

125
391



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

ANALISIS DE CONFIABILIDAD DE
EDIFICIOS SOMETIDOS A TORSION
POR SISMO

TESIS PROFESIONAL
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO CIVIL
P R E S E N T A
CARLOS GUILLERMO VILLARREAL ESQUIVEL

DIRECTOR DE TESIS: DR. G. MOISES ARROYO CONTRERAS



MEXICO, D. F.

1997

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA
DIRECCIÓN
60-1-062/96

Señor
CARLOS GUILLERMO VILLARREAL ESQUIVEL
Presente.

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor **ING. GUADALUPE MOISES ARROYO CONTRERAS**, que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de **INGENIERO CIVIL**.

"ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD DE EDIFICIOS SOMETIDOS A TORSIÓN POR SISMO"

- INTRODUCCION**
- I. ANÁLISIS MATRICIAL SIMPLIFICADO DE EDIFICIOS EN EL ESPACIO**
 - II. ANÁLISIS ELASTOPLÁSTICO DE SISTEMAS ESTRUCTURALES PLANOS, CONSIDERANDO INTERACCIÓN DE ESFUERZOS**
 - III. OBTENCIÓN DE LOS ESTADOS LÍMITES PLÁSTICOS DE EDIFICIOS EN EL ESPACIO SOMETIDOS A TORSIÓN POR SISMO**
 - IV. MODELO DE CONFIABILIDAD**
 - V. EJEMPLO DE APLICACIÓN**
 - VI. CONCLUSIONES**

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, a 12 de abril de 1996.
EL DIRECTOR.


ING. JOSÉ MANUEL COVARRUBIAS SOLÍS

JMCS/GMP*jbr

CONTENIDO

I. ANALISIS MATRICIAL SIMPLIFICADO DE EDIFICIOS EN EL ESPACIO.

I.1 Introducción.

I.2 Método de Rigideces

- I.2.1 Determinación de la matriz de rigidez de un elemento en el plano, sometido a flexión, cortante y carga axial.
- I.2.2 Metodología para la aplicación del método de rigideces.
 - I.2.2.a Información básica.
 - I.2.2.b Vectores y matrices estructurales.
 - I.2.2.c Rotación de vectores.
 - I.2.2.d Matriz de rigidez de un elemento en coordenadas locales y globales
 - I.2.2.e Ensamble de la matriz de rigidez del sistema estructural.
 - I.2.2.f Obtención de desplazamientos del sistema estructural y fuerzas internas de los elementos.

I.3 Análisis tridimensional simplificado.

- I.3.1 Procedimiento para la evaluación de la matriz de rigidez lateral de cada marco plano.
- I.3.2 Obtención de los desplazamientos horizontales de cada marco en función de los desplazamientos de las losas.
- I.3.3 Obtención de la matriz de rigidez tridimensional simplificada.
- I.3.4 Obtención de los desplazamientos y fuerzas de cada marco.
- I.3.5 Obtención del centro de torsión, centro de cortante, excentricidades y fuerzas de diseño.
 - I.3.5.a Obtención del centro de torsión.
 - I.3.5.b Obtención del centro de masa.
 - I.3.5.c Obtención del centro de cortante.
 - I.3.5.d Obtención de las excentricidades de diseño.
 - I.3.5.e Obtención de las fuerzas de diseño.

I.4 Comentarios.

II. ANALISIS ELASTOPLÁSTICO DE SISTEMAS ESTRUCTURALES PLANOS.

II.1 Introducción al análisis elastoplástico.

- II.1.1 Articulaciones plásticas.

II.2 Procedimiento para la realización de análisis elastoplásticos en sistemas estructurales.

- II.3 Análisis elasto-plástico de sistemas estructurales planos, con elementos sujetos a efectos de flexión pura.
 - II.3.1 Criterio de falla de una barra sometida a flexión pura.
 - II.3.2 Matriz de rigidez reducida y vector de fuerzas residuales equivalentes.
 - II.3.3 Expresiones para los estados de seguridad límite de los elementos del sistema estructural.
 - II.3.4 Criterio de estado límite de un sistema estructural formado por barras a flexión.

- II.4 Análisis elasto-plástico de sistemas estructurales planos, con elementos sujetos a efectos de esfuerzos combinados.
 - II.4.1 Criterio de falla de una barra sujeta a esfuerzos combinados.
 - II.4.2 Cálculo de la rigidez tangente(matriz de rigidez reducida) y de las fuerzas residuales equivalentes, aplicadas en los nudos.
 - II.4.3 Expresiones para los estados de seguridad límite de las secciones de los elementos del sistema estructural.
 - II.4.4 Criterio de estado límite del sistema estructural.

II.5 Comentarios

III. OBTENCIÓN DE LOS ESTADOS LÍMITES PLÁSTICOS DE EDIFICIOS EN EL ESPACIO SOMETIDOS A TORSIÓN POR SISMO.

- III.1 Introducción.
- III.2 Metodología para los análisis al límite plástico de edificios tridimensionales.
 - III.2.1 Obtención de los vectores de fuerzas residuales laterales.
 - III.2.2 Obtención de la matriz de rigidez tridimensional del sistema y fuerzas laterales totales.
 - III.2.3 Obtención de los desplazamientos y fuerzas laterales en los marcos.
- III.3 Metodología para la obtención de las funciones de estado límite plástico de estructuras en el espacio tipo edificio.
- III.4 Comentarios.

IV. MODELO DE CONFIABILIDAD.

- IV.1 Confiabilidad de sistemas estructurales.
- IV.2 Evaluación de la probabilidad de falla de un sistema, usando simulación Monte-Carlo.
 - IV.2.1 Modelo mecánico.
 - IV.2.2 Modelo de confiabilidad.
 - IV.2.2.a Sistema en serie.
 - IV.2.3 Algoritmo de simulación.
- IV.3 Conclusiones.

V. EJEMPLO DE APLICACIÓN.

V.1 Datos del problema.

V.2 Fuerzas sísmicas aplicadas al sistema.

V.3 Resultados.

- V.3.1 Mecanismos críticos.
- V.3.2 Funciones de estado límite.
- V.3.3 Probabilidades de falla.

VI. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

REFERENCIAS.

ANEXO 1. OBTENCIÓN DE FUERZAS Y CORTANTES DEBIDOS A SISMO MEDIANTE EL MÉTODO ESTÁTICO.

ANEXO 2. MANUAL DE UTILIZACIÓN DEL PROGRAMA DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL.

ANEXO 3. DISCO QUE CONTIENE EL PROGRAMA DE COMPUTADORA Y ARCHIVOS DE DATOS DEL EJEMPLO.

INTRODUCCIÓN

El análisis estructural tiene como objetivo el representar la respuesta o comportamiento de una estructura sometida a diversas solicitaciones (cargas). Para ello, es necesario adoptar modelos que tomen en cuenta las características físicas de la estructura, las magnitudes y direcciones de las fuerzas a las que se somete, así como el comportamiento de las mismas. El modelo de comportamiento está basado en diferentes hipótesis de comportamiento ideal, y el objetivo es que dichas hipótesis se aproximen razonablemente al comportamiento real de los materiales. Es claro que mientras más tratan de ajustarse los modelos de comportamiento de las estructuras a la realidad, más complicado es el manejo de ellos. Por lo general se acostumbra para fines prácticos, en la mayoría de los análisis usar un modelo de comportamiento de los materiales elástico perfecto, es decir, que las deformaciones de los materiales dependan linealmente de las fuerzas a las que se sometan (Ley de Hooke).

Un modelo que se aproxima mejor al comportamiento real de ciertos materiales es el modelo de comportamiento elastoplástico, en el cual la respuesta, en cuanto a desplazamientos, es lineal (comportamiento elástico) hasta cierto límite, llamado límite de fluencia, posteriormente la deformación crece sin que haya un incremento de carga (comportamiento plástico), etapa en la que se considera la plastificación o falla del material, el cual sigue teniendo la resistencia última a pesar de seguir deformándose. Este comportamiento se puede utilizar en el análisis de estructuras, con la ventaja que al llegar ciertas secciones de una estructura al límite de fluencia (falla) no se considera que la estructura falla en su conjunto sino que a través de diferentes modelos e hipótesis se puede plantear un nuevo análisis de la estructura que determine el efecto que producen las diferentes secciones falladas o plastificadas de la estructura sobre las secciones que se mantienen en su etapa elástica (redistribución de esfuerzos). De esta manera se realizan los análisis al límite plástico, es decir realizar análisis elastoplásticos en varias etapas lineales para determinar la falla de la estructura en su conjunto, basándose en criterios de falla plástica de la misma. Además permite deducir funciones de estado límite de la estructura, las cuales se establecen como una combinación lineal de las resistencias que forman parte de la estructura, y de las fuerzas a las que esta sometida.

El presente trabajo tiene como objetivo plantear una metodología simplificada para realizar análisis estructurales de tipo elastoplástico de estructuras tipo edificio sometidas a efectos de torsión producidos por la acción del sismo. Este metodología además permite deducir las funciones de estado

límite del sistema estructural asociadas a los mecanismos plásticos identificados, con las cuales es posible determinar mediante métodos probabilísticos el grado de seguridad de un sistema estructural.

El trabajo está basado principalmente en el método de rigideces para análisis de sistemas estructurales con comportamiento lineal, el cual permite un manejo matricial de las resistencias, fuerzas y desplazamientos de la estructura en estudio; además resulta ventajoso para ser sistematizado a modo de programas de cómputo. Este método se presenta a manera de recordatorio en el capítulo uno.

La aplicación del método de rigideces permite deducir un método de análisis tridimensional simplificado para estructuras del tipo edificio formadas con marcos planos, unidos entre sí por sistemas de piso muy rígidos (generalmente losas macizas). El método está basado en la obtención de una matriz de rigidez tridimensional simplificada, la cual está referida a los desplazamientos de las losas de cada uno de los niveles, desplazamientos que pueden ser en tres direcciones (dos desplazamientos laterales y un giro, movimiento de cuerpo rígido). Dadas la matriz de rigidez tridimensional simplificada y las fuerzas laterales a las que está sometida la estructura (fuerzas generalmente producidas por sismo), se pueden obtener los desplazamientos de las losas, con ello deducir los desplazamientos y fuerzas de cada uno de los marcos por separado (que la fuerza sísmica produce). Este método se presenta en el capítulo uno.

En el capítulo dos se presenta la metodología general para la realización de análisis elastoplásticos de estructuras, considerando como criterio de falla la interacción de esfuerzos, y la aplicación para el caso de estructuras en el plano. El modelo mecánico utilizado permite considerar diferentes dominios de resistencia con o sin la interacción de la fuerza normal, del momento flexionante y de la fuerza cortante, definiendo los estados límites plásticos mediante diagramas linealizados. Además se presentan las expresiones para la obtención de las funciones de estado límite de las estructuras en estudio.

En el capítulo tres se integran los métodos de análisis lineal simplificado y de análisis elastoplástico de estructuras, para deducir un procedimiento simplificado de análisis elastoplástico de sistemas estructurales tipo edificio sometidos a torsión por sismo. Esta propuesta tiene la ventaja de (al ser un procedimiento simplificado) facilitar la interpretación de los resultados los resultados, ya que el sistema se considera formado con marcos planos y se puede estudiar cada marco en forma independiente.

Debido a la incertidumbre que se puede tener en el comportamiento de los elementos estructurales, en la fabricación de los materiales que los componen, en los métodos y modelos analíticos utilizados en el análisis y diseño de los mismos, o bien, la incertidumbre en la detección y cuantificación de las fuerzas a las que estará sometido el sistema estructural, en las últimas décadas se ha introducido el concepto de Confiabilidad de los sistemas estructurales. El objetivo de los análisis de confiabilidad es determinar mediante modelos probabilistas el grado de seguridad de un sistema estructural, considerando como variables aleatorias tanto las resistencias de los elementos que forman el sistema estructural como las fuerzas a las que éste está sometido. Es importante mencionar que es necesario conocer funciones que representen el estado de seguridad o estado límite de la estructura en estudio, las cuales se pueden obtener a partir de los análisis elastoplásticos. En el capítulo IV se presentan conceptos básicos de confiabilidad en sistemas estructurales, y la aplicación de éstos para ciertos casos particulares.

Cabe mencionar que paralelo a la realización de este trabajo se desarrolló un programa de computadora que permite sistematizar la metodología presentada en este trabajo (para los análisis estructurales al límite plástico). Este programa realizado en lenguaje FORTRAN 77, fue desarrollado en su etapa inicial por el director de la presente tesis (Dr. G. Moisés Arroyo), etapa en la cual era posible realizar análisis lineales y elastoplásticos de estructuras en el plano, tanto en forma directa, como en forma secuencial (paso a paso). Posteriormente en una segunda etapa de desarrollo, se programan módulos para la realización de análisis tridimensionales simplificados de edificios, y en una última etapa se procede a la programación de los algoritmos para la realización del análisis elastoplástico simplificado de edificios (ref. 14). Con este programa se realizaron los análisis del ejemplo de aplicación presentado en el capítulo V de este trabajo. En el Anexo 2 se incluye el manual de utilización de este programa, y el Anexo 3 consiste en un diskette que incluye el ejecutable del programa, algunos ejemplos, y los archivos utilizados para la realización del ejemplo de aplicación.



ANÁLISIS MATRICIAL SIMPLIFICADO DE EDIFICIOS EN EL ESPACIO

I.1 INTRODUCCIÓN.

Para la realización del análisis estructural de cualquier tipo de estructura existen diversos métodos, cada uno de ellos con sus ventajas y desventajas, dependiendo del tipo de estructura, de su importancia, de las cargas a las que se someterá, etc.

Hasta hace pocos años el tipo de método dependía en buena medida a la capacidad de cálculo del estructurista, misma que depende del equipo disponible por el mismo: regla de cálculo, calculadora electrónica, equipo de cómputo de las primeras generaciones, etc. Dada la escasa capacidad de éstos equipos o bien el difícil acceso a equipos más sofisticados, proliferaron en una época los llamados métodos aproximados, que partían de varias hipótesis simplificatorias que en algunos de los casos resultaban muy alejados de la realidad, y por ello se llegaba a tener errores de cálculo significativos que inferían directamente en los resultados y su posterior aplicación. Esto ha cambiado ya que un equipo de cómputo personal de capacidad regular es suficiente y, en general, no será rebasado por las necesidades de cálculo de las estructuras más comunes.

Es por esto que ahora toma mayor importancia la correcta elección del método de análisis, ya que con la gama de programas existentes en el mercado, el estructurista se vuelve un tanto ocioso pensando que las computadoras harán la mayor parte del trabajo y a veces se utilizan paquetes en los que no se conoce ni su funcionamiento, ni sus limitaciones, ni las hipótesis en las que están basados, con lo que se llega a una errónea interpretación y aplicación de los resultados obtenidos.

En general el método más socorrido es el llamado Método de Rigideces, en el cual conociendo las características geométricas y elásticas de los elementos que componen las estructuras se puede plantear una matriz de rigidez representativa de las mismas y con ella resolver un sistema con las fuerzas a las que está sometida obteniendo los desplazamientos de la estructura. Este método sirvió de base para métodos más avanzados como lo es el Método del Elemento Finito, el cual tiene la misma base, pero es más general y su campo es más amplio abarcando otras áreas como la geohidrología, la mecánica de suelos, termodinámica, etc.

En el presente capítulo, además de hacer una recapitulación del Método de Rigideces se presenta un método que a partir de éste permite hacer análisis para edificios en el espacio, mismo que fue desarrollado por el Dr. Julio E. Damy R. en el cual, suponiendo que la estructura se forma con marcos planos unidos entre sí con sistemas de piso, se pueden obtener los desplazamientos de cada entrepiso, tanto de traslación como de rotación ante fuerzas laterales (generalmente producidas por sismo), todo esto partiendo de las matrices de rigideces de los marcos planos que forman la estructura.

Este método, dado que toma en cuenta la rotación como un grado de libertad del entrepiso, permite tomar en cuenta el fenómeno de torsión, producido por la excentricidad existente entre el centro de torsión (dependiente principalmente de la resistencia de los elementos) y el centro de cortante (dependiente de la distribución de masas en la estructura), este último siendo el punto donde se aplica la fuerzas sísmicas. Además permite obtener los centros de torsión de las estructuras, y con ello poder amplificar las excentricidades entre éstos y los centros de cortante, amplificaciones que se establecen en el Reglamento de Construcciones del D.F.

Al final de este capítulo se hacen comentarios acerca de las ventajas y desventajas de éste método, así como de las posibles aplicaciones del mismo.

1.2 MÉTODO DE RIGIDECES.

El método de rigideces se utiliza para realizar los análisis estructurales de cualquier tipo de estructura, de la cual se tengan los datos de relación esfuerzo-deformación de los materiales que la componen, teniendo como condición que dicha relación sea lineal. En general se utiliza en estructuras formadas por elementos longitudinales del tipo barra, viga y columna, ya que estos elementos son muy utilizados en la construcción de una gran variedad de estructuras como son edificaciones, puentes, bodegas, etc. También es importante mencionar que el método de rigideces permite un manejo matricial del análisis, lo cual es muy útil para poder ser sistematizado y así programable en cualquier tipo de computadora y lenguaje, con la única limitación de la capacidad de memoria y de procesamiento del equipo que se utilice.

El término rigidez de una estructura se define como la fuerza necesaria para producirle un desplazamiento unitario, al encontrarse la estructura en un rango lineal, se puede plantear la ecuación:

$$K\{\delta\} = P \quad (1.2.1)$$

donde K es la rigidez de la estructura, δ el desplazamiento y P la fuerza a la que esta sometida, ya sea que éstos representen un solo valor o bien matrices. Esta ecuación es la base del método y es válida para toda la estructura o algunas de sus partes, por lo que es muy útil para encontrar las fuerzas internas de los elementos que componen la estructura. Es importante mencionar que la rigidez depende únicamente de los materiales y la geometría de la estructura, y no depende de las cargas a la que este sometida ni a los desplazamientos.

Para la aplicación del método se necesitan determinar las componentes de los desplazamientos que se desconocen, generalmente llamados grados de libertad, posteriormente se plantea una ecuación de equilibrio por cada una de éstos en función de las fuerzas externas conocidas y las fuerzas internas no conocidas, expresadas en términos de los desplazamientos, formándose un sistema de orden igual al número de grados de libertad. Una vez resuelto el sistema de ecuaciones igual al de la ecuación 1.2.1, que da como resultado el valor de los desplazamientos de la estructura, se pueden calcular los valores de las fuerzas internas de los elementos aplicando la ecuación 1.2.1 para cada uno de los elementos.

Es necesario conocer las denominadas matrices de rigideces de los elementos que componen la estructura por lo cual aquí se presenta la obtención de la matriz de rigidez generalizada para un elemento de sección constante (ref.1).

1.2.1. Determinación de la matriz de rigidez de un elemento en el plano sometido a flexión, cortante y carga axial.

Cabe mencionar que la flexibilidad de una estructura, es el inverso de la rigidez y se define como el desplazamiento que produce una fuerza unitaria. Esto es importante ya que para obtener los valores de rigidez de los elementos estructurales se utiliza el método de flexibilidades basado en el concepto de energía de deformación. Aquí presento el planteamiento de la matriz de rigidez de un elemento general sometido a fuerza axial, fuerza cortante y momento flexionante, suponiendo los valores de E (módulo de elasticidad o de Young), A (área de la sección transversal) e I (momento de inercia de la misma) como conocidos y constantes.

La energía de deformación para un elemento plano como el de la figura 1.2.1 se puede expresar como:

$$W = \int_0^l \left[\frac{N^2}{2EA} + \frac{k_1 V_y^2}{2GA} + \frac{M_z^2}{2EI_z} \right] dx \quad (1.2.2)$$

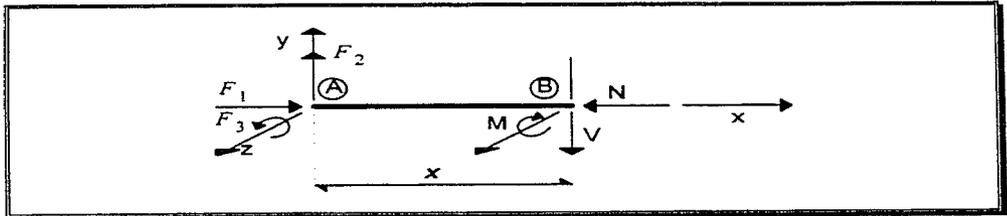


FIGURA 1.2.1.

$$\begin{aligned} N &= F_1 \\ V &= F_2 \\ M &= F_3 - F_2 x \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de N , V y M en la ecuación anterior, se obtiene:

$$W = \int \left[\frac{F_1^2}{2EA} + \frac{(F_3 - F_2 x)^2}{2EI_z} + \frac{k_1 F_2^2}{2GA} \right] dx$$

$$W = \int \left[\frac{F_1^2}{2EA} + \frac{F_3^2 - 2F_2 F_3 x + F_2^2 x^2}{2EI_z} + \frac{k_1 F_2^2}{2GA} \right] dx$$

Si despreciamos por el momento el término de deformación producida por cortante:

$$W = \int \left[\frac{F_1^2}{2EA} + \frac{F_3^2 - 2F_2 F_3 x + F_2^2 x^2}{2EI_z} \right] dx \quad (1.2.3)$$

De acuerdo al teorema de Castigliano:

$$\frac{\partial W}{\partial F_1} = \delta_1, \quad (1.2.4)$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial W}{\partial F_1} = \delta_1 = \int_0^l \frac{F_1}{EA} dx = \left[\int_0^l \frac{dx}{EA} \right] F_1$$

$$\frac{\partial W}{\partial F_2} = \delta_2 = \int_0^l \left[\frac{2F_2 x^2 - 2F_3 x}{2EI_z} \right] dx = \left\{ \int_0^l \left[\frac{x^2}{EI_z} \right] dx \right\} F_2 - \left[\int_0^l \frac{x dx}{EI_z} \right] F_3$$

$$\frac{\partial W}{\partial F_3} = \delta_3 = \int_0^l \left[\frac{2F_2 x + 2F_3}{2EI_z} \right] dx = - \left[\int_0^l \frac{x dx}{EI_z} \right] F_2 + \left[\int_0^l \frac{dx}{EI_z} \right] F_3$$

Expresando estas relaciones en forma matricial se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^l \frac{dx}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \int_0^l \frac{x^2}{EI_z} dx & - \int_0^l \frac{x dx}{EI_z} \\ 0 & - \int_0^l \frac{x dx}{EI_z} & \int_0^l \frac{dx}{EI_z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (1.2.5)$$

donde los valores de E , A e I son constantes, por lo tanto:

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI_z} & - \frac{L^2}{2EI_z} \\ 0 & - \frac{L^2}{2EI_z} & \frac{L}{EI_z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 & 0 \\ 0 & f_{22} & f_{23} \\ 0 & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = [f_{\mu\nu}] \{F\}$$

donde $[f_{44}]$ se puede denominar como la matriz de flexibilidades del nodo A .

Ahora bien, sabiendo que la rigidez es el inverso de la flexibilidad, se puede obtener la rigidez del nodo A invirtiendo su matriz de flexibilidades :

$$\begin{bmatrix} f_{11} & 0 & 0 \\ 0 & f_{22} & f_{23} \\ 0 & f_{23} & f_{33} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{f_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_{33}}{D} & -\frac{f_{23}}{D} \\ 0 & -\frac{f_{23}}{D} & \frac{f_{22}}{D} \end{bmatrix}$$

donde :

$$D = \text{Det} = f_{22}f_{33} - f_{23}^2 = \left(\frac{L^3}{3EI}\right) \cdot \left(\frac{L}{EI}\right) - \left(\frac{L^2}{2EI}\right)^2 = \frac{L^4}{12(EI)^2}$$

sustituyendo valores tenemos la matriz de rigidez del nodo A :

$$[K_{44}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Ahora, para obtener la matriz de rigidez total del elemento se plantean diversas ecuaciones de equilibrio en cada uno de los grados de libertad:

a) Se puede aplicar un desplazamiento unitario en B en la dirección de F_1 , para obtener las fuerzas en el nudo A y por equilibrio deducir las fuerzas en el nudo B (figura 1.2.2) :

$$\begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ F_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{11} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.2.6)$$

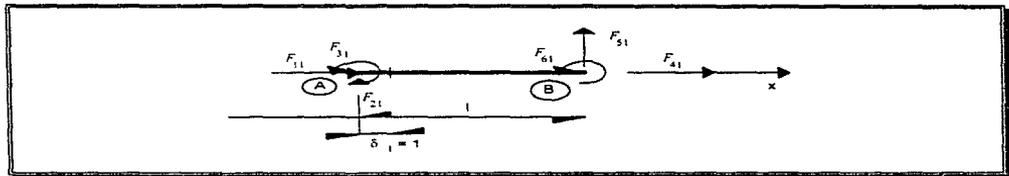


FIGURA 1.2.2

del sistema 1.2.6 tenemos que $F_{11} = k_{11}$ concluyendo de la figura 1.2.2 por equilibrio que :

$$F_{41} = -F_{11} = -k_{11}$$

b) De la misma manera, se aplica un desplazamiento unitario en A en la dirección de F_2 , para obtener las fuerzas en el nudo A y por equilibrio deducir las fuerzas en el nudo B (figura 1.2.3) :

$$\begin{Bmatrix} F_{12} \\ F_{22} \\ F_{32} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ k_{22} \\ k_{32} \end{Bmatrix}$$

por equilibrio :

$$F_{52} = -F_{22} = -k_{22} = -\frac{12EI}{L^3}$$

$$F_{62} = F_{22}x - F_{32} = \frac{12EI}{L^3}L - \frac{6EI}{L^2} = \frac{6EI}{L^2}$$

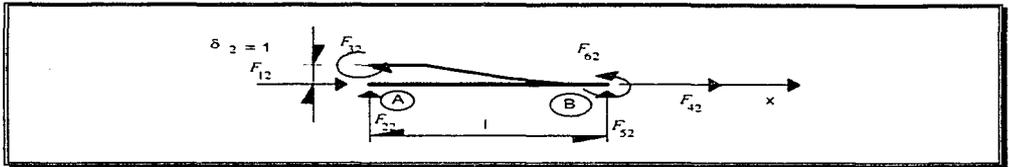


FIGURA 1.2.3

c) Finalmente, se aplica un desplazamiento unitario en A , en la dirección de F_3 , para obtener las fuerzas en el nudo A y por equilibrio deducir las fuerzas en el nudo B (figura 1.2.4) .

$$\begin{Bmatrix} F_{13} \\ F_{23} \\ F_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ k_{23} \\ k_{33} \end{Bmatrix}$$

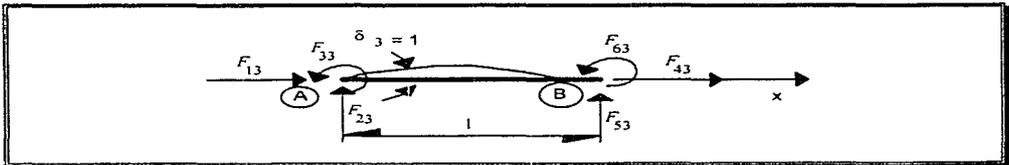


FIGURA 1.2.4

$$F_{o3} = F_{23}l - F_{33} = \frac{6EI}{L^2}L - \frac{4EI}{L} = \frac{2EI}{L}$$

dado que las matrices de rigideces son simétricas tenemos que :

$$k_{AB} = k_{BA} = \begin{bmatrix} \frac{-EI}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \quad (1.2.7)$$

Si se conocen las fuerzas producidas en el nudo A por los efectos de los desplazamientos unitarios en B , se puede por equilibrio deducir también las fuerzas y rigideces de B (figuras 1.2.5, 1.2.6 y 1.2.7):

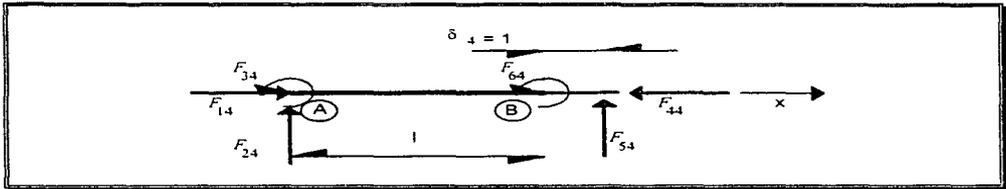


FIGURA 1.2.5

$$F_{44} = F_{14} = k_{11} \quad (1.2.8)$$

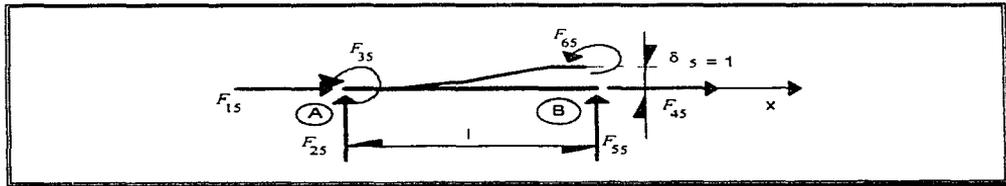


FIGURA 1.2.6

$$F_{55} = F_{25} = k_{22} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$F_{o5} = F_{35} - F_{25}l = \frac{6EI}{L^2} - \frac{12EI}{L^3}l = -\frac{6EI}{L^3} \quad (1.2.9)$$

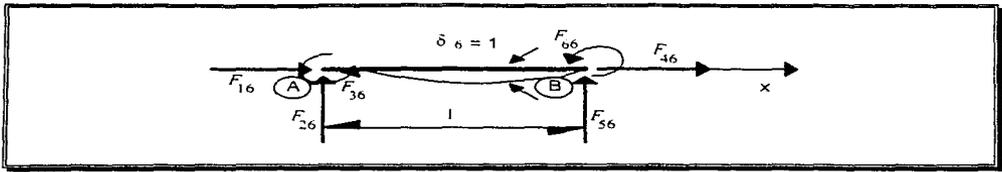


FIGURA I.2.7

$$F_{66} = F_{26}l - F_{16} = \frac{6EI}{L^2}L - \frac{2EI}{L} = \frac{4EI}{L} \quad (I.2.10)$$

Partiendo de las ecuaciones I.2.8, I.2.9 y I.2.10 la matriz resultante en B es:

$$[k_{BB}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (I.2.11)$$

Remplazando las submatrices obtenidas I.2.7 y I.2.11 además de la matriz en el nodo A, en la matriz de rigideces de un elemento A-B se obtiene la matriz de rigidez en forma general de un elemento sometido a flexión y carga axial, considerando que en cada uno de sus extremos se tienen 3 grados de libertad (elemento doblemente empotrado):

$$[k] = \begin{bmatrix} [k]_{AA} & [k]_{AB} \\ [k]_{BA} & [k]_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (I.2.12)$$

De una manera similar se pueden obtener las matrices de rigidez para elementos articulados en alguno de sus extremos, o de elementos únicamente sometidos a carga axial para estructuras del tipo armadura. También se pueden definir los elementos de sección transversal variable, basta con

conocer la variación de las propiedades a lo largo del elemento y realizar las operaciones correspondientes, pudiéndose utilizar algún método numérico para la realización de las integrales.

1.2.2. Metodología para la aplicación del método de rigideces.

La metodología a seguir para la realización de los análisis estructurales es la siguiente :

- a) Información básica de la geometría, propiedades mecánicas y topología de los materiales, elementos y sistema estructural, así como las cargas a que va estar sometida la estructura,
- b) definición de los vectores y matrices estructurales.
- c) rotación de vectores y determinación de las matrices de rigideces de los elementos en coordenadas locales y globales,
- d) ensamble de la matriz de rigidez global del sistema estructural,
- e) obtención de los desplazamientos de los nodos de la estructura y
- f) obtención de la fuerzas internas en los extremos de los elementos. Estos pasos se describen con detalle a lo largo de este capítulo.

1.2.2.a) Información básica.

En esta primera etapa del análisis estructural se definen los materiales, la geometría, las propiedades mecánicas y la topología de los elementos y del sistema estructural (ver figura 1.2.8).

Geometría general. La geometría general de un sistema estructural, como el mostrado en la figura 1.2.8, consiste en definir: i) las coordenadas de los nodos, en función de un sistema de coordenadas globales (nudo es un punto en el que concurren dos o más barras, también se considera como nudo los puntos extremos de una barra) e ii) la topología del sistema, que consiste en definir la orientación y conectividad de las barras. Como todas las barras o elementos estructurales tienen dos nudos extremos, uno de estos será el nudo origen y el restante el nudo destino o el nudo final. Esto se realiza con el fin de poder tener una orientación en los elementos e interpretar los resultados de las fuerzas internas, así como para determinar los elementos mecánicos de los elementos en base a esta convención.

Propiedades geométricas. Para estructuras en el plano (donde se utiliza normalmente el plano X - Y para ubicar la estructura y el eje Z queda de punta o perpendicular a este plano) es necesario conocer las áreas, A , y los momentos de inercia I , de todos los elementos, referidos a un sistema de ejes

locales. La definición de este sistema puede ser tal que el eje 'x' siempre coincida con el eje longitudinal del elemento y los otros ejes 'y' y 'z' pueden ser definidos arbitrariamente (ver figura I.2.9).

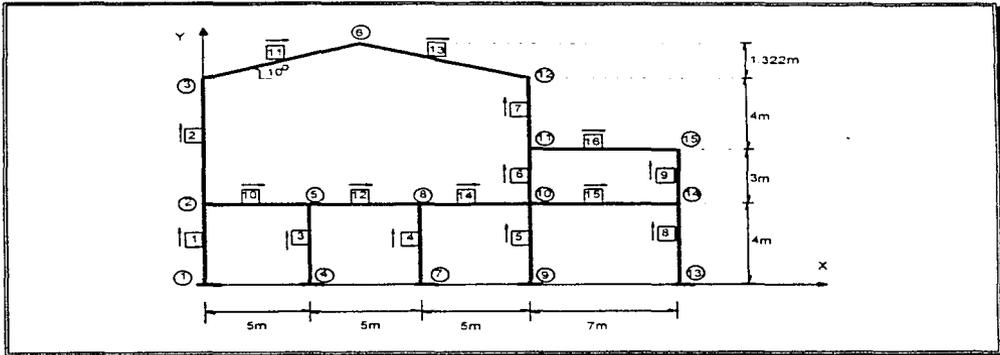


FIGURA I.2.8. Topología y Geometría general de una estructura.

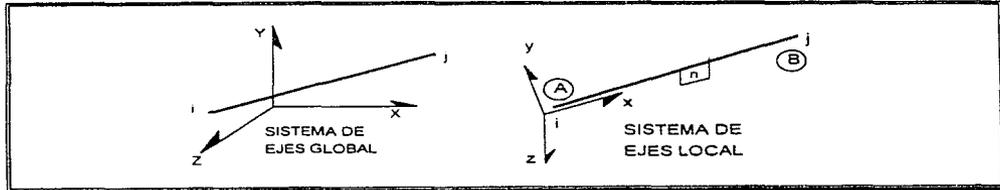


FIGURA I.2.9. Sistemas de referencia.

Tipos de soporte. Las condiciones de apoyo o de fijación de la estructura deben definirse de manera que se simule en forma realista el comportamiento del soporte de la estructura. El apoyo es un elemento que puede restringir todos o algunos de los desplazamientos de los elementos que soporta y pueden ser: libre, articulado y empotrado, entre otros. El número de posibilidades de desplazamientos independientes que tiene los nodos de un elemento se le designa como grados de libertad, sean éstos lineales o angulares. En la figura I.2.10 se ilustran algunos tipos de apoyo.

Propiedades mecánicas del material. Si se consideran materiales con comportamiento lineal elástico, basta con definir el módulo de Young E y el módulo de cortante G . Por otro lado existe una relación entre ellos:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

donde μ es el módulo de Poisson .

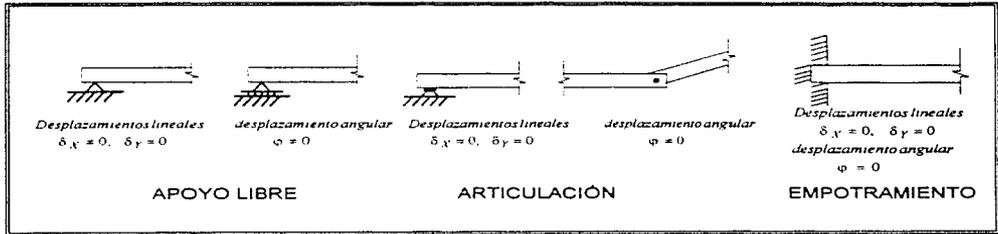


FIGURA I.2.10 Tipos de apoyo

Cargas. Las cargas son las fuerzas a las que puede estar sometida una estructura, provocadas por los efectos más comunes de la carga muerta, carga viva, empujes de material o de fluidos y por los efectos accidentales del sismo, viento y oleaje; éstas se pueden modelar como fuerzas estáticas, que se representan como fuerzas concentradas en un punto, como fuerzas distribuidas a lo largo de uno o varios elementos, como cargas triangulares, trapezoidales, etc., aunque las mas comunes son las dos primeras.

I.2.2.b) Vectores y Matrices Estructurales.

En esta etapa del análisis estructural se definen arreglos estructurales referidos a un sistema de coordenadas generalizadas. Un sistema de coordenadas generalizadas es el conjunto de fuerzas o desplazamientos, numerados en forma secuencial y localizados en una estructura en posición y dirección. Para el método de las rigideces las coordenadas generalizadas pueden ser la posición y dirección de los desplazamientos incógnitas, como se muestra en la figura I.2.11. Por fuerzas y desplazamientos se entiende no solo las fuerzas y desplazamientos lineales sino también los momentos y rotaciones, respectivamente. Los elementos de una matriz de fuerzas o desplazamientos se agrupan en el orden secuencial de las coordenadas generalizadas.

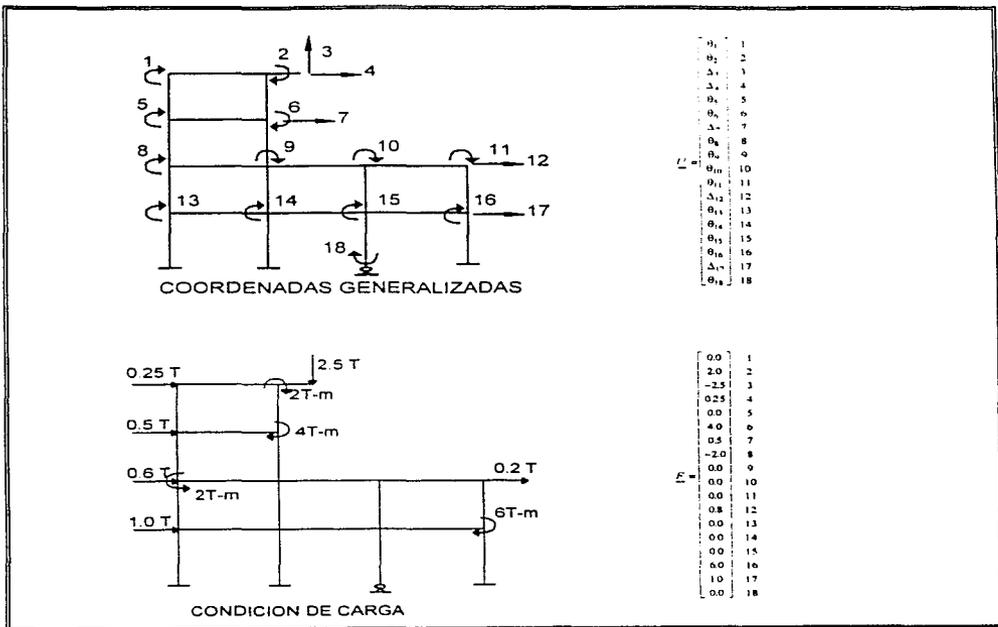


FIGURA 1.2.11 Sistema de coordenadas generalizadas y Vectores estructurales

1.2.2.c) Rotación de vectores.

Dado un sistema de fuerzas o desplazamientos referidos a un sistema local o a las coordenadas locales $x-y$ del elemento y aplicados en el nudo j (ver figura 1.2.12), se puede obtener otro sistema de fuerzas o desplazamientos equivalentes, aplicados en el nudo j y referidos a un sistema de referencia global o a las coordenadas globales $X-Y$, a través de una matriz de rotación de ejes:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}_{X-Y} = \begin{bmatrix} \text{Cosa} & -\text{Sena} & 0 \\ \text{Sena} & \text{Cosa} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}_{x-y}$$

$$\{F\}_{x-y} = [R]\{f\}_{x-y}$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix}_{x-y} = \begin{bmatrix} \text{Cosa} & -\text{Sena} & 0 \\ \text{Sena} & \text{Cosa} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}_{x-y}$$

$$\{D\}_{x-y} = [R]\{d\}_{x-y}$$

donde $[R]$ es la matriz de rotación.

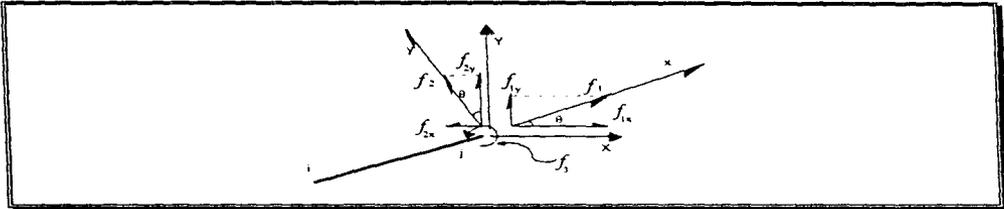


FIGURA I.2.12 Rotación de vectores

De la misma manera, a partir de un vector de fuerzas nodal referidos a las coordenadas globales se puede obtener un vector de fuerzas nodal referidos a las coordenadas locales como sigue:

$$\{f\}_{x-y} = [R]^{-1}\{F\}_{x-y} = [R]^T\{F\}_{x-y}$$

$$\{d\}_{x-y} = [R]^{-1}\{D\}_{x-y} = [R]^T\{D\}_{x-y}$$

donde $[R]$ es una matriz ortogonal (por definición R es ortogonal si $R^T R = R R^T = I$, donde I es la matriz identidad), por lo tanto:

$$[R]^T = [R]^{-1}$$

por otro lado, el determinante de la matriz de rotación es:

$$\text{Det}[R] = \text{Cosa}^2\theta + \text{Sena}^2\theta = 1$$

Para un vector de fuerzas o desplazamientos nodales aplicados en los extremos de un elemento, la transformación de fuerzas se obtiene a través de la matriz de transformación T , siguiente:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}_{x-y} = [T] \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix}_{x-y} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_u \\ f_v \\ f_w \\ f_z \end{Bmatrix} \quad (1.2.13)$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \end{Bmatrix}_{x-y} = [T] \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \end{Bmatrix}_{x-y} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_u \\ d_v \\ d_w \\ d_z \end{Bmatrix} \quad (1.2.14)$$

1.2.2.d) Matriz de rigidez de un elemento, en coordenadas locales y globales.

Como se mencionó anteriormente existen diferentes tipos de matrices de rigideces de los elementos estructurales, que dependen de: las condiciones de frontera del elemento, de la geometría (por ejemplo, si son elementos de sección constante o elementos de sección variable), del comportamiento mecánico del material, de las simplificaciones adoptadas para fines prácticos, etc. Para elementos de sección constante y homogéneos, empotrados en ambos extremos, formados con materiales de comportamiento elástico lineal, se hizo la deducción anteriormente resultando la matriz de rigidez de la ecuación 1.2.12

La matriz de rigidez de un elemento, referenciada al sistema de coordenadas global del sistema estructural, se puede obtener como a continuación se describe. Sean las relaciones de los desplazamientos y las fuerzas en referencia local y global mostrados en las ecuaciones 1.2.13 y 1.2.14, éstos se pueden escribir como :

$$\{F_n\} = [T_n]^T \{D_n\} \quad (1.2.15)$$

$$y \quad \{f_n\} = [T_n]^T \{F_n\} \quad (1.2.16)$$

Por otro lado, de acuerdo a la ley de Hooke, se tiene la relación entre las fuerzas y los desplazamientos en el sistema de referencia local, como sigue:

$$\{f_n\} = [k_n] \{d_n\} \quad (1.2.17)$$

donde $[k]$ es la matriz de rigidez del elemento, referenciado al sistema de coordenadas local.

Substituyendo las fuerzas de la ecuación 1.2.16 en la ecuación 1.2.17 se tiene:

$$\{F_n\} = [T_n]\{f_n\} = [T_n][k_n]\{d_n\} \quad (1.2.18)$$

Ahora bien, la relación entre fuerzas y desplazamientos, referenciados al sistema de coordenadas globales del sistema estructural, se puede finalmente deducir, reemplazando los desplazamientos en coordenadas locales de la ecuación 1.2.15 en la ecuación 1.18:

$$\begin{aligned} \{F_n\} &= [T_n]\{f_n\} = [T_n][k_n]\{d_n\} = [T_n][k_n][T_n]^T \{D_n\} = [K_n]_{global} \{D_n\} \\ \therefore [K_n]_{global} &= [T_n][k_n][T_n]^T \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

donde $[K_n]_{global}$ se llama la matriz de rigidez del elemento n en coordenadas globales, y relaciona las fuerzas con los desplazamientos del elemento en coordenadas globales.

1.2.2.e) Ensamble de la matriz de rigidez del sistema estructural.

Cada matriz de rigideces de los elementos en coordenadas globales, tiene asociadas unas coordenadas generalizadas, correspondientes a los grados de libertad de los nudos extremos del elemento (a este grupo de coordenadas generalizadas se le llama también vector de localización).

A partir de estas matrices de rigideces de los elementos en coordenadas globales que son obtenidas con la transformación:

$$[K_n]_{global} = [T_n][k_n][T_n]^T$$

y con los vectores estructurales, asociados a estas matrices, se ensambla la matriz de rigidez global del sistema estructural; o sea, ensamblando cada matriz de elemento en coordenadas globales, en la matriz global del sistema, en las posiciones indicadas por el vector de localización:

$$[K]_{sistema} = \sum_{i=1}^n [K_i] \quad (1.2.20)$$

donde n es el número de elementos que integran el sistema estructural y la sumatoria indica "ensamble de las matrices de rigideces de los elementos".

1.2.2.f) Obtención de desplazamientos de los nudos del sistema estructural y fuerzas internas de los elementos.

A partir de la matriz de rigidez del sistema estructural y del vector de fuerzas a la que va estar sometida la estructura, se establece la ecuación de equilibrio del sistema:

$$\{F\} = [K]_{global} \{D\} \quad (1.2.21)$$

El vector de desplazamientos $\{D\}$ de los nudos del sistema estructural, se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas de la ecuación anterior, 1.2.21.

Finalmente, las fuerzas internas en los extremos de los elementos se obtienen como sigue:

$$\{f_n\} = [k_n] \{u_n\} \quad (1.2.22)$$

donde el vector $\{u_n\}$ son los desplazamientos en los extremos de la barra n , referenciados a las coordenadas locales del elemento. Estos desplazamientos se desprenden del vector de desplazamientos de los nudos del sistema referenciados a las coordenadas globales, a partir de la relación:

$$\{u_n\} = [T_n]^T \{D_n\} \quad (1.2.23)$$

donde $\{D_n\}$ contiene los desplazamientos de los nudos extremos del elemento, en coordenadas globales y asociados a los grados de libertad correspondientes. Las operaciones para obtener las fuerzas internas se pueden mostrar con la representación siguiente:

$$\{f_n\} = [k_n] \{u_n\} = [k_n] [T_n]^T \{D_n\} \quad (1.2.24).$$

I.3 ANÁLISIS TRIDIMENSIONAL SIMPLIFICADO.

Teniendo como base el método de rigideces, se puede realizar un análisis simplificado para estructuras en el espacio del tipo edificio (ref 1 y 2). Los edificios se pueden idealizar como un conjunto de subestructuras (marcos y muros) verticales planas unidas entre sí mediante los sistemas de piso (figura I.3.1). Los sistemas de piso, perpendiculares entre sí y generalmente conformados con losas, tienen como característica principal que pueden servir como un diafragma en su entrepiso, es decir, que la rigidez de la losa es muy grande comparada a la de las vigas que la rodean por lo que se considera un cuerpo rígido (indeformable) en su plano, y por lo tanto las deformaciones de los elementos dependen de los desplazamientos de las losas.

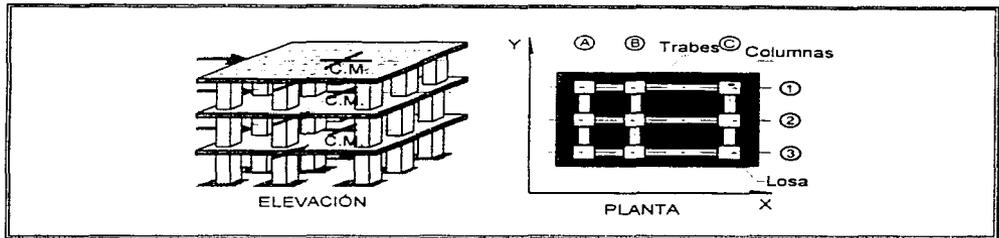


FIGURA I.3.1.

Las subestructuras que conforman el edificio pueden ser compuestas por vigas, columnas, muros de cortante, contraventeos, etc., para los cuales el método se puede utilizar pero algunos elementos tienen que tomarse en una forma especial, que queda fuera del alcance de este trabajo, por lo cual se limitará a marcos formados por vigas y columnas.

Este método permite realizar análisis de edificios sometidos a carga lateral únicamente, obteniendo como resultado la distribución de las fuerzas laterales en cada uno de los marcos planos que conforman el edificio, así como el desplazamiento lateral de éstos en la dirección de su plano.

Las cargas laterales a las que se someten las estructuras pueden ser de diferente origen: sismo, viento, empuje de tierra o de agua, etc. En edificios por lo general son las dos primeras, siendo las cargas producidas por sismo las que tomaremos en cuenta en este trabajo por ser un tipo de carga sumamente significativa en varias regiones de nuestro país y del mundo; para la aplicación del método

se deben utilizar las cargas sísmicas obtenidas de acuerdo al método estático propuesto por el Reglamento de Construcciones del D.F. el cual se expone en el Anexo 1.

Las hipótesis fundamentales en las que se basa el método son :

- El análisis es del tipo Elástico - Lineal.
- Los desplazamientos se consideran pequeños.
- Las losas de los niveles se consideran infinitamente rígidas ante cargas horizontales y se desplazan como un cuerpo rígido, considerando tres grados de libertad por entrepiso (figura I.3.2).

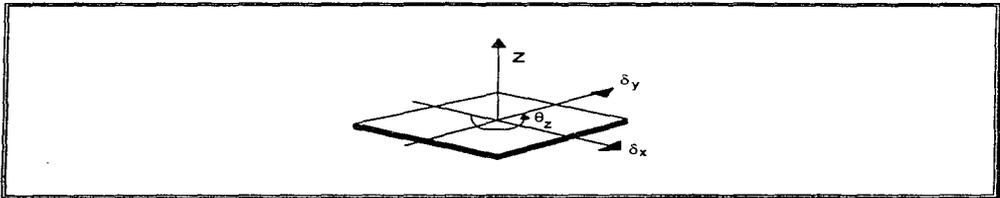


FIGURA I.3.2.

-Los marcos se modelan y analizan como marcos planos en dos dimensiones, y están formados exclusivamente por traveses (vigas) y columnas, y cada uno de éstos trabaja en forma independiente en su eje (figura I.3.3).

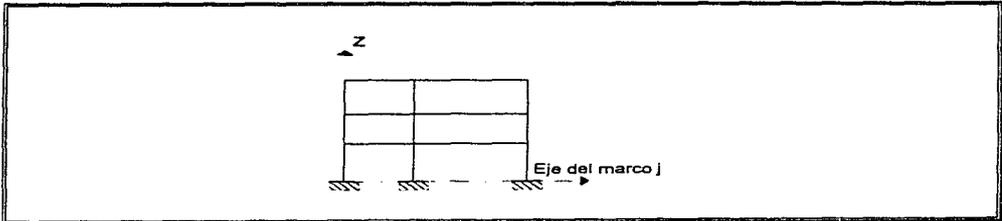


FIGURA I.3.3.

-Se desprecia la rigidez torsional de traveses normales a los marcos.

-Las masas se concentran en los niveles y en el centro de masa de cada uno se aplican las fuerzas sísmicas (figura I.3.4).

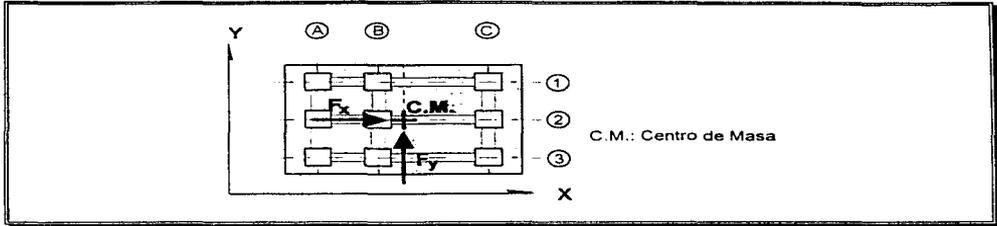


FIGURA I.3.4.

1.3.1 Procedimiento para la evaluación de la matriz de rigidez lateral de cada marco plano.

El primer paso para la elaboración del análisis es obtener la matriz de rigidez lateral de cada uno de los marcos planos que forman la estructura, lo cual se realiza partiendo de la matriz de rigidez de cada marco. El procedimiento implica ensamblar convenientemente la matriz de rigidez de cada uno de los marcos, K_j , que forman el edificio, de tal manera que las rigideces ante los desplazamientos horizontales ocupen las últimas posiciones de dicha matriz.

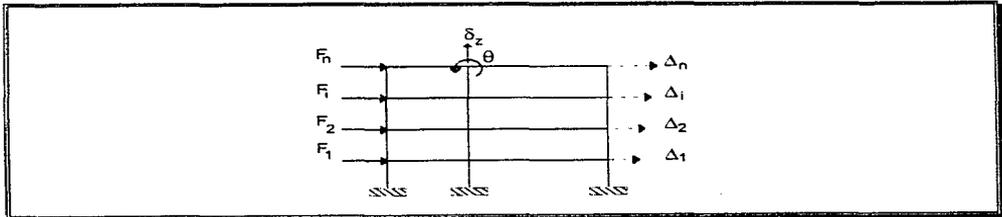


FIGURA I.3.5.

Así se puede obtener la matriz simplificada, condensándola de la manera siguiente :

Sea la ecuación de equilibrio estático del marco j :

$$\{F\}_j = [K]_j \{\Delta\}_j = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta_1\} \\ \{\Delta_2\} \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} - - \delta, \theta \\ - - \Delta_{\text{ext}} \end{matrix}$$

donde las únicas fuerzas que actúan en la estructura son las fuerzas horizontales, $\{F_2\}$.

Desarrollando:

$$[K_{11}]\{\Delta_1\} + [K_{12}]\{\Delta_2\} = \{0\} \quad (1.3.1)$$

$$[K_{21}]\{\Delta_1\} + [K_{22}]\{\Delta_2\} = \{F_2\} \quad (1.3.2)$$

Despejando $\{\Delta_1\}$ de la ecuación (1.3.1), se tiene :

$$\{\Delta_1\} = -[K_{11}]^{-1} [K_{12}]\{\Delta_2\} \quad (1.3.3)$$

Sustituyendo la ec. (1.3.3) en la ec. (1.3.2), resulta:

$$-[K_{21}][K_{11}]^{-1}[K_{12}]\{\Delta_2\} + [K_{22}]\{\Delta_2\} = \{F_2\}$$

$$-[K_{21}][K_{11}]^{-1}[K_{12}] + [K_{22}]\{\Delta_2\} = \{F_2\}$$

dado que : $\{F\} = [K]\{\Delta\}$

$$\text{entonces : } \Rightarrow [K_L]_j = -[K_{21}][K_{11}]^{-1}[K_{12}] + [K_{22}] \quad (1.3.4)$$

en donde $[K_L]_j$ es la matriz de rigidez lateral del marco j .

1.3.2 Obtención de los desplazamientos horizontales del marco j , en función de los desplazamientos de las losas.

Los desplazamientos horizontales (en cada nivel i) de cualquier marco j , en dirección a su sistema de ejes locales, se pueden obtener en función de los desplazamientos de las losas referenciados a un sistema global.

De la figura 1.3.6 se pueden obtener los valores del desplazamiento Δ en cada nivel i del marco j dando como resultado :

$$\{\Delta_i\}_j = \cos \alpha_j \{\xi_{x,i}\}_j + \sin \alpha_j \{\xi_{y,i}\}_j + r_i \theta_j$$

Ahora bien, dado que el valor de α_j no cambia para cada entrepiso y los desplazamientos en cada entrepiso dependen únicamente del valor de los desplazamientos de su losa se puede generalizar la expresión anterior para cada marco j como :

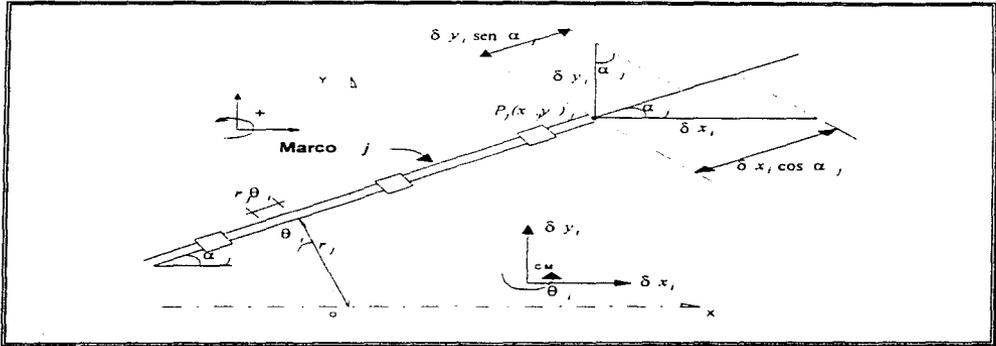


FIGURA I.3.6.

$$\{\Delta\}_j = \begin{bmatrix} [\cos] & [\text{sen}] & [r] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_x\} \\ \{\delta_y\} \\ \{\theta\} \end{Bmatrix} = [T]_j \{\delta\}$$

(I.3.5)

Donde:

n_e , es el número de entrepisos del marco.

$[\cos]$, es una matriz diagonal con elementos iguales a $\cos \alpha_j$, de orden $n_e \times n_e$.

$[\text{sen}]$, es una matriz diagonal con elementos iguales a $\text{sen} \alpha_j$, de orden $n_e \times n_e$.

$[r]$, es una matriz diagonal con elementos r_j (distancia euclidiana del marco al origen), de orden $n_e \times n_e$.

$\{\delta_x\}$, $\{\delta_y\}$, $\{\theta\}$, son vectores de desplazamientos de la losa de orden n_e .

$[T]_j$, es la matriz de transformación del marco j , unión de las anteriores, y por lo tanto de orden $n_e \times 3n_e$.

$\{\Delta\}_j$, es el desplazamiento horizontal del marco j en su dirección, de orden $n_e \times 1$.

Obtención de r_j :

En forma gráfica, de la figura I.3.7 se tiene:

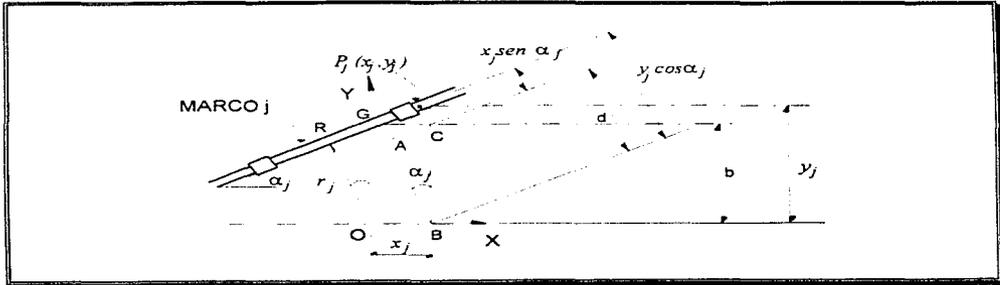


FIGURA I.3.7

de la figura :

$$y_j \cos \alpha_j = x_j \operatorname{sen} \alpha_j + d$$

$$-d = x_j \operatorname{sen} \alpha_j - y_j \cos \alpha_j$$

del triángulo ROG :

$$r_j = b \cos \alpha_j$$

del triángulo ABC :

$$d = b \cos \alpha_j \quad \therefore r_j = d$$

por lo tanto :

$$\underline{r_j = |x_j \operatorname{sen} \alpha_j - y_j \cos \alpha_j|}$$

1.3.3 Obtención de la matriz de rigidez tridimensional simplificada.

A partir de la matriz de rigidez lateral de cada marco es posible ensamblar la matriz de rigidez tridimensional simplificada, la cual permite resolver el sistema de ecuaciones que relaciona las fuerzas laterales que actúan en la estructura con los desplazamientos de cada losa (en ambas direcciones y el giro), dando la posibilidad de obtener tanto los desplazamientos laterales en la dirección de cada marco, así como el valor de la fuerza lateral que debe soportar.

Por Ley de Hooke, las fuerzas horizontales aplicadas en cada uno de los marcos j , són:

$$\{F_i\}_j = [K_L]_j \{\Delta i\}_j = [K_L]_j [T]_j \{\delta\} \quad (1.3.6)$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}_j = [K_L]_j \left\{ \cos \alpha_j \begin{Bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{x2} \\ \vdots \\ \delta_{xn} \end{Bmatrix} + \sin \alpha_j \begin{Bmatrix} \delta_{y1} \\ \delta_{y2} \\ \vdots \\ \delta_{yn} \end{Bmatrix} + r_j \begin{Bmatrix} \theta 1 \\ \theta 2 \\ \vdots \\ \theta n \end{Bmatrix} \right\}$$

Por equilibrio estático las fuerzas totales aplicadas en las losas deben ser la sumatoria de las fuerzas de cada marco, tomando en cuenta las componentes en planta de éstas:

$$\{F_i\} = \sum_{j=1}^{nm} [T]_j^T \{F_i\}_j \quad (1.3.7)$$

donde nm es el número de marcos.

Sustituyendo la ecuación (1.3.6) en la ecuación (1.3.7), se tiene:

$$\{F_i\} = \sum_{j=1}^{nm} [T]_j^T [K_L]_j [T]_j \{\delta\} = [K_T] \{\delta\} \quad (1.3.8)$$

donde:

$$[K_T] = [T]_j^T [K_L]_j [T]_j$$

es la matriz de rigideces tridimensional simplificada.

Con la finalidad de observar cada uno de los términos e ir armando la matriz de rigidez tridimensional simplificada del sistema se efectuarán las operaciones correspondientes :

La porción de $\{F_x\}$ resulta:

$$\{F_x\} = \sum_{j=1}^m [F_j] \cos \alpha_j$$

con la ecuación (1.3.8), se tiene:

$$\{F_x\} = \sum_{j=1}^m [K_L]_j \{ \cos^2 \alpha_j \delta_x \} + \cos \alpha_j \operatorname{sen} \alpha_j \{ \delta_y \} + \cos \alpha_j r_j \{ \theta \}$$

haciendo:

$$[K_{xx}] = \sum_{j=1}^m [K_L]_j \{ \cos^2 \alpha_j \}$$

$$[K_{xy}] = \sum_{j=1}^m [K_L]_j \{ \cos \alpha_j \operatorname{sen} \alpha_j \}$$

$$[K_{xr}] = \sum_{j=1}^m [K_L]_j \{ \cos \alpha_j r_j \}$$

entonces :

$$\{F_x\} = [K_{xx}] \{ \delta_x \} + [K_{xy}] \{ \delta_y \} + [K_{xr}] \{ \theta \} \quad (1.3.9)$$

La porción de $\{F_y\}$ resulta:

$$\{F_y\} = \sum_{j=1}^m \{F_j\} \operatorname{sen} \alpha_j$$

con la ecuación (1.3.8), se tiene:

$$\{F_y\} = \sum_{j=1}^m [K_L]_j \{ \cos \alpha_j \operatorname{sen} \alpha_j \delta_x \} + \operatorname{sen}^2 \alpha_j \{ \delta_y \} + \operatorname{sen} \alpha_j r_j \{ \theta \}$$

Haciendo:

$$[K_{yx}] = [K_{xy}]$$

$$[K_{yy}] = \sum_{j=1}^m [K_L]_j \operatorname{sen}^2 \alpha_j$$

$$[K_{yr}] = \sum_{j=1}^m [K_L]_j \operatorname{sen} \alpha_j r_j$$

por lo tanto:

$$\{F_y\} = [K_{yx}] \{ \delta_x \} + [K_{yy}] \{ \delta_y \} + [K_{yr}] \{ \theta \} \quad (1.3.10)$$

La parte del momento $\{M_o\}$ resulta:

$$\{M_o\} = \sum_{i=1}^{nm} \{F_i\} r_i$$

Con ecuación (1.3.8), se tiene:

$$\{M_o\} = \sum_{i=1}^{nm} [K_L]_i \{ \cos \alpha_i r_i \delta_i \} + \sum_{i=1}^{nm} [K_r]_i \{ r_i^2 \theta \}$$

Haciendo:

$$[K_{\alpha}] = [K_L]$$

$$[K_r] = [K_r]$$

$$[K_r] = \sum_{i=1}^{nm} [K_L]_i r_i^2$$

por lo tanto:

$$\{M_o\} = [K_{\alpha}] \{\delta\} + [K_r] \{\theta\} \quad (1.3.11)$$

El sistema de ecuaciones, en forma matricial, resulta:

$$\begin{Bmatrix} \{F_r\} \\ \{F_y\} \\ \{M_o\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{\alpha}] & [K_r] & [K_r] \\ [K_{\alpha}] & [K_r] & [K_r] \\ [K_{\alpha}] & [K_r] & [K_r] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_r\} \\ \{\delta_y\} \\ \{\theta\} \end{Bmatrix} \quad (1.3.12)$$

$$\{F\} = [K_r] \{\delta\}$$

donde:

$[K_r]$ es la matriz de rigideces tridimensional simplificada, del marco j .

1.3.4 Obtención de los desplazamientos y fuerzas de cada marco.

Con la matriz de rigidez tridimensional se puede resolver el sistema con las fuerzas aplicadas sobre las losas, resultantes del método estático. Cabe señalar que el término correspondiente a los momentos sobre las losas M_{oi} se obtiene con respecto al origen del sistema global de referencia, tomando en cuenta que las fuerzas sísmicas se aplican en el centro de cortante, la evaluación tanto del centro de cortante como del término de momento se explicará con mayor detalle en la sección 1.3.5

Dando solución al sistema de ecuaciones, se obtienen los desplazamientos de las losas de cada entrepiso con sus tres componentes :

$$\{\delta_r\} = \begin{Bmatrix} \delta_{r_1} \\ \delta_{r_2} \\ \vdots \\ \delta_{r_n} \end{Bmatrix}, \quad \{\delta_v\} = \begin{Bmatrix} \delta_{v_1} \\ \delta_{v_2} \\ \vdots \\ \delta_{v_n} \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \{\theta\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{Bmatrix} \quad (1.3.13)$$

Con estos desplazamientos se obtienen los desplazamientos laterales de cada marco en su dirección mediante :

$$\{\Delta\}_r = \cos \alpha_r \{\delta_r\} + \operatorname{sen} \alpha_r \{\delta_v\} + r_r \{\theta\} \quad (1.3.14)$$

Finalmente, se obtienen las fuerzas laterales que deben resistir cada uno de los marcos con :

$$\{F\}_r = [K_L]_r \{\Delta\}_r \quad (1.3.15)$$

1.3.5 Obtención del centro de torsión, centro de cortante, excentricidades y fuerzas de diseño.

Para la obtención de las fuerzas de diseño de acuerdo al reglamento del Distrito Federal de 1987, es necesario determinar la excentricidad entre el centro de torsión y el centro de cortante, para poder obtener el nuevo centro de cortante y obtener los momentos de diseño para el análisis tridimensional.

1.3.5.a) Obtención del centro de Torsión:

Considerando que las fuerzas están aplicadas en el centro de torsión para no provocar giros en las losas, se puede plantear lo siguiente (ref. 2 y 3) :

A) Si el sismo actúa en la dirección X , se tiene que:

$$\{F_x\} \neq \{0\}, \quad \{F_y\} = \{0\} \quad \text{y} \quad \{\theta\} = \{0\}$$

El sistema de ecuaciones de equilibrio, resulta:

$$\begin{Bmatrix} \{F_x\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{xx}] & [K_{xy}] \\ [K_{yx}] & [K_{yy}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_x\} \\ \{\delta_y\} \end{Bmatrix} \quad (1.3.16)$$

Dando solución al sistema I.3.16 se obtienen los desplazamientos $\{\delta_x\}$ y $\{\delta_y\}$, con los cuales se determinan los momentos que hay que aplicar a la losa para que no gire:

$$\{M_x\} = [K_{\alpha}] \{\delta_x\} + [K_{\alpha}] \{\delta_y\}$$

La distancia Y_{CT} del centro de torsión para cada nivel i , se obtiene como:

$$Y_{CT} = \frac{M_x}{F_x} \quad (I.3.17)$$

b) Si el sismo actúa en la dirección Y , se tiene:

$$\{F_x\} = \{0\}, \quad \{F_y\} \neq \{0\} \text{ y } \{0\} = \{0\}$$

El sistema de ecuaciones de equilibrio ahora resulta:

$$\begin{bmatrix} \{0\} \\ \{F_y\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{xx}] & [K_{xy}] \\ [K_{yx}] & [K_{yy}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_x\} \\ \{\delta_y\} \end{Bmatrix} \quad (I.3.18)$$

Similarmente al inciso (a) se determina el valor del momento con los valores de $\{\delta_x\}$ y $\{\delta_y\}$, para que la losa no gire:

$$\{M_x\} = [K_{\alpha}] \{\delta_x\} + [K_{\alpha}] \{\delta_y\}$$

La distancia X_{CT} del centro de torsión para cada nivel i , se obtiene como:

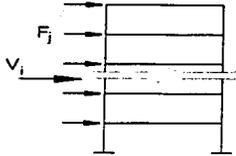
$$X_{CT} = \frac{M_x}{F_y} \quad (I.3.19)$$

I.3.5.b) Obtención del centro de masa (CM):

El centro de masa para cada nivel i , se obtiene por primeros momentos, y normalmente coincide con el centro de área, pero existen casos en que hay masas concentradas en algunos puntos de algún nivel.

I.3.5.c) Obtención del centro de cortante (CC):

Conocido el centro de masa de cada nivel i , se puede conocer el centro de cortante como sigue:



$$X_{CC_i} = \frac{\sum_{j=1}^{nn} F_j X_{CM_i}}{V_i}$$

(I.3.20)

$$Y_{CC_i} = \frac{\sum_{j=1}^{nn} F_j Y_{CM_i}}{V_i}$$

(nn, número de niveles).

I.3.5.d) Obtención de excentricidades de diseño.

Las excentricidades se calculan entre el centro de torsión y el centro de cortante mediante :

$$e_x = X_{CC_i} - X_{CT_i}, \quad e_y = Y_{CC_i} - Y_{CT_i} \quad (I.3.21)$$

Para diseño, éstas deben incrementarse para tomar en cuenta un incremento de excentricidad tanto por una distribución accidental de las masas como por razones dinámicas (ref 4, 5, y 6). De acuerdo al reglamento del Distrito Federal de 1987 los valores de diseño son (ref. 5 y 6):

Para X:

$$e_{xw1_i} = 1.5e_x + 0.1b$$

$$e_{xw2_i} = e_x - 0.1b$$

Para Y:

$$e_{yw1_i} = 1.5e_y + 0.1b$$

$$e_{yw2_i} = e_y - 0.1b$$

(I.3.22)

donde:

-las excentricidades están medidas con respecto al centro de torsión y de acuerdo a la convención del signo del momento.

-b, es la mayor dimensión, en planta, del nivel y medida perpendicularmente a la dirección del mismo.

I.3.5.e) Obtención de las fuerzas de diseño.

Para obtener las fuerzas de diseño es necesario obtener primero las coordenadas del centro de cortante referidas al origen, para cada excentricidad de diseño. Dado que tanto para la obtención de las excentricidades se obtiene la diferencia de las coordenadas del centro de torsión de las de cortante, y éstas se incrementan para diseño de acuerdo al R.D.F., para la realización del análisis es

necesario obtener las nuevas coordenadas del centro de cortante, tomando en cuenta las nuevas excentricidades de diseño :

$$\begin{aligned} X'_{CC1} &= X_{CT} + e_{w1}, & Y'_{CC1} &= Y_{CT} + e_{w1}, \\ X'_{CC2} &= X_{CT} + e_{w2}, & Y'_{CC2} &= Y_{CT} + e_{w2}. \end{aligned} \quad (1.3.23)$$

Posteriormente se requiere de la obtención de los momentos de diseño, para cada excentricidad de diseño.

En la dirección X:

$$\begin{aligned} M_{D1} &= Y'_{CC1} V_i - Y'_{CC1,n} V_{i+1} \\ M_{D2} &= Y'_{CC2} V_i - Y'_{CC2,n} V_{i+1} \end{aligned}$$

En la dirección Y:

$$\begin{aligned} M_{D1} &= X'_{CC1} V_i - X'_{CC1,n} V_{i+1} \\ M_{D2} &= X'_{CC2} V_i - X'_{CC2,n} V_{i+1} \end{aligned}$$

(1.3.24)

Finalmente se obtienen las fuerzas resultantes de diseño mediante:

En la dirección X:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{F_x\} \neq \{0\} \\ \{F_y\} = \{0\} \\ \{M_{o1}\} \neq \{0\} \end{array} \right\}_{w1}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \{F_x\} \neq \{0\} \\ \{F_y\} = \{0\} \\ \{M_{o2}\} \neq \{0\} \end{array} \right\}_{w2}$$

(1.3.25)

En la dirección Y:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{F_x\} = \{0\} \\ \{F_y\} \neq \{0\} \\ \{M_{o1}\} \neq \{0\} \end{array} \right\}_{w1}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \{F_x\} = \{0\} \\ \{F_y\} \neq \{0\} \\ \{M_{o2}\} \neq \{0\} \end{array} \right\}_{w2}$$

(1.3.26)

Hasta aquí es la contribución del sismo en direcciones independientes.

I.4. COMENTARIOS.

En este capítulo se mostró el método de análisis matricial simplificado de edificios, del cual se pueden mencionar algunos comentarios, así como ventajas y desventajas del mismo.

Del análisis de las expresiones para calcular el centro de torsión se desprende que éste no es una invariante, a pesar de que podría considerarse éste como el punto donde se ubica la resultante de la resistencia de la estructura, éste depende de la distribución de las fuerzas sísmicas por lo que a cada distribución de fuerzas corresponde una ubicación de centros de torsión diferentes.

Una de las principales ventajas es el hecho de que al ser un método matricial, es fácilmente programable y con esto, tomar en cuenta el problema de torsión en el diseños de edificios; además permite obtener el centro de torsión de la estructura y con ello las excentricidades estáticas, por lo que éstas se pueden incrementar de acuerdo al Reglamento de Construcciones del D.F. para tomar en cuenta excentricidades accidentales y las respectivas condiciones de carga.

Entre las limitantes del método están las hipótesis en que se basa:

-La hipótesis de que el entrepiso funciona como diafragma rígido puede conducir a errores en estructuras con sistemas de piso flexible, o que su rigidez ante cargas laterales no está distribuida sensiblemente uniforme en todo su largo, como edificios con una longitud en planta mucho mayor que su ancho.

-Al desprejiciarse la rigidez a torsión de vigas, columnas y muros se pueden tener errores significativos en elementos con geometrías especiales como muros tubulares.

-Si los marcos no son ortogonales en planta, no se les puede considerar como marcos planos, ya que no existe un criterio para valuar la inercia de una columna a la que concurren varios marcos oblicuos.

-Al considerarse marcos planos, se pierde la compatibilidad de desplazamientos verticales de los nudos comunes a distintos marcos.

Por otro lado, el método se aplica con fuerzas sísmicas obtenidas con el método estático, esto es, que no se puede aplicar un análisis dinámico tridimensional con las mismas hipótesis (dos traslaciones y una rotación por nivel), ya que las ecuaciones del movimiento de este tipo de sistema están en función de la excentricidad, misma que depende de las fuerzas que aún no se obtienen.



ANÁLISIS ELASTOPLÁSTICO DE SISTEMAS ESTRUCTURALES PLANOS, CONSIDERANDO INTERACCIÓN DE ESFUERZOS

II.1 INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS ELASTOPLÁSTICO.

El análisis elasto-plástico o inelástico de estructuras se basa en las hipótesis del comportamiento elasto-plástico de materiales (ref 7). Este modelo de comportamiento implica que el material se comporta conforme a la ley de Hooke, es decir, comportamiento elástico lineal hasta alcanzar su esfuerzo de fluencia, y posteriormente a éste, se deforma indefinidamente soportando éste esfuerzo constantemente. También se le conoce a los materiales con este tipo de comportamiento como material perfectamente plástico. El diagrama de esfuerzo-deformación de éste tipo de material se muestra en la figura II.1.1.

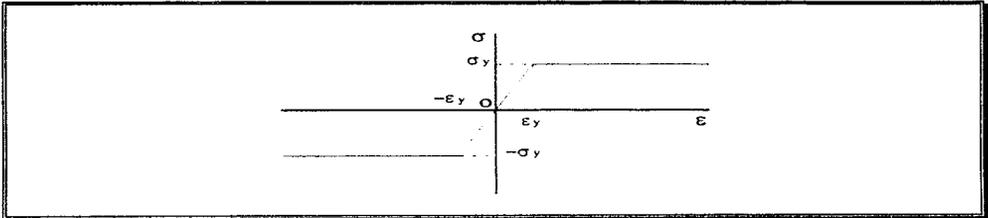


FIGURA II.1.1. Diagrama esfuerzo-deformación de un material elasto-plástico.

Aunque este modelo de comportamiento es solamente teórico, existen algunos materiales que tienen comportamiento similar y en ello radica la importancia de este modelo, como lo es por ejemplo el acero estructural, que en su diagrama esfuerzo deformación tiene un punto de fluencia bien definido y grandes deformaciones durante la fluencia del material, aunque se experimentan efectos posteriores a la fluencia, como lo son el endurecimiento del material, o bien, la posterior reducción de resistencia.

Como lo indica la gráfica esfuerzo-deformación el material resiste cierto esfuerzo hasta alcanzar su límite elástico o esfuerzo de fluencia σ_y ; de esta manera, podemos deducir que un material se plastifica totalmente cuando toda la sección sometida a esfuerzo alcanza el esfuerzo de fluencia, ya sea a tensión o a compresión.

II.1.1 Articulaciones plásticas.

Contrariamente a los análisis de estructuras sometidas a carga axial, en el cual resulta claro el identificar y modelar las secciones plastificadas, en el caso de estructuras sometidas a flexión, la forma de identificar y modelar estas secciones no resulta tan claro, por lo cual es necesario introducir el concepto de articulación plástica. Para ilustrar este concepto, veamos el comportamiento de la viga de la figura II.1.2, la cual está sometida a flexión pura, considerando que esta constituida de material elastoplástico:

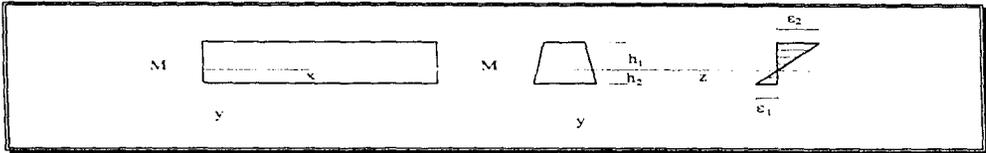


FIGURA II.1.2. Viga trapezoidal sometida a flexión, y diagrama de deformaciones.

Como se observa en la figura el diagrama de deformaciones tiene una distribución lineal, y esto es independiente del tipo de material de la viga, ya que es una de las hipótesis del fenómeno de flexión. A partir del diagrama de deformaciones de la sección mostrado podemos obtener los diagramas de esfuerzos de la misma. Estos diagramas de esfuerzos serán lineales únicamente si el material se conserva en su estado elástico, pero al alcanzarse el esfuerzo de fluencia en algunas partes de la sección, los esfuerzos serán constantes en dichas partes, como se muestra en la figura II.1.3.

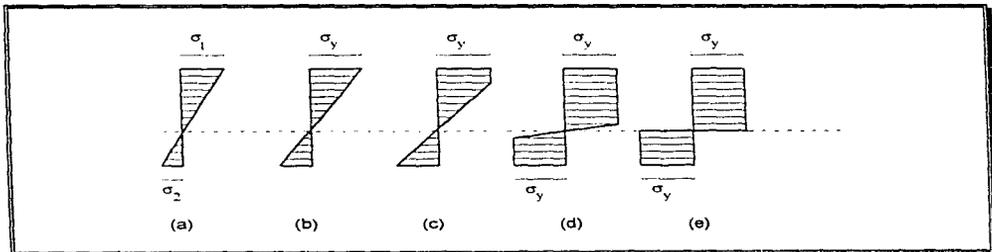


FIGURA II.1.3. Distribuciones de esfuerzo en el proceso de plastificación de una sección formada con un material elastoplástico.

En la figura II.1.3.a se observa la distribución de esfuerzo de la viga, en la que aún no se ha alcanzado el esfuerzo de fluencia en ninguna parte de la sección, es decir, que la viga está sometida a esfuerzos σ_1 y σ_2 menores que σ_y , posteriormente se van aplicando momentos flexionantes mayores a la viga y se observa que conforme las secciones extremas van alcanzando en esfuerzo σ_y , la distribución de esfuerzos se va uniformizando hasta llegar al punto de la figura II.1.3.d en el que prácticamente toda la sección está sometida al esfuerzo de fluencia σ_y , punto en el cual se considera que la sección se ha plastificado totalmente, y el cual se puede modelar la distribución de esfuerzos como dos porciones rectangulares (figura II.1.3.e). De esta manera podemos obtener el momento flexionante plástico que es el momento máximo que puede resistir una sección de material elastoplástico sometida a flexión. El valor de dicho momento se puede determinar mediante las ecuaciones de equilibrio, estableciendo una fuerza de tensión y una fuerza de compresión en la sección, como se muestra en la figura II.1.4 :

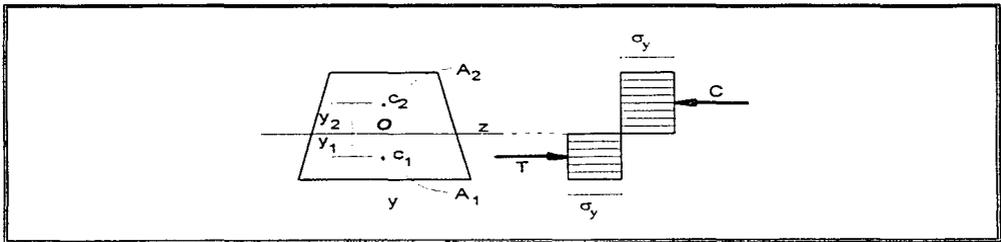


FIGURA II.1.4. Determinación del momento plástico.

Por equilibrio sabemos que $T - C = 0$ es decir, que $T = C$, pero también sabemos que ambas partes de la sección están sometidas al mismo esfuerzo σ_1 , por lo tanto, dado que las fuerzas son el resultado de $\sigma \cdot A$ tenemos que las áreas de tensión y compresión tienen el mismo valor ($A_1 = A_2 = A/2$). Ahora bien, para la obtención del momento plástico M_p se toman momentos con respecto al eje neutro z , de las fuerzas T y C respectivamente :

$$M_p = T \cdot y_1 + C \cdot y_2$$

sustituyendo T y C por $\sigma_y \cdot \frac{A}{2}$:

$$M_p = \frac{\sigma_y \cdot A (y_1 + y_2)}{2}$$

que se puede representar como :

$$M_p = \sigma_y \cdot Z_o \quad ; \quad Z_o = \frac{A(y_1 + y_2)}{2}$$

en donde Z_o es conocido como el módulo de sección plástico.

Resulta evidente al observar la figura que para cualquier sección el valor del módulo de sección plástico se puede interpretar como el área multiplicada por la mitad del peralte, que equivale al primer momento tomado con respecto al eje neutro de ambas áreas (de tensión y compresión) .

Ahora bien, cuando una sección se ha plastificado parcialmente, ésta se deforma de manera más rápida que una sección normal ya que las partes extremas no pueden resistir un incremento de esfuerzo dado que ya alcanzaron el esfuerzo de fluencia, esto implica que su curvatura es mayor con respecto a las secciones no plastificadas. Cuando al incrementar la carga la sección se plastifica totalmente, ésta se deforma indefinidamente, formándose así una articulación plástica (figura II.1.5).

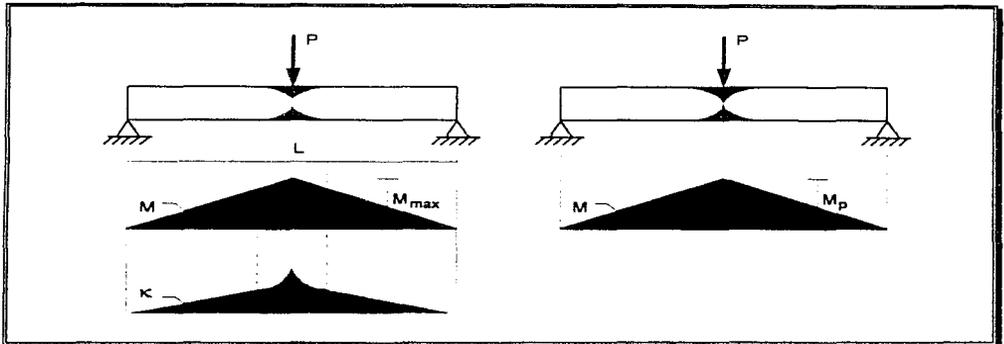


FIGURA II.1.5. Vigas parcial y totalmente plastificadas, diagramas de momentos y de curvatura.

Como se observa en esta figura, en una viga parcialmente plastificada, la curvatura va aumentando en forma mucho más rápida que en las partes donde no está plastificada, es decir que en la figura del diagrama se va formando un pico cada vez más pronunciado, hasta que el incremento de carga llega a producir el momento plástico M_p , y con esto, al plastificarse toda la sección, el diagrama de curvatura no tiene un punto definido, lo cual indica que la sección se puede ir deformando indefinidamente sin

que la sección pueda frenar esta deformación ya que ésta se ha plastificado totalmente, es decir, que se ha convertido esa sección en una articulación plástica. Después de la formación de esta plastificación, la viga puede considerarse como dos barras unidas entre sí por una articulación, aunque en este punto, la viga tiene un momento flexionante igual a M_p .

Es claro que en el ejemplo anterior, al formarse la articulación plástica, la viga entra en un estado inestable, ya que formada la articulación plástica la viga se deforma sin control alguno, es decir se convierte de una estructura isostática en una estructura hipostática; por lo anterior se deduce que en cualquier estructura isostática en la que las cargas produzcan la creación de una articulación plástica se presenta un estado inestable en la estructura completa, lo que provoca la falla de la misma, a este estado de la estructura se le conoce como mecanismo de falla o de colapso.

Con este sencillo caso, se pretende mostrar las bases del análisis elástico-plástico, ya que con el ejemplo de la viga se explica el fenómeno físico que se produce al plastificarse alguna sección de un elemento resistente. Sin embargo, en sistemas estructurales hiperestáticos, la formación de una articulación no provoca la falla de la misma, sino que, al no poder resistir mayores esfuerzos las secciones plastificadas, se producen redistribuciones de esfuerzos en las demás secciones esforzadas, provocando posteriores plastificaciones en otras secciones hasta formar el mecanismo de falla de la estructura.

II.2. PROCEDIMIENTO PARA LA REALIZACIÓN DE ANÁLISIS ELASTO-PLÁSTICOS DE SISTEMAS ESTRUCTURALES.

La idea básica para analizar sistemas estructurales paso a paso, con comportamiento elasto-plástico, sometidos a una carga monótona creciente o siguiendo un trayecto de carga monótona creciente, paso a paso, a partir de un estado inicial conocido; consiste en calcular la solución en el instante $t + dt$, a partir de la solución conocida en el instante t . La determinación de los aumentos de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos, se hacen a partir de los incrementos de carga, haciendo uso de las ecuaciones de equilibrio, de las condiciones límites, de las condiciones de compatibilidad geométrica de deformaciones y de la ley de comportamiento (ref 8).

Esta claro que para esta determinación, se necesita conocer en cada instante t , la localización de los elementos plastificados (criterio alcanzado) y los no plastificados, y decidir para cada uno de los elementos plastificados, si durante el paso $t + dt$ hay carga o descarga. En esto reside en general toda la dificultad de solución del problema de elasto-plasticidad.

Los análisis se realizan bajo las hipótesis siguientes:

- a) Las barras o elementos estructurales se consideran rectos y homogéneos y solo existen cargas concentradas.
- b) El comportamiento mecánico del material se supone elasto-plástico ideal,
- c) Una sección del elemento cede o se plastifica cuando la función de estado límite de seguridad se anula (esta función esta determinada por las dimensiones y la fuerza del límite elástico, así como por las sollicitaciones aplicadas) y se forma por consiguiente una articulación plástica,
- d) Las secciones críticas se consideran que solo aparecen en los extremos de los elementos, o en los lugares donde las cargas concentradas están aplicadas, y
- e) El cambio de geometría es despreciable.

Este procedimiento se puede sistematizar de la manera siguiente, haciendo análisis lineales paso a paso:

a) Partiendo de un estado inicial de estabilidad de la estructura, donde todos los elementos tienen comportamiento lineal, se identifican las secciones o elementos más esforzados y el incremento de carga necesario para llegar a su estado límite de resistencia o de fluencia del material. El cálculo de los estados límite de seguridad consta de:

- cálculo de la condición de plasticidad de una sección extrema de un elemento, y
- cálculo de la función de estado de seguridad límite del elemento expresada como una combinación lineal de fuerzas nodales de resistencia y de cargas aplicadas.

A partir de las funciones de estado límite de las secciones más esforzadas, se identifica la articulación plástica, se calcula la matriz de rigidez reducida y el vector de fuerzas de resistencia residual nodal equivalente, del elemento plastificado.

b) Se realiza un nuevo análisis lineal del sistema estructural, con una matriz de rigidez reducida o degradada de la estructura, que ensambla tanto las matrices de rigidez de los elementos plastificados como los elementos aun no plastificados, sujeta a una condición de carga que incluye las cargas iniciales y las fuerzas equivalentes producto de las resistencias residuales de los elementos plastificados. Se identifican las nuevas articulaciones plásticas, a partir de las funciones de estado límite de las secciones más esforzadas. Se calculan las nuevas matrices de rigidez reducidas y los vectores de fuerzas de resistencia residual equivalentes, de los elementos plastificados.

c) Se repite el paso 2, hasta alcanzar un estado de falla de la estructura o hasta identificar un mecanismo plástico de falla del sistema estructural. A partir de la función de estado límite de la última sección más esforzada, se puede obtener la carga crítica que produce un estado de inestabilidad o posible mecanismo de colapso de la estructura.

Este es el procedimiento para realizar los análisis elastoplásticos de estructuras, mediante la realización de análisis lineales por etapas. Existen varios criterios de falla de los elementos, dependiendo de las condiciones de resistencia de los elementos, así como del tipo de esfuerzo que se considere que provoque la falla del sistema, siendo el caso más simple el de elementos sometidos a carga simple de flexión pura.

II.3. ANÁLISIS ELASTOPLÁSTICOS DE SISTEMAS ESTRUCTURALES PLANOS, CON ELEMENTOS SUJETOS A EFECTOS DE FLEXIÓN PURA.

Como se mencionó en la sección anterior se puede hacer un análisis elasto-plástico considerando que el único esfuerzo que produce la falla de una barra es el esfuerzo de flexión en el elemento. Es obvio que éste no es el único esfuerzo que afecta a cualquier sección, pero el hacer este tipo de análisis es útil en varios sentidos, principalmente para introducir el concepto de análisis elasto-plásticos, y poder tener una idea clara de como se va degradando la estructura; por otra parte el considerar la flexión como el único esfuerzo que produce la falla no está muy alejado de la realidad para algunos casos, por ejemplo, para estructuras sometidas a sismo, cuyas cargas producen principalmente esfuerzos dominantes de flexión en los elementos de la estructura.

II.3.1 Criterio de falla de una barra sometida a flexión pura.

Sea una estructura con barras sujetas principalmente a flexión (ref 9), compuesta de n elementos (barras) y sujeta a $3m$ cargas concentradas en los nudos, donde m es el número de nudos, las secciones extremas de las barras t ($t=1, 2, \dots, n$) están numeradas a la izquierda por $(2t-1)$ y a la derecha por $(2t)$. El análisis de fuerzas de la estructura se hace por el método matricial de rigideces. Por tanto, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones a resolver :

$$[K]\{d\} = \{P\} \quad (II.3.1)$$

donde $[K]$ es la matriz de rigidez de la estructura, $\{d\}$ es el vector de desplazamientos de los nudos del sistema y $\{P\}$ es el vector de cargas que se aplican en los nudos; el sistema se puede resolver de la manera siguiente :

$$\{d\} = [K]^{-1} \{P\} \quad (II.3.2)$$

el desplazamientos t de la t -ésima barra en coordenadas globales está dado por :

$$\{d_t\} = [K_t]^{-1} \{P\} \quad (II.3.3)$$

donde $[K_t]^{-1}$ es la matriz formada por la extracción de las líneas de la matriz de rigidez inversa $[K]^{-1}$ correspondiente al vector d_t .

El vector de fuerzas internas del t -ésimo elemento se obtiene mediante

$$\{f_i\} = [k_i] \{s_i\} \quad (11.3.4)$$

donde tanto las fuerzas como la matriz de rigidez están en coordenadas locales; para relacionar las coordenadas locales con coordenadas globales se utiliza la matriz de transformación $[T_i]$, por lo que tiene la siguiente expresión:

$$\{s_i\} = [T_i]^T \{f_i\} \quad (11.3.5)$$

así, sustituyendo las ecuaciones 11.3.3 y 11.3.5 en la ecuación 11.3.4 las fuerzas internas del elemento i se pueden expresar como :

$$\{f_i\} = [s_i] \{P_i\} \quad (11.3.6)$$

donde :

$$[s_i] = [k_i] [T_i]^T [K_i]^{-1} \quad (11.3.7)$$

De las expresiones anteriores se puede deducir que los elementos mecánicos de cualquier sección extrema i ($i=1, 2, \dots, 2n$) se puede expresar como una combinación lineal de las fuerzas aplicadas y unos coeficientes, ahora si el unico elemento mecánico que provoca la falla es la flexión, las fuerzas internas que provocan la falla en la sección i de cualquier elemento i se puede expresar como :

$$S_i = M_i = \sum_{j=1}^{2n} b_{ij} P_j \quad (i = 1, 2, \dots, 2n) \quad (11.3.8)$$

donde P_j son las cargas aplicadas y b_{ij} unos coeficientes de influencia extraídos de la matriz $[s_i]$, del elemento que se trate, siendo :

$$b_{ij} = s_{i,k}, \quad k = \begin{cases} 3 & \text{si } i = 1, 3, 5, \dots, 2n-1 \\ 6 & \text{si } i = 2, 4, 6, \dots, 2n \end{cases} \quad (11.3.8a)$$

Los momentos resistentes límites de flexión de las zonas plastificadas del elemento o de las secciones críticas son:

$$R_i = Z_{oi} \sigma_{yi} \quad (11.3.9)$$

donde Z_{oi} y σ_{yi} son el módulo de sección plástico y el esfuerzo límite elástico (o esfuerzo de fluencia) de la i -ésima sección respectivamente.

La función de estado de seguridad de las secciones extremas de los elementos esta dada por:

$$Z_i = R_i - \text{signo}(S_i) S_i = M_{pi} - \text{signo}(M_i) M_i \quad (i = 1, 2, \dots, 2n) \quad (\text{II.3.10})$$

donde el $\text{signo}(*)$ es el signo de (*).

El criterio de falla (o de fluencia o de cedencia) de una sección esta entonces dado por:

$$Z_i \leq 0. \quad Z_i = R_i - \lambda_i \text{signo}(S_i) S_i = 0$$

$$Z_i = M_{pi} - \lambda_i \sum_{j=1}^{2n} b_{ij} P_j = 0$$

$$\lambda_i = \frac{R_i}{\text{signo}(S_i) S_i} = \frac{M_{pi}}{\sum_{j=1}^{2n} b_{ij} P_j} \quad (\text{II.3.11})$$

De la ecuación anterior deducimos que para cada sección existirá un valor de λ_i , siendo el valor mas pequeño de éste el de la sección más esforzada. Cabe señalar que el valor de λ_i es el factor de incremento de carga necesario para que la sección i llegue a su estado límite de falla.

II.3.2. Matriz de rigidez reducida y vector de fuerzas residuales equivalentes.

Con el fin de realizar los análisis de la estructura paso a paso, con carga constante y degradación de la estructura, así como, con el mismo número de nudos del sistema; en cada plastificación de las secciones potencialmente críticas, se puede deducir unas matrices de rigideces reducidas para los elementos plastificados y unos vectores de fuerzas nodales equivalentes.

La matriz de rigideces inicial de un elemento empotrado en ambos extremos esta dada por:

$$[K_e] = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.12})$$

Cuando se forma una articulación plástica en el extremo izquierdo ($2k-1$) del elemento k , la matriz de rigideces del elemento a flexión empotrado en ambos extremos es reemplazada por una matriz de rigideces reducida de un elemento a flexión, articulado a la izquierda y empotrado a la derecha y en los nudos extremos del elemento k -ésimo se aplica un vector $\{f_k\}$ de fuerzas nodales equivalentes:

$$[K_k] = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 3EI/L^3 & 0 & 0 & -3EI/L^3 & 3EI/L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -EA/L & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -3EI/L^3 & 0 & 0 & 3EI/L^3 & -3EI/L^2 \\ 0 & 3EI/L^2 & 0 & 0 & -3EI/L^2 & 3EI/L \end{bmatrix}$$

$$\{f_k\} = \{0, (3/2l_k)M_{p_k}, M_{p_k}, 0, -(3/2l_k)M_{p_k}, M_{p_k}\} \quad (II.3.13)$$

donde M_{p_k} es el momento plástico del extremo izquierdo del elemento k y l_k es la longitud del mismo.

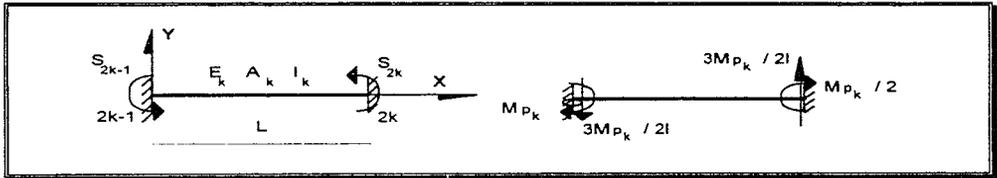


FIGURA II.3.1 Fuerzas nodales equivalentes.

Igualmente, cuando una articulación plástica se forma en el extremo derecho ($2k$) del elemento k , la matriz de rigidez del elemento a flexión empotrado en ambos extremos es reemplazada por una matriz de rigidez reducida de un elemento a flexión articulado a la derecha y empotrado a la izquierda, y el vector de fuerzas nodales equivalente $\{f_k\}$ aplicadas en los nudos extremos del elemento k -ésimo es:

$$[K_k]^p = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 3EI/L^3 & 3EI/L^2 & 0 & -3EI/L^3 & 0 \\ 0 & 3EI/L^2 & 3EI/L & 0 & -3EI/L^2 & 0 \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -3EI/L^3 & -3EI/L^2 & 0 & 3EI/L^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{f_k\}^p = \{0, (3/2l_k)M_{p_k}, M_{p_k}/2, 0, -(3/2l_k)M_{p_k}, M_{p_k}\} \quad (II.3.14)$$

Finalmente, cuando se forman dos articulaciones plásticas en los extremos del elemento, se tiene una matriz de rigidez reducida equivalente a un elemento barra bi-articulado (tipo armadura) y un vector de fuerzas nodales equivalentes aplicado en los extremos:

$$[K_k]^{ID} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{U_k\}^{ID} = \{ (M_{P_{2..1}} + M_{P_{2..2}}) / l_k \cdot M_{P_{2..1}}, 0, - (M_{P_{2..1}} + M_{P_{2..2}}) / l_k \cdot M_{P_{2..2}} \}$$
(II.3.15)

II.3.3. Expresiones para los estados de seguridad límite de las secciones de los elementos del sistema estructural.

Como se mencionó anteriormente en la sección II.2, después de que se forman una serie de articulaciones r_1, r_2, \dots, r_{p-1} , las matrices de rigidez de los elementos dañados se reemplazan por matrices de rigidez reducidas y las fuerzas residuales se aplican en los nudos del sistema como fuerzas nodales equivalentes. En estas condiciones se efectúa un nuevo análisis del sistema, de donde las fuerzas internas de los elementos restantes son:

$$S_{(r_1, r_2, \dots, r_{p-1})}^{(p)} = \sum_{j=1}^m b_{ij}^{(p)} P_j^{(p)} \tag{II.3.16}$$

que es similar a la ecuación II.3.8, con la diferencia que $(r_1, r_2, \dots, r_{p-1})$ significa el conjunto de secciones plastificadas arregladas por orden cronológico de aparición de falla, el vector $P_j^{(p)}$, es el vector de cargas externas mas cargas residuales de las $p-1$ secciones plastificadas, y los coeficientes $b_{ij}^{(p)}$; los los coeficientes de influencia esta ecuación se puede expresar también como:

$$S_{(r_1, r_2, \dots, r_{p-1})}^{(p)} = \sum_{j=1}^m b_{ij}^{(p)} P_j - \sum_{l=1}^{p-1} a_{il}^{(p)} R_{r_l} \tag{II.3.17}$$

donde P_j es el vector de cargas nodales externas, $b_{ij}^{(p)}$ son los coeficientes de influencia de las cargas externas obtenidos de manera similar a la expresión (II.3.8a), R_{r_l} es el vector de cargas residuales del elemento plastificado l , y $a_{il}^{(p)}$ son unos coeficientes de influencia.

Dadas las resistencias límite de los elementos R_i y las fuerzas internas (ec. II.3.10), las ecuaciones de estado de seguridad límite de los elementos restantes pueden escribirse:

$$Z_{i_1}^{(p)} = R_i - \text{signo}(S_{i_1}^{(p)}) S_{i_1}^{(p)} = R_i + \sum_{j=1}^{i_1-1} a_{i_1 j}^{(p)} R_j - \sum_{j=1}^{i_1} b_{i_1 j}^{(p)} P_j \quad (\text{II.3.18})$$

donde (*) representa $(r_1, r_2, \dots, r_{p-1})$. El criterio de falla representado por la función de seguridad de las secciones de las barras será entonces:

$$\begin{aligned} Z_{i_1, r_2, \dots, r_{p-1}}^{(p)} &\leq 0 \\ Z_{i_1, r_2, \dots, r_{p-1}}^{(p)} &= R_i + \sum_{j=1}^{i_1-1} a_{i_1 j}^{(p)} R_j - \lambda_{i_1} \sum_{j=1}^{i_1} b_{i_1 j}^{(p)} P_j \end{aligned} \quad (\text{II.3.19})$$

de la ecuación anterior se desprende que para hacer fallar la siguiente sección el factor de incremento necesario de la carga es igual a :

$$\lambda_{i_1} = \frac{R_i + \sum_{j=1}^{i_1-1} a_{i_1 j}^{(p)} R_j}{\sum_{j=1}^{i_1} b_{i_1 j}^{(p)} P_j} \quad (\text{II.3.20})$$

II.3.4. Criterio de estado límite de un sistema estructural formado por barras a flexión.

El estado límite del sistema está definido por la formación de un mecanismo de falla en la estructura. Un mecanismo es como se explica en la sección II.1, cuando el sistema se vuelve inestable por lo que sufrirá incrementos de deformaciones sin necesidad de incrementar la carga. En la figura II.3.2 se presentan algunos de los mecanismos de falla más comunes en marcos planos, aunque obviamente el tipo de mecanismo de falla dependerá de las características tanto físicas como elásticas de los materiales que conforman la estructura, así como de la distribución de las cargas que lo provocan.

Los mecanismos de falla se determinan a través de un análisis paso a paso, donde se van identificando en cada etapa los estados de plastificación parcial en los elementos de la estructura hasta la formación de un mecanismo. Cuando una sección de un elemento se plastifica una redistribución de esfuerzos se hace en los elementos restantes, para determinar en seguida una nueva plastificación.

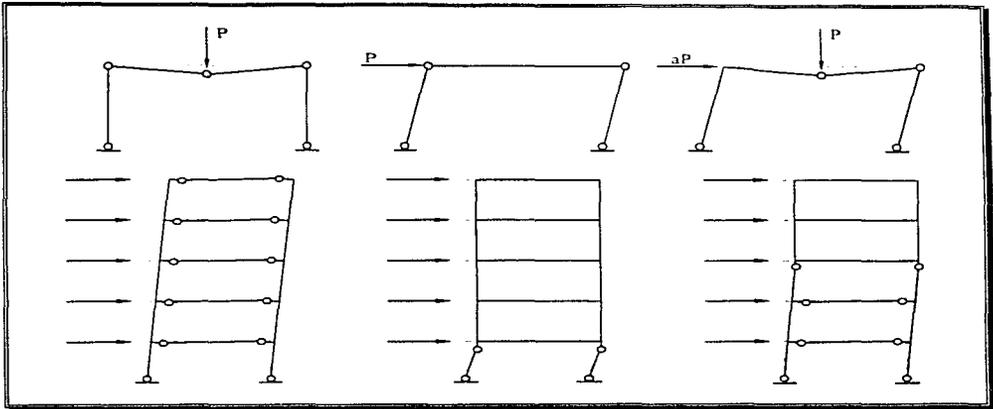


FIGURA II.3.2. Ejemplos de mecanismos de falla en marcos planos.

El criterio de falla de la estructura se daría teóricamente cuando la estructura (o partes de ésta), después de haber sufrido una serie de plastificaciones llegue a ser inestable, lo cual se podría demostrar con la singularidad de la matriz de rigidez de la misma mediante:

$$DET |K^p| = 0 \quad (II.3.21)$$

Las funciones de estado límite de seguridad, expresadas como una combinación lineal de las resistencias de las secciones extremas de los elementos y de las cargas aplicadas (ecuación II.3.19), facilitan grandemente la identificación de los mecanismos plásticos. La función de estado límite de seguridad del sistema estructural es la función de estado límite de la sección última a ser plastificada, es decir la función de la sección que produciría el colapso del sistema.

II.4. ANÁLISIS ELASTOPLÁSTICOS DE SISTEMAS ESTRUCTURALES CON ELEMENTOS SUJETOS A EFECTOS DE ESFUERZOS COMBINADOS.

Para los análisis elasto-plásticos de estructuras formadas de elementos que toman en cuenta la cedencia del material por la interacción de los esfuerzos, se aplica el mismo procedimiento descrito en el capítulo II.2, con la diferencia que el criterio de falla plástica de los elementos es producto de la interacción de los diferentes esfuerzos que afectan las secciones (ref 9). La dificultad reside en la obtención de la matriz de rigidez reducida y del vector de fuerzas de resistencia residual nodal equivalente. El objetivo de esta sección es por lo tanto, mostrar la deducción de dicha matriz de rigidez tangencial (reducida) y del vector de fuerzas equivalente para un elemento plastificado por interacción de esfuerzos, además, se hará un replanteamiento de los criterios de falla tanto de los elementos como del sistema estructural.

Dado que en grandes estructuras con un alto grado de redundancia, es difícil determinar a priori los modos de falla más significativos, en este capítulo se trabaja con aproximaciones lineales en los dominios de resistencia de los elementos, para facilitar la identificación de los mecanismos. Así un mecanismo de falla consiste en una serie de plastificaciones, separadas por etapas lineales. Los estados límite de plastificación parcial o total del sistema estructural se van obteniendo paso a paso con carga monótona creciente, a través de las secciones de los elementos críticos.

II.4.1. Criterio de falla de una barra sujeta a efectos de esfuerzos combinados.

Sean $\{X\}$ y $\{\delta\}$ los vectores de las fuerzas de nudo y los desplazamientos de un elemento unitario con extremos i, j ; para el caso de un elemento viga en el plano (figura II.4.1) estos vectores se pueden expresar como :

$$\begin{aligned} \{X\} &= \{F_x, F_y, M_x, F_x, F_y, M_x\} \\ \{\delta\} &= \{v_i, v_j, \theta_z, v_x, v_y, \theta_z\} \end{aligned} \quad (II.4.1)$$

Con el fin de tener en cuenta la interacción de las fuerzas en la condición de plasticidad, se aproxima la función de la superficie del estado límite por medio de una superficie linealizada :

$$Z_k = R_k - \{C_k\}^T \{X_k\} = 0 \quad (II.4.2)$$

donde $k = i$ ó j designan el extremo de la barra, R es la máxima fuerza resistente de la sección extrema k de la barra, $\{C_k\}^T$ es un vector dependiente de las dimensiones de la barra y $\{X_k\}$ es el vector de fuerzas nodales.

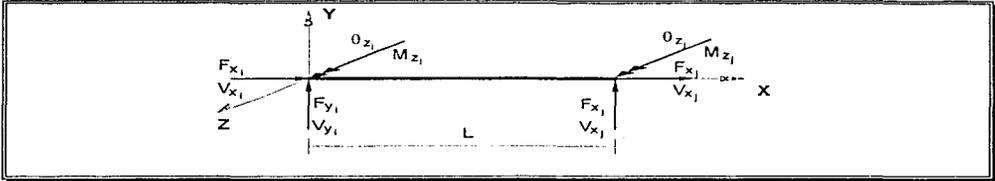


FIGURA II.4.1. Fuerzas y desplazamientos de un elemento viga para una estructura tipo marco.

Si se tiene en cuenta la interacción entre la fuerza normal y el momento flexionante para la condición de plasticidad, y si la capacidad del momento plástico se toma como la fuerza de referencia, se tiene que:

$$R_k = \sigma_{yk} \cdot Z_{ok}$$

$$\{C_i\} = \left\{ Z_{oi} / A_i \operatorname{signo}(F_{x_i}), 0, \operatorname{signo}(M_{z_i}), 0, 0, 0 \right\}$$

$$\{C_j\} = \left\{ 0, 0, 0, Z_{oj} / A_j \operatorname{signo}(F_{x_j}), 0, \operatorname{signo}(M_{z_j}) \right\} \quad (II.4.3)$$

donde σ_{yk} es el esfuerzo de fluencia, Z_{ok} el módulo de sección plástico, A_k el área de la sección transversal. La linealización de la superficie de falla se ilustra en la figura II.4.2.

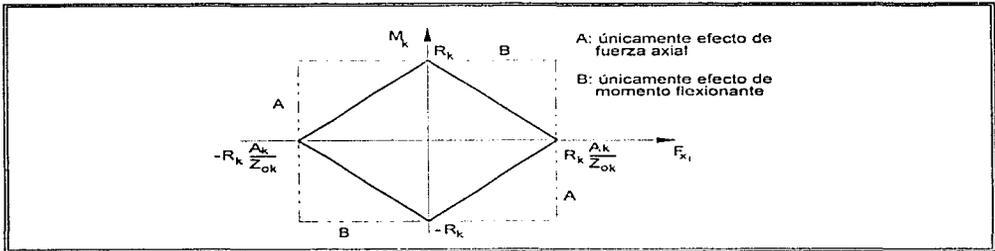


FIGURA II.4.2 Linealización de la condición de plasticidad para la interacción del momento flexionante y la fuerza axial.

Si se considera la interacción del momento flexionante y fuerza axial, para alcanzar la plasticidad de los elementos, considerando el efecto de pandeo, se tiene que:

$$R_k = \sigma_{yk} \cdot Z_{nk}$$

$$\{C_i\} = \{Z_{ni} / A_{ck} \text{ signo}(F_{xi}), 0, \text{ signo}(M_{zi}), 0, 0, 0\}$$

$$\{C_j\} = \{0, 0, 0, Z_{nj} / A_{ck} \text{ signo}(F_{xj}), 0, \text{ signo}(M_{zj})\} \quad (II.4.4)$$

donde A_{ck} es el área a compresión de la sección transversal. Tenemos que $A_{ck} = g(\lambda_w) A_k$, donde $g(\lambda_w)$ es un factor de reducción propuesto por Galambos y Ravindra (ref 10). Al utilizarse este valor de A_{ck} en los vectores $\{C_i\}$ y $\{C_j\}$, se obtiene una matriz de rigidez reducida y un vector de esfuerzos nodales equivalentes de un elemento sujeto a la interacción del momento flexionante y la fuerza axial considerando el fenómeno de pandeo. La nueva función de estado límite de resistencia modificada, se representa en la figura II.4.3. El área de la sección a compresión A_{ck} se obtiene de la siguiente manera:

$$A_{ck} = g(\lambda_w) A_k$$

$$N_c = A_{ck} F_y$$

$$g(\lambda_w) = \begin{cases} 1 - 0.25 \lambda_w^2 & \text{si } \lambda_w < \sqrt{2} \\ 1 / \lambda_w^2 & \text{si } \lambda_w \geq \sqrt{2} \end{cases} \quad (II.4.5)$$

$$\lambda_w = \frac{KL}{r\pi} \sqrt{\frac{F_y}{E}} ; \quad \frac{KL}{r} = \text{Longitud efectiva}; \quad r = \sqrt{\frac{I}{A_k}} = \text{Radio de giro}$$

donde N_c es la resistencia a compresión considerando pandeo, A_k es el área de la sección transversal, k es un coeficiente numérico que depende de las condiciones de apoyo de los extremos del elemento, E es el módulo de Young e I es el momento de inercia de la sección transversal.

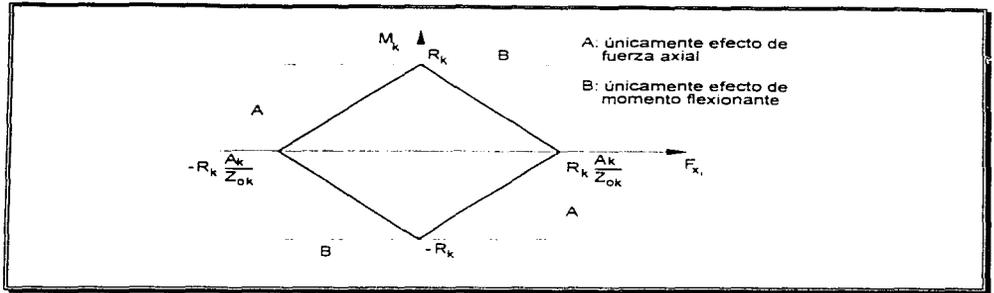


FIGURA II.4.3 Función linealizada del estado límite de resistencia modificada.

Si se considera la interacción del momento flexionante, la fuerza axial y la fuerza cortante :

$$R_k = \sigma_{yk} \cdot Z_{yk}$$

$$\{C_i\} = \left\{ a Z_{ok} / A, \text{signo}(F_x), b\sqrt{3} Z_{ok} / AF_y, \text{signo}(F_y), \text{signo}(M_y), 0, 0, 0 \right\}$$

$$\{C_j\} = \left\{ 0, 0, 0, a Z_{ok} / A, \text{signo}(F_x), b\sqrt{3} Z_{ok} / AF_y, \text{signo}(F_y), \text{signo}(M_y) \right\} \quad (II.4.6)$$

donde AF_i , AF_j son el área efectiva de la sección extrema del miembro provocada por la fuerza cortante, y a , b son coeficientes de los efectos de fuerza cortante y fuerza axial ($a = 1$ y $b = 0.5$). La superficie de falla considerando la interacción entre momento flexionante, fuerza cortante y carga axial se muestra en la figura II.4.4.

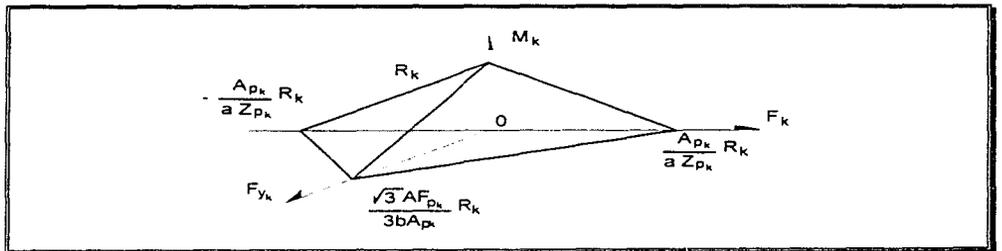


FIGURA II.4.4. Linealización de la condición de plasticidad para la interacción del momento flexionante, fuerza cortante y fuerza axial.

II.4.2. Cálculo de la rigidez tangente (matriz de rigidez reducida) y de las fuerzas residuales equivalentes aplicadas en los nudos.

La relación entre el vector de fuerzas de nudo y el vector de desplazamientos para un elemento con comportamiento elástico lineal es:

$$\{X_i\} = [k_i] \{\delta\} \quad (II.4.7)$$

donde $[k_i]$ es la matriz de rigidez elástica del elemento.

El desplazamiento total $\{\delta_i\}$ de un elemento es la suma de un desplazamiento elástico y un desplazamiento plástico:

$$\begin{aligned} \{\delta_i^e\} &= \text{desplazamiento elástico} & \{\delta_i^p\} &= \text{desplazamiento plástico} \\ \{\delta_i\} &= \{\delta_i^e\} + \{\delta_i^p\} = \{\delta_i^e\} + \{\delta_i^f\} + \{\delta_i^f\} \end{aligned} \quad (II.4.8)$$

A partir de la teoría de la deformación plástica (o de la ley de fluencia plástica), se puede expresar la deformación plástica por:

$$\begin{aligned} \{\delta_i^e\} &= \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial \{X_i\}} = -\lambda_i \{C_i\} \\ \{\delta_i^f\} &= \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial \{X_i\}} = -\lambda_j \{C_j\} \end{aligned} \quad (II.4.9)$$

donde λ_i y λ_j son factores que indican la magnitud de la deformación plástica. Las fuerzas nodales $\{X_i\}$ pueden expresarse como:

$$\{X_i\} = [K_i] \{\delta_i\} = [K_i] (\{\delta_i^e\} - \{\delta_i^f\}) \quad (II.4.10)$$

A partir de las ecuaciones (II.4.7) y (II.4.9), la ecuación (II.4.10) puede escribirse como:

$$\{X_i\} = [K_i] \{\delta_i^e\} + [K_i] \{C_i\} \lambda_i + [K_i] \{C_j\} \lambda_j \quad (II.4.11)$$

Sustituyendo la ecuación (II.4.11) en (II.4.3) tenemos:

$$\begin{aligned} Z_i &= R_i - \{C_i\}^T \left[[K_i] \{\delta_i\} + [K_i] \{C_i\} \lambda_i + [K_i] \{C_j\} \lambda_j \right] = 0 \\ Z_i &= R_i - \{C_i\}^T \left[[K_i] \{\delta_i\} + [K_i] \{C_i\} \lambda_i + [K_i] \{C_j\} \lambda_j \right] = 0 \end{aligned} \quad (II.4.12)$$

Si sustituimos los valores de λ_i y λ_j en función de δ_i , deducidos de las ecuaciones anteriores (II.4.12), en la ecuación (II.4.11), y desarrollando las ecuaciones se tiene:

$$\{X_i\} + \{-\{X_i^r\}\} = [K_i^r] \{\delta_i\} \quad (II.4.13)$$

donde $[K_i]^{(r)}$ es la matriz de rigidez reducida del elemento i y $\{X_i\}^{(r)}$ es el vector de fuerzas nodales equivalentes con signo opuesto, siendo:

$$\begin{aligned} [K_i]^{(r)} &= [K_i] - [H]^T [G]^{-1} [H] \\ \{X_i\}^{(r)} &= [H]^T [G]^{-1} \begin{Bmatrix} R_i \\ R_i \end{Bmatrix} \\ [G]^{-1} &= \begin{bmatrix} \{C_i\}^T [K_i] \{C_i\} & \{C_i\}^T [K_i] \{C_j\} \\ \{C_j\}^T [K_i] \{C_i\} & \{C_j\}^T [K_i] \{C_j\} \end{bmatrix}^{-1} \\ [H] &= \begin{bmatrix} \{C_i\}^T [K_i] \\ \{C_j\}^T [K_i] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (II.4.14)$$

Ahora bien, analizando las ecuaciones anteriores para los diferentes casos de plastificación se tiene:

1) De forma explícita tenemos para el caso de una barra elástica:

$$\lambda_i = \lambda_j = 0$$

sustituyendo en la ecuación (II.4.12):

$$\begin{aligned} [K_i]^{(r)} &= [K_i] \\ \{X_i\}^{(r)} &= 0 \end{aligned} \quad (II.4.15)$$

2) Si la sección del extremo izquierdo (i) de la barra cede o se plastifica, se tiene:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{R_i - \{C_j\}^T [K_i] \{\delta_j\}}{\{C_i\}^T [K_i] \{C_i\}} \quad ; \quad \lambda_j = 0 \\ [K_i]^{(r)} &= [K_i] - \frac{[K_i] \{C_i\} \{C_i\}^T [K_i]}{\{C_i\}^T [K_i] \{C_i\}} \end{aligned} \quad (II.4.16)$$

$$\{X_i\}^{(p)} = \frac{R_i [K_i] \{C_i\}}{\{C_i\}^T [K_i] \{C_i\}}$$

3) Si la sección del extremo derecho (j) del elemento se plastifica, se tienen las mismas ecuaciones anteriores (II.4.16), cambiando únicamente los índices (i) por (j).

4) Si los dos extremos de la barra ceden se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \lambda_i \\ \lambda_j \end{Bmatrix} = -[G]^{-1} [H] \{S_i\} + [G]^{-1} \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \end{Bmatrix} \quad (\text{II.4.17})$$

y los valores de $[K_i]^{(p)}$, $\{X_i\}^{(p)}$ y son los expresados en las ecuaciones (II.4.14).

II.4.3. Expresiones para los estados de seguridad limite de las secciones de los elementos del sistema estructural.

Considérese un sistema mecánico de n elementos; los extremos de las barras se numeran en serie y el criterio de falla o plastificación de un elemento i esta dado por:

$$Z_i = R_i - \{C_i\}^T \{X_i\} \leq 0 \quad (\text{II.4.18})$$

Supongamos que las secciones en los extremos de las barras $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{p-1}$ han cedido. Podemos ejecutar una vez más el análisis estructural utilizando las matrices de rigidez reducidas de los elementos dañados y las fuerzas de nudo equivalentes correspondientes, de acuerdo con las ecuaciones (II.4.13) y (II.4.14). Ahora el criterio de falla se puede escribir como :

$$Z_{i(t_1, t_2, \dots, t_{p-1})} = R_i - \{C_i\}^T \{X_i\} \leq 0 \quad (\text{II.4.19})$$

donde $\{X_i\}$ es el vector de fuerzas internas del elemento t producidas por la fuerzas nodales externas $\{P\}$ y por las fuerzas nodales equivalentes (residuales) $\{R\}^{(p)}$ producto de las $p-1$ plastificaciones. Este vector de fuerzas nodales $\{X_i\}$ del t -ésimo elemento esta dado por:

$$\{X_i\} = [s_i]^{(p)} \{L_i\} + \{R_i\}^{(p)} + \{X_i\}^{(p)} \quad (\text{II.4.20})$$

donde:

$$[s_i]^{(p)} = [K_i]^{(p)} [T_i] [[K_i]^{(p)}]^{-1} \quad (\text{II.4.21})$$

A partir de las ecuaciones (II.4.19), (II.4.20) y (II.4.21), se puede expresar el estado límite de seguridad de la sección i , después que las secciones r_1, r_2, \dots, r_{p-1} han fallado, mediante :

$$Z_{i(r_1, r_2, \dots, r_{p-1})} = R_i - \sum_{l=1}^{p-1} a_{lr_i} \{d\}^{(p)} R_{r_l} - \sum_{l=1}^{p-1} b_{ly} \{d\}^{(p)} L_l \leq 0 \quad (II.4.22)$$

donde a_{lr_i} y b_{ly} son unos coeficientes de influencia, y R_{r_l} la resistencia límites de la l -ésima sección plastificada.

II.4.4. Criterio de estado límite del sistema estructural.

La falla de la estructura se obtiene cuando un número determinado de elementos alcanzan la plastificación en sus extremos y rebasan cierto valor pq (estas secciones están numeradas, $(r_1, r_2, \dots, r_{pq})$) y cuando la matriz de rigidez total reducida de la estructura $[K]^{(p)}$ o el vector de desplazamientos nodales totales, $\{d\}^{(p)}$ satisfacen una de las siguientes condiciones:

$$\frac{DET|[K]^{(p)}|}{DET|[K]^{(o)}|} \leq \varepsilon_1 ; \quad \frac{\|\{d\}^{(o)}\|}{\|\{d\}^{(p)}\|} \leq \varepsilon_2 \quad (II.4.23)$$

donde pq y o denotan respectivamente la etapa de falla pq -ésima y la condición inicial, $\|\cdot\|$ la norma euclidiana, y ε_1 y ε_2 son las constantes que determinan la etapa de falla plástica límite del sistema.

Es claro también, que la función de estado límite de seguridad del sistema es la función de estado límite de seguridad de la sección r_{pq} que al presentar su falla se considera como la falla del sistema.

II.5.COMENTARIOS.

El procedimiento para la realización de análisis elasto-plásticos de estructuras presentado en este capítulo es aplicable a todo tipo de estructuras, ya sea en el plano o en el espacio, y sujetas a cualquier tipo de cargas. En este capítulo se presentan dos casos particulares para la realización de los análisis, considerando en ambos, que se trata de elementos actuando en el plano y sometidos a flexión en el primer caso, y a esfuerzos combinados de flexión, cortante, carga axial, efectos de pandeo, etc., en el segundo caso. En el caso de estructuras en el espacio, se puede aplicar el método de la misma forma, pero es necesario considerar la interacción de los esfuerzos en los elementos de la estructura, tales como, flexión en dos direcciones, momento de torsión, fuerza axial y fuerzas cortantes en dos direcciones, donde los vectores para determinar la condición de plasticidad (C_1 y C_2) dependerán también de las interacción de los esfuerzos antes mencionados.

Es claro que se parte de una hipótesis de linealidad del dominio de resistencia, la cual no es válida para todo tipo de comportamiento de los elementos de las estructuras, sin embargo, esta hipótesis esta justificada tanto por la simplicidad en el cálculo de las funciones de estado de seguridad límite, como por el hecho de que este comportamiento en general se encuentra bastante aproximado al de las estructuras más comunes, que por lo general presentan un dominio de resistencia ligeramente mas alto al considerado.

El hecho de representar las funciones de estado de seguridad como combinación lineal tanto de las fuerzas externas como de las resistencias de los elementos facilita la identificación de las secciones mas esforzadas, y con esto la sistematización del método. Además es posible identificar mecanismos de falla diferentes al mecanismo crítico, plastificando secciones que en determinada etapa no sean las mas esforzadas, con lo que se pueden obtener diferentes funciones de estado de seguridad límite de la estructura, para diferentes mecanismos de falla de la misma.

Dado que en realidad la metodología para realizar los análisis elasto-plásticos, consiste en realizar análisis elásticos lineales en cada etapa, y que las funciones de estado de las secciones están expresadas como combinación lineal de las fuerzas y las resistencias, es posible identificar el mecanismo de falla sin la necesidad de incrementar la carga al realizar los análisis, es decir, que en cada etapa del análisis, se obtiene un factor de incremento de la carga inicial para plastificar dichas secciones.



OBTENCION DE LOS ESTADOS LIMITES PLASTICOS DE EDIFICIOS EN EL ESPACIO SOMETIDOS A TORSION POR SISMO

III.1 INTRODUCCIÓN.

Como se comentó en el capítulo anterior, la metodología para realizar los análisis elastoplásticos de sistemas estructurales es válida tanto para estructuras en el plano, como estructuras en el espacio, pero el realizar análisis elastoplásticos tridimensionales implica tomar en cuenta las fuerzas y deformaciones que se producen en los elementos en varias direcciones, es decir, considerar seis grados de libertad por nodo y por lo tanto doce grados de libertad en cada uno de los elementos que conforman el sistema estructural, para lo cual se requiere mayor capacidad de cálculo, y dificulta la interpretación de resultados.

Debido a las dificultades antes mencionadas, en el presente capítulo se presenta una metodología para realizar los análisis elastoplásticos en estructuras tipo edificio, sometidos a sismo, basado en el método de análisis matricial simplificado de edificios que se presenta en el capítulo I. Este método permite distribuir la carga sísmica que se aplica al sistema estructural a cada uno de los marcos que lo conforman, y para ello se basa en una serie de hipótesis simplificadoras, siendo las más importantes : 1) el considerar que la estructura está formada por marcos planos que trabajan en forma independiente, unidos por el sistema de piso, el cual se considera como diafragma rígido, por lo que las deformaciones de los marcos dependen de las deformaciones de las losas; y 2) el considerar un giro como grado de libertad en cada uno de los niveles, con lo cual se toma en cuenta el fenómeno de torsión que produce fuerzas adicionales a los marcos.

La utilización de las hipótesis antes mencionadas permiten por un lado, considerar que las plastificaciones que se producen en los marcos sean producto únicamente de la interacción de esfuerzos en el plano de trabajo del marco al que pertenece la sección potencialmente plastificable, y por otro lado, degradar la matriz de rigidez global del sistema al degradar la matriz de rigidez de cada uno de los marcos que conforman la estructura.

Para lograr la compatibilidad del método tridimensional simplificado con el de análisis elastoplástico es necesario determinar los efectos, en cuanto a deformaciones, que producen las fuerzas equivalentes (de resistencia residual) producto de las posibles plastificaciones en los marcos, lo cual se logra haciendo un sistema equivalente en el que las fuerzas residuales, que son por lo general

momentos y fuerzas cortantes, se transforman a fuerzas laterales y se puedan sumar a las fuerza sísmica que se aplica al sistema, logrando con esto que todas las resistencias residuales resultado de las plastificaciones tengan efecto directo en los desplazamientos del sistema estructural, y por lo tanto en las fuerzas que se distribuyen a cada uno de los marcos (ref 11).

Entre las ventajas de este método se encuentra el que se pueda tener una idea clara de cómo se va degradando la estructura, ya que al considerar que cada marco actúe en forma independiente permite visualizar las plastificaciones que se presentan en cada uno de ellos en forma separada.

III.2 METODOLOGÍA PARA LOS ANÁLISIS AL LÍMITE PLÁSTICO DE EDIFICIOS TRIDIMENSIONALES.

A continuación se presenta la metodología para la realización de los análisis elastoplásticos tridimensionales simplificados, haciendo énfasis principalmente el manejo de las fuerzas residuales y su transformación en fuerzas laterales al sistema.

III.2.1 Obtención de los vectores de fuerzas residuales laterales.

Para el marco j de la estructura tipo edificio las secciones $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n-1}$ se han plastificado, ahora se tiene una matriz de rigidez reducida $[K^{(p)}]$ y un vector de fuerzas residuales $\{f_R\}$. Por lo tanto, el sistema a resolver considerando carga sísmica es :

$$[K]_j^{(p)} \{\Delta, \}_j = \{f_s, \}_j + \{f_R, \}_j \quad (\text{III.2.1})$$

donde :

$[K]_j^{(p)}$ es la matriz de rigidez reducida del marco j .

$\{\Delta, \}_j$ es el vector de desplazamientos del marco j (i indica el nivel).

$\{f_s, \}_j$ es el vector de fuerzas externas (sísmicas) a la que está sometido el marco j .

$\{f_R, \}_j^{(p)} = \sum_{i=1}^{n-1} \{f_{R_i}, \}_j^{(p)}$ es el vector de donde se suman las fuerzas residuales producidas por las $p-1$ plastificaciones.

Ensamblando las matrices de rigidez y de fuerzas con los grados de libertad correspondientes a los desplazamientos horizontales en las últimas posiciones de manera similar a lo expresado en la sección 1.3, el sistema (III.2.1) se puede representar como :

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix}^{(p)} \begin{Bmatrix} \{\Delta_1\} \\ \{\Delta_2\} \end{Bmatrix}_j = \begin{Bmatrix} \{f_{s_1}\} \\ \{f_{s_2}\} \end{Bmatrix}_j + \begin{Bmatrix} \{f_{R_1}\} \\ \{f_{R_2}\} \end{Bmatrix}_j^{(p)}$$

dado que la fuerza sísmica es únicamente horizontal $\{f_{s_1}\} = Q$

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix}^{(p)} \begin{Bmatrix} \{\Delta_1\} \\ \{\Delta_2\} \end{Bmatrix}_j = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f_{s_2}\} \end{Bmatrix}_j + \begin{Bmatrix} \{f_{R_1}\} \\ \{f_{R_2}\} \end{Bmatrix}_j^{(p)} \quad (\text{III.2.2})$$

desarrollando :

$$[K_{11}] \{\Delta_1\} - [K_{12}] \{\Delta_2\} = \{0\} + \{f_{R_1}\} \quad (III.2.3)$$

$$[K_{21}] \{\Delta_1\} + [K_{22}] \{\Delta_2\} = \{f_{S_1}\} + \{f_{R_2}\} \quad (III.2.4)$$

despejando de Δ_1 de (III.2.3) :

$$\{\Delta_1\} = [K_{11}]^{-1} \{f_{R_1}\} - [K_{11}]^{-1} [K_{12}] \{\Delta_2\} \quad (III.2.5)$$

sustituyendo (III.2.5) en (III.2.4) :

$$\begin{aligned} [K_{21}] [[K_{11}]^{-1} \{f_{R_1}\} - [K_{11}]^{-1} [K_{12}] \{\Delta_2\}] + [K_{22}] \{\Delta_2\} &= \{f_{S_1}\} + \{f_{R_2}\} \\ [K_{21}] [K_{11}]^{-1} \{f_{R_1}\} - [K_{21}] [K_{11}]^{-1} [K_{12}] \{\Delta_2\} + [K_{22}] \{\Delta_2\} &= \{f_{S_1}\} + \{f_{R_2}\} \\ [[K_{22}] - [K_{21}] [K_{11}]^{-1} [K_{12}]] \{\Delta_2\} &= \{f_{S_1}\} + \{f_{R_2}\} - [K_{21}] [K_{11}]^{-1} \{f_{R_1}\} \\ [K_L]_j^{(p)} \{\Delta_2\}_j &= \{f_{S_1}\}_j + \{f_{LR}\}_j^{(p)} = \{f^{tot}\}_j^{(p)} \end{aligned} \quad (III.2.6)$$

donde :

$$[K_L]_j^{(p)} = [[K_{22}]_j - [K_{21}]_j [K_{11}]_j^{-1} [K_{12}]_j]_j^{(p)} \quad \text{es la matriz de rigidez lateral del marco } j.$$

$\{f_{S_1}\}_j$ es la fuerza sísmica aplicada en el marco j (incógnita).

$$\{f_{LR}\}_j^{(p)} = \{f_{R_2}\}_j^{(p)} - [K_{21}]_j [K_{11}]_j^{-1} \{f_{R_1}\}_j^{(p)} \quad \text{es el vector de fuerzas residuales laterales del marco } j.$$

III.2.2 Obtención de la matriz de rigidez tridimensional del sistema y fuerzas laterales totales.

Por equilibrio, las fuerzas totales aplicadas en las losas son :

$$\{F\} = \sum_{j=1}^{nm} [T]_j^T \{f^{tot}\}_j^{(p)} \quad (III.2.7)$$

donde :

nm es el número de marcos,

$\{F\}$ es el vector de fuerzas totales aplicadas en las losas,

$\{f^{(p)}\}_j$ son las fuerzas totales laterales aplicadas en el marco j .

$[T]^T$ es la matriz de transformación que relaciona los desplazamientos en los marcos con los desplazamientos en las losas (ecuación I.3.5).

de la ecuación (III.2.6) se tiene que :

$$\{f^{(p)}\}_j = \{f_{S_j}\} + \{f_{LR_j}\}^{(p)} \quad (\text{III.2.8})$$

sustituyendo (III.2.8) en (III.2.7) :

$$\begin{aligned} \{F\} &= \sum_{j=1}^{nm} [T]_j^T \left(\{f_{S_j}\} + \{f_{LR_j}\}^{(p)} \right) \\ \{F\} &= \sum_{j=1}^{nm} [T]_j^T \{f_{S_j}\} + \sum_{j=1}^{nm} [T]_j^T \{f_{LR_j}\}^{(p)} \end{aligned}$$

que se puede escribir como :

$$\{F\} = \{F_S\} + \{F_{LR}\}^{(p)} \quad (\text{III.2.9})$$

donde :

$\{F_S\} = \sum_{j=1}^{nm} [T]_j^T \{f_{S_j}\}$ es la fuerza sísmica aplicada en la losa, resultado del método estático (R.D.F.).

$\{F_{LR}\} = \sum_{j=1}^{nm} [T]_j^T \{f_{LR_j}\}$ es la sumatoria de las fuerzas residuales laterales de todos los marcos.

Por otro lado las fuerzas laterales totales de cada marco se puede expresar en función de los desplazamientos de las losas (ecuación (III.2.6)) :

$$\{f^{(p)}\}_j = [K_L]_j^{(p)} \{\Delta_2\}_j$$

y los desplazamientos laterales de los marcos se pueden expresar en función de los desplazamientos de las losas mediante la matriz de transformación (ecuación (I.3.5)):

$$\{\Delta\}_j = [T]_j \{\delta\} \quad (\text{III.2.10})$$

sustituyendo (III.2.10) en (III.2.6) :

$$\{F^{(p)}\}_i = [K_L]_i^{(p)} [T]_i \{\delta\} \quad (III.2.11)$$

aplicando el valor de (III.2.11) en la ecuación (III.2.7) :

$$\begin{aligned} \{F\} &= \sum_{i=1}^m [T]_i^T [K_L]_i^{(p)} [T]_i \{\delta\} \\ \{F\} &= [K_T]^{(p)} \{\delta\} \end{aligned} \quad (III.2.12)$$

donde :

$$[K_T]^{(p)} = \sum_{i=1}^m [T]_i^T [K_L]_i^{(p)} [T]_i, \quad \text{la denominamos como matriz de rigideces tridimensional simplificada.}$$

Ahora sustituyendo $\{F\}$ de (III.2.10) en (III.2.12) :

$$\{F_S\} + \{F_{LR}\}^{(p)} = [K_T]^{(p)} \{\delta\} \quad (III.2.13)$$

Como se observa, la ecuación anterior es la ecuación a resolver, ya que la única incógnita es el vector de desplazamientos de las losas, ya que $\{F_S\}$ es el valor de la fuerza sísmica del sistema, $\{F_{LR}\}^{(p)}$ es la sumatoria de las cargas residuales de las $p-1$ plastificaciones ocurridas en el sistema (convertidas en fuerzas laterales como se indica en la ecuación (III.2.6)), y $[K_T]^{(p)}$ es la matriz de rigidez tridimensional simplificada del sistema, dependiente de las matrices de rigideces (reducidas) de cada uno de los marcos que forman el sistema estructural.

III.2.3 Obtención de desplazamientos y fuerzas laterales en los marcos.

Una vez obtenidos los desplazamientos de las losas $\{\delta\}$ se deben obtener los desplazamientos en los marcos, lo cual se realiza mediante la ecuación (III.2.10). El resultado de esta conversión son los desplazamientos en cada nivel de cada uno de los marcos en su dirección $\{\Delta\}_j$, por lo tanto las fuerzas sísmicas para cada marco se obtienen mediante despejando de la ecuación III.2.6 el valor de las fuerzas sísmicas:

$$\{F_S\}_j = [K_L]_j^{(p)} \{\Delta\}_j - \{F_{LR}\}_j^{(p)} \quad (III.2.14)$$

Cabe señalar que esta carga es la carga lateral que absorbe el marco j , y depende tanto de la orientación y rigidez del mismo, así como de las fuerzas residuales de todo el sistema. La ecuación anterior se puede escribir como :

$$\{f_{N_z}\}_j = \{f_{N_z}^{(S_1)}\}_j - \{f_{N_z}^{(R_1)}\}_j - \{f_{LR}^{(P)}\}_j \quad (\text{III.2.15})$$

donde :

$\{f_{N_z}^{(S_1)}\}_j$ es la fuerza que absorbe el marco j debido a la fuerzas sísmica del sistema,

$\{f_{N_z}^{(R_1)}\}_j$ es la fuerzas lateral que absorbe el marco j debido a las fuerzas residuales del sistema,

y

$\{f_{LR}^{(P)}\}_j$ es el vector de fuerzas residuales laterales del marco j .

por lo tanto, con esta carga se debe realizar el análisis elastoplástico clásico del marco, recordando que se deben aumentar las cargas residuales de las plastificaciones en sus respectivos grados de libertad.

III.3 METODOLOGÍA PARA LA OBTENCIÓN DE LAS FUNCIONES DE ESTADO LÍMITE PLÁSTICO DE ESTRUCTURAS EN EL ESPACIO TIPO EDIFICIO.

Para el caso de un sistema estructural en el espacio tipo edificio, las funciones de estado límite de falla de un sistema estructural se obtienen como sigue. Después de que se forman $p-1$ plastificaciones, las matrices de rigidez de los elementos dañados se reemplazan por matrices de rigidez reducidas y las fuerzas residuales se transforman fuerzas en los nudos del sistema como fuerzas nodales equivalentes. En estas condiciones se efectúa un nuevo análisis del sistema tridimensional, como se indica en la sección anterior, para obtener las fuerzas laterales que absorben cada uno de los marcos. El sistema a resolver es :

$$\{F_N\} + \{F_{LR}\}^{(p)} = [K_T]^{(p)} \{\delta\} \quad (III.3.1)$$

el cual se puede resolver mediante :

$$\{\delta\} = [K_T]^{(p)-1} (\{F_N\} + \{F_{LR}\}^{(p)}) \quad (III.3.2)$$

Los desplazamientos del marco j se pueden obtener de los desplazamientos en las losas mediante la matriz de transformación :

$$\begin{aligned} \{\Delta\}_j &= [T]_j \{\delta\} \\ \{\Delta_z\}_j &= [T]_j [K_T]^{(p)-1} (\{F_N\} + \{F_{LR}\}^{(p)}) \end{aligned} \quad (III.3.3)$$

Los desplazamientos del marco j se puede determinar la fuerza que absorbe éste mediante las expresiones (III.2.14) , sustituyendo la ecuación (III.3.3) en ésta :

$$\begin{aligned} \{f_{S_i}\}_j &= [K_L]_j^{(p)} \{\Delta_z\}_j - \{f_{LR}\}_j^{(p)} \quad (\text{ec. III.2.14}) \\ \{f_{S_i}\}_j &= [K_L]_j^{(p)} \left([T]_j [K_T]^{(p)-1} (\{F_N\} + \{F_{LR}\}^{(p)}) \right) - \{f_{LR}\}_j^{(p)} \end{aligned}$$

que se puede escribir como :

$$\{f_{S_i}\}_j = [E_{ij}]_j^{(p)} (\{F_N\} + \{F_{LR}\}^{(p)}) - \{f_{LR}\}_j^{(p)} \quad (III.3.4)$$

donde :

$$[\xi_i]_j^{(p)} = [K_i]_j^{(p)} [T]_j [K_i^{(p)}]^{-1}$$

Con las fuerzas laterales $\{F_{i2}\}_j$ se efectúa un nuevo análisis elastoplástico en cada marco j por separado, de éste se obtienen las fuerzas internas de cada uno de los elementos. En la ecuación (III.3.4) se observa que estas fuerzas internas dependen de las fuerzas sísmicas externas $\{F_{ij}\}$, de la sumatoria de las fuerzas residuales producto de las $p-1$ plastificaciones del sistema completo (incluyendo el marco j) $\{F_{LR}\}^{(p)}$, y de la sumatoria de las fuerzas residuales de las plastificaciones en el propio marco j $\{F_{LR}\}_j^{(p)}$.

Como se mencionó en el capítulo II.4 la función de estado límite de cualquier sección i se puede expresar mediante :

$$Z_{(r_1, r_2, \dots, r_{p-1})} = R_i - \{C_i\} \{X_i\} \leq 0 \quad (\text{III.3.5})$$

donde $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{p-1}$ significan las $p-1$ secciones plastificadas, R_i es la resistencia límite de la sección i , $\{C_i\}$ es el vector que define la condición de plasticidad (ver sección II.4) y $\{X_i\}$ es el vector de fuerzas internas del elemento al que pertenece la sección i .

Dado que las fuerzas internas de cualquier elemento dependen de las fuerzas sísmicas externas, de las fuerzas residuales del sistema estructural, y de las fuerzas residuales del marco en análisis, la función de estado límite se puede presentar como :

$$Z_{(r_1, r_2, \dots, r_{p-1})}^{(p)} = R_i + \sum_{k=1}^{p-1} c_{ik}^{(p)} R_k + \sum_{m=1}^{n-1} a_{im}^{(p)} R_m - \sum_{l=1}^{\infty} d_{il}^{(p)} F_{il} \leq 0 \quad (\text{III.3.6})$$

donde $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{p-1}$ significan las $p-1$ secciones plastificadas del sistema, p_j es el número de secciones plastificadas del marco j , n_e es el número de enrejados o niveles, $c_{ik}^{(p)}$, $a_{im}^{(p)}$ y $d_{il}^{(p)}$ unos coeficientes de influencia (que dependen de las propiedades geométricas y mecánicas de los materiales de los elementos del marco en estudio y del sistema), F_{il} son las fuerzas sísmicas laterales del sistema, R_{im} son las resistencias límite asociadas a las $p-1$ plastificaciones del sistema estructural, R_{ik} son las resistencias límite asociadas a las p_j-1 plastificaciones del marco j .

III.4 COMENTARIOS.

En resumen, esta metodología facilita los análisis elastoplásticos de sistemas estructurales tipo edificios formados a base de marcos planos (donde los marcos trabajan en su plano) y losas rígidas, sometidos a torsión por sismo; por otro lado, permite identificar los estados límites de falla plástica del sistema estructural y las funciones que los representan. La condición de plasticidad de los elementos estructurales bajo combinación de esfuerzos es linealizada y las funciones de estado de los extremos de los elementos son expresadas como una combinación lineal de las resistencias de estas secciones extremas y de las cargas aplicadas. La hipótesis de linealidad en el dominio de resistencia no siempre es válida para todo tipo de estructuras, sin embargo esta hipótesis de linealidad se justifica, tanto por la simplicidad en el cálculo de las funciones de estado límite como por su aproximación al comportamiento real de las estructuras para fines prácticos.

El método simplifica la identificación de los estados límites de falla plástica del sistema estructural, estudiando por un lado los desplazamientos y giros de las losas provocados tanto por las fuerzas sísmicas como por las fuerzas constantes equivalentes producto de las plastificaciones de todos los marcos del sistema, así como los mecanismos de falla de los marcos en su plano de trabajo. Además de obtener el mecanismo crítico de colapso, el método permite identificar otros posibles mecanismos de falla. Finalmente, cuando se conocen otros modos de falla de la estructura, identificados por ejemplo por inspección, el método permite deducir fácilmente las funciones de estado límite asociadas a esos mecanismos, realizando un solo análisis de la estructura, con la carga inicial e identificando o definiendo los elementos plastificados.

IV

MODELO DE CONFIABILIDAD

En un contexto probabilista, el estudio de seguridad de un sistema estructural implica tomar en cuenta la aleatoriedad del sistema en sí mismo y de las solicitaciones a las cuales está sometido.

En general se supone la geometría determinista y se toma en cuenta el carácter aleatorio de las resistencias y de las solicitaciones (parámetros de carga); las variables aleatorias que describen estas magnitudes y que intervienen en las ecuaciones son llamadas variables de base.

Para sistemas estructurales con comportamiento elastoplástico se puede establecer funciones simples para los estados límite de falla del sistema, como se muestra en los capítulos II y III.

En teoría, estas funciones de falla del sistema están descritas por las distribuciones de probabilidad de las variables de base y la probabilidad de falla del sistema se obtiene por la evaluación de las integrales de convulsión apropiadas.

En la práctica las funciones de probabilidad acumulada de los estados límites son difíciles de determinar y su solución requiere integraciones numéricas de dimensiones elevadas o de técnicas de simulación Monte-Carlo.

Antes de proponer un metodología simple para la evaluación de la probabilidad de falla global de un sistema estructural, se mencionan algunas nociones sobre confiabilidad (ref. 12).

IV.1 CONFIABILIDAD DE SISTEMAS ESTRUCTURALES.

La teoría de confiabilidad para los sistemas estructurales tratada en esta sección, se enfoca a problemas de confiabilidad del tipo de estado límite, es decir a problemas definidos por una división del espacio de formulación física n -dimensional de las variables de base $\{X\} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ en dos conjuntos de puntos: un conjunto ligado a un conjunto de seguridad S y otro ligado a un conjunto complemento de falla F . La hipersuperficie que constituye la frontera $\partial S = \partial F$, es llamada la superficie de estado límite y esta convencionalmente considerada como un subconjunto del conjunto de falla.

El problema de confiabilidad puede ser descrito por una función de estado tal que:

$$g(\{X\}) \begin{cases} < 0 \text{ para } \{X\} \in F \\ = 0 \text{ para } \{X\} \in \partial F \\ > 0 \text{ para } \{X\} \in S \end{cases} \quad (\text{IV.1.1})$$

En aplicaciones prácticas el problema de confiabilidad esta formulado, adaptando un modelo de comportamiento mecánico de la estructura. El modelo esta comúnmente basado en la teoría determinista, sobre el comportamiento de estado límite del sistema estructural.

El conjunto de variables de base físicas $\{X\}$, utilizado en el modelo, esta de una cierta manera escogido arbitrariamente. El conjunto contiene típicamente variables de geometría, de carga, de fuerza, de rigidez y de masa.

IV.1.1 Probabilidad de falla asociada a un estado límite de un sistema.

En general, un análisis de confiabilidad de un sistema estructural real puede implicar múltiples variables aleatorias de base, de todo tipo, y de relaciones no lineales entre ellas. Bajo este contexto y con el fin de generalizar el análisis, que puede ser formulado en términos de variables de base, se define primero una función de comportamiento o de estado:

$$Z = g(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (\text{IV.1.2})$$

donde Z se utiliza tradicionalmente en el diseño de estructuras para definir el margen de seguridad, \mathbf{X} es el vector de las variables aleatorias (v.a.) de base del sistema y $g(\mathbf{X})$ la función que determina el estado del sistema.

Como ya se menciona, esta formulación de la teoría de confiabilidad distingue tres estados de un sistema estructural, definidos por la función de estado, $g(\mathbf{X})$: $g(\mathbf{X}) > 0$ (estado de seguridad), $g(\mathbf{X}) = 0$ (estado límite) y $g(\mathbf{X}) < 0$ (estado de falla). Geométricamente la ecuación del estado límite, $g(\mathbf{X}) = 0$, es una superficie de dimensión $n-1$, que puede ser llamada la superficie de falla.

Ahora bien, si $f(\mathbf{X})$ representa la función de densidad de probabilidades conjuntas del vector \mathbf{X} de las variables aleatorias X_i , la probabilidad de falla del sistema puede expresarse por:

$$p_f = \int_{\{g(\mathbf{x}) < 0\}} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \dots \int_{\{g(\mathbf{x}) < 0\}} f_{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) dx_1 \dots dx_n = 1 - p_s \quad (\text{IV.1.3})$$

El dominio de estado límite es supuesto una cantidad nula. La evaluación de éstas integrales es en general una tarea difícil, salvo para el caso particular donde la ecuación de estado límite es lineal y función de variables aleatorias de base normales, correlacionadas o no.

Sea por ejemplo la función de estado límite del sistema $Z = g(\mathbf{X}) = b_0 + b^T \mathbf{X}$, donde \mathbf{X} es el vector de las variables aleatorias de base, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, b_0 y b_i son unas constantes y b^T la transpuesta de b . La media \bar{Z} de Z y su desviación estándar σ_z son:

$$\bar{Z} = b_0 + b^T \bar{\mathbf{X}} \quad ; \quad \sigma_z = (b^T [C_{\mathbf{X}}] b)^{1/2} \quad (\text{IV.1.4})$$

donde $\bar{\mathbf{X}}$ es el vector de los valores medios de \mathbf{X} y $[C_{\mathbf{X}}]$ su matriz de covariancias.

La probabilidad de falla del sistema se obtiene entonces como sigue:

$$p_f = P(Z < 0) = \Phi \left[-\frac{\bar{Z}}{\sigma_z} \right] = \Phi \left[-\frac{b_0 + b^T \bar{\mathbf{X}}}{(b^T [C_{\mathbf{X}}] b)^{1/2}} \right] = \Phi(\beta) \quad (\text{IV.1.5})$$

donde $\beta = -\bar{Z}/\sigma_z$ representa el índice de confiabilidad del sistema y Φ es la función de distribución de probabilidades acumulada estándar. Este índice de confiabilidad puede interpretarse como el número de desviaciones estándar σ_z que separa la media \bar{Z} del origen.

Cuando la ecuación de estado límite lineal, se expresa en función de variables aleatorias independientes estándar (media = 0 y desviación estándar = 1), el índice de confiabilidad se puede interpretar de la siguiente manera. :

Sea $Z = g(u) = a_0 + a^T U = 0$, la ecuación lineal de estado límite del sistema, U el vector de variables aleatorias de base normales estándar independiente y a_0 y $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ unas constantes. Si se normaliza la función lineal se tiene:

$$Z = \frac{a_0}{\|a\|} + \frac{a^T U}{\|a\|} = \beta + \alpha^T U = 0 \quad (\text{IV.1.6})$$

donde las α_i son los cosenos directores del hiperplano, β es el índice de confiabilidad del sistema ó la distancia euclidiana del origen a la superficie del estado límite y $\|a\|$ la norma de a .

IV.1.2 Probabilidad de falla asociada a varios estados límites de un sistema.

Si hay k posibles funciones de estado g_i ($1 < i < k$), caracterizando los k posibles modos de falla de un sistema estructural considerado, se puede teóricamente expresar la probabilidad de falla del sistema como sigue:

$$P_f = \int \dots \int_{(E_1 \cup \dots \cup E_k)} f_{x_1, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{(E_1 \cup \dots \cup E_k)} f_x(x) dx \quad (\text{IV.1.7})$$

con $E_j = \{g_j(x) < 0\}$. La integración directa de la ecuación (IV.1.7) es en general una tarea difícil de realizar. Para este fin algunos autores han propuesto métodos aproximados tales como los métodos de primer y segundo orden (FORM y SORM, ref. 9), el método de ramas y límites, métodos de simulación Monte-Carlo o métodos híbridos, los cuales permiten obtener una aproximación de la solución de esta integral. A continuación se presenta el método de simulación Monte-Carlo.

IV.2 EVALUACIÓN DE LA PROBABILIDAD DE FALLA DE UN SISTEMA, USANDO SIMULACIÓN MONTE-CARLO.

Con el fin de obtener la probabilidad de falla de un sistema en el cual se tienen varios estados límites de falla, se propone utilizar un método que hace uso de la simulación Monte-Carlo, en la evaluación de las integrales múltiples de la probabilidad de falla de un sistema en serie. Este método permite también analizar escenarios complementarios (ref. 13).

Una de las hipótesis restrictivas de este método es que se suponen conocidos todos los posibles modos de falla del sistema, expresados en función de las resistencias límites de los elementos involucrados y de las cargas críticas; además, la ley de probabilidades conjunta de las funciones de estado de seguridad se supone gaussiana y que las variables de resistencia son independientes de las cargas.

Este método simplificado, sin embargo, permite aproximar fácil y rápidamente la probabilidad de falla global del sistema, considerando los modos de falla más probables.

IV.2.1 Modelo mecánico.

A partir del modelo mecánico propuesto en los capítulos II y III, se identifican todos los posibles mecanismos de falla. Conociendo todos estos modos de falla del sistema estructural, se puede establecer para cada mecanismo una relación de equilibrio entre las cargas exteriores P_i y las fuerzas internas de los elementos críticos. Para los sistemas dúctiles donde los efectos $P-\Delta$ (de segundo orden) no son considerados, la relación entre las fuerzas es lineal.

Si se trabaja con las resistencias límites de los elementos críticos R_i y con la convención de que la falla del sistema corresponde a los valores negativos de la combinación lineal precedente, se obtienen las funciones de estado de seguridad Z_i del sistema ($Z_i < 0$):

$$Z_i = \sum_j (a_j R_j + b_j L_j) \quad (i=1 \text{ hasta } n \text{ modos de falla}) \quad (\text{IV.2.1})$$

$$\{Z\} = [A]\{R\} + [B]\{P\}$$

donde $[A]$ y $[B]$ son dos matrices de transformación de fuerzas, $\{Z\}$, $\{R\}$ y $\{P\}$ son respectivamente los vectores de las funciones de estado de seguridad, de las resistencias límites de las secciones críticas de los elementos y de las cargas externas.

IV.2.2 Modelo de confiabilidad.

El análisis de confiabilidad de los sistemas estructurales dúctiles, bajo cargas estáticas, puede ser fácilmente tratado como sigue: a) Identificación de todos los posibles mecanismos de falla del sistema estructural, b) Establecimiento de las funciones de seguridad $\{Z\}$ de los mecanismos de falla identificados en (a), c) Cálculo de la ley de probabilidades conjunta de las funciones de seguridad $\{Z\}$ y d) Cálculo de la probabilidad de que una función de estado cualquiera tenga un valor negativo ($Z_i < 0$).

IV.2.2.a Sistema en serie.

Un sistema descrito por n elementos, E_1, E_2, \dots, E_n , es denominado sistema en serie, si la aparición de una falla cualquiera de estos elementos produce el colapso del sistema estructural. La probabilidad de falla del sistema estructural puede entonces ser expresada por:

$$P_f = P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) \quad (IV.2.2)$$

donde E_i representa el evento "falla del sistema siguiendo el modo i ". Cuando se representa las fallas del sistema por sus funciones de estado $E_i = (Z_i < 0)$, la probabilidad de falla del sistema se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} P_f &= Prob\left(\sum_{i=1}^n (Z_i < 0)\right) = P(Z_1 < 0) + P(Z_2 < 0, Z_1 > 0) + \dots + P(Z_n < 0, Z_1 > 0, \dots, Z_{n-1} > 0) \\ &= F_{z_1}(0) + \int_0^{\infty} F_{z_1}(0 | z_1) f_{z_1}(z_1) dz_1 + \dots + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F_{z_n}(0 | z_1, \dots, z_{n-1}) f_{z_1, \dots, z_{n-1}}(z_1, \dots, z_{n-1}) dz_1, \dots, dz_{n-1} \end{aligned} \quad (IV.2.3)$$

donde $f_{z_1, \dots, z_{k-1}}(z_1, \dots, z_{k-1})$ es la función de densidad de probabilidad conjunta de las $k-1$ primeras funciones de seguridad y F_{z_k} es la función de probabilidad condicional acumulada de la función de seguridad Z_k , dado que: $Z_1 = z_1, \dots, Z_{k-1} = z_{k-1}$.

Con el fin de poder evaluar estas integrales múltiples por simulación Monte-Carlo, se transforma la ecuación anterior como sigue:

$$P_f = F_{z_1}(0) + E_{z_1} \{F_{z_2}(0)\} + \dots + E_{z_1, z_2, \dots} \{F_{z_k}(0)\} \quad (\text{IV.2.4})$$

donde $E_{z_1, z_2, \dots} \{F_{z_k}(0)\}$ designa la esperanza matemática de

$$F \left\{ \prod_{i=1}^{k-1} \mathbf{1}(Z_i > 0) \right\}$$

siendo $\mathbf{1}(Z_i > 0)$ la función indicadora de $z_i > 0$, es decir, que la función es igual a la función F si $z_1 > 0, \dots, z_{k-1} > 0$ e igual a cero en caso contrario; otra forma de expresarla es:

$$P_f = F_{z_1}(0) + \dots + \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \phi_k(z_1, \dots, z_{k-1}) f_{z_1, \dots, z_{k-1}}(z_1, \dots, z_{k-1}) dz_1 \dots dz_{k-1} + \dots \quad (\text{IV.2.5})$$

donde $\phi_k(z_1, \dots, z_{k-1}) = F_{z_k}(0 | z_1, \dots, z_{k-1}) \prod_{i=1}^{k-1} \mathbf{1}(Z_i > 0)$.

Dado el estado de desarrollo de este modelo, en este trabajo nos limitamos a distribuciones multidimensionales gaussianas para las funciones de seguridad $\{Z\}$ y se supone que las fuerzas son independientes de las resistencias. La distribución de probabilidades del vector gaussiano $\{Z\}$ está entonces definido por el vector de medias de las resistencias y las cargas, así como su matriz de covarianzas $[C]$: $P_f = \Phi(\{Z\}, [C])$.

Por tanto, es suficiente con conocer los vectores $\{R\}$ y $\{P\}$, de resistencias y fuerzas medias respectivamente, así como las matrices de covarianzas respectivas $[S_{RR}]$ y $[S_{PP}]$, para obtener la ley de distribuciones buscada, en efecto:

$$\{\bar{Z}\} = [A] \{\bar{R}\} + [B] \{\bar{P}\} = [C] \{\bar{X}\} \quad (\text{IV.2.6a})$$

$$[S_z] = [C] [S_x] [C]^T \quad (\text{IV.2.6b})$$

$$[C] = [[A] [B]], \quad \{X\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{R}\} \\ \{\bar{P}\} \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad [S_x] = \begin{bmatrix} [S_{RR}] & [S_{RP}] \\ [S_{PR}] & [S_{PP}] \end{bmatrix} \quad (\text{IV.2.6c})$$

donde $[S_{RP}] = [S_{PR}] = [0]$, cuando las resistencias son independientes de las cargas.

V.2.3 Algoritmo de simulación.

El método de simulación de Monte-Carlo (para calcular las integrales múltiples) puede descomponerse en los siguientes pasos (ref. 13):

a) Se simula un valor de z_1 de Z_1 , siguiendo su ley marginal, invirtiendo su función de probabilidad acumulada, o dicho de otra manera, se simula un valor de Z_1 a partir de la función de densidad de probabilidad marginal acumulada.

b) Se determina la función de densidad de probabilidades condicional acumulada de Z_2 , dado que Z_1 es igual a z_1 . A partir de esta función de densidad de probabilidades acumulada condicional, se simula otro valor de z_2 de Z_2 .

c) Se procede de la misma manera hasta simular z_{k-1} de Z_{k-1} , a partir de su función condicional acumulada, dado que $Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, \dots, Z_{k-2} = z_{k-2}$.

d) Si uno de los valores simulados es negativo, o sea menor que cero, se para la simulación y se toma $F_{z_k}(0|\bullet) = 0$. Si todos los valores Z_1, Z_2, \dots, Z_{k-1} son mayores que cero, se obtiene $F_{z_k}(0)$ a partir de la función de densidad de probabilidades condicional acumulada de Z_k , dado que $Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, \dots, Z_{k-1} = z_{k-1}$.

e) Se repiten etapas anteriores, hasta obtener una muestra de valores simulados de $F_{z_k}(0|\bullet)$ lo suficientemente grande, para obtener una estimación confiable de la esperanza de F_{z_k} , calculada a partir de la media de los valores obtenidos.

Las leyes de probabilidades condicionales, necesarias en el proceso de simulación, son fácilmente obtenidas a partir de la ley de probabilidades conjunta gaussiana de las funciones de seguridad.

Así, dada una ley de probabilidades de Gauss de dimensión n , definida por el vector de esperanza $\{X\}$ y la matriz de covariancias $[S]$, siguientes:

$$\{X\}^T = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

(IV.2.7)

$$[S_{.j}] = \begin{bmatrix} S_{1,1} & \dots & S_{1,n-1} & S_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ S_{n-1,1} & \dots & S_{n-1,n-1} & S_{n-1,n} \\ S_{n,1} & \dots & S_{n,n-1} & S_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [S_{11}] & \{S_{12}\}^T \\ \{S_{21}\} & S_{nn} \end{bmatrix}$$

Se puede demostrar que la ley de probabilidades condicional de X_n , dado que $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}$, es una ley de probabilidades gaussianas de esperanza y variancia definidas por:

$$E(X_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \bar{X}_n + \{S_{21}\} [S_{11}]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} x_1 - \bar{X}_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} - \bar{X}_{n-1} \end{array} \right\}$$

$$S_{X_n, X_1, X_2, \dots, X_{n-1}} = S_{nn} - \{S_{21}\} [S_{11}]^{-1} \{S_{12}\}^T \quad (\text{IV.2.8})$$

Con el fin de mejorar este algoritmo y reducir el número de simulaciones necesarias, se transforman las integrales múltiples de la ecuación de falla del sistema por:

$$P_{fs} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \phi_k(z_1, \dots, z_{k-1}) \gamma_{k-1} f_{y_1}(z_1) \dots f_{y_{k-1}}(z_{k-1}) dz_1 \dots dz_{k-1} \quad (\text{IV.2.9})$$

donde:

$$\gamma_{k-1} = \frac{f_{z_1, \dots, z_{k-1}}(z_1, \dots, z_{k-1})}{f_{y_1}(z_1) \dots f_{y_{k-1}}(z_{k-1})} \quad \text{y} \quad f_{y_i}(z_i)$$

es una función de densidad de probabilidades auxiliar, diferente de la ley normal. Se introduce como función de probabilidades auxiliar, por lo general, la ley exponencial siguiente:

$$f_{y_i}(z_i) = v e^{(-v z_i)} \quad (\text{IV.2.10})$$

siendo:

$$v = \begin{cases} 1/\bar{Z}_i, & \text{si } \bar{Z}_i, \text{ media condicional de } Z_i \text{ dado que } Z_1 = z_1, \dots, Z_{i-1} = z_{i-1} \text{ es positiva,} \\ 1, & \text{en el caso contrario} \end{cases}$$

Esta transformación permite simular con la ayuda de la función exponencial unos valores para Z_i , tanto en la región próxima de $Z_i = 0$, donde la función $F_{i,i}(0 | z_1, \dots, z_{i-1})$ tiene sus valores más grandes, como cerca de $Z_i = z_i$, después regresar a la ley gaussiana de las funciones de seguridad, utilizando el coeficiente γ_{k-1} .

IV.3 CONCLUSIÓN.

En teoría, el estudio de confiabilidad de sistemas estructurales puede ser tratado de la manera siguiente:

- identificación de todos los posibles mecanismos de falla del sistema estructural.
- búsqueda de la función de estado límite de falla de cada mecanismo, en función de las resistencias de los elementos que intervienen en ese mecanismo, y de las cargas que lo provocan.
- obtención de la probabilidad de falla global del sistema y/o de su índice de confiabilidad.

La dificultad práctica que implica este procedimiento esta clara: el número de mecanismos de falla posibles puede ser elevado, aún para estructuras relativamente poco complejas, la densidad de probabilidades conjunta de las variables aleatorias involucradas no se puede obtener sin que se introduzcan hipótesis muy restrictivas, y aún conociendo esta distribución, el cálculo de la probabilidad de falla es tarea difícil.

En la práctica, se puede resolver el problema como sigue: el cálculo de las funciones de estado límite se puede facilitar grandemente cuando se utiliza el método de identificación de estado límites plásticos y generación automática de las funciones de estado de seguridad asociadas, propuesto en los capítulos II y III; finalmente, la probabilidad de falla global del sistema estructural puede aproximarse con los métodos de primer y segundo orden, así como con el método de simulación Monte-Carlo, propuesto en este capítulo.



EJEMPLO DE APLICACION

En el presente capítulo se ilustra la metodología propuesta en los capítulos II, III y IV, con un ejemplo de un sistema estructural tipo edificio de tres niveles y dos crujeas. Además se presentan los resultados del análisis de confiabilidad de dicha estructura; esto es, del análisis elasto-plástico de la misma utilizando el método expresado en el capítulo III, así como el cálculo de la probabilidad de falla del sistema estructural basado en las funciones de estado límite de los mecanismos de falla obtenidos y en los coeficientes de variación de las fuerzas y resistencias del sistema.

V.1. DATOS DEL PROBLEMA.

Dado que el objetivo del análisis al límite es ilustrar los métodos de análisis elasto-plástico y la determinación de probabilidades de falla del sistema estructural asociadas, se trata una estructura sencilla, donde se propusieron valores arbitrarios de pesos en cada nivel, secciones transversales de los elementos, geometría general, coeficientes de variación de fuerzas y resistencias, y otros; sin embargo es importante mencionar que para una aplicación real es necesario hacer un análisis del tipo de estructuración, de las solicitaciones de la estructura (cargas a las que esta sometida), de la variación de las resistencias y de las fuerzas, etc. La idealización de dicha estructura se muestra en la figura V.1.

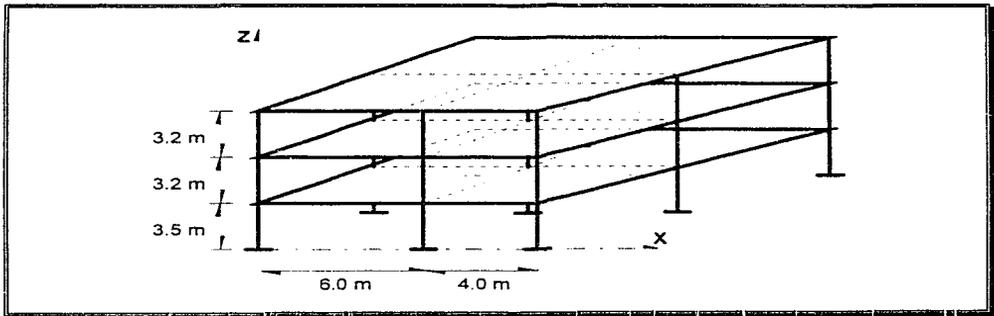


FIGURA V.1. Estructura propuesta.

El ejemplo propuesto es un edificio formado con seis marcos planos de tres niveles y dos crujeías, la geometría en planta, así como las coordenadas globales del sistema se muestran en la figura V.2.a, y la geometría del marco del eje 1 se muestra en la figura V.2.b; cabe señalar que todos los marcos tienen una geometría y topología similar siendo la única diferencia entre ellos las distancias de los claros por lo que solo se muestra un marco tipo. Se proponen elementos de acero estructural, con perfiles de sección hueca como se muestran en la figura V.3.

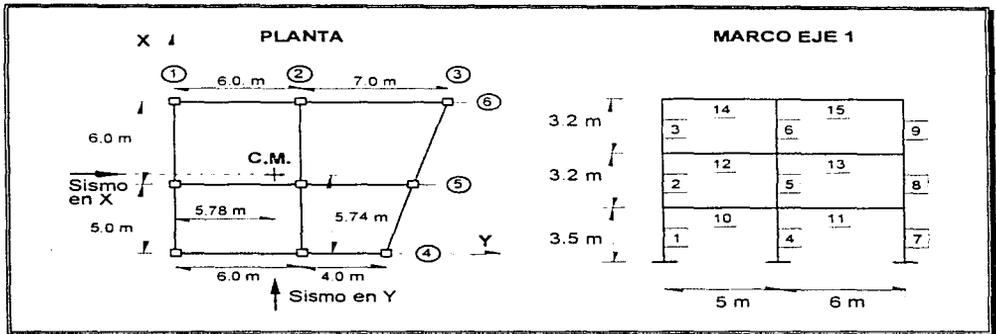


FIGURA V.2. Geometría general del problema.

Para los análisis elasto-plásticos es necesario determinar las propiedades de los elementos que conforman el sistema (trabes y columnas), tales como el módulo de elasticidad, el esfuerzo de fluencia del material, el área y el momento de inercia de la sección transversal, el módulo de sección plástica y el momento plástico resistente de las mismas. Estas características se muestran en la tabla V.1.

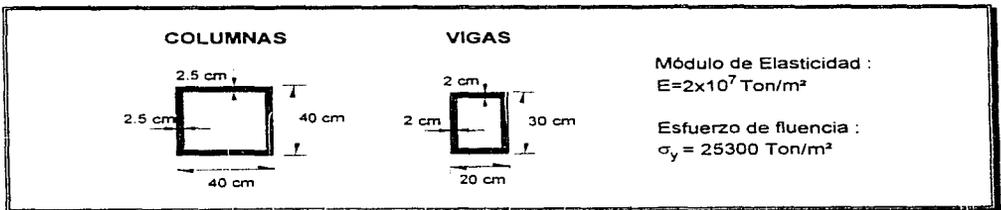


FIGURA V.3. Cortes transversales de los perfiles estructurales.

Por otra parte es necesario determinar los grados de libertad de cada uno de los marcos en su respectivo plano de acción, para lo cual deben numerarse convenientemente de acuerdo a lo establecido en la sección 1.3, recordando que cada entrepiso representa un grado de libertad de desplazamiento horizontal bajo la hipótesis que las losas actúan como diafragma rígido. Al tener los marcos la misma topología basta con definir los grados de libertad de uno de ellos; en la figura V.4 se ilustran dichos grados de libertad.

TABLA V.1. Propiedades geométricas y mecánicas.

| Elemento | Area (m ²) | M. Inercia (m ⁴) | Z ₀ (m ³) | Mp (Ton.m) |
|-----------------|---------------------------|---------------------------------|-------------------------------------|---------------|
| 1 a 9 (col.) | 0.0375 | 0.0008280 | 0.005281 | 133.61 |
| 10 a 15 (vigas) | 0.0184 | 0.0002156 | 0.001796 | 45.44 |

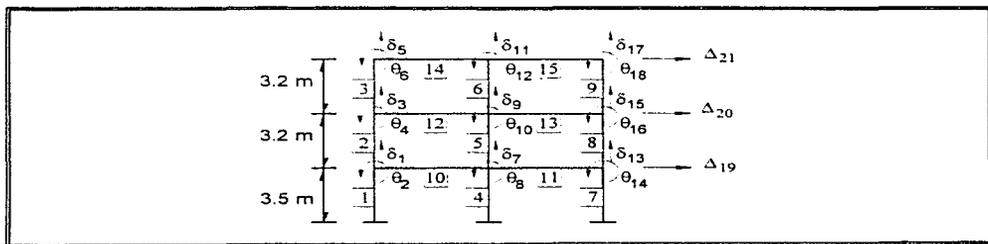


FIGURA V.4. Determinación de los grados de libertad del marco tipo.

V.2. FUERZAS SÍSMICAS APLICADAS AL SISTEMA.

Las fuerzas sísmicas a las que está sometida la estructura se calculan mediante el Método Estático del Reglamento de Construcciones del D. F., el cual se expone en el Anexo I (ref 6).

Como se mencionó anteriormente los datos del problema son arbitrarios por lo que se propusieron valores del peso de los niveles de la estructura, donde se considera uniformemente distribuido por lo que el centro de masas se localiza en el mismo punto para cada nivel y además coincide con el centro de área de la planta de la estructura.

Los valores de las fuerzas sísmicas se muestran en la tabla V.2, considerando un coeficiente sísmico de terreno blando $c=0.4$ y un factor de comportamiento $Q=1$, para considerar las condiciones más desfavorables de la Ciudad de México.

TABLA V.2. Determinación de las fuerzas sísmicas.

| NIVEL | W_i (Ton) | h_i (m) | $W_i \cdot h_i$ (Ton·m) | F_i (Ton) |
|----------|----------------|--------------|----------------------------|----------------|
| 1 | 180 | 3.5 | 630 | 39.319 |
| 2 | 180 | 6.7 | 1206 | 75.268 |
| 3 | 135 | 9.9 | 1336.5 | 83.413 |
| Σ | 495 | - | 3172.5 | - |

Para determinar los posibles estados de falla plástica del sistema, es necesario someter a la estructura a diferentes condiciones de carga según la dirección y orientación de las fuerzas sísmicas. Dichas combinaciones de carga se muestran en la figura V.5.

Para realizar los análisis tridimensionales es necesario también determinar los momentos que producen las fuerzas sísmicas con respecto al origen del sistema, en coordenadas globales del sistema estructural; estos momentos se obtienen mediante la ecuación 1.2.23 que en este caso (el centro de masas coincide con el centro de cortante) equivale a multiplicar las fuerzas sísmicas por las distancias al centro de cortante (según la dirección de las fuerzas), ver tabla V.3.

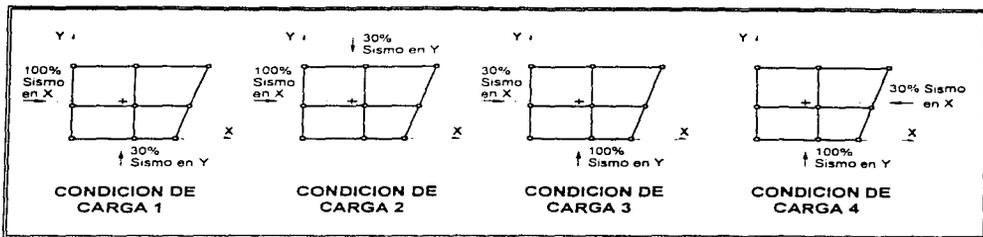


FIGURA V.5. Condiciones de carga.

TABLA V.3. Combinaciones de carga que se aplicarán al sistema.

| Fuerza | Nivel | Condición de Carga | | | |
|--------|-------|--------------------|----------|---------|---------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Fx | 1 | 39.319 | 39.319 | 11.796 | 11.796 |
| | 2 | 75.268 | 75.268 | 22.580 | 22.580 |
| | 3 | 83.413 | 83.413 | 25.024 | 25.024 |
| Fy | 1 | 11.796 | -11.796 | 39.319 | -39.319 |
| | 2 | 22.580 | -22.580 | 75.268 | -75.268 |
| | 3 | 25.024 | -25.024 | 83.413 | -83.413 |
| M | 1 | -157.450 | -293.856 | 159.648 | 295.039 |
| | 2 | -301.404 | -562.524 | 305.611 | 564.789 |
| | 3 | -334.018 | -623.394 | 338.681 | 625.904 |

V.3 RESULTADOS.

A continuación se presentan los resultados obtenidos de los análisis elastoplásticos efectuados del sistema estructural. Inicialmente se presentan, para las cuatro condiciones de carga, los valores de los factores de carga (factores lambda) críticos de que provocan la falla del sistema; posteriormente, para las dos condiciones de carga que provocan los mecanismos mas desfavorables (según la dirección de las cargas y de los factores lambda), se presentan las funciones de estado límite tanto de los mecanismos críticos como de otros mecanismos posibles; por último, con estas funciones de estado límite se obtienen las probabilidades de falla de la estructura para cada una de estas condiciones de carga.

V.3.1 Obtención de mecanismos críticos

En las dos primeras condiciones de carga, el mecanismo de falla crítico del sistema se produce con el marco 6 después de 42 secciones plastificadas en el sistema estructural (figura V.6), mientras que con las condiciones de carga 3 y 4 el mecanismo del sistema se presenta después de 43 secciones plastificadas con los marcos 1 y 2, respectivamente (figuras V.7 y V.8).

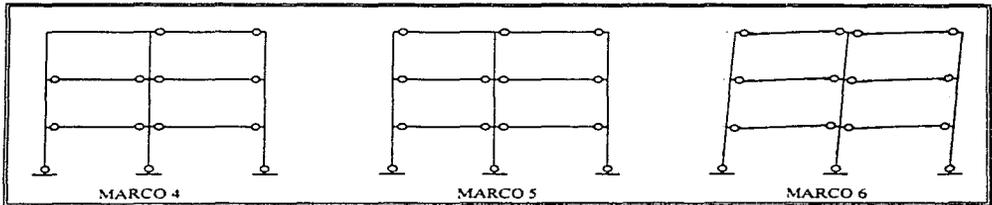


FIGURA V.6. Plastificaciones resultantes en los marcos, para las condiciones de carga 1 y 2.

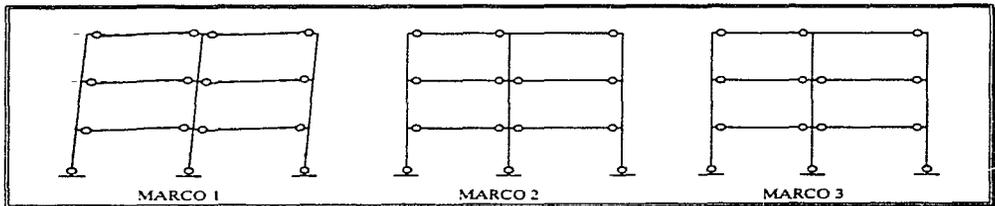


FIGURA V.7. Plastificaciones resultantes en los marcos, para la condición de carga 3.

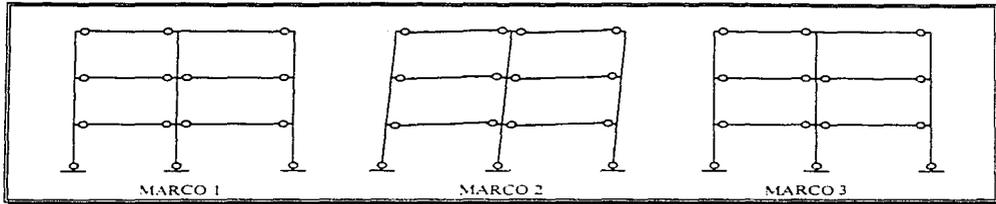


FIGURA V.8. Plastificaciones resultantes en los marcos, para la condiciones de carga 4.

Para las condiciones de carga 1 y 2, el mecanismo del sistema se completa con el marco 6, siendo la sección izquierda del elemento número 15 (sección 29) la última en plastificarse (plastificación número 42), con un factor de carga crítico de 1.971 y 1.869 respectivamente.

En la condición de carga 3 es el marco 1 el que determina la falla del sistema después de 43 plastificaciones, la última sección en plastificarse es la sección 29 con una factor de carga crítico de 1.909; en la condición de carga 4 el marco crítico es el 2, con un factor de carga de 1.909, en la sección 29 de dicho marco.

De los resultados anteriores podemos concluir que para las condiciones de carga 1 y 2 el mecanismo de falla del sistema es igual, marcando la diferencia la aportación del 30% de la carga sísmica en la dirección Y, ya que en la primera condición la dirección positiva de esta carga "ayuda" a la estructura en cuanto a su comportamiento, mientras que en la segunda condición de carga provoca que las plastificaciones se produzcan con menor incremento de carga. Debido a lo anterior se analizarán los posibles mecanismos de falla que provoque la segunda condición de carga por ser más desfavorable para la estructura.

Por otra parte se observa que con el 100% del sismo en la dirección Y (condiciones de carga 3 y 4) se producen mecanismos críticos con factores lambda similares entre sí, pero en diferentes marcos; debido a esta similitud, por facilidad se tomará en cuenta para el estudio del comportamiento del sistema la condición de carga 3, y los respectivos mecanismos de falla diferentes al crítico que produzca esta carga.

V.3.2 Funciones de estado límite.

Como se mencionó anteriormente, en la condición de carga dos se completa el mecanismo de falla crítico con el marco número 6 (factor lambda = 1.869), el cual llamaremos mecanismo de falla 1, pero si se evita plastificar este marco se pueden encontrar otros mecanismos de falla contemplando los otros marcos; en este caso se consideran los mecanismos de falla provocados por los marcos 5 y 4 como otros mecanismos potenciales (denominados mecanismos 2 y 3). El factor lambda para hacer fallar el marco 5 es de 1.877 y el del marco 4 es de 1.895.

Los coeficientes de las funciones de estado límite de estos mecanismos se presentan en la tabla V.4. En esta tabla se presentan en la primera columna las variables involucradas (de resistencia o de fuerza) siendo, en el caso de las resistencias de las secciones, el superíndice el número del marco y el subíndice el número de sección de dicho marco, recordando que las secciones se numeran a la izquierda por $2k-1$ y a la derecha por $2k$ (k el número del elemento); en la segunda columna se presenta los valores medios de estas variables y en las columnas 3 a 5 los coeficientes de la función de estado límite para cada uno de los mecanismos.

TABLA V.4. Coeficientes de las funciones de estado límite de los mecanismos producidos por la condición de carga 2.

| Variable | Media | Coeficientes | | |
|----------------|--------|--------------|--------|---------|
| | | Mec. 1. | Mec.2 | Mec.3 |
| $R_7^{(4)}$ | 133.36 | 0.1554 | 0.1506 | 0.2052 |
| $R_7^{(4)}$ | 133.36 | 0.1554 | 0.1506 | 0.2021 |
| $R_{13}^{(4)}$ | 133.36 | 0.1544 | 0.1495 | 0.2052 |
| $R_{19}^{(4)}$ | 45.44 | 0.1504 | 0.1479 | 0.2108 |
| $R_{20}^{(4)}$ | 45.44 | 0.1504 | 0.1479 | 0.2108 |
| $R_{21}^{(4)}$ | 45.44 | 0.1508 | 0.1483 | 0.2163 |
| $R_{22}^{(4)}$ | 45.44 | 0.1508 | 0.1483 | 0.2163 |
| $R_{23}^{(4)}$ | 45.44 | 0.1490 | 0.1577 | 0.2277 |
| $R_{24}^{(4)}$ | 45.44 | 0.1490 | 0.1577 | 0.2277 |
| $R_{25}^{(4)}$ | 45.44 | 0.1498 | 0.1586 | 0.2056 |
| $R_{26}^{(4)}$ | 45.44 | 0.1498 | 0.1586 | 0.2056 |
| $R_{27}^{(4)}$ | 45.44 | 0.0000 | 0.0000 | -0.1017 |
| $R_{28}^{(4)}$ | 45.44 | 0.0000 | 0.0000 | 1.0000 |
| $R_{29}^{(4)}$ | 45.44 | 0.1105 | 0.1234 | 0.3151 |
| $R_{30}^{(4)}$ | 45.44 | 0.1105 | 0.1234 | 0.3151 |
| $R_1^{(5)}$ | 133.36 | 0.1779 | 0.1700 | 0.2297 |
| $R_7^{(5)}$ | 133.36 | 0.1787 | 0.1667 | 0.2307 |
| $R_{13}^{(5)}$ | 133.36 | 0.1779 | 0.1700 | 0.2297 |

TABLA V.4 (continuación). Coeficientes de las funciones de estado límite de los mecanismos producidos por la condición de carga 2.

| Variable | Media | Coeficientes | | |
|----------------|--------|--------------|---------|---------|
| | | Mec. 1. | Mec. 2 | Mec. 3 |
| $R_{19}^{(5)}$ | 45.44 | 0.1793 | 0.1722 | 0.2325 |
| $R_{20}^{(5)}$ | 45.44 | 0.1793 | 0.1722 | 0.2325 |
| $R_{21}^{(5)}$ | 45.44 | 0.1779 | 0.1782 | 0.2307 |
| $R_{22}^{(5)}$ | 45.44 | 0.1779 | 0.1782 | 0.2307 |
| $R_{23}^{(5)}$ | 45.44 | 0.1817 | 0.1763 | 0.2396 |
| $R_{24}^{(5)}$ | 45.44 | 0.1817 | 0.1763 | 0.2396 |
| $R_{25}^{(5)}$ | 45.44 | 0.1870 | 0.1526 | 0.2467 |
| $R_{26}^{(5)}$ | 45.44 | 0.1870 | 0.1526 | 0.2467 |
| $R_{27}^{(5)}$ | 45.44 | 0.2649 | -0.1901 | 0.3538 |
| $R_{28}^{(5)}$ | 45.44 | 0.0000 | 1.0000 | 0.0000 |
| $R_{29}^{(5)}$ | 45.44 | 0.1647 | 0.2604 | 0.2199 |
| $R_{30}^{(5)}$ | 45.44 | 0.1647 | 0.2604 | 0.2199 |
| $R_1^{(6)}$ | 133.36 | 0.2062 | 0.1947 | 0.2591 |
| $R_2^{(6)}$ | 133.36 | 0.2035 | 0.1954 | 0.2600 |
| $R_{12}^{(6)}$ | 133.36 | 0.2062 | 0.1947 | 0.2591 |
| $R_{10}^{(6)}$ | 45.44 | 0.2113 | 0.1975 | 0.2593 |
| $R_{20}^{(6)}$ | 45.44 | 0.2113 | 0.1975 | 0.2593 |
| $R_{21}^{(6)}$ | 45.44 | 0.2171 | 0.1959 | 0.2574 |
| $R_{22}^{(6)}$ | 45.44 | 0.2171 | 0.1959 | 0.2574 |
| $R_{23}^{(6)}$ | 45.44 | 0.2285 | 0.2053 | 0.2555 |
| $R_{24}^{(6)}$ | 45.44 | 0.2285 | 0.2053 | 0.2555 |
| $R_{25}^{(6)}$ | 45.44 | 0.2112 | 0.2101 | 0.2612 |
| $R_{26}^{(6)}$ | 45.44 | 0.2112 | 0.2101 | 0.2612 |
| $R_{27}^{(6)}$ | 45.44 | 0.2408 | 0.2105 | 0.2515 |
| $R_{28}^{(6)}$ | 45.44 | 0.2408 | 0.2105 | 0.2515 |
| $R_{29}^{(6)}$ | 45.44 | 1.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| $R_{30}^{(6)}$ | 45.44 | -0.1037 | 0.3060 | 0.3656 |
| F_{ref} | 39.32 | -7.0716 | -6.7475 | -9.0980 |

De manera similar a la expresada para la condición de carga 2, la condición número 3 produce mecanismos de falla del sistema considerando los marcos 1, 2 o 3 plastificados, siendo éste el orden de aparición de los mecanismos contemplados. Las funciones de estado límite de estos mecanismos se presentan en la tabla V.5.

TABLA V.5. Coeficientes de las funciones de estado límite de los mecanismos producidos por la condición de carga 3.

| Variable | Media | Coeficientes | | |
|----------------|--------|--------------|--------|--------|
| | | Mec. 1. | Mec.2 | Mec.3 |
| $R_7^{(1)}$ | 133.36 | 0.3474 | 0.3446 | 0.3196 |
| $R_7^{(1)}$ | 133.36 | 0.3448 | 0.3460 | 0.3208 |
| $R_{13}^{(1)}$ | 133.36 | 0.3474 | 0.3446 | 0.3196 |
| $R_{19}^{(1)}$ | 45.44 | 0.3503 | 0.3445 | 0.3167 |
| $R_{20}^{(1)}$ | 45.44 | 0.3503 | 0.3445 | 0.3167 |
| $R_{21}^{(1)}$ | 45.44 | 0.3559 | 0.3414 | 0.3140 |
| $R_{22}^{(1)}$ | 45.44 | 0.3559 | 0.3414 | 0.3140 |
| $R_{23}^{(1)}$ | 45.44 | 0.3619 | 0.3438 | 0.3054 |
| $R_{24}^{(1)}$ | 45.44 | 0.3169 | 0.3438 | 0.3054 |
| $R_{25}^{(1)}$ | 45.44 | 0.3456 | 0.3526 | 0.3131 |
| $R_{26}^{(1)}$ | 45.44 | 0.3456 | 0.3526 | 0.3131 |
| $R_{27}^{(1)}$ | 45.44 | 0.3706 | 0.3433 | 0.2969 |
| $R_{28}^{(1)}$ | 45.44 | 0.3706 | 0.3433 | 0.2969 |
| $R_{29}^{(1)}$ | 45.44 | 1.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| $R_{30}^{(1)}$ | 45.44 | 0.0899 | 0.4964 | 0.4292 |
| $R_1^{(2)}$ | 133.36 | 0.3443 | 0.3448 | 0.3225 |
| $R_7^{(2)}$ | 133.36 | 0.3457 | 0.3422 | 0.3238 |
| $R_{13}^{(2)}$ | 133.36 | 0.3443 | 0.3448 | 0.3225 |
| $R_{19}^{(2)}$ | 45.44 | 0.3443 | 0.3446 | 0.3228 |
| $R_{20}^{(2)}$ | 45.44 | 0.3443 | 0.3446 | 0.3228 |
| $R_{21}^{(2)}$ | 45.44 | 0.3412 | 0.3505 | 0.3199 |
| $R_{22}^{(2)}$ | 45.44 | 0.3412 | 0.3505 | 0.3199 |
| $R_{23}^{(2)}$ | 45.44 | 0.3437 | 0.3446 | 0.3234 |
| $R_{24}^{(2)}$ | 45.44 | 0.3437 | 0.3446 | 0.3234 |
| $R_{25}^{(2)}$ | 45.44 | 0.3525 | 0.3277 | 0.3318 |
| $R_{26}^{(2)}$ | 45.44 | 0.3525 | 0.3277 | 0.3318 |
| $R_{27}^{(2)}$ | 45.44 | 0.3433 | 0.3445 | 0.3239 |
| $R_{28}^{(2)}$ | 45.44 | 0.3433 | 0.3445 | 0.3239 |
| $R_{29}^{(2)}$ | 45.44 | 0.0000 | 1.0000 | 0.0000 |
| $R_{30}^{(2)}$ | 45.44 | 0.4964 | 0.0522 | 0.4683 |

TABLA V.5 (continuación). Coeficientes de las funciones de estado límite de los mecanismos producidos por la condición de carga 3

| Variable | Media | Coeficientes | | |
|----------------|--------|--------------|---------|---------|
| | | Mec. 1. | Mec 2 | Mec 3 |
| $R_1^{(3)}$ | 133.36 | 0.3295 | 0.3328 | 0.3137 |
| $R_2^{(3)}$ | 133.36 | 0.3307 | 0.3341 | 0.3111 |
| $R_{13}^{(3)}$ | 133.36 | 0.3295 | 0.3328 | 0.3137 |
| $R_{19}^{(3)}$ | 45.44 | 0.3266 | 0.3331 | 0.3165 |
| $R_{20}^{(3)}$ | 45.44 | 0.3266 | 0.3331 | 0.3165 |
| $R_{21}^{(3)}$ | 45.44 | 0.3240 | 0.3302 | 0.3222 |
| $R_{22}^{(3)}$ | 45.44 | 0.3240 | 0.3302 | 0.3222 |
| $R_{23}^{(3)}$ | 45.44 | 0.3152 | 0.3339 | 0.3275 |
| $R_{24}^{(3)}$ | 45.44 | 0.3152 | 0.3339 | 0.3275 |
| $R_{25}^{(3)}$ | 45.44 | 0.3229 | 0.3423 | 0.3108 |
| $R_{26}^{(3)}$ | 45.44 | 0.3229 | 0.3423 | 0.3108 |
| $R_{27}^{(3)}$ | 45.44 | 0.3065 | 0.3344 | 0.3358 |
| $R_{28}^{(3)}$ | 45.44 | 0.3065 | 0.3344 | 0.3358 |
| $R_{29}^{(3)}$ | 45.44 | 0.0000 | 0.0000 | 1.0000 |
| $R_{30}^{(3)}$ | 45.44 | 0.4438 | 0.4842 | 0.0384 |
| F_{ref} | 39.32 | -12.863 | -12.865 | -12.034 |

V.3.3 Probabilidad de falla.

Se procede a la obtención de la probabilidad de falla de la estructura a partir de las funciones de estado límite asociadas a para los diferentes mecanismos de falla identificados. Cabe mencionar que se utiliza el procedimiento establecido en el capítulo IV, en el que se obtiene los índices de confiabilidad y la probabilidad de falla para cada uno de los mecanismos mediante las ecuaciones IV.1.4 y IV.1.5. Además se procede a la obtención de la probabilidad de falla global del sistema (considerando tres mecanismos de falla) para cada una de las condiciones de carga (2 y 3) mediante simulación Monte-Carlo (ref. 13).

Como datos adicionales utilizados, se tienen: un coeficiente de variación de 0.1 tanto para las resistencias como para las fuerzas, es decir, que la desviación estándar de estas variables es el 10% del valor medio de las mismas. Además se considera que cada una de las variables son independientes, es decir que su correlación es cero. A continuación se presentan los resultados obtenidos para las dos condiciones de carga en estudio.

Condición de carga 2 (tres mecanismos, marcos 4, 5 y 6).

Valores medios de las funciones de estado, correspondientes a los tres mecanismos del sistema estructural tridimensional :

$$\bar{Z}_1 = 236.84$$

$$\bar{Z}_2 = 236.37$$

$$\bar{Z}_3 = 323.66$$

Matriz de covariancias de las funciones de estado :

$$C_z = \begin{bmatrix} 868.87 & 806.58 & 1090.4 \\ 806.58 & 795.61 & 1041.2 \\ 1090.4 & 1041.2 & 1429.3 \end{bmatrix}$$

Indices de confiabilidad de las funciones de estado límite y probabilidades de falla marginales.

$$\beta_1 = 8.0347$$

$$P_{f_1} = 4.69 \times 10^{-16}$$

$$\beta_2 = 8.3798$$

$$P_{f_2} = 2.26 \times 10^{-17}$$

$$\beta_3 = 8.5610$$

$$P_{f_3} = 5.60 \times 10^{-18}$$

Para el cálculo de la probabilidad de falla global del sistema estructural, considerando tres mecanismos potenciales de falla, se aplica el algoritmo de simulación Monte-Carlo, donde se requirieron sólo de 50 simulaciones para determinar dicha probabilidad. Cabe mencionar que para esta aproximación sólo se toma en cuenta la participación de los dos primeros mecanismos, ya que la aportación del tercer mecanismo es despreciable.

$$\beta = 8.033$$

$$P_f = 4.735 \times 10^{-16}$$

Condición de carga 3 (tres mecanismos, marcos 1, 2 y 3).

Valores medios de las funciones de estado de cada uno de los mecanismos:

$$\bar{Z}_1 = 459.71$$

$$\bar{Z}_2 = 460.75$$

$$\bar{Z}_3 = 432.30$$

Matriz de covariancias de las funciones de estado :

$$C_z = \begin{bmatrix} 2846.0 & 2822.5 & 2640.5 \\ 2822.5 & 2848.1 & 2640.6 \\ 2640.5 & 2640.6 & 2494.1 \end{bmatrix}$$

Indices de confiabilidad de las funciones de estado límite, y probabilidades de falla marginales.

$$\beta_1 = 8.61.72$$

$$P_{f_1} = 3.43 \times 10^{-18}$$

$$\beta_2 = 8.6336$$

$$P_{f_2} = 2.97 \times 10^{-18}$$

$$\beta_3 = 8.6561$$

$$P_{f_3} = 2.44 \times 10^{-18}$$

De la misma manera que en el caso anterior, se aplica el algoritmo, donde con 707 simulaciones la probabilidad condicional de falla del segundo mecanismo de falla es 0.8438×10^{-18} , mientras que la probabilidad condicional de falla del mecanismo 3 despues de 1000 simulaciones es 0.8607×10^{-18} . Finalmente el índice de confiabilidad y la probabilidad de falla del sistema sometida a la condición de carga 3 es :

$$\beta = 8.570$$

$$P_f = 5.136 \times 10^{-18}$$



CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La metodología propuesta facilita los análisis elastoplásticos de sistemas estructurales tipo edificios formados a base de marcos planos (donde los marcos trabajan en su plano) y losas rígidas, sometidos a torsión por sismo. por otro lado, permite identificar los estados límites de falla plástica del sistema estructural y las funciones que los representan.

El método simplifica la identificación de los estados límites de falla plástica del sistema estructural, estudiando por un lado los desplazamientos y giros de las losas provocados tanto por las fuerzas sísmicas como por las fuerzas constantes equivalentes producto de las plastificaciones de todos los marcos del sistema; así como, los mecanismos de falla de los marcos en su plano de trabajo. Lo anterior se logra a través de (en la primera etapa) condensar las matrices de rigidez de cada uno de los marcos que forman el sistema estructural en una matriz tridimensional condensada referida a los desplazamientos de las losas, y en la segunda etapa el obtener fuerzas como resultado de los desplazamientos de la losa para analizar las condiciones de esfuerzo y plasticidad en cada marco por separado.

Cabe mencionar que este método tiene las siguientes limitaciones : i) la hipótesis de diafragma rígido lleva a errores de cálculo si se tienen sistemas de piso muy flexibles, ii) el método es estático lo que impide aplicar excitaciones dinámicas de estructuras, las cuales modelan mejor los efectos producidos por sismo, iii) las columnas que son comunes a dos marcos con diferentes direcciones son tomadas por separado, condición que aleja de la realidad el comportamiento de éstas ya que se presentan esfuerzos en las dos direcciones de estudio, además que no se ha definido una condición de plasticidad para estos casos. Por consiguiente, se recomienda que para trabajos futuros se tomen en cuenta estos aspectos.

En la metodología propuesta, la condición de plasticidad de los elementos estructurales bajo combinación de esfuerzos es linealizada y las funciones de estado de los extremos de los elementos son expresadas como una combinación lineal de las resistencias de estas secciones extremas y de las cargas aplicadas. La hipótesis de linealidad en el dominio de resistencia no siempre es válida para todo tipo de estructuras, sin embargo esta hipótesis de linealidad se justifica, tanto por la simplicidad en el cálculo de las funciones de estado límite como por su aproximación al comportamiento real de las estructuras para fines prácticos.

Además de obtener el mecanismo crítico de colapso, el método permite identificar otros posibles mecanismos de falla casi-estática. Finalmente, cuando se conocen otros modos de falla de la estructura, identificados por ejemplo por inspección, el método permite deducir fácilmente las funciones de estado límite asociadas a esos mecanismos, realizando un solo análisis de la estructura, con la carga inicial e identificando o definiendo los elementos plastificados.

El modelo de confiabilidad permite obtener las probabilidades de falla de la estructura, asociadas a diferentes mecanismos de falla provocados por una misma distribución de cargas externas, pero no se estudio en este trabajo un criterio tal que permita obtener la probabilidad de falla conjunta de varios mecanismos provocados por diferentes distribuciones de carga, lo cual sería muy útil en el caso de estructuras sometidas a fuerzas sísmicas ya que la forma utilizada para definir la acción de éstas es aplicarla en diferentes direcciones y combinaciones de carga estática. Además, este modelo está restringido a utilizar variables de resistencia y de fuerza gaussianas debido a razones de simplicidad y la falta de datos para determinar una ley de probabilidad que se ajuste mejor a éstas.

Finalmente, la metodología se ilustra con un ejemplo de aplicación.

REFERENCIAS.

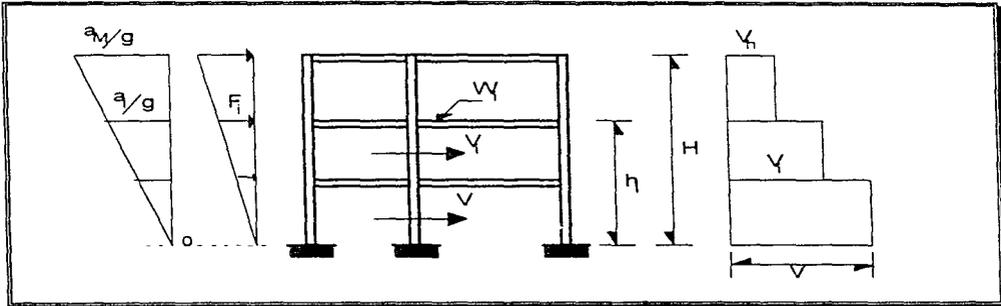
1. Arroyo Contreras, G. M.
Notas del Curso de Teoría General de las Estructuras I.
División de Estudios de Posgrado, UNAM y División de Estudios de Posgrado, UAQ, 1995.
2. Damy Ríos, J. y Alcocer Martínez de Castro, S.
Obtención del Centro de Torsión de Edificios.
VII Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica. Querétaro, Qro., 1987.
3. Alcocer Martínez de Castro, S.
Centro de Torsión de Edificios Obtenido Matricialmente.
Tesis de Licenciatura, UNAM, 1986.
4. Meli Piralla, R. y Bazán Zurita, E.
Manual de Diseño Sísmico de Edificios.
Limusa. México, 1987.
5. Departamento del Distrito Federal.
Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal RCDF.
Gaceta Oficial del Departamento del D. F., 6 de Julio de 1987.
6. Departamento del Distrito Federal.
Normas Técnicas Complementarias al RCDF.
Gaceta Oficial del Departamento del D. F., 5 de Noviembre de 1987.
7. Gere, J. y Timoshenko, S. P.
Mecánica de Materiales.
Interamericana. México 1986.
8. Arroyo Contreras, G. M.
Notas del Curso de Comportamiento y Diseño de Estructuras de Acero.
División de Estudios de Posgrado, UAQ, 1995.

9. Thoft-Christensen, P. y Morutsu Y.
Application of Structural Systems Reliability Theory.
Springer-Verlag. Alemania, 1986.
10. Ravindra, M. K. y Galambos, T. V.
Eight Load and Resistance Factor Design Papers (LRFD).
Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 104, No. ST9, Septiembre 1978.
11. Arroyo Contreras, G. M. y Villarreal Esquivel, C. G.
Identificación de los Estados Límites Plásticos de Edificios Sometidos a Torsión por Sismo.
X Congreso Nacional de Ingeniería Estructural. Mérida, México 1996.
12. Arroyo Contreras, G. M.
Approche probabiliste du comportement élastoplastique de structures marines sous sollicitations aléatoires de houle.
Tesis de Doctorado de la Escuela Nacional de Puentes y Caminos. Paris 1989.
13. Téllez F., Mendoza E. y Esteva L.
Análisis de confiabilidad de estructuras dúctiles sometidas a carga estática.
III Congreso Nacional de Ingeniería Estructural. México, 1982.
14. Arroyo Contreras, G. M. y Villarreal Esquivel, C.G.
MACSAM97.EXE, Programa de análisis lineal y elastoplásticos de estructuras.
División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UAQ.

ANEXO 1

OBTENCIÓN DE FUERZAS Y CORTANTES DEBIDOS A SISMO MEDIANTE EL METODO ESTÁTICO

Con base al modelo estático propuesto por el reglamento de construcción del D.F. (R. D. F.), las fuerzas y cortantes que actúan en estructuras tipo marco se pueden obtener como sigue:



HIPÓTESIS: Se supone una distribución lineal para las aceleraciones en los diferentes niveles de la estructura, partiendo de cero en la base hasta un máximo (a_M) en la azotea del último nivel..

Sabemos que de la 2^a Ley de Newton:

$$F_i = m_i \times a \quad F_i = \frac{W_i}{g} \times a_i \quad (1)$$

donde W_i es el peso total del nivel i , y m_i es la masa total del nivel i .

Por triángulos semejantes :

$$\frac{a_i}{g h_i} = \frac{a_M}{g H} \quad , \quad a_i = \frac{a_M h_i}{H} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), se tiene:

$$F_i = \frac{W_i h_i}{g H} \times a_M \quad (3)$$

Fuerza cortante en la base :

$$V = \sum_{i=1}^n F_i$$

con la ecuación 3 :
$$V = \frac{a_M}{gH} \sum_{i=1}^n W_i h_i \quad (4)$$

Aceleración máxima:

$$a_M = \frac{V H g}{\sum W_i h_i} \quad (5)$$

Fuerza sísmica en el nivel i:

Sustituyendo la ec. (5) en la ec. (3); se tiene:

$$F_i = \frac{W_i h_i}{gH} \left(\frac{V H g}{\sum W_i h_i} \right) \therefore \frac{W_i h_i}{\sum W_i h_i} V \quad (6)$$

De acuerdo al reglamento, la fuerza cortante se obtiene como:

$$V = \frac{C}{Q} W \quad (7)$$

Donde $W = \sum W_i$, es el peso total del edificio (cargas muertas + cargas vivas)

C , coeficiente sísmico.

Q , factor de comportamiento sísmico.

Finalmente, sustituyendo la ec. (7) en la ec. (6), resulta:

$$F_i = \frac{C W}{Q \sum W_i h_i} (W_i h_i) \quad \text{ó} \quad F_i = \frac{V}{\sum W_i h_i} (W_i h_i)$$

Nota: Las fuerzas sísmicas están aplicadas en los centros de masa de cada nivel.

ANEXO 2

MANUAL DE UTILIZACION DEL PROGRAMA DE ANALISIS ESTRUCTURAL

INTRODUCCIÓN

Para la interacción con el usuario es necesario crear un archivo de datos en el que se introduzcan los comandos a operar, así como los parámetros y datos necesarios para realizarlos. Dadas las características del lenguaje FORTRAN, lenguaje utilizado en la elaboración del programa, la introducción del comando y de los parámetros o datos necesarios para su ejecución debe tener cierto formato en el archivo de datos; este formato de entrada del comando es:

```
OPER A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8 A9 N1 N2 N3 N4 N5 F1
F2 F3 F4 F5 F6 F7 F8 F9F10
```

Donde :

OPER es el nombre del comando u operación a realizar, debe ser

A1 a A9 son nombres de posibles matrices con la que se va a operar,

N1 a N5 son números enteros que marcan parámetros del comando, y

F1 a F10 son números reales cualesquiera que sirven para introducir datos según lo requiera la operación a realizar.

Las posiciones que deben ocupar cada uno de estos parámetros en el archivo de datos son:

· Primer renglón:

+ OPER: 4 caracteres, columnas 2 a 5,

+ A1 a A9: 4 caracteres, columnas 7 a 10, 12 a 15, 17 a 20, 22 a 25, 27 a 30, 32 a 35, 35 a 40, 42 a 45, 45 a 50, respectivamente,

+ N1 a N5: números enteros positivos, ocupan las columnas 51 a la 54, 55 a 58, 59 a 62, 63 a 66, 67 a 70, respectivamente

+ F1: número real, columnas 71 a 80 .

· Segundo renglón:

+ F2 a F9: números reales, cada uno tiene 10 espacios reservados,

· Tercer renglón:

+ F10: número real, columnas 1 a 10 .

Cabe señalar que en los números reales F1 a F10 es importante colocar el punto decimal, dado que si no se coloca, el programa colocará ceros a la derecha hasta el espacio reservado para esos números. También es importante mencionar que si el comando no lo requiere no se debe ocupar más que el primer renglón, es decir, se deben colocar los números F2 a F10 sólo si el comando lo requiere. Se hace la observación que los datos tanto de los nombres de los arreglos y comandos así como los números enteros se dan cargados a la derecha del campo reservado. Los números reales se pueden dar con cualquier formato, siempre y cuando estén dentro de sus 10 espacios correspondientes. Para una mejor comprensión de la manera de crear un archivo de datos existen ejemplos explicados al final del manual.

OPERACIONES MATRICIALES

LEE A1 N1 N2 N3 N5

La operación o comando LEE crea una matriz, nombrada A1 con N1 renglones y N2 columnas. Si a N3 se le asigna un valor diferente de cero, se trata de una matriz entera, o si N3 es igual a cero, se trata de una matriz real. Si N5 es diferente de cero no imprime la operación. Los datos son leídos por columnas del arreglo, dados por cada línea de entrada, de 8 en 8 para matrices reales o de 6 en 6 para matrices enteras, asignando un campo de diez espacios para cada valor, por lo tanto en cada línea se utilizarán de la columna 1 a la 80 para los 8 diferentes valores.

LEER A1 N1 N2 N3 N4 N5

El comando LEER es igual que el comando LEE, simplemente que lee los arreglos A1 por renglones, de N4 en N4 columnas. Los datos pueden ser dados en el archivo de lectura hasta 8 valores por renglón.

LEEC A1 N1 N2 N3 N4

El comando LEEC es similar a los comandos de lectura LEE y LEER, simplemente que lee solo los valores diferentes de cero del arreglo A1; N4 indica cuantos valores diferentes de cero tiene que leer, estos valores son dados uno por cada renglón, indicando primero el número del renglón, después el número de la columna y por último el valor diferente de cero, con el formato siguiente (215, F10.0).

IMP A1 N3 N4 N5

El comando IMP, imprime la matriz nombrada A1 si N4 es igual a cero, para N4 diferente de cero imprime la matriz transpuesta de A1; si N3 = 0 se trata de una matriz real o si N3 diferente de cero se trata de una matriz entera. Si N5 es diferente de cero, no imprime el comando en el archivo de resultados.

SUMA A1 A2 A3⁺ N5

El comando SUMA crea la matriz A3⁺, con el resultado de la suma de las matrices A1 y A2. Si N5 es diferente de cero no imprime el comando en el archivo de resultados.

REST A1 A2 A3⁺ N5

El comando REST crea la matriz A3⁺, con el resultado de la diferencia de las matrices A1 menos A2. Si N5 es diferente de cero no imprime el comando en el archivo de salida.

MULT A1 A2 A3⁺ N4 N5

El comando MULT crea la matriz A3⁺ con el resultado del producto de las matrices A1 y A2, si N4 = 0, en caso contrario para N4 diferente de cero, crea la matriz A3, con el resultado del producto de la matriz transpuesta de A1 por A2: A3⁺=A1^TA2. Si N5 es diferente de cero no imprime el comando en el archivo de salida.

TRAS A1 A2⁺ N5

El comando TRAS crea la matriz A2⁺, con la transpuesta de A1. Si N5 es diferente de cero no imprime el comando en el archivo de salida.

ESCA A1 A2⁺ N5 F1

El comando ESCA crea la matriz A2⁺, con el resultado del producto del escaler F1 por la matriz A1 (multiplica el escaler F1 por cada uno de los términos del arreglo A1). Si N5 es diferente de cero no imprime el comando.

INVE A1⁻ N5

Con este comando INVE, la matriz A1⁻ es reemplazada por su inversa. Si N5 es diferente de cero no imprime el comando en el archivo de salida.

BORR A1 N5

El comando BORR borra del arreglo general el arreglo A1, y el arreglo general es compactado. Si N5 es diferente de cero no imprime el comando en el archivo de salida.

DUP A1 A2 N5

El comando DUP duplica la matriz A1 en A2, el arreglo A2 esta dado. Si N5 es diferente de cero no imprime el comando en el archivo de salida.

DUPB A1 A2⁺ N5

El comando DUPB duplica la matriz A1 en A2⁺. El arreglo A2⁺ es creado por programa. Si N5 es diferente de cero no imprime el comando en el archivo de salida.

CERO A1 N1 N2 N3 N5

El comando CERO crea la matriz A1 de N1 número de renglones y N2 número de columnas. Si N3 es diferente de cero se trata de una matriz entera, si N3 = 0 se trata de una matriz real. Si N5 es diferente de cero no imprime la operación.

SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

GACO A1 A2* N5

El comando GACO resuelve el sistema de ecuaciones lineal dado por $A1\{x\} = A2^*$, con un algoritmo del método de eliminación de Gauss por columnas. El arreglo de términos independientes A2* admite varias columnas. La solución del sistema de ecuaciones es almacenado en el arreglo A2*. Si N5 es diferente de cero no imprime el comando en el archivo de salida.

GARE A1 A2* N5

El comando GARE resuelve el sistema de ecuaciones lineal dado por $A1\{x\} = A2^*$, con un algoritmo del método de eliminación de Gauss por renglones. El arreglo de los términos independientes A2* admite varias columnas. La solución del sistema de ecuaciones es almacenado en el arreglo A2*. Si N5 es diferente de cero no imprime el comando en el archivo de salida.

GAMS A1 A2* N5

El comando GAMS resuelve el sistema de ecuaciones lineal dado por $A1\{x\} = A2^*$, con un algoritmo del método de eliminación de Gauss para matrices simétricas de A1. El arreglo de los términos independientes A2* admite varias columnas. La solución del sistema de ecuaciones es almacenada en el arreglo A2*. Si N5 es diferente de cero no imprime el comando en el archivo de salida.

GABA A1 A2* N5

El comando GABA resuelve el sistema de ecuaciones lineal simétrico, dado por el arreglo A1 que almacena en su primera columna los términos de la diagonal del sistema, en las columnas subsecuentes almacena los términos de las diagonales superiores hasta el ancho de banda, los términos independientes del sistema están dados por A2*. Este arreglo A2* admite varias columnas. La solución del sistema de ecuaciones es almacenada en el arreglo A2*. Si N5 es diferente de cero no imprime el comando en el archivo de salida.

GASP A1 A2* N5

El comando GASP resuelve el sistema de ecuaciones lineal dado por $A1\{x\} = A2^*$, con un algoritmo del método de Gauss para matrices simétricas de A1 sin perfil y por factorización. El arreglo de los términos independientes A2* admite varias columnas. La solución del sistema de ecuaciones es almacenada en el arreglo A2*. Si N5 es diferente de cero no imprime el comando en el archivo de salida.

GAPA A1 A2* N5

El comando GAPA resuelve el sistema de ecuaciones lineal dado por $A1\{x\} = A2^*$, con un algoritmo del método de Gauss para matrices simétricas de A1, con perfil y por factorización. El arreglo de los términos independientes A2* admite varias columnas. La solución del sistema de ecuaciones es almacenada en el arreglo A2*. Si N5 es diferente de cero no imprime el comando en el archivo de salida.

ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS CON COMPORTAMIENTO LINEAL

COMANDOS PARA LOS ANÁLISIS EN FORMA SECUENCIAL

ELV2 A1⁺A2⁺N1 N5 F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7 F8 F9 F10

El comando ELV2 crea y genera las matrices:

A1⁺ de rigideces de un elemento viga, en el espacio bidimensional y en coordenadas globales,

A2⁺ de transformación de desplazamiento - fuerza

N1 indica el tipo de matriz de rigidez:

- =1, matriz de rigidez a flexión de un elemento con extremos empotrados.
- =2, matriz de rigidez a flexión de un elemento articulado en i.
- =3, matriz de rigidez a flexión de un elemento articulado en j.
- =4, matriz de rigidez a flexión y cortante de un elemento viga.
- =5, matriz de rigidez a flexión y momento de torsión.
- =6, matriz de rigidez a flexión, cortante y momento de torsión.
- =7, matriz de rigidez de un elemento barra (articulado en ambos extremos).

Las propiedades del elemento están dadas como:

$F1 = E$, el módulo de Young.

$F2 = AG$, el área de la sección transversal del elemento A o el módulo de cizallada o de cortante, dependiendo del tipo de matriz.

$F3 = I$, el momento de inercia.

$F4$ y $F5$ las coordenadas X_i , Y_i del nudo i (izquierdo del elemento).

$F6$ y $F7$ las coordenadas X_j , Y_j del nudo j (derecho del elemento).

$F8 = m$, la constante llamada relación de Poisson.

$F9 = Ac$, área de cortante.

$F10 = J$, momento polar de inercia.

Si N5 es diferente de cero no imprime el comando. Este comando es especial para el análisis matricial de estructuras bidimensionales de comportamiento lineal.

ELB3 A1⁺A2⁺N5 F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7 F8

El comando ELB3 crea y genera las matrices:

$A1^+$ de rigideces de un elemento barra (tipo armadura), en el espacio tridimensional y en coordenadas globales de 6×6 ,

$A2^+$ de transformación de desplazamiento - fuerza de 1×6 .

Las propiedades del elemento están dadas como:

$F1 = E$, el módulo de Young.

$F2 = A$, el área de la sección transversal del elemento.

$F3$, $F4$ y $F5$ son las coordenadas del nudo izquierdo i del elemento (x_i, y_i, z_i).

$F6$, $F7$ y $F8$ son las coordenadas del nudo derecho j del elemento (x_j, y_j, z_j).

Si N5 es diferente de cero no imprime el comando. Este comando es especial para el análisis matricial de estructuras tridimensionales, con comportamiento lineal.

ELV3 A1⁺A2⁺A3 N1 N2 N3 N4 N5 F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7

El comando ELV3 crea y genera las matrices:

$A1^+$ de rigideces de un elemento viga, en el espacio tridimensional, en coordenadas globales, de 12×12 y $A2^+$ de transformación de desplazamiento - fuerza de 12×12 .

$A3$ es un arreglo que debe de contener las coordenadas de todos los nudos de la estructura considerada.

Las deformaciones debidas a las fuerzas: axial, de flexión y de torsión, están incluidas en la formulación de la matriz.

N1 indica el número del nudo i del elemento, N2 indica el número del nudo j del elemento, N3 indica el número de un nudo adicional i o el número del plano y N4 indica el número de un nudo adicional j o k. Las coordenadas de los nudos N1, N2, N3 y N4 deben estar dados en el arreglo A3.

Las propiedades del elemento están dadas como:

$F1 = E$, el módulo de Young.

$F2 = A$, el área axial de la sección transversal del elemento, al eje 1.

$F3 = I3$, el momento de inercia sobre el eje 3.

$F4 = I2$, el momento de inercia sobre el eje 2.

$F5 = J$, el momento torsional de inercia sobre el eje 1.

$F6 = G$, el módulo de cortante.

La matriz de rigidez del elemento $A1^+$, está formada con respecto a la definición positiva de fuerzas y desplazamientos globales. Las propiedades de la sección: I2 e I3, del elemento viga tridimensional, deben ser especificados con respecto a un sistema de coordenadas locales del elemento. Además las fuerzas del elemento, calculadas por el programa de computadora, están referidas a este sistema local. Por consiguiente, es responsabilidad del usuario definir el sistema 1-2-3 del elemento con

respecto al sistema global X-Y-Z. Ambos sistemas deben ser sistemas coordinados de mano derecha.

El eje 1 (x) positivo, vector V_1 , está definido por una línea a lo largo del eje del elemento: del nudo i (N1) al nudo j (N2).

Los ejes 2 (y) y 3 (z) pueden ser especificados con la opción N3 y N4, por cualquiera de los siguientes métodos:

Método 1. Solamente para elementos contenidos en alguno de los planos globales, N3 diferente de cero, N4 = 0.

Plano xy, N3 = 1, N4 = 0, el eje 3 es el eje Z y $V_2 = V_3 \times V_1$,

Plano zx, N3 = 2, N4 = 0, el eje 3 es el eje Y y $V_2 = V_3 \times V_1$,

Plano xy, N3 = 3, N4 = 0, el eje 3 es el eje X y $V_2 = V_3 \times V_1$

Método 2. Se especifica un vector V_p , N3 diferente de cero, N4 diferente de cero.

Las coordenadas de los números de nudo N3 y N4 están especificados por el usuario, en la información dada por la matriz A3 de coordenadas de los nudos.

El vector V_p está definido por la línea del nudo N3 al nudo N4. Los ejes 2 y 3 se calculan como sigue: $V_2 = V_p \times V_1$ y $V_3 = V_1 \times V_2$. El vector V_p es paralelo a V_3 . Si fuera necesario, pueden ser añadidos nudo adicionales falsos, aunque no unan a los elementos.

Método 3. Se especifica un nudo k, N3 = 0, N4 diferente de cero.

El vector V_k está definido por la línea del nudo N1 al nudo N4. Los ejes 2 y 3 son calculados como sigue: $V_3 = V_1 \times V_k$ y $V_2 = V_3 \times V_1$. El nudo k debe estar contenido en el plano 1-2 del elemento.

Método 4. Se especifica el ángulo contenido entre el eje 3 del elemento y el plano X-Z del sistema global de coordenadas. F7 es igual al ángulo definido como el ángulo para el cual la proyección del eje 2 en el eje Y es positivo, cuando los ejes 2-3 son girados sobre el eje 1, entonces -q tal que Z' liga en el plano X-Z.

Si N5 es diferente de cero no imprime el comando. Este comando es especial para el análisis matricial de estructuras tridimensionales con comportamiento lineal.

ELSV A1[†]A2[†]N1 N5 F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7 F8 F9 F10

El comando ELSV sirve para irrealizar análisis lineales utilizando elementos de sección variable, este comando únicamente sirve para elementos en los que el peralte va variando linealmente a lo largo de su longitud, el comando crea y genera las matrices:

A1[†] de rigideces de un elemento viga, con sección linealmente variable, en el espacio bidimensional y en coordenadas globales,
A2[†] de transformación de desplazamiento - fuerza

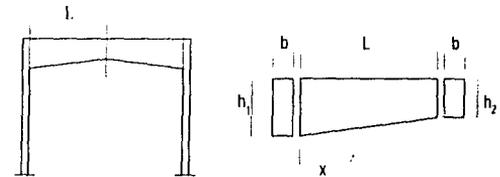


Fig. 1. ejemplo de elemento de sección variable macizo.

N1 indica el tipo de matriz de rigidez:

=1, matriz de rigidez a flexión de un elemento de sección variable con extremos empotrados y sección rectangular maciza (fig 1),

=2, matriz de rigidez a flexión de un elemento de sección variable con extremos empotrados y sección rectangular hueca (fig 2),

=3, matriz de rigidez a flexión de un elemento de sección variable con extremos empotrados y sección tipo I (fig 3).

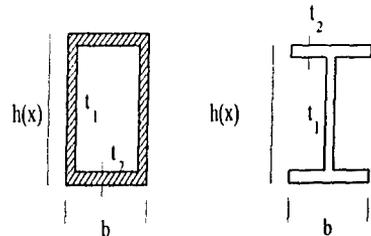


Fig. 2. Sección hueca.

Fig. 3. Sección tipo I.

Las propiedades del elemento están dadas como:

$F1 = E$, el módulo de Young.

$F2 = H1$, el peralte del elemento en el extremo i .

$F3 = H1$, el peralte del elemento en el extremo j .

$F4$ y $F5$ las coordenadas X_i, Y_i del nudo i (izquierdo del elemento).

$F6$ y $F7$ las coordenadas X_j, Y_j del nudo j (derecho del elemento).

$F8 = b$, el ancho del elemento.

- adicionalmente para las secciones hueca e I debemos introducir:

$F9 = t1$, el espesor de las placas horizontales,

$F10 = t2$, el espesor de las placas verticales.

Si $N5$ es diferente de cero no imprime el comando. Este comando es especial para el análisis matricial de estructuras bidimensionales de comportamiento lineal.

ADMK A1* A2 A3 N1 N5

El comando ADMK permite añadir la matriz de rigideces $A2$ del elemento $N1$ en la matriz de rigideces total $A1^*$ de la estructura (en coordenadas globales). Los números de los renglones y las columnas, donde los términos tienen que ser añadidos se obtienen de la columna $N1$ del arreglo $A3$ ($N1$ es el número del elemento y $A3$ almacena los números que corresponden a los grados de libertad de los nudos extremos de los elementos). $N1$ es el número del elemento que indica la columna del arreglo $A3$, que corresponde a los números de los renglones y columnas donde los términos de $A2$ tienen que ser añadidos en $A1$. Si $N5$ es diferente de cero la instrucción no se imprime en el archivo de salida.

FEMP A1* N1 N5

El comando FEMP crea el vector de fuerzas y momentos de empotramiento para un elemento viga en dos dimensiones y en coordenadas globales sometida a carga uniformemente distribuida.

$N1$ indica el tipo del elemento:

=1, Elemento con extremos empotrados,

=2, Elemento articulado en i ,

=3, Elemento articulado en j ,

$N2$ indica la orientación de la carga:

=0, Carga perpendicular al eje del elemento,

=1, Carga vertical con respecto a las coordenadas globales,

=2, Carga horizontal con respecto a las coordenadas globales

Las propiedades del elemento están dadas como:

$F1$ y $F2$, las coordenadas X_i, Y_i del nudo i (izquierdo del elemento),

$F3$ y $F4$, las coordenadas X_j, Y_j del nudo j (derecho del elemento),

$F5 = w$, el valor de la carga uniformemente repartida,

Si $N5$ es diferente de cero no imprime el comando. Este comando es especial para el análisis matricial de estructuras bidimensionales de comportamiento lineal.

ENFE A1* A2 A3 N1 N2 N5

El comando ENFE permite añadir el vector de cargas $A2$ del elemento $N1$ en el vector o matriz de cargas total $A1^*$ de la estructura (en coordenadas globales). Los números de los renglones donde los términos tienen que ser añadidos se obtienen de la columna $N1$ del arreglo $A3$ ($N1$ es el número del elemento y $A3$ almacena los números que corresponden a los grados de libertad de los nudos extremos de los elementos). $N1$ es el número del elemento que indica la columna del arreglo $A3$, que corresponde a los números de los renglones donde los términos de $A2$ tienen que ser añadidos en $A1$. $N2$ indica la condición de carga a la que se añadirá el vector $A2$, es decir, la columna del arreglo $A1$. Si $N5$ es diferente de cero la instrucción no se imprime en el archivo de salida.

FUEL A1 A2 A3 A4* N1 N5

El comando FUEL permite obtener las fuerzas del miembro, multiplicando la matriz especial de transformación de desplazamientos-fuerzas $A1$, por la matriz de desplazamientos de los nudos $A2$. Las fuerzas de miembro son almacenadas en el arreglo $A4^*$, creada por programa. Estas fuerzas son dadas en coordenadas locales del elemento. Los desplazamientos de los nudos que tienen que ser utilizados en la multiplicación se obtienen de la columna $N1$ del arreglo $A3$ que almacena los números que corresponden a los grados de libertad de los nudos extremos de los elementos. Si $N5$ es diferente de cero no imprime la instrucción.

IMPE A1 N1 N3 N4 N5

El comando IMPE imprime la matriz A1, sin imprimir el nombre de la matriz y los números indicando las columnas y los renglones. N1 es el número del elemento. Si N3 es diferente de cero se trata de una matriz entera, si no (N3 = 0) se trata de una matriz real. Si N4 es diferente de cero imprime la transpuesta de la matriz A1, si no (N4 = 0) imprime la matriz A1. Este comando es especial para la impresión de los resultados de los análisis matriciales de estructuras. Si N5 es diferente de cero no imprime el comando.

MENS N1 N5

El comando MENS imprimen mensajes de salida para la impresión de resultados de los análisis matriciales de estructuras:

- Si N1 =1, mensaje para las cargas nodales externas.
 =2, mensaje para los desplazamientos nodales.
 =3, mensaje para las fuerzas de miembro.
 =4, mensaje para los grados de libertad de los elementos.
 =5, mensaje para los coeficientes del margen de seguridad, de una sección del extremo izquierdo de un elemento.
 =6, mensaje para los coeficientes del margen de seguridad, de una sección del extremo derecho de un elemento.
 =7, mensaje para las fuerzas de miembro de un elemento barra.
 =8, mensaje para las fuerzas de miembro de un elemento parrilla.

Si N5 es diferente de cero no imprime el comando.

ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS PLANAS CON COMPORTAMIENTO LINEAL

COMANDOS PARA LOS ANÁLISIS EN FORMA DIRECTA

ANAL A1 A2 A3 A4 A5 A6 N1
COR ICON PRO CAR ID FUBA

Este comando ANAL sirve para hacer análisis de estructuras, con comportamiento elástico, en forma directa. Para esto, es necesario proporcionarlos siguientes datos:

A1 es un arreglo (de número de nudos x número de espacios de trabajo, 2 o 3 dimensiones) que almacena las coordenadas de los nudos ,

A2 es un arreglo con números enteros (de número de elementos x 4), donde se almacenan las conectividades o incidencias de los elementos nudo i (columna 1), nudo j (columna 2); el tipo de matriz de rigidez (columna 3) y el tipo de propiedades que le corresponde al elemento (columna 4); para este comando los tipo de matriz de rigidez de un elemento de sección variable son 8, 9 y 10, correspondientes a los tipos 1,2 y 3 del comando ELSV (para análisis en forma secuencial).

A3 es un arreglo (de número de tipos diferentes de propiedades geométricas x número de propiedades), donde se almacenan las propiedades de los tipos diferentes de elementos .

El módulo de Young E (columna 1).

El área de la sección transversal A (columna 2).

El momento de inercia I (columna 3)

La constante n (columna 4).

El área de cortante AC (columna 5).

El momento polar de inercia J (columna 6)

-para los elementos de seccion variable:

E, modulo de elasticidad (columna 1).

H1, peralte inicial de la seccion (columna 2).

H2, peralte final de la seccion (columna 3).

B, ancho de la seccion (columna 4).

t1, espesor de las placas horizontales (secciones hueca e I) (columna 5)

t2, espesor de la(s) placa(s) vertical(es)(secciones hueca e I) (columna 6)

A4 es un arreglo (de número de grados de libertad total de la estructura x número de condiciones de carga), que almacena las fuerzas nodales externas, asociadas a cada grado de libertad de los nudos y para cada condición de carga.

A5 es un arreglo de números enteros (de número de grados de libertad de los nudos extremos de los elementos x número de elementos), que almacena los grados de libertad asociados a los nudos extremos de cada elemento.

A6 es un arreglo, donde se almacenan las cargas sobre las barras :

Número del elemento sobre el que están las cargas (columna 1),

Número de condición de carga (columna 2),

Valor de ω , la carga uniformemente repartida (columna 3),

Orientación de la carga (columna 8):

- 0, Carga perpendicular al eje de la barra,
- 1, Carga vertical con respecto al coordenadas globales,
- 2, Carga horizontal con respecto al coordenadas globales.

Si $N1 = 0$, el programa imprime los datos nuevamente, como son coordenadas de los nudos, conectividades, etc., si $N1$ es diferente de cero no imprime estos datos. Si $N5$ es diferente de cero no imprime el comando en el archivo de salida.

ANAC A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A9 N1 N2 N3 N4 F1

Este comando ANAC sirve por un lado, para hacer análisis matricial de estructuras, con comportamiento elástico, en forma directa. Por otro lado, permite además identificar las secciones de los elementos más esforzadas, con los factores de carga críticos correspondientes.

Se hace la observación que el objetivo de este comando es primero identificar las secciones más esforzadas de los elementos del sistema estructural, después obtener los coeficientes de las funciones de estado límite de cada sección, en términos de las variables de carga externa y de fuerzas internas, finalmente este comando genera unos archivos que permiten por un lado alimentar un programa de análisis de confiabilidad, por otro lado calcular las probabilidades de falla o seguridad asociadas a cada función de estado límite.

Nota: es necesario dar como 1^a condición de carga, todas las cargas que se consideran como cargas aleatorias, ya que los signos de los coeficientes de las funciones de estado límite de las secciones de los elementos están definidos en función de esta condición de carga. De la 2^a condición de carga en adelante, se consideran por separado cada una de las cargas aleatorias hasta $(n-1)$ ^a condición de carga. En la n ^a condición de carga se deben considerar todas las cargas deterministas.

Los cinco primeros arreglos (A1 a A5) están definidos en el comando ANAL.

A6 es un arreglo ($2^* \text{NBAR} \times 2$) que almacena las resistencias límites medias de las secciones extremas de los elementos y sus coeficientes de variación correspondientes (C.V.). A7 (NFM $\times 2$) es un arreglo que almacena las fuerzas externas medias y sus C. V. correspondientes. A9 es

un arreglo de cargas uniformes sobre las barras, igual al arreglo A6 del comando ANAL.

$N1$ indica el tipo de variables aleatorias (v.a.): $N1 = 1$, v. a. normales, $N1 = 2$, v.a. log-normales.

$N2$ indica el tipo de fluencia plástica: $N2 = 1$, fluencia a pura flexión, $N2 = 2$, fluencia por interacción de la flexión y fuerza axial.

$N3$ indica el número de secciones más esforzadas que se quiere identificar.

$N4$ indica si existen cargas deterministas: $N4 = 0$ no hay carga determinista y $N4$ diferente de cero si hay cargas deterministas.

Por último, $F1$ indica el esfuerzo de fluencia, que es necesario para determinar el estado límite elástico. Este comando guarda los coeficientes de estado límite de las secciones en el archivo CTIJ.DAT.

MATK A1 A2 A3 A4 A5⁺ N1 N2 N5

Este comando crea la matriz de rigidez de un marco con $N2$ grados de libertad, los arreglos A1 a A4 y $N1$ están definidos en el comando ANAL y la matriz de rigidez se guarda en A5.

ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS TRIDIMENSIONALES CON COMPORTAMIENTO LINEAL

COMANDOS PARA LOS ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS TIPO EDIFICIO SOMETIDAS A TORSIÓN POR SISMO

KLAT A1 A2+ N1 N5

Este comando permite obtener la matriz de rigidez lateral $A2$ de un marco plano a partir de la matriz de rigidez total del mismo $A1$. $N1$ es el número de niveles o entrepisos del marco, los cuales se suponen que tienen la misma deformación lateral. Si $N5$ es diferente de cero no imprime el comando.

ANKL A1 A2 A3 A4 A5⁺ N1 N2 N3
COR ICON PRO ID KL

Este comando **ANKL** sirve para obtener la matriz de rigidez lateral de un sistema estructural, **A5** (KL).

A1 es un arreglo (de número de nudos x número de espacios de trabajo, 2 o 3 dimensiones) que almacena las coordenadas de los nudos, A2 es un arreglo (de número de elementos x 4), donde se almacenan las conectividades o incidencias de los elementos: nudo i (columna 1), nudo j (columna 2); el tipo de matriz de rigidez (columna 3) y el tipo de propiedades que le corresponde al elemento (columna 4), A3 es un arreglo (de número de tipos diferentes de propiedades geométricas x número de propiedades), donde se almacenan las propiedades de los tipos diferentes de elementos: El módulo de Young E (columna 1), El área de la sección transversal A (columna 2), El momento de inercia I (columna 3), La constante n (columna 4), El área de cortante AC (columna 5) y El momento polar de inercia J (columna 6), y A4 es un arreglo (de número de grados de libertad de los nudos extremos de los elementos x número de elementos), que almacena los grados de libertad asociados a los nudos extremos de cada elemento. Estos cuatro primeros arreglos (A1 a A4) están también definidos en el comando ANAL.

N2 es el orden de la matriz K del sistema estructural o el número de grados de libertad considerados N3 es y el número de niveles del sistema. Se hace la observación que al numerar los grados de libertad de los nudos del sistema estructural, se dejan al final los grados de libertad de los nudos en la dirección x, que representan los desplazamientos de los entresijos, y que además existe un solo grado de libertad por nivel.

Si N1 es diferente de cero la operación no imprime los arreglos dados como datos, si N5 es diferente de cero no imprime el comando.

Los nombres COR, ICON, PRO, ID y KL, están dados con la finalidad de ilustrar e identificar los nombres que se utilizan en algunos archivos de datos de ejemplos de análisis de estructuras, que se incluyen con el programa.

KTRI A1⁺A2 N1 N2 N5
MAT1
MAT2

...

Este comando permite ir ensamblando la matriz de rigidez tridimensional condensada de la estructura A1⁺ a partir de las matrices de rigidez laterales de los marcos MAT1, MAT2, etc., nombres que se leen en los siguientes renglones del renglón del comando de la columna 2 a la columna 5. La matriz A2 es una matriz que contiene las coordenadas de dos puntos de cada marco en planta, las dos primeras columnas deben ser las coordenadas X y Y del nodo i, y las siguientes dos son las del nodo j N1 es el número de entresijos de la estructura, y N2 es el número de marcos que se ensamblarán.

La matriz A1 es creada por el programa si ésta no existe previamente, lo cual permite ver el avance del ensamble si se va usando el comando marco por marco.

ATOR A1 A2 N1 N2 N5
MAT1
MAT2

...

Este comando permite ir ensamblando la matriz de rigidez tridimensional condensada de la estructura a partir de las matrices de rigidez laterales de los marcos MAT1, MAT2, etc., que se leen en los siguientes renglones, y posteriormente resolver el sistema con la matriz de cargas laterales A2. La matriz A1 es una matriz que contiene las coordenadas de dos puntos de cada marco en planta. La dos primeras columnas deben ser las coordenadas X y Y del nodo i, y las siguientes dos son las del nodo j. Este comando además calcula los desplazamientos y las fuerzas de cada marco. N1 es el número de entresijos de la estructura, y N2 es el número de marcos que se ensamblarán. Si N5 es diferente de cero el programa no imprime el comando.

ANTO A1 A2 A3 A4 A5 A6 N1 N3
COR ICON PRO ID PARA CAR

Este comando ANTO sirve para realizar el análisis tridimensionales por torsión de un sistema estructural en el espacio, tipo edificio, formado por marcos planos. N3 corresponde al número de entresijos de todo el sistema.

A1 es un arreglo (de número de nudos x número de espacios de trabajo, 3 dimensiones) que almacena las coordenadas de los nudos de todo el sistema, A2 es un arreglo de números enteros (de número de elementos x 4), donde se almacenan las conectividades o incidencias de los elementos: nudo i (columna 1), nudo j (columna 2); el tipo de matriz de rigidez (columna 3) y el tipo de propiedades que le corresponde al elemento (columna 4). Este arreglo debe ir mostrando las conectividades de cada marco en forma ordenada, es decir, al principio deben ir todas las conectividades del marco 1, posteriormente todas las del marco 2 y así sucesivamente.

A3 es un arreglo (de número de tipos diferentes de propiedades geométricas x número de propiedades), donde se almacenan las propiedades de los tipos diferentes de elementos :

El módulo de Young E (columna 1).

El área de la sección transversal A (columna 2).

El momento de inercia I (columna 3).

La constante v (columna 4).

El área de cortante AC (columna 5).

El momento polar de inercia J (columna 6).

A4 es un arreglo de números enteros (de número de grados de libertad de los nudos extremos de los elementos x número de elementos), que almacena los grados de libertad asociados a los nudos extremos de cada elemento. Al igual que en el arreglo A2 el arreglo de grados de libertad debe ser de manera ordenada, es decir, primero el arreglo del marco 1, posteriormente del marco 2, y así sucesivamente. Es importante mencionar que la numeración de los grados de libertad es independiente en cada marco, esto es, se puede asignar un mismo número a diferentes grados de libertad de diferentes marcos. El arreglo A5 es un arreglo entero de 2 columnas por tantos renglones como marcos planos que forman la estructura, y contiene parámetros de cada marco, en la primera columna contiene el número de barras, y en la segunda contiene el número de grados de libertad para cada marco (renglón).

Si N1 es diferente de cero la operación no imprime los arreglos dados como datos, si N5 es diferente de cero no imprime el comando.

ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS CON COMPORTAMIENTO ELASTOPLÁSTICO

COMANDOS PARA LOS ANÁLISIS ELASTOPLÁSTICOS EN FORMA DIRECTA

| ANAP | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 |
|------|-----|------|-----|-----|----|------|------|
| | COR | ICON | PRO | CAR | ID | INEP | CTIJ |

Este comando ANAP sirve para hacer análisis matricial de estructuras, con comportamiento elastoplástico, paso a paso y en forma directa.

Los primeros 5 arreglos (A1 a A5) están definidos en el comando ANAL.

En el caso del arreglo A4 (fuerzas nodales externas), es necesario dar un renglón adicional, donde se almacenan los valores de las fuerzas de referencia (unos divisores), que nos permiten obtener los coeficientes de las fuerzas de las funciones de estado límite. Si no se quieren dar valores de referencia es necesario dar unos.

A6 (numero de elementos plastificado x 2) es un arreglo que almacena los números de elementos plastificados (columna 1) y el tipo de plastificación (columna 2):

- 1 para la plastificación en el extremo izquierdo del elemento.
- 2 para la plastificación en el extremo derecho del elemento.
- 3 para un elemento plastificado en ambos extremos

Se hace la observación que cuando un elemento esta plastificado en ambos extremos, es necesario dálo como dato dos veces (con plastificación igual a 3).

A7 es un arreglo que almacena los coeficientes de los vectores C_k de las funciones de estado límites de las secciones extremas de los elementos, así como las resistencias límites a la plastificación de estas secciones.

| | | | | | | | | |
|------|-----|------|-----|-----|----|-----|----|------|
| ANPC | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 |
| | COR | ICON | PRO | CAR | ID | RPM | PM | INEP |

A9 N1 N2 N3 N4 F1

Este comando ANAC sirve por un lado, para hacer análisis matricial de estructuras, con comportamiento elastoplástico, en forma directa (otra manera de decirlo es que este comando permite hacer análisis lineales de estructuras tomando en cuenta la fluencia por o sin interacción del momento flexionante y la carga axial, de las secciones plastificadas de los elementos). Por otro lado, permite además identificar las secciones de los elementos mas esforzadas, con los factor es carga criticos correspondientes.

Se hace la observación que el objetivo de este comando es permitir primero identificar las secciones mas esforzadas (aun sin plastificarse) de los elementos del sistema estructural, después obtener los coeficientes de las funciones de los estados limite de cada sección, en términos de las variables de las cargas externas, de las variables de las fuerzas residuales nodales equivalentes y de las fuerzas internas; finalmente este comando genera unos archivos que permiten por un lado alimentar un programa de análisis de confiabilidad, por otro lado calcular las probabilidades de falla o seguridad asociadas a cada función de estado limite.

Nota: es necesario dar como primera condición de carga, todas las cargas que se consideran como cargas aleatorias, ya que los signos de los coeficientes de las funciones de estado limite de las secciones de los elementos están definidos en función de esta condición de carga. De la segunda condición de carga en adelante, se consideran por separado cada una de las cargas aleatorias hasta (n-1)^a condición de carga. En la n^a condición de carga se deben considerar todas las cargas deterministas.

Los 5 primeros arreglos (A1 a A5) están definidos en el comando ANAL.

A6 es un arreglo con los valores de resistencia media de las secciones y sus respectivos coeficientes de variación correspondientes. A7 es un arreglo que almacena las fuerzas externas medias y sus C.V. correspondientes. Estos dos arreglos, están definidos en el comando ANAC.

A8 es un arreglo donde se definen los elementos plastificados y el tipo de plastificación. A9 es un arreglo donde se almacenan los valores de las

fuerzas uniformemente distribuidas en las barras (FUBA) definido en el comando ANAL.

Las constantes N1, N3 y N4 están definidos en el comando ANAC. F1 es el valor de E a la r entre E ($F^r = E^r / E$), donde E es el modulo elástico de Young.

El valor de los coeficientes de estado limite de las secciones y se leen del archivo CTIJ.DAT creado previamente

Si la constante N2 es diferente de cero, implica que en los análisis elastoplásticos se tomaran en cuenta los esfuerzos residuales reducidos, además, se tendrá que dar un nombre de archivo a continuación de la instrucción o comando ANPC, de donde se tomarán los valores modificados de los coeficientes de estado limite de los elementos, guardados también en el archivo CTIJ.DAT .

COMANDOS PARA LOS ANÁLISIS ELASTOPLÁSTICOS DE ESTRUCTURAS TIPO EDIFICIO SOMETIDAS A TORSION

ANTC A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8 N1 N2 N3 N4 F1

Este comando es similar al comando ANTO ya que permite realizar análisis lineales de estructuras tipo edificio sometidas a torsión por sismo, pero además permite identificar las secciones más esforzadas de cada uno de los marcos que forman la estructura. Los arreglos A1 a A6 están definidos en el comando ANTO, con la excepción que el arreglo PARA (A5) requiere una tercera columna en la que se indicarán el número de secciones más esforzadas de cada marco.

El arreglo A7 corresponde a las resistencias medias de las secciones en forma ordenada (primero de las secciones del marco 1, después del marco 2, etc.). El arreglo A8 corresponde a las fuerzas medias de referencia, generalmente las fuerzas sísmicas del sistema.

N2 indica el tipo de fluencia =1 flexión, =2 flexión y carga axial. N3 indica el número de entresijos de la estructura (niveles). Si N1 es diferente de cero no imprime los datos del comando. Este comando crea el archivo CTIJ.DAT con los valores de los coeficientes de estado límite de las secciones.

ANPC A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8 N1 N2 N3 N4 F1

Este comando permite realizar los análisis elasto-plásticos de estructuras tipo edificio sometidas a torsión por sismo, y además permite identificar las secciones más esforzadas de cada uno de los marcos que forman la estructura degradada. Los arreglos A1 a A6 están definidos en el comando ANTO, con la excepción que el arreglo PARA (A5) requiere una tercera columna en la que se indicarán el número de secciones más esforzadas de cada marco y en la cuarta columna el número de plastificaciones para cada marco.

El arreglo A7 indica las secciones plastificadas de cada uno de los marcos en forma similar al arreglo A8 del comando ANPC, solo que se colocan las plastificaciones según el orden de los marcos, es decir, en principio los elementos plastificados del marco 1, posteriormente del marco dos, etc. ya que el programa leerá este arreglo según lo indique el número de plastificaciones en el arreglo A5 de parámetros de los marcos.

N3 indica el número de entresijos de la estructura (niveles). Si N1 es diferente de cero no imprime los datos del comando. Si N1 es igual a dos, el comando imprime los coeficientes de las funciones de estado límite. Este comando lee del archivo CTIJ.DAT los valores de los coeficientes de estado límite de las secciones de las etapas anteriores y guarda en este mismo los cambios.