



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO**

FACULTAD DE INGENIERIA

**DISEÑO DE CONTROLADORES ROBUSTOS
CON RESTRICCIONES EN LA SENSIBILIDAD**

TESIS PROFESIONAL

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA**

P R E S E N T A

BRICK CANCHOLA GUTIERREZ

Incluye un diskette 3 1/2
Director:

MA. CRISTINA VERDE RODARTE

MEXICO, D. F.

1997



**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO**

Facultad de Ingeniería

**Diseño de controladores robustos
con restricciones en la sensibilidad**

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO MECÁNICO ELECTRICISTA

PRESENTA:

ERICK CANCHOLA GUTIÉRREZ



MÉXICO, D.F.

1997

DIRECTOR: Ma. Cristina Verde Rodarte

Dedicatoria

Dedico este trabajo a la memoria de mi padre, mi querido *Viejo Antón*, quien tanto se ocupó en dar. Ahora, aún cuando tarde, le extiende la última satisfacción de esta etapa.

Dedico también mi trabajo a mis padres por proporcionar tan generosamente tanta vida, cariño y experiencia. Motivados por el conocimiento de las respuestas a tantos por qué, devengaron sus intereses en diferentes áreas, una ingeniera bioquímica, un diplomático y ahora finalmente, un ingeniero mecánico electricista.

Agradecimientos

El mejor pago personal con el que puedo agradecer a tantas personas quienes a lo largo de la elaboración de esta tesis me brindaron sus valiosas observaciones, tiempo y ayuda, será la utilidad que les brinde el contenido del trabajo que presento; ya sea para resolver problemas o como herramienta para incursionar en nuevas investigaciones.

Expreso mi agradecimiento al cuerpo académico de la Coordinación de Automatización del Instituto de Ingeniería y de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

En la esfera ingenieril a José Luis Fernández, María Cristina Verde, Francisco Rodríguez, Gerardo Espinoza, Rolando Carrera, Jorge Rodríguez y a otros tantos maestros en la Facultad de Ingeniería.

En la esfera profesional agradezco la ayuda ofrecida con los recursos computacionales y de impresión prestados por Tektronix S.A. de C.V. a través de los ingenieros Mario A. Ceballos y Hugo Simg.

Por motivos que escapan del entorno ingenieril, pero que son *alimentum victus* y fuente de inspiración deseo agradecer a Elise Forner, Brigitta Krebs, Cheryl Wagner, Claudia Canchola, María del Carmen Arenas, Elena Martínez, Beatriz Padilla, y Martha Silva.

Índice

Capítulo 1

1.1 Introducción	1
------------------	---

Capítulo 2

2.1 Características del sistema realimentado	5
2.2 Características de las incertidumbres consideradas	8
2.3 El problema del control robusto	9
2.3.2 Desempeño robusto	10
2.3.3 Rechazo a perturbaciones	11
2.4 Teoría de realimentación cuantitativa QFT	12

Capítulo 3

3.1 Introducción	15
3.2 Parametrización del controlador	15

Capítulo 4

4.1 Introducción	21
4.2 Planteamiento del problema	21
4.3 Solución del problema	22
4.3.1 Algoritmo de ajuste e implantación	23
4.4 Estructura del parámetro Q	25
4.5 Estructura del paquete de diseño	26
4.5.1 Caracterización de la planta y especificaciones de diseño	27
4.5.2 Diseño del controlador	30

4.5.2 Algoritmo de ajuste	36
----------------------------------	-----------

Capítulo 5

5.1 Introducción	39
-------------------------	-----------

5.2 Control de dirección de un barco	40
---	-----------

5.3 Control de un brazo manipulador	47
--	-----------

Capítulo 6

6.1 Conclusiones	57
-------------------------	-----------

Referencias	59
--------------------	-----------

Apéndice	61
-----------------	-----------

Capítulo 1

1.1 Introducción

El diseño de sistemas de control realimentado es una tarea que requiere considerar varios factores que influyen en el comportamiento del sistema, como lo son las perturbaciones, las incertidumbres del modelo, los efectos no lineales despreciados, etcétera. Todo ello para conseguir que la planta junto con el controlador se comporten según los objetivos de desempeño impuestos por las especificaciones demandadas.

En general, la retroalimentación es usada para disminuir los efectos de las incertidumbres y perturbaciones sobre la planta. Para determinar en qué grado disminuyen las incertidumbres en el comportamiento de la planta es necesario estudiar la razón de cambio del sistema en lazo cerrado con respecto a las incertidumbres. Esta razón de cambio o medida de variación es la función de sensibilidad y ella expresa la susceptibilidad del sistema en lazo cerrado a las incertidumbres en el modelo matemático y a las perturbaciones que actúan sobre el sistema y también permite especificar los rangos de las frecuencias en donde es deseable atenuar las perturbaciones o incertidumbres en el modo frecuencial.

Existen en la literatura de control varios trabajos [refs. 11, 12 y 18] que atacan algunos de los problemas de control bajo la presencia de incertidumbres y perturbaciones. Uno de estos trabajos es el de I. Horowitz [ref. 12] quien creó un método frecuencial conocido como *Diseño de Retroalimentación Cuantitativo* o *QFD* para ajustar controladores fijos en la carta de *Nichols* tomando en cuenta la influencia de las perturbaciones en el lazo abierto.

En particular el trabajo que se presenta se basa en algunas de las ideas de Horowitz y propone una solución al problema del diseño de controladores para plantas con variaciones en el dominio de la frecuencia enmarcadas dentro del esquema de control retroalimentado clásico mostrado en la figura 2.1. Estas variaciones que expresan incertidumbres en la magnitud y en la fase de la respuesta frecuencial del sistema toman la forma de un polígono o plantilla en la traza polar de *Nyquist* y en la carta de *Nichols*.

Otro hecho [ref. 18] en el que se basa este trabajo es que es posible expresar objetivos de diseño tales como estabilidad, desempeño, atenuación de perturbaciones, en forma de límites o fronteras en la función de sensibilidad. Además, el estudio se sirve del uso de la parametrización de *Youla* [refs. 9 y 19] para calcular el controlador. Esta parametrización, además de garantizar que cualquier controlador generado por ella sea estabilizante, simplifica el trabajo de revisar la estabilidad con cualquier cambio o ajuste que se realice sobre el controlador. Así, el diseño del controlador estará determinado por la función de sensibilidad que cumpla con los objetivos de diseño.

El problema que se desea resolver se puede formular de la siguiente manera: Dada una familia de plantas \mathbf{P} lineales e invariantes en el tiempo expresadas en el dominio de *Laplace* por medio de una función de transferencia \mathbf{P} con fronteras en las variaciones de la respuesta frecuencial tanto en magnitud como en fase, denotadas por

$$\left(\left| \mathbf{P}_{max} \right| , \angle \mathbf{P}_{max} \right) \quad (1.1)$$

$$\left(\left| \mathbf{P}_{min} \right| , \angle \mathbf{P}_{min} \right) \quad (1.2)$$

$$\left(\left| \mathbf{P}_{min} \right| , \angle \mathbf{P}_{max} \right) \quad (1.3)$$

$$\left(\left| \mathbf{P}_{min} \right| , \angle \mathbf{P}_{min} \right) \quad (1.4)$$

y los objetivos de desempeño expresados a través de una cota superior tolerada en la función de sensibilidad del sistema \mathbf{S}_{des} , encontrar un controlador estabilizante \mathbf{C}_q calculado con la parametrización de *Youla* que satisfaga la cota de la función de sensibilidad para todas las variaciones posibles de la planta, es decir

$$\left| \mathbf{S}_q(j\omega) \right| < \left| \mathbf{S}_{des}(j\omega) \right| \quad \forall \omega \in \Omega_i \quad (1.5)$$

donde $\mathbf{S}_q(j\omega)$ representa la función de transferencia de la familia de plantas \mathbf{P} y Ω_i es un conjunto arbitrario de frecuencias de interés del sistema en lazo cerrado.

Debido a que no se dispone actualmente en el Instituto de Ingeniería de un paquete de diseño asistido por computadora dedicado a la síntesis de controladores en forma

sistemática empleando la parametrización de *Youla*, esta tesis tiene como objetivo principal, crear un programa asistido por computadora con el que se puedan diseñar controladores robustos empleando la parametrización de *Youla*. La aportación principal es un paquete de diseño gráfico asistido por una computadora personal bajo el ambiente de WINDOWS, donde el diseñador expresa el objetivo de desempeño por medio de una función de sensibilidad deseada S_{des} , y posteriormente calcula el controlador de *Youla* C_q , ajustando iterativamente el controlador hasta que las magnitudes de las funciones de sensibilidad S_q de la familia de plantas P , no traspasen los límites de la función de sensibilidad deseada S_{des} .

El mérito que tiene esta tesis reside en conjuntar herramientas actuales de control en un paquete amigable de diseño asistido por computadora para resolver problemas reales de la ingeniería de control. Dicho paquete está formado por varias rutinas programadas para funcionar en MATLAB 4.0 que a su vez opera bajo el ambiente WINDOWS. Las herramientas teóricas son la parametrización de *Youla*, el comportamiento frecuencial del sistema lineal y la teoría de realimentación cuantitativa (*QFT* y *QFD*).

La presentación de este documento se ha dividido en seis capítulos que abarcan los siguientes temas. En el capítulo 2 con base en las características del sistema realimentado bajo estudio se introducen tanto la descripción de las incertidumbres consideradas junto con el planteamiento del problema de robustez como la teoría de la realimentación cuantitativa con su extensión al caso de especificaciones de diseño por medio de la función de sensibilidad.

Sin pérdida de generalidad se presenta en el tercer capítulo la ecuación de *Bezout*, la parametrización del controlador de *Youla* para plantas estables e inestables, así como las expresiones matemáticas para la función de sensibilidad y la función de transferencia en lazo cerrado y el término del parámetro libre Q del controlador de *Youla*.

El capítulo 4 está dedicado a la presentación del algoritmo de ajuste, su codificación y la presentación gráfica mostrada al usuario para operar el programa de ajuste. Es importante mencionar que el problema se resuelve de manera iterativa, donde el diseñador tiene alto grado de libertad para ajustar el controlador así que la solución no es única. Por tal motivo, se señalan primero las consideraciones hechas para calcular el controlador. Específicamente se adoptan algunos dos métodos para el cálculo de las

factorizaciones coprims y se proponen varias estructuras que puede adquirir el parámetro libre Q del controlador C_q . Se ha procurado que la interacción con el usuario sea amigable aprovechando convenientemente las capacidades matemáticas y gráficas tanto de MATLAB 4.0 como del equipo de cómputo.

Dos ejemplos de diseño son discutidos en el capítulo 5 empleando el paquete de diseño programado. El primero consiste en controlar la dirección de un buque-tanque cuya trayectoria se ve afectada por el oleaje. En el segundo problema se desea controlar el momento de inercia de un brazo manipulador. Los resultados de ambos ejemplos son comparados con aquéllos obtenidos con el paquete de la referencia [ref. 10]. Finalmente, las conclusiones generales de la tesis se ubican en el capítulo 6. El apéndice contiene el diagrama de flujo de las rutinas principales en las que se calcula el controlador y también en donde se introducen los términos del parámetro libre Q .

Capítulo 2

2.1 Características del sistema realimentado

El esquema general en que se basa el presente trabajo es el sistema retroalimentado con dos grados de libertad de la figura 2.1, en donde se supone linealidad de la planta y del controlador. El diagrama de bloques de la figura 2.1, toma en cuenta que el conjunto de plantas $P(s)$ puede describirse por medio de una función de transferencia continua, invariante en el tiempo dada por 2.1, un controlador de retroalimentación $C(s)$ y un prefiltro $F(s)$.

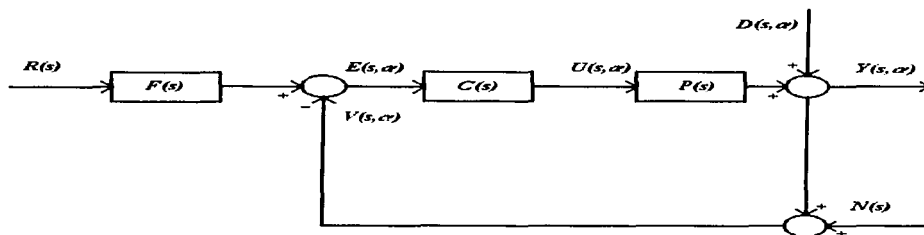


Figura 2.1. Diagrama de bloques del sistema realimentado con dos grados de libertad.

El conjunto de plantas a ser controladas está dado por

$$\{P(s)\} = P(s, \alpha), \quad \forall \alpha \in \Omega \in \mathbf{R}^m \quad (2.1)$$

siendo $P(s, \alpha)$ el conjunto de plantas parametrizadas en α . α es un vector de dimensión m , que varía en un subconjunto Ω perteneciente a \mathbf{R}^m . El punto nominal, α_o elemento del conjunto Ω , genera la planta nominal $P_o = P(s, \alpha_o)$.

Además las funciones de transferencia de los controladores tanto en la retroalimentación como en lazo abierto son consideradas fijas. Las señales descritas en el diagrama están asociadas con

$R(s)$	la referencia,
$U(s, \alpha)$	la acción o control,
$D(s)$	la perturbación,
$N(s)$	el ruido del sistema,
$V(s, \alpha)$	la realimentación,
$E(s, \alpha)$	el error,
$Y(s, \alpha)$	la salida del sistema

De aquí en adelante se omitirá el uso de la variable s y solamente se empleará cuando su ausencia cause confusión. También se entenderá que las expresiones derivadas de $P(s, \alpha)$ son igualmente funciones de las variables independientes s y α .

La ecuación que describe el comportamiento en la salida de este sistema está dada por

$$Y = \frac{CP}{1 + CP} \left[R - N + \frac{D}{CP} \right] \quad (2.2)$$

Si se definen la función de transferencia de lazo cerrado como

$$T \equiv \frac{FCP}{1 + CP}, \quad (2.3)$$

la función de sensibilidad como

$$S \equiv \frac{1}{1 + CP}, \quad (2.4)$$

la función de transferencia de lazo abierto como

$$L \equiv CP, \quad (2.5)$$

Capítulo 2: Características del sistema realimentado

y la diferencia de retorno como

$$\mathbf{J} \equiv \mathbf{1} + \mathbf{CP} \quad (2.6)$$

Entonces, la función de transferencia de lazo abierto nominal se puede escribir como

$$\mathbf{L}_o \equiv \mathbf{CP}_o \quad (2.7)$$

y la diferencia de retorno nominal se reduce a

$$\mathbf{J}_o \equiv \mathbf{1} + \mathbf{L}_o \quad (2.8)$$

Por lo tanto, la función de transferencia de lazo cerrado nominal resultante es

$$\mathbf{T}_o \equiv \mathbf{F}_o \cdot \frac{\mathbf{L}_o}{\mathbf{J}_o} \quad (2.9)$$

Además, sustituyendo las ecuaciones 2.3 a 2.6 en la ecuación 2.2 se obtiene

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}[\mathbf{L}(\mathbf{R} - \mathbf{N}) + \mathbf{D}] = \mathbf{T}(\mathbf{R} - \mathbf{N}) + \mathbf{SD} \quad (2.10)$$

Como se observa de 2.10, la función de transferencia de lazo cerrado \mathbf{T} determina el comportamiento de la salida a las señales de referencia \mathbf{R} y al ruido \mathbf{N} y la función de sensibilidad \mathbf{S} caracteriza los efectos de las perturbaciones \mathbf{D} sobre la salida. De aquí la importancia de la función \mathbf{S} , ya que ella caracteriza el desempeño del sistema ante las perturbaciones, y el producto de esta función por \mathbf{L} determina el efecto de ruido en la salida. Por otro lado se puede verificar que

$$\mathbf{I} = \mathbf{T} + \mathbf{S} \quad (2.11)$$

por lo que para conseguir que la señal de error \mathbf{E} (definida como la diferencia entre la señal de salida y la señal de referencia) sea pequeña y que se atenúen satisfactoriamente las perturbaciones, se requiere que

$$|\mathbf{S}| \approx 0 \quad (2.12)$$

lo cual automáticamente implica que

$$|T| \approx 1 \quad (2.13)$$

Además si se desean suprimir las señales de ruido en la salida, se deberá cumplir

$$|T| \approx 0 \quad (2.14)$$

en cuyo caso,

$$|S| \approx 1 \quad (2.15)$$

2.2 Características de las incertidumbres consideradas

La incertidumbre se define como la variación que existe entre el comportamiento del modelo matemático que representa a la planta y el comportamiento real de ésta. La incertidumbre puede ser descrita como la variación de los parámetros en un modelo lineal, como los límites en la respuesta en frecuencia del sistema, etcétera. Con el objeto de considerar emplear incertidumbres presentes en casos prácticos se propone caracterizarlas por medio del cambio en la magnitud y en la fase de la planta para cada frecuencia a lo largo de toda la escala de frecuencias. De esta manera, se supone la existencia de valores máximos y mínimos de magnitud y de fase, los cuales al ser combinados resultan en cuatro parejas extremas.

$$(|P_{max}| , \angle P_{max}) \quad (2.16)$$

$$(|P_{max}| , \angle P_{min}) \quad (2.17)$$

$$(|P_{min}| , \angle P_{max}) \quad (2.18)$$

$$(|P_{min}| , \angle P_{min}) \quad (2.19)$$

En la gráfica polar de *Nyquist*, o en la de *Nichols* estas cuatro parejas se mapean en un pedazo de una dona o un polígono respectivamente y forman lo que se llamará una *plantilla* en la frecuencia ω , que encierra a la incertidumbre asociada ω . En la figura 2.2

se presenta el conjunto formado por los cuatro extremos para la frecuencia ω_i , en el plano de Nyquist.

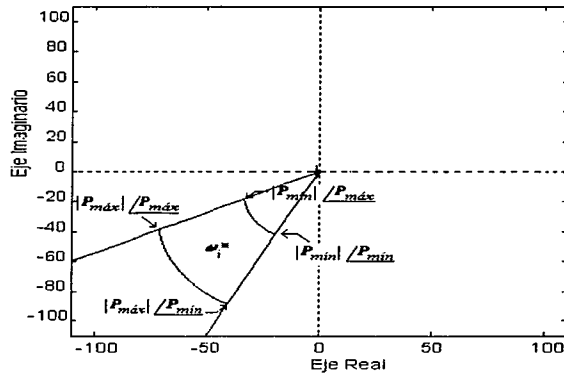


Figura 2.2 Plantilla en la frecuencia ω_i en la traza polar de Nyquist.

2.3 El problema del control robusto

El objetivo principal de los sistemas realimentados es generar acciones de tal manera que el sistema opere satisfactoriamente en presencia de perturbaciones e incertidumbres. Las características deseables son, normalmente garantizar estabilidad del sistema, un desempeño dinámico adecuado, una buena atenuación a perturbaciones, etc. En el ámbito de control se dice que un sistema posee *estabilidad robusta* si éste se mantiene estable en presencia de incertidumbres para toda la familia de plantas. En la mayoría de los casos la sola estabilidad ante incertidumbres es insuficiente para hablar de diseño satisfactorio. Este hecho motivó que actualmente se hable de una caracterización más particular que es el *desempeño robusto*. Entendiendo por esto que el sistema de control no sólo debe garantizar la estabilidad para toda la familia de plantas, sino también satisface condiciones de desempeño para todos los elementos de la familia.

2.3.1 Estabilidad robusta

Originalmente en los sistemas de control retroalimentado se estudiaba únicamente la estabilidad de la entrada o referencia a la salida, ignorando los efectos internos posibles dentro del lazo. Sin embargo, en los últimos 20 años se ha visto la necesidad de exigirle a los diseños más que la estabilidad entrada-salida. Esto lleva a tener que estudiar la estabilidad de todas las funciones de transferencia que se puedan generar en la figura 2.1. Así, se dice entonces que el sistema posee *estabilidad interna*, si todas las relaciones de transferencia que se pueden formar en el esquema son estables

Definición 1: Un sistema realimentado posee *estabilidad interna* si cualquier función de transferencia que se pueda plantear entre dos puntos del sistema de control, es estable.

La estabilidad interna permite considerar el caso de función de transferencia controlador-planta con posible cancelación exacta de polos y ceros inestables. En el caso particular de familia de plantas P sin polos inestables, sujetas a incertidumbres estables se puede probar la estabilidad interna aplicando el teorema de estabilidad de *Nyquist* siempre y cuando la incertidumbre no genere polos inestables en lazo abierto.

2.3.2 Desempeño robusto

Como ha sido mencionado en los párrafos anteriores, el desempeño robusto de un sistema de control está relacionado con la posibilidad de que el controlador logre que la dinámica deseada del sistema se cumpla para toda la familia de plantas. Las especificaciones pueden ser fijadas en el dominio del tiempo (máximo sobrepaso, tiempo de levantamiento, tiempo de asentamiento, etcétera), o en el dominio de la frecuencia, ancho de banda, margen de ganancia, etc. Los índices de desempeño que se consideran aquí son del tipo intervalo. Es decir, se fijan cotas superiores e inferiores para la función de transferencia en lazo cerrado T para toda la familia P . En términos de desigualdades quiere decir,

$$\left| T_{\min}(\omega) \right| < \left| T(\omega) \right| < \left| T_{\max}(\omega) \right| \quad (2.22)$$

$T_{mín}$ y $T_{máx}$ representan los límites tolerables para el lazo cerrado a cada frecuencia ω . Gráficamente esta restricción se muestra en la figura 2.3, en donde δT representa la diferencia entre $T_{mín}$ y $T_{máx}$.

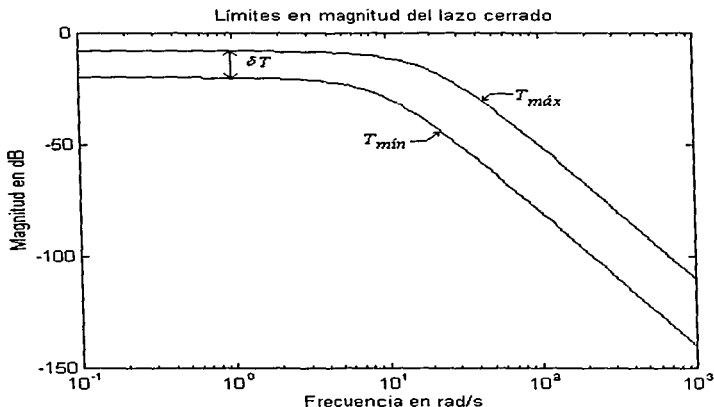


Figura 2.3. Límites en la magnitud de la función de transferencia en lazo cerrado

2.3.3 Rechazo a perturbaciones

En la ecuación 2.10 la señal de perturbación D interviene como un término multiplicado por la función de sensibilidad S , por lo que si se desea que el efecto de las perturbaciones sea completamente eliminado en la salida, la función de sensibilidad S debe ser cero en el rango de frecuencias de la perturbación D . Por ejemplo, si la perturbación D tiene una componente de frecuencia $\omega = 10$ rad/s, la función de sensibilidad S evaluada en $\omega = 10$ rad/s debe ser cero para que la pueda rechazar el sistema de control retroalimentado. En general la condición de rechazo a perturbaciones se reduce al siguiente hecho [ref. 14].

“Una condición necesaria y suficiente para que el esquema de control retroalimentado de la figura 2.1, rechace la señal de perturbación, definida aquí como

$$D \equiv \frac{N_p}{D_p} \quad (2.23)$$

es que la función de transferencia en lazo abierto L tenga polos en las raíces de D_p , es decir que las raíces de D_p sean un subconjunto de los polos de L ."

2.5 Teoría de realimentación cuantitativa: QFT

La teoría de realimentación cuantitativa propuesta por Horowitz [ref. 12] parte de la filosofía de que se conoce la respuesta en frecuencia todo el conjunto de plantas que se desea controlar denotado por plantillas para cada frecuencia y que las especificaciones de diseño se dan en el dominio frecuencial como bandas de la respuesta deseada. El diseño o ajuste del controlador se realiza gráficamente en la carta de *Nichols*, buscando los movimientos de las plantillas que garanticen que no se violan las especificaciones de diseño para toda la familia o plantilla y para toda ω . En particular, los parámetros de diseño son expresados en forma de cotas en el dominio de la frecuencia, y son éstas las que determinan las regiones en la carta de *Nichols* en donde la respuesta en frecuencia o plantilla de la función de transferencia de lazo abierto no debe entrar. Una vez determinados los valores de L adecuados a cada frecuencia, se calcula el controlador y posteriormente se ajusta el prefiltro F para satisfacer las características especificadas del sistema global.

En general, el problema del diseño de realimentación cuantitativa original se puede transformar en un problema de optimización de la función de sensibilidad. En la referencia [ref.18], O. Nwokah ha mostrado que todo problema en el marco de un *QFT* puede transformarse en encontrar un par admisible de funciones C y F que sean estrictamente propias (más polos que ceros) y estables en el esquema de dos grados de libertad tal que se satisfagan las siguientes condiciones.

$$\text{a) Estabilidad robusta: } T \text{ es estable } \forall \alpha \in \Omega \quad (2.24)$$

$$\text{b) Desempeño robusto: } |T - T_p| \leq \delta T \quad \forall \alpha \in \Omega \quad (2.25)$$

$$\text{c) Atenuación de perturbaciones } |S_D| \leq S_{D_0} \quad \forall \alpha \in \Omega \quad (2.26)$$

$$\text{d) Margen de estabilidad relativa } \sup_{\omega} |T| \leq M_p \quad \forall \alpha \in \Omega \quad (2.27)$$

en donde T_o es la función de transferencia de lazo cerrado con tolerancia δT predefinida y cota en la función de transferencia de la sensibilidad ideal S_{Do} . Los autores derivan condiciones bajo las cuales existe una solución al problema **QFD**. Sin embargo, esta solución puede ser no realizable. Esto ha motivado que se generen soluciones gráficas o numéricas del problema **QFD**.

De la función de sensibilidad de *Bode*, la cual ha sido normalizada apropiadamente para incertidumbres grandes [ref. 6 y ref.18] se puede escribir

$$\frac{T - T_o}{T_o} = S \cdot \left[\frac{P - P_o}{P_o} \right] \quad \forall \alpha \in \Omega \quad (2.28)$$

luego,

$$|T_o - T| = \left| T_o \cdot S \cdot \frac{P - P_o}{P_o} \right| \quad (2.29)$$

y definiendo a

$$\delta_G \equiv \max_{\alpha \in \Omega} \left[\frac{P - P_o}{P_o} \right] \quad \forall s \quad (2.30)$$

entonces

$$\left| T_o \cdot S \cdot \frac{P - P_o}{P_o} \right| \leq |T_o| \cdot \delta_G \max_{\alpha \in \Omega} |S| \quad (2.31)$$

Si el extremo derecho de la desigualdad 2.31 está acotado por δ_T entonces la cota sobre la función de sensibilidad queda como

$$|S| \leq \frac{\delta_T}{\delta_G |T_o|} \equiv M_T \quad \forall \omega \geq 0, \quad \forall \alpha \in \Omega \quad (2.32)$$

en donde M_T define un límite de la función de sensibilidad del sistema retroalimentado y el cual se fija en términos de la sensibilidad requerida para el desempeño robusto del sistema. Por otro lado, como la función de transferencia de las perturbaciones es por definición la misma función de sensibilidad S , la cota superior impuesta para S debe ser menor a la función de transferencia de lazo cerrada perturbada ideal

$$|\mathbf{S}| \leq |\mathbf{S}_{D_o}| \equiv \mathbf{M}_S \quad \forall \omega \geq 0, \quad \forall \alpha \in \Omega \quad (2.33)$$

de tal forma que \mathbf{M}_S es la cota aceptable en la sensibilidad que se puede aceptar. Finalmente, la cota \mathbf{M}_p restringe el valor máximo de la función de transferencia del sistema retroalimentado, es decir el sobrepaso del sistema, lo cual puede traducirse por el caso monovariable, tomando en cuenta que $\mathbf{T} = \mathbf{I} - \mathbf{S}$, en

$$|\mathbf{S}(\alpha, \omega_h)| \leq \tilde{\mathbf{M}}_p \quad \forall \alpha \in \Omega \quad (2.34)$$

donde ω_h denota el ancho de banda del sistema. Por tanto, las especificaciones del sistema dadas en 2.24 a 2.25, han sido convertidas en desigualdades de la función de sensibilidad, \mathbf{S} y por lo tanto las restricciones se satisfacen simultáneamente si existe un controlador estabilizante \mathbf{C} , tal que \mathbf{S} sea estable para todo el rango Ω de variación del parámetro α y se satisfagan las desigualdades.

$$|\mathbf{S}| \leq \min\{\mathbf{M}_r, \mathbf{M}_s\} \equiv \mathbf{M} \quad \forall \omega \geq 0, \quad \forall \alpha \in \Omega \quad (2.35)$$

donde \mathbf{M} es una función acotada que cumple con las siguientes condiciones

$$1) \lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathbf{M}(\omega) = \mathbf{I} \quad (2.36)$$

$$2) \tilde{\mathbf{M}}(\omega_h) = \mathbf{M}_p \quad (2.37)$$

$$3) \sup_{\omega} \mathbf{M}(\omega) = \mathbf{M}_p \quad (2.38)$$

$$4) \mathbf{I} \leq \mathbf{M}_p \leq \mathbf{M}_D \leq \infty \quad (2.39)$$

Por lo tanto, es posible expresar las especificaciones de diseño tradicional del **QFT** (2.25 a 2.28) a través de una cota en la función de sensibilidad. En la siguiente sección se aprovecha este hecho para diseñar el controlador \mathbf{C} que satisfaga las condiciones 2.36 a 2.39 por medio de la parametrización de *Youla*.

Capítulo 3

3.1 Introducción

Como se hizo notar en el capítulo anterior una condición fundamental que debe cumplirse cuando se diseña un esquema de control es que el sistema en lazo cerrado sea internamente estable. De este requerimiento surge la pregunta, ¿se pueden determinar todos los controladores que garantizan estabilidad interna para una planta dada? Esta inquietud llevó a Youla en 1962 a demostrar que se pueden parametrizar en términos de un solo parámetro a todos los controladores que estabilizan una planta dada. A continuación se presenta un mecanismo para determinar los controladores C válido para sistemas SISO.

3.2 Parametrización del Controlador

Muchos de los problemas de síntesis de controladores pueden ser formulados de esta forma [ref. 9]: Dada una planta P , diseñar C tal que el sistema retroalimentado sea internamente estable y adquiera alguna propiedad adicional. El método de solución es parametrizar todos los controladores para los cuales la primer condición es cierta y luego buscar o determinar el parámetro para que la segunda condición se cumpla.

Considérese la factorización para una planta estable dada P expresada como un racional propio con N y M tales que no tengan factores comunes entre si

$$P = N \cdot M^{-1} \quad (3.1)$$

y sean X e Y dos funciones racionales propias y estables sin factores comunes, es decir coprimos, que satisfacen la ecuación

$$NX + MY = I \quad (3.2)$$

misma que cae dentro de la forma de la ecuación de *Bezout*. Entonces se puede demostrar que el conjunto de todos los controladores que estabilizan internamente la planta P , está dado por [ref. 19]

$$C = \frac{X + MQ}{Y - NQ} \quad (3.3)$$

donde Q es un parámetro libre que también pertenece al conjunto de las funciones racionales propias y estables. Esta ecuación es conocida como la parametrización de *Youla*.

Existen varios métodos para obtener factorizaciones coprimas de una planta nominal. Uno de ellos es a través de una representación en variables de estado, y tiene como ventaja ser numéricamente más robusta y propicia para el cálculo asistido por computadora. Sea entonces

$$\dot{x} = A_o x + B_o u \quad (3.4)$$

$$y = C_o x + D_o u \quad (3.5)$$

una representación en variables de estado de la planta nominal P , y cuya forma compacta puede escribirse como

$$P = \begin{bmatrix} A_o & B_o \\ C_o & D_o \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Tomando como ley de control la forma de retroalimentación de estados

$$u = -F_o x + v \quad (3.7)$$

donde F_o debe estabilizar a la planta P , se tiene que la ecuación de estado se transforma en

$$\dot{x} = (A_o - B_o F_o)x + B_o v \quad (3.8)$$

$$y = (C_o x - D_o F_o)x + D_o v \quad (3.9)$$

Por tanto, definiendo los sistemas N, M

$$N = \frac{Y(s)}{\xi(s)} = \begin{bmatrix} A_o - B_o F_o & B_o \\ C_o - D_o F_o & D_o \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$M = \frac{U(s)}{\xi(s)} = \begin{bmatrix} A_o - B_o F_o & B_o \\ -F_o & I \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

se tiene que $P = NM^t$. Además se puede demostrar que los sistemas X e Y definidos como

$$X = \begin{bmatrix} A_o - H_o C_o & H_o \\ F_o & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$Y = \begin{bmatrix} A_o - H_o C_o & -B_o - H_o D_o \\ -F_o & I \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

satisfacen la ecuación de *Bezout* (ec. 3.2) y que tanto las matrices $(A_o - B_o F_o)$ como $(A_o - H_o C_o)$ son estables. En las referencias [ref. 19] y [ref. 14] se presenta una derivación completa de estos resultados. A continuación se corrobora que el controlador dado por 3.3 satisface la ecuación de *Bezout*.

Asignando respectivamente al numerador y denominador del controlador las funciones de transferencia

$$cnum = X + MQ \quad (3.14)$$

$$cden = Y - NQ \quad (3.15)$$

se tiene al sustituir 3.14 y 3.15 en la ecuación de *Bezout* (3.2)

$$N \cdot cnum + M \cdot cden = I \quad (3.16)$$

y sustituyendo (3.14) y (3.15) en (3.17) se obtiene

$$N(X + MQ) + M(Y - NQ) = I \quad (3.17)$$

y reduciendo términos, se obtiene entonces

$$NX + MY = I \quad (3.18)$$

con lo cual se muestra que efectivamente la ecuación de *Bezout* se satisface generando un sistema en lazo cerrado estable.

Las expresiones de la función de sensibilidad y la función complementaria de sensibilidad en términos de la expresión del controlador se puede reducir a

$$S = M(Y - NQ) \quad (3.19)$$

$$T = N(X + MQ) \quad (3.20)$$

que igualmente satisfacen la ecuación

$$I = T + S \quad (3.21)$$

y por tanto

$$I = N(X + MQ) + M(Y - NQ) \quad (3.22)$$

Cuando la planta es estable las factorizaciones coprimas pueden adquirir los siguientes valores

$$N = P \quad (3.23)$$

$$M = I \quad (3.24)$$

$$X = 0 \quad (3.25)$$

$$Y = I \quad (3.26)$$

consecuentemente, el conjunto de todos los controladores generados por la sustitución de estos valores resulta ser

$$C = Q(I + PQ)^{-1} \quad (3.27)$$

donde Q es un parámetro libre que pertenece al conjunto de las funciones de transferencia estables y propias. Las expresiones de la función de sensibilidad en este caso son

$$S = I - PQ \quad (3.28)$$

$$T = PQ \quad (3.29)$$

En este caso es fácil observar que la suma de 3.28 y 3.29 es igual a la unidad.

$$I = S + T = I - PQ + PQ \quad (3.30)$$

Una de las principales conclusiones que se extraen de la parametrización de Youla, es que a través de las factorizaciones coprimas N , M , X e Y , junto con el parámetro libre Q , se generan *todos* los controladores estabilizantes de la planta nominal P y por ello se afirma que la parametrización del controlador C es una factorización coprima en el dominio de las funciones de transferencia estables y propias. El parámetro libre Q está restringido a pertenecer a este dominio, por lo tanto, se le puede asignar una forma genérica como una constante K con un racional dado por

$$Q = K \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} \quad (3.31)$$

en donde K corresponde a la ganancia, z_i corresponde a los ceros (con $i = 1, 2, \dots, m$) y p_j los polos estables (con $j = 1, 2, \dots, n$) de Q , cumpliéndose $n \geq m$.

No obstante, esto no quiere decir que *todas* las plantas sean estabilizantes, por lo tanto es necesario diferenciar qué plantas que son estabilizantes y cuáles no antes de intentar calcular el controlador con la parametrización de Youla.

Capítulo 4

4.1 Introducción

En este capítulo se propone el algoritmo que permite calcular y ajustar un controlador tal que se satisfagan las especificaciones de diseño impuestas en términos de una cota máxima tolerable de la función de sensibilidad 1.5 para la familia de plantas generadas por las ecuaciones 1.1 a 1.4. Es decir, se supone que los objetivos de control han sido expresados a través de la función de sensibilidad deseada S_{des} , y que el diseño de los controladores asistido por computadora permite ajustar iterativamente el controlador C_q , de tal manera que se reduzca el error entre la gráfica de magnitud de las funciones de sensibilidad deseadas S_{des} y de la función de sensibilidad real S_q , paso a paso por medio del parámetro Q dentro de los controladores estabilizantes (*Youla*).

4.2 Planteamiento del problema

Con objeto de enmarcar en el contexto de este capítulo el problema que se desea resolver, éste se replantea a continuación. Dada una familia de plantas lineal e invariante en el tiempo P , la cual esta representada por las máximas variaciones de su función de transferencia,

$$\left(|P_{max}|, \angle P_{max} \right) \quad (4.1)$$

$$\left(|P_{min}|, \angle P_{min} \right) \quad (4.2)$$

$$\left(|P_{min}|, \angle P_{max} \right) \quad (4.3)$$

$$\left(|P_{min}|, \angle P_{min} \right) \quad (4.4)$$

junto con los objetivos de diseño expresados a través de la función de sensibilidad deseada S_{des} en el dominio de la frecuencia, se desea encontrar un controlador estabilizante C_q calculado con la parametrización de *Youla* de tal manera que la función de sensibilidad S_q , generada con este controlador para toda la familia de plantas no rebase

los límites establecidos para la función de sensibilidad deseada S_{des} en el dominio de la frecuencia, es decir

$$|S_q(j\omega)| < |S_{des}(j\omega)| \quad \forall \omega \in \Omega_i \quad (4.5)$$

donde Ω_i es un conjunto arbitrario representativo del rango de frecuencias de interés.

4.3 Solución del problema

En los capítulos anteriores se señaló que es posible relacionar las características de diseño de la planta en lazo cerrado a través de la función de sensibilidad del sistema controlado, así mismo se mencionó que también es posible expresar la función de sensibilidad en términos del parámetro libre Q del controlador de Youla. Dados estos hechos, la alternativa de solución propuesta consiste en modificar la función de sensibilidad de la planta nominal a través de Q , de tal manera que se satisfagan la cota superior deseada al menos para el caso nominal y posteriormente en verificar que las funciones de sensibilidad de toda la familia de plantas satisfacen también la magnitud de la cota impuesta. Si la condición de sensibilidad no se satisface para toda la familia de plantas, entonces será necesario variar el parámetro libre hasta que la magnitud de la función de sensibilidad de toda la familia de plantas sean menores a la cota de sensibilidad deseada.

El criterio para aceptar o rechazar el controlador ajustado se basa en la comparación en el diagrama de Bode la cota máxima de sensibilidad deseada $S_{des}(j\omega)$ con las curvas de sensibilidad de la familia de plantas. En principio, si se desea que la sensibilidad sea cero, debido a que

$$S = M(Y - NQ) \quad (4.6)$$

se tiene que

$$MY - MNQ = 0 \quad (4.7)$$

es decir, la sensibilidad expresada en dB debe ser:

$$\left| \mathbf{S}_\theta \right| = -\infty \quad (4.8)$$

Sin embargo, debe recordarse que la función de sensibilidad y su función complementaria están relacionadas por medio de

$$\mathbf{I} = \mathbf{T} + \mathbf{S} \quad (4.9)$$

lo cual implica que no es posible que \mathbf{S} sea igual a cero en todo el rango de frecuencias. No obstante, dada la forma de la ecuación (4.6), es posible para una factorización de la planta nominal $\mathbf{G} = \mathbf{N}\mathbf{M}$, reducir \mathbf{S} tratando de igualar \mathbf{N} al producto $\mathbf{Y}\mathbf{Q}$ en el intervalo de frecuencias en que la función de transferencia \mathbf{M} tiene ganancias grandes. Una vez ajustada la función de transferencia \mathbf{Q} de tal manera que la sensibilidad \mathbf{S} de la planta nominal quede por debajo de la cota máxima tolerada, será necesario verificar si con el controlador resultante satisface la relación

$$\left| \mathbf{S}_i(j\omega) \right| < \left| \mathbf{S}_{des}(j\omega) \right| \quad \forall \omega \in \Omega_i \quad (4.10)$$

para todos los 4 miembros representativos de la familia de plantas. A continuación se presenta la filosofía arriba propuesta en forma de algoritmo mencionando las ventajas desde un punto de vista de interactivo.

4.3.1 Algoritmo de ajuste e implementación

1. Transformar la planta nominal a una representación en variables de estado $\mathbf{P}=(\mathbf{A}_o, \mathbf{B}_o, \mathbf{C}_o, \mathbf{D}_o)$.
2. Proponer una ubicación de polos para calcular las matrices de retroalimentación de la ecuación (3.8 y 3.9), \mathbf{F}_o y \mathbf{H}_o tal que las matrices $(\mathbf{A}_o - \mathbf{B}_o \mathbf{F}_o)$ y $(\mathbf{A}_o - \mathbf{H}_o \mathbf{C}_o)$ tengan valores propios estables.
3. Definir el intervalo de frecuencias Ω de interés para la respuesta en frecuencia.

4. Calcular las factorizaciones coprimas N , M , X e Y con las ecuaciones 3.13, 3.14, 3.16 y 3.17.
5. Inicializar el apuntador de la iteración $i=0$ y proponer $Q_0=I$.
6. Dividir Ω en j intervalos de frecuencia denotados como ω_j (donde $j=1,2,\dots,m$) e inicializar con $j = 1$; estos intervalos caracterizan las ventanas en donde Q debe ser modificada paso a paso.
7. Calcular el parámetro de acuerdo con la ecuación $Q_i = \prod_{k=0}^i Q_k$
8. Calcular el controlador C_i asociado a Q_i a partir de la ecuación 3.18.
9. Calcular la sensibilidad S_{qi} de la planta nominal a partir de la ecuación 3.20.
10. Mostrar en la pantalla del monitor las siguientes cuatro gráficas de Bode, magnitud de la sensibilidad límite S_{des} y sensibilidad nominal S_{qi} , conjuntamente las magnitudes y fases de Y y NQ_i y las magnitudes de M y de $Y - NQ_i$ para el intervalo ω_j .
11. Determinar de manera visual los puntos en frecuencia donde la sensibilidad no satisface el desempeño deseado, es decir donde $|S_{qi}| > |S_{des}|$ para el intervalo ω_j .
12. Si $|S_{qi}(\omega_j)| > |S_{des}(\omega_j)|$ incrementar el apuntador i , seleccionar entre las funciones permisibles una nueva Q_i e ir al paso 7. En caso contrario continuar.
13. Incrementar el apuntador del intervalo de frecuencia $j = j + 1$
14. Si $j > m$ ir al paso 16, de lo contrario continuar.
15. Incrementar $i=i+1$ y proponer otro valor para Q_i e ir al paso 7.
16. Obtener las funciones de sensibilidad de las cuatro plantas representativas de la familia S_f .

18. Trazar el diagrama de *Bode* de $|S_f|$ y comparar con $|S_{des}|$.
19. Si $|S_f| < |S_{des}|$ el ajuste queda concluido. En caso contrario, proponer otra ubicación de polos e inicializar de nuevo en el paso 2.

4.4 Estructura del parámetro Q

Cualquier controlador estabilizante expresado con la parametrización Q depende de las factorizaciones N , M , X e Y y obviamente de la función de transferencia propia y estable Q seleccionada. Por otro lado, en el caso de las factorizaciones coprimas propuestas en este trabajo, éstas dependen de las matrices F y H es decir de la asignación de polos. Estos dos hechos implican que la función de transferencia Q puede llevarse siempre a un producto de funciones básicas estables de primer y segundo orden.

Por tal motivo, para la implantación del programa, el usuario tiene la opción de adicionar la función Q como productos de las siguientes funciones básicas.

1. $Q = k$ donde k es una constante cuya forma en el diagrama de *Bode* es una línea horizontal.
2. $Q = \frac{b(s+a)}{a(s+b)}$ donde a y b son valores reales positivos. Esta forma graficada en el diagrama de *Bode* corresponde a una curva con dos cambios de pendiente los cuales ocurren en las frecuencias en donde se ubican el cero y el polo específicamente. El efecto de premultiplicar por la ubicación del polo al factor del numerador y por la ubicación del cero al factor del denominador garantiza que no se modifique la ganancia estática de Q .
3. $Q = \frac{a}{s+a}$, con esta forma se introduce un polo estable de valor a con lo que gráficamente se está introduciendo un cambio de pendiente en la frecuencia a .

4. $Q = \frac{s^2 + a^2}{(s + b)(s + c)}$, al igual que en los casos anteriores, la ubicación de los ceros y de los polos es respectivamente a , a , b y c . La característica de esta función es que la ganancia de Q en la frecuencia a es cero.

5. $Q = \frac{n}{d}$, introduce cualquier pareja de polinomios n y d siempre y cuando d sea estable. Esta restricción es verificada por el programa y en caso de no verificarse, la Q propuesta no se acepta hasta que d sea válida.

6. $Q = \frac{Y}{N}$, donde N es invertible, permite que S_q sea aproximadamente igual a $M \cdot \left(Y - N \cdot \frac{Y}{N} \right) \approx 0$ ó $\approx -\infty$, y por tanto la función de sensibilidad S_q y la sensibilidad para toda la familia S_f sea menor a la restricción de sensibilidad límite S_{des} . Se hace notar que esta opción está sujeta a que N no tenga ceros en el lado del semiplano derecho.

4.5 Estructura general del paquete de diseño

La programación se ha implantado para trabajar con la versión 4.2 de MATLAB [ref.15]. Esta funciona desde WINDOWS y primordialmente aprovecha las características gráficas de este ambiente. Se hace notar a lo largo del siguiente texto que cuando se haga mención del *programa* se referirá al trabajo propuesto y cuando se mencione el o los *paquetes* querrá decir que se refiere a los programas comerciales como MATLAB, WINDOWS, etc.

El programa consta de tres partes y cada una cuenta con varios subprogramas. Por medio de pantallas de opción múltiple el usuario hace uso de las rutinas principales y de las auxiliares. Las partes principales que integran el programa son

- A.- Parte introductoria = Menú de aplicaciones
- B.- Parte Principal = Diseño del controlador

4.5.1 Caracterización de la planta y especificaciones de diseño

Inicialmente el programa muestra una pantalla de aplicaciones en donde se ofrecen las siguientes opciones:

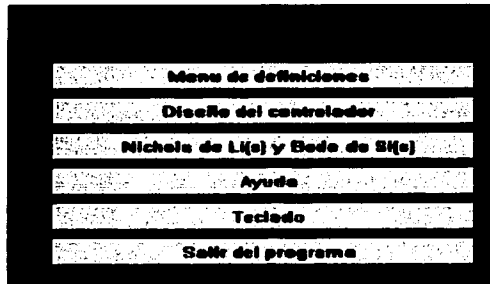


Figura 4.1 Menú de aplicaciones

La primera opción de este menú permite caracterizar el problema en particular que se desea resolver a través de las siguientes definiciones.

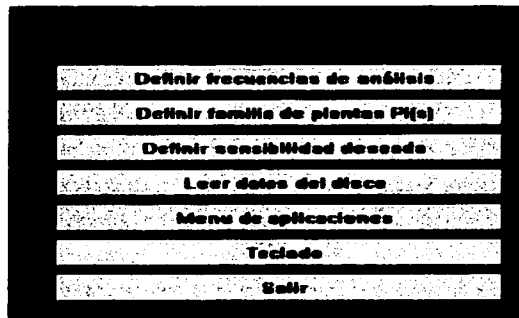


Figura 4.2 Menú de definiciones.

1) **Definir las frecuencias de análisis.** En esta opción se definen los intervalos de frecuencia, ya sea indicando la frecuencia mínima y la máxima con espaciamiento logarítmico entre los puntos o con un espaciamiento indicado por el usuario. El número de puntos con los cuales se define el trazo de la respuesta en frecuencia también debe ser suministrado. El nombre reservado para el vector de frecuencias de análisis junto con el número de puntos es *omega* y el formato es *[fmin, fmax, np]*, en donde

fmin es la frecuencia mínima de análisis,
fmax es la frecuencia máxima de análisis,
np es el número de puntos en los que se divide el intervalo en frecuencia.

2) **Definir la familia de plantas.** Este menú permite describir el modelo nominal y las cuatro plantas extremas.

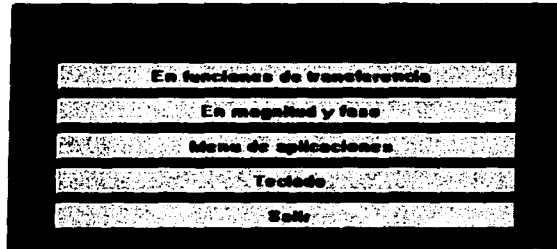


Figura 4.3 Menú para definir la familia de plantas

Esta selección tiene como objeto poder introducir las funciones de transferencia de las familias de plantas P_i . Esto se realiza empleando el numerador y denominador de cada uno de los cuatro extremos usando polinomios de acuerdo al formato de MATLAB, es decir

$$[b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0]$$

define el polinomio en s ,

$$b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0 s^0$$

Al seleccionar la segunda opción, el usuario define por medio de puntos la magnitud y fase (en grados) de cada uno de los miembros de la familia de plantas, tomando en cuenta la definición previa del vector de frecuencias de interés **omega** y el número de puntos de análisis **np**. Los vectores que se definen son los siguientes.

gmin- magnitud y fase mínimos

gmax- magnitud y fase máximos

gmix- magnitud mínima y fase máxima

gmxi- magnitud máxima y fase mínima

gnom- función de transferencia de la planta nominal

3) **Definir sensibilidad deseada.** Existen dos opciones para definir la sensibilidad deseadada **S_{des}**. En la primera opción el programa pregunta por los valores de magnitud y fase para los **n** puntos del intervalo **omega** definido previamente. El formato es [**S_{des}(np,2)**], donde **S_{des}** es el nombre de la matriz de datos de sensibilidad deseada que tiene dos columnas, una de magnitud y otra de fase en grados. En la segunda opción el usuario define la magnitud de la respuesta en frecuencia de la función de sensibilidad deseada en magnitud por medio de un vector de **n** puntos, mientras que la fase es calculada automáticamente.

4) **Leer datos del disco.** Este botón se emplea cuando se quieren cargar a la memoria los datos del problema los cuales ya se hayan salvado en un archivo de datos. (datos como las frecuencias de análisis, las familias de plantas y la sensibilidad deseada).

5) **Menú de aplicaciones.** Con esta opción se regresa al menú de aplicaciones.

6) **Teclado.** Con este botón es posible regresar a los comandos de MATLAB. Para restablecer el flujo del programa se deberá dar entrada al comando **return**.

7) **Salir.** Al elegir esta opción se da por terminada la ejecución del programa.

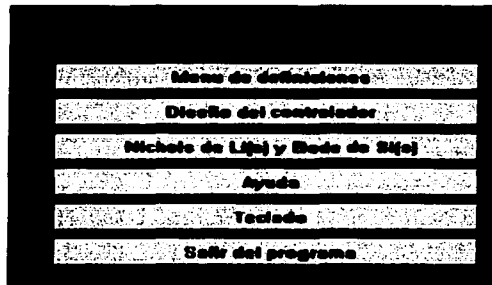


Figura 4.4 Menú de aplicaciones

4.5.2 Diseño del controlador- La segunda opción del menú de aplicaciones de la figura 4.4, sólo puede ser seleccionada cuando se han definido o cargado en la memoria los datos que definen el problema por resolver en el formato señalado anteriormente.

El diseño comienza propiamente calculando las factorizaciones coprimas N , M y las realizaciones X e Y , para tal efecto, se requiere de un vector que contenga el número adecuado de elementos para la ubicación de polos deseada. Este vector tiene el siguiente formato: $[-P_1, -P_2, \dots - P_n]$. Habiendo sido calculadas N , M , X e Y , el siguiente paso es definir los valores iniciales del parámetro Q . Esta función de transferencia debe ser propia y estable. Q se define con una ganancia k , y los vectores que contienen los coeficientes del polinomio estable $[Qn_n, Qn_{n-1}, \dots, Qn_0]$ para el numerador y $[Qd_n, Qd_{n-1}, \dots, Qd_0]$ para el denominador. Estos parámetros son suficientes para comenzar a ajustar la función de sensibilidad.

La siguiente parte del diseño del controlador se realiza con la ayuda de pantallas. Primeramente aparecen en la pantalla del monitor las gráficas de Bode en magnitud y fase de la planta nominal considerada, pulsando la tecla de regreso de carro se muestra la gráfica de magnitud de la respuesta en frecuencia de las funciones M y de Y . Oprimiendo de nuevo la tecla de regreso de carro se avanza a la siguiente pantalla. En este caso la

(extremo izquierdo superior) muestra el trazo de *Bode* en magnitud de la función de sensibilidad deseada S_{des} y la función de sensibilidad obtenida con las funciones M e Y y el parámetro libre Q , en la segunda gráfica (extremo superior derecho) se muestra la gráfica de magnitud de las funciones Y , N y NQ . En la tercer gráfica (extremo inferior izquierdo) aparece la magnitud de la respuesta en frecuencia de M y $Y - NQ$. La cuarta gráfica (extremo inferior derecho) muestra el comportamiento de la fase de las funciones Y , N y NQ en el intervalo de frecuencia ω .

La figura 4.5 muestra tal y como aparece en la pantalla del monitor el conjunto de gráficas que están asociadas a la figura **Figure No.1** de MATLAB.

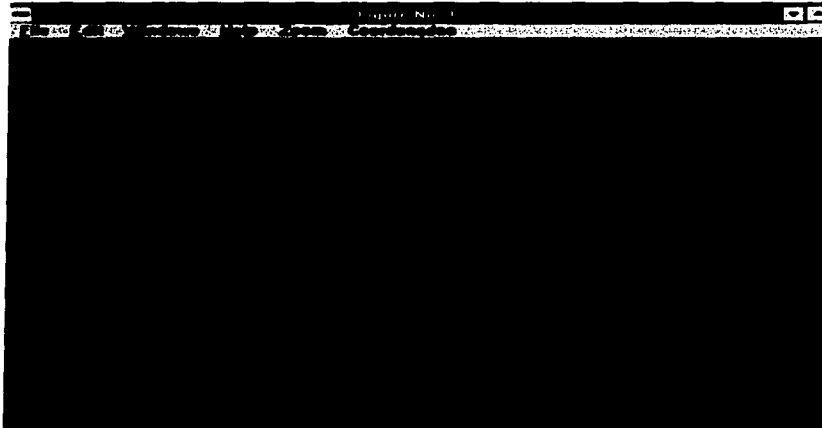


Figura 4.5 Gráficas de diseño.

Sobre esta pantalla aparece un menú con las opciones para introducir el nuevo valor del parámetro libre Q presentadas en la figura 4.6.

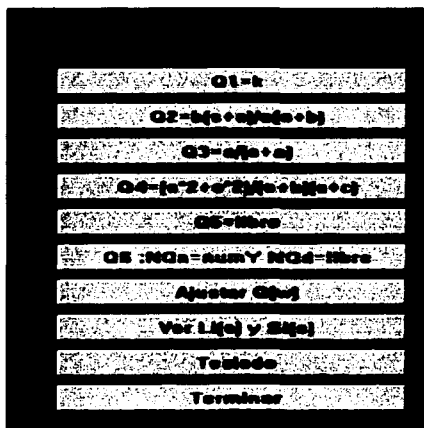


Figura 4.6 Menú de opciones del parámetro Q

Para introducir alguna de las opciones, simplemente se debe colocar el cursor sobre el parámetro escogido y presionar el botón de selección del ratón. Es necesario oprimir alguna tecla para que aparezca la pantalla de comandos de MATLAB. Según la forma deseada de Q el programa preguntará por los parámetros asociados a ésta. Después de introducir cada nuevo parámetro se debe oprimir en el teclado de la computadora la tecla de regreso de carro.

La primer opción, es la de la ganancia kq . El valor de la ganancia se selecciona con ayuda de la gráfica superior derecha de la figura 4.5. Al oprimir el botón del ratón, sobre la gráfica aparece el mensaje

"Escoja una frecuencia para calcular kq "

el cursor cambia de forma a una cruz. El valor de kq asignado hace que se igualen las magnitudes de las gráficas de Y y NQ en la frecuencia en la que se coloque la marca del cursor. Inmediatamente después se actualizan todas las gráficas con este cambio de ganancia y se presenta otro menú que tiene las opciones

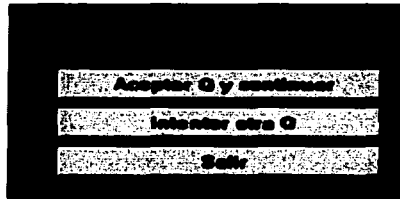


Figura 4.7 Menú de aceptación o rechazo de Q

Al escoger la primera opción, se aceptan y almacenan los cambios realizados en el parámetro libre Q , se actualizan las gráficas de sensibilidad y la ejecución del programa continúa. Si se escoge la segunda opción, no se almacenan los cambios en Q y las gráficas se restauran a su forma anterior.

De manera similar a la anterior, las demás opciones de la figura 4.6 permiten ajustar a Q de acuerdo a la forma elegida. Es decir, se selecciona alguna forma adecuada, se introducen los valores de los coeficientes de los polinomios del numerador y denominador de Q , se pulsa la tecla de regreso de carro para introducir los valores nuevos y se actualizan las gráficas de la figura **Figure No.1**. El usuario decide si acepta el nuevo valor de Q y continúa o si intenta otro valor por medio de los menús de selección para cada posible valor de Q como el de la figura 4.7. Se hace notar que cuando se desea introducir una Q libre, se deben definir en forma de polinomios tanto el numerador como el denominador de Q .

Como resultado de la introducción de las formas de Q , siguiendo los pasos 10, 11 y 12 del algoritmo de ajuste presentado en la sección 4.3.1, el programa revisa cuando la condición

$$|S_{dex}| > |S_q| \quad (4.11)$$

es cierta y se ha logrado encontrar un controlador robusto deseable para la planta nominal en todos los intervalos j en las frecuencias Ω . Es decir, si la condición arriba mencionada no se cumple, el programa entra en el ciclo iterativo descrito en el algoritmo general de ajuste; específicamente en los pasos 7 a 12 en los cuales el usuario determina, calcula y

propone entre las funciones permisibles, una nueva Q . Toda vez que cada uno de los intervalos j las funciones NQ e Y sean exactamente iguales, el apuntador de control de ventana se incrementará para analizar la siguiente ventana y así sucesivamente hasta terminar con todas las ventanas. Cuando éste sea el caso, el programa presenta en la pantalla la figura llamada **Figure No.1** de Windows, con las gráficas de respuesta en frecuencia en todo el intervalo Ω , para continuar el usuario pulsa la tecla de regreso de carro para poder ver el valor del controlador final y el valor de la Q final.

Cuando se logra que la magnitud de la sensibilidad S_q sea menor a la de la sensibilidad deseada S_{des} , no implica necesariamente que las sensibilidades de la familia de plantas también estén por debajo de S_{des} , por ello es necesario ver la gráfica de *Bode* de la familia de sensibilidades comparadas con S_{des} . Esto se logra eligiendo la opción *Bode* y *Nichols* de $S_i(s)$ del menú de opciones para ajustar Q . Como resultado la computadora muestra las figuras 3, 4 y 5 de Windows. La figura 2 (**Figure No.2**) está reservada para las cuatro gráficas del ajuste de la opción $S = 1 - TQ$. La figura 3 (**Figure No.3**) corresponde al *Nichols* y *Bode* de S_i , la figura 4 (**Figure No.4**) corresponde al *Bode* de magnitud de CG_i y la figura 5 (**Figure No.5**) corresponde a la respuesta al escalón unitario de la familia de plantas en lazo cerrado T_i .

Ajustar $Q(w)$ se emplea cuando la sensibilidad de algún miembro de la familia de plantas sobrepasa la cota de la sensibilidad deseada S_{des} . En esta opción, el ajuste se realiza tomando en cuenta el cálculo de la sensibilidad con la ecuación $S = 1 - TQ$, donde T es la función de transferencia del lazo cerrado de la planta nominal y el controlador C encontrado hasta ese momento. Como en el caso anterior, se requieren probar distintos valores para Q que satisfagan con dicha condición. La figura 2 está reservada para dicho ajuste, en ella se presentan cuatro gráficas (tres de ellas distintas). En la primer y tercer gráfica (siguiendo el mismo orden usado en la figura 1) se presenta el *Bode* de magnitud de S_{des} y S_{iq} , en la segunda y cuarta gráficas se visualizan el *Bode* de magnitud y de fase de TQ respectivamente. Las opciones de Q han sido programadas de la misma forma y siguiendo la misma lógica de operación que para el primer ajuste, $S = M(Y - NQ)$.

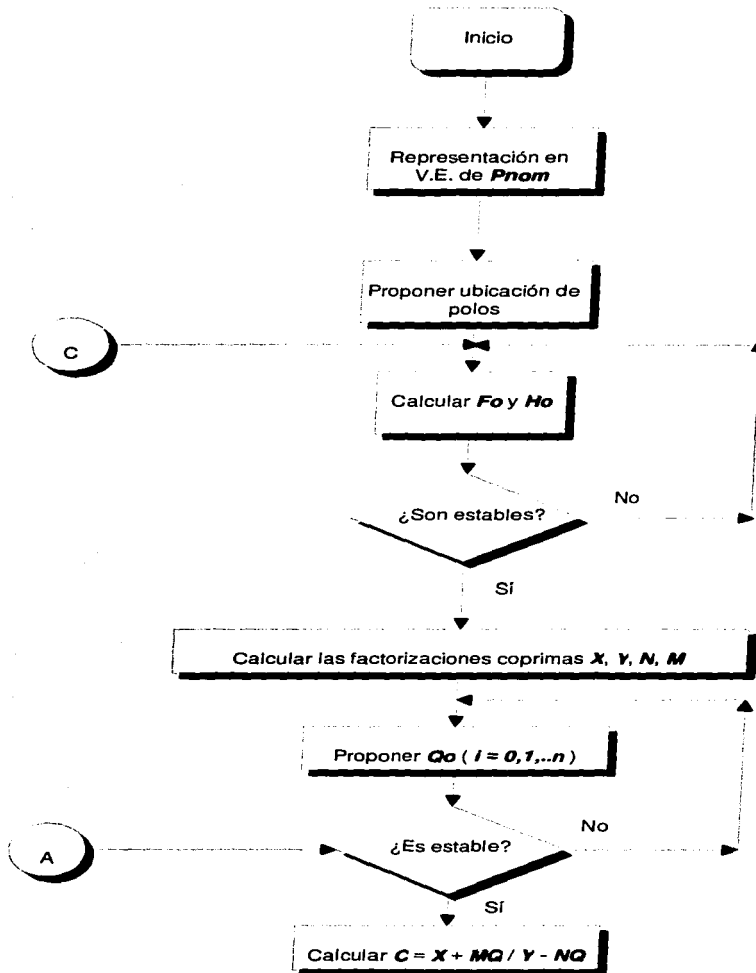
Se recomienda guardar los datos de la ubicación de polos, los valores de Q para realizar análisis posteriores con estos mismos valores. Esto se logra salvando los datos en algún disco flexible con el siguiente comando `save [unidad de discos]:[nombre del archivo].mat [nombre de las variables de interés]`.

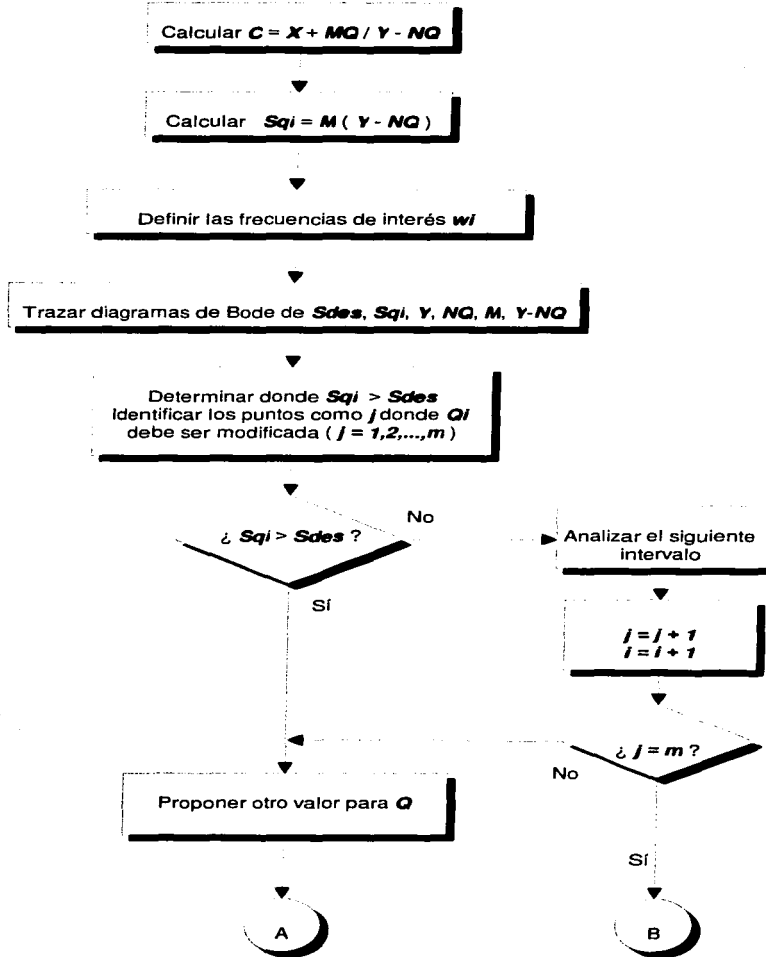
Es importante resaltar que entre el conjunto de dos funciones que aparecen en la barra superior de opciones de WINDOWS de la figura 4.5 o *Figure No.1* de Windows, es decir, **File**, **Edit**, **Windows**, **Help**, **Zoom** y **Coordenadas**, las dos últimas ayudan a amplificar la gráfica y obtener las coordenadas de algún punto sobre alguna gráfica seleccionada convenientemente. A continuación se describe la forma en que se aprovechan estas opciones.

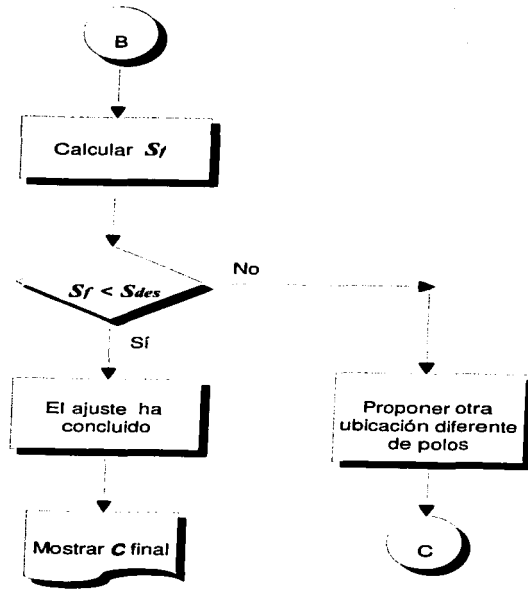
Zoom: Permite seleccionar una de las cuatro gráficas para hacer un acercamiento. Al escoger con el cursor y presionar el botón de selección del ratón en **Zoom** aparecen cuatro opciones, que corresponden a cada una de las cuatro gráficas, se debe presionar el botón de selección del ratón sobre la gráfica deseada. Después, para definir un rectángulo de la zona que se desea amplificar, primero se posiciona el cursor en el extremo inferior izquierdo del rectángulo, se presiona el botón de selección del ratón, después se selecciona el extremo superior derecho del rectángulo y se presiona el botón de selección del ratón. Como resultado, la amplificación del rectángulo escogido se realiza automáticamente después de seguir este procedimiento.

Coordenadas: Al igual que en el caso anterior, la selección de **Coordenadas** permite obtener las coordenadas de algún punto dentro de las cuatro gráficas al ubicar el cursor en el punto deseado de la gráfica correspondiente. Esto es después de presionar el botón de selección del ratón, y pulsar la tecla de regreso de carro. Para ver el valor de las coordenadas del punto es necesario presionar el botón de selección del ratón en **Windows** y seleccionar **Matlab command window**, esto hace que presente la pantalla de comando de MATLAB y se vean las coordenadas. Oprimiendo nuevamente la tecla de regreso de carro se regresa al programa.

NOTA: Después de haber probado varios valores de Q aparece el mensaje "**FILE TABLE OVERFLOW**" el cual es un error identificado por el sistema operativo DOS y que impide el proceso de ajuste, terminando la corrida del programa. Este es un error natural, debido principalmente a la capacidad disponible de memoria para manejar los valores numéricos. Esta capacidad de memoria variará dependiendo de las configuraciones computacionales de que disponga el usuario. Sin embargo, el programa continúa después de teclear **KAG2** si el error ocurrió en el ajuste de $S = M(Y - NQ)$ o después de teclear **KAG3** si el error ocurrió durante el ajuste de $S = I - TQ$.







Capítulo 5

5.1 Introducción

Con objeto de validar el algoritmo propuesto para diseñar controladores robustos y además para mostrar las opciones amigables disponibles en el programa, se presentan en este capítulo dos ejemplos de aplicación tomados de la literatura de control. Ambos ejemplos sirven además para ilustrar de manera concisa el procedimiento que se debe seguir para poder diseñar un controlador robusto.

5.1 Control de dirección de un barco.

El primer ejemplo corresponde al diseño de un sistema de control para regular un barco sujeto a perturbaciones paramétricas. Además el movimiento del barco está sujeto los efectos del viento, el oleaje y las corrientes marinas cuyos efectos se pueden describir como fuerzas adicionales. El modelo matemático general aproximado y linealizado (Åström) tiene la siguiente función de transferencia:

$$P = \frac{Y}{U} = \frac{k}{s(s+a)} \quad (5.1)$$

donde Y corresponde a la dirección del barco y la variable de control U corresponde al ángulo del timón del barco. El planteamiento del problema fue extraído del trabajo presentado por C.Verde y E.Eslava en la referencia [ref. 10] y en el cual se propone que las perturbaciones se caractericen en la dirección de desplazamiento del barco a través de la expresión

$$v = v_o \text{sen}(\omega t) + v_o \quad (5.2)$$

debido a que los eventos extremos se pueden considerar como periódicos dominados por el efecto en las olas; en la ecuación (5.2), el valor $v_o = 0.2$ (°/s) está asociada a la amplitud de las olas y la frecuencia del oleaje ω varía de 1 a 2 (rad/seg). Los parámetros a y k no son constantes y dependen de la velocidad hacia adelante, de la longitud y tipo de éste y de su carga. El parámetro k depende del desplazamiento del área del timón. En la

referencia [ref. 10] se proponen variaciones paramétricas en el intervalo [0.04, 0.75] para el parámetro a con un valor nominal de $a_{nom} = 0.26$ y el intervalo [0.18, 0.38] para la ganancia con un valor nominal de $k_{nom} = 0.38$

De acuerdo con el procedimiento de diseño aquí presentado se requiere caracterizar la familia de plantas por medio de las cuatro fronteras de la respuesta en frecuencia de ella. Tomando en cuenta los valores extremos de los intervalos de variación se asignaron como límites las respuestas en frecuencia de las siguientes funciones de transferencia:

$$g_{nom} = \frac{0.38}{s(s + 0.26)} \quad (5.3)$$

$$g_{max} = \frac{0.18}{s(s + 0.04)} \quad (5.4)$$

$$g_{min} = \frac{0.37}{s(s + 0.75)} \quad (5.5)$$

$$g_{mix} = \frac{0.33}{s(s + 0.505)} \quad (5.6)$$

$$g_{mxi} = \frac{0.28}{s(s + 0.395)} \quad (5.7)$$

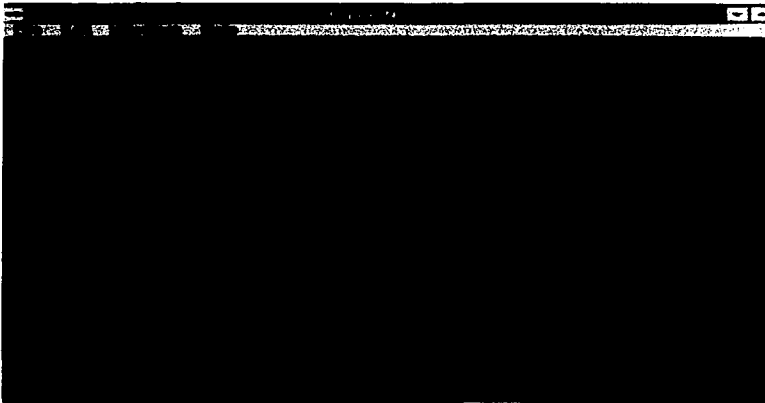


Figura 5.1 Respuesta en frecuencia de la planta nominal g_{nom} .

Capítulo 5: Ejemplos

La figura 5.1 muestra la respuesta en frecuencia en lazo abierto del barco para los valores nominales propuestos.

Considerando que se desea diseñar un controlador robusto de tal manera que el sistema de lazo cerrado de un grado de libertad satisfaga las siguientes características:

- Estable en malla cerrada para todas las variaciones consideradas de la planta, es decir a y k dentro del intervalo considerado.
- Sea capaz de atenuar las perturbaciones v para todos los miembros de la familia de plantas consideradas.

Para lograr este objetivo se empleó como herramienta de diseño la función de sensibilidad deseada S_{des} presentada en la figura 5.2, en donde la magnitud de la sensibilidad es inferior a la unidad para los valores de frecuencia especificados en los objetivos de diseño e igual a la unidad para valores mayores de 2 (rad/s).

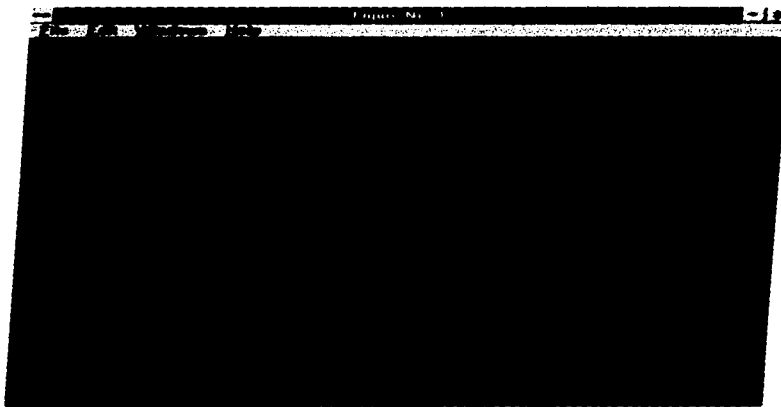


Figura 5.2 Magnitud de la sensibilidad deseada S_{des} .

Inicialmente se propuso una ubicación de polos en -1 para las factorizaciones coprimas de la planta nominal (N, M) y (X, Y) . Como se mencionó en el capítulo anterior se sugiere que la Q inicial sea unitaria en la primera iteración de ajuste del controlador. A continuación el diseñador propone un valor de Q tratando de reducir la diferencia entre $Y-NQ$ en los puntos de frecuencia en donde la sensibilidad no satisface el desempeño comparando las gráficas de magnitud y fase de Y y NQ . En la esquina superior izquierda

La figura 5.1 muestra la respuesta en frecuencia en lazo abierto del barco para los valores nominales propuestos.

Considerando que se desea diseñar un controlador robusto de tal manera que el sistema de lazo cerrado de un grado de libertad satisfaga las siguientes características:

- Estable en malla cerrada para todas las variaciones consideradas de la planta, es decir a y k dentro del intervalo considerado.
- Sea capaz de atenuar las perturbaciones v para todos los miembros de la familia de plantas consideradas.

Para lograr este objetivo se empleó como herramienta de diseño la función de sensibilidad deseada S_{des} presentada en la figura 5.2, en donde la magnitud de la sensibilidad es inferior a la unidad para los valores de frecuencia especificados en los objetivos de diseño e igual a la unidad para valores mayores de 2 (rad/s).

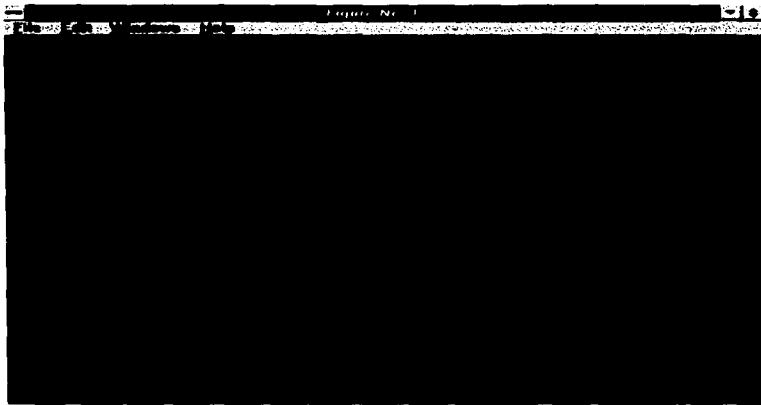


Figura 5.2 Magnitud de la sensibilidad deseada S_{des} .

Inicialmente se propuso una ubicación de polos en -1 para las factorizaciones coprimas de la planta nominal (N,M) y (X,Y) . Como se mencionó en el capítulo anterior se sugiere que la Q inicial sea unitaria en la primera iteración de ajuste del controlador. A continuación el diseñador propone un valor de Q tratando de reducir la diferencia entre $Y-NQ$ en los puntos de frecuencia en donde la sensibilidad no satisface el desempeño comparando las gráficas de magnitud y fase de Y y NQ . En la esquina superior izquierda

Capítulo 5: Ejemplos

se observa la gráfica de *Bode* en magnitud de la función de sensibilidad deseada S_{des} y la sensibilidad ajustada S_q , en el semiplano derecho de la pantalla están en la parte superior, las gráficas de *Bode* en magnitud de las funciones Y , N y NQ y en la parte inferior sus gráficas en fase. En la esquina inferior izquierda se muestra la gráfica de *Bode* de las funciones M e $Y-NQ$.

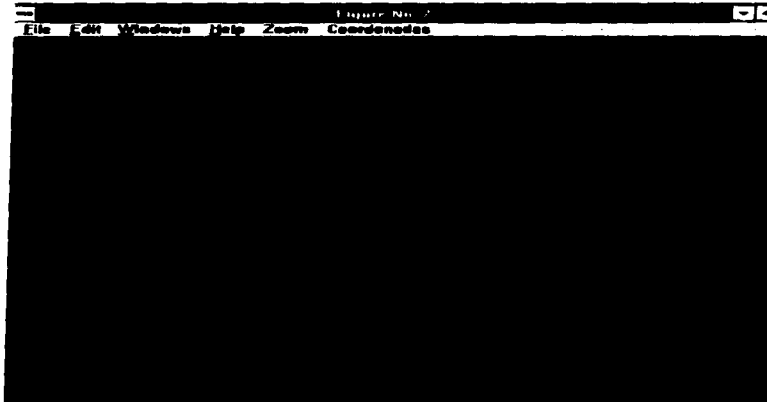


Figura 5.3 Figure No.2

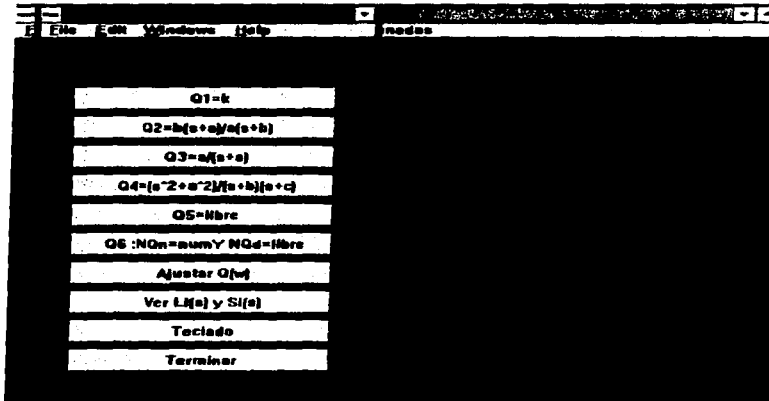


Figura 5.4 Selección de la forma de la función Q

Para seleccionar el parámetro libre el usuario dispone de la pantalla que se presenta sobrepuesta a la ventana de las gráficas de *Bode* en la figura 5.4.

Si se desea conocer la forma de las funciones Y y NQ se debe seleccionar con el ratón la opción **Teclado** para mantener en pausa el desempeño del programa principal y poder hacer uso de las funciones de MATLAB. Para el ejemplo en cuestión las funciones Y y NQ son:

$$Y = \frac{(s + (3.87 + j2.6478))(s + (3.87 - j2.6478))}{(s + 2)(s + 2)} \quad (5.8)$$

$$NQ_0 = \frac{0.38}{(s + 2)(s + 2)} \quad (5.9)$$

Como se desea que la función NQ iguale a Y , el numerador de NQ debe tener aproximadamente los mismos ceros que Y , por tanto es necesario multiplicar a N por una función propia que contenga los ceros de Y y además un par de polos ubicados fuera de los límites de las frecuencias de interés. De esta forma se seleccionó al parámetro libre Q como

$$Q = \frac{(s + (3.87 + j2.6478))(s + (3.87 - j2.6478))}{(s + (5000 \pm j8660.3))} \quad (5.10)$$

Note que se seleccionaron polos complejos en una frecuencia muy alta y por lo tanto sus efectos no alteran el comportamiento del sistema en el intervalo de frecuencias de interés, como se comprueba en la figura 5.5.

Después de introducir este valor de Q , el usuario tiene la opción de inspeccionar visualmente la diferencia que existe entre las funciones de sensibilidad así como de las magnitudes y de las fases de Y y NQ con la Q propuesta. Como se observa en la figura 5.5, las fases son muy similares en todo el intervalo de frecuencias de interés, pero las magnitudes difieren. Del menú de formas de Q se selecciona con el ratón la opción **Q1 = k** para ajustar k . La siguiente figura muestra como el paquete almacena esta ganancia preguntándole al usuario el punto en el que desea igualar las ganancias entre las funciones Y y NQ .

En el caso de aceptar la forma de **Q2** y la ganancia k el problema grafica de nueva cuenta las respuestas en frecuencia de interés. En particular, dado ahora que las magnitudes y las fases son idénticas en el intervalo de frecuencias de interés, la magnitud de la sensibilidad S_y ha cambiado de tal forma que ahora se encuentra por debajo de la sensibilidad deseada S_{des} , como se muestra en la figura 5.7.

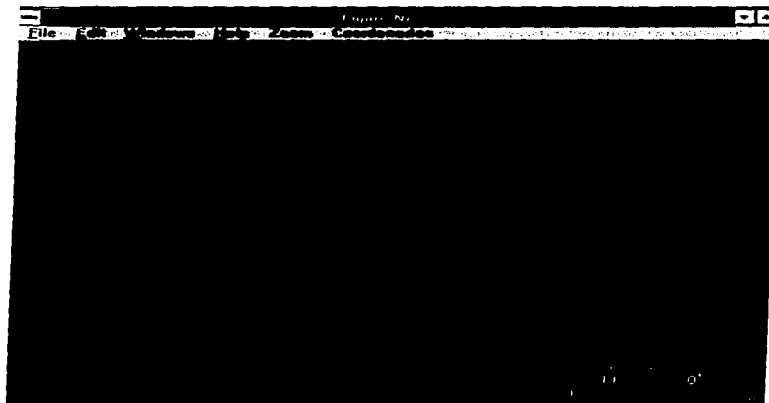


Figura 5.5 Comportamiento con la Q propuesta.

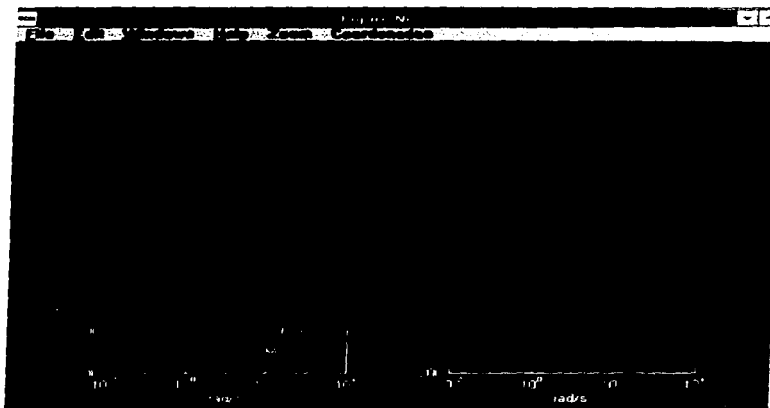


Figura 5.6 Ajuste de la ganancia k

El siguiente paso es el de comprobar que la sensibilidad de la familia de plantas también cumpla con esta característica y que no rebasa la sensibilidad deseada. En la gráfica 5.8 que corresponde a la **Figure No.2** del programa se presenta la gráfica de *Bode*

Capítulo 5: Ejemplos

de la sensibilidad de la familia de plantas junto con la deseada; en este caso resulta que todos los miembros de la familia cumplen con la condición

$$|S_g(j\omega)| < |S_{des}(j\omega)| \quad \forall \omega \in \Omega_i \quad (5.11)$$

en todo el intervalo de frecuencias de interés, por lo que el diseño se puede dar por terminado.



Figura 5.7 Vista final del controlador ajustado

Para visualizar el diseño global, la ventana **Figure No.3** en la figura 5.9 muestra el diagrama de *Nichols* de la familia de plantas en la esquina superior izquierda, en el semiplano inferior izquierdo se grafica el diagrama de *Bode* de la familia de funciones de lazo abierto y, las gráficas de *Bode* del lado derecho corresponden a la magnitud y fase de las de funciones de sensibilidad.

La figura 5.10 corresponde a la **Figure No.4** del programa y muestra el diagrama de *Bode* indicando los valores de los márgenes de ganancia y de fase para el sistema nominal compensado.

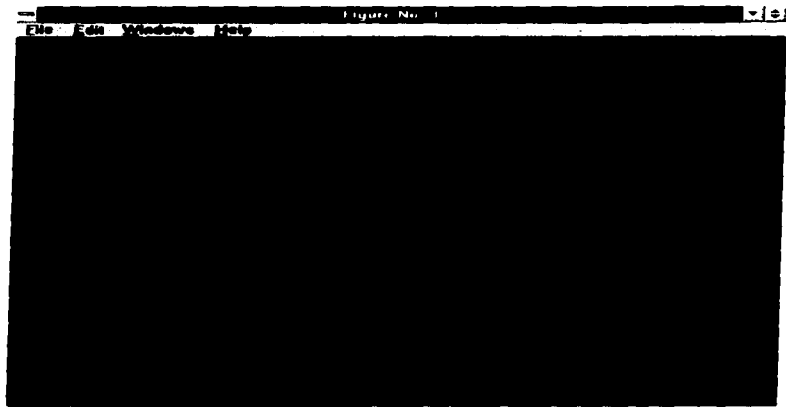


Figura 5.8 Sensibilidad de la familia de plantas

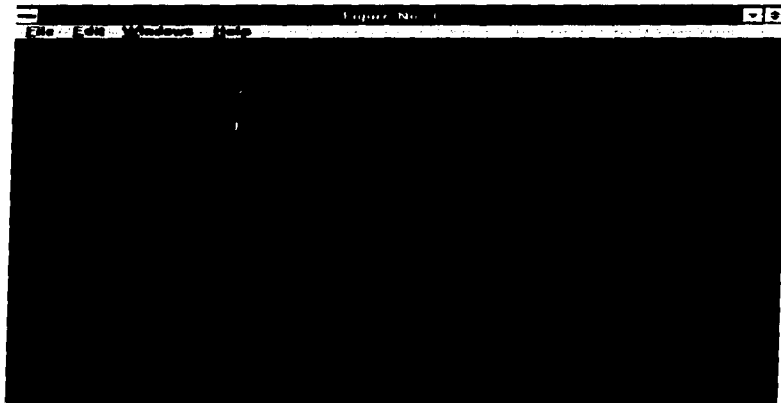


Figura 5.9 *Figure No.3*

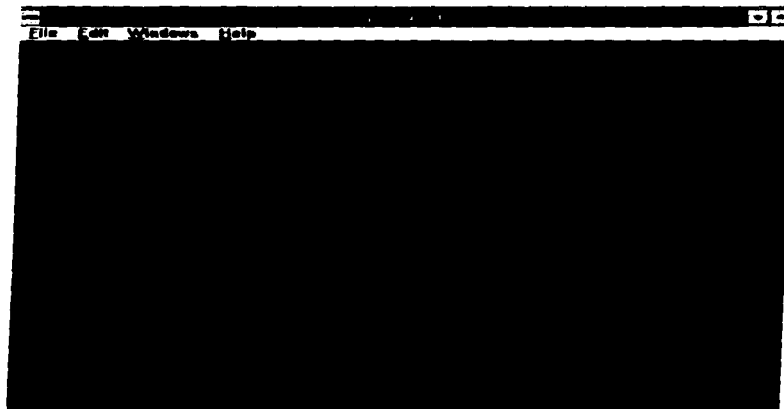


Figura 5.10 Márgenes de ganancia y de fase

El valor final empleado para el parámetro libre Q es:

$$Q = \frac{2.632 \times 10^8 s^2 + 9.842 \times 10^6 s + 1.323 \times 10^9}{s^2 + 1 \times 10^4 s + 1 \times 10^8} \quad (5.12)$$

por lo tanto el controlador final C de Youla se reduce a

$$C = \frac{2.632 \times 10^8 s^4 + 1.053 \times 10^9 s^3 + 1.579 \times 10^9 s^2 + 1.053 \times 10^9 s + 2.632 \times 10^8}{s^4 + 1 \times 10^4 s^3 + 3.741 \times 10^4 s^2 + 5.028 \times 10^4 s + 0.0002873} \quad (5.12)$$

Los valores reportados de los márgenes de ganancia y fase resultan son -190.9dB y 51.83 grados respectivamente.

Se puede observar que la función de transferencia resultante para el controlador es de orden 4, es decir, con el doble de dinámica que la planta. Además su ganancia en cero frecuencia es muy alta.

Comparando estos resultados con aquéllos obtenidos en el trabajo de la referencia [10] se observa que mientras el controlador obtenido es de segundo orden, el controlador obtenido a través del controlador de Youla es de cuarto orden. Por otro lado al comparar las funciones de transferencia de sensibilidad para el caso nominal, la gráfica 5.11 muestra que la sensibilidad nominal de la referencia [ref. 10] trazada con "x" es muy similar a la sensibilidad deseada. La sensibilidad con el controlador de Youla se encuentra por debajo de la sensibilidad deseada S_{des} .

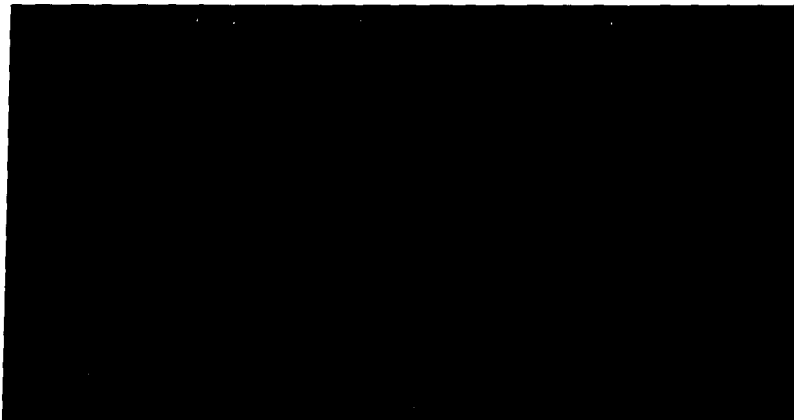


Figura 5.11 Comparación de sensibilidades

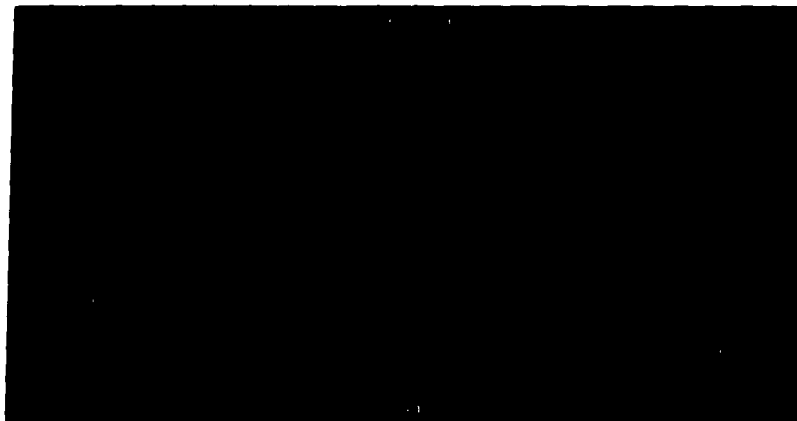


Figure 5.12 Sensibilidades de la familia de la referencia [ref. 10]

Capítulo 5: Ejemplos

Esto sugiere que para el resto de la familia, la sensibilidad de cada una de ellas estará muy cercana al límite y en algunos casos es superior a ésta, como lo presenta la siguiente gráfica 5.12. En ella, la sensibilidad deseada S_{des} está trazada con "x".

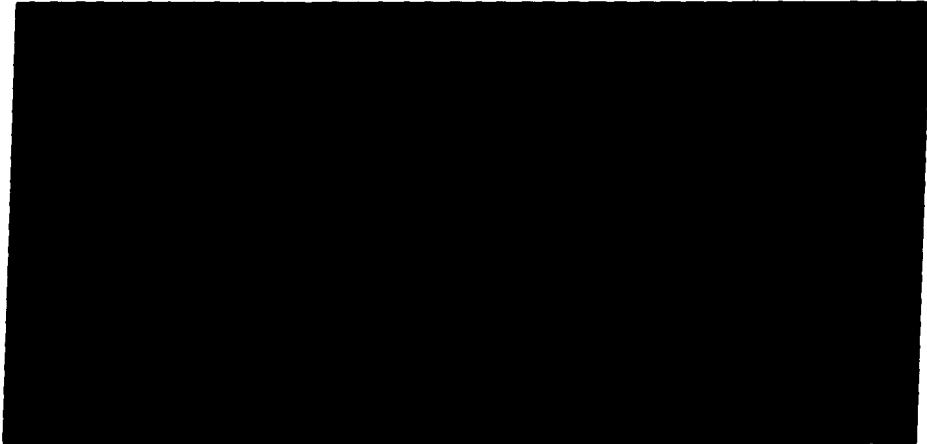


Figure 5.13 Sensibilidades comparadas

En la figura 5.13 se graficaron ambas familias de sensibilidades y es evidente que con el controlador de *Youla* todos los miembros de la familia satisfacen la cota de sensibilidad.

Por otro lado, el margen de fase registrado en los trabajos anteriores es de 131.25 grados con la planta nominal, mientras que en el caso aquí presentado el margen es de 51.83 grados. El margen de ganancia negativo indica los decibeles que se puede reducir en la ganancia del sistema sin perder estabilidad.

5.2 Control de un brazo manipulador

El siguiente ejemplo de aplicación, tomado de las referencias [ref.10 y ref.1] corresponde al modelo de un brazo manipulador cuya función de transferencia entre la velocidad angular del motor ω y su corriente I está dada por

$$G_P = \frac{\Omega}{I} = \frac{k_m (J_a s^2 + ds + k)}{J_a J_m s^3 + d(J_a + J_m)s^2 + k(J_a + J_m)s} \quad (5.13)$$

y en donde k_m es la constante de ganancia del motor, k y d son constantes, J_a es el momento de inercia del brazo y J_m es el momento de inercia del motor. En este caso el momento de inercia del brazo J_m es el que se considera con incierto dentro de un intervalo de variación. Los demás valores permanecen constantes, de tal manera que la familia de plantas se genera tomando valores del intervalo de incertidumbre de J_a . De esta forma se consideran los valores como

$$J_a \in [0.0002, 0.002] \quad (5.14)$$

$$J_m = 0.002 \quad (5.15)$$

$$d = 0.0001 \quad (5.16)$$

$$k = 100 \quad (5.17)$$

$$k_m = 0.5 \quad (5.18)$$

para los cuales se generan las familias de plantas extremas y la planta nominal. Se asignaron los siguientes elementos de la familia

$$g_{nom} = \frac{250s^2 + 27.78s + 2.778 \times 10^7}{s^3 + 0.1611s^2 + 1.611 \times 10^5 s} \quad (5.19)$$

$$g_{mx} = \frac{250s^2 + 12.5s + 1.25 \times 10^7}{s^3 + 0.1s^2 + 1 \times 10^5 s} \quad (5.20)$$

$$g_{mn} = \frac{250s^2 + 125s + 1.25 \times 10^8}{s^3 + 0.55s^2 + 5.5 \times 10^5 s} \quad (5.21)$$

$$g_{mix} = \frac{250s^2 + 38.46s + 3.846 \times 10^7}{s^3 + 0.2038s^2 + 2.038 \times 10^5 s} \quad (5.22)$$

$$g_{mxi} = \frac{250s^2 + 22.73s + 2.273 \times 10^7}{s^3 + 0.1409s^2 + 1.409 \times 10^5 s} \quad (5.23)$$

En la figura 5.10 se muestra la respuesta en frecuencia de la familia de plantas considerada. Como intervalo de frecuencias de interés se propone elegir aquellas frecuencias en donde se presentan mayores variaciones del modelo, por tanto $\Omega \in [100, 1000] \text{ rad/s}$.

Resumiendo:

Se desea diseñar un controlador robusto de tal manera que el sistema de lazo cerrado de un grado de libertad para todos los valores del momento de inercia del motor satisfaga la siguiente condición:

- Sea estable en malla cerrada para todas las variaciones consideradas de la familia de plantas.
- Sea capaz de atenuar con un factor menor a 1dB las perturbaciones en las frecuencias 100 a 1000 rad/s.

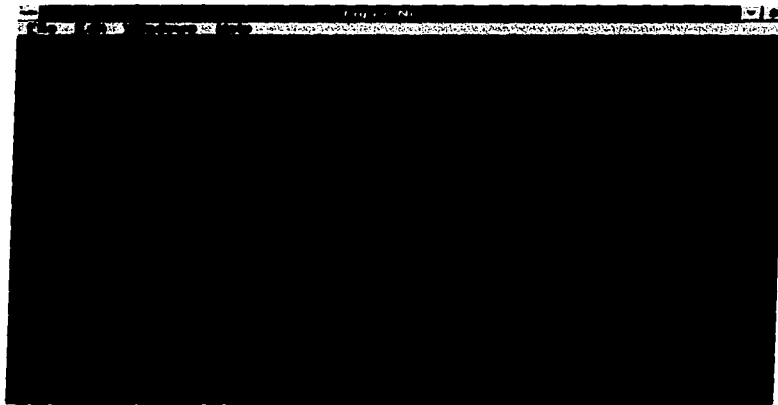


Figura 5.10 Magnitudes y fases de la familia de plantas

La gráfica de la función de sensibilidad se muestra en la siguiente figura 5.11. Para este ejemplo se proponen como ubicación inicial de los polos para la factorización coprime de (M,N) y (X,Y) los valores $[-250,-250,-250]$. este paso se hizo seleccionando la regla de Ackerman. Los resultados de estos valores con una Q unitaria se presentan en la figura 5.12

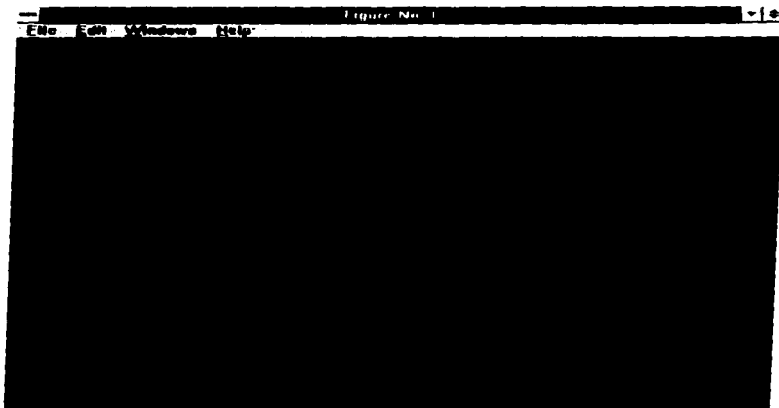


Figura 5.11 Magnitud de la sensibilidad deseada *Sdes*.

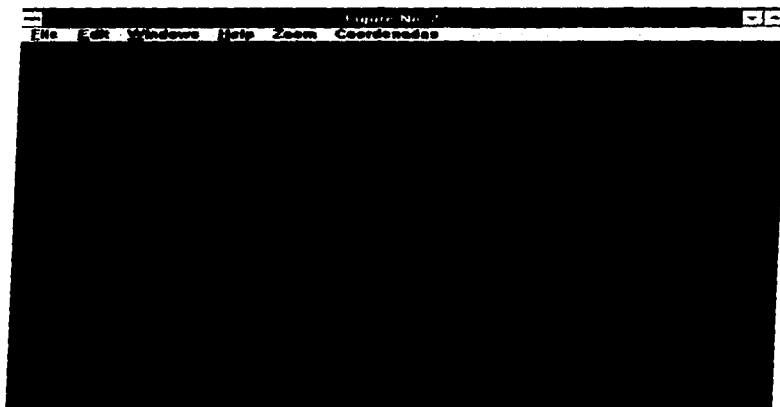


Figura 5.12 *FigureNo.2*

Capítulo 5: Ejemplos

En este ejemplo en particular se ha tomado el intervalo $[1, 10,000]$ rad/s. El objeto de esta sección es la de observar de manera más clara los cambios en las frecuencias en donde se presentan las variaciones de los polos complejos de NQ . Comparando las gráficas de magnitud y fase de Y y NQ se observa que Y tiene una pendiente suave adelante de 200 rad/s debido a un cero en 160 y tres polos en 250, mientras que NQ tiene una pareja de polos complejos en $(0.08 \pm j288.68)$. Seleccionando la opción **Q6:NQn = numY, NQd=libre**, se supuso un denominador con un polo en 1,000,000 rad/s además de los ceros del numerador de N ; Esto último para que Q sea propia. Con esta asignación de Q se obtienen los resultados gráficos mostrados en la figura 5.13

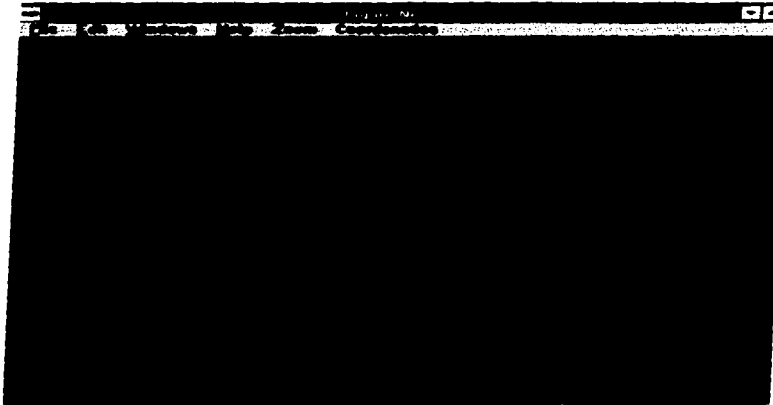


Figura 5.13 *Figure No.2* con la Q modificada

Aceptando la función para Q antes propuesta, se observa una diferencia en la ganancia de ambas gráficas. Del menú de selección para valores de Q se selecciona ahora a **Q1=k** para igualar las ganancias. El resultado con la ganancia de Q ajustada se muestra en la figura 5.14

De la gráfica de las sensibilidades S_{des} y S_q se observa que la sensibilidad para la planta nominal satisface el requerimiento impuesto en todo el intervalo de frecuencias de análisis. Las gráficas de *Bode* de magnitud y de fase para NQ son iguales ambas a las de Y . Como siguiente paso el programa permite graficar las sensibilidades de los demás miembros de la familia para comprobar si esta solución es válida efectiva para toda la familia de plantas.

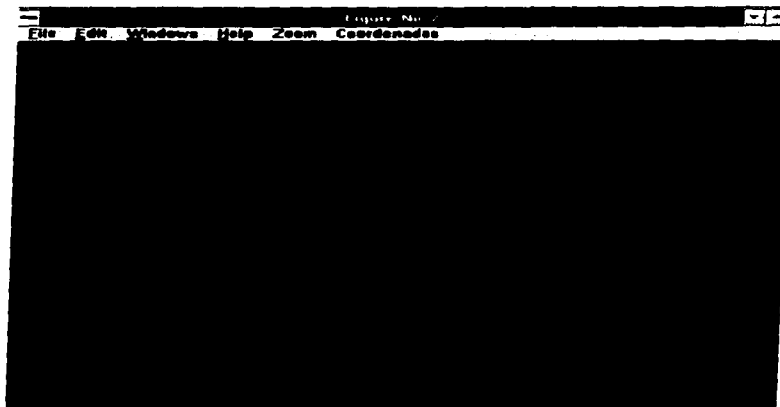


Figura 5.14 *Figure No.2* con la Q modificada y el ajuste de ganancia

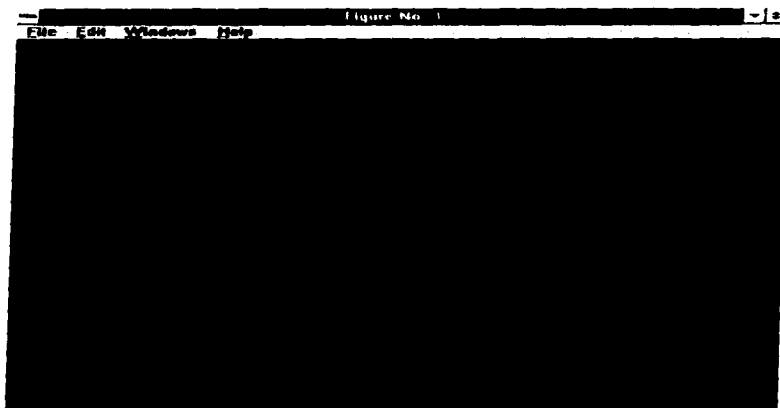


Figura 5.15 Cota de la sensibilidad deseada y las funciones para los 5 casos extremos

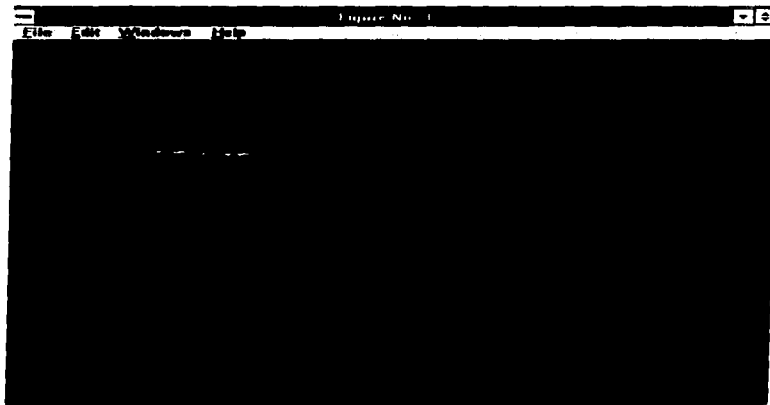


Figura 5.16 *Figure No.3*



Figura 5.17 Márgenes de ganancia y de fase

Capítulo 5: Ejemplos

Como se observa en la figura 5.15 o **Figure No.3**, el controlador sintetizado es adecuado para satisfacer los requerimientos para la familia de plantas durante todo el intervalo de frecuencias de interés. Las siguientes gráficas corresponden a las figuras de Windows, **Figure No.3** y **Figure No.4**, que corresponden a las gráficas de *Nichols* y *Bode* de la función de transferencia en lazo abierto y a los márgenes de ganancia y fase respectivamente.

Los valores finales empleados en el parámetro libre Q son:

$$Q = \frac{4000s^3 + 6 \times 10^6 s^2 - 2.388 \times 10^9 s - 1.606 \times 10^{11}}{s^3 + 1 \times 10^6 s^2 + 2.222 \times 10^5 s + 1.111 \times 10^{11}} \quad (5.24)$$

El controlador final resultó ser

$$C = \frac{4000s^6 + 6.006 \times 10^6 s^5 + 3.75 \times 10^9 s^4 + 1.251 \times 10^{12} s^3 + 2.344 \times 10^{14} s^2 + 2.344 \times 10^{16} s + 9.766 \times 10^{17}}{s^6 + 1420s^5 - 6.058 \times 10^3 s^4 + 1.743 \times 10^8 s^3 - 6.312 \times 10^{10} s^2 - 4.462 \times 10^{12} s + 1.959 \times 10^{10}} \quad (5.25)$$

arrojando márgenes de fase y ganancia de -126.8 dB y 90 grados respectivamente. El grado del controlador es 6, indicando que dobla el grado de la planta nominal. Comparando los resultados del diseño con los obtenidos en la referencia [10] se nota que el orden del controlador se incrementa a 2 en el caso citado y el margen de fase para la planta nominal es de 130 grados.

Capítulo 6

6.1 Conclusiones

Como se planteó en el primer capítulo, el diseño de sistemas de control realimentado tomando en cuenta las perturbaciones, las incertidumbres del modelo y de los parámetros, los efectos no lineales despreciados, requiere cada vez más de herramientas poderosas de cálculo que sean actuales, rápidas versátiles y amigables en su uso. El programa presentado en esta tesis ha sido escrito teniendo en mente estos aspectos como objetivo en el diseño. El objetivo central es crear un programa asistido por computadora con el que se puedan diseñar controladores empleando la parametrización de *Youla* para resolver el problema planteado en los capítulos 1 y 4.

El programa se basa en algunas de las ideas de Horowitz y propone una solución al problema del diseño de controladores para plantas con variaciones en el dominio de la frecuencia enmarcada dentro del esquema de control retroalimentado. Dado al hecho de que es posible expresar los objetivos primarios de diseño tales como estabilidad, desempeño, atenuación de perturbaciones como límites o fronteras en la función de sensibilidad, técnicas como el diseño *QFD* y el controlador de *Youla*, son relativamente fáciles de incorporar a la programación.

El controlador de *Youla* genera controladores estabilizantes como se ha leído en el capítulo 3. Todos los controladores generados por *Youla* son estabilizantes y fácilmente modificables a través del parámetro libre Q . El diseño del controlador particular se determina con ayuda de la función de sensibilidad que debe considerar todos los objetivos de diseño. Se hace notar que el controlador calculado para la planta nominal puede cumplir con todos los objetivos del diseño y sin embargo alguno de los miembros de la familia de plantas no satisfacer con las restricciones de diseño; lo cual implica que hay que rediseñar el controlador basado en la planta nominal.

Según lo observado en los resultados de ambos ejemplos, el orden de los controladores resulta ser superior al de Q , particularmente en ambos casos el doble del orden.

Otro hecho observado referente al desempeño del programa es que resultó para ambos ejemplos más conveniente considerar la ventana de análisis completa. Es decir, considerar un solo intervalo de frecuencias. Sin embargo, es posible seleccionar subintervalos de frecuencias de análisis en donde se analiza la respuesta en frecuencia de la planta nominal. Y con base en este análisis se selecciona el controlador obteniendo como resultado final el producto de todos ellos.

Siguiendo el algoritmo de ajuste en el diseño del controlador para cada ejemplo, cuando no fue posible obtener un controlador suficientemente robusto para el resto de la familia de plantas, las modificaciones se realizaron cambiando la ubicación de polos. Existe un rango en el cual se pueden ubicar estos polos y obtener resultados satisfactorios. Al colocar polos en frecuencias altas para igualar a Y y NQ , se observó en ambos ejemplos que las gráficas de magnitud se volvieron muy similares en magnitud, no así en fase. En magnitud sólo fue necesario ajustar la ganancia para igualar las gráficas de Y y NQ . Las fases requieren ser también iguales o muy similares en la función $Q=Y/N$. Debido a que el programa en su versión actual compara únicamente que la sensibilidad de la familia de plantas esté por debajo de la sensibilidad deseada, las modificaciones en fase en este caso no se pueden realizar.

Por otro lado, se requiere para ejecutar el programa una computadora compatible PC con procesador 486 o Pentium y suficiente capacidad en la memoria. Se ha tratado de incluir algunos menús de ayuda para las funciones que requieren mayor uso. Las funciones básicas del programa se han presentado en el capítulo 4.

Algunas mejoras que se pueden incorporar al programa son referentes al manejo de las pantallas y menús auxiliares. La programación de estos menús genera variables que deben estar presentes en todo el proceso del diseño y las cuales ocupan espacio en la memoria. MATLAB permite desplegar datos susceptibles de modificación en la misma pantalla donde aparece la gráfica, lo que haría la variación de las ganancias un forma más sencilla y amigable para el usuario en un momento dado. El programa ocupa 246KB de la memoria en la computadora. El trabajo se acompaña con un diskette que contiene el programa y también datos de los ejemplos presentados.

Referencias

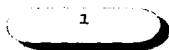
- [1] Aström K. J., Wittenmark B. (1989) *Adaptive Control*. Addison Wesley. New York
- [2] Bahram S., Hassul M. (1993) *Control System Design Using MATLAB*. Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey
- [3] Bailey F.N., Hui C.H. (1991) *Loop Gain-Phase Shaping for Single-Input-Single-Output Robust Controllers*. IEEE Control Magazine January 0272-1708/91/0100-0093 p.93-101
- [4] Bhattacharyya S.P., Chapellat H., Keel L.H. (1995) *Robust Control The Parametric Approach*. Prentice Hall Information and Systems Sciences Series.
- [5] Boyd S.P., Balakrishnan V. et. al. (1988) *A New CAD Method and Associated Architectures for Linear Controllers*. IEEE Transactions on Automatic Control. Vol.33 No.3 p.268-283
- [6] Cruz J.B., and Perkins, W.R.: A New Approach to the Sensitivity Problem in Multivariable Feedback System Design; IEEE Trans. AC-9 1964, p 216-223
- [7] Dahleh M.A., Diaz Bobillo I.J. (1995) *Control of Uncertain Systems. A Linear Programming Approach*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey
- [8] D'Azzo J.J., Houpis C.H. (1988) *Linear Control System Analysis and Design Conventional and Modern*. McGraw Hill International Editions, Electrical and Electronic Engineering Editions
- [9] Doyle J.C., Francis B.A., Tannenbaum A.R. (1992) *Feedback Control Theory*. Macmillan Publishing Co.
- [10] Eslava E., Verde C. (1991) *Diseño de Controladores Robustos con Restricciones en la Sensibilidad*. Proy. 9113 Instituto de Ingeniería, UNAM
- [11] Horowitz I. (1972). *Synthesis of Feedback Systems with large plant inorgance for prescribed time domain tolerances*. Int. J. Control, vol. 16 No.2, p 287-309
- [12] Horowitz I. (1992) *Quantitative Feedback Design Theory (QFT) Vol. 1* QFT Publications, Boulder Colorado
- [13] Lunze J. (1988) *Robust Multivariable Feedback Control*. Prentice Hall Int. Series in Systems Control Engineering.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA 59

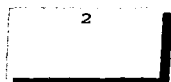
Referencias

- [14] Maciejowski, J.M., *Multivariable Feedback Design*. Addison Wesley 1989, Cap.6 The Youla Parametrization and H_{∞} Optimal Control.
- [15] MATLAB user's guide ver 4.0, MathWorks 1994.
- [16] Morari M., Zafiriou E. (1989) *Robust Process Control*. Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey
- [17] Nett C.N. (1986) *Algebraic Aspects of Linear Control System Stability*. IEEE Transactions on Automatic Control. Vol.AC-31 No.10 p.941-949
- [18] Nwokah O., Jayasuriya S., Thompson D. (1992). *Quantitative Feedback Design of Robust Control Systems*. Quantitative Feedback Theory Symposium Proceedings WL-TR-92-3063, p. 125- 153
- [19] Vidyasagar M. (1987) *Control System Synthesis A Factorization Approach*. The MIT Press. Cambridge, Massachussets.

Apéndice



**Inicio o final
del diagrama
de flujo**



**Proceso o
cálculo**



**Entrada de datos
por el usuario o
Salida de datos**



Decisión



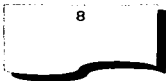
**Proceso predefinido
o llamada a subprograma**



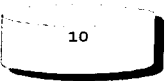
Conector



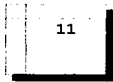
7
Salida de datos
por el monitor de
la computadora



8
Salida impresa
de datos



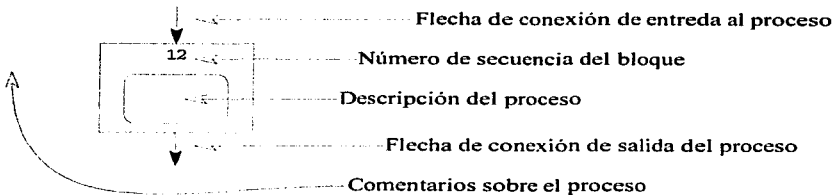
10
Almacenamiento o
extracción de datos
en/del disco magnético



11
Almacenamiento interno
de datos



Flecha o línea de conexión entre
los bloques del diagrama de flujo



Flecha de conexión de entrada al proceso

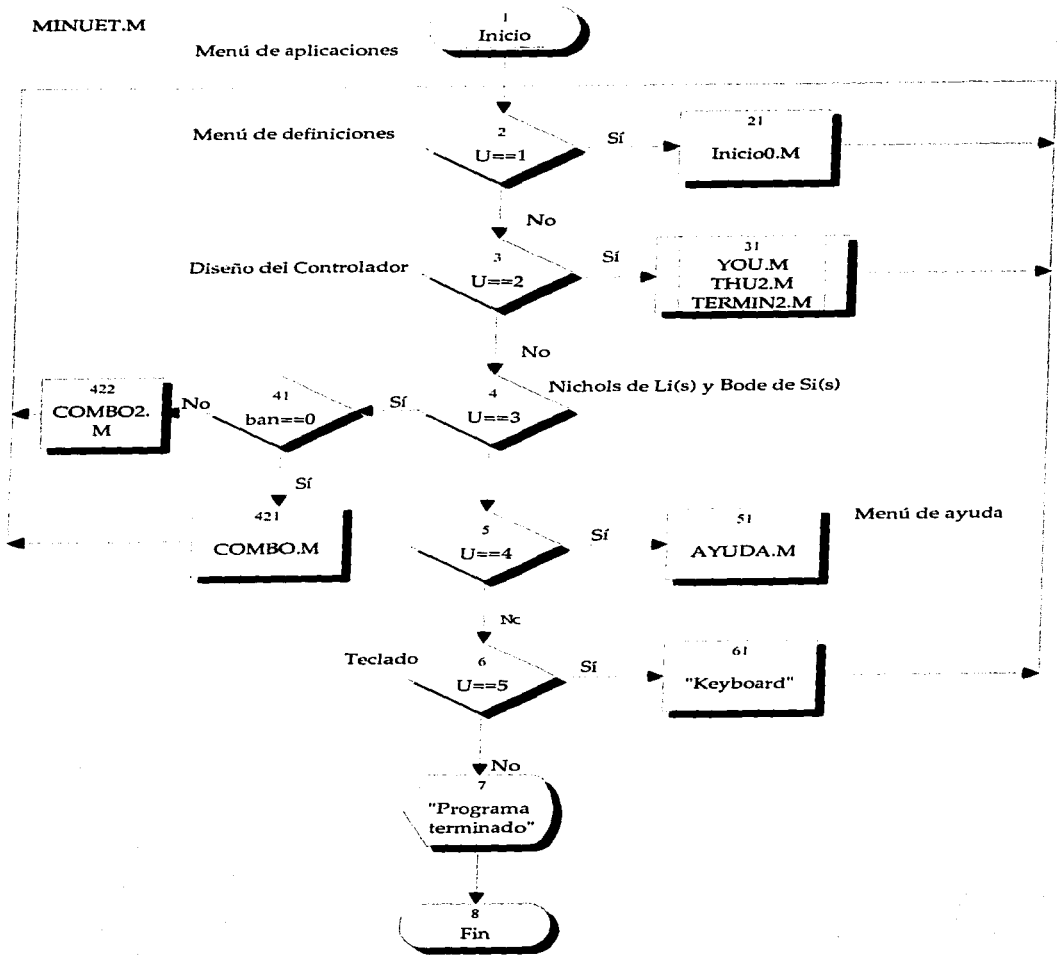
Número de secuencia del bloque

Descripción del proceso

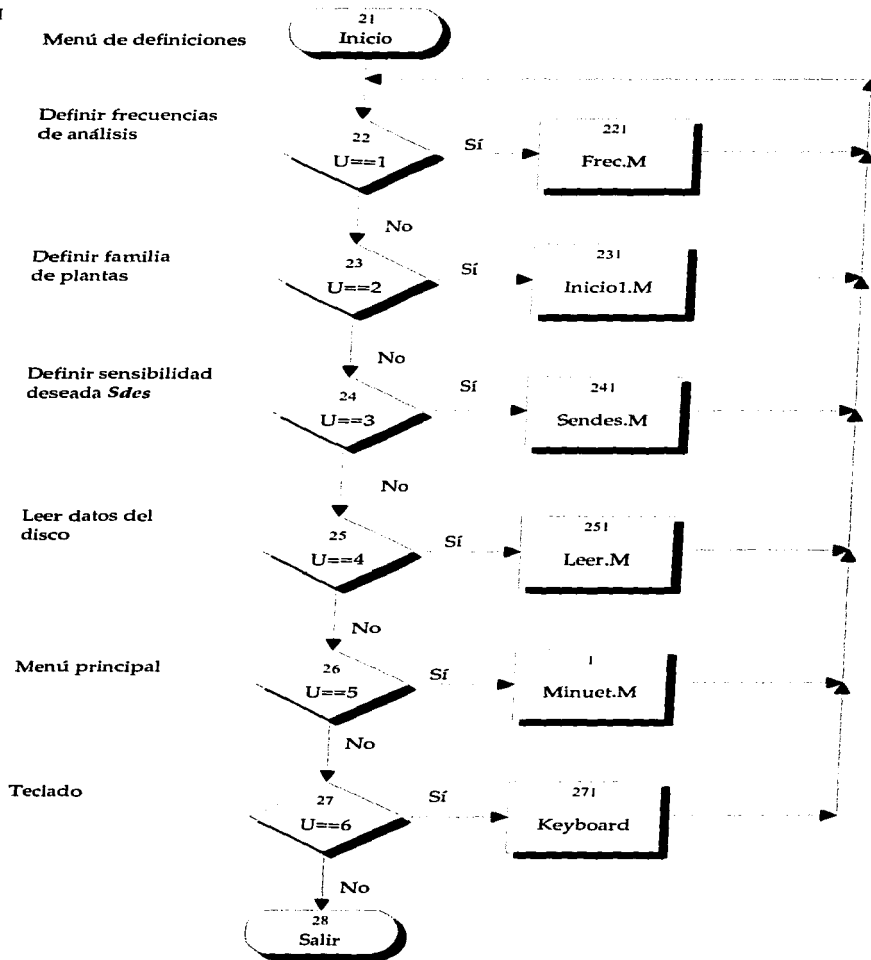
Flecha de conexión de salida del proceso

Comentarios sobre el proceso

MINUET.M



Inicio0.M



YOU.M
(31)

Calcula el controlador
empleando la parametrización
de Youla

