisch.)

Die adjungierte Matrix B von $rE - A$ ist also positiv. Daraus ergibt sich ein Satz, der dem Satze von Maschke in der Gruppentheorie analog ist. Ist nämlich

$$\varphi(r, s) = \frac{\varphi(r) - \varphi(s)}{r - s},$$

so ist

$$B = \varphi(r, A) \tag{1.}$$

eine ganze Funktion von A, eine lineare Verbindung von $A^0, A^1, \cdots A^{n-1}$. Die Elemente von A^k seien $a^{(k)}_{\alpha\beta}$.

IV. *In einer unzerlegbaren Matrix können bei keiner Wahl der Indizes die n Größen*

$$a^{(0)}_{\alpha\beta}, \quad a^{(1)}_{\alpha\beta}, \quad a^{(2)}_{\alpha\beta}, \quad \cdots \quad a^{(n-1)}_{\alpha\beta}$$

sämtlich verschwinden (kann nicht identisch $A_{\alpha\beta}(s) = 0$ sein).

Denn sonst wäre auch das Element $b_{\alpha\beta} = 0$, während doch $b_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}(r) > 0$ ist. In einer zerlegbaren Matrix kann man aber α und β so wählen, daß $a^{(k)}_{\alpha\beta}$ für jeden Wert von k verschwindet (daß also $A_{\alpha\beta}(s)$ identisch verschwindet). Denn ist

$$A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ L & Q \end{pmatrix},$$

so ist

$$A^k = \begin{pmatrix} P^k & 0 \\ L_k & Q^k \end{pmatrix}.$$

Jeder der unzerlegbaren Teile $P(s)$, $Q(s)$, $R(s)$, $\cdots$ von $A(s)$, der für $s = r$ Null wird, verschwindet nur von der ersten Ordnung. Daraus folgt:

V. *Damit die Maximalwurzel r der Gleichung $A(s) = 0$ eine k fache sei, ist notwendig und hinreichend, daß von den unzerlegbaren Teilen von $A(s)$ genau k für $s = r$ verschwinden.*

Daraus schließt man leicht:

VI. *Ist die Maximalwurzel r der Gleichung $A(s) = 0$ eine mehrfache, so ist sie entweder gleich dem größten der Hauptelemente $a_{\alpha\alpha}$, oder in jeder Hauptunterdeterminante $(n-1)$ten Grades verschwindet für $s = r$ eine Hauptunterdeterminante $(n-2)$ten Grades.*

Ist insbesondere $r = 0$, so verschwinden die Hauptunterdeterminanten jeden Grades von A, und daher zerfällt A in n Teile ersten Grades. Ist z. B. $n = 4$, so kann jede Matrix vierten Grades durch Umstellung der Reihen auf die Form

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{matrix}$$

gebracht werden, wenn alle zyklischen Produkte

$$a_{\alpha\alpha}=0\,,\quad a_{\alpha\beta}a_{\beta\alpha}=0\,,\quad a_{\alpha\beta}a_{\beta\gamma}a_{\gamma\alpha}=0\,,\quad a_{\alpha\beta}a_{\beta\gamma}a_{\gamma\delta}a_{\delta\alpha}=0$$

sind.

§ 5.

Ist q die Maximalwurzel der Gleichung $A_{\alpha\alpha}(s)=0$, so ist $q\leq r$. Ist also $s>r$, so ist auch $s>q$ und mithin ist $A_{\alpha\alpha}(s)>0$. Hat p dieselbe Bedeutung wie in *P. M.* § 1, so gilt der Satz:

VII. *Wenn $A_{\alpha\beta}(s)$ ($\alpha\neq\beta$) für einen Wert $s>r$ (oder auch nur $s>p$) Null ist, so verschwindet $A_{\alpha\beta}(s)$ identisch.*

Denn sei $s_0>p$ ein solcher Wert. Da für alle benachbarten Werte $A_{\alpha\beta}(s)\geq 0$ ist, so verschwindet auch die Ableitung $A'_{\alpha\beta}(s)$ für $s=s_0$. Nun ist aber

$$-A_{\alpha\beta}(s)=\begin{vmatrix}-a_{\alpha\beta} & -a_{\alpha\gamma} & \cdots & -a_{\alpha\kappa}\\ -a_{\gamma\beta} & -a_{\gamma\gamma}+s & \cdots & -a_{\gamma\kappa}\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ -a_{\kappa\beta} & -a_{\kappa\gamma} & \cdots & -a_{\kappa\kappa}+s\end{vmatrix}.$$

Daher ist $A'_{\alpha\beta}(s)$ eine Summe von $n-2$ Determinanten $(n-2)$ten Grades, $A_\gamma(s)+\cdots+A_\kappa(s)$, die zu den Hauptunterdeterminanten $A_{\gamma\gamma}(s),\cdots A_{\kappa\kappa}(s)$ in derselben Beziehung stehen wie $A_{\alpha\beta}(s)$ zu $A(s)$. Hat p_γ für $A_{\gamma\gamma}(s)$ dieselbe Bedeutung wie p für $A(s)$, so ist $p_\gamma\leq p$. Ist also $s>p$, so ist auch $s>p_\gamma$. Folglich ist $A_\gamma(s)\geq 0$, und mithin verschwindet für $s=s_0$ jede der Determinanten $A_\gamma(s),\cdots A_\kappa(s)$, und zwar jede nebst ihrer Ableitung. So erkennt man, daß alle Ableitungen von $A_{\alpha\beta}(s)$ für $s=s_0$ verschwinden, und mithin verschwindet diese Funktion identisch.

Nun ist aber

$$A(s)\,C(s)=A_{\alpha\alpha}(s)A_{\beta\beta}(s)-A_{\alpha\beta}(s)A_{\beta\alpha}(s)$$

ist also identisch $A_{\alpha\beta}(s)=0$, oder ist auch nur $A_{\alpha\beta}(r)=0$, so verschwindet eine der beiden Größen $A_{\alpha\alpha}(r)$ oder $A_{\beta\beta}(r)$, und mithin ist A zerlegbar.

VIII. *Ist A unzerlegbar, so sind die Unterdeterminanten $A_{\alpha\beta}(s)$ für jeden Wert $s\geq r$ positiv.*

Eine *nicht negative unzerlegbare* Matrix besitzt demnach die meisten Eigenschaften einer *positiven* Matrix: Die Maximalwurzel r der Gleichung $A(s)=0$ ist einfach, die Unterdeterminanten $(n-1)$ten Grades und die Hauptunterdeterminanten jeden Grades von $A(s)$ sind positiv, falls $s\geq r$ ist.

Ist aber r' irgendeine von r verschiedene Wurzel, so ist stets $r\geq|r'|$, aber nicht notwendig $r>|r'|$. Eine unzerlegbare nicht negative Matrix nenne ich *primitiv*, wenn ihre Maximalwurzel absolut größer ist als jede andre Wurzel, *imprimitiv*, wenn sie dem absoluten Betrage einer andern Wurzel gleich ist.

§ 6.

IX. *Von jeder primitiven Matrix ist eine Potenz positiv. Ist A^k die niedrigste, so sind es auch alle folgenden $A^{k+1}, A^{k+2},\cdots$ Umgekehrt ist eine Matrix primitiv, wenn eine ihrer Potenzen positiv ist.*

Ist A^k positiv, so ist A unzerlegbar. Sonst wäre auch jede Potenz von A zerlegbar und enthielte verschwindende Elemente. Ferner ist stets $r^k>|r'^k|$, und mithin $r>|r'|$. Folglich ist A primitiv. Diese Bemerkung hat schon Hr. Perron am Schluß seiner Arbeit gemacht.

Ist P irgendeine positive Matrix, und A eine unzerlegbare, so ist auch $PA=Q$ positiv. Denn wäre $q_{\alpha\beta}=\sum p_{\alpha\kappa}a_{\kappa\beta}=0$, so wäre $a_{1\beta}=\cdots=a_{n\beta}=0$, also A zerlegbar. Daher ist auch $QA=PA^2$ positiv usw.

Hat umgekehrt A eine einfache Wurzel r, die absolut größer ist als jede andere Wurzel r', so ist (*P. M.* § 3)

$$\lim\frac{a^{(t)}_{\alpha\beta}}{r^t}=\frac{A_{\beta\alpha}(r)}{\varphi'(r)}\qquad (t=\infty)$$

Ist A unzerlegbar, so ist nach Satz VIII der Grenzwert positiv, mithin muß auch, falls k eine gewisse Grenze überschreitet, für je zwei Indizes $a^{(k)}_{\alpha\beta}>0$, also $A^k>0$ sein.

Da hier aber Grenzbetrachtungen benutzt sind, so werde ich von diesem Ergebnis nicht eher Gebrauch machen, bis ich es auch algebraisch bewiesen habe.

X. *In einer imprimitiven Matrix sind die Hauptelemente sämtlich Null.*

Jedes Element $a^{(k)}_{\alpha\beta}$ von A^k ist eine Summe von Produkten nicht negativer Größen, also positiv, sobald eins dieser Produkte positiv ist. Ist $a_{11}>0$, so ist auch $a^{(k)}_{11}>0$, weil es das Glied a^k_{11} enthält. Nach Satz IV gibt es eine Zahl $k<n$, wofür $a^{(k)}_{\alpha 1}>0$ ist. In $A^{k+1}=A^kA$ ist dann auch $a^{(k+1)}_{\alpha 1}>0$, weil es das Glied $a^{(k)}_{\alpha 1}a_{11}$ enthält. Ist $a^{(l)}_{1\beta}>0$, so ist es auch $a^{(l+1)}_{1\beta}$ in $A^{l+1}=AA^l$. Spätestens für $k=l=n-1$ sind demnach die $2n-1$ Größen

$$a^{(k)}_{\alpha 1}\,,\quad a^{(l)}_{1\beta}\qquad(\alpha,\beta=1,2,\cdots n)$$

sämtlich von Null verschieden. Folglich ist in $A^{k+l}=A^kA^l$ jedes Element $a^{(k+l)}_{\alpha\beta}>0$, weil es das Glied $a^{(k)}_{\alpha 1}a^{(l)}_{1\beta}$ enthält. Ist aber $A^k>0$, so ist A primitiv.

Ist umgekehrt A imprimitiv, so müssen daher $a_{11}, a_{22}, \cdots a_{nn}$ sämtlich verschwinden, oder es muß, was dasselbe ist, ihre Summe

$$(1.)\qquad a_{11}+a_{22}+\cdots a_{nn} = r+r_1+\cdots+r_{n-1} = 0$$

sein, falls

$$(2.)\qquad \varphi(s) = (s-r)(s-r_1)\cdots(s-r_{n-1})$$

gesetzt wird. In jeder Potenz einer imprimitiven Matrix gibt es demnach verschwindende Elemente. Dies ist selbstverständlich, wenn die Matrix A^m zerlegbar ist. Ist sie aber unzerlegbar, so ist sie imprimitiv, weil $|r'^m| = r^m$ ist, und dann verschwinden alle Hauptelemente.

XI. *Jede Potenz einer primitiven Matrix ist primitiv. Sind umgekehrt $A, A^2 \cdots A^n$ unzerlegbar, so ist A primitiv.*

Da die Matrix (1.) § 4 positiv ist, so ist es auch die Matrix BA, die eine lineare Verbindung von $A, A^2 \cdots A^n$ ist. Daher können die n Größen

$$a_{11}, a_{11}^{(2)} \cdots a_{11}^{(n)}$$

nicht alle verschwinden. Ist $a_{11}^{(m)} > 0$ und ist A imprimitiv, so ist A^m zerlegbar. Denn wäre A^m unzerlegbar, so wäre diese Matrix imprimitiv, und es wäre $a_{11}^{(m)} = 0$.

Sind also umgekehrt $A, A^2, \cdots A^n$ unzerlegbar, so muß A primitiv sein.

Der Beweis der ersten Hälfte des Satzes XI sowie der des Satzes IX, woraus jene sofort folgt, beruht auf den folgenden Überlegungen.

§ 7.

Ist A unzerlegbar, so sind die Größen $A_{\alpha\beta}(r)$ alle positiv. Daher haben die n linearen Gleichungen

$$(1.)\qquad a_{\alpha 1}x_1+\cdots+a_{\alpha n}x_n = rx_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n),$$

falls man von einem gemeinsamen Faktor absieht, nur eine Lösung, und darin können $x_1, \cdots x_n$ alle positiv angenommen werden. Dasselbe gilt von den Gleichungen

$$(2.)\qquad a_{1\beta}y_1+\cdots+a_{n\beta}y_n = ry_\beta \qquad (\beta = 1, 2, \cdots n).$$

Betrachten wir die n Größen $y_1, \cdots y_n$ als eine Matrix Y von nur einer Zeile. Ebenso sei X die Matrix, worin $x_1, \cdots x_n$ in einer Spalte untereinander stehen. Dann ist $X > 0$ und $Y > 0$, und die Gleichungen (1.) und (2.) lauten

$$(3.)\qquad AX = rX\ ,\quad YA = rY.$$

Sei umgekehrt Z eine Matrix, worin in einer Spalte n Größen $z_1, \cdots z_n$ stehen, die alle nicht negativ, und nicht alle Null sind. Bestehen

dann n Gleichungen $AZ = sZ$, so muß zunächst $\varphi(s) = 0$ sein. Ferner ist

$$YAZ = (YA)Z = rYZ = Y(AZ) = sYZ.$$

Die Matrix YZ ist vom ersten Grade und besteht aus der Größe $y_1z_1+\cdots+y_nz_n > 0$. Mithin ist $s = r$. Die linearen Gleichungen $AX = sX$ oder $YA = sY$ können also nur dann eine Lösung haben, deren Elemente alle nicht negativ und nicht alle Null sind, wenn $s = r$ ist, und dann sind die Unbekannten alle positiv.

Nun sei A unzerlegbar, aber A^m zerlegbar. Nach passender Umstellung der Reihen von A können wir also

$$A^m = \begin{matrix} B_{11} & 0 & 0 & 0 & . \\ B_{21} & B_{22} & 0 & 0 & . \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & 0 & . \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} & . \\ . & . & . & . & . \end{matrix}$$

setzen, wo die Teilmatrizen $B_{11}, B_{22}, \cdots$ unzerlegbar sind, und $B_{\alpha\beta} = 0$ ist, falls $\beta > \alpha$ ist.

Bestimmt man X und Y, wie oben, so ist auch

$$A^mX = r^mX,\quad YA^m = r^mY.$$

Sei m_1 der Grad von B_{11}, sei X_1 das System der ersten m_1 der Größen $x_1, \cdots x_n$, X_2 das der folgenden m_2 usw. Dann ist

$$(4.)\qquad \sum_\beta B_{\alpha\beta}X_\beta = sX_\alpha,\quad \sum_\alpha Y_\alpha B_{\alpha\beta} = sY_\beta,$$

wo $s = r^m$ ist. Die ersten dieser Gleichungen lauten

$$(5.)\qquad B_{11}X_1 = sX_1$$

und

$$\sum Y_\alpha B_{\alpha 1} = sY_1,\quad \sum Y_\alpha B_{\alpha 1}X_1 = sY_1X_1,$$

also weil das erste Glied dieser Summe $Y_1(B_{11}X_1) = sY_1X_1$ ist,

$$Y_2B_{21}X_1+Y_3B_{31}X_1+Y_4B_{41}X_1+\cdots = 0,$$

und da jedes Glied $\geqq 0$ ist, $Y_2B_{21}X_1 = 0$. Besteht die Matrix B_{21} aus den Größen $c_{\alpha\kappa}$, so besteht $Y_2B_{21}X_1$ aus der einen Größe $\sum y_\alpha c_{\alpha\kappa} x_\kappa$. Da x_κ und y_α positiv sind, so ist $c_{\alpha\kappa} = 0$, also

$$B_{21} = 0,\quad B_{31} = 0,\quad B_{41} = 0, \cdots.$$

Demnach lauten die zweiten der Gleichungen (4.)

$$(6.)\qquad B_{22}X_2 = sX_2$$

und

$$\sum Y_\alpha B_{\alpha 2} = sY_2,\quad \sum Y_\alpha B_{\alpha 2}X_2 = sY_2X_2.$$

Da $R_{21} = 0$ ist, so ist das erste Glied dieser Summe $Y_1 R_{21} X_1 = s Y_2 X_2$, und mithin ist

$$R_{21} = 0, \quad R_{31} = 0, \quad R_{41} = 0, \cdots,$$

allgemein $R_{\alpha\beta} = 0$, falls $\alpha > \beta$ ist. Daher zerfällt

$$A^m = \begin{matrix} R_{11} & 0 & 0 & . \\ 0 & R_{22} & 0 & . \\ 0 & 0 & R_{33} & . \\ . & . & . & . \end{matrix}$$

vollständig.

XII. *Zerfällt eine Potenz einer unzerlegbaren Matrix, so ist sie vollständig zerlegbar.*

Ferner zeigen die Gleichungen (5.) und (6.), daß jeder der unzerlegbaren Teile $R_{\kappa\kappa}$ die Wurzel r^m hat.

Da r eine einfache Wurzel von A ist, so ist dies nur möglich, wenn A eine von r verschiedene Wurzel r' besitzt, deren $m$te Potenz $r'^m = r^m$ ist. Folglich ist $|r'| = r$ und A imprimitiv.

Wenn also A primitiv ist, so ist jede Potenz von A unzerlegbar, und demnach, weil stets $r'^m < r^m$ ist, primitiv. Ferner gibt es, wie schon oben gezeigt, eine Potenz A^m, worin $a_{11}^{(m)} > 0$ ist. Da außerdem A^m unzerlegbar ist, so ist nach den Überlegungen im Beweise des Satzes X eine Potenz von A^m positiv. Damit sind die Sätze IX und XI vollständig bewiesen. Aus der obigen Entwicklung ergibt sich noch das Resultat:

XIII. *Ist A eine zerfallende Matrix, und haben sowohl die Gleichungen $AX = rX$ als auch die Gleichungen $YA = rY$ eine positive Lösung, so zerfällt A vollständig, und jeder unzerlegbare Teil von A hat die Maximalwurzel r.*

§ 8.

Wenn A unzerlegbar ist, so ist nach Satz III die Maximalwurzel der Gleichung $A_{\alpha\alpha}(s) = 0$ $q < r$. Ist q' irgendeine andre Wurzel dieser Gleichung, so ist $|q'| \leqq q < r$. Sei A imprimitiv und seien

(1.) $$r, \; r', \; r'', \cdots$$

alle Wurzeln von A, deren absoluter Betrag gleich r ist. Da $|r'| > q$ ist, so ist $A_{\alpha\alpha}(r')$ von Null verschieden, und da

$$A_{\alpha\beta}(r') A_{\beta\alpha}(r') = A_{\alpha\alpha}(r') A_{\beta\beta}(r')$$

ist, so ist es auch $A_{\alpha\beta}(r')$. Mithin haben die n linearen Gleichungen

$$AZ = r'Z$$

nur eine Lösung, und deren Elemente $z_1, \cdots z_n$ sind alle von Null verschieden. Dann ist aber auch

$$A^m Z = r'^m Z,$$

also

$$R_{11} Z_1 = r'^m Z_1, \quad R_{22} Z_2 = r'^m Z_2, \cdots.$$

Folglich hat jeder der unzerlegbaren Teile $R_{\kappa\kappa}$ die Wurzeln

(2.) $$r^m, \; r'^m, \; r''^m, \cdots.$$

Sind diese nicht alle gleich r^m, so ist jeder Teil $R_{\kappa\kappa}$ imprimitiv, und mithin zerfällt eine Potenz von A^m in eine größere Anzahl von Teilen wie A^m. Da die Anzahl der Teile nicht $> n$ sein kann, so muß es eine Potenz A^m geben, die in lauter primitive Teile zerfällt. Dann ist $r^m = r'^m = r''^m = \cdots$, und folglich sind

(3.) $$1, \; \frac{r'}{r}, \; \frac{r''}{r}, \cdots$$

Wurzeln der Gleichung $\rho^m = 1$.

In jedem unzerlegbaren Teile $R_{\kappa\kappa}$ von A^m ist r^m die größte positive Wurzel, also einfach. Die Anzahl dieser Teile ist demnach gleich der Anzahl der Größen (2.), die gleich r^m sind. Wählt man m so, daß die Einheitswurzeln (3.) alle der Gleichung $\rho^m = 1$ genügen, so sind die Größen (2.) alle gleich r^m, $R_{\kappa\kappa}$ hat keine von r^m verschiedene Wurzel vom absoluten Betrage r^m und ist daher primitiv.

Der kleinste Exponent k, wofür A^k in lauter primitive Teile $R_{\kappa\kappa}$ zerfällt, ist folglich gleich dem kleinsten Exponenten k, wofür die Größen (3.) alle der Gleichung $\rho^k = 1$ genügen. Ist dann m nicht durch k teilbar, so genügen die Größen (3.) nicht alle der Gleichung $\rho^m = 1$, sind die Größen (2.) nicht alle gleich r^m, ist jeder Teil $R_{\kappa\kappa}$ von A^m imprimitiv, sind die Hauptelemente von $R_{\kappa\kappa}$ alle Null.

Ist also m nicht durch k teilbar, so verschwindet die Summe der Hauptelemente von A^m

$$s_m = r^m + r_1^m + \cdots + r_{n-1}^m = 0.$$

Mithin ist auch $c_m = 0$, wenn

$$\varphi(s) = s^n + c_1 s^{n-1} + \cdots + c_n$$

ist. Dies folgt aus den Newtonschen Formeln

$$s_m + c_1 s_{m-1} + \cdots + c_{m-1} s_1 + m c_m = 0.$$

Denn wenn es für $c_1, \cdots c_{m-1}$ schon bewiesen ist, so ist in jedem der m ersten Glieder $c_\kappa s_\lambda$ entweder $c_\kappa = 0$ oder $s_\lambda = 0$, weil $\kappa + \lambda = m$ ist, also κ und λ nicht beide durch k teilbar sind. Folglich ist auch $c_m = 0$. Demnach ist

Ist also ρ irgendeine Wurzel der Gleichung $\rho^k = 1$, so ist $r' = \rho r$ eine Wurzel der Gleichung $\varphi(s) = 0$. Ferner ist

$$\varphi'(r') = \rho^{n-1}\varphi'(r),$$

und mithin ist r', ebenso wie r, eine einfache Wurzel. Daher stimmen die Größen (3.) mit den k verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\rho^k = 1$ überein, und ihre Anzahl ist gleich k.

XIV. *Die charakteristische Funktion einer unzerlegbaren Matrix A sei*

$$\varphi(s) = s^n + a's^{n'} + a''s^{n''} + \cdots,$$

wo $n > n' > n'' > \cdots$ ist, und $a', a'', \cdots$ von Null verschieden sind. Der größte gemeinsame Divisor der Differenzen $n-n'$, $n'-n''$, $\cdots$ sei k. Ist dann $k = 1$, so ist A primitiv. Ist aber $k > 1$, so ist A imprimitiv, A^k ist die niedrigste Potenz von A, die in lauter primitive Teile (vollständig) zerfällt, und die Anzahl dieser Teile ist ebenfalls gleich k. Setzt man

$$\varphi(s) = s^n + a_1 s^{n-k} + a_2 s^{n-2k} + \cdots + a_m s^{n-mk},\quad \psi(s) = s^m + a_1 s^{m-1} + a_2 s^{m-2} + \cdots + a_m,$$

so hat die Gleichung $\psi(s) = 0$ eine positive Wurzel, die einfach ist und absolut größer als jede andere ihrer Wurzeln.

Der letzte Teil dieses Satzes zeigt am deutlichsten die geringe Modifikation, womit sich die Eigenschaften der positiven Matrizen auf imprimitive übertragen, während sie für primitive ganz unverändert gültig bleiben.

Die Zahl $n-n' = h$ ist die kleinste Zahl, wofür

die Hauptelemente von A^h

oder

die zyklischen Produkte $a_{\alpha\beta}a_{\beta\gamma}a_{\gamma\delta}\cdots a_{\eta\alpha}$ von h Faktoren

oder

die Hauptunterdeterminanten $h$ten Grades von A

nicht sämtlich verschwinden.

Für irgendeine nicht negative Matrix ist jede dieser drei Bedingungen damit äquivalent, daß c_h der erste nicht verschwindende Koeffizient in $\varphi(s) = s^n + c_1 s^{n-1} + c_2 s^{n-2} + \cdots$ ist.

Ist nun A unzerlegbar, so ist A primitiv oder imprimitiv, je nachdem A^k unzerlegbar oder zerlegbar ist.

Um diese Untersuchungen an einem Beispiel zu erläutern, sei $\varphi(s) = s^n - a$, wo a nicht Null ist. Dann ist $s_1 = 0, s_2 = 0, \cdots s_{n-1} = 0$, aber s_n von Null verschieden. Nun ist

$$s_1 = \sum a_{\alpha\alpha},\quad s_2 = \sum a_{\alpha\beta}a_{\beta\alpha},\quad s_3 = \sum a_{\alpha\beta}a_{\beta\gamma}a_{\gamma\alpha}.$$

Mithin ist jedes zyklische Produkt von weniger als n Faktoren

$$a_{\alpha\beta}a_{\beta\gamma}a_{\gamma\delta}\cdots a_{\eta\alpha} = 0,$$

aber nicht jedes von n Faktoren. Durch Umstellung der Reihen kann man bewirken, daß

$$(4.)\qquad a_{12}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1,n}a_{n1} > 0$$

ist. Da $a_{12} > 0$ ist, so ist $a_{21} = 0$, da $a_{12}a_{23} > 0$ ist, so ist $a_{31} = 0$, da $a_{\lambda,\lambda+1}\cdots a_{\mu-1,\mu} > 0$ ist, so ist $a_{\mu,\lambda} = 0$. So erkennt man, daß alle Elemente von A verschwinden, mit Ausnahme der n Elemente des Produkts (4.). Für $n = 4$ ist also

$$(5.)\qquad A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ist A irgendeine nicht negative Matrix, und ist wie oben c_h der erste nicht verschwindende Koeffizient von $\varphi(s)$, so kann jede Hauptunterdeterminante $h$ten Grades von A, die von Null verschieden ist, durch Umstellung ihrer Reihen auf die Gestalt (5.) gebracht werden.

§ 9.

Jeder der k unzerlegbaren Teile $R_{\kappa\kappa}$ von A^k ist primitiv. Mithin ist $R_{\kappa\kappa}^l$ positiv, sobald l eine gewisse Grenze übersteigt. In einer Potenz von A^k, etwa in $A^{kp} = P$ sind folglich die Teile $R_{\kappa\kappa}^p = P_{\kappa\kappa}$ alle positiv.

Man teile die Matrix $A^m = M$ entsprechend in Submatrizen

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \cdots M_{1k} \\ M_{21} & M_{22} \cdots M_{2k} \\ \cdot & \cdot \quad\; \cdot \\ M_{k1} & M_{k2} \cdots M_{kk} \end{pmatrix}.$$

Ist m_κ der Grad von $R_{\kappa\kappa}$, so ist z. B. M_{12} die Matrix der Elemente aus den Zeilen $1, 2, \cdots m_1$ und den Spalten $m_1+1, \cdots m_1+m_2$ von M. Ist nun m nicht durch k teilbar, so ist es auch $m+kp$ nicht. Folglich verschwinden alle Hauptelemente der Matrix MP, also auch von $M_{\kappa\kappa}P_{\kappa\kappa}$. Ist $M_{\kappa\kappa} = U$, $P_{\kappa\kappa} = V$, so ist $\sum_\lambda u_{\alpha\lambda}v_{\lambda\alpha} = 0$, $u_{\alpha\lambda}v_{\lambda\alpha} = 0$, und weil $v_{\lambda\alpha} > 0$ ist, $u_{\alpha\lambda} = 0$, d. h. $M_{\kappa\kappa} = 0$.

Ist daher

$$A = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \cdots L_{1k} \\ L_{21} & L_{22} \cdots L_{2k} \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot \\ L_{k1} & L_{k2} \cdots L_{kk} \end{pmatrix},$$

so ist zunächst $L_{\kappa\kappa} = 0$.

Ist $k > 2$, so sind in der Matrix $M = APA$ die Submatrizen

$$M_{\alpha\alpha} = \sum_{\beta} L_{\alpha\beta} P_{\beta\beta} L_{\beta\alpha} = 0,$$

mithin ist $L_{\alpha\beta} P_{\beta\beta} L_{\beta\alpha} = 0$, oder wenn man $L_{\alpha\beta} = U$, $P_{\beta\beta} = V$, $L_{\beta\alpha} = W$ setzt, $UVW = 0$,

$$\sum_{\rho,\sigma} u_{\kappa\rho} v_{\rho\sigma} w_{\sigma\lambda} = 0, \quad u_{\kappa\rho} v_{\rho\rho} w_{\rho\lambda} = 0, \quad u_{\kappa\rho} w_{\rho\lambda} = 0,$$

also entweder $U = 0$ oder $W = 0$. Daher ist entweder $L_{\alpha\beta}$ oder $L_{\beta\alpha} = 0$.

Ist $k > 3$, so sind in der Matrix $M = APAPA$ die Submatrizen

$$M_{\alpha\alpha} = \sum_{\beta,\gamma} L_{\alpha\beta} P_{\beta\beta} L_{\beta\gamma} P_{\gamma\gamma} L_{\gamma\alpha} = 0,$$

also $(L_{\alpha\beta} P_{\beta\beta} L_{\beta\gamma}) P_{\gamma\gamma} L_{\gamma\alpha} = 0$, demnach entweder $L_{\gamma\alpha} = 0$ oder $L_{\alpha\beta} P_{\beta\beta} L_{\beta\gamma} = 0$, mithin entweder $L_{\beta\gamma} = 0$ oder $L_{\alpha\beta} = 0$.

Sind allgemein $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots \vartheta$ $m < k$ verschiedene Indizes, so verschwindet eine der Submatrizen

$$L_{\alpha\beta}, L_{\beta\gamma}, L_{\gamma\delta}, \cdots L_{\vartheta\alpha}.$$

Dies gilt aber nicht für jeden Zyklus von k Matrizen. Sonst ist $A^k = 0$, $\varphi(s) = s^n$, $r = 0$, und A zerfällt in n Teile. Denn jede der hier betrachteten Submatrizen von A^k ist eine Summe von Produkten von k Faktoren

$$L_{\alpha\beta} L_{\beta\gamma} L_{\gamma\delta} \cdots L_{\kappa\lambda} L_{\lambda\mu} L_{\mu\nu}.$$

Da jeder Index einen der Werte $1, 2, \cdots k$ hat, so müssen von den den $k+1$ Indizes $\alpha, \beta, \cdots \mu, \nu$ mindestens zwei einander gleich sein. Ist z. B. $\beta = \mu$, so verschwindet eine der Matrizen des Zyklus

$$L_{\beta\gamma}, L_{\gamma\delta}, \cdots L_{\kappa\lambda}, L_{\lambda\beta} (= L_{\lambda\mu}),$$

und folglich auch das Produkt.

Durch Umstellung der Reihen kann man bewirken, daß keine der Matrizen

$$L_{12}, L_{23}, L_{34}, \cdots L_{k-1,k}, L_{k1}$$

verschwindet. Dann erkennt man wie am Schluß des § 8, daß alle andern Submatrizen $L_{\alpha\beta} = 0$ sind. Demnach ist z. B. für $k = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & L_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{34} \\ L_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und daraus folgt

(1.) $R_{11} = L_{12} \dots$

§ 10.

Sind P und Q zwei Matrizen $n$ten Grades, und ist $|P|$ nicht Null, so ist

$$P^{-1}(PQ)P = QP$$

und mithin

(1.) $$|sE - PQ| = |sE - QP|.$$

Sind die Elemente von P unabhängige Variable, so gilt diese Gleichung für alle Werte der Veränderlichen, für die $|P|$ von Null verschieden ist, und daher gilt sie identisch. (Die beiden Determinanten (1.) brauchen aber nicht in den Elementarteilern übereinzustimmen.)

Ist P eine Matrix von m Zeilen und n Spalten, Q eine Matrix von n Zeilen und m Spalten, so hat PQ den Grad m, QP den Grad n. Seien $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ ihre charakteristischen Funktionen. Ist etwa $m < n$, so füge man zu den m Zeilen von P noch $n-m$ Zeilen von je n verschwindenden Elementen und zu den m Spalten von Q noch $n-m$ solche Spalten. Gehen so P und Q in P_0 und Q_0 über, so ist $Q_0 P_0 = QP$, während $P_0 Q_0$ aus PQ durch Hinzufügung von $n-m$ Zeilen und Spalten verschwindender Elemente entsteht. Daher ist

$$\psi(s) = |sE - QP| = |sE - Q_0 P_0| = |sE - P_0 Q_0| = s^{n-m}\varphi(s).$$

Setzt man

$$L_{\kappa,\kappa+1} L_{\kappa+1,\kappa+2} \cdots L_{\lambda-1,\lambda} = P, \quad L_{\lambda,\lambda+1} L_{\lambda+1,\lambda+2} \cdots L_{\kappa-1,\kappa} = Q,$$

so ist

$$R_{\kappa\kappa} = PQ, \quad R_{\lambda\lambda} = QP.$$

Ist $\varphi_\lambda(s)$ die charakteristische Funktion von $R_{\lambda\lambda}$, und ist m_κ die kleinste der Zahlen $m_1, m_2, \cdots m_k$, so ist

$$\varphi_\lambda(s) = s^{m_\lambda - m_\kappa}\varphi_\kappa(s),$$

oder wenn man $m_\kappa = m$ und $\varphi_\kappa(s) = \psi(s)$ setzt,

$$\varphi_\lambda(s) = s^{m_\lambda - m}\psi(s), \quad (s - r^k)(s - r_1^k) \cdots (s - r_{n-1}^k) = \prod \varphi_\lambda(s) = s^{n-mk}\psi(s)^k.$$

Von den n Wurzeln $r, r_1, \cdots r_{n-1}$ der Gleichung $\varphi(s) = 0$ verschwinden also mindestens $n - mk$. Ist

$$\varphi(s) = s^n + a_1 s^{n-k} + a_2 s^{n-2k} + \cdots + a_m s^{n-mk} = s^{n-mk}(s^k - r^k)(s^k - r_1^k) \cdots (s^k - r_{m-1}^k),$$

so ist die Funktion, deren Wurzeln die $k$ten Potenzen der Wurzeln von $\varphi(s)$ sind,

$$s^{n-mk}(s - r^k)^k (s - r_1^k)^k \cdots (s - r_{m-1}^k)^k.$$

Folglich ist

$$\psi(s) = (s - r^k)(s - r_1^k) \cdots (s - r_{m-1}^k)$$

und …

$$(2.)\qquad \psi(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n,$$

und allgemein ist

$$(3.)\qquad \psi_\lambda(s) = s^{n_\lambda} + a_1 s^{n_\lambda - 1} + a_2 s^{n_\lambda - 2} + \cdots + a_n s^{n_\lambda - n}.$$

§ 11.

Aus den Eigenschaften der unzerlegbaren Matrizen lassen sich analoge Eigenschaften der zerlegbaren herleiten. So gilt der Satz:

XV. *Ist r die Maximalwurzel einer nicht negativen Matrix, so sind die Wurzeln von A, die absolut gleich r sind, die sämtlichen Wurzeln einer Gleichung der Form*

$$(s^k - r^k)(s^l - r^l)(s^m - r^m) \cdots = 0.$$

Genügt also der charakteristischen Gleichung $\varphi(s) = 0$ eine Größe ρr, die der Maximalwurzel r absolut gleich ist, so ist ρ eine Einheitswurzel; der Gleichung $\varphi(s) = 0$ genügt dann auch das Produkt aus r und jeder Potenz von ρ.

Anknüpfend an den Anfang des § 7 will ich jetzt auch für eine zerlegbare Matrix A untersuchen, unter welchen Bedingungen die n linearen Gleichungen $AX = sX$ eine Lösung haben, worin $x_1, \cdots x_n$ alle $\geqq 0$, aber nicht alle $= 0$ sind. Ich schreibe diese Gleichungen in der Form:

$$(1.)\qquad \begin{aligned}
&L_{11} X_1 &&= sX_1,\\
&L_{21} X_1 + L_{22} X_2 &&= sX_2,\\
&L_{31} X_1 + L_{32} X_2 + L_{33} X_3 &&= sX_3,\\
&\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot &&\cdot\\
&L_{m1} X_1 + L_{m2} X_2 + L_{m3} X_3 + \cdots + L_{mm} X_m &&= sX_m.
\end{aligned}$$

Sei r_κ die Maximalwurzel der unzerlegbaren Matrix $L_{\kappa\kappa}$. Ist dann s keiner der Größen $r_1, r_2, \cdots r_m$ gleich, so ist nach der ersten Gleichung $X_1 = 0$, dann nach der zweiten $X_2 = 0$, usw.

Ferner ist bei einer nicht negativen Lösung X immer entweder $X_\kappa = 0$ oder $X_\kappa > 0$, d. h. von den Unbekannten, die das Teilsystem X_κ bilden, können nicht einige $= 0$, andere > 0 sein. Denn ist $s > r_\kappa$, so ist

$$(sE_\kappa - L_{\kappa\kappa})^{-1} = P$$

eine positive Matrix und

$$(2.)\quad X_\kappa = (sE_\kappa - L_{\kappa\kappa})^{-1}(L_{\kappa 1} X_1 + \cdots + L_{\kappa,\kappa-1} X_{\kappa-1}) = PZ,$$

wo $Z \geqq 0$ ist. X_κ besteht also aus den Größen $\sum\limits_\beta p_{\alpha\beta} z_\beta$. Da stets $p_{\alpha\beta} > 0$ ist, so ist $X_\kappa > 0$, außer wenn $Z = 0$ ist. Dann ist $X_\kappa = 0$.

Ist aber $s \leqq r_\kappa$, so sei Y_κ eine positive Lösung der Gleichung

$$Y_\kappa L_{\kappa\kappa} = r_\kappa Y_\kappa.$$

Dann ist

$$(3.)\qquad Y_\kappa(L_{\kappa 1} X_1 + \cdots + L_{\kappa,\kappa-1} X_{\kappa-1} + (r_\kappa - s) X_\kappa) = 0,$$

also da $Y_\kappa > 0$ ist und jeder Summand $\geqq 0$ ist,

$$(4.)\qquad L_{\kappa 1} X_1 = 0, \cdots L_{\kappa,\kappa-1} X_{\kappa-1} = 0, \quad (r_\kappa - s) X_\kappa = 0,$$

mithin

$$(5.)\qquad X_\kappa = 0, \text{ wenn } s < r_\kappa$$

ist. Ist aber $s = r_\kappa$, so folgt aus (4.) und der κten Gleichung (1.) $L_{\kappa\kappa} X_\kappa = r_\kappa X_\kappa$, und daher ist entweder $X_\kappa = 0$ oder $X_\kappa > 0$.

Sollen nun die Gleichungen (1.) eine nicht negative Lösung haben, so muß eine der Wurzeln $r_1, r_2, \cdots r_m$ gleich s sein. Sind es mehrere, so bezeichne ich im folgenden stets mit r_λ die, deren Index λ am größten ist. Wenn dann

$$(6.)\qquad r_\lambda > r_{\lambda+1}, \quad r_\lambda > r_{\lambda+2}, \quad \cdots r_\lambda > r_m$$

ist, so haben die Gleichungen (1.) eine nicht negative Lösung. (Ist $\lambda = m$, so fallen die Bedingungen (6.) weg.) Denn man setze $X_1 = 0$, $\cdots X_{\lambda-1} = 0$ und wähle für X_λ die positive Lösung der Gleichung $L_{\lambda\lambda} X_\lambda = r_\lambda X_\lambda$. Dann ergibt sich aus der $(\lambda+1)$ten Gleichung (1.), weil $s > r_{\lambda+1}$ ist, nach (2.) eine ganz bestimmte Matrix $X_{\lambda+1}$, die > 0 oder $= 0$ ist, aus der $(\lambda+2)$ten $X_{\lambda+2}$ usw.

Es ist möglich, daß die Gleichungen (1.) auch bei anderer Anordnung der Gleichungen und der Unbekannten $X_1, X_2, \cdots X_m$ dieselbe Gestalt haben, falls nämlich einige der Matrizen $L_{\alpha\beta}$ $(\alpha > \beta)$ Null sind. Dann genügt es, wenn die Bedingungen (6.) für irgendeine der möglichen Anordnungen erfüllt sind.

Wenn sie aber für keine erfüllt sind, so haben die Gleichungen $AX = sX$, wie ich jetzt zeigen will, keine Lösung der betrachteten Art. Denn von den Matrizen $X_1, X_2, \cdots X_m$ muß mindestens eine verschwinden. Sonst folgt aus der ersten Gleichung (1.) $s = r_1$ und aus (5.) $s \geqq r_2, \cdots s \geqq r_m$, und demnach sind die Bedingungen (6.) (spätestens für $\lambda = m$) erfüllt.

Ist nun zunächst $X_1 = 0$, so lauten die Gleichungen (1.)

$$(7.)\qquad \begin{aligned}
&L_{22} X_2 &&= sX_2,\\
&L_{32} X_2 + L_{33} X_3 &&= sX_3,\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot &&\cdot
\end{aligned}$$

Ist $\lambda = 1$, so ist keine der Größen $r_2, r_3, \cdots r_m$ gleich s, und folglich ist $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $\cdots X_m = 0$. Ist aber $\lambda > 1$, so sind bei keiner der möglichen Anordnungen der Gleichungen (7.) die Bedingungen (6.) erfüllt. Da ihre Matrix nur aus $m-1$ Teilen besteht, so können wir für diese Gleichungen die behauptete Umkehrung schon als bewiesen voraussetzen, und schließen, daß $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 0$ sein muß.

Wäre aber $X_1 > 0, \cdots X_{\kappa-1} > 0$ und zuerst $X_\kappa = 0$, so wäre

$$L_{\kappa 1}X_1 + L_{\kappa 2}X_2 + \cdots + L_{\kappa,\kappa-1}X_{\kappa-1} = 0,$$

also, da kein Summand negativ, ist

$$L_{\kappa 1}X_1 = 0,\quad L_{\kappa 2}X_2 = 0, \cdots \quad L_{\kappa,\kappa-1}X_{\kappa-1} = 0,$$

und mithin

$$L_{\kappa 1} = 0,\quad L_{\kappa 2} = 0, \cdots \quad L_{\kappa,\kappa-1} = 0.$$

Folglich kann man durch zyklische Vertauschung der ersten κ Gleichungen und Unbekannten die κte Gleichung

$$L_{\kappa\kappa}X_\kappa = sX_\kappa$$

an die erste Stelle bringen, ohne daß die Gleichungen ihre Form ändern. Bei dieser Anordnung ist dann X_κ das erste Teilsystem von X, und $X_\kappa = 0$, und folglich verschwinden auch, wie oben gezeigt, alle andern Teilsysteme.

Ist s die größte der Wurzeln $r_1, r_2, \cdots r_m$, so sind die Bedingungen (6.) immer erfüllt. Daß dann die Gleichungen (1.) eine nicht negative Lösung haben, ist schon im § 1 gezeigt worden.

§ 12.

Daß eine Zerlegung einer Matrix A in unzerlegbare Teile nur in einer Weise möglich ist, kann man auf folgende Art einsehen. Jeder Teil von A ist durch die Hauptelemente (nicht ihre Werte, sondern ihre Indizes), die er enthält, vollständig bestimmt. Seien in zwei Zerlegungen Q und R zwei unzerlegbare Teile von A, die ein Hauptelement gemeinsam haben. Es möge B ein unmittelbarer Teil von A heißen, wenn alle Elemente von A verschwinden, welche die Zeilen (oder Spalten) von B um die komplementären Spalten (oder Zeilen) enthalten. (Ein solcher ist z. B. in der Matrix (1.) § 2 P und Q, aber nicht R.) Der zu B komplementäre Teil ist dann auch ein unmittelbarer.

Sei B ein solcher Teil, der Q enthält, C einer, der R enthält, dann können wir annehmen, daß die Zeilen (und Spalten) von B und C zusammen alle n Zeilen sind. Denn sonst sind B und C als unmittelbare Teile in einer Matrix enthalten, deren Grad kleiner als n ist, und für die wir es schon als erwiesen ansehen können, daß die unzerlegbaren Teile Q und R gleich sind, wenn sie ein Diagonalelement gemeinsam haben.

Erstens

$$A = \begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{matrix}, \quad C = \begin{matrix} A_1 & C_1 \\ A_3 & C_3 \end{matrix}.$$

A_1 enthält alle Hauptelemente, die B und C gemeinsam haben. B ist ein unmittelbarer Teil von A, weil die Elemente von A_3 und B_3 verschwinden, welche die Spalten von B mit den komplementären Zeilen gemeinsam haben, C ist es, weil die Elemente von A_2 und C_2 verschwinden, welche die Spalten von C mit den komplementären Zeilen gemeinsam haben. Weil $A_3 = 0$ ist, ist A_1 ein Teil von B; weil $A_2 = 0$ ist, ist A_1 ein Teil von C. Für die Matrizen B und C ist die Behauptung schon erwiesen. Q und R haben ein Hauptelement gemeinsam, also auch B und C. Dies kommt demnach in A_1 vor. Folglich ist Q ein Teil von A_1, ebenso R, und mithin ist $Q = R$.

Zweitens

$$A = \begin{matrix} A_1 & 0 & C_1 \\ A_2 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} A_1 & 0 \\ A_2 & B_2 \end{matrix}, \quad C = \begin{matrix} A_1 & C_1 \\ 0 & C_3 \end{matrix}.$$

Hier verschwinden die Elemente von A_3 und B_3, welche die Spalten von B mit den komplementären Zeilen gemeinsam haben und die Elemente von B_1 und B_3, welche die Zeilen von C mit den komplementären Spalten gemeinsam haben. Der Beweis ist derselbe.

Ein anderer Beweis desselben Satzes ist mehr algebraischer Natur. Die Zerlegbarkeit einer Matrix beruht darauf, daß gewisse Elemente außerhalb der Diagonale verschwinden, bleibt also ungeändert, wenn die nicht verschwindenden Elemente und alle Hauptelemente durch unabhängige Variable $x_{\alpha\beta}$ ersetzt werden. Dadurch gehe die Determinante $|A|$ in X über, eine ganze Funktion der unabhängigen Variabeln, die nicht verschwindet, weil sie das Glied $x_{11}x_{22}\cdots x_{nn}$ enthält. Läßt sich $X = PQ$ in zwei Faktoren zerlegen, die ganze Funktionen der Variabeln sind, so nenne ich X *reduzibel*.

XII. *Ist die nicht negative Matrix A unzerlegbar, so ist die ganze Funktion X irreduzibel.*

In $X = PQ$ kommt die Variable $x_{\alpha\alpha}$ wirklich vor, und X ist eine lineare Funktion von $x_{\alpha\alpha}$. Daher kann $x_{\alpha\alpha}$ nur in einem der beiden Faktoren P oder Q vorkommen. Es mögen $x_{11}, \cdots x_{mm}$ in P, $x_{m+1,m+1} \cdots x_{nn}$ in Q vorkommen. In bezug auf diejenigen der Größen $x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, \cdots x_{\alpha n}$, die nicht Null sind, ist X eine homogene lineare Funktion. Daher kommen sie alle in demselben Faktor vor, der durch $x_{\alpha\alpha}$ bestimmt ist, in P, wenn $\alpha \leq m$, in Q, wenn $\alpha > m$ ist. Dasselbe gilt von [illegible] Ich nenne die Indizes α, β ungleichartig, wenn einer $\leqq m$, der andere $> m$ ist, aber gleichartig, wenn beide $\leqq m$ oder beide $> m$ sind. Sind α und β ungleichartig, so kommt demnach $x_{\alpha\beta}$ weder in P noch in Q vor, also auch nicht in $X = PQ$. Daraus folgt beiläufig, daß $0 < m < n$ ist.

Daher ist $x_{\alpha\beta}x_{\beta\alpha} = 0$. Denn sind $\rho, \sigma, \tau, \cdots$ die $n-2$ übrigen Indizes, so würde, wenn $x_{\alpha\beta}$ und $x_{\beta\alpha}$ beide nicht Null sind, in X das Glied $x_{\alpha\beta}x_{\beta\alpha}x_{\rho\rho}x_{\sigma\sigma}x_{\tau\tau}\cdots$ vorkommen. Allgemeiner ist, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \vartheta$ nicht alle gleichartig sind, das zyklische Produkt $x_{\alpha\beta}x_{\beta\gamma}x_{\gamma\delta}\cdots x_{\vartheta\alpha} = 0$.

Ein solches Produkt bleibt bei zyklischer Vertauschung der Indizes ungeändert. Unter der gemachten Voraussetzung müssen von den Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \vartheta$ zwei aufeinanderfolgende ungleichartig sein. Sind die Indizes nicht alle verschieden, und ist $\alpha = \beta$, so ist das Produkt gleich $x_{\alpha\alpha}(x_{\beta\gamma}x_{\gamma\delta}\cdots x_{\vartheta\beta})$, ist $\alpha = \gamma$, gleich $(x_{\alpha\beta}x_{\beta\alpha})(x_{\gamma\delta}\cdots x_{\vartheta\gamma})$. In diesem Falle wäre nur die analoge Behauptung für ein zyklisches Produkt von weniger Faktoren zu beweisen, deren Indizes alle verschieden und nicht alle gleichartig sind. Wir können daher annehmen, daß alle Indizes verschieden sind, und daß α und β ungleichartig sind.

Seien dann $\alpha, \beta, \cdots \vartheta, \rho, \sigma, \tau, \cdots$ die n verschiedenen Indizes. Wären $x_{\alpha\beta}, x_{\beta\gamma}, \cdots x_{\vartheta\alpha}$ alle von Null verschieden, so würde X das Glied $x_{\alpha\beta}x_{\beta\gamma}\cdots x_{\vartheta\alpha}x_{\rho\rho}x_{\sigma\sigma}x_{\tau\tau}\cdots$ enthalten, also die Variable $x_{\alpha\beta}$, deren Indizes ungleichartig sind.

Sind α und β ungleichartig, so ist $x_{\alpha\beta}x_{\beta\kappa}x_{\kappa\alpha} = 0$, also auch $x_{\alpha\beta}\sum\limits_{\kappa} x_{\beta\kappa}x_{\kappa\alpha} = 0$ oder $x_{\alpha\beta}x^{(2)}_{\beta\alpha} = 0$, allgemeiner $x_{\alpha\kappa}x_{\kappa\beta}x_{\beta\lambda}x_{\lambda\mu}x_{\mu\alpha} = 0$, also auch $\left(\sum\limits_{\kappa} x_{\alpha\kappa}x_{\kappa\beta}\right)\left(\sum\limits_{\lambda,\mu} x_{\beta\lambda}x_{\lambda\mu}x_{\mu\alpha}\right) = 0$, oder $x^{(2)}_{\alpha\beta}x^{(3)}_{\beta\alpha} = 0$, überhaupt

$$x^{(\mu)}_{\alpha\beta}x^{(\nu)}_{\beta\alpha} = 0,$$

daher sind entweder die Größen

$$x_{\alpha\beta},\ x^{(2)}_{\alpha\beta},\ x^{(3)}_{\alpha\beta},\ \cdots\ x^{(n-1)}_{\alpha\beta}$$

sämtlich Null oder die Größen

$$x_{\beta\alpha},\ x^{(2)}_{\beta\alpha},\ x^{(3)}_{\beta\alpha},\ \cdots\ x^{(n-1)}_{\beta\alpha}.$$

Legt man den Variabeln positive Werte bei, so folgt daraus nach Satz IV, daß A, also auch X zerlegbar ist.

Wenn nun A in die unzerlegbaren Matrizen $A_1, A_2, A_3, \cdots$ zerfällt, so zerfällt X entsprechend in die Determinanten $X_1, X_2, X_3, \cdots$, und diese sind irreduzibel, und jede von ihnen kann durch die in

ihr vorkommenden Hauptelemente charakterisiert werden. Da diese irreduzibeln Faktoren durch X vollständig bestimmt sind, so kann auch die Matrix A nur auf eine Art in unzerlegbare Teile zerfällt werden.

In einer Determinante kann man durch beliebige (auch nicht kogrediente) Umstellung der Zeilen und Spalten die Elemente jedes Gliedes in die Diagonale bringen. Folglich ergibt sich aus den obigen Erörterungen der Satz I.

1 Acerca de las matrices de elementos no-negativos

Georg Frobenius[1]

Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaft
456-477 (1912)

En mi trabajo *Über Matrizen aus positiven Elementen*, Actas (Sitzungsberichte) 1908 y 1909 (las cuales citaré en adelante como P. M.) desarrollé las propiedades de las matrices positivas por medio de las evaluaciones de límites, con las modificaciones necesarias, para trasladarlas a las no-negativas. Las últimas requieren de una investigación mucho más profunda. Lo que he descubierto en el §11, lo he tratado en este trabajo.

Una matriz no-negativa **A** es indescomponible, si casi todas las propiedades de las matrices positivas se cumplen (§5). Sólo si r es la raíz positiva mayor, o la raíz máxima de su ecuación característica $\varphi(s) = 0$, entonces el valor absoluto de cualquier otra raíz nunca puede ser $> r$, pero sí puede ser $= r$. Si cada una de las k raíces $r, r', r'', \ldots$, son iguales a r, en valor absoluto, entonces la raíz es simple y sus cocientes: $1, \frac{r'}{r}, \frac{r''}{r}, \ldots$ son las k raíces de la ecuación $\rho^k = 1$.

Si $k = 1$, entonces llamo a la matriz **A** *primitiva;* pero si $k > 1$, entonces es *imprimitiva*. Ahora bien, cada potencia de una matriz primitiva es nuevamente primitiva; pero sólo para una cierta potencia de cada una de ellas es positiva.

Si **A** es primitiva, entonces $\mathbf{A}^m$ consta de d partes irreducibles, donde d es el máximo común divisor de m y k; equivalentemente, $\mathbf{A}^m$ se descompone completamente. Las funciones características de las submatrices se distinguen sólo a través de potencias de s.

La matriz $\mathbf{A}^k$ es la potencia mínima de **A**, cuyas partes indescomponibles son todas primitivas. El número de estas partes es igual al del exponente k. Si

$$\psi(s) = s^n + a_1 s^{n-k} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_m$$

es la función característica de una de estas k partes, entonces

[1] La traducción del alemán de todos los artículos que aparecen en este apéndice fueron hechas por el autor de esta tesis.

$$\varphi(s) = s^n + a_1 s^{n-k} + a_2 s^{n-2k} + \cdots + a_m s^{n-mk} = s^{n-mk}\psi(s^k)$$

es la función característica de **A**. La raíz máxima r^k de la ecuación $\psi(s) = 0$, en valor absoluto, es mayor que todas las demás raíces.

En §11 extiendo la investigación acerca de las matrices descomponibles y en §12 muestro que una matriz tal puede descomponerse solamente en una clase: en partes indescomponibles. Con ello, resulta de mucha utilidad el teorema sobre determinantes:

I. *Si los elementos de un determinante de n-ésmo grado son n^2 variables independientes, entonces se establece que algunos son nulos y que, además, el determinante no se anula idénticamente.*

Entonces, hay una función irreducible a no ser que, para una raíz $m < n$, todos los elementos se anulen y tengan en común los n renglones, con $n - m$ columnas.

§1.

Si una matriz es de *n-ésmo* grado, con $\mathbf{A} > 0$ y q_m $(m \leq n)$ la raíz máxima de la ecuación, entonces

$$\mathbf{A}_m = \begin{vmatrix} -a_{11} + s & \cdots & -a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mm} + s \end{vmatrix} = 0.$$

y $q_1 < q_2 < \cdots < q_n = r$ (P.M. §1). Si **A** es negativa, entonces si cumplen las desigualdades de la misma manera, a través de una estimación que es:

$$q_1 \leqq q_2 \leqq \cdots \leqq q_n = r.$$

De donde se deduce II, en caso de que $\mathbf{A} \geqq 0$ y si r sea la raíz máxima de **A**:

II. *Si un determinante principal $P(s)$ de $A(s)$, para $s = r$, se anula, entonces se anulan también todos los determinantes principales de cada grado de $P(r)$, entonces son positivos.*

Si $\mathbf{A} > 0$, entonces las n ecuaciones lineales

$$a_{\kappa 1}x_1 + \cdots + a_{\kappa\kappa}x_\kappa = rx_n \; (\kappa = 1, 2, \ldots, n)$$

solamente tienen una solución, en el caso de que aparezca un factor común. Estos pueden elegirse de tal manera, que los valores de las indeterminadas sean todos positivos. Pero también, si $\mathbf{A} \geqq 0$, entonces se pueden satisfacer estas ecuaciones por medio de valores que no sean negativos ni todos nulos. {Pues si su determinante es $A(r) = 0$, entonces una de estas ecuaciones, alguna de α-ésimo grado, una sucesión de las n - 1 cambian, y se pueden, de aquí, omitir} Sean ahora las ecuaciones restantes (Cfr. P.M. §1):

$$
\begin{array}{l}
-(a_{\beta\beta} - r)x_\beta - \cdots - a_{\beta\nu}x_\nu = a_{\beta\alpha}x_\alpha \\
\dotfill \\
-a_{\nu\beta}x_\beta - \cdots - (a_{\nu\nu} - r)x_\nu = a_{\nu\alpha}x_\alpha.
\end{array}
$$

Si, a partir de la ecuación $B(s) = 0$, siendo $B(r)$ su determinante y q su raíz máxima, entonces es $q \leqq r$. Si $q = r$, por consiguiente $B(r) = 0$, en cuyo caso se hace $x_\alpha = 0$. De esta manera se obtienen m - 1 ecuaciones lineales homogéneas, entre las n -1 indeterminadas $x_\beta, \ldots, x_\nu$, con la misma propiedad que las n ecuaciones (1.). Como su número es solamente n - 1, entonces se puede suponer que, para la ecuación, la afirmación ya está demostrada.

Pero si $q < r$, entonces no solamente el determinante $B(r) > 0$, sino que también hay (como lo muestran las desigualdades) sus subdeterminantes, $\mathrm{B}_{\kappa\lambda}(r) \geqq 0$. Se afirma entonces que, si $x_\alpha = 1$, entonces se tendrá:

$$B(r)x_\beta = \sum_\tau B_{\beta\tau}(r)a_{\tau\alpha}, \ldots, B(r)x_\nu = \sum_\tau B_{\nu\tau}(r)a_{\tau\alpha}.$$

Por tanto, $x_\beta \geqq 0, \ldots, x_\nu \geqq 0$ y $x_\alpha > 0$.

§2.

A una matriz o determinante de grado $p + q$ la llamo descompuesta o descomponible, si todos sus elementos se anulan, los cuales tienen p renglones con q columnas y sus índices de índices son complementarios a los p renglones (para completar 1, 2, ..., $p + q$). Bajo los pq elementos (cuya anulación condiciona la descomponibilidad de la matriz) no aparece, por tanto, ningún elemento principal $a_{\lambda\lambda}$. Sea, por ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{V} \\ \mathbf{U} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}.$$

y sean **P** y **Q** matrices de grado p y q, con p renglones y q columnas; y **U** una matriz de q renglones y p columnas. Entonces **A** se descompone en los partes complementarias **P** y **Q**, si $\mathbf{U} = 0$ o $\mathbf{V} = 0$. Pero si $\mathbf{U} = 0$ y $\mathbf{V} = 0$, entonces **A** se llama *completamente descomponible* [*vollständig zerlegbar*].

Esto mismo se cumple si **A** puede transformarse en otra matriz por medio de un reagrupamiento de los renglones y un correspondiente reagrupamiento de columnas, en alguna forma. Una permutación cogrediente tal, de renglones y columnas, cambiará los elementos principales y los demás elementos conjugados, cada vez que en lo sucesivo se hable de un cambio de renglones de una matriz.

Si cada una de las partes o submatrices puede seguirse descomponiendo, entonces la matriz del determinante:

$$(I.) \ldots\ldots \begin{vmatrix} \mathbf{P} & 0 & 0 \\ \mathbf{U} & \mathbf{Q} & \mathbf{V} \\ \mathbf{W} & 0 & \mathbf{R} \end{vmatrix} = |\mathbf{P}|\,|\mathbf{Q}|\,|\mathbf{R}|$$

se puede descomponer en tres partes, **P**, **Q** y **R**, y las matrices nulas pueden seguirse descomponiendo cada una, en partes descomponibles, a la izquierda o a la derecha de la diagonal principal. Por medio de un reacomodo de renglones, se puede llevar la matriz a la forma:

$$\begin{matrix} \mathbf{P} & 0 & 0 \\ \mathbf{W} & \mathbf{R} & 0 \\ \mathbf{U} & \mathbf{V} & \mathbf{Q} \end{matrix} \quad \ldots\ldots \quad \begin{matrix} \mathbf{Q} & \mathbf{V} & \mathbf{U} \\ 0 & \mathbf{R} & \mathbf{W} \\ 0 & 0 & \mathbf{P} \end{matrix}.$$

Sin pérdida de generalidad, se puede admitir la condición de la definición de descomponibilidad para) los elementos que están a la derecha o a la izquierda de la diagonal principal, cuya anulación determina la descomposición de la matriz.

§3.

A es, como siempre, una matriz no-negativa y descompone el determinante A(s) en partes: P(s), Q(s), R(s),... entonces se debe anular uno de estos factores. Por tanto, un determinante principal de A(s) se debe anular para $s = r$. Al revés, se cumple el teorema III:

III. *Si un determinante principal P de $A(r)$ se anula, entonces se descompone $A(r)$. Si, además, ningún determinante principal de P se anula, entonces P es una de las partes indescomponibles de $A(r)$.*

Sea $\mathrm{P} = \mathrm{A}_m(r)$ y sean $P_{\kappa\lambda}$ $(\kappa, \lambda = 1, 2, ...m)$ los subdeterminantes de grado $(m - 1)$-*ésimo* de P, en donde, como siempre, $\mathrm{P}_{\kappa\kappa} > 0$. Si $\mathrm{P} = 0$, entonces $P_{\kappa\lambda}P_{\lambda\kappa} = P_{\kappa\kappa}P_{\lambda\lambda}$; por tanto, no es $\mathrm{P}_{\kappa\lambda} = 0$, de lo que se deduce que $\mathrm{P}_{\kappa\lambda} > 0$.

De aquí se pueden satisfacer las m ecuaciones lineales

$$a_{1\kappa}y_1 + \cdots + a_{m\kappa}y_m = ry_\kappa \ (\kappa = 1, 2, \ldots, n)$$

por medio de valores, los cuales todos son positivos. Si $\mathbf{Y}$ es una matriz de sólo un renglón $y_1, y_2, \ldots, y_m$, entonces se puede escribir esta ecuación en la forma $\mathbf{YP} = 0$, donde $\mathbf{P}$ es ahora la matriz del determinante denominado $\mathrm{A}_m(r)$. Asimismo, se pueden escribir las n ecuaciones

$$(I.) \ldots\ldots\ldots a_{\alpha 1}x_1 + \cdots + a_{\alpha n}x_n = rx_\alpha \ (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

bajo la forma $\mathbf{AX} = r\mathbf{X}$. Como siempre, $\mathbf{X}$ es una matriz de un sólo renglón, en donde las n cantidades no negativas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ están colocadas una debajo de la otra.[2] Partimos a $\mathbf{X}$ en $\mathbf{U}$ y $\mathbf{Z}$:) $\mathbf{U}$ contiene las cantidades $x_1, x_2, \ldots, x_m$ y $\mathbf{Z}$ las cantidades $x_{m+1}, \ldots, x_n$. Si

$$r\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{L} \\ \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{pmatrix},$$

entonces expresamos las ecuaciones (I) en la forma

$$\mathbf{PU} + \mathbf{LZ} = 0,$$
$$\mathbf{MU} + \mathbf{NZ} = 0$$

Entonces se cumple con $\mathbf{Y(PU + LZ)} = 0$ porque $\mathbf{YP} = 0$. $\mathbf{Y(LZ)} = 0$ y entonces $\mathbf{Y} > 0$ y $\mathbf{LZ} \leqq 0$. $\mathbf{LZ} = 0$; por tanto, también $\mathbf{PU} = 0$.

Si $x_{m+1}, \ldots, x_n$ {son todos positivos y, por tanto, si $\mathbf{Z} > 0$,} entonces $\mathbf{L} = 0$, puesto que los elementos de $\mathbf{L}$ son todos negativos o nulos. (Lo último se cumple también para $\mathbf{M}$, pero no para las matrices de las diagonales $\mathbf{P}$ y $\mathbf{N}$.)

Si, por el contrario, todas las cantidades $x_{m+1}, \ldots, x_n$ son nulas y, por tanto, $\mathbf{Z} = 0$, entonces no todas las $x_1, \ldots, x_n$ son nulas ni satisfacen la ecuación $\mathbf{PU} = 0$. Como éstos sólo tienen una solución única, entonces $\mathbf{U} > 0$ (porque las cantidades $\mathrm{P}_{\kappa\lambda}$ son todas > 0). Ahora, si $\mathbf{MU} + \mathbf{NZ} =$

[2] Un vector columna (N. del T.)

0, entonces $\mathbf{Z} = 0$, $\mathbf{U} > 0$, $\mathbf{M} = 0$. Pero, si $\mathbf{L} = 0$ o $\mathbf{M} = 0$, entonces $A(r)$ se descompone en dos partes, una de las cuales es $\mathbf{P}$.

Finalmente, sean $x_{m+1}, \ldots, x_n$ las cantidades donde algunas son nulas y las otras positivas. Entonces $\mathbf{Z}$ constará de dos secciones, $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$, de las cuales: o bien $\mathbf{V} = 0$; o bien, $\mathbf{W} > 0$. Si se dividen $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ en partes correspondientes, entonces, por un reordenamiento de renglones, se puede llegar a:

$$r\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \mathbf{P}' & \mathbf{Q}' & \mathbf{R}' \\ \mathbf{P}'' & \mathbf{Q}'' & \mathbf{R}'' \end{pmatrix}.$$

en donde las ecuaciones (1.) las llevamos a la forma:

$$\begin{aligned} &\mathbf{PU} + \mathbf{QV} + \mathbf{RW} = 0 \\ &\mathbf{P'U} + \mathbf{Q'V} + \mathbf{R'W} = 0 \\ &\mathbf{P''U} + \mathbf{Q''V} + \mathbf{R''W} = 0. \end{aligned}$$

Lo mostrado arriba descompone la primera ecuación en $\mathbf{PU} = 0$ y $\mathbf{QV} + \mathbf{RW} = 0$. Puesto que $\mathbf{P}' \leqq 0$, $\mathbf{R}' \leqq 0$ y $\mathbf{U}' \leqq 0$, con $\mathbf{W} > 0$, entonces, en particular, $\mathbf{P'U} = 0$ y $\mathbf{R'W} = 0$; por tanto, $\mathbf{R}' = 0$.

Si $\mathbf{R} = 0$ y $\mathbf{R}' = 0$, consecuentemente $A(r)$ se descompone en $|\mathbf{R}''|$ y

$$T(r) = \begin{vmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{P}' & \mathbf{Q}' \end{vmatrix}.$$

Como la matriz de este determinante contiene a $\mathbf{P}$ y está también contenida en $r\mathbf{E}$ - $\mathbf{A}$, entonces r (por el teorema II. en §1) es la raíz máxima de la ecuación $\mathrm{T}(s) = 0$. En $\mathrm{T}(r)$ se anula el determinante principal P. de m-*ésimo* grado. Finalmente, el grado de $\mathrm{T}(r)$ es menor que el de $A(r)$. De aquí podemos considerar, para $\mathrm{T}(r)$, el teorema como demostrado. Por consiguiente, $\mathbf{T}(r)$se descompone en partes; una de ellas es $\mathbf{P}$ y, consiguientemente, válido para la misma $A(r)$.

§4.

Si $\mathbf{A}$ es indescomponible, entonces no se anula ninguna de las cantidades $\mathbf{A}_{\alpha\alpha}(r)$ y, por tanto, r es una raíz simple de la ecuación característica $\phi(s) = 0$. Si, al contrario, ningún determinante principal de $(n$ -1)-*ésimo* grado de $A(r)$ se anula, entonces $\mathbf{A}$ es indescomponible. Como tenemos que

$A_{\alpha\beta}(r)A_{\beta\alpha}(r) = A_{\alpha\alpha}(r)A_{\beta\beta}(r)$, entonces también $A_{\alpha\beta}(r) > 0$. (Si $A_{\alpha\alpha}(r) = 0$ y $A_{\beta\beta}(r) > 0$, entonces, similarmente, $A_{\alpha\beta}(s)A_{\beta\alpha}(s)$ se anula.)

La matriz adjunta **B**, de r**E** - **A**, también es positiva. Con eso se cumple un teorema análogo al del de Maschke, de la teoría de grupos, a saber:

$$\phi(r,s) = \frac{\phi(r) - \phi(s)}{r - s}$$

en donde

$$(I.)........B = \phi(r, A)$$

es una función entera de **A**, una combinación lineal de $\mathbf{A}^0, \mathbf{A}^1, \ldots \mathbf{A}^{n-1}$ los elementos de $\mathbf{A}^k$ sean $a^{(k)}_{\alpha\beta}$.

IV. *En una matriz indescomponible, por ninguna elección se pueden anular completamente las n cantidades, en los índices:*

$$a^{(0)}_{\alpha\beta}, a^{(1)}_{\alpha\beta}, a^{(2)}_{\alpha\beta}, \ldots, a^{(n-1)}_{\alpha\beta}$$

(no puede ser $A_{\alpha\beta}(s) = 0$ idénticamente).

De lo contrario, sería el elemento $b_{\alpha\beta} = 0$, mientras que $b_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}(r) > 0$. En una matriz descomponible se pueden, sin embargo, elegir α y β tales, que $a^{(k)}_{\alpha\beta}$ se anule para cada valor de k, en donde, $A_{\alpha\beta}(s)$ se anula idénticamente.

Ahora, si

$$A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ L & Q \end{pmatrix},$$

entonces

$$A^k = \begin{pmatrix} P^k & 0 \\ L^k & Q^k \end{pmatrix}.$$

En cada parte indescomponible $P(s), Q(s), R(s), \ldots$de A(s) (la que para $s = r$ se hará cero), se anula solamente el de primer orden.

De aquí se sigue que:

V. *A fin de que la raíz máxima r de la ecuación $A(s)$ sea una de multiplicidad k, es necesario y suficiente que se anulen las partes indescomponibles de $A(s)$: exactamente k, para $s = r$.*

Se concluye fácilmente que:

VI. *Si r es la raíz máxima de la ecuación $A(s) = 0$, una raíz de multiplicidad, entonces es: o bien, igual al mayor de los elementos principales, $a_{\alpha\alpha}$*

: o bien, en cada uno de los determinantes de (n - 1)-ésimo grado se anula, para $s = r$, un determinante principal de (n - 2)-ésimo grado.

Si en particular $r = 0$, entonces se anulan los determinantes principales de cada grado de **A** y, por tanto, **A** se descompone en n partes de primer grado. Si $n = 4$, por ejemplo, entonces cada matriz de cuarto grado puede ser llevada, por medio de un reacomodo de renglones, a la forma:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{matrix}$$

pero si todos los productos son cíclicos:

$$a_{\alpha\alpha} = 0, \ a_{\alpha\beta}a_{\beta\alpha} = 0, a_{\alpha\beta}a_{\beta\gamma}a_{\gamma\alpha} = 0, \ a_{\alpha\beta}a_{\beta\gamma}a_{\gamma\delta}a_{\delta\alpha} = 0.$$

§5.

Si q es la raíz máxima de la ecuación $A_{\alpha\alpha}(s) = 0$, entonces $q \leqq r$. Si ocurre también que $s > r$, entonces $s > q$ y, por tanto, $A_{\alpha\alpha}(s) > 0$. Si p tiene el mismo significado que en P.M.,§1, entonces se cumple el teorema VII:

VII. *Cuando $A_{\alpha\beta}(s)$ $(\alpha \neq \beta)$ para un valor $s > r$ (o también, solo para $s > p$) es nulo, entonces también se anula, idénticamente, $A_{\alpha\beta}(s)$.*

Sea, pues, $s > p$ un valor cualquiera, como para todos los valores cercanos a $A_{\alpha\beta}(s)$, para $s = s_0$. Ahora, si

$$-A_{\alpha\beta}(s) = \begin{vmatrix} -a_{\alpha\beta} & -a_{\alpha\gamma} & \cdots & -a_{\alpha\nu} \\ -a_{\gamma\beta} & -a_{\gamma\gamma} + s & \cdots & -a_{\gamma\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{\nu\beta} & -a_{\nu\gamma} & \cdots & -a_{\nu\nu} + s \end{vmatrix}.$$

$A_{\alpha\beta}(s)$ es una suma de n - 2 determinantes de $(n$ - 2)-ésimo grado, $A_\gamma(s) + \ldots + A_\nu(s)$, en donde los determinantes principales $A_{\gamma\gamma}(s), \ldots, A_{\nu\nu}(s)$ están en la relación misma en la que $A_{\alpha\beta}(s)$ está con A(s). Si P_γ tiene, para $A_{\gamma\gamma}(s) \geqq 0$, el mismo significado que **P** para A(s), entonces $P_\gamma \leqq P$. Si, por tanto, se anula para $s = s_0$ cada uno de los determinantes $A_\gamma(s), \ldots, A_\nu(s)$ y, además, es verdad que cada uno está acompañado de su división, entonces se sabe que todas las divisiones de $A_{\alpha\beta}(s)$, para $s = s_0$, se anulan y, por tanto, esta función se anula idénticamente.

Pero, ahora

$$A(s)C'(s) = A_{\alpha\alpha}(r)A_{\beta\beta}(r) - A_{\alpha\beta}(r)A_{\beta\alpha}(r).$$

Si también $A_{\alpha\beta}(s) = 0$ idénticamente, entonces se anula una de las cantidades $A_{\alpha\alpha}(r)$ o $A_{\beta\beta}(r)$ y, por tanto, $\mathbf{A}$ es descomponible.

VIII. *Si A es indescomponible, entonces los subdeterminantes $A_{\alpha\beta}(s)$ son positivos, para cada valor $s \geqq r$.*

Una *matriz no-negativa indescomponible* tiene, por tanto, mayores propiedades que una matriz *positiva*: la raíz máxima r de la ecuación $\mathrm{A}(s) = 0$ es simple; y los subdeterminantes de $(n\text{-}1)$-*ésimo* grado y los determinantes principales de cada grado de $\mathrm{A}(s)$ son positivos, en caso de $s \geqq r$.

Pero si r' es alguna de las r raíces que se anulan, entonces es verdad que $r \geqq |r'|$, pero no necesariamente que $r > |r'|$. A una matriz no negativa indescomponible la llamo *primitiva*, pero si su raíz máxima es mayor que el valor absoluto de cada una de las otras raíces, entonces la llamo *imprimitiva*, si el valor absoluto, de algunas de las demás raíces, son iguales.

§6.

IX. *Para cada matriz primitiva, hay una potencia positiva. Si A^p es la menor, entonces también serán menores todas las siguientes $A^{p-1}, A^{p-2}, \ldots$ Por el contrario, una matriz es primitiva, si una de sus potencias es positiva.*

Si A^p es positiva, entonces $\mathbf{A}$ es indescomponible. De lo contrario, cada potencia de $\mathbf{A}$ también sería descomponible y contendría elementos que se anulan. Además, es verdad que $r^p \geqq |r'^p|$ y, por tanto, $r \geqq |r'|$. Consecuentemente, $\mathbf{A}$ es primitiva. Esta observación la ha hecho el señor PERRON en su trabajo.

Si $\mathbf{B}$ es cualquier matriz positiva y $\mathbf{A}$ una matriz indescomponible, entonces también $\mathbf{PA} = \mathbf{Q}$ es positiva. Si fuese $q_{\alpha\beta} = \sum p_{\alpha\lambda} a\lambda\beta = 0$, entonces serían $a_{1\beta} = \cdots = a_{n\beta} = 0$ y, por tanto, $\mathbf{A}$ sería descomponible. Por eso mismo, también $\mathbf{QA} = \mathbf{PA}^2$ es positiva, etc.

Si, por el contrario, $\mathbf{A}$ tiene una raíz simple r, mayor que los valores absolutos de las otras raíces r, entonces (P.M. §3.):

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{\alpha\beta}^{(k)}}{r^k} = \frac{A_{\alpha\beta}(r)}{\varphi'(r)}.$$

Si $\mathbf{A}$ es indescomponible, entonces, por el teorema VIII, el límite es positivo y, por tanto debe ser, para cada par de índices, $a_{\alpha\beta}^{(k)} > 0$; por tanto la matriz cumple con $\mathbf{A}^k > 0$.

Pero si aquí los límites son necesarios, entonces no haré uso de los resultados anteriores hasta que lo haya demostrado algebraicamente.

X. *En una matriz imprimitiva, los elementos principales nunca son no nulos.*

Cada elemento $a_{\alpha 1}^{(k)}$ de $\mathbf{A}^k$ es una suma de productos de cantidades no negativas y, por tanto es la suma de cantidades positivas, si uno de estos productos es positivo. Si $a_{11} > 0$, entonces también $a_{11}^{(k)} > 0$, porque este elemento está contenido en la matriz $\mathbf{A}^k$. Por el teorema IV, existe un número $k < n$, para el cual $a_{\alpha 1}^{(k)} > 0$. Si $\mathbf{A}^{k+1} = A^k A$, entonces $a_{\alpha 1}^{(k+1)} > 0$, porque se entiende que $a_{\alpha 1}^{(k)} a_{11}$ es $a_{\alpha 1}^{(k+1)}$. Si $a_{1\beta}^{(l)} > 0$, entonces $a_{1\beta}^{(l+1)}$ en $A^{l+1} = AA^l$. A lo más, para $k = l = n-1$, las $2n-1$ cantidades

$$a_{\alpha 1}^{(l)}, \ a_{1\beta}^{(k)} \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots n)$$

son todas distintas de cero. Consecuentemente, en la relación $A^{k+l} = A^k A^l$, cada elemento es $a_{\alpha\beta}^{(k+l)} > 0$, porque se entiende que se trata del elemento $a_{\alpha 1}^{(k)} a_{1\beta}^{(l)}$. Pero si $\mathbf{A}^r > 0$, entonces $\mathbf{A}$ es primitiva.

Por el contrario, si $\mathbf{A}$ es imprimitiva, entonces $a_{11}, a_{22}, \cdots a_{nn}$ son cantidades nulas; o lo que es lo mismo, su suma debe ser:

$$(1.) \ldots\ldots\ldots\ldots a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = r + r_1 + \cdots + r_{n-1} = 0$$

en caso de que llegue a ser:

$$(2.) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \varphi(s) = (s-r)(s-r_1)\cdots(s-r_{n-1}).$$

En cada potencia de una matriz imprimitiva hay, por tanto, elementos que se anulan. Esto es evidente si la matriz A^m es descomponible. Si la matriz es indescomponible, entonces es imprimitiva porque $|r'^m| = r^m$ y entonces se anulan todos los elementos principales.

XI. *Cada potencia de un matriz primitiva, es primitiva. Si, por el contrario, A, $A^2, \cdots A^n$ es indescomponible, entonces A es primitiva.*

Si la matriz (1.) § 4 es positiva, entonces esta matriz sería imprimitiva y sus elementos serían $a_{11}^{(m)} = 0$.

Si, por el contrario, las matrices $A, A^2, ..., A^n$ son indescomponibles, entonces $\mathbf{A}$ debe ser primitiva.

La demostración de la primera mitad del teorema XI es equivalente a la del teorema IX, de donde aquél está basado en las consideraciones que siguen.

§7.

Si **A** es indescomponible, entonces las cantidades $A_{\alpha\beta}(r)$ son todas positivas. Por tanto, las n ecuaciones lineales

$$(1.)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{\alpha 1}x_1 + \cdots + a_{\alpha n}x_n = rx_\alpha \ \ldots\ldots\ldots(\alpha = 1, 2, \ldots n),$$

en el caso en que tengan un factor común, sólo tienen una solución y, por tanto, pueden suponerse a_{11}, a_{22}, $\cdots$, a_{nn} todas positivas. Lo mismo se cumple para las ecuaciones

$$(2.)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1\beta}y_1 + \cdots + a_{n\beta}y_n = ry_\beta \ \ldots\ldots\ldots(\beta = 1, 2, \ldots n).$$

Observamos que las n cantidades $y_1, \cdots y_n$ como una matriz **Y** de sólo una columna. Asimismo, sea **X** la matriz donde las cantidades $x_1, \cdots x_n$ están en una columna, una debajo de la otra. Entonces $\mathbf{X} > 0$ y $\mathbf{Y} > 0$ y las ecuaciones (1.) y (2.) significan

$$(3.)\ldots\ldots\ldots\ldots\mathbf{AX} = r\mathbf{X}\ ,\mathbf{YA} = r\mathbf{Y}.$$

A la inversa, sea **Z** una matriz en donde, en una columna, hay n cantidades $z_1, \cdots z_n$, las cuales no todas son no-negativas ni tampoco son todas nulas. Si éstas constan de n ecuaciones $\mathbf{AZ} = s\mathbf{Z}$, entonces debe ser primeramente $\varphi(s) = 0$. Además, si

$$\mathbf{YAZ} = (\mathbf{YA})\mathbf{Z} = r\mathbf{YZ} = \mathbf{Y}(\mathbf{AZ}) = s\mathbf{YZ}.$$

la matriz **YZ** es de primer grado y está formada por las cantidades $y_1z_1 + \cdots y_nz_n > 0$. Por tanto, $s = r$. Las ecuaciones lineales $\mathbf{AX} = s\mathbf{X}$ o $\mathbf{YA} = s\mathbf{Y}$ pueden tener, por tanto, una solución cuyos elementos son todos no-negativos y no todos son nulos, si $s = r$; en cuyo caso todas las indeterminadas son positivas.

Sea ahora **A** indescomponible, pero $\mathbf{A}^m$ descomponible. Por medio de un reacomodo adecuado de los renglones de **A**, podemos poner también:

$$\begin{matrix} R_{11} & 0 & 0 & 0 & . \\ R_{21} & R_{22} & 0 & 0 & . \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 & . \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & . \\ . & . & . & . & . \end{matrix}$$

donde las submatrices $R_{11}, R_{22}, \cdots$ son indescomponibles y $R_{\alpha\beta} = 0$, en caso de que $\beta > \alpha$.

Si se determinan **X** e **Y** como arriba, entonces también se tiene:

$$A^m X = r^m X.\ \ YA^m = r^m Y.$$

Sea ahora m_k el grado de $R_{\lambda\lambda}$ y sea X_1 el sistema de las primeras m_1 de las cantidades $x_1, \cdots x_n$, X_2 siguientes m_2, etc. Entonces

$$(4.) \ldots\ldots\ldots\ldots \sum_\beta R_{\alpha\beta} X_\beta = sX_\alpha.\ \ \sum_\alpha Y_\alpha R_{\alpha\beta} = sY_\beta.$$

donde $s = r^m$. Las primeras de estas ecuaciones se expresan como:

$$(5.) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots R_{11} X_1 = sX_1.$$

mientras que

$$\sum Y_\alpha R_{\alpha 1} = sY_1.\ \ \sum_\alpha Y_\alpha R_{\alpha\beta} = sY_\beta.$$

como el primer elemento de esta suma: $Y_1(R_{11}X_1) = sY_1X_1$.

$$Y_2R_{21}X_1 + Y_3R_{31}X_1 + Y_4R_{41}X_1 + \cdots = 0.$$

en donde cada uno de los elementos es $\geqq 0$. $Y_2R_{21}X_1 = 0$. Si la matriz R_{21} consta de las cantidades $c_{\kappa\lambda}$, entonces $Y_2R_{21}X_1$ consta de la cantidad única $\sum y_\kappa c_{\kappa\lambda} x_\lambda$. Por otra parte, esta cantidad consta de dos de las ecuaciones (4.):

$$(6.) \ldots\ldots\ldots\ldots R_{22}X_2 = sX_2$$

y

$$\sum Y_\alpha R_{\alpha 2} = sY_2.\ \ \sum Y_\alpha R_{\alpha 2} X_2 = sY_2X_2.$$

Como $R_{12} = 0$, entonces el primer elemento de esta suma es $Y_2R_{22}X_2 = sY_2X_2$ y, por tanto,

$$R_{32} = 0.\ \ R_{42} = 0.\ \ R_{52} = 0, \cdots.$$

En general, $R_{\alpha\beta} = 0$ en el caso de que $\alpha > \beta$ y, por tanto, se descompone completamente en:

$$A^m = \begin{matrix} R_{11} & 0 & 0 & . \\ 0 & R_{22} & 0 & . \\ 0 & 0 & R_{33} & . \\ . & . & . & . \end{matrix}.$$

XII. *Si una potencia descompone completamente una matriz, entonces esta potencia es completamente descomponible.*

Además, las ecuaciones (5.) y (6.) muestran que cada parte descomponible $R_{\lambda\lambda}$ tiene un raíz r^m.

Puesto que r es una raíz simple de **A**, si **A** consta de una raíz cualquiera r', entonces ésta consta, posiblemente, de una cuya *m-ésima* potencia es $r'^m = r^m$. Consecuentemente, $|r'| = r$ y A es imprimitiva.

Si **A** también es positiva, entonces cada potencia de **A** es indescomponible y, por tanto, es verdad que $rt^m < r^m$ es primitiva. Como se mostró anteriormente, existe una potencia $\mathbf{A}^m$ en donde $a_{11}^{(m)} > 0$. Y puesto que, además, $\mathbf{A}^m$ es indescomponible, entonces, por las consideraciones de la demostración del teorema **X**, una potencia de $\mathbf{A}^m$ es positiva. Por ello, los teoremas IX y XI están completamente demostrados. De los desarrollos de arriba, se deriva:

XIII. *Si A es una matriz descomponible y contienen tanto las ecuaciones $AX = rX$ como las ecuaciones $YA = rY$ una solución positiva, entonces A se descompone completamente y cada parte indescomponible de A tendrá una raíz máxima r.*

§8.

Si **A** es una matriz descomponible, entonces, por el teorema III, la raíz máxima de la ecuación $A_{\alpha\alpha}(s) = 0$ $q < r$. Si q' es cualquier otra raíz de esta ecuación, entonces $|q'| < q < r$. Sea **A** imprimitiva y sean

$$(1.) \ldots\ldots\ldots\ldots r, r', r'', \cdots$$

todas las raíces de **A**, cuyo valor absoluto es igual a r. Puesto que $|r'| > q$, entonces $A_{\alpha\alpha}(r')$ es diferente de cero y entonces

$$A_{\alpha\beta}(r')A_{\beta\alpha}(r') = A_{\alpha\alpha}(r')A_{\beta\beta}(r')$$

también es $A_{\alpha\beta}(r')$ diferente de cero. Por tanto, las n ecuaciones lineales

$$AZ = r'Z$$

sólo tienen una solución, cuyos elementos $z_1, \cdots z_n$ son todos distintos de cero. Pero si también

$$A^m Z = r'^m Z,$$

entonces

$$R_{11}Z_1 = r'^m Z_1, R_{22}Z_2 = r'^m Z_2, \cdots.$$

Consecuentemente, cada parte indescomponible $R_{\lambda\lambda}$ tiene las raíces

$$(2.) \ldots\ldots\ldots\ldots r^m, r'^m, r''^m, \cdots.$$

Si todas estas raíces no todas son iguales a r^m, entonces cada parte $R_{\lambda\lambda}$ es imprimitiva y, por tanto, una potencia de $\mathbf{A}^m$ se descompone en una cantidad mayor de partes que $\mathbf{A}^m$. Puesto que las partes no pueden ser $> n$, entonces debe haber una potencia $\mathbf{A}^m$ que se descompone en partes primitivas. Entonces, si $r^m = r'^m = r''^m = \cdots$, consecuentemente

$$(3.) \ldots\ldots\ldots 1, \frac{r'}{r}, \frac{r''}{r}, \cdots$$

son raíces de la ecuación $\rho^m = 1$.

En cada una de las partes indescomponibles $R_{\lambda\lambda}$ de $\mathbf{A}^m$, r^m es la mayor raíz positiva y, por tanto, simple. Por consiguiente, el número de estas partes es igual al número de las cantidades (2.), que son iguales a r^m. Si se eligen así m raíces enteras de la unidad (3.), todas satisfacen la ecuación $\rho^m = 1$ y entonces las cantidades (2.) son todas iguales a r^m. $R_{\lambda\lambda}$ no tiene raíces diferentes de r^m en valor absoluto a r^m y, por tanto, A es primitiva.

Si el exponente menor k, para el cual $\mathbf{A}^k$ se descompone en las partes primitivas $R_{\lambda\lambda}$, entonces satisfacen las cantidades (3.) no todas satisfacen la ecuación $\rho^m = 1$, entonces las cantidades (2.) no son iguales a r^m. Si cada parte $R_{\lambda\lambda}$ de $\mathbf{A}^m$ es imprimitiva, los elementos pricipales de $R_{\lambda\lambda}$ son todos nulos.

Si m no es divisible por k, entonces se anula la suma de los elementos principales de $\mathbf{A}^m$:

$$r^m + r_1'^m + \cdots + r_{n-1}''^m = 0;$$

por tanto, $c_m = 0$ si

$$\varphi(s) = s^n + c_1 s^{n-k} + \cdots + c_n.$$

Esto se sigue de las fórmulas de Newton

$$s_m + c_1 s_{m-1} + \cdots + c_{m-1} s_1 + m c_m = 0.$$

Entonces si para cada $c_1, \cdots c_{m-1}$ ya está demostrado, entonces en cada uno de los m primeros elementos $c_\kappa s_\lambda$ o bien $c_\kappa = 0$ o bien s_λ, porque $\kappa + \lambda = m$;

por tanto, ni κ ni λ son divisibles por k. Consecuentemente, $c_m = 0$ y, por tanto,

$$(4.)\ldots\ldots\ldots\ldots\varphi(s) = s^n + a_1 s^{n-k} + a_2 s^{n-2k} + \cdots.$$

si ρ es alguna raíz de la ecuación $\rho^m = 1$ y $r' = \rho r$ es una raíz de la ecuación $\varphi(s) = 0$. Además, si

$$\varphi'(r') = \rho^{n-1}\varphi'(r).$$

entonces r' es, igual que r, una raíz simple. Por tanto, coinciden las cantidades (3.) con las k raíces distintas de la ecuación $\rho^k = 1$ y su número es igual a k.

XIV. *La función característica de una matriz A indescomponible sea*

$$\varphi(s) = s^n + a' s^{n'} + a'' s^{n''} + \cdots.$$

donde $n > n' > n'' > \cdots$ y $a', a'', \cdots$ son distintos de cero. El máximo común divisor de las diferencias $n - n', n' - n'', \cdots$ sea k. Si $k = 1$, entonces **A** *es primitiva. Pero si $K > 1$, entonces* **A** *es imprimitiva. A^k es la potencia menor de* **A**, *cuya parte primitiva se descompone (completamente) y el número de estas partes es, por tanto, igual a k. Se pone*

$$\varphi(s) = s^n + a_1 s^{n-k} + a_2 s^{n-2k} + \cdots + a_m s^{n-mk},$$
$$\psi(s) = s^m + a_1 s^{m-1} + a_2 s^{m-2} + \cdots + a_m.$$

y entonces la ecuación $\psi(s) = 0$ tiene una raíz positiva, la cual es igual, en valor absoluto, a todas las demás raíces de la misma.

La última parte de este teorema muestra, en forma clara, de qué manera las propiedades de las matrices positivas se transforman en imprimitivas, mientras que dichas propiedades se mantienen válidas e invariantes para matrices primitivas.

El número $n - n' = h$ es el menor número mediante el cual los elementos principales de

A^k;

o bien, el producto cíclico

$$a_{\alpha\beta} a_{\beta\gamma} a_{\gamma\epsilon} \cdots a_{\vartheta\alpha}.$$

con h factores;

o bien

los determinantes principales de grado *h-ésimo* de **A**, se anulan completamente (*sic*).

Para una matriz no-negativa, cada uno de estas tres condiciones es equivalente, cuando c_k es el primer coeficiente no nulo, en $\varphi(s) = s^n + c_1 s^{n-1} + c_2 s^{n-2} + \cdots$.

Si ahora **A** es indescomponible, entonces **A** es primitiva o imprimitiva y, por tanto, $\mathbf{A}^k$ es indescomponible o descomponible, respectivamente. Para aclarar estas investigaciones con un ejemplo, sea $\varphi(s) = s^n - a$, donde a no es nulo. Entonces $s_1 = 0, s_2 = 0), \cdots, s_{n-1} = 0$, pero s_n es diferente de cero:

$$s_1 = \sum a_{\alpha\alpha}, s_2 = \sum a_{\alpha\beta}a_{\beta\alpha}, s_3 = \sum a_{\alpha\beta}a_{\beta\gamma}a_{\gamma\alpha}, \cdots.$$

Por tanto, cada uno de los productos es cíclico y contiene, al menos, n factores

$$a_{\alpha\beta}a_{\beta\gamma}a_{\gamma\delta}\cdots a_{\tau\alpha} = 0,$$

ninguno de ellos de n factores. Por medio del reacomodo de las renglones, se puede efectuar:

$$(4.)\ldots\ldots\ldots a_{12}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1,n}a_{n1} > 0.$$

Como $a_{12} > 0$, entonces $a_{21} = 0$; y como $a_{n-2,n-1}a_{n-1,n}a_{n1}a_{12} > 0$, entonces $a_{2n-2} = 0$. Se reconoce que todos los elementos de **A** se anulan, con excepción de los n elementos del producto (4.). Para $n = 4$, tenemos:

$$(5.)\ldots\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si **A** es cualquier matriz no-negativa, como arriba c_κ es el primer coeficiente no nulo de $\varphi(s)$ y entonces cada determinante principal de *h-ésimo* grado de **A**, diferente de cero, por medio de un reacomodo de sus renglones se lleva a la forma (5.).

§9.

Cada uno de las k partes indescomponibles $\mathrm{R}_{\lambda\lambda}$ de $\mathbf{A}^k$, es primitiva. Por tanto, $\mathrm{R}_{\lambda\lambda}^l$ es positivo en cuanto sobrepasa l el límite conocido. En una potencia de $\mathbf{A}^k$ (por ejemplo, en $\mathbf{A}^{kp} = P$), la parte $\mathbf{A}_{\lambda\lambda}^p = P_{\lambda\lambda}$ es toda positiva.

Si se divide la matriz $\mathbf{A}^m = M$ en sus correspondientes submatrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{14k} \\ L_{12} & L_{12} & \cdots & L_{2k} \\ L_{31} & L_{32} & \cdots & L_{3k} \\ L_{k1} & L_{k2} & \cdots & L_{kk} \end{pmatrix}.$$

entonces, al menos $L_{\alpha\alpha} = 0$.

Si $k > 2$, entonces, en la matriz $\mathbf{M} = \mathbf{APA}$, las submatrices

$$M_{\alpha\alpha} = \sum_{\beta} L_{\alpha\beta} P_{\beta\beta} L_{\beta\alpha} = 0.$$

y, por tanto, $L_{\alpha\beta} P_{\beta\beta} L_{\beta\alpha} = 0$; o bien, cuando $L_{\alpha\beta} = U, P_{\beta\beta} = V, L_{\beta\alpha} = W$, se tiene que $\mathbf{UVW} = 0$.

$$\sum_{\rho\sigma} u_{\kappa\rho} v_{\rho\sigma} w_{\sigma\lambda} = 0,\ u_{\kappa\rho} v_{\rho\sigma} w_{\sigma\lambda} = 0,\ u_{\kappa\rho} v_{\rho\lambda} = 0,$$

por tanto: o bien $\mathbf{U} = 0$; o $\mathbf{W} = 0$; o bien $L_{\alpha\beta}$ o $L_{\beta\alpha} = 0$.

Si $k > 3$, entonces, en la matriz $\mathbf{M} = \mathbf{APAPA}$, los submatrices cumplen con la relación

$$M_{\alpha\alpha} = \sum_{\beta,\gamma} L_{\alpha\beta} P_{\beta\beta} L_{\beta\gamma} P_{\gamma\gamma} L_{\gamma\alpha} = 0.$$

y, por tanto, $(L_{\alpha\beta} P_{\beta\beta} L_{\beta\gamma}) P_{\gamma\gamma} L_{\gamma\alpha} = 0$; o bien, $L_{\gamma\alpha} = 0$; o bien $(L_{\alpha\beta} P_{\beta\beta} L_{\beta\gamma}) = 0$ y, entonces, o $L_{\beta\gamma} = 0$; o $L_{\alpha\beta} = 0$.

Si, en general, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots \mu, \nu\ m < k$ son diferentes índices, entonces se anulan las submatrices

$$L_{\alpha\beta}, L_{\beta\gamma}, L_{\gamma\delta}, \cdots L_{\mu\alpha}.$$

Pero esto no se cumple para un ciclo de k matrices. De lo contrario, $\mathbf{A}^k = 0, \varphi(s) = s^n, r = 0$ y $\mathbf{A}$ se descompondría en n partes. Cada una de las submatrices de $\mathbf{A}^k$ consideradas aquí es una suma de productos de k factores:

$$L_{\alpha\beta} L_{\beta\gamma} L_{\gamma\delta}, \cdots L_{\kappa\lambda} L_{\lambda\mu} L_{\mu\nu}.$$

Puesto que cada índice tiene un valor $1, 2, \cdots k$, entonces deben haber, al menos, $k+1$ índices $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots \mu, \nu$ en donde, por lo menos, dos de ellos deben ser iguales. Si, por ejemplo, $\beta = \mu$, entonces se anula una de las matrices

$$L_{12}, L_{23}, L_{34}, \cdots L_{k-1,k}, L_{k,1}.$$

En ese caso se sabe, como al final de §8., que todas las demás submatrices $L_{\alpha\beta} = 0$. Si, por ejemplo, $k = 4$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & L_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{34} \\ L_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y, por tanto, se sigue que:

$$(1.)\ldots\ldots R_{\lambda\lambda} = L_{\lambda,\lambda+1} L_{\lambda+1,\lambda+2} \cdots L_{k-1,k} L_{k,1} L_{12} \cdots L_{\lambda-1,\lambda}.$$

§10.

Si $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son dos matrices de *n-ésimo* grado y si $|P|$ no es nula, entonces

$$\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{PQ})\mathbf{P} = \mathbf{QP}$$

y, por tanto,

$$(2.)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots |s\mathbf{E} - \mathbf{PQ}| = |s\mathbf{E} - \mathbf{QP}|.$$

Si los elementos de $\mathbf{P}$ son variables independientes, entonces se cumple que esta ecuación es diferente de cero para los $|\mathbf{P}|$ y, por tanto, se cumple idénticamente. (Ambos determinantes (1.) no necesitan coincidir con las partes elementales.)

Si $\mathbf{P}$ es una matriz de m renglones y n columnas, $\mathbf{Q}$ una matriz de n renglones y m columnas, entonces $\mathbf{PQ}$ tiene grado m y $\mathbf{QP}$ grado n. Sean $\varphi(s)$ y $\psi(s)$ sus funciones características. Cuando, por ejemplo, $m < n$, entonces se juntan los m renglones de $\mathbf{P}$ y todavía $m - n$ renglones de n elementos cero t para las m columnas de q o $n - m$ de tales columnas. Si se pasa $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{P}_0$ y $\mathbf{Q}_0$, entonces a $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0 = \mathbf{PQ}$, por agregación de $n - m$ renglones y columnas origina elementos que anulan. Por tanto:

$$\psi(s) = |s\mathbf{E} - \mathbf{QP}| = |s\mathbf{E} - \mathbf{Q}_0\mathbf{P}_0| = |s\mathbf{E} - \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0| = s^{n-m}\varphi(s).$$

Se hace

$$L_{\kappa,\kappa+1} L_{\kappa+1,\kappa+2} \cdots L_{\kappa-1,\kappa} = P,\ L_{\lambda,\lambda+1} L_{\lambda+1,\lambda+2} \cdots L_{\lambda-1,\lambda} = Q.$$

y entonces

$$R_{\lambda\lambda} = \mathbf{PQ}. \ R_{\lambda\lambda} = \mathbf{QP}.$$

Si $\varphi_\lambda(s)$ es la raíz característica de $R_{\lambda\lambda}$, y si m_κ es el más pequeño de los números $m_1, m_2, \cdots m_\kappa$, entonces se tiene: o bien

$$\varphi_\lambda(s) = s^{m_\lambda - m_\kappa}\varphi_\kappa(s);$$

o bien $m_\kappa = m$ y $\varphi_\kappa(s) = \psi(s)$.

$$\varphi(s) = s^{m_\lambda - m}\psi(s), \ (s - r^k)(s - r_1^k)\cdots(s - r_{n-1}^k) = \prod \varphi_\lambda(s) = s^{n-mk}\psi(s)^k.$$

De las n raíces $r, r_1, \cdots r_{n-1}$ de la ecuación $\varphi(s) = 0$, se anulan al menos $n - mk$ valores. Si

$$\varphi(s) = s^n + a_1 s^{n-k} + a_2 s^{n-2k} + \cdots + a_m s^{n-mk} = s^{n-mk}(s^k - r^k)(s^k - r_1^k)\cdots(s^k - r_{m-1}^k),$$

entonces la función, cuyas raíces de las *k-ésimas* potencias son raíces de $\varphi(s)$,

$$s^{m_\lambda - m}(s - r^k)^k(s - r_1^k)^k\cdots(s - r_{n-1}^k)^k.$$

Consecuentemente,

$$\psi(s) = (s - r^k)(s - r_1^k)\cdots(s - r_{m-1}^k);$$

o bien,

$$(2.)\ldots\ldots\ldots\ldots\psi(s) = s^m + a_1 s^{m-1} + a_2 s^{m-2} + \cdots + a_m.$$

En general:

$$(3.)\ldots\ldots\ldots\varphi(s) = s^{m_\lambda} + a_1 s^{m_\lambda - 1} + a_2 s^{m_\lambda - 2} + \cdots + a_m s^{m_\lambda - m}.$$

§11.

De las propiedades de las matrices indescomponibles, se deducen propiedades análogas para las descomponibles. Se sigue el teorema:

XV. *Si r es la raíz máxima de una matriz no-negativa, entonces son raíces de A aquellas de valor absoluto igual a r y, también, todas las raíces de una ecuación de la forma:*

$$(s^k - r^k)(s^L - r^L)(s^m - r^m)\cdots = 0.$$

ρr satisface, por tanto, la raíz característica $\varphi(s) = 0$, que es la raíz máxima cuyo valor absoluto es igual a ρ, una raíz unitaria. Las ecuaciones lineales $\mathbf{AX} = s\mathbf{X}$ tienen una solución en donde las raíces $x_1, x_2, \cdots x_m$ son $\geqq 0$, pero no todas nulas. Escribo estas ecuaciones en la forma:

$$
\begin{aligned}
&L_{11}X_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = sX_1, \\
&L_{21}X_1 + L_{22}X_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = sX_2, \\
&L_{31}X_1 + L_{32}X_2 + L_{33}X_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = sX_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&L_{m1}X_1 + L_{m2}X_2 + L_{m3}X_3 + \cdots + L_{mm}X_m = sX_m.
\end{aligned}
$$

Sea r_κ la raíz máxima de la matriz indescomponible $L_{\kappa\kappa}$. Si s es más pequeña que las cantidades $r_1, r_2, \cdots r_m$, entonces, según la primera ecuación: $\mathbf{X}_\kappa = 0$; según la segunda ecuación: $\mathbf{X}_2 = 0$; etc.

Además, si debido a una solución no-negativa $\mathbf{X}$, o bien, $\mathbf{X}_\kappa > 0$, unas indeterminadas no pueden ser $= 0$ y las otras > 0. Si $s > r_\kappa$, entonces

$$(s\mathbf{E}_\kappa - \mathbf{L}_{\kappa\kappa}) = \mathbf{P}$$

es una matriz positiva y

$$(2.) \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{X}_\kappa = (s\mathbf{E}_\kappa - \mathbf{L}_{\kappa\kappa})^{-1}(L_{\kappa 1}X_1 + \cdots + L_{\kappa,\kappa-1}X_{\kappa-1}) = PZ,$$

donde $P_{\alpha\beta} > 0$, en cuyo caso $\mathbf{X}_\kappa > 0$, a no ser que $\mathbf{Z} = 0$, en cuyo caso $\mathbf{X}_\kappa = 0$.

Pero si $s \leqq r_\kappa$, sea entonces $\mathbf{Y}_\kappa$ una solución positiva de la ecuación

$$Y_\kappa L_{\kappa\kappa} = r_\kappa Y_\kappa.$$

Entonces

$$(3.) \ldots\ldots \mathbf{Y}_\kappa(\mathbf{L}_{\kappa 1}\mathbf{X}_1 + \cdots + \mathbf{L}_{\kappa,\kappa-1}\mathbf{X}_{\kappa-1} + (r_\kappa - s)\mathbf{X}_\kappa) = 0,$$

puesto que $Y_\kappa > 0$, por lo que cada sumando viene a ser $\geqq 0$:

$$(4.) \ldots\ldots \mathbf{L}_{\kappa 1}\mathbf{X}_1 = 0, \cdots \mathbf{L}_{\kappa,\kappa-1}\mathbf{X}_{\kappa-1} = 0, \ (r_\kappa - s)\mathbf{X}_\kappa = 0,$$

y, por tanto,

$$(5.) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{X}_\kappa = 0, \text{ si } s < r_\kappa.$$

Pero, si $s = r_\kappa$, entonces se sigue de (4.) que la κ-*ésima* ecuación (1.) $\mathbf{L}_{\kappa\kappa}\mathbf{X}_\kappa = \mathbf{r}_\kappa\mathbf{X}_\kappa$, y, por tanto, o bien $\mathbf{X}_\kappa = 0$ o $\mathbf{X}_\kappa > 0$.

Ahora, si las ecuaciones (4.) tuvieran una solución no-negativa, entonces s debe ser una de las raíces $r_1, r_2, \cdots r_m$: una raíz simple. Pero hay más. Después demuestro, en lo que sigue, que es verdad que la raíz r_λ, con índice λ, es la mayor. Si entonces

$$(6.)\ldots\ldots r_\lambda > r_{\lambda+1}, r_\lambda > r_{\lambda+2}, \cdots r_\lambda > r_{m1},$$

las ecuaciones (1.) tienen una solución no-negativa, pero si $\lambda = m$ entonces se omiten las condiciones (6.) Entonces se pone $X_1 = 0, \cdots X_{\lambda-1} = 0$ y elegimos, para X_λ, la solución positiva de la ecuación (1.), porque $s > r_{\lambda+1}$. Por (2.), $X_{\lambda+1}$ es una matriz totalmente determinada mayor o igual a cero, de la $(\lambda+1)-ésima$ $X_{\lambda+2}$, etc.

Es posible también que, por otro reordenamiento de las ecuaciones y de las indeterminadas $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots \mathbf{X}_m$, las ecuaciones (1.) tengan la misma forma, como en el caso, a saber: que la única de las matrices $L_{\alpha\beta}$ $(\alpha > \beta)$ sea nula. Entonces basta con que las condiciones (6.), para alguno de los posibles reordenamientos, se satisfaga.

Pero si para ninguno de estos reordenamientos se satisface, entonces las ecuaciones $\mathbf{AX} = s\mathbf{X}$ -como ahora mostraremos- no tienen solución de tipo especial y de las matrices $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots \mathbf{X}_m$ debe anularse al menos una. De lo contrario, se sigue de la primera ecuación (1.) que $s = r_1$ y de (5.) que $s \geqq r_2, \cdots s \geqq r_m$ y, por tanto, las condiciones (6.) (a lo más para $\lambda = m$) se satisfacen.

Si ahora, primeramente $\mathbf{X}_1 = 0$, entonces las ecuaciones (1.) significan que:

$$\begin{aligned} &\ldots\ldots\ldots \mathbf{L}_{22}\mathbf{X}_2 \ldots\ldots\ldots\ldots = s\mathbf{X}_2, \\ &(7)\ldots\ldots \mathbf{L}_{32}\mathbf{X}_2+\mathbf{L}_{33}\mathbf{X}_3 = s\mathbf{X}_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si $\lambda = 1$, entonces ninguna de las cantidades $r_1, r_2, \cdots r_m$ es igual a s: consecuentemente, $\mathbf{X}_1 = 0, \mathbf{X}_2 = 0, \cdots \mathbf{X}_m = 0$. Pero si $\lambda > 1$, entonces no hay un reordenamiento de las ecuaciones (7.) que cumpla las condiciones (6.). Puesto que su matriz consta de sólo m - 1 partes, podemos suponer como ya demostradas estas condiciones para las ecuaciones principales y, finalmente, podemos suponer que: $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = \cdots = \mathbf{X}_m = 0$.

Pero si fuesen $\mathbf{X}_1 > 0, \mathbf{X}_2 > 0, \cdots \mathbf{X}_m > 0$ y, en primer lugar, $\mathbf{X}_m, \cdots \mathbf{X}_m$, entonces

$$\mathbf{L}_{\kappa 1}\mathbf{X}_1 + \mathbf{L}_{\kappa 2}\mathbf{X}_{\kappa 2} + \cdots + \mathbf{L}_{\kappa,\kappa-1}\mathbf{X}_{\kappa-1} = 0$$

y, como ningún sumando es negativo:

$$\mathbf{L}_{\kappa 1}\mathbf{X}_1 = 0, \mathbf{L}_{\kappa 2}\mathbf{X}_{\kappa 2} = 0, \cdots \mathbf{L}_{\kappa,\kappa-1}\mathbf{X}_{\kappa-1} = 0;$$

por tanto,

$$\mathbf{L}_{\kappa 1} = 0, \mathbf{L}_{\kappa 2} = 0, \cdots \mathbf{L}_{\kappa,\kappa-1} = 0.$$

Por medio de una permutación cíclica, consecuentemente se pueden llevar las primeras κ ecuaciones indeterminadas de la κ-esima ecuación

$$\mathbf{L}_{\kappa,\kappa}\mathbf{X}_\kappa = s\mathbf{X}_\kappa$$

sin que las ecuaciones cambien su forma. Por medio de esta permutación, $\mathbf{X}_\kappa$ es el primer subsistema de X, con $\mathbf{X}_\kappa = 0$; por tanto también se anulan, como se demostró más arriba, todos los otros subsistemas.

Si s es la mayor de las cantidades $r_1, r_2, \cdots r_m$, entonces las condiciones (6.) siempre se cumplen. Se mostró en §1, que, en ese caso, las ecuaciones (1.) no tienen una solución no-negativa

§12.

El que una descomposición en partes indescomponibles de una matriz **A** pueda realizarse tan sólo mediante una manera posible, se puede examinar de la manera siguiente. Cada parte de **A** está contenida por medio de sus elementos pricipales (no sus valores, sino de sus índices) y está completamente determinada. En la descomposición dos partes **Q** y **R**, indescomponibles de **A**, las cuales tienen un elemento principal en común, se puede llamar **B** a una parte "indescomponiente" [unmittelbarer] de **A** si todos los elementos de **A** se anulan y cuyos renglones (o columnas) estén contenidos en las columnas complementarias (o renglones) de **B**. (Una matriz tal es, por ejemplo, en la matriz (1.) §2 **P** y **Q**, pero no R.) También es indescomponible. Si **B** es parte complementaria, entonces también es indescomponible.

Sea **B** tal parte, que contiene a **Q**, y sea **C** una matriz que pertenece a **R**; entonces podemos suponer que los renglones (y columnas) de **B** y **C**, todos juntos, suman n partes. De lo contrario **B** y **C** estarían contenidas, como partes indescomponibles, en una matriz cuyo grado es menor que n y, por ello, ya puede considerarse como demostrado y las partes indescomponibles **Q** y **R** iguales, si tienen en común elementos de la diagonal.

Ahora, se presentan dos casos (propiamente cuatro) para investigar:

Primero:

$$A = \begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{matrix}, B = \begin{matrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{matrix}, C = \begin{matrix} A_1 & C_1 \\ A_3 & C_3 \end{matrix}.$$

A_1 contiene todos los elementos principales que **B** y **C** tienen en común, mientras que **B** es una parte indescomponible de **A** porque los elementos de A_2 y B_2 se anulan en aquellas partes complementarias que tienen partes en común. Como $A_2 = 0$, A_1 es una parte de B; y porque $A_3 = 0$, A_1 es una parte de C. Esto aparece en A_1. Consecuentemente, **Q** es una parte de A_1 de igual manera que R y, por tanto, **Q** = **R**.

Segundo:

$$A = \begin{matrix} A_1 & 0 & C_1 \\ A_2 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{matrix}, B = \begin{matrix} A_1 & 0 \\ A_2 & B_2 \end{matrix}, C = \begin{matrix} A_1 & C_1 \\ 0 & C_3 \end{matrix}$$

se basa en una matriz. Aquí se anulan los elementos de A_3 y B_3 que tienen en común las columnas de B, y los renglones complementarios y los elementos de B_1 y B_3 cuyos renglones tienen en común con **C** las columnas complementarias.

Otra demostración del mismo teorema es de naturaleza más algebraica. La reducibilidad de una matriz consiste en que los elementos conocidos se anulan fuera de la diagonal y quedan, por tanto, sin cambio cuando los elementos no nulos y todos los elementos principales son sustituidos por una variable independiente, $x_{\alpha\beta}$. Por ello, llego al determinante $|A|$ en **X**, y lo expreso como una función entera de variables independientes que no se anulan, porque contienen al elemento $x_{11}x_{22}\cdots x_{nn}$. Descompongamos ahora **X = PQ** en dos factores, los cuales son funciones de las variables. Entonces llamo a X *reducible*.

XII. *Si la matriz A es no-negativa indescomponible, entonces la función entera X es irreducible.*

En **X = PQ** aparece la variable real $x_{\alpha\alpha}$, siendo **X** una función lineal de $x_{\alpha\alpha}$. Por tanto, $x_{\alpha\alpha}$ puede aparecer solamente en uno de los dos factores: **P** o **Q**. Puede aparecer $x_{11}, x_{22}\cdots x_{mm}$ en **P**; y $x_{m+1,m+1}\cdots x_{nn}$ en **Q**. Con relación a aquellas cantidades $x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, \cdots x_{\alpha n}$ que no son nulas, **X** es una función lineal homogénea. Por tanto, todos aparecen en el mismo factor, los cuales están determinados por $x_{\alpha\alpha}$ en P, si $\alpha \leqq m$; y en Q, cuando

$\alpha > m$. Sin embargo, se cumple de $x_{1\beta}, x_{2\beta} \cdots x_{n\beta}$. Llamo a los índices α, β no homogéneos, si uno $\leqq m$ y el otro $> m$, pero homogéneos cuando ambos son $\leqq m$ o ambos $> m$. Si α y β son no-homogéneos, entonces aparece $x_{\alpha\beta}$ en **B** o en **Q**, pero entonces no aparece en $\mathbf{X} = \mathbf{PQ}$. De donde se sigue, de paso, que $0 < m < n$.

Por tanto $= 0$. Cuando $\rho, \sigma, \tau, \cdots$, los n - 2 índices superiores, entonces en **X** aparecen los elementos $x_{\alpha\beta}x_{\beta\alpha}x_{\rho\rho}x_{\sigma\sigma}x_{\tau\tau}\cdots$, si $x_{\alpha\beta}$ y $x_{\beta\alpha}$ son distintos de cero. . En general, si $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \vartheta$ no son todos idénticos, el producto cíclico $x_{\alpha\beta}x_{\beta\gamma}x_{\gamma\delta}\cdots x_{\vartheta\alpha} = 0$.

Un producto tal permanece invariable por una permutación cíclica de los índices. Bajo la suposición hecha de que los índices $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \vartheta$ pueden ser no-homogéneos y si $\alpha = \beta$, entonces el producto es igual a $x_{\alpha\alpha}(x_{\beta\gamma}x_{\gamma\delta}\cdots x_{\vartheta\beta})$; y si $\alpha = \beta$, entonces es igual a $(x_{\alpha\beta}x_{\beta\alpha})(x_{\gamma\delta}\cdots x_{\vartheta\gamma})$. En este caso, la demostración de esta afirmación sería análoga para un producto cíclico de menos factores, cuyos índices todos se anulan y no todos son homogéneos.

Si α y β son no homogéneos, entonces $x_{\alpha\beta}x_{\beta\kappa}x_{\kappa\alpha} = 0$. Por tanto, $x_{\alpha\beta}\sum_{\kappa} x_{\beta\kappa}x_{\kappa\alpha} = 0$; o bien, $x_{\alpha\beta}x^{(2)}_{\beta\alpha} = 0$; y más en general, $x_{\alpha\kappa}x_{\kappa\beta}x_{\beta\lambda}x_{\lambda\mu}x_{\mu\alpha} = 0$. Por tanto, también $\left(\sum_{\kappa} x_{\alpha\kappa}x_{\kappa\beta}\right)\left(\sum_{\lambda,\mu} x_{\beta\lambda}x_{\lambda\mu}x_{\mu\alpha}\right) = 0$; o bien $x^{(2)}_{\alpha\beta}x^{(3)}_{\beta\alpha} = 0$. Pero, sobre todo,

$$x^{(k)}_{\alpha\beta}x^{(l)}_{\beta\alpha} = 0$$

y, por tanto: o bien las cantidades $x_{\alpha\beta}, x^{(2)}_{\alpha\beta}, x^{(3)}_{\alpha\beta}, \cdots x^{(n-1)}_{\alpha\beta}$ son completamente nulas; o son nulas las cantidades

$$x_{\beta\alpha}, x^{(2)}_{\beta\alpha}, x^{(3)}_{\beta\alpha}, \cdots x^{(n-1)}_{\beta\alpha}.$$

Si añadimos las variables con valores positivos, entonces se sigue -por el teorema IV- que **A**, y por tanto **X**, es descomponible.

Si ahora se descomponen $A_1, A_2, A_3, \cdots$ y resultan descomponibles, entonces se descompone **X** en los determinantes $X_1, X_2, X_3, \cdots$, siendo éstos irreducibles y pudiéndose caracterizar cada uno de ellos en los elementos principales que aparecen en él. Puesto que estos factores son irreducibles y, por medio de **X**, están completamente determinados, entonces se puede descomponer también la matriz **A** sólo de una forma: en partes indescomponibles. En un determinante se puede llevar, por medio de cualquier permutación (tampoco cogrediente) de los renglones y columnas, los elementos de cada miembro a la diagonal. Consecuentemente, esto se demuestra con base en las discusiones acerca del teorema I.

Math Ann
B. 77 1916
Inst. Matem. ...

Mathematischer Preis des Königs Gustav V.

Einem von verschiedenen Seiten dargelegten Wunsche gemäß und anläßlich der obwaltenden Weltlage hat S. M. der König Gustav V beschlossen, daß die Einreichungsfrist für diejenigen Arbeiten, welche zur Konkurrenz um den von S. M. gestifteten mathematischen Preis angemeldet werden, vom 31. Oktober 1916 bis zum 31. Oktober 1917 hinausgeschoben wird.

G. Mittag-Leffler.

Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre.

Von

Dénes Kőnig in Budapest.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Problemen aus der *Analysis situs*, der Determinantentheorie und der Mengenlehre. Der Begriff der *Graphen* ist dasjenige Bindeglied, durch welches diese Probleme miteinander zusammenhängen. Die durch geometrische Anschaulichkeit ausgezeichnete Methode der Graphen, die auch zur Lösung mancher hier auftretenden Fragen führt, wird nämlich die Äquivalenz von scheinbar einander fernliegenden Fragestellungen zeigen.

§ 1.

(Graphen.*)

Es sei eine endliche Anzahl von Punkten gegeben; gewisse Paare, die man aus diesen Punkten auswählen kann, sollen durch eine oder mehrere (endlich viele) Kanten verbunden werden. Eine auf diese Weise entstehende Figur wird im allgemeinen als ein *Graph* bezeichnet. Ein Graph heißt (in sich) *zusammenhängend*, falls man auf seinen Kanten von irgend einem seiner Punkte**) zu jedem anderen gelangen kann. Ist der Graph nicht zusammenhängend, so zerfällt er in eindeutiger Weise in zusammenhängende Teile. In der Trivialität dieser Aussage liegt der Vorteil gewisser (algebraischer) Anwendungen der Graphen. Läuft aus jedem Punkt dieselbe Anzahl von Kanten aus, so heißt der Graph *regulär* und diese konstante Anzahl wird als der *Grad* des regulären Graphes bezeichnet. Eine ganz

*) Vgl. Petersen: „Die Theorie der regulären Graphs", Acta Mathematica Bd. 15 (1891), S. 193–220.

**) Nur die ursprünglich angenommenen Punkte (Knotenpunkte) werden als „Punkte" des Graphes bezeichnet.

ausgezeichnete Rolle spielen die sogenannten *paaren Graphen;* ein Graph wird so bezeichnet, falls jeder geschlossene Linienzug, der aus seinen Kanten gebildet werden kann, eine gerade Anzahl von Kanten enthält (z. B. das Kantensystem des Würfels).

Ein Graph ist dann und nur dann ein paarer Graph, wenn man seine Punkte so in zwei Gruppen zerlegen kann, daß nur Punkte verschiedener Gruppen unmittelbar (durch eine Kante) verbunden sind.

In der Tat: ist eine Teilung in zwei solche Gruppen möglich, so gehören die Punkte jedes geschlossenen Kantenzuges *abwechselnd* der einen und der anderen Gruppe an; der geschlossene Kantenzug muß also eine gerade Anzahl von Kanten enthalten. Und umgekehrt: ordnet man die Punkte, auf einem beliebigen Kantenzug fortfahrend, abwechselnd der einen oder anderen Gruppe zu, so kann dies nur dann zu einem Widerspruch führen, falls man auf einen geschlossenen Kantenzug gestoßen ist, der eine ungerade Anzahl von Kanten enthält. (Dies gilt auch für nicht zusammenhängende Graphen, nur ist hier die Einteilung der Punkte in zwei Gruppen nicht eindeutig bestimmt.)

Auf diese Weise können die „nicht zusammenhängenden" und die „paaren" Graphen symmetrisch zueinander definiert werden, da man die nicht zusammenhängenden Graphen auch dadurch charakterisieren kann, daß ihre Punkte so in zwei Gruppen geteilt werden können, daß nur zwei Punkte *derselben* Gruppe untereinander unmittelbar verbunden sind.

Die Gesamtheit G_k gewisser Kanten des Graphes G, wird als ein *Faktor k^{ten} Grades* von G bezeichnet, wenn von jedem Punkte von G genau k Kanten von G_k auslaufen. Ein Faktor k^{ten} Grades ist selbst ein regulärer Graph k^{ten} Grades, seine Punkte stimmen mit den Punkten des ursprünglichen Graphes überein. Gewisse Kanten von G bilden also dann einen Faktor *ersten* Grades, wenn jeder Punkt von G einmal und nur einmal als Endpunkt dieser Kanten vorkommt. Ist G regulär und n^{ten} Grades, so bilden diejenigen Kanten, die in einem Faktor k^{ten} Grades G_k *nicht* enthalten sind, einen Faktor $n-k^{ten}$ Grades, G_{n-k}. In diesem Falle setzt man nach Petersen:

$$G = G_k G_{n-k}.$$

Ebenso definiert man das Zerfallen eines regulären Graphes in mehr als zwei Faktoren. Stets ist die Summe der Grade der Faktoren dem Grade des ursprünglichen Graphes gleich. Im Folgenden wird besonders die Zerlegung eines regulären Graphes in Faktoren ersten Grades behandelt werden.

Jeder Graph zweiten Grades besteht aus einfachen (doppelpunktslosen) geschlossenen Linien. Dieser besitzt, wie man sieht, dann (und nur dann) einen Faktor ersten Grades, wenn alle diese geschlossenen Linien eine gerade Anzahl von Kanten enthalten.*)

Als eine Verallgemeinerung dieser Tatsache werden wir folgenden Satz beweisen:

A) *Jeder paare reguläre Graph besitzt einen Faktor ersten Grades.*

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des folgenden (der jedoch nur scheinbar mehr besagt**)):

B) *Jeder paare reguläre Graph k^{ten} Grades zerfällt in k Faktoren ersten Grades.*

Dieser Satz wieder ergibt sich als eine Folge des folgenden:

C) *Laufen in jedem Punkte eines paaren Graphes höchstens k Kanten zusammen, so kann man den Kanten des Graphes je einen von k Indizes auf solche Weise zuordnen, daß zwei Kanten, die in einem Punkt zusammenlaufen, stets verschiedene Indizes erhalten.*

Der Satz B) ist in der Tat eine unmittelbare Folge dieses Satzes, da im Falle eines regulären Graphes k^{ten} Grades die Kanten mit denselben Indizes je einen Faktor ersten Grades bilden.

Für den Beweis des Satzes C) wollen wir die Methode der vollständigen Induktion anwenden, die, obzwar sie bei einer Beschränkung auf den Satz B) versagt, für den allgemeineren Satz C) unmittelbar zum Ziele führt. Ist die Anzahl der Kanten $\leq k$, so ist der Satz natürlich richtig. Wir nehmen also an, daß er stets richtig ist, wenn diese Zahl $< N$ ist und beweisen ihn für den Graph G mit N Kanten.

Läßt man aus G irgend eine Kante, e weg, so entsteht also ein — natürlich ebenfalls paarer — Graph G', dessen Kanten mit den k Indizes in einer dem Satze C) entsprechenden Weise versehen werden können. Diese Indizes denken wir an den Kanten von G' angebracht. Verbindet die weggelassene Kante e die Punkte A und B, so ist es *erstens* möglich, daß irgend ein Index weder in A (d. h. an einer Kante die nach A läuft), noch in B vorkommt. In diesem Falle kann man diesen Index der Kante e zuordnen und unser Ziel ist erreicht. Wir können uns also auf den *zweiten* Fall beschränken: ein Index, etwa „1", der in B fehlt (einen solchen muß

*) Petersen, l. c., S. 195.

**) Nimmt man nämlich den Satz A) als richtig an, so hat der Graph k^{ten} Grades, G_k, einen Faktor ersten Grades G_1 und es ist $G_k = G_1 G_{k-1}$, ebenso ist $G_{k-1} = G_1' G_{k-2}$, $G_{k-2} = G_1'' G_{k-3}, \dots$ wo auch $G_1', G_1'', \dots$ Faktoren ersten Grades sind; endlich ist also $G_k = G_1 G_1' G_1'' \dots G_1^{(k-1)}$ wirklich in Faktoren ersten Grades zerlegt. — Für eine gerade Zahl k folgt Satz B) unmittelbar aus einem Satze von Petersen (l. c., S. 200). Es wäre auch nicht schwer, den Fall einer ungeraden Gradzahl auf diesen Fall zurückzuführen. Der hier folgende Beweis, der auch zu allgemeineren Resultaten führt, ist jedoch einfacher und macht die Unterscheidung dieser zwei Fälle nicht nötig.

es geben, da in G' höchstens $k-1$ Kanten nach B — und ebenso auch nach A — laufen), kommt in A vor. Sei weiter „2" ein Index, der in A nicht vorkommt. — Sei nun AA_1 die Kante mit dem Index „1". Eventuell gibt es eine Kante A_1A_2 mit dem Index „2", dann vielleicht eine Kante A_2A_3 mit dem Index „1", eine Kante A_3A_4 mit dem Index „2", usw. Wir bilden diesen „alternierenden" Weg $AA_1A_2A_3\cdots$ so weit als nur möglich. Er ist — nach der Wahl der Indizes „1" und „2" — eindeutig bestimmt. Auf diesem Weg kann man keinen Punkt zweimal erreichen, denn wäre A_i der erste Punkt, der schon einmal passiert wurde, so müßten in A_i drei Kanten mit den Indizes „1" oder „2" vorkommen. Aber auch nach A kann man nicht zurückgelangen, da dort „2" gar nicht vorkommt und „1" (mit der Kante AA_1) schon benutzt wurde. Endlich kann man auf diesem Weg nicht nach B gelangen, denn dies könnte nur mit einer Kante vom Index „2" geschehen („1" kommt in B nicht vor) und dann würde der Weg von A nach B eine gerade Anzahl von Kanten enthalten; mit der weggelassenen Kante e zusammengenommen würde dieser Weg — im Gegensatz zu unseren Voraussetzungen — einen geschlossenen Kantenzug von G mit ungerader Kantenzahl ergeben.

$AA_1A_2\cdots A_r$ ist also ein doppelpunktloser beiderseits offener Weg, der den Punkt B nicht enthält, und dessen Kanten abwechselnd die Indizes „1" und „2" tragen. Wir vertauschen nun die Indizes „1" und „2" auf den Kanten dieses Weges, ohne die Indizes der übrigen Kanten zu ändern. Die Verteilung der Indizes genügt auch nach dieser Vertauschung den Forderungen. Man sieht das unmittelbar sowohl für den ersten Punkt A, von wo aus ursprünglich keine Kante mit dem Index „2" auslief, wie für die inneren Punkte A_i und auch für den Endpunkt A_r, von wo keine zweite Kante mit dem Index „1" oder „2" auslaufen kann, da sonst unser Weg nicht in A_r enden könnte. Nun haben wir aber erreicht, daß der Index „1" auch in A nicht mehr vorkommt, so daß er der weggelassenen Kante e zugeordnet werden kann.

Damit sind der Satz C) und also auch die Sätze A) und B) bewiesen.

Bevor wir nun zu den Anwendungen dieser Untersuchungen auf die Determinantentheorie und Mengenlehre übergehen, wollen wir noch erwähnen, daß unser Satz B) in engem Zusammenhang mit einem bekannten Problem der *Analysis situs* selbst steht; dies ist das Problem des *Kartenfärbens*. Der bis heutzutage unbewiesene *Vierfarbensatz* besagt folgendes: „Man kann den Ländern einer ebenen Karte je eine von vier Farben stets auf solche Weise zuordnen, daß zwei Länder, die eine gemeinsame Grenzlinie haben, immer verschiedene Farben erhalten." Man kann leicht sehen, daß man sich auf den Fall beschränken kann, wo die Grenzen der Karte

einen regulären Graph dritten Grades bilden und dann ist der Vierfarbensatz dem Taitschen Satze äquivalent,*) der besagt, daß ein solcher Graph stets in Faktoren ersten Grades zerfällt. Natürlich braucht darum noch nicht jeder Graph dritten Grades in drei Faktoren zu zerfallen, denn ein Graph kann nur dann als das Grenzsystem einer ebenen Karte angesehen werden, wenn er folgende zwei Eigenschaften besitzt: 1) er läßt sich auf der Ebene (Kugel) so zeichnen, daß dabei keine (neuen) Schnittpunkte auftreten und 2) jede seiner Kanten gehört einem doppelpunktlosen geschlossenen Kantenzuge an. Ohne diese zwei Einschränkungen ist der Taitsche Satz (Tait hat ihn ohne diese Einschränkungen ausgesprochen und als evident erklärt**)) gar nicht richtig, wie man durch zwei Beispiele zeigen kann.***) — Ist aber dieser Graph ein paarer Graph, so ist nach dem bewiesenen Satze B) der Satz auch ohne diese zwei Einschränkungen richtig. Allerdings ergibt dies nichts Neues für das Problem des Kartenfärbens, da in diesem Falle — wie Kempe†) bewiesen hat — nicht nur vier sondern schon drei Farben ausreichen. Für das allgemeine Problem wäre sicherlich ein wichtiger Schritt getan, wenn es — und zwar in einfacher Weise — gelingen würde, die Graphen von der Eigenschaft 1) durch innere (kombinatorische) Eigenschaften der Graphen zu charakterisieren. Dabei würde jedenfalls der Eulersche Polyedersatz eine wichtige Rolle spielen.††)

§ 2.

Anwendung auf Determinanten.

Die paaren Graphen können mit den Determinanten aus ganzen oder reellen Elementen in engen Zusammenhang gebracht werden und zwar mit jenen Eigenschaften dieser Determinanten, die nur vom absoluten Betrage ihrer Glieder abhängen und unabhängig sind von den Vorzeichen, die den Gliedern zugeordnet werden.

Wir wollen uns zunächst mit solchen Determinanten

$$D = |a_{ik}|_{i,k=1,2,\dots,n}$$

beschäftigen, wo die Elemente a_{ik} nicht negative ganze Zahlen sind. Der

*) Diese Untersuchungen sind zusammengestellt z. B. bei Wernicke (Math. Ann. 58, S. 413).

**) Philosophical Magazine (5), Bd. 17, S. 30.

***) Das eine ist ein merkwürdiger Graph von Petersen (Intermédiaire des Mathématiciens Bd. 5, S. 225), das andere z. B. ein Graph (ebenfalls dritten Grades) von Sylvester (abgedruckt als Figur 11 in der öfters erwähnten Arbeit von Petersen).

†) Am. Journ. of Math. Bd. 2, S. 193.

††) Dies habe ich in zwei in ungarischer Sprache erschienenen Arbeiten versucht (Mathematikai és természettudományi Értesítő Bd. 29).

quadratischen Matrix D kann man einen paaren Graphen G folgendermaßen zuordnen. Wir lassen den Reihen von D gewisse Punkte

$$A_1, A_2, \cdots, A_n$$

und den Spalten ebenfalls n Punkte,

$$B_1, B_2, \cdots, B_n$$

als Punkte von G entsprechen und verbinden jeden Punkt A_i mit jedem Punkt B_k durch a_{ik} verschiedene Kanten. (Es kann a_{ik} auch Null sein.) Zwei A-Punkte und zwei B-Punkte werden untereinander niemals verbunden. Der durch D vollkommen bestimmte Graph G ist in der Tat ein paarer Graph, da auf jedem geschlossenen Kantenzug die Punkte A und B abwechselnd aufeinander folgen. Die Zahl der Kanten, die in A_i oder B_i zusammenlaufen ist gleich der Summe der i^{ten} Zeile, bzw. i^{ten} Spalte von D; G ist also dann und nur dann regulär, wenn jede Reihe und jede Spalte von D dieselbe Summe ergibt. — Da weder zwei A-, noch zwei B-Punkte untereinander unmittelbar verbunden sind, so können die Kanten eines jeden Faktors ersten Grades von G folgendermaßen bezeichnet werden:

$$A_1 B_{i_1}, A_2 B_{i_2}, \cdots, A_n B_{i_n}, \qquad (K_1)$$

wo

$$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$$

eine Permutation der Zahlen $1, 2, \cdots, n$ bedeutet. Dieses (K_1) ist dann und nur dann wirklich ein Faktor ersten Grades von G, wenn jede der Zahlen

$$a_{1i_1}, a_{2i_2}, \cdots, a_{ni_n},$$

d. h. das Produkt

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

von Null verschieden ist. Dieses Produkt ist aber nichts anderes, als — vom Vorzeichen abgesehen — ein allgemeines Glied von D. Da nun nach Satz A) jeder reguläre paare Graph einen Faktor ersten Grades besitzt, sind wir zu folgendem Determinantensatze geführt worden.

D) *Wenn in einer Determinante aus nicht negativen [ganzen] Zahlen jede Reihe und jede Spalte dieselbe positive Summe ergibt, so ist wenigstens ein Glied der Determinante von Null verschieden.*

Nur für den Fall, daß die Elemente ganze Zahlen sind, wurde dieser Satz bewiesen, man kann aber unschwer zeigen, daß er auch für rationale, sogar für reelle Elemente überhaupt richtig bleibt. Negative Elemente dürfen jedoch nicht zugelassen werden, wie es z. B. die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

zeigt; jede Reihensumme und Spaltensumme ist hier 1 und doch verschwinden alle sechs Glieder.

Wir wollen uns noch mit dem speziellen Fall beschäftigen, wo die nichtverschwindenden Elemente gleich 1 sind. Dann läßt sich das Übereinstimmen sämtlicher Reihen- und Spaltensummen auch so ausdrücken, daß jede Reihe und Spalte dieselbe Anzahl von Nullen enthält. In diesem Falle entsprechen verschiedenen Faktoren ersten Grades von G verschiedene Glieder von D. Da weiter das Verschwinden oder Nichtverschwinden der Determinantenglieder nicht vom Werte der nichtverschwindenden Elemente abhängt, ergibt Satz B) den folgenden Satz:

E) *Ist die Anzahl der nichtverschwindenden Elemente in jeder Reihe und Spalte einer Determinante genau gleich k, so gibt es wenigstens k nichtverschwindende Determinantenglieder.*

(Diese k Glieder können stets so gewählt werden, daß jedes nichtverschwindende Determinantenelement in einem und nur einem dieser Glieder enthalten sei.)

Die Frage, wann es genau k und wann es mehr als k nichtverschwindende Glieder gibt, ist für $k = 1$ trivial, und kann für $k = 2$ mit Hilfe des entsprechenden Graphes sofort entschieden werden. Schon für $k = 3$ führt aber diese Frage (d. h. die Frage, wie viel Faktoren ersten Grades ein paarer Graph dritten Grades besitzt) auf viel schwierigere Untersuchungen, die auch mit dem Vierfarbensatz in enger Beziehung zu sein scheinen.

Man kann die hier gefundenen Determinantensätze (bzw. den Satz B)) auch so interpretieren:

F) *Sind auf einer quadratischen Tafel mit n^2 Feldern kn Figuren so aufgestellt, daß jede Reihe und jede Spalte genau k Figuren enthält (dabei dürfen mehrere Figuren auf demselben Felde stehn), so entsteht diese Konfiguration stets durch Überlagerung von k solchen Konfigurationen, in denen jede Zeile und jede Spalte genau eine Figur enthält.*

Eine analoge Interpretation kann auch dem Satze C) gegeben werden.

§ 3.

Unendliche Graphen und Anwendung auf die Mengenlehre.

Die hier gegebenen Untersuchungen und Anwendungen der Theorie der Graphen setzen eigentlich gar keine geometrische Anschauung voraus. Anstatt eines Graphes hätten wir immer von einer Menge von Paaren

$$(G) \qquad AB, CD, AE, \cdots,$$

die Kanten genannt werden, sprechen können. Diese Paare werden aus gewissen Elementen $A, B, C, \cdots$, die Punkte genannt werden, gebildet. Nur muß man hier für die Elemente der Menge G verschiedene *Multiplizitäten* zulassen, dem Umstande entsprechend, daß dieselben zwei Punkte durch mehrere Kanten verbunden sein können. Alle unsere geometrischen Begriffe (zusammenhängender Graph, regulärer Graph, Grad und geschlossener Linienzug eines Graphes usw.) können rein abstrakt mit Hilfe der Menge G definiert werden, ohne daß wir uns auf geometrische Anschauung stützen müssen. Diese Bemerkung ist wichtig, da, wenn man sie einmal angenommen hat, nichts im Wege steht, die „Sprache der Graphen" auch dann zu benützen, wenn die Mengen $(A, B, C, \cdots)$ und $(AB, CD, AE, \cdots)$ nicht endlich, ja sogar von beliebig großer Mächtigkeit sind. Es wäre überflüssig für diese „unendlichen" Graphen die Regularität, die Gradzahl, die Faktoren, (geschlossene) Kantenzüge, usw. besonders zu definieren. Wir wiederholen nur, daß ein Graph dann zusammenhängend genannt wird, falls man von irgend einem seiner Punkte zu jedem anderen durch eine endliche Anzahl seiner Kanten gelangen kann*). Die Tatsache, daß *auch ein unendlicher Graph auf eindeutige Weise in zusammenhängende Teile zerfällt*, kann ohne jede geometrische Anschauung leicht bewiesen werden.

Indem man die Mächtigkeit der Menge der Punkte und der Menge der Kanten keiner Einschränkung unterwirft, verallgemeinert man natürlich in hohem Maße den Begriff des Graphes. Nur eine Einschränkung wollen wir auch weiterhin beibehalten: wir werden uns auch im Folgenden nur mit solchen Graphen beschäftigen, wo die Anzahl der Kanten, die im selben Punkte zusammenlaufen, unter einer endlichen Schranke bleibt. Dann werden wir außer den schon behandelten „endlichen" Graphen nur noch mit „abzählbaren" Graphen (so wollen wir die Graphen mit einer abzählbaren Menge von Kanten kurz bezeichnen) zu tun haben. Es gilt nämlich der Satz:

G) *Bleibt die Anzahl der Kanten die im selben Punkt zusammenlaufen für einen Graph G unter einer endlichen Schranke h, so zerfällt G in endliche und abzählbare Teile.***)

Es genügt zu zeigen, daß wenn G auch zusammenhängend ist, er endlich oder abzählbar sein muß. Dies ist aber klar. Durch *eine* Kante

*) Es ist vielleicht nicht überflüssig zu erwähnen, daß die Aussage „ein Punkt läßt sich aus einem anderen durch einen Weg aus unendlich vielen Kanten erreichen" keinen Sinn haben kann. Die Worte „durch eine endliche Anzahl seiner Kanten" können hier also durch die Worte „auf seinen Kanten" ersetzt werden. — Auch jeder geschlossene Kantenzug eines Graphes besteht *eo ipso* aus einer endlichen Anzahl von Kanten.

**) Es genügt schon, wenn man nur voraussetzt, daß in jedem Punkt eine endliche Anzahl von Kanten zusammenlaufen.

kann man aus irgend einem seiner Punkte P höchstens h Punkte erreichen, durch zwei höchstens h^2, $\cdots$ durch ν Kanten höchstens h^ν. Die Menge der Punkte, die man aus P durch eine endliche Zahl von Kanten erreichen kann, d. h. die Menge sämtlicher Punkte von G, ist also endlich oder abzählbar. Dann muß natürlich auch die Menge der Kanten endlich oder abzählbar sein.

Unter den unendlichen Graphen sind nach denjenigen ersten Grades (die aus Kanten ohne Zusammenhang bestehen) natürlich die Graphen zweiten Grades die einfachsten. Diese zerfallen in geschlossene Linien mit einer endlichen Kantenzahl und in beiderseits „ins Unendliche laufende" einfache Linien mit abzählbar unendlich vielen Kanten. Ist der Graph zweiten Grades ein paarer Graph, so ist offenbar jeder dieser Teile das Produkt zweier Faktoren ersten Grades, *also**) auch der ganze Graph. *Für den Grad 2 sind also die Sätze* A) *und* B) *auch für unendliche Graphen richtig.*

Um auch Beispiele unendlicher Graphen höheren Grades zu geben, soll noch erwähnt sein, daß das ebene quadratische Gitter einen unendlichen regulären Graph vierten Grades repräsentiert. Das analoge räumliche Gebilde ist ein unendlicher Graph sechsten Grades.

Unser Satz G) ist von Bedeutung, wenn man die Graphen in der Mengenlehre anwendet. Er läßt in manchen Fällen das Problem auf endliche und abzählbare Mengen reduzieren, wie sich das in dem Folgenden zeigen wird.

Wir wollen nämlich jetzt die Methode der Graphen auf den Beweis und auf eine Verallgemeinerung des folgenden Bernsteinschen Satzes**) anwenden***):

*) Dieser Schluß ist unberechtigt für den, der das Zermelosche *Auswahlprinzip* nicht anerkennt.

**) Diss Göttingen 1901, abgedruckt in Math. Ann. 61, S. 117. Der Bernsteinsche Beweis ist auch schon für den Fall $\nu = 2$ (eigentlich wird von Bernstein nur dieser Fall ausführlich dargestellt) recht kompliziert. (Die folgende Überlegung erledigt diesen Fall durch unmittelbare Anschauung.) Natürlich ist dieser Bernsteinsche Satz eine unmittelbare Folge des Zermeloschen *Wohlordnungssatzes*. Unser Beweis mag vielleicht doch auch für denjenigen Interesse besitzen, der die Zermeloschen Beweise annimmt, trotzdem wir das Zermelosche *Auswahlprinzip* keineswegs zu vermeiden versuchten. Wir benutzen aber nur die einfachsten Begriffe der Mengenlehre (Menge, Element, Abbildung) und der Ordnungsbegriff spielt in unserem Beweise keine Rolle.

***) Der Äquivalenzsatz der Mengenlehre, der ebenfalls von Bernstein zuerst bewiesen wurde, läßt sich mit Hilfe des Graphenbegriffes ebenfalls in recht anschaulicher Weise beweisen. In der Tat benutzt der einfachste Beweis dieses Satzes, den J. König gegeben hat (Comptes Rendus, Bd. 143, S. 110), im Grunde genommen, diesen Begriff. Da liegen jedoch die Verhältnisse so einfach (es würde nur von Graphen

Sind m und n beliebige Mächtigkeiten und ν eine endliche Zahl, so folgt aus

$$\nu m = \nu n$$

stets

$$m = n.$$

Haben die Mengen M und N die Mächtigkeiten m und n, so besagt die Gleichung $\nu m = \nu n$, daß diejenigen zwei Mengen, die aus M und N entstehen, wenn man alle Elemente durch ν verschiedene Elemente ersetzt, einander äquivalent sind. Ohne den Begriff der Mächtigkeit zu benutzen, kann also dieser Satz folgendermaßen formuliert werden:

H) *Stehen zwei Mengen in umkehrbarer $(1, \nu)$-Relation zueinander, so sind sie äquivalent.*

Wir wollen zunächst den Begriff der „umkehrbaren $(1, \nu)$ Relation" genau definieren. Wir sagen, daß M zu N in einer $(1, \nu)$-Relation steht, wenn jedem Elemente von M, ν Elemente von N entsprechen; diese brauchen jedoch nicht ν verschiedene Elemente von N zu sein, indem wir der Zuordnung eines M-Elementes zu einem N-Elemente eine *Multiplizität* zuordnen. Daß dem Elemente a von M aus N ν Elemente entsprechen, soll also stets so verstanden werden, daß, wenn dem M-Elemente a aus N die Elemente

$$b_1, b_2, \cdots, b_\mu \qquad (\mu \leq \nu)$$

entsprechen und diese Zuordnungen der Reihe nach die Multiplizitäten

$$s_1, s_2, \cdots, s_\mu$$

besitzen, dann für jedes Element a von M

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_\mu = \nu$$

ist. Eine solche Beziehung von M auf N wird nun *umkehrbar* genannt, wenn die Umkehrung dieser Relation, die die Elemente von N den Elementen von M zuordnet, ebenfalls eine $(1, \nu)$-Relation ist. Eine umkehrbare $(1, \nu)$-Relation hat also die Eigenschaft, daß, wenn eines der N-Elemente die dem Elemente a von M entsprechen, b ist, so ist eines der M-Elemente, die dem Elemente b von N entsprechen, a; und diese zwei Beziehungen haben dieselbe Multiplizität.

Dieser Umstand hat zur Folge, daß man die umkehrbare $(1, \nu)$-Relation zweier Mengen M und N (von der Mächtigkeit m bzw. n) oder — was dasselbe ist — die Richtigkeit der Beziehung $\nu m = \nu n$, in anschaulicher Weise durch einen paaren regulären Graph repräsentieren kann.

---

zweiten Grades die Rede sein), daß es als überflüssig erscheint, die Terminologie der Graphentheorie zu benutzen. — Der Versuch, die dort gegebene Methode meines Vaters auf den Beweis des oben erwähnten Bernsteinschen Satzes anzuwenden, führte mich zu den Untersuchungen, die in der vorliegenden Arbeit enthalten sind.

Die Elemente von M und N werden selbst die Punkte des zu definierenden Graphes sein; ein M-Punkt wird mit einem N-Punkt durch s Kanten verbunden, wo s die Multiplizität der (gegenseitigen) Beziehung dieser zwei Elemente bedeutet. Zwei M-Punkte, sowie zwei N-Punkte werden untereinander niemals verbunden. Der so entstehende Graph ist in der Tat ein paarer Graph, da auf jedem seiner geschlossenen Kantenzüge die Punkte M und N abwechselnd aufeinander folgen und er ist auch regulär, da in jedem seiner Punkte genau ν Kanten zusammenlaufen.

Nun zerfällt (nach Satz G)) der Graph G in endliche und abzählbare Teile. Sei G_1 ein beliebiger dieser Teile; seine Punkte sollen die Teilmengen M_1 und N_1 von M bzw. N bilden und es sei m_1 und n_1 die Mächtigkeit von M_1 und N_1. Dann ist

$$\nu m_1 = \nu n_1,$$

da sowohl die linke, wie die rechte Seite die Mächtigkeit der Menge der Kanten von G_1 bedeutet. Hier sind aber m_1 und n_1 endliche Zahlen oder $\aleph_0$ und da für diesen Fall der Bernsteinsche Satz trivial ist, so folgt hieraus

$$m_1 = n_1.$$

Denkt man sich dies für jeden Teil von G aufgeschrieben und addiert man, so ergibt sich

$$m = n,$$

womit der Bernsteinsche Satz vollkommen bewiesen ist.

Es entstehen aber große Schwierigkeiten, wenn man zur folgenden Verschärfung des Satzes H) (des Bernsteinschen Satzes) übergeht. Es sei hier gleich erwähnt, daß es uns nicht gelungen ist diesen Satz im allgemeinen zu beweisen.

I) *Stehen zwei Mengen in einer umkehrbaren $(1, \nu)$-Relation zueinander, so gibt es zwischen ihnen auch eine umkehrbar eindeutige Relation, die so beschaffen ist, daß sie nur solche Elemente einander zuordnet, die auch durch die gegebene $(1, \nu)$-Relation einander zugeordnet sind.*

In dem früher definierten Graph G äußert sich der Umstand, daß zwei Elemente durch die $(1, \nu)$-Relation einander entsprechen, dadurch, daß die entsprechenden zwei Punkte durch eine Kante verbunden sind. Der Satz I) besagt also einfach, daß G einen Faktor ersten Grades besitzt; er würde also bewiesen sein, wenn man zeigen könnte, *daß der Satz A) auch für unendliche Graphen richtig ist.* (Nach Satz G) würde es genügen Satz A) nur noch für abzählbare Graphen zu beweisen.) — Auch umgekehrt folgt aus I) der Satz A) für unendliche Graphen. Denn jeder paare Graph ν^{ten} Grades kann als ein solcher Graph entstanden gedacht werden, der die umkehrbare $(1, \nu)$-Relation zweier Mengen repräsentiert. Dies folgt daraus, daß — wie wir dies für endliche Graphen schon ausgeführt haben — auch im Falle eines unendlichen paaren Graphes seine Punkte so in zwei Gruppen geteilt werden können, daß nur Punkte verschiedener Gruppen durch eine Kante verbunden sind*).

Hierdurch hat sich Satz I) mit dem für endliche und unendliche Graphen formulierten Satz A) äquivalent erwiesen. Auch den Sätzen B) und C) sind diese Sätze äquivalent. Denn nicht nur B) ist eine Folge von C) und A) von B), was für unendliche Graphen ebenso ersichtlich ist, wie für endliche, sondern es gilt auch umgekehrt, daß B) aus A) und C) aus B) folgt. Nur letztere Behauptung bedarf eines besonderen Beweises. Wir beweisen also den Satz:

Der Satz C) *ist eine Folge des Satzes* B).

Es sei G ein beliebiger paarer Graph, der so beschaffen ist, daß in jedem seiner Punkte höchstens k Kanten zusammenlaufen. Wir ergänzen G folgendermaßen zu einem neuen Graph H. Wir nehmen den Punkten von G entsprechend je einen neuen Punkt an und verbinden zwei neue Punkte mit soviel Kanten untereinander, als die entsprechenden zwei Punkte in G verbunden sind. Außerdem verbinden wir jeden Punkt von G mit dem ihm entsprechenden neuen Punkt durch $k-\alpha$ Kanten, wo $\alpha(\leqq k)$ die Zahl der Kanten bedeutet, die in G nach diesem G-Punkte laufen. Andere Punkte und Kanten werden nicht eingeführt. Der so entstandene Graph H ist regulär, da in jedem seiner Punkte $\alpha+(k-\alpha)=k$ Kanten zusammenlaufen. Auch ist H ein paarer Graph. Dies sieht man folgendermaßen ein. Da G ein paarer Graph ist, lassen sich seine Punkte so in zwei Gruppen I und II einteilen, daß jede Kante von G nur Punkte verschiedener Gruppen verbindet. Teilt man nun die neuen Punkte in I oder II ein, je nachdem der entsprechende G-Punkt zu II oder I gehört, so verbinden auch die Kanten von H nur Punkte verschiedener Gruppen (I und II). — Nimmt man also den Satz B) an, so zerfällt H in k Faktoren ersten Grades. Teilt man je einen von k Indizes den Kanten von G zu, je nachdem sie dem einen oder anderen dieser Faktoren angehören, so entspricht diese Verteilung der Indizes dem Satze C).

Wir wollen jetzt endlich noch zeigen, daß es genügen würde die Sätze A), B), C) und I), die sich einander als äquivalent erwiesen haben, für den Fall zu beweisen, daß die Gradzahl in A) und B) (bzw. die Zahl k in C) und die Zahl ν in I)) eine Primzahl ist. Dies folgt für den Satz A), also auch für die übrigen drei, unmittelbar aus dem Satze:

K) *Wenn jeder paare Graph μ^{ten} Grades und jeder paare Graph ν^{ten} Grades einen Faktor ersten Grades besitzt, so hat auch jeder paare Graph $\mu\nu^{\text{ten}}$ Grades einen solchen Faktor.*

*) Zerfällt der Graph in unendlich viele Teile, so braucht man zu diesem Schluß wieder das Zermelosche *Auswahlprinzip*.

Nehmen wir die Voraussetzungen dieses Satzes an und es sei P ein beliebiger Punkt eines beliebigen paaren Graphes G, $\mu\nu^{\text{ten}}$ Grades. Wir ersetzen P durch μ Punkte $P_1, P_2, \cdots, P_\mu$ und führen die $\mu\nu$ Kanten, die in G nach P laufen anstatt von P nach den Punkten P_i, und zwar so (sonst in beliebiger Weise), daß in jedem P_i $(i=1,2,\cdots,\mu)$ genau ν dieser $\mu\nu$ Kanten zusammenlaufen sollen. Führt man dies für jeden Punkt von G aus, so erhält man einen Graph G_ν, ν^{ten} Grades; und dies ist ebenfalls ein paarer Graph, da jedem geschlossenen Kantenzuge von G_ν ein geschlossener Kantenzug von G mit derselben Kantenzahl entspricht. Nach unseren Voraussetzungen hat also G_ν einen Faktor ersten Grades G_1. Vereinigt man nun wieder die Punkte $P_1, P_2, \cdots, P_\mu$ zu je einem Punkte P, wodurch man aus G_ν den ursprünglichen Graph G zurückerhält, so geht G_1 in einen Faktor G_μ μ^{ten} Grades von G über. Als ein Teil von G ist auch dieser G_μ ein paarer Graph und hat also, nach unseren Voraussetzungen, einen Faktor ersten Grades. Dies ist natürlich auch ein Faktor ersten Grades von G, womit Satz K) bewiesen ist.

[Indem man den ersten Teil dieses Beweises fast wörtlich wiederholt, ergibt sich auch das folgende, teilweise allgemeinere Resultat:

Besitzt jeder paare Graph ν^{ten} Grades einen Faktor k^{ten} Grades, so besitzt auch jeder paare Graph $\mu\nu^{\text{ten}}$ Grades einen Faktor μk^{ten} Grades.]

Für die Gradzahl 2 haben wir die Sätze A) und B) auch für unendliche Graphen bewiesen. Es folgt also aus K) daß *die Sätze* A), B), C) *und* I) *sicherlich richtig sind, wenn die Gradzahl* (bzw. die Zahl k in C) und die Zahl ν in I)) *eine Potenz von* 2 *ist*. Für eine beliebige Gradzahl (ja sogar schon für die Gradzahl 3 scheinen jedoch unsere Methoden nicht auszureichen, trotzdem man, wie wir sahen, sich auf abzählbare Graphen beschränken kann. Die vollständige Induktion, durch die wir den Satz C) für endliche Graphen bewiesen haben, versagt sofort, wenn der Graph unendlich viele Kanten hat.

Die Resultate dieser Arbeit wurden am 15. November 1915 der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt.

Budapest, Oktober 1915.

1 SOBRE GRÁFICAS Y SU APLICACIONES EN LA TEORÍA DE LOS DETERMINANTES Y LA TEORÍA DE CONJUNTOS

por

Dénes König, Budapest

El trabajo siguiente se ocupa de problemas del *analysis situs*, de la teoría de gráficas, de los determinantes y de la teoría de conjuntos. el concepto de *gráfica* es el eslabón, a través del cual estos problemas están interrelacionados. A través de la evidencia geométrica del método de las gráficas, aquí se plantean también algunas soluciones a cuestiones actuales a saber: se mostrará la equivalencia entre las dos formas de plantear el problema.

§1.

Gráficas[1]

Dado un número finito de puntos, se pueden elegir ciertos pares y unirlos por medio de una o varias aristas (finitas). En general, una figura que se forma de esta manera se define como una *gráfica*.

Una gráfica se llama *conexa* (en sí misma) en caso de que sus aristas[2] se puedan extender desde cualquiera de sus puntos, hasta cualquier otro. Si la gráfica no es conexa, entonces evidentemente se descompondrá en *partes conexas*. En lo trivial de esta afirmación reside la ventaja de las aplicaciones (algebraicas) de las gráficas. Si de cada punto de una gráfica parte la misma cantidad de aristas, entonces la gráfica se llama *regular* y este número constante se define como el *grado* de la gráfica regular.

Un importante papel desempeñan las llamadas *gráficas pares*. Una gráfica se define así en el caso en que cada una de las trayectorias cerradas que

[1] Petersen: *Die theorie der regulären Graphs*, Acta mathematica, Tomo 15 (1891), pp. 193-220.

[2] Sólo los puntos supuestamente originales (vértices) se conocerán como "puntos" de la gráfica.

PAGINACION VARIA

COMPLETA LA INFORMACION

1 SOBRE GRÁFICAS Y SU APLICACIONES EN LA TEORÍA DE LOS DETERMINANTES Y LA TEORÍA DE CONJUNTOS

por

Dénes König, Budapest

El trabajo siguiente se ocupa de problemas del *analysis situs*, de la teoría de gráficas, de los determinantes y de la teoría de conjuntos, el concepto de *gráfica* es el eslabón, a través del cual estos problemas están interrelacionados. A través de la evidencia geométrica del método de las gráficas, aquí se plantean también algunas soluciones a cuestiones actuales a saber: se mostrará la equivalencia entre las dos formas de plantear el problema.

§1.

Gráficas[1]

Dado un número finito de puntos, se pueden elegir ciertos pares y unirlos por medio de una o varias aristas (finitas). En general, una figura que se forma de esta manera se define como una *gráfica*.

Una gráfica se llama *conexa* (en sí misma) en caso de que sus aristas[2]se puedan extender desde cualquiera de sus puntos, hasta cualquier otro. Si la gráfica no es conexa, entonces evidentemente se descompondrá en *partes conexas*. En lo trivial de esta afirmación reside la ventaja de las aplicaciones (algebraicas) de las gráficas. Si de cada punto de una gráfica parte la misma cantidad de aristas, entonces la gráfica se llama *regular* y este número constante se define como el *grado* de la gráfica regular.

Un importante papel desempeñan las llamadas *gráficas pares*. Una gráfica se define así en el caso en que cada una de las trayectorias cerradas que

---

[1]Petersen: *Die theorie der regulären Graphs*, Acta mathematica, Tomo 15 (1891), pp. 193-220.

[2]Sólo los puntos supuestamente originales (vértices) se conocerán como "puntos" de la gráfica

puedan dibujarse, desde sus aristas, contenga ya un número fijo de aristas. Por ejemplo, el sistema de aristas del cubo.

Una gráfica es, entonces y sólo entonces, una gráfica par, si se pueden dividir sus puntos en dos partes, unidas solamente a través de los puntos de cada una de las indivisibles (por medio de una arista).

En efecto, si es posible una división de grupos, entonces los puntos pertenecen a cada arista de la trayectoria cerrada *periódica*, la cual pertenece a uno u otro grupo. Cada vértice de la trayectoria cerrada debe contener también un número par de aristas. A la inversa: si se ordenan los puntos en una determinada trayectoria dirigida, alternando uno y otro grupo, entonces se puede llegar a una contradicción, en el caso de que sea hallada una trayectoria cerrada que contenga un número n impar de aristas. (Esto se cumple también para las gráficas disconexas: solamente que la división de los puntos, en grupos, no es especialmente evidente).

De esta forma, se pueden definir las gráficas "disconexas" y las gráficas "pares" simétricas, unas respecto a la otras, tal como se puede caracterizar a las gráficas "disconexas" por la misma razón: sus puntos se pueden dividir en dos grupos de tal modo, que dos puntos son del mismo grupo sólo si se unen inmediatamente, unos con otros.

La totalidad G_k de tales aristas de la gráfica G, se denomina como *factor k-ésimo* grado *de* G, si de cada punto de G *salen k aristas*. Cuando de cada punto de G parten las aristas de G_k. Un factor de *k-ésimo* grado es una gráfica regular de *k-ésimo* grado, si sus puntos coinciden con los puntos de la gráfica original. Ciertas aristas de G forman entonces un factor de *primer grado*, si cada punto de G aparece una sola vez como punto final de estas aristas. Si G es regular y de *n-ésimo* grado, entonces las aristas que no están en un *k-ésimo* grado forman un factor de *(n-k)-ésimo* grado, G_{n-k}. En ese caso se escribe, según Petersen:

$$G = G_k G_{n-k}.$$

De esta forma, se define la descomposición de una gráfica en más de dos factores. La suma del grado de los factores siempre es igual al grado de la gráfica original. En lo sucesivo, trataremos especialmente de la división de una gráfica en factores de primer grado.

Cada gráfica de segundo grado consta de líneas cerradas simples (con dos puntos). Como se puede ver, ésta posee un factor de primer grado cuando, y sólo cuando, todas estas líneas cerradas contengan un número exacto de aristas.[3]

Como una generalización de estos hechos, demostraremos el siguiente teorema:

A) *Cada gráfica regular par posee un factor de primer grado.*

Este teorema es consecuencia inmediata del siguiente (el cual, sin embargo, aparenta ser más citado.[4]

B) *Cada gráfica regular de k-ésimo grado se descompone en factores de primer grado.*

Este teorema es una consecuencia del siguiente:

C) *Si en cada punto de una gráfica par convergen, a lo más, k aristas, entonces se pueden ordenar las aristas de la gráfica cada índice k de tal forma, que dos aristas, que convergen en un punto, siempre se obtengan índices diferentes.*

El teorema B) es, de hecho, consecuencia inmediata de este teorema, ya que en el caso de una gráfica regular de *k-ésimo* grado, las aristas con los mismos índices forman un factor de primer grado.

Para la demostración del teorema C) queremos aplicar el método de la inducción completa, aunque éste, por una restricción, falla para B). Pero el teorema general C) va directamente hacia el objetivo. Si la cantidad de aristas es $\leq k$, entonces el teorema naturalmente es verdadero. Supongamos, también, que es siempre verdadero si este número es $< N$ y lo probamos para la gráfica G, con N aristas.

Omítase de G alguna arista, e. Entonces se origina (también par, naturalmente) una gráfica G' cuyas aristas, con los k índices del teorema C), de manera correspondiente pueden ser omitidos. Suponemos estos índices fijos para las aristas de G' y entonces vemos, primeramente posible, que algún índice: o bien, aparece en A (es decir, en una arista que se sale de A): o

[3] Petersen, l. c., p.195

[4] Si se supone que el teorema A) es verdadero, entonces la gráfica G_k de *k-ésimo* grado tiene un factor de primer grado G_1 y es $G = G_1 G_{k-1}$ de la misma forma $G_{k-1} = G_1' G_{k-2}, G_{k-2} = G_1 G_1' G_1'' \cdots G_1^{(k-1)}$, donde factores de primer G_1', G_1'' son factores de primer grado. Al final, tenemos que $G_k = G_1 G_1' G_1'' \cdots G_1^{(k-1)}$ se factoriza con factores de primer grado. Para un número par k se sigue el teorema B), inmediatamente de un teorema de Petersen (l.c. p.200). No es difícil tampoco demostrar el caso de un número impar. Nuestro teorema, que conduce a resultados generales, sencillamente hace innecesaria la investigación de dos casos.

bien, regresa a B. En este caso, podemos ordenar el índice de una arista e y nuestra meta está alcanzada.

Nos podemos restringir, por tanto, al *segundo* caso: un índice (por ejemplo "1") que falta en B. Puede darse tal caso, puesto que en G' hay, a lo más, $k-1$ aristas desde B y, asimismo, también desde A hasta A -). Sea después "2" un índice que no aparece en A y sea ahora AA_1 la arista con el índice "1". Eventualmente, existe una arista A_1A_2, con índice "2"; y entonces, quizá, existe una arista A_2A_3, con índice "1"; y una arista A_3A_4, con índice "2", etc. Formemos, con estas "alternadas", la trayectoria [Weg] $AA_1A_2A_3\cdots$ tan larga como sea posible y hagámosla bien definida, después de elegir los índices "1" y "2".

Con esta trayectoria se puede alcanzar un punto dos veces, pues sería A_i el primer punto por el que ya se pasó una vez. Entonces, en A_i deberían aparecer tres aristas, con índices "1" o "2" . Pero también, desde A, no se puede regresar, puesto que allí "2" no aparece en absoluto y "1" (con la arista AA_1) ya se utilizó. Finalmente, no se puede llegar mediante esa trayectoria desde A hacia B, pues esto podría suceder sólo con una de las aristas de índice "2" ("1" aparece en B) y, entonces, contendría a la trayectoria desde A hacia B un número par de aristas. Con la arista omitida e, en total sería esta trayectoria (en contraposición con nuestra suposición) una trayectoria cerrada de G, con un número impar de aristas.

$AA_1A_2\cdots A_r$ es, por tanto, a ambos lados una trayectoria abierta por ambos extremos. Por otra parte, la trayectoria no contiene al punto B, cuyas aristas alternan los índices "1" y "2" sólo sustituyendo los índices "1" y "2" de estas aristas, sin cambiar los índices de las aristas ni la separación de los índices, según el cambio de las hipótesis. Se ve esto inmediatamente para el primer punto A, de donde no sale una arista con el índice "2" para el punto interior A_i; ni tampoco para el punto final A_r , de donde ninguna arista puede salir con el índice "1" o "2", puesto que de lo contrario nuestra trayectoria no podría terminar en A.

Así hemos llegado a que el índice "1" tampoco aparece en A, de modo que entonces la arista e, saliente, puede agregarse.

Con ello se demuestra el teorema C) y, por tanto, también los teoremas A) y B).

Antes de pasar ahora a las aplicaciones de estos estudios, en la teoría de matrices y la teoría de conjuntos, queremos mencionar que nuestro teorema B) está en interrelación estrecha con un problema (hasta hoy no demostrado) de coloración de mapas, el *teorema de los cuatro colores:* "Se pueden ordenar los países en un plano siempre mediante cuatro colores de tal manera, que dos países con frontera común tengan colores diferentes". Se puede ver fácilmente que se puede distinguir el caso donde las fronteras del mapa dibujan una gráfica regular de tercer grado y, entonces, el teorema de los cuatro colores es equivalente a la proposición de Tait,[5] que dice que una gráfica tal siempre se descompone en factores de primer grado.

Naturalmente que no se necesita descomponer cada gráfica de tercer grado en tres factores, pues una gráfica sólo podrá considerarse como un sistema de fronteras de un mapa si se cumplen las siguientes dos propiedades: 1) puede mostrarse entonces, del planisferio, que con ello no puede aparecer ningún punto nuevo de intersección; y 2) cada una de sus aristas pertenece a una trayectoria cerrada, sin puntos dobles. Sin estas restricciones, no es válida la proposición de Tait (Tait lo ha expresado sin estas restricciones y ha aclarado lo pertinente),[6] como puede mostrarse por medio de dos ejemplos.[7] Pero aunque esta gráfica sea par, entonces tampoco es verdadero el teorema sin estas restricciones. De todas maneras, esto no implica nada nuevo para el problema del mapa coloreado, ya que en este caso, como lo ha demostrado Kempe,[8] no se necesitan cuatro colores sino tres. Para el problema general, sería seguramente un paso hacia adelante si, en un sentido más simple, se tiene éxito en caracterizar las gráficas de la propiedad 1 a través de las identidades (combinatorias) internas de la gráfica. Aquí parece que jugaría un importante papel el teorema del poliedro euleriano."[9]

§2.

[5] Estas investigaciones fueron reunidas por Wernicke, entre otros (*Math. Ann.* 58, p. 413).

[6] *Philosophical Magazine* (5), T. 17, p 30

[7] Uno de estos ejemplos es una curiosa gráfica de Petersen (*Intermédiaire de Mathématiciens*, T. 5, p. 225) y, el otro, una figura (de tercer grado) de Sylvester, reproducido como figura 11 en el ya varias veces mencionado trabajo de Petersen.

[8] *Am. Journ. of Math.*, T. II, p.193

[9] Esto lo demostré en dos trabajos en lengua húngara (*Mathematikai és természettudományi Ertesítő* T. 29).

1.1 APLICACIONES DE LOS DETERMINANTES

Las gráficas pares pueden ser llevadas a una relación estrecha con los determinantes, siempre que contengan elementos enteros o reales que dependen del valor absoluto de sus términos y son independientes de los signos, los que son agregados a los elementos. Independientemente de los signos, queremos ocuparnos de tales determinantes

$$D = |a_{ik}|_{i,k=1,2,\ldots,n}$$

donde los elementos a_{ik} son números enteros no negativos. De la matriz cuadrada D puede obtenerse una gráfica G, en la siguiente forma: los renglones de D, como n puntos, los consideramos como

$$A_1, A_2, \cdots, A_n$$

y las columnas, también como n puntos,

$$B_1, B_2, \cdots, B_n.$$

Estos puntos serán los puntos de G. Luego unimos cada punto A_i con cada punto B_k, por medio de diferentes aristas a_{ik} (a_{ik} puede ser nulo.) Dos puntos de A o dos puntos de B nunca se unen uno con otro. La gráfica determinada por medio de D es, de hecho, una gráfica par, pues en cada trayectoria cerrada los puntos A y B se alternan. El número de aristas que converge a A_i o B_k es igual a la suma del *i-ésimo* renglón; es decir, la *k-ésima* columna de D. G es, entonces y sólo entonces, regular, si cada renglón y cada columna de D produce esta misma suma. Como ni los puntos A ni los B se combinan directamente entre sí, entonces puede demostrarse que las aristas de cada uno de los factores de primer grado de G aparecen combinadas como sigue:

$$A_1 B_{i_1}, A_2 B_{i_2}, \cdots, A_n B_{i_n},$$

$$(K_i),$$

donde

$$(i_1, i_2, \ldots, i_n)$$

significa una permutación de los números $1,2,\ldots,n$. Esta (K_i) es, entonces, en realidad un factor de primer grado de G, si cada uno de los números

$$a_{1i_1}, a_{2i_2}, \cdots, a_{1i_n}$$

es decir, el producto

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}.$$

es distinto de cero. De los signos ya vistos, este producto no es otro que un término general de D. Como por el teorema A) cada gráfica regular tiene un factor de primer grado, obtenemos ahora los siguientes teoremas D), E) y F) sobre determinantes:

D) *Si en un determinante de números (enteros) no negativos, cada renglón y cada columna tiene una suma positiva, entonces es diferente de cero un término del determinante.*

Sólo en el caso en que los elementos sean enteros se podría probar este teorema, pero puede no ser difícil mostrar que es verdadero también para números racionales; o incluso, para números reales. No se permiten elementos negativos, como lo muestra el determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Cada suma de renglón y de columna aquí vale 1 y, aún así, se anulan todos los seis elementos.

Ahoras queremos ocuparnos del caso especial donde los elementos no negativos son iguales a 1. Entonces también se puede expresar, mediante la igualdad de las sumas de columnas y de renglones, que cada renglón y cada columna contiene el mismo número de ceros. En este caso, corresponden diferentes términos particulares de primer grado de G diferentes de D. Como la no nulidad y la nulidad de los términos del determinante siguen sin depender de los valores de los elementos no nulos, se desprende del teorema B) el siguiente teorema:

E) *Si la cantidad de elementos no nulos, en cada renglón y cada columna de un determinante, es exactamente igual a k, entonces al menos hay k elementos no nulos del determinante.*

(Estos elementos podrían elegirse de tal manera, que cada término del determinante no nulo esté contenido en uno, y sólo en uno, de estos términos.)

El problema es trivial para $k = 1$, cuando hay exactamente k y cuando hay más de k términos no nulos, mientras que se puede decidir rápidamente para $k = 2$, con ayuda de la correspondiente gráfica. Para $k = 3$ este problema lleva (es decir, el problema de cuántos factores de primer grado tiene una gráfica par de tercer grado) numerosas y arduas investigaciones, en las cuales aparece el teorema de los cuatro colores.

Se puede interpretar también el teorema del determinante (en particular, el teorema B encontrado aquí) como:

F) *Si en una cuadrícula con dos campos se colocan kn figuras, de modo que cada renglón y cada columna contengan k figuras, entonces pueden ponerse m (figuras en el mismo campo). Entonces esta configuración se obtiene por medio de la superposición de k de tales configuraciones, en la cual cada renglón y cada columna contiene una figura.*

Una interpretación análoga puede darse al teorema C).

1.2 GRÁFICAS INFINITAS Y APLICACIONES A LA TEORÍA DE CONJUNTOS

La investigación dada aquí y la aplicación de la teoría de gráficas no presupone ninguna idea geométrica. En lugar de una gráfica, podemos hablar de un conjunto de pares

(G.)

AB; CD; AE; $\cdots$, denominados aristas. Estos pares se construyen a partir de ciertos elementos A, B, C, ... llamados puntos. Aquí se permite las *multiplicidades* de los elementos del conjunto G y, en ciertas circunstancias, dos puntos pueden estar asociados por medio de más aristas. Todos nuestros conceptos geométricos (gráfica correspondiente; gráfica regular; grado y trayectoria cerrada de una gráfica; etc.) pueden definirse en forma abstracta con ayuda del conjunto G, sin que debamos apoyarnos en conceptos gemétricos. Este comentario es importante, puesto que podemos considerar el "lenguaje de gráficas" para ser utilizado en aquellos casos en que los conjuntos (A, B, C, ...) y (AB, CD, AE,...) no sean finitos, incluso si son de cualquier potencia mayor. Parece especialmente superfluo volver a definir, para estas gráficas "infinitas": la regularidad; el grado; los factores; las trayectorias (cerradas); etc. Repetimos: una gráfica solamente se llama conexa en caso de que se pueda llegar, desde alguno de sus puntos, a cualquier otro, por medio de un número finito de sus aristas.[10] El hecho de que también *una gráfica infinita se descompone de manera clara en partes conexas, puede* demostrarse fácilmente sin ideas geométricas.

Mientras no se sujete la potencia del conjunto de vértices y el conjunto de aristas a alguna restricción, se generaliza aún más y de manera natural el concepto de gráfica. Solamente queremos advertir que en adelante nos ocuparemos solamente de aquellas gráficas donde el número de aristas que convergen al mismo punto tiene una cota finita, en cuyo caso no sólo nos referimos a las gráficas "finitas", sino también a las gráficas "numerables", con lo que queremos describir brevemente a las gráficas por medio de un conjunto numerable de aristas. Se tiene el siguiente teorema:

G) *Si el número de aristas que convergen al mismo punto, para una gráfica G, tiene una cota h finita, entonces G se descompone en partes numerables y finitas.*[11]

Es suficiente mostrar que, si G es conexa, debe ser finita o numerable. Pero esto es claro. Por medio de *una* arista, se puede ir desde uno de sus puntos P, a lo más a h puntos; y de ahí, a lo más, a h^2, ...y de ahí, mediante ν aristas, a lo más a h^ν. El conjunto de puntos que se pueden alcanzar desde P, por medio de un número finito de vértices (es decir, el conjunto total de puntos de G), es también finito o numerable. Entonces, es natural que el conjunto total de aristas sea finito o numerable. Entre las gráficas infinitas, después de las de primer grado (cuyas aristas no tienen relación), naturalmente las gráficas de segundo grado son las más sencillas. Éstas se dividen en trayectorias cerradas, con un número finito de aristas, y en trayectorias sencillas ("en corrientes infinitas"), con un número infinito de aristas. Si la gráfica de segundo grado es una gráfica par, entonces es evidente que cada una de estas partes del producto tiene dos factores de primer grado y, por tanto,[12] esto ocurrirá para la gráfica total. *Para el grado 2, también se cumplen los teoremas A) y B) para gráficas infinitas.*

---

[10] Tal vez no sea superfluo mencionar que la afirmación: "un punto puede alcanzarse de uno hasta otro, por medio de una trayectoria de infinitas aristas", puede no tener sentido. La frase "por medio de un número finito de sus aristas" puede ser sustituida por la frase "en sus propias aristas". Además, cada trayectoria cerrada en una gráfica se refiere *eo ipso* a un número finito de aristas.

[11] Es suficiente, ahora, suponer que en cada punto [vértice; N. del T.] converge un número finito de aristas

[12] Este término no es válido si no se acepta el Axioma de Elección de Zermelo.

Para dar ejemplos de gráficas infinitas de grado superior, debe mencionarse que una red cuadrada plana representa una gráfica regular de cuarto grado. La figura espacial análoga es una gráfica infinita de sexto grado.

Nuestro teorema G) tiene un significado particular, si se emplea la teoría de las gráficas en la teoría de conjuntos. El problema se puede reducir, en algunos casos, al problema de los conjuntos numerables o infinitos, como se muestra en lo que viene a continuación.

Queremos emplear[13] el método de las gráficas en la demostración y en la generalización del siguiente teorema de Bernstein.[14]

Si para cualesquiera potencias m y n y ν un número finito, entonces se sigue que

$$\nu m = \nu n$$

siempre que

$$m = n.$$

Si tenemos que los conjuntos M y N tienen las potencias m y n, entonces la ecuación $\nu m = \nu n$ significa que aquellos dos conjuntos, los que se originan de M y N al sustituir todos los elementos por medio de ν elementos diferentes, son entonces equivalentes unos a otros. Sin usar el concepto de potencia, por tanto se puede formular este teorema, de la siguiente manera:

H) *Si hay dos conjuntos en $(1, \nu)$-relación recíproca, entonces son equivalentes.*

[13] Tesis doctoral (Göttingen, 1901 impreso en *Math. Ann.* 61, p 117). La demostración de Bernstein es complicada, incluso para el caso $\nu = 2$. (Bernstein solamente indica este caso detallado. La siguiente reflexión arregla este caso, por medio de una idea inmediata.) Naturalmente este teorema de Bernstein es una consecuencia inmediata del *teorema del buen orden de Zermelo*. Nuestra demostración podía servir también para aquel propósito suponiendo la demostración de Zermelo, a pesar de que no buscamos utilizar el *Axioma de elección* de este autor. Utilizamos solamente los conceptos más básicos de la teoría de conjuntos (conjunto, elemento, función), en donde el concepto de orden no juega ningún papel en nuestra demostración.

[14] El teorema de equivalencia de conjuntos (que se demostró antes que el de Bernstein) se puede demostrar con ayuda de los conceptos de gráficas igualmente de manera muy clara. De hecho, utiliza la demostración más sencilla de este teorema, que J. König ha dado (*Comptes Rendus*, T. 143, p. 110). En el fondo, tomó este concepto y, como los argumentos son sencillos (serían sólo gráficas de segundo grado), parece superfluo utilizar la terminología de la teoría de gráficas. La demostración, según el método dado por mi padre en la demostración citada arriba, que utiliza el teorema de Bernstein, me llevó a las investigaciones que están contenidas en el trabajo.

Queremos primeramente definir exactamente el concepto de "*(1, ν)-relación recíproca*". Decimos que M está en *(1,ν)-relación recíproca* con N, si a cada elemento de M corresponden ν elementos de N; éstos necesitan ser ν elementos distintos de N, mientras podamos atribuir una multiplicidad al orden de los elementos de M, con los elementos de N. El que el elemento a de M corresponda con ν elementos, a partir de N, puede enunciarse así: al elemento a de M, si corresponden los elementos de N

$$b_1, b_2, \cdots, b_\mu$$

$$(\mu \leq \nu)$$

y este ordenamiento corresponde a la multiplicidad

$$s_1, s_2, \cdots, s_\mu,$$

entonces, para cada elemento a de M,

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_\mu = \nu.$$

Una relación tal de M se llama *invertible* cuando la inversa de esta relación, donde los elementos de N se corresponden con los elementos de M, es asimismo una $(1, \nu)$ relación. Una $(1, \nu)$ relación invertible tiene, por tanto, la propiedad de que cuando uno de los elementos de N, digamos b, corresponde al elemento a de M, entonces a es uno de los elementos de M que corresponden al elemento b de N, por lo que estas dos relaciones tienen la misma multiplicidad. Esto tiene la consecuencia de que la $(1, \nu)$ relación invertible entre dos conjuntos, M y N (de potencias m y n respectivamente), o lo que es lo mismo, la autenticidad de la relación $\nu m = \nu n$, en modo claro se puede representar por medio de un par de gráficas regulares.

Los elementos de M y N son, ellos mismos, los puntos de la gráfica definida. Un punto de M se pone en correspondencia con un N-punto por medio de s aristas, donde s indica la multiplicidad de la relación (inversa) de estos dos elementos. Por otra parte, dos puntos de M nunca pueden estar unidos. La gráfica así obtenida es de hecho una gráfica par, ya que en cada una de sus trayectorias cerradas los puntos M y N (siguen uno a otro, recíprocamente) y también es una gráfica regular, ya que en cada uno de sus puntos convergen exactamente ν aristas.

Ahora la gráfica G se descompone (según el teorema G)) en partes finitas y numerables. Sea G_1 una parte cualquiera de esas partes; sus puntos deben formar los subconjuntos M_1 y N_1, respectivamente de M y N, y sean m_1 y m_2 las potencias de M_1 y N_1. Entonces

$$\nu m_1 = \nu n_1$$

donde el lado izquierdo y el lado derecho indican la potencia del conjunto de aristas de G_1.[15] Aquí, m_1 y n_1 son números finitos o $\aleph_0$ y entonces, como para este caso es trivial el teorema de Bernstein, de aquí que

$$m_1 = n_1$$

con lo que el teorema de Bernstein queda totalmente demostrado.

Sin embargo, se origina una gran dificultad si, como consecuencia del teorema H), (el teorema de Bernstein) se transforma. Se ha mencionado aquí, igualmente, que no nos interesa este teorema en general.

I) *Si se tienen dos conjuntos en una $(1, \nu)$ relación recíproca reversible, entonces resulta, entre ellos, también una relación unívoca uno a otro, la cual se obtiene por medio de la relación $(1, \nu)$ dada.*

Con la definición anterior, la gráfica G expresa la circunstancia de que 2 elementos correspondientes, por medio de la $(1, \nu)$ relación, quedan unidos por medio de una arista. El teorema I) significa también, sencillamente, que G tiene un factor de primer grado. Quedaría también demostrado, si se pudiera demostrar, *que el teorema A) también es verdadero para gráficas infinitas.* (Según la proposición G, sería suficiente el teorema A solamente para demostrar el caso de las gráficas numerables). Recíprocamente, también se deduce de I) el teorema A), para gráficas infinitas. En ese caso, cada par de gráficas de *ν-ésimo* grado puede ser pensada como una gráfica formada de esta forma, la cual representa la $(1, \nu)$ relación reversible de dos conjuntos. Se deduce de allí que -y esto ya lo desarrollamos para gráficas finitas-, también para el caso de una gráfica par infinita, sus puntos pueden ser divididos en dos grupos, donde los puntos de grupos distintos se unen por medio de una arista.[16]

---

[15]Es decir, la *longitud* de la *trayectoria*.(N.del T.)

[16]Si la gráfica se descompone en muchas partes infinitas, entonces nuevamente se necesita, en esta conclusión, el *principio de elección de Zermelo*.

Por esta razón, se demostró que son equivalentes el teorema I), formulado para gráficas finitas e infinitas, y el teorema A). Pero también los teoremas B) y C) son equivalentes a este teorema, pues no sólo B) es consecuencia de C), así como A) de B), lo que es evidente para una gráfica finita, sino que también para gráficas infinitas el teorema B) es consecuencia de A) y C) es consecuencia de B). Sólo la última afirmación necesita de una demostración especial. Por tanto, demostramos el teorema:

El teorema C) es una consecuencia del teorema B).

Sea G una gráfica par cualquiera dada, tal, que en cada uno de sus puntos convergen, a lo más, k aristas. Completamos G en una nueva gráfica H, de la manera siguiente: tomamos los puntos de G correspondientes a un nuevo punto, y unimos dos nuevos puntos con tantas aristas como aristas unan a puntos en G. Además, unimos cada punto de G con el correspondiente punto nuevo por medio de $k - \sigma$ aristas, donde σ ($\leq k$) es el número de aristas (las cuales van, en G, hacia estos G puntos). Otros puntos y aristas no se introducen.

La gráfica correspondiente es regular, ya que en cada uno de sus puntos convergen $\sigma + (k - \sigma) = k$ aristas, las que van juntas. Por tanto, A es también una gráfica par. Entonces, si G es una gráfica par, sus puntos se pueden distribuir en dos grupos I y II tales, que cada arista de G enlace solamente puntos de diferentes grupos. Se divide ahora a los nuevos puntos en I y II, sólo si el mencionado punto G pertenece a II; o bien, a I, de modo que, las aristas de H sólo unan puntos de grupos diferentes (I y II). Por tanto, se toma el teorema B) y se divide a H en k factores de primer grado y luego se reparte, por uno de los k índices de las aristas de G, si pertenecen a uno u otro de estos factores, lo que corresponde a esta distribución de índices del teorema C).

Queremos demostrar, finalmente, que serían suficientes los teoremas A), B), C) e I), que ya demostraron ser equivalentes, en caso de demostrar que el grado en A) y B) (y respectivamente el número k, en C) y el número ν en I) es un número primo. Esto se cumple para el teorema A); por lo tanto, también se desprende, para los tres anteriores, en forma inmediata del teorema:

K) ***Si cada gráfica par de $\mu-$ésimo grado y cada gráfica par de $\nu-$ésimo tienen un factor de primer grado, entonces tiene también, cada gráfica par de $\mu\nu-$ésimo grado, un factor de este tipo.***

Tomamos como hipótesis este teorema y sea P un punto cualquiera, de un par cualquiera de la gráfica par G, de *$\mu\nu-$ésimo grado*. Sustituimos P

a través de μ puntos $P_1, P_2, \cdots, P_\mu$ y llevamos a las $\mu\nu$ aristas en G que corren de P, hasta P, y a través de los puntos P_i. Es verdad, entonces (en cualquier caso), que a cada P_i $(i = 1, 2, ..., \mu)$ deben converger exactamente ν de estos $\mu\nu$ aristas, si pensamos esto para cada punto de G. Entonces se obtiene una gráfica G_ν, de $\nu -$*ésimo* grado; y si esto es también una gráfica par, entonces cada trayectoria cerrada de G_ν coresponde a una trayectoria cerrada de G, con el mismo número de aristas. Según nuestra hipótesis G_ν tiene, por tanto, un factor de primer grado G_1. Si ahora consideramos a los puntos $P_1, P_2, \cdots, P_\mu$ cada uno como punto P, por medio de los cuales obtuvimos las gráficas G_ν, podemos obtener G_1 en un factor G_μ, de $\mu -$*ésimo* grado, de G. Como parte de G, G_μ también es una gráfica par y, por nuestra hipótesis, tiene un factor de primer grado. Esto es naturalmente un factor de primer grado de G_1, de donde el teorema K) queda demostrado.

Mientras que la primera parte de esta demostración casi se repite literalmente, el siguiente teorema se obtiene en parte generalizado:

Si cada gráfica par de $\nu -$ésimo grado tiene un factor de $k -$ésimo grado, también cada gráfica par de $\mu\nu -$ésimo grado tiene un factor de $\mu k -$ésimo grado.

Para el grado 2, hemos demostrado los teoremas A) y B) también para gráficas infinitas. Se sigue de K) que los teoremas A), B), C) e I) *seguramente son ciertos, si el grado (respectivamente, el número k en C) y el número ν* en I)), son una potencia de 2. Para un grado cualquiera (incluso para el grado 3), no parecen ser suficientes nuestros métodos; sin embargo, como vimos, nos podemos restringir a gráficas numerables. El método de inducción completa, por medio del cual hemos demostrado el teorema C), también sirve para gráficas finitas y es ,asimismo, válido para gráficas infinitas.

Los resultados de este trabajo se presentaron el 15 de noviembre de 1915, en la Academia Húngara de Ciencias.

1 cm

Budapest, octubre de 1915.

Ist k die Ordnung eines einfachen Kompositionsfaktors der Gruppe $\mathfrak{G}_a$ oder einer ihrer Komponenten, so muß auch die Ordnung jeder Komponente von $\mathfrak{G}_a$ durch k teilbar sein. Insbesondere muß jede Primzahl, die in der Ordnung von $\mathfrak{G}_a$, oder der einer Komponente von $\mathfrak{G}_a$ aufgeht, auch in der Ordnung jeder anderen (transitiven oder intransitiven) Komponente enthalten sein.

Ferdinand Georg Frobenius
Gesammelte Abhandlungen
Band III
Springer-Verlag Berlin · Heidelberg 1968

102.

Über zerlegbare Determinanten

Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin
274–277 (1917)

Am Schluß meiner Arbeit *Über Matrizen aus nicht negativen Elementen*, Sitzungsberichte 1912, habe ich den Satz bewiesen:

I. *Die Elemente einer Determinante $n$ten Grades seien n^2 unabhängige Veränderliche. Man setze einige derselben Null, doch so, daß die Determinante nicht identisch verschwindet. Dann bleibt sie eine irreduzible Funktion, außer wenn für einen Wert $p < n$ alle Elemente verschwinden, die p Zeilen mit $n - p$ Spalten gemeinsam haben.*

Der Beweis, den ich dort für diesen Satz gegeben habe, ist ein Gelegenheitsergebnis, das aus verborgenen Eigenschaften der Determinanten mit nicht negativen Elementen fließt. Der elementare Beweis, den ich hier für den Satz entwickeln werde, ergibt sich aus dem Hilfssatze:

II. *Wenn in einer Determinante $n$ten Grades alle Elemente verschwinden, welche p ($\leq n$) Zeilen mit $n - p + 1$ Spalten gemeinsam haben, so verschwinden alle Glieder der entwickelten Determinante.*

Wenn alle Glieder einer Determinante $n$ten Grades verschwinden, so verschwinden alle Elemente, welche p Zeilen mit $n - p + 1$ Spalten gemeinsam haben für $p = 1$ oder $2, \cdots$ oder n.

§ 1.

Wenn in einer Matrix $n$ten Grades M alle Elemente $x_{\alpha\beta}$ einer Reihe verschwinden, so verschwindet jedes Glied der Determinante $|M|$, weil jedes ein Element dieser Reihe als Faktor enthält. Da die obigen Sätze von der Reihenfolge der Zeilen und Spalten unabhängig sind, so betrachte ich hier Matrizen, die sich nur durch diese Reihenfolge unterscheiden, als äquivalent. In der Matrix M trenne ich die ersten p Zeilen von den letzten $n - p$ und die ersten p Spalten von den letzten $n - p$ und setze

$$(1.)\qquad M = \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} = \begin{matrix} A_{p,p} & B_{p,n-p} \\ C_{n-p,p} & D_{n-p,n-p} \end{matrix},$$

Hier bezeichnet $A = A_{p,p}$ die Teilmatrix von M, die aus den Elementen der ersten p Zeilen und Spalten besteht, $B = B_{p,n-p}$ die Teilmatrix, die aus den Elementen der ersten p Zeilen und der letzten $n-p$ Spalten besteht usw. Ist nun $B = 0$, so ist jedes Glied von $|M|$, das etwa nicht verschwindet, das Produkt aus einem Gliede a von A und einem Gliede d von D. Wenn also in A noch die Elemente der letzten Spalte verschwinden, so ist stets $a = 0$ und also auch jedes Glied ad von $|M|$ Null.

Dies Ergebnis läßt sich umkehren. Der zweite Teil des Satzes II ist richtig (für $p = 1$), wenn alle Elemente einer Zeile verschwinden. Wenn aber x_{n1} von Null verschieden ist, so verschwinden alle Glieder von $|M|$, die den Faktor x_{n1} enthalten, also alle Glieder der zu x_{n1} komplementären Unterdeterminante $(n-1)$ten Grades, deren Matrix N sei.

Nun nehme ich an, die Behauptung sei für Determinanten, deren Grad $< n$ ist, schon bewiesen (für Determinanten zweiten Grades müssen die Elemente einer Reihe verschwinden). Dann verschwinden in N alle Elemente, welche etwa die ersten p Zeilen mit den letzten $n-1-p+1$ Spalten gemeinsam haben; es ist also $B = 0$. Daher ist jedes Glied von M das Produkt aus einem Gliede a von $|A|$ und einem Gliede d von $|D|$. Wenn nun diese Produkte $ad, ad', \cdots a'd, a'd', \cdots$ alle Null sind, so müssen entweder die Größen $a, a', \cdots$ oder die Größen $d, d', \cdots$ sämtlich verschwinden. Im ersten Falle verschwinden alle Glieder der Determinante $|A|$. Da deren Grad $p < n$ ist, so ist für sie die Behauptung schon bewiesen, es ist also

$$A_{p,p} = \begin{matrix} P_{q,q+1} & Q_{q,p-q-1} \\ R_{p-q,q+1} & S_{p-q,p-q-1} \end{matrix},$$

wo $Q_{q,p-q-1} = 0$ ist. Demnach ist

$$M = \begin{matrix} P_{q,q+1} & Q_{q,p-q-1} & C_{q,n-p} \\ R_{p-q,q+1} & S_{p-q,p-q-1} & V_{p-q,n-p} \\ X_{n-p,q+1} & Y_{n-p,p-q-1} & D_{n-p,n-p} \end{matrix}.$$

Hier verschwinden alle Elemente der Matrix

$$B = \begin{matrix} C_{q,n-p} \\ V_{p-q,n-p} \end{matrix},$$

also auch alle Elemente der Matrix

$$Q_{q,p-q-1} \; C_{q,n-p}.$$

Das sind alle Elemente von M, welche die ersten q Zeilen mit den letzten $n-q+1$ Spalten gemeinsam haben.

§ 2.

Aus dem Hilfssatze II ergibt sich leicht der Satz I. Die von Null verschiedenen Elemente $x_{\alpha\beta}$ der Determinante $n$ten Grades $|M|$ seien unabhängige Veränderliche. Wenn nicht $|M| = 0$ ist, so muß ein Glied der Determinante von Null verschieden sein. Durch Umstellung der Spalten kann man erreichen, daß dies das Diagonalglied $x_{11} x_{22} \cdots x_{nn}$ ist.

Die Determinante möge in zwei Faktoren zerfallen. Da sie in bezug auf die Variabeln einer Reihe eine homogene lineare Funktion ist, so können diese nur in einem der beiden Faktoren vorkommen. Es mögen die Variabeln der p ersten Zeilen im ersten Faktor vorkommen, also nicht im zweiten, und die Variabeln der $n-p$ letzten Zeilen im zweiten Faktor, also nicht im ersten. Dann kommen mit $x_{11}, x_{22}, \cdots x_{pp}$ auch die Variabeln der ersten p Spalten im ersten Faktor vor, und die der letzten $n-p$ Spalten im zweiten.

Ich benutze nun die Bezeichnung (1) § 1. Sind die Variabeln von C alle Null, so ist der Satz richtig. Ist x_{n1} nicht Null, so kommt diese Variable, weil sie der $n$ten Zeile angehört, nicht im ersten Faktor vor, und weil sie der ersten Spalte angehört, nicht im zweiten. Daher ist $|M|$ von x_{n1} unabhängig, und folglich ist die zu x_{n1} komplementäre Unterdeterminante $|N| = 0$. Da ihre Elemente aber unabhängige Veränderliche oder Null sind, so verschwinden ihre Glieder sämtlich. Nach Satz II verschwinden daher in N, also auch in M, alle Elemente, welche q Zeilen mit $n-1-q+1$ Spalten gemeinsam haben.

§ 3.

Aus dem Satze II ergibt sich auch leicht ein Ergebnis des Hrn. Dénes König, *Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre*, Math. Ann. Bd. 77.

Wenn in einer Determinante aus nicht negativen Elementen die Größen jeder Zeile und jeder Spalte dieselbe, von Null verschiedene Summe haben, so können ihre Glieder nicht sämtlich verschwinden.

Denn wenn alle Glieder von $|M|$ verschwinden, so verschwinden etwa die Elemente von B und die der letzten Spalte von A. Haben nun die Größen jeder Reihe die Summe s, so ist die Summe der Größen der p ersten Reihen, also der Elemente von A und B, gleich ps, und ebenso die Summe der Größen der p ersten Spalten, also der Elemente von A und C. Folglich ist die Summe der Elemente von C gleich der der Elemente von B, und da diese alle Null sind, und jene nicht negativ, so verschwinden alle Elemente von C', demnach alle Elemente der $p$ten Spalte, und mithin ist $s = 0$.

Die Theorie der Graphen, mittels deren Hr. Kőnig den obigen Satz abgeleitet hat, ist nach meiner Ansicht ein wenig geeignetes Hilfsmittel für die Entwicklung der Determinantentheorie. In diesem Falle führt sie zu einem ganz speziellen Satze von geringem Werte. Was von seinem Inhalt Wert hat, ist in dem Satze II ausgesprochen.

103.

Gedächtnisrede auf Leopold Kronecker

Abhandlungen der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin
3–22 (1893)

Für den Verlust, den die mathematische Section der Akademie in den fünfziger Jahren durch **Jacobi's** Tod, durch **Dirichlet's** Weggang erfuhr, fand sie bald glänzenden Ersatz in drei Männern, deren Namen die Geschichte der Mathematik stets unter den ersten nennen wird. Jeder Mathematiker rühmt **Kummer's** bahnbrechende Schöpfungen in der Zahlentheorie und ist mit seinen schönen Untersuchungen in der Liniengeometrie vertraut. Jeder kennt die grundlegenden Arbeiten von **Weierstraſs** in der Theorie der Functionen und würdigt seine fruchtbare kritische Durchmusterung des gesammten Feldes der Analysis. Ungleich schwerer ist es, **Kronecker's** Stellung in der Wissenschaft kurz und zutreffend zu kennzeichnen, weil die weittragenden Entdeckungen, die ihm dauernden Ruhm sichern, nicht in dem Rahmen einer einzelnen mathematischen Disciplin Platz finden. An Vielseitigkeit des Talents, an Schärfe des Urtheils und an der Fähigkeit sich rasch in einen neuen Gedankenkreis einzuarbeiten hat ihn keiner übertroffen. Aber so hervorragend auch seine Leistungen auf den verschiedensten Gebieten der Gröſsenforschung sind, so reicht er doch in der Analysis an **Cauchy** und **Jacobi**, in der Functionentheorie an **Riemann** und **Weierstraſs**, in der Arithmetik an **Dirichlet** und **Kummer**, in der Algebra an **Abel** und **Galois** nicht ganz heran. Aus diesem Grunde ist seine Bedeutung nicht selten von solchen Gelehrten unterschätzt worden, deren Studien sich nur auf einzelne dieser Disciplinen erstreckten. Die staunende Bewunderung der ersten Mathematiker seiner Zeit erregte er dadurch, daſs es ihm zuerst nach **Gauſs** in weiterem Umfange gelang, mit den Ergebnissen der modernen Arithmetik zu einer Zeit, wo erst sehr wenige ein volles Verständniſs dafür gewonnen hatten, die Algebra und

1

Sobre los determinantes descomponibles

Frobenius, Ferdinand Georg

Gesammelte Abhandlungen. Band III.

Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin

274-277(1917)

Al final de mi trabajo *Sobre matrices de elementos no negativos* 1912, demostré el teorema:

I. *Los elementos de un determinante de n-ésimo orden serían de n^2 variables independientes. Si se hacen algunos iguales a cero, de tal forma, que el determinante no sea idénticamente nulo, entonces queda una función irreducible, a menos que para un valor $p < n$ todos los elementos se anulen, las p primeros tienen en común $n - p$ columnas.*

La demostración, que di allí, es un resultado circunstancial, que se deduce de las identidades pertenecientes al determinante con elementos no negativos. La demostración elemental, que aquí he desarrollado para el teorema, se cumple del lema:

II. *Si en un determinante de n-ésimo grado todos sus elementos se anulan, el determinante tiene en común $p(\leq n)$ renglones con $n - p + 1$ columnas, entonces se anulan todos los elementos del determinante desarrollado.*

Si todos los elementos de un determinante de n-ésimo grado se anulan, entonces se anulan todos los elementos, que tienen en común p renglones con $n - p + 1$ columnas para $p = 1$ o $2, \ldots$ o n.

§1.

Si en una matriz de *n-ésimo* grado se anulan todos los elementos $x_{\alpha\beta}$ de un renglón, entonces se anula cada elemento del determinante $|M|$, porque cada uno de los elementos contiene este renglón, como un factor. Puesto que el teorema de arriba, sobre el orden de los renglones y columnas son independientes, entonces considero a las matrices, que se distinguen sólo por medio de este orden, y que son equivalentes. En la matriz **M** separo los primeros p renglones de los últimos $n-p$, y las primeras p columnas de las últimas $n-p$ y hago:

$$(I.)\ldots\ldots\ldots\ldots M = \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} = \begin{matrix} A_{p,p} & A_{p,n-p} \\ A_{n-p,p} & A_{n-p,n-p} \end{matrix}.$$

Aquí $A = A_{p,p}$ designa a la submatriz de **M**, que consta de elementos de las primeros p renglones y columnas. $B = B_{p,n-p}$ designa a la submatriz que consta de los primeros p renglones y las últimas $n-p$ columnas, etc. Si ahora $B = 0$, entonces cada elemento de |**M**|, que no se anula, es el producto de un elemento de **A** y un elemento de **D**. Por tanto, si en **A** se anula el determiante, entonces se anula el elemento del último renglón, entonces siempre se cumple que $a = 0$ y por tanto, también se anula cada elemento ad de |**M**|.

El resultado puede invertirse. La segunda parte del teorema II es verdadero (para $p = 1$), si todos los elementos de un renglón se anulan, pero si x_n es distinto de cero, entonces se anulan todos los elementos de |**M**|, los cuales pertenecen al factor x_n, que se complementan con el subdeterminante de *(n -1)-ésimo* grado cuya matriz es **N**.

Ahora supongo que la afirmación sea verdadera para determinantes cuyo grado es $< n$, ya demostrado (para determinantes de segundo grado, deben anularse los elementos de un renglón.) Entonces se anulan en **N** todos los elementos, por ejemplo, los primeros p renglones con las últimas $n-p-p+1$ columnas que tienen un elemento en común; por tanto, $B = 0$. Por eso cada elemento a de |**A**| y un elemento d de |**D**|. Si estos productos $ad, ad', \ldots, a'd, a'd', \ldots$ todos son nulos, entonces se anulan totalmente las cantidades $a, a', \ldots$ o se anulan las cantidades $d, d', \ldots$. En el primero se anulan todos los elementos del determinante |**A**|. Puesto que su grado es $p < n$, entonces la afirmación ya está demostrada y es, por tanto,

$$A_{p,p} = \begin{matrix} P_{q,q-1} & Q_{q,p-q} \\ R_{p-q,q-1} & S_{p-q+1} \end{matrix}$$

donde $Q_{q,p-q} = 0$. Por consiguiente

$$M = \begin{matrix} P_{q,q-1} & Q_{q,p-q+1} & U_{q,n-p} \\ R_{p-q,q-1} & S_{p-q,p-q+1} & V_{p-q,n-p} \\ X_{n-p,q-1} & Y_{n-p,p-q+1} & D_{n-p,n-p} \end{matrix}$$

En este caso se anulan también los elementos de la matriz

$$Q_{q,p-q+1} \cdot U_{q,n-p}.$$

Estos son todos los elementos de **M**, los cuales tienen, en común, los primeros q renglones con las últimas $n-q+1$ columnas.

§2.

Por el corolario II resulta fácil el teorema I. Los elementos diferentes de cero $x_{i,j}$ del determinante de *n-ésimo* grado $|M|$ sean variables independientes. Si no es $|M| = 0$, entonces un elemento del determinante debe ser diferente de cero. A la inversa de las columnas, se pueden obtener los elementos de la diagonal principal $x_{11}, x_{22}, \ldots, x_{nn}$.

El determinante se divide en dos factores. Puesto que con relación a las variables de una serie es una función lineal homogénea, entonces pueden aparecer sólo en uno de los dos factores. Se supone que las variables de las p primeros renglones aparecen en el primer factor,es decir, no en los dos, y las variables de las últimos $n-p$ renglones en el segundo factor, por tanto, no están en el primero. Entonces aparecen con $x_{11}, x_{22}, \ldots, x_{pp}$, también las variables de las primeras p columnas en el primer factor, y las de las últimas $n-p$ columnas aparecen en ambos.

Ahora utilizo la nomenclatura de (1) §1. Si las variables de **C** son todas nulas, entonces el teorema es verdadero. Si x_{n1} no es nulo, entonces resulta esta variable no con el segundo, porque pertenece al *n-ésimo* renglón. Por esto $|M|$ es independiente de los x_{n1}. Puesto que sus elementos no son sino variables independientes o son cero, entonces se anulan todos sus elementos. Por el teorema II se anulan, por lo mismo, en **N**, entonces también se anulan en **M** todos los elementos cuyos q renglones que tienen en común elementos, con las $n-1-q+1$ columnas.

§3.

Del teorema II se obtiene fácilmente un resultado del señor DÉNIS KÖNIG. *Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre. Math. Ann Tomo 77.*

Si en un determinante con elementos no-negativos las cantidades de cada renglón y cada columna, tienen una suma diferente de cero, entonces no pueden anularse sus elementos totalmente.

Porque si todos los elementos de $|M|$ se anularan, entonces se anularían, por ejemplo, el elemento de **B** y los elementos de la ultima columna de **A**. Ahora bien, si las cantidades de cada renglón tiene la suma igual a s, entonces la suma de las cantidades de los p primeros renglones, es decir, los elementos de **A** *y* **B**, son iguales a ps, e igualmente la suma de las entradas de las primeras p columnas, es decir, los elementos de **A** y **C**. Consecuentemente la suma de los elementos de **C** es igual al de la suma de los elementos de **B**, Y puesto que estos son todos nulos, y los otros no-negativos, entonces se anulan todos los elementos de **C**, por consiguiente, todos los elementos de la *p-èsima* columna se anulan, y por tanto, $s = 0$.

La teoría se gráficas, mediante la cual el señor König dedujo el teorema de arriba, en mi opinión es un remedio poco adecuado para el desarrollo de la teoría de los determinantes. En este caso lleva a un teorema muy particular *[speziellen]* de escaso valor. Lo que tiene de valor, su contenido, está dicho en el teorema II.

BIBLIOGRAFIA

Primera parte

ABRAHAM-FROIS, Gilbert, y BERRERI, Edmund *Théorie de la valeur, des prix et de l'accumulation*, Paris, Ed. economica, 1976.

ABRAHAM-FROIS, Gilbert *Economique politique*, Deuxieme édition, Paris, 1984.

BABINI, José, *Historia de la medicina*, Barcelona, Ed. gedisa, 1985.

BERNAL, J. D. *La ciencia en la historia*, México, Ed. Nueva Imagen-UNAM, 1990.

BUTTERFIELD, Herbert, *Los origenenes de la ciencia moderna*, Madrid, Ed. Taurus, Colección ensayistas, No. 77, 1982.

CHENERY, Hollis y CLARK, Paul, *Economía interindustrial. Insumo producto y programación lineal*, México, FCE, 1984.

LEONTIEF, Wassily, *La estructura del desarrollo*. Escritos escogidos. Selección y prólogo de Diego Pizano, Colombia, Tercer Mundo Editores, 1991.

CLEAVER, Harry, *Una lectura política de El Capital*, México, Ed. FCE, Colecc. Popular, No. 258, 1985.

ENGELS, F. *Anti-Duhring*, México , Ed. Grijalbo, 1962.

GUILLEN, Romo Héctor, *Lecciones de economía marxista*, México, Ed. SEP-FCE Textos universitarios de economía, 1988.

HARVEY, William *Del movimiento del corazón*. Introducción histórico-crítica sobre los antecedentes, los orígenes y la importancia de esta obra, por IZQUIERDO, José Joaquín, México, Ed. UNAM, Colecc. Problemas científicos y filosóficos, 1965.

HEILBRONER, Robert, *Vida y doctrina de los grandes economistas*, Barcelona, Ed. Orbis, Biblioteca económica, tomo1, 1985.

LENIN, V. I. *Acerca de la llamada cuestión de los mercados*, México, Ed. Quinto sol, 1985.

LEONTIEF, Wassily, *Análisis económico input-output* [insumo-producto] Barcelona, Ed Orbis, Biblioteca económica tomo 16, 1985.

MARX, Karl *El Capital*, tomo II , México FCE y Ed. Siglo XXI

MARX-Engels *Correspondencia*, México, Ediciones de cultura popular, (3 tomos), 1972.

MARX, Karl, *Teorías sobre la plusvalía*, Argentina, Ed. Cartago, Tomo I.

MARX-ENGELS *Werke*, Berlín, Ed. Dietz, Tomo 30, 1974.

MORISHIMA, Michio *La teoría económica de Marx*, Madrid, Ed. Tecnos, 1977.

MOSZKOWSKA, Natalie. *El sistema de Marx, su aporte para su construcción*, México, Ed. El Ateneo, Bilioteca de ciencias económicas, 1979.

NAPOLEONI, Claudio *El pensamineto económico del siglo XX*, Barcelona, Ed. Oikos-Tau, Colecc. libros de economía oikos, 1982.

NIKAIDO, H. *Métodos matemáticos del análisis económico moderno*, Barcelona, Ed. Vicens-Vives, Colecc. Vicens Universidad, 1978.

PASINETTI, Luigi *Lecciones de teoría de la producción*, México, FCE, Colecc. Textos de economía, 1987.

PIZANO, Diego (compilador) *Algunos creadores del pensamiento económico contemporáneo*, México, Ed. FCE, Colección popular, No. 201, 1980.

QUESNAY, F. *El tableau economique*, Introducción y comentarios de KUCZYNSKI, M. y MEEK, R. L. , México, FCE, 1980.

ROLL, Eric, *Historia de las doctrinas económicas*, México, Ed. FCE, 1982.

SELDON, Arthur, y PENNANCE , F. G. *Diccionario de economía*, Barcelona, Ed. Orbis, 1984.

SCHUMPETER, Joseph, *Historia del análiis económico* I, México, Ed FCE, 1984.

STIGLER, George, *Historia del pensamiento económico*, México, Ed. El Ateneo, Biblioteca de ciencias económicas, 1979.

Segunda parte

ALSINA , C. y TRILLAS, E. *Lecciones de álgebra y geometría*, Barcelona Ed. Gustaco Gili, 1984.
BOURBAKI, N. *Elementos de historia de las matemáticas*, Madrid, Alianza editorial, Colecc. AU, No. 18, 1976.
DEBUS, Allen *El hombre y la naturaleza en el renacimiento*, México, *ENSAYOS CIENTIFICOS*, México, Ed. Conacyt, 1982
FRALEIGH, John y BEAUREGARD, Raymond, A. *Algebra lineal*, México Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, 1989.
HADAMARD, Jacques , *Lecons sur la propagation des ondes et les équations de L'hidrodynamique*, N.Y. Ed. Chealsea , 1949.
HERSTEIN, I. N. *Algebra lineal y teoría de matrices*, México, Grupo editorial Iberoamerica, 1989.
KLINE , Morris *Mathematical thought from ancient to modern times*, N. Y. Oxford University Press, 1972.
MIELI. Aldo *Panorama general de historia de la ciencia VIII, El siglo del Iluminismo*, Bs. As.-Méx. Ed. Espasa-Calpe. 1955.
MOSQUEIRA, Salvador, *Cosmografía y Astrofísica*, México, Ed Patria, 1983.
PASTOR, J. Rey, y BABINI, José *Historia de la matemática*, Barcelona Ed. Gedisa, 2 tomos, 1985.
PIAGET, Jean *Psicogénesis e historia de la ciencia*, México, Ed. Siglo XXI, 4a. ed., 1989.
STRUIK, Dirk Jan, *Historia concisa de las matemáticas* , México, Ed. IPN, 1980.
VERA , Fco. *Veinte matemáticos célebres*, Buenos Aires, Ed. Compañía general Fabril Editora, 1961.

Tercera parte

BELLMAN, Richard, *Introducción al análisis matricial*, Madrid, Ed. Reverté, 1965.

BERMAN, Abraham y PLEMMONS, Robert L. *Nonnegative Matrices*, N. Y., Academic Press, 1979.

GANTMACHER, F. R. *The theory of matrices*, USA, Ed. Chealsea Pub. Co. Vol. 1 y 2 , 1960.

GANTMACHER, F. R. *Matrizen Rechnung*, teil 1, 2, Berlin, Ed. VEB. ,1958.

GRAHAM, Alexander *Nonnegative matrices and applicable topics in linear algebra*, Great Britain, Ed. Ellis Horwood limited, 1987.

LANCASTER, P. y TSIMENETSKY, M. *The theory of matrices*, USA, Academic Press, 1985.

MORALES, Josefina *Métodos y modelos económico-matemáticos*, Revista economía y desarrollo, No. 62, Habana. Ediciones cubanas, Mayo-Junio, 1981.

NIKAIDO, H. *Convex structures and economic theory*, USA, Academic Press, 1968.

SENETA, E. *Non-negative matrices and markov chains*, USA, Springer-Verlag, 1973.

TAKAYAMA, Akira *Mathematical economics*, USA, Oxford University Press, 1985.

Tesis consultadas

AQUINO, Vázquez E. *Las matrices positivas y no-negativas en el modelo de indumo producto de Leontief y en las cadenas de Markov*, México, Fac. de Ciencias, Sin indicación de año.

CRAVIOTO, Graciela B. *El desarrollo de los modelos lineales a partir del problema de la transformación de valores en precios*, México, publicada en la Revista del Seminario de Enseñanza y Titulación Año V, No. 37 y 38 Diciembre 1989.

VILLEGAS, L. G. *Una presentación matemática del modelo de insumo-producto de Leontief*. México, Facultad de Ciencias Comunicaciones internas No. 106, 1982.

Artículos y revistas

FROBENIUS, F. G. *Gesammelte Abhandlungen*, Berlín, Springer-Verlag, Tomo 3, 1968.

KUENNE, Robert *Walras, Leontief, and the interdependence of economic activities*, Vol. LXVIII, Agosto, 1954, No. 3, pp. 323-354.

MORISHIMA, Michio *Marx in the light of modern economic theory*, Vol. 43, Econometrica, julio 1944, No. 4, pp. 611-632.

KONIG, Dénes *Ubergraphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre*, Mathematische Annalen Vol. 77 , 1916, pp. 453-465.

PERRON, Oskar, *Zur Theorie der Matrices*, Munchen, Mathematische Annalen, Vol. 64, 1907.

LOS MODELOS DE HOY ■ El Fisgón