

15
24.



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS
PROFESIONALES**

CAMPUS ARAGÓN

**EVALUACIÓN FINANCIERA DE
PROYECTOS DE INVERSIÓN EN
INGENIERÍA CIVIL**

T E S I S
Que para obtener el Título de :
INGENIERO CIVIL
P r e s e n t a :
ERNESTO FUERTE DOMÍNGUEZ

Director de Tesis:
Ing. Juan Antonio Gómez Velázquez

MEXICO

1997

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
ARAGÓN
DIRECCION

ERNESTO FUERTE DOMÍNGUEZ
PRESENTE.

En contestación a su solicitud de fecha 3 de septiembre del año en curso, relativa a la autorización que se le debe conceder para que el señor profesor, Ing. JUAN ANTONIO GÓMEZ VELÁZQUEZ pueda dirigirse el trabajo de Tesis denominado "EVALUACIÓN FINANCIERA DE PROYECTOS DE INVERSIÓN EN INGENIERÍA CIVIL", con fundamento en el punto 6 y siguientes, del Reglamento para Exámenes Profesionales en esta Escuela, y toda vez que la documentación presentada por usted reúne los requisitos que establece el precitado Reglamento; me permito comunicarle que ha sido aprobada su solicitud.

Aprovecho la ocasión para reiterarle mi distinguida consideración.

ATENTAMENTE
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
San Juan de Aragón, México., 9 de septiembre de 1996.
EL DIRECTOR

Me enl CLAUDIO C. MERRIFIELD CASTRO

c c p | Jefe de la Unidad Académica.
c c p | Jefatura de Carrera de Ingeniería Civil.
c c p | Asesor de Tesis.

CCMC/AIR/ta.



AGRADECIMIENTOS:



AGRADECIMIENTOS

A DIOS:

Por darme la vida, gracias señor por permitirme existir.

A MIS PADRES:

Sr. Elias Fuerte López

Sra. Josefina Domínguez Solorzano

Que materializaron mi existencia y con su amor, apoyo y dedicación brindaron a mi vivir el deseo de superación.

A MIS HERMANOS:

Martha Elva, Elias, Ramiro y Laura.

A quienes quiero con todo mi corazón. Por el estímulo y apoyo que me brindaron en los momentos que los necesite.

A UNA PERSONA MUY ESPECIAL:

Mary

Por el estímulo brindado en todo momento para el logro de mis metas.

AL ING. JUAN ANTONIO GÓMEZ VELÁZQUEZ:

Por el tiempo y atención que tuvo para conmigo en la elaboración del presente trabajo, así como por sus valiosos comentarios y apoyo incondicional que me ha brindado en mi desarrollo profesional.

A MIS PROFESORES:

Por compartir sus conocimientos y consejos.

A MIS AMIGOS:

Con los que siempre he contado a lo largo de la carrera, por su amistad incondicional, por su confianza y porque sigamos siendo tan amigos como hasta ahora.

A MI UNIVERSIDAD:

Por acogerme en su seno y forjarme como profesionista.



CONTENIDO

**CONTENIDO**

Capítulo	Tema	Página
	Autorización para que el Ing. Juan Antonio Gómez Velázquez dirija este trabajo de tesis	I
	Agradecimientos	II
	Contenido	IV
	Introducción	I
1.	Aspectos Generales	5
1.1	Proceso de los proyectos de inversión	6
1.2	Proceso de inversión	7
1.3	Modelo programático del proceso de inversión	8
1.4	Definición y objetivo de la evaluación	10
		v



1.5	Limitaciones practicas del analisis	11
1.6	Descripcion de apartados especificos	12
1.6.1	La evaluacion financiera	12
1.6.1.1.	Principales indicadores financieros	13
1.6.2	La evaluacion economica y social	14
1.6.2.1.	Principales indicadores economicos y sociales	15
2.	Matemáticas Financieras	18
2.1	Valor del dinero a traves del tiempo	21
2.2	Tipos de interes	21
2.3	Concepto de equivalencia y diagrama de flujo de efectivo	25
2.4	Equivalencia entre un valor actual (VP) y un valor futura (VF)	27
2.5	Equivalencia entre un valor futuro (VF) y una serie de pagos uniforme (A)	28
2.6	Equivalencia entre un valor presente (VP) y una serie de pagos uniforme (A)	30
2.7	Equivalencia entre un valor uniforme (A) y una serie de valores futuros, cuyo valor se incrementa en la cantidad g	32
2.8	Tabla resumen de las diferentes equivalencias	36
2.9	Tasa de interes nominal e interes efectivo	37
2.10	Interés real	38
2.11	Interes compuesto continuo	40
2.12	Pérdida de valor adquisitivo de la moneda	43
2.13	Ejercicios que muestran el uso de las formulas de interes en relacion al tiempo	47
3.	Valor Presente Neto (VPN)	64
3.1	Interpretacion del Valor Presente Neto	66
3.2	Comportamiento grafico del Valor Presente Neto	68



3.3	La mínima tasa atractiva de rendimiento	68
3.3.1	Factores a considerar en la fijación de "i"	69
3.3.2	Criterios para elegir "i"	69
3.4	Ejemplos del uso del método VPN en la evaluación de un proyecto individual	72
4	Tasa Interna de Rentabilidad (TIR)	86
4.1	Elementos matemáticos en los que se fundamenta la TIR	87
4.2	Rentabilidad de un proyecto con ingresos indefinidos (Valuación por capitalización de rentas)	90
4.3	La TIR como índice para evaluar una inversión	91
4.4	La Tasa Verdadera de Rentabilidad de un proyecto (TVR)	93
4.5	TIR Vs VPN	97
4.6	VPN Vs TVR	100
4.7	Representación gráfica de la TIR y su relación con el VPN	102
4.8	Ejemplos del uso del método TIR en la evaluación de proyectos	104
5	Relación Beneficio - Costo (B/C)	118
5.1	Evaluación de proyectos públicos de inversión	119
5.2	Ejemplos del uso del método relación B/C en la evaluación de proyectos	121
6	Evaluación de proyectos cuando no hay certidumbre	132
6.1	Decisión Vs probabilidad	134
6.2	Relaciones fundamentales de probabilidad	134
6.2.1	Funciones de distribución de probabilidad	135
6.2.2	Medidas de tendencia central y de dispersión (media y varianza)	139
6.3	Toma de decisiones bajo riesgo (probabilidad conocida)	141



6.3.1	Toma de decisiones en base a la media.....	141
6.3.2	La utilización de las distribuciones de probabilidad en la comparación de alternativas	142
6.4	¿Como usar arboles de decision en la evaluación de alternativas?	143
6.5	Toma de decision bajo incertidumbre (probabilidad desconocida).....	146
6.5.1	Criterio de maximizacion del minimo valor (maximin)	147
6.5.2	Criterio de maximizacion del maximo valor (maximax)	147
6.5.3	Criterio de compromiso	148
6.5.4	Criterio de arrepentimiento	148
6.5.5	Criterio de Laplace	149
6.5.6	Resumen	149
7	Evaluación financiera de un proyecto ficticio.....	151
7.1	Valor Presente Neto	155
7.2	Tasa Interna de Retorno	157
7.3	Relacion Beneficio - Costo	159
7.4	Periodo de recuperacion de la inversion	159
7.5	Recomendaciones	160
8	Conclusión	161
	Bibliografía.....	164



INTRODUCCIÓN:



INTRODUCCIÓN

La razón principal que me motivó a realizar este trabajo de investigación, fue la necesidad de la que me vi objeto, ya que al iniciar mis practicas profesionales en una área de la ingeniería como es la valuación, me di cuenta que la evaluación de proyectos desde el punto de vista financiero jamás es tocada directamente en los programas de estudio de la carrera de Ingeniería Civil, y dado los problemas económicos que vive nuestro país en estos momentos considero necesario conocer los principios y técnicas para realizar análisis financieros de los proyectos y de esta forma tener una herramienta mas para poder tomar la mejor decisión, debido a que en la práctica de la ingeniería, como todos sabemos se presentan una gran cantidad de decisiones entre diseños, procedimientos, planes y metodos alternativos, que involucran una gran variedad de cursos de acción alternativos, y según la decisión tomada se requieren diferentes cantidades o montos de inversión y diferentes ingresos y costos de operación que tienen un valor diferente en el tiempo, motivo por el cual es necesario prepararnos y tener los conocimientos suficientes para poder evaluar cualquier proyecto que se nos presente.

Por lo tanto este trabajo tiene como objetivo, *presentar algunos principios y técnicas para poder analizar y calcular los coeficientes numéricos necesarios para poder tomar una decisión adecuada en la evaluación financiera de proyectos.* Además de que



se pretende que el presente trabajo trascienda los aspectos puramente académicos y sirva de apoyo teórico y de material de consulta para los profesionales que se encuentren resolviendo casos específicos de proyectos, debido a que el contenido de los capítulos es suficientemente general como para aplicarlo a cualquier tipo de proyecto, considerando que se cubren los aspectos que puedan presentarse en los diversos giros de la ingeniería y otros campos.

El primer tema que trataremos, hace referencia a los *antecedentes mínimos* que debemos conocer para poder entender que es la evaluación de proyectos, cuantos tipos hay, los índices de cada tipo. *No sin antes aclarar que el desarrollo de el presente trabajo se fundamenta en la evaluación financiera.*

En el capítulo dos se hace una *introducción de lo que representan en realidad las matemáticas financieras*, comenzando con nomenclaturas, fórmulas y deducciones de las mismas. Se hace notar que el conocimiento de este tema es una herramienta de trabajo principalmente para profesionales de la administración de empresas, contaduría, banca y finanzas, tecnología financiera, comercial y análisis económicos, pero también son de gran importancia para nosotros los ingenieros, dado que sin el conocimiento de este tema sería muy complicado entender los conceptos y análisis que posteriormente se estudiarán en este trabajo.

Cabe mencionar que los conceptos y demostraciones matemáticas fueron de lo más sencillo, para que de esta forma el lector, comprenda el desarrollo en la solución a los problemas que aquí se tratan.

Una vez interiorizándonos en esta materia, en el capítulo tres se desarrolla el primero de los indicadores financieros, que es conocido como el *Valor Presente Neto (V.P.N.)* que comprende la actualización de los flujos del proyecto a lo largo del horizonte de evaluación y considera que todos los beneficios en relación a los costos deben ser comparados en el presente.



El siguiente capítulo expone otro de los indicadores financieros, denominada *Tasa Interna de Retorno (T.I.R.)* que refleja el nivel de rentabilidad de un proyecto durante un horizonte de tiempo definido

Posteriormente **en el capítulo cinco** se analiza un indicador que nos es más familiar a nosotros como ingenieros, llamado *Relación Beneficio - Costo (B/C)* que como su nombre lo indica se analiza la relación entre los Beneficios y los Costos de un proyecto actualizándolos a valor presente.

En el antepenúltimo capítulo se estudia como se realizan *los análisis financieros de proyectos cuando no existe certidumbre* del comportamiento de los dineros invertidos o por invertir.

En el penúltimo capítulo reúne todos los conceptos mencionados de una forma práctica, es decir, *se desarrolla un ejemplo* de análisis financieros de un proyecto ingenieril ficticio, para de esta forma demostrar la importancia que tiene este tema en la ingeniería civil

En el capítulo ocho, se hacen comentarios de los temas expuestos y se plantean *conclusiones.*

Para que el contenido del siguiente trabajo fuese lo más didáctico, se hizo énfasis en la relación consecutiva de los temas y, asimismo, se procuró siempre que cada uno de los ejemplos se apegaran de la mejor manera posible a las situaciones más comunes a las que se puede enfrentar el ingeniero, además de que se ha incluido una buena cantidad de figuras gráficas que ayudarán a comprender mejor las situaciones que se plantean.



CAPÍTULO 1

ASPECTOS GENERALES:



ASPECTOS GENERALES

I.1.- PROCESO DE LOS PROYECTOS DE INVERSIÓN.

La formulación y evaluación de proyectos involucra el trabajo multidisciplinario de administradores, contadores, economistas, *ingenieros*, psicólogos, etc., en un intento de conocer, explicar y proyectar lo complejo de la realidad en donde se pretende introducir una nueva iniciativa de inversión, con objeto de elevar sus probabilidades de éxito. *Las características formativas de estos profesionistas, son detectar la posibilidad y definir el proceso de inversión en un sector, región o país.*

Nuestros clientes a los que también podemos llamar empresarios, con su comportamiento racional, espontáneo e intuitivo, generan iniciativas de inversión o ciclos de vida de proyectos específicos, dichos empresarios acuden a los profesionistas dedicados a formular y evaluar proyectos de inversión, para que complementen la visión empírica y la acción empresarial, mediante un planteamiento sistemático, metodológico y científico de los proyectos. Todo esto con un afán de comprender y explicar la realidad socioeconómica que determina los proyectos y aportar así sus opiniones sobre expectativas de rentabilidad, y recuperación de inversiones.



De esta manera, para el empresario tanto como para el profesionista, el proceso de inversión se constituye en su objeto de análisis y, entre ambos, van planteando y desarrollando sucesivamente las diversas etapas del ciclo de vida de los proyectos y opinando sobre su viabilidad técnico - económica dentro del entorno del proceso de inversión

Cabe señalar que en México la orientación de la inversión y de la actividad económica se realiza a través de tres vertientes de acción *Obligatorias para las empresas públicas; coordinada para algunas actividades económicas de fundamental importancia, desempeñadas por el sector privado y social e inductiva para el resto de las actividades.*

No es obligación de los sectores privado y social, el realizar análisis de Preinversión basados en la planeación y programación de la actividad económica de México. Sin embargo, esto no suprime los riesgos inherentes a toda inversión. De ahí que, de acuerdo con los principios de racionalidad económica, los promotores de proyectos productivos prefieren realizar los estudios de Preinversión, ya que con esto valoran mejor los riesgos de sus iniciativas y elevan la posibilidad de operar con eficiencia cuando los proyectos presentan resultados viables.

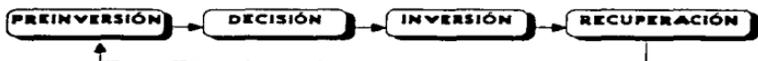
1.1.- PROCESO DE INVERSIÓN

Se entiende por proceso de inversión a la **actividad que consiste en asignar recursos económicos a fines productivos, mediante la formación bruta de capital fijo, con el propósito de recuperar con creces los recursos asignados.**

Se hace notar que *el presente trabajo está enfocado a las iniciativas de inversión con fines productivos y de rentabilidad. Se entiende aquí por esto los casos en que los recursos o factores de la producción (tierra, trabajo, capital y organización), se orientan a transformar insumos (materias primas, materiales, etc.) para generar productos (bienes y servicios) cuyo consumo satisfagan necesidades físicas o psicosociales.*



En síntesis, el proceso de inversión comprende cuatro etapas completamente diferentes en contenido y prácticamente sucesivas e irreductibles.



A partir de esta figura se ha desarrollado el ciclo de vida de los proyectos, directamente del proceso de inversión

I.3.- MODELO PROGRAMÁTICO DEL PROCESO DE INVERSIÓN.

En la siguiente cuadro se presentan el modelo programático del proceso de inversión, el cual trata de desarrollar de una manera más simplista el proceso de inversión. Contiene en su primera columna las cuatro etapas de dicho proceso y en la segunda las seis etapas del ciclo de vida de los proyectos que derivan directamente de este. Para cada una de las fases se define expresamente su finalidad, contenido, resultado, el nivel de análisis de los estudios y los tipos de estudios a realizar.

Este modelo fue creado por el Fondo Nacional de Estudios y Proyectos de Nacional Financiera, en el año de 1986, con el fin de crear una mejor comunicación entre el grupo interdisciplinario de profesionistas que participan en las distintas fases del ciclo de vida de los proyectos.

Se hace saber que este capítulo está fundamentado en una publicación editada por Nacional Financiera y La Organización de los Estados Americanos en el año de 1995, la publicación lleva por título Guía para la formulación y Evaluación de Proyectos de Inversión.

ETAPAS	FASES DE DESARROLLO	FINALIDAD	CONTENIDO	RESULTADO	NIVEL DE ESTUDIO	TIPO DE ESTUDIO
P R E I N V E R S I Ó N	Identificación	Detectar necesidades y recursos para buscar su satisfacción y aprovecharlo de manera eficiente	Diagnóstico, pronóstico e imagen objetiva	Las estrategias y lineamientos de acción	<ul style="list-style-type: none"> Gran visión 	<ul style="list-style-type: none"> Regional Sectorial programa de inversión Plan maestro
	Formulación y evaluación	Generar y seleccionar opciones y determinar la más eficiente para satisfacer una necesidad específica o aprovechar un recurso	Análisis y Evaluación de opciones	La opción óptima y la viabilidad técnica, económica y financiera	<ul style="list-style-type: none"> Perfil Prefactibilidad Factibilidad 	<ul style="list-style-type: none"> Mercado Técnico Tecnológico Financiero Evaluación Organización
	Ingeniería del proyecto	Contar con los elementos de diseño construcción y especificaciones necesarios	Desarrollo de la ingeniería básica y de detalle	Memoria de cálculo, diseño, especificaciones y planos	<ul style="list-style-type: none"> Proyecto definitivo de ingeniería 	<ul style="list-style-type: none"> Ingeniería básica Ingeniería de detalle
Decisión	Gestión de los recursos	Definir el tipo de agrupación social, formalizarla y obtener los recursos	Negociaciones jurídicas, financieras y laborales	La capacidad jurídica y los recursos requeridos para la inversión	<ul style="list-style-type: none"> Asesoría 	<ul style="list-style-type: none"> Financiero Jurídico Laberal
Inversión	Ejecución y puesta en marcha	Disponer de los recursos humanos, físicos y financieros	Programación de construcción, instalación y montaje, reclutamiento, selección y formulación de recursos humanos Pruebas de maquinaria y equipo	<ul style="list-style-type: none"> La infraestructura física, laboral y directiva, y ajustes de maquinaria y equipo 	<ul style="list-style-type: none"> Plan de ejecución 	<ul style="list-style-type: none"> Programa Construcción, instalación y montaje Adquisiciones Formación de recursos humanos Financiero Puesta en marcha
Recuperación	Operación y dirección	Generar eficientemente beneficios económicos y sociales	Planeación, organización, dirección, evaluación y control	La producción de satisfactores eficaces	<ul style="list-style-type: none"> Optimización 	<ul style="list-style-type: none"> Eficiencia de proceso Aseg. De calidad Sist. Y Proc. Desarrollo Org. Planeación Fin. Mercadotecnia Planeación estratégica



Como ya se había mencionado con anterioridad en la última columna de la tabla anterior se presentan los estudios que son requeridos a cada fase de desarrollo, del proceso de inversión. Este trabajo de investigación está enfocado al estudio de evaluación, en particular a la evaluación financiera, que es parte de la formulación y evaluación de la etapa de Preinversión, razón por la cual, después de haber dado a conocer en que nivel se ubica este estudio se procede a discrepar los diferentes tipos de evaluación existentes.

1.4.- DEFINICIÓN Y OBJETIVO DE LA EVALUACIÓN.

Evaluar o valorar es medir, asignar valor, tasar, comparar, racionalizar. Bajo esta serie de sinónimos se enmarca *la evaluación de proyectos*, que lleva a decisiones, tanto en la política del desarrollo, como en los demás campos de la asignación de fondos. Y se define según la Organización de las Naciones Unidas como, *un conjunto de estudios antecedentes que permiten estimar el universo de ventajas y desventajas que se derivan de asignar determinados recursos para la producción de bienes y servicios*. Es decir, la evaluación representa una serie de mecanismos que permiten determinar la prioridad de un proyecto, a través de un análisis comparativo de los usos alternativos que puedan tener los recursos invertidos o por invertir.

La evaluación tiene como objetivo determinar hasta qué punto las características de un proyecto corresponden a los patrones de uso óptimo económico, en las diferentes situaciones del contexto general. *Para facilitar el análisis se obtienen coeficientes numéricos que, expresados como parámetros, reflejan las ventajas de un proyecto*. Normalmente el numerador expresa ventajas y el denominador desventajas, por lo tanto, entre mayor sea el coeficiente mejor es el proyecto en la escala de prioridades.



1.5.- LIMITACIONES PRÁCTICAS DEL ANÁLISIS.

Dentro de la evaluación de proyectos se deben considerar algunos aspectos de naturaleza teórica, que se presentan en la práctica y que para efecto de un buen análisis deben puntualizarse. Al presentar resultados se supone

1. La existencia de un gran número de proyectos que representan realmente alternativas de utilización de los recursos y que ofrezcan los datos técnicos y económicos necesarios para su evaluación
2. El conocimiento de patrones para la comparación de proyectos de diferentes sectores o subsectores económicos, lo que implica el conocimiento profundo del país o la región, las directrices de política económica y en ocasiones la situación internacional que la afecte

La escasa existencia de proyectos para poder establecer las comparaciones adecuadas resulta ser una severa restricción para la selección de inversiones, por lo **tanto los parámetros usados normalmente son referidos a la inmovilidad bancaria**. Además de las dificultades de origen práctico, se presentan los problemas estrictamente técnicos entre los diferentes parámetros que pueden ser reportados, la definición de beneficios y costos, la forma de medirlos y la adecuada combinación de criterios y coeficientes que permitan la presentación o análisis de la evaluación.

La evaluación también puede realizarse en términos de su relación o impacto sobre los objetivos de los agentes involucrados, cuando estos existen. Así como su relación con los agregados macroeconómicos. Por lo tanto, **un proyecto no solamente se puede evaluar financieramente, sino también puede ser evaluado bajo indicadores económico y de impacto social.**



1.6.- DESCRIPCIÓN DE APARTADOS ESPECÍFICOS.

La evaluación en atención a los aspectos que se han anotado, puede ser considerada desde diferentes puntos de vista, todos válidos y aplicables en la evaluación de proyectos. No obstante, el indicador que reporte la evaluación, será aplicable a los diversos enfoques implicados en la toma de decisiones.

Lo acostumbrado es que el análisis se inicie utilizando el enfoque financiero y luego se complemente introduciéndole los ajustes necesarios para convertirlo en una evaluación económica y social.

A continuación se define de una forma muy breve en que consiste cada tipo de evaluación y cuales son los indicadores que resultan de estas.

1.6.1.- LA EVALUACIÓN FINANCIERA.

La evaluación financiera de un proyecto es un análisis micro económico, tomando como objeto de investigación a la unidad productiva, considerando únicamente los efectos directos en costos, gastos e ingresos valorados a precios de mercado.

Los resultados de la evaluación se expresan en un conjunto de indicadores que miden los beneficios esperados, las ventajas de realizar la inversión, los cuales sirven para decidir si los recursos se arriesgan o se destinan a otra actividad o bien se dejan donde están. De hecho esta parte del proyecto aglutina e incorpora todos los elementos e información que se manejara durante el presente trabajo.



1.6.1.1.- PRINCIPALES INDICADORES FINANCIEROS.

- **Tasa interna de retorno (TIR).** Es la tasa de actualización que igual el valor presente de los ingresos totales con el valor presente de los egresos totales de un proyecto en estudio. La TIR obtenida, se puede comparar para fines de aprobación y para la toma de decisiones con
 1. El costo de financiamiento real, o con la tasa promedio de rentabilidad de otros proyectos similares dentro del sector, cuando los flujos están en términos reales.
 2. El costo de financiamiento nominal, cuando los flujos se encuentran en términos nominales, o cuando no están incluidos en los flujos los costos del financiamiento.
 3. Otras tasas de referencia siempre y cuando sean coherentes con la forma en que están determinados los flujos.
- **Valor presente neto (VPN).** Es el valor obtenido mediante la actualización de los flujos netos del proyecto - Ingresos menos egresos - considerando la inversión como un egreso a una tasa de descuento determinada previamente. Si el VPN es positivo se considera que el proyecto es favorable, ya que cubre el nivel mínimo. Si el VPN es negativo, la rentabilidad está por debajo de la tasa de aceptación y por lo tanto, el proyecto debe descartarse.
- **Relación beneficio - costo B/C.** Es el cociente de los flujos descontados de los beneficios o ingresos del proyecto sobre los flujos descontados de los costos o egresos totales del proyecto. Al igual que en el caso del VPN se requiere establecer una tasa de actualización apropiada. Si la B/C es mayor que uno el proyecto es favorable. Si la B/C es igual a uno, los beneficios y los costos se igualan, cubriendo apenas el costo mínimo, atribuible a la tasa de actualización. Si la B/C es menor a uno, el proyecto es desfavorable, pues reporta que a la tasa aplicada no cubre sus costos. La B/C obtenida para un proyecto particular se compara con la obtenida entre otros proyectos para fines de decisión dentro del contexto del sector.



- **Periodo de recuperación.** Se define como el tiempo en el cual los beneficios o utilidades futuras del proyecto cubren el monto de inversión (generalmente medido en años) En este caso es conveniente que los costos ficticios no se incluyan, tales como depreciación y amortización, ya que su inclusión reduce el plazo y por lo tanto el resultado final. Además de un criterio de rentabilidad es un criterio de liquidez y puede ser importante en casos de cierta inestabilidad económica o por motivos muy específicos.

1.6.2.- EVALUACIÓN ECONÓMICA Y SOCIAL.

La evaluación económico - social, es aquella que se realiza en función del *bienestar* económico de la sociedad en su conjunto y no desde la perspectiva de un agente económico particular como puede ser un empresario, una organización o una empresa.

Dicho "bienestar" económico - social significa que dentro del estudio del proyecto se evalúan solamente el uso real de recursos económicos y sociales, excluyendo por ejemplo, las transacciones puramente financieras, que no representan pagos por recursos reales representados por bienes y servicios. También dicho "bienestar" económico y social significa que la medición de costos y beneficios, debe de llevar implícito el concepto de ganancia social *neto*, es decir, que la evaluación debe representar todos los efectos económicos y sociales que se producen por la nueva inversión en estudios, tanto para los involucrados directamente en el proyecto, como para los que están relacionados indirectamente, es decir, tomando en cuenta los impactos para la sociedad en su conjunto y no solo para los directamente afectados.

Elaborando así los estudios económicos y sociales del proyecto se obtendrá, (al menos teóricamente) un rendimiento *real* del proyecto que mida finalmente el incremento neto del bienestar económico y social debido a la nueva inversión dentro de la economía.



1.6.2.1.- PRINCIPALES INDICADORES ECONÓMICOS Y SOCIALES.

Al igual que en el análisis financiero, se pueden determinar los índices ya mencionados, claro haciendo las modificaciones pertinentes en los elementos que intervienen en la evaluación, para ser más explícito nos auxiliaremos de la siguiente tabla en donde se relacionan los cambios que son necesarios efectuar para poder determinar los índices ya indicados.

ELEMENTOS DE LA EVALUACIÓN	FINANCIERA	ECONÓMICA	SOCIAL
PRECIOS	Precios de mercado	Precios sombra	Precios sociales
BENEFICIOS Y COSTOS	No incluye externalidades ni necesidades meritorias	Incluye externalidades	Incluye externalidades ni necesidades meritorias
BENEFICIOS	Medidos por el flujo de caja	Medidos por "excedentes del consumidos"	Medidos por los excedentes del consumidor y ajustados por el impacto redistributivo
TASA DE DESCUENTO	Tasa de oportunidad financiera	Tasa de descuento social	Tasa de descuento social



En la evaluación económica y social, además de lo anterior existen otros índices que son de gran importancia y son

- **Creación de empleos totales** Se hace una cuantificación de los empleos nuevos o generados directamente por el proyecto. Es conveniente realizar una clasificación que especifique la naturaleza de los nuevos empleos. La cuantificación debe llevarse a cabo tomando como base el año de madurez del proyecto, es decir, durante el periodo más estable, a excepción de los proyectos que tengan una generación de empleos muy irregular, lo cual también habrá de especificarse.

El resultado de este indicador se compara con el de otros proyectos similares o alternativos. Puede también exponerse como una justificación social del proyecto en cuestión, cuando la política económica establece la creación de empleos como uno de los objetivos nacionales.

- **Costo por empleo generado.** Es el coeficiente *inversión total/empleos generados*. Se reporta en unidades monetarias por personas ocupadas y se les puede comparar al costo nacional por generación de empleos o al relativo al sector involucrado. Este indicador permite, al evaluar el proyecto, además de equipararlo con otros, detectar alguna desviación o error en la determinación de las inversiones.
- **Valor agregado.** Como medida del ingreso generado por el proyecto, el cual puede calcularse sumando los pagos a los factores de la producción, es decir:
 1. Remuneración de empleados (sueldos y prestaciones)
 2. Consumo de capital fijo (Depreciación)
 3. Excedente de explotación (utilidades, interés, regalías, etc.)
 4. Impuestos menos subsidios



Esta cuantificación se realiza a partir de la reordenación de los conceptos correspondientes en el proyecto. El concepto de valor agregado es equivalente al de **Producto Interno Bruto**, por lo que en realidad al calcular el valor agregado a través del costo de los factores de la producción, se está calculando en incremento real neto del proyecto

Adicionalmente esta cuantificación puede reagruparse con bases en los agentes económicos involucrados

TRABAJADORES.	←→	TODO TIPO DE REMUNERACIONES Y PRESTACIONES.
EMPRESAS.	←→	DEPRECIACIÓN, UTILIDADES, INTERÉS, ETC.
GOBIERNO.	←→	IMPUESTOS MENOS SUBSIDIOS.

Su evaluación, además de el comparativo, con el PIB, se puede hacer también en comparación con otros proyectos en los que el mayor valor agregado que reportara sería el del mejor proyecto

- **Incremento en la producción total.** Con este indicador se mide el Valor Bruto de las ventas del proyecto, es decir, el impacto total del proyecto en cuanto al volumen y valor del bien a producir. En términos de cuentas nacionales, se denomina valor bruto de la producción. Asimismo este indicador ofrece la oportunidad de evaluar el impacto total del proyecto en cuanto incremento de la producción de alimentos, servicios, etc. Puede compararse con el de otros proyectos o utilizarse solamente como una justificación más para la aceptación del propio proyecto
- **Relación producción total inversión** Asociando al indicador anterior, se obtiene la *relación producción o valor bruto de las ventas/inversión total en el proyecto*, lo que representa el valor que podrá generar la inversión en el proyecto estudiado



CAPÍTULO 2

MATEMÁTICAS FINANCIERAS:



MATEMÁTICAS FINANCIERAS

En este capítulo se exponen las bases de los modelos que se utilizan en el análisis de decisiones económicas y financieras, ya que el desarrollo mundial y las dificultades en el manejo de inversiones que resulta de la desvalorización monetaria, demanda a Ingenieros que tengan conocimiento de estas, para que de esta forma se tengan las bases suficientes para posteriormente interpretar y calcular los índices necesarios para la evaluación de proyectos

Las matemáticas financieras se consideran parte de las matemáticas aplicadas, por lo que a lo largo de este trabajo se encontrarán aplicaciones de las matemáticas acumuladas en los grados anteriores, es recomendable el empleo de calculadoras financieras, o bien el uso de software que contengan algoritmos para el cálculo de índices financieros o lenguajes computacionales, mismos que nos ayudan a simplificar el desarrollo de procesos financieros.

Dentro del ciclo de vida de los proyectos de inversión hay un elemento indicador que atrae poderosamente la atención de grupos de inversionistas (sobre todo privados) antes de tomar la decisión de invertir. Este elemento es la tasa de interés que obtendría al abstenerse



de consumir ahora el capital acumulado en el pasado, invirtiéndolo en alguna actividad productiva, con la disponibilidad de *esperar*, para obtener en un futuro su rendimiento

De este planteamiento surge el concepto de interés, mediante el cual se manifiestan un reconocimiento del valor del dinero en el tiempo. Conociendo de que el capital es un recurso escaso, tiene como todo factor de producción, un *costo*. Este costo es relativo y representa una medida sencilla de evaluar la prioridad de un recurso dentro del esfuerzo económico

El interés es pues el costo de capital, este costo varía en función a la importancia del dinero como recurso productivo en cada caso

La palabra interés se define como la renta que se paga por utilizar dinero, capital prestado, o más ampliamente, como la renta que se gana al invertir nuestro dinero. Aunque una inversión sea financiada por fondos internos sin recurrir a los exteriores, es de reconocer que el capital tiene un costo de utilización, ya que alguna utilidad podría recibirse de él

Puesto que, ya sea que solicitemos prestado capital o demos prestado, o bien invirtamos, conviene conocer una serie de fórmulas de equivalencia con las cuales evaluar el rendimiento obtenido en una determinada inversión, o bien el costo real que representa una determinada fuente de financiamiento



2.1.- VALOR DEL DINERO A TRAVÉS DEL TIEMPO.

Debido a que el dinero puede ganar un cierto interés cuando se invierte por un determinado periodo, usualmente un año, es muy importante reconocer que un peso que se reciba en el futuro tendrá un valor menor que un peso que se tenga actualmente. Es exactamente esta relación entre el *interés* y el *tiempo*, lo que conduce al concepto de valor del dinero a través del tiempo, es decir, un peso que tenga hoy puede acumular intereses durante un año, mientras un peso que reciba dentro de un año no me producirá un rendimiento, por lo tanto, el valor del dinero a través del tiempo significa que **cantidades iguales de dinero no tienen el mismo valor si se encuentran en puntos diferentes en el tiempo y si la tasa de interés es mayor que cero**

Este concepto se fundamenta, como ya se había comentado en la tasa de interés, también conocida como tasa de interés de oportunidad o tasa de interés de equivalencia, que sirve para cuantificar la oportunidad que el dinero tiene de crecerse, y se define como el porcentaje que representa la cantidad adicional (CF) que se recibe con respecto a la cantidad que se invirtió o prestó (VP), al término de un periodo (un mes, un trimestre, un semestre, un año, etc.). Matemáticamente se expresa como

$$i = \frac{V'F}{VP}$$

2.2.- TIPOS DE INTERÉS

El interés puede ser simple o compuesto:

El interés simple, se define como la tasa que se cobra o se paga por concepto de una inversión inicial en función del tiempo y afectado por una tasa de interés de oportunidad establecida con anterioridad. Por lo general está asociado a préstamos e



inversiones cuya naturaleza es a corto plazo, interpretando esto de una forma analítica y gráfica, nos queda lo siguiente

Si analizamos una cantidad de dinero como una función de acumulación donde VP es el capital o inversión inicial y VF es la cantidad obtenida al final del periodo de inversión, a una tasa de interés de oportunidad i , tenemos:

$$VF(0) = VP$$

$$VF(1) = VF(0) + VF(0)i$$

$$= VP + VPi$$

$$= VP(1 + i)$$

$$VF(2) = VF(1) + VPi$$

$$= VP(1 + i) + VPi$$

$$= VP(1 + i + i)$$

$$= VP(1 + 2i)$$

.

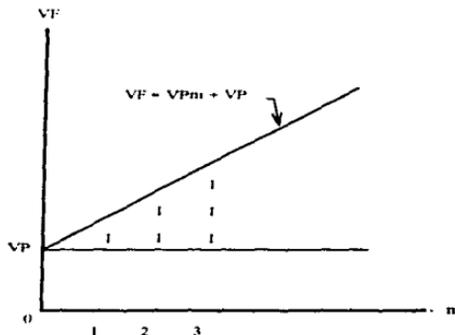
.

.

$$VF(n) = VP(1 + ni)$$

$$= VP + VPni$$

$$= VP + I$$



Entonces:

$I = VPni$; que es el monto cobrado por concepto del intereses en el tiempo (n) que dura la operación.



Como nos podremos dar cuenta el comportamiento del interés simple, es similar al comportamiento de una función lineal, en donde el capital invertido se mantiene en forma constante en toda la operación y los intereses cobrados o pagados son los mismos para cada periodo.

Si comparamos la ecuación que determinados en la deducción anterior con la ecuación del haz de rectas paralelas a una recta dada

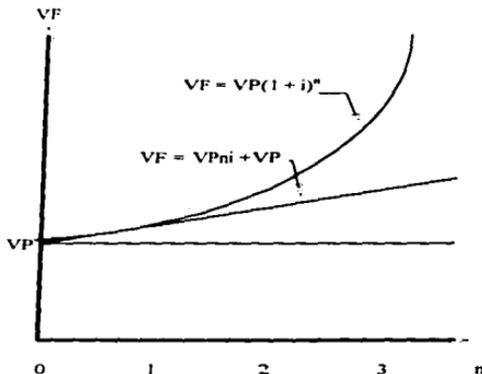
$$Y = m x + b \quad \text{Ecuación del haz de rectas paralelas}$$
$$VF = VPI n + VP \quad \text{Ecuación deducida}$$

Se puede apreciar ampliamente, que su forma es idéntica, ya que la pendiente de la línea (m) es equivalente al producto VPI , siendo n el eje de las abscisas (x), VF el eje de las ordenadas (Y) y VP el punto en donde corta la línea el eje de las ordenadas (b). Debido a esta semejanza y a que esta ecuación representa el comportamiento lineal del interés simple, se le llama a la ecuación que se dedujo, fórmula general de Interés simple.

El interés compuesto, este tipo de interés es el que más se utiliza para cualquier tipo de operación comercial, ya que los intereses también ganan intereses a partir de un periodo que se llama capitalización, es decir, el interés compuesto es aquel que al final de cada periodo se agrega al capital reinvirtiéndose (se capitaliza).

Analizando este concepto de manera semejante al anterior tenemos:

$$\begin{aligned}
 VF(0) &= VP \\
 VF(1) &= VF(0) + VF(0)i \\
 &= VP + VPi \\
 &= VP(1 + i) \\
 VF(2) &= VF(1) + VF(1)i \\
 &= VP(1 + i) + VP(1 + i)i \\
 &= VP(1 + i)^2 \\
 VF(3) &= VF(2) + VF(2)i \\
 &= VP(1 + i)^2 + VP(1 + i)^2 i \\
 &= VP(1 + i)^3 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 VF(n) &= VF(n-1) + VF(n-1)i \\
 &= VP(1 + i)^{n-1} + VP(1 + i)^{n-1} i \\
 &= VP(1 + i)^n
 \end{aligned}$$



Como podemos observar en el gráfico el comportamiento del interés compuesto, es similar al comportamiento de una función exponencial, es decir, crece en razón geométrica, en cambio el interés simple crece en progresión aritmética.

De el análisis anterior se deduce la fórmula de interés compuesto, que nos representa el comportamiento que tienen los dineros que se invierten con este tipo de interés:

$$VF = VP(1 + i)^n$$



2.3.- CONCEPTO DE EQUIVALENCIA Y DIAGRAMAS DE FLUJO DE EFECTIVO.

Cuando a un inversionista le es indiferente recibir hoy una cierta cantidad de dinero (VP) o recibir esa misma cantidad mas un rédito (VP + VPI) dentro de un periodo, se dice que para el inversionista le es equivalente recibir VP hoy o recibir (VP + VPI) dentro de un periodo y que su tasa de interés de oportunidad es $(VPI/VP) * 100\%$. Debemos entender también que el concepto de equivalencia es, en realidad, el de indiferencia financiera, ya que este inversionista está aseverando implícitamente que él dispone de oportunidades de inversión que le proporcionan el mismo rédito en el mismo periodo.

De una forma más técnica el significado de la equivalencia puede explicarse usando una analogía del álgebra. Si varias cosas son iguales a otra, entonces son iguales entre sí. Entonces *cualquier pago o serie de pagos futuros que reembolsen exactamente la suma presente a una tasa dada, es equivalente a una suma presente; tales pagos o serie de pagos futuros que reembolsan la suma real dada, son equivalentes entre sí.* La suma real, es el valor presente de cualquier pago o serie de pagos futuros que la reembolsen exactamente con una tasa de interés dada.

Basándonos en los conceptos anteriores estamos en capacidad de desarrollar una serie de relaciones matemáticas entre sumas de dinero que se reciben en diferentes momentos, para establecer equivalencias entre ellas.

Para poder entender más fácilmente los problemas de interés compuesto y las relaciones que continuación se deducirán, nos auxiliaremos de **diagramas de flujo de efectivo**, que no son más que dibujos geométricos que nos representan el comportamiento gradual del efectivo, es decir, nos permite identificar el comportamiento entre los ingresos y los egresos de un flujo financiero. Este diagrama, es además un elemento indispensable para el correcto uso de calculadoras financieras,



software con algoritmos financieros y/o lenguajes computacionales, con lo que resulta sencillo la aplicación de estos

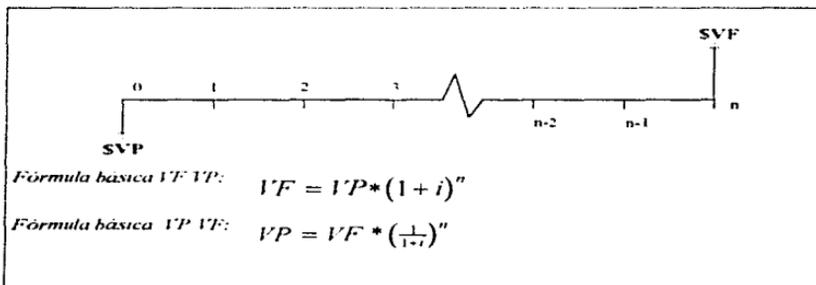
Hay cuatro sencillas reglas que se deben tomar en cuenta y que se aplican a todos los cálculos de interés compuesto

- 1. Dados 3 ó 4 datos de los valores financieros se puede resolver el cuarto o quinto valor.** El ingreso de los valores puede ser en cualquier orden
- 2. Debe utilizarse la convención de signos de flujo de efectivo en todos los cálculos de interés compuesto.** El dinero recibido (punto de la flecha hacia arriba) es representado por un valor positivo (+) El dinero pagado (punto de la flecha hacia abajo) está representado por un valor negativo (-)
- 3. Los pagos periódicos iguales (anualidades o amortizaciones), es necesario especificar si se realizan al comienzo del periodo de pago (anualidades anticipadas) o si son efectuados al final del mismo (anualidades vencidas)**
- 4. Es importante que el período (n) y la tasa de interés (i) deben corresponder a la misma unidad de tiempo**
 - Si n es mensual la tasa de interés debe ser mensual
 - Si n es anual la tasa de interés debe ser anual.



2.4.- EQUIVALENCIA ENTRE UN VALOR ACTUAL (VP) Y UN VALOR FUTURO (VF).

La primera relación de equivalencia fundamental es la que existe entre un valor actual de dinero (VP) y un valor futuro (VF). Donde "i" como ya se mencionó es la tasa de interés de oportunidad por periodo, expresada como una fracción, para que VF pesos recibidos dentro de un periodo sean equivalentes a VP pesos recibidos hoy, apoyándonos en el razonamiento realizado en el interés simple y compuesto, podemos determinar que un valor SVP actual equivale a un valor SVF dentro de n periodos, siempre y cuando VF sea igual a $VP(1 + i)^n$. En el siguiente gráfico se aprecia la naturaleza explícita de esta fórmula

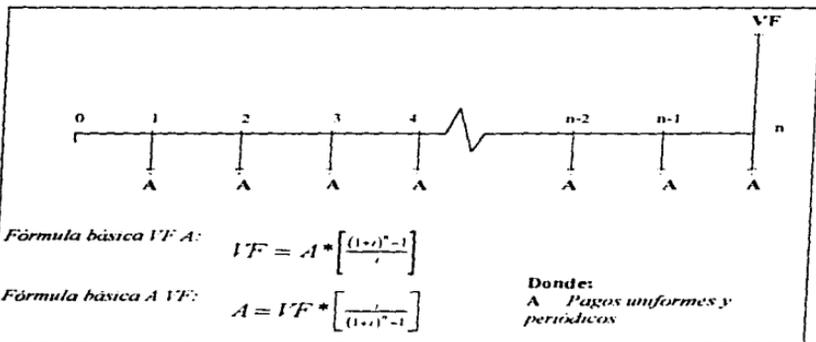


La deducción de esta fórmula, es la que se analizó en la fórmula de interés compuesto.



2.5.- EQUIVALENCIA ENTRE UN VALOR FUTURO (VF) Y UNA SERIE DE PAGOS UNIFORMES (A).

La segunda relación de equivalencias principal es la que existe entre una serie de pagos uniformes, cada una de ellas de magnitud A , y un valor futuro VF . Los pagos uniformes aparecen al final de cada uno de los próximos n periodos y el valor VF aparece al final del periodo n , tal como se muestra en la figura





Deducción matemática:

Analizando cada una de los pagos A por separado, se puede calcular con la fórmula básica VF/VF , empezando con los pagos mas distantes tenemos que

SA al final del periodo n equivale a SA al final del periodo n

SA al final del periodo $n-1$ equivale a $SA(1+i)$ al final del periodo n

SA al final del periodo $n-2$ equivale a $SA(1+i)^2$ al final del periodo n

SA al final del periodo $n-3$ equivale a $SA(1+i)^3$ al final del periodo n

Por lo tanto, el valor VF a la cual equivalen toda la serie de partidas A , es el valor de los equivalentes de cada una de ellas, o sea

$$VF=A+A(1+i)+A(1+i)^2+\dots+A(1+i)^{n-1}$$

Si considero que $(1+i)=x$, y sustituimos en la expresión anterior

$$\text{Ec. (1)} \quad VF=A+Ax+Ax^2+\dots+Rx^{n-1}$$

Multiplcando por x , nos queda:

$$\text{Ec (2)} \quad VFx=Ax+Ax^2+Ax^3+\dots+Ax^n$$

Igualando la Ec. 1 y 2.

$$VFx-VF-Ax^n+A=0$$

Despejando VF .

$$VF(x-1)=Ax^n-A$$



Sustituyendo $x=(1+i)$,

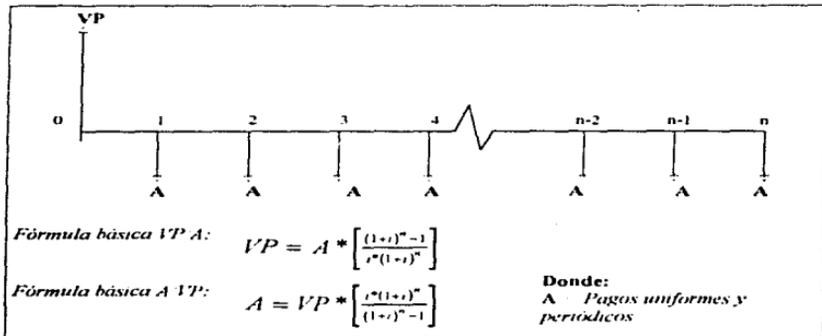
$$VF = A * \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right], \quad \text{Fórmula VF/A}$$

y al despejar A:

$$A = VF * \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right], \quad \text{Fórmula A/F}$$

2.6.- EQUIVALENCIA ENTRE UN VALOR PRESENTE (VP) Y UNA SERIE DE PAGOS UNIFORMES (A).

La tercera relación de equivalencia fundamental es la que existe entre una serie de pagos (A) y un valor presente (VP). Como en el caso anterior, los pagos de magnitud A parecen al concluir cada uno de los próximos n periodos y el valor VP aparece en el momento cero. En el siguiente gráfico se aprecia en detalle las características de esta relación:





Para la deducción de esta fórmula, lo único que se hace es sustituir la ecuación básica VF/VP en la ecuación básica A/VF.

Ecuación VF/VP
$$VF = VP * (1 + i)^n$$

Ecuación A/VF
$$A = VF * \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Sustituimos y nos queda:

$$A = VP * (1 + i)^n * \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right] = VP * \left[\frac{i * (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] \quad \text{Fórmula A/VP.}$$

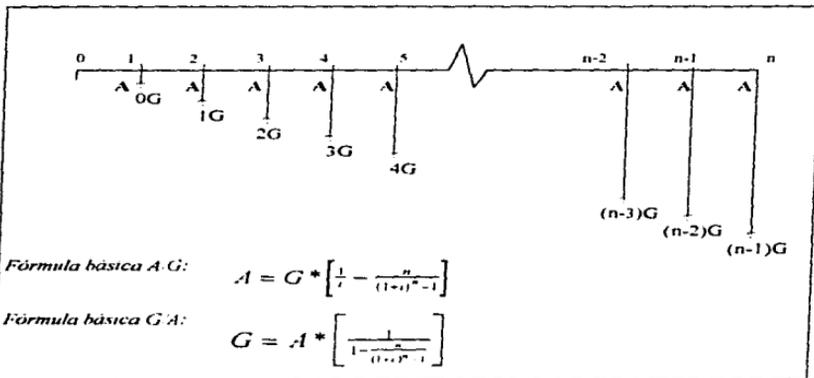
Finalmente solo falta encontrar el modo de calcular VP, conocida A, despejando VP, de la ecuación A/VP, tenemos:

$$VP = A * \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n} \right] \quad \text{Ecuación VP/A.}$$

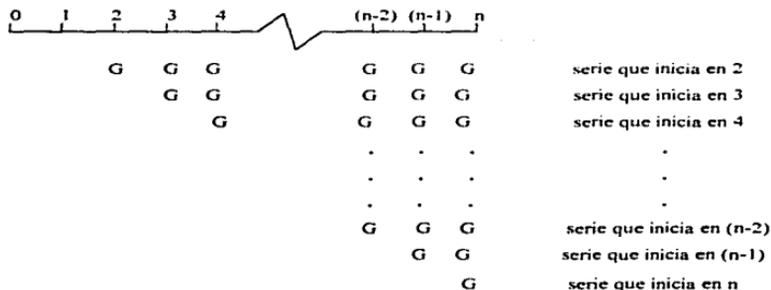


2.7.- EQUIVALENCIA ENTRE UNA SERIE DE PAGOS UNIFORME (A) Y UNA SERIE DE VALORES FUTUROS, CUYO VALOR SE INCREMENTA EN LA CANTIDAD G.

Una cuarta relación de equivalencias es la que existe entre una serie de pagos (A) y otra serie integrada por valores cuya magnitud va aumentando en la cantidad G, de modo que estas son 0, 1G, 2G, 3G, ..., nG. Se observa más en detalle en el siguiente gráfico:



La deducción matemática de las fórmulas anteriores se realiza en las páginas siguientes:



Si llamamos VF_t al equivalente de la serie que empieza en el periodo t , entonces el equivalente final de toda la serie creciente es:

$$VF = \sum_{t=2}^n VF_t$$

Además, al aplicar la fórmula VF/A, vemos:

$$VF_n = G \cdot \left[\frac{(1+i) - 1}{i} \right]$$

$$VF_{n-1} = G \cdot \left[\frac{(1+i)^2 - 1}{i} \right]$$

$$VF_{n-2} = G \cdot \left[\frac{(1+i)^1 - 1}{i} \right]$$

$$VF_2 = G \cdot \left[\frac{(1+i)^{n-1} - 1}{i} \right]$$

y por lo tanto:

$$VF = G \cdot \left[\frac{(1+i)^1 - 1}{i} \right] + G \cdot \left[\frac{(1+i)^2 - 1}{i} \right] + \dots + G \cdot \left[\frac{(1+i)^{n-1} - 1}{i} \right]$$

$$VF = \frac{G}{i} [(1+i)^1 - 1 + (1+i)^2 - 1 + \dots + (1+i)^{n-1} - 1]$$

$$VF = \frac{G}{i} [(1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-1} - (n-1)]$$

$$VF = \frac{G}{i} [(1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-1} + 1] - \frac{nG}{i}$$

La expresión que se encuentra entre paréntesis rectangulares es la que encontramos al derivar la relación entre VF y A en la sección 2.5. En consecuencia, su contenido es igual

a $\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$ tal como lo señala la fórmula básica VF/A .



De esta manera:

$$VF = \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] - \frac{nG}{i}$$

Para convertir este equivalente final **VF** en una serie uniforme anual **A**, simplemente acudimos a la fórmula básica **A/VF** efectuando la siguiente operación:

$$A = VF * \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

expresando a **VF** en función de **G** en la relación anterior, obtenemos:

$$A = \left[\frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] - \frac{nG}{i} \right] * \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

de donde resulta que:

$$A = \frac{G}{i} \left[1 - \frac{ni}{(1+i)^n - 1} \right]$$

expresión que he bautizado con el nombre de fórmula básica **A/G**.



2.8.- TABLA RESUMEN DE LAS DIFERENTES EQUIVALENCIAS.

Este resumen de las formulas que se acaban de desarrollar tienen como *objetivo*, *simplificar* y *facilitar al lector la comprensión y aplicación* de ellas. Cabe señalar que se incluyeron dos columnas mas, una de ellas que nos indica el dato fundamental que hay que sustituir en la fórmula y la otra que nos señala la incógnita que sera resuelta al sustituir el dato

DATO	INCÓGNITA	EXPRESIÓN A USAR
VP	VF	$VF = VP * (1 + i)^n$
VF	VP	$VP = VF * \left(\frac{1}{1+i}\right)^n$
A	VF	$VF = A * \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$
VF	A	$A = VF * \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$
VP	A	$A = VP * \left[\frac{i * (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$
A	VP	$VP = A * \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n}\right]$
A	G	$G = A * \left[\frac{1}{1 - \frac{i}{(1+i)^n - 1}}\right]$
G	A	$A = G * \left[\frac{1}{1} - \frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$



2.9.- TASA DE INTERÉS NOMINAL E INTERÉS EFECTIVO.

Por lo general, en la gran parte de los estudios financieros, las tasas de interés adoptadas son en bases anuales. No obstante, es posible en la práctica, encontrar situaciones en las cuales, los intereses se tengan que pagar de una manera más frecuente, es decir, ya sea cada semestre, cada trimestre o cada mes.

Ante esta posibilidad es necesario mostrar que existe una clara diferencia entre pagar, por ejemplo, una tasa del 2.5% mensual y pagar el 30% anual. Supongase, que una persona requiere \$ 1,000,000, un banco se los presta al 30% anual, pero otra persona se los puede prestar al 2.5% mensual y el plazo para pagarlo es de un año en ambos casos. Los pagos en las dos situaciones serían:

$$VF_{\text{banco}} = 10^6 (1 + 0.30)^1 = 1,300,000$$

$$VF_{\text{persona}} = 10^6 (1 + 0.025)^{12} = 1,344,889$$

De lo anterior se observa que el 2.5% mensual no equivale al 30% anual; por lo que el interés efectivo anual sería:

$$IEF = \frac{1,344,889 - 1,000,000}{1,000,000} = 0.34488 = 34.5\%$$

$$IEF = \frac{VP \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - VP}{VP}$$

$$IEF = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$$

Donde:

IEF= interés efectivo anual

r= interés nominal anual

m= número de periodos en los cuales se divide el año



En el caso de que el número de periodos durante el año creciera indefinidamente, o sea ($n \rightarrow \infty$), entonces $IEF = e^r - 1$. Esto es, el interés anual r , se capitaliza continuamente, entonces el interés efectivo anual equivale a $e^r - 1$.

Cabe aclarar que en los problemas de análisis financieros, por lo general se selecciona un determinado periodo (semestre, año, etc.) luego entonces el interés deberá ser expresado en forma semestral o anual.

2.10.- INTERÉS REAL.

Hay otra connotación de interés, además del nominal y el efectivo, que es el interés real. Esto normalmente se da en la práctica, sobre todo en aquellas compras que se hacen a crédito, o bien, en los créditos que se obtienen de los bancos.

Por ejemplo, supóngase que alguien pide un préstamo al banco por \$10,000,000 el banco para este tipo de préstamo otorga solo 6 meses para pagar, a un interés del 3.0% mensual si la persona recibe los 10 millones menos los intereses generados por el préstamo. ¿Cuál sería la tasa interna real en esta operación?

Solución: La persona recibe efectivamente

$$VP = 10^7 - (10^7 (1 + 0.03)^6 - 10^7) = 10^7 - 1,940,523$$

$$VP = \$ 8,059,477$$

La persona recibe \$8,059 millones a cambio de pagar 10 millones dentro de 6 meses. Esto significa que la tasa de interés real mensual en este préstamo es aquella que iguala los \$8,059,477 a \$10,000,000 dentro de 6 meses.

$$10,000,000 = 8,059,477 (1 + i)^6$$



Despejando i ,

$$i = \left(\frac{10 \cdot 10^6}{8,059} \right)^{12} - 1 = 3.66\%$$

Por tanto la tasa de interés real del préstamo es de 3.66% mensual, y que equivale al 53.9% anual efectivo

De una manera similar ocurre cuando se compra a crédito. Supongase que una tienda departamental le ofrece un equipo electrónico a un precio al público de \$3,000, si lo paga de contado se lo dejan en \$2,550, pero si lo paga en mensualidades durante un año, le cobra sobre el precio al público una tasa de interés mensual del 2.5%. Si la decisión es comprarlo a crédito ¿Cuál será la tasa de interés real mensual y cuál la tasa efectiva anual?

Solución: Antes de determinar la tasa de interés real, conviene conocer primero el pago mensual durante los 12 meses del año.

$$A = \frac{3,000 - (3,000)(0.025)(12)}{12} = 325$$

Por lo consiguiente la tasa de interés real (i_r) que iguala el valor presente en las doce mensualidades de \$325, con el valor de contado el cual es de \$2,550 es

$$2,550 = 325 * \left[\frac{(1+i_r)^{12} - 1}{i_r * (1+i_r)^{12}} \right]$$

Despejando i_r , nos queda que:

$$i_r = 7.3\% \text{ mensual}$$



Luego entonces si la compra a crédito, la tasa real mensual es de 7.3% y la tasa efectiva anual es de aproximadamente 133%. Hay dos razones por las que el interés real en este caso es excesivamente alto. En primer lugar porque los intereses se obtienen a partir del precio de crédito (\$3,000)

En segundo término, los intereses generados en el futuro (próximo 12 meses) se están sumando como si estuvieran en el mismo punto del tiempo

Estos dos ejemplos muestran la importancia de manejar bien estos conceptos, ya que de esta forma podrán tomarse mejores decisiones en la compra de activos a crédito, o bien, se podrán escoger mejor las fuentes de financiamiento (las más económicas), con las cuales se comprarán los activos

2.II.- INTERÉS COMPUESTO CONTINUO

Fórmulas de equivalencia: Interés compuesto continuo.

Aún cuando no se hará la deducción de cada una de las fórmulas es de importancia conocer la existencia del llamado interés compuesto continuo. Esta modalidad es usual en aquellos casos cuando se trata de obtener la capitalización continua de una inversión a una tasa de interés compuesto generalmente las transacciones monetarias dentro de una empresa ocurren diariamente, el dinero se pone a trabajar de inmediato después de que se recibe

La obtención de estas fórmulas, tanto para flujos de efectivos únicos, o bien, para una serie uniforme de flujos de efectivo, se fundamentan en la tasa de interés efectivo.

$$IEF = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$$

Solo que en este caso el periodo puede ser menor a un mes, pero el procedimiento es el mismo, dado que m es el número de periodos de capitalización en los cuales se divide



el año. Si la capitalización es diaria, m es igual a 365, si la capitalización es mensual m es igual a 12, Etc. En el caso de flujos de efectivo únicos tenemos, que para determinar la equivalencia de un valor presente (VP) con un valor futuro (VF), cuando el interés nominal anual se capitaliza continuamente, los intereses generados al instante, deben ser agregados al principio, al final de cada infinitesimal periodo de interés así se tiene que si la capitalización es:

Anual el valor futuro es:
$$VF = VP * (1 + i)^n$$

Semestral:
$$VF = VP * \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2n}$$

Trimestral:
$$VF = VP * \left(1 + \frac{r}{3}\right)^{3n}$$

Mensual:
$$VF = VP * \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12n}$$

Semanal:
$$VF = VP * \left(1 + \frac{r}{52}\right)^{52n}$$

Diario:
$$VF = VP * \left(1 + \frac{r}{365}\right)^{365n}$$



Si la capitalización es continua:

$$VF = \lim_{M \rightarrow \infty} VP \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mM}$$

- Donde:
- m= Períodos infinitesimales durante un año.
 - r= Tasa nominal actual
 - n= Número de periodo total para la capitalización.
 - VP= Valor presente (o principal)
 - VF= Valor futuro (incluye principal + interés compuesto continuo).

Haciendo un arreglo a la fórmula:

$$VF = \lim_{M \rightarrow \infty} VP \cdot \left[\left(1 + \frac{r}{m}\right) \frac{m}{r} \right]^{mM}$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right) \frac{m}{r} = e \quad \text{por definición logarítmica}$$

$$VF = VP e^{rM} \quad \text{Ecuación a)}$$

De la ecuación a) se puede despejar VP:

$$VP = VF \frac{1}{e^{rM}} = VF e^{-rM} \quad \text{Ecuación b)}$$



Para series uniformes de flujo de efectivo, substituyendo el interés efectivo en la fórmula de interés discreto se obtiene:

$$VF = A \left(\frac{e^{im} - 1}{e^i - 1} \right) \quad \text{Ecuación c)}$$

$$A = VF \left(\frac{e^i - 1}{e^{im} - 1} \right) \quad \text{Ecuación d)}$$

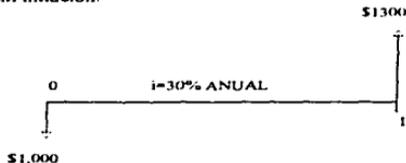
$$VP = A \left(\frac{1 - e^{-im}}{e^i - 1} \right) \quad \text{Ecuación e)}$$

$$A = VP \left(\frac{e^i - 1}{1 - e^{-im}} \right) \quad \text{Ecuación f)}$$

2.12.- PÉRDIDA DEL VALOR ADQUISITIVO DE LA MONEDA.

No son comparables en el periodo cero, el dinero colocado a un interés dado, en una economía donde no hay inflación, al dinero puesto a un interés similar pero en una economía donde hay pérdida del valor adquisitivo de la moneda, debido a la inflación.

Veamos, en una economía sin inflación:





En una economía con inflación, supongamos que se gana el mismo interés pero a su vez la moneda pierde valor a un 20% anual. Señalar o decir que la tasa de interés real es:

$$i_r = i - i_f = 0.30 - 0.20 = 0.10$$

$$i_r = 10\%$$

Es absolutamente incorrecto, ya que de acuerdo a esta tasa el valor al final del año uno sería:

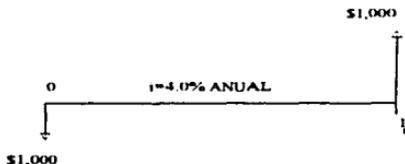
$$10,000 \times (1.10) = 11,000$$

Sin embargo, si consideramos la pérdida del valor adquisitivo de la moneda, correspondiente a la inflación, tendríamos al final del año uno:

$$(1,300) - (1,300)(0.20) = 1,300 (1 - 0.20) = 1,300 (0.8)$$

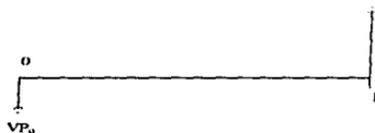
$$\text{O bien: } 1,300 - 260 = \$1,040$$

Entonces \$1,040 de aquí a un año serían equivalentes a 1,300 (0.80) de hoy, esto significa que $1,040/1,000 = 1.04$ y que la tasa de interés real devengada durante el año será de 4% y no del 10% como se había estimado erróneamente.



Esto nos lleva plantear la fórmula para calcular la tasa real, para una situación inflacionaria en donde existe una pérdida del poder adquisitivo, veamos:

$$VF = VP_0 (1 + i)$$



$$VF = VP_1 (1 + i)$$

$$VP_1 = VP_0 - (VP_0 i_r) = VP_0 (1 - i_r)$$

Sustituyendo:

$$VF = VP_1 (1 + i) = VP_0 (1 + i_r) (1 + i) = VP_0 (1 - i_r + i + i_r i)$$

$$VF = VP_0 (1 + (i - i_r - i_r i))$$

En donde:

$$(i - i_r - i_r i) = i_r \text{ ó } i \text{ dura.}$$

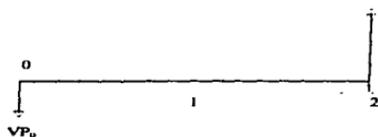
i = tasa de interés sin considerar la inflación.

i_r = tasa de interés que corresponde a la pérdida porcentual anual del valor adquisitivo de la moneda, o sea, la inflación.

i_r = tasa real (que ha tomado en consideración a la inflación).

En el caso de dos periodos y una i_r constante en los dos años:

$$VF = VP_0 (1 + i)^2$$





$$VF = VP_0(1+i)^2 = VP_0(1+i_r)^2(1+i)^2 = VP_0[(1+i_r)(1+i)]^2$$

$$VF = VP_0(1+i_r + i - i_r i)^2 = VP_0[1 + (i - i_r - i_r i)]^2$$

En términos generales:

$$VF = VP_0[1 + (i - i_r - i_r i)]^n$$

Si se considera una inflación que permanece constante año con año durante el periodo n .

Así:

$$i_r = 0.30 - 0.20 - (0.20)(0.30) = 0.04 = 4.0\%$$

Decir que $i_r = i - i_r$ es incorrecto, hay que hacer un ajuste a este valor restándole el factor $(i_r i)$.

Existe otra fórmula que solo es válida cuando la tasa de inflación representa un aumento porcentual en el valor de la canasta familiar, en este caso la expresión es:

$$i_r = \frac{i - i_r}{1 + i_r}$$

donde: $i =$ tasa de interés en el periodo
 $i_r =$ tasa de inflación por periodo



2.13.- EJERCICIOS QUE MUESTRAN EL USO DE LAS FÓRMULAS DE INTERÉS CON RELACIÓN AL TIEMPO.

En este tema se dará solución a problemas prácticos relacionados con la economía y la ingeniería financiera, todos los ejercicios desarrollados en el presente capítulo y posteriores a este, fueron resueltos con algoritmos incluidos en software conocidos como hojas de cálculo (Excel ver 7 y Lotus ver 5), se trató de sustituir valores en la fórmula gráficamente para que de esta forma no hubiese dudas en la aplicación de esta.

Ejercicio 1 Si \$1,000,000.00 fueron invertidos al 6% de interés compuesto (anual) el 1o de Noviembre de 1996, ¿Cuanto se acumulará en total para el 1o de noviembre de 2006?

$$\begin{aligned} P &= \$1,000,000.00 \\ i &= 0.06 \\ n &= 10 \\ F &= ? \end{aligned}$$

$$F = P * (1 + i)^n$$

$$F = 1,000,000.00 * (1 + 0.06)^{10}$$

Resultado \$1,790,847.70

Ejercicio 2 ¿Cuánto se deberá invertir al 6% anual, el 1o de Noviembre de el año 2000 para tener acumulados \$1,790,847.70 el 1o de Noviembre del 2006?

$$\begin{aligned} F &= \$1,790,847.70 \\ i &= 6\% \\ n &= 6 \\ P &= ? \end{aligned}$$

$$P = F * \left(\frac{1}{1+i}\right)^n$$

$$P = 1,790,847.70 * \left(\frac{1}{1+0.06}\right)^6$$

Resultado \$1,262,476.96



Ejercicio 3 ¿Cuál es el valor presente, el 1o de Noviembre de 1993, de \$1,262,476.96 del 1o de Noviembre del 2000, si la $i = 6\%$?

$$\begin{aligned} F &= 1,262,476.96 \\ i &= 0.06 \\ n &= 7 \\ p &= ? \end{aligned}$$

$$P = F * \left(\frac{1}{1+i}\right)^n$$

$$P = 1,262,476.96 * \left(\frac{1}{1+0.06}\right)^7$$

Resultado: \$839,619.28

Ejercicio 4 Se desea invertir totalmente los \$ 839,619.28, pero en cuotas iguales, al final de cada año, al 6%, desde el 1o de Noviembre de 1993, por 10 años, ¿Cuál será el valor de cada cuota?

$$\begin{aligned} P &= \$839,619.28 \\ i &= 0.06 \\ n &= 10 \\ A &= ? \end{aligned}$$

$$A = P * \left[\frac{i * (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A = 839,619.28 * \left[\frac{0.06 * (1+0.06)^{10}}{(1+0.06)^{10} - 1} \right]$$

Resultado: \$114,077.36



Ejercicio 5 ¿Cuánto se acumulará en un fondo, ganando el 6% anual, al cabo de 10 años; si son depositados \$ 114,077.36 a fin de cada o por 10 años, comenzando en 1993 ?.

$$A = \$114,077.36$$

$$i = 6\%$$

$$n = 10$$

$$F = ?$$

$$F = A \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

$$F = 114,077.36 \cdot \left[\frac{(1+0.06)^{10} - 1}{0.06} \right]$$

Resultado:
\$1,503,630.29

Ejercicio 6 ¿Cuánto se debe depositar al 6%, cada año, por 7 años, empezando el 1o. de Noviembre de 1997, con la finalidad de acumular \$ 1,503,630.29, en la fecha del último depósito que será el 1o. de Noviembre del 2003 ?

$$F = 1,503,630.29$$

$$i = 0.06$$

$$n = 7$$

$$A = ?$$

$$A = F \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A = 1,503,630.29 \cdot \left[\frac{0.06}{(1+0.06)^7 - 1} \right]$$

Resultado:
\$179,135.02



Ejercicio 7 ¿Cuánto debió depositar el 1o de Noviembre de 1996, al 6% para poder registrar cada fin de año \$ 179,135 02 durante 7 años, sin dejar nada en el fondo al final del año 7 ? (2002)

$$A = 179,135 02$$

$$i = 0 06$$

$$n = 7$$

$$P = ?$$

$$P = A * \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n} \right]$$

$$P = 179,135.02 * \left[\frac{(1+0.06)^7 - 1}{0.06 * (1+0.06)^7} \right]$$

Resultado \$1,000,000 01

COMENTARIOS

Los siete ejercicios anteriores, como se pudo ver están interrelacionados y para apreciarlo de mejor manera, en la página siguiente se presenta un diagrama de flujo de efectivo en el cual se puede observar lo siguiente

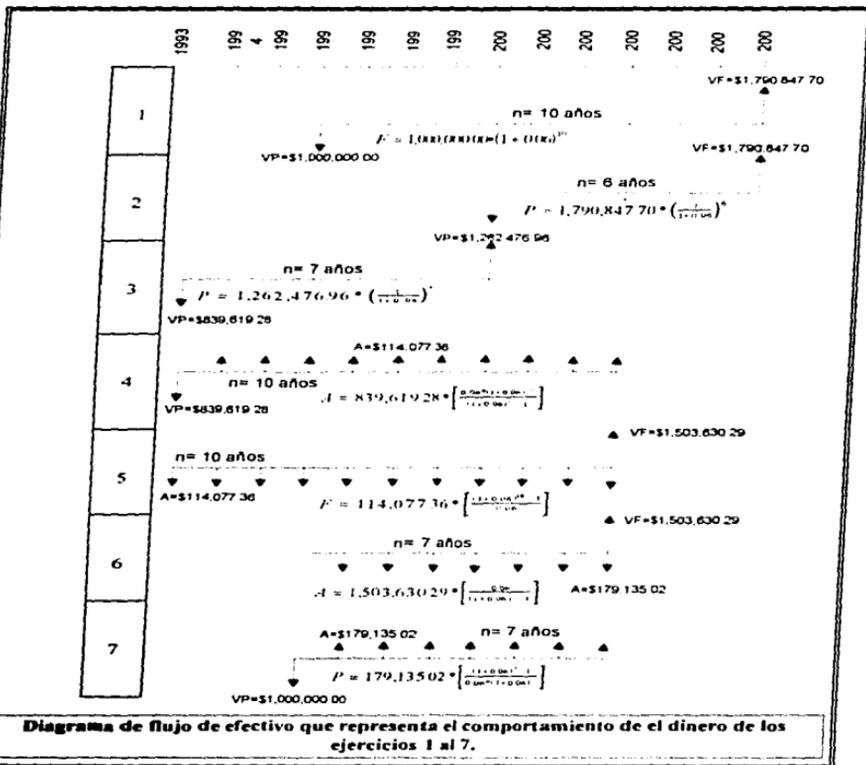
(1). -A una tasa de interés determinada ($i=6\%$), las cantidades de pago unico o serie uniforme de pagos, son equivalentes a \$1,000,000 00 del 1o de Noviembre de 1988

- a) \$1,790,847 70 a 10 años
- b) \$1,262,476 96 dentro de 4 años
- c) \$839,619 28 hace 3 años
- d) \$114,077 36 por año (pagos a fin de cada año) por 10 años, empezando hace tres años
- e) \$1,503,630 29 dentro de 7 años
- f) \$179,135 02 por año, por los próximos siete años.

(2). Puesto que estas cantidades o series de cantidades son equivalentes a \$1,000,000.00 de 1996, son equivalentes entre si. La diferencia en el tiempo de pagos o recibos, viene a ser el elemento significativo de los cálculos

En el ejemplo 2 el año 2000 es el año cero y 2006 el año 6.

(3). Los cálculos de los pagos son basados en la convención "a fin de año" y no a principio de año.





Ejercicio 8

¿Qué cantidad habrá acumulado dentro de 16 años un ahorrador que hace las siguientes inversiones \$1,000 00 ahora, \$4,000 00 dentro de tres años, \$7,000 00 dentro de nueve años, \$1,500 00 dentro de 11 años y \$6,000 00 dentro de trece años, si la tasa de interés es del 6% anual compuesto? Si la inflación es del 4% anual compuesto, cuánto dinero habrá acumulado al final de los dieciséis años, a) en dinero de entonces y b) en dinero de hoy

a)

Para dar solución al problema lo primero que tenemos que encontrar es la tasa de interés real, esto es considerando a la inflación

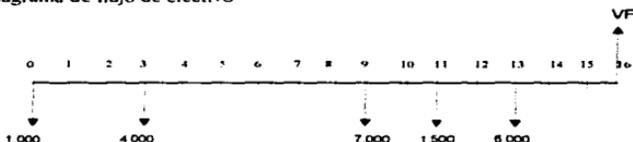
$$ir = i - if - (i * if)$$

$$i = 0.06$$

$$if = 0.04$$

$$ir = 0.0176$$

Diagrama de flujo de efectivo



$$VF = ?$$

$$i = 0.0176$$

$n =$ es variable según la inversión

$VP =$ es variable según la inversión

Para facilitar la comprensión de este ejercicio, crearé una tabla y una gráfica que nos represente el comportamiento del dinero.

Fórmula aplicada:

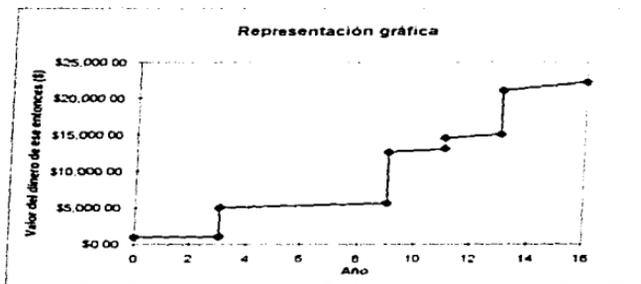
$$VF = VP * (1 + i)^n$$



Periodo	Inversión	n	i	VF
de 0 a 3	1000	3	0.0176	\$1,053.73
de 3 a 9	\$5,053.73	6	0.0176	\$5,611.45
de 9 a 11	\$12,611.45	2	0.0176	\$13,059.28
de 11 a 13	\$14,559.28	2	0.0176	\$15,076.28
de 13 a 16	\$21,076.28	3	0.0176	\$22,208.80

NOTA: la inversión es igual a la suma de el valor futuro de inversiones anteriores

Resultado
\$22,208.80



b)

Fórmula aplicada:

$$VP = VF * \left(\frac{1}{1+i}\right)^n$$

VF= \$22,208.80

i= 0.0176

n= 16

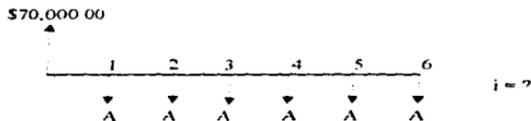
VP= ?

Resultado:
\$16,799.31



- Ejercicio 9** En Ing. Martínez desea comprar una máquina revoladora de concreto de un saco y se enfrenta a las siguientes alternativas
 Plan A. \$70,000.00 de contado.
 Plan B. \$16,072.50 mensualidades durante 6 meses.
 ¿Qué interés mensual estaría pagando el Ing. Martínez durante los seis meses?

Diagrama de flujo de efectivo del plan A



Fórmula a usar:

$$VP = A * \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n} \right]$$

VP \$70,000.00

n = 6

A = \$16,072.50

i = ?

El problema se puede solucionar de dos formas, una de ellas por tanteos, esto es sustituir una "i" propuesta hasta que VP = \$70,000.00

Si i = 0.08

Si i = 0.13

Si i = 0.11

Si i = 0.10

VP= \$74,301.23

VP= \$64,250.62

VP= \$67,995.32

VP= \$69,999.93

Resultado:
10 % mensual



La otra solución, sería despejar "i" de la ecuación y sustituir valores

$$VP = A * \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n} \right]$$

Toda vez que el tema de esta tesis no es el despejar ecuaciones complejas, hago uso de un algoritmo de MS Excel, en donde únicamente se introducen los valores que tenemos y automáticamente calcula el valor de "i"

Resultado
10% mensual

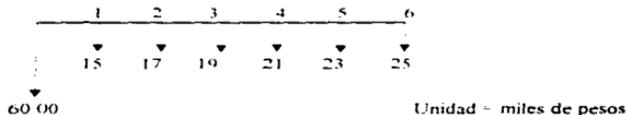


La gráfica nos representa el comportamiento de la curva de la tasa de oportunidad en función de el VP.



- Ejercicio 10** Un equipo de construcción costará \$60,000.00 nuevo, y tendrá una vida útil de 6 años, sin valor de desecho al final de su vida. Las erogaciones por impuestos, seguro, mantenimiento, combustible y lubricantes se estima en \$15,000.00 para el primer año, \$17,000.00 para el segundo, y \$19,000.00 para el tercero y continuará aumentando \$2,000.00 de ahí en adelante.
- a) ¿Cuál es el costo anual uniforme equivalente de este equipo si la tasa de interés es del 12%?
- b) ¿Cuánto se ganará anualmente si se estima que los ingresos producidos por el equipo son de \$42,500.00?

Diagrama de flujo de efectivo de los egresos



- a) **Primer paso:** Determinar a cuántos pesos equivale la cantidad de \$60,000.00, si los distribuidos en seis pagos iguales con una tasa del 12%.

Fórmula a usar

$$A = VP * \left[\frac{i * (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$VP = \$60,000.00$$

$$n = 6$$

$$i = 0.12$$

$$A1 = ?$$

$$A1 = \$14,593.54$$

Segundo paso: el problema supone erogaciones por \$15,000.00 anual, mas un gradiente de \$2,000.00 por año, la porción de \$15,000.00 no requiere ninguna conversión porque ya es una cifra anual uniforme, razón por la que únicamente se calculará el pago uniforme del gradiente.

$$A2 = \$15,000.00$$



Fórmula a usar.

$G = \$2,000.00$
 $n = 6$
 $i = 0.12$
 $A_3 = ?$

$$A = G * \left[\frac{1}{i} - \frac{1}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A_3 = \$4,344.09$$

Solución: $A_1 + A_2 + A_3 = A$

Resultado
\$33,937.63

b).

Ingresos anuales
 Egresos anuales
 Rendimiento anual

\$42,500.00
 \$33,937.63
 \$8,562.37

Resultado
\$8,562.37



Ejercicio 11 Una compañía constructora le ofrecen en arrendamiento una máquina bajo las siguientes condiciones. Un pago inicial de \$ 25,000.00 y una cuota por arrendamiento al final de cada año. La cuota del primer año de renta es de \$32,000.00 la del segundo año es de \$ 29,000.00 y la cuota de cada año sucesivo es de \$ 3,000.00 pesos menos que el año anterior. Al final de seis años la máquina será devuelta a la compañía.

- a) ¿Cuál es el costo anual equivalente si el interés i de la renta es del 8%?
 b) Encontrar el valor presente de los gastos totales del arrendamiento por seis años.

Diagrama de flujo de efectivo de los egresos del arrendatario

0	1	2	3	4	5	6
—————						
▼	▼	▼	▼	▼	▼	▼
25	32	29	26	23	20	17

Unidad = miles de pesos

- a). Primer paso: Determinar a cuántos pesos equivale la cantidad de \$25,000.00, si los distribuidos en seis pagos iguales con una tasa del 8%.

Fórmula a usar:

$$A = VP * \left[\frac{i * (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

VP = \$25,000.00

n = 6

i = 0.08

A1 = ?

$$A1 = \$5,407.88$$

Segundo paso: el problema supone erogaciones por \$32,000.00 anual, menos un gradiente de \$3,000.00 por año, la porción de \$32,000.00 no requiere ninguna conversión porque ya es una cifra anual uniforme, razón por la que únicamente se calculará el pago uniforme de el gradiente que se descontará.

$$A2 = \$32,000.00$$



Fórmula a usar:

$$G = (\$3,000.00)$$

$$n = 6$$

$$i = 0.08$$

$$A3 = ?$$

$$A = G * \left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A3 = (\$6,829.04)$$

Solución: $A1 + A2 + A3 = A$

Resultado
\$30,578.84

b).

Fórmula aplicada

$$VP = A * \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n} \right]$$

$$A = \$30,578.84$$

$$n = 6$$

$$i = 0.08$$

$$VP = ?$$

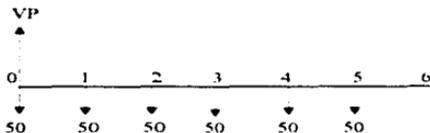
Resultado
\$141,362.32

El valor de la máquina tiene que ser menor a \$141,362.32 para que pueda ser rentable, en caso contrario es necesario incrementar las rentas anuales.



- Ejercicio 12** Una compañía tomó en arrendamiento una bodega de almacenamiento a un ayuntamiento y paga por anticipado seis años de alquiler, las condiciones del arrendamiento permitan a la compañía seguir alquilando el sitio por seis años más, mediante el pago de \$50,000.00 al principio de cada año del segundo periodo de arrendamiento.
- Han expirado dos años del periodo de pago anticipado y el ayuntamiento tiene necesidad de fondos, le propone a la compañía que ahora pague por anticipado el alquiler que iba a ser pagado cada año en el segundo periodo de seis años. Si los intereses se calculan al 3.5% anual, ¿Cuál es el pago equitativo que debe hacerse ahora, en vez de los seis pagos anuales?

Diagrama de flujo de efectivo esperado para el segundo periodo



Primer paso: determino el valor presente, del segundo periodo para el año cero.

Fórmula a usar:

$$VP = A * \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n} \right]$$

VP ?

n = 6

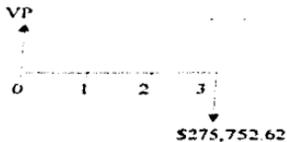
A = \$50,000.00

i = 0.035

$$VP = \$275,752.62$$



Segundo paso: crear el diagrama de flujo que resulta, considerando como el año cero al año dos de el primer periodo de arrendamiento



Fórmula a usar:

$$VP = VF * \left(\frac{1}{1+i}\right)^n$$

VP = ?
n = 4
VF = \$275,752.62
i = 0.035

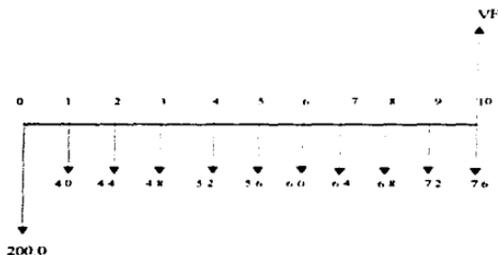
VP = \$240,302.48

Resultado: \$240,302.48



Ejercicio 13

Una compañía tiene bajo consideración la compra de varios lotes baldíos de la Ciudad de México. El precio es de \$ 200,000.00. El dueño de esta propiedad pagará impuestos anuales sobre la propiedad de \$4,000.00 el primer año, se calcula que este impuesto aumentará \$400.00 cada año de ahí en adelante. Se cree que si se compra esta propiedad, será necesario esperar diez años antes de que se pueda vender a un precio atractivo. ¿Cual debe ser el precio de venta dentro de diez años, para que la inversión rinda 15% antes de impuestos sobre la renta?



VF= ?

i= 0.15

n= es variable según la inversión

VP= es variable según la inversión

Para facilitar la comprensión de este ejercicio, crearemos una tabla y una gráfica que nos represente el comportamiento del dinero

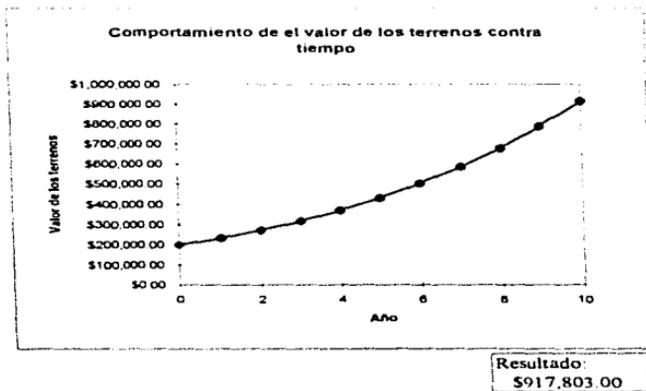
Fórmula aplicada:

$$VF = VP * (1 + i)^n$$



Periodo	Inversión	n	i	VF
de 0 a 1	200000	1	0.15	\$230,000.00
de 1 a 2	\$234,000.00	1	0.15	\$269,100.00
de 2 a 3	\$273,500.00	1	0.15	\$314,525.00
de 3 a 4	\$319,325.00	1	0.15	\$367,223.75
de 4 a 5	\$372,423.75	1	0.15	\$428,287.31
de 5 a 6	\$433,887.31	1	0.15	\$498,970.41
de 6 a 7	\$504,970.41	1	0.15	\$580,715.97
de 7 a 8	\$587,115.97	1	0.15	\$675,183.37
de 8 a 9	\$681,983.37	1	0.15	\$784,280.87
de 9 a 10	\$791,480.87	1	0.15	\$910,203.00
en 10	\$917,803.00			\$917,803.00

NOTA: la inversión es igual a la suma de el valor futuro de inversiones anteriores y la inversión que se hará en ese momento





CAPÍTULO 3

VALOR PRESENTE NETO (V.P.N.):



VALOR PRESENTE NETO

Hasta ahora, ya se ha repasado los elementos básicos de matemáticas financieras, que tienen mucha aplicación práctica en los métodos y técnicas de evaluación financiera y económica de los proyectos de inversión.

En dichos elementos se introdujo el concepto del valor del dinero a través del tiempo, en el que revela que los flujos de efectivo pueden ser trasladados a cantidades equivalentes a cualquier punto del tiempo. Con base en este concepto se han desarrollado varios métodos, pero entre ellos dos, que se utilizan para comparar esas cantidades equivalentes, en el proceso de evaluar inversiones o proyectos de inversión. Estos dos métodos son *Método del Valor Presente Neto (V.P.N.)* y el de *la Tasa Interna de Retorno (T.I.R.)*.

Ambos son equivalentes si los proyectos de inversión son analizados correctamente.



3.1.- INTERPRETACIÓN DEL VALOR PRESENTE NETO

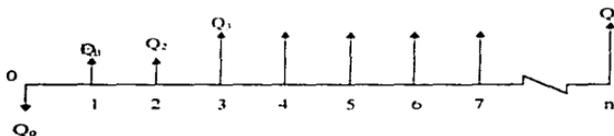
El método del Valor Presente Neto es uno de los más usados en la evaluación de proyectos de inversión. Consiste en determinar la equivalencia en el tiempo cero, de los flujos de efectivo futuros, que genera un proyecto comparándolo con el desembolso o inversión inicial para el proyecto, cuando dicha equivalencia es mayor que el desembolso o inversión inicial, entonces el proyecto es recomendable. Es decir:

Si $VPN > 0$ Aconsejable invertir.

Si $VPN = 0$ Es indiferente la inversión

Si $VPN < 0$ No aconsejable invertir.

Para comprender el concepto, represento mediante un diagrama de flujo de efectivo lo correspondiente a un proyecto de inversión durante su horizonte total de vida



En donde:

- Q_0 = inversión inicial en el tiempo o periodo cero.
- Q_j = flujo neto efectivo para el periodo j .
- i = tasa de descuento, también llamada tasa de oportunidad
- n = número de periodos



La fórmula utilizada para evaluar el Valor Presente Neto, de los flujos generados por el proyecto de inversión es

$$VPN = \sum_{t=0}^n \left[\frac{1}{(1+i)^t} \right] \cdot Q_t$$

Es decir:

$$VPN = -Q_0 + \frac{Q_1}{(1+i)^1} + \frac{Q_2}{(1+i)^2} + \frac{Q_3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{Q_{n-1}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{Q_n}{(1+i)^n}$$

A este método también se le conoce como el beneficio total actualizado, en donde:

$$VPN \approx BTA$$

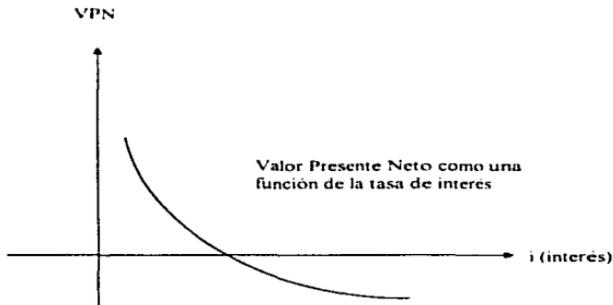
El método del VPN, tiene varias características que lo hacen apropiado para usarse como una base de comparación, capaz de resumir las principales diferencias que se derivan de las diferentes alternativas de inversión que se analizan. Este método considera el valor del dinero en el tiempo, al seleccionar adecuadamente un valor de "i".

Una ventaja importante del método del VPN es el hecho de ser siempre único, independientemente del comportamiento que sigan los flujos de efectivo generados por el proyecto de inversión. Sobre todo cuando hay comportamiento irregulares de los flujos de efectivo que dan lugar a múltiples tasas de rendimiento



3.2.- COMPORTAMIENTO GRÁFICO DEL VPN.

El comportamiento gráfico del Valor Presente Neto, para diferentes tasas de descuento (i) en la mayoría de los casos es una curva descendente de izquierda a derecha, en un plano VPN- i



En el gráfico anterior se exagera la curva para que pueda ser apreciada, dado que por su escala, no se percibiría muy bien.

3.3.- LA MÍNIMA TASA ATRACTIVA DE RENDIMIENTO.

La mínima tasa de oportunidad atractiva de rendimiento que se va a usar para juzgar lo atractivo de una inversión que se propone, es obtenida a través de procedimientos que son determinados por la alta gerencia de una organización, y las bases para fijarla son muy variadas. Puesto que la " i " va a ser usada por ingenieros, diseñadores y por los gerentes en todos los niveles de la organización, dicha " i " debe fijarse después de una cuidadosa consideración de todos los factores, porque muchas de las decisiones afectarán el bienestar de la organización a largo plazo y estarán basados en la comparación de la tasa de



rendimiento esperada sobre las inversiones propuestas con la "i" , la decisión de la "i" que deba usarse en el proceso de toma de decisiones en todos los niveles ayuda a asegurar que todas las decisiones estén tomadas en el mismo criterio primario y que se haga el mejor uso de los recursos disponibles

3.3.1.- FACTORES A CONSIDERAR EN LA FIJACIÓN DE I

Los factores que por lo general se consideran para la elección de la *i* que se va a usar para cualquier periodo de tiempo incluye

1. *La disponibilidad de fondos para inversión y sus orígenes, capital social o préstamo*
2. *Oportunidades de inversión competitivas*
3. *Las diferencias en el riesgo implicado en las distintas inversiones competitivas*
4. *Las diferencias en el tiempo requerido para la recuperación de inversión con la tasa de rendimiento deseada; inversiones de vida larga frente a inversiones de vida corta.*
5. *El precio actual del dinero representado por los tipos de intereses pagados o cargados sobre inversiones tales como las cuentas de ahorro aseguradas por alguna entidad nacional, la tasa primaria usada por los grandes bancos, y los documentos y títulos del estado a plazos cortos y largos*

3.3.2.- CRITERIOS PARA ELEGIR I

Realizando las consideraciones necesarias sobre los factores mencionados, a continuación se describen brevemente algunos criterios para elegir la *i* que se usa en la evaluación del proyecto

- **El costo de oportunidad del capital (COC)** que es la máxima tasa de interés bancaria a largo plazo.



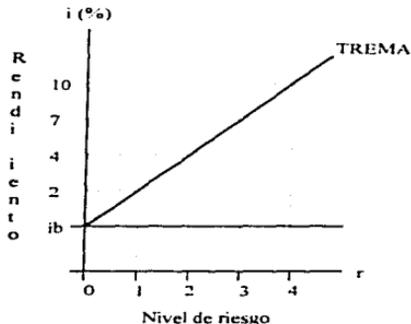
- **La tasa de rendimiento mínima aceptable (TREMA)** o también llamada *tasa de rendimiento esperada por los inversionistas una vez considerado el riesgo*

$$\text{TREMA} = ib + r$$

Donde: ib = Es la tasa (libre de riesgo) del sistema bancario a largo plazo

r = Es la prima de riesgo por llevar a cabo una empresa, expresada como puntos porcentuales

Visto gráficamente se tendría lo siguiente:



- **La tasa de oportunidad de la empresa (TOE)** que es la tasa de rendimiento que actualmente obtienen los inversionistas en negocios parecidos a los del proyecto, por lo que una inversión más, mínimamente les debe retribuir lo mismo que obtienen en sus empresas.
- **La tasa que equivale al costo del capital (TCC)**, está es la tasa que pactaron para el financiamiento a mediano o largo plazo y es una medida de eficiencia, para



comprobar que el proyecto rinde igual o más que su costo de capital, sobre todo para proyectos públicos.

Cada analista tiene preferencias por alguno de estos criterios, pero todos tienen sus pros y contras; así que más bien el analista deberá seleccionar a su buen criterio el valor de i que vaya a utilizar cuando evalúe proyectos a través del método del VPN.



3.4.-EJEMPLOS DEL USO DEL MÉTODO VPN EN LA EVALUACIÓN DE PROYECTOS

Ejercicio 1 Una empresa presenta el siguiente flujo de efectivo

Año	Inversión	Flujo de caja
0	(\$1,000.00)	
1		\$100.00
2		\$200.00
3		\$200.00
4		\$550.00

La tasa de oportunidad aplicable al caso es del 8%, determinar si es adecuado realizar la inversión

Diagrama de flujo de efectivo



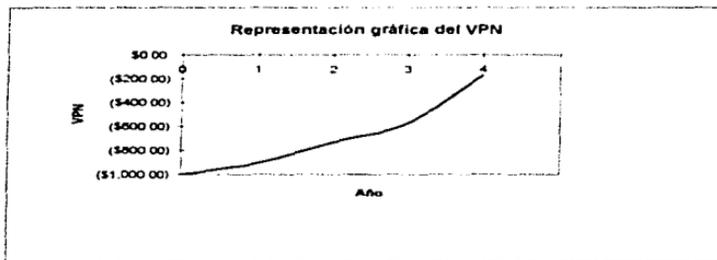
Sustituyendo valores:

$$i = 0.08$$

$$VPN = -1000 + \frac{100}{(1+0.08)^1} + \frac{200}{(1+0.08)^2} + \frac{200}{(1+0.08)^3} + \frac{550}{(1+0.08)^4}$$

Año	Inversión	Flujo de caja	VPN acumulada
0	(\$1,000.00)		(\$1,000.00)
1		\$100.00	(\$907.41)
2		\$200.00	(\$735.94)
3		\$200.00	(\$577.17)
4		\$550.00	(\$172.91)

$$VPN = (\$172.91)$$



El Valor presente neto es negativo, es decir, se obtiene un rendimiento inferior al de la tasa de oportunidad, por lo tanto no es conveniente invertir

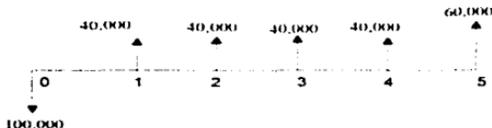


Ejercicio 2 Una empresa constructora desea adquirir una mezcladora de dos sacos con un valor de \$100,000 00, este equipo se arrendará y se estima que brinde los ingresos que se muestran en el diagrama de flujo

Se consideró que este equipo tiene una vida útil de 5 años, y que la tasa de interés aplicable al caso es de 25%, ya que es la tasa de oportunidad de la constructora

La constructora quiere saber si es conveniente realizar la inversión

Diagrama de flujo de efectivo



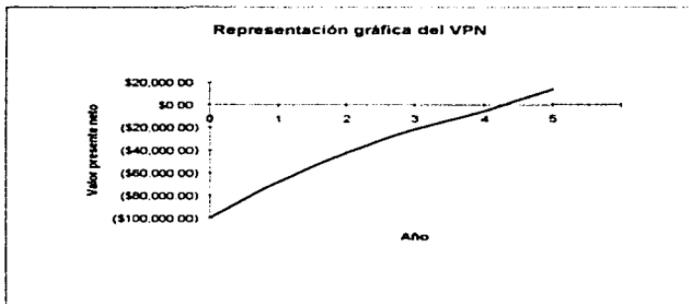
Sustituyendo valores

$$i = 0.25$$

$$VPN = -100,000 + \frac{40,000}{(1 + 0.25)^1} + \frac{40,000}{(1 + 0.25)^2} + \frac{40,000}{(1 + 0.25)^3} + \frac{40,000}{(1 + 0.25)^4} + \frac{60,000}{(1 + 0.25)^5}$$

Año	Inversión	Flujo de caja	VPN acumulado
0	(\$100,000 00)		(\$100,000 00)
1		\$40,000 00	(\$68,000 00)
2		\$40,000 00	(\$42,400 00)
3		\$40,000 00	(\$21,920 00)
4		\$40,000 00	(\$5,536 00)
5		\$60,000 00	\$14,124 80

$$VPN = \$14,124.80$$



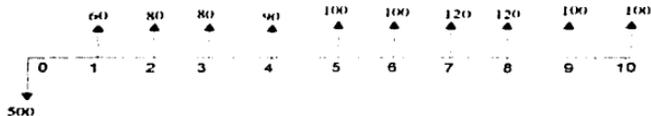
El Valor presente neto es positivo, es decir, el rendimiento que nos ofrece esta inversión es superior al 25% anual, además de que el reembolso se da poco después del cuarto año, por lo tanto, es conveniente realizar la inversión.

NOTA: El reembolso se produce cuando se han efectuado todas las inversiones y el valor neto actual es positivo.



Ejercicio 3. Si se invierten \$500,000.00 en un tractor que tiene una vida útil de 10 años, el flujo de efectivo generado por la utilización del tractor al final de cada año es el que se muestra en el diagrama de flujo de efectivo. Si la tasa de oportunidad de la empresa que adquiere el equipo es del 10%, determinar si es conveniente realizar la inversión.

Diagrama de flujo de efectivo en miles de \$



Sustituyendo valores (en miles)

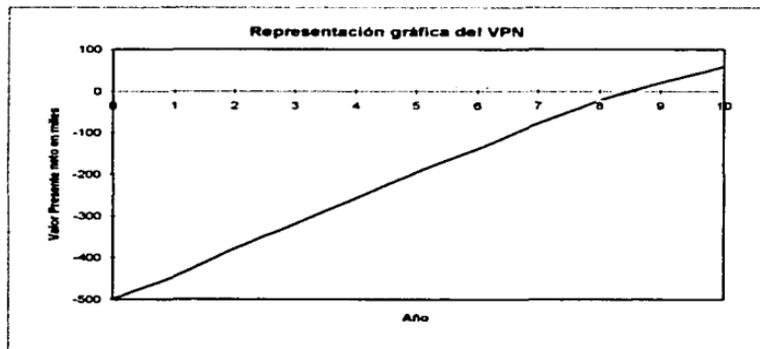
$i = 0.1$

$$VPN = -500 + \frac{60}{(1+0.10)^1} + \frac{80}{(1+0.10)^2} + \frac{80}{(1+0.10)^3} + \frac{90}{(1+0.10)^4} + \frac{100}{(1+0.10)^5} + \frac{100}{(1+0.10)^6} + \frac{120}{(1+0.10)^7} + \frac{120}{(1+0.10)^8} + \frac{100}{(1+0.10)^9} + \frac{100}{(1+0.10)^{10}}$$

Año	Inversión	Flujo de caja	VPN acumulada
0	(\$500.00)		(\$500.00)
1		\$60.00	(\$445.45)
2		\$80.00	(\$379.34)
3		\$80.00	(\$319.23)
4		\$90.00	(\$257.76)
5		\$100.00	(\$195.67)
6		\$100.00	(\$139.22)
7		\$120.00	(\$77.64)
8		\$120.00	(\$21.66)
9		\$100.00	\$20.75
10		\$100.00	\$59.30

VPN= \$59.30

en miles



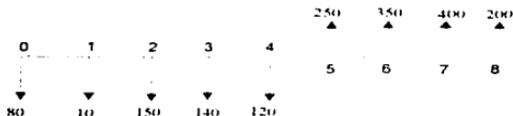
El Valor presente neto es positivo, es decir, el rendimiento que nos ofrece esta inversión es superior al 10% anual, además de que el reembolso se da poco después del octavo año, por lo tanto, es conveniente realizar la inversión.

NOTA: El reembolso se produce cuando se han efectuado todas las inversiones y el valor neto actual es positivo.



- Ejercicio 4.** En la construcción de un fraccionamiento se tienen los ingresos y egresos que se observan en el diagrama de flujo de efectivo. Calcular el Valor presente neto si la tasa de oportunidad de la constructora es de un 15% mensual.

Diagrama de flujo de efectivo en miles de \$



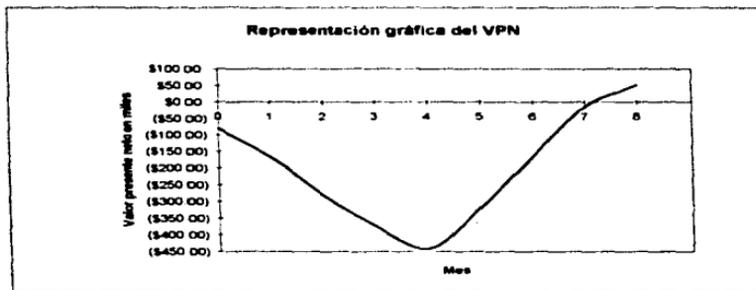
Sustituyendo valores (en miles)

$$i = 0.15$$

$$\begin{aligned}
 VPN &= -80 - \frac{100}{(1 + 0.15)^1} - \frac{150}{(1 + 0.15)^2} - \frac{140}{(1 + 0.15)^3} - \frac{120}{(1 + 0.15)^4} + \\
 &+ \frac{250}{(1 + 0.15)^5} + \frac{350}{(1 + 0.15)^6} + \frac{400}{(1 + 0.15)^7} + \frac{200}{(1 + 0.15)^8}
 \end{aligned}$$

Mes	Inversión	Flujo de caja	VPN acumulada
0	(\$80.00)		(\$80.00)
1	(\$100.00)		(\$160.96)
2	(\$150.00)		(\$280.38)
3	(\$140.00)		(\$372.43)
4	(\$120.00)		(\$441.04)
5		\$250.00	(\$316.75)
6		\$350.00	(\$165.43)
7		\$400.00	(\$15.06)
8		\$200.00	\$50.32

VPN = \$50.32 en miles



El Valor presente neto es positivo, es decir, el rendimiento que nos ofrece esta inversión es superior al 15% mensual, además de que el reembolso se da poco después del séptimo año, por lo tanto, es conveniente realizar la inversión.

NOTA: El reembolso se produce cuando se han efectuado todas las inversiones y el valor neto actual es positivo.



Ejercicio 5 El Arq. Osorio desea adquirir un predio que tiene un valor de \$20,000.00, sobre el cual quiere construir una casa habitación, el programa mensual de egresos que resulta de la construcción es el que se muestra a continuación

Al término del primer mes \$ 30,000.00

Al término del segundo mes \$ 40,000.00

Al término del tercer mes \$ 50,000.00

Al término del cuarto mes \$ 40,000.00

Al término del quinto mes \$ 30,000.00

El Arq. estima que podrá vender la casa al término del sexto mes, en un valor de \$260,000.00, si la tasa de oportunidad para este tipo de proyectos fuera de el 10% mensual, es conveniente o no realizar la inversión

Diagrama de flujo de efectivo en miles de \$



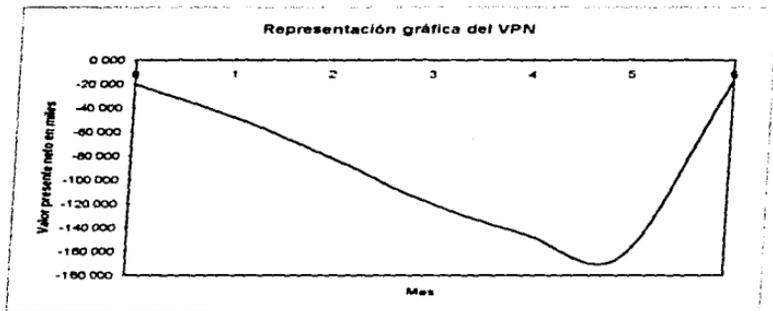
Sustituyendo valores (en miles):

$$i = 0.1$$

$$VPN = -20 - \frac{30}{(1+0.10)^1} - \frac{40}{(1+0.10)^2} - \frac{50}{(1+0.10)^3} - \frac{40}{(1+0.10)^4} - \frac{30}{(1+0.10)^5} + \frac{260}{(1+0.10)^6}$$

Mes	Inversión	Flujo de caja	VPN acumulada
0	(\$20.00)		(\$20.00)
1	(\$30.00)		(\$47.27)
2	(\$40.00)		(\$80.33)
3	(\$50.00)		(\$117.90)
4	(\$40.00)		(\$145.22)
5	(\$30.00)		(\$163.84)
6		\$260.00	(\$17.08)

VPN = (\$17.08) en miles



El Valor presente neto es negativo, es decir, el rendimiento que nos ofrece esta inversión es inferior al 10% mensual que ofrecen otros proyectos del mismo tipo, razón suficiente para no invertir en este proyecto. El reembolso no se produce.



Ejercicio 6. Cierta tramo de una carretera de cuota está en tan malas condiciones ¿que se requiere su recubrimiento o su reubicación? Dado que la institución gubernamental no cuenta con recursos economicos, el tramo fue concesionado, la empresa que ganó esta concesión tiene tres posibles ubicaciones, que son las que se tomara en cuenta para decidir entre alguna de ellas y para su analisis se presentan tres alternativas La ubicación presente está designada como H, las dos nuevas ubicaciones posibles que acortaran la distancia entre los puntos terminales se designan como J y K La ubicación K es un tanto mas corta que la J, pero implica una inversión considerablemente mayor para nivelacion y estructuras El estudio financiero para comparar las propuestas de las tres ubicaciones abarcara un periodo de 20 años y una tasa del 7%, que es la tasa minima de interes que se puede aplicar a un proyecto de uso público

La inversión inicial estimada que debe hacer la agencia gubernamental sería de \$110.00 millones en la ubicación H, de \$700.00 millones en la ubicación J y de \$1,300.00 millones en la K Si la ubicación H se abandona ahora, no tendra ningún valor de rescate, también se supone que no habra ningun valor residual al final de los 20 años. Sin embargo debido a las vidas utiles estimadas de las obras que se construirian en J y K son mayores que el periodo de analisis de 20 años, los valores residuales se estiman al final de 20 años Estos son \$300.00 millones para J, y \$550.00 millones para K Los costos anuales de mantenimiento, también pagaderos por la empresa, se mantienen en \$35.00 millones para la ubicación H, \$21.00 millones para la J y \$17.00 millones para la K.

Se prevé que el tránsito en esta seccion de carretera aumentara en una cantidad uniforme cada año hasta el año 10, y que entonces continuara a un nivel constante hasta el año 20. No se espera que el volumen de tránsito dependa de esta decision sobre la ubicación de la carretera Para la ubicación H, los ingresos anuales por concepto de peaje aplicables en el analisis financiero se estiman como de \$130.00 millones en el año 1, de \$142.00 millones en el año dos, y aumentaran \$6.50 millones cada año hasta llegar a \$194.50 millones en el año 10, de ahí en adelante, continuaran en \$195.00. Para la ubicación J, que es mas corta, las estimaciones correspondientes son de \$175.00 millones para el primer año, aumentando \$7.50 millones al año, hasta llegar al año 10, y una cifra anual constante de \$225.00 millones de ahí en adelante. Para la ubicación K, que es todavia mas corta, las cifras correspondientes son \$210.00 millones, \$10.00 millones y \$300.00 millones No existe diferencias en las consecuencias para los no usuarios que merezcan consideración
Determinar cuál de las tres ubicaciones es la mejor, según el metodo de VPN.



Para poder entender mejor el comportamiento de el dinero a continuación se representa mediante una tabla el flujo que este tiene (en millones de pesos)

Año	Ubicación H		Ubicación J		Ubicación K	
	Inversion	Flujo \$	Inversion	Flujo \$	Inversion	Flujo \$
0	110		700		1,300	
1	35	136 0	21	175 0	17	210 0
2	35	142 5	21	182 5	17	220 0
3	35	149 0	21	190 0	17	230 0
4	35	155 5	21	197 5	17	240 0
5	35	162 0	21	205 0	17	250 0
6	35	168 5	21	212 5	17	260 0
7	35	175 0	21	220 0	17	270 0
8	35	181 5	21	227 5	17	280 0
9	35	188 0	21	235 0	17	290 0
10	35	194 5	21	242 5	17	300 0
11	35	195 0	21	225 0	17	300 0
12	35	195 0	21	225 0	17	300 0
13	35	195 0	21	225 0	17	300 0
14	35	195 0	21	225 0	17	300 0
15	35	195 0	21	225 0	17	300 0
16	35	195 0	21	225 0	17	300 0
17	35	195 0	21	225 0	17	300 0
18	35	195 0	21	225 0	17	300 0
19	35	195 0	21	225 0	17	300 0
20	35	195 0	21	225 0	17	850 0

Diagrama de flujo para la ubicación H, en millones de pesos

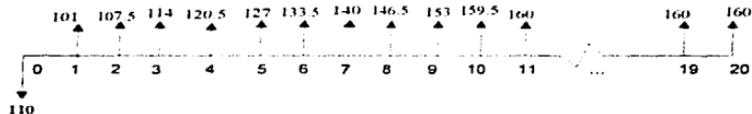
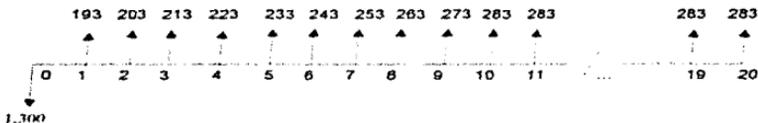




Diagrama de flujo para la ubicación J, en millones de pesos



Diagrama de flujo para la ubicación K, en millones de pesos



Después de entender y observar gráficamente el flujo del dinero, procedemos a calcular el VPN de cada ubicación, pero como nos podemos dar cuenta si quisiéramos realizar este problema a mano sin el uso de la computadora nos tardaríamos horas ya que habría que sustituir muchos números. Dada la situación anterior únicamente sustituimos valores en el algoritmo incluido en MS Excel ver 7 obteniendo los siguientes valores:

Valor Presente neto de la ubicación H.

en millones de pesos

Resultado
1,350 80

Valor Presente neto de la ubicación J

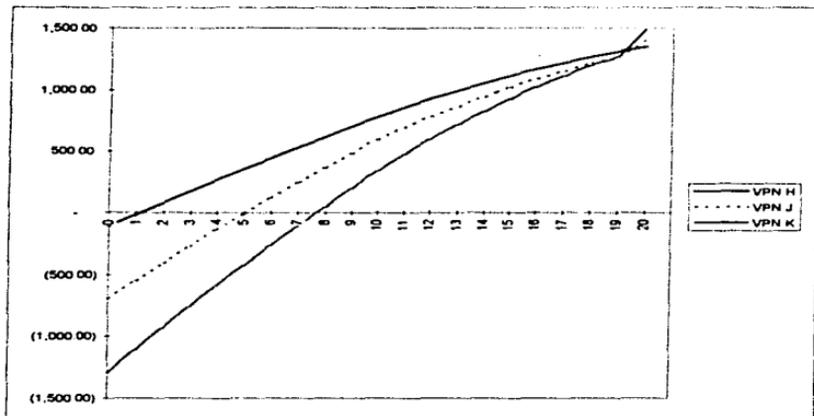
en millones de pesos

Resultado:
1,395 39

Valor Presente neto de la ubicación K.

en millones de pesos

Resultado:
1,485 27



Como podemos observar el VPN es relativamente semejante en las tres alternativas, pero si consideramos lo estudiado en este capítulo, entonces la mejor ubicación para el tramo de carretera es la ubicación K, dado que es el que obtiene más beneficios de todos, pero existe un inconveniente que se puede apreciar en la gráfica, la alternativa K tiene un periodo de reembolso muy largo que es de aproximadamente ocho años, mientras que la alternativa H ofrece un periodo es de un año aproximadamente, pero con menos rendimiento. En este caso la toma de decisión depende del accionista que invierte ya que si el desea un reembolso rápido, posiblemente escogerá la alternativa H y si no le es muy necesario entonces la J.



CAPÍTULO 4
TASA INTERNA DE RETORNO
(T.I.R.) :

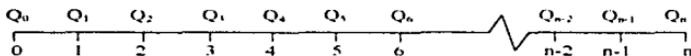


TASA INTERNA DE RETORNO

La comparación entre las alternativas que impliquen un conjunto de flujos monetarios de distintas cantidades en diversas fechas puede expresarse con un tipo de interés, es decir, el tipo que haga equivalentes las dos alternativas. A este tipo de interés puede llamarse tasa interna de rendimiento, tasa interna de rentabilidad o tasa interna de retorno. Su cálculo proporciona uno de los varios métodos para determinar, en un estudio financiero, si se recupera una inversión propuesta con un rendimiento proporcional al riesgo. En otras palabras, *es la tasa de interés a la cual el valor presente neto (VPN) del flujo de efectivo es igual a cero.*

4.1.- ELEMENTOS MATEMÁTICOS EN LOS QUE SE FUNDAMENTA LA TASA INTERNA DE RETORNO.

Un proyecto de inversión se puede describir, como una sucesión de sumas de dinero ubicadas en el horizonte del tiempo con signo positivo, negativo o con valor nulo, así como lo podemos ver en el gráfico siguiente.



Donde

Q_j Es la cantidad que aparece al final del periodo j , y Q_0 puede ser cualquier número inferior, igual o superior a cero

Si recordamos en el VPN de un proyecto de inversión convertimos cada Q_j en su equivalente en el momento cero, para posteriormente sumar todos estos equivalentes en forma algebraica, esto es

$$VPN(i) = \sum_{j=0}^n \left[\frac{1}{(1+i)^j} \right] \cdot Q_j$$

Cuando el VPN = 0, i nos representa la tasa interna de rentabilidad (TIR), desarrollando nos queda:

$$Q_n \left[\frac{1}{(1+i)^n} \right] + Q_{n-1} \left[\frac{1}{(1+i)^{n-1}} \right] + \dots + Q_2 \left[\frac{1}{(1+i)^2} \right] + Q_1 \left[\frac{1}{(1+i)^1} \right] + Q_0 = 0$$

De donde se puede apreciar, se trata de un polinomio de grado n donde la incógnita es $(1/(1+i))$ y la TIR resulta ser una de las raíces positivas del polinomio. Según Descartes todo polinomio de grado n tiene un número de raíces igual a su grado y aunque de ellas coinciden, existe un máximo de raíces diferentes, igual a la cantidad de veces que se producen cambios de signo entre miembros sucesivos del polinomio.



Quando se trata de un polinomio de grado dos o tres, el valor de las raíces se puede calcular analíticamente, mediante las siguientes expresiones

Ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$

$$\text{Solución } X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Ecuación cúbica: $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$

Sea

$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9}$$

$$R = \frac{9a_3a_1 - 27a_3 - 2a_1^3}{54}$$

$$S = \sqrt{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

$$T = \sqrt{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

Solución

$$x_1 = S + T + \frac{1}{3}a_1$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S - T)$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S - T)$$

Quando n excede de 3, el cálculo analítico ya no es posible, se requiere de el cálculo por medio de aproximaciones sucesivas estimadas al flujo monetario original, que consiste en calcular el VPN para varias tasas de interés hasta encontrar dos valores, uno positivo y otro negativo en forma tal que nos permita interpolar los resultados para obtener la tasa interna de retorno (TIR) mediante la siguiente expresión

$$TIR = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{VPN_1}{VPN_1 - VPN_2}$$



Donde:

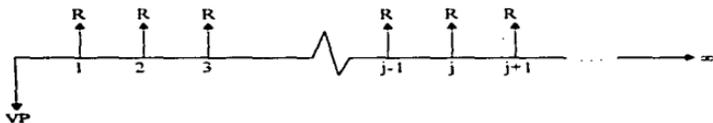
- T_1 Tasa de interés inferior
- T_2 Tasa de interés superior
- VPN_1 Valor presente neto positivo
- VPN_2 Valor presente neto negativo

En la actualidad es posible usar algoritmos que se han construido con este propósito y que se pueden desarrollar fácilmente con una computadora personal, tal es el caso de las hojas de cálculo MS Excel ver. 7 y Lotus 123 ver. 5, además de que se pueden crear programas en lenguaje basic o fortran con algunos conceptos básicos de métodos numéricos y de esta forma dar solución al problema.

4.1.- RENTABILIDAD DE UN PROYECTO CON INGRESOS INDEFINIDOS (VALUACIÓN POR CAPITALIZACIÓN DE RENTAS).

En los negocios, es frecuente que ciertas rentas, salvo sucesos imprevistos, se paguen indefinidamente. Entre muchas cosas son rentas que se pagan a perpetuidad la renta de un terreno, de una construcción, las sumas reservadas cada año para mantenimiento de puentes, caminos y, en general todos los elementos de servicios de una comunidad.

Observemos el siguiente gráfico para ver lo que ocurre cuando calculamos la TIR de un proyecto constituido por un único pago inicial y una serie uniforme infinita de ingresos futuros.





El Valor Presente Neto es

$$VPN(i) = -VP + R \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right)$$

donde además n tiende a infinito

En este caso el último término entre parentesis es igual a $1/i$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Como resultado tenemos

$$VPN(i) = -VP + \frac{R}{i}$$

y en consecuencia la TIR resulta ser:

$$i = \frac{R}{VP}$$

Este resultado nos es de gran ayuda cuando nos ocupamos del problema de establecer el valor real de una acción, ya que en este caso R frecuentemente representa el valor de los dividendos repartidos periódicamente.

4.3.- LA TIR COMO ÍNDICE PARA VALUAR UNA INVERSIÓN.

Este método en especial tiene gran aceptación, entre los evaluadores de proyectos, ya que aparentemente no exige que se estipule la tan elusiva tasa de interés de oportunidad. Desafortunadamente este requisito no se evita con este método sino que simplemente se



hace implícito, de tal manera que esto se convierte en una posible fuente de error y malas interpretaciones. Ya que en el caso de realizar la evaluación del proyecto con el VPN es necesario el uso de una tasa de interés de oportunidad desde el inicio, tal exigencia nos obliga a reflexionar sobre el "i" escogido y del porque de su elección.

En el caso de evaluar con la TIR, lo último que aparece es hacer relación y referirse al interés de oportunidad y por tal motivo es frecuente que no se analice. **No debe quedar claro que la única manera de establecer si el proyecto es atractivo es refiriéndose a la tasa de interés de oportunidad de quien decide**, dado que, si no se hace así implícitamente se está utilizando como base para la decisión el interés de oportunidad que tiene la persona que plantea la evaluación, que no siempre coincide con la tasa de interés de quien decide.

A continuación se mencionan tres nociones de rentabilidad que debemos tener muy claras cuando se realiza una evaluación de un proyecto, ya que de no ser así podemos incurrir en graves equivocaciones:

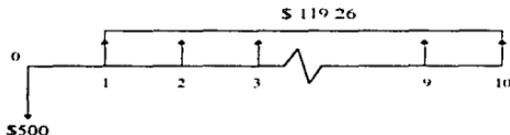
1. **(TIR) la tasa interna de rentabilidad de un proyecto, que es una característica propia del proyecto, independiente de las condiciones de quien evalúa el proyecto**
2. **(i_{op}) la tasa interna de oportunidad del evaluador, es decir, la rentabilidad de oportunidad del mismo, que es una característica propia del evaluador, independiente hasta el momento de la evaluación de las características del proyecto**
3. **La rentabilidad del proyecto para un evaluador en particular, es la noción de rentabilidad que efectivamente busca quienes toman la decisión. Esta rentabilidad resulta de la interacción de la TIR y la Tasa interna de oportunidad (i_{op}) de quien decide.**



4.4.- LA TASA VERDADERA DE OPORTUNIDAD DE UN PROYECTO (TVR)

Para dejar claro los comentarios anteriores y definir la TVR, es necesario auxiliarnos un ejemplo numerico. Supongamos que el Sr. González recibe una herencia de \$500 millones y un amigo de él dedicado a la industria de la construcción, le propone que invierta estos dineros en tractores de determinados tipo, comprometiéndose a trabajarlos, darles mantenimiento y pagarle una renta anual de \$119.26 millones siempre y cuando después de 10 años, le seda los equipo sin ningun costo. Para tomar una decision el Sr. González quiere saber la rentabilidad que tiene la inversión, ya que él tiene la posibilidad de colocar ese dinero al 10% anual compuesto en otros proyectos.

Como toda la inversión se pierde al final y solamente se producen ingresos al término de cada año el flujo de fondos del proyecto es el siguiente:



Calculando la TIR por medio de MS Excel ver 7, se encuentra que es exactamente igual al 20% anual compuesto, esto es que el Sr. González puede invertir \$500 millones durante 10 años al 20% anual.

Pero es incorrecto afirmar esto, porque la rentabilidad es solo aplicable a los dineros que mantiene invertidos en el proyecto durante cada uno de los años, y como el proyecto,



devuelve anualmente parte de la inversión inicial, los dineros invertidos al término de cada año son diferentes. Para poder hacer más explícito lo anterior se realiza la siguiente tabla.

Periodo	Inversión al principio del periodo	Saldo acumulado al principio del periodo	Interés ganado durante el periodo	Saldo al final del periodo	Retiro al final del periodo
	(1)	(2)	.20 x (2) (3)	(2) + (3) (4)	(5)
	millones \$	millones \$	millones \$	millones \$	millones \$
0-1	500	500	100	600	119.26
1-2	0	480.74	96.15	576.89	119.26
2-3	0	457.63	91.53	549.15	119.26
3-4	0	429.89	85.98	515.87	119.26
4-5	0	396.61	79.32	475.93	119.26
5-6	0	356.67	71.33	428.01	119.26
6-7	0	308.75	61.75	370.50	119.26
7-8	0	251.24	50.25	301.49	119.26
8-9	0	182.23	36.45	218.67	119.26
9-10	0	99.41	19.89	119.30	119.26
10	0	0			

En la tabla anterior podemos advertir que la TIR se aplica efectivamente solo al saldo acumulado al principio del periodo, de esta manera vemos que \$500 millones ganan 20% de interés durante el primer año, pero que tal rentabilidad anual se obtiene en los años posteriores sólo para las sumas decrecientes de la columna (2)

En resumen, el Sr. González enfrenta un proyecto cuya TIR es del 20% anual pero que, por devolver dinero a lo largo de su duración, no produce efectivamente el 20% anual compuesto de interés sobre la inversión inicial de \$500 millones durante 10 años, sino que tal interés opera sobre las sumas anuales decrecientes que se mantienen atadas al proyecto.



Todos los resultados anteriores son de gran utilidad, pero lo que en realidad quiere saber el Sr. González, es la tasa verdadera de rentabilidad (TVR) de este proyecto en el sentido de establecer el interés efectivo que ganan durante 10 años los \$500 millones que se deben invertir.

Para poder determinar la TVR, debemos calcular la cantidad total de dinero que se acumula al cabo de diez años al invertir \$500 millones en el proyecto de maquinaria y reinvertir los dineros que va liberando el proyecto, a la tasa de interés de oportunidad del 10% anual compuesto

Al finalizar el primer periodo, el Sr. González recibe \$119.26 millones, los cuales puede invertir a la tasa del 10% anual compuesto durante 9 años. Al hacer esto acumula

$$119.26 \times 1.10^9 = \$281.22 \text{ millones}$$

Al final del segundo año el Sr. González recibe \$119.26 millones que pueden reinvertir al 10% anual compuesto durante 8 años, para acumular dentro de 10 años:

$$119.26 \times 1.10^8 = \$255.69 \text{ millones}$$

Así sucesivamente, al final de diez años el Sr. González tiene la cantidad de:

$$119.26 \times 1.10^9 + 119.26 \times 1.10^8 + \dots + 119.26 \times 1.10^1 = \$1,900.65 \text{ millones}$$

Por lo tanto al combinar el producido por el proyecto de maquinaria con la posibilidad de reinversión que tiene el Sr. González, nos encontramos con un proyecto de inversión global, que lo represento en el siguiente gráfico



que tiene una TIR de 14.4%.

Con todos los datos analizados podemos decirle a el Sr. González que:

1. La tasa verdadera de rentabilidad del proyecto (TVR), de maquinaria, *es aquella que combina las características propias del proyecto (reflejadas en su tasa interna de rentabilidad) con las características propias de el Sr. González (que se expresa mediante su tasa interna de oportunidad), y es 14.4% anual compuesto sobre la inversión inicial*
2. La rentabilidad propia del proyecto es 20% anual compuesto *Es la TIR, indice que no depende de quien este analizando el proyecto.*
3. La tasa interna de oportunidad es 10% anual compuesto y *constituye una característica de quien decide y no del proyecto.*

Con frecuencia, es posible confundirnos con estas tres mediciones de rentabilidad, pero como pudimos apreciar tienen un significado y utilidad diferente.

La confusión surge porque, en ocasiones, la TVR del proyecto coincide con su TIR. Esto



pasa cuando el proyecto no devuelve dinero a lo largo de su horizonte de vida, dando cabida a que entren en juego las oportunidades de reinversión de quien analiza el proyecto

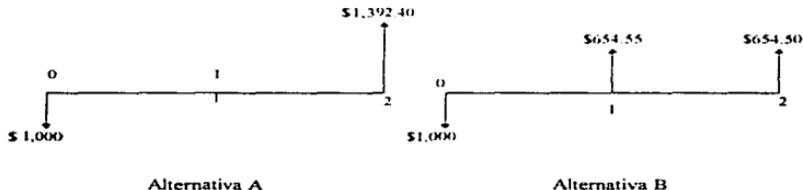
Podemos concluir que para tomar decisiones, el índice de rentabilidad más conveniente es el que hemos llamado tasa verdadera de rentabilidad del proyecto (TVR).

4.5.- TIR VS VPN

Es de gran relevancia saber que pueden existir discrepancias muy serias entre el ordenamiento preferencial que produce el método de la TIR y el proveniente del VPN

Esto es, que el método del Valor Presente Neto incorpora automáticamente el hecho de que los fondos liberados se reinvierten a la tasa de interés de oportunidad, tanto que la TIR no tiene en cuenta lo que pasa con los fondos que se liberan y que, cuando se escoge con base en este índice, se está suponiendo implícitamente que los fondos liberados se reinvierten a la tasa interna de retorno

Para analizar los conceptos anteriores, veamos la siguiente situación que nos exige escoger una alternativa de entre las dos posibles y cuyos diagramas de flujo se presentan en los siguientes gráficos





Calculando la TIR mediante MS Excel ver. 7, tenemos

$$TIR_A = 18\%$$

$$TIR_B = 20\%$$

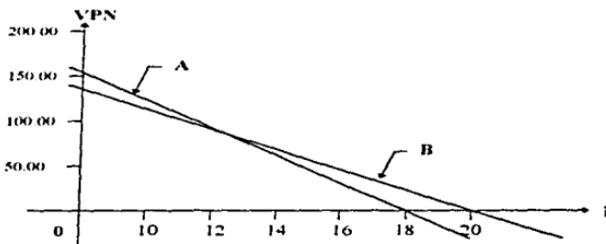
Dado los resultados obtenidos, podriamos concluir que la alternativa B es la mejor, pero al analizar las alternativas por el metodo de Valor Presente Neto, seleccionando una tasa de interes de oportunidad del 10%, que considero razonable para el tipo de operacion, que tenemos

$$VPN_B(0.10) = -\$1,000 + \$654.55 (1.736) = \$ 136.30$$

$$VPN_A(0.10) = -\$1,000 + \$1,392.42 (0.8264) = \$ 150.68$$

Al observar esto podemos ver que el $VPN_A(0.10) > VPN_B(0.10)$ y que por lo tanto, el proyecto A es mejor que el B

Esta contradiccion entre lo que recomienda la TIR y lo que recomienda el VPN se observa en la siguiente grafica





NOTA: La gráfica anterior esta representando el VPN por medio de una linea, en realidad esta linea es un curva, pero debido a la escala que se esta manejando no se alcanza a apreciar. Mas adelante de este trabajo se hablara un poco mas de estas curvas y se explicará como se obtienen

¿Cual de los dos metodos es el correcto?, para poder llegar a una resolucion tenemos que realizar un analisis comparativo, que ponga en evidencia el comportamiento de cada uno de estos métodos

Si escogemos la alternativa A, se está prefiriendo, recibir \$1,392.40 al cabo de dos años, en lugar de recibir \$654.55 dentro de un año y \$654.55 al cabo de dos años. Esto a su vez equivale, a preferir recibir \$737.85 ($1,392.40 - \654.55) dentro de dos años en lugar de recibir \$654.55 dentro de un año. Para poder saber que es lo que me conviene mas, tengo que calcular a que interes debo invertir \$654.55 para que dentro de un año se me devuelvan \$737.85, si ese interes es mayor a 10% que es la tasa de oportunidad en otros proyectos, es preferible elegir la alternativa A, ya que me dara mas ganancias.

Calculando la tasa a la que se deben invertir los \$654.55, nos queda

$$\$737.85 \div \$654.55 = 1.1273, \text{ es decir } 12.73\%$$

Como se pudo comprobar \$654.55 produce \$737.85 a una tasa de 12.73%, que es mayor al 10% que tiene disponible el inversionista en otros proyectos, **por lo que es mejor escoger la alternativa A de la B.**

En base a todo lo anterior podemos afirmar que el proyecto B consiste en la oportunidad de invertir \$1,000.00 al 20% anual durante un año y \$545.45 al 20% anual durante el año siguiente, es decir: El primer año nos da intereses de \$200.00 que al sumarlos con la inversión inicial, nos representan \$1,200.00 de los cuales se devuelven \$654.55



dejando para el siguiente periodo \$545.45 (\$1,200.00 - \$654.55), los cuales se invierten al 20% anual obteniéndose \$654.55 que es la cantidad que se devuelve al término del segundo periodo. En contraste cuando examinamos la alternativa A, que por no haber devolución de dinero antes de dos años, podemos decir que esta alternativa consiste en la oportunidad de invertir \$1,000.00 al 18% anual durante un periodo de dos años, esto es

$$\$1,000.00 \times 1.18^2 = \$1,392.40$$

Cuando aseguramos que el proyecto B es mejor que el proyecto A, porque la TIR son de 20% y 18% respectivamente, suponemos que los fondos liberados por B, al final del primer año, se reinvierten en otro proyecto al 20%. Pero esto no corresponde a la realidad que hemos intuido, ya que la tasa de interés de oportunidad, es decir, el interés que podemos recibir en otros proyectos es solo del 10%.

4.6.- VPN VS TVR

Veamos ahora cual es la TVR de los proyectos anteriores, y con ayuda de la TVR nos ayude a definir cual es el mejor proyecto

Alternativa A: En este caso la TIR es igual a TVR, ya que el proyecto devuelve todo el dinero al final de dos años, es decir

$$TVR_A = 18\%$$

Alternativa B: La TVR del proyecto B es igual a la TIR del proyecto equivalente, que reincorpora la reinversión de los fondos liberados:

Al finalizar el primer periodo, se reciben \$654.55 que pueden reinvertirse a la tasa del 10% durante un año. Al hacer esto acumula:

$$654.55 \times 1.10^1 = \$720.01$$



Por lo tanto al término del segundo periodo se tienen $\$654.55 + \$720.01 =$
\$1,374.56, es decir, si quisiéramos representar esto gráficamente se vería de la siguiente
 forma:



Al calcular TVR con ayuda de MS Excel ver. 7, se tiene

$$TVR_{II} = 17.24\%$$

comparando:

$$TVR_A = 18\% > TVR_{II} = 17.24\%$$

que indica la misma preferencia producida por el VPN, es decir:

$$VPN_A(10) = \$150.68 > VPN_{II}(10) = \$136.30$$

Por lo tanto, podemos afirmar, que el ordenamiento preferencial entre dos alternativas no siempre es igual cuando se hacen por medio del VPN o de la TIR. Coincide sin embargo, cuando se hacen por medio del VPN y de la TVR.



4.7.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA TIR Y SU RELACIÓN CON EL VPN

El entendimiento de lo que en realidad representa la TIR y el VPN se aclarará al revisar un gráfico en el cual aparece el VPN como una función de la tasa de interés que se usa para calcularlo, si esta varía, el VPN también lo hace. En consecuencia podemos realizar un dibujo en donde están relacionados el VPN y la tasa de interés utilizando un sistema de ejes cartesianos, representando en el eje de las abscisas los valores de la tasa de interés y en el eje de las ordenadas los valores del VPN. Tal gráfico que es una curva, se llama curva del VPN.

Para poder ejemplificar la construcción de una curva de VPN nos auxiliaremos de la alternativa A de el ejemplo que hemos estado examinando. Para tal fin debemos identificar algunos puntos por donde pasa la curva, que al unirlos nos permitan observarla.

Paso uno - Identificar en que punto la curva corta el eje de las ordenadas, es decir, cuando la "i" = 0, que es simplemente la diferencia entre los ingresos y egresos, entonces

$$VPN(0) = \$1,392.40 - \$1,000.00 = \$392.40$$

Paso dos - Identificar en que punto la curva corta el eje de las abscisas, es decir, el VPN es igual a cero y por lo tanto la "i" = TIR, en los análisis anteriores se determinó que :

$$TIR = 18\%$$

es decir:

$$VPN(0.18) = 0$$

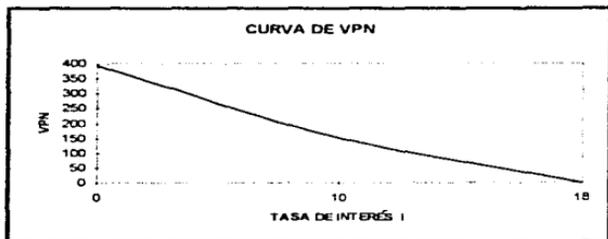
Paso tres - Aunque sería deseable y necesario obtener un mayor número de puntos para poder dibujar la curva de VPN, considero que es suficiente con tres puntos, ya que de



esta manera nos podemos dar cuenta de que forma tiene la curva. Para encontrar el tercer punto es necesario calcular el VPN con una tasa que puede variar de 0 a 18%, en un análisis anterior ya calculo con una tasa del 10%, y resultado

$$\text{VPN}(0.10) = \$150.68$$

Graficando estos tres puntos tenemos



Observemos que la curva del VPN corta el eje de las abscisas en el valor de la TIR, como ya se había indicado y aunque da la impresión de ser una línea recta, debemos advertir que se trata efectivamente de una curva



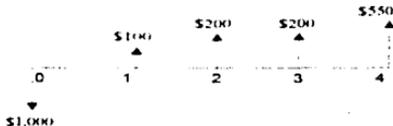
4.8-EJEMPLOS DEL USO DEL MÉTODO TIR EN LA EVALUACIÓN DE PROYECTOS.

Ejercicio 1 Una empresa presenta el siguiente flujo de efectivo

Año	Inversión	Flujo de caja
0	(\$1.000 00)	
1		\$100 00
2		\$200 00
3		\$200 00
4		\$550 00

La tasa de reinversión aplicable al caso es del 8%, determinar si es adecuado realizar la inversión

Diagrama de flujo de efectivo



Sustituyendo valores

$$Q_0 \left[\frac{-1}{(1+i)} \right]^0 + Q_1 \left[\frac{-1}{(1+i)} \right]^1 + Q_2 \left[\frac{-1}{(1+i)} \right]^2 + Q_3 \left[\frac{-1}{(1+i)} \right]^3 + Q_4 \left[\frac{-1}{(1+i)} \right]^4 - Q_0 = 0$$

La TIR resulta ser una de las raíces positivas del polinomio anterior

Usando el algoritmo de MS Excel 7.0 se determina el valor de la TIR

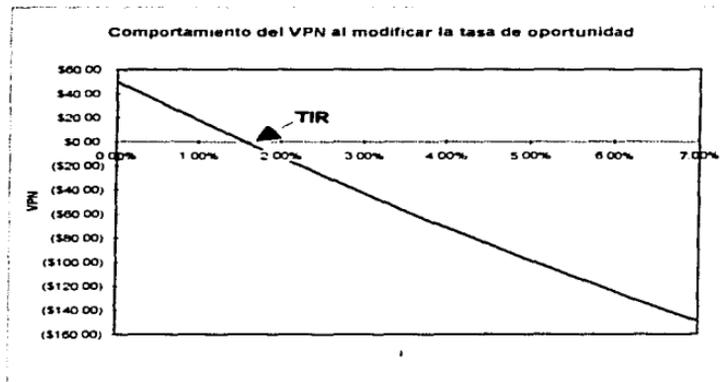
Tasa Interna de Rentabilidad:

1.57%

La TIR que se obtuvo es menor que la tasa de oportunidad, es decir, el VPN es menor que cero.



A continuación se realiza una gráfica para corroborar el valor de la TIR, que esta representado por la curva al momento de cortar el eje de las abscisas, dado entonces la TIR vale, según la gráfica 1.50% aproximadamente



La TIR es menor a la tasa de oportunidad, es decir, se obtiene un rendimiento inferior al de la tasa de oportunidad, por lo tanto no es conveniente invertir.



Ejercicio 2. Una empresa constructora desea adquirir una mezcladora de dos sacos con un valor de \$100,000 00, este equipo se arrendara y se estima que brinde los ingresos que se muestran en el diagrama de flujo

Se considero que este equipo tiene una vida util de 5 años, y que la tasa de interes aplicable al caso es de 25%, ya que es la tasa de oportunidad de la constructora

La constructora quiere saber si es conveniente realizar la inversion

Diagrama de flujo de efectivo



Sustituyendo valores:

$$Q_0 \left[\frac{1}{(1+i)^0} \right] + Q_1 \left[\frac{1}{(1+i)^1} \right] + Q_2 \left[\frac{1}{(1+i)^2} \right] + Q_3 \left[\frac{1}{(1+i)^3} \right] + Q_4 \left[\frac{1}{(1+i)^4} \right] + Q_5 = 0$$

La TIR resulta ser una de las raíces positivas del polinomio anterior:

Año	Inversión	Flujo de caja
0	(\$100,000 00)	
1		\$40,000 00
2		\$40,000 00
3		\$40,000 00
4		\$40,000 00
5		\$60,000 00

Usando el algoritmo de MS Excel 7.0 se determina el valor de la TIR.

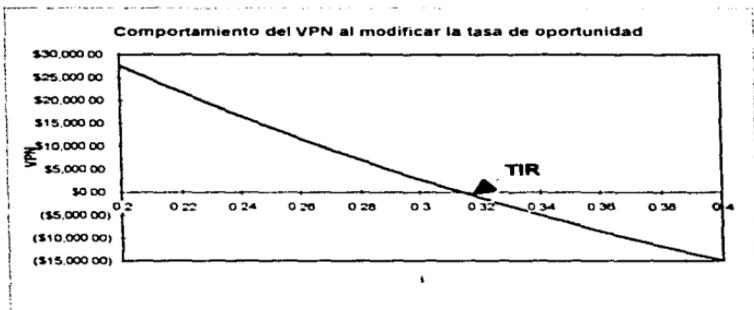
Tasa Interna de Rentabilidad:

31.39%

La TIR que se obtuvo es mayor que la tasa de oportunidad, es decir, el VPN es mayor que cero



A continuación se realiza una gráfica para corroborar el valor de la TIR, que está representado por la curva al momento de cortar el eje de las abscisas, dado entonces la TIR vale, según la gráfica 31 40% aproximadamente

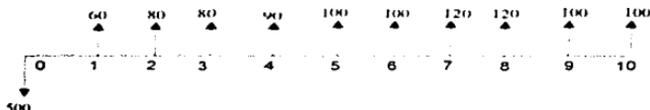


La TIR es mayor que la tasa de oportunidad, es decir, el rendimiento que nos ofrece esta inversión es superior al 25% anual, es conveniente realizar la inversión.



Ejercicio 3. Si se invierten \$500,000 00 en un tractor que tiene una vida útil de 10 años, el flujo de efectivo generado por la utilización del tractor al final de cada año es el que se muestra en el diagrama de flujo de efectivo. Si la tasa de oportunidad de la empresa que adquiere el equipo es del 10%, determinar si es conveniente realizar la inversión.

Diagrama de flujo de efectivo en miles de \$



Sustituyendo valores (en miles)

$$Q_0 \left[\frac{-1}{(1+i)} \right]^0 + Q_{-1} \left[\frac{-1}{(1+i)} \right]^1 + \dots + Q_1 \left[\frac{-1}{(1+i)} \right]^1 + Q_2 \left[\frac{-1}{(1+i)} \right]^2 + Q_n = 0$$

La TIR resulta ser una de las raíces positivas del polinomio anterior:

Año	Inversión	Flujo de caja
0	(\$500 00)	
1		\$60 00
2		\$80 00
3		\$80 00
4		\$90 00
5		\$100 00
6		\$100 00
7		\$120 00
8		\$120 00
9		\$100 00
10		\$100 00

Usando el algoritmo de MS Excel 7.0 se determina el valor de la TIR.

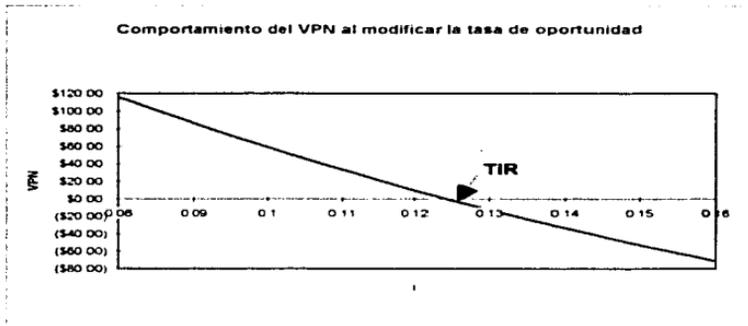
Tasa Interna de Rentabilidad:

12.44%

La TIR que se obtuvo es mayor que la tasa de oportunidad, es decir, el VPN es mayor que cero.



A continuación se realiza una gráfica para corroborar el valor de la TIR, que está representado por la curva al momento de cortar el eje de las abscisas, dado entonces la TIR vale, según la gráfica 12.40% aproximadamente

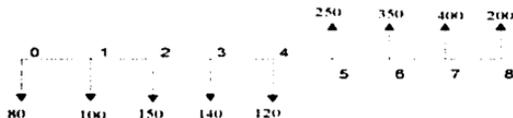


La TIR es mayor que la tasa de oportunidad, es decir, el rendimiento que nos ofrece esta inversión es superior al 10% anual, por lo tanto, es conveniente realizar la inversión.



Ejercicio 4. En la construcción de un fraccionamiento se tienen los ingresos y egresos que se observan en el diagrama de flujo de efectivo. Calcular el Valor presente neto si la tasa de oportunidad de la constructora es de un 15% mensual

Diagrama de flujo de efectivo en miles de \$



Sustituyendo valores (en miles)

$$Q_0 \left[\frac{1}{(1+i)^0} \right] + Q_1 \left[\frac{1}{(1+i)^1} \right] + Q_2 \left[\frac{1}{(1+i)^2} \right] + Q_3 \left[\frac{1}{(1+i)^3} \right] + Q_4 \left[\frac{1}{(1+i)^4} \right] + Q_5 \left[\frac{1}{(1+i)^5} \right] + Q_6 \left[\frac{1}{(1+i)^6} \right] + Q_7 \left[\frac{1}{(1+i)^7} \right] + Q_8 \left[\frac{1}{(1+i)^8} \right] + Q_u = 0$$

La TIR resulta ser una de las raíces positivas del polinomio anterior:

Mes	Inversión	Flujo de caja
0	(\$80 00)	
1	(\$100 00)	
2	(\$150 00)	
3	(\$140 00)	
4	(\$120 00)	
5		\$250 00
6		\$350 00
7		\$400 00
8		\$200 00

Usando el algoritmo de MS Excel 7.0 se determina el valor de la TIR.

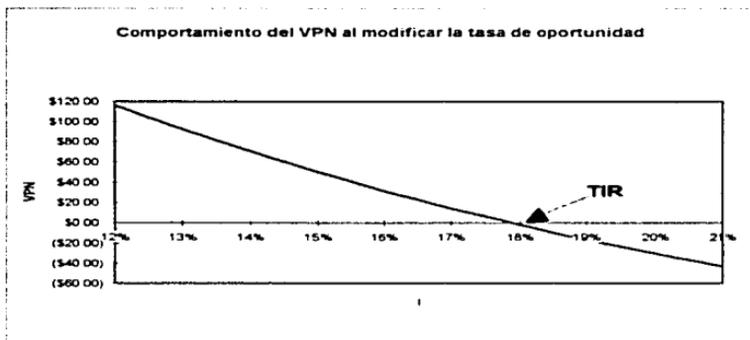
Tasa Interna de Rentabilidad:

17.88%

La TIR que se obtuvo es mayor que la tasa de oportunidad, es decir, el VPN es mayor que cero.



A continuación se realiza una gráfica para corroborar el valor de la TIR, que está representado por la curva al momento de cortar el eje de las abscisas, dado entonces la TIR vale, según la gráfica 17.90% aproximadamente



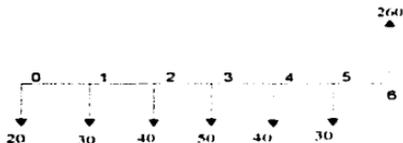
La TIR es mayor que la tasa de oportunidad, es decir, el rendimiento que nos ofrece esta inversión es superior al 15% mensual, por lo tanto, es conveniente realizar la inversión.



Ejercicio 5. El Arq. Osorio desea adquirir un predio que tiene un valor de \$20,000 00, sobre el cual quiere construir una casa habitación, el programa mensual de egresos que resulta de la construcción es el que se muestra a continuación

- Al término del primer mes \$ 30,000 00
- Al término del segundo mes \$ 40,000 00
- Al término del tercer mes \$ 50,000 00
- Al término del cuarto mes \$ 40,000 00
- Al término del quinto mes \$ 30,000 00

El Arq. estima que podrá vender la casa al término del sexto mes, en un valor de \$260,000 00, si la tasa de oportunidad para este tipo de proyectos fuera de el 10% mensual, es conveniente o no realizar la inversión
Diagrama de flujo de efectivo en miles de \$



Sustituyendo valores:

$$Q_0 \left[\frac{1}{(1+i)^0} \right] + Q_1 \left[\frac{1}{(1+i)^1} \right] + Q_2 \left[\frac{1}{(1+i)^2} \right] + Q_3 \left[\frac{1}{(1+i)^3} \right] + Q_4 \left[\frac{1}{(1+i)^4} \right] + Q_5 \left[\frac{1}{(1+i)^5} \right] + Q_6 = 0$$

La TIR resulta ser una de las raíces positivas del polinomio anterior:

Mes	Inversión	Flujo de caja
0	(\$20 00)	
1	(\$30 00)	
2	(\$40 00)	
3	(\$50 00)	
4	(\$40 00)	
5	(\$30 00)	
6		\$260 00

Usando el algoritmo de MS Excel 7.0 se determina el valor de la TIR.

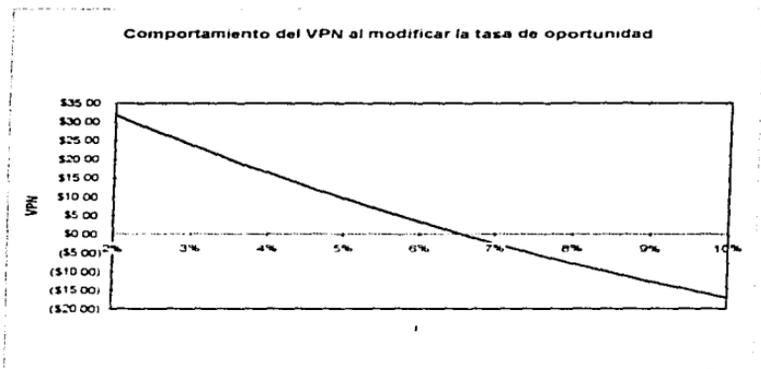
Tasa Interna de Rentabilidad:

6.56%

La TIR que se obtuvo es menor que la tasa de oportunidad, es decir, el VPN es menor que cero.



A continuación se realiza una grafica para corroborar el valor de la TIR, que esta representado por la curva al momento de cortar el eje de las abscisas, dado entonces la TIR vale, según la grafica 6.60% aproximadamente



La TIR es menor que la tasa de oportunidad, es decir, el rendimiento que nos ofrece esta inversion es inferior al 10% mensual que ofrecen otros proyectos del mismo tipo, razon suficiente para no invertir en este proyecto



Ejercicio 6

Cierto tramo de una carretera de cuota esta en tan malas condiciones que se requiere su recubrimiento o su reubicación? Dado que la institución gubernamental no cuenta con recursos económicos, el tramo fue concesionado, la empresa que ganó esta concesión tiene tres posibles ubicaciones, que son las que se tomarán en cuenta para decidir entre alguna de ellas y para su análisis se presentan tres alternativas. La ubicación presente está designada como H, las dos nuevas ubicaciones posibles que acortarán la distancia entre los puntos terminales se designan como J y K. La ubicación K es un tanto más corta que la J, pero implica una inversión considerablemente mayor para nivelación y estructuras. El estudio financiero para comparar las propuestas de las tres ubicaciones abarcará un periodo de 20 años y una tasa del 7%, que es la tasa mínima de interés que se puede aplicar a un proyecto de uso público.

La inversión inicial estimada que debe hacer la agencia gubernamental sería de \$110 00 millones en la ubicación H, de \$700 00 millones en la ubicación J y de \$1,300 00 millones en la K. Si la ubicación H se abandona ahora, no tendrá ningún valor de rescate, también se supone que no habrá ningún valor residual al final de los 20 años. Sin embargo, debido a las vidas útiles estimadas de las obras que se construyan en J y K, son mayores que el periodo de análisis de 20 años, los valores residuales se estiman al final de 20 años. Estos son \$300 00 millones para J, y \$550 00 millones para K. Los costos anuales de mantenimiento, también pagaderos por la empresa, se mantienen en \$35 00 millones para la ubicación H, \$21 00 millones para la J y \$17 00 millones para la K.

Se prevé que el tránsito en esta sección de carretera aumentará en una cantidad uniforme cada año hasta el año 10, y que entonces continuará a un nivel constante hasta el año 20. No se espera que el volumen de tránsito dependa de esta decisión sobre la ubicación de la carretera. Para la ubicación H, los ingresos anuales por concepto de peaje aplicables en el análisis financiero se estiman como de \$136 00 millones en el año 1, de \$142 00 millones en el año dos, y aumentarán \$6 50 millones cada año hasta llegar a \$194 50 millones en el año 10, de ahí en adelante, continuarán en \$195 00. Para la ubicación J, que es más corta, las estimaciones correspondientes son de \$175 00 millones para el primer año, aumentando \$7 50 millones al año, hasta llegar al año 10, y una cifra anual constante de \$225 00 millones de ahí en adelante. Para la ubicación K, que es todavía más corta, las cifras correspondientes son \$210 00 millones, \$10 00 millones y \$300 00 millones. No existe diferencias en las consecuencias para los no usuarios que merezcan consideración. Determinar cuál de las tres ubicaciones es la mejor, según la TIR.



Para poder entender mejor el comportamiento de el dinero a continuación represento mediante una tabla el flujo que este tiene

Año	Ubicacion H		Ubicacion J		Ubicacion K	
	Inversión	Flujo \$	Inversión	Flujo \$	Inversión	Flujo \$
0	110		700		1.300	
1	35	136 0	21	175 0	17	210 0
2	35	142 5	21	182 5	17	220 0
3	35	149 0	21	190 0	17	230 0
4	35	155 5	21	197 5	17	240 0
5	35	162 0	21	205 0	17	250 0
6	35	168 5	21	212 5	17	260 0
7	35	175 0	21	220 0	17	270 0
8	35	181 5	21	227 5	17	280 0
9	35	188 0	21	235 0	17	290 0
10	35	194 5	21	242 5	17	300 0
11	35	195 0	21	225 0	17	300 0
12	35	195 0	21	225 0	17	300 0
13	35	195 0	21	225 0	17	300 0
14	35	195 0	21	225 0	17	300 0
15	35	195 0	21	225 0	17	300 0
16	35	195 0	21	225 0	17	300 0
17	35	195 0	21	225 0	17	300 0
18	35	195 0	21	225 0	17	300 0
19	35	195 0	21	225 0	17	300 0
20	35	195 0	21	525 0	17	850 0

Diagrama de flujo para la ubicacion H, en millones de pesos

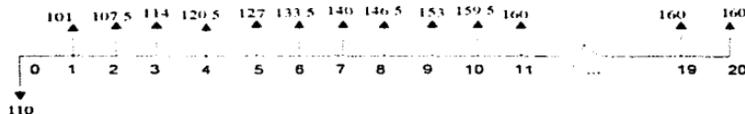




Diagrama de flujo para la ubicación J, en millones de pesos

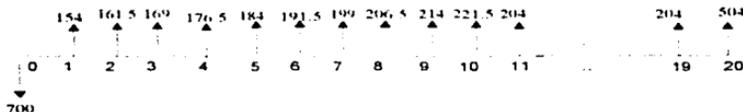
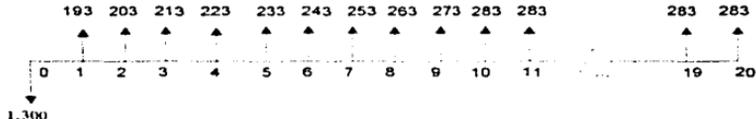


Diagrama de flujo para la ubicación K, en millones de pesos.



Después de entender y observar gráficamente el flujo del dinero, procedemos a calcular la TIR, sustituyendo y dando solución a la ecuación siguiente

$$Q_0 \left[\frac{1}{(1+i)} \right] + Q_1 \left[\frac{1}{(1+i)} \right]^1 + Q_2 \left[\frac{1}{(1+i)} \right]^2 + Q_3 \left[\frac{1}{(1+i)} \right]^3 + Q_n = 0$$

La TIR resulta ser una de las raíces positivas del polinomio anterior. Usando el algoritmo de MS Excel 7.0 se determina el valor de la TIR.

Tasa Interna de Rentabilidad de la ubicación H:

Resultado:	98%
------------	-----

Tasa Interna de Rentabilidad de la ubicación J:

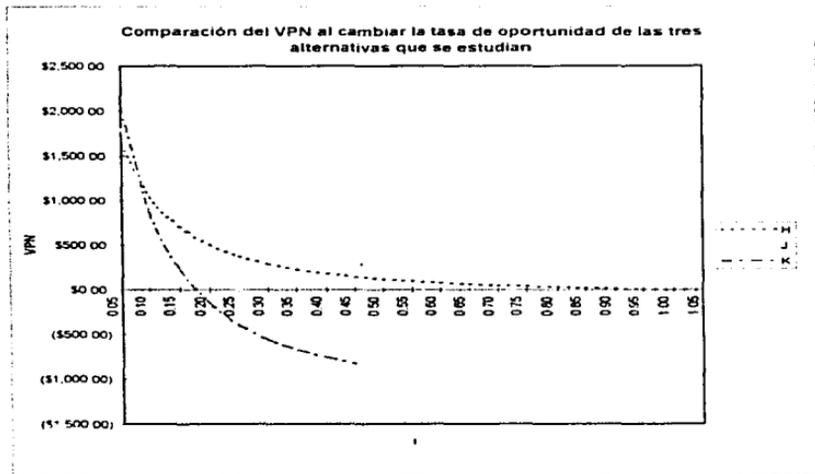
Resultado:	25%
------------	-----

Tasa Interna de Rentabilidad de la ubicación K:

Resultado:	18%
------------	-----



En todos los casos la TIR que se obtuvo es mayor que la tasa de oportunidad, es decir, el VPN es mayor que cero, ahora hay que decidir cual de las tres es la mejor alternativa. Es la H, debido a que es la que tiene la TIR mas alta, para complementar esta interpretacion se realizara a continuacion un comparativo grafico.



Como podemos observar la alternativa que ofrece más ventajas es la H, aunque no es la que obtiene más beneficios de todos, pero si la que más rapido los obtiene.



CAPÍTULO 5
RELACIÓN BENEFICIO - COSTO
(B/C) :



RELACIÓN BENEFICIO - COSTO

5.1.-EVALUACIÓN DE PROYECTO PÚBLICO DE INVERSIÓN

En la actualidad este índice, es muy frecuente usarlo en el estudios de grandes proyectos del tipo público, **este método se apoya en el método de Valor Presente Neto (VPN)** y se calcula de la siguiente manera:

1. *Se calcula el Valor Presente Neto de los ingresos asociados con el proyecto que se valúa.*
2. *Se calcula el Valor Presente Neto de los egresos del proyecto.*
3. *Se establece una relación entre el VPN de los ingresos y el VPN de los egresos, es decir:*

$$\frac{B}{C}(i) = \frac{VPN_{\text{Ingresos}}(i)}{VPN_{\text{Egresos}}(i)}$$



Como se puede observar la relación B/C, esta en función de la tasa de interés que se emplea en la determinación del VPN de los ingresos y egresos, de tal forma que al calcular este índice con caracteres decisorios, es necesario utilizar la tasa de interés de oportunidad

La relación B/C, puede tener los siguientes valores

$$B/C(i) > 1$$

$$B/C(i) = 1$$

$$B/C(i) < 1$$

Cuando el valor es mayor a la unidad, nos representa que el VPN de los egresos es menor que el VPN de los ingresos, es decir, *el VPN del proyecto es positivo y en consecuencia es atractivo.*

Cuando el valor es igual a la unidad, nos indica que *el VPN de los ingresos es igual al VPN de los egresos, motivo por el cual este proyecto es indiferente a cualquier inversionista*, tal que la tasa de interés nos representa la TIR del proyecto

En el caso de que el valor sea menor a uno, tenemos un proyecto que tiene un valor presente negativo, es decir, *el proyecto no es rentable.*

En México, la relación B/C es utilizada exclusivamente en proyectos relacionados con obras públicas o con inversiones financiadas por el Banco Internacional de Desarrollo (BID) o el Banco Mundial (BIRF).



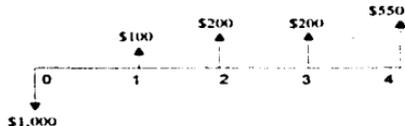
5.2.-EJEMPLOS DEL USO DEL MÉTODO RELACIÓN B/C EN LA EVALUACIÓN DE PROYECTOS.

Ejercicio 1 Una empresa presenta el siguiente flujo de efectivo:

Año	Inversión	Flujo de caja
0	(\$1,000.00)	
1		\$100.00
2		\$200.00
3		\$200.00
4		\$550.00

La tasa de oportunidad aplicable al caso es del 8%, determinar si es adecuado realizar la inversión.

Diagrama de flujo de efectivo



Sustituyendo valores:

$$i = 0.08$$

$$\frac{B}{C}(i) = \frac{VP\text{Ingresos}(i)}{VP\text{Negrosos}(i)}$$

$$VP\text{Ingresos} = \frac{100}{(1 + 0.08)^1} + \frac{200}{(1 + 0.08)^2} + \frac{200}{(1 + 0.08)^3} + \frac{550}{(1 + 0.08)^4}$$

$$= \$827.09$$

$$VP\text{Negrosos} = \$1,000.00$$

Relación Beneficio Costo B/C

$$0.827$$

Dado que el valor es menor a la unidad, se sabe que el proyecto tiene un VPN negativo, es decir, no es rentable el proyecto.



Ejercicio 2. Una empresa constructora desea adquirir una mezcladora de dos sacos con un valor de \$100,000.00, este equipo se arrendará y se estima que brinde los ingresos que se muestran en el diagrama de flujo

Se consideró que este equipo tiene una vida útil de 5 años y que la tasa de interés aplicable al caso es de 25%, ya que es la tasa de oportunidad de la constructora

La constructora quiere saber si es conveniente realizar la inversión

Diagrama de flujo de efectivo



Año	Inversión	Flujo de caja
0	(\$100,000.00)	
1		\$40,000.00
2		\$40,000.00
3		\$40,000.00
4		\$40,000.00
5		\$60,000.00

Sustituyendo valores:

$$i = 0.25$$

$$\frac{B}{C}(t) = \frac{VPIngresos(t)}{VPNegrosos(t)}$$

$$VPIngresos = \frac{40,000}{(1 + 0.25)^1} + \frac{40,000}{(1 + 0.25)^2} + \frac{40,000}{(1 + 0.25)^3} + \frac{40,000}{(1 + 0.25)^4} + \frac{60,000}{(1 + 0.25)^5}$$

$$= \$114,124.80$$

$$VPNegrosos = \$100,000.00$$



Relación Beneficio Costo B/C

1.141

El resultado es mayor a uno, es decir, el rendimiento que nos ofrece esta inversión es superior al 25% anual, es conveniente realizar la inversión.

- Ejercicio 3.** Si se invierten \$500,000 00 en un tractor que tiene una vida útil de 10 años, el flujo de efectivo generado por la utilización del tractor al final de cada año es el que se muestra en el diagrama de flujo de efectivo. Si la tasa de oportunidad de la empresa que adquiere el equipo es del 10%, determinar si es conveniente realizar la inversión.

Diagrama de flujo de efectivo en miles de \$



Año	Inversión	Flujo de caja
0	(\$500 00)	
1		\$60 00
2		\$80 00
3		\$80 00
4		\$90 00
5		\$100 00
6		\$100 00
7		\$120 00
8		\$120 00
9		\$100 00
10		\$100 00



Sustituyendo valores

 $i = 0.1$

$$\frac{B}{C}(i) = \frac{VPN_{Ingresos}(i)}{VPN_{Egresos}(i)}$$

$$VPN_{Ingresos} = \frac{60}{(1+0.10)^1} + \frac{80}{(1+0.10)^2} + \frac{80}{(1+0.10)^3} + \frac{90}{(1+0.10)^4} +$$

$$+ \frac{100}{(1+0.10)^5} + \frac{100}{(1+0.10)^6} + \frac{120}{(1+0.10)^7} + \frac{120}{(1+0.10)^8} + \frac{100}{(1+0.10)^9} + \frac{1}{(1+0.10)^{10}}$$

$$\approx \$559.30$$

$$VPN_{Egresos} = \$500.00$$

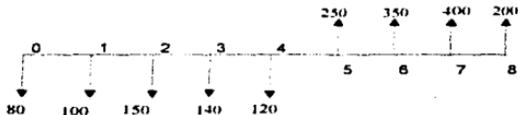
Relación Beneficio Costo B/C

1.119

Dado que el valor es mayor a la unidad, se sabe que el proyecto tiene un VPN positivo, es decir, es rentable el proyecto.

- Ejercicio 4.** En la construcción de un fraccionamiento se tienen los ingresos y egresos que se observan en el diagrama de flujo de efectivo. Calcular el Valor presente neto si la tasa de oportunidad de la constructora es de un 15% mensual

Diagrama de flujo de efectivo en miles de \$.





Mes	Inversión	Flujo de caja
0	(\$80 00)	
1	(\$100 00)	
2	(\$150 00)	
3	(\$140 00)	
4	(\$120 00)	
5		\$250 00
6		\$350 00
7		\$400 00
8		\$200 00

Sustituyendo valores

$$i = 0.15$$

$$\frac{H}{C}(t) = \frac{VPN_{\text{Ingresos}}(t)}{VPN_{\text{Negresos}}(t)}$$

$$VPN_{\text{Ingresos}} = \frac{250}{(1+0.15)^5} + \frac{350}{(1+0.15)^6} + \frac{400}{(1+0.15)^7} + \frac{200}{(1+0.15)^8}$$

$$= \$491.36$$

$$VPN_{\text{Negresos}} = -800 - \frac{100}{(1+0.15)^1} - \frac{150}{(1+0.15)^2} - \frac{140}{(1+0.15)^3} - \frac{120}{(1+0.15)^4}$$

$$= \$441.04$$

Relación Beneficio Costo B/C

$$1.114$$

Dado que el valor es mayor a la unidad, se sabe que el proyecto tiene un VPN positivo, es decir, es rentable el proyecto.



Ejercicio 5. El Arq. Osorio desea adquirir un predio que tiene un valor de \$20,000 00, sobre el cual quiere construir una casa habitación, el programa mensual de egresos que resulta de la construcción es el que se muestra a continuación

Al término del primer mes \$ 30,000 00

Al término del segundo mes \$ 40,000 00

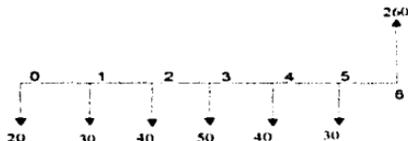
Al término del tercer mes \$ 50,000 00

Al término del cuarto mes \$ 40,000 00

Al término del quinto mes \$ 30,000 00

El Arq. estima que podrá vender la casa al término del sexto mes, en un valor de \$260,000 00, si la tasa de oportunidad para este tipo de proyectos fuera de el 10% mensual, es conveniente o no realizar la inversión

Diagrama de flujo de efectivo en miles de \$



Mes	Inversión	Flujo de caja
0	(\$20 00)	
1	(\$30 00)	
2	(\$40 00)	
3	(\$50 00)	
4	(\$40 00)	
5	(\$30 00)	
6		\$260 00

Sustituyendo valores:

$$i = 0.1$$

$$\frac{B}{C}(t) = \frac{VPN_{Ingresos}(t)}{VPN_{Egresos}(t)}$$

$$VPN_{Ingresos} = \frac{260}{(1 + 0.10)^6}$$

$$= \$146.76$$



$$VPN_{\text{Negrosos}} = -20 - \frac{30}{(1+0.10)^1} - \frac{40}{(1+0.10)^2} - \frac{50}{(1+0.10)^3} - \frac{40}{(1+0.10)^4} - \frac{30}{(1+0.10)^5}$$

$$VPN_{\text{Negrosos}} = -5163.84$$

Relación Beneficio Costo B/C

0.896

Dado que el valor es menor a la unidad, se sabe que el proyecto tiene un VPN negativo, es decir, no es rentable el proyecto.



Ejercicio 6. Cierta tramo de una carretera de cuota está en tan malas condiciones que se requiere su recubrimiento o su reubicación? Dado que la institución gubernamental no cuenta con recursos económicos, el tramo fue concesionado, la empresa que gana esta concesión tiene tres posibles ubicaciones, que son las que se tomarán en cuenta para decidir entre alguna de ellas y para su análisis se presentan tres alternativas. La ubicación presente esta designada como H, las dos nuevas ubicaciones posibles que acortaran la distancia entre los puntos terminales se designan como J y K. La ubicación K es un tanto mas corta que la J, pero implica una inversión considerablemente mayor para nivelación y estructuras. El estudio financiero para comparar las propuestas de las tres ubicaciones abarcará un periodo de 20 años y una tasa del 7%, que es la tasa mínima de interés que se puede aplicar a un proyecto de uso público.

La inversión inicial estimada que debe hacer la agencia gubernamental sería de \$110 00 millones en la ubicación H, de \$700 00 millones en la ubicación J y de \$1,300 00 millones en la K. Si la ubicación H se abandona ahora, no tendrá ningún valor de rescate, también se supone que no habrá ningún valor residual al final de los 20 años. Sin embargo debido a las vidas útiles estimadas de las obras que se construirán en J y K, son mayores que el periodo de análisis de 20 años, los valores residuales se estiman al final de 20 años. Estos son \$300 00 millones para J, y \$550 00 millones para K. Los costos anuales de mantenimiento, también pagaderos por la empresa, se mantienen en \$35 00 millones para la ubicación H, \$21 00 millones para la J y \$17 00 millones para la K.

Se prevé que el tránsito en esta sección de carretera aumentará en una cantidad uniforme cada año hasta el año 10, y que entonces continuará a un nivel constante hasta el año 20. No se espera que el volumen de tránsito dependa de esta decisión sobre la ubicación de la carretera. Para la ubicación H, los ingresos anuales por concepto de peaje aplicables en el análisis financiero se estiman como de \$136 00 millones en el año 1, de \$142 00 millones en el año dos, y aumentarán \$6 50 millones cada año hasta llegar a \$194 50 millones en el año 10, de ahí en adelante, continuarán en \$195 00. Para la ubicación J, que es mas corta, las estimaciones correspondientes son de \$175 00 millones para el primer año, aumentando \$7 50 millones al año, hasta llegar al año 10, y una cifra anual constante de \$225 00 millones de ahí en adelante. Para la ubicación K, que es todavía mas corta, las cifras correspondientes son \$210 00 millones, \$10 00 millones y \$300 00 millones. No existe diferencias en las consecuencias para los no usuarios que merezcan consideración.

Determinar cuál de las tres ubicaciones es la mejor, según el método de B/C



Para poder entender mejor el comportamiento de el dinero a continuacion represento mediante una tabla el flujo que éste tiene

Año	Ubicacion H		Ubicacion J		Ubicacion K	
	Inversion	Flujo \$	Inversion	Flujo \$	Inversion	Flujo \$
0	110		700		1.300	
1	35	136 0	21	175 0	17	210 0
2	35	142 5	21	182 5	17	220 0
3	35	149 0	21	190 0	17	230 0
4	35	155 5	21	197 5	17	240 0
5	35	162 0	21	205 0	17	250 0
6	35	168 5	21	212 5	17	260 0
7	35	175 0	21	220 0	17	270 0
8	35	181 5	21	227 5	17	280 0
9	35	188 0	21	235 0	17	290 0
10	35	194 5	21	242 5	17	300 0
11	35	195 0	21	225 0	17	300 0
12	35	195 0	21	225 0	17	300 0
13	35	195 0	21	225 0	17	300 0
14	35	195 0	21	225 0	17	300 0
15	35	195 0	21	225 0	17	300 0
16	35	195 0	21	225 0	17	300 0
17	35	195 0	21	225 0	17	300 0
18	35	195 0	21	225 0	17	300 0
19	35	195 0	21	225 0	17	300 0
20	35	195 0	21	525 0	17	850 0

Diagrama de flujo para la ubicacion H, en millones de pesos

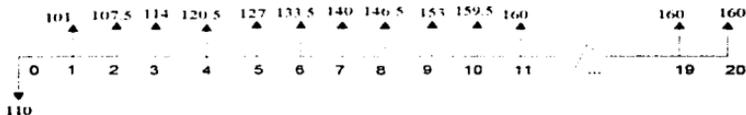
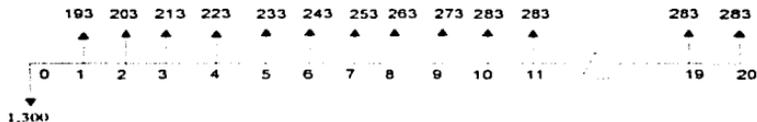




Diagrama de flujo para la ubicación J, en millones de pesos



Diagrama de flujo para la ubicación K, en millones de pesos



Después de entender y observar gráficamente el flujo del dinero, procedemos a calcular la relación B/C:

Sustituyendo valores:

$$i = 0.07$$

$$\frac{B}{C}(t) = \frac{VPIngresos(t)}{VPNegros(t)}$$

Relación Beneficio Costo de la ubicación H

Resultado:	3.81
------------	------



Relación Beneficio Costo de la ubicación J

Resultado:
2.51

Relación Beneficio Costo de la ubicación K.

Resultado:
2.00

Como podemos observar la relación B/C es superior a uno en las tres alternativas, por lo tanto las tres son viables, pero únicamente hay que elegir la mejor alternativa, que es la aquella que tiene la relación B/C más grande. En este caso la alternativa H.



CAPÍTULO 6
EVALUACIÓN DE PROYECTOS
CUANDO NO HAY
CERTIDUMBRE:



EVALUACIÓN DE PROYECTOS CUANDO NO HAY CERTIDUMBRE

Generalmente hay un elemento de incertidumbre asociado a las alternativas de cada proyecto, la toma de decisiones en ingeniería es una actividad proyectada primordialmente hacia el futuro. No solo son problemáticos los estimativos de las condiciones económicas y financieras futuras, sino que además los efectos económicos futuros de la mayoría de los proyectos solamente son conocidos con un grado de seguridad relativo. Es precisamente esta falta de certeza sobre el futuro lo que hace a la toma de decisiones económica y financiera una de las tareas más difíciles que deben realizar los individuos, la industria y el gobierno.

Este capítulo comienza con una introducción a la teoría de la probabilidad y su aplicación en la toma de decisiones. Posteriormente se presentan algunas técnicas para utilizar la probabilidad en la cuantificación de la incertidumbre asociada a las alternativas económicas.



6.1.- DECISIÓN VS. PROBABILIDAD

Es necesario utilizar la teoría de la probabilidad para incorporar formalmente la incertidumbre del futuro en un proceso lógico de decisión. Esta teoría es un extenso cuerpo de conocimientos relacionado con el tratamiento cuantitativo de la incertidumbre. Como está bien desarrollada y rigurosamente definida, es apropiado utilizar en problemas de decisión en los que se debe cabida a la consideración matemática de la incertidumbre.

Mediante la teoría de la probabilidad es posible definir sucesos en forma tal que no existan ambigüedades y que cada afirmación hecha dentro de la teoría sea explícita y claramente entendida. Mediante esta teoría se puede representar la incertidumbre con un número, en forma tal que la incertidumbre asociada a diferentes sucesos pueda compararse directamente. Además, la estructura de la teoría de la probabilidad no permite que se introduzcan ideas y nociones extrañas sin pleno conocimiento de quien toma las decisiones.

Se puede expresar la probabilidad de que ocurra un suceso mediante un número que representa la posibilidad de ocurrencia, se determina examinando toda la información disponible sobre la ocurrencia del suceso. Por lo tanto, *la probabilidad se puede entender como un estado de la mente en cuanto representa nuestra posición frente a la posibilidad de que ocurra un suceso.*

6.2.- RELACIONES FUNDAMENTALES DE PROBABILIDAD

Los tres axiomas de la probabilidad son:

1. Para cualquier suceso A la probabilidad de A , $P(A) > 0$
2. $P(S) = 1$, para el suceso cierto S .
3. Si $AB = 0$, entonces $P(A+B) = P(A) + P(B)$



Es decir, para dos sucesos mutuamente exclusivos la probabilidad de que ocurra el suceso A o B es igual a la suma de probabilidades

La probabilidad condicional de que ocurra el suceso A dado B , $P(A|B)$

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

donde $P(AB)$ es igual a la posibilidad de que ocurran A y B

Cuando los sucesos A y B son independientes, entonces

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

por lo tanto la probabilidad del suceso (A y B) es igual a la probabilidad de A con la probabilidad de B . Cuando A y B son independientes, la probabilidad condicional de A dada la ocurrencia de B es igual a la probabilidad de A expresada como

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

6.2.1.- FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

Una *variable aleatoria* es una función que asigna un valor a cada suceso incluido en el conjunto de todos los sucesos posibles. Por ejemplo, si se arroja 2 veces una moneda, la variable aleatoria que describe el número de caras, puede tener los valores 0, 1 ó 2. Cuando una variable aleatoria es discreta, como en el ejemplo de lanzamiento de monedas, se utiliza una *función de masa de probabilidad* para describir la probabilidad de que la variable aleatoria sea igual a un valor en particular.

Si la probabilidad de que una moneda caiga en cara es 0,5, la función de masa de probabilidad para la variable aleatoria *número de caras* en dos lanzamientos de la moneda se determina de la siguiente forma. El posible resultado de los dos lanzamientos es descrito por los sucesos H_1 , cara en el primer lanzamiento, H_2 , cara en el segundo lanzamiento, T_1 , cruz



en el primer lanzamiento, y T_2 , cruz en el segundo lanzamiento. En la columna A de la tabla siguiente se muestran los resultados que se podrían obtener al arrojar dos veces la moneda

Resultados posibles A	Probabilidad de ocurrencia B	Numero de caras C
$H_1 H_2$	$P(H_1)P(H_2) = (0.5)(0.5) = 0.25$	2
$H_1 T_2$	$P(H_1)P(T_2) = (0.5)(0.5) = 0.25$	1
$T_1 H_2$	$P(T_1)P(H_2) = (0.5)(0.5) = 0.25$	1
$T_1 T_2$	$P(T_1)P(T_2) = (0.5)(0.5) = 0.25$	0

En la columna B de la tabla esta la probabilidad de cada resultado. Es bastante fácil calcular estas probabilidades puesto que se considera que el resultado del primer lanzamiento es independiente del resultado del segundo. Por lo tanto, las probabilidades indicadas en la columna B están formadas por las probabilidades del suceso que ocurra en el primer lanzamiento multiplicada por la probabilidad del suceso que ocurra en el segundo. En la columna C se presentan los valores de la variable aleatoria *numero de caras*.

La función de la masa de probabilidad puede ser descrita directamente con base en la información de la tabla. La probabilidad de que la variable aleatoria *numero de caras* tome el valor 2 es 0,25. La probabilidad de que no salgan caras es también 0,25. Puesto que los sucesos $H_1 T_2$ y $T_1 H_2$ son mutuamente exclusivos, es necesario sumar sus probabilidades para encontrar la probabilidad de que la variable aleatoria *numero de caras* sea igual a 1. Por lo tanto, la probabilidad será 0,5. La función de masa de probabilidad que describe la probabilidad de obtener determinado número de caras en dos lanzamientos de una moneda se muestra en la siguiente figura.



Para cualquier función de masa de probabilidad la suma de las probabilidades de todos los resultados posibles debe ser igual a 1 y la probabilidad de cada resultado individual debe ser mayor o igual a 0 y menor o igual a 1. Por lo tanto, para la variable aleatoria x

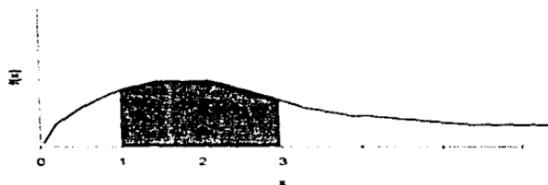
$$0 \leq P(x) \leq 1 \quad \sum_x P(x) = 1$$

en donde, \sum_x indica la sumatoria de todos los posibles valores de x .

Cuando una variable aleatoria es continua, se utiliza la *función de densidad de probabilidad* para relacionar la probabilidad de un suceso con un valor o intervalo de valores de la variable aleatoria. Se presenta en la figura siguiente una función de densidad para una variable aleatoria x .



Función de densidad de probabilidad



La probabilidad de que ocurra un suceso viene dada por el área bajo la función de densidad de probabilidad para aquellos valores de x incluidos en el suceso. Por ejemplo, en la figura, el área sombreada bajo la curva para $1 \leq x \leq 3$ representa la probabilidad de que la variable aleatoria x ocurra dentro del dicho intervalo. Para satisfacer los axiomas de la probabilidad, una función de densidad debe tener las siguientes propiedades:

$$0 \leq f(x) \leq \infty \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

La probabilidad de que ocurra un suceso dentro del intervalo que va desde a hasta b se define como:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$



6.2.2.- MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL Y DE DISPERSIÓN (MEDIA Y VARIANZA)

Hay dos parámetros que sirven para caracterizar la función de distribución de probabilidad. El primero de ellos es la *media o valor esperado* de la variable aleatoria. Para una variable aleatoria discreta x el valor esperado como

$$E(x) = \sum_i x_i P(x_i)$$

Para una variable aleatoria continua x el valor esperado de tendencia se define como

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

La medida de una distribución de probabilidad es una medida de tendencia central o concentración de masa de la distribución

El segundo parámetro es una medida de la dispersión de la distribución de probabilidad y se le conoce como *varianza*. Para cualquier variable aleatoria la varianza se define como:

$$Var(x) = E\{[x - E(x)]^2\} = E(x^2) - [E(x)]^2$$

Para variables aleatorias discretas se tiene que:

$$E(x^2) = \sum_i x_i^2 P(x_i)$$

$$[E(x)]^2 = \left[\sum_i x_i P(x_i) \right]^2$$

Para variables aleatorias continuas:



$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

$$[E(x)]^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx \right]^2$$

El cálculo de la medida de la varianza para la función de masa de probabilidad de la figura anterior, con la variable aleatoria *número de caras* N , da los siguientes resultados

$$E(N) = \sum NP(N) = 0(0.25) + 1(0.50) + 2(0.25) = 1$$

$$Var(N) = e(N^2) - [E(N)]^2 = 0^2(0.25) + 1^2(0.50) + 2^2(0.25) - 1^2 = 0.5$$

Considérese que el siguiente juego es para ver la forma en que estos pueden ser de utilidad en la toma de decisiones. Se arroja una moneda dos veces. Si no sale cara se pierden \$100, si sale una cara se ganan \$40, y si salen dos caras se ganan \$80. ¿Cuál es el valor esperado de la variable aleatoria G , ganancia en el juego?

$$E(G) = -\$100(0.25) + 40(0.50) + 80(0.25) = \$15$$

Si alguien pudiera participar muchas veces en este juego, las ganancias esperadas o ganancias promedio por apuesta, a largo plazo será de aproximadamente de \$15. Puesto que el valor esperado refleja la esperanza a largo plazo de sucesos inciertos, se le utiliza ampliamente como base de comparación para alternativa de inversión.



6.3.- LA TOMA DE DECISIONES BAJO RIESGO (PROBABILIDAD CONOCIDA)

En muchos problemas de decisión quien ha de tomarlas cree que tiene suficiente información para describir razonablemente, mediante distribuciones de probabilidad, los parámetros de los problemas determinísticos. Por ejemplo, la decisión de adquirir un activo puede depender de la duración de su vida, su costo inicial, sus ingresos, su valor de salvamento y la tasa de interés utilizada para considerar el valor del dinero en el tiempo. Generalmente, los valores de estos parámetros no son conocidos con certeza hasta la terminación del proyecto. Si existe información suficiente para activos similares, quien debe tomar la decisión puede encontrar utilizar la información disponible para formar funciones de distribución de probabilidad para estas variables aleatorias. **La técnica de tomar decisiones en los casos en que es posible asignar probabilidades a sucesos futuros inciertos, es conocida generalmente como toma de decisiones bajo riesgo.**

6.3.1.- TOMA DE DECISIONES CON BASE EN LA MEDIA

Como ya se sabe, es posible calcular el valor esperado de una variable aleatoria si se conoce su función de masa o su función de densidad. Si se utilizan estas distribuciones de probabilidad para describir la utilidad o costo de una inversión como variable aleatoria, los valores esperados de estos parámetros pueden suministrar una base razonable para la comparación de alternativas. El costo o el beneficio esperado de una propuesta de inversión refleja el costo o beneficio que se obtendrían a largo plazo si la inversión se repitiera muchas veces su distribución de probabilidad permaneciera constante. Por tanto, cuando se hace gran número de inversiones puede ser razonable tomar la decisión con base en los efectos promedio, o a largo plazo, de cada propuesta. Desde luego, es necesario reconocer las limitaciones de utilizar el valor esperado como base de comparación en el caso de proyectos únicos, o poco comunes, en los que los efectos a largo plazo son menos significativos.



Como la mayoría de las industrias y gobiernos tienen generalmente larga vida, el valor esperado como base de la comparación parece ser un método razonable para evaluar las alternativas de inversión bajo riesgo. Los objetivos a largo plazo de tales organizaciones pueden ser, por ejemplo, la maximización de los beneficios o la minimización de los costos esperados. Si se desea incluir en este tipo de análisis el efecto del valor del dinero en el tiempo, todo lo que se requiere es expresar los beneficios o costos esperados como valores presentes esperados, valores anuales equivalentes esperados, o valores futuros esperados.

6.3.2.- LA UTILIZACIÓN DE LAS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDADES EN LA COMPARACIÓN DE ALTERNATIVAS.

Hasta el momento las técnicas discutidas se han basado en el valor esperado como fundamento para la consideración de inversiones bajo riesgo. En muchas situaciones de decisión es deseable conocer no solamente el valor esperado de la base de comparación, sino tener también una medida de la dispersión de su distribución de probabilidad. La varianza cumple este propósito y es de gran importancia.

Se pueden tomar decisiones más inteligentes al disponer de la información adicional suministrada por la distribución de probabilidad. Desde luego, al analizar experimentado deberá balancear económicamente el costo desarrollar información para la toma de decisiones, con el ahorro que se espera obtener mediante una mejor selección de alternativas. Por lo tanto, puede no ser económico utilizar técnicas muy sofisticadas para la consideración de proyectos pequeños mientras que, por otro lado, el uso de las mismas puede producir ganancias substanciales cuando se analizan gastos de mayor envergadura.



6.4.- ¿ CÓMO USAR ÁRBOLES DE DECISIONES EN LA EVALUACIÓN DE ALTERNATIVAS ?

Es deseable admitir en muchos problemas de decisión que las decisiones futuras están afectadas por acciones que se realizan en el presente. Con mucha frecuencia se toman decisiones sin consideración adecuada de sus efectos a largo plazo. Como resultado, algunas decisiones que inicialmente parecían buenas ponen al analista en una posición desfavorable respecto a sus decisiones futuras. **Para aquellos problemas de decisión en los que el análisis de las secuencias es importante, y cuando se conocen las probabilidades de sucesos futuros, generalmente la utilización de diagramas de flujo de decisiones o árboles de decisión es una técnica muy efectiva.**

Este diagrama constituye un gran instrumento de análisis, debido a que permiten examinar problemas con gran complejidad, fraccionándolos en subproblemas más pequeños y más sencillos que facilitan la identificación de la estrategia óptima de decisión. Se usa esta expresión porque en este caso no se trata de una decisión única, como por ejemplo emprender el proyecto o no, sino de una secuencia de decisiones que se deben de ir adoptando a medida que se desarrolla el proyecto a lo largo de su horizonte de tiempo.

El nombre de árbol es un reflejo de la representación gráfica del proceso decisorio, este tiene nodos de decisión y ramas que simbolizan los caminos por los cuales transita el proyecto.

A continuación se explica como analizar un árbol de decisión que tiene alternativas a un problema de decisión X junto con los posibles sucesos (demanda) que se pueden presentar.

Desde el punto inicial, a la izquierda, y al moverse hacia la derecha, el árbol de decisiones la vida del proyecto. Los nudos del árbol que sirven de puntuación de partida a



los distintos brazos son nudos de decisiones, o nudo de posibilidad. O Los brazos que empiezan en un nudo de decisión representan cursos de acción alternativos sobre los cuales se debe decidir. Por otro lado, los brazos con nudo de posibilidad como punto de partida representan eventos de posibilidad que simbolizan resultados del curso natural de los acontecimientos. La ocurrencia de un evento de posibilidad se puede considerar como una variable aleatoria sobre la cual el analista no tiene ningún control. Generalmente, los sucesos de posibilidad son gobernados por fuerzas exógenas como, por ejemplo, el tiempo, el sol, el sitio de mercadeo, etc.

En esta forma, una secuencia de brazos que comienza a la izquierda y termina a la derecha representa una de las posibles secuencias de sucesos que pueden resultar como efecto de los pasos dados por el responsable de la decisión y del curso impredecible de los acontecimientos.

Una vez determinada la estructura del árbol de decisión, la siguiente tarea consiste en obtener los datos de costo e ingresos asociados a cada una de las alternativas, y sus posibles resultados. Estas cantidades deben ser escritas en los brazos correspondientes del árbol.

En el árbol de decisión todos los costos se muestran como valores negativos y los ingresos como cantidades positivas.

Como los costos e ingresos se presentan en diferentes puntos en el tiempo durante el periodo de estudio, es adecuado convertirlos a sus valores equivalentes, a la tasa mínima atractiva de rendimiento que convenga al caso.

Una vez determinado el valor actual de costos e ingresos es posible sumar las cifras obtenidas en cada secuencia, comenzando siempre en el primer nudo de izquierda a derecha. Esta cantidad se coloca en el extremo derecho del brazo que corresponda al evento. El procedimiento se repite para cada secuencia posible.



Una vez obtenida la información sobre costos e ingresos de la forma indicada, es necesario colocar las probabilidades de los sucesos que dependen del azar en los nudos de posibilidad del árbol de decisiones.

Cuando sea necesario calcular las probabilidades de un árbol de decisión, es conveniente construir primero el árbol de la naturaleza, es decir, construir un árbol que indique los posibles desarrollos impredecibles de la naturaleza. En este árbol todos los nudos son nudos de posibilidad. Al comienzo de cada brazo se coloca la probabilidad de seguirlo dado al estar situados en el nudo que lo precede. En cada extremo derecho del árbol se coloca la probabilidad de que ocurra la secuencia de sucesos representada por el brazo correspondiente. Estas probabilidades se calculan multiplicando las probabilidades de cada uno de los brazos que conducen desde el nudo inicial hasta el extremo.

A continuación se colocan estas probabilidades en los nudos de posibilidad sobre los brazos correspondientes. Ahora es posible resolver el árbol de decisión para definir cual alternativa se debe escoger. La técnica de solución es relativamente sencilla y se le conoce como el procedimiento de *marcha atrás*. Comenzando con los extremos de los brazos del árbol de decisión, y marchando atrás hacia el nudo inicial del mismo se utilizan las dos reglas que escribo a continuación.

1. Si el nudo es un nudo de posibilidad calcúlese el valor *esperado* del mismo con base en los valores *encontrados hacia atrás* sobre los nudos situados a la derecha del nudo en consideración.
2. Si el nudo es de decisión *seleccíonese* la utilidad máxima o el costo mínimo con base en los nudos situados a la derecha del nudo en consideración.

Como la consideración o análisis de cada nudo se hace comenzando por la derecha del árbol de decisión, los valores calculados de acuerdo a las reglas 1 y 2 se deben situar



exactamente a la derecha del nudo, y envolverlos en un círculo. Marchando hacia atrás por el árbol de decisión se pueden eliminar algunas alternativas y, por lo tanto, el procedimiento es eficaz aun para arboles de decisión de gran tamaño.

6.5.- TOMA DE DECISIONES BAJO INCERTIDUMBRE (PROBABILIDAD DESCONOCIDA)

En la sección 6.3 se trataron las decisiones bajo condiciones de riesgo. En estas, se conocen las probabilidades de ocurrencia de cada una de las alternativas. En la presente sección se estudiarán las decisiones bajo condiciones de incertidumbre, en las cuales se desconoce la probabilidad de ocurrencia de los resultados, además de que los resultados son los mismos para todas las alternativas. Dado entonces es más conveniente representar la situación mediante matrices como la que se muestra a continuación.

<i>R</i>		<i>Alternativas</i>			
		A_1	A_2	...	A_n
<i>e</i>	R_1	V_{11}	V_{12}	...	V_{1n}
<i>s</i>		V_{21}	V_{22}	...	V_{2n}
<i>u</i>	R_2
<i>l</i>	
<i>t</i>	R_3
<i>a</i>	
<i>d</i>	R_m	V_{m1}	V_{m2}	...	V_{mn}
<i>o</i>	
<i>s</i>					

En esta matriz, las columnas representan las diferentes alternativas (A_i), los renglones corresponden a los posibles resultados (R_j) y el elemento V_{ij} representa el valor asociado con la ocurrencia del resultado R_j , dado que se elija la alternativa A_i .



Existe una gran variedad de criterios para elegir alternativas bajo condiciones de incertidumbre. Los más conocidos son

- Criterio de maximización del mínimo valor (maxmin)
- Criterio de maximización del máximo valor (maxmax)
- Criterio de compromiso
- Criterio de arrepentimiento
- Criterio de Laplace

6.5.1.- CRITERIO DE MAXIMIZACIÓN DEL MÍNIMO VALOR (MAXMÍN)

La regla de decisión maxmin se basa en un enfoque pesimista de los resultados del azar. Es decir, la utilización de esa regla implica la creencia de que la naturaleza va a presentar lo peor. Por tanto, esta regla selecciona la alternativa que ofrezca lo mejor entre los peores resultados. Para la matriz dada, *la regla establece que se seleccionen los valores mínimos de cada fila.*

6.5.2.- CRITERIO DE MAXIMIZACIÓN DEL MÁXIMO VALOR (MAXMAX)

Esta regla está basada sobre el punto de vista optimista de que se presentará la mejor situación para la alternativa aceptada. *La regla estipulada que se seleccionen los valores máximos en cada fila de la matriz.*



6.5.3.- CRITERIO DE COMPROMISO O DE HURWICZ

Puesto que las dos reglas anteriores, son o extremadamente pesimistas, o extremadamente optimistas, se necesita una **regla de decisión intermedia**. Se llega a puntos entre esos dos extremos permitidos que el analista seleccione un *índice de optimismo*, α , tal que $0 \leq \alpha \leq 1$.

Cuando $\alpha=0$ el analista es pesimista sobre el comportamiento de la naturaleza, mientras que cuando $\alpha=1$ hay optimismo sobre el comportamiento de la misma.

Una vez seleccionada la regla de Hurwicz indica que se calcule la expresión

$$\alpha \left[\max_i (V_{ij}) \right] + (1 - \alpha) \left[\min_j (V_{ij}) \right]$$

para cada alternativa, en donde V_{ij} es el pago correspondiente a la alternativa i y a la situación j . *La alternativa que tenga el valor máximo será considerada como más favorable.*

6.5.4.- CRITERIO DE ARREPENTIMIENTO

Esta regla se basa en la idea de que un analista desea evitar cualquier clase de **arrepentimiento sobre su decisión**. Si selecciona una alternativa y la situación que se presenta es tal que hubiera podido obtener mejores resultados seleccionando otras, entonces se *arrepiente* de su decisión original. Dichos arrepentimientos se pueden medir con la diferencia entre los mejor que podrían obtener con un conocimiento perfecto de los estados futuros, y el pago recibido de una alternativa y un estado futuro en particular. Conociendo el arrepentimiento para cada alternativa y estado futuro, el analista determina entonces el **máximo arrepentimiento posible** que se podría presentar en cada alternativa. A continuación selecciona aquella alternativa que minimice su arrepentimiento máximo.



Para aplicar la regla mínima con arrepentimiento es necesario, en primer lugar, determina una *matriz de arrepentimiento*. Para cada situación (columna) se determina el pago máximo (o mínimo sin los pagos representan costos). En cada columna de la matriz de pago se representa cada pago del pago máximo para la misma columna. Al repetir este procedimiento para cada situación se obtiene la matriz de arrepentimiento.

Se determina el arrepentimiento máximo de cada alternativa seleccionando el valor máximo en cada fila y escribiendo dicho valor a la derecha de la matriz de arrepentimiento. *Posteriormente se selecciona a la alternativa que minimice el arrepentimiento máximo.*

6.5.6.- CRITERIO DE LAPLACE.

El uso de esta regla indica que el analista cree que cada estado futuro tiene la misma posibilidad de presentarse. Por tanto, cuando se utiliza esta regla, la **probabilidad de ocurrencia de cada estado futuro será $1/n$** , en donde n es el número de posibles situaciones futuras.

Para determinar la alternativa que se a de escoger se calcula el valor esperado, o el promedio de pagos de cada alternativa, con base en la matriz de pago.

El valor máximo indica que la alternativa es la mejor, de acuerdo a esta regla.

6.5.6.- RESUMEN

Presento estas reglas de decisión para ayudar a entender los tipos de técnicas que pueden servir de ayuda cuando no se tienen datos probabilísticos. El examen de los resultados de estas 5 reglas de decisión para la matriz resultante, indica que cada una de las alternativas cumple diferentes objetivos con diferentes grados de éxito. Por tanto, la selección de la regla de decisión adecuada para un problema en particular depende del punto



de vista y objetivos de quien debe tomar la decisión. De hecho, puede ser necesario en algunos casos desarrollar reglas de decisión que cumplan objetivos distintos de los cubiertos en las 5 reglas de decisión que acabamos de discutir.



CAPÍTULO 7

EVALUACIÓN FINANCIERA DE UN PROYECTO FICTICIO :



EVALUACIÓN FINANCIERA DE UN PROYECTO FICTICIO

El objeto de este capítulo es reunir todos los conceptos y parámetros que se han descrito a lo largo de este trabajo y desarrollar un ejemplo de análisis financiero de un proyecto ingenieril ficticio, para de esta forma demostrar la importancia que tienen las matemáticas financieras y la evaluación de proyectos dentro de la vida profesional del Ingeniero Civil

El ejercicio que a continuación se ejemplifica es uno de los que se resolvió previamente al final de los capítulos 3,4 y 5, pero ahora se determinaran todos los índices y se compararan directamente para ver la compatibilidad de cada uno de ellos con respecto a la conclusión a la que se llegue



Cierto tramo de una carretera de cuota esta en tan malas condiciones, ¿que se requiere su recubrimiento o su reubicación? Dado que la institución gubernamental no cuenta con recursos económicos, el tramo fue concesionado, la empresa que gana esta concesión tiene tres posibles ubicaciones, que son las que se tomarán en cuenta para decidir entre alguna de ellas y para su análisis se presentan tres alternativas. La ubicación presente esta designada como H, las dos nuevas ubicaciones posibles que acortaran la distancia entre los puntos terminales se designan como J y K. La ubicación K es un tanto mas corta que la J, pero implica una inversión considerablemente mayor para nivelación y estructuras. El estudio financiero para comparar las propuestas de las tres ubicaciones abarcara un periodo de 20 años y una tasa del 7%, que es la tasa minima de interes que se puede aplicar a un proyecto de uso publico.

La inversion inicial estimada que debe hacer la empresa seria de \$110 00 millones en la ubicacion H, de \$700 00 millones en la ubicacion J y de \$1,300 00 millones en la K. Si la ubicacion H se abandona ahora, no tendra ningun valor de rescate, tambien se supone que no habra ningun valor residual al final de los 20 años. Sin embargo debido a las vidas utiles estimadas de las obras que se construirán en J y K son mayores que el periodo de analisis de 20 años, los valores residuales se estiman al final de 20 años. Estos son \$300 00 millones para J, y \$550 00 millones para K. Los costos anuales de mantenimiento, tambien pagaderos por la empresa, se mantienen en \$35 00 millones para la ubicacion H, \$21 00 millones para la J y \$17 00 millones para la K.

Se preve que el transito en esta seccion de carretera aumentara en una cantidad uniforme cada año hasta el año 10, y que entonces continuara a un nivel constante hasta el año 20. No se espera que el volumen de transito dependa de esta decision sobre la ubicacion de la carretera. Para la ubicacion H, los ingresos anuales por concepto de peaje aplicables en el analisis financiero se estiman como de \$136 00 millones en el año 1, de \$142 00 millones en el año dos, y aumentaran \$6 50 millones cada año hasta llegar a \$194 50 millones en el año 10, de ahí en adelante, continuaran en \$195 00. Para la ubicacion J, que es mas corta, las estimaciones correspondientes son de \$175 00 millones para el primer año, aumentando \$7 50 millones al año, hasta llegar al año 10, y una cifra anual constante de \$225 00 millones de ahí en adelante. Para la ubicacion K, que es todavia mas corta, las cifras correspondientes son \$210 00 millones, \$10 00 millones y \$300 00 millones. No existe diferencias en las consecuencias para los usuarios que merezcan consideracion. Determinar cual de las tres ubicaciones es la mejor, segun los tres metodos estudiados: VPN, TIR y Relacion B/C.



Para poder entender mejor el comportamiento de el dinero a continuación se representa mediante una tabla el flujo que este tiene (en millones de pesos)

Año	Ubicación H		Ubicación J		Ubicación K	
	Inversión	Flujo \$	Inversión	Flujo \$	Inversión	Flujo \$
0	110		700		1.300	
1	35	136.0	21	175.0	17	210.0
2	35	142.5	21	182.5	17	220.0
3	35	149.0	21	190.0	17	230.0
4	35	155.5	21	197.5	17	240.0
5	35	162.0	21	205.0	17	250.0
6	35	168.5	21	212.5	17	260.0
7	35	175.0	21	220.0	17	270.0
8	35	181.5	21	227.5	17	280.0
9	35	188.0	21	235.0	17	290.0
10	35	194.5	21	242.5	17	300.0
11	35	195.0	21	225.0	17	300.0
12	35	195.0	21	225.0	17	300.0
13	35	195.0	21	225.0	17	300.0
14	35	195.0	21	225.0	17	300.0
15	35	195.0	21	225.0	17	300.0
16	35	195.0	21	225.0	17	300.0
17	35	195.0	21	225.0	17	300.0
18	35	195.0	21	225.0	17	300.0
19	35	195.0	21	225.0	17	300.0
20	35	195.0	21	525.0	17	850.0

Diagrama de flujo para la ubicación H, en millones de pesos

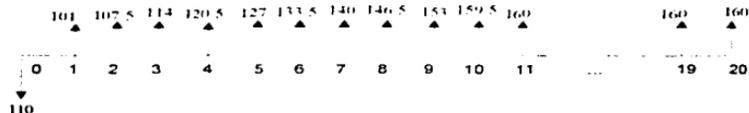




Diagrama de flujo para la ubicación J, en millones de pesos.

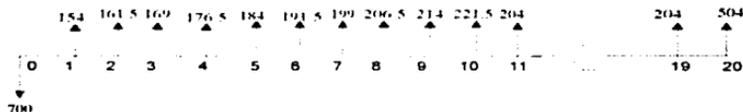
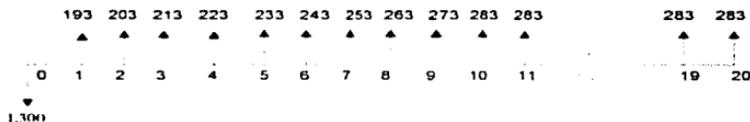


Diagrama de flujo para la ubicación K, en millones de pesos.



7.1-VALOR PRESENTE NETO

El Valor Presente Neto (VPN), es un indicador que comprende la actualización de los flujos del proyecto a lo largo del horizonte en evaluación y considera que todos los beneficios en relación a los costos deben ser comparados en el presente.

Después de entender y observar gráficamente el flujo del dinero, procedemos a calcular el VPN de cada ubicación, pero como nos podemos dar cuenta si quisieramos realizar este problema a mano sin el uso de la computadora nos tardaríamos horas ya que habría que sustituir muchos números. Dada la situación anterior únicamente sustituimos valores en el algoritmo incluido en MS Excel ver 7, para actualizar los flujos resultantes en beneficio y en inversiones, con la tasa de oportunidad de 7%, obteniendo un indicador para cada caso de.

Valor Presente Neto de la ubicación H

en millones de pesos

Resultado: 1.350 80



Valor Presente Neto de la ubicación J

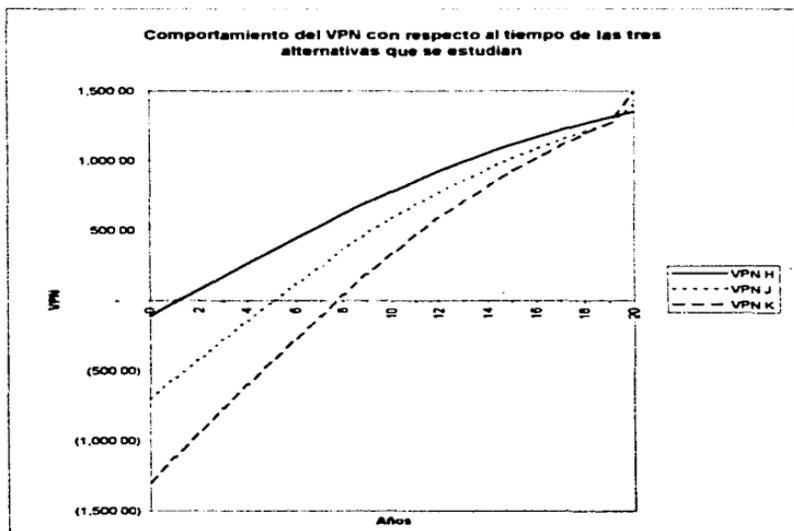
en millones de pesos

Resultado:
1,395.39

Valor Presente Neto de la ubicación K

en millones de pesos

Resultado:
1,485.27





7.2.- TASA INTERNA DE RETORNO

El indicador más usual para este tipo de análisis es la Tasa Interna de Retorno (TIR) que refleja el nivel de rentabilidad del proyecto durante el horizonte definido

Después de entender y observar gráficamente el flujo del dinero, procedemos a calcular la TIR, sustituyendo y dando solución a la ecuación siguiente

$$Q_n \left[\frac{1}{(1+i)^n} \right] + Q_{n-1} \left[\frac{1}{(1+i)^{n-1}} \right] + \dots + Q_1 \left[\frac{1}{(1+i)^1} \right] + Q_0 = 0$$

La TIR resulta ser una de las raíces positivas del polinomio anterior. Usando el algoritmo de MS Excel 7.0 se determina el valor de la TIR y que para los proyectos resulta de

Tasa Interna de Rentabilidad de la ubicación H

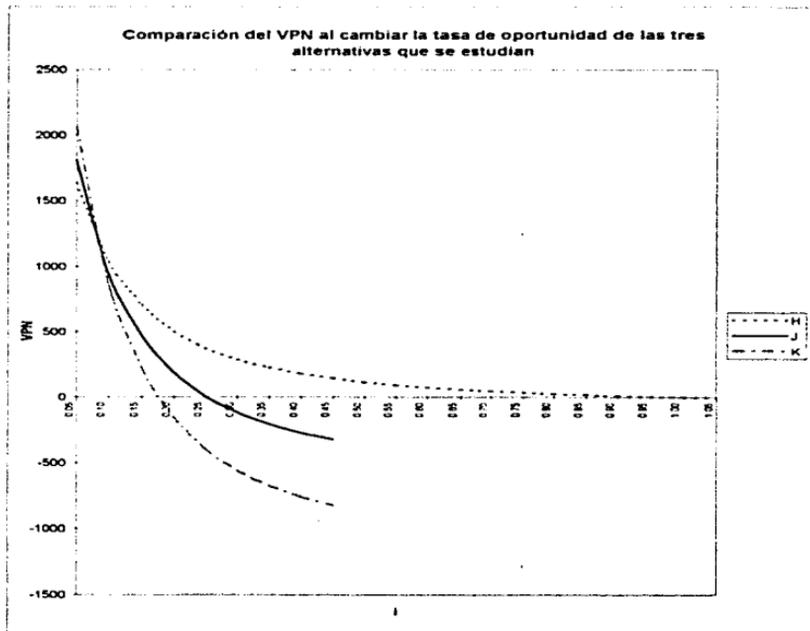
Resultado:	98%
------------	-----

Tasa Interna de Rentabilidad de la ubicación J

Resultado:	25%
------------	-----

Tasa Interna de Rentabilidad de la ubicación K

Resultado:	18%
------------	-----



**7.3.-RELACIÓN BENEFICIO - COSTO**

Complementando los indicadores de TIR y VPN, la relación beneficio/costo (B/C) se calcula con la siguientes expresión

Sustituyendo valores

$$i = 0.07$$

$$\frac{B}{C}(i) = \frac{VPN_{Ingresos}(i)}{VPN_{Egresos}(i)}$$

La relación B/C resulta ser para cada proyecto de
Relación Beneficio Costo de la ubicación H

Resultado:	3.81
------------	------

Relación Beneficio Costo de la ubicación J

Resultado	2.51
-----------	------

Relación Beneficio Costo de la ubicación K

Resultado	2.00
-----------	------

7.4.- PERIODO DE RECUPERACIÓN DE LA INVERSIÓN

El plano en que la suma de las disponibilidades del proyecto se iguala al monto invertido es para cada proyecto de:

Periodo de recuperación de la inversión de la ubicación H:

Resultado:	1 año
------------	-------

Periodo de recuperación de la inversión de la ubicación J:

Resultado:	5 años
------------	--------



Periodo de recuperación de la inversión de la ubicación K.

Resultado
8 años

Los resultados generalmente se dan redondeados en años y fueron obtenidos de la gráfica VPN con respecto al tiempo, según se puede apreciar

7.5.- RECOMENDACIONES

Al analizar todos los resultados y los diferentes índices que arrojaron los cálculos de cada proyecto, nos permite realizar una evaluación financiera y comparativa que nos facilita la toma de decisión

* Como podemos observar el VPN es relativamente semejante en las tres alternativas, pero la que arroja mayores beneficios es la alternativa K.

* En el caso de la TIR, en los tres casos, los índices que se obtuvieron son mayores que la tasa de oportunidad, es decir, el VPN es mayor que cero, y la mejor alternativa es la que tiene la TIR más alta que en este caso es H.

* Complementando los índices anteriores se determino la relación B/C, que en los tres casos es superior a uno, es decir, las tres alternativas son viables, pero únicamente hay que elegir la mejor alternativa, que es la que tiene la relación B/C más grande, que es la alternativa H

* Un índice más que se deduce de la gráfica de VPN, es el periodo de recuperación de la inversión, que nos indica cual es la alternativa que más rápido recupera su inversión, que en este caso es la H, la cual recupera la inversión en aproximadamente un año.

Se puede concluir que la alternativa más viable desde el punto de vista financiero es la alternativa H.



CAPÍTULO 8

CONCLUSIÓN :



CONCLUSIÓN

El objetivo fundamental del presente trabajo considero que se cumplió ampliamente, dado que explico teóricamente los metodos mas funcionales en este momento para realizar la evaluación financiera de proyectos y se demostro su uso con algunos ejercicios prácticos, aunque quiero hacer notar que en los proyectos de inversion, existe una coordinación estrecha entre los aspectos tecnicos, economicos y sociales, y los referentes a las finanzas y contabilidad, es decir, los aspectos financieros

Es importante aclarar que la integracion de los aspectos financieros maneja elementos y conceptos de la contabilidad, pero no es propiamente hacer contabilidad, pues ésta se aplica sobre resultados por ejercicio y el estudio del proyecto se basa en proyecciones las cuales están sustentadas en supuestos economicos y aspectos financieros, sobre todo para proyectos de nueva creacion

Los parametro que se determinan con estas proyecciones son fundamentalmente. *la inversión inicial, calculada en moneda nacional, el programa de inversiones mensual, semestral o anual y la aportación de capital y/o flujo de caja que retribuirá el proyecto al*



entrar en operación Estos datos, así como la determinación de la *tasa mínima atractiva de rendimiento* (i) que se va a usar para juzgar lo atractivo del proyecto son los elementos fundamentales de los cuales depende la veracidad de los índices que arrojen los métodos descritos en este trabajo

Es decir, para que estos métodos, sean confiables, deben de sustituirse en ellos información que tenga el suficiente soporte teórico y técnico, dado que de ello depende el bienestar de la empresa a largo y corto plazo

México, en estos momentos se encuentra sumergido en la crisis más grave de los últimos años, y para salir de ella es necesario establecer bases de desarrollo económico, que requieren llevar a cabo grandes inversiones en los sectores básicos y de infraestructura, es decir, realizar inversiones en obras para la generación de energía eléctrica, en obras de riego para aumentar la productividad del campo, en complejos industriales básicos, en obras de vivienda, en obras para el transporte eficiente de bienes y personas, etc

Por lo tanto, es de suma importancia tomar conciencia de la situación generada, con el objeto de aplicar los conocimientos y experiencias que nos aporta la Evaluación Financiera de Proyectos para buscar las mejores alternativas que mejoren el nivel de vida de los mexicanos

Finalmente, no debemos olvidar que es de suma importancia que se tenga conocimiento de los softwares computacionales existentes para la ingeniería civil, ya que son herramientas creadas y empleadas, tanto para ahorrar tiempo como para facilitar e incrementar la precisión de los cálculos, sin descartar que habrá ocasiones en que se tendrá que hacer por medio manuales.



BIBLIOGRAFÍA:

BIBLIOGRAFÍA**Diplomado en el Ciclo de Vida de los Proyectos de Inversión "Propedéutico"**

Nacional Financiera y La Organización de los Estados Americanos
Nacional Financiera, S N C , Primera Edición, Mexico 1992

Diplomado en el Ciclo de Vida de los Proyectos de Inversión "Formulación y Evaluación"

Nacional Financiera y La Organización de los Estados Americanos
Nacional Financiera, S N C , Primera Edición, Mexico 1992

Economía del Proyecto en Ingeniería

H G Thuesen, y W J Thuesen
Editorial Prentice Hall Internacional, España 1980

El Enfoque de Sistemas

Victor Gerez y Manuel Grijalva
Grupo Noriega Editores, Mexico 1980

Evaluación Financiera de proyectos de Inversión

Arturo Infante Villareal
Grupo Editorial Norma, Decima reimpression, Colombia 1994

Guía para la Formulación y Evaluación de Proyectos de Inversión

Nacional Financiera y La Organización de los Estados Americanos
Nacional Financiera, S N C , Primera Edición, Mexico 1995.

**Ingeniería Económica**

Curso de Valuación, Instituto Mexicano de Valuación, A. C.
Asociación de Institutos Mexicanos de Valuación, México

Ingeniería Económica

James L. Riggs
Representación y Servicios de Ingeniería S. A. México 1983

Inversión en Bienes Raíces

Dr. Dominique Achour y Dr. Gonzalo Castañeda
Grupo Noriega Editores, Primera Edición, México 1992

Matemáticas Financieras

Oaxaca L., Sánchez B.
F. E. S. Cuautitlan, U. N. A. M., Segunda Edición, México

Matemáticas Financieras

Linciyán Portus Govinden
Mc Graw Hill, Tercera Edición, México 1990

Matemáticas Financieras (Notas)

Luis Fermín Cuellas Ulloa
BANOBRAS, México 1994

Matemáticas Financieras

Juan Antonio Gómez Velázquez
Colegio de Ingenieros Civiles de México, Sociedad de Ingenieros Civiles Valuadores
México 1996

Matemática Valuatoria "Avalúo por Capitalización de Rentas"

Juan Antonio Gómez Velázquez
Instituto Mexicano de Valuación Valle de Anahuac A. C. Agosto 1995.

Pronósticos en los Negocios

John E. Hanke, Arthur G. Reitsch
Prentice Hall Hispanoamericana, S. A. Quinta edición, México 1996.

Principios de Ingeniería Económica

Eugene L. Grant, W. Grant Ireson, Richard S. Leavenworth
C. E. C. S. A., Sexta Edición, México 1980.



Probabilidad y Estadística

Ronald E. Walpole y Raymond H. Myers
Mc Graw Hill, Cuarta Edición, Mexico 1992

Running Guía Completa de microsoft Excel 5 para Windows.

The Cobb Group con Mark Dodge, Chris Kinata y Craig Stinson
Mc Graw Hill, Primera Edición, España 1995

Taller de Matemática Valuatoria, Alternativas para Valorar un Proyecto de Inversión.

Juan Antonio Gomez Velazquez
Mercantil Probrusa, Mexico 1995