

30  
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO



FACULTAD DE CIENCIAS

EL FENOMENO DE ARQUEO

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
**F I S I C O**  
P R E S E N T A :  
**CARLOS MALAGA IGUIRIZ**



INSTITUTO DE ESTUDIOS  
DIRECTOR DE TESIS:  
RAMON PERALTA FABI  
FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR  
1997

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Baule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "El Fenómeno de Arqueb"

realizado por Carlos Málaga Iguíñiz

con número de cuenta 8826171-7 , pasante de la carrera de Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

Propietario

Propietario

Suplente

Suplente

DR. RAMON PERALTA FABI

DR. FRANCOIS ALLAIN LEYVRAZ WALTZ

DR. VICTOR MANUEL ROMERO ROCHIN

DR. EUGENIO LEY KOO

DR. RAUL MAURICIO RECHTMAN SCHRENZEL

Comité Departamental de Física

P.A.

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA

FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

## **Agradecimientos.**

Este trabajo se debe esencialmente al entusiasmo y las ideas de Ramón Peralta y a todos los que conforman el laboratorio de fluidos por su compañía y colaboración, en especial a Eduardo Morales por su valiosa ayuda, a Raúl Rechtman por su contribución y por horas de enriquecedora discusión y a todos los profesores que alguna vez me enseñaron. Debo agradecer a mis sinodales por leer ésto y discutirlo conmigo, en especial a François Leyvraz por su aportación.

Quiero agradecer especialmente a mi familia por su apoyo y su cariño, y también a quienes me han acompañado en este periodo y se encuentran leyendo esta página, no hace falta mencionarlos.

# Contenido

<b>Resumen.</b>	<b>2</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>3</b>
1.1 Estática. . . . .	6
1.2 La solución de Janssen . . . . .	10
<b>2 El Experimento</b>	<b>14</b>
2.1 Motivación y dificultades. . . . .	14
2.2 Diseño, detalles de llenado y empaquetamiento. . . . .	15
2.3 Los resultados. . . . .	18
2.4 Conclusión. . . . .	20
<b>3 El Modelo.</b>	<b>22</b>
3.1 Formulación. . . . .	22
3.2 Resultados numéricos. . . . .	25
<b>4 Estudio Analítico.</b>	<b>30</b>
4.1 Campo Medio . . . . .	32
4.2 La Extensión al Continuo . . . . .	40
<b>5 Conclusiones y Perspectivas.</b>	<b>46</b>
<b>Apéndice.</b>	<b>49</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>54</b>

## Resumen.

En este trabajo se aborda el fenómeno del arqueo en los medios granulados no cohesivos. Éste consiste en que la presión en un medio granulado confinado, como función de la profundidad en el medio, no crece indefinidamente como en un fluido, sino que alcanza asintóticamente un valor constante. El fenómeno representa un problema teórico y experimental que no ha sido resuelto por completo.

Se reportan los resultados de un experimento hecho con esferas de vidrio y balines de acero, mismos que comprueban la presencia del fenómeno en columnas cuasi-bidimensionales no compactas. Se plantea un modelo microscópico que presenta el fenómeno y cuya simplicidad permite determinar el comportamiento de cantidades físicamente relevantes. Se reportan los resultados de experimentos numéricos y se hace un estudio del modelo, en el que se demuestra la presencia de arqueo; se extiende el modelo a un medio continuo y se encuentra una solución que se asemeja a la solución de carácter macroscópico encontrada hace un siglo y a las observaciones.

# Capítulo 1

## Introducción

El término Medios Granulados comprende una gran variedad de materiales, desde finos talcos hasta toscos suelos rocosos. Muchos de los fenómenos observados en sistemas granulares escapan a la intuición y no han sido explicados; por supuesto, dependiendo del material usado los fenómenos serán diferentes, por lo que en general no se observará lo mismo si se realiza un experimento usando primero talco y después canicas de vidrio. De hecho, gran parte del comportamiento del medio dependerá de propiedades como la cohesión, la fricción entre los elementos componentes del material, la fricción entre el material y el medio externo, o el medio en el que se encuentre suspendido. El estudio de los medios granulados es de gran interés para diversas industrias como la farmacéutica, la de alimentos y de la construcción, pues la tecnología para el transporte y almacenamiento de materiales granulados, como las píldoras, el maíz y la grava, está poco desarrollada; por supuesto, en la agricultura se encuentran muchos problemas prácticos que requieren del entendimiento de estos materiales para ser resueltos, como la separación o mezcla de distintos granos.

Los medios granulados han sido objeto de numerosos estudios y experimentos análogos a los hechos en medios continuos como líquidos y gases. En particular, pueden fluir como lo hacen los líquidos; para describir tales flujos se han desarrollado varios modelos teóricos [1]. Son de interés no sólo los flujos como lo son avalanchas de nieve o arena, en un reloj de arena o en el proceso de llenado y vaciado de un silo, sino también los flujos de materiales granulados

inmersos en algún fluido, como los vientos de arena que forman dunas o como las corrientes que acarrearán piedras o arena en el fondo de un río, llamados lechos fluidizados.

Tal vez el fenómeno más exótico que se ha reportado en materiales granulados sea el llamado "canto de las arenas"; en algunas playas y desiertos de dunas se ha encontrado que la arena produce ciertos sonidos al ser perturbada. Supuestamente, la arena de playa que se ha secado después de una lluvia produce un ligero silbido al ser pisada y, en los desiertos, las avalanchas en las dunas pueden provocar una especie de resonancia acústica lo suficientemente fuerte como para no pasar desapercibida; estos fenómenos se dan bajo condiciones muy específicas por lo que es muy raro presenciarlos o reproducirlos [2].

Son de gran interés los complicados fenómenos que aparecen en sistemas granulados cuando se les pone a vibrar. Se han observado pequeñas regiones que oscilan entre picos y pozos (llamadas oscilones) y cadenas de estas regiones en la superficie libre de medios granulados vibrados (ver figura 1-1) [3], así como la formación de patrones de ondas con muy diversas simetrías [4] y burbujas de aire en sistemas de granos de poca profundidad [5]. Otros fenómenos que aparecen en experimentos de vibración son el de la segregación, esto es, en un sistema de partículas o granos de varios tamaños los grandes emergen cuando hay vibración [6] y la formación de montículos (heaping) en la superficie libre de arreglos bidimensionales, que ocurre cuando la fricción entre granos es grande, formándose debido a la presencia de rollos en las orillas de la superficie que mandan granos hacia el centro [7].

Debido a que las interacciones entre granos son inelásticas, en cada colisión hay pérdida de energía lo cual introduce nuevos problemas en su tratamiento en física estadística. Además, en un medio granulado a una temperatura  $T$ , en contraste con un gas ordinario, la escala de energía térmica  $kT$  es insignificante en comparación con la energía potencial relativa entre granos. Si se tira una canica en una caja rígida, rebotará varias veces antes de quedar en reposo, mientras que al tirar una gran cantidad de canicas en grupo quedarán en reposo en el fondo casi instantáneamente. Esta diferencia en el comportamiento colectivo aparece por el exceso de colisiones inelásticas entre una canica y sus vecinas y parece ser fundamental en el comportamiento de sistemas vibrados [1]. Se han estudiado sistemas teóricos en los que se modelan las colisiones inelásticas mediante un coeficiente de restitución. Estos modelos



Figura 1-1: Imagen de un oscilón en el momento en que forma un pico (<http://chaos.ph.utexas.edu/~pbu/oscillon.html>).

presentan un fenómeno llamado colapso inelástico que consiste en la acumulación de partículas en pequeñas regiones del espacio en un tiempo finito; si a las partículas en el sistema no se les inyecta energía constantemente, estas se frenarán formando cúmulos, de manera que no quedarán distribuidas uniformemente en el espacio [8]. La relación entre este fenómeno teórico y la formación de cúmulos en sistemas reales sigue siendo un tema de debate entre investigadores [1].

Dentro de los experimentos que no tienen una analogía continua, cabe mencionar la producción intermitente de avalanchas, donde el ángulo que forma la superficie libre respecto a la horizontal ha sido estudiado como un proceso estocástico [9]. Las avalanchas parecen ser las causantes de segregación en sistemas de granos de varios tamaños, pues los ángulos con los que se inician y terminan las avalanchas difieren para cada tamaño o forma del grano. En sistemas bidimensionales las partículas grandes se segregan en dirección a las fronteras del medio, mientras que en sistemas tridimensionales la segregación se da transitoriamente en bandas paralelas a la dirección en la que se propagan las avalanchas, hasta llegar a un estado de separación total [10].

La dinámica de los medios granulados está ligada a las interacciones entre granos y por tanto a la distribución de esfuerzos dentro del medio. La caracterización y comprensión de las consecuencias de tal distribución, en el caso estático, son todavía tema de investigación. Este trabajo aborda el tema de la estática en un medio granulado confinado.

## 1.1 Estática.

No es necesario poner en movimiento a un material granulado para toparse con fenómenos de difícil comprensión, ni siquiera las configuraciones estáticas de un medio granulado han sido explicadas o comprendidas del todo. Cuando un material granulado es depositado en un contenedor o silo, la presión en el bulto no es dependiente de la profundidad del modo que lo es en un fluido normal: esto es, la presión en la base del contenedor no crece indefinidamente con la altura de la pila, de modo que para una columna lo suficientemente alta la presión alcanza un valor de saturación independiente de dicha altura (ver figura 1-2). Debido a las fuerzas de contacto entre granos y a la fricción estática con las paredes del contenedor, las paredes soportan el peso extra [1, 11]. Éste es el fenómeno de arqueado y sobre el cual versa este trabajo. Adicionalmente, en una pila de arena, si se mide la presión en la base, en particular en la región que está justo abajo de la cima de la pila, no se encontrará el máximo de la presión, sino que se tendrá un mínimo local; el máximo se encontrará en un anillo en torno al centro de la base (ver figura 1-3)[12]. La razón por la cual ocurre este fenómeno debe ser la misma que determina el arqueado; es decir, es el resultado del comportamiento colectivo de pequeñas estructuras o arcos que se forman en el interior del medio.

En conexión con el fenómeno del arqueado está la aparición de domos en talcos y arenas. Éstos se forman cuando se tiene un talco apisonado en un contenedor y se retira una pequeña porción de la base: si la porción es lo suficientemente pequeña, el contenedor no se vaciará por el agujero, sino que sólo un poco de talco caerá dejando una superficie libre en el talco en forma de domo [13].

Para la comprensión de los fenómenos estáticos antes mencionados, muchos científicos se han concentrado en el estudio de la distribución de esfuerzos en el interior de un medio granulado

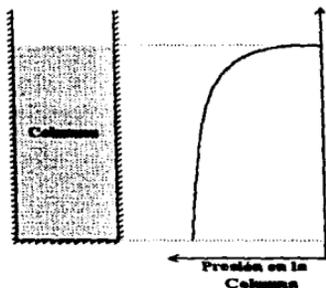


Figura 1-2: Presión en el interior de una columna.

arbitrario no cohesivo [11, 14, 15]. Los experimentos con material fotoelástico realizados por Dantu [16], reportados en 1957, han sido parte de la motivación de estos estudios. Debido a que el esfuerzo al que se somete un material fotoelástico determina el sentido en el que éste va a polarizar la luz, es posible ver la distribución de los esfuerzos en el interior de estos medios y observar que los esfuerzos más grandes forman una red que atraviesa al medio, ignorando a la mayoría del sistema y aislando con esto a regiones de granos que soportan bajas presiones (ver figura 1-4). Los materiales fotoelásticos se han utilizado para estudiar las distribuciones de fuerzas en otros sistemas, como lo son los sistemas en los que hay granos de dos tamaños (sistemas binarios), donde se encuentra que las líneas de esfuerzos más intensos se localizan preferentemente en los granos mayores; o en los que hay granos de dos durezas distintas [17].

En un medio granulado estático, se ha observado que los granos se apoyan más en alguno (o algunos) de sus vecinos que en los demás, de lo que se puede construir una dirección de "propagación del peso" que es más significativa que las direcciones dadas por el resto de contactos con los vecinos. Existen modelos que predicen que en el medio pueden haber algunos granos sujetos a presiones altísimas; en estos se ha mostrado que la probabilidad de tener granos sometidos a esfuerzos grandes decae exponencialmente cuanto mayor sea el esfuerzo [14, 18]. De hecho

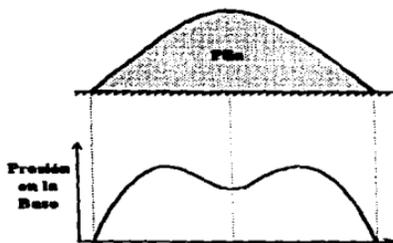


Figura 1-3: Presión en la base de una pila.

existen métodos de aproximación a la dinámica de partículas rígidas que se han usado para estudiar la distribución de fuerzas de contacto en un empaquetamiento bidimensional. En estos métodos, el estado de equilibrio de la red de fuerzas se determina mediante un proceso dinámico de relajación del mismo modo que sucede en un medio real [18]. Es claro que tal distribución depende de manera muy sensible de la preparación de la muestra, lo que constituye un problema para su caracterización experimental.

Cuando los granos constituyentes de un sistema son mucho más pequeños que alguna distancia macroscópica característica del sistema (que podría ser el ancho de la caja en la que están contenidos los granos), es posible hacer la aproximación de considerar al medio continuo. En el estado de equilibrio estático de un medio continuo, las fuerzas que actúan sobre un pequeño elemento del medio deben estar balanceadas. En consecuencia, las fuerzas que ejerce el resto del medio sobre la superficie del elemento deben balancear a las fuerzas que actúan sobre el volumen del elemento (en este caso el peso del elemento) debidas a algún campo externo. La fuerza que ejerce el medio sobre el elemento es la contribución sobre la superficie de una densidad superficial de fuerza  $T$ ; de modo que se debe escribir como una integral de  $T$  sobre la superficie  $S$  del elemento. Esta fuerza debe además expresarse como una fuerza sobre el volumen del elemento, puesto que debe representar a la fuerza total que se ejerce sobre el volumen [19]. Para que la



Figura 1-4: Imagen de las líneas de esfuerzos en un sistema de discos fotoelásticos en un arreglo hexagonal. Las regiones oscuras son los discos en el arreglo sometidos a bajas presiones, mientras que las claras son discos a altas presiones [17].

integral de  $\mathbf{T}$  sobre  $S$  pueda expresarse como una integral sobre el volumen  $V$  del elemento,  $\mathbf{T}$  debe ser la proyección en la normal a la superficie de un tensor que denotaremos por  $\bar{\sigma}$ , esto es:

$$\mathbf{T} = \mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}, \quad (1.1)$$

que por el teorema de la divergencia de Gauss se tiene:

$$\int_S \mathbf{T} ds = \int_V \nabla \cdot \bar{\sigma} dv. \quad (1.2)$$

El tensor  $\bar{\sigma}$  se llama tensor de esfuerzos y  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a la superficie. Usando la notación  $\sigma_{ik}$  y  $T_i$ , donde  $i$  y  $k$  van de 1 a 3, que representan las nueve componentes del tensor de esfuerzos y las tres del vector fuerza por unidad de superficie; la ecuación (1.2) se escribe de la siguiente forma:

$$\int_S T_i ds = \int_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dv, \quad (1.3)$$

donde la repetición del índice  $k$ , en algún término de la ecuación, denotará la suma desde  $k = 1$

hasta  $k = 3$  . En estos términos el balance de fuerzas está dado por:

$$\int_V \rho F_i dv + \int_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dv = 0, \quad (1.4)$$

donde  $\rho F_i$  expresa en componentes la densidad volumétrica de fuerza debida al campo externo. Si el medio se halla bajo el efecto de atracción de la tierra, la única fuerza volumétrica que actuará sobre el elemento será su peso. Entonces el balance de fuerzas quedará determinado de manera implícita en la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0, \quad (1.5)$$

donde  $g_i$  determina las tres componentes del vector de aceleración de la gravedad. Adicionalmente, el momento angular de las fuerzas que actúan sobre el elemento es cero, lo que trae como consecuencia que el tensor de esfuerzos sea simétrico ( $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ ) [19]. Esto reduce el número de incógnitas involucradas en las ecuaciones de equilibrio. En el caso de dos dimensiones se tienen dos ecuaciones y tres incógnitas, por lo que hace falta una ecuación para cerrar el problema matemático que implica el equilibrio estático.

El encontrar esta tercera relación representa el problema de "cerradura" de la mecánica granular, que permanece abierto a pesar de siglos de estudio. En un medio continuo elástico el problema se cierra con una relación constitutiva entre los esfuerzos y las deformaciones a las que está sujeto el elemento. En un medio granular no se ha definido una variable de deformación, pero se han modelado relaciones constitutivas entre los esfuerzos para cerrar el problema [12, 20], y construido ecuaciones alternativas [21].

## 1.2 La solución de Janssen

En 1895, H.A. Janssen publicó una solución al problema de la presión en un medio granulado estático almacenado, suponiéndolo un medio continuo [22]. Se puede entender el trabajo de Janssen considerando un contenedor de paredes verticales lleno de un material granulado no

cohesivo, en el que la presión en el interior del material  $P$  es sólo función de la profundidad  $t$ , medida desde la superficie libre del medio granulado, y la fricción con la pared es proporcional a la presión del material a esa misma profundidad [13].

Si se toma una rebanada de material granulado, dada por el material contenido entre  $t$  y  $t + \Delta t$ , entonces, si el área del corte transversal del contenedor es  $A$ , las fuerzas que actúan sobre las caras de la rebanada serán  $AP(t)$  hacia abajo y  $AP(t + \Delta t)$  hacia arriba (ver figura 1-5).

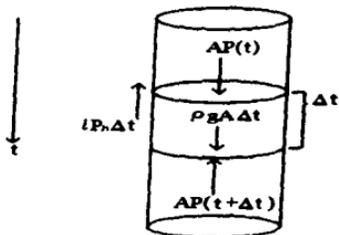


Figura 1-5: Fuerzas que actúan sobre la rebanada.

Como el elemento de medio granulado está en contacto con las paredes del recipiente, en un área dada por  $\ell \Delta t$ , donde  $\ell$  es la longitud del perímetro del contenedor, entonces sentirá la fuerza de fricción dada por  $\mu(P_n \ell \Delta t)$  hacia arriba, donde  $\mu$  es el coeficiente de fricción entre el material y las paredes y  $P_n \ell \Delta t$  es la fuerza que ejerce la rebanada en dirección normal a las paredes, siendo  $P_n$  la presión que ejerce la rebanada contra las paredes del recipiente. Por último, suponiendo que el material tiene una densidad de bulto  $\rho$  e imponiendo las condiciones de equilibrio mecánico se obtiene:

$$AP(t) + A \Delta t \rho g = AP(t + \Delta t) + \mu P_n \ell \Delta t. \quad (1.6)$$

Considerando la proporcionalidad de la fricción con la presión, se puede escribir a  $P_h$  de siguiente modo:

$$P_h = K P(t), \quad (1.7)$$

donde  $K$  es una constante, con lo que se tiene:

$$\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = -\mu K P(t) \frac{\ell}{A} + \rho g, \quad (1.8)$$

de modo que en el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ ,

$$\frac{d}{dt} P(t) = -\mu K \frac{\ell}{A} P(t) + \rho g. \quad (1.9)$$

La solución a esta ecuación es:

$$P(t) = \frac{A\rho g}{\ell\mu K} + (P_0 - \frac{A\rho g}{\ell\mu K})e^{-\mu K \frac{\ell}{A} t}, \quad (1.10)$$

donde  $P_0$  es el valor de la presión en la superficie libre del medio; el parámetro  $A/\ell$  viene a ser una longitud característica del contenedor; para un cilindro es la mitad del radio de la base. Como se puede observar, la solución tiende asintóticamente al valor  $\frac{A\rho g}{\ell\mu K}$ , cuando se hace tender  $t$  a infinito. Esto predice de manera teórica la existencia del arqueo.

En esta solución se encuentra involucrada la fricción entre el material y las paredes, que representa la esencia del arqueo, y la densidad del material, que está íntimamente relacionada con el empaquetamiento o configuración del material. Sólo falta justificar la relación de proporcionalidad entre presiones verticales y horizontales, que representa una relación constitutiva del material. Los modelos microscópicos dan origen a relaciones de este estilo.

En el siguiente capítulo se describe el experimento realizado para observar el arqueo y se estudian los resultados. En el tercer capítulo se propone un modelo microscópico para simular un medio granulado bidimensional confinado y se obtienen resultados numéricos del

comportamiento de cantidades como la presión en el interior de la columna. El cuarto capítulo presenta el estudio analítico del modelo en la aproximación de campo medio y en el límite continuo. Por último, el capítulo cinco recoge los resultados del trabajo, en su totalidad, en torno al fenómeno del arqueo. En el apéndice se expone otro modo de estudiar el modelo discreto, cortesía del profesor F. Leyvraz.

## Capítulo 2

# El Experimento

En este capítulo se describen los experimentos realizados para observar y cuantificar el fenómeno del arqueado en sistemas muy particulares constituidos por granos esféricos; los medios usados difirieron en la masa y rugosidad de sus granos. El fenómeno se observó en empacamientos no compactos.

### 2.1 Motivación y dificultades.

En la literatura es difícil encontrar reportes experimentales que confirmen el fenómeno de arqueado [13]. Muy probablemente esto se deba a las dificultades que aparecen al tratar de medir presiones en un medio granulado. De cualquier modo, no tiene sentido el desarrollo y estudio de un modelo que simule un fenómeno que no ha sido caracterizado o por lo menos registrado.

El problema principal que se presenta en un experimento de esta naturaleza, es el modo en el que se medirá la presión en el medio. Ideal sería poder medir la presión soportada por cualquier grano en el medio; esto sugiere experimentar con materiales fotoelásticos para medir indirectamente la presión. Desafortunadamente, éste no ha sido el propósito de los experimentos realizados con estos materiales en los que sólo se ha llegado a resultados cualitativos y no se ha determinado como traducir la información de la luz polarizada por el medio en términos de la presión a la que está sometido [16, 17].

Siendo que el arqueado parece deberse principalmente a la fricción entre el material y las paredes, ésta será claramente un parámetro que determinará el comportamiento de la presión como función de la profundidad, pero no el único. El fenómeno también dependerá del arreglo o configuración de la columna y de la forma y masa de los granos involucrados, ya que de esto depende el número de contactos entre granos y por tanto la distribución de esfuerzos en el medio.

Por si fuera poco, la configuración de la pila es dependiente del modo en el que fue formada, por lo que no se puede suponer *a priori* que la presión no variará si se llena un silo de varias formas. Todo esto debe tomarse en cuenta para diseñar un experimento reproducible y que permita la comparación con modelos teóricos.

## **2.2 Diseño, detalles de llenado y empaquetamiento.**

Ante el problema que implica medir la presión para varias profundidades en el material apilado, se resolvió medir únicamente la presión que ejerce la columna completa sobre la base del contenedor a medida que se van apilando mas granos y se va aumentando la altura de la columna. Procediendo de este modo no se obtendrá en una realización del experimento la presión en el interior de la columna final, ya que en el proceso de agregar granos a la pila se modifica la configuración y la distribución de los esfuerzos en ésta; por lo que realmente se obtendrá la presión en la base de columnas diferentes en altura y configuración. Dado el caso, lo que se pretendió encontrar fué la presión en la base como función de la altura de la columna.

Para simplificar el experimento se utilizaron esferas de vidrio y acero como medios granulados. En cada caso se usaron esferas de aproximadamente el mismo radio. Se experimentó con esferas de acero cromadas y oxidadas por separado. Se atacó a los balines cromados con ácido sulfúrico para oxidarlos; cabe notar que que no hubo diferencia significativa de las masa y los radios entre esferas cromadas y oxidadas. Con esto se obtuvieron resultados para tres medios por separado que diferían sólo en la masa y rugosidad de los granos constituyentes.

Después de varios intentos fallidos se llegó a un dispositivo que simula un sistema bidimensional. Éste consta de una caja sostenida por unos soportes cuya base está libre del resto

del recipiente, como si fuera un pistón, y que reposa en una báscula; de este modo la báscula registra el peso soportado únicamente por la base. El recipiente lo forman dos placas de vidrio separadas sólo un poco más que el diámetro de las esferas que constituyen el medio granulado. Dos tiras de acrílico aprisionadas entre los vidrios forman las "paredes" laterales de la caja (ver figura 2-1).

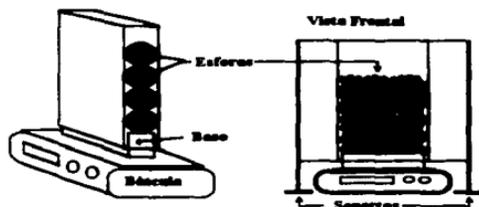


Figura 2-1: Dispositivo experimental.

En un principio se llenó la caja desde su parte superior, arrojando las esferas a razón constante y registrando el peso en la base; desde ese momento se notó que los registros en la báscula fluctuaban demasiado por lo que el fenómeno no pudo ser observado. En este primer intento se observó que el estado final de la pila resultó tener un orden muy específico que se repitió en cada realización de los experimentos; en la región inferior de la caja las esferas se ordenaron en líneas horizontales, pero en el resto de la pila el orden fué en líneas verticales (ver figura 2-2(a,c,d)). Esto puede ser el resultado de la influencia de las paredes y la base sobre el medio.

Como se observa en la figura 2-2(a,c,d), el empaquetamiento es muy compacto. Esta falta de espacios vacíos en el arreglo puede influir en la forma en la que se presente el arqueado, ya que los huecos provocan una desviación en la propagación del peso. Si se analiza un arreglo en líneas verticales como el observado, un grano estará en mayor contacto con el vecino de arriba



Figura 2-2: Imágenes de los arreglos. a) Arreglo en líneas verticales cerca de las paredes y en horizontales en el centro de la columna. b) Arreglo sin orden. c) Arreglo en líneas verticales. d) Arreglo en líneas horizontales cerca de la base.

y el de abajo, en la misma línea vertical, que con el resto; de este modo el peso se propagará preferentemente en la dirección vertical. Esta puede ser la razón por la cual no se observó el comportamiento asintótico de la presión en el sistema, lo que no implica que el fenómeno no se presente en estos arreglos. Cabe mencionar que la altura de la caja no excedía diez veces su ancho y probablemente la altura de la columna no fué suficiente para observar el fenómeno en este caso particular; estas observaciones no necesariamente constituyen una excepción.

Para poder registrar el fenómeno se siguió otra manera de llenar la caja y formar la pila. En una de las paredes de acrílico se hicieron orificios para introducir unas agujas que seccionaran la caja. De este modo se pueden llenar de esferas los espacios entre agujas y formar una columna en la caja a medida que éstas se van retirando (ver figura 2-3).

Con ésto las esferas que caen sobre la pila lo hacen más suavemente y forman una columna en la que no se puede ver ningún orden y que por lo tanto es menos compacta (ver figura

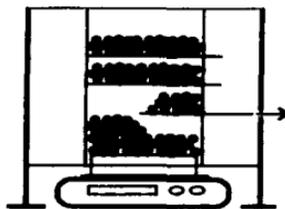


Figura 2-3: Esquema del modo de llenar la caja.

2-2(b)). Los datos de la presión en la base se fueron tomando para cada paso en la formación de la pila, esto es, se obtuvieron tantos datos como agujas fueron introducidas, donde cada dato representa una muestra de diferente altura.

### 2.3 Los resultados.

Durante el proceso de medición se observó que el registro en la báscula oscilaba constantemente ( $\pm 0.5\text{gr.}$ ). Ésto puede deberse a la sensibilidad de la red de esfuerzos ante cualquier perturbación. Además, si el material empuja la base un poco, ésta no podrá regresar a su posición debido a que el propio fenómeno de arqueo impide que la columna sea alzada, lo que altera el funcionamiento de la báscula. Ante esto, se resolvió tomar los datos a los tres minutos haber retirado la aguja, aún cuando no bastara todo un día para que se estabilizara el registro en la báscula.

Como ya se mencionó, se realizó el experimento en tres medios diferentes (esferas de vidrio, balines de acero cromados y oxidados) y en todos los casos el diámetro de los granos esféricos fue de 3 mm; la dispersión en los diámetros no se estudió, pero se aseguró que los diámetros fueran menores a 3.5 mm. Las esferas de vidrio eran de masa 0.04 g, mientras que los balines

cromados y oxidados tenían masas que variaban entre 0.13 y 0.12 g. El ancho de la caja fué de 5.5 cm, que equivale a 18 granos de ancho; la altura de la caja fué de 40 cm y el espacio entre los vidrios o espesor de la caja fué de 3.5 mm; el espacio entre agujas fué de 1.8 cm, equivalente a 6 granos o un tercio del ancho del sistema.

Se seccionó la caja con veinte agujas, de modo que de una realización del experimento se obtuvieran los datos de veinte alturas. Se promedió sobre diez realizaciones para cada medio. A continuación se muestra una tabla con los resultados promedio ( $P$ ) y las desviaciones relativas, así como la gráfica correspondiente en la que se observa el comportamiento asintótico. Cabe aclarar que la altura está medida en anchos de la caja.

Altura (ancho)	Balines P(g/cm)	Oxidados Desv. Rel.	Balines P(g/cm)	Cromados Desv. Rel.	Esferas P(g/cm)	de Vidrio Desv. Rel.
0.33	2.04	0.11	2.02	0.02	0.32	0.05
0.67	4.01	0.07	4.25	0.05	1.10	0.06
1.00	5.72	0.10	6.67	0.04	1.71	0.07
1.33	6.93	0.10	8.58	0.12	2.24	0.09
1.67	7.72	0.11	10.16	0.05	2.56	0.10
2.00	8.22	0.11	11.09	0.04	2.78	0.12
2.33	8.35	0.11	11.86	0.05	2.90	0.13
2.67	8.51	0.12	12.51	0.10	2.95	0.14
3.00	9.16	0.20	12.98	0.10	2.95	0.14
3.33	9.38	0.17	13.48	0.10	2.94	0.14
3.67	9.32	0.17	14.07	0.13	3.01	0.16
4.00	9.23	0.17	14.30	0.14	3.03	0.16
4.33	9.07	0.16	14.33	0.14	2.98	0.17
4.67	8.97	0.16	14.43	0.16	2.94	0.17
5.00	8.63	0.17	14.39	0.16	2.90	0.16
5.33	8.70	0.18	14.51	0.16	3.01	0.13
5.67	8.58	0.18	14.43	0.16	2.98	0.13
6.00	8.49	0.17	14.36	0.16	2.93	0.14
6.33	8.67	0.15	14.28	0.16	2.90	0.15
6.67	8.43	0.14	14.14	0.16	2.94	0.13

## 2.4 Conclusión.

Es notable que a pesar de lo arbitrario del criterio para elegir la medida que ofrecía la báscula, el resultado experimental muestra la presencia del arqueo. Como era de esperarse, los valores de la presión para una altura dada aumentan cuanto mayor es la masa del grano constituyente y disminuyen cuanto mayor es la rugosidad del grano. La profundidad a la cual se alcanza el arqueo también aumenta con la masa del grano y disminuye con la rugosidad.

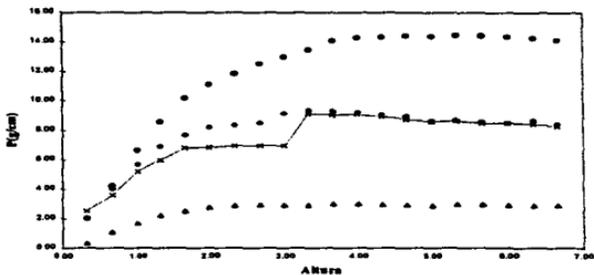


Figura 2-4: Gráfica de los resultados. En círculos el promedio en los balines cromados, en rombos el promedio en los balines oxidados, en triángulos el promedio en las esferas de vidrio y en cruces una realización típica con balines oxidados. La altura está dada en términos del ancho de la caja.

## Capítulo 3

# El Modelo.

Considerando modelos usados anteriormente para tratar el problema de la distribución de esfuerzos en un medio granulado como un proceso estocástico [14, 21], y con la intención de entender lo que sucede con la presión en el interior de una columna de granos, se implementó un modelo para una columna bidimensional de material granulado no cohesivo [11].

El modelo representa una versión simplificada del usado para determinar la distribución de probabilidad del módulo de los esfuerzos [14]. Difícilmente puede imaginarse un modelo más sencillo que presente el fenómeno de arqueo.

### 3.1 Formulación.

Considérese una pila bidimensional formada de granos circulares, idénticos en tamaño y masa, ordenados regularmente en una red hexagonal entre dos paredes. De esta manera la pila está ordenada en líneas horizontales de granos; el número  $N$  de sitios de una línea definirá el ancho del sistema (ver figura 3-1).

Como se puede observar en la figura 3-1, cada grano en cada línea está en contacto con dos de la línea superior y dos de la inferior; excepto los que están en contacto con las paredes, que sólo tienen un vecino en cada línea. La distribución de fuerzas soportadas por los círculos es modelada haciendo que el peso soportado por cada grano sea cedido a sus dos vecinos

Figura 3-1: Esquema del arreglo en líneas de una pila bidimensional considerada para el modelo. Sombreado aparece un lugar vacío.

de la línea inferior en proporciones aleatorias; esto es, a uno de sus vecinos le cederá una fracción aleatoria del peso y al otro la fracción complementaria. Supóngase además que no hay interacción horizontal entre granos. Con esta forma de distribuir la carga de cada grano se pretende simular el desorden de un arreglo real y bidimensional de granos o discos, así como la no uniformidad en forma y orientación de los granos reales.

Como se presenta en la figura 3-1, en cada línea del arreglo un grano está en contacto con la pared. Este grano cederá una porción de su peso a su único vecino de la línea inferior y el resto lo cederá a la pared como lo haría un grano en el bulto con su otro vecino. Esto puede imaginarse como si la pared estuviera constituida por granos pegados (ver figura 3-2); de esta forma se simula la fricción entre los granos y la pared, pero en el modelo no hay fricción ni entre granos, ni con la pared.

Apilando esferas entre dos placas de vidrio como en el experimento, se puede observar que ellas se arreglan de varios modos (ver figuras 2-2 y 2-4). Las observaciones mostraron que las columnas con más vacíos arqueaban, a diferencia de las compactas que no presentaron el fenómeno, probablemente por que no se experimentó con columnas lo suficientemente altas. Esto sugiere que el arqueado se presenta a menor profundidad cuando la densidad de la columna

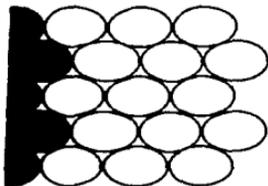


Figura 3-2: Forma de la pared (en negro).

es menor. Para simular este hecho se introdujeron en el arreglo varios hoyos, o mejor dicho, se quitaron granos en el arreglo con cierta probabilidad  $p$ , dejando sitios vacíos. De este modo la densidad del medio podrá variarse por medio de esta probabilidad de vacíos ( $p \in [0, 1]$ ).

La presencia de vacíos requiere que se modele la distribución de los pesos en la ocurrencia de un hoyo y se propuso lo siguiente. Una esfera que sólo tenga un vecino debajo, debido a que en el otro lugar hay un vacío, cederá una fracción aleatoria de su peso a su único vecino inferior y perderá el resto en la pared como único efecto horizontal; se está suponiendo que se encuentra sostenido por el vecino inferior y por el grano al lado suyo, que se encuentra en la misma situación (ver figura 3-1). Esta es la única interacción de un grano con los de su misma altura.

Supóngase que las líneas del arreglo están numeradas por  $n$  de arriba hacia abajo ( $n = 0, 1, \dots$ ), y que los sitios en cada línea están numerados por  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ); definiéndose  $u_i^{(n)}$  como el peso soportado en el sitio  $i$  en la línea  $n$  y considerando que los granos tienen peso unitario ( $u_i^{(0)} = 1$  para toda  $i$ ), la distribución de los pesos en el modelo está dada por la siguiente fórmula:

$$u_i^{(n+1)} = [p_i^{(n+1)} > p] (r_i^{(n)} u_i^{(n)} + (1 - r_{i+1}^{(n)}) u_{i+1}^{(n)} + 1) \text{ para } n + 1 \text{ par;} \quad (3.1)$$

$$u_i^{(n+1)} = [p_i^{(n+1)} > p] (r_{i-1}^{(n)} u_{i-1}^{(n)} + (1 - r_i^{(n)}) u_i^{(n)} + 1) \text{ para } n + 1 \text{ impar};$$

donde los  $p_i^{(n)}$  y los  $r_i^{(n)}$  son números aleatorios entre 0 y 1 asociados al sitio  $(i, n)$ ; el primero determina si hay un vacío en el sitio y el segundo la fracción del peso que cederá al vecino inferior derecho. El corchete  $[p_i^{(n)} > p]$  es uno si la desigualdad dentro de él se cumple y cero si no; con este mecanismo se introducen los vacíos en el arreglo. Las ecuaciones (3.1) representan las fórmulas para dos líneas consecutivas; como se puede observar en la figura 3-1, los sitios vecinos se van alternando, lo mismo que los sitios en contacto con las paredes. En este caso,

$$\begin{aligned} u_N^{(n+1)} &= [p_N^{(n+1)} > p] (r_N^{(n)} u_N^{(n)} + 1) \text{ para } n + 1 \text{ par}, \\ u_1^{(n+1)} &= [p_1^{(n+1)} > p] ((1 - r_1^{(n)}) u_1^{(n)} + 1) \text{ para } n + 1 \text{ impar}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

ya que  $i \in [1, N]$ , y representarán a los sitios en contacto con las paredes en dos líneas consecutivas. De esta manera se expresa el modelo.

### 3.2 Resultados numéricos.

El modelo, por su simplicidad, permite hacer fácilmente experimentos numéricos y obtener el promedio de los pesos sobre los sitios de una línea, para cada línea en la columna, que denotaremos por  $P$  (presión).

$$P(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i^{(n)}. \quad (3.3)$$

Esta presión en función de las líneas cambia para cada realización del experimento; pero el resultado promedio sobre suficientes realizaciones del experimento numérico presenta el comportamiento asintótico deseado (ver figura 3-3).

El resultado promedio que ofrece el modelo, en el caso en que  $p$  es distinta de cero, presenta arqueos en la pila para toda probabilidad de hoyos por sitio, y los valores asintóticos de  $P$

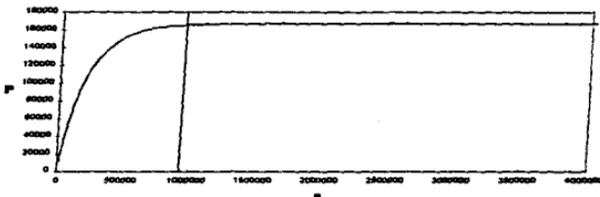


Figura 3-3: El promedio de  $P$  sobre mil experimentos en función de las líneas numeradas, empezando por arriba, para  $N = 500$  y  $p = 0$ . La línea vertical marca la profundidad crítica  $n_{\infty}$ .

resultan menores a medida que se considere una  $p$  mayor (ver figura 3-4).

Si se promedia la manera en que se distribuyen los pesos, cada grano cede la mitad de su peso a cada vecino inferior. Entonces los resultados en el experimento numérico no cambian, sin importar los valores de  $N$  y  $p$  (ver figura 3-4). Esto sugiere la manera de estudiar el modelo para obtener los resultados analíticos de  $P$  como función de  $N$  y  $p$ . En la figura 3-5 se pueden visualizar las distribuciones de la presión en el interior de una pila simulada para varios casos; en el último la fracción cedida es 0.5.

Como se observa en los resultados numéricos, el modelo describe el carácter asintótico del fenómeno del arqueado. Los parámetros relevantes para la comparación de los resultados son el valor límite de la presión  $P_{\infty}$  y la profundidad o línea a partir de la cual  $P$  toma prácticamente este valor  $n_{\infty}$  (ver figura 3-3);  $n_{\infty}$  se definió ajustando a los resultados numéricos promedio para  $P(n)$  una curva de la forma  $P_{\infty} - (P_{\infty} - 1)e^{-\alpha n}$ , una vez ajustada  $\alpha$  se le asignó a  $n_{\infty}$  la línea a partir de la cual  $(P_{\infty} - P)/P_{\infty} = 0.01$ .

Ambos parámetros son función de  $N$  y para el caso en que  $p = 0$  son proporcionales a  $N^2$  (ver figura 3-6). Se deben tomar estos resultados como cotas superiores, pues representan un empacamiento compacto.

En el caso en que  $p = 0$ , la sucesión para  $P_\infty$  de valores está dada por la siguiente fórmula:

$$P_\infty(N) = \frac{2}{3}N^2 + N + \frac{1}{3}. \quad (3.4)$$

En el capítulo siguiente se describe el intento por probar esta conjetura; ésta da los valores de cada uno de los experimentos numéricos llevados a cabo.

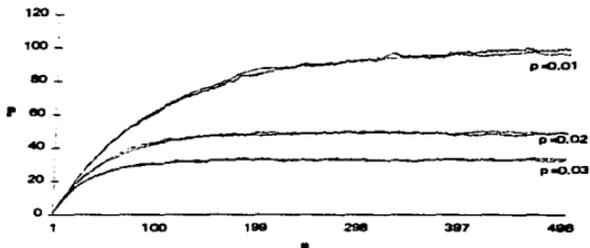


Figura 3-4: Resultado numérico para  $N=500$ , y  $p=0.01, 0.02, 0.03$ . Aparecen empalmados los resultados de cuando el peso es cedido aleatoriamente y de cuando es cedido por mitades (campo medio).



Figura 3-5: Representación en tonos de gris de la distribución de presiones en el interior del arreglo ( $N = 50$ ) para tres casos, entre más oscuro mayor presión. En el primero  $p = 0.01$  (los sitios vacíos están en blanco), en el segundo  $p = 0$ , y en el último  $p = 0.01$  pero los pesos se distribuyen en mitades.

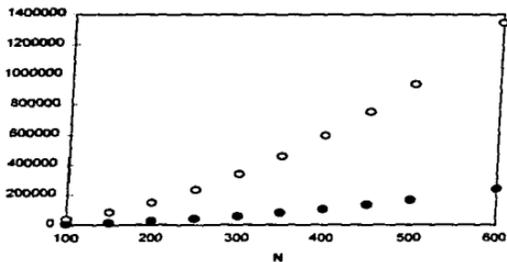


Figura 3-6: Gráfica de  $n_{\infty}$  (círculos vacíos) y de  $P_{\infty}$  (círculos llenos) contra  $N$  ( $p = 0$ ).

## Capítulo 4

# Estudio Analítico.

En este capítulo se hace un estudio analítico del caso  $p = 0$ , en la aproximación de campo medio, en el se muestra que el sistema arquea para todo valor de  $N$ . Se extiende el modelo a un sistema continuo y de su solución se encuentra el valor asintótico de la presión como función de  $N$ . La solución continua es una serie infinita que truncada en su primer término tiene la misma relación funcional con la profundidad que la solución de Janssen.

Considérese un arreglo rectangular de  $2N$  discos, como se muestra en la figura 4-1. Enumérense las líneas y los sitios de igual modo que se hizo en el capítulo anterior, con la diferencia que ahora  $i = 1, 2, \dots, 2N$ . Si se impone que el disco en el sitio arbitrario  $i$  sólo interactúe con los situados en  $i + 1$  e  $i - 1$  en las líneas superior e inferior, se obtendrán dos subsistemas independientes idénticos, cada uno de los cuales se puede considerar un arreglo de tamaño  $N$ .

Así, se simetriza el sistema y se pueden escribir las ecuaciones (3.1) en una sola ecuación que mantiene independientes a los dos arreglos,

$$\begin{aligned}u_i^{(n)} &= \left(r_{i-1}^{(n-1)}\right) u_{i-1}^{(n-1)} + \left(1 - r_{i+1}^{(n-1)}\right) u_{i+1}^{(n-1)} + 1; \\i &= 1, 2, \dots, 2N; n = 0, 1, \dots\end{aligned}\tag{4.1}$$

Las líneas están contadas de arriba hacia abajo por lo que, como los círculos son de peso

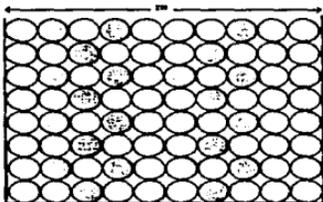


Figura 4-1: Dos arreglos empalmados independientes. Los círculos blancos representan un arreglo en el modelo, lo mismo que los círculos grises, por lo que debe considerarse que todo círculo solo interactúa con sus vecinos del mismo color y con la pared.

unitario,  $u_i^{(0)} = 1$  para toda  $i$ . Esto es debido a que en la línea inicial ( $n = 0$ ) los granos soportan más que su peso. En este arreglo rectangular de  $2N$  sitios por línea se tienen dos granos por línea en contacto con la pared (ver figura 4-1); esto se expresa en las siguientes condiciones de frontera para el arreglo:

$$\begin{aligned} u_1^{(n)} &= (1 - r_1^{(n-1)}) u_2^{(n-1)} + 1, \\ u_{2N}^{(n)} &= r_{2N-1}^{(n-1)} u_{2N-1}^{(n-1)} + 1. \end{aligned} \quad (4.2)$$

De este modo la presión  $P$  estará dada en función de  $n$  por:

$$P_n = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{2N} u_i^{(n)}. \quad (4.3)$$

La simetría del nuevo sistema facilita su análisis.

## 4.1 Campo Medio

Como se notó en el capítulo anterior, los resultados numéricos del modelo cuando  $r_i^{(n)}$  es considerado  $1/2$ , para toda  $i$  y  $n$ , coinciden con los promedios obtenidos en el caso en que los pesos son distribuidos aleatoriamente. Esto sugiere el estudio del comportamiento del modelo en la aproximación de campo medio, en la que se desprecian correlaciones y se considera que el comportamiento promedio es aproximadamente igual al comportamiento promediando las variables aleatorias. De este modo las ecuaciones que determinan el problema son:

$$u_i^{(n)} = \frac{1}{2} (u_{i-1}^{(n-1)} + u_{i+1}^{(n-1)}) - 1. \quad (4.4)$$

Con condiciones en las paredes:

$$\begin{aligned} u_1^{(n)} &= \frac{1}{2} u_2^{(n-1)} + 1, \\ u_{2N}^{(n)} &= \frac{1}{2} u_{2N-1}^{(n-1)} + 1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Usando la ecuación (4.4) se puede expresar a  $P_n$  en términos de los pesos en la línea  $n-1$ ; para ésto, exprese a  $P_n$  de la siguiente manera:

$$P_n = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (u_i^{(n)} + u_{2N+1-i}^{(n)}), \quad (4.6)$$

que usando la relación (4.4), queda:

$$\begin{aligned} 2NP_n &= \left( \frac{1}{2} u_2^{(n-1)} - \frac{1}{2} u_{2N-1}^{(n-1)} + 2 \right) - \left( \frac{1}{2} u_1^{(n-1)} + \frac{1}{2} u_3^{(n-1)} + \frac{1}{2} u_{2N-2}^{(n-1)} + \frac{1}{2} u_{2N}^{(n-1)} + 2 \right) + \\ &\quad + \dots - \left( \frac{1}{2} u_{N-1}^{(n-1)} + \frac{1}{2} u_{N-1}^{(n-1)} - \frac{1}{2} u_N^{(n-1)} + \frac{1}{2} u_{N+2}^{(n-1)} + 2 \right) \\ &= 2N + \frac{1}{2} \left[ (u_1^{(n-1)} + u_{2N}^{(n-1)}) - 2(u_2^{(n-1)} + u_{2N-1}^{(n-1)}) + \dots + 2(u_N^{(n-1)} + u_{N+1}^{(n-1)}) \right] \end{aligned}$$

$$= 2N + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i^{(n-1)} (u_i^{(n-1)} + u_{2N+1-i}^{(n-1)}), \quad (4.7)$$

donde los coeficientes  $a_i^{(n-1)}$  valen 1 para  $i$  igual a 1 y 2 para toda  $i$  distinta de 1. Usando otra vez la relación de recurrencia (4.4) se encuentra lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N a_i^{(n-1)} (u_i^{(n-1)} + u_{2N+1-i}^{(n-1)}) &= a_1^{(n-1)} \left( \frac{1}{2} u_2^{(n-2)} + \frac{1}{2} u_{2N-1}^{(n-2)} + 2 \right) + \\ &+ a_2^{(n-1)} \left( \frac{1}{2} u_1^{(n-2)} + \frac{1}{2} u_3^{(n-2)} + \frac{1}{2} u_{2N-2}^{(n-2)} + \frac{1}{2} u_{2N}^{(n-2)} + 2 \right) + \\ &+ a_3^{(n-1)} \left( \frac{1}{2} u_2^{(n-2)} + \frac{1}{2} u_4^{(n-2)} + \frac{1}{2} u_{2N-3}^{(n-2)} + \frac{1}{2} u_{2N-1}^{(n-2)} + 2 \right) + \\ &+ \dots + a_{N-1}^{(n-1)} \left( \frac{1}{2} u_{N-2}^{(n-2)} + \frac{1}{2} u_N^{(n-2)} + \frac{1}{2} u_{2N+1}^{(n-2)} + \frac{1}{2} u_{2N+3}^{(n-2)} + 2 \right) + \\ &+ a_N^{(n-1)} \left( \frac{1}{2} u_{N-1}^{(n-2)} + \frac{1}{2} u_{N+1}^{(n-2)} + \frac{1}{2} u_N^{(n-2)} + \frac{1}{2} u_{N+2}^{(n-2)} + 2 \right) \\ &= 2 \sum_{i=1}^N a_i^{(n-1)} + \frac{1}{2} \left[ a_2^{(n-1)} (u_1^{(n-2)} + u_{2N}^{(n-2)}) + (a_1^{(n-1)} + a_3^{(n-1)}) (u_2^{(n-2)} + u_{2N-1}^{(n-2)}) + \right. \\ &\quad \left. + \dots + (a_{N-1}^{(n-1)} + a_{N-1}^{(n-1)}) (u_N^{(n-2)} + u_{N-1}^{(n-2)}) \right] \\ &= 2 \sum_{i=1}^N a_i^{(n-1)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i^{(n-2)} (u_i^{(n-2)} + u_{2N+1-i}^{(n-2)}). \quad (4.8) \end{aligned}$$

De esta manera se definen los valores de los coeficientes  $a_i^{(n-2)}$ , esto es,  $a_1^{(n-2)} = a_2^{(n-1)}$ ,  $a_i^{(n-2)} = a_{i-1}^{(n-1)} + a_{i+1}^{(n-1)}$  para  $i = 2, 3, \dots, N-1$ , y  $a_N^{(n-2)} = a_{N-1}^{(n-1)} + a_N^{(n-1)}$ . Definiendo  $a_i^{(n)} = 1$  para toda  $i$ , se obtiene la siguiente relación entre coeficientes:

$$\begin{aligned} a_1^{(n-1)} &= a_2^{(n)}, \\ a_i^{(n-1)} &= a_{i-1}^{(n)} + a_{i+1}^{(n)}, \\ a_N^{(n-1)} &= a_{N-1}^{(n)} + a_N^{(n)}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

De este modo se obtiene  $P_n$  en términos de la línea  $n - 2$ ,

$$2NP_n = 2 \sum_{i=1}^N a_i^{(n)} + \sum_{i=1}^N a_i^{(n-1)} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N a_i^{(n-2)} (u_i^{(n-2)} + u_{2N+1-i}^{(n-2)}). \quad (4.10)$$

Por supuesto, la relación entre coeficientes no cambiará si se construyen como en la ecuación (4.8). Haciendo  $n - 2$  iteraciones más se llega a una expresión casi definitiva para  $P_n$ :

$$2NP_n = 2 \sum_{i=1}^N a_i^{(n)} + \sum_{i=1}^N a_i^{(n-1)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i^{(n-2)} + \dots + \frac{1}{2^{j-1}} \sum_{i=1}^N a_i^{(n-j)} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{i=1}^N a_i^{(1)} + \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^N a_i^{(0)} (u_i^{(0)} + u_{2N+1-i}^{(0)}); \quad (4.11)$$

como  $u_i^{(0)} + u_{2N+1-i}^{(0)} = 2$  para toda  $i$ ,

$$2NP_n = 2 \sum_{i=1}^N a_i^{(n)} + \sum_{i=1}^N a_i^{(n-1)} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{i=1}^N a_i^{(1)} + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=1}^N a_i^{(0)}. \quad (4.12)$$

Cambiando el nombre de los coeficientes,  $a_i^{(n-j)} = b_i^{(j)}$ , con el objeto de tener  $b_i^{(0)} = 1$ , se obtiene:

$$P_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^n \sum_{i=1}^N \frac{b_i^{(j)}}{2^j}, \quad (4.13)$$

donde los coeficientes cumplen las mismas relaciones (4.9):

$$\begin{aligned} b_i^{(j)} &= b_i^{(j-1)}, \\ b_i^{(j)} &= b_{i-1}^{(j-1)} + b_{i+1}^{(j-1)}, \quad i = 2, 3, \dots, N-1; \\ b_N^{(j)} &= b_{N-1}^{(j-1)} + b_N^{(j-1)}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Para determinar  $P_n$  se pueden estudiar el tipo de relaciones que existen entre los coeficientes

$b_1^{(j)}$ . Es claro que  $b_1^{(j)} = b_1^{(j-2)} + b_3^{(j-2)}$ ; ésto da una relación entre dos elementos de la sucesión  $\{b_1^{(j)}\}$  y uno de la sucesión  $\{b_3^{(k)}\}$ ; repitiendo la operación se observa que  $b_1^{(j)} - b_1^{(j-2)} = b_2^{(j-3)} + b_4^{(j-3)}$ , que, como  $b_2^{(j-3)} = b_1^{(j-2)}$ , se concluye que  $b_1^{(j)} - 2b_1^{(j-2)} = b_4^{(j-3)}$ .

Si se repitiese este procedimiento suficientes veces, se llegaría a una relación lineal entre el coeficiente  $b_N^{(k)}$  y los coeficientes  $\{b_1^{(j)}\}$ ; como  $b_N^{(k)} = b_{N-1}^{(k-1)} + b_N^{(k-1)}$  y la representación de  $b_{N-1}^{(k)}$  en términos de los elementos de  $\{b_1^{(j)}\}$  debió obtenerse como paso anterior, el realizar una vez más la operación llevaría a la relación final entre sólo los coeficientes  $\{b_1^{(j)}\}$  de la forma  $b_1^{(j)} + \xi_1 b_1^{(j-1)} + \xi_2 b_1^{(j-2)} + \dots + \xi_N b_1^{(j-N)} = 0$ ; los coeficientes  $\xi_i$  se determinan en el proceso.

Supóngase ahora que  $b_1^{(j)}$  es la  $j$ -ésima potencia de un número  $r$ . Ésto reduce la relación entre los coeficientes  $\{b_1^{(j)}\}$  a un polinomio característico de grado  $N$ , que se denotará por  $P_N$ , para el cual  $r$  debe ser una raíz.

$$P_N = r^N + \xi_1 r^{N-1} + \dots + \xi_{N-1} r + \xi_N. \quad (4.15)$$

De este modo, la forma general de  $b_1^{(j)}$  será una combinación lineal de las raíces del polinomio y podrá tener la siguiente forma:

$$b_1^{(j)} = \sum_{i=1}^N A_i r_i^j. \quad (4.16)$$

Por las relaciones originales entre coeficientes se pueden determinar todos los demás en términos de estas raíces, quedando:

$$\begin{aligned} b_2^{(j)} &= \sum_{i=1}^N A_i r_i^{j+1}, \\ b_3^{(j)} &= b_2^{(j+1)} - b_1^{(j)} = \sum_{i=1}^N A_i (r_i^2 - 1) r_i^j, \\ b_4^{(j)} &= b_3^{(j+1)} - b_2^{(j)} = \sum_{i=1}^N A_i (r_i^2 - 2) r_i^{j+1}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$b_5^{(j)} = b_4^{(j+1)} - b_3^{(j)} = \sum_{i=1}^N A_i [(r_i^2 - 2)r_i^{j+2} - (r_i^2 - 1)r_i^j] = \sum_{i=1}^N A_i (r_i^4 - 3r_i^2 - 1)r_i^j.$$

Como se puede observar, la forma general del coeficiente  $b_k^{(j)}$  no es evidente. Supóngase que

$$b_k^{(j)} = \sum_{i=1}^N A_i f_k(r_i) r_i^j, \quad (4.18)$$

donde  $f_k(r_i)$  es la función a encontrar. La relación que cumplen estas funciones se obtiene del siguiente hecho:

$$b_k^{(j)} = b_{k-1}^{(j+1)} - b_{k-2}^{(j)} = \sum_{i=1}^N A_i [f_{k-1}(r_i) r_i - f_{k-2}(r_i)] r_i^j, \quad (4.19)$$

⇒

$$f_k = f_{k-1} r_i - f_{k-2}, \quad (4.20)$$

para  $k = 3, 4, \dots, N$ . Considerando  $f_k = s^{k-1}$ , se obtiene:

$$s^2 - r_i s + 1 = 0, \quad (4.21)$$

⇒

$$s_{\frac{1}{2}} = \frac{r_i}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r_i}{2}\right)^2 - 1}. \quad (4.22)$$

⇒

$$f_k = c_1 s_1^{k-1} + c_2 s_2^{k-1}. \quad (4.23)$$

Es claro que  $f_1 = 1$  y  $f_2 = r_i$ , por lo tanto  $c_1 + c_2 = 1$  y  $c_1 s_1 + c_2 s_2 = r_i$ , queda  $f_k$  de la

siguiente forma:

$$f_k = \left( \frac{1}{2} + \frac{r_i/2}{2\sqrt{(r_i/2)^2 - 1}} \right) s_1^{k-1} + \left( \frac{1}{2} - \frac{r_i/2}{2\sqrt{(r_i/2)^2 - 1}} \right) s_2^{k-1}. \quad (4.24)$$

La siguiente suposición simplifica la expresión de  $f_k$  y nos permite encontrar una solución. Supóngase que  $r_i/2 \leq 1$ , ésto se ha probado para los casos simples ( $N = 1, 2, 3$ ) en los que la relación buscada para los coeficientes de los polinomios sencillos. Dada la suposición, tenemos:

$$s_{\pm} = \frac{r_i}{2} \pm j\sqrt{1 - \left(\frac{r_i}{2}\right)^2} = \exp(\pm j\theta_i), \quad (4.25)$$

donde  $\cos \theta_i = r_i/2$ ,  $\text{sen} \theta_i = \sqrt{1 - (r_i/2)^2}$  y  $j^2 = -1$ . De donde se puede determinar la forma de  $f_k$ :

$$\begin{aligned} f_k &= \frac{1}{2} \left( 1 - j \frac{r_i/2}{\sqrt{1 - (r_i/2)^2}} \right) \exp [j(k-1)\theta_i] + \frac{1}{2} \left( 1 + j \frac{r_i/2}{\sqrt{1 - (r_i/2)^2}} \right) \exp [-j(k-1)\theta_i] \\ &= \cos(k-1)\theta_i + \frac{r_i/2}{\sqrt{1 - (r_i/2)^2}} \text{sen}(k-1)\theta_i, \end{aligned} \quad (4.26)$$

⇒

$$f_k = \frac{\text{sen}k\theta_i}{\text{sen}\theta_i}, \quad (4.27)$$

para  $k = 1, 2, \dots, N$ . Con ésto sólo hace falta encontrar los valores de las raíces del polinomio característico para tener la forma general de los coeficientes  $b_k^U$ .

A continuación se obtendrán los valores de las raíces, o lo que es lo mismo, los valores de las  $\theta_i$  en función de  $N$ . Es a partir de una propiedad de las  $f_k$  no demostrada en este trabajo, que se pudo obtener la forma explícita de las raíces. Dicha propiedad se manifestó en los polinomios característicos para el coeficiente  $b_1^U$  en los casos más simples ( $N = 1, 2, 3, 4, 5$ ). Estos polinomios se obtienen fácilmente con el proceso discutido para llegar a la ecuación (4.15):

$$P_1 = r - 1, \quad (4.28)$$

$$P_2 = r^2 - r - 1,$$

$$P_3 = r^3 - r^2 - 2r + 1,$$

$$P_4 = r^4 - r^3 - 3r^2 + 2r + 1,$$

$$P_5 = r^5 - r^4 - 4r^3 + 3r^2 + 3r - 1.$$

Ahora, para hacer la comparación, se determinan los primeros términos de la sucesión  $\{f_k\}$ :

$$f_1 = 1, \quad (4.29)$$

$$f_2 = r,$$

$$f_3 = r^2 - 1,$$

$$f_4 = r^3 - 2r,$$

$$f_5 = r^4 - 3r^2 + 1,$$

$$f_6 = r^5 - 4r^3 + 3r.$$

De lo anterior se puede ver que al menos hasta  $N = 5$ ,  $P_N = f_{N+1} - f_N$ . Confiando en que esta relación se cumpla para toda  $N$ , se obtiene la relación que debe cumplir  $\theta$  ( $P_N = 0$ ). Es decir,  $f_{N+1} - f_N = 0$ . Por lo tanto:

$$0 = \operatorname{sen}(N+1)\theta - \operatorname{sen}N\theta = 2 \cos \frac{1}{2}(2N+1)\theta \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}, \quad (4.30)$$

$\Rightarrow$

$$\cos \frac{1}{2}(2N+1)\theta = 0, \quad (4.31)$$

⇒

$$\theta_i = \left( \frac{2i-1}{2N+1} \right) \pi, \quad (4.32)$$

⇒

$$r_i = 2 \cos \left( \frac{2i-1}{2N+1} \right) \pi, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.33)$$

Ya conocidas las  $\theta_i$ , la expresión para las  $b_k^{(j)}$  queda mejor definida:

$$b_k^{(j)} = \sum_{i=1}^N A_i \frac{\text{sen} k \theta_i^j}{\text{sen} \theta_i} (2 \cos \theta_i)^j, \quad k = 1, \dots, N. \quad (4.34)$$

Con esto obtenemos la expresión final para la densidad de peso:

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^n \sum_{k=1}^N \frac{b_k^{(j)}}{2^j} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^n \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N A_i \frac{\text{sen} k \theta_i}{\text{sen} \theta_i} (\cos \theta_i)^j \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^n \left\{ \sum_{i=1}^N A_i \left( \sum_{k=1}^N \frac{\text{sen} k \theta_i}{\text{sen} \theta_i} \right) \right\} (\cos \theta_i)^j \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i \left( \sum_{k=1}^N \frac{\text{sen} k \theta_i}{\text{sen} \theta_i} \right) \frac{1 - (\cos \theta_i)^{n+1}}{1 - \cos \theta_i}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Este resultado demuestra que  $P_n$  converge a un valor finito cuando se hace que  $n$  tienda a infinito:

$$P_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i \left( \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\text{sen} k \theta_i}{\text{sen} \theta_i} \right) \frac{1}{1 - \cos \theta_i}. \quad (4.36)$$

Aunque este valor límite coincide en los casos simples ( $N=1,2,3$ ) con los resultados numéricos, la conjetura (3.4) hecha para la forma de  $P_\infty$  no se ha podido demostrar; tal vez un estudio más profundo de los coeficientes  $A_i$  sea la clave de la demostración.

## 4.2 La Extensión al Continuo

El modelo en el caso en el que no hay vacíos ( $p = 0$ ) y que los pesos son cedidos por mitades (ec. 4.4), se puede reescribir de la siguiente manera:

$$u_i^{(n)} = \frac{1}{2} (u_{i-1}^{(n-1)} + u_{i+1}^{(n-1)} - 2u_i^{(n-1)}) + u_i^{(n-1)} + 1, \quad (4.37)$$

$\Rightarrow$

$$u_i^{(n)} - u_i^{(n-1)} = \frac{1}{2} [u_{i+1}^{(n-1)} - u_{i-1}^{(n-1)} - (u_i^{(n-1)} - u_{i-1}^{(n-1)})] + 1, \quad (4.38)$$

siendo  $\Delta^{(n)}u_i^{(n)} = u_i^{(n)} - u_i^{(n-1)}$  y  $\Delta_i u_i^{(n)} = u_i^{(n)} - u_{i-1}^{(n)}$ , así se obtiene:

$$\Delta^{(n)}u_i^{(n)} = \frac{1}{2}\Delta_i (u_{i+1}^{(n-1)} - u_i^{(n-1)}) + 1 = \frac{1}{2}\Delta_i \Delta_i u_{i+1}^{(n-1)} + 1, \quad (4.39)$$

$\Rightarrow$

$$\Delta^{(n)}u_i^{(n)} = \frac{1}{2}\Delta_i^2 u_{i+1}^{(n-1)} + 1. \quad (4.40)$$

Supóngase  $N$  muy grande, tanto que el sistema pueda considerarse como un medio continuo. Esto implica que se tomarán a  $i$  y a  $n$  como variables continuas llamadas  $x$  y  $t$ , respectivamente. Como consecuencia, el peso en un sitio será el esfuerzo vertical puntual como función de  $x$  y  $t$ , esto es.  $u = u(x, t)$ . De este modo, en el límite, la diferencia entre los pesos de dos granos consecutivos puede considerarse la variación puntual del peso en la dirección, por lo que se considerará que  $\Delta^{(n)}u_i^{(n)} \simeq \partial u / \partial t \equiv u_t$ ; análogamente  $\Delta_i u_i^{(n)} \simeq \partial u / \partial x \equiv u_x$  y  $\Delta_i^2 u_i^{(n)} \simeq \partial^2 u / \partial x^2 \equiv u_{xx}$ . Por lo tanto la extensión de la expresión discreta del modelo (ec. 4.4) estará dada por:

$$u_t = \frac{1}{2}u_{xx} + 1. \quad (4.41)$$

La condición inicial para este problema se hereda directamente del problema discreto ( $u(x, 0) = 1$ ); faltan encontrar las condiciones de frontera. Para el modelo discreto se tenía que las condiciones de frontera eran:

$$u_1^{(n)} = \frac{1}{2}u_2^{(n-1)} + 1, \quad u_{2N}^{(n)} = \frac{1}{2}u_{2N-1}^{(n-1)} + 1. \quad (4.42)$$

Tómese la condición en la pared izquierda:

$$u_1^{(n)} - u_1^{(n-1)} = \frac{1}{2}u_2^{(n-1)} + 1 - u_1^{(n-1)} = \frac{1}{2}(u_2^{(n-1)} - u_1^{(n-1)}) + 1 - \frac{1}{2}u_1^{(n-1)}. \quad (4.43)$$

⇒

$$\Delta^{(n)}u_1^{(n)} = \frac{1}{2}(\Delta_t u_2^{(n-1)} - u_1^{(n-1)}) + 1. \quad (4.44)$$

Si se hace la extensión al continuo, esto es:  $u_1^{(n-1)} \rightarrow u(0, t)$ ,  $\Delta^{(n)}u_1^{(n)} \rightarrow u_t(0, t)$  y  $\Delta_t u_2^{(n-1)} \rightarrow u_x(0, t)$ . Se obtiene:

$$u_t(0, t) = \frac{1}{2}[u_x(0, t) - u(0, t)] + 1. \quad (4.45)$$

Esto conforma una de las condiciones de frontera del problema, para deducir la otra se reescribe:

$$u_{2N}^{(n)} - u_{2N}^{(n-1)} = \frac{1}{2}u_{2N-1}^{(n-1)} + 1 - u_{2N}^{(n-1)} = -\frac{1}{2}(u_{2N}^{(n-1)} - u_{2N-1}^{(n-1)}) + 1 - \frac{1}{2}u_{2N}^{(n-1)}, \quad (4.46)$$

⇒

$$\Delta^{(n)}u_{2N}^{(n)} = -\frac{1}{2}(\Delta_t u_{2N}^{(n-1)} + u_{2N}^{(n-1)}) + 1, \quad (4.47)$$

⇒

$$u_t(2N, t) = -\frac{1}{2}[u_x(2N, t) + u(2N, t)] + 1. \quad (4.48)$$

Con esto se cierra el problema. Se propone ahora una solución que pierda su dependencia en  $t$  cuando sea muy grande, esto es,  $u(x, t) \rightarrow u_\infty(x)$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ . De modo que la solución tendrá la siguiente forma:

$$u(x, t) = u_\infty(x) + v(x, t), \quad (4.49)$$

donde  $v(x, t) \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow \infty$ . Dado el comportamiento asintótico de  $v(x, t)$ , se puede suponer que para  $t$  suficientemente grande la ecuación (4.41) queda  $u''_\infty = -2$ , con las condiciones de frontera dadas por  $u_\infty(0) - u'_\infty(0) = 2$  y  $u_\infty(2N) + u'_\infty(2N) = 2$ . La solución es claramente:

$$u_\infty(x) = -x^2 + 2Nx + 2N + 2. \quad (4.50)$$

Se debe notar que  $u_\infty(0) = u_\infty(2N) = 2N + 2$ , esto implica que sobre la pared, a una profundidad suficientemente grande, se pierde el peso de una línea... más dos unidades de masa, curiosamente. Como  $u_\infty$  es una solución particular de la ecuación (4.41), la ecuación que debe resolver  $v$  es:

$$v_t = \frac{1}{2}v_{xx}, \quad (4.51)$$

con las respectivas condiciones

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= 1 - u_\infty, \\ v_t(0, t) &= \frac{1}{2}[v_x(0, t) - v(0, t)], \\ v_t(2N, t) &= -\frac{1}{2}[v_x(2N, t) + v(2N, t)]. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Proponiendo una solución separable  $v = f(x)g(t)$ , se obtiene que  $2g'/g = f''/f = -\lambda^2$ ,

donde  $\lambda$  es constante. Por lo tanto  $f(x) = A \operatorname{sen}(\lambda x) + B \cos(\lambda x)$  y  $g(x) = C e^{-\lambda^2 t/2}$ , quedando con esto  $v(x, t) = [A \operatorname{sen}(\lambda x) + B \cos(\lambda x)] e^{-\lambda^2 t/2}$ . Imponiendo la condición en  $x = 0$  se tiene que:

$$B \frac{-\lambda^2}{2} e^{-\lambda^2 t/2} = \frac{1}{2} e^{-\lambda^2 t/2} (\lambda A - B); \quad (4.53)$$

⇒

$$A = B \frac{1 - \lambda^2}{\lambda}. \quad (4.54)$$

Imponiendo la condición en  $x = 2N$ :

$$\frac{-\lambda^2}{2} [A \operatorname{sen}(\lambda 2N) + B \cos(\lambda 2N)] = -\frac{1}{2} [-\lambda B \operatorname{sen}(\lambda 2N) + \lambda A \cos(\lambda 2N) + A \operatorname{sen}(\lambda 2N) + B \cos(\lambda 2N)], \quad (4.55)$$

⇒

$$(A/2 - \lambda^2 A/2 - \lambda B/2) \operatorname{sen}(\lambda 2N) + (B/2 - \lambda^2 B/2 + \lambda A/2) \cos(\lambda 2N) = 0, \quad (4.56)$$

combinando las ecs. (4.54) y (4.56):

$$[A/2 - \lambda^2 A/2 - \frac{\lambda^2 A}{2(1 - \lambda^2)}] \operatorname{sen}(\lambda 2N) + \lambda A \cos(\lambda 2N) = 0, \quad (4.57)$$

siendo que  $A$  es distinta de cero, se tiene la siguiente ecuación para  $\lambda$ :

$$2\lambda(\lambda^2 - 1) \cos(\lambda 2N) + (-\lambda^4 + 3\lambda^2 - 1) \operatorname{sen}(\lambda 2N) = 0. \quad (4.58)$$

Es claro que esta función es impar, por lo que los valores de  $\lambda$  están dados por pares ( $\pm\lambda$ ). Con esto queda determinada la forma general de  $v(x, t)$ :

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left[ \frac{1 - \lambda_n^2}{\lambda_n} \operatorname{sen}(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x) \right] e^{-\lambda_n^2 t/2}, \quad (4.59)$$

donde los coeficientes  $B_n$  quedan determinados por la condición inicial ( $t = 0$ ), esto es:

$$v(x, 0) = 1 - u_{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left[ \frac{1 - \lambda_n^2}{\lambda_n} \operatorname{sen}(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x) \right]. \quad (4.60)$$

Claramente la sucesión  $\{\lambda_n^2\}$  es creciente por lo que el factor  $e^{-\lambda_n^2 t/2}$  decaerá como función de  $n$ , por lo que los términos de la serie decrecerán para  $t$  lo suficientemente grande. Para demostrar que los términos decrecen para cualquier  $t$  se debe determinar la forma de los  $B_n$ . Para ésto, se pueden aproximar sucesivamente los valores de los primeros coeficientes truncando la serie a primeros ordenes y ajustando la condición inicial. Suponiendo que truncar en el primer término es una buena aproximación, se puede obtener una solución similar a la de Janssen siendo que se tiene:

$$u(x, t) = u_{\infty}(x) + B_0 \left[ \frac{1 - \lambda_0^2}{\lambda_0} \operatorname{sen}(\lambda_0 x) + \cos(\lambda_0 x) \right] e^{-\lambda_0^2 t/2}. \quad (4.61)$$

Con el valor obtenido para  $u_{\infty}$  se puede calcular  $P_{\infty}$ :

$$P_{\infty} = \frac{1}{2N} \int_0^{2N} u_{\infty}(x) dx = \frac{2N^2}{3} + 2N + 1. \quad (4.62)$$

Para  $N$  grande este resultado es prácticamente igual al de la conjetura (ec. (3.4)) y puede determinarse  $\lambda_0$  es proporsional a  $1/N$  numericamente. Este resultado permite escribir a  $P(t)$  en su forma definitiva, habiendo truncado a  $u(x, t)$  en el primer término:

$$\begin{aligned}
 P(t) &= P_{\infty} + \frac{B_0 e^{-\lambda_0^2 t/2}}{2N} \int_0^{2N} \left( \frac{1 - \lambda_0^2}{\lambda_0} \operatorname{sen}(\lambda_0 x) + \cos(\lambda_0 x) \right) dx \\
 &= P_{\infty} + \frac{B_0}{2N\lambda_0} \left[ \left( \frac{\lambda_0^2 - 1}{\lambda_0} \right) (\cos 2N\lambda - 1) + \operatorname{sen} 2N\lambda_0 \right] e^{-\lambda_0^2 t/2}.
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

En resumen, el estudio analítico del modelo tanto en el caso discreto como en el continuo muestran la presencia de arqueo. En el caso continuo, que supone un sistema grande, el resultado para la presión asintótica concuerda bastante bien con los resultados numéricos; la presión en este caso se expresa como una serie infinita que parece tener en su primer término la contribución más importante. Si es truncada en este término, la presión tiene cualitativamente la misma forma que la solución de Janssen aunque el comportamiento de la presión y la profundidad asintóticas no tienen la misma dependencia en el tamaño del sistema. Los resultados obtenidos en este capítulo se restringen al caso en que no hay vacíos en el arreglo y queda pendiente el estudio analítico del modelo para el caso más general.

El modelo predice, en el caso en que es truncada la solución, que la profundidad a la que se observa el fenómeno es proporsional a  $N^2$ , esto sustenta la hipótesis de que para observar el fenómeno en empaquetamientos compactos hizo falta un dispositivo más alto.

## Capítulo 5

# Conclusiones y Perspectivas.

Los experimentos realizados con sistemas cuasi-bidimensionales de esferas de vidrio y acero presentan el fenómeno de arqueo en empaquetamientos poco compactos; las observaciones hechas en empaquetamientos compactos no confirman el fenómeno, pero tampoco niegan su existencia, pues fueron realizadas sobre columnas no muy altas. Todos los experimentos se hicieron en sistemas del mismo tamaño, se usaron medios con dos rugosidades y dos masas distintas; los resultados confirman que la presión crece con la masa de los granos y decrece con la rugosidad de éstos.

El modelo estudiado, tal vez el más simple imaginable, simula el fenómeno en un arreglo bidimensional en líneas, de granos idénticos, confinado entre dos paredes; el tamaño del sistema lo determina el número de sitios por línea. En el modelo se introducen los efectos de desorden e inhomogeneidad en la forma de los granos distribuyendo aleatoriamente los pesos entre granos vecinos; la fricción entre granos y paredes se simula haciendo que los granos repartan a las paredes el peso que soportan como si éstas fueran un vecino más. Como se comprobó en los experimentos, la densidad de la columna es uno de los parámetros relevantes en el comportamiento del fenómeno, ésta puede variarse por medio de la probabilidad de encontrar sitios vacíos en el arreglo. Cabe recalcar que en el modelo no hay fricción ni entre los granos ni con las paredes, éstas simplemente absorben el peso; de este modo todas las fuerzas pasan por el centro de masa de los granos, asegurando con esto el balance de fuerzas y torcas.

La simplicidad del modelo permite obtener numericamente el comportamiento de la presión como función de la profundidad en el arreglo, cualitativamente igual al predicho teóricamente por Janssen. Esto es, la presión tiende asintóticamente a un valor constante a medida que la profundidad tiende a infinito, este resultado general es independiente del tamaño del sistema y de la ocurrencia de huecos. De los resultados numéricos para la presión se pueden extraer cantidades físicamente relevantes, que son el valor límite de la presión y la profundidad a partir de la cual la presión está muy próxima a este valor. En el caso en el que no hay vacíos en el arreglo, la profundidad crítica es, en una buena aproximación, proporcional al cuadrado del tamaño del sistema; por otra parte, la presión límite, depende cuadráticamente del tamaño del sistema. Estos comportamientos requieren de experimentos en sistemas de varios tamaños para ser corroborados cualitativamente. Para una comparación cuantitativa de los resultados numéricos del modelo hace falta identificar en él los parámetros que caracterizan a un sistema real (densidad y fricción con las paredes). Por lo tanto, falta determinar hasta qué grado el modelo predice el comportamiento de las cantidades involucradas.

En el estudio analítico del modelo, en el caso en el que no hay vacíos, se demostró que la presión en la columna alcanza un valor finito al hacer tender la profundidad al infinito. La expresión deducida para el límite es una suma finita en la que en cada término se encuentra una constante que en general permanece indeterminada; debido a esto, no se ha logrado todavía reducir la expresión al polinomio de segundo orden que reproduce los resultados numéricos (ec. (3.4)). Para los casos en los que es sencillo el cálculo de estas constantes, la expresión reproduce los resultados numéricos.

En la extensión del modelo a un medio continuo, el algoritmo que gobierna la distribución de los pesos en el medio es transformado a una ecuación diferencial parcial parabólica inhomogénea de segundo orden. La solución a la presión límite en este caso resulta un polinomio de segundo orden que en el término cuadrático es igual al polinomio buscado. Considerando que la aproximación al continuo requiere de sistemas de gran tamaño, la solución de la presión asintótica resulta bastante satisfactoria. El estudio analítico del caso en el que hay vacíos está en desarrollo y su relación con los resultados numéricos es todavía tema de debate.

Permanece abierto el estudio de la extensión del modelo a tres dimensiones, que se sabe que

reproduce el fenómeno. También falta explicar con este modelo el mínimo local de la presión en el centro de la base de una pila, para lo cual serviría encontrar la relación constitutiva para los medios granulados que se encuentra de manera implícita en el modelo.

## Apéndice.

En este apéndice se expone un camino a seguir para la demostración de la conjetura (3.4).

El modelo para la red duplicada del capítulo 4 puede escribirse en forma vectorial considerando al vector  $\mathbf{u}^{(n)} = u_i^{(n)}$ , quedando la fórmula de recurrencia:

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = T\mathbf{u}^{(n)} + \mathbf{1}, \quad (5.1)$$

donde  $\mathbf{1}$  es el vector constante y  $T$  es la matriz tal que:

$$T u_i^{(n)} = \frac{1}{2}(u_{i-1}^{(n)} + u_{i+1}^{(n)}). \quad (5.2)$$

Las condiciones de frontera se incluyen considerando:

$$u_0^{(n)} = u_{2N+1}^{(n)} = 0, \quad (5.3)$$

donde se introducen los sitios ficticios 0 y  $2N+1$  para tomar en cuenta la condición a la frontera del modelo. Considérese la ecuación para los valores y vectores propios de  $T$ , dados por  $\omega_k$  y  $\phi^{(k)}$  respectivamente, esto es:

$$T\phi^{(k)} = \omega_k\phi^{(k)}. \quad (5.4)$$

⇒

$$\frac{1}{2}(\phi_{i-1}^{(k)} + \phi_{i+1}^{(k)}) = \omega_k\phi_i^{(k)}, \quad (5.5)$$

considerando a la  $i$ -ésima componente del vector  $\phi^{(k)}$  como la  $i$ -ésima potencia de un número  $q$ , se obtiene la siguiente ecuación:

$$q^2 - 2\omega_k q + 1 = 0, \quad (5.6)$$

$\Rightarrow$

$$q_{\frac{1}{2}} = \omega_k \pm \sqrt{\omega_k^2 - 1}, \quad (5.7)$$

quedando en general  $\phi_i^{(k)} = Aq_1^i + Bq_2^i$ , donde  $A$  y  $B$  deben satisfacer las condiciones de frontera, de modo que:

$$\begin{aligned} \phi_0^{(k)} &= A + B = 0, \\ \phi_{2N+1}^{(k)} &= Aq_1^{2N+1} + Bq_2^{2N+1} = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Suponiendo que los valores propios son menores a uno en valor absoluto, podemos definir  $\{\theta_k\}$  de modo que  $\cos \theta_k = \omega_k$ ; con lo que  $q_{\frac{1}{2}} = e^{\pm j\theta_k}$ , donde  $j^2 = -1$ . Así las ec. (5.8) se reducen a:

$$A(e^{j(2N+1)\theta_k} - e^{-j(2N+1)\theta_k}) = 0, \quad (5.9)$$

$\Rightarrow$

$$\operatorname{sen}(2N+1)\theta_k = 0, \quad (5.10)$$

$\Rightarrow$

$$\theta_k = \frac{k\pi}{2N+1}. \quad (5.11)$$

de donde se obtienen los valores y vectores propios:

$$\begin{aligned}\omega_k &= \cos \frac{k\pi}{2N+1}, \\ \phi_i^{(k)} &= 2A \operatorname{sen} \left( \frac{ki\pi}{2N+1} \right).\end{aligned}\quad (5.12)$$

Normalizando los vectores  $\phi^{(k)}$  se determina  $A$ , esto es:

$$2A \sqrt{\sum_{i=1}^{2N} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{ki\pi}{2N+1} \right)} = 1, \quad (5.13)$$

$\Rightarrow$

$$\sqrt{N - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2N} \cos \left( \frac{2ki\pi}{2N+1} \right)} = \frac{1}{2A}, \quad (5.14)$$

sabiendo que:

$$\sum_{i=1}^{2N+1} \cos \left( \frac{2ki\pi}{2N+1} \right) = 0, \quad (5.15)$$

quedan determinados los valores propios de la siguiente forma:

$$\phi_i^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{N-1/2s}} \operatorname{sen} \left( \frac{ki\pi}{2N+1} \right). \quad (5.16)$$

Con ellos el problema original se puede resolver de manera más fácil, desarrollando todo en combinaciones de valores propios del siguiente modo:

$$\mathbf{1} = \sum_{k=1}^{2N} \rho_k \phi^{(k)}, \quad (5.17)$$

$$\mathbf{u}^{(n)} = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_{k,n} \phi^{(k)}.$$

donde los  $\rho_k$  están dados por:

$$\rho_k = \frac{1}{\sqrt{N+1/2}} \sum_{i=0}^{2N} \operatorname{sen} \left( \frac{ki\pi}{2N+1} \right) = \frac{1 - (-1)^k}{2\sqrt{N+1/2}} \operatorname{cot} \left( \frac{k\pi}{2(2N+1)} \right), \quad (5.18)$$

ya que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2N} \operatorname{sen} \left( \frac{ki\pi}{2N+1} \right) &= 0 \text{ si } k \text{ es par,} \\ \sum_{i=0}^{2N} \operatorname{sen} \left( \frac{ki\pi}{2N+1} \right) &= \operatorname{cot} \left( \frac{k\pi}{2(2N+1)} \right) \text{ si } k \text{ es impar.} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.17) en la ecuación original (5.1), se obtiene una relación de recurrencia para los  $\lambda_{k,n}$ , que es inhomogénea:

$$\lambda_{k,n+1} = \lambda_{k,n} \omega_k + \rho_k, \quad (5.20)$$

siendo la condición inicial  $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{1}$ ,  $\lambda_{k,0} = 0$  y se puede desarrollar  $\lambda_{k,n}$  del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \lambda_{k,n} &= \lambda_{k,n-1} \omega_k + \rho_k, \\ &= \rho_k + \omega_k (\lambda_{k,n-2} \omega_k + \rho_k) = \rho_k + \omega_k \rho_k + \omega_k^2 \lambda_{k,n-2}, \\ &= \rho_k + \omega_k \rho_k + \dots + \omega_k^{n-1} \rho_k + \omega_k^n \lambda_{k,0}, \\ &= \rho_k \frac{1 - \omega_k^n}{1 - \omega_k} \end{aligned} \quad (5.21)$$

lo que se vuelve aproximadamente igual a:

$$\lambda_k = \frac{\rho_k}{1 - \omega_k} \quad (5.22)$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Combinando todo esto se obtiene la distribución estacionaria  $u^{(\infty)}$  de la siguiente forma:

$$u^{(\infty)} = \lim_{n \rightarrow \infty} u^{(n)} = \sum_{k=1}^{2N} \frac{\rho_k}{1 - \omega_k} \phi^{(k)}, \quad (5.23)$$

y con esto la presión asintótica:

$$\begin{aligned} P_\infty &= \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{2N} u_i^{(\infty)} = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} \frac{\rho_k}{1 - \omega_k} \left( \sum_{i=1}^{2N} \phi_i^{(k)} \right) \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} \frac{\rho_k^2}{1 - \omega_k}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Como  $\rho_k$  es distinta de cero únicamente para  $k$  impar,  $P_\infty$  puede escribirse de la siguiente forma sustituyendo los valores de  $\rho_k$  y  $\omega_k$ :

$$\begin{aligned} P_\infty &= \frac{1}{2N(N+1/2)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\cot^2 \left( \frac{(2k-1)\pi}{2(2N+1)} \right)}{1 - \cos \left( \frac{(2k-1)\pi}{2N+1} \right)} \\ &= \frac{1}{2N(N+1/2)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\cot^2 \left( \frac{(2k-1)\pi}{2(2N+1)} \right)}{\operatorname{sen}^2 \left( \frac{(2k-1)\pi}{2(2N+1)} \right)}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

usando la identidad  $\cot^2 x / \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^{-4} x - \operatorname{sen}^{-2} x$  se concluye que:

$$P_\infty = \frac{1}{2N(N+1/2)} \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \operatorname{sen}^{-4} \left( \frac{(2k-1)\pi}{2(2N+1)} \right) - \operatorname{sen}^{-2} \left( \frac{(2k-1)\pi}{2(2N+1)} \right) \right]. \quad (5.26)$$

La evaluación de esta expresión para cualquier  $N$  coincide con la conjetura; demostrar que representa un polinomio de segundo orden implica encontrar las sumas, esto puede intentarse buscando un polinomio trigonométrico para el cual los  $\operatorname{sen} \left( \frac{(2k-1)\pi}{2(2N+1)} \right)$  representen las raíces e identificando las sumas en los coeficientes del polinomio.

# Bibliografía

- [1] H.M. Jaeger, S.R. Nagel y R.P. Behringer, *Rev. Mod. Phys.*, **68**, 1259 (1996); H.M. Jaeger, S.R. Nagel y R.P. Behringer, *Phys Today*, 32 (abril 1996).
- [2] R.A. Bagnold, **Blown Sands and Desert Dunes**, Methuen & Co. London (1941).
- [3] P.B. Umbanhowar, F. Melo y H.L. Swinney, *Nature*, **382**, 793 (1996).
- [4] H.K. Pak y R.P. Behringer, *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 1832 (1993).
- [5] H.K. Pak y R.P. Behringer, *Nature*, **371**, 231 (1994).
- [6] J. Duran, T. Mazozi, E. Clément y J. Rajchenbach, *Phys. Rev. E*, **50**, 3092 (1994).
- [7] E. Clément, J. Duran y J. Rajchenbach, *Phys. Rev. Lett.*, **69**, 1189 (1992).
- [8] S. McNamara y W.R. Young, *Phys. Rev. E*, **50**, R28 (1994).
- [9] E. Morales, J. Lomnitz-Adler, V. Romero-Rochín, R. Chicharro y R. Peralta-Fabi, *Phys. Rev. E*, **47**, R2229 (1993); E. Morales, J. Lomnitz-Adler, V. Romero-Rochín y R. Peralta-Fabi, *Phys. Rev. E*, **51**, 3968 (1995); E. Morales, V. Romero-Rochín y R. Peralta-Fabi, *Phys. Rev. E*, **54**, 3488 (1996).
- [10] R. Chicharro, R. Peralta-Fabi y R.M. Velasco, *Proceedings of the Powders and Grains 97, 3rd International Conference on Micromechanics of Granular Media*, en prensa (mayo 1997). Eds. R.P. Behringer y J.T. Jenkins, A.A. Balkema, Rotterdam, NL.
- [11] R. Peralta-Fabi, C. Málaga y R. Rechtman, *Sup. Bol. Soc. Mex. Fis.* 10-3 1996; R. Peralta-Fabi, C. Málaga y R. Rechtman, *Proceedings of the Powders and Grains 97, 3rd International Conference on Micromechanics of Granular Media*, en prensa (mayo 1997); R.

- Peralta-Fabi, C. Málaga y R. Rechtman, 46th Annual Meeting of the Division of Fluid Dynamics, AFS, Syracuse, NY, EUA, (noviembre 1996); R. Peralta-Fabi, C. Málaga y R. Rechtman, *Phys. Rev. Lett.*, enviado (Diciembre 1996).
- [12] J.P. Wittmer, P. Claudin, M.E. Cates y J.P. Bouchaud, *Nature*, **382**, 336 (1996).
- [13] R.L. Brown y J.C. Richards, **Principles of Powder Mechanics**, Pergamon Press (1970), p. 68-73.
- [14] C.h. Liu, S.R. Nagel, D.A. Schecter, S.N. Coppersmith, S. Majumdar, O. Narayan y T.A. Witten, *Science*, **269**, 513 (1995).
- [15] S.F. Edwards y C.C. Mounfield, *Physica A*, **226**, 1 (1996).
- [16] P. Dantu, *Ann. Ponts Chausses*, **4**, 144 (1957).
- [17] T. Travers, D. Bideau, A. Gervois, J.P. Troadec y J.C. Messenger, *J. Phys. A*, **19**, L1033 (1986).
- [18] F. Radjai, M. Jean, J.J. Moreau y S. Roux, *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 274 (1996).
- [19] L.D. Landau y E.M. Lifshitz, **Teoría de la Elasticidad**, Reverté (1969), p. 5-10.
- [20] J.P. Bouchaud, M.E. Cates y P. Claudin, *J. Phys. I*, **5**, 639 (1995).
- [21] M.E. Harr, **Mechanics of Particulate Media**, McGraw Hill (1977), p. 222-225.
- [22] H.A. Janssen, *Z. Vereins Deutsch Ing.* **39**, 1045 (1895).