

128
24.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE QUIMICA



EXAMENES PROFESIONALES
FAC. DE QUIMICA

ESTRATEGIAS DE CONTROL APLICADAS
A UN MODELO LINEAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERA QUIMICA
P R E S E N T A
CLAUDIA LUCRECIA QUIROZ MORENO



MEXICO, D. F.

1997

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).


El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO

Presidente	Prof.	ARNAUD HUERTA RAMÓN
Vocal	Prof.	SANDOVAL GONZÁLEZ REYNALDO
Secretario	Prof.	BARRAGÁN AROCHE JOSE FERNANDO
1er. suplente	Prof.	MORALES CABRERA JUAN MARIO
2do. suplente	Prof.	CHAVÉZ CHAVARRÍA AMBROSIO

Sitio donde se desarrolló el tema: Facultad de Química. Edificio E. UNAM.

Nombre completo y firma del asesor del tema:


Barragán Arcoche José Fernando

Nombre completo y firma del sustentante:


Quiroz Moreno Claudia Lucrecia

AGRADECIMIENTOS

**A la Universidad Nacional Autónoma de México y
a la Facultad de Química:**

*Por darme la oportunidad de tener una
sólida preparación profesional.*

Al Ing. José Fernando Barragán Aroche:

*Por su paciencia y dedicación durante la
realización de este trabajo.*

DEDICATORIAS

A Dios:

*Por hacerme ver que siempre
ha estado conmigo.*

A mis padres:

*Por haberme dado una vida llena de armonía, respeto y
felicidad, y sobretodo por su invaluable apoyo.*

A Ricardo:

*Por su insuperable amor y por llenar
mi vida de grandes ilusiones.*

A mi hermano Omar:

Por brindarme su ayuda cuando lo necesité.

A Oscar y Rocío:

Por lo importantes que son en mi vida.

A Oscarito, mi sobrino y ahijado:

*Por brindarme una alegría inigualable
con tan solo su presencia.*

A Cecilia y Miguel Ángel:

Por su gran amistad y cariño hacia mí.

**Y a todos aquellos que me han brindado su amistad en las
diferentes etapas de mi vida.**

*“La mayoría de veces,
el éxito depende de saber
cuánto se ha de tardar
en lograrlo”*

Montesquieu

INDICE

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO 1. Construcción de un modelo dinámico lineal.	
Objetivos del control de un proceso químico	1-1
Balance de materia	1-2
Balance de energía	1-7
Construcción de un modelo	1-11
Criterios de análisis	1-20
CAPÍTULO 2. Diseño de un sistema de control simple "hacia atrás" aplicado a un cambiador de calor.	
Sistema de control	2-1
Diseño del lazo de control	2-9
CAPÍTULO 3. Representación gráfica del comportamiento de un cambiador de calor con un lazo de control "hacia atrás".	
CAPÍTULO 4. Diseño del modelo dinámico de una red de intercambiadores de calor.	
Planteamiento del problema	4-1
Diseño del modelo	4-3
Análisis del modelo	4-17
CAPÍTULO 5. Diseño y calibración del lazo de control "hacia atrás" para la red de intercambiadores.	
Método de Cohen y Coon	5-2
Selección del tipo de controlador	5-11
CAPÍTULO 6. Análisis de Respuesta de Frecuencia de un Proceso Lineal.	
Respuesta de frecuencia de un sistema de primer orden	6-1
Respuesta de frecuencia de un proceso puro con tiempo muerto	6-5
Respuesta de frecuencia de un sistema de primer orden con tiempo muerto	6-6
Diagramas de Bode	6-7
Criterio de estabilidad de Bode	6-7
Técnica de calibración de Ziegler - Nichols	6-8
CONCLUSIONES	
APÉNDICE 1. Inversión de la transformada de Laplace mediante expansión en fracciones parciales.	

APÉNDICE 2. Dedución de la ecuación del lazo de control simple "hacia atrás".

APÉNDICE 3. Linealización mediante serie de Taylor.

APÉNDICE 4. Relación entre las ecuaciones diferenciales del cambiador de calor I, por tubos y ánulo.

APÉNDICE 5. Relación entre variables de entrada y variables de salida para la red de intercambiadores.

REFERENCIAS

INTRODUCCIÓN

Dentro del conjunto de asignaturas que aparecen en la currícula académica en la carrera de Ingeniería Química, se hallan involucradas distintas disciplinas. Una de las materias que acrisolan a un mayor número de éstas es la denominada como Dinámica y Control de Procesos. Esta materia presenta, en consecuencia, un alto grado de dificultad, pues toma los aspectos que el estudiante ha recibido a lo largo de su formación, y construye modelos matemáticos que representan a los procesos químicos considerando un estado transitorio.

Como un intento de auxiliar al estudiante, este trabajo presenta un conjunto metodológico de estrategias para la solución de modelos dinámicos simplificados. Es una guía para comprender la teoría del control, reforzando los conocimientos necesarios de matemáticas.

Se utiliza el método de la Transformada de Laplace, dada su simplicidad de exposición. Este trabajo no pretende substituir a ningún libro de texto, sino más bien deberá ser considerado como un complemento. Este objetivo se logrará mediante el estudio de un modelo simplificado de una red de intercambiadores de calor, y se observará cómo en un problema sencillo se puede aplicar la teoría básica del control.

En el primer capítulo se definen los conceptos básicos utilizados en la teoría del control y se describen los pasos a seguir para construir un modelo dinámico lineal, y se aplican a un proceso de transferencia de calor.

En el segundo capítulo se diseña el lazo de control de un cambiador de calor.

En el tercer capítulo se hace un análisis del efecto de los diferentes parámetros de sintonización para el lazo de control diseñado.

En el cuarto capítulo se establece el modelo dinámico de una red de intercambiadores de calor y se analiza su comportamiento. Cabe mencionar, que los datos que se utilizan para el estudio dinámico de esta red se tomaron de la bibliografía, ya que no es el objetivo de este trabajo la simulación de un proceso en particular, sino establecer las estrategias generales aplicadas a modelos lineales.

En el quinto capítulo se diseña el lazo de control para la red de intercambiadores de calor y se utiliza la técnica de sintonización desarrollada por Cohen y Coon para los parámetros de ajuste de cada tipo de controlador.

Por último, en el sexto capítulo se realiza el análisis de respuesta de frecuencia de un proceso lineal, se hace el estudio de estabilidad según el criterio de Bode, y se sintonizan los controladores de la red de intercambiadores de calor según la técnica de Ziegler - Nichols.

CAPÍTULO 1

CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO DINÁMICO LINEAL

OBJETIVOS DEL CONTROL DE UN PROCESO QUÍMICO

Antes de explicar como se construye un modelo dinámico lineal es importante entender cuáles son los objetivos de controlar un proceso químico.

Una planta química es un conjunto de unidades de proceso (por ejemplo: reactores, cambiadores de calor, bombas, columnas de destilación, evaporadores y tanques, entre otros), integradas una a otra de una manera sistemática y racional. El objetivo general de una planta es convertir determinada materia prima en productos deseados, utilizando fuentes disponibles de energía de una manera económica.

Durante su operación una planta química debe satisfacer muchos requisitos impuestos por sus diseñadores y por las condiciones técnicas, económicas y sociales a pesar de los cambios que se presenten por las influencias externas. Entre estos requisitos, se encuentran los siguientes:

1. Seguridad
2. Especificaciones de producción
3. Regulaciones ambientales
4. Restricciones de operación
5. Economía

Todos los requisitos mencionados arriba crean la necesidad de un continuo monitoreo de la operación de una planta química y de la intervención externa (control), para garantizar la satisfacción de los objetivos operacionales. Esto se realiza a través de diferentes equipos (dispositivos de medición, válvulas, controladores, computadoras) y de la intervención humana (diseñadores de planta, operadores de planta), que en conjunto constituyen el sistema de control.

En general existen tres clases de necesidades que un sistema de control debe satisfacer:

- Suprimir la influencia de perturbaciones externas
- Asegurar la estabilidad de un proceso químico
- Optimizar el funcionamiento de un proceso químico

En este capítulo se explican términos y estrategias que deben conocerse antes de construir un modelo dinámico lineal.

En todos los procesos químicos existen corrientes que pueden clasificarse como de entrada y de salida. Asociadas a cada corriente se hayan variables de proceso: temperatura, flujo, composición, densidad; y variables termodinámicas de estado: entalpía y entropía.

Reconocidas estas cantidades surge la pregunta: ¿cómo se deben relacionar estas variables en un modelo dinámico?. Para responder lo anterior es necesario contemplar los siguientes aspectos:

- I. Establecer las fronteras del sistema.
- II. Identificar las corrientes que cruzan las fronteras del sistema, clasificándolas como entradas y salidas.
- III. Identificar las variables de proceso que están asociadas a cada corriente.
- IV. Tener presente que en cualquier sistema que esté en estado transitorio (no estacionario), siempre se presentará un término de acumulación distinto a cero. Este término debe ser tomado en cuenta cuando se plantean los balances de materia y energía.

BALANCE DE MATERIA

El balance de materia obedece al principio de conservación¹ en los siguientes términos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cantidad de} \\ \text{materia que se} \\ \text{acumula en el} \\ \text{sistema} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cantidad de materia} \\ \text{que gana el sistema} \\ \text{por las} \\ \text{corrientes de entrada} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Cantidad de materia} \\ \text{que pierde el sistema} \\ \text{por las} \\ \text{corrientes de salida} \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

Los flujos másicos son las variables a considerar en el balance de materia, tanto para las corrientes de entrada como para las de salida. Sin embargo, es conveniente que el flujo másico se represente a través del producto siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo Másico} \\ \text{g / s} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Densidad} \\ \text{g / cm}^3 \end{array} \right\} * \left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo volumétrico} \\ \text{cm}^3 / \text{s} \end{array} \right\}$$

Esto es, utilizando la siguiente ecuación:

$$M_i = \rho_i F_i \quad (1.2)$$

Para calcular la masa contenida dentro del sistema en un instante dado, se utiliza la siguiente expresión:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Masa dentro} \\ \text{del sistema} \\ \text{g} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Densidad} \\ \text{g / cm}^3 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \text{Volumen ocupado por} \\ \text{la masa dentro del sistema} \\ \text{cm}^3 \end{array} \right\}$$

Representada por la siguiente ecuación:

$$M = \rho V \quad (1.3)$$

El volumen que se utiliza en la ecuación (1.3) es el ocupado por el fluido contenido en un recipiente. Por ejemplo, si se tienen en un tanque 6000 g de un líquido con una densidad de 1.2 g/cm³, se tiene entonces que el volumen ocupado por este fluido es de 5000 cm³.

La ecuación (1.1) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\left(\frac{dM(t)}{dt} \right)_{\text{Sist}} = \sum_{\text{Ent}} M(t)_{\text{Ent}} - \sum_{\text{Sal}} M(t)_{\text{Sal}} \quad (1.4)$$

donde M(t) significa que la masa es una función del tiempo t, es decir, es una variable dinámica. Esta notación se aplicará para indicar cuando una variable sea de este tipo.

Combinando las ecuaciones (1.2), (1.3) y (1.4), se encuentra que:

$$\frac{d\rho(t)V(t)}{dt} = \sum_{\text{Ent}} \rho(t)_{\text{Ent}} F(t)_{\text{Ent}} - \sum_{\text{Sal}} \rho(t)_{\text{Sal}} F(t)_{\text{Sal}} \quad (1.5)$$

La expresión (1.5) es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Para resolverla se necesita primeramente saber si está especificada o no, es decir, conocer si los grados de libertad son iguales a cero. Los grados de libertad² se definen como la diferencia entre el número de variables y el número de ecuaciones.

Con el objeto de ejemplificar el uso de esta expresión, a continuación se presenta en la figura (1.1) el proceso para refinación de azúcar³.

Tomando como objetivo de estudio a un fragmento de este proceso, como puede ser el tanque de preparación mostrado en la figura (1.2), se encuentra que la ecuación de balance de materia que lo representa es:

$$\frac{d\rho(t)V(t)}{dt} = \rho_2(t)F(t)_2 + \rho_4(t)F_4(t) - \rho_3(t)F_3(t) \quad (1.6)$$

En la ecuación (1.6) se han considerado a las corrientes de vapor y condensado como externas al sistema.

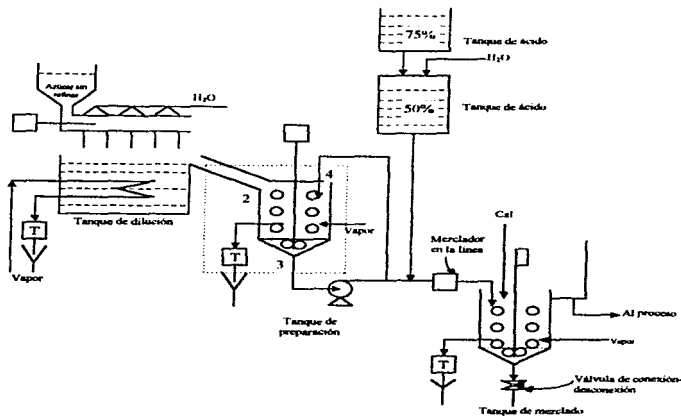


Figura 1.1 Proceso para refinación de azúcar

Para esta ecuación los grados de libertad son iguales a 7, ya que existen 8 variables (p , V , p_2 , F_2 , p_4 , F_4 , p_3 , F_3) y una sola ecuación.

Durante la resolución de estas ecuaciones se hace uso de relaciones adicionales que ayudan a reducir los grados de libertad. Un ejemplo de una relación adicional asociada a la geometría del sistema es la siguiente:

$$V(t) = A Z(t) \quad (1.7)$$

donde A es el área del tanque y Z es el nivel del líquido en el tanque. En este ejemplo se aprecia que el cambio en el volumen está relacionado con el cambio en la altura, y el área del tanque es una cantidad constante.

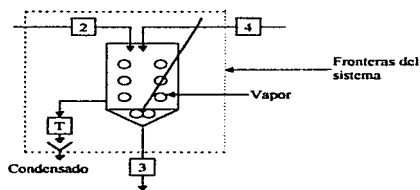


Figura 1.2 Tanque de preparación

Una consideración muy usual para conseguir una simplificación del modelo, es suponer que la densidad en un líquido permanece prácticamente constante², se tiene que $\rho = \rho_2 = \rho_4 = \rho_1$, por lo que estos términos se eliminan de la ecuación (1.6).

Sustituyendo la ecuación (1.7) en la (1.6) y haciendo uso de la consideración anterior, se encuentra que:

$$A \frac{dz(t)}{dt} = F_2(t) + F_4(t) - F_1(t) \quad (1.8)$$

Con esto, los grados de libertad se reducen a 3.

Por cuestiones de la siguiente discusión se establece que todo modelo dinámico se encuentra originalmente en estado estacionario, es decir, aquel estado donde las variables no cambian. Después, el sistema se somete a un cambio por alguna variable de entrada que provoca que el sistema salga del estado estacionario y se convierta en un sistema dinámico, es decir, en un sistema que cambia en el tiempo.

Se define a la **variable de perturbación**³ como aquella variable de entrada que en el tiempo cero cambia, y este cambio es el que altera el comportamiento estacionario del sistema. El cambio en la variable de entrada está especificado por un agente externo al sistema.

Por esta razón la variable de perturbación debe contabilizarse como una variable especificada dentro del análisis de grados de libertad.

Por lo tanto, el sistema representado por la ecuación (1.8) tiene solamente un grado de libertad, entendiéndose que F_2 y F_4 son variables de perturbación.

Para que el sistema posea una solución única se requiere de una ecuación adicional. Se propone una ecuación que relacione al flujo de salida con el nivel de llenado del tanque. La mayoría de los autores^{2,3} indican que una expresión simple que puede ser empleada es la que establece que el flujo de salida es directamente proporcional al nivel del líquido en el tanque, esto es:

$$F_3 = k Z \quad (1.9)$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

Sustituyendo la ecuación (1.9) en la (1.8) resulta:

$$A \frac{dZ(t)}{dt} = F_2(t) + F_4(t) - kZ(t) \quad (1.10)$$

Agrupando términos se obtiene:

$$A \frac{dZ(t)}{dt} + kZ(t) = F_2(t) + F_4(t) \quad (1.11)$$

Finalmente, se tiene una ecuación con una incógnita (Z).

En la ecuación (1.11) $Z(t)$ es una **cantidad medible**. El comportamiento de esta variable es consecuencia de la "personalidad" del sistema. A las variables que poseen estas características se les denomina como **objetivos de control**³.

Cada objetivo de control se asocia a una ecuación diferencial, obtenida de los balances de materia o energía.

El objetivo de control es la variable crítica de la operación de un proceso. Cuando se diseña un proceso se establecen valores óptimos de operación para uno o más objetivos de control. El valor que un experto define a un objetivo de control se denomina como "*set point*"^{4,7}.

Cuando el proceso está operando en condiciones alejadas del *set point*, es menos eficiente, y se encuentra en una condición indeseable. Para recuperar la condición de operación marcada deberá cambiarse alguna variable del sistema, por ejemplo, se puede establecer que el flujo de salida ya no obedezca a la ecuación (1.9), sino a la manipulación que un operador haga de la corriente a través de una válvula, tal y como se muestra en la figura (1.3); de cualquier forma, el flujo de salida se considera como especificado. A esta cantidad se le conoce como **variable manipulada**³.

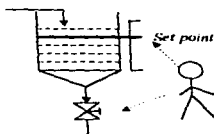


Figura 1.3

Existen algunos sistemas donde la acumulación de materia es igual a cero, por ejemplo el tanque de dilución mostrado en la figura (1.4). Este tanque opera de forma tal que siempre se encuentra lleno. Esto es, la altura del fluido es independiente de los flujos de entrada y salida. Para este tipo de sistemas la ecuación resultante después de hacer el balance de materia es:

$$A \frac{dZ(t)}{dt} = 0 \quad (1.12)$$

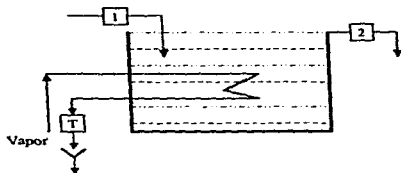


Figura 1.4 Tanque de dilución.

BALANCE DE ENERGÍA

Aplicando el principio¹ de conservación para establecer el balance de energía, se tiene la siguiente ecuación general:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cantidad de} \\ \text{energía que se} \\ \text{acumula en el} \\ \text{sistema} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cantidad de energía} \\ \text{que gana el sistema} \\ \text{por las} \\ \text{corrientes de entrada} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Cantidad de energía} \\ \text{que pierde el sistema} \\ \text{por las} \\ \text{corrientes de salida} \end{array} \right\} \quad (1.13)$$

La cantidad de energía total que se acumula en el sistema es la suma de las contribuciones de la energía interna, de la energía potencial y de la energía cinética del mismo. En la mayoría de los procesos los términos de energía potencial y cinética son despreciables si se comparan con la contribución de la energía interna.

Se puede demostrar que los términos de energía asociados a las corrientes de entrada y salida del sistema, si se desprecia la contribución de la energía potencial y cinética, se representan por el producto siguiente:

$$\rho_i F_i h_i \quad (1.14)$$

donde h_i es la entalpia de la corriente, y el subíndice $i=1,2,\dots$, número de corrientes. Las unidades de estos tres términos son:

$$\begin{aligned} \rho &= \text{densidad} = \text{g/cm}^3 \\ F &= \text{flujo volumétrico} = \text{cm}^3/\text{s} \\ h &= \text{entalpia} = \text{cal/g} \end{aligned}$$

En este balance también se considera a la energía que entra o que sale en forma de calor o trabajo. Por lo tanto la ecuación (1.13) se escribe de la siguiente forma:

$$\left(\frac{dU(t)}{dt} \right)_{\text{sum}} = \sum_i \rho_i(t) F_i(t) h_i(t) - \sum_j \rho_j(t) F_j(t) h_j(t) \pm Q(t) \pm W(t) \quad (1.15)$$

donde: $i=1, 2, \dots$, número de corrientes de entrada.
 $j=1, 2, \dots$, número de corrientes de salida.

Para realizar un análisis de grados de libertad es necesario expresar a las variables de estado de la ecuación (1.15), energía interna (U) y entalpia (h), en términos de variables medibles. Esto es, en términos de temperatura o presión, para lo cual se utilizan algunas aproximaciones o relaciones adicionales.

La definición de entalpia⁴ es $H = U + PV$. Ahora bien, en los líquidos se tienen volúmenes molares relativamente pequeños, además, la presión en los ejemplos que se discuten en este trabajo es aproximadamente la atmosférica, por lo cual se puede despreciar la contribución del producto PV , esto es:

$$U \approx H \quad (1.16)$$

Las relaciones adicionales que se utilizan son:

$$H = \rho V h \quad (1.17)$$

$$h = Cp\Delta T = Cp(T - T_{ref}) \quad (1.18)$$

$$Q_{vs} = m_v \lambda \quad (1.19)$$

donde: Cp: capacidad calorífica a presión constante.

T_{ref} : temperatura del estado de referencia.

Q_{vs} : calor cedido por un vapor saturado^o.

m_v : masa de vapor saturado.

λ : entalpia de vaporización del vapor saturado.

Escribiendo la ecuación (1.15) en función de variables medibles al aplicar las relaciones anteriores resulta:

$$A \frac{d\rho(t)Z(t)Cp(T(t) - T_{ref})}{dt} = \sum_{F_{ent}} \rho(t)_{F_{ent}} F(t)_{F_{ent}} Cp(T_{F_{ent}}(t) - T_{ref}) - \sum_{C_{sal}} \rho(t)_{C_{sal}} F(t)_{C_{sal}} Cp(T_{C_{sal}}(t) - T_{ref}) \pm Q \pm W \quad (1.20)$$

Si se aplica esta ecuación al tanque de preparación de la figura (1.2) se encuentra la siguiente expresión:

$$A \frac{d\rho(t)Z(t)Cp(t)(T(t) - T_{ref})}{dt} = \rho_2(t)F_2(t)Cp_2(t)(T_2(t) - T_{ref}) + \rho_4(t)F_4(t)Cp_4(t) * (T_4(t) - T_{ref}) - \rho_1(t)F_1(t)Cp_1(t)(T_1(t) - T_{ref}) + m_v(t)\lambda \quad (1.21)$$

En este caso, se considera al calor como una entrada² ya que el sistema se está calentando a través del servicio auxiliar de vapor saturado, y no hay término de trabajo.

Los grados de libertad de esta ecuación son 16, ya que existen 17 variables (ρ , Z, Cp, T, ρ_2 , F₂, Cp₂, T₂, ρ_4 , F₄, Cp₄, T₄, ρ_1 , F₁, Cp₁, T₁, m_v) y una sola ecuación (1.21). Sin embargo, al considerar que la densidad y el Cp son constantes, son eliminadas estas variables de la contabilidad anterior. Por otra parte, si se toma una escala relativa de temperatura se establece un estado de referencia que resulte conveniente, esto es, $T_{ref} = 0^\circ C$.

Con el objeto de no complicar la construcción del modelo resulta apropiado suponer que en el interior de los sistemas no existen gradientes. Para conseguir esto deberá establecerse la consideración de un mezclado (agitación) perfecto. Por lo tanto, la temperatura de la corriente de salida es la misma que la temperatura del fluido dentro del tanque.

Con esto, la ecuación (1.21) resulta de la siguiente manera:

$$\frac{dZ(t)T_3(t)}{dt} = \frac{F_2(t)}{\Lambda} T_2(t) + \frac{F_4(t)}{\Lambda} T_4(t) - \frac{F_1(t)}{\Lambda} T(t) + m_v(t)\lambda \quad (1.22)$$

Aplicando la regla de la cadena al término diferencial se obtiene:

$$Z(t) \frac{dT_3(t)}{dt} + T_3(t) \frac{dZ(t)}{dt} = \frac{F_2(t)}{\Lambda} T_2(t) + \frac{F_4(t)}{\Lambda} T_4(t) - \frac{F_1(t)}{\Lambda} T_3(t) + m_v(t)\lambda \quad (1.23)$$

Las variables que aparecen en la ecuación (1.23) se clasifican en dos grandes grupos⁵:

- Variables de entrada: $F_2(t)$, $F_4(t)$, $T_2(t)$, $T_4(t)$ y $m_v(t)$.
- Variables de salida: $F_3(t)$, $T_3(t)$ y $Z(t)$.

Ahora bien, se tienen 7 grados de libertad en la ecuación (1.23). Si se contabiliza como ecuación a la expresión (1.11) los grados de libertad se reducen en uno, esto es, se tienen 6 grados de libertad.

Por otro lado, no se introducen más relaciones adicionales para reducir los grados de libertad, en el caso de $F_3(t)$ debe utilizarse la ecuación (1.9). En consecuencia esta variable debe descontarse de los grados de libertad. Las variables de salida $Z(t)$ y $T_3(t)$ están definidas por las ecuaciones (1.11) y (1.23) por tanto son objetivos de control, como ya se explicó anteriormente.

Las variables de entrada son exclusivamente variables de perturbación o variables manipuladas, nunca objetivos de control.

Dentro del contexto del control simple "hacia atrás"^{2,3} se establece que por cada variable de salida que sea objetivo de control debe tenerse una variable manipulada, en este caso se tendrán necesariamente dos variables manipuladas ($F_3(t)$, $m_v(t)$), el resto deben ser variables de perturbación ($F_2(t)$, $F_4(t)$, $T_2(t)$, $T_4(t)$).

Las variables manipuladas son especificadas por algún mecanismo de control, en consecuencia deben descontarse de los grados de libertad, esto es, en este momento se tienen 4 grados de libertad, las restantes variables se deben considerar como de perturbación. Con esta consideración los grados de libertad son cero y así el sistema está especificado.

A manera de ejemplo a continuación se establece el modelo dinámico lineal de un cambiador de calor donde las ecuaciones de balance de materia y energía son las bases para la construcción de éste.

El proceso de transferencia de calor⁹ es el siguiente:

“Se está calentando alcohol etílico de 80 a 200°F por medio del servicio auxiliar de vapor saturado, el cual está a una presión de 20 lb/in² que es la corriente disponible, con un flujo másico máximo de 20,000 lb/h, el alcohol etílico tiene un flujo de 115,000 lb/h”. Datos

adicionales: Volumen cambiador de calor: 2.293 m³

Temperatura del vapor: 108.86 °C

λ_v : 2233.37 kJ/kg

C_p : 5.373 kJ/kg °C

Este proceso se puede representar de la siguiente manera:

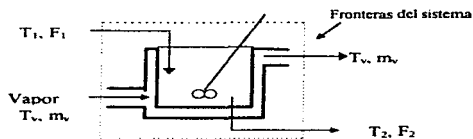


Figura 1.5

De acuerdo con lo explicado anteriormente, se establecen los siguientes balances:

- Balance de materia:

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \rho_1 F_1 - \rho_2 F_2 \quad (1.24)$$

En este caso se considera que la densidad se mantiene constante y los flujos de entrada y de salida son iguales,

$$\therefore \frac{d(\rho V)}{dt} = 0 \quad (1.25)$$

- Balance de energía (despreciando energía potencial y cinética):

$$\frac{dU}{dt} = \rho_1 F_1 h_1 - \rho_2 F_2 h_2 + Q \quad (1.26)$$

Relaciones adicionales:

$$U \approx H \quad (1.27)$$

$$H = \rho V h \quad (1.28)$$

$$h = C_p T \quad (1.29)$$

$$Q = m \cdot \lambda \quad (1.30)$$

- Ecuación diferencial resultante:

$$\frac{dT_2(t)}{dt} = \left(\frac{F_1}{V}\right) T_1(t) - \left(\frac{F_2}{V}\right) T_2(t) + K m_v(t) \quad (1.31)$$

donde:

$$K = \frac{\lambda}{\rho C_p V}$$

Existen diferentes métodos para resolver ecuaciones diferenciales, entre éstos se encuentra la técnica de la transformada de Laplace¹⁰, la cual es útil para el análisis de la dinámica de los procesos y para el diseño de sistemas de control desde el punto de vista didáctico, debido a que es un método que permite:

- Un desarrollo simple de modelos de entrada y salida.
- Un análisis cualitativo simple de cómo los procesos químicos reaccionan a diferentes influencias externas.

A través del método de la transformada de Laplace se convierte una ecuación diferencial lineal en una ecuación algebraica que, a su vez, permite el desarrollo del concepto de funciones de transferencia, el cual se explica más adelante.

Para aplicar la técnica de la transformada se requiere que las ecuaciones diferenciales sean lineales. Sin embargo, las ecuaciones diferenciales que representan a la mayoría de los procesos no son lineales, en estos casos se utiliza un método de linealización.

El método que se utiliza en este trabajo es el de la serie de Taylor¹¹.

El manejo de las ecuaciones linealizadas se facilita al utilizar variables de desviación. La variable de desviación se define como la diferencia entre el valor de la variable en el estado transitorio y su valor en el estado estacionario. Se representa mediante la siguiente ecuación:

$$X' = x(t) - x_s \quad (1.32)$$

donde:

X' : es la variable de desviación.

$x(t)$: es la variable en el estado transitorio.

x_s : es el valor de la variable en el estado estacionario (Valor base).

La variable de desviación es la diferencia que hay entre una variable y el valor que ésta debe tener en el estado estacionario.

Cuando $t = 0$ se tiene:

$$x(0) = x_s$$

Por lo tanto, la variable de desviación en el estado estacionario tiene el valor de cero, esto es:

$$X(0) = 0$$

La ecuación (1.31) es una ecuación diferencial lineal, por lo tanto, en este caso no se requiere del uso de algún método de linealización.

Las variables de desviación para la ecuación (1.31) son:

$$T_2' = T_2 - T_{2s} \quad (1.33)$$

$$T_1' = T_1 - T_{1s} \quad (1.34)$$

$$m_v' = m_v - m_{vs} \quad (1.35)$$

La ecuación resultante en función de variables de desviación es:

$$\frac{dT_2'}{dt} = \left(\frac{F}{V}\right) T_1' - \left(\frac{F}{V}\right) T_2' + Km_v' \quad (1.36)$$

donde: $F=F_1=F_2$.

Agrupando términos se obtiene:

$$\frac{dT_2'}{dt} + \left(\frac{F}{V}\right) T_2' = \left(\frac{F}{V}\right) T_1' + Km_v' \quad (1.37)$$

La ecuación (1.37) es de primer orden, ya que obedece a la construcción de la ecuación diferencial general de primer orden:

$$a_1 \frac{dy'}{dt} + a_0 y' = bf'(t) \quad (1.38)$$

donde: a, b : coeficientes constantes.

$f(t)$: cualquier función del tiempo.

Cuando $a_0 \neq 0$ la ecuación (1.38) se representa de la siguiente manera:

$$\frac{a_1}{a_0} \frac{dy'}{dt} + y' = \frac{b}{a_0} f'(t) \quad (1.39)$$

A partir de la ecuación (1.39) se define a la "constante tiempo"¹² como $\tau = a_1/a_0$. Esta constante tiene unidades de tiempo y está relacionada con la velocidad de respuesta del proceso, de tal manera que mientras más grande sea el valor de τ la respuesta es más lenta.

Por otra parte, se define a la "ganancia del proceso"¹² o "ganancia del estado estacionario" como $K = b/a_0$. La ganancia indica cuánto cambia la variable de salida por unidad de cambio en la variable de entrada, es decir, la ganancia se asocia a la sensibilidad del proceso. La ganancia se define también a través de la siguiente ecuación:

$$K = \frac{\Delta \text{Variable de salida}}{\Delta \text{Variable de entrada}} \quad (1.40)$$

Las unidades de la ganancia deben ser las unidades de la variable de salida divididas entre las unidades de la variable de entrada.

Introduciendo estos parámetros en la ecuación (1.37) resulta:

$$\tau_p \frac{dT_2}{dt} + T_2 = K_p T_1 + K_p m' \quad (1.41)$$

donde:

$$\tau_p = \frac{V}{F}; \quad K_p = 1; \quad K_p = \frac{KV}{F}$$

Una vez que la ecuación diferencial lineal cumple con las siguientes condiciones, estar en función de variables de desviación y estar expresada en términos de la constante tiempo y de las ganancias, se aplica el método de la transformada de Laplace. En la tabla 1.1 se muestran las transformadas de algunas funciones¹².

Dentro de las propiedades de la transformada de Laplace existen dos teoremas² importantes para la dinámica y el control de procesos, dichos teoremas son los siguientes:

- Teorema del valor final. Este teorema permite el cálculo del valor final o del nuevo estado estacionario de una función a partir de su transformada. Si el límite $t \rightarrow \infty$ de $f(t)$ existe, éste se calcula a partir de la transformada de Laplace como sigue:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (1.42)$$

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2!}{s^3}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\text{cos } \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\text{senh } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
$\text{cosh } \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
$e^{-at} \text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \text{cos } \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$

- Teorema de la traslación real. En este teorema se trabaja con la traslación de una función en el eje del tiempo, como se ilustra en la figura (1.6). La función trasladada es la función original con retardo en tiempo. Esta traslación ocasiona retardos de tiempo en el proceso, este fenómeno se conoce como tiempo muerto.

Puesto que la transformada de Laplace no contiene información acerca de la función original para tiempo negativo, se supone que la función retardada es cero, para todos los tiempos menores al tiempo de retardo (ver figura (1.6)). El teorema se expresa mediante la siguiente fórmula:

$$\mathcal{L}\{f(t - t_0)\} = e^{-s t_0} F(s) \quad (1.43)$$

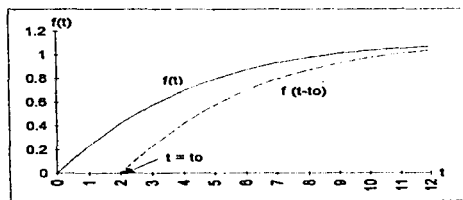


Figura 1.6

Aplicando la transformada de Laplace a cada término de la ecuación (1.41) se encuentra:

$$\mathcal{L}\left[\tau_p \frac{dT_2}{dt}\right] = \tau_p \mathcal{L}\left[\frac{dT_2}{dt}\right] = \tau_p s \bar{T}_2 \quad (1.44)$$

$$\mathcal{L}\{T_2\} = \bar{T}_2 \quad (1.45)$$

$$\mathcal{L}\{K_{p1} T_1\} = K_{p1} \mathcal{L}\{T_1\} = K_{p1} \bar{T}_1 \quad (1.46)$$

$$\mathcal{L}\{K_{p2} m' v\} = K_{p2} \mathcal{L}\{m' v\} = K_{p2} \bar{m} v \quad (1.47)$$

Por lo tanto, la ecuación (1.41) después de aplicar la Transformada de Laplace queda expresada de la siguiente manera:

$$\bar{T}_2(\tau_p s + 1) = K_{p1} \bar{T}_1 + K_{p2} \bar{m} v \quad (1.48)$$

Representada de otra forma:

$$\bar{T}_2 = \frac{K_{p1}}{\tau_p s + 1} \bar{T}_1 + \frac{K_{p2}}{\tau_p s + 1} \bar{m} v \quad (1.49)$$

Las cantidades que están multiplicando a las variables T_1 y m_v se denominan como funciones de transferencia².

En la ecuación (1.49) se observan dos términos:

$$\frac{K_{p1}}{\tau_p s + 1} \quad \text{y} \quad \frac{K_{p2}}{\tau_p s + 1}$$

A estos términos se les conoce como funciones de transferencia.

Las funciones de transferencia son las responsables de representar, dentro del modelo, a la "personalidad" del proceso.

La función de transferencia proporciona un mecanismo útil para el análisis del comportamiento dinámico y el diseño de sistemas de control.

Las funciones de transferencia se representan a través de la letra G , de tal forma que:

$$G_{p1} = \frac{K_{p1}}{\tau_p s + 1} \quad (1.50)$$

$$G_{p2} = \frac{K_{p2}}{\tau_p s + 1} \quad (1.51)$$

por lo tanto,

$$\bar{T}_2 = G_{p1} \bar{T}_1 + G_{p2} \bar{m}_v \quad (1.52)$$

Esta última ecuación es el modelo dinámico lineal del proceso, a partir del cual se analiza el comportamiento dinámico y se diseña un sistema de control.

Esta ecuación tiene un desempeño natural en el tiempo, para conocerlo es necesario aplicar la antitransformada¹⁰, es decir, establecer la ecuación en el dominio del tiempo. La antitransformada es la inversión de la ecuación algebraica obtenida después de haber aplicado la transformada de Laplace. Las antitransformadas se pueden determinar con el uso de la tabla (1.1).

La ecuación (1.49) muestra que la variable medible (T_2) depende tanto del comportamiento de la variable de perturbación (T_1) como el de la variable manipulada (m_v). Así, el desempeño del proceso con respecto a la variable de perturbación se representa por:

$$\bar{T}_2 = \frac{K_{p1}}{\tau_p s + 1} \bar{T}_1 \quad (1.53)$$

Para conocer el comportamiento de la variable medible, en función de la perturbación, se debe suponer el comportamiento de la perturbación. Así, existen diferentes funciones básicas (función exponencial, función escalón, función rampa, funciones trigonométricas) que pueden representar en un momento dado dicho comportamiento. Por ejemplo, si se supone que el comportamiento de la perturbación (T_1) tiene la forma de una función rampa entonces en la ecuación (1.53) se sustituye la siguiente expresión:

$$\bar{T}_1 = \frac{a}{s^2} \quad (1.54)$$

por lo tanto,

$$\bar{T}_2 = \frac{K_{PI}}{\tau_p s + 1} \frac{a}{s^2} \quad (1.55)$$

En la ecuación (1.55) se observa que al haber supuesto que la perturbación tiene un comportamiento de la forma de una función rampa, crea una ecuación con mayor grado de complejidad.

De acuerdo con el objetivo didáctico de este trabajo, se consideró que el comportamiento de la perturbación (T_1) tiene la forma de una función escalón, la cual se representa por la siguiente expresión:

$$\mathcal{L}[a] = \frac{a}{s} \quad (1.56)$$

Considerando que $a = 1$ y sustituyendo la expresión (1.56) en la (1.53) se encuentra la ecuación:

$$\bar{T}_2 = \frac{K_{PI}}{\tau_p s + 1} \frac{1}{s} \quad (1.57)$$

- Expansión en fracciones parciales (Ver Apéndice 1):

$$\bar{T}_2 = \frac{K_{PI} / \tau_p}{s + 1 / \tau_p} \frac{1}{s} = \frac{C_1}{s + 1 / \tau_p} + \frac{C_2}{s} \quad (1.58)$$

$$\frac{K_{PI}}{\tau_p} = C_1 s + C_2 (s + 1 / \tau_p) \quad (1.59)$$

- Evaluación de constantes:

$$C_1: s = -1/\tau \Rightarrow \frac{K_{p1}}{\tau_p} = C_1(-1/\tau_p) \therefore C_1 = -K_{p1}$$

$$C_2: s = 0 \Rightarrow \frac{K_{p1}}{\tau_p} = C_2(1/\tau_p) \therefore C_2 = K_{p1}$$

- Ecuación resultante en el dominio de Laplace:

$$\bar{T}_2 = \frac{-K_{p1}}{s + 1/\tau_p} + \frac{K_{p1}}{s} \quad (1.60)$$

- Antitransformada:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-K_{p1}}{s + 1/\tau_p} \right] = -K_{p1} \exp\left(-\frac{t}{\tau_p}\right) \quad (1.61)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K_{p1}}{s} \right] = K_{p1} \quad (1.62)$$

- Ecuación resultante en el dominio del tiempo:

$$T_2' = K_{p1} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_p}\right) \right) \quad (1.63)$$

El desempeño del proceso con respecto a la variable manipulada se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$\bar{T}_2 = \frac{K_{p2}}{\tau_p s + 1} \bar{m}, \quad (1.64)$$

En el dominio del tiempo, siguiendo el procedimiento anterior, se encuentra:

$$T_2' = K_{p2} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_p}\right) \right) \quad (1.65)$$

Los valores de los parámetros para este proceso son:

$$\tau_p = 127.39 \text{ s}$$

$$K_{p1} = 1$$

$$K_{p2} = 29.17 \frac{\text{m}^3 \text{C}}{\text{kg}}$$

En el capítulo siguiente se diseña un sistema de control para este proceso.

Los modelos dinámicos se analizan con base en los siguientes criterios:

- ESTABILIDAD²⁻⁴

Este criterio está relacionado directamente con las funciones de transferencia. La estabilidad es la propiedad que tiene un sistema de alcanzar un nuevo estado estacionario después de haber sido perturbado. Para saber si un sistema es estable o no, se analiza la ecuación de la función de transferencia.

La respuesta de salida de un sistema se representa generalmente por la siguiente ecuación:

$$\bar{y}(s) = G(s)\bar{f}(s) \quad (1.66)$$

donde:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad (1.67)$$

$$\bar{f}(s) = \frac{q(s)}{p(s)} \quad (1.68)$$

La función de transferencia es una relación de polinomios. A las raíces del polinomio Q(s) se les conoce como ceros, y a las raíces del polinomio P(s) se les conoce como polos. Al polinomio P(s) se le denomina como polinomio característico.

La expresión general de un polinomio es:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (1.69)$$

Sustituyendo en la ecuación (1.66) las expresiones (1.67) y (1.68) se encuentra:

$$\bar{y}(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \frac{q(s)}{p(s)} \quad (1.70)$$

Si se conoce dónde están localizados los polos de un sistema, se puede determinar si éste es estable o no a una variable de entrada en particular.

Suponiendo que la función de transferencia de un sistema esté dada por la siguiente ecuación:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{(s - P_1)(s - P_2)(s - P_3)^m (s - P_4)(s - P_4^*)(s - P_5)} \quad (1.71)$$

donde P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 son las raíces del polinomio $P(s)$ localizadas en diferentes puntos del plano complejo (ver figura (1.7)).

La expansión en fracciones parciales de la ecuación (1.71) queda expresada por:

$$G(s) = \frac{C_1}{s - P_1} + \frac{C_2}{s - P_2} + \left[\frac{C_{31}}{s - P_3} + \frac{C_{32}}{(s - P_3)^2} + \dots + \frac{C_{3m}}{(s - P_3)^m} \right] + \frac{C_4}{s - P_4} + \frac{C_4^*}{s - P_4^*} + \frac{C_5}{s - P_5} \quad (1.72)$$

A partir de la localización de los polos, se hace el siguiente análisis:

1. Polos reales y distintos (P_1 y P_2)

Aplicando la antitransformada a las expresiones donde están incluidas P_1 y P_2 , se obtiene:

$$C_1 e^{P_1 t} \quad (1.73)$$

$$C_2 e^{P_2 t} \quad (1.74)$$

Si $P_1 < 0$ el valor de la respuesta tiende a cero conforme el tiempo tiende a infinito, tal y como se muestra en la figura (1.8a). Si $P_2 > 0$ el valor de la respuesta tiende a infinito conforme el tiempo tiende a infinito, ver figura (1.8b).

Por lo tanto, los polos distintos localizados en el plano real negativo provocan que la respuesta del sistema tienda a cero, considerándose como una respuesta estable, mientras que los polos localizados en el plano real positivo provocan que la respuesta del sistema crezca hasta infinito, que es una respuesta inestable.

2. Polos repetidos (P_3)

Tomando la antitransformada de los términos que incluyen a P_3 , se encuentra la siguiente expresión:

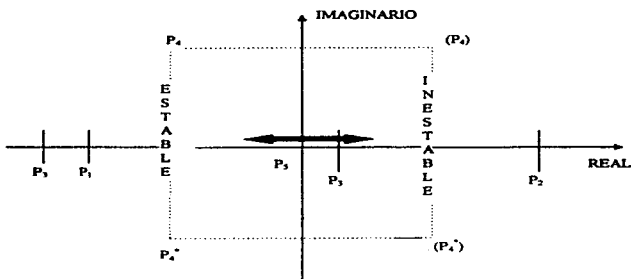
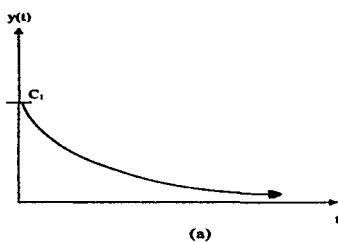
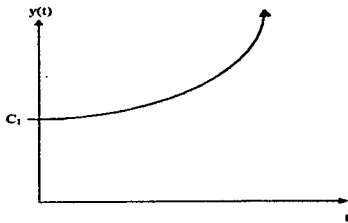


Figura 1.7. Plano complejo.

$$\left[C_{31} + \frac{C_{32}}{1!}t + \frac{C_{33}}{2!}t^2 + \dots + \frac{C_{3m}}{(m-1)!}t^{m-1} \right] e^{P_3 t} \quad (1.75)$$



(a)



(b)

Figura 1.8. (a) Decaimiento exponencial. (b) Crecimiento exponencial

El término entre paréntesis cuadrados crece infinitamente conforme crece el tiempo. El comportamiento del término exponencial depende del valor del polo P_3 .

Si $P_3 > 0$ entonces $e^{P_3 t} \rightarrow \infty$ conforme $t \rightarrow \infty$ (Inestable)

Si $P_3 < 0$ entonces $e^{P_3 t} \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$ (Estable)

Si $P_3 = 0$ entonces $e^{P_3 t} \rightarrow 1$ para cualquier valor de t (Críticamente estable)

3. Polos conjugados (P_4 y P_4^*)

Es importante mencionar que los polos complejos siempre aparecen en pares conjugados, nunca solos. En este caso:

$$P_4 = \alpha + i\beta \quad (1.76)$$

$$P_4^* = \alpha - i\beta \quad (1.77)$$

El comportamiento del sistema en función del tiempo cuando existen polos conjugados se representa por la siguiente expresión:

$$e^{\alpha t} \text{sen}(\beta t + \phi) \quad (1.78)$$

El $\text{sen}(\beta t + \phi)$ es una función periódica y oscilante, mientras que el comportamiento de $e^{\alpha t}$ depende del valor de la parte real α . Entonces:

Si $\alpha > 0$, entonces $e^{\alpha t} \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$, y $e^{\alpha t} \text{sen}(\beta t + \phi)$ crece infinitamente de una manera oscilante, ver figura (1.9a). (Inestable).

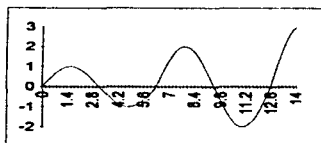
Si $\alpha < 0$, entonces $e^{\alpha t} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, y $e^{\alpha t} \text{sen}(\beta t + \phi)$ tiende a cero de una manera oscilante con decremento de amplitud, ver figura (1.9b). (Estable).

Si $\alpha = 0$, entonces $e^{\alpha t} = 1$ para cualquier valor de t , y $e^{\alpha t} \text{sen}(\beta t + \phi) = \text{sen}(\beta t + \phi)$, con oscilación continua con amplitud constante, ver figura (1.9c). (Se considera estable si la oscilación se encuentra dentro de un intervalo aceptado como tal).

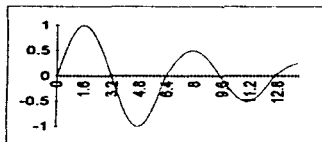
4. Polos igual a cero (P_5)

Si $P_5 = 0$ entonces se tiene la siguiente expresión:

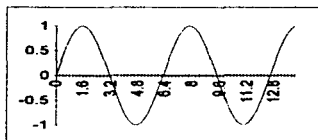
$$\frac{C_5}{s} \quad (1.79)$$



(a)



(b)



(c)

Figura 1.9. Oscilaciones con (a) crecimiento, (b) decaimiento, y (c) con amplitud constante

Aplicando la antitransformada, el valor de la respuesta es igual a C_3 para cualquier tiempo, por lo tanto el sistema es estable.

Con este análisis se concluye que solamente con conocer el polinomio y sus tipos de raíces, se puede decir si el sistema es estable o inestable. Por ejemplo,

$$\bar{y} = \frac{2}{(s+8)} \quad (1.80)$$

raíces: $s = -8$, por lo tanto el sistema es estable.

Si al menos una raíz del polinomio característico se ubica del lado derecho del plano complejo, el sistema es inestable.

- SENSIBILIDAD^{2,4}

Este criterio está relacionado directamente con el valor de la ganancia, K_c , la sensibilidad se involucra con el efecto de la perturbación en el sistema. Anteriormente se dio la definición de la ganancia.

En el capítulo 3 se muestra el comportamiento de un sistema a diferentes valores de K_c .

- DINÁMICA^{2,4}

El valor de la constante tiempo (τ_p) indica que tan dinámico es un proceso, es decir que tan rápido alcanza un nuevo estado estacionario después de haber sido perturbado.

En el capítulo 3 se hace un análisis dinámico de los sistemas.

- OSCILACIÓN^{2,4}

Los sistemas de segundo orden están representados por la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{K_p}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \quad (1.81)$$

donde ξ es el "factor de amortiguamiento" relacionado directamente con la oscilación de los sistemas. Para la ecuación (1.72) el polinomio característico es:

$$P(s) = \tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1 \quad (1.82)$$

este polinomio es de segundo orden y tiene las siguientes raíces:

$$P_1 = \frac{-\xi}{\tau} + \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \quad (1.83)$$

$$P_2 = \frac{-\xi}{\tau} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \quad (1.84)$$

A partir de las expresiones (1.83) y (1.84) se observa que cuando:

$\xi > 1$: existen 2 raíces reales y distintas (Respuesta no oscilante o amortiguada).

$\xi = 1$: existen 2 raíces reales e iguales (Respuesta críticamente amortiguada).

$\xi < 1$: existen 2 raíces imaginarias conjugadas (Respuesta oscilante).

A medida que ξ aumenta la respuesta dinámica del sistema se hace más suave, y a medida que va disminuyendo la respuesta es más oscilante.

En el capítulo 3 se estudia el caso de un sistema oscilante.

En el capítulo siguiente se diseña un sistema de control para el proceso de transferencia de calor en estudio.

CAPÍTULO 2

DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL SIMPLE “HACIA ATRÁS” APLICADO A UN CAMBIADOR DE CALOR

El objetivo del sistema de control de procesos es utilizar a la variable manipulada para mantener a la variable controlada o medible en el valor de operación deseado (*set point*) a pesar de las perturbaciones. Existen diferentes estrategias de control. Sin embargo, para fines didácticos resulta conveniente la estrategia del control “hacia atrás”^{2,3,13}.

En el control “hacia atrás” la variable medible (y) es observada a la salida del sistema por un dispositivo de medición. La señal de esta lectura (y_m) se alimenta a un controlador. Este dispositivo compara dicha lectura con un valor predeterminado (*set point*, y_{sp}) calculando un error de desviación ($e = y_{sp} - y_m$). En función del error, el controlador envía una señal (neumática o electrónica, c) a un elemento final de control encargado de modificar las condiciones de operación de la variable manipulada (m). En la figura (2.1) se muestra el sistema de control “hacia atrás”.

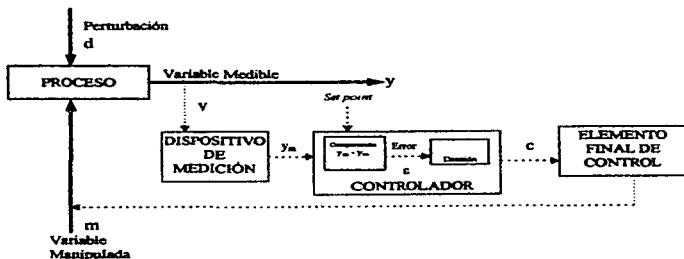


Figura 2.1 Sistema de control

Por lo tanto, en todo sistema de control se realizan las siguientes operaciones básicas:

- Medición
- Comparación
- Decisión
- Acción de control

Cada equipo dentro del lazo de control se representa por un modelo matemático, es decir, por una ecuación diferencial en función del tiempo. Si a estas expresiones se les aplica el procedimiento explicado en el capítulo 1, se establecen las funciones de transferencia respectivas.

En la figura (2.2) se muestra que el proceso tiene dos funciones de transferencia, una que se asocia a la variable manipulada (\bar{m}), G_p , y otra a la perturbación (\bar{d}), G_d .



Figura 2.2

La variable medible se determina a través de dispositivos de medición, por ejemplo, un termopar o un medidor de flujo. Estos dispositivos de medición son representados por una función de transferencia G_m , tal y como se muestra en la figura (2.3).

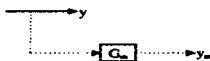


Figura 2.3

La función de transferencia del controlador, G_c , es el resultado de la comparación entre el valor del *set point* y del valor de la medición. Esto se observa en la figura 2.4.

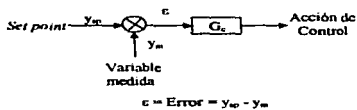


Figura 2.4

Por último, la función de transferencia del elemento final de control, (por ejemplo una válvula o un motor de velocidad constante), está representada por G_r , como se presenta en la figura (2.5).

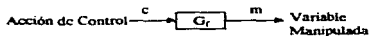


Figura 2.5

Conjuntando los diagramas de las figuras (2.2), (2.3), (2.4) y (2.5) se encuentra el diagrama del lazo de control hacia atrás mostrado en la figura (2.6).

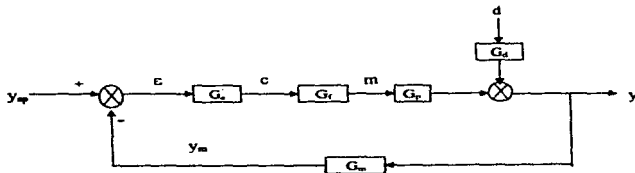


Figura 2.6

El diagrama de la figura (2.6) se representa por la ecuación siguiente:

$$\bar{y} = \frac{G_c G_r G_p}{1 + G_c G_r G_p G_m} \bar{y}_w + \frac{G_d}{1 + G_c G_r G_p G_m} \bar{d} \quad (2.1)$$

La deducción de esta ecuación se encuentra en el Apéndice 2.

El primer término de la ecuación se conoce como problema servo², es decir, la función de transferencia asociada al *set point* representada por la ecuación siguiente:

$$G_{sp} = \frac{\bar{y}}{y_{sp}} = \frac{G_c G_r G_p}{1 + G_c G_r G_p G_m} \quad (2.2)$$

La segunda función de transferencia se conoce como problema regulador², esto es, la función asociada a la perturbación, se representa por la siguiente ecuación:

$$G_D = \frac{\bar{y}}{d} = \frac{G_d}{1 + G_c G_r G_p G_m} \quad (2.3)$$

Es importante señalar que el polinomio que es el denominador en G_{sp} y G_D (polinomio característico) debe ser idéntico en ambos casos.

Para conocer la respuesta de un proceso con un sistema de control se requieren las funciones de transferencia de cada constituyente del lazo.

A continuación se hace una descripción de estas funciones:

- Función de transferencia del controlador (G_c).

Existen tres tipos de controladores "hacia atrás"^{2,3,13}:

1. Controlador proporcional (P). Este es el modelo de controlador más simple. La ecuación con que se describe su funcionamiento es:

$$m(t) = m_s + K_c \varepsilon(t) \quad (2.4)$$

donde:

$m(t)$ = señal de salida del controlador.

m_s = señal estacionaria del controlador (valor base).

K_c = ganancia del controlador.

En la ecuación (2.4) se observa que la salida del controlador es proporcional al error entre el *set point* y la variable que se controla, la constante de proporcionalidad es la ganancia del controlador, K_c . La ganancia o sensibilidad del controlador es un parámetro de ajuste que permite sintonizar la señal de salida del controlador cuando se presenta un cambio en el error.

Estos controladores tienen la ventaja de contar solamente con un parámetro de ajuste, K_c . Sin embargo, adolecen de una gran desventaja, ya que presentan cierta desviación en la variable medible. Esta desviación es llamada *offset* o compensación.

El *offset* es la diferencia entre el valor del *set point* y el valor de la variable que se controla, cuando el sistema alcanza el estado estacionario. El *offset* disminuye conforme aumenta el valor de K_c . Sin embargo, para la mayoría de los procesos existe un valor máximo de K_c , después de este valor el proceso se hace inestable. Otra desventaja de estos controladores es que no son muy dinámicos.

Para obtener la función de transferencia del controlador proporcional, la ecuación (2.4) se establece en términos de variables de desviación y se aplica la transformada de Laplace. Así, resulta:

$$G_c = K_c \quad (2.5)$$

2. Controlador proporcional-integral (PI). Este tipo de controlador se utiliza cuando se desea eliminar la compensación y obtener respuestas más dinámicas.

En este modelo se añade un término adicional al controlador proporcional. Este elemento se conoce como la acción integral o de reajuste. Éste se representa a través de la siguiente ecuación:

$$m(t) = m_s + K_c e(t) + \frac{K_c}{\tau_i} \int e(t) dt \quad (2.6)$$

donde τ_i = tiempo de integración o reajuste. Por lo tanto, el controlador PI tiene dos parámetros de ajuste, K_c y τ_i .

El controlador proporcional - integral tiene la desventaja de incrementar en uno el orden de los sistemas. Pero elimina los efectos de compensación y provoca que el sistema sea muy dinámico.

La función de transferencia de este controlador es:

$$G_c = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) \quad (2.7)$$

3. Controlador proporcional-integral-derivativo (PID). Para permitir al controlador el adelantarse al comportamiento del sistema, se añade un término derivativo. Este término debe interpretarse como un agente que efectúa una extrapolación del comportamiento del sistema adelantándose en el tiempo. Se representa mediante la siguiente expresión:

$$m(t) = m_s + K_c \varepsilon(t) + \frac{K_c}{\tau_i} \int \varepsilon(t) dt + K_c \tau_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (2.8)$$

Este controlador tiene la siguiente función de transferencia:

$$G_c = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_D s \right) \quad (2.9)$$

• Función de transferencia del elemento final de control (G_f)

Los elementos finales de control son generalmente válvulas. Existe una gran variedad de válvulas de control^{3,7} tales como las de vástago recíproco (válvulas de globo, válvulas de jaula, válvulas de diafragma), vástago rotatorio (válvulas de mariposa, válvulas de esfera).

La ecuación general que representa a las válvulas es la siguiente:

$$F = K f(x) \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}} \quad (2.10)$$

donde: K : Coeficiente de la válvula. (gpm/(psi)^{1/2})

x : Posición de la válvula (0: cerrado, 1: abierta por completo).

ρ : Gravedad específica. (Adimensional)

ΔP : Caída de presión. (psi)

Las válvulas se clasifican también por el tipo de ecuación que las representa, esto es:

TIPO DE VÁLVULA

ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

Apertura rápida.

$$f(x) = 1 \quad (2.11)$$

Raíz cuadrada

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (2.12)$$

Lineal

$$f(x) = x \quad (2.13)$$

Porcentaje igual

$$f(x) = a^{x-1} \quad (2.14)$$

Hiperbólica

$$f(x) = \frac{1}{\alpha - (\alpha - 1)x} \quad (2.15)$$

donde α es un parámetro de ajuste que se calibra contra datos experimentales.

Para obtener la función de transferencia de una válvula es necesario linealizar la ecuación característica y aplicar la Transformada de Laplace. Por ejemplo, después de linealizar y poner la ecuación (2.12) en función de variables de desviación resulta:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\beta}{2\sqrt{x_s}} x'(t) \quad (2.16)$$

donde:

$$\beta = k \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}} = \text{cte.}$$

Aplicando la transformada de Laplace se obtiene:

$$G_r = \frac{K_r}{s} \quad (2.17)$$

donde:

$$K_r = \frac{\beta}{2\sqrt{x_s}}$$

Para fines didácticos generalmente se supone que $G_r = 1$, esto ayuda a que las ecuaciones del lazo de control no resulten demasiado complejas.

- Función de transferencia del proceso (G_p)

La función de transferencia del proceso resulta después de haber realizado los balances de materia y energía, como se discutió en el capítulo 1.

- Función de transferencia del dispositivo de medición (G_m)

Dentro de los dispositivos de medición¹⁴ se encuentran los sensores de flujo, los sensores de presión y los sensores de temperatura.

La función de transferencia de estos sensores dependen de diferentes factores. Por ejemplo, dentro de los sensores de temperatura se encuentran dos tipos, el primero se muestra en la figura (2.7). En este caso el termómetro está en contacto directo con el fluido, es decir, la temperatura del fluido es igual a la temperatura medida. La función de transferencia para este tipo de sensor es:

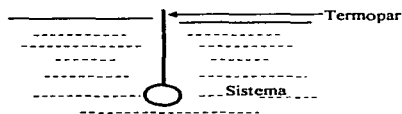


Figura 2.7

$$G_m = \frac{K_m}{\tau_m s + 1} \quad (2.18)$$

Otro tipo de sensor de temperatura es el representado en la figura (2.8).

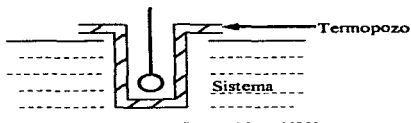


Figura 2.8

Como se observa el termómetro se encuentra en un termopozo, por lo que la temperatura medida es función de un número mayor de interfaces de transferencia, lo que origina un modelo más complejo. Su función de transferencia es:

$$G_m = \frac{K_m}{\tau_m^2 s^2 + 2E_m \tau_m s + 1} \quad (2.19)$$

Al igual que para G_r , generalmente se supone que $G_m = 1$ por la simplicidad que esto representa.

DISEÑO DEL LAZO DE CONTROL

Para los fines de la discusión en este apartado en todos los casos se consideró que $\bar{y}_m = \frac{1}{s}$ y $\bar{d} = \frac{1}{s}$.

Controlador proporcional

Problema servo

Para establecer la ecuación del lazo de control se sustituyen las funciones de transferencia correspondientes a los componentes del lazo en la ecuación (2.2). En este caso las funciones de transferencia son:

$$G_c = K_c \quad (2.20)$$

$$G_f = 1 \quad (2.21)$$

$$G_m = 1 \quad (2.22)$$

$$G_p = \frac{K_{p2}}{\tau_p s + 1} \quad (2.23)$$

La ecuación que resulta después de la sustitución es:

$$\bar{y} = \frac{K_{ap}}{\tau s + 1} \frac{1}{s} \quad (2.24)$$

donde:

$$\tau = \frac{\tau_p}{1 + K_{p2}K_c}; \quad K_{ap} = \frac{K_{p2}K_c}{1 + K_{p2}K_c}$$

- Expansión en fracciones parciales (Ver Apéndice 1):

$$\bar{y} = \frac{K_{ap} / \tau}{s + 1/\tau} \frac{1}{s} = \frac{C_1}{s + 1/\tau} + \frac{C_2}{s} \quad (2.25)$$

$$\frac{K_{ap}}{\tau} = C_1 s + C_2 (s + 1/\tau) \quad (2.26)$$

- Tipo de raíz:

El polinomio característico es de primer orden, y su raíz está localizada en el eje real del plano complejo mostrado en la figura (1.7).

- Evaluación de constantes:

$$C_1: s = -1/\tau \Rightarrow \frac{K_{sp}}{\tau} = C_1(-1/\tau) \therefore C_1 = -K_{sp}$$

$$C_2: s = 0 \Rightarrow \frac{K_{sp}}{\tau} = C_2(1/\tau) \therefore C_2 = K_{sp}$$

- Ecuación resultante en el dominio de Laplace:

$$\bar{y} = \frac{-K_{sp}}{s + 1/\tau} + \frac{K_{sp}}{s} \quad (2.27)$$

- Antitransformada:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-K_{sp}}{s + 1/\tau}\right] = -K_{sp} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (2.28)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_{sp}}{s}\right] = K_{sp} \quad (2.29)$$

- Ecuación resultante en el dominio del tiempo:

$$y'(t) = K_{sp} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \quad (2.30)$$

Controlador proporcional Problema regulador

En este caso las funciones de transferencia son las ecuaciones (2.20), (2.21), (2.22) y la (2.31).

$$G_d = \frac{K_{p1}}{\tau_p s + 1} \quad (2.31)$$

La ecuación que resulta después de la sustitución es:

$$\bar{y} = \frac{K_d}{\tau s + 1} \frac{1}{s} \quad (2.32)$$

donde:

$$\tau = \frac{\tau_p}{1 + K_{p2}K_c}; \quad K_d = \frac{K_{p1}}{1 + K_{p2}K_c}$$

- Expansión en fracciones parciales (Ver Apéndice 1):

$$\bar{y} = \frac{K_d/\tau}{s+1/\tau} \frac{1}{s} = \frac{C_1}{s+1/\tau} + \frac{C_2}{s} \quad (2.33)$$

$$\frac{K_d}{\tau} = C_1 + C_2(s+1/\tau) \quad (2.34)$$

- Tipo de raíz:

El polinomio característico es de primer orden, y su raíz está localizada en el eje real del plano complejo mostrado en la figura (1.7).

- Evaluación de constantes:

$$C_1: s = -1/\tau \Rightarrow \frac{K_d}{\tau} = C_1(-1/\tau) \therefore C_1 = -K_d$$

$$C_2: s = 0 \Rightarrow \frac{K_d}{\tau} = C_2(1/\tau) \therefore C_2 = K_d$$

- Ecuación resultante en el dominio de Laplace:

$$\bar{y} = \frac{-K_d}{s+1/\tau} + \frac{K_d}{s} \quad (2.35)$$

- Antitransformada:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-K_d}{s+1/\tau}\right] = -K_d \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (2.36)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_d}{s}\right] = K_d \quad (2.37)$$

- Ecuación resultante en el dominio del tiempo:

$$y'(t) = K_c \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \quad (2.38)$$

Controlador proporcional integral Problema servo

Las funciones de transferencia son, en este caso, las ecuaciones (2.21), (2.22), (2.23) y la (2.39).

$$G_c = K_c \left(\frac{\tau_i s + 1}{\tau_i s} \right) \quad (2.39)$$

La ecuación resultante después de sustituir las funciones de transferencia en la ecuación (2.2) es:

$$\bar{y} = \frac{\tau_i s + 1}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \frac{1}{s} \quad (2.40)$$

donde:

$$\tau = \sqrt{\frac{\tau_p \tau_i}{K_{p2} K_c}}; \quad \xi = \frac{(1 + K_{p2} K_c) \tau_i}{2\sqrt{K_{p2} K_c} \tau_i \tau_p}$$

- Expansión en fracciones parciales (Ver Apéndice 1):

$$\bar{y} = \frac{1}{\tau^2} (\tau_i s + 1) \frac{1}{s} = \frac{1}{\tau^2} (\tau_i s + 1) \frac{1}{(s+a)(s+b)} \frac{1}{s} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+a} + \frac{C_3}{s+b} \quad (2.41)$$

donde:

$$a = \frac{-\xi}{\tau} + \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau}; \quad b = \frac{-\xi}{\tau} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau}$$

$$\frac{1}{\tau^2} (\tau_i s + 1) = C_1 (s+a)(s+b) + C_2 (s)(s+b) + C_3 (s)(s+a) \quad (2.42)$$

- Tipo de raíz:

Las raíces del polinomio característico de este modelo son "a" y "b". En las ecuaciones de éstas, se observa que cuando $\xi > 1$ el sistema tiene 2 raíces reales y distintas. Cuando $\xi < 1$ el sistema presenta 2 raíces complejas.

1) Raíces reales.

- Evaluación de constantes:

$$C_1: s = 0$$

$$\frac{1}{\tau^2} = C_1(ab) \therefore C_1 = \frac{1}{ab\tau^2}$$

$$C_2: s = -a$$

$$\frac{1}{\tau^2}(-a\tau + 1) = C_2(-a)(-a + b) \therefore C_2 = \frac{-a\tau + 1}{\tau^2(a^2 - ab)}$$

$$C_3: s = -b$$

$$\frac{1}{\tau^2}(-b\tau + 1) = C_3(-b)(-b + a) \therefore C_3 = \frac{-b\tau + 1}{\tau^2(b^2 - ab)}$$

-Ecuación en el dominio de Laplace:

$$\bar{y} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+a} + \frac{C_3}{s+b} \quad (2.43)$$

-Antitransformada:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_1}{s}\right] = C_1 \quad (2.44)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_2}{s+a}\right] = C_2 e^{-at} \quad (2.45)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_3}{s+b}\right] = C_3 e^{-bt} \quad (2.46)$$

- Ecuación resultante en el dominio del tiempo:

$$y'(t) = C_1 + C_2 e^{-at} + C_3 e^{-bt} \quad (2.47)$$

2) Raíces complejas

La ecuación a la cual se aplica la antitransformada directamente² es la (2.40), y se encuentra la siguiente expresión en el dominio del tiempo:

$$y(t) = 1 + \frac{e^{at}}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[\frac{\tau_1}{\tau} \operatorname{sen} \left(\sqrt{1-\xi^2} \frac{t}{\tau} \right) - \operatorname{sen} \left(\sqrt{1-\xi^2} \frac{t}{\tau} + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right] \quad (2.48)$$

Controlador proporcional integral Problema regulador

Las funciones de transferencia que se sustituyen en la ecuación (2.3) son las expresiones (2.21), (2.22), (2.23), (2.31) y la (2.39). La ecuación resultante es:

$$\bar{y} = \frac{\tau_1 s}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \frac{1}{s} \quad (2.49)$$

donde:

$$\tau = \sqrt{\frac{\tau_p \tau_i}{K_d}}, \quad \xi = \frac{K_p K_{F2} \tau_i + 1}{2\sqrt{\frac{\tau_p \tau_i}{K_d}}}$$

- Expansión en fracciones parciales (Ver Apéndice 1):

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{\tau^2}(\tau_1 s)}{s^2 + \frac{2\xi}{\tau}s + \frac{1}{\tau^2}} \frac{1}{s} = \frac{\frac{1}{\tau^2}(\tau_1 s)}{(s+a)(s+b)} \frac{1}{s} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+a} + \frac{C_3}{s+b} \quad (2.50)$$

donde:

$$a = -\frac{\xi}{\tau} + \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau}, \quad b = -\frac{\xi}{\tau} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau}$$

$$\frac{1}{\tau^2}(\tau_1 s) = C_1(s+a)(s+b) + C_2(s)(s+b) + C_3(s)(s+a) \quad (2.51)$$

- Tipo de raíz: Real

- Evaluación de constantes:

$$C_1; s = 0 \\ 0 = C_1(ab) \therefore C_1 = 0$$

$$C_2; s = -a \\ \frac{1}{\tau^2}(-a\tau_1) = C_2(-a)(-a+b) \therefore C_2 = \frac{-a\tau_1}{\tau^2(a^2-ab)}$$

$$C_3; s = -b \\ \frac{1}{\tau^2}(-b\tau_1) = C_3(-b)(-b+a) \therefore C_3 = \frac{-b\tau_1}{\tau^2(b^2-ab)}$$

- Ecuación resultante en el dominio de Laplace:

$$\bar{y} = \frac{C_2}{s+a} + \frac{C_3}{s+b} \quad (2.52)$$

- Antitransformada:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_2}{s+a}\right] = C_2 e^{-at} \quad (2.53)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_3}{s+b}\right] = C_3 e^{-bt} \quad (2.54)$$

- Ecuación resultante en el dominio del tiempo:

$$y'(t) = C_2 e^{-at} + C_3 e^{-bt} \quad (2.55)$$

Controlador Proporcional Integral Derivativo Problema servo

Las funciones de transferencia son las representadas por las ecuaciones (2.21), (2.22), (2.23) y la (2.56).

$$G_c = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right) \quad (2.56)$$

Después de sustituir dichas funciones de transferencia en la ecuación (2.2), se encuentra la siguiente expresión:

$$\bar{y} = \frac{\tau_I \tau_D s^2 + \tau_I s + 1}{\tau^2 s^2 + 2\xi \tau s + 1} \frac{1}{s} \quad (2.57)$$

donde:

$$\tau = \sqrt{\frac{\tau_I (\tau_p + K_c K_{P2} \tau_D)}{K_c K_{P2}}}; \quad \xi = \frac{\tau_I (1 + K_c K_{P2})}{2\sqrt{K_c K_{P2} \tau_I (\tau_p + K_c K_{P2} \tau_D)}}$$

- Expansión en fracciones parciales (Ver Apéndice 1):

$$\bar{y} = \frac{1}{\tau^2} \frac{(\tau_I \tau_D s^2 + \tau_I s + 1)}{s^2 + \frac{2\xi}{\tau} s + \frac{1}{\tau^2}} \frac{1}{s} = \frac{1}{\tau^2} \frac{(\tau_I \tau_D s^2 + \tau_I s + 1)}{(s+a)(s+b)} \frac{1}{s} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+a} + \frac{C_3}{s+b} \quad (2.58)$$

donde:

$$a = \frac{-\xi}{\tau} + \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau}; \quad b = \frac{-\xi}{\tau} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau}$$

$$\frac{1}{\tau^2} (\tau_I \tau_D s^2 + \tau_I s + 1) = C_1 (s+a)(s+b) + C_2 (s)(s+b) + C_3 (s)(s+a) \quad (2.59)$$

-Tipo de raíz:

Las raíces del polinomio característico de este modelo son "a" y "b". En las ecuaciones de estas raíces se observa que cuando $\xi > 1$ el sistema tiene 2 raíces reales y distintas. Cuando $\xi < 1$ el sistema presenta 2 raíces complejas. En este trabajo se estudia solamente el caso del polinomio con 2 raíces reales y distintas, debido a que el sistema con raíces complejas presenta un alto grado de complejidad en cuanto al procedimiento algebraico se refiere.

Raíces reales

- Evaluación de constantes:

$$C_1: s = 0$$

$$\frac{1}{\tau^2} = C_1(ab) \therefore C_1 = \frac{1}{ab\tau^2}$$

$$C_2: s = -a$$

$$\frac{1}{\tau^2} (\tau_1 \tau_D (-a^2) + \tau_1 (-a) + 1) = C_2 (-a)(-a + b) \therefore C_2 = \frac{\tau_1 \tau_D a^2 - \tau_1 a + 1}{\tau^2 (a^2 - ab)}$$

$$C_3: s = -b$$

$$\frac{1}{\tau^2} (\tau_1 \tau_D (-b^2) + \tau_1 (-b) + 1) = C_3 (-b)(-b + a) \therefore C_3 = \frac{\tau_1 \tau_D b^2 - \tau_1 b + 1}{\tau^2 (b^2 - ab)}$$

- Ecuación en el dominio de Laplace:

$$\bar{y} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+a} + \frac{C_3}{s+b} \quad (2.60)$$

- Ecuación en el dominio del tiempo:

$$y'(t) = C_1 + C_2 e^{-at} + C_3 e^{-bt} \quad (2.61)$$

**Controlador Proporcional Integral Derivativo
Problema regulador**

Las funciones de transferencia para este caso, son las expresiones (2.21), (2.22), (2.31) y (2.56). Después de sustituir las funciones de transferencia se encuentra la siguiente ecuación:

$$\bar{y} = \frac{K\tau_1 s}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \frac{1}{s} \quad (2.62)$$

donde:

$$K = \frac{K_{p1}}{K_e K_{p2}}; \quad \tau = \sqrt{\frac{\tau_i(\tau_p + K_e K_{p2} \tau_D)}{K_e K_{p2}}}; \quad \xi = \frac{\tau_i(1 + K_e K_{p2})}{2\sqrt{K_e K_{p2} \tau_i(\tau_p + K_e K_{p2} \tau_D)}}$$

- Expansión en fracciones parciales (Ver Apéndice 1):

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{\tau^2}(K\tau_1 s)}{s^2 + \frac{2\xi}{\tau}s + \frac{1}{\tau^2}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{\frac{1}{\tau^2}(K\tau_1 s)}{(s+a)(s+b)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+a} + \frac{C_3}{s+b} \quad (2.63)$$

donde:

$$a = \frac{-\xi}{\tau} + \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau}; \quad b = \frac{-\xi}{\tau} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau}$$

$$\frac{1}{\tau^2}(K\tau_1 s) = C_1(s+a)(s+b) + C_2(s)(s+b) + C_3(s)(s+a) \quad (2.64)$$

-Tipo de raíz: Real

- Evaluación de constantes:

$$C_1: s = 0$$

$$0 = C_1(ab) \therefore C_1 = 0$$

$$C_2: s = -a$$

$$\frac{1}{\tau^2}(K\tau_1(-a)) = C_2(-a)(-a+b) \therefore C_2 = \frac{-K\tau_1 a}{\tau^2(a^2 - ab)}$$

$$C_3: s = -b$$

$$\frac{1}{\tau^2}(K\tau_1(-b)) = C_3(-b)(-b+a) \therefore C_3 = \frac{-K\tau_1 b}{\tau^2(b^2 - ab)}$$

- Ecuación en el dominio de Laplace:

$$\bar{y} = \frac{C_2}{s+a} + \frac{C_1}{s+b} \quad (2.65)$$

- Ecuación en el dominio del tiempo:

$$y'(t) = C_2 e^{-at} + C_1 e^{-bt} \quad (2.66)$$

En el siguiente capítulo se trazan las gráficas de las respuestas con respecto al tiempo de las diferentes ecuaciones encontradas para cada controlador, y se analiza la influencia de los diferentes parámetros de ajuste.

CAPÍTULO 3

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL COMPORTAMIENTO DE UN CAMBIADOR DE CALOR CON UN LAZO DE CONTROL "HACIA ATRÁS"

En el capítulo 2 se diseñó el lazo de control hacia atrás para un cambiador de calor, es decir, se encontraron las ecuaciones que representan el comportamiento del sistema en estado transitorio cuando existe un lazo de control. En este capítulo se representa gráficamente el comportamiento del sistema para cada tipo de controlador, tanto el problema servo como el regulador.

Controlador Proporcional

El modelo dinámico del cambiador de calor para el problema servo con un controlador proporcional está representado por la expresión (2.30). Los valores de las constantes son los siguientes:

$$\begin{aligned}\tau_p &= 127.39 \text{ s} \\ K_{p2} &= 29.17 \text{ }^\circ\text{C s/kg} \\ y'_{sp}(t) &= 1\end{aligned}$$

En la figura (3.1) se observa el comportamiento del sistema en función del tiempo y de la variación de K_c analizando el problema servo, es decir, estudiando que tan rápido alcanza el sistema el nuevo estado estacionario después de haber sido perturbado.

En esta gráfica se aprecia el problema de la compensación u "offset", el cual disminuye conforme crece la ganancia, es decir, cuando K_c tiende a infinito la compensación tiende a cero. Sin embargo, entre mayor sea el valor de K_c el sistema es más sensible, es decir, es más perturbable. No obstante, el sistema alcanza la estabilidad rápidamente a pesar de no alcanzar el punto de operación deseado.

En este caso es conveniente calibrar el controlador con un valor alto de K_c para que el problema de la compensación se reduzca ya que el sistema es estable.

Por lo que respecta al problema regulador, la ecuación representativa es la (2.38). En este caso las constantes son:

$$K_{p1} = 1$$

$$d^* = 1$$

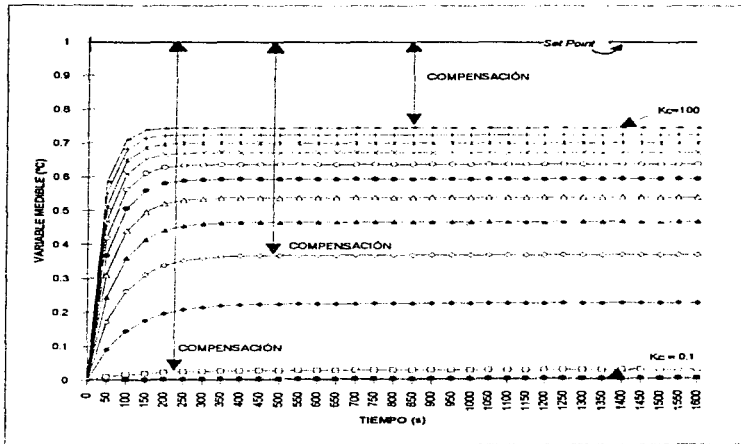


Figura 3.1. Controlador Proporcional. Problema servo.

En la figura (3.2) se observa gráficamente el comportamiento del sistema para el problema regulador. Este problema asume que el *set point* permanece constante en el estado estacionario, el *set point* debe ser cero. Se aprecia también el problema de la compensación.

Conforme el tiempo crece, el valor de la variable medible tiende al valor de K_d , por lo tanto:

$$\text{Compensacion} = y'_{ip} - y_{i,ss} = 0 - K_d = -K_d \quad (3.1)$$

Al igual que en el caso anterior, entre mayor sea el valor de K_c menor es el valor de la compensación.

Para lograr un comportamiento estable y dinámico del sistema con un controlador proporcional lo más conveniente es calibrar éste con una ganancia lo más grande posible, de esta manera se tiene un sistema que alcanza la estabilidad rápidamente y con el efecto de las perturbaciones minimizado.

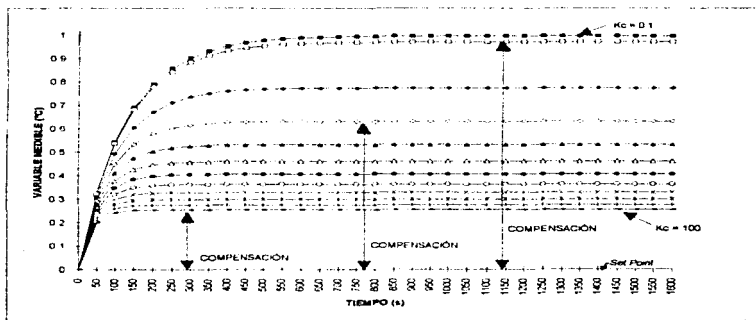


Figura 3.2. Controlador Proporcional. Problema regulador.

Controlador Proporcional - Integral (PI)

El cambiador de calor con un controlador PI para el problema servo, cuando el sistema presenta raíces reales, está representado por la ecuación (2.47).

El objetivo de analizar el problema servo es conocer la rapidez con la cual un sistema alcanza un nuevo estado estacionario después de haber sido perturbado.

En la figura (3.3) está trazada la gráfica que representa al comportamiento dinámico del sistema

cuando se mantiene fija τ_i con un valor de 100 s y cuando se varia K_c . Se observa que el sistema alcanza más rápido la estabilidad conforme aumenta el valor de K_c .

Por otra parte, en la gráfica de la figura (3.4) el valor de τ_i varia manteniendo fijo el valor de K_c en 5. El sistema es más dinámico cuanto menor es τ_i .

En los dos casos, se aprecia que el sistema alcanza el valor del *set point*, lo que demuestra que en un controlador de este tipo no existe el problema de la compensación.

Otra observación importante es que en estas gráficas se puede apreciar el efecto de la parte integral en el comportamiento del sistema. Esta parte integral está representada por la pequeña curva que aparece en el principio de las gráficas.

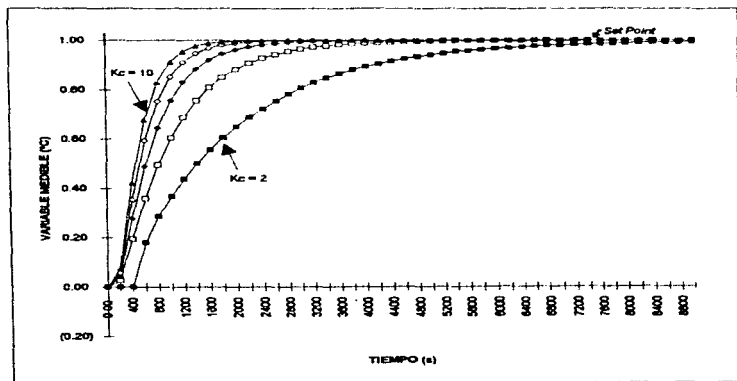
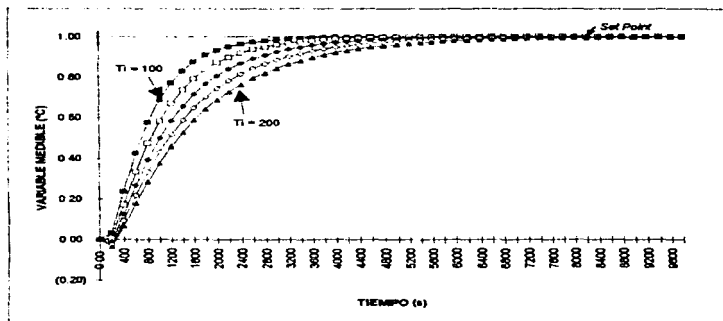


Figura 3.3. Controlador Proporcional-Integral. Problema servo. Variación de K_c .

Como se explicó en el capítulo 2, el polinomio característico de la ecuación (2.40) tiene dos raíces complejas cuando $\xi < 1$, lo que provoca que el sistema oscile.

Figura 3.4. Controlador Proporcional-Integral. Problema servo. Variación de τ_i .

Por ejemplo, en un sistema de segundo orden representado por la siguiente ecuación:

$$\bar{y}(s) = \frac{K_p}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \quad (3.2)$$

que tiene como raíces las siguientes expresiones:

$$p_1 = -\frac{\xi}{\tau} + \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau}; \quad p_2 = -\frac{\xi}{\tau} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau}$$

Si $\xi < 1$ se tienen 2 raíces complejas conjugadas. Si se aplica la antitransformada² a la ecuación (3.2) se encuentra la siguiente expresión:

$$y'(t) = K_p \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi t/\tau} \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \right] \quad (3.3)$$

donde:

$$\omega = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau}; \quad \phi = \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right]$$

Trazando la gráfica de la ecuación (3.3) se observa, en la figura (3.5), que el sistema es oscilante.

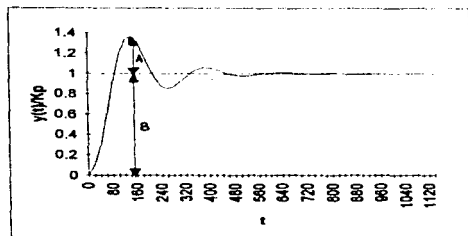


Figura 3.5. Sistema de segundo orden.

A partir de la figura (3.5) se define al *disparo*² u "overshoot" como la relación entre A/B. El disparo es una función de ξ y se calcula mediante la siguiente expresión:

$$Overshoot = \exp \left[\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right] \quad (3.4)$$

Otro parámetro importante es ω , el cual indica el periodo de oscilación.

La ecuación (3.2) representa un sistema de segundo orden sin controlador, a diferencia de la ecuación (2.40) que representa a un sistema de primer orden con un controlador PI.

Después de aplicar el método de la antitransformada cuando existen raíces complejas a la ecuación (2.40), se encuentra la expresión (2.48), las gráficas de esta ecuación están representadas en las figuras (3.6), (3.7), (3.8) y (3.9).

En la figura (3.6) se mantiene fija τ_1 en un valor de 100 s y K_c varía de 15 a 35. En esta gráfica se aprecia que el sistema no es oscilante, sin embargo, si se incrementa el valor de τ_1 a 320 s el comportamiento cambia al de un sistema oscilante (ver figura (3.7)).

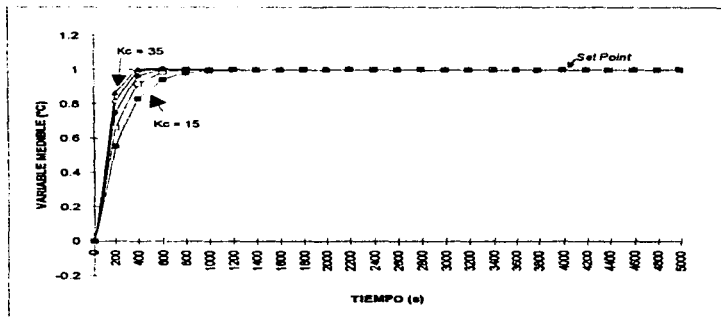


Figura 3.6. Controlador PI. Problema servo. Raíces complejas.

En los dos casos el sistema alcanza más rápido el estado estacionario conforme aumenta el valor de K_c .

Por otra parte, en la figura (3.8) está trazada la gráfica del comportamiento del sistema cuando se varía τ_1 en un rango de 100 s a 180 s manteniéndose fijo el valor de K_c en 15. En esta figura el sistema tiene un disparo inicial, pero inmediatamente alcanza el estado estacionario.

En cambio, si se incrementan los valores de τ_1 de tal manera que se trabaje en un rango de 260 s a 400 s manteniendo K_c en 15, el sistema es oscilante. Esto se observa en la figura (3.9).

El sistema es más dinámico conforme disminuye τ_1 para los dos casos.

Cabe mencionar que cuando se aumenta τ_1 , ξ disminuye lo que origina que el sistema sea más oscilante. Esto demuestra que el comportamiento oscilante de un sistema depende del valor de ξ .

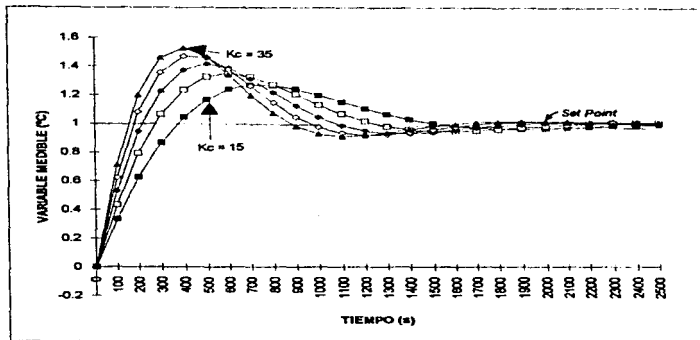


Figura 3.7. Controlador PI. Problema servo. Raíces complejas

La figura (3.10) representa gráficamente el comportamiento del sistema cuando se mantiene fija τ_i en 150 s y se varía K_c . Se aprecia que cuanto mayor sea el valor de K_c , el sistema es menos perturbable puesto que el objetivo de un sistema de control es minimizar el efecto de la perturbación por lo tanto, es conveniente elegir altos valores de K_c .

En la figura (3.11) está trazada la gráfica de la ecuación (2.55) cuando se varía τ_i manteniéndose fija K_c en 50. Se observa que el sistema es menos perturbable cuando se tienen valores pequeños para τ_i y se alcanza rápidamente el estado estacionario.

Con este análisis se concluye que el controlador PI se debe calibrar en un intervalo de 5 a 15 para K_c , y en un intervalo de 100 s a 150 s para τ_i , ya que esto produce en los sistemas comportamientos dinámicos, estables y no oscilantes.

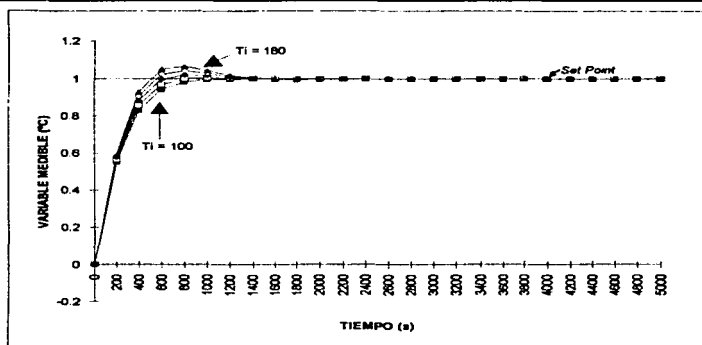


Figura 3.8. Controlador PI. Problema servo. Raíces complejas.

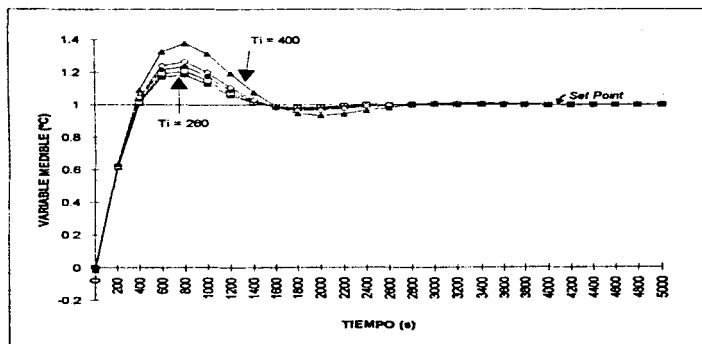


Figura 3.9. Controlador PI. Problema servo. Raíces complejas.

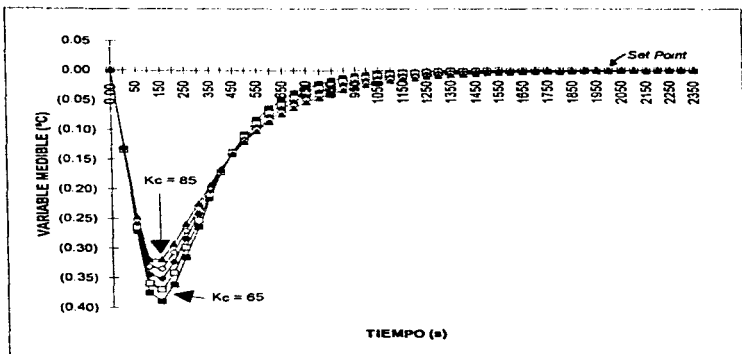


Figura 3.10. Controlador PI. Problema regulador.

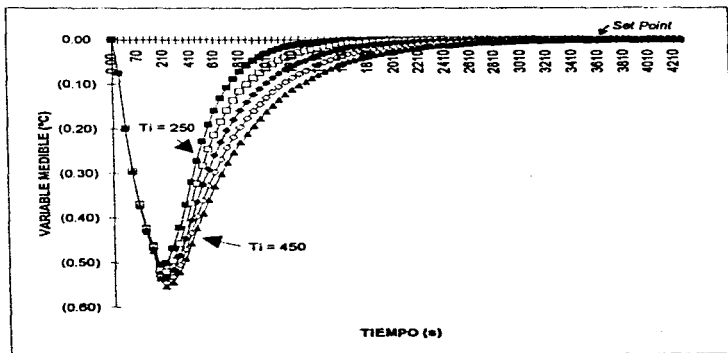


Figura 3.11. Controlador PI. Problema regulador.

Controlador Proporcional - Integral - Derivativo (PID)

El modelo dinámico del cambiador de calor para el problema servo con un controlador PID está representado por la expresión (2.61). En este tipo de controlador se de analiza la influencia de 3 parámetros de ajuste: K_c , τ_i , τ_D . Hasta ahora, se ha visto que K_c se relaciona con la sensibilidad del sistema y τ_i con la dinámica. El parámetro τ_D representa el adelanto al comportamiento del sistema.

En la figura (3.12) se varía el valor de K_c manteniendo fijos τ_i en 100 s y τ_D en 10 s. El sistema alcanza la estabilidad rápidamente entre mayor sea el valor de K_c .

En la figura (3.13) se mantiene fijo el valor de K_c en 5 y el de τ_D en 10 s mientras se varía el valor de τ_i . En esta gráfica se muestra una vez más que el sistema es más dinámico entre menor sea el valor de τ_i .

Por último, la figura (3.14) muestra el comportamiento del sistema cuando se varía τ_D manteniéndose fijas K_c en 5 y τ_i en 150 s. Se observa que la variación de τ_D , de 5 s a 25 s, no afecta la dinámica del sistema.

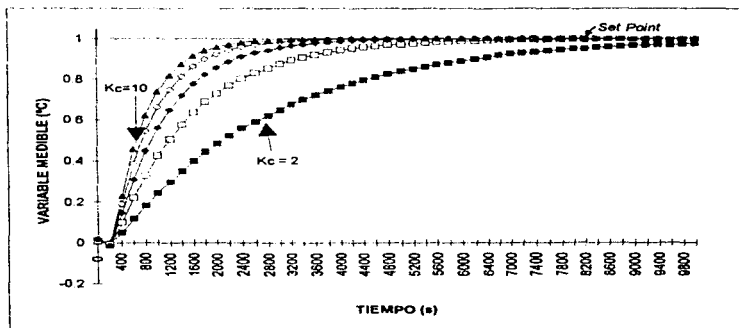


Figura 3.12. Controlador PID. Problema servo.

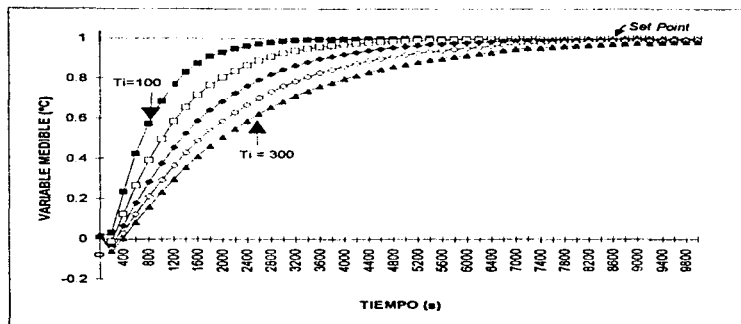


Figura 3.13. Controlador PID. Problema servo.

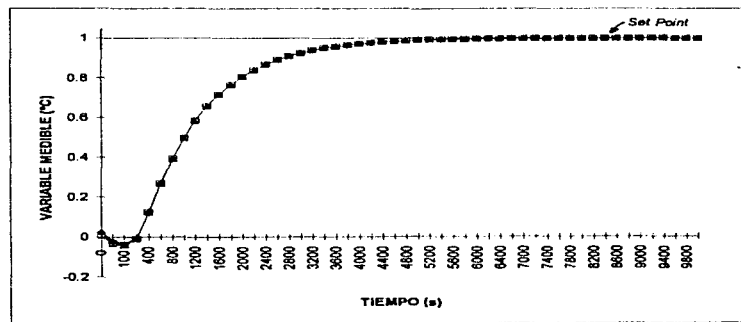


Figura 3.14. Controlador PID. Problema servo.

El problema regulador está representado por la ecuación (2.66). En este caso, se observa la influencia de los 3 parámetros de ajuste en la minimización de la perturbación.

Con respecto a K_c , en la figura (3.15) se observa que el efecto de la perturbación es minimizado cuando el valor de K_c aumenta. Cuando se varía τ_i la perturbación se minimiza cuando mayor sea su valor (figura (3.16)). Sin embargo, el sistema alcanza el estado estacionario lentamente. En la figura (3.17) se observa que la variación de τ_D tampoco influye en el efecto de la perturbación.

En la literatura^{2, 3, 4} se encontró que los valores de K_c y τ_i normalmente están contemplados dentro del intervalo de 0.2 a 500, y de 0.1 min a 50 min respectivamente. Por lo tanto, se hizo un barrido dentro de estos rangos. El valor de τ_i debe ser cercano² al valor de la constante tiempo del proceso (τ_p).

Concluyendo, se aprecia que este sistema alcanza la estabilidad rápidamente con cualquier tipo de controlador. Se sugiere que se seleccione un controlador proporcional - integral ya que no presenta el problema de la compensación y sólo tiene 2 parámetros de ajuste.

En el capítulo siguiente se diseña el modelo dinámico de una red de intercambiadores donde se plantean diferentes estrategias de control.

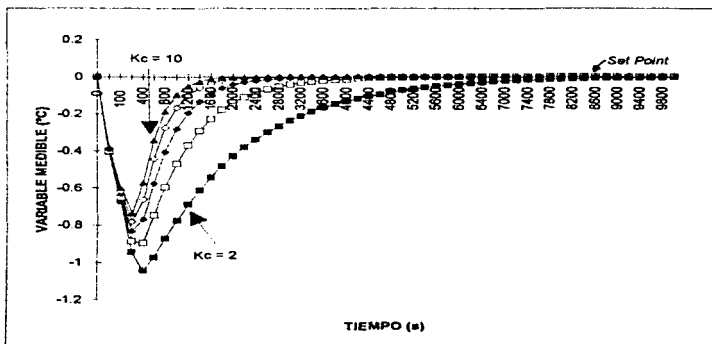


Figura 3.15. Controlador PID. Problema regulador.

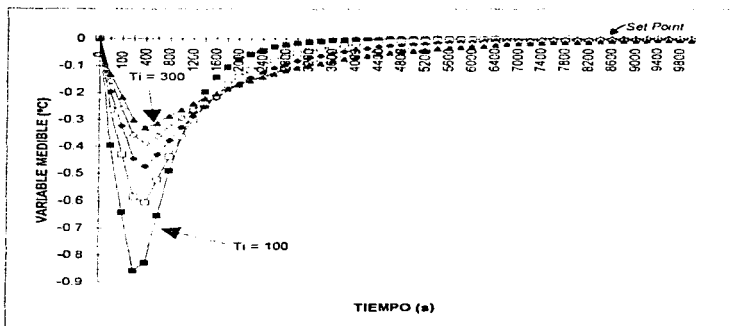


Figura 3.16. Controlador PID. Problema regulador.

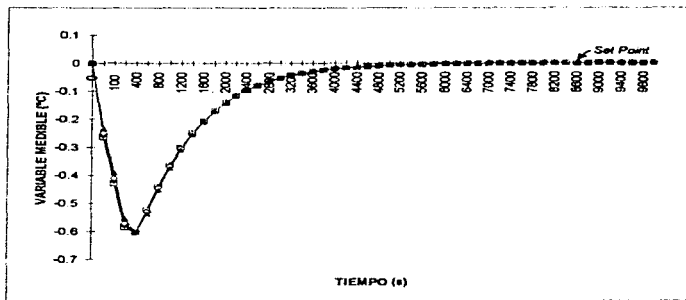


Figura 3.17. Controlador PID. Problema regulador.

CAPÍTULO 4

DISEÑO DEL MODELO DINÁMICO DE UNA RED DE INTERCAMBIADORES DE CALOR

En este capítulo se establece la construcción y análisis del modelo dinámico de una red de intercambiadores de calor.

El proceso de intercambio de calor⁹ que se discute en este apartado, es el que se verifica entre dos corrientes, una de tolueno y otra de benceno. La corriente de tolueno se encuentra a una temperatura de 71 °C y se desea enfriar hasta 38°C, mientras que la corriente de benceno tiene una temperatura de 15.5 °C la cual se calienta hasta 49 °C. Se cuenta con un cambiador de calor proceso-proceso de volumen igual a 2.50 m³. Para alcanzar dichas temperaturas se cuenta con un cambiador de calor contra agua de enfriamiento y otro contra vapor saturado. En las tabla (4.1), (4.2), (4.3) y (4.4) se presentan los datos para el proceso. En la figura (4.1) se representa a la red de intercambiadores.

<i>Propiedad Corriente</i>	1	2	3	4	5	6
Sustancia	Tolueno	Benceno	Tolueno	Benceno	Tolueno	Benceno
Temperatura (°C)	71.00	15.50	60.00	29.50	38.00	49.00
Flujo volumétrico (m ³ /h)	3.66	2.99	3.66	2.99	3.66	2.99
Cp (kcal/kg °C)	0.440	0.419	0.440	0.419	0.440	0.482
Densidad (kg/m ³)	862.20	872.11	862.20	872.11	868.25	860.28

<i>Propiedad Servicio Auxiliar</i>	Agua de Enfriamiento	Vapor Saturado
Rango de temperatura (°C)	18 - 38	110 - 110
Flujo másico (kg/h) máximo	800	60
Presión (psia)	-----	20
Calor latente λ (kcal/kg)	-----	534.44

TABLA 4.3. EQUIPO DE PROCESO			
Equipo	Intercambiador I	Intercambiador II	Intercambiador III
Volumen (m ³)	2.50	1.70	1.49
LMTD (°C)	42.98	70.29	20.98

TABLA 4.4. CARACTERÍSTICAS DE TUBERÍAS
Material: Acero comercial Ced 40
Tamaño nominal (in): 10
Diámetro interno (m): 0.2545
Long. tubo Intercambiador I - Intercambiador II (m): 5
Long. tubo Intercambiador I - Intercambiador III (m): 7

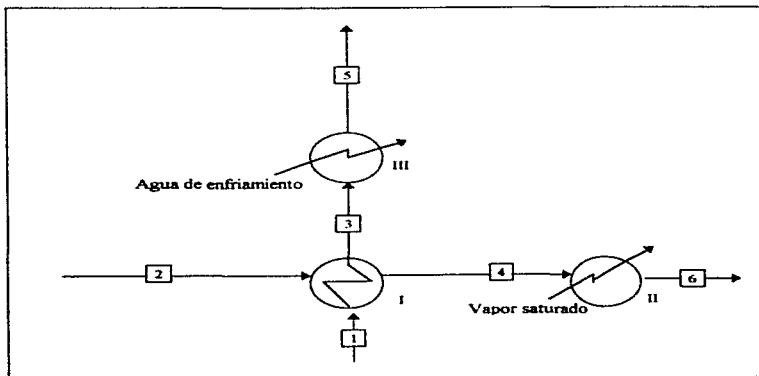


Figura 4.1. Red de Intercambiadores de Calor.

DISEÑO DEL MODELO

A) Cambiador de Calor I (Proceso-Proceso)

I. Por tubos (Corrientes 1 y 3)

- Balance de materia:

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \rho_1 F_1 - \rho_1 F_3 \quad (4.1)$$

De acuerdo con la tabla (4.1) los flujos de las corrientes 1 y 3 son iguales, y considerando que la densidad es constante², se tiene:

$$\therefore \frac{d(\rho V)}{dt} = 0 \quad (4.2)$$

- Balance de energía:

$$\frac{dU}{dt} = F_1 \rho_1 h_1 - F_3 \rho_3 h_3 - Q \quad (4.3)$$

La contribución de calor es negativa ya que el fluido está cediendo calor.

- Relaciones adicionales:

$$U \approx H \quad (4.4)$$

$$H = \rho V h \quad (4.5)$$

$$h = C_p T \quad (4.6)$$

$$Q = k(\text{LMTD}) \quad (4.7)$$

$$\text{LMTD} = \frac{(T_1 - T_4) - (T_3 - T_2)}{\ln \frac{(T_1 - T_4)}{(T_3 - T_2)}} \quad (4.8)$$

- Ecuación diferencial resultante:

$$V_c \frac{dT_3(t)}{dt} = F_1 T_1(t) - F_3 T_3(t) - \frac{k}{\rho C_p} \left[\frac{(T_1(t) - T_4(t)) - (T_3(t) - T_2(t))}{\ln \frac{(T_1(t) - T_4(t))}{(T_3(t) - T_2(t))}} \right] \quad (4.9)$$

• Linealización

La ecuación (4.9) no es lineal, por lo tanto es necesario aplicar el método de la Serie de Taylor¹¹ para linealizar dicha expresión. Ver Apéndice 3.

Después de linealizar la ecuación resulta:

$$V \frac{dT_1(t)}{dt} + (F_1 + AD_1 - AD_2)T_1(t) = (F_1 - AD_1 + AD_2)T_1(t) + (-AD_4 + AD_5)T_4(t) + (-AD_2 + AD_3)T_2(t) + f_{1,s} + f_{2,s} \quad (4.10)$$

donde: $\lambda = \frac{K}{\rho C p}$; $f_{1,s} = \frac{(T_{1,s} - T_{4,s})}{\ln \left(\frac{T_{1,s} - T_{4,s}}{T_{1,s} - T_{2,s}} \right)}$; $f_{2,s} = \frac{(T_{1,s} - T_{2,s})}{\ln \left(\frac{T_{1,s} - T_{4,s}}{T_{1,s} - T_{2,s}} \right)}$;

• Definición de variables de desviación

$$V_1 \frac{dT_1'}{dt} + (F_1 + AD_1 - AD_2)T_1' = (F_1 - AD_1 + AD_2)T_1' + (-AD_4 + AD_5)T_4' + (-AD_2 + AD_3)T_2' \quad (4.11)$$

donde: $T_1' = T_1 - T_{1,s}$; $T_2' = T_2 - T_{2,s}$; $T_3' = T_3 - T_{3,s}$; $T_4' = T_4 - T_{4,s}$.

Simplificando la ecuación y definiendo la constante tiempo y las ganancias se obtiene:

$$\tau_{p1} \frac{dT_1'}{dt} + T_1' = K_{p1}T_1' + K_{p2}T_4' + K_{p3}T_2' \quad (4.12)$$

donde:

$$\tau_{p1} = \frac{V_1}{F_1 + AD_1 - AD_2}$$

$$K_{p1} = \frac{F_1 - AD_1 + AD_2}{F_1 + AD_1 - AD_2}$$

$$K_{p2} = \frac{-AD_2 + AD_3}{F_1 + AD_1 - AD_2}$$

$$K_{p3} = \frac{-AD_4 + AD_5}{F_1 + AD_1 - AD_2}$$

- Aplicación del método de la transformada de Laplace.

$$\bar{T}_3(\tau_{p1}s + 1) = K_{P1}\bar{T}_1 + K_{P2}\bar{T}_4 + K_{P3}\bar{T}_2 \quad (4.13)$$

agrupando términos se tiene:

$$\bar{T}_3 = \frac{K_{P1}}{(\tau_{p1}s + 1)}\bar{T}_1 + \frac{K_{P2}}{(\tau_{p1}s + 1)}\bar{T}_4 + \frac{K_{P3}}{(\tau_{p1}s + 1)}\bar{T}_2 \quad (4.14)$$

Definiendo las funciones de transferencia como:

$$G_1 = \frac{K_{P1}}{(\tau_{p1}s + 1)}, \quad G_2 = \frac{K_{P2}}{(\tau_{p1}s + 1)}, \quad G_3 = \frac{K_{P3}}{(\tau_{p1}s + 1)}$$

se encuentra la siguiente expresión:

$$\bar{T}_3 = G_1\bar{T}_1 + G_2\bar{T}_4 + G_3\bar{T}_2 \quad (4.15)$$

La relación que existe entre la variable que se desea controlar y las otras variables se representa esquemáticamente a través de un diagrama de bloques²⁴ como el que se muestra en la figura (4.2) Estos diagramas son una herramienta útil para el estudio dinámico de los procesos, ya que facilitan el entendimiento de la relación que existe entre las diferentes variables, y permiten identificar a las funciones de transferencia asociadas a los procesos.

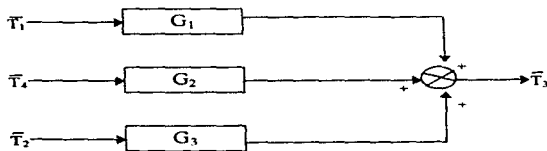


Figura 4.2. Diagrama de Bloques para el Intercambiador I. Por tubos.

II. Por ánuo (Corrientes 2 y 4)

- Balance de materia:

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \rho_2 F_2 - \rho_4 F_4 \quad (4.16)$$

De acuerdo con la tabla (4.1) los flujos de las corrientes 2 y 4 son iguales, y considerando que la densidad es constante², resulta:

$$\therefore \frac{d(\rho V)}{dt} = 0 \quad (4.17)$$

- Balance de energía:

$$\frac{dU}{dt} = F_2 \rho_2 h_2 - F_4 \rho_4 h_4 + Q \quad (4.18)$$

La contribución de calor es positiva ya que el fluido está asimilando el calor.

- Relaciones adicionales:

Las relaciones adicionales utilizadas son las ecuaciones (4.4), (4.5), (4.6), (4.7) y (4.8).

- Ecuación diferencial resultante:

$$V \frac{dT_4(t)}{dt} = F_2 T_2(t) - F_4 T_4(t) + \frac{k}{\rho C_p} \left[\frac{(T_1(t) - T_4(t)) - (T_3(t) - T_2(t))}{\ln \left(\frac{T_1(t) - T_4(t)}{T_3(t) - T_2(t)} \right)} \right] \quad (4.19)$$

- Linealización:

La ecuación (4.19) no es lineal, por lo tanto es necesario aplicar el método de la Serie de Taylor¹¹ para linealizar dicha expresión. Ver Apéndice 3

Después de linealizar la ecuación, resulta:

$$\sqrt{\frac{dT_2(t)}{dt}} + (F_4 + AD_6 - AD_4)T_2(t) = (F_2 - AD_8 + AD_2)T_2(t) + (-AD_7 + AD_1)T_1(t) + (-AD_3 + AD_1)T_1(t) + f_{1,s} + f_{2,s} \quad (4.20)$$

$$\text{donde: } A = \frac{K}{\rho C_p}; \quad f_{1,s} = \frac{(T_{1,s} - T_{4,s})}{\ln\left(\frac{T_{1,s} - T_{4,s}}{T_{1,s} - T_{2,s}}\right)}; \quad f_{2,s} = \frac{(T_{3,s} - T_{2,s})}{\ln\left(\frac{T_{3,s} - T_{4,s}}{T_{3,s} - T_{2,s}}\right)}$$

- Definición de variables de desviación.

$$\sqrt{\frac{dT_2'}{dt}} + (F_4 + AD_6 - AD_4)T_2' = (F_2 - AD_8 + AD_2)T_2' + (-AD_7 + AD_1)T_1' + (-AD_3 + AD_1)T_1' \quad (4.21)$$

donde: $T_1' = T_1 - T_{1,s}$; $T_2' = T_2 - T_{2,s}$; $T_3' = T_3 - T_{3,s}$; $T_4' = T_4 - T_{4,s}$.

Simplificando la ecuación y definiendo la constante tiempo y las ganancias:

$$\tau_{p2} \frac{dT_2'}{dt} + T_2' = K_{p4}T_2' + K_{p3}T_3' + K_{p6}T_1' \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \tau_{p2} &= \frac{V}{F_4 + AD_6 - AD_4} \\ K_{p4} &= \frac{F_2 - AD_8 + AD_2}{F_4 + AD_6 - AD_4} \\ \text{donde: } K_{p3} &= \frac{-AD_7 + AD_1}{F_4 + AD_6 - AD_4} \\ K_{p6} &= \frac{-AD_3 + AD_1}{F_4 + AD_6 - AD_4} \end{aligned}$$

- Aplicación del método de la transformada de Laplace:

$$\overline{T_2}(\tau_{p2}s + 1) = K_{p4}\overline{T_2} + K_{p3}\overline{T_3} + K_{p6}\overline{T_1} \quad (4.23)$$

acomodando términos se encuentra,

$$\overline{T_2} = \frac{K_{p2}}{(\tau_{p2}s + 1)}\overline{T_2} + \frac{K_{p3}}{(\tau_{p2}s + 1)}\overline{T_3} + \frac{K_{p6}}{(\tau_{p2}s + 1)}\overline{T_1} \quad (4.24)$$

definiendo las funciones de transferencia

$$G_4 = \frac{K_{p4}}{(\tau_{p2}s + 1)}; \quad G_5 = \frac{K_{p5}}{(\tau_{p2}s + 1)}; \quad G_6 = \frac{K_{p6}}{(\tau_{p2}s + 1)}$$

se encuentra la siguiente expresión:

$$\bar{T}_4 = G_4 \bar{T}_2 + G_5 \bar{T}_3 + G_6 \bar{T}_1 \quad (4.25)$$

El diagrama de bloques para el primer intercambiador por la parte del ánulo es el mostrado en la figura (4.3).

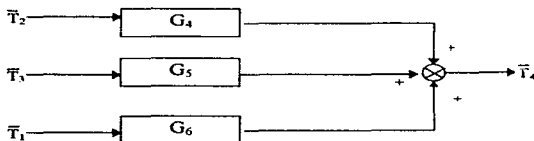


Figura 4.3. Diagrama de Bloques para el Intercambiador I. Por ánulo.

Sustituyendo la ecuación (4.25) en la (4.15) se obtiene la siguiente expresión (Ver Apéndice 4):

$$\bar{T}_3 = \frac{G_1 + G_2 G_6}{1 - G_2 G_5} \bar{T}_1 + \frac{G_3 + G_2 G_4}{1 - G_2 G_5} \bar{T}_2 \quad (4.26)$$

Definiendo funciones de transferencia,

$$G_3 = \frac{G_1 + G_2 G_6}{1 - G_2 G_5}; \quad G_4 = \frac{G_3 + G_2 G_4}{1 - G_2 G_5}$$

se encuentra la siguiente ecuación:

$$\bar{T}_3 = G_3 \bar{T}_1 + G_4 \bar{T}_2 \quad (4.27)$$

Ahora, el diagrama de bloques que representa al intercambiador I por el lado de tubos es la figura (4.4).

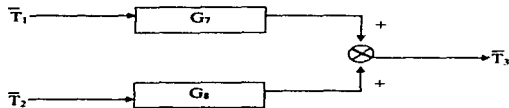


Figura 4.4

Sustituyendo la ecuación (4.15) en la (4.25) se obtiene la siguiente expresión:

$$\bar{T}_4 = \frac{G_8 + G_1 G_3}{1 - G_2 G_3} \bar{T}_1 + \frac{G_4 + G_1 G_2}{1 - G_2 G_3} \bar{T}_2 \quad (4.28)$$

Definiendo funciones de transferencia,

$$G_9 = \frac{G_8 + G_1 G_3}{1 - G_2 G_3}; \quad G_{10} = \frac{G_4 + G_1 G_2}{1 - G_2 G_3}$$

se encuentra la siguiente ecuación:

$$\bar{T}_4 = G_9 \bar{T}_1 + G_{10} \bar{T}_2 \quad (4.29)$$

Finalmente, el diagrama de bloques que representa al intercambiador I por el lado del ánulo es la figura (4.5).

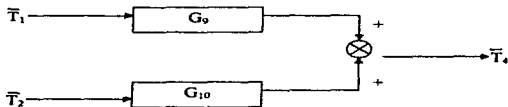


Figura 4.5

B) Cambiador de Calor II (Vapor Saturado).

- Balance de materia:

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \rho_4 F_4 - \rho_6 F_6 \quad (4.30)$$

De acuerdo con la tabla (4.1) los flujos de las corrientes 4 y 6 son iguales, y considerando la densidad constante se encuentra la siguiente expresión:

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = 0 \quad (4.31)$$

- Balance de energía:

$$\frac{dU}{dt} = F_4 \rho_4 h_4 - F_6 \rho_6 h_6 + Q \quad (4.32)$$

- Relaciones adicionales:

Las relaciones adicionales utilizadas son las ecuaciones (4.4), (4.5), (4.6) y la (4.33).

$$Q_{v,s} = W_v \lambda \quad (4.33)$$

- Ecuación diferencial resultante:

$$\frac{dT_a}{dt} = \frac{F_4}{V_a} T_4(t) - \frac{F_6}{V_a} T_a(t) + kW_v(t) \quad (4.34)$$

$$\text{donde: } k = \frac{\lambda}{\rho C_p V}$$

- Linealización:

La ecuación (4.34) es lineal por lo tanto no es necesario utilizar ningún método de linealización.

- Definición de variables de desviación:

$$\frac{dT_a'}{dt} = \left(\frac{F_4}{V_a} \right) T_4' - \left(\frac{F_6}{V_a} \right) T_a' + kW_v' \quad (4.35)$$

Simplificando la ecuación y definiendo la constante tiempo y las ganancias:

$$\tau_{p1} \frac{dT_a'}{dt} + T_a' = K_{p1} T_4' + K_{1p1} W_v' \quad (4.36)$$

$$\tau_{p3} = \frac{V_{II}}{F}$$

$$\text{donde: } K_{p7} = 1$$

$$K_{p8} = \frac{kV_{II}}{F}$$

considerando que $F = F_4 = F_6$.

- Aplicación del método de la transformada de Laplace:

$$\bar{T}_6(\tau_{p3}s + 1) = K_{p7}\bar{T}_4 + K_{p8}\bar{W}_v \quad (4.37)$$

agrupando términos se encuentra:

$$\bar{T}_6 = \frac{K_{p7}}{(\tau_{p3}s + 1)} \bar{T}_4 + \frac{K_{p8}}{(\tau_{p3}s + 1)} \bar{W}_v \quad (4.38)$$

definiendo las funciones de transferencia,

$$G_{11} = \frac{K_{p7}}{\tau_{p3}s + 1}; \quad G_{12} = \frac{K_{p8}}{\tau_{p3}s + 1}$$

se encuentra la siguiente ecuación:

$$\bar{T}_6 = G_{11}\bar{T}_4 + G_{12}\bar{W}_v \quad (4.39)$$

En la figura (4.6) se muestra el diagrama de bloques para el intercambiador II.

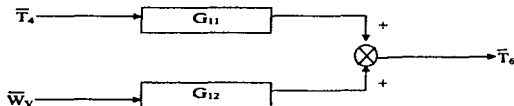


Figura 4.6

C) Cambiador de Calor III (Agua de enfriamiento).

- Balance de materia:

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \rho_1 F_1 - \rho_2 F_2 \quad (4.40)$$

De acuerdo con la tabla (4.1) los flujos de las corrientes 3 y 5 son iguales, y considerando la densidad constante se encuentra la siguiente expresión:

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = 0 \quad (4.41)$$

- Balance de energía

$$\frac{dU}{dt} = F_3 \rho_3 h_3 - F_5 \rho_5 h_5 - Q \quad (4.42)$$

- Relaciones adicionales:

Las relaciones adicionales utilizadas son las ecuaciones (4.4), (4.5), (4.6) y la (4.43).

$$Q_{A E} = C_{p A E} \Delta T_{A E} W_{A E} \quad (4.43)$$

- Ecuación diferencial resultante:

$$\frac{dT_1(t)}{dt} = \frac{F_1}{V_m} T_1(t) - \frac{F_2}{V_m} T_2(t) - kW_{A E}(t) \quad (4.44)$$

$$\text{donde: } k = \frac{C_{p A E} \Delta T_{A E}}{\rho C_p V_m}$$

- Linealización:

La ecuación (4.44) es lineal por lo tanto no es necesario utilizar ningún método de linealización.

- Definición de variables de desviación:

$$\frac{dT_1'}{dt} = \left(\frac{F_1}{V_m} \right) T_1' - \left(\frac{F_2}{V_m} \right) T_2' - kW_{A E}' \quad (4.45)$$

Simplificando la ecuación y definiendo la constante tiempo y las ganancias:

$$\tau_{P4} \frac{dT_1}{dt} + T_1 = K_{P0} T_1 - K_{P10} \bar{W}_{AE} \quad (4.46)$$

$$\tau_{P4} = \frac{V_m}{F}$$

$$\text{donde: } K_{P0} = 1$$

$$K_{P10} = \frac{kV_m}{F}$$

considerando que $F = F_1 = F_2$.

- Aplicación del método de la transformada de Laplace:

$$\bar{T}_1(\tau_{P4}s + 1) = K_{P0} \bar{T}_1 - K_{P10} \bar{W}_{AE} \quad (4.47)$$

agrupando términos se encuentra:

$$\bar{T}_1 = \frac{K_{P0}}{(\tau_{P4}s + 1)} \bar{T}_1 - \frac{K_{P10}}{(\tau_{P4}s + 1)} \bar{W}_{AE} \quad (4.48)$$

definiendo las funciones de transferencia,

$$G_{13} = \frac{K_{P0}}{\tau_{P4}s + 1}; \quad G_{14} = \frac{K_{P10}}{\tau_{P4}s + 1}$$

se encuentra la siguiente ecuación:

$$\bar{T}_1 = G_{13} \bar{T}_1 - G_{14} \bar{W}_{AE} \quad (4.49)$$

En la figura (4.7) se muestra el diagrama de bloques para el intercambiador III.

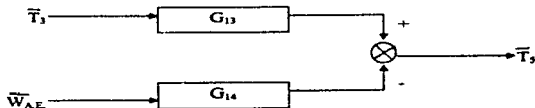


Figura 4.7

Combinando los diagramas de las figuras (4.4), (4.5), (4.6) y (4.7) se obtiene el diagrama de bloques, mostrado en la figura (4.8), que representa a la red de intercambiadores de calor.

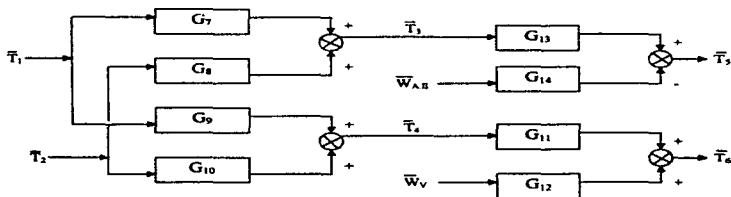


Figura 4.7.

Una vez diseñados los modelos dinámicos de cada uno de los cambiadores de calor, es necesario conocer la relación que tienen entre sí. Esto se obtiene con las funciones de transferencia y los diagramas de bloques. Por ejemplo, de la figura (4.7) se puede observar que:

$$\frac{\bar{T}_3}{\bar{T}_1} = G_7; \quad \frac{\bar{T}_3}{\bar{T}_2} = G_8; \quad \frac{\bar{T}_6}{\bar{T}_1} = G_9; \quad \frac{\bar{T}_6}{\bar{T}_2} = G_{10};$$

$$\frac{\bar{T}_3}{\bar{T}_1} = G_{13}G_7; \quad \frac{\bar{T}_3}{\bar{T}_2} = G_{13}G_8; \quad \frac{\bar{T}_3}{W_{AB}} = G_{14};$$

$$\frac{\bar{T}_6}{\bar{T}_1} = G_{11}G_9; \quad \frac{\bar{T}_6}{\bar{T}_2} = G_{11}G_{10}; \quad \text{y} \quad \frac{\bar{T}_6}{W_V} = G_{12}.$$

Para conocer la ecuación de cada una de estas relaciones en función de las ganancias y de las constantes tiempo, se debe sustituir cada función de transferencia y realizar los pasos algebraicos necesarios. (Ver Apéndice 5). De esta manera, se encuentran las siguientes ecuaciones:

$$1) \quad \frac{\bar{T}_3}{\bar{T}_1} = \frac{(K_1 + K_B) \left(\frac{K_1 \tau_{T2}}{K_1 + K_B} s + 1 \right)}{\tau^2 s^2 + 2\tau_1 \tau s + 1} \quad (4.50)$$

donde:

$$K_I = \frac{K_{p1}}{1 - K_{p2}K_{p3}}; \quad K_{II} = \frac{K_{p2}K_{p3}}{1 - K_{p2}K_{p3}}$$

$$\tau = \sqrt{\frac{\tau_{p1}\tau_{p2}}{1 - K_{p2}K_{p3}}}; \quad \xi = \frac{\tau_{p1} + \tau_{p2}}{2(1 - K_{p2}K_{p3})\sqrt{\frac{\tau_{p1}\tau_{p2}}{1 - K_{p2}K_{p3}}}}$$

$$2) \quad \frac{\bar{T}_1}{\bar{T}_2} = \frac{(K_{III} + K_{IV}) \left(\frac{K_{III}\tau_{p2}}{K_{III} + K_{IV}} s + 1 \right)}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \quad (4.51)$$

donde:

$$K_{III} = \frac{K_{p1}}{1 - K_{p2}K_{p3}}; \quad K_{IV} = \frac{K_{p1}K_{p3}}{1 - K_{p2}K_{p3}}$$

$$3) \quad \frac{\bar{T}_4}{\bar{T}_1} = \frac{(K_V + K_{VI}) \left(\frac{K_V\tau_{p1}}{K_V + K_{VI}} s + 1 \right)}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \quad (4.52)$$

donde:

$$K_V = \frac{K_{p3}}{1 - K_{p2}K_{p3}}; \quad K_{VI} = \frac{K_{p1}K_{p3}}{1 - K_{p2}K_{p3}}$$

$$4) \quad \frac{\bar{T}_4}{\bar{T}_2} = \frac{(K_{VII} + K_{VIII}) \left(\frac{K_{VII}\tau_{p1}}{K_{VII} + K_{VIII}} s + 1 \right)}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \quad (4.53)$$

donde:

$$K_V = \frac{K_{p3}}{1 - K_{p2}K_{p3}}; \quad K_{VI} = \frac{K_{p1}K_{p3}}{1 - K_{p2}K_{p3}}$$

$$5) \quad \frac{\bar{T}_5}{\bar{T}_1} = \frac{K_{p9}(K_I + K_{II}) \left(\frac{K_I \tau_{p2}}{K_I + K_{II}} s + 1 \right)}{(\tau_{p4}s + 1) \tau^2 s^2 + 2\xi \tau s + 1} \quad (4.54)$$

$$6) \quad \frac{\bar{T}_5}{\bar{T}_2} = \frac{K_{p9}(K_{III} + K_{IV}) \left(\frac{K_{III} \tau_{p2}}{K_{III} + K_{IV}} s + 1 \right)}{(\tau_{p4}s + 1) \tau^2 s^2 + 2\xi \tau s + 1} \quad (4.55)$$

$$7) \quad \frac{\bar{T}_5}{W_{AE}} = \frac{K_{p10}}{\tau_{p4}s + 1} \quad (4.56)$$

$$8) \quad \frac{\bar{T}_6}{\bar{T}_1} = \frac{K_{p7}(K_V + K_{VI}) \left(\frac{K_V \tau_{p1}}{K_V + K_{VI}} s + 1 \right)}{(\tau_{p3}s + 1) \tau^2 s^2 + 2\xi \tau s + 1} \quad (4.57)$$

$$9) \quad \frac{\bar{T}_6}{\bar{T}_2} = \frac{K_{p7}(K_{VII} + K_{VIII}) \left(\frac{K_{VII} \tau_{p1}}{K_{VII} + K_{VIII}} s + 1 \right)}{(\tau_{p3}s + 1) \tau^2 s^2 + 2\xi \tau s + 1} \quad (4.58)$$

$$10) \quad \frac{\bar{T}_6}{W_V} = \frac{K_{p8}}{\tau_{p3}s + 1} \quad (4.59)$$

Los valores numéricos de los parámetros son los siguientes (Ver Apéndice 6):

• Constantes tiempo

$$\tau_{p1} = 0.607 \text{ h}$$

$$\tau_{p3} = 0.569 \text{ h}$$

$$\tau_{p2} = 0.716 \text{ h}$$

$$\tau_{p4} = 0.383 \text{ h}$$

• Ganancias

$$K_{p1} = 0.772$$

$$K_{p3} = 0.111$$

$$K_{p7} = 0.136$$

$$K_{p7} = 1$$

$$K_{p9} = 1$$

$$K_{p2} = 0.117$$

$$K_{p4} = 0.721$$

$$K_{p6} = 0.143$$

$$K_{p8} = 0.431 \text{ } ^\circ\text{C h/kg}$$

$$K_{p10} = 0.026 \text{ } ^\circ\text{C h/kg}$$

- $\tau = 0.665$ h
- $\xi = 1.011$
- Relaciones entre las ganancias

$$\begin{array}{ll} K_I = 0.784 & K_{II} = 0.017 \\ K_{III} = 0.113 & K_{IV} = 0.086 \\ K_V = 0.145 & K_{VI} = 0.107 \\ K_{VII} = 0.733 & K_{VIII} = 0.015 \end{array}$$

Antes de diseñar un lazo de control para este sistema, es necesario conocer la estabilidad del mismo. Se analiza cada intercambiador por separado.

- A) Cambiador de Calor I.
I. Por tubos

De la ecuación (4.27) se observa que la temperatura de salida de la corriente 3, T_3 , es función de las temperaturas T_1 y T_2 .

La ecuación (4.50) muestra la relación entre T_3 y T_1 , y después de sustituir los diferentes valores de los parámetros y considerando que $T_1 = 1/s$, se obtiene la siguiente expresión:

$$\bar{T}_3 = \frac{1.8112(0.7019s+1)}{s^2 + 3.0429s + 2.2647} \frac{1}{s} \quad (4.60)$$

- Raíces del polinomio característico:

$$\begin{array}{l} S_1 = -1.2976 \\ S_2 = -1.7453 \end{array}$$

- Expansión en fracciones parciales:

$$\bar{T}_3 = \frac{1.8112(0.7019s+1)}{(s+1.2976)(s+1.7453)} \frac{1}{s} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+1.2976} + \frac{C_3}{s+1.7453} \quad (4.61)$$

$$1.8112[0.7019s+1] = C_1(s+1.2976)(s+1.7453) + C_2(s)(s+1.7453) + C_3(s)(s+1.2976) \quad (4.62)$$

- Evaluación de constantes:

$$C_1: s = 0 \Rightarrow C_1 = 0.7997$$

$$C_2: s = -1.2976 \Rightarrow C_2 = -0.2779$$

$$C_1: s = -1.7453 \Rightarrow C_1 = -0.5218$$

- Ecuación resultante en el dominio del tiempo:

$$T_1 = 0.7997 - 0.2779e^{-1.2976t} - 0.5218e^{-1.7453t} \quad (4.63)$$

En la figura (4.9) se muestra el comportamiento de T_1 en función de T_1 .

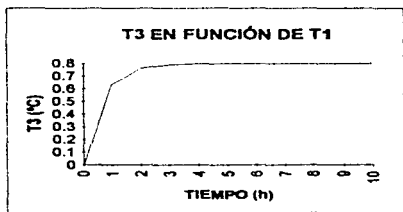


Figura 4.9.

La ecuación (4.51) muestra la relación entre T_1 y T_2 , y después de sustituir los diferentes valores de los parámetros y postulando que $T_2 = 1/s$, se obtiene la ecuación (4.64) la cual tiene el mismo polinomio característico que la (4.60), por lo tanto tienen las mismas raíces.

$$\bar{T}_1 = \frac{0.4532(0.4251s+1)}{(s+1.2976)(s+1.7453)} \frac{1}{s} \quad (4.64)$$

- Expansión en fracciones parciales:

$$0.4532[0.4251s+1] = C_1(s+1.2976)(s+1.7453) + C_2(s+1.7453) + C_3(s+1.2976) \quad (4.65)$$

- Evaluación de constantes:

$$C_1: s = 0 \Rightarrow C_1 = 0.2001$$

$$C_2: s = -1.2976 \Rightarrow C_2 = -0.3498$$

$$C_3: s = -1.7453 \Rightarrow C_3 = 0.1497$$

- Ecuación resultante en el dominio del tiempo:

$$T_3 = 0.2001 - 0.3498e^{-1.2976t} + 0.1497e^{-1.7453t} \quad (4.66)$$

En la figura (4.10) se muestra el comportamiento de T_3 en función de T_2 .

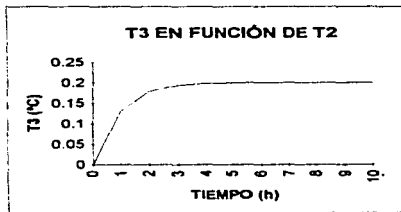


Figura 4.10.

De este análisis se concluye que la temperatura que tiene mayor influencia en la corriente 3, es la de la corriente 1.

II. Por ánuo.

A partir de la ecuación (4.29) se observa que la temperatura de salida de la corriente 4 (T_4) es función de las temperaturas T_1 y T_2 .

La ecuación (4.52) muestra la relación entre T_4 y T_1 , y sustituyendo valores se obtiene:

$$\bar{T}_4 = \frac{0.5832(0.3425s + 1)}{(s + 1.2976)(s + 1.7453)} \frac{1}{s} \quad (4.67)$$

- Expansión en fracciones parciales:

$$0.5832[0.3425s + 1] = C_1(s + 1.2976)(s + 1.7453) + C_2(s)(s + 1.7453) + C_3(s)(s + 1.2976) \quad (4.68)$$

- Evaluación de constantes:

$$C_1: s = 0 \Rightarrow C_1 = 0.2575$$

$$C_2: s = -1.2976 \Rightarrow C_2 = -0.5577$$

$$C_3: s = -1.7453 \Rightarrow C_3 = 0.3002$$

- Ecuación resultante en el dominio del tiempo:

$$T_4 = 0.2575 - 0.5577e^{-1.2976t} + 0.3002e^{-1.7453t} \quad (4.69)$$

En la figura (4.11) se muestra el comportamiento de T_4 en función de T_1 .

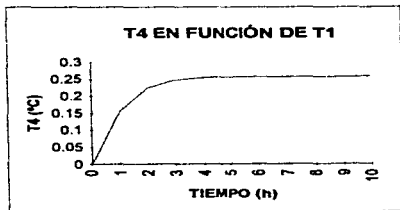


Figura 4.11.

La ecuación (4.53) muestra la relación entre T_4 y T_2 , y sustituyendo valores se obtiene:

$$\bar{T}_4 = \frac{1.691(0.012s + 1)}{(s + 1.2976)(s + 1.7453)} \frac{1}{s} \quad (4.70)$$

- Expansión en fracciones parciales:

$$1.691[0.012s + 1] = C_1(s + 1.2976)(s + 1.7453) + C_2(s)(s + 1.7453) + C_3(s)(s + 1.2976) \quad (4.71)$$

- Evaluación de constantes:

$$C_1; s = 0 \Rightarrow C_1 = 0.7470$$

$$C_2; s = -1.2976 \Rightarrow C_2 = -2.8660$$

$$C_3; s = -1.7453 \Rightarrow C_3 = 2.1190$$

- Ecuación resultante en el dominio del tiempo:

$$T_4 = 0.7470 - 2.8660e^{-1.2976t} + 2.1190e^{-1.7453t} \quad (4.72)$$

En la figura (4.12) se muestra el comportamiento de T_4 en función de T_2 .

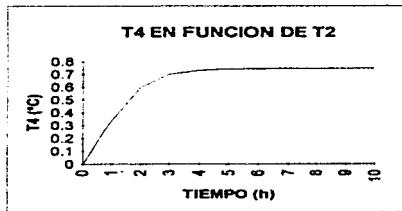


Figura 4.12.

Se concluye que la temperatura que tiene mayor influencia en la corriente 4 es la de la corriente 2.

B) Cambiador de calor II.

De la ecuación (4.39) se observa que la temperatura de salida de la corriente 6 es función del flujo de vapor y de la temperatura T_4 , que a su vez es una función de T_1 y T_2 .

La ecuación (4.57) muestra la relación entre T_0 y T_1 , y sustituyendo valores se obtiene la siguiente ecuación:

$$\bar{T}_0 = \left[\frac{1.7575}{s + 1.7575} \right] \left[\frac{0.5698(0.3493s + 1)}{(s + 1.2976)(s + 1.74)} \right] \frac{1}{s} \quad (4.73)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que para el cambiador I se encuentra la siguiente ecuación:

$$T_6 = 0.2519 - 2.0502e^{-1.2976t} + 36.9030e^{-1.7453t} - 35.1048e^{-1.7575t} \quad (4.74)$$

En la figura (4.13) se muestra el comportamiento de T_6 en función de T_1 .

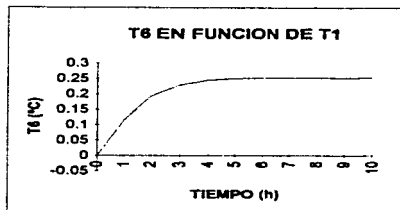


Figura 4.13.

La relación entre T_6 y T_2 está dada por la expresión (4.58) y sustituyendo los valores de los parámetros se obtiene:

$$\bar{T}_6 = \left[\frac{1.7575}{s+1.7575} \right] \left[\frac{1.6914(0.5948s+1)}{(s+1.2976)(s+1.74)} \right] \frac{1}{s} \quad (4.75)$$

La ecuación que se encuentra después de evaluar las constantes y pasarla al dominio del tiempo es:

$$T_6 = 0.7480 - 2.5444e^{-1.2976t} - 10.4461e^{-1.7453t} + 12.2426e^{-1.7575t} \quad (4.76)$$

En la figura (4.14) se muestra el comportamiento de T_6 en función de T_2 .

De este análisis se concluye que la temperatura de salida de la corriente 6 tiene más influencia de la temperatura de la corriente 2. Por lo tanto, el diagrama de bloques para el cambiador de calor II se puede simplificar, encontrándose el que se muestra en la figura 4.15.

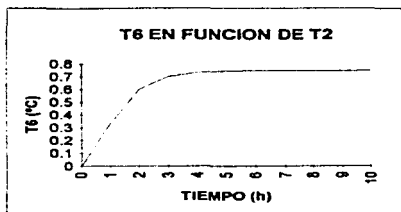


Figura 4.14.

C) Cambiador de calor III.

A partir de la ecuación (4.49) se aprecia que la temperatura de salida de la corriente 5 es función del flujo del agua de enfriamiento y de la temperatura T_2 , que a su vez es una función de T_1 y T_2 .

La ecuación (4.54) muestra la relación entre T_1 y T_1 , y sustituyendo valores se encuentra:

$$\bar{T}_3 = \left[\frac{2.61097}{s + 2.61097} \right] \left[\frac{1.8113(0.7008s + 1)}{(s + 1.2976)(s + 1.74)} \right] \frac{1}{s} \quad (4.77)$$

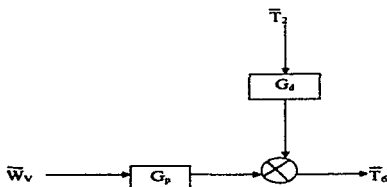


Figura 4.15

Una vez que se evalúan las constantes, la ecuación que resulta en el dominio del tiempo es:

$$T_1 = 0.8009 - 0.5664e^{-1.2976t} - 1.5535e^{-1.7431t} + 1.3189e^{-2.6109t} \quad (4.78)$$

En la figura (4.16) se observa el comportamiento de T_3 en función de T_1 .

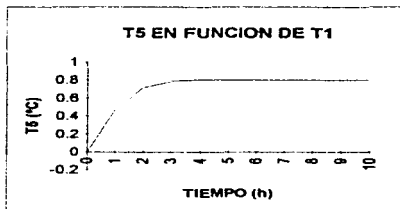


Figura 4.16.

La relación entre T_3 y T_2 está dada por la ecuación (4.55), sustituyendo se encuentra:

$$\bar{T}_3 = \left[\frac{2.61097}{s+2.61097} \right] \left[\frac{0.4499(0.4066s+1)}{(s+1.2976)(s+1.74)} \right] \frac{1}{s} \quad (4.79)$$

La ecuación en el dominio del tiempo es:

$$T_3 = 0.1989 - 0.7288e^{-1.2976t} + 0.5055e^{-1.7431t} + 0.0243e^{-2.6109t} \quad (4.80)$$

En la figura (4.17) se muestra el comportamiento de T_3 en función de T_2 .

A partir de este análisis se concluye que la temperatura de salida de la corriente 5 es influida en mayor proporción por la temperatura de la corriente 1, lo que origina que el diagrama de bloques se modifique quedando tal y como se muestra en la figura (4.18).

A continuación se introduce el concepto de tiempo muerto y se hace un análisis del comportamiento del sistema cuando se presenta este término.

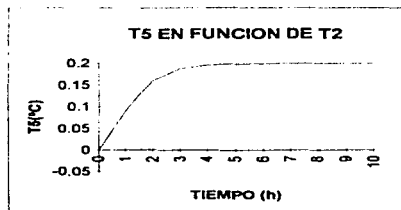


Figura 4.17.

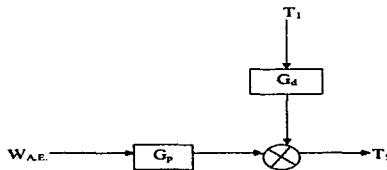


Figura 4.18.

TIEMPO MUERTO

En esta parte se hace un análisis del sistema cuando existe tiempo muerto (t_d). El tiempo muerto se define como el tiempo que tarda la perturbación en ser percibida por el sistema, éste se determina a través de datos experimentales.

En la figura (4.1) se observa que el comportamiento de los cambiadores de calor II y III depende del flujo de vapor y de agua de enfriamiento respectivamente, y considerando lo explicado en el capítulo 1, se entiende que éstos son las variables manipuladas para esta red de intercambiadores.

- Cambiador de calor II.

De acuerdo con la figura (4.15) la temperatura de la corriente 6, está en función de la temperatura de la corriente 2 (variable de perturbación) y del flujo de vapor (variable manipulada). Anteriormente se observó el comportamiento de T_6 en función de T_2 . Ahora, se estudiará el comportamiento de T_6 en función de W , cuando no existe tiempo muerto y cuando si lo hay.

La relación entre T_6 y W , está dada por la ecuación (4.59), y siguiendo el procedimiento realizado en los casos anteriores se encuentra la ecuación (4.81) en el dominio del tiempo que relaciona a estas variables, considerando que $W_v = 20/s$.

$$T_6 = 8.6200 - 8.6200e^{-1.7579t} \quad (4.81)$$

Trazando la gráfica de esta ecuación se encuentra lo siguiente.

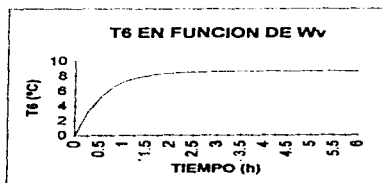


Figura 4.19.

El tiempo muerto se determina suponiendo que la distancia existente entre el cambiador de calor y el dispositivo de medición es de 5 m, por lo tanto

$$V_{\text{tubo}} = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{0.2545 \text{ m}}{2} \right)^2 (5 \text{ m}) = 0.25435 \text{ m}^3 \quad (4.82)$$

De aquí se encuentra que el tiempo muerto es:

$$t_d = \frac{V_{\text{tubo}}}{F_p} = \frac{0.25435 \text{ m}^3}{2.99 \text{ m}^3/\text{hr}} = 0.085067 \text{ h} \quad (4.83)$$

Para hacer el análisis con tiempo muerto se utiliza la siguiente expresión:

$$\frac{\bar{T}_e}{W_v} = G_p^* = G_p e^{-t_d s} \quad (4.84)$$

En este caso G_p es igual a G_{12} , la cual está representada por la siguiente ecuación:

$$G_{12} = \frac{K_{P2}}{\tau_{P2}s + 1} \quad (4.85)$$

Y de acuerdo, con las Identidades de Padé el término que incluye al tiempo muerto se define por las siguientes expresiones:

- Para sistemas de primer orden

$$e^{-t_d s} = \frac{1 - \frac{t_d}{2}s}{1 + \frac{t_d}{2}s} \quad (4.86)$$

- Para sistemas de segundo orden

$$e^{-t_d s} = \frac{t_d^2 s^2 - 6t_d s + 12}{t_d^2 s^2 + 6t_d s + 12} \quad (4.87)$$

El sistema en estudio es de primer orden, por lo tanto se utiliza la expresión (4.86), y sustituyendo valores numéricos se encuentra la siguiente ecuación:

$$\bar{T}_e = \left[\frac{0.7575}{s + 1.7575} \right] \left[\frac{23.5109 - s}{s + 23.5109} \right] \left[\frac{20}{s} \right] \quad (4.88)$$

Después de realizar la expansión en fracciones parciales y de evaluar las constantes, la ecuación en el dominio del tiempo que representa el comportamiento de T_e en función de W_v cuando hay tiempo muerto, para un sistema de primer orden, es la siguiente:

$$\bar{T}_e = 8.6202 - 10.0131e^{-1.7575s} + 1.3929e^{-23.5109s} \quad (4.89)$$

En la figura (4.20) se encuentra trazada la gráfica de esta expresión.

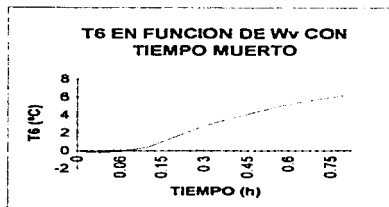


Figura 4.20

- Cambiador de calor III.

De acuerdo con la figura (4.18) la temperatura de la corriente 5, está en función de la temperatura de la corriente 1 (variable de perturbación) y del flujo de agua de enfriamiento (variable manipulada). Anteriormente se observó el comportamiento de T_5 en función de T_1 . Ahora, se estudia el comportamiento de T_5 en función de $W_{A.E.}$ cuando no existe tiempo muerto y cuando si lo hay.

La relación entre T_5 y $W_{A.E.}$ está dada por la ecuación (4.56), y siguiendo el procedimiento realizado en los casos anteriores se encuentra la ecuación (4.90) en el dominio del tiempo que relaciona a estas variables.

$$\bar{T}_5 = 0.5200 - 0.5200e^{-2.611t} \quad (4.90)$$

En la figura (4.21) está trazada la gráfica de esta expresión.

El tiempo muerto se determina suponiendo que la distancia existente entre el cambiador de calor y el dispositivo de medición es de 7 m, por lo tanto:

$$t_d = 0.097293 \text{ h} \quad (4.91)$$

Para hacer el análisis con tiempo muerto se utiliza la siguiente expresión:

$$\frac{\bar{T}_5}{W_{A.E.}} = G_p^* = G_p e^{-t_d s} \quad (4.92)$$

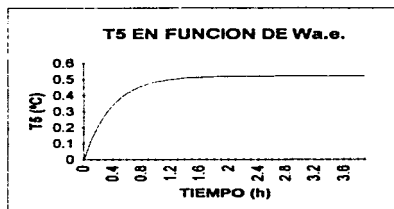


Figura 4.21.

En este caso G_p es igual a G_{14} , la cual está representada por la siguiente ecuación:

$$G_{14} = \frac{K_{P10}}{\tau_p s + 1} \quad (4.93)$$

Utilizando la expresión (4.86), y sustituyendo valores numéricos se encuentra la siguiente ecuación:

$$\bar{T}_1 = \left[\frac{0.067885}{s + 2.610966} \right] \left[\frac{20.55646 - s}{20.55646 + s} \right] \left[\frac{20}{s} \right] \quad (4.94)$$

Después de realizar la expansión en fracciones parciales y de evaluar las constantes, la ecuación en el dominio del tiempo que representa el comportamiento de T_1 en función de $W_{A.E.}$ cuando hay tiempo muerto, para un sistema de primer orden, es la siguiente:

$$T_1 = 0.5200 - 0.6713e^{-2.6110s} + 0.1513e^{-20.5564s} \quad (4.95)$$

En la figura (4.22) se encuentra trazada la gráfica de esta expresión.

En el siguiente capítulo se diseña el lazo de control para este sistema y se realiza la calibración del mismo.



Figura 4.22.

CAPÍTULO 5

DISEÑO Y CALIBRACIÓN DEL LAZO DE CONTROL HACIA ATRÁS PARA UNA RED DE INTERCAMBIADORES

En el capítulo 4 se diseñó y analizó el modelo dinámico lineal para cada uno de los intercambiadores que componen la red.

Para obtener las temperaturas requeridas de las corrientes 5 y 6 se tienen 2 cambiadores que trabajan, uno contra vapor saturado y otro contra agua de enfriamiento, representados por los cambiadores II y III respectivamente, en la figura (4.2).

Debido a que las temperaturas de las corrientes 5 y 6 dependen de las temperaturas de las corrientes 3 y 4, que son consideradas como perturbaciones, es necesario construir un lazo de control "hacia atrás", tal y como se muestra en las figuras (5.1) y (5.2). Esto permitirá obtener un modelo que arroje el comportamiento de las variables de salida en función de las variables manipuladas.

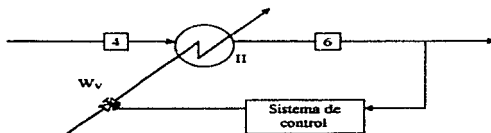


Figura 5.1

En este capítulo se construye el modelo del lazo de control "hacia atrás" para cada cambiador. Se utilizan los 3 tipos de controladores, y se sintonizan los parámetros de los controladores por medio del método de Cohen y Coon².

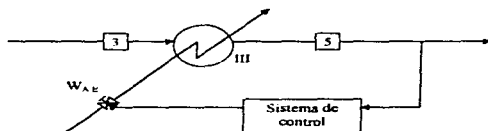


Figura 5.2

MÉTODO DE COHEN Y COON

Dentro de los métodos de sintonización de controladores uno de los más populares es el conocido como el método de la curva de reacción. Esta técnica fue desarrollada por Cohen y Coon. El método es básicamente experimental y utiliza datos reales del proceso a partir de la respuesta del sistema.

En la figura (5.3) se muestra un lazo de control que ha sido "abierto", esto es, desconectando el controlador del elemento final de control.

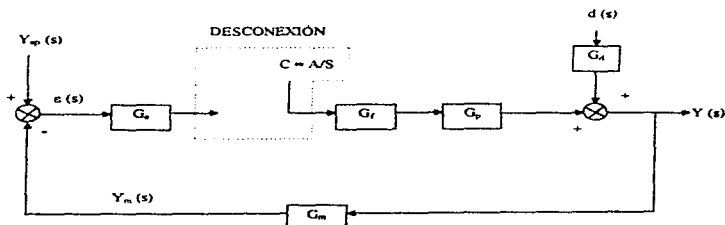


Figura 5.3.

Si se introduce un cambio artificial de magnitud A en la variable C , el cual actúa en el elemento final de control se consigue inducir un efecto dinámico al sistema. Se monitorea la variable y_m en función del tiempo, de tal forma que se puede construir una gráfica que se denomina como "la curva de reacción" (*process reaction curve, PRC*). Entre y_m y C existe la siguiente función de transferencia:

$$G_{PRC}(s) = \frac{\bar{y}_m(s)}{C(s)} = G_i(s)G_p(s)G_m(s) \quad (5.1)$$

Esta ecuación muestra que la curva de reacción no depende únicamente de la dinámica del proceso, sino también de la dinámica del dispositivo de medición y del elemento final de control.

El método de Cohen y Coon señala que la respuesta de la mayoría de los procesos puede ser aproximada a una respuesta de primer orden con tiempo muerto:

$$G_{PRC}(s) = \frac{\bar{y}_m(s)}{C(s)} \approx \frac{Ke^{-t_d s}}{ts + 1} \quad (5.2)$$

la cual tiene tres parámetros: la ganancia K , el tiempo muerto t_d y la constante tiempo τ . A partir de la figura (5.4) es fácil estimar los valores de los parámetros.

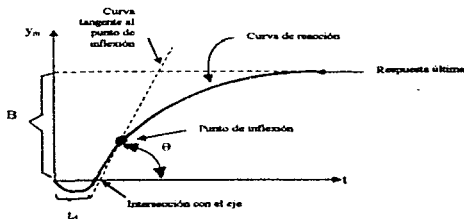


Figura 5.4.

Los parámetros se calculan utilizando las siguientes correlaciones:

$$K = \frac{\text{Salida (en el estado estacionario)}}{\text{Entrada (en el estado estacionario)}} = \frac{B}{A} \quad (5.3)$$

$$\tau = \frac{B}{\tan \theta} \quad (5.4)$$

$$\tan \theta = \frac{\overline{\partial y_m}}{\partial t} \quad (\text{Calculada en el punto de inflexión}) \quad (5.5)$$

t_d = tiempo muerto, el tiempo que tarda el sistema en responder

El valor de la salida, B, es el valor que toma la variable medible una vez alcanzada la estabilidad, este valor es denominado respuesta última. El valor de la entrada, A, es aquel cambio de magnitud introducido en la variable C cuando el lazo de control es "abierto", ver figura (5.3).

En el método de Cohen y Coon se utiliza el modelo aproximado de la ecuación (5.2) y se estiman los valores de los parámetros K , t_d y τ . Después, se derivan expresiones para la obtención de los "mejores" valores de los parámetros de ajuste, con base en los criterios de estabilidad, sensibilidad, dinámica, capacidad de oscilación y compensación.

Dentro del método de Cohen y Coon se encuentran las siguientes correlaciones:

Controlador Proporcional

$$K_c = \frac{1}{K} \frac{\tau}{t_d} \left(1 + \frac{t_d}{3\tau} \right) \quad (5.6)$$

Controlador Proporcional - Integral

$$K_c = \frac{1}{K} \frac{\tau}{t_d} \left(0.9 + \frac{t_d}{12\tau} \right) \quad (5.7)$$

$$\tau_i = t_d \frac{30 + 3 t_d / \tau}{9 + 20 t_d / \tau} \quad (5.8)$$

Controlador Proporcional - Integral - Derivativo

$$K_c = \frac{1}{K} \frac{\tau}{t_d} \left(\frac{4}{3} + \frac{t_d}{4\tau} \right) \quad (5.9)$$

$$\tau_i = t_d \frac{32 + 6 t_d / \tau}{13 + 8 t_d / \tau} \quad (5.10)$$

$$\tau_d = t_d \frac{4}{11 + 2 t_d / \tau} \quad (5.11)$$

• Calibración del cambiador II.

La curva de reacción del proceso con tiempo muerto, para este caso, está representada por la siguiente expresión:

$$G_{FRC} = \frac{K_{PR}}{\tau_{p1}s + 1} \frac{1 - \frac{t_d}{2} s}{1 + \frac{t_d}{2} s} \frac{20}{s} \quad (5.12)$$

donde $G_f = G_m = 1$ y $C = 20/s$.

Tomando la antitransformada de Laplace de la ecuación (5.12) se encuentra, después de sustituir los valores numéricos, la expresión (4.89).

$$T_s = 8.6202 - 10.0131e^{-1.7575t} + 1.3929e^{-23.5109t} \quad (4.89)$$

La curva de reacción es la gráfica mostrada en la figura (4.20).

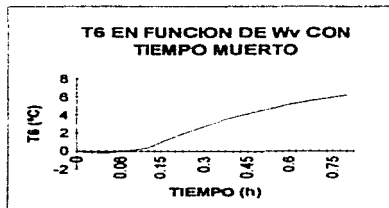


Figura 4.20.

Para determinar la constante tiempo de la ecuación (5.4) se necesita conocer el punto de inflexión de esta curva, y determinar el valor de la tangente de θ alrededor del punto de inflexión.

Para conocer el punto de inflexión de la curva se debe encontrar la segunda derivada de la función e igualarla a cero, es decir, la expresión (4.89) se deriva dos veces con respecto al tiempo y se iguala a cero.

$$G_{PRC} = 86202 - 100131e^{-1.7575t} + 1.3929e^{-23.5109t} \quad (5.13)$$

$$\frac{dG_{PRC}}{dt} = -10.0131(-1.7575)e^{-1.7575t} + 1.3929(-23.5109)e^{-23.5109t} \quad (5.14)$$

$$\frac{d^2G_{PRC}}{dt^2} = -10.0131(-1.7575)^2 e^{-1.7575t} + 1.3929(-23.5109)^2 e^{-23.5109t} \quad (5.15)$$

Igualando a cero,

$$-10.0131(-1.7575)^2 e^{-1.7575t} + 1.3929(-23.5109)^2 e^{-23.5109t} = 0 \quad (5.16)$$

Esta igualdad se cumple cuando $t = 0.14778$ h.

Sustituyendo este valor en la expresión (5.13) se encuentra que $G_{PRC} = 0.94059$, por lo que el punto de inflexión es:

$$(0.14778, 0.94059)$$

Los datos de la curva de reacción se muestran en la tabla (5.1).

TABLA 5.1 CURVA DE REACCIÓN DEL CAMBIADOR II		
	t (HORAS)	$G_{PRC}(T_{em})$
1	0	0
2	0.02	-0.1767
3	0.04	-0.1693
4	0.06	-0.0509
5	0.08	0.1328
6	0.10	0.3536
7	0.12	0.5939
8	0.14	0.8429
9	0.16	1.0939
10	0.18	1.3428
11	0.20	1.5873

El punto de inflexión se localiza entre los puntos 8 y 9, por lo tanto:

$$\tan \theta = \frac{\overline{c\bar{y}}_m}{\bar{c}\bar{t}} = \frac{(1.0939 - 0.8429)}{(0.16 - 0.14)} = 12.55 \quad (5.17)$$

Así, se encuentra:

$$K = \frac{B}{A} = \frac{8.6202}{20} = 0.4310 \quad (5.18)$$

$$\tau = \frac{B}{\tan \theta} = \frac{8.6202}{12.55} = 0.6869 \text{ h} \quad (5.19)$$

$$t_d = 0.085067 \text{ h (Ver expresión (4.83))}$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones (5.6), (5.7), (5.8), (5.9), (5.10) y (5.11) se encuentra que los controladores se deben ajustar, según Cohen y Coon, a los siguientes valores:

Controlador Proporcional

$$K_c = 19.5085$$

Controlador Proporcional - Integral

$$K_c = 17.0549, \quad \tau_i = 0.2251 \text{ h}$$

Controlador Proporcional - Integral - Derivativo

$$K_c = 25.5601, \quad \tau_i = 0.1991 \text{ h}, \quad \tau_D = 0.0302 \text{ h}$$

Las ecuaciones del lazo de control para los cambiadores se obtienen siguiendo el procedimiento explicado en el capítulo 2. En la figura (5.5) y (5.6) se muestra el comportamiento del sistema con un controlador proporcional y con un proporcional - integral. No se representó al sistema con un CPID debido a que el sistema de ecuaciones a resolver es muy complicado, ya que existen raíces complejas.

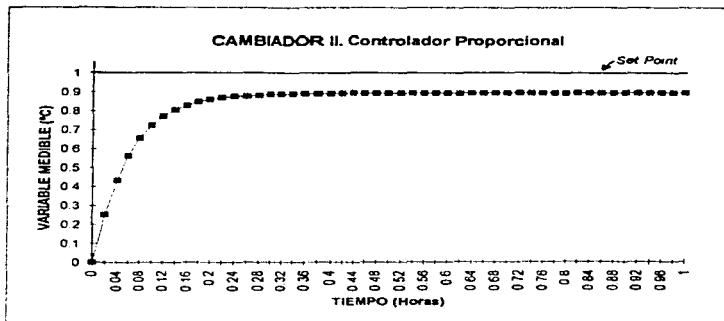


Figura 5.5

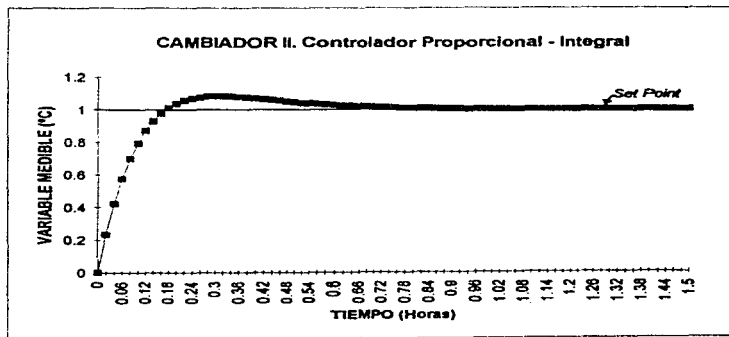


Figura 5.6

• Calibración del cambiador III.

La expresión que representa a la curva de reacción del proceso con tiempo muerto para este caso es:

$$G_{PRC} = \frac{K_{PRC}}{\tau_{PRC}s + 1} \frac{1 - \frac{\tau_d}{2}s}{1 + \frac{\tau_d}{2}s} \frac{20}{s} \quad (5.20)$$

donde $G_f = G_m = 1$ y $C = 20/s$

Transformando la ecuación (5.20) al dominio del tiempo se encuentra, después de sustituir los valores numéricos, la expresión (4.95).

$$T_s = 0.5200 - 0.6713e^{-2.6110t} + 0.1513e^{-20.5565t} \quad (4.95)$$

La curva de reacción es la gráfica mostrada en la figura (4.22).



Figura 4.22

El punto de inflexión se obtiene encontrando la segunda derivada de la siguiente expresión:

$$G_{PRC} = 0.5200 - 0.6713e^{-2.6110t} + 0.1513e^{-20.5565t} \quad (5.21)$$

$$\frac{dG_{PRC}}{dt} = -0.6713(-2.6110)e^{-2.6110t} + 0.1513(-20.5565)e^{-20.5565t} \quad (5.22)$$

$$\frac{d^2G_{PRC}}{dt^2} = -0.6713(-2.6110)^2 e^{-2.6110t} + 0.1513(-20.5565)^2 e^{-20.5565t} \quad (5.23)$$

Igualando a cero,

$$-0.6713(-2.6110)^2 e^{2.6110t} + 0.1513(-20.5565)^2 e^{-20.556t} = 0 \quad (5.24)$$

Esta igualdad se cumple cuando $t = 0.14694$ h.

Sustituyendo este valor en la expresión (5.21) se encuentra que $G_{PRC} = 0.06998$, por lo que el punto de inflexión es:

$$(0.14694, 0.06998)$$

Los datos de la curva de reacción se muestran en la tabla (5.2).

TABLA 5.2. CURVA DE REACCIÓN DEL CAMBIADOR III		
	t (HORAS)	$G_{PRC} (T_{1m})$
1	0	0
2	0.02	-0.01685
3	0.04	-0.01824
4	0.06	-0.00988
5	0.08	0.00446
6	0.10	0.02230
7	0.12	0.04210
8	0.14	0.06270
9	0.16	0.08360
10	0.18	0.10420
11	0.20	0.12430

El punto de inflexión se localiza entre los puntos 8 y 9, por lo tanto:

$$\tan \theta = \frac{c_{y_m}}{c_t} \approx \frac{(0.0836 - 0.0627)}{(0.16 - 0.14)} = 1.045 \quad (5.25)$$

Así, se encuentra:

$$K = \frac{B}{A} = \frac{0.5200}{20} = 0.02600 \quad (5.26)$$

$$\tau = \frac{B}{\tan \theta} = \frac{0.5200}{1.045} = 0.4971 \text{ h} \quad (5.27)$$

$$t_d = 0.097293 \text{ h (Ver expresión (4.91))}$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones (5.6), (5.7), (5.8), (5.9), (5.10) y (5.11) se encuentra que los controladores se deben ajustar, según Cohen y Coon, a los siguientes valores:

Controlador Proporcional

$$K_c = 324.7170$$

Controlador Proporcional - Integral

$$K_c = 180.0658; \tau_i = 0.2304 \text{ h}$$

Controlador Proporcional - Integral - Derivativo

$$K_c = 271.6312; \tau_i = 0.2216 \text{ h; } \tau_D = 0.0342 \text{ h}$$

En las figuras (5.7) y (5.8) se muestra el comportamiento del sistema con un controlador proporcional y un controlador proporcional - integral.

SELECCIÓN DEL TIPO DE CONTROLADOR

Los efectos de los diferentes modos de control en la respuesta del sistema se resumen como sigue:

1. Control Proporcional

- (a) Acelera la respuesta de un proceso controlado
- (b) Provoca una compensación en todos los procesos, excepto aquellos que presente en su función de transferencia una acción integral (1/s).

2. Control Integral

- (a) Elimina cualquier compensación.
- (b) La eliminación de la compensación usualmente genera desviaciones grandes, es decir, el control integral provoca respuestas oscilantes, lo que origina que en un primer momento la respuesta del sistema se desvie del *set point*. Sin embargo, finalmente se llega al estado estacionario sin compensación.

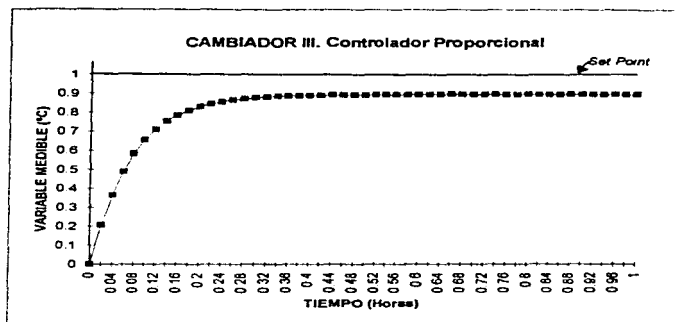


Figura 5.7

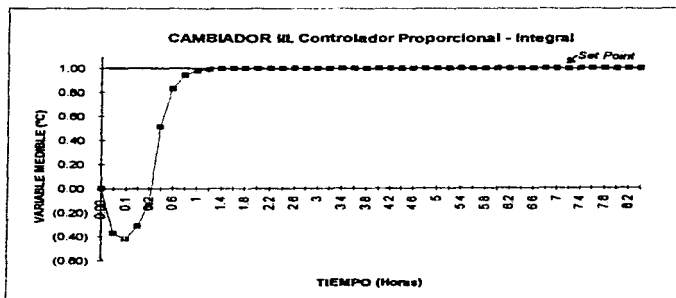


Figura 5.8

(c) Produce respuestas lentas y de grandes oscilaciones.

(d) Si se incrementa la ganancia K_c para conseguir una respuesta más rápida, el sistema llega a ser oscilante y puede perder su estabilidad.

3. Control Derivativo

(a) Anticipa futuros errores e introduce una acción apropiada.

(b) Introduce un efecto estabilizador en la respuesta del lazo cerrado de un proceso.

De acuerdo con lo anterior, es claro que un controlador PID debe ser el mejor. Esto es cierto en el sentido de que ofrece la más alta flexibilidad de alcance del control deseado de la respuesta mediante el ajuste de tres parámetros. Sin embargo, la sintonización de este tipo de controlador es más compleja debido a que se tienen que ajustar 3 parámetros. Además, la resolución de ecuaciones diferenciales representa un alto grado de dificultad. Para equilibrar la calidad en la respuesta deseada contra la dificultad de calibración, se pueden seguir las siguientes reglas para seleccionar el controlador más apropiado.

1. Tener presente la premisa: "Siempre el mejor control es el más sencillo".

2. Si es posible, utilizar un controlador proporcional. Un controlador proporcional puede ser usado si:

(a) es posible alcanzar una compensación aceptable con valores moderados de K_c , o

(b) si el proceso tienen una acción integral (p. ej. un término $1/s$ en su función de transferencia) para el cual el controlador proporcional no provoca una compensación.

Por lo tanto, para el control del nivel de un líquido o la presión de un gas se debe utilizar este tipo de controlador.

3. Si no es aceptado el uso de un controlador proporcional, deberá emplearse un proporcional - integral. Un controlador PI debe ser usado cuando el control proporcional por si solo no ofrece errores mínimos de estado estacionario (*offsets*). Así, un PI se usa en sistemas para el control del nivel de un líquido o la presión de un gas pero con control de flujo. La respuesta de un sistema de flujo es muy rápida. Consecuentemente, la velocidad de un sistema de lazo cerrado es satisfactoria a pesar de la lentitud causada por el modo de control integral.

4. Usar un controlador proporcional - integral - derivativo para incrementar la velocidad de la respuesta de lazo cerrado. Un controlador PI elimina el *offset*, pero reduce la velocidad en la respuesta de un lazo cerrado.

La respuesta de un proceso con varias capacitancias es muy lenta, la adición de un PI hace ésta aún más lenta. En tales casos, la adición de la acción derivativa, con su efecto estabilizador, permite el uso de altas ganancias lo que produce respuestas más rápidas sin oscilaciones excesivas.

De esta manera, la acción derivativa es recomendada para el control de temperatura y de composición los cuales tienen respuestas lentas.

Sin embargo, para el caso de la red de intercambiadores en estudio se sugiere utilizar, tanto para el cambiador de calor II como para el III, un controlador PI debido a que brinda una dinámica aceptable y estabilidad al sistema, independientemente de la desviación del *set point* que se presenta (ver figura (5.6)) al principio de la respuesta del sistema, ya que ésta es mínima.

Así mismo, la resolución de las ecuaciones diferenciales no presenta un alto grado de dificultad. Por otra parte, con este tipo de control si se logra eliminar el problema de la compensación u *offset*.

CAPÍTULO 6

ANÁLISIS DE RESPUESTA DE FRECUENCIA DE UN PROCESO LINEAL

El análisis de respuesta de frecuencia² es otra técnica utilizada para diseñar lazos de control hacia atrás.

Cuando un sistema lineal es afectado por una entrada oscilante, su respuesta última (después de un tiempo prolongado) es también oscilante. Esta característica constituye la base del análisis de la respuesta de frecuencia.

Con este análisis, se determina cómo las características de la onda de salida (amplitud y retardo de fase) cambian conforme la frecuencia de la onda de entrada.

RESPUESTA DE FRECUENCIA DE UN SISTEMA DE PRIMER ORDEN²

Considerando un sistema de primer orden con la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{f}(s)} = \frac{K_p}{\tau_p s + 1} \quad (6.1)$$

y suponiendo que $\bar{f}(t)$ es una entrada oscilante de amplitud A y frecuencia ω :

$$\bar{f}(t) = A \sin \omega t$$

entonces,

$$\bar{f}(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (6.2)$$

Sustituyendo la ecuación (6.2) en la (6.1) se encuentra:

$$\bar{y}(s) = \frac{K_p}{\tau_p s + 1} \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (6.3)$$

Realizando la expansión en fracciones parciales se obtiene:

$$\bar{y}(s) = \frac{C_1}{s + 1/\tau_p} + \frac{C_2}{s + i\omega} + \frac{C_3}{s - i\omega} \quad (6.4)$$

Evaluando las constantes C_1 , C_2 y C_3 y encontrando la inversa de la transformada de Laplace, se llega a la expresión siguiente:

$$y(t) = \frac{K_p A \omega \tau_p}{\tau_p^2 \omega^2 + 1} e^{-t/\tau_p} - \frac{K_p A \omega \tau_p}{\tau_p^2 \omega^2 + 1} \cos \omega t + \frac{K_p A}{\tau_p^2 \omega^2 + 1} \sin \omega t \quad (6.5)$$

Cuando $t \rightarrow \infty$, $e^{-t/\tau_p} \rightarrow 0$ por lo cual el primer término de la ecuación (6.5) desaparece. Por lo tanto, después de un tiempo prolongado, la respuesta de un sistema de primer orden a una entrada oscilante está dada por:

$$y_m(t) = -\frac{K_p A \omega \tau_p}{\tau_p^2 \omega^2 + 1} \cos \omega t + \frac{K_p A}{\tau_p^2 \omega^2 + 1} \sin \omega t \quad (6.6)$$

Utilizando la siguiente identidad trigonométrica:

$$a_1 \cos b + a_2 \sin b = a_1 \sin(b + \phi)$$

donde:

$$a_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{y} \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)$$

La ecuación (6.6) resulta ser:

$$y_m(t) = \frac{K_p A}{\sqrt{\tau_p^2 \omega^2 + 1}} \sin(\omega t + \phi) \quad (6.7)$$

donde:

$$\phi = \tan^{-1} -\omega\tau_p \quad (6.8)$$

A partir de las ecuaciones (6.7) y (6.8) se observa que:

1. La respuesta última de un sistema de primer orden con una entrada sinusoidal es también una onda sinusoidal con la misma frecuencia ω .
2. La relación entre la amplitud de salida y la amplitud de entrada es llamada "relación de amplitudes (RA)" y es una función de la frecuencia:

$$RA = \frac{K_p}{\sqrt{\tau_p^2 \omega^2 + 1}} \quad (6.9)$$

3. La onda de salida es retrasada ("retardo de fase") con respecto a la onda de entrada por un ángulo ϕ , el cual es también una función de la frecuencia, según la ecuación (6.8).

Algebra de números complejos

1. Considerando un número complejo W definido por

$$W = a + ib$$

donde $a = \text{Re}(W)$ = parte real de W , y $b = \text{Im}(W)$ = parte imaginaria de W . Definiendo los siguiente términos:

El "módulo o valor absoluto o la magnitud de W " se representa por $|W|$ y se define como:

$$|W| = \sqrt{[\text{Re}(W)]^2 + [\text{Im}(W)]^2} \quad (6.10)$$

El "ángulo de fase o argumento de W " se representa por $\angle W$ o $\arg(W)$ y se define como:

$$\angle W = \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im}(W)}{\text{Re}(W)} \right] = \theta \quad (6.11)$$

De la figura (6.1) es claro que:

$$a = |W| \cos \theta \quad \text{y} \quad b = |W| \operatorname{sen} \theta$$

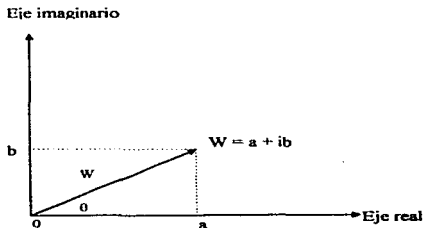


Figura 6.1

y

$$W = |W| \cos \theta + i |W| \operatorname{sen} \theta$$

Recordando las siguientes identidades:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

entonces,

$$W = |W| \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} + i |W| \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = |W| e^{i\theta} \quad (6.12)$$

2. Definiendo $Z = a - ib$, es fácil demostrar que:

$$|W| = |Z| \quad \text{y} \quad \arg Z = -\arg W$$

3. Sustituyendo $s = i\omega$ en la ecuación (6.1), se encuentra:

$$G(i\omega) = \frac{K_p}{i\omega\tau_p + 1} = \frac{K_p}{i\omega\tau_p + 1} \frac{-i\omega\tau_p + 1}{-i\omega\tau_p + 1}$$

o

$$G(i\omega) = \frac{K_p}{\tau_p^2\omega^2 - 1 - i\frac{K_p\omega\tau_p}{\tau_p^2\omega^2 + 1}}$$

$G(i\omega)$ es un número complejo. Por lo tanto, de acuerdo con las ecuaciones (6.10) y (6.11), el módulo de $G(i\omega)$ es:

$$|G(i\omega)| = \frac{K_p}{\sqrt{\tau_p^2\omega^2 + 1}} = RA \quad (\text{Ver ec. 6.9})$$

y el argumento de $G(i\omega)$ es:

$$\arg(G(i\omega)) = \tan^{-1} -\omega\tau_p = \text{retardo de fase} \quad (\text{Ver ec. 6.8})$$

Estas dos últimas relaciones indican que la relación de amplitud RA y el retardo de fase ϕ para la respuesta de frecuencia de un sistema de primer orden, son iguales al módulo y el argumento, respectivamente, cuando en su función de transferencia $s = i\omega$.

RESPUESTA DE FRECUENCIA DE UN PROCESO PURO DE TIEMPO MUERTO²

La función de transferencia es

$$G(s) = e^{-s\tau}$$

Haciendo $s = i\omega$:

$$G(i\omega) = e^{-i\omega\tau}$$

se encuentra entonces,

$$RA = |G(i\omega)| = 1 \quad (6.13)$$

$$\text{Retardo de fase} = \text{argumento de } G(i\omega) = -t_d\omega \quad (6.14)$$

RESPUESTA DE FRECUENCIA DE UN SISTEMA DE PRIMER ORDEN CON TIEMPO MUERTO

Este tipo de sistema se estudió durante el desarrollo del sistema de control para la red de intercambiadores de calor.

- Cambiador de calor II.

La función de transferencia de este cambiador está representada por la ecuación siguiente:

$$G_p = \frac{K_{p19}}{\tau_{p19}s + 1} e^{-t_d s} \quad (6.15)$$

donde $K_{p19} = 0.431 \text{ } ^\circ\text{C h/kg}$, $\tau_{p19} = 0.569 \text{ h}$ y $t_d = 0.085 \text{ h}$.

La relación de amplitudes de este sistema se obtiene mediante el producto de la RA del sistema de primer orden puro y de la RA del sistema con tiempo muerto puro. Por lo tanto la relación de amplitudes resultante es:

$$RA = \frac{0.431}{\sqrt{(0.569^2\omega^2) + 1}} \quad (6.16)$$

El retardo de fase de este sistema es la suma del retardo del sistema de primer orden y del sistema de tiempo muerto, es decir:

$$\phi = \tan^{-1}(-0.569\omega) + (-0.085\omega) \quad (6.17)$$

- Cambiador de calor III.

La función de transferencia de este cambiador está representada por la ecuación siguiente:

$$G_p = \frac{K_{p10}}{\tau_{p10}s + 1} e^{-t_d s} \quad (6.18)$$

donde $K_{p10} = 0.026 \text{ } ^\circ\text{C h/kg}$, $\tau_{p10} = 0.383 \text{ h}$ y $t_d = 0.097 \text{ h}$.

La relación de amplitudes de este sistema es:

$$RA = \frac{0.026}{\sqrt{(0.383^2 \omega^2) + 1}} \quad (6.19)$$

y el retardo de fase:

$$\phi = \tan^{-1}(-0.383\omega) + (-0.097\omega) \quad (6.20)$$

DIAGRAMAS DE BODE²

Los diagramas de Bode (en honor de H. W. Bode) constituyen un camino conveniente para representar las características de la respuesta de frecuencia de un sistema. Como se puede ver en las ecuaciones (6.8) y (6.9), la relación de amplitudes y el retardo de fase de la respuesta última de un sistema son funciones de la frecuencia ω . Los diagramas de Bode consisten en un par de gráficas que muestran:

1. Cómo el logaritmo de la relación de amplitudes varía con el logaritmo de la frecuencia, y
2. Cómo el retardo de fase varía con el logaritmo de la frecuencia.

Así, para construir el diagrama de Bode de los cambiadores de calor en estudio, primero se dan valores a ω , se calcula el logaritmo de dichos valores; se calcula la relación de amplitudes y su logaritmo. Para el retardo de fase, se grafica el logaritmo de ω contra ϕ .

En la figura (6.2) se muestra el diagrama de Bode para el cambiador II, y en la figura (6.3) el del cambiador III.

CRITERIO DE ESTABILIDAD DE BODE

La función de transferencia de lazo abierto (*open - loop*) para el cambiador de calor II es la siguiente:

$$G_{\text{ca}} = \frac{\bar{y}_m(s)}{y_w(s)} = \frac{K_{p2} K_c e^{-1.4s}}{\tau_{p2}s + 1} = \frac{0.431 K_c e^{-0.081s}}{0.569s + 1} \quad (6.21)$$

Con la ecuación (6.17) dada la $\omega = 19.6$ rad/min se calcula el valor de $\phi = -180^\circ$, y con la ecuación (6.16) se calcula $RA = 0.0385$. Ver figura (6.2) La frecuencia donde el retardo de fase es igual a -180° es llamada frecuencia crítica (*crossover frequency*) y se denota por ω_{cr} .

El criterio de estabilidad de Bode establece que un sistema de control hacia atrás es inestable si la relación de amplitudes RA, correspondiente a la función de transferencia del lazo abierto (6.21), es mayor que la unidad en el valor de la frecuencia crítica. Como $RA < 1$, el cambiador de calor II con un lazo de control hacia atrás es un sistema estable.

La función de transferencia de lazo abierto (*open-loop*) para el cambiador de calor III es la siguiente:

$$G_{(s)} = \frac{\bar{y}_m(s)}{y_w(s)} = \frac{K_{p10} K_{i1} e^{-t_d s}}{\tau_{p1} s + 1} = \frac{0.026 K_{i1} e^{-0.072 s}}{0.383 s + 1} \quad (6.22)$$

Con la ecuación (6.20) dada la $\omega = 17.7$ rad/min se calcula el valor de $\phi = -180^\circ$, y con la ecuación (6.19) se calcula $RA = 0.0038$. Ver figura (6.3).

De acuerdo con el criterio de estabilidad de Bode, el cambiador de calor III con un lazo de control hacia atrás es un sistema estable.

TÉCNICA DE CALIBRACIÓN DE ZIEGLER - NICHOLS

En el capítulo 5 se discutió el método de calibración basado en la curva de reacción del proceso. Este método es básicamente empírico y utiliza datos reales del proceso a partir de la respuesta del sistema. En este capítulo se explica un método alternativo desarrollado por Ziegler y Nichols², basado en el análisis de la respuesta de frecuencia.

A diferencia del método de la curva de reacción del proceso, en el cual se utilizan datos de la respuesta del lazo abierto del sistema, la técnica de Ziegler y Nichols es un procedimiento para lazo cerrado. Esta técnica consiste en los siguientes pasos:

1. Determinar la frecuencia crítica de la ecuación que define el retardo de fase, ecuaciones (6.17) y (6.20)
2. Con la ecuación (6.23) se fija una relación de amplitudes RA^* escogiendo un valor del intervalo $0.333 < RA^* < 0.714$. El valor más pequeño corresponderá a sistemas de los cuales se tiene poca información. El valor más grande es adoptado cuando se conoce con la suficiente certidumbre los parámetros del sistema. En este caso se tomará el valor recomendado² de 0.588.

W	lpw	log W	log AR	Fi
9.5	5.4055	0.977724	-1.10567	-125.785
9.51	5.41119	0.978181	-1.10611	-125.845
9.52	5.41688	0.978637	-1.10655	-125.904
9.53	5.42257	0.979093	-1.10699	-125.964
9.54	5.42826	0.979548	-1.10743	-126.023
9.55	5.43395	0.980003	-1.10787	-126.082
9.56	5.43964	0.980458	-1.10831	-126.142
9.57	5.44533	0.980912	-1.10875	-126.201
9.58	5.45102	0.981366	-1.10919	-126.261
9.59	5.45671	0.981819	-1.10963	-126.32
9.6	5.4624	0.982271	-1.11006	-126.379
9.61	5.46809	0.982723	-1.1105	-126.438
9.62	5.47378	0.983175	-1.11094	-126.498
9.63	5.47947	0.983626	-1.11138	-126.557
9.64	5.48516	0.984077	-1.11181	-126.616
9.65	5.49085	0.984527	-1.11225	-126.675
9.66	5.49654	0.984977	-1.11268	-126.734
9.67	5.50223	0.985426	-1.11312	-126.794
9.68	5.50792	0.985875	-1.11355	-126.853
9.69	5.51361	0.986324	-1.11399	-126.912
9.7	5.5193	0.986772	-1.11442	-126.971
9.71	5.52499	0.987219	-1.11485	-127.03
9.72	5.53068	0.987666	-1.11529	-127.089
9.73	5.53637	0.988113	-1.11572	-127.148
9.74	5.54206	0.988559	-1.11615	-127.207
9.75	5.54775	0.989005	-1.11658	-127.266
9.76	5.55344	0.98945	-1.11701	-127.325
9.77	5.55913	0.989895	-1.11744	-127.384
9.78	5.56482	0.990339	-1.11788	-127.443
9.79	5.57051	0.990783	-1.11831	-127.502
9.8	5.5762	0.991226	-1.11873	-127.56
9.81	5.58189	0.991669	-1.11916	-127.619
9.82	5.58758	0.992111	-1.11959	-127.678
9.83	5.59327	0.992554	-1.12002	-127.737
9.84	5.59896	0.992995	-1.12045	-127.796
9.85	5.60465	0.993436	-1.12088	-127.854
9.86	5.61034	0.993877	-1.12131	-127.913
9.87	5.61603	0.994317	-1.12173	-127.972
9.88	5.62172	0.994757	-1.12216	-128.031
9.89	5.62741	0.995196	-1.12258	-128.089
9.9	5.6331	0.995635	-1.12301	-128.148
9.91	5.63879	0.996074	-1.12343	-128.207
9.92	5.64448	0.996512	-1.12386	-128.265
9.93	5.65017	0.996949	-1.12428	-128.324
9.94	5.65586	0.997386	-1.12471	-128.382
9.95	5.66155	0.997823	-1.12513	-128.441
9.96	5.66724	0.998259	-1.12555	-128.5
10.8	6.1452	1.033424	-1.15973	-133.355
19	10.811	1.278754	-1.40124	-177.248
19.6	11.1524	1.292256	-1.41463	-180.331
29.4	16.7286	1.468347	-1.58976	-229.761

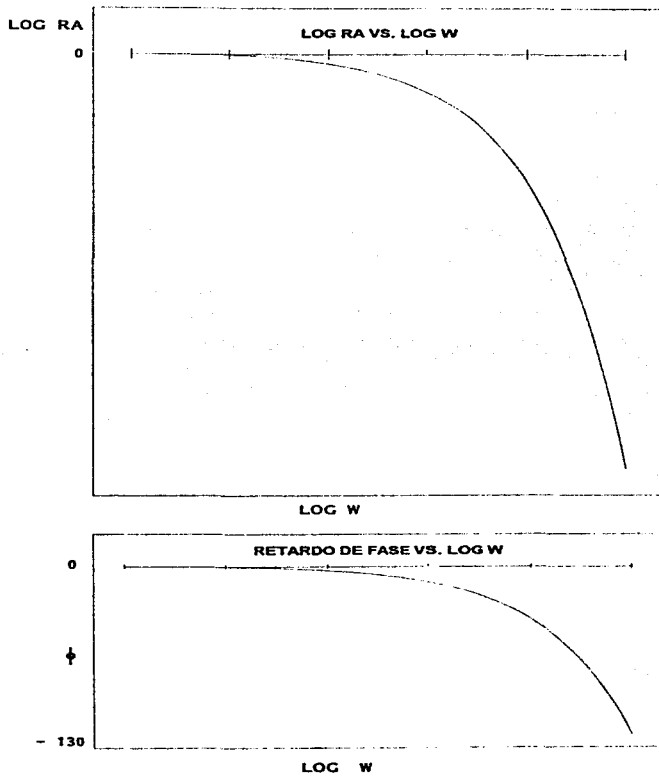


Figura 6.2

W	tpW	log W	log AR	F1
2.56	0.98048	0.40824	-1.7313	-58.863
2.575	0.986225	0.410777	-1.73255	-58.9137
2.59	0.99197	0.4133	-1.7338	-59.1635
2.605	0.997715	0.415808	-1.73505	-59.4122
2.62	1.00346	0.418301	-1.73629	-59.6601
2.635	1.009205	0.420781	-1.73754	-59.907
2.65	1.01495	0.423249	-1.73879	-60.153
2.665	1.020695	0.425697	-1.74004	-60.398
2.68	1.02644	0.428135	-1.74128	-60.6421
2.695	1.032185	0.430559	-1.74253	-60.8853
2.71	1.03793	0.432989	-1.74378	-61.1276
2.725	1.043675	0.435367	-1.74502	-61.369
2.74	1.04942	0.437751	-1.74627	-61.6094
2.755	1.055165	0.440122	-1.74751	-61.849
2.77	1.06091	0.44248	-1.74876	-62.0877
2.785	1.066655	0.444825	-1.75001	-62.3255
2.8	1.0724	0.447158	-1.75125	-62.5624
2.815	1.078145	0.449478	-1.75249	-62.7984
2.83	1.08389	0.451786	-1.75374	-63.0335
2.845	1.089635	0.454082	-1.75498	-63.2678
2.86	1.09538	0.456366	-1.75622	-63.5013
2.875	1.101125	0.458638	-1.75747	-63.7338
2.89	1.10687	0.460898	-1.75871	-63.9655
2.905	1.112615	0.463146	-1.75995	-64.1964
2.92	1.11836	0.465383	-1.76119	-64.4264
2.935	1.124105	0.467608	-1.76243	-64.6556
2.95	1.12985	0.469822	-1.76367	-64.884
2.965	1.135595	0.472025	-1.7649	-65.1115
2.98	1.14134	0.474216	-1.76614	-65.3383
2.995	1.147085	0.476397	-1.76738	-65.5642
3.01	1.15283	0.478566	-1.76861	-65.7893
3.025	1.158575	0.480725	-1.76985	-66.0136
3.04	1.16432	0.482874	-1.77108	-66.2371
3.055	1.170065	0.485011	-1.77231	-66.4598
3.07	1.17581	0.487138	-1.77355	-66.6817
3.085	1.181555	0.489255	-1.77478	-66.9028
3.1	1.1873	0.491362	-1.77601	-67.1232
3.115	1.193045	0.493458	-1.77724	-67.3428
3.13	1.19879	0.495544	-1.77848	-67.5616
3.145	1.204535	0.497621	-1.77969	-67.7796
3.16	1.21028	0.499687	-1.78092	-67.9969
3.175	1.216025	0.501744	-1.78214	-68.2134
3.19	1.22177	0.503781	-1.78336	-68.4292
3.205	1.227515	0.505828	-1.78459	-68.6443
3.22	1.23326	0.507856	-1.78581	-68.8586
4.83	1.84989	0.683947	-1.90784	-88.4492
7.245	2.774835	0.860038	-2.05478	-110.447
10.8675	4.162253	1.03613	-2.21654	-136.889
17.7	6.7791	1.247973	-2.42087	-179.98
26.55	10.16865	1.424065	-2.59438	-231.94

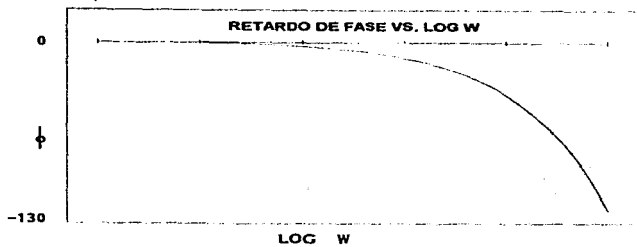
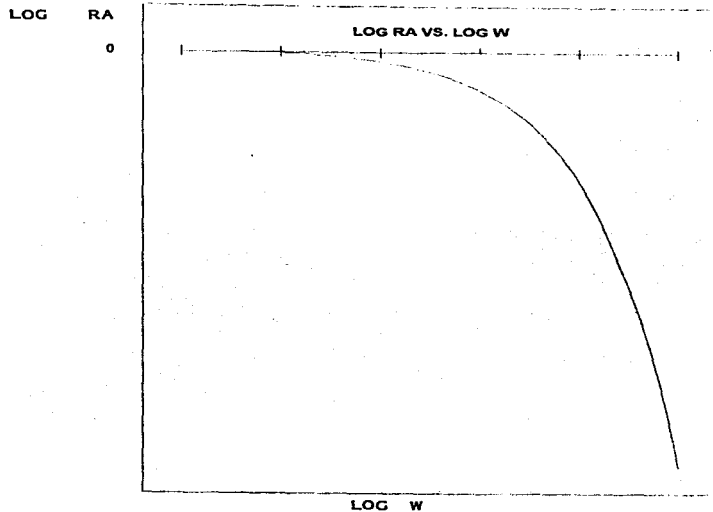


Figura 6.3

3. Calcular las cantidades siguientes:

$$\text{"Ganancia última"} = K_{U_1} = \frac{1}{RA^*}$$

$$\text{"Último periodo del ciclo"} = P_{U_1} = \frac{2\pi}{\omega_{\infty}}$$

4. Utilizando los valores de K_u y P_u , Ziegler y Nichols recomendaron calcular los parámetros de los controladores de la siguiente manera:

TABLA 6.1	K_c	τ_I (min)	τ_D (min)
Proporcional	$K_u/2$	-	-
Proporcional - integral	$K_u/2.2$	$P_u/1.2$	-
Proporcional - integral - derivativo	$K_u/1.7$	$P_u/2$	$P_u/8$

- Calibración del cambiador de calor II.

Los primeros pasos de esta técnica de calibración se llevaron a cabo cuando se construyó el diagrama de Bode, de donde se encontró que $\omega_{\infty} = 19.6$ rad/min. En esta frecuencia se encuentra que:

$$RA = \frac{0.431 K_c}{\sqrt{(0.569 * 19.6)^2 + 1}} = 0.0385 K_c \quad (6.23)$$

Entonces, fijando el valor RA^* :

$$RA^* = 0.588 = 0.0385 K_u \quad (6.24)$$

Por lo tanto, se encuentra el valor de K_u despejandola de la ecuación (6.24).

$$K_u = \frac{0.588}{0.0385} = 15.2788 \quad (6.25)$$

y se calcula el último periodo:

$$P_{11} = \frac{2\pi}{\omega_{cr}} \frac{2\pi}{19.6} = 0.3206 \quad (6.25)$$

De acuerdo con la tabla (6.1) se encuentran los parámetros para cada controlador:

Controlador Proporcional

$$K_C = 7.6394$$

Controlador Proporcional - Integral

$$K_C = 7.1764 \quad \tau_I = 0.2671 \text{ min} = 0.0045 \text{ h}$$

Controlador Proporcional - Integral - Derivativo

$$K_C = 8.9875 \quad \tau_I = 0.1603 \text{ min} = 0.0027 \text{ h} \quad \tau_D = 0.0401 \text{ min} = 0.0007 \text{ h}$$

Las ecuaciones del lazo de control para los cambiadores se obtienen siguiendo el procedimiento explicado en el capítulo 2 (pag. 2-9). En las figuras (6.4) y (6.5) se muestra el comportamiento del sistema con un controlador proporcional y con un proporcional - integral, respectivamente. No se representó al sistema con un CPID debido a que el sistema de ecuaciones a resolver es muy complicado.

- Calibración del cambiador de calor III.

Los primeros pasos de esta técnica de calibración se llevaron a cabo cuando se construyó el diagrama de Bode, de donde se encontró que $\omega_{0.707} = 17.7 \text{ rad/min}$. En esta frecuencia se encuentra que:

$$RA = \frac{0.026 K_C}{\sqrt{(0.383 * 17.7)^2 + 1}} = 0.0038 K_C \quad (6.26)$$

Entonces, fijando el valor RA*:

$$RA^* = 0.588 = 0.0038 K_C \quad (6.27)$$

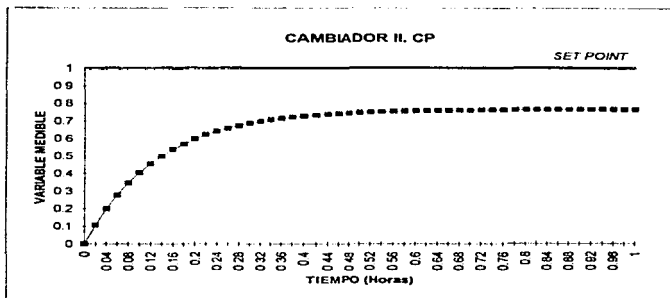


Figura 6.4

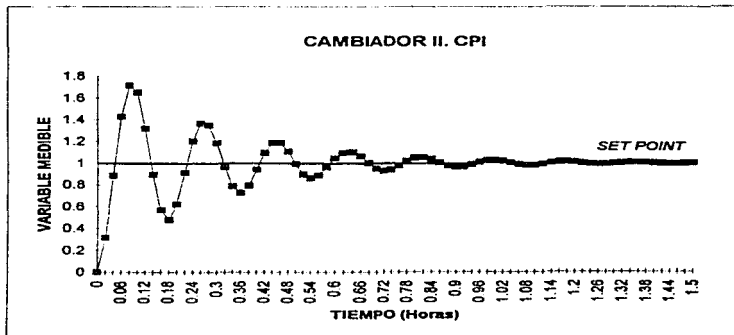


Figura 6.5

Por lo tanto, se encuentra el valor de K_c despejandola de la ecuación (6.27).

$$K_{c1} = \frac{0.588}{0.0038} = 155.0330 \quad (6.28)$$

y se calcula el último periodo:

$$P_{11} = \frac{2\pi}{17.7} = 0.3550 \quad (6.29)$$

De acuerdo con la tabla (6.1) se encuentran los parámetros para cada controlador:

Controlador Proporcional

$$K_{c1} = 77.5165$$

Controlador Proporcional - Integral

$$K_{c1} = 70.4695 \quad \tau_{i1} = 0.2958 \text{ min} = 0.0049 \text{ h}$$

Controlador Proporcional - Integral - Derivativo

$$K_{c1} = 91.1959 \quad \tau_{i1} = 0.1775 \text{ min} = 0.0030 \text{ h} \quad \tau_{D1} = 0.0444 \text{ min} = 0.0007 \text{ h}$$

En las figuras (6.6) y (6.7) se muestra el comportamiento del sistema con un controlador proporcional y con un proporcional - integral, respectivamente.

Una conclusión importante que resulta de comparar los valores de calibración por el método de Cohen y Coon con los obtenidos por Ziegler y Nichols, es el factor seguridad.

Según la literatura², el valor de la RA^* debe estar dentro del rango de 0.333 a 714 para asegurar una operación estable. Al calibrar los dos cambiadores de calor por Ziegler y Nichols se trabajó con una ganancia RA^* igual a 0.588, mientras que por Cohen y Coon se trabajó con RA^* de 0.751 y 1.235 para los cambiadores II y III respectivamente según las ecuaciones (6.24) y (6.27).

De acuerdo con lo anterior, los valores de calibración que aseguran una operación estable del sistema son los obtenidos por la técnica de Ziegler y Nichols.

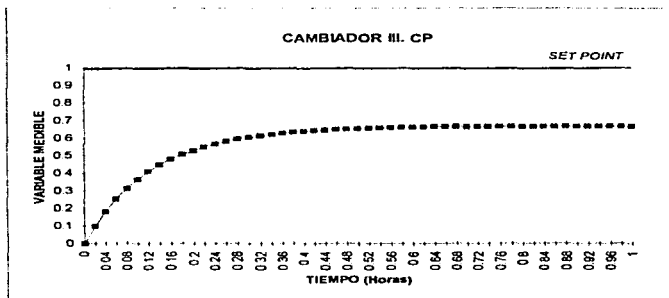


Figura 6.6

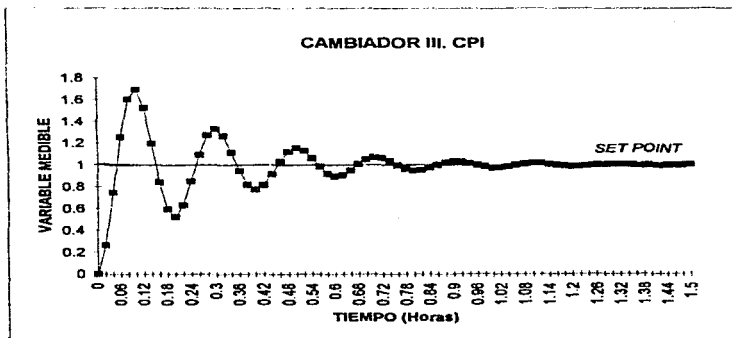


Figura 6.7

CONCLUSIONES

Con el desarrollo de este trabajo se logró realizar un complemento teórico del control para la materia de Dinámica y Control de Procesos.

Asi mismo, se logró la aplicación de los conceptos fundamentales del control, que abarcan desde la construcción de un modelo lineal hasta la sintonización de un lazo de control, a dos procesos de transferencia de calor, con diferente grado de dificultad.

Por otra parte, se hizo una aportación importante referente al análisis de los resultados que arrojan los diferentes modelos construidos, con los diferentes tipos de controladores y parámetros de ajuste, tema que en la mayoría de la literatura existente no se trata.

Por último, se consiguió establecer una metodología básica para introducir al estudiante al lenguaje del control, reforzando los conocimientos necesarios de matemáticas, sin perder nunca de vista el objetivo para el cual fue escrito este trabajo.

APÉNDICE 1

ANTITRANSFORMADA DE LAPLACE MEDIANTE EXPANSIÓN DE FRACCIONES PARCIALES

El último paso en el proceso de solución de una ecuación diferencial mediante la transformada de Laplace, es la inversión de la ecuación algebraica de la variable de salida.

Asumiendo que la transformada de Laplace de una función $x(t)$ está dada por:

$$\bar{x}(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad (\text{A1-1})$$

donde $Q(s)$ y $P(s)$ son polinomios en el dominio de Laplace de orden m y n respectivamente. La inversión de la transformada de Laplace usando la expansión en fracciones parciales se determina por medio de los siguientes pasos:

1. Expandir la relación $\frac{Q(s)}{P(s)}$ en una serie de fracciones:

$$\bar{x}(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{C_1}{r_1(s)} + \frac{C_2}{r_2(s)} + \dots + \frac{C_n}{r_n(s)} \quad (\text{A1-2})$$

donde $r_1(s), r_2(s), \dots, r_n(s)$, son polinomios de reducidos de primero o segundo orden.

2. Calcular los valores de las constantes C_1, C_2, \dots, C_n , a partir de la ecuación (A1-2).
3. Encontrar la inversa de la transformada de cada función parcial. Entonces, la función $x(t)$ estará dada por:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{C_1}{r_1(s)} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{C_2}{r_2(s)} \right] + \dots + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{C_n}{r_n(s)} \right] \quad (A1-3)$$

donde \mathcal{L}^{-1} representa la antitransformada de la expresión entre paréntesis cuadrados. La inversión de cada fracción puede hacerse fácilmente usando tablas de transformadas de Laplace para funciones comunes.

EJEMPLO

Considerando la transformada de Laplace de una función $x(t)$ expresada en la siguiente ecuación:

$$\bar{x}(s) = \frac{2s+1}{s^2+5s+6} = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad (A1-4)$$

El polinomio del denominador es de segundo orden,

$$P(s) = s^2 + 5s + 6 \quad (A1-5)$$

y tiene dos raíces reales:

$$P_1 = -2; \quad P_2 = -3$$

Entonces resulta:

$$P(s) = s^2 + 5s + 6 = (s+2)(s+3) \quad (A1-6)$$

Sustituyendo la ecuación (A1-6) en la (A1-4) se encuentra:

$$\bar{x}(s) = \frac{2s+1}{(s+2)(s+3)} \quad (A1-7)$$

Expandiendo la expresión (A1-7) en fracciones parciales resulta:

$$\bar{x}(s) = \frac{2s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{C_1}{(s+2)} + \frac{C_2}{(s+3)} \quad (A1-8)$$

$$2s+1 = C_1(s+3) + C_2(s+2) \quad (A1-9)$$

Evaluando constantes:

$$\begin{aligned} C_1: s &= -2 \\ 2(-2) + 1 &= C_1(-2 + 3) + C_2(0) \\ -3 &= C_1(1) \\ \therefore C_1 &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2: s &= -3 \\ 2(-3) + 1 &= C_1(0) + C_2(-3 + 2) \\ -5 &= C_2(-1) \\ \therefore C_2 &= 5 \end{aligned}$$

A partir de la ecuación (A1-8) se observa:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{C_1}{s+2} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{C_2}{s+3} \right] \quad (\text{A1-10})$$

De acuerdo con la tabla 1.1 se encuentra:

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} \quad (\text{A1-11})$$

Esta última expresión es antitransformada de la ecuación (A1-6).

APÉNDICE 2

DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DEL LAZO DE CONTROL SIMPLE "HACIA ATRÁS"

El diagrama de bloques que representa a un lazo de control hacia atrás se muestra en la figura (2.6).

De acuerdo con el álgebra de bloques se encuentran las siguientes igualdades:

$$\bar{y} = G_r \bar{m} + G_d \bar{d} \quad (\text{A2-1})$$

$$\bar{m} = G_r \bar{c} = G_r G_c \bar{e} = G_r G_c (\bar{y}_w - \bar{y}_m) \quad (\text{A2-2})$$

$$\bar{y}_m = G_m \bar{y} \quad (\text{A2-3})$$

Sustituyendo la ecuación (A2-3) en la (A2-2) se encuentra:

$$\bar{m} = G_r G_c \bar{y}_w - G_r G_c G_m \bar{y} \quad (\text{A2-4})$$

Sustituyendo la ecuación (A2-4) en la (A2-1) se tiene:

$$\bar{y} = G_p (G_r G_c \bar{y}_w - G_r G_c G_m \bar{y}) + G_d \bar{d} \quad (\text{A2-5})$$

$$\bar{y} = G_p G_r G_c \bar{y}_w - G_p G_r G_c G_m \bar{y} + G_d \bar{d} \quad (\text{A2-6})$$

Agrupando términos se encuentra la siguiente expresión

$$\bar{y} + G_p G_r G_c G_m \bar{y} = G_p G_r G_c \bar{y}_w + G_d \bar{d} \quad (\text{A2-7})$$

$$\bar{y}(1 + G_r G_i G_c G_m) = G_r G_i G_c \bar{y}_m + G_d \bar{d} \quad (\text{A2-8})$$

Finalmente se encuentra la ecuación del lazo de control hacia atrás:

$$\bar{y} = \frac{G_r G_i G_c}{1 + G_r G_i G_c G_m} \bar{y}_m + \frac{G_d}{1 + G_r G_i G_c G_m} \bar{d} \quad (\text{A2-9})$$

APÉNDICE 3

LINEALIZACIÓN MEDIANTE SERIE DE TAYLOR

Como ejemplo del método de la Serie de Taylor para linealizar ecuaciones diferenciales, se presenta la linealización de la ecuación (4.9).

La ecuación no lineal es la siguiente

$$v \frac{dT_1}{dt} = F_1 T_1 - F_2 T_1 - \frac{k}{\rho C_p} \left[\frac{(T_1 - T_a)}{\ln \left(\frac{T_1 - T_a}{T_1 - T_2} \right)} \right] + \frac{k}{\rho C_p} \left[\frac{(T_1 - T_2)}{\ln \left(\frac{T_1 - T_a}{T_1 - T_2} \right)} \right] \quad (A3-1)$$

Definiendo:

$$f_1 = \left[\frac{(T_1 - T_a)}{\ln \left(\frac{T_1 - T_a}{T_1 - T_2} \right)} \right] = f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial T_1} (T_1 - T_{1,s}) + \frac{\partial f_1}{\partial T_2} (T_2 - T_{2,s}) + \frac{\partial f_1}{\partial T_a} (T_a - T_{a,s}) + \frac{\partial f_1}{\partial T_1} (T_1 - T_{1,s}) \quad (A3-2)$$

Realizando las derivadas parciales de cada término de la ecuación (A3-2) y evaluando dichas derivadas en el estado estacionario, se encuentra:

$$D_1 = \frac{\partial f_1}{\partial T_1} = \frac{\frac{T_{1,s} - T_{a,s}}{T_{1,s} - T_{2,s}}}{\left[\ln \frac{T_{1,s} - T_{a,s}}{T_{1,s} - T_{2,s}} \right]^2} = 191.439$$

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

$$D_2 = \frac{\partial f_1}{\partial T_2} = \frac{-\frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_2}}{\left[\ln \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_2} \right]} = -191.439$$

$$D_3 = \frac{\partial f_1}{\partial T_1} = -\frac{1}{\left[\ln \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_2} \right]} + \frac{1}{\left[\ln \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_2} \right]} = -219.605$$

$$D_4 = \frac{\partial f_1}{\partial T_4} = \frac{1}{\left[\ln \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_2} \right]} - \frac{1}{\left[\ln \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_2} \right]} = 219.605$$

Finalmente se encuentra:

$$f \cong f_1 + D_1(T_1 - T_{1s}) + D_2(T_2 - T_{2s}) + D_3(T_1 - T_{1s}) + D_4(T_4 - T_{4s}) \quad (A3-3)$$

Definiendo:

$$f_2 = \left[\frac{(T_1 - T_2)}{\ln \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_2} \right)} \right] = f_{2s} + \frac{\partial f_2}{\partial T_1} (T_1 - T_{1s}) + \frac{\partial f_2}{\partial T_2} (T_2 - T_{2s}) + \frac{\partial f_2}{\partial T_1} (T_1 - T_{1s}) + \frac{\partial f_2}{\partial T_2} (T_2 - T_{2s}) \quad (A3-4)$$

Realizando las derivadas parciales de cada término de la ecuación (A3-2) y evaluando dichas derivadas en el estado estacionario, se encuentra:

$$D_1 = \frac{\partial f_2}{\partial T_1} = -\frac{\frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_2}}{\left[\ln \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_2} \right]} = -220.117$$

$$D_4 = \frac{\partial f_2}{\partial T_4} = \frac{\frac{T_2 - T_3}{T_4 - T_4}}{\left[\ln \frac{T_4 - T_4}{T_4 - T_4} \right]} = 220117$$

$$D_7 = \frac{\partial f_2}{\partial T_7} = \frac{1}{\left[\ln \frac{T_4 - T_4}{T_4 - T_4} \right]^2} + \frac{1}{\left[\ln \frac{T_2 - T_3}{T_4 - T_4} \right]} = 190950$$

$$D_8 = \frac{\partial f_2}{\partial T_8} = -\frac{1}{\left[\ln \frac{T_4 - T_4}{T_4 - T_4} \right]} - \frac{1}{\left[\ln \frac{T_2 - T_3}{T_4 - T_4} \right]} = -190950$$

Finalmente se encuentra:

$$f_2 \cong f_{2,4} + D_4(T_1 - T_{1,4}) + D_6(T_4 - T_{4,4}) + D_7(T_7 - T_{7,4}) + D_8(T_8 - T_{8,4}) \quad (A3-5)$$

Combinando las ecuaciones (A3-3) y (A3-5) se llega a la expresión (4.21).

APÉNDICE 4

RELACIÓN ENTRE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DEL CAMBIADOR DE CALOR I, POR TUBOS Y ÁNULO

Teniendo las ecuaciones:

$$\bar{T}_1 = G_1 \bar{T}_1 + G_2 \bar{T}_4 + G_3 \bar{T}_2 \quad (\text{A4-1})$$

$$\bar{T}_4 = G_4 \bar{T}_2 + G_5 \bar{T}_1 + G_6 \bar{T}_1 \quad (\text{A4-2})$$

Sustituyendo (A4-2) en (A4-1) se encuentra:

$$\bar{T}_1 = G_1 \bar{T}_1 + G_2 (G_4 \bar{T}_2 + G_5 \bar{T}_1 + G_6 \bar{T}_1) + G_3 \bar{T}_2$$

$$\bar{T}_1 = G_1 \bar{T}_1 + G_2 G_4 \bar{T}_2 + G_2 G_5 \bar{T}_1 + G_2 G_6 \bar{T}_1 + G_3 \bar{T}_2$$

Agrupando términos se obtiene:

$$\bar{T}_1 - G_2 G_5 \bar{T}_1 = G_1 \bar{T}_1 + G_2 G_4 \bar{T}_2 + G_2 G_6 \bar{T}_1 + G_3 \bar{T}_2$$

$$\bar{T}_1 (1 - G_2 G_5) = (G_1 + G_2 G_6) \bar{T}_1 + (G_3 + G_2 G_4) \bar{T}_2$$

Finalmente se tiene:

$$\bar{T}_1 = \frac{G_1 + G_2 G_6}{1 - G_2 G_5} \bar{T}_1 + \frac{G_3 + G_2 G_4}{1 - G_2 G_5} \bar{T}_2 \quad (\text{A4-3})$$

APÉNDICE 5

RELACIÓN ENTRE VARIABLES DE ENTRADA Y VARIABLES DE SALIDA PARA LA RED DE INTERCAMBIADORES DE CALOR

Como ejemplo se muestra el desarrollo llevado a cabo para obtener la ecuación (4.51):

$$\frac{\bar{T}_1}{\bar{T}_2} = G_s = \frac{G_1 + G_2 G_4}{1 - G_2 G_4} \quad (\text{A5-1})$$

Conociendo las funciones de transferencia,

$$G_2 = \frac{K_{p2}}{\tau_{p1}s + 1}; \quad G_1 = \frac{K_{p1}}{\tau_{p1}s + 1}; \quad G_4 = \frac{K_{p4}}{\tau_{p2}s + 1}; \quad G_3 = \frac{K_{p3}}{\tau_{p2}s + 1}$$

Sustituyendo las funciones de transferencia respectivas se encuentra

$$G_s = \frac{\left[\frac{K_{p1}}{\tau_{p1}s + 1} \right] + \left[\frac{K_{p2}}{\tau_{p1}s + 1} \right] \left[\frac{K_{p4}}{\tau_{p2}s + 1} \right]}{1 - \left[\frac{K_{p2}}{\tau_{p1}s + 1} \right] \left[\frac{K_{p4}}{\tau_{p2}s + 1} \right]} \quad (\text{A5-2})$$

$$G_s = \frac{\frac{1}{\tau_{p1}s + 1} \left[K_{p1} + \frac{K_{p2} K_{p4}}{\tau_{p2}s + 1} \right]}{1 - \left[\frac{1}{\tau_{p1}s + 1} \right] \left[\frac{K_{p2} K_{p4}}{\tau_{p2}s + 1} \right]} \frac{\tau_{p2}s + 1}{\tau_{p1}s + 1}$$

$$G_4 = \frac{\left[K_{p1} + \frac{K_{p2}K_{p4}}{\tau_{p2}s+1} \right]}{(\tau_{p1}s+1) - \left[\frac{K_{p2}K_{p4}}{\tau_{p2}s+1} \right]} \frac{\tau_{p1}s+1}{\tau_{p2}s+1}$$

$$G_4 = \frac{(\tau_{p2}s+1)K_{p1} - K_{p2}K_{p4}}{(\tau_{p1}s+1)(\tau_{p2}s+1) - K_{p2}K_{p4}}$$

$$G_4 = \frac{(\tau_{p2}s+1)K_{p1} + K_{p2}K_{p4}}{\tau_{p1}\tau_{p2}s^2 + (\tau_{p1} + \tau_{p2})s + 1 - K_{p2}K_{p4}} \frac{\frac{1}{1 - K_{p2}K_{p4}}}{\frac{1}{1 - K_{p2}K_{p4}}}$$

$$G_4 = \frac{\left[(\tau_{p2}s+1)K_{p1} + K_{p2}K_{p4} \right] \left(\frac{1}{1 - K_{p2}K_{p4}} \right)}{\tau_{p1}\tau_{p2}s^2 + (\tau_{p1} + \tau_{p2})s + 1 - K_{p2}K_{p4}} \quad (\text{A5-3})$$

Definiendo:

$$\tau^2 = \frac{\tau_{p1}\tau_{p2}}{1 - K_{p2}K_{p4}} \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{\tau_{p1}\tau_{p2}}{1 - K_{p2}K_{p4}}}$$

$$2\xi\tau = \frac{\tau_{p1} + \tau_{p2}}{1 - K_{p2}K_{p4}} \Rightarrow \xi = \frac{\tau_{p1} + \tau_{p2}}{2(1 - K_{p2}K_{p4})\sqrt{\frac{\tau_{p1}\tau_{p2}}{1 - K_{p2}K_{p4}}}}$$

Entonces:

$$G_4 = \frac{\frac{\tau_{p2}s+1}{1 - K_{p2}K_{p4}} K_{p1} + \frac{K_{p2}K_{p4}}{1 - K_{p2}K_{p4}}}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \quad (\text{A5-4})$$

En la página 4-15 se encuentran las nuevas ganancias definidas a partir de la ecuación anterior.

Una vez sustituidas estas ganancias, se factoriza la ecuación encontrándose la expresión (4.51).

REFERENCIAS

1. *Basic Principles and Calculations in Chemical Engineering*, 3rd edit., by D. M. Himmelblau, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J. (1974).
2. *Chemical Process Control*, by George Stephanopoulos, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J.
3. *Control Automático de Procesos*, 1ra edic., C. A. Smith y A. B. Corripio, Limusa, México (1991).
4. *Ingeniería de Control Moderna*, 1ra edic. Ogata. Katsuhiko., Prentice-Hall., México (1980).
5. *Design Concepts for Process Control*, by A. Kestenbaum, R. Shinnar and F. E. Thau. Ind. Eng. Chem., Proc. Des. Dev., 15, 2 (1976).
6. *Techniques of Process Control*, by P. S. Buckley, John Wiley & Sons. Inc., New York (1964).
7. *Process Control Systems*, 2nd edit., by F. G. Shinskey, McGraw-Hill Book Company, New York (1979).
8. *Introducción a la Termodinámica en Ingeniería Química*, 2da. edic., J. M. Smith y H. C. Van Ness, McGraw-Hill, México (1991).
9. *Procesos de Transferencia de Calor*, 1ra. edic., Donald Q. Kern, CECSA, México (1994).
10. *Operational Mathematics*, 2nd. edit., by R. V. Churchill, McGraw-Hill Book Company, New York (1958).
11. *Applied Numerical Methods*, by B. Carnahan, H. R. Luther, and J. D. Wilkes, John Wiley & Sons. Inc., New York (1969).
12. *Handbook of Mathematical Functions*, by M. Abramowitz and I. A. Stegun, Dover Publications, New York (1972).
13. *Process Instruments and Controls Handbook*, by D. M. Considine, McGraw-Hill Book Company New York (1957).

Referencias

14. *Measurements and Control Applications for Practicing Engineers*, by J. O. Hougén, Cahners Books, Boston (1972).
15. *Process Modeling Simulation and Control for Chemical Engineers*, by Luyben, W., 2da. edic., McGraw-Hill, New York, México, McGraw-Hill, (1990).
16. *Process Systems Analysis and Control*, Coughanowr, D. and L. B. Koppel. New York, McGraw-Hill, (1965).