25
26-

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

JUEGOS DIFERENCIALES Y PROBLEMAS DE EVADIBILIDAD

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

A B E L M O R A L E S C O R O N A

DIRECTOR DE TESIS: DR. MANUEL JESUS FALCONI MAGAÑA

MEXICO, D.F. 1997

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
JUEGOS DIFERENCIALES Y PROBLEMAS DE EVADIBILIDAD

realizado por ABEL MORALES CORONA

con número de cuenta 8625164-6 **, pasante de la carrera de** MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. MANUEL JESUS FALCONI MAGAÑA
Propietario	Dr. FAUSTINO SANCHEZ GARDUÑO
Propietario	Dra. LOURDES ESTEVA PERALTA
Suplente	Dr. HECTOR FIDENCIO SANCHEZ MORGADO F Sánchez M
Suplente	M. en C. GUILLERMO GOMEZ ALCARAZ

Consejo Departamental de Matemáticas
DR. MANUEL FALCONI MAGAÑA

Indice

1. Introducción

Un juego matemático es la versión abstracta de la interacción de dos entes cuyo objetivo, en términos generales es obtener una cierta ventaja o ganancia a costa del otro, pero sujetándose a una serie de reglas que determinan los "movimientos" (estrategias) que realiza cada participante con el fin de obtener la victoria.

La teoría de juegos es uno de los desarrollos más interesantes de nuestra época. Se interesa en el análisis de estrategias: cómo adoptar las mejores variaciones del juego para evitar la derrota ante un adversario combatiente; como sacar partido de una mala situación o como elegir la buena, al enfrentarse con un competidor muy racional y analítico.

En los años de 1940 el impacto de la teoría de juegos fue muy intenso debido sobre todo a la influyente obra clásica "*The Theory of Games and Economic Behavior*", escrita por Von Neumann y Morgenstern, ver [Fr], la cual fue publicada en el año de 1944.

Von Neumann y Morgenstern investigaron dos planteamientos distintos de la teoría de juegos. El primero de ellos es el planteamiento estratégico o no cooperativo. Este planteamiento requiere especificar muy detalladamente lo que los jugadores pueden y no pueden hacer durante el juego, y después buscar para cada jugador una estrategia óptima. Von Neumann y Morgenstern resolvieron este problema en el caso particular de juegos con dos jugadores cuyos objetivos son diametralmente opuestos, esto es que cualquier ganancia para un jugador se equilibra exactamente por una pérdida correspondiente para el otro jugador. A estos juegos se les llama estrictamente competitivos o de suma cero.

En la segunda parte de su libro, Von Neumann y Morgenstern desarrollaron el planteamiento coalicional o cooperativo, en el que buscaron describir la conducta óptima en juegos con más jugadores. Puesto que este es un problema bastante más difícil, no es sorprendente que sus resultados fueron menos precisos que los alcanzados para el caso de suma cero y dos jugadores.

Dado que los trabajos de Von Neumann estaban bajo los auspicios de la fuerza aérea de los Estados Unidos sus trabajos trataban principalmente con problemas militares. Así la teoría de juegos nace como el análisis del conflicto, es decir, la planeación de la guerra.

En un juego en el que no se sabe quien puede ganar, la teoría de juegos puede mostrar como hallar la estrategia que se acercará más a un resultado de empate. Como consecuencia de esto se tiene la idea de minimización de las máximas perdidas llamados "minimáximos" o "puntos silla" de Von Neumann, concepto alrededor del cual ha girado mucha de la investigación matemática de los juegos.

Dentro de la teoría de juegos, existe una clase muy importante que se aplica en muchos campos del conocimiento y se le llama *juegos diferenciales*.

Los términos juegos diferenciales y problemas de persecusión fueron introducidos por el matemático americano Rufus Isaacs, ver [Ru], en un trabajo no editado que se dio a conocer en 1965; en esta época aparecen numerosos tratados sobre el tema, aunque muchos de ellos sólo tienen demostraciones heurísticas o bien están establecidas bajo hipótesis falsas. Por el lado soviético debe reconocerse el trabajo de la escuela de Pontriagin, ver [Po], quien junto con Isaacs son considerados los fundadores de esta teoría.

En este trabajo se consideran los juegos diferenciales que aparecen como modelos matemáticos de la interacción entre dos partículas que tienen propósitos opuestos, de modo que cada una de ellas tiene la posibilidad de alterar su ley de movimiento para lograr sus fines. De hecho, supondremos que el objetivo de una de las partículas - llamada perseguidor- es alcanzar a la otra; esta última -llamada evasor- a su vez buscará no ser alcanzada por el perseguidor. Por ejemplo, supongamos que se tiene dos partículas cuya dinámica está descrita por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= x + f(u,v) \\ \ddot{y} &= \alpha\dot{y} + \beta y + g(u,v)\,. \end{aligned}$$

De lo anterior al restar la primera ecuación de la segunda se tiene

$$\ddot{y} - \ddot{x} = \alpha\dot{y} + \beta y - x + g(u,v) - f(u,v)\,,$$

la que haciendo el cambio de variable $z_1 = x - y$, $z_2 = x$; $z_3 = \dot{x}$; $z_4 = y$; $z_5 = \dot{y}$, se escribe como el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \\ \dot{z}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

o bien

$$\dot{z} = Az + F(u, v),$$

Como se quiere que $z_1 = x - y \neq 0$ entonces se busca que, para toda u exista v tal que la solución z del sistema no pase por el subespacio $M = \{(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)^T \mid z_1 = 0\}$. De lo anterior se tiene que si $x(t)$ y $y(t)$ son la posición del perseguidor y del evasor al tiempo t respectivamente entonces el objetivo del perseguidor se habrá cumplido si existe t tal que $x(t) - y(t) = 0$. Por el contrario, el propósito del evasor será que $x(t) - y(t) \neq 0$, para toda t.

Por lo visto en el ejemplo y dado que la posición de las partículas y el tiempo, cambian continuamente el problema se puede modelar por medio de una ecuación diferencial

$$\dot{z}(t) = F(z, u, v)\,;\; z(0) = z_0$$

En muchos de los trabajos de este tipo se considera que un jugador tiene constantemente información de la manera como se mueve el otro jugador, y puede utilizar este conocimiento para decidir su acción en el futuro. En los juegos que llamamos de evasión se supone que el evasor tiene conocimiento de la manera como el perseguidor se está moviendo y así tiene la posibilidad de cambiar su movimiento de manera conveniente.

Nuestro objetivo en este trabajo es presentar un análisis y obtener algunos resultados sobre evadibilidad para el caso en el cual el espacio de estados es de dimensión dos. Este caso, aunque relativamente sencillo, es muy importante en las aplicaciones.

La presente tésis está dividida en cuatro capítulos. En el primero se da la introducción. El Capítulo 2 se encuentra integrado por tres teoremas de evadibilidad obtenidos de artículos cuyos autores son: Falconi, Yugai, y Yong, ver [Fa], [Ji], [Yu]. Al término de cada teorema se incluye un ejemplo y posteriormente se comparan resultados. La demostración de los teoremas se hace al final del capítulo.

Dado que los teoremas de evadibilidad vistos en el Capítulo 2 sólo se aplican a espacios cuya dimensión es mayor o igual que tres, en el Capítulo 3 se hace un análisis para espacios de dimensión dos considerando diferentes subespacios. Cabe señalar que el análisis de este tipo de sistemas no se encuentran reportados en la literatura correspondiente de juegos diferenciales.

Al final se incluye un apéndice en el cual se da la teoría básica de ecuaciones diferenciales como son: Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales en su forma homogénea, definición de e^{At} donde A es una matriz de $n \times n$, definición de matriz fundamental de soluciones, y solución del sistema no homogéneo por el método de variación de parámetros. Además se estudia la forma canónica de Jordan; se enuncian algunos teorema y se da un algoritmo para descomponer un espacio vectorial en suma directa de subespacios invariantes cuya representación matricial es sencilla.

2. Juegos Diferenciales

Supongamos que hay dos partículas que se mueven en un espacio euclidiano con cierta dinámica. El propósito de la primera partícula, a la que llamaremos *perseguidor*, es alcanzar a la segunda partícula que llamaremos *evasor*. Se supone que para lograr su objetivo el perseguidor tiene la posibilidad de alterar su ley de movimiento mediante cambios en los parámetros del sistema y, a su vez, el evasor tratará de evitar que lo alcancen modificando también su ley de movimiento de manera conveniente.

Un problema como el que se acaba de describir se llamará *juego diferencial* si la dinámica asociada a ambos, el perseguidor y el evasor, se describe por medio de ecuaciones diferenciales. En este capítulo estudiaremos juegos diferenciales casi-lineales.

2.1. Juegos diferenciales casi-lineales

Antes de plantear el problema de juegos diferenciales, se dará un ejemplo sencillo que servirá para ilustrar el problema y motivar los teoremas de evadibilidad

Supongamos que se tienen dos partículas x_1, x_2 que se mueven sobre una recta y cuya dinámica está dada por las ecuaciones

$$\dot{x}_1 = x_1; \ \dot{x}_2 = x_2,$$

$$x_1(0) = x_1^0, \ x_2(0) = x_2^0$$

Si al inicio se tiene que $x_1^0 < x_2^0$ entonces $x_1(t) \neq x_2(t)$ para todo tiempo t. De esta forma x_1 nunca alcanza a x_2.

Nuevamente supongamos el mismo problema, pero ahora la partícula x_1 puede modificar a cada instante su velocidad, utilizando para ello un control $u(t)$, entonces la dinámica estaría dada por

$$\dot{x}_1 = x_1 + u; \ \dot{x}_2 = x_2.$$

La pregunta es, si ¿existe una elección del control $u(t)$ en cada instante t, de modo que $x_1$alcance a x_2?. En las coordenadas z dada por $z = x_1 - x_2$, la pregunta anterior se expresa del modo siguiente: ¿existe una función $u(t)$ tal que la solución de

$$\dot{z} = z + u, \; z(0) = z_0$$

pasa por el cero?.

El análisis es muy simple. Puesto que la solución de la ecuación anterior está dada por

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 e^t + \textstyle\int_0^t e^{t-s} u(s)\, ds \\ &= e^t \left(z_0 + \textstyle\int e^{-s} u(s)\, ds\right) \end{aligned}$$

entonces $z(t) = 0$, si y sólo si

$$z_0 + \int_0^t e^{-s} u(s)\, ds = 0,$$

esta ecuación puede o no tener solución, dependiendo de como sea z_0 y del conjunto de valores posibles del control u.

Una situación un poco más interesante se obtiene si consideramos que la partícula x_2 puede a su vez elegir un parámetro v para evitar que la partícula x_1 la alcance. De esta forma la dinámica estaría dada por

$$\dot{x}_1 = x_1 + u; \; \dot{x}_2 = x_2 + v,$$

que en las coordenadas $z = x_1 - x_2$ se convierten en

$$\dot{z} = z + u - v, \; z(0) = z_0.$$

La pregunta ahora sería, ¿dado el control u se puede elegir un control v tal que la solución de la ecuación anterior pasa por el cero?.

Al igual que antes la solución de la ecuación está dada por

$$z(t) = e^t \left(z_0 + \int_0^t e^{-s}[u(s) - v(s)]ds\right)$$

entonces $z(t) = 0$, si y sólo si

$$z_0 + \int_0^t e^{-s}[u(s) - v(s)]ds = 0,$$

nuevamente se ve que esta ecuación puede o no tener solución, dependiendo de como se elijan u y v. Notemos que la respuesta a el problema planteado depende fuertemente de la forma como se elijan los parámetros. Si la partícula dos no desea ser alcanzada y en el momento t en que elige un control $v(t)$, tiene conocimiento del control $u(t)$ elegido por la partícula uno, el juego se llama de evasión. De modo general el problema nos lleva al planteamiento de una ecuación de la forma $\dot{z} = Az(t) + F(u,v)$, y a buscar estrategias de selección de los parámetros u, v que nos permitan asegurar que la solución correspondiente toca o no a un cierto subespacio M.

Consideremos el juego diferencial dado por la ecuación:

$$\dot{z}(t) = Az(t) + F(u(t), v(t)), \; t \geq 0 \tag{2.1}$$

$$z(0) = z_0,$$

donde $z, z_0 \in IR^n$, son la trayectoria y la trayectoria inicial, $u \in U \subset IR^p, v \in V \subset IR^q$ son los controles del perseguidor y del evasor respectivamente. A es una matriz de $n \times n$ y $F : U \times V \rightarrow IR^n$ es una función continua. Además consideramos un subespacio M de IR^n y su complemento ortogonal que denotamos por $M^\perp$ y $\prod$ que es la función proyección

$$\prod : IR^n \rightarrow M^\perp.$$

El juego termina cuando la trayectoria z llega al subespacio M. Así M es llamado el conjunto terminal. El objetivo del perseguidor es terminar el juego al seleccionar un control apropiado

$$u(\cdot) \in U = \{u : [0, \infty) \rightarrow U, \text{medible}\},$$

por su parte el evasor tratará de evitar que el juego termine al tomar un control apropiado

$$v(\cdot) \in V = \{v : [0, \infty) \rightarrow V, \text{medible}\}.$$

En un juego de evasión, como el que se considera en este trabajo, el perseguidor toma los controles $u(\cdot) \in U$ al inicio del juego. El evasor, por su parte, tomará los controles $v(\cdot) \in V$ conforme se vaya desarrollando el juego y puede usar elementos del conjunto $\{z(s), u(s) \,|\, 0 \leq s \leq t\}$ cuando toma el valor $v(t)$ del control de evasión $v(\cdot) \in V$ al tiempo t.

En la discusión de evadibilidad, usualmente se supone alguna superioridad del evasor sobre el perseguidor. En particular para un juego de la forma (2.1), se supone que

$$0 \in Int\left(\bigcap_{u\in U} F(u,V)\right),$$

esto significa que para cada uno de los parámetros $u \in U$ que puede tomar el perseguidor, el evasor tiene la posibilidad de tomar por lo menos un parámetro $v \in V$ tal que $F(u,v) = 0$ y así, la trayectoria $z(t)$ descrita por la ecuación (2.1) no es alterada por los parametros u, v. Lo que es un modo típico de asegurar que el evasor tiene más "poder" que el perseguidor. En el primer teorema de evadibilidad supondremos que la superioridad del evasor sobre el perseguidor es débil; es decir,

$$0 \in \bigcap_{u\in U} coF(u,V),$$

donde $coF(u,V)$ denota la cerradura convexa. Al tomar la cerradura convexa en la intersección lo que se está haciendo es considerar el conjunto más pequeño que contiene al cero y por lo tanto se reduce el número de controles que puede utilizar el evasor, para contrarrestar el efecto del perseguidor. Es en este sentido que la superioridad del evasor es débil.

Una vez hecho el planteamiento del problema se procederá a dar algunos teoremas de evadibilidad, tomados de trabajos recientes ver [Fa], [Ji], [Yu]. Se darán ejemplos y se compararán los resultados. Las demostraciones de los teoremas se darán al final de este capítulo.

Antes de enunciar el primer teorema de evadibilidad se dan las siguientes definiciones:

Definición 2.1. *Si A es una matriz de $n \times n$ sobre F, el polinomio minimal de A es el polinomio mónico generador (único) del ideal de los polinomios sobre F que anulan a A.*

Este polinomio lo denotaremos por:

$$\varphi(\lambda) = \lambda^k - a_{k-1}\lambda^{k-1} - \ldots\ldots - a_0. \tag{2.2}$$

Para que el juego (2.1) termine, $z(t)$ debe de intersectar al subespacio M, esto se da de manera más precisa en la siguiente definición:

Definición 2.2. *El juego se dice que es evadible, si para toda $z_0 \in I\!R^n/M$ y $u \in U$, existe una $v \in V$ tal que*

$$d\,(M, z\,(t)) > 0 \text{ para toda } t \geq 0$$

donde $z\,(t)$ es la trayectoria cuya dinámica está dada por la ecuación (2.1), correspondiente a $u \in U$, $v \in V$ y d es la distancia euclidiana definida en $I\!R^n$.

Ahora sí, enunciamos el teorema:

Teorema 2.1. *El juego de evasión definido por (2.1);*

$$\begin{gathered} \dot{z} = Az + F\,(u, v)\,,\ t \geq 0 \\ z\,(0) = z_0 \end{gathered}$$

y conjunto terminal M es evadible si cumple las condiciones siguientes
a) El polinomio minimal de A está dado por (2.2) con $k < n$.
b) El conjunto terminal M es un subespacio de $I\!R^n$ con $\dim M^{\perp} = m \geq k$.
c) Existe $0 \leq i_0 \leq k-1$ y $\delta > 0$ tal que

$$\begin{gathered} \prod A^i F\,(U, V) = \{0\},\ 0 \leq i \leq i_0 - 1 \\ 0 \in \textstyle\bigcap_{u \in U} co \begin{pmatrix} \prod A^{i_0} F\,(u, V) \\ \vdots \\ \prod A^{k-1} F\,(u, V) \end{pmatrix} \\ \inf_{u \in U} \inf_{\psi \in M^{\perp}, \|\psi\| = 1} \max_{v \in V} \left|\left\langle \psi, \prod A^{i_0} F\,(u, v)\right\rangle\right| \geq \delta \end{gathered}$$

donde $\prod : I\!R^n \rightarrow M^{\perp}$ es la proyección ortogonal.

Nótese que la condición c) de este teorema es una variación de la condición $0 \in \bigcap_{u \in U} coF\,(u, V)$.

Nota 2.1. *Si $0 \in \bigcap_{u \in U} coF\,(u, V)$ es claro que*

$$0 \in \bigcap_{u \in U} co \begin{pmatrix} \prod A^{i_0} F\,(u, V) \\ \vdots \\ \prod A^{k-1} F\,(u, V) \end{pmatrix}$$

A continuación se da un ejemplo donde se aplica el Teorema 2.1.

Ejemplo 1 Consideremos el juego diferencial dado por el siguiente sistema.

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3(u,v) \\ f_4(u,v) \end{pmatrix} \equiv Az + F(u,v)$$

donde

$$u(t) = (u_1, u_2, u_3)^T, v(t) = (v_1, v_2, v_3)^T,$$

$$\begin{pmatrix} f_3(u,v) \\ f_4(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v_3 & -\sin v_3 \\ \sin v_3 & \cos v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos u_3 & -\sin u_3 \\ \sin u_3 & \cos u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

y $z_i \in I\!R$, $u_1^2+u_2^2 \leq \lambda_1^2$, $v_1^2+v_2^2 \leq \lambda_2^2$, $|u_3| \leq \beta_1$, $|v_3| \leq \beta_2$. De la forma como están definidos los elementos de U y V se tiene que estos conjuntos son dos cilindros. El subespacio $M = \{(z_1, z_2, z_3, z_4)^T | z_1 = z_2 = 0\}$.

En este ejemplo suponemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ y $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ lo que implica que $U = V$. Por lo tanto el evasor y el perseguidor tienen el mismo "poder".

Veamos si el ejemplo cumple con las hipótesis del Teorema 2.1, para la evadibilidad.

En este caso la función F es una función continua, $U = V$ es compacto porque es cerrado y acotado como se ve fácilmente de la definición.

Es inmediato verificar que $A^2 = 0$, por lo tanto su polinomio minimal es λ^2, y $k = 2$ y como $n = 4$, se cumple que $2 < 4$, por lo cual la dim $M^{\perp} = 2$ así $M^{\perp} = \{(z_1, z_2, z_3, z_4)^T | z_3 = z_4 = 0\}$.

De esta manera las condiciones (a),(b) del Teorema 2.1 se cumplen y sólo queda por verificar (c).

Consideremos la proyección ortogonal $\prod : I\!R^4 \to M^{\perp}$, se debe de demostrar que existe i_0, $0 \leq i_0 \leq 1$, tal que $\prod A^i F(U, V) = \{0\}$ con $0 \leq i \leq i_0 - 1$. Pero como

$$\prod A^0 F(u,v) = \prod \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3(u,v) \\ f_4(u,v) \end{pmatrix} = \{0\}$$

y

$$\prod AF(u,v) = \begin{pmatrix} f_3(u,v) \\ f_4(u,v) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

esto implica que $i=0$ y por lo tanto $i_0=1$.

Ahora se demostrará que

$$0 \in \bigcap_{u\in U} \prod AF(u,V).$$

Pero

$$\prod AF(u,v) = \begin{pmatrix} f_3(u,v) \\ f_4(u,v) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (u,v) \in U \times V$$

donde $U = V = \beta_\lambda^2 \times [-\beta,\beta]$, $\beta_\lambda^2(0) = \{y \in IR | \, \|y\| \le \lambda\}$ y $F(u,u) = 0$, para toda $u \in U$. Por lo tanto se cumple que $0 \in \bigcap_{u\in U} \prod AF(u,u)$.

Sólo queda por demostrar que existe un $\delta > 0$ tal que;

$$\inf_{u\in U} \inf_{\psi\in M^\perp, \|\psi\|=1} \max \left| \left\langle \psi, \prod AF(u,v) \right\rangle \right| \ge \delta.$$

Sea $\psi \in M^\perp$ entonces ψ es de la forma $\psi = (\eta, 0)$ con $\eta \in IR^2$ y $\|\eta\| = 1$. Tomemos una $u \in U$ y $v \in V$ con $v_3 = u_3$ entonces se tiene

$$\left\langle \psi, \prod AF(u,v) \right\rangle = \eta^T \cdot (f_3(u,v), f_4(u,v), 0, 0)^T, \tag{2.3}$$

pero, por definición

$$\begin{pmatrix} f_3(u,v) \\ f_4(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v_3 & -\sin v_3 \\ \sin v_3 & \cos v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos u_3 & -\sin u_3 \\ \sin u_3 & \cos u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

y dado que $v_3 = u_3$ entonces

$$\begin{pmatrix} f_3(u,v) \\ f_4(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u_3 & -\sin u_3 \\ \sin u_3 & \cos u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Por lo tanto de las igualdades (2.3) y (2.4)

$$\left\langle \psi, \prod AF(u,v) \right\rangle = \eta^T \begin{pmatrix} \cos u_3 & -\sin u_3 \\ \sin u_3 & \cos u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Denotemos por

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u_3 & \sin u_3 \\ -\sin u_3 & \cos u_3 \end{pmatrix} \eta,$$

con $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$. Entonces $\|\xi\| = 1$. Así, sea

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -\lambda \left[sgn\left(u_1\xi_1 + u_2\xi_2\right)\right]\xi. \tag{2.6}$$

Si definimos a R como

$$R = \begin{pmatrix} \cos u_3 & -\sin u_3 \\ \sin u_3 & \cos u_3 \end{pmatrix} \text{ con } R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos u_3 & \sin u_3 \\ -\sin u_3 & \cos u_3 \end{pmatrix},$$

entonces usando esta notación

$$\xi = R^{-1}\eta.$$

Definimos $w = -\lambda\left[sgn\left\langle R^{-1}\eta, (u_1, u_2)\right\rangle\right]$. Así (2.6) es igual a

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = wR^{-1}\eta,$$

de esta forma

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} wR^{-1}\eta \\ u_3 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left|\langle\psi, \textstyle\prod AF(u,v)\rangle\right| &= \left|\eta_1 f_3(u,v) + \eta_2 f_4(u,v)\right| = \left|\left\langle \eta, \left(f_3(u,v), f_4(u,v)\right)^T\right\rangle\right| \\ &= \left|\langle\eta, R(u-v)\rangle\right| = \left|\langle\eta, Ru - R(wR^{-1}\eta)\rangle\right| \\ &= \left|\langle\eta, Ru - w\eta\rangle\right| = \left|\langle\eta, Ru\rangle - \langle\eta, w\eta\rangle\right| \end{aligned}$$

y como $\langle\eta, Ru\rangle = \langle R^{-1}\eta, u\rangle$ lo anterior es igual a

$$\begin{aligned} \left|-w + \langle R^{-1}\eta, u\rangle\right| &= \left|\lambda sgn\langle R^{-1}\eta, u\rangle + \langle R^{-1}\eta, u\rangle\right| \\ &= \lambda + \left|\langle R^{-1}\eta, u\rangle\right| > \lambda. \end{aligned}$$

Se concluye que (2.3) es mayor que λ, lo que implica que existe $\delta = \lambda$, de esta manera todas las condiciones del teorema se cumplen por lo que el sistema es evadible.

El sistema analizado en este ejemplo tiene una interpretación física interesante, en efecto, supongamos que se tiene dos partículas (aviones por ejemplo) moviéndose en un plano cuyas posiciones están dadas por $(x_1, x_2)^T$, $(y_1, y_2)^T$ respectivamente. Si introducimos las variables $z_1 = x_1 - y_1$, $z_2 = x_2 - y_2$, para que un avión alcance al otro se debe de cumplir que $z_1 = 0$, $z_2 = 0$. Sean $z_3 = \dot{x}_1 - \dot{y}_1$, $z_4 = \dot{x}_2 - \dot{y}_2$, las velocidades relativas, es decir, la velocidad con que los aviones se acercan o se separan. Si los aviones llevaran movimiento rectilíneo uniforme, las trayectorias estarían dadas por $\dot{z}_1 = z_3$; $\dot{z}_2 = z_4$; $\dot{z}_3 = 0$; $\dot{z}_4 = 0$. Supongamos ahora que existen medios externos (alerones del avión etc.) que pueden alterar la aceleración del avión entonces la dinámica quedaría descrita por

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_3 \\ \dot{z}_2 &= z_4 \\ \dot{z}_3 &= f_3(u,v) \\ \dot{z}_4 &= f_4(u,v) \end{aligned}$$

Este sistema es del mismo tipo que el analizado en el ejemplo anterior. Así con esta interpretación se puede afirmar que se han dado condiciones para que un avión no alcance al otro. Nótese que en el ejemplo, f_3 y f_4 se pueden interpretar como giros de algunos componentes del avión (alerones etc.)

Antes de enunciar el segundo teorema de evadibilidad se dará la siguiente definición que se utilizará en la hipótesis del teorema.

Definición 2.3. *Dada la ecuación (2.1), se dice que la pareja (A,F) satisface la condición* **PM**, *si existen $\mu+1$ vectores, $z_0, z_1, \ldots\ldots, z_\mu$ y una bola $B \subset M^{\perp}$, tal que*

$$A^i F(U \times V) + z_i \in M,\ i = 0,1,2,\ldots.,\mu.$$

Además, para toda $w \in B$ y $u \in U$, existe $v \in V$ para el cual

$$\prod A^{\mu+1} F(u,v) = w. \tag{2.8}$$

La solución general de la ecuación $\dot{z} = Az + F(u,v)$ es una serie cuyos sumandos involucran términos de la forma $A^i F(u,v)$. La condición de que existen $z_0, z_1, \ldots, z_\mu$ vectores tal que $A^i F(u,v) + z_i \in M$ $i = 0,1,\ldots,\mu$ es sólo una cuestión técnica utilizada para determinar adecuadamente los primeros sumandos de la solución. En cambio la hipótesis de que para toda $w \in B$ y $u \in U$ existe $v \in V$ tal que $\prod A^{\mu+1} F(u,v) = w$ tiene una interpretación más interesante desde el punto de vista de la teoría de control, ya que refleja una cierta "superioridad" del evasor sobre el perseguidor. En fecto, dado cualquier control u elegido por el perseguidor, el evasor siempre puede tomar un control v de modo que el $\mu+1$ sumando cambie en una dirección ortogonal al subespacio blanco.

Teorema 2.2. *Dada la ecuación (2.1), el juego es evadible si la pareja* (A, F) *satisface la condición* **PM** *y la dimensión de* $M^{\perp}$ *es mayor o igual 2. Además, existe* $\varepsilon > 0$ *tal que si* $\rho(0) < \varepsilon$*, entonces podemos elegir una función* $v(t), 0 \leq t < \infty$*, tal que se cumple la siguiente desigualdad*

$$\rho(t) \geq \gamma(\vartheta(t))\, \rho_0^{\mu+2},$$

donde γ *es una función monótona decreciente, que no depende del punto inicial* z_0*.* $\rho = \|\prod z(t)\|$ *es la distancia de* z *al subespacio* M*, y* ϑ *es la distancia de* z *a* $M^{\perp}$*.*

Con esta notación se dice que la trayectoria $z(t)$ escapa de $M^{\perp}$si $\rho(t) > 0$
Ahora consideraremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2 Sean U, V subconjuntos compactos de IR^n $n \geq 2$. Supongamos que se tiene la pareja (f, g) de funciones continuas definida $U \times V$ con valores en IR^n con la propiedad que para cada $u \in U$ y $w \in B$, la ecuación

$$f(u, v) - g(u, v) = w \tag{2.9}$$

tiene una solución $v \in V$.

Denotemos por x la posición de la partícula, la cual persigue a otra cuya posición se denota por y. La ley de movimiento para x e y es

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \alpha\dot{x} &= f(u, v)\,; x \in IR^n, \\ \ddot{y} + \beta\dot{y} &= g(u, v)\,; y \in IR^n. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Se demostrará que para cada selección de $u(t)$, $t \geq 0$ del control u, hay una selección $v(t)$, $t \geq 0$ del control v, tal que $x(t) \neq y(t)$ para toda $t \geq 0$, donde $(x(t), y(t))^T$ es solución de la ecuación (2.1).

Si en el sistema anterior se hace el siguiente cambio de variable

$$z = (z_1, z_2, z_3)^T = (x - y, \dot{x}, \dot{y})^T,$$

entonces el subespacio que sirve de blanco es $M = \{(z_1, z_2, z_3)^T | z_1 = 0\}$, de esta manera el sistema (2.10) se transforma en

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ f(u, v) \\ g(u.v) \end{pmatrix} = Az + F(u, v)$$

Es claro que $F(U \times V) \subset M$ y $\prod AF(u,v) = f(u,v) - g(u,v)$; por lo tanto de la propiedad (2.9), se tiene que la condición **PM** se satisface con $\mu = 0$, y usando el Teorema 2.2 se llega a que el escape es posible.

El teorema de evadibilidad que a continuación se enunciará es menos general que los teoremas anteriores ya que la función F tiene la siguiente forma $F(u,v) = v - u + \alpha$, donde $\alpha \in I\!R^n$ es un vector fijo, sin embargo es interesante ya que considera que los controles $u(t)$, $v(t)$ son funciones escalonadas. Así que en este caso la ecuación (2.1) se reduce a

$$\dot{z} = Az - u + v + \alpha. \tag{2.11}$$

En el subespacio $M^{\perp}$ se considerará un subespacio W y S denotará la esfera unitaria contenida en W y con centro en el origen.

Teorema 2.3. *Supongamos que se tiene la ecuación 2.11, que existe un número entero positivo k y un número positivo λ tal que, si*
a) $\prod A^i(V - U) = 0, i = 0, 1, 2, \ldots.., k-2.$
b) $\dim W \geq k + 1.$
c) $\lambda S \subset \prod A^{k-1}V.$
d) $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ *son funciones escalonadas.*
Entonces el sistema es evadible.

En el siguiente ejemplo se ilustra el Teorema 2.3
Ejemplo 3 El comportamiento del perseguidor x y el evasor y está descrito por medio de la siguiente ecuación diferencial.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \alpha\dot{x} &= \rho u, \\ \ddot{y} + \beta\dot{y} &= \sigma v. \end{aligned} \tag{2.12}$$

donde $x, y, u, v \in I\!R^m$, $|u| \leq 1, |v| \leq, 1, \alpha, \beta, \rho, \sigma$, son números no negativos, $m \geq 3$.

Mediante el cambio de coordenadas $z_1 = x - y, z_2 = x, z_3 = y$ la ecuación (2.12) describe el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \rho u \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma v \end{pmatrix} = Az - \bar{u} + \bar{v} + \alpha \tag{2.13}$$

donde $\alpha = 0, z = (z_1, z_2, z_3)^T \in I\!R^{3m}$.

El conjunto terminal $M = \{z \in IR^{3m} | z_1 = 0\}, M^{\perp} = \{z \in IR^{3m} | z_2 = z_3 = 0\}$.

Se demostrará que la ecuación (2.13) cumple con las hipótesis para la evadibilidad.

Definimos a $W = M^{\perp}$ y S la esfera unitaria en W; por la forma como se definió $M^{\perp}$ se tiene que la $\dim W = \dim M^{\perp} = m$.

Por otra parte

$$\prod (\bar{v} - \bar{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho u \\ \sigma v \end{pmatrix} = 0,$$

para toda $|u| \leq 1, |v| \leq 1$, además

$$\prod A (\bar{v} - \bar{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho u \\ \sigma v \end{pmatrix} = \rho u - \sigma v, \qquad (2.14)$$

es decir, que $k = 2$, con lo cual se tiene la condición (a). La condición (b) se cumple si $\dim W = m \geq 3$. Además para toda $|v| \leq 1$, $\prod A\bar{v} = \sigma v$, por lo que $\lambda = \sigma$.

De esta manera se llega a que el juego es evadible si u, v son funciones escalonadas.

2.2. Comparación de los resultados

En esta sección compararemos los teoremas anteriores con el propósito de ver si alguno es más fuerte que el otro o sólo son complementarios. Para esto se aplicará cada teorema a cada uno de los ejemplos para analizar si pueden decidir o no la evadibilidad de la trayectoria.

Tomemos el Ejemplo 2 que fue analizado en el Teorema 2.2, y veamos si cumple con las hipótesis del Teorema 2.1,

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix} = Az + F(u,v)$$

con $z = (z_1, z_2, z_3)^T$, $M = \{(z_1, z_2, z_3)^T | z_1 = 0\}$, $M^{\perp} = \{(z_1, z_2, z_3)^T | z_2 = z_3 = 0\}$.

Claramente $f(u,v)$ y $g(u,v)$ son funciones continuas, y los conjuntos U, V son compactos.

Verificaremos si la condición (a) se cumple, para esto calculamos el polinomio minimal de A, dado por:

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & -1\\ 0 & \alpha-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\beta-\lambda\end{pmatrix}=\lambda^3-\lambda^2(\beta-\alpha)+\lambda\alpha\beta.$$

Por lo tanto $k=3$ y y en este caso $n=3$. Así la condición (a), no se cumple ya que $k<n$. Concluimos que el Teorema 2.1 no se aplica al Ejemplo 2.

Puesto que en el Ejemplo 3, al hacer el cambio de coordenadas se llega a un sistema de ecuaciones cuya matriz es la misma que la anterior, entonces se tiene que no satisface las condiciones del Teorema 2.1. Por lo cual el teorema no es aplicable a este ejemplo.

Consideremos el Ejemplo 1. y revisemos si cumple con las condiciones del Teorema 2.2.

$$\begin{pmatrix}\dot z_1\\ \dot z_2\\ \dot z_3\\ \dot z_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\f_3(u,v)\\f_4(u,v)\end{pmatrix}=Az+F(u,v).$$

El primer paso es ver si (A,F) satisface la condición **PM**; es decir, si existen $\mu+1$ vectores $z_0,z_1,\ldots..,z_\mu$ y una bola $B\subset M^\perp$ tal que

$$A^iF(u,v)+z_i\in M,\, i=1,2,\ldots..,\mu$$

donde $U=V=IR^3$

$$M=\{(z_1,z_2,z_3,z_4)^T|z_1=z_2=0\}$$

$$M^\perp=\{(z_1,z_2,z_3,z_4)^T\mid z_3=z_4=0\},\ \dim\ M^\perp=2.$$

Ahora bien

$$A^0F(u,v)=(0,0,f_3(u,v),f_4(u,v))^T\in M$$

$$AF(u,v)=(f_3(u,v),f_4(u,v),0,0)^T\in M^\perp.$$

Por lo tanto $\mu=0$.

Definiendo $B=\{(x_1,x_2)^T\,|x_1^2+x_2^2\leq\lambda^2\}$, demostraremos a continuación que para toda $w\in B$ y $u\in U$ existe $v\in V$ tal que

$$\prod AF(u,v)=w. \tag{2.15}$$

Supongamos $w \in B$ entonces $w = (w_1, w_2)^T$ y $w_1^2 + w_2^2 \leq \lambda^2$. Suponemos que $u_3 = v_3$ y como

$$\prod AF(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u_3 & -\sin u_3 \\ \sin u_3 & \cos u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

De (2.15) y (2.16) se obtiene

$$\begin{pmatrix} \cos u_3 & -\sin u_3 \\ \sin u_3 & \cos u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

de lo anterior

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos u_3 & \sin u_3 \\ -\sin u_3 & \cos u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Sólo queda demostrar que $\left\|(v_1, v_2)^T\right\| \leq \lambda$.

Denotemos por

$$R = \begin{pmatrix} \cos u_3 & \sin u_3 \\ -\sin u_3 & \cos u_3 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\|v\| = \|u - Rw\|.$$

Dado que la igualdad anterior se cumple para toda u y w, en particular existen $\bar{u}$ tal que $\|\bar{u}\| = \lambda$ y $\bar{w}$ tal que $R\bar{w} = -\bar{u}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|v\| &= \|\bar{u} - R\bar{w}\| = \|\bar{u} + \bar{u}\| \\ &= 2\|\bar{u}\| = 2\lambda, \end{aligned}$$

lo que implica que $\|v\| > \lambda$. Así se tiene que la condición **PM** no se satisface. De este modo, se concluye que el Teorema 2.2 no se aplica al Ejemplo 1.

Tomemos el Ejemplo 3 y veamos si cumple con las hipótesis del Teorema 2.2.

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \rho u \\ \sigma v \end{pmatrix} = Az + F(u,v).$$

con $u, v \in I\!R^\gamma, |u| \leq 1, |v| \leq 1, \alpha, \beta, \rho, \sigma$ números no negativos, y $z^T = (z_1, z_2, z_3)^T \in I\!R^{3\gamma}$. Suponemos que $\gamma \geq 2$.

Por verificar que la pareja (A, F) satisface la condición **PM.** Claramente la $\dim M^{\perp}$ es menor o igual que 2. Para constatar que se cumple la condición **PM** debemos encontrar $\mu + 1$ vectores $z_0, z_1, \cdots, z_\mu$ y una bola $B \subset M^{\perp}$ tal que

$$A^i F(u, v) + z_i \in M, i = 0, 1, 2, ..., \mu$$

y para toda $w \in B$ y $u \in U$ existe $v \in V$ tal que

$$\prod A^{\mu+1} F(u, v) = w.$$

Calculando

$$A^0 F(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho u \\ \sigma v \end{pmatrix} \in M$$

pero

$$AF(u, v) = \begin{pmatrix} \rho u - \sigma v \\ -\sigma \rho u \\ -\beta \sigma v \end{pmatrix} \notin M.$$

Por lo tanto $\mu = 0$.

Supongamos que existe una bola $B \subset M^{\perp}$ y que para toda $u \in U$ existe $v \in V$ tal que para toda $w \in B$

$$\prod AF(u, v) = w. \tag{2.17}$$

Entonces por (2.14)

$$\rho u - \sigma v = w, \text{ con } u, v, w \in IR^r$$

de donde

$$v = \sigma^{-1}(\rho u - w).$$

Por demostrar que $|v| \leq 1$.

$$|v| = \left|\sigma^{-1}(\rho u - w)\right| \geq \sigma^{-1}(|\rho u| - |w|),$$

como es para toda $w \in B$, en particular para w tal que $|w| < |\rho u|$. De este modo $|\rho u| - |w| > 0$ y si $\sigma < |\rho u| - |w|$ entonces $\sigma^{-1}(|\rho u| - |w|) > 1$. Por lo tanto no existe v que cumpla con (2.17) y cuya norma sea menor o igual a uno. De esta forma se concluye que el Teorema 2.2 no se aplica al Ejemplo 3.

Los Ejemplos 1,2 no cumplen con las hipótesis del Teorema 2.3 ya que las funciones no son escalonadas, por lo cual el teorema no se aplica a estos.

Al revisar los Ejemplos 2 y 3 observamos que no satisfacen las hipótesis del Teorema 2.1. Los Ejemplos 1 y 3 no satisfacen las hipótesis del Teorema 2.2 y los Ejemplos 1,2 no satisfacen las hipótesis del Teorema 2.3. Por lo anterior se concluye que los tres teoremas son diferentes y complementarios.

2.3. Demostraciones de los resultados principales

Esta última parte del capítulo la usaremos para dar las demostraciones de los Teoremas 2.1, 2.2 y 2.3 enunciados en la sección anterior.

Antes de demostrar el Teorema 2.1, se dan algunos resultados previos que serán necesarios en la demostración.

supongamos que A es una matriz de $n \times n$ cuyo polinomio minimal es el siguiente:

$$\varphi(\lambda) = \lambda^k - a_{k-1}\lambda^{k-1} - \dots\dots\dots - a_0 \text{ con } k \leq n \,. \tag{2.18}$$

La matriz asociada a este polinomio, llamada matriz compañera está dada por

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_0 \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & a_1 \\ \cdot & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \ddots & \ddots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & a_{k-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & a_{k-1} \end{pmatrix}, \; a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \cdot \; \\ \vdots \\ a_{k-2} \\ a_{k-1} \end{pmatrix},$$

$$e_i = \left(0, \dots\dots, 1^{(i)}, 0, \dots\dots 0\right)^T \in R^k, \; 0 \leq i \leq k-1$$

Lema 2.1. *Para toda* $t \in IR$

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{k-1} g_i(t)\, A^i$$

con

$$g_i(t) = \frac{t^i}{i!} + \frac{1}{k!}\int_0^t (t-\tau)^k \left\langle e_i, e^{\bar{A}t}a \right\rangle d\tau, 0 \leq i \leq k-1.$$

<u>Demostración:</u> Sea $g(t) = \left(g_0(t), g_1(t), \dots\dots, g_{k-1}(t)\right)^T$ solución única de la ecuación:

$$\frac{dg}{dt} = \overline{A}g \;,\; g(0) = e_0 \tag{2.19}$$

de (2.19) se tiene que $g(t) = e^{\overline{A}t}e_0$ entonces $g^{(i)}(t) = \bar{A}^i e^{\bar{A}t}e_0$ y $g^{(i)}(0) = \bar{A}^i e_0 = e_i$, para $0 \leq i \leq k-1$, además $g^{(k)}(t) = \bar{A}^k e^{\bar{A}t}e_0 = e^{\bar{A}t}\bar{A}^k e_0 = e^{\bar{A}t}a$. Ahora desarrollamos $g(t)$ en serie de Taylor alrededor de $t = 0$

$$\begin{aligned} g(t) &= g(0) + g'(0)\,t + \cdots + \tfrac{g^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}t^{k-1} + \tfrac{1}{(k-1)!}\textstyle\int_0^t (t-\tau)^{k-1} g^{(k)}(\tau)\, d\tau \\ &= e_0 + e_1 t + \tfrac{e_2}{2!}t^2 + \cdots + \tfrac{e_{k-1}}{(k-1)!}t^{k-1} + \tfrac{1}{(k-1)!}\textstyle\int_0^t (t-\tau)^{k-1} g^{(k)}(\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$g_i(t) = \frac{t^i}{i!} + \frac{1}{(k-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{k-1} g_i^{(k)}(\tau)\,d\tau,\ 0 \le i \le k-1.$$

Ahora tomamos el conjunto

$$F(t) = e^{At} - \sum_{i=0}^{k-1} g_i(t) A^i.$$

Entonces, notemos $\varphi(A) = 0$, por lo que

$$\begin{aligned}
F'(t) &= Ae^{At} - \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} g_i'(t) A^i \\
&= Ae^{At} - \left\{a_0 g_{k-1}(t) I + \textstyle\sum_{i=1}^{k-1}(g_{i-1}(t) + a_i g_{k-1}(t) A^i)\right\} \\
&= Ae^{At} - \left\{\textstyle\sum_{i=1}^{k-1} g_{i-1}(t) A^i + g_{k-1}(t)\left[A^k - \varphi(A)\right]\right\} \\
&= A\left(e^{At} - \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} g_i(t) A^i\right) \equiv AF(t)
\end{aligned}$$

Puesto que $F'(0) = 0$, se obtiene lo que se quería. □

Nota 2.2. *Por la unicidad de la solución (2.19), se tiene que*

$$g(t) \neq 0$$

para toda $t \in I\!R$.

Definición 2.4. *Sean*

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)^T, \\
\bar{y} &= (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)^T \in I\!R^n.
\end{aligned}$$

El orden lexicográfico en $I\!R^n$ se define de la siguiente manera
$\bar{x} = \bar{y}$ si y sólo si $x_i = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. $\bar{x} < \bar{y}$ si existe k con $1 \le k \le n$ tal que $x_i = y_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k-1$ y $x_k < y_k$

Definición 2.5. *Si $\bar{x}, \bar{y} \in I\!R^n$, y $\bar{x} \le \bar{y}$ según la definición de orden lexicográfico entonces el máximo lexicográfico de $\{\bar{x}, \bar{y}\} = \bar{y}$, y lo denotamos por*

$$\max lex\{\bar{x}, \bar{y}\}.$$

Lema 2.2. *Sean $P_1(t), P_2(t), \ldots\ldots, P_m(t)$ un conjunto de funciones medibles acotadas definidas en el intervalo $[0,T]$ con valores en IR^n, $\mu_1(t), \mu_2(t), \ldots\ldots, \mu_m(t)$, un conjunto de funciones escalares medibles definidas en $[0,T]$ tal que $\sum_{i=1}^m \mu_i(t) = 1, \mu_i(t) \geq 0$ para $i = 1, 2, \ldots., m, t \in [0,T]$. Entonces para toda $\varepsilon > 0$ existe una función medible $P(t) \in \{P_1(t), P_2(t), \ldots\ldots, P_m(t)\}$ para $t \in [0,T]$, tal que*

$$\sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m \mu_i(\tau) P_i(\tau) - P(t) \right) d\tau \right| < \varepsilon.$$

Además, el valor $P(t)$ en todo momento t no depende de los valores $\mu_i(s)$ y $P_i(s)$ para $s > t$.

<u>Demostración:</u> Tomemos una constante R tal que $|P_i(t)| < \frac{R}{2}$ para toda $t \in [0,T], i = 1, 2, \ldots., m$ y una constante n tal que

$$T\frac{R}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

Dividimos el intervalo $[0,T]$ en subintervalos de longitud $\delta = \frac{T}{n}$:

$$I_1 \cup I_2 \cup, \ldots\ldots., \cup I_n = [0,T], \ I_j = [(j-1)\delta, j\delta], \ j = 1, 2, \ldots., n.$$

con los cuales se construye una función $P(t)$ escalón por escalón en cada intervalo I_j. En efecto, sea $P(t) = P_1(t)$ para $t \in I_1$

Para definir $P(t)$ en I_j $j = 2, 3, \ldots.., n$, tomamos

$$S_{j-1} = \int_0^{(j-1)\delta} \left(\sum_{i=1}^m \mu_i(\tau) P_i(\tau) - P(\tau) \right) d\tau.$$

Si $S_{j-1} = 0$ definimos $P(t) = P_1(t)$. Si $S_{j-1} \neq 0$ tomamos una base ortogonal $\xi^{j-1} = (\xi_1^{j-1} \xi_2^{j-1}, \ldots\ldots, \xi_n^{j-1})$ en IR^n tal que $\xi_1^{j-1} = S_{j-1}$ y definimos $P(t) = \max lex_{\xi^{j-1}} \{P_1(t), P_2(t), \ldots\ldots, P_m(t)\}$ para toda $t \in I_j$.

La función $P(t)$ en este caso está definida de manera única; es medible y tiene la siguiente propiedad

$$\langle P(t), S_{j-1} \rangle = \max \langle P_i(t), S_{j-1} \rangle .$$

De lo anterior se tiene

$$\begin{aligned}
\langle \textstyle\sum_{i=1}^m \mu(t) P_i(t) - P(t), S_{j-1} \rangle &= \langle \textstyle\sum_{i=1}^m \mu_i(t) P_i(t), S_{j-1} \rangle - \langle P(t), S_{j-1} \rangle \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^m \langle \mu_i(t) P_i(t), S_{j-1} \rangle - \langle P(t), S_{j-1} \rangle \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^m \mu_i(t) \langle P_i(t), S_{j-1} \rangle - \langle P(t), S_{j-1} \rangle \\
&\leq \textstyle\sum_{i=1}^m \mu_i(t) \langle P(t), S_{j-1} \rangle - \langle P(t), S_{j-1} \rangle = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto
$$\left\langle \sum_{i=1}^{m} \mu_i(t)\, P_i(t) - P(t)\, , S_{j-1} \right\rangle \leq 0 \tag{2.20}$$
para toda $t \in I_j$.

Calculando, también se tiene la siguiente estimación.

Dado que $|P_i(t)| < \frac{R}{2}$, $i = 1, 2, ..., m$ tomamos $\int_{(j-1)\delta}^{j\delta} |\sum_{1=i}^{m}(P_i\mu_i - P)(\tau)|\, d\tau$ y como $P(t) = \max\{P_1(t), P_2(t), ..., P_m(t)\}$, existe k donde $k \in \{1, 2, ..., m\}$ y tal que $P(t) = P_k(t)$, de esta forma
$$\int_{(j-1)\delta}^{j\delta} \left| \sum_{i=1}^{m} P_i(\tau)\, \mu_i(\tau) - P(\tau) \right| d\tau$$
$$\begin{aligned}
&= \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} \left| \textstyle\sum_{i=1, i\neq k}^{m} P_i(\tau)\, \mu_i(\tau) + P_k(\tau)\, \mu_k(\tau) - P_k(\tau) \right| d\tau \\
&\leq \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} \left| \textstyle\sum_{i=1, i\neq k}^{m} P_i(\tau)\, \mu_i(\tau) \right| + |P_k(\tau)\, \mu_k(\tau) - P_k(\tau)|\, d\tau \\
&\leq \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} \textstyle\sum_{i=1, i\neq k}^{m} |P_i(\tau)\, \mu_i(\tau)|\, d\tau + \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} |P_k(\tau)\, \mu_k(\tau) - P_k(\tau)|\, d\tau \\
&= \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} \textstyle\sum_{i=1, i\neq k}^{m} |P_i(\tau)|\, |\mu_i(\tau)|\, d\tau + \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} |\mu_k(\tau) - 1|\, |P_k(\tau)|\, d\tau \\
&\leq \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} \textstyle\sum_{i=1, i\neq k}^{m} \mu_i(\tau)\, \frac{R}{2} + \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} |\mu_k(\tau) - 1|\, \frac{R}{2} d\tau < \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} \frac{R}{2} d\tau + \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} \frac{R}{2} d\tau \\
&= \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} R\, d\tau = R\,(j\delta - (j-1)\delta) = R\delta.
\end{aligned}$$
Es decir,
$$\int_{(j-1)\delta}^{j\delta} \left| \sum_{i-1}^{m} P_i(\tau)\, \mu_i(\tau) - P(\tau) \right| d\tau < R\delta. \tag{2.21}$$
Ahora por la definición de S_{j-1} se tiene para $j = 1, 2, ..., m$ que:
$$\left| \int_0^t \left(\sum_{i=1}^{m} P_i(\tau)\, \mu_i(\tau) - P(\tau)\, d\tau \right) \right| =$$
$$\begin{aligned}
&= \left| \int_0^{(j-1)\delta} \left(\textstyle\sum_{i=1}^{m} P_i(\tau)\, \mu_i(\tau) - P(\tau)\right) d\tau + \int_{(j-1)\delta}^{t} \left(\textstyle\sum_{i=1}^{m} P_i(\tau)\, \mu_i(\tau) - P(\tau)\right) d\tau \right| \\
&= \left| S_{j-1} + \int_{(j-1)\delta}^{t} \left(\textstyle\sum_{i=1}^{m} P_i(\tau)\, \mu_i(\tau) - P(\tau)\right) d\tau \right| \\
&= \sqrt{\left| S_{j-1} + \int_{(j-1)\delta}^{t} \left(\textstyle\sum_{i=1}^{m} P_i(\tau)\, \mu_i(\tau) - P(\tau)\right) d\tau \right|^2} \\
&= \sqrt{|S_{j-1}|^2 + |\int_{(j-1)\delta}^{t} \textstyle\sum_{i=1}^{m} [P_i\mu_i - P](\tau)\, |^2 + \left\langle S_{j-1}, \int_{(j-1)\delta}^{t} \left(\textstyle\sum_{i=1}^{m} [P_i\mu_i - P](\tau)\right) \right\rangle} \\
&= \sqrt{|S_{j-1}|^2 + \left| \int_{(j-1)\delta}^{t} \left(\textstyle\sum_{i=1}^{m} [P_i\mu_i - P](\tau)\right) \right|^2 + \int_{(j-1)\delta}^{t} \langle S_{j-1}, \textstyle\sum_{i=1}^{m} [P_i\mu_i - P](\tau) \rangle}
\end{aligned}$$

por la ecuación (2.20) se tiene que lo anterior

$$\begin{aligned}
&\leq \sqrt{|S_{j-1}|^2 + \left|\int_{(j-1)\delta}^t \left(\sum_{i=1}^m P_i(\tau)\mu_i(\tau) - P(\tau)\right) d\tau\right|^2} \\
&\leq \sqrt{|S_{j-1}|^2 + \left(\int_{(j-1)\delta}^t \left|\sum_{i=1}^m P_i(\tau)\mu_i(\tau) - P(\tau)\right| d\tau\right)^2} \leq \sqrt{|S_{j-1}|^2 + R^2\delta^2},
\end{aligned}$$

si $t \in I_j$.

Por otra parte de (2.21)

$$|S_0| < R\delta, \text{ si } t \in I_1.$$

$$\begin{aligned}
|S_1| &= \left|\int_0^t \left(\sum_{i=1}^m P_i(\tau)\mu_i(\tau) - P(\tau)\right) d\tau\right| \\
&= \left|S_0 + \int_\delta^t \left(\sum_{i=1}^m P_i(\tau)\mu_i(\tau) - P(\tau)\right) d\tau\right| \\
&\leq \sqrt{R^2\delta^2 + R^2\delta^2} = \sqrt{2}R\delta, \text{ si } t \in I_2. \\
|S_2| &= \left|\int_0^t \left(\sum_{i=1}^m P_i(\tau)\mu_i(\tau) - P(\tau)\right) d\tau\right| \\
&= \left|S_1 + \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m P_i(\tau)\mu_i(\tau) - P(\tau)\right) d\tau\right| \\
&\leq \sqrt{2R^2\delta^2 + R^2\delta^2} = \sqrt{3}R\delta, \text{ si } t \in I_3
\end{aligned}$$

Procediendo de manera inductiva se llega a la desigualdad

$$\left|\int_0^t \left(\sum_{i=1}^m P_i(\tau)\mu_i(\tau) - P(\tau)\right) d\tau\right| < R\delta\sqrt{j},$$

para toda $t \in I_j$, $j = 1, 2, ..., n$.

Pero $R\delta\sqrt{j} = \frac{RT\sqrt{j}}{n} = \frac{TR}{\sqrt{n}} . \frac{\sqrt{j}}{\sqrt{n}} \leq \frac{TR}{\sqrt{n}} < \varepsilon$.

Por lo tanto

$$\left|\int_0^t \left(\sum_{i=1}^m P_i(\tau)\mu_i(\tau) - P(\tau)\right) d\tau\right| < \varepsilon,$$

para toda $t \in I_j$, $j = 1, 2, ..., n$.

Por lo tanto

$$\sup_{t\in[0,T]} \left|\int_0^t \left(\sum_{i=1}^m P_i(\tau)\mu_i(\tau) - P(\tau)\right) d\tau\right| \leq \varepsilon. \qquad \square$$

Lema 2.3. *Sean $P_1(t), P_2(t), \cdots, P_m(t)$, funciones medibles acotadas definidas en $[0,T]$, con valores en IR^r. Sean $\mu_1(t), \mu_2(t), \cdots, \mu_m(t)$, funciones escalares medibles no negativas definidas en $[0,T]$, que satisfacen $\sum_{i=1}^m \mu_i(t) = 1$. Entonces, para toda $\varepsilon > 0$, existe una función medible $P(\cdot)$ con valores $P(t)$ en el conjunto $\{P_1(t), P_2(t), \cdots, P_m(t)\}$ para toda $t \in [0,T]$ y el valor $P(t)$ de $P(\cdot)$ al tiempo t unicamente depende de $\{\mu_i(s), P_i(s) | 0 \le s \le t, i = 1, 2, \cdots, m\}$ tal que para toda función escalar $q(\cdot)$, no negativa no decreciente,*

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\| \int_0^t q(t-\tau)\left[\sum_{i=1}^m \mu_i(\tau) P_i(\tau) - P(\tau)\right] d\tau \right\| \le \sqrt{r} q(t)\varepsilon.$$

Demostración: Denotemos a $P(\cdot)$ como:

$P(\cdot) = (P^1(\cdot), P^2(\cdot), \ldots\ldots, P^r(\cdot))^T$ y $P_i(\cdot) = (P_i^1(\cdot), P_i^2(\cdot), \ldots\ldots, P_i^r(\cdot))^T$.

Por otra parte

$$\left\| \int_0^t q(t-\tau)\left[\sum_{i=1}^m \mu_i(\tau) P_i(\tau) - P(\tau)\right] d\tau \right\|^2$$
$$= \sum_{j=1}^r \left| \int_0^t q(t-\tau)\left[\sum_{i=1}^m P_i^j(\tau)\mu_i(\tau) - P^j(\tau)\right] d\tau \right|^2.$$

Aplicando el teorema del valor medio a la igualdad anterior para $t \in [0,T]$, se obtiene

$$\sum_{j=1}^r \left| q(c) \int_0^t \sum_{i=1}^m \left[P_i^j(\tau)\mu_i(\tau) - P^j(\tau)\right] d\tau \right|^2, \quad 0 \le c \le t$$

y como $q(\cdot)$ es no decreciente, $q(c) \le q(t)$, lo anterior es

$$\begin{aligned} &\le \textstyle\sum_{j=1}^r \left| q(t) \int_0^t \sum_{i=1}^m \left[P_i^j(\tau)\mu_i(\tau) - P^j(\tau)\right] d\tau \right|^2 \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^r |q(t)|^2 \left| \int_0^t \left[\sum_{i=1}^m P_i^j(\tau)\mu_i(\tau) - P^j(\tau)\right] d\tau \right|^2 \end{aligned}$$

Por el Lema 2.2 se tiene que lo anterior es

$$< \sum_{j=1}^r |q(t)|^2 \varepsilon^2 = r q^2(t)\varepsilon^2.$$

Lema 2.3. *Sean $P_1(t), P_2(t), \cdots, P_m(t)$, funciones medibles acotadas definidas en $[0,T]$, con valores en IR^r. Sean $\mu_1(t), \mu_2(t), \cdots, \mu_m(t)$, funciones escalares medibles no negativas definidas en $[0,T]$, que satisfacen $\sum_{i=1}^m \mu_i(t) = 1$. Entonces, para toda $\varepsilon > 0$, existe una función medible $P(\cdot)$ con valores $P(t)$ en el conjunto $\{P_1(t), P_2(t), \cdots, P_m(t)\}$ para toda $t \in [0,T]$ y el valor $P(t)$ de $P(\cdot)$ al tiempo t unicamente depende de $\{\mu_i(s), P_i(s) | 0 \le s \le t, i = 1, 2, \cdots, m\}$ tal que para toda función escalar $q(\cdot)$, no negativa no decreciente,*

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\| \int_0^t q(t-\tau) \left[\sum_{i=1}^m \mu_i(\tau) P_i(\tau) - P(\tau) \right] d\tau \right\| \le \sqrt{r} q(t) \varepsilon.$$

Demostración: Denotemos a $P(\cdot)$ como:

$$P(\cdot) = \left(P^1(\cdot), P^2(\cdot), \ldots\ldots, P^r(\cdot)\right)^T \text{ y } P_i(\cdot) = \left(P_i^1(\cdot), P_i^2(\cdot), \ldots\ldots, P_i^r(\cdot)\right)^T.$$

Por otra parte

$$\left\| \int_0^t q(t-\tau) \left[\sum_{i=1}^m \mu_i(\tau) P_i(\tau) - P(\tau) \right] d\tau \right\|^2$$

$$= \sum_{j=1}^r \left| \int_0^t q(t-\tau) \left[\sum_{i=1}^m P_i^j(\tau) \mu_i(\tau) - P^j(\tau) \right] d\tau \right|^2.$$

Aplicando el teorema del valor medio a la igualdad anterior para $t \in [0,T]$, se obtiene

$$\sum_{j=1}^r \left| q(c) \int_0^t \sum_{i=1}^m \left[P_i^j(\tau) \mu_i(\tau) - P^j(\tau) \right] d\tau \right|^2, \; 0 \le c \le t$$

y como $q(\cdot)$ es no decreciente, $q(c) \le q(t)$, lo anterior es

$$\begin{aligned} &\le \sum_{j=1}^r \left| q(t) \int_0^t \sum_{i=1}^m \left[P_i^j(\tau) \mu_i(\tau) - P^j(\tau) \right] d\tau \right|^2 \\ &= \sum_{j=1}^r |q(t)|^2 \left| \int_0^t \left[\sum_{i=1}^m P_i^j(\tau) \mu_i(\tau) - P^j(\tau) \right] d\tau \right|^2 \end{aligned}$$

Por el Lema 2.2 se tiene que lo anterior es

$$< \sum_{j=1}^r |q(t)|^2 \varepsilon^2 = r q^2(t) \varepsilon^2.$$

Por lo tanto

$$\left\|\int_0^t q(t-\tau)\left[\sum_{i=1}^m P_i(\tau)\mu_i(\tau)-P(\tau)\right]d\tau\right\| < \sqrt{r}q(t)\varepsilon.$$

Así se concluye que

$$\sup_{t\in[0,T]}\left\|\int_0^t q(t-\tau)\left[\sum_{i=1}^m P_i(\tau)\mu_i(\tau)-P(\tau)\right]d\tau\right\| \leq \sqrt{r}q(t)\varepsilon. \qquad \square$$

Lema 2.4. *(Lema de Filippov). Sea $g(t,u)$ una función con valores en IR^m, definida para toda $t\in[a,b]$, $u\in U$ donde U es un conjunto compacto en IR^k. Supongamos que $g(t,u)$ es continua en $(t,u)\in[a,b]\times U$. Sea $\psi(t)$ una función medible en $[a,b]$ tal que*

$$\psi(t)\in g(t,U)$$

para casi toda t. Entonces existe una función medible $u(t)$ tal que $u(t)\in U$ y

$$\psi(t)=g(t,u(t))$$

para casi toda $t\in[a,b]$.

La demostración de este lema puede verse en [Fr].

2.3.1. Demostración del Teorema 2.1

Demostración: Sea $z_0\in IR^n/M$, $u\in U$ un elemento dado.

Sea $0<\theta\leq 1$ tal que $g_i(t)>0, g_i'(t)>0$, $t\in[0,\theta]$, $0\leq i\leq k-1$.

Tomamos $L>0$ tal que

$$\begin{array}{lcl} |g_i(t)| & \leq & L,\ t\in[0,\theta],\ 0\leq i\leq k-1 \\ \prod A^iF(u,v) & \leq & L,\ (u,v)\in U\times V,\ 0\leq i\leq k-1 \\ \left|\left\langle e_i, e^{\overline{A}t}a\right\rangle\right| & \leq & L,\ t\in[0,\theta],\ 0\leq i\leq k-1. \end{array}$$

Caso 1. Supongamos para toda $t\in[0,\theta]$, que

$$\prod e^{At}z_0\neq 0$$

entonces definimos

$$b=\inf_{0\leq t\leq\theta}\left\|\prod e^{At}z_0\right\|>0.$$

Por el inciso c) del teorema, usando la definición de "cerradura convexa" y el Lema de Filippov, para toda $u \in U$ existe $v_j \in V$ tal que

$$\sum_{j=1}^{r} \mu_j(t) \begin{pmatrix} \prod A^{i_0} F(u, v_j) \\ \vdots \\ \prod A^{k-1} F(u, v_j) \end{pmatrix} = 0,$$

donde $\sum_{j=1}^{r} \mu_j(t) = 1$, $\mu_j(t) \geq 0$, $1 \leq j \leq r$ entonces tomamos $\varepsilon = \frac{b}{2(k-i_0)L} > 0$.

Por el Lema 2.3, existe una función medible $P(\cdot)$, tal que $P(t)$ únicamente depende de $\{\mu_j(s), \prod A^i F(u(s), v_j(s)) \,|\, 0 \leq s \leq t,\ 1 \leq j \leq r,\ i_0 \leq i \leq k-1\}$, y $P(t)$ toma valores en el conjunto

$$P(t) \in \left\{ \begin{pmatrix} \prod A^{i_0} F(u(t), v_j(t)) \\ \vdots \\ \prod A^{k-1} F(u(t), v_j(t)) \end{pmatrix} | 1 \leq j \leq r \right\}$$

entonces se cumple con

$$\sup_{t \in [0,\theta]} \left\| \int_0^t q(t-\tau) P(\tau) \, d\tau \right\| \leq \sqrt{r} q(\theta) \varepsilon.$$

Para toda función escalar $q(\cdot)$ no negativa y no decreciente. Es claro que existe $\bar{v} \in V$ tal que

$$P(t) = \begin{pmatrix} \prod A^{i_0} F(u(t), \bar{v}(t)) \\ \vdots \\ \prod A^{k-1} F(u(t) . \bar{v}(t)) \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq \theta.$$

Así tomando el control de evasión $\overline{v}(\cdot)$, se tiene

$$d(M, z(t)) = \left\| \prod z(t) \right\|$$

pero

$$\prod z(t) = \prod e^{At} z_0 + \prod \int_0^t e^{(t-\tau)A} F(u, \bar{v}) \, d\tau.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\left\|\prod z(t)\right\| &= \left\|\prod e^{At}z_0+\prod\int_0^t e^{(t-\tau)A}F(u,\bar{v})\,d\tau\right\| \\
&= \left\|\prod e^{At}z_0+\prod\int_0^t \sum_{i=i_0}^{k-1} g_i(t-\tau)\,A^iF(u,\bar{v})\,d\tau\right\| \\
&\geq b-\left\|\int_0^t \sum_{i=i_0}^{k-1}\prod g_i(t-\tau)\,A^iF(u,\bar{v})\,d\tau\right\| \\
&\geq b-\left\|\sum_{i=i_0}^{k-1}\int_0^t g_i(t-\tau)\,P(\tau)\,d\tau\right\| \\
&\geq b-\sum_{i=i_0}^{k-1}\left\|\int_0^t g_i(t-\tau)\,P(\tau)\,d\tau\right\| \\
&\geq b-\sum_{i=i_0}^{k-1}\sqrt{r}g_i(\theta)\,\varepsilon \geq b-\sqrt{r}\varepsilon\sum_{i=i_0}^{k-1}L \\
&\geq b-\sqrt{r}\varepsilon L\sum_{i=i_0}^{k-1} = b-\sqrt{r}\varepsilon L\,(k-i_0) \\
&= b-\frac{(k-i_0)\sqrt{r}Lb}{2(k-i_0)L\sqrt{r}} = \frac{b}{2},\ t\in\ [0.\theta].
\end{aligned}$$

Entonces al tiempo $t=\theta$,$\prod e^{At}z(\theta)\neq 0, 0\leq t\leq\theta$ repitiendo el argumento anterior se obtiene la evadibilidad en el intervalo $[\theta,2\theta]$, con lo cual se demuestra el teorema para el primer caso.

Caso 2. Supongamos que para algún $t_0>0$,

$$\prod e^{At_0}z_0=\sum_{i=0}^{k-1}g_i(t_0)\prod A^iz_0=0.$$

Por la nota 2.2, $g(t)\neq 0$ para toda $t\in I\!R$ entonces el conjunto

$$\left\{\prod A^iz_0|\ 0\leq i\leq k-1\right\}$$

es linealmente dependiente. Por lo tanto

$$\dim\left\langle\left\{\prod A^iz_0|\ 0\leq i\leq k-1\right\}\right\rangle<k\leq m=\dim M^{\perp}.$$

Dado que $\prod A^iz_0\in M^{\perp}$, tomamos $\psi\in M^{\perp}$ tal que$\|\psi\|=1$ y

$$\left\langle\psi,\prod A^iz_0\right\rangle=0,\ 0\leq i\leq k-1.$$

Ahora por el inciso c) del Teorema 2.1, para toda $u\in U$, se puede tomar $\bar{v}\in V$, tal que

$$\left|\left\langle\psi,\prod A^{i_0}F\left(u\left(t\right),\bar{v}\left(t\right)\right)\right\rangle\right|\geq\delta.$$

Puesto que

$$\left\langle \psi, \prod z(t) \right\rangle \leq \|\psi\| \left\|\prod z(t)\right\| = \left\|\prod z(t)\right\|,$$

entonces, para toda $t \in [0, \theta]$ se tiene que

$$\begin{aligned}
d(M, z(t)) &= \left\|\prod z(t)\right\| \geq \left\langle \psi, \prod z(t) \right\rangle \\
&= \left| \left\langle \psi, \prod e^{At} z_0 + \prod \int_0^t e^{(t-\tau)A} F(u, \bar{v})\, d\tau \right\rangle \right| \\
&= \left| \left\langle \psi, \prod e^{At} z_0 \right\rangle + \left\langle \psi, \prod \int_0^t e^{(t-\tau)A} F(u, \bar{v})\, d\tau \right\rangle \right| \\
&= \left| \left\langle \psi, \prod \sum_{i=0}^{k-1} g_i(t) A^i z_0 \right\rangle + \left\langle \psi, \prod \int_0^t \sum_{i=0}^{k-1} g_i(t-\tau) A^i F(u, \bar{v})\, d\tau \right\rangle \right| \\
&= \left| \sum_{i=0}^{k-1} \left\langle \psi, g_i(t) \prod A^i z_0 \right\rangle + \sum_{i=0}^{k-1} \int_0^t g_i(t-\tau) \left\langle \psi, \prod A^i F(u, \bar{v}) \right\rangle d\tau \right| \\
&= \left| \sum_{i=0}^{k-1} \int_0^t g_i(t-\tau) \left\langle \psi, \prod A^i F(u, \bar{v}) \right\rangle d\tau \right| \\
&\geq \left| \sum_{i=i_0}^{k-1} \int_0^t g_i(t-\tau) \left\langle \psi, \prod A^i F(u, \bar{v}) \right\rangle d\tau \right| \\
&= \left| \int_0^t g_{i_0}(t-\tau) \left\langle \psi, \prod A^{i_0} F(u, \bar{v}) \right\rangle + \sum_{i_0+1}^{k-1} \int_0^t g_i(t-\tau) \left\langle \psi, \prod A^i F(u, \bar{v}) \right\rangle \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \int_0^t g_{i_0}(t-\tau)\, \delta d\tau - \sum_{i=i_0+1}^{k-1} \int_0^t g_i(t-\tau)\, L d\tau \\
&= \int_0^t \delta g_{i_0}(\tau)\, d\tau - \sum_{i=i_0+1}^{k-1} L \int_0^t g_i(\tau)\, d\tau \\
&= \int_0^t \delta \tfrac{\tau^{i_0}}{i_0!} d\tau - \sum_{i=i_0+1}^{k-1} L \int_0^t \left(\tfrac{\tau^i}{i!} + \tfrac{1}{k!} \int_0^\tau (\tau - s)^k \left\langle e_i, e^{\bar{A}t} a \right\rangle ds \right) d\tau \\
&\geq \delta \tfrac{\tau^{i_0+1}}{(i_0+1)!}\Big]_0^t - \sum_{i=i_0+1}^{k-1} L \left(\tfrac{t^{i+1}}{(i+1)!} + \tfrac{1}{k!} \int_0^t \left(\int_0^\tau (\tau - s)^k L ds \right) d\tau \right) \\
&= \delta \tfrac{t^{i_0+1}}{(i_0+1)!} - \sum_{i=i_0+1}^{k-1} L \left(\tfrac{t^{i+1}}{(i+1)!} + L \tfrac{t^{k+2}}{(k+2)!} \right) \\
&= \tfrac{t^{i_0+1}}{(i_0+1)!} \left[\delta - L \sum_{i=i_0+1}^{k-1} \left(\tfrac{t^{i-i_0}}{(i+1)!} + L \tfrac{t^{k-i_0+1}}{(k+2)!} \right) \right] \\
&= \tfrac{t^{i_0+1}}{(i_0+1)!} \left[\delta - tL \sum_{i=i_0+1}^{k-1} \left(\tfrac{t^{i-i_0-1}}{(i+1)!} + L \tfrac{t^{k-i_0}}{(k+2)!} \right) \right] \\
&\geq \tfrac{t^{i_0+1}}{(i_0+1)!} \left[\delta - Kt \right],
\end{aligned}$$

donde

$$K = L \sum_{i=i_0+1}^{k-1} \left(\frac{\theta^{i-i_0-1}}{(i_0+1)!} + L \frac{\theta^{k-i_0}}{(k+2)!} \right)$$

Entonces si tomamos $\theta_0 = \min\{\theta, \frac{\delta}{2K}\}$, se tiene que $d(M, z(t)) \geq \frac{t^{i_0+1}}{(i_0+1)!} \frac{2}{\delta}$, para toda $t \in (0, \theta_0]$, como $z(0) = z_0 \in I\!R^n \setminus M$, se obtiene

$$d(M, z(t)) > 0, t \in (0, \theta_0].$$

Como θ, θ_0 son constantes absolutas, se puede nuevamente repetir el argumento anterior con lo cual se obtiene la evadibilidad del juego. $\square$

Antes de dar la demostración del Teorema 2.2 se darán algunos resultados previos.

Nota 2.3. *Sea $F(I, IR)$ el conjunto de todas las funciones continuas definidas en el intervalo cerrado I. Por el teorema de Lusin's se sigue que este conjunto es denso en el espacio F_m de funciones medibles. Como consecuencia de lo anterior se tiene que las funciones escalonadas son densas en F_m.*

Nota 2.4. *Aplicando el resultado de la Nota 2.3, a cada componente de una función $\alpha : I \longrightarrow IR^n$, se obtiene una sucesión de funciones escalonadas que convergen a α.*

Supogamos que U, V son subconjuntos compactos de IR^n. Se considera una función continua

$$G : U \times V \longrightarrow IR$$

con la propiedad de que para toda $u \in U$, existe una $v \in V$ tal que

$$G(u, v) = w$$

con w un valor fijo de G.

Bajo estas hipótesis se tiene el siguiente resultado.

Lema 2.5. *Sea I un intervalo compacto en IR. Si $u : I \longrightarrow U$ es una función medible entonces existe una función medible $v : I \longrightarrow V$ tal que, para cada $s \in I$, $G(u(s), v(s)) = w$.*

<u>Demostración</u>: Supongamos que el lema es cierto cuando u es una función escalonada. Sea $u(s)$ una función medible arbitraria. De la Nota 2.3 y la suposición anterior, se obtienen dos sucesiones $\{u_n(s)\}$ y $\{v_n(s)\}$,tal que:

1) Para toda n, u_n,y v_n son funciones escalonadadas,

2) $u_n(s) \longrightarrow u(s)$ casi donde quiera,

3) $G(u_n(s), v_n(s)) = w$.

Por compacidad debe existir un elemento en V que denotamos por $v(s)$, el cual satisface la igualdad

$$\|v(s)\| = \sup_{n \in IN} \|v_n(s)\|.$$

En este caso $v(s)$ es medible, porque $\|\cdot\|$ es una función continua y el supremo de una función medible es medible. Además, usando que la sucesión de funciones $\{v_n(s)\}$ es acotada, obtenemos una subsucesión que converge a $v(s)$. Así, por continuidad

$$G(u(s), v(s)) = w.$$

Finalmente, sea $\mathbf{R}: a \leq a_1 \leq .... \leq a_k = b$ una partición del intervalo compacto I, el dominio de las funciones escalonadas $u : I \longrightarrow U$ está dada por $u(s) = u^i$, para $s \in (a_i, a_{i+1})$. Sea v_i cualquier solución de la ecuación

$$G(u^i, v) = w.$$

La función $v : I \longrightarrow V$ dada por $v(s) = v^i$ para $s \in (a_i, a_{i+1})$ es medible y satisface $G(u, v) = w$.

Por lo tanto se tiene lo que se quería demostrar. $\square$

Corolario 2.1. *Sea $u : [0, T] \longrightarrow U$ una función medible. Si la matriz A y la función F satisface la condición (2.8), entonces para toda $w \in B$ existe una función medible $v : [0, T]$ tal que*

$$\prod A^{\mu+1} F(u(s), v(s)) = w$$

para cada $s \in [0, T]$.

Demostración: Definimos $G(u, v) = \prod AF(u, v)$ y aplicando el Lema 2.5 se obtiene el resultado. $\square$

Recordemos que $\rho = \|\prod(z)\|$ es la distancia de z al subespacio M, $\sigma = \prod z$ y ϑ es la distancia de z al subespacio $M^{\perp}$.

Lema 2.6. *Sea $z(t)$ una solución de (2.1), con condición inicial z_0 que satisface $\|\prod(z_0)\| \leq 1$, y $u(t), v(t)$ funciones como en el Corolario 2.1. Entonces existe una constante c tal que para toda $w \in M^{\perp}$, con $\|w\| \leq c$ se cumple la igualdad*

$$\sigma(t) = \sigma_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_{\mu+2} t^{\mu+2} + w t^{\mu+2} + h(t) t^{\mu+2}. \tag{2.22}$$

Los vectores $a_i, i = 1, 2, ..., \mu + 2$ dependen del punto z_0 pero no de los controles $u(t), v(t)$. Además existe una constante c_1 tal que las siguentes desigualdades se satisfacen

$$\begin{gathered} \|h(t)\| \leq c_1 \ominus t; \|a_i\| \leq c_i \ominus; i = 1, 2, ..., \mu + 2; \\ |\vartheta(t) - \vartheta_0| \leq c_1 \ominus t \text{ con } \ominus = 1 + \vartheta_0. \end{gathered} \tag{2.23}$$

Demostración: Tomemos la ecuación

$$\prod A^{\mu+1} F(u,v) = w$$

y multipliquémosla por $\frac{(t-s)^{\mu+1}}{(\mu+1)!}$ entonces

$$\frac{(t-s)^{\mu+1}}{(\mu+1)!} \prod A^{\mu+1} F(u,v) = \frac{(t-s)^{\mu+1}}{(\mu+1)!} w \tag{2.24}$$

integrando la igualdad (2.24) de 0 a t, se obtiene

$$\frac{1}{(\mu+1)!} \int_0^t (t-s)^{\mu+1} \prod A^{\mu+1} F(u,v) = \frac{t^{\mu+2}}{(\mu+2)!} w. \tag{2.25}$$

Ahora, si aplicamos $\prod$ a la solución de la ecuación (2.1), dada por

$$z(t) = e^{At} z_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} F(u,v)\, ds$$

se tiene

$$\sigma = \prod z(t) = \prod e^{At} z_0 + \prod \int_0^t e^{(t-s)A} F(u,v)\, ds.$$

Para obtener lo que se quiere demostrar expandemos e^{At} y $e^{(t-s)A}$ en potencias de t y de $(t-s)$ respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \prod \left(z_0 + Atz_0 + \tfrac{A^2 t^2 z_0}{2!} + \ldots. + \tfrac{A^{\mu+2} t^{\mu+2} z_0}{(\mu+2)!} + \ldots. \right) \\ &+ \prod \int_0^t \left(F(u,v) + A(t-s) F(u,v) + \ldots + \tfrac{A^{\mu+1}(t-s)^{\mu+1} F(u,v)}{(\mu+1)!} + \ldots \right) ds. \end{aligned}$$

Pero por hipótesis (A, F) satisface la condición **PM**, por lo tanto

$$\begin{aligned} \prod \int_0^t (t-s)^i A^i F(u,v)\, ds &= \int_0^t (t-s)^i \prod A^i F(u,v)\, ds \\ &= \int_0^t (t-s)^i \prod (-z_i) \\ &= \tfrac{\prod(-z_i)}{(i+1)!} t^{i+1},\ i = 0, 1, \ldots, \mu \end{aligned}$$

Por lo anterior, agrupando términos y usando (2.25) se llega a que

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sigma_0 + \prod (Az_0 - z_0)t + \tfrac{\prod(A^2 z_0 - z_1)}{2!} t^2 + \quad \ldots + \tfrac{\prod A^{\mu+2} z_0}{(\mu+2)!} t^{\mu+2} + \tfrac{t^{\mu+2}}{(\mu+2)!} w \\ &+ \tfrac{1}{(\mu+2)!} \int_0^t (t-s)^{\mu+2} \prod A^{\mu+2} F(u,v) \\ &+ \sum_{i=\mu+3}^{\infty} \prod \left(\tfrac{A^i z_0}{i!} t^i + \tfrac{1}{i!} \int_0^t (t-s)^i A^i F(u,v)\, ds \right) \end{aligned}$$

Definimos

$$a_{i+1} = \frac{\prod(A^{i+1}z_0 - z_i)}{(i+1)!},\ i = 0, 1, \ldots\ldots, \mu,\ a_{\mu+2} = \frac{\prod A^{\mu+2}z_0}{(\mu+2)!}$$

y

$$\begin{aligned} t^{\mu+2}h(t) &= \quad \tfrac{1}{\mu+2}\int_0^t (t-s)^{\mu+2} \prod A^{\mu+2}F(u,v) + \\ &\quad \textstyle\sum_{i=\mu+3}^{\infty} \prod \left(\frac{t^i A^i z_0}{i!} + \frac{1}{i!}\int_0^t (t-s)^i F(u,v)\, ds \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sigma(t) = \sigma_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots\ldots + a_{\mu+2}t^{\mu+2} + wt^{\mu+2} + h(t)\, t^{\mu+2}.$$

Finalmente la bola B es igual a $X_0 + B^*$, donde B^* es una bola en $M^{\perp}$ con centro en el origen, así c es el radio de B^*.

Unicamente queda verificar que se cumplen las desigualdades.

Sabemos que $a_{i+1} = \frac{\prod(A^{i+1}z_0 - z_i)}{(i+1)!}, i = 0, 1, \ldots, \mu,\ a_{\mu+2} = \frac{\prod A^{\mu+2}z_0}{(\mu+2)!}$ entonces definimos $K \geq \max\{\|a_{i+1}\|\}$, $i = 0, 1, \ldots, \mu + 1$ donde

$$\|a_{i+1}\| \leq K = c_1 (1 + \vartheta_0).$$

Para verificar que $\|h(t)\| \leq c_1 \ominus t$, recordemos

$$\begin{aligned} t^{\mu+2}h(t) &= \tfrac{1}{(\mu+2)!}\int_0^t (t-s)^{\mu+2} \prod A^{\mu+2}F(u,v) + \textstyle\sum_{i=\mu+3}^{\infty} \prod \frac{t^i A^i z_0}{i!} + \\ &\quad \textstyle\sum_{i=\mu+3}^{\infty} \prod \left(\frac{t^i A^i z_0}{i!} + \frac{i}{i!}\int_0^t (t-s)^i A^i f(u,v)\, ds \right). \end{aligned}$$

Como U, V son compactos entonces $\prod A^i F(u,v)$, $\prod A^i z_0$, están acotados superiormente; a esta cota la llamaremos M, así

$$\begin{aligned} t^{\mu+2}h(t) &\leq \tfrac{M}{(\mu+2)!}\int_0^t (t-s)^{\mu+2} + \textstyle\sum_{i=\mu+3}^{\infty} \left(\frac{t^i M}{i!} + \frac{i}{i!}\int_0^t (t-s)^i M ds \right) \\ &= \tfrac{Mt^{\mu+3}}{(\mu+3)!} + \textstyle\sum_{i=\mu+3}^{\infty} \left(\frac{t^i M}{i!} + \frac{t^{i+1}M}{(i+1)!} \right) \\ &= t\left(\tfrac{Mt^{\mu+2}}{(\mu+3)!} + \textstyle\sum_{i=\mu+2}^{\infty} \left(\frac{t^i M}{i!} + \frac{t^{i+1}M}{(i+1)!} \right) \right) \leq c_1 (1 + \vartheta_0)\, t \end{aligned}$$

donde

$$\frac{Mt^{\mu+2}}{(\mu+3)!} + \sum_{i=\mu+2}^{\infty} \frac{t^i M}{i!} + \frac{t^{i+1}M}{(i++1)!} \leq c_1 (1 + \vartheta_0).$$

Finalmente si definimos a $\ominus = (1 + \vartheta_0)$ se obtiene lo que se quería demostrar.

□

Si en $M^{\perp}$ se toman las coordenadas tales que $\sigma_0 = (\rho_0, 0)^T$, la curva (2.22) se transforma en

$$\begin{aligned} \sigma^1 &= \rho_0 + a_1^1 t + \ldots\ldots + a_{\mu+1}^1 t^{\mu+1} + (a_{\mu+2}^1 + w^1 + h^1(t))t^{\mu+2} \\ \sigma^2 &= a_1^2 t + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{\mu+1}^2 t^{\mu+1} + (a_{\mu+2}^2 + w^2 + h^2(t))t^{\mu+2} \end{aligned} \tag{2.26}$$

Lema 2.7. *Existen constantes $\varepsilon \leq 1, c_0$ y w_0^1 tales que si*

$$T_0 = c_0 \frac{\sqrt[k]{\varepsilon}}{1+\vartheta_0}, w^1 = w_0^1$$

entonces la primera componente de (2.26) satisface

$$\left|\sigma^1(T_0)\right| = \left|\sigma_0^1\right| \geq \frac{\varepsilon}{(1+\vartheta(T_0))^{\mu+2}}. \tag{2.27}$$

<u>Demostración</u>: Supongamos que $\mu + 2 = k$. Sea c_0 y ε tales que

$$c_0 = \sqrt[k]{\frac{6}{c}},\ \sqrt[k]{\varepsilon} = \frac{1}{c_0^k c_0 c_1}$$

si se toma $w_0 = \frac{c}{2}$ cuando $\rho_0 + a_1^1 t + \ldots\ldots + a_k^1 t^k \geq 0$ y $w_0 = -\frac{c}{2}$ cuando $\rho_0 + a_1^1 t + \ldots\ldots + a_k^1 t^k \leq 0$ entonces se tiene

$$\left|\sigma_0^1\right| \geq \frac{2\varepsilon}{(1+\vartheta_0)^k}. \tag{2.28}$$

Para demostrar (2.28) suponemos que $\rho_0 + a_1^1 t + \ldots\ldots + a_k^1 t^k \geq 0$, de la primera desigualdad de (2.23) se obtiene

$$\left\|h^1(T_0)\right\| \leq c_1 (1+\vartheta_0) T_0$$

lo que implica que

$$-c_1(1+\vartheta_0) T_0 \leq h^1(T_0).$$

Por lo tanto

$$\sigma_0^1 \geq w_0^1 T_0^k - c_1(1+\vartheta_0) T_0 T_0^k$$

sustituyendo w_0^1 y T_0 en la expresión

$$\begin{aligned} \sigma_0^1 &\geq \frac{c}{2}\frac{c_0^k \varepsilon}{(1+\vartheta_0)^k} - c_1(1+\vartheta_0)\frac{c_0\sqrt[k]{\varepsilon}}{(1+\vartheta_0)}\frac{c_0^k}{(1+\vartheta_0)^k} \\ &= \frac{c c_0^k \varepsilon}{2(1+\vartheta_0)} - \frac{c_1 c_0 \sqrt[k]{\varepsilon} c_0^k \varepsilon}{(1+\vartheta_0)^k} = \frac{6 c_0^k \varepsilon}{c_0^k 2(1+\vartheta_0)^k} - \frac{c_1 c_0 \sqrt[k]{\varepsilon} c_0^k \varepsilon}{(1+\vartheta_0)^k} \\ &= \frac{3\varepsilon}{(1+\vartheta_0)^k} - \frac{c_1 c_0 c_0^k \sqrt[k]{\varepsilon}\varepsilon}{(1+\vartheta_0)^k} \geq \frac{3\varepsilon}{(1+\vartheta_0)^k} - \frac{c_1 c_0 c_0^k \varepsilon}{(1+\vartheta_0)^k c_0^k c_0 c_1} \\ &= \frac{3\varepsilon}{(1+\vartheta_0)^k} - \frac{\varepsilon}{(1+\vartheta_0)^k} = \frac{2\varepsilon}{(1+\vartheta_0)^k}. \end{aligned}$$

De la misma forma se demuestra el otro caso. □

Sea **O** la familia de funciones h con la propieded $|h(t)| < r$ para toda t en el intervalo $[0, T_1]$ (r, T_1 son constantes que dependen de la función h)

Proposición 2.1. *Sea $\sigma(t)$ una curva dada por*

$$\begin{aligned} \sigma^1(t) &= \rho_0 + a_1^1 t + a_2^1 t^2 + \ldots\ldots + a_\mu^1 t^\mu + \alpha t^{\mu+1} = p(t) + \alpha t^{\mu+1} \\ \sigma^2(t) &= a_1^2 t + a_2^2 t^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_\mu^2 t^\mu + \beta t^{\mu+1} = q(t) + \beta t^{\mu+1} \end{aligned} \tag{2.29}$$

*en el intervalo $[0, T_0]$ y **V** una vecindad de (α, β). Entonces existe $\delta \geq 0, \bar{r} \geq 0$ y $(\alpha_0, \beta_0) \in$**V** tal que para toda función $h \in$**O** la curva*

$$\bar{\sigma} = \left(p(t) + (\alpha_0 + h_1(t))\, t^{\mu+1}, q(t) + (\beta_0 + h_2(t))\, t^{\mu+1}\right)$$

satisface la desigualdad

$$\|\bar{\sigma}(t)\| \geq \frac{\bar{r}\rho_0^{\mu+1}}{S^{2\mu+1}} \tag{2.30}$$

para t en algún intervalo el cual depende de h, donde $S \geq |a_i^j|$; $i = 1, 2, \ldots, \mu$; $j = 1, 2$.

<u>Demostración</u>: Denotemos por (ρ, ϕ) las coordenadas polares de σ. De (2.29) se tiene

$$\begin{aligned} \rho\cos\phi &= \rho_0 + a_1^1 t + \ldots\ldots + a_\mu^1 t^\mu + \alpha t^{\mu+1} \\ \rho\sin\phi &= a_1^2 t + a_2^2 t^2 + \ldots\ldots + a_\mu^2 t^\mu + \beta t^{\mu+1} \end{aligned}$$

multiplicando por $1, t, t^2, \ldots\ldots, t^\mu$ cada miembro de las igualdades se llega a

$$\begin{aligned} \rho(t)\cos\phi &= \rho_0 + a_1^1 t + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_\mu^1 t^\mu + \alpha t^{\mu+1} \\ t\rho(t)\cos\phi &= 0 + \rho_0 t + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_\mu^1 t^{\mu+1} + \alpha t^{\mu+2} \\ &\vdots \\ t^\mu\rho(t)\cos\phi &= 0 + \ldots. + \rho_0 t^\mu + a_1^1 t^{\mu+1} + \ldots.. + a_\mu^1 t^{2\mu} + \alpha t^{2\mu+1} \\ \rho(t)\sin\phi &= 0 + a_1^2 t + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_\mu^2 t^\mu + \beta t^{\mu+1} \\ t\rho(t)\sin\phi &= 0 + 0 + a_1^2 t^2 + \ldots.. + a_\mu^2 t^{\mu+1} + \beta t^{\mu+2} \\ &\vdots \\ t^\mu\rho(t)\sin\phi &= 0 + \ldots\ldots.. + a_1^2 t^{\mu+1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_\mu^2 t^{2\mu} + \beta t^{2\mu+1} \end{aligned} \tag{2.31}$$

ahora fijamos t y resolvemos el sistema (2.31) para 1 , así se obtiene la ecuación

$$1 = \frac{D^*}{D} \tag{2.32}$$

donde D es el determinante del sistema y D^* es el determinante que se obtiene al remplazar la columna $(\rho_0, 0, ..., 0)^T$ por la columna $(\rho\cos\phi, ..., \rho\cos\phi, \rho\sin\phi, ...,$ $\rho\sin\phi)^T$. Observemos que D^* puede escribirse de la forma $D^* = \rho(t)\,\bar{D}$; por lo tanto de (2.32) se tiene

$$\rho(t) = \frac{D}{\bar{D}}.$$

Así para obtener la estimación (2.30) se debe dar una cota superior para D y una cota inferior para $\bar{D}$.

Claramente el determinante D es un polinomio en α y β

$$D(\alpha, \beta) = \rho_0^{\mu+1}\beta^{\mu+1} + \sum_{i,j=1}^{\mu} c_{ij}\alpha^i\beta^j$$

Sea c el coeficiente de mayor valor absoluto entonces

$$D = cD_1, |c| \geq \rho_0^{\mu+1}. \tag{2.33}$$

Todos los coeficientes de D_1 tienen valor absoluto menor o igual a uno y uno de los términos tiene valor absoluto igual a uno. Sea $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbf{V}$ el punto donde $|D_1|$ alcanza su valor máximo; por continuidad existe $\delta > 0$ y $r_1 > 0$ tal que

$$|D_1(\alpha, \beta)| \geq r_1, \text{ si } (\alpha, \beta) \in \mathbf{V} \text{ y } |\alpha - \alpha_0| \leq \delta, |\beta - \beta_0| \leq \delta.$$

Dada $h = (h_1, h_2) \in \mathbf{O}$, tomamos $\bar{T}_0$ suficientemente pequeño tal que $|h_1(t)| \leq \delta, |h_2(t)| \leq \delta$, para $t \in [0, \bar{T}_0]$.

Definimos $\bar{\sigma}(t) = (\bar{\sigma}_1(t), \bar{\sigma}_2(t))$ en el intervalo $[0, \bar{T}_0]$ por

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_1(t) &= \rho_0 + a_1^1 t + ... + a_\mu^1 t^\mu + \bar{\alpha}(t)\, t^{\mu+1} \\ \bar{\sigma}_2(t) &= a_1^2 t + ... + a_\mu^2 t^\mu + \bar{\beta}(t)\, t^{\mu+1}\end{aligned}$$

con $\bar{\alpha}(t) = \alpha_0 + h_1(t)$, $\bar{\beta}(t) = \beta_0 + h_2(t)$. Así se tiene

$$|D_1(\bar{\sigma}(t))| \geq r_1, \tag{2.34}$$

para $t \in [0, \bar{T}_0]$.

Por otro lado, sabemos que $\bar{D}$ se obtiene al substituir la columna $(\rho_0, 0, 0, ..., 0)^T$ por la columna $(\cos\phi, ... \cos\phi, \sin\phi, ... \sin\phi)^T$ y como $|\bar{D}(\bar{\sigma}(t))|$ está acotada entonces existe una constante K tal que

$$|\bar{D}(\bar{\sigma}(t))| \geq K = r_2 S^{2\mu+1} \tag{2.35}$$

para alguna r_2.

Por otra parte multiplicando (2.34) por $|c|$ de ambos lados se sigue que

$$|cD_1(\bar{\sigma}(t))| \geq |c|\, r_1,$$

pero $c \geq \rho_0^{\mu+1}$ y $cD_1 = D$. Por lo tanto

$$|D\bar{\sigma}((t))| \geq r_1\rho_0^{\mu+1} \tag{2.36}$$

dividiendo (2.36) entre (2.35)

$$\rho(t) = \frac{|D(\bar{\sigma}(t))|}{|\bar{D}(\bar{\sigma}(t))|} \geq \frac{r_1\rho_0^{\mu+1}}{r_2 S^{2\mu+1}} = \bar{r}\frac{\rho_0^{\mu+1}}{S^{2\mu+1}}$$

con $\bar{r} = \frac{r_1}{r_2}$ y como $\bar{\sigma}(t)$ está en coordenadas polares entonces $\|\bar{\sigma}(t)\| = \rho(t)$; es decir, $\|\bar{\sigma}(t)\| \geq \frac{\bar{r}\rho_0^{\mu+1}}{S^{2\mu+1}}$. □

Teorema 2.4. *Dada la condición inicial z_0 y un control $u(t)$, existe un intervalo $[0, T_0]$ y un control $v : [0, T_0] \longrightarrow V$, tal que $\sigma = \prod z$ satisface*

$$\rho = \left\|\prod z\right\| \geq \gamma_1(\vartheta(t))\,\rho_0^{\mu+2} \text{ y } |\sigma^1(T_0)| \geq \frac{\varepsilon}{(1+\vartheta)^{\mu+2}}$$

donde z es solución de (2.1), ε es una constante positiva y γ una cierta función monótona decreciente.

Demostración: De (2.26) se tiene que σ está dada por

$$\sigma^1 = \rho_0 + a_1^1 t + \ldots\ldots + a_{\mu+1}^1 t^{\mu+1} + \left(a_{\mu+2}^1 + w^1 + h^1(t)\right) t^{\mu+2} = p(t) + \alpha(t)\, t^{\mu+2}$$

$$\sigma^2 = a_1^2 t + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{\mu+1}^2 t^{\mu+1} + \left(a_{\mu+2}^2 + w^2 + h^2(t)\right) t^{\mu+2} = q(t) + \beta(t)\, t^{\mu+2}.$$

Ahora tomamos el intervalo $[\alpha_1, \alpha_2]$ tal que la desigualdad (2.27) se cumpla para $w^1 \in I = \left[\alpha_1 - a_{\mu+2}^1, \alpha_2 - a_{\mu+1}^1\right]$.

Consideremos el intervalo $J = [\beta_1, \beta_2]$ tal que si $w^1 \in I$ y $w^2 + a_{\mu+2}^2 \in J$ entonces $\|(w^1, w^2)\| < c$.

Con la misma notación que la proposición anterior se define

$$w_0^1 = \alpha_0 - a_{\mu+2}^1; w_0^2 = \beta_0 - a_{\mu+2}^2.$$

La solución de (2.1) correspondinte a $u(t)$ y (w_0^1, w_0^2)es

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^1(t) &= p(t) + \bar{\alpha}(t)\, t^{\mu+2} \\ \bar{\sigma}^2(t) &= q(t) + \bar{\beta}(t)\, t^{\mu+2}\end{aligned}$$

donde $\bar{\alpha}(t) = a_{\mu+2}^1 + w_0^1 + \bar{h}_1(t)$ y $\bar{\beta}(t) = a_{\mu+2}^2 + w_0^2 + \bar{h}_2(t)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^1(t) &= p(t) + \alpha_0 + \bar{h}_1(t) \\ \bar{\sigma}^2(t) &= q(t) + \beta_0 + h_2(t).\end{aligned}$$

Así al tomar ϵ suficientemente pequeña

$$|\bar{\alpha}(t) - \alpha_0| = \left|\bar{h}_1(t)\right| < \delta, \left|\bar{\beta}(t) - \beta_0\right| = \left|\bar{h}_2(t)\right| < \delta$$

en el intervalo $[0, T_0]$ donde T_0 está dado por el Lema 2.7.
Finalmente de la Proposición 2.1

$$\rho(t) \geq \frac{\bar{r}\rho_0^{\mu+2}}{S^{2\mu+3}}$$

pero $\left|a_1^j\right| \leq S$ y como $c_1(1+\vartheta_0) \geq \|a_i\| \geq \left|a_i^j\right|$ entonces

$$\rho(t) \geq \frac{\bar{r}\rho^{\mu+2}}{c^{2\mu+3}(1+\vartheta_0)^{2\mu+3}}.$$

Definimos $\gamma_1(\vartheta) = \frac{r}{(1+c_0c_1+\vartheta)^{2\mu+3}}$. Es claro que γ_1 es una función monótona decreciente, además como

$$|\vartheta(t) - \vartheta_0| \leq c_1\theta t, \theta = (1+\vartheta_0).$$

Si $t = t_0 = \frac{c_0\sqrt[\mu+2]{\epsilon}}{1+\vartheta_0}$ dado en el Lema 2.7 entonces

$$|\vartheta(t) - \vartheta_0| \leq \frac{c_1(1+\vartheta_0)\, c_0 \sqrt[\mu+2]{\epsilon}}{1+\vartheta_0} = c_1c_0 \sqrt[\mu+2]{\epsilon} \leq c_1c_0. \qquad (2.37)$$

Ahora γ_1 la podemos escribir como

$$\begin{aligned}\gamma_1(\vartheta) &= \frac{r}{(1+\vartheta(t)-\vartheta_0+c_0c_1)^{2\mu+3}} = \frac{r}{((1+\vartheta_0)+(\vartheta(t)-\vartheta_0+c_0c_1))^{2\mu+3}} \\ &\leq \frac{r}{(1+\vartheta_0)^{2\mu+3}}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\rho(t) \geq \gamma(\vartheta)\, \rho_0^{\mu+2}. \qquad \square$$

2.3.2. Demostración del Teorema 2.2

Demostración: Se define W como el conjunto de puntos de dimensión $(n-1)$ que satisfacen la ecuación

$$\rho = \frac{\varepsilon}{(1+\vartheta)^{\mu+2}}.$$

Sea W_- el conjunto de puntos dados por $\rho < \frac{\varepsilon}{(1+\vartheta)^{\mu+2}}$ y W_+ dado por $\rho > \frac{\varepsilon}{(1+\vartheta)^{\mu+2}}$. Obviamente la cerradura de W_+ es $\overline{W}_+ = W \cup W_+$.

Supongamos que el punto inicial $z_0 \in W_+$ y $\rho_0 \leq \varepsilon$. Durante el tiempo que $z(t)$ está en W_+ se escoge $v(t)$ arbitrariamente.

El punto $z(t_0)$ en que por primera vez $z(t)$ está en W, es considerado el nuevo punto inicial. y si se aplica el control descrito en el Teorema 2.4, para $t \in [t_0, t_0 + T_0]$, se sigue de (2.37) que $\vartheta(t_0) \leq \vartheta(t) + c_0 c_1$ por lo cual se llega a la desigualdad

$$\rho(t) > \frac{\varepsilon}{(1+\vartheta(t))^{\mu+2}};$$

pero $\rho_0 < \varepsilon$ entonces $\rho_0^{\mu+2} < \varepsilon^{\mu+2}$ de donde $1 > \frac{\rho_0^{\mu+2}}{\varepsilon^{\mu+2}}$.

De esta forma

$$\rho(t) > \frac{\varepsilon \rho_0^{\mu+2}}{\varepsilon^{\mu+2}(1+\vartheta(t))^{\mu+2}},$$

para $t \in [0, t_0]$ y por el Teorema 2.4

$$\rho(t) \geq \rho_0^{\mu+2}(t_0)\,\gamma_1(\vartheta(t)).$$

Pero $z(t_0) \in W$ entonces $\rho(t_0) = \frac{\varepsilon}{(1+\vartheta(t))^{\mu+2}}$ por lo que $\rho^{\mu+2}(t_0) = \frac{\varepsilon^{\mu+2}}{(1+\vartheta(t_0))^{2(\mu+2)}}$. De esta manera

$$\rho(t) \geq \frac{\varepsilon^{\mu+2}}{(1+\vartheta(t_0))^{2(\mu+2)}}\gamma_1(\vartheta(t))$$

para toda $t \in [t_0, t_0 + T_0]$.

Dado que $\vartheta(t_0) \leq \vartheta(t) + c_0 c_1, \rho_0^{\mu+2} \leq \varepsilon^{\mu+2}$ entonces

$$\rho(t) > \frac{\gamma_{1(\vartheta(t))}}{(1+\vartheta(t)+c_0c_1)^{2(\mu+2)}}\rho_0^{\mu+2}$$

para toda $t \in [t_0, t_0 + T_0]$.

Por lo tanto $\gamma(\vartheta)$ queda definida como

$$\gamma(\vartheta) = \min\left\{\frac{\varepsilon}{(1+\vartheta)^{\mu+2}}, \frac{\gamma_1(\vartheta)}{(1+\vartheta+c_0c_1)^{2(\mu+2)}}\right\}.$$

Entonces la siguiente desigualdad se cumple en el intervalo $[t_0, t_0 + T_0]$

$$\rho(t) \geq \gamma(\vartheta(t))\,\rho_0^{\mu+2}.$$

Sea $(t_0 + T_0)$, si $z(t_0 + T_0) \in \overline{W}_+$ entonces el proceso se repite.

Ahora si $z_0 \in W_-$ y como $\rho < \varepsilon$ entonces podemos aplicar el Teorema 2.4 obteniendo

$$\rho(t) \geq \rho_0^{\mu+2}\gamma_1(\vartheta).$$

En este caso $\gamma(\vartheta) = \gamma_1(\vartheta)$. $\square$

2.3.3. Demostración del Teorema 2.3

Demostración: Tomemos el punto inicial $z_0 \in IR^n/M$ en el instante t_0 y tomemos el control perseguidor $u(t) \in D_c(U)$, $t \in [t_0, t_0 + 1]$ denotemos a $b_0 = \prod z_0, b_j = \prod A^{j-1}(Az_0 + \alpha)$, $j = 1, 2, ..., k-1$. Usando la fórmula de Cauchy se llega a que

$$\prod z(t) = \prod e^{(t-t_0)A} z_0 + \int_{t_0}^{t} \prod e^{(t-s)A}(-u(s)) + v(s) + \alpha)ds, t \in [t_0, t_0 + 1] \tag{2.38}$$

La condición b) implica que existe un factor $\psi = \psi(z_0) \in S$ tal que

$$\langle \psi(z_0), b_j \rangle = 0, j = 0, 1, 2, ..., k-1. \tag{2.39}$$

De la condición a), de la suposición y de (2.38), (2.39) se tiene que para toda $t \in [t_0, t_0 + 1)$

$$\begin{aligned}
\langle \psi(z_0), \prod(z(t)) \rangle &= \left\langle \psi(z_0), \prod e^{(t-t_0)A} z_0 + \textstyle\int_{t_0}^{t} \prod e^{(t-s)A}(\alpha + v(s) - u(s))\,ds \right\rangle \\
&= \langle \psi(z_0), \prod e^{(t-t_0)A} z_0 \rangle \\
&\quad + \left\langle \psi(z_0), \textstyle\int_{t_0}^{t} \prod e^{(t-s)A}(\alpha + v(s) - u(s))\,ds \right\rangle \\
&= \left\langle \psi(z_0), \prod \sum_0^\infty \frac{(t-t_0)^i A^i}{i!} z_0 \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \psi(z_0), \textstyle\int_{t_0}^{t} \prod \sum_0^\infty \frac{(t-s)^i A^i}{i!}(\alpha + v(s) - u(s))\,ds \right\rangle \\
&= \left\langle \psi(z_0), \prod \sum_0^\infty \frac{(t-t_0)^i A^i}{i!} z_0 \right\rangle + \left\langle \psi(z_0), \textstyle\int_{t_0}^{t} \prod \sum_0^\infty \frac{(t-s)^i A^i}{i!} \alpha \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \psi(z_0), \textstyle\int_{t_0}^{t} \prod \sum_0^\infty \frac{(t-s)^i A^i}{i!}(v(s) - u(s)) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Pero $\int_{t_0}^{t}\prod\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(t-s)^i A^i}{i!}\alpha ds=\prod\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^{i+1}A^i}{(i+1)!}\alpha$, por lo que lo anterior es igual a

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \psi(z_0),\prod\sum_{0}^{\infty}\tfrac{(t-t_0)^i A^i}{i!}z_0\right\rangle+\left\langle \psi(z_0),\prod\sum_{0}^{\infty}\tfrac{(t-t_0)^{i+1}A^i}{(i+1)!}\alpha\right\rangle \\
&\quad+\left\langle \psi(z_0),\int_{t_0}^{t}\prod\sum_{0}^{\infty}\tfrac{(t-s)^i A^i}{i!}(v(s)-u(s))\,ds\right\rangle \\
&= \left\langle \psi(z_0),\prod\sum_{1}^{\infty}\tfrac{(t-t_0)^i A^i}{i!}z_0\right\rangle+\left\langle \psi(z_0),\prod\sum_{1}^{\infty}\tfrac{(t-t_0)^i A^{i-1}}{i!}\alpha\right\rangle \\
&\quad+\left\langle \psi(z_0),\int_{t_0}^{t}\prod\sum_{0}^{\infty}\tfrac{(t-s)^i A^i}{i!}(v(s)-u(s))\,ds\right\rangle \\
&= \left\langle \psi(z_0),\prod\sum_{1}^{\infty}\tfrac{(t-t_0)^i A^{i-1}}{i!}(Az_0+\alpha)\right\rangle+\left\langle \psi(z_0),\int_{t_0}^{t}\prod\sum_{k-1}^{\infty}\tfrac{(t-s)^i A^i}{i!}(v-u)(s)\,ds\right\rangle \\
&= \left\langle \psi(z_0),\prod\sum_{k}^{\infty}\tfrac{(t-t_0)^i A^i}{i!}(Az_0+\alpha)\right\rangle+\left\langle \psi(z_0),\int_{t_0}^{t}\prod\sum_{k-1}^{\infty}\tfrac{(t-s)^i A^i}{i!}(v(s)-u(s))\right\rangle \\
&= \left\langle \psi(z_0),\prod\sum_{k}^{\infty}\tfrac{(t-t_0)^i A^i}{i!}z_0\right\rangle+\left\langle \psi(z_0),\prod\sum_{k}^{\infty}\tfrac{(t-t_0)^i A^{i-1}}{i!}\alpha\right\rangle+ \\
&\quad+\left\langle \psi(z_0),\int_{t_0}^{t}\prod\sum_{k-1}^{\infty}\tfrac{(t-s)^i A^i}{i!}(v(s)-u(s))\,ds\right\rangle
\end{aligned}$$

considerando que $\int_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}A^k z_0 ds=\frac{(t-t_0)^k}{k!}A^k z_0$ entonces lo anterior es igual a

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \psi(z_0),\prod\tfrac{(t-t_0)^k A^k}{k!}z_0\right\rangle+\left\langle \psi(z_0),\int_{t_0}^{t}\prod\tfrac{(t-s)^{k-1}A^{k-1}}{(k-1)!}(v(s)-u(s))\,ds\right\rangle \\
&\quad+\left\langle \psi(z_0),\sum_{i=k+1}^{\infty}\prod\tfrac{(t-t_0)^i A^i}{i!}z_0\right\rangle+\left\langle \psi(z_0),\prod\sum_{i=k}^{\infty}\tfrac{(t-t_0)^i A^{i-1}}{i!}\alpha\right\rangle \\
&\quad+\left\langle \psi(z_0),\int_{t_0}^{t}\prod\sum_{i=k}^{\infty}\tfrac{(t-s)^i A^i}{i!}(v(s)-u(s))\,ds\right\rangle \\
&= \left\langle \psi(z_0),\int_{t_0}^{t}\prod\tfrac{(t-s)^{k-1}A^k}{(k-1)!}z_0\right\rangle+\left\langle \psi(z_0),\int_{t_0}^{t}\prod\tfrac{(t-s)^{k-1}A^{k-1}}{(k-1)!}(v(s)-u(s))\,ds\right\rangle \\
&\quad+\left\langle \psi(z_0),\sum_{i=k+1}^{\infty}\prod\tfrac{(t-t_0)^i A^i}{i!}z_0\right\rangle+\left\langle \psi(z_0),\prod\sum_{i=k}^{\infty}\tfrac{(t-t_0)^i A^{i-1}}{i!}\alpha\right\rangle \\
&\quad+\left\langle \psi(z_0),\int_{t_0}^{t}\prod\sum_{i=k}^{\infty}\tfrac{(t-s)^i A^i}{i!}(v(s)-u(s))\,ds\right\rangle \\
&= \left\langle \psi(z_0),\int_{t_0}^{t}\prod\tfrac{(t-s)^{k-1}A^{k-1}}{(k-1)!}(Az_0+(v-u)(s))\,ds\right\rangle+\left\langle \psi(z_0),\sum_{k+1}^{\infty}\tfrac{(t-t_0)^i}{i!}\prod A^i z_0\right\rangle \\
&\quad+\left\langle \psi(z_0),\prod\sum_{k}^{\infty}\int_{t_0}^{t}\tfrac{(t-s)^{i-1}A^{i-1}}{(i-1)!}\alpha ds\right\rangle+\left\langle \psi(z_0),\int_{t_0}^{t}\prod\sum_{k}^{\infty}\tfrac{(t-s)^i A^i}{i!}(v-u)(s)\,ds\right\rangle \\
&= \int_{t_0}^{t}\tfrac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}\left\langle \psi(z_0),\prod A^{k-1}((v-u)(s)+Az_0)\right\rangle ds+\left\langle \psi(z_0),\sum_{k+1}^{\infty}\tfrac{(t-t_0)^i}{i!}\prod A^i z_0\right\rangle \\
&\quad+\left\langle \psi(z_0),\prod\sum_{k}^{\infty}\int_{t_0}^{t}\tfrac{(t-s)^i A^i}{i!}\alpha ds\right\rangle+\left\langle \psi(z_0),\int_{t_0}^{t}\prod\sum_{k}^{\infty}\tfrac{(t-s)^i A^i}{i!}(v(s)-u(s))\,ds\right\rangle.
\end{aligned}$$

Si definimos

$$h(t,z_0)=\left\langle \psi(z_0),\sum_{k+1}^{\infty}\frac{(t-t_0)^i}{i!}\prod A^i z_0+\sum_{k}^{\infty}\int_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^i}{i!}\prod A^i\left(v(s)-u(s)+\alpha\right)ds\right\rangle$$

entonces lo anterior se resume en lo siguiente:

$$\left\langle \psi(z_0),\prod z(t)\right\rangle=\int_{t_0}^{t}\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}\left\langle \psi(z_0),\prod A^{k-1}\left(v(s)-u(s)+Az_0\right)\right\rangle ds+h(t,z_0). \tag{2.40}$$

Además la función $h(t,z_0)$ satisface

$$\begin{aligned}
|h(t,z_0)| &= \left|\left\langle \psi(z_0),\sum_{k+1}^{\infty}\tfrac{(t-t_0)^i}{i!}\prod A^i z_0+\sum_{k}^{\infty}\int_{t_0}^{t}\tfrac{(t-s)^i}{i!}\prod A^i\left(v(s)-u(s)+\alpha\right)ds\right\rangle\right|\\
&\le \left|\textstyle\sum_{i=k+1}^{\infty}\tfrac{(t-t_0)^i}{i!}\prod A^i z_0\right|+\left|\textstyle\sum_{i=k}^{\infty}\int_{t_0}^{t}\tfrac{(t-s)^i}{i!}\prod A^i\left(v(s)-u(s)+\alpha\right)ds\right|\\
&\le \textstyle\sum_{i=k+1}^{\infty}\left|\tfrac{(t-t_0)^i}{i!}\right|\left|\prod A^i z_0\right|+\sum_{i=k}^{\infty}\left|\tfrac{(t-t_0)^{i+1}}{(i+1)!}M\right|\\
&\le \textstyle\sum_{i=k+1}^{\infty}\tfrac{(t-t_0)^i}{i!}|z_0|+(t-t_0)^{k+1}M\sum_{i=k}^{\infty}\tfrac{(t-t_0)^{i-k}}{(i+1)!}\\
&\le (t-t_0)^{k+1}|z_0|\textstyle\sum_{i=k+1}^{\infty}\tfrac{(t-t_0)^{i-k+1}}{i!}+(t-t_0)^{k+1}M\sum_{i=0}^{\infty}\tfrac{(t-t_0)^i}{i!}\\
&\le (t-t_0)^{k+1}|z_0|\textstyle\sum_{i=0}^{\infty}\tfrac{(t-t_0)^i}{i!}+(t-t_0)^{k+1}Md'\\
&\le (t-t_0)^{k+1}|z_0|d'+(t-t_0)^{k+1}Md'\le(t-t_0)^{k+1}\left(|z_0|\tfrac{d}{k!}+\tfrac{d}{k!}\right)\\
&= (t-t_0)^{k+1}\tfrac{d}{k!}\left(|z_0|+1\right)
\end{aligned}$$

donde $\frac{d}{k!}=\max\{d',Md'\}$.

Por lo tanto

$$h(t,z_0)\le(t-t_0)^{k+1}\frac{d}{k!}\left(|z_0|+1\right) \tag{2.41}$$

Ahora por el inciso (c). existe un vector $v(\psi(z_0))\in V$ tal que $-v(\psi(z_0))\in V$ y

$$\left\langle \psi(z_0),\prod A^{k-1}v(\psi(z_0))\right\rangle=\lambda>0. \tag{2.42}$$

Definimos

$$\bar{v}(t)=v(\psi(z_0))\,sgnH(z_0,u(t)) \tag{2.43}$$

donde $H(z_0,u(t))=\langle\psi(z_0),\prod A^{k-1}(Az_0-u(s))\rangle$ entonces de (2.40), (2.43) al tomar el control $v(t)\equiv\bar{v}(t),t\in[t_0,t_0+1)$ se tiene

$$\left|\left\langle \psi(z_0),\prod z(t)\right\rangle\right|$$

$$
\begin{aligned}
\geq\ & \left| \int_0^t \tfrac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \left\langle \psi(z_0), \prod A^{k-1} \left[v(\psi(z_0))\, sgnH(z_0, u(s)) - u(s) + Az_0 \right] \right\rangle ds \right. \\
& \left. - \tfrac{(t-t_0)^{k+1}}{k!} d(1 + |z_0|) \right| \\
\geq\ & \left| \int_{t_0}^{t} \tfrac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \left[\left\langle \psi(z_0), \prod A^{k-1} v(\psi(z_0)) sgnH(z_0, u) + \prod A^{k-1} (Az_0 - u(s)) \right\rangle \right] ds \right| \\
& - \tfrac{(t-t_0)^{k+1}}{k!} d(1 + |z_0|) \\
=\ & \left| \int_{t_0}^t \tfrac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \left[\left\langle \psi(z_0), \prod A^{k-1} \bar{v} \right\rangle + H(z_0, u(t)) \right] ds \right| - \tfrac{(t-t_0)^{k+1}}{k!} d(1 + |z_0|).
\end{aligned}
$$

Ahora se describirá el proceso de evasión en el conjunto $[t_0, t_0 + 1)$.

Sean $t_1, t_2, \ldots, t_p$ puntos donde $u(t) \in U$, cambia de valor para $t \in [t_0, t_0 + 1]$. Observemos que el evasor conoce estos puntos. En el instante t_0, el evasor conoce el valor $u(t_0)$ y usa el control dado por (2.43) para $t \geq t_0$.

Ahora se mostrará la posibilidad de evasión para $t \in [t_0, t_1]$; es decir, $z(t) \notin M$.

Es obvio que para toda $t_0 \leq t \leq t_1, sgnH(z_0, u(s)) \equiv cte$ por lo cual

$$
\left| \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \left[\left\langle \psi(z_0), \prod A^{k-1} v\left(\psi(z_0)\, sgnH(z_0, u(s)) \right) \right\rangle + H(z_0, u(s)) \right] \right|
$$

$$
\begin{aligned}
=\ & \left| \int_{t_0}^t \tfrac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \left[sgnH(z_0, u(s)) \left\langle \psi(z_0), \prod A^{k-1} v(\psi(z_0)) \right\rangle + H(z_0, u(s)) \right] ds \right| \\
=\ & \left| \int_{t_0}^t \tfrac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \left[sgnH(z_0, u(s))\, \lambda + H(z_0, u(s)) \right] ds \right| \\
=\ & \left| sgnH(z_0, u(s)) \int_{t_0}^t \tfrac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \left[\lambda + \tfrac{H(z_0, u(s))}{sgnH(z_0, u(s))} \right] \right| \\
=\ & \left| sgnH(z_0, u(s)) \right| \left| \int_{t_0}^t \tfrac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \left[\lambda + \tfrac{H(z_0, u(s))}{sgnH(z_0, u(s))} \right] ds \right| \\
=\ & \left| \int_{t_0}^t \tfrac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \left[\lambda + \tfrac{H(z_0, u(s))}{sgnH(z_0, u(s))} \right] ds \right| \\
=\ & \left| \int_{t_0}^t \tfrac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \left[\lambda + H(z_0, u(s))\, sgnH(z_0, u(s)) \right] ds \right|
\end{aligned}
$$

pero $H(z_0, u(s))\, sgnH(z_0, u(s)) = |H(z_0, u(s))|$. Por lo tanto, lo anterior es igual a

$$
= \left| \int_{t_0}^t \frac{(k-1)^{k-1}}{(k-1)!} \left[\lambda + |H(z_0, u(s))| \right] ds \right|
$$

y como $\lambda > 0, |H(z_0, u(s))| \geq 0$ entonces

$$
\begin{aligned}
=\ & \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \left[\lambda + |H(z_0, u(s))| \right] ds \geq \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda ds = -\lambda \frac{(t-s)^k}{k!} \Big]_{t_0}^t \\
=\ & \frac{\lambda (t-t_0)^k}{k!}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\left|\prod z(t)\right| \geq \left\langle \psi(z_0), \prod z(t) \right\rangle > \frac{\lambda (t-t_0)^k}{2k!} \tag{2.44}$$

Si $t \in [t_0, \bar{\theta}_1)$, donde $\bar{\theta}_1 = \min\{t_1, t_0 + \theta_1\}, \theta_1 = \frac{\lambda}{2d(1+|z_0|)}$.

Para $\bar{\theta}_1$ solamente se tienen dos casos posibles. Si $\bar{\theta}_1 = t_1 = t_0 + \theta_1$ entonces por (2.44) se prueba la evadivilidad en $[t_0, t_0 + \theta_1)$, porque $|\prod z(t)| > 0$ y $z(t) \notin M$ para $t \in [t_0, t_0 + \theta_1]$.

En el segundo caso $\bar{\theta}_1 = t_0 + \theta_1$ (es decir, $u(s) = u(t_0), t_0 \leq s \leq t_0 + \theta_1$) el evasor usa el control

$$\bar{v}(t) = v(\psi(\bar{z}_1))\, sgnH(z_0, u(s)), \bar{z}_1 = z(\bar{\theta}_1)$$

para toda $t \in [\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$ tal que $u(t) = u(t_0)$, donde $\bar{\theta}_2 = \min\{t_1, \bar{\theta}_1 + \theta_2\}, \theta_2 = \frac{\lambda}{2d(1+|\bar{z}_1|)}$. Para el instante $\bar{\theta}_2$ hay dos casos posibles, al igual que con $\bar{\theta}_1$.

En cada caso se puede repetir el mismo argumento de arriba con lo cual se tiene la evadibilidad del juego para toda $t \in [\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$.

Dado que $\sum_{i=1}^{N} \theta_i \to \infty$, $N \to \infty$ entonces existe un entero $n_0 > 0$ tal que $t_1 = t_0 + \sum_{i=1}^{n_0} \theta_i$ y se obtiene la evadibilidad en el intervalo (t_0, t_1).

En el instante $t \geq t_1$ el evasor tomará el control $\bar{v}(t) = v(\psi(z_1))\, sgn(z_1, u(t))$, $z_1 = z(t_1)$, esto prueba la evasión en el intervalo semiabierto $[t_1, t_2)$. Como el conjunto de puntos $t_i, i = 1, 2, ..., p$ es finito se obtiene la evadivilidad para toda $t \in [t_0, t_0 + 1)$. De esta forma se llega a que es posible la evasión para toda $t \geq t_0$. □

3. Algunos Resultados en Dimensión Dos

Los teoremas de evadibilidad tratados en el capítulo anterior son para sistemas en dimensión mayor o igual que tres. En este capítulo analizaremos el caso relativamente simple de sistemas en dimensión dos el cual no hemos encontrado en la literatura. Para este análisis utilizaremos el hecho de que toda matriz real se puede llevar a una forma canónica de Jordan del tipo $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, con $a, b \in IR$.

3.1. Forma canónica diagonal

En esta sección se estudiará el sistema

$$\dot{z}(t) = Az(t) - u(t) + v(t) \tag{3.1}$$

donde $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$, $v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$,
$u = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ y condición inicial $z(0) = \begin{pmatrix} z_1^0 \\ z_2^0 \end{pmatrix}$. Este sistema se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= az_1(t) + v_1(t) - u_1(t) \\ \dot{z}_2(t) &= bz_2(t) + v_2(t) - u_2(t) \end{aligned}$$

Cuya solución es

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \left(\int_0^t (v_1(s) - u_1(s))\, e^{-as} ds + z_1^0\right) e^{at} \\ z_2(t) &= \left(\int_0^t (v_2(s) - u_2(s))\, e^{-bs} ds + z_2^0\right) e^{bt} \end{aligned} \tag{3.2}$$

En la siguiente proposición se dan condiciones para la evasión, cuando el subespacio $M = \{0\}$.

Proposición 3.1. *Consideremos la ecuación diferencial (3.1). Si $M = \{0\}$ y $U \subset V$ entonces el sistema es evadible.*

Demostración: Supongamos que $U \subset V$ y que el juego no es evadible; entonces existe $\bar{t}$ tal que (3.2) satisface

$$\begin{array}{l} e^{a\bar{t}}\left(\int_0^{\bar{t}} e^{-as}(v_1(s) - u_1(t))ds + z_1^0\right) = 0 \\ e^{b\bar{t}}\left(\int_0^{\bar{t}} e^{-bs}(v_2(s) - u_2(s))ds + z_2^0\right) = 0 \end{array} \tag{3.3}$$

de (3.3) se obtiene

$$\begin{array}{l} \int_0^{\bar{t}} e^{-as}(v_1(s) - u_1(s))ds = -z_1^0 \\ \int_0^{\bar{t}} e^{-bs}(v_2(s) - u_2(s))ds = -z_2^0 \end{array} \tag{3.4}$$

De (3.4), sin pérdida de generalidad se toma la última ecuación

$$\int_0^{\bar{t}} e^{-bs}\left(v_2(s) - u_2(s)\right) ds = -z_2^0 \tag{3.5}$$

si $z_2^0 < 0$ entonces $-z_2^0 > 0$. Por lo tanto, dada $u_2(s)$ puede tomarse $v_2(s)$ de tal forma que $v_2(s) - u_2(s) < 0$ porque por hipótesis $U \subset V$ y así

$$\int_0^{\bar{t}} e^{-bs}\left(v_2(s) - u_2(s)\right) ds < 0 \tag{3.6}$$

de esta manera de (3.6) se llega a

$$\int_0^{\bar{t}} e^{-bs}\left(v_2(s) - u_2(s)\right) ds \neq z_2^0. \tag{3.7}$$

Pero de acuerdo con (3.4) esto es una contradicción. Similarmente se demuestra cuando $z_2^0 > 0$. Por lo tanto el sistema es evadible. □

Proposición 3.2. *Consideremos la ecuación diferencial (3.1). Si $M = \{(x,0)^T \,|x \in I\!R\}$ y $U \subset V$ entonces el sistema es evadible.*

Demostración: La demostración de esta proposición es similar a la de la Proposición 3.1. ☐

Proposición 3.3. *Supongamos que se tiene la ecuación diferencial (3.1),con* $a > 0$, $b > 0$. *Si* $M = \{(x, mx) \,|\, x, m \in I\!R, m$ *fijo*$\}$, $U \subset V$ *entonces el sistema es evadible.*

Demostración: Consideremos el vector $p = (z_1(t), z_2(t))^T$ y el vector $p' = (x, mx)^T$ el cual es la proyección de p sobre el subespacio M, lo que se quiere es encontrar el vector $p_\perp(z_1, z_2)$ ortogonal a M (ver Fig.3.1).

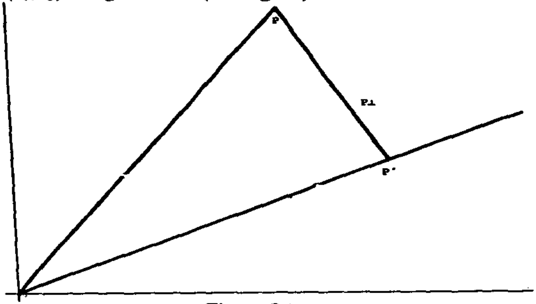

Figura 3.1:

Sabemos que $p_\perp(z_1, z_2) = (z_1 - x, z_2 - mx)^T$, y como este vector es ortogonal a M entonces

$$(z_1 - x, z_2 - mx)^T \cdot (1, m)^T = 0$$

si y sólo si

$$x = \frac{z_1 + mz_2}{m^2 + 1}.$$

Por lo tanto

$$p_\perp(z_1, z_2) = \left(\frac{m^2 z_1 - mz_2}{m^2 + 1}, \frac{z_2 - mz_1}{m^2 + 1}\right). \tag{3.8}$$

Tomemos una vecindad de radio ε alrededor del subespacio M, $N(\varepsilon, M)$. Así para que el sistema sea evadible se debe de cumplir que $p_{\perp}(z_1, z_2) \notin N(\varepsilon, M)$.

Supongamos que el sistema no es evadible, esto implica que $p_{\perp}(z_1, z_2) \in N(\varepsilon, M)$, si y sólo si

$$\left\| \frac{m^2 z_1 - m z_2}{m^2+1}, \frac{z_2 - m z_1}{m^2+1} \right\| < \varepsilon$$

si y sólo si

$$|m z_1 - z_2| < \varepsilon. \tag{3.9}$$

Para toda t.

Substituyendo la solución (3.2) en (3.9) se obtiene

$$\left| m \left(e^{at} \left(\int_0^t e^{-as} (v_1 - u_1)\, ds \right) + z_1^0 \right) - e^{-bt} \left(\int_0^t e^{-bs} (v_2 - u_2)\, ds + z_2^0 \right) \right| < \varepsilon \tag{3.10}$$

Puesto que $(v-u)(t)$ es continua y $v \in V, u \in U$ son compactos entonces existen constantes k_1, k_2 tal que que $(v_1 - u_1)(t) \geq k_1, (v_2 - u_2)(t) \geq k_2$. Por lo tanto de (3.10)

$$\left| m \left(e^{at} \left(\int_0^t e^{-as} k_1 ds \right) + z_1^0 \right) - e^{bt} \left(\int_0^t e^{-bs} k_2 ds + z_2^0 \right) \right| < \varepsilon$$

calculando

$$\left| \frac{k_2}{b} - \frac{m k_1}{a} + m e^{at} \left(\frac{k_1}{a} + z_1^0 \right) - e^{bt} \left(\frac{k_2}{b} + z_2^0 \right) \right| < \varepsilon \tag{3.11}$$

si definimos $R_1 = \frac{k_2}{b} - \frac{m k_1}{a}$, $R_2 = m\left(\frac{k_1}{a} + z_1^0\right)$, $R_3 = \frac{k_2}{b} + z_2^0$, la ecuación (3.11) se puede escribir como

$$\left| R_1 + R_2 e^{at} - R_3 e^{bt} \right| < \varepsilon \tag{3.12}$$

Dado que R_1 es una constante lo que nos interesa ver es que sucede con la otra parte de la ecuación (3.12), a saber, $\left| R_2 e^{at} - R_3 e^{bt} \right|$. De esto se tienen nueve casos posibles que son los siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{c} R_2 < 0, R_3 > 0 \\ R_2 > 0, R_3 > 0 \\ R_2 = 0, R_3 > 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} R_2 < 0, R_3 = 0 \\ R_2 > 0, R_3 = 0 \\ R_2 = 0, R_3 = 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} R_2 < 0, R_3 < 0 \\ R_2 > 0, R_3 < 0 \\ R_2 = 0, R_3 < 0 \end{array} \right\}.$$

Supongamos que $R_2 < 0, R_3 > 0$ entonces $R_2 e^{at} < 0$, $-R_3 e^{bt} < 0$ y como $a > 0, b > 0$ esto implica $\left| R_2 e^{at} - R_3 e^{bt} \right|$ tiende a infinito cuando t tiende a infinito.

Por lo tanto (3.12) no se cumple, lo cual es una contradicción. De esta forma se tiene que el sistema es evadible.

Todos los demás casos se demuestran de manera similar excepto cuando $R_2 < 0, R_3 < 0$ ó $R_2 > 0, R_3 > 0$. Supongamos que $R_2 < 0, R_3 < 0$ y que $a > b > 0$ entonces

$$\left|R_2 e^{at} - R_3 e^{bt}\right| = e^{at}\left|R_2 - R_3 e^{(b-a)t}\right| \tag{3.13}$$

pero $a > b, b - a < 0, R_3 e^{(b-a)t}$ tiende a cero cuando t tiende a infinito, de donde $\left|R_2 - R_3 e^{(b-a)t}\right|$ converge a $|R_2|$ cuando t tiende a infinito, asi $e^{at}\left|R_2 - R_3 e^{(b-a)t}\right|$ diverge, lo que contradice (3.12) en este caso el sistema es evadible.

Supongamos que $R_2 < 0, R_3 < 0$ con $b > a > 0$, $b - a > 0$ lo que implica $\left|R_2 - R_3 e^{(b-a)t}\right|$ diverge y como e^{at} diverge entonces (3.13) diverge, lo que por la desigualdad (3.12) es una contradicción. Así el sistema es evadible. La demostración del caso $R_2 > 0, R_3 > 0$ es el mismo que el anterior. Con esto se concluye la demostración. $\square$

Una vez analizado el sistema anterior ahora estudiaremos un sistema más general que es de la forma

$$\dot{z}(t) = Az(t) + F(u,v) \tag{3.14}$$

donde $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $F(u,v) = \begin{pmatrix} f_1(u,v) \\ f_2(u,v) \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^0 \\ z_2^0 \end{pmatrix}$.

Resolviendo (3.14) las soluciones son

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{at}\left(\int_0^t e^{-as} f_1(u,v)\,ds + z_1^0\right) \\ z_2(t) &= e^{bt}\left(\int_0^t e^{-bs} f_2(u,v)\,ds + z_2^0\right) \end{aligned} \tag{3.15}$$

Proposición 3.4. *Sea (3.14) con condición inicial $z(0) = z^0$, $M = \{0\}$ subespacio de IR^2. Si para toda $u(t)$ existe $v_1(t)$ tal que $f_2(u,v_1) \geq k_2 \geq 0$, para toda $u(t)$ existe $v_2(t)$ tal que $f_2(u,v_2) \leq -k_2 \leq 0$ entonces el sistema es evadible.*

Demostración: Consideremos la segunda ecuación de (3.15) y supongamos que el sistema no es evadible entonces existe $\bar{t}$ tal que

$$\int_0^{\bar{t}} e^{-bs} f_2(u,v)\,ds + z_2^0 = 0 \tag{3.16}$$

Por lo tanto

$$\int_0^{\bar{t}} e^{-bs} f_2(u,v)\,ds = -z_2^0 \tag{3.17}$$

Supongamos que $-z_2^0 < 0$, por hipótesis para toda $u(t)$ existe $v_1(t)$, tal que $f_2(u,v) \geq k_2 \geq 0$ y como $e^{-bs} > 0$ esto implica que

$$\int_0^t e^{-bs} f_2(u,v)\, ds \geq 0, \text{ para toda } t$$

en particular para $\bar{t}$

$$\int_0^{\bar{t}} e^{-bs} f_2(u,v)\, ds \geq 0.$$

Por lo tanto

$$\int_0^{\bar{t}} e^{-bs} f_2(u,v)\, ds \neq z_2^0. \tag{3.18}$$

De (3.17) y (3.18) se tiene una contradicción. De modo similar se demuestra la evadibilidad si $-z_2^0 > 0$. □

Corolario 3.1. *Tomemos la ecuación (3.14) con condición inicial $z(0) = z^0, M = \{(x,0)^T \,|x \in IR\}$. Si, para toda u existe v_1 tal que $f_2(u,v_1) \geq k_2 > 0$, para toda u existe v_2 tal que $f_2(u,v_2) \leq -k_2 < 0$ entonces el sistema es evadible.*

Demostración: la demostración es análoga al de la Proposición 3.4. □

La demostración anterior no sirve si el subespacio $M = \{(x,mx)^T \,|m \in IR\}$. Entonces existen condiciones iniciales en las cuales es posible la evasión.

En efecto consideremos el cociente

$$\frac{\int_0^t e^{-bs} f_2(u,v)\, ds + z_2^0}{m\left(\int_0^t e^{-as} f_1(u,v)\, ds + z_1^0\right)} \tag{3.19}$$

y supongamos que $a > b > 0, m > 0$. Ahora como u, v pertenecen a conjuntos compactos y $f_2(u,v)$ es continua entonces está acotada superiormente; es decir, existe k_2 tal que $f_2(u,v) \leq k_2$. Por lo tanto

$$\int_0^t e^{-bs} f_2(u,v)\, ds + z_2^0 \leq \int_0^t e^{-bs} k_2 ds + z_2^0 = -\frac{k_2}{be^{bt}} + \frac{k_2}{b} + z_2^0.$$

Si hacemos t tender a infinito en la última igualdad su límite será $\frac{k_2}{b} + z_2^0$, así

$$\int_0^t e^{-bs} f_2(u,v)\, ds + z_2^0 \leq \frac{k_2}{b} + z_2^0 \tag{3.20}$$

Por su parte $f_1(u,v)$ también está acotada inferiormente; es decir, existe una constante k_1 tal que $f_1(u,v) \geq k_1$. Calculando y sacando límite al igual que arriba se llega

$$m\left(\int_0^t e^{-as} f_1(u,v)\,ds + z_1^0\right) \geq m\left(\frac{k_1}{a} + z_1^0\right) \tag{3.21}$$

Por (3.19), (3.20) y (3.21) se obtiene

$$\frac{\int_0^t e^{-bs} f_2(u,v)\,ds + z_2^0}{m\left(\int_0^t e^{-as} f_1(u,v)\,ds + z_1^0\right)} \leq \frac{a(k_2 + bz_2^0)}{mb(k_1 + az_1^0)} \tag{3.22}$$

por lo cual el cociente está acotado. Si tomamos $z_2^0 < 0$ de tal forma que $a(k_2 + bz_2^0) < 0$ y z_1^0 de tal forma que $mb(k_1 + az_1^0) > 0$ entonces

$$\frac{\int_0^t e^{-bs} f_2(u,v)\,ds + z_2^0}{m\left(\int_0^t e^{-as} f_1(u,v)\,ds + z_1^0\right)} \leq 0$$

Por otro lado $e^{(a-b)t}$ es una función creciente y continua de donde, para toda t

$$e^{(a-b)t} \neq \frac{\int_0^t e^{-bs} f_2(u,v)\,ds + z_2^0}{m\left(\int_0^t e^{-as} f_1(u,v)\,ds + z_1^0\right)} \tag{3.23}$$

De (3.23)

$$me^{at}\left(\int_0^t e^{-as} f_1(u,v)\,ds + z_1^0\right) \neq e^{bt}\left(\int_0^t e^{-bs} f_2(u,v)\,ds + z_2^0\right) \tag{3.24}$$

Finalmente al sustituir (3.15) en (3.24) se tiene $m\, z_1(t) \neq z_2(t)$. Por lo tanto el sistema es evadible. □

3.2. Forma canónica no diagonal

Tomemos el sistema

$$\dot{z}(t) = Az(t) + v(t) - u(t) \tag{3.25}$$

con condición inicial $z(0)=z^0, A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, $v(t)-u(t)=\begin{pmatrix} v_1(t)-u_1(t) \\ v_2(t)-u_2(t) \end{pmatrix}$ y solución

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{at}\left(z_1^0+\int_0^t e^{-as}[v_1(s)-u_1(s)]ds\right) \\ z_2(t) &= e^{at}\left([tz_1^0+z_2^0]+\int_0^t e^{-as}\left([v_1(s)-u_1(s)](t-s)+[v_2(s)-u_2(s)]\right)ds\right) \end{aligned} \tag{3.26}$$

Proposición 3.5. *Consideremos (3.25) con condición inicial $z(0)=z^0$. Si $M=\{0\}$ y $U\subset V$ entonces el sistema es evadible.*

Demostración: Supongamos que el sistema no es evadible, esto implica que existe $\bar{t}$ tal que $z_1(\bar{t})=z_2(\bar{t})=0$. De la primera ecuación de (3.26) se tiene

$$e^{a\bar{t}}\left(z_1^0+\int_0^{\bar{t}} e^{-as}(v_1-u_1)\,ds\right)=0. \tag{3.27}$$

Así

$$\int_0^{\bar{t}} e^{-as}(v_1-u_1)\,ds=-z_1^0. \tag{3.28}$$

Supongamos que $z_1^0<0$, ahora como $U\subset V$ dada $u_1(t)$ puede tomarse $v_1(t)$ de tal manera que $v_1(t)-u_1(t)<0$ por lo cual $e^{-as}(v_1(t)-u(t))<0$.
Así $\int_0^t e^{-as}(v_1-u_1)\,ds<0$ para toda t. En particular para $\bar{t}$, por lo tanto

$$\int_0^{\bar{t}} e^{-as}(v_1-u_1)\,ds\neq z_1^0. \tag{3.29}$$

De (3.28) y (3.29) se tiene una contradicción lo que implica que el sistema es evadible.

De la misma manera se demuestra la evadibilidad si $z_1^0\geq 0$. □

Consideremos el caso más general que es cuando $F(u,v)$ no es lineal

$$\dot{z}(t)=Az(t)+F(u,v) \tag{3.30}$$

con condición inicial $z(0)=z^0, A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, $F(u,v)=\begin{pmatrix} f_1(u,v) \\ f_2(u,v) \end{pmatrix}$ y solución

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \left(z_1^0+\int_0^t e^{-as}f_1(u,v)ds\right) \\ z_2(t) &= e^{at}\left([tz_1^0+z_2^0]+\int_0^t e^{-as}\left(f_1(u,v)(t-s)+f_2(u,v)\right)\right) \end{aligned} \tag{3.31}$$

Proposición 3.6. *Consideremos la ecuación (3.30) y subespacio $M = \{0\}$. Si para toda u existe v_1 tal que $f_1(u, v_1) \geq k_1 \geq 0$ y para toda u existe v_2 tal que $f_1(u, v_2) \leq -k_1 \leq 0$ entonces el sistema es evadible.*

<u>Demostración</u>: Supongamos que $z_1^0 > 0$. Por hipótesis para toda $u(s)$ existe $v_1(s)$ tal que $f_1(u(s), v_1(s)) \geq k_1 > 0$ y como $e^{-as} > 0$ para toda s esto implica que $e^{-as} f_1(u(s), v_1(s)) > 0$ por lo cual

$$z_1^0 + \int_0^t e^{-as} f_1(u, v_1) ds > 0$$

asi $z_1(t) = e^{at}\left(z_1^0 + \int_0^t e^{-as} f_1(u, v_1)\, ds\right) > 0$ para toda t.

Por lo tanto $z_1(t) \neq 0$ para toda t, esto implica que (3.31) nunca intersecta al subespacio M. En forma análoga se demuestran los otros casos: $z_1^0 < 0$ y $z_1^0 = 0$. $\square$

La demostración anterior no sirve, si el subespacio M es el eje x. Supongamos que para toda u existe v tal que $|f_1(u, v)| \geq k_1$ y $|f_2(u, v)| \geq k_2$ entonces existen condiciones iniciales en los cuales es posible la evasión.

En efecto, de (3.31) tomemos la segunda ecuación y veamos si existe t tal que cumpla la siguiente igualdad

$$e^{at}\left(\left(t z_1^0 + z_2^0\right) + \int_0^t e^{-as}\left(f_1(u, v)(t - s) + f_2(u, v)\right) ds\right) = 0 \tag{3.32}$$

la igualdad anterior es equivalente a

$$\left(t z_1^0 + z_2^0\right) + \int_0^t e^{-as}\left(f_1(u, v)(t - s) + f_2(u, v)\right) ds = 0 \tag{3.33}$$

usando las hipótesis y calculando, la ecuación (3.33) se escribe como

$$t\left(z_1^0 + \frac{k_1}{a}\right) - \left(\frac{k_1}{a^2} - \frac{k_2}{a}\right) + e^{-at}\left(\frac{k_1}{a^2} - \frac{k_2}{a}\right) = -z_2^0. \tag{3.34}$$

Si $R_1 = z_1^0 + \frac{k_1}{a}$, $R_2 = \frac{k_1}{a^2} - \frac{k_2}{a}$ entonces (3.34) es igual a

$$h(t) = R_1 t - R_2 + e^{-at} R_2 = -z_2^0. \tag{3.35}$$

Si $R_1 > 0$ y $R_2 > 0$ entonces $h(t)$ satisface:

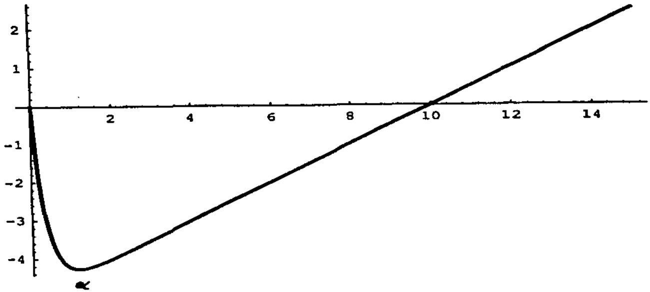

Figura 3.2:

i) $h(0) = 0$; $h(t) \to \infty$ si $t \to \infty$

ii) $h(t)$ tiene un mínimo $-\alpha$. Así si $-z_2^0 < -\alpha$ entonces para toda t, $h(t) \neq -z_2^0$ (ver Fig. 3.2).

De esta manera se concluye que el sistema no es evadible.

Al igual que antes, si el subespacio $M = \left\{(x, mx)^T / x \in IR, m \in IR\right\}$ y suponemos que para toda u existe v tal que $|f_1(u,v)| \geq k_1$, $|f_2(u,v)| \geq k_2$ entonces existen condiciones iniciales para los cuales es posible la evasión

Así de (3.31) tomamos las ecuaciones y vemos si existe t tal que $z_2(t) = mz_1(t)$; es decir,

$$\begin{aligned} &e^{at}\left([tz_1^0 + z_2^0] + \textstyle\int_0^t e^{-as}\left(f_1(u,v)(t-s) + f_2(u,v)\right)ds\right) \\ &= me^{at}\left(z_1^0 + \textstyle\int_0^t e^{-as} f_1(u,v)\,ds\right) \end{aligned} \tag{3.36}$$

usando las hipótesis, (3.36) se escribe como

$$e^{at}\left([tz_1^0 + z_2^0] + \int_0^t e^{-as}k_1(t-s) + k_2 ds\right) = me^{at}\left(z_1^0 + \int_0^t e^{-as}k_1 ds\right) \tag{3.37}$$

calculando y simplificando

$$t\left(z_1^0+\frac{k_1}{a}\right)-\left(\frac{k_1}{a^2}-\frac{k_2}{a}\right)+e^{-at}\left(\frac{k_1}{a^2}-\frac{k_2}{a}\right)+z_2^0=mz_1^0+\frac{mk_1}{a}-\frac{mk_1}{a}e^{-at}$$

si y sólo si

$$t\left(z_1^0+\frac{k_1}{a}\right)-\left(\frac{k_1}{a^2}-\frac{k_2}{a}+\frac{mk_1}{a}\right)+e^{-at}\left(\frac{k_1}{a^2}-\frac{k_2}{a}+\frac{mk_1}{a}\right)=mz_1^0-z_2^0. \quad (3.38)$$

Si $z_1^0+\frac{k_1}{a}=R_1$, $\frac{k_1}{a^2}-\frac{k_2}{a}+\frac{mk_1}{a}=R_2$ entonces la ecuación (3.38) es igual a

$$R_1t-R_2t+e^{-at}R_2=mz_1^0-z_2^0. \quad (3.39)$$

Pero la ecuación (3.39) se reduce al caso que ya se analizó en (3.35). Por lo tanto para ciertas condiciones iniciales el sistema es evadible.

3.3. El caso general

Nuevamente consideremos el sistema

$$\dot{z}(t)=Az(t)+F(u,v) \quad (3.40)$$

con condición inicial $z(0)=z^0$, donde $A\in \mathbf{m}_{2\times 2}$ es una matriz que puede ser reducida a una de las formas canónicas de Jordan a saber;

$$\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} a & 0\\ 1 & a\end{pmatrix}$$

con $F(u,v)=(f_1(u,v),f_2(u,v))^T$.

Al igual que antes, lo que se quiere es ver bajo que condiciones el sistema es evadible, para esto se procederá de la siguiente manera.

Puesto que A se puede reducir a una de las formas canónicas de Jordan, existe $P\in \mathbf{m}_{2\times 2}$ invertible y $J\in \mathbf{m}_{2\times 2}$ una de las formas canónicas de Jordan tal que

$$A=P^{-1}JP. \quad (3.41)$$

Haciendo el cambio de variable $w=Pz$. Se tiene que $z=P^{-1}w$, derivando $\dot{z}=P^{-1}\dot{w}$. Sustituyendo $z=P^{-1}w$ en (3.40) obtenemos

$$P^{-1}\dot{w}=AP^{-1}w+F(u,v) \quad (3.42)$$

multiplicando por P de ambos lados de la ecuación (3.42) se tiene

$$\dot{w} = PAP^{-1}w + PF(u,v) \tag{3.43}$$

por (3.41) y definiendo $PF(u,v) = \bar{F}(u,v)$ entonces la ecuación (3.43) es igual a

$$\dot{w} = Jw + \bar{F}(u,v) \tag{3.44}$$

con condición inicial $w(0) = Pz(0)$.

Proposición 3.7. *Si A puede ser reducida a una de las formas canónicas de Jordan y $M = \{0\}$ entonces el sistema (3.40) es evadible si y sólo si (3.44) es evadible.*

Demostración: $\Rightarrow$) Por demostrar que para toda $u(t) \in U$ existe $v(t)$ tal que la solución $w(t)$ de $\dot{w}(t) = Jw(t) + \bar{F}(u(t), v(t))$ con condición inicial $w(0) = w_0$ cumple con $|w(t)| > 0$. Pero como $\dot{z}(t) = Az(t) + F(u(t), v(t))$ es evadible, entonces para toda $u(t) \in U$ existe $v(t) \in V$ tal que la solución $z(t)$, $z(0) = P^{-1}w_0$ cumple con $|z(t)| > 0$ y puesto que P es invertible entonces $|Pz(t)| = |w(t)| > 0$.

$\Leftarrow$) Suponemos que $\dot{w}(t) = Jw(t) + \bar{F}(u,v)$ es evadible entonces para toda $u(t) \in U$ existe $v(t) \in V$ tal que la solución $w(t)$, con condición inicial $w(0) = Pz_0$ satisface que $|w(t)| > 0$. Pero $|w(t)| = |Pz(t)| > 0$ y como P es invertible esto implica que $|z(t)| > 0$. Con esto se concluye la demostración. $\square$

Proposición 3.8. *Sea A una matriz que puede ser reducida a una de las formas canónicas de Jordan y $M = \{\lambda u | \lambda \in IR\}$ entonces (3.40) es evadible si y sólo si (3.44) es evadible.*

Demostración: $\Rightarrow$) por demostrar que para toda $u(t) \in U$ existe $v(t) \in V$ tal que la solución $w(t)$ de $\dot{w}(t) = Jw(t) + \bar{F}(u(t), v(t))$ con condición inicial $w(0) = w_0$ cumple con $d(PM, w(t)) > 0$.

Supongamos que $d(PM, w(t)) = 0$ para toda t, entonces $Pz(t) \in PM$ esto implica que

$$Pz(t) = \lambda Pu$$

multiplicando de ambos lados de la igualdad por P^{-1} se tiene

$$z(t) = \lambda u.$$

Así $z(t) \in M$. Pero por hipótesis $d(z(t), M) > 0$; es decir, $z(t) \notin M$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto el sistema es evadible.

$\Leftarrow$) Por demostrar que para toda $u(t) \in U$ existe $v(t) \in V$ tal que la solución $z(t)$ de $\dot{z}(t) = Az(t) + F(u(t), v(t))$ con condición inicial $z(0) = z_0$ cumple con $d(M, z(t)) > 0$.

Supongamos que $d(M, z(t)) = 0$ para toda t, entonces $z(t) = \lambda u$. Multiplicando la igualdad anterior por P se tiene

$$Pz(t) = P\lambda u \in PM.$$

Lo anterior implica que $d(PM, Pz(t)) = 0$. Pero por hipótesis $d(PM, z(t)) > 0$ esto nuevamente nos lleva a una contradicción. Así el sistema es evadible. $\square$

Proposición 3.9. *a) Supongamos que la forma canónica de A es diagonal y $M = \{0\}$. Si para toda $u(t) \in U$ existe $v_1(t) \in V$ tal que $f_1(u,v) \geq k_1$, para toda $u(t) \in U$ existe $v_2(t) \in V$ tal que $f_1(u,v) \leq -k_1$ y para toda $u(t) \in U$ existe $v_3(t) \in V$ tal que $f_2(u,v_3) \geq k_2$ entonces el sistema es evadible.*
b) Supongamos que la forma canónica de A es diagonal y $M = \{(x,0) \mid x \in I\!R\}$. Si $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ 0 & p_{22} \end{pmatrix}$, para toda $u(t) \in U$ existe $v_1(t) \in V$ tal que $(p_{11}f_1 + p_{12}f_2)(u,v_1) \geq k_1$, para toda $u(t) \in U$ existe $v_2(t) \in V$ tal que $(p_{11}f_1 + p_{12}f_2)(u,v_2) \leq -k_1$, y para toda $u(t) \in U$ existe $v_3(t) \in V$ tal que $p_{22}f_2(u,v) \geq k_2$ entonces el sistema es evadible.
c) Si la forma canónica de A es $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ y $M = \{0\}$ entonces el sistema es evadible.

Demostración: La demostración es inmediata de las Proposiciones 3.4, 3.6, 3.7, 3.8 y el Corolario 3.1. $\square$

A. Teoría Básica de Ecuaciones Diferenciales

En este apéndice se verán algunos temas de la teoría básica de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. En particular se analizarán los conceptos de matriz fundamental de soluciones y la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales en su forma no homogénea utilizando el método de variación de parámetros; también se revisará la forma canónica de Jordan, que utilizaremos en el análisis del problema de escape en dimensión dos, que será estudiado en el Capítulo 3.

A.1. Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

A.1.1. La ecuación homogénea

Consideremos la ecuación diferencial homogénea $\dot{z}(t) = Az(t)$

$$\dot{z}(t) = Az(t) \tag{A.1}$$

con $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \ldots., z_n(t))^T$ y $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

De modo semejante al caso unidimensional buscamos la solución de la ecuación (A.1) de la forma:

$$z(t) = e^{ct}v. \tag{A.2}$$

Derivando (A.2) tenemos que

$$\dot{z}(t) = ce^{ct}v. \tag{A.3}$$

Sustituyendo (A.2) y (A.3) en (A.1), se obtiene

$$ce^{ct}v = Ae^{ct}v,$$

lo cual se cumple si y sólo si

$$Av = cv. \tag{A.4}$$

Antes de continuar se da la siguiente definición.

Definición A.1. *Un vector $v \neq 0$ que satisface (A.4) se llama vector característico de A y a c, valor característico. Así, cada vector característico nos genera una solución de (A.1).*

La ecuación (A.4), si y sólo si

$$Av - cv = 0,$$

si y sólo si

$$(A - cI)\, v = 0,$$

(I denota la matriz idéntica), si y sólo si

$$\det(A - cI) = 0;$$

al calcular el determinante se obtiene un polinomio de grado n, llamado polinomio característico cuyas raíces son los valores característicos de A.

Antes de demostrar que, un conjunto de s vectores característicos linealmente independientes, genera un conjunto de soluciones de la forma (A.2), linealmente independiente, se darán 2 teoremas que se utilizarán en la demostración.

Teorema A.1. *(Teorema de existencia y unicidad). Existe una, y sólamente una solución del problema con valor inicial*

$$\dot{z}\,(t) = Az,\ z\,(t_0) = \begin{pmatrix} z_1^0 \\ \vdots \\ z_n^0 \end{pmatrix}.$$

Más aún, dicha solución existe para $-\infty < t < \infty$.

No daremos la demostración, pero el lector interesado puede estudiarla en [Br].

Teorema A.2. *Sean $z_1\,(t)\,, z_2\,(t)\,, \ldots\ldots, z_k\,(t)\,,$ k soluciones de (A.1). Elíjase t_0 convenientemente. Entonces $z_1\,(t)\,, z_2\,(t)\,, \ldots, z_k\,(t)$ son soluciones linealmente independientes si y sólo si $z_1\,(t_0)\,, z_2\,(t_0)\,, \ldots\ldots, z_k\,(t_0)$ son vectores linealmente independientes.*

Demostración: Supongamos que $z_1(t), z_2(t), \ldots\ldots, z_k(t)$ son soluciones linealmente dependientes. Entonces existen constantes $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_k$ no todas cero, tal que

$$c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t) + \ldots\ldots + c_k z_k(t) = 0$$

al evaluar en $t = t_0$ se tiene que

$$c_1 z_1(t_0) + c_2 z_2(t_0) + \ldots\ldots + c_k z_k(t_0) = 0.$$

Por lo tanto los vectores $z_1(t_0), z_2(t_0), \ldots\ldots, z_k(t_0)$ son linealmente dependientes.

Inversamente, supongamos que $z_1(t_0), z_2(t_0), \ldots\ldots, z_k(t_0)$ son vectores linealmente dependientes. Entonces existen constantes $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_k$ no todas cero tal que

$$c_1 z_1(t_0) + c_2 z_2(t_0) + \ldots\ldots + c_k z_k(t_0) = 0.$$

Definamos la siguiente función

$$\phi(t) = c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t) + \ldots\ldots + c_k z_k(t).$$

Esta función satisface (A.1), porque es combinación lineal de soluciones y como $\phi(t_0) = 0$. Por lo tanto, por el Teorema A.1, $\phi(t) = 0$ para toda t. Esto implica que $z_1(t), \cdots, z_k(t)$ son soluciones linealmente dependientes. □

Teorema A.3. *Si A tiene n vectores característicos linelamente independientes $v_1, \ldots, v_n$ con valores característicos $c_1, c_2, \ldots, c_n$ respectivamente entonces $z_i(t) = e^{c_i t} v_i$, para $i = 1, \cdots, n$ son n soluciones linealmente independientes.*

Demostración: Usando el Teorema A.2, basta demostrar que $z_i(t_0) = e^{c_i t_0} v_i$, $i = 1, \cdots, n$ es un conjunto linelamente independiente, tomando t_0 de manera conveniente. Si $t_0 = 0$ entonces $z_i(0) = v_i$. Por hipótesis $v_1, \cdots, v_n$ es un conjunto linealmente independiente. Por lo tanto las soluciones son linealmente independientes. □

Teorema A.4. *Sean $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vectores característicos de A con valores característicos $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_k$ respectivamente entonces $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_k$ son linealmente independientes.*

Demostración: La prueba se hará por inducción sobre k.

Si $k = 1$ entonces el teorema es cierto .

Suponemos que el teorema se cumple para $k = i$, por demostrar que es cierto para $k = i + 1$.

Sean $v_1, v_2, ..., v_{i+1}$ cualesquiera vectores característicos con valores característicos distintos $c_1, c_2, ..., c_{i+1}$. Por demostrar que el conjunto de vectores es linealmente independiente, para esto tomamos la combinación lineal

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_{i+1} v_{i+1} = 0. \tag{A.5}$$

Multiplicando por A a ambos lados de (A.5), se tiene

$$\alpha_1 A v_1 + \alpha_2 A v_2 + ... + \alpha_{i+1} A v_{i+1} = 0$$

que es igual a

$$\alpha_1 c_1 v_1 + \alpha_2 c_2 v_2 + ... + \alpha_{i+1} c_{i+1} v_{i+1} = 0 \tag{A.6}$$

Ahora (A.5) lo multiplicamos por c_1 y la restamos de (A.6) obteniendo

$$(c_2 - c_1)\alpha_2 v_2 + (c_3 - c_1)\alpha_3 v_3 + ... + (c_{i+1} - c_1)\alpha_{i+1} v_{i+1} = 0$$

pero $v_2, v_3, ..., v_{i+1}$, son cualesquiera i vectores característicos con valores característicos $c_2, c_3, ..., c_{i+1}$ distintos. Por hipótesis de inducción los vectores son linealmente independientes lo que implica que

$$(c_2 - c_1)\alpha_2 = (c_3 - c_1)\alpha_3 = ... = (c_{i+1} - c_1)\alpha_{i+1} = 0$$

pero $c_2, c_3, ..., c_{i+1}$ son distintos .

Por lo tanto

$$\alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_{i+1} = 0$$

y de (A.5) se tiene que $\alpha_1 = 0$. Por lo tanto los vectores característicos son linealmente independientes. □

Analisemos el caso en el cual el valor característico es un número complejo; es decir, $\lambda = \alpha + i\beta$, con $\beta \neq 0$ y el vector característico es $v = v_1 + iv_2$ entonces $z(t) = e^{\lambda t} v$ es una solución con valores complejos, de la ecuación (A.1), que nos genera un conjunto de soluciones reales linealmente independientes. Como se muestra en el siguiente lema.

Lema A.1. *Si $v = v_1 + iv_2$ es un vector característico de (A.1) correspondiente al valor propio $\lambda = \alpha + i\beta$, con $\beta \neq 0$ entonces*

$$z_1(t) = e^{\alpha t}(v_1 \cos\beta t - v_2 \sin\beta t), \; z_2(t) = e^{\alpha t}(v_1 \sin\beta t + v_2 \cos\beta t)$$

son dos soluciones de (A.1) con valores reales linealmente independientes.

Demostración: Supongamos que $z(t) = e^{\lambda t}v$ es solución de (A.1) con valores complejos, entonces la podemos escribir como

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{(\alpha+i\beta)t}(v_1 + iv_2) \\ &= e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)(v_1 + iv_2) \\ &= e^{\alpha t}[(v_1\cos\beta t - v_2\sin\beta t) + i(v_1\sin\beta t + v_2\cos\beta t)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$z_1(t) = e^{\alpha t}(v_1 \cos\beta t - v_2 \sin\beta t), \; z_2(t) = e^{\alpha t}(v_1 \sin\beta t + v_2 \cos\beta t).$$

Sólo queda verificar que estas soluciones son linealmente independientes. Dado que v y $\bar{v}$ son vectores en C^n linealmente independientes, ya que los valores característicos son diferentes por el Teorema A.3 las soluciones son linealmente independientes. Con lo cual se concluye la demostración. □

El caso que se acaba de analizar es el más sencillo, en el sentido de que las raíces del polinomio son de multiplicidad uno, así si el polinomio es de grado n, se tienen n raíces diferentes. Pero si algunas de las raíces del polinomio son de multiplicidad mayor o igual que dos entonces el número de raíces es menor que n y por lo tanto el número de vectores característicos también es menor que n.

Para resolver este problema suponemos que la ecuación (A.1) tiene k soluciones linealmente independientes con $k < n$ entonces se tienen que buscar las $n - k$ soluciones restantes. La manera de resolver esto es la siguiente; primero definimos e^{At}, donde A es una matriz, de la siguiente forma:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots\dots\dots + \frac{A^nt^n}{n!} + \dots \tag{A.7}$$

cuya derivada es

$$\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At} \tag{A.8}$$

de (A.8) se tiene que $e^{At}v$ es una solución de (A.1), para cualquier vector $v \neq 0$.

Una vez que se ha definido e^{At}, se procede a encontar n soluciones linealmente independientes de (A.1), antes observemos que

$$e^{At}v = e^{(A-cI)t}e^{cIt}v \tag{A.9}$$

donde

$$\begin{aligned} e^{cIt}v &= \left[I + cIt + \tfrac{c^2I^2t^2}{2!} + ...\right]v \\ &= \left[I\left(1 + ct + \tfrac{c^2t^2}{2!} + ...\right)\right]v \\ &= (1 + ct + \tfrac{c^2t^2}{2!} + ...)v = e^{ct}v \end{aligned}$$

Así

$$e^{At}v = e^{ct}e^{(A-cI)t}v.$$

Por otro lado, si al tomar un vector v tal que $(A-cI)^m v = 0$, para algún número entero m entonces la serie termina despúes de m términos; es decir,

$$e^{(a-cI)t}v = \left[I + (A-cI)\,t + \frac{(A-cI)^2\,t^2}{2!} + ...\frac{(A-cI)^m t^m}{m!} + 0 + ...\right]v. \tag{A.10}$$

Ahora supongamos que A tiene sólo k soluciones linealmente independientes con $k < n$ para encontrar las soluciones restantes, se toma un valor característico c de A y se encuentran los vectores v tales que cumplan $(A-cI)^2 v = 0$ y $(A-cI)\,v \neq 0$. Para cada uno de los vectores se tiene que

$$e^{At}v = e^{ct}\,(v + t\,(A-cI)\,v)\,,$$

es una solución más. Esto se hace con cada uno de los valores característicos, y en caso de que faltaran soluciones se toman los vectores v tales que $(A-cI)^3 v = 0$ y $(A-cI)^2 v \neq 0$. Para cada uno de los vectores se tiene que

$$e^{At}v = e^{ct}\left(v + t\,(A-cI)\,v + \frac{t^2}{2!}\,(A-cI)^2\,v\right)$$

es una solución adicional. Así se procede hasta encontrar las n soluciones linealmente independientes.

A.1.2. La matriz fundamental de soluciones y la ecuación no homogénea; variación de parámetros

Pasemos a definir que es una matriz fundamental de soluciones.

Definición A.2. *Una matriz $\mathbf{X(t)}$ se llama matriz fundamental de soluciones de la ecuación (A.1), si sus columnas forman un conjunto de n soluciones linealmente independientes.*

Antes de demostrar que e^{At} se puede calcular a partir de cualquier matriz fundamental de soluciones, se demostrarán algunos lemas importantes.

Lema A.2. *Una matriz $\mathbf{X(t)}$ es un matriz fundamental de soluciones de (A.1), si y sólo si $\dot{\mathbf{X}}\mathbf{(t)}=\mathbf{AX(t)}$ y det $\mathbf{X(0)}\neq 0$.*

Demostración: $\mathbf{X(t)}$ es una matriz fundamental de soluciones, sus columnas definen una solución de la ecuación (A.1), y si $\mathbf{X(t)}=(X_1(t), X_2(t), \ldots\ldots, X_n(t))$ donde
$X_1(t), \cdots, X_n(t)$ son las columnas entonces

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}(t) &= \left(\dot{X}_1(t), \dot{X}_2(t), \ldots\ldots, \dot{X}_n(t)\right) \\ &= (AX_1(t), AX_2(t), \ldots\ldots, AX_n(t)) \\ &= A(X_1(t), X_2(t), \ldots\ldots, X_n(t)) \\ &= A\mathbf{X}(t)\end{aligned}$$

Ahora $X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t)$ son soluciones linealmente independientes, si y sólo si $X_1(0), X_2(0), \cdots, X_n(0)$ son linealmente independientes si y sólo si det $\mathbf{X(0)}\neq 0$. □

Lema A.3. *La función $e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \ldots\ldots$ es una matriz fundamental de soluciones.*

Demostración: Sabemos que $\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}$, lo que implica que e^{At} es solución de $\dot{\mathbf{X}}\mathbf{(t)}=\mathbf{AX(t)}$, y como su determinante en $t = 0$ es uno, usando el Lema A.2 se tiene que e^{At} es una matriz fundamental de soluciones. □

Lema A.4. *Si $\mathbf{X(t)}$ y $\mathbf{Y(T)}$ son dos matrices fundamentales de soluciones de (A.1). Entonces existe una matriz constante C tal que $\mathbf{Y(t)}=\mathbf{X(t)}C$.*

Demostración: Dado que las columnas $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$ y $Y_1(t), \ldots, Y_n(t)$ son conjuntos de soluciones linealmente independientes de (2.1). Por lo tanto cualquier columna de $\mathbf{Y(t)}$ se puede poner como combinación lineal de las columnas de $\mathbf{X(t)}$, asi existen $c_1^j, c_2^j, \ldots\ldots, c_n^j$, tales que

$$Y_j(t) = c_1^j X_1(t) + c_2^j X_2(t) + \ldots\ldots + c_n^j X_n(t), \text{ con } j = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

entonces definimos

$$C = (C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n)$$

con $C_j = (c_1^j, c_2^j, \ldots\ldots, c_n^j)^T$.

Por lo tanto

$$\mathbf{Y(t)} = \mathbf{X(t)}C. \qquad \square$$

Teorema A.5. *Sea $\mathbf{X}(t)$ una matriz fundamental de soluciones de (A.1) entonces*

$$e^{At} = \mathbf{X(t)X}^{-1}(0).$$

<u>Demostración:</u> $\mathbf{X(t)}$ es una matriz fundamental de soluciones de (A.1), usando los Lemas A.2 y A.3, se tiene que existe una matriz constante C tal que

$$e^{At} = \mathbf{X(t)}C,$$

calculando en $t = 0$ se tiene $I = \mathbf{X(0)}C$, de donde $C = \mathbf{X}^{-1}(0)$. Por lo tanto

$$e^{At} = \mathbf{X(t)X}^{-1}(0). \qquad \square$$

Para resolver el sistema no homogéneo

$$\dot{z} = Az + f(t),\ z(t_0) = z, \tag{A.11}$$

usaremos el método de variación de parámetros.

Supongamos que $z_1(t), z_2(t), \ldots\ldots, z_n(t)$, son soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo y que la solución general es $c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t) + \ldots.. + c_n z_n(t)$, entonces la solución de (A.11) debe ser de la forma

$$z(t) = u_1(t) z_1(t) + \ldots\ldots.. + u_n(t) z_n(t)$$

ó bien

$$z(t) = \mathbf{Z}(t)\, u(t)$$

con

$$\mathbf{Z}(t) = (z_1(t), z_2(t), \ldots.., z_n(t)),\ u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots.., u_n(t))^T.$$

Puesto que es solución de (A.11) debe satisfacerla; es decir,

$$(\mathbf{Z}(t)\dot{u}(t)) = A\mathbf{Z}(t)u(t) + f(t)$$

de donde

$$\dot{\mathbf{Z}}(t)u(t) + \mathbf{Z}(t)\dot{u}(t) = A\mathbf{Z}(t)u(t) + f(t) \tag{A.12}$$

y como $\mathbf{Z(t)}$ es una matriz fundamental de soluciones del sistema homogéneo entonces

$$\dot{\mathbf{Z}}(\mathbf{t}) = A\mathbf{Z}(\mathbf{t}) \tag{A.13}$$

sustituyendo (A.13) en (A.12), se tiene

$$A\mathbf{Z}(\mathbf{t})u(t) + \mathbf{Z}(\mathbf{t})\dot{u}(t) = A\mathbf{Z}(\mathbf{t})u(t) + f(t)$$

que es igual a

$$\mathbf{Z}(\mathbf{t})\dot{u}(t) = f(t) \tag{A.14}$$

y dado que las columnas de $\mathbf{Z}(\mathbf{t})$ son linealmente independientes entonces existe $\mathbf{Z}^{-1}(t)$. Así

$$\dot{u}(t) = \mathbf{Z}^{-1}(t)f(t) \tag{A.15}$$

integrando (A.15), de t_0 a t, se obtiene

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_{t_0}^{t} \dot{u}\,(s) &= \textstyle\int_{t_0}^{t} \mathbf{Z}^{-1}\,(s)\,f\,(s)\,ds \\
u\,(t) - u\,(t_0) &= \textstyle\int_{t_0}^{t} \mathbf{Z}^{-1}\,(s)\,f\,(s)\,ds \\
u\,(t) &= u\,(t_0) + \textstyle\int_{t_0}^{t} \mathbf{Z}^{-1}\,(s)\,f\,(s)\,ds \\
&= \mathbf{Z}^{-1}\,(t_0)\,z_0 + \textstyle\int_{t_0}^{t} \mathbf{Z}^{-1}\,(s)\,f\,(s)\,ds
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$z(t) = \mathbf{Z}(t)u(t) = \mathbf{Z}(\mathbf{t})\mathbf{Z}^{-1}(t_0) + \mathbf{Z}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{Z}^{-1}(s)f(s)ds$$

Si $\mathbf{Z}\,(t) = e^{At}$ entonces

$$z(t) = e^{At}e^{-At_0}z_0 + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-As}f(s)ds$$

ó bien

$$z(t) = e^{A(t-t_0)}z_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}f(s)ds \tag{A.16}$$

la cual es solucion de (A.11).

A.2. Matriz de Jordan

Dada una transformación lineal, $T : V \longrightarrow V$ con polinomio característico f y raíces en un cierto campo K, se quiere ver si es posible expresar a V como suma directa de subespacios cíclicos invariantes, donde la matriz de T está formada por submatrices de Jordan, que corresponden a las matrices de la transformación T restringida a cada uno de estos subespacios.

Para esto iniciaremos con la siguiente proposición.

Proposición A.1. *Sea $V = V_1 \oplus V_2 \oplus ...... \oplus V_n$ y $T : V \longrightarrow V$ lineal, tal que V_i es subespacio de V y $\dim V_i = r_i$, $i = 1, 2, ..., n$. $T(V_i) \subset V_i$ si y sólo si existe una base β donde la matriz asociada a T es de la forma*

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_n \end{pmatrix}$$

con $A_i : V_i \longrightarrow V_i$ y A_i es una matriz de $r_i \times r_i$.

<u>Demostración:$\Rightarrow$)</u> Sea β_i base de V_i, $i = 1, 2, ..., n$ esto implica que $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = \beta$ es una base de V con $\beta_i = (\alpha_1^i, \alpha_2^i, ..., \alpha_{r_i}^i)$. La matriz asociada a T en esta base es

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_n \end{pmatrix}.$$

$\Leftarrow$) Supongamos que existe una base β de T donde la matriz asociada a T es de la forma anterior, esto implica que existe una partición de β, es decir,

$$\beta_i = (\beta_1^i, \beta_2^i, ..., \beta_{r_i}^i)$$

base de A_i con $i = 1, 2, ..., n$. Definimos V_i el espacio generado por β_i, $i = 1, 2, ..., n$ y $V = V_1 \oplus V_2 \oplus ...... \oplus V_n$, porque $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2 + ... + \dim V_n$, $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = \beta$ y $T(V_i) \subset V_i$ porque así se construyó V_i. $\square$

De lo anterior observamos que

$$\det(T - \lambda I) = \det(A_1 - \lambda I) \det(A_2 - \lambda I) ...... \det(A_n - \lambda I)$$

el cual es el polinomio característico y su factorización.

Lo que ahora se desea es hallar los factores irreducibles del polinomio característico, los cuales nos pueden dar información sobre la descomposición de V en suma directa de subespacios invariantes, con lo que se obtendrá una representación matricial de la transformación lineal; esta representación matricial estará formada por submatrices.

Definición A.3. *Sea V un espacio vectorial y T un operador lineal sobre V, y W un subespacio de V. Se dice que W es invariante bajo T si, para toda α de W el vector $T(\alpha)$ está en W; es decir, si $T(W)$ está contenido en W.*

De la definición anterior se pude ver que $T^n(W) \subseteq W$. Por lo tanto si $P(\cdot)$ es un polinomio

$$P(T)(W) \subseteq W$$

y si

$$P(x) = a_n x^n + \ldots\ldots.. + a_1 x + a_0$$

entonces

$$P\,(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 T + a_0.$$

Proposición A.2. *Sea $T : V \longrightarrow V$ lineal , $\dim V = n$ y P, P_1, P_2 polinomios tales que $P = P_1.P_2$ y P_1, P_2 primos relativos; es decir, $(P_1, P_2)= 1$.*
Si $P\,(T) = 0$ entonces

$$V = V_1 \oplus V_2$$
$$T(V_1) \subset V_1$$
$$T(V_2) \subset V_2$$

donde

$$V_1 = \ker P_1(T) = Im P_2(T)$$
$$V_2 = \ker P_2(T) = Im P_1(T)$$

<u>Demostración:</u> Como $(P_1\,(T),\ P_2\,(T))= 1$ entonces existen dos polinomios $g_1\,(T)$,
$g_2\,(T)$, tales que

$$g_1 P_1 + g_2 P_2 = 1,$$

así se tiene

$$g_1(T) P_1(T) + g_2\,(T)\,P_2(T) = I \qquad \text{(A.17)}$$

$$g_1(T) P_1(T)(v) + g_2(T) P_2(T)(v) = v. \qquad \text{(A.18)}$$

Definimos

$$V_1 = \ker P_1(T), V_2 = \ker P_2(T)$$

los cuales son subespacios de V. Se probará que

$$V = \ker P_1(T) \oplus \ker P_2(T).$$

De la igualdad (A.18) se tiene

$$g_1(T) P_1(T)(v) + g_2(T) P_2(T)(v) = v.$$

Por demostrar que

$$g_1(T) P_1(T)(V) \in \ker P_2(T).$$

Para esto a $g_1(T) P_1(T)(v)$ le aplicamos $P_2(T)$. Así

$$\begin{aligned} P_2(T) g_1(T) P_1(T) &= g_1(T) P_1(T) P_2(T) v \\ &= g_1(T) P(T) v \end{aligned}$$

y como $P(T) = 0$ entonces

$$P_2(T) g_1(T) P_1(T)(v) = 0.$$

Se concluye que $g_1(T) P_1(T)(v) \in \ker P_2(T)$. De la misma manera se demuestra que $g_2(T) P_2(T)(v) \in \ker P_1(T)$. Por lo tanto

$$V = \ker P_1(T) + \ker P_2(T).$$

El siguiente paso es demostrar que si $v \in V_1 \cap V_2$ entonces $v = 0$.
Como

$$v = g_1(T) P_1(T)(v) + g_2 P_2(T)(v),$$

y $v \in V_1 \cap V_2$; es decir, $v \in \ker P_1(T) \cap \ker P_2(T)$ entonces

$$v = g_1(T) 0 + g_2(T) 0 = 0$$

Lo anterior implica que la suma es directa.

Ahora se verificará que los subespacios V_1, V_2 son invariantes; es decir, que $T(V_1) \subset V_1$ y que $T(V_2) \subset V_2$.

Sea $v \in V_1 = \ker P_1(T)$ esto implica que $P_1(T)(v) = 0$. Aplicando T se obtiene $T(P_1(T)(v)) = 0$, pero $T(P_1(T)) = P_1(T) T$ entonces
$T(P_1(T)(v)) = P_1(T) T(v) = 0$. Por lo tanto $T(v) \in \ker P_1(T)$.

Similarmente se demuestra que $T(V_2) \subset V_2$.

Por último, dado que $v \in \ker P_1(T)$ y como $v = (g_1(T) P_1(T) + g_2(T) P_2(T))(v)$ entonces

$$v = g_2(T) P_2(T)(v) = P_2(T)(v)\, g_2(T)(v)$$
$$v = P_2(T)(g_2(T))(v)$$

de esta manera $v \in ImP_2(T)$ entonces $\ker P_1(T) \subset ImP_2(T)$ y como

$$\dim V = \dim \ker P_2(T) + \dim imP_2(T)$$
$$\dim V = \dim \ker P_1(T) + \dim \ker P_2(T)$$

simplificando se llega a que

$$\ker P_1(T) = ImP_2(T)$$

y de modo similar

$$\ker P_2(T) = ImP_1(T). \qquad \square$$

Corolario A.1. *Sea V un espacio vectorial sobre C, $T : V \to V$ lineal y P un polinomio tal que $P(T) = 0$*

$$P(x) = (x - c_1)^{d_1} (x - c_2)^{d_2} \ldots\ldots (x - c_n)^{d_n}$$

es su factorización en C, con $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sus raíces diferentes. Sea $V_i = \ker(A - c_i I)^{d_i}$ entonces $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots\ldots \oplus V_n$ y $A(V_i) \subset V_i$.

Demostración: La demostración se hará por inducción sobre las raíces c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Si $i = 1$ se cumple el corolario .

Supongamos que el corolario es cierto para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ esto es; que si $P(T) = 0$ con $P(x) = (x - c_1)^{d_1} (x - c_2)^{d_2} \ldots\ldots (x - c_{n-1})^{d_{n-1}}$ y $V_i = \ker(A - cI)^{d_i}$ entonces

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots\ldots \oplus V_{n-1}$$

Por demostrar que el corolario se cumple para $i = n$.

Supongamos que $P(x) = (x - c_1)^{d_1} (x - c_2)^{d_2} \ldots\ldots (x - c_n)^{d_n}$ entonces definimos $P(x) = P_1(x) P_2(x)$ donde

$$P_1(x) = (x - c_1)^{d_1} (x - c_2)^{d_2} \ldots\ldots (x - c_{n-1})^{d_{n-1}}$$

y

$$P_2(x) = (x - c_n)^{d_n}$$

y como $c_1, c_2, ..., c_n$ son distintos esto implica que $(P_1(x), P_2(x)) = 1$. Definimos

$$V' = \ker P_1(T), \; V'' = \ker P_2(T)$$

donde $V' = \ker(T - c_1 I)^{d_1} + \ker(T - c_2 I)^{d_2} + ... + \ker(T - c_{n-1} I)^{d_{n-1}}$ y $V'' = \ker(T - c_n I)^{d_n}$.

Usando la Proposición A.2, se tiene

$$V = V' \oplus V''$$

ó bien

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus ...... \oplus V_n.$$

Sólo queda verificar que $T(V_i) \subset V_i$. Sea $v_i \in V_i = \ker(T - c_i I)^{d_i} = \ker(P_i(T))$ entonces

$$(T - cI)^{d_i} v_i = P_i(T) v_i = 0$$

aplicando T se tiene

$$TP_i(T)(v_i) = 0$$

y como $TP_i(t) = P_i(T)T$ entonces $P_i(T)T(v_i) = TP_i(t)(v) = 0$. Por lo tanto $T(v_i) \in \ker P_i(T) = V_i$, con $i = 1, 2, ..., n$. □

Notemos que la descomposición depende de P, si f es el polinomio característico de T y $f(T) = 0$ entonces solamente se aplicaría el Corolario A.1 para $P = f$ y se tendría que el espacio V se puede expresar como suma directa de subespacios. Como hasta ahora no se sabe si esto es cierto, tomamos el polinomio de grado menor del conjunto $\{P \mid P(T) = 0\}$. Se denotará por q al polinomio mónico de grado mínimo que cumple con $q(T) = 0$. A q se le llama el polinomio mínimo de T.

Teorema A.6. *(Teorema de la descomposición prima). Sea $T : V \longrightarrow V$ lineal, sea f su polinomio característico y q su polinomio mínimo, si*

$$q(x) = (x - c_1)^{r_1} (x - c_2)^{r_2} ...... (x - c_k)^{r_k}$$

entonces
i) $V = V_1 \oplus V_2 \oplus ...... \oplus V_k$, $V_i = \ker(T - c_i I)^{r_i}$, $A(V_i) \subset V_i$.
El polinomio mínimo de V_i es $(x - c_i I)^{r_i}$.
ii) $f(x) = (x - c_1)^{m_1} (x - c_2)^{m_2} .... (x - c_k)^{m_k}$, $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$, $\dim V_i = m_i$.

Demostración: Usando el corolario anterior sólo queda demostrar que el polinomio mínimo de V_i es $(x - c_i)^{r_i}$ y todo (ii).

Sean $P_1, P_2, \ldots.., P_k$ los polinomios mínimos de $V_1, V_2, \ldots..., V_k$ .Por lo tanto

$$P_i(T)(\alpha) = 0$$

para $\alpha \in V_i$, así

$$P_j(T)\, P_i(T)(\alpha) = 0$$

si $\alpha \in V_i$. Por lo tanto

$$P_1(T)\, P_2(T) \ldots\ldots P_k(T)\,(\alpha) = 0,$$

si $\alpha \in V_i$.

Definimos

$$P(T) = P_1(T)\, P_2(T) \ldots\ldots. P_k(T)$$

de esta forma

$$P(T)\, v = P(T)\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots.. + \alpha_k) = 0 \;\; \alpha_i \in V_i$$

como $P(T) = 0$ entonces q el polinomio mínimo divide a P que es el producto de las mínimas.

Por otro lado, P_i el polinomio mínimo de V_i debe dividir al polinomio $(x - c_i I)^{r_i}$ de esta manera

$$P(x) = P_1(x)\, P_2(x) \ldots\ldots P_k(x) = (x - c_1)^{\alpha_1} (x - c_1)^{\alpha_2} \ldots\ldots. (x - c_k)^{\alpha_k}$$
$$q(x) = (x - c_1)^{r_1} (x - c_2)^{r_2} \ldots\ldots.. (x - c_k)^{r_k}$$

con $r_i \leq \alpha_i$ y $\alpha_i \leq r_i$. Por lo tanto $\alpha_i = r_i$ para toda i.

Por demostrar (ii). Se debe de demostrar que la factorización de f es

$$f(x) = (x - c_1)^{m_1} (x - c_2)^{m_2} \ldots\ldots.. (x - c_k)^{m_k}$$

y además

$$\dim V_i = m_i.$$

Sea c raíz del polinomio mínimo; es decir, $q(c) = 0$ si y sólo si c es un valor propio de T.

$\Rightarrow$) Supongamos que $q(c) = 0$. Usando el teorema del residuo se tiene $q(x) = (x - c)\, h(x)$ con $gr(h) < gr(q)$ y $h(T) \neq 0$, así existe $v \in V$ tal que $h(T)\, v \neq 0$, por lo tanto

$$0 = q(T) = (T - cI)\, h(T)\,(v)$$
$$0 = (T - cI)\,[h(T)\,(v)]\,,$$

lo que implica que $h(T(v))$ es un vector propio de T con valor propio c

$\Leftarrow$) Si $T(v) = cv$, c valor propio $v \neq 0$ entonces

$$q(T)(v) = q(c)\, v$$

lo que implica que $q(c)$ es un valor propio de la transformación $q(T)$.

Por otra parte $q(T) = 0$ entonces $q(c) = 0$ poque $v \neq 0$. Por lo que c es una raíz.

De esta forma f y q tienen las mismas raíces, sin tomar en cuenta la multiplicidad. Sólo queda demostrar que $\dim V_i = m_i$.

Si $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots\ldots \oplus V_k$ entonces la matriz asociada a la transformación es

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

con $f(x) = \det(A_1 - xI)\det(A_2 - xI)\ldots\ldots\det(A_k - xI) = (x - c_1)^{m_1}\cdots(x - c_k)^{m_k}$. Así se concluye que

$$\dim V_i = m_i$$

y como

$$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2 + \ldots\ldots + \dim V_k$$
$$n = m_1 + m_2 + \ldots\ldots\ldots + m_k.$$

El polinomio f tiene grado n. $\square$

Teorema A.7. *(Teorema de Cayley-Hamilton). Si f es el polinomio característico de T entonces $f(T) = 0$; es decir, el polinomio mínimo divide al característico.*

La demostración es consecuencia inmediata del teorema anterior. $\square$

Definición A.4. *Se dice que $T \in L(V, V)$ es nilpotente, con índice de nilpotencia p, si y sólo si*
(i) $T^p(v) = 0$ para toda $v \in V$
(ii) $T^{p-1}(v) \neq 0$ para alguna $v \in V$.

Supongamos que $q(x) = x^m$ y $q(T) = T^m$ con $m = p$, $q(T) = 0$ y T es nilpotente con índice p si y sólo si $q(x) = x^p$ y como el $gr(q) < gr(f)$, entonces el polinomio característico de una transformación nilpotente es

$$f(x) = x^m \text{ con } m \geq p.$$

Reciprocamente, si las raíces son cero su polinomio característico es de la forma x^m y por lo tanto es nilpotente.

Proposición A.3. *Sea $T : V \to V$ una transformación lineal nilpotente, con índice de nilpotencia p. Si $v \in V$ es tal que $T^{p-1}(v) \neq 0$ entonces*

$$\{v, Tv, T^2v, ..., T^{p-1}v\}$$

es un conjunto linealmente independiente.

Demostración: Supongamos que el conjunto es linealmente dependiente entonces

$$a_0v + a_1Tv + ... + a_{p-1}T^{p-1}v = 0$$

sea a_j el primer escalar distinto de cero

$$a_jT^jv + ... + a_{p-1}T^{p-1}v = 0$$

y aplicamos $T^{p-j-1}v$

$$a_jT^{p-1}v + ... + a_{p-1}T^{2p-j-2}v = 0,$$

obteniéndose $a_jT^{p-1}v = 0$, con $a_j \neq 0$ entonces $T^{p-1}v = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto el conjunto es linealmente independiente. □

Sea W el espacio generado por $\{v, Tv, T^2v, ..., T^{p-1}v\}$. Es claro que W tiene dimensión p y $\dim W \leq \dim V$ entonces $p < m$ es decir, el polinomio mínimo no coincide con el característico por lo que tenemos que hallar W^1 tal que ;

$$V = W \oplus W^1$$

donde W es invariante y se desea que W^1 también lo sea, para que se pueda representar por submatrices, esto se da en el siguiente teorema.

Teorema A.8. *(Teorema de la descomposición cíclica). Sea $T : V \to V$ una transformación lineal nilpotente con índice de nilpotencia p; es decir, $T^p = 0$ y $T^{p-1} \neq 0$, entonces existe una base de V tal que*

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus .... \oplus V_r,$$
$$\dim V_i = n_i\ ,\ i = 1, 2, ..., r,\ p = n_1 \geq n_2 \geq ..... \geq n_r,$$

y T tiene con respecto a esta base la siguiente representación matricial por submatrices:

$$[T] = \begin{pmatrix} M_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_{n_r} \end{pmatrix}$$

M_{n_i} *es de* $n_i \times n_i$, $n_1 \geq n_2 \geq ..... \geq n_r$

$$M_{n_i} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

Los números $n_1 \geq n_2 \geq .... \geq n_r$ *son únicos y se llaman los invariantes de* T. T *restringida a* V_i *es nilpotente con índice* n_i *y se puede hallar* $\alpha_i \in V_i$ *tal que* $\alpha_i, T\alpha_i, ..., T^{n_i-1}\alpha_i$ *es una base en* V_i.

Demostración: La demostración se hará por partes.

Sea W el espacio generado por $v, Tv, ..., T^{p-1}v$.

Afirmación 1. Sea $w \in W$ y si $T^{p-k}(w) = 0$, $0 \leq k \leq p$; existe $v_0 \in W$ tal que $T^k(v_0) = w$. Ya que $v, Tv, ..., T^{p-1}v$ es la base de W

$$w = a_0 v + ... + a_{p-1}T^{p-1}v$$

aplicando T^{p-k}

$$0 = T^{p-k}(w) = a_0 T^{p-k}(v) + ... + a_{k-1}T^{p-1}(v)$$

pero $T^{p-k}(v), ..., T^{p-1}(v)$ son linealmente independientes lo cual implica que

$$a_0 = a_1 = ... = a_{k-1} = 0.$$

Por lo tanto

$$w = a_k T^k(v) + ... + a_{p-1}T^{p-1}(v)$$
$$w = T^k\left(a_k(v) + ... + a_{p-1}T^{p-k-1}(v)\right)$$

de lo anterior definimos v_0 como:

$$v_0 = a_k(v) + ...a_{p-1}T^{p-k-1}(v)$$

el cual cumple con la propiedad.

Afirmación 2. Si W es un subespacio invariante de T , entonces existe W^1 invariante bajo T y $V = W \oplus W^1$.

Si $\dim V = 1$ el resultado es claro. Supongamos que vale para $\dim V < n$, así tenemos W subespacio invariante bajo T y supongamos que W^1 es otro subespacio invariante y $W \cap W^1 = \{0\}$ siendo W^1 el de máxima dimensión con esta propiedad vamos a probar que $V = W \oplus W^1$. Supongamos que existe z tal que $z \notin W \oplus W^1$. Como $T^p = 0$ y W es el generado por $v, Tv, \ldots\ldots, T^{p-1}v$, existe $0 < k < p$ tal que:

$$T^k(z) \in W + W^1, T^i(z) \notin W + W^1, i = 1, 2, \ldots., k-1,$$

entonces existe $w \in W, w^1 \in W^1$ y $T^k(z) = w + w^1$ aplicando T^{p-k}

$$0 = T^{p-k}w + T^{p-k}w^1$$

y como $W \cap W^1 = \{0\}$

$$T^{p-k}w = 0.$$

Así por la afirmación 1 existe $w_0 \in W$ y $T^k(w_0) = w$, sea $z_1 = z - w_0$ tal que
$(i)\, T^k(z_1) = w^1$ y $z_1 \notin W^1$
$(ii)\, T^m(z_1) \in W^1$ si $m \geq k, T^i z_1 \notin W^1$ si $i < k$.

Sea $\overline{W}$ el subespacio generado por

$$W^1 \text{ y } \{z_1, Tz_1, \ldots\ldots, T^{k-1}z_1\},$$

como $z_1 \notin W^1$ entonces tenemos $\dim W^1 < \dim \overline{W}$: $\overline{W}$ es invariante bajo T y como W^1 es el que tiene máxima dimensión que $W \cap W^1 = 0$ obtenemos $W \cap \overline{W} \neq 0$.

Sea $b = w^1 + a_1 z_1 + a_2 T z_1 + \ldots. + a_{k-1}T^{k-1}z_1$, donde $w^1 \in W^1$ y $b \in W \cap \bar{W}$, $b \neq 0$, $w^1 \neq 0$. No todas las a_i son cero, así hay una a_i no nula digamos a_s, $1 \leq s \leq k-1$

$$b = w^1 + a_s T^s z_1 + \ldots\ldots. + a_{k-1}T^{k-1}z_1$$
$$b = w^1 + T^s(a_s + a_{s+1}T + \ldots\ldots + a_{k-1}T^{k-s-1})(z_1).$$

Notemos que

$$a_s + a_{s+1}T + \ldots\ldots + a_{k-1}T^{k-s-1}$$

es invertible ya que $h = a_{s+1}T + \ldots\ldots + a_{k-1}T^{k-s-1}$, cumple con $h^k = 0$.

Por álgebra elemental sabemos

$$(a+x)\left(\frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \ldots\ldots. (-1)^{k-1}\frac{x^{k-1}}{a^k}\right) = 1 + (-1)^k \frac{x^k}{a^k}$$

al substituir $x = h$ y $a = a_s$

$$(a_s + h)\left(\frac{1}{a_s} - \dots\dots + (-1)^{k-1}\frac{h^{k-1}}{a_s^k}\right) = I,$$

sea $Q = a_s + h$ entonces su inversa es

$$Q^{-1} = \frac{1}{a_s} - \dots\dots + (-1)^{k-1}\frac{1}{a_s^k}h^{k-1}.$$

Q^{-1} es un polinomio en T.

Luego W, W^1 son invariantes bajo Q^{-1} usando

$$b = w_1 + T^s\left(a_s + \dots\dots + a_{k-1}T^{k-s-1}(z_1)\right) = w^1 + T^s Q(z_1),$$

aplicando Q^{-1} se obtiene

$$\begin{aligned} Q^{-1}(b) &= Q^{-1}(w^1) + T^s(z_1) \\ &= Q^{-1}(w^1) + T^s(z) - T^s(w_0) \end{aligned}$$

donde $z_1 = z + w_0$, despejando

$$T^s(z) = T^s(w_0) - Q^{-1}w_1 + Q^{-1}(b),$$

$b \in W$ esto implica que $Q^{-1}(b) \in W$, $w_0 \in W$ esto implica $T^s(w_0) \in W$, $w \in W$ entonces $Q^{-1}(w^1) \in W^1$, luego

$$T^s(z) \in W + W^1 \text{ y } s \leq k-1$$

y $s \leq k-1$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto tenemos que $V = W \oplus W^1$.

Afirmación 3. Si tenemos W, W^1 subespacios invariantes, $V = W \oplus W^1$ y T es nilpotente, entonces T restringida W^1 es nilpotente y la matriz de T respecto a la base de W $\{v, Tv, \dots\dots, T^{p-1}v\}$, $n_1 = p$, es :

$$M_{n_1} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

T tiene una representación con respecto a $\{v, Tv, \dots\dots, T^{n_1-1}v\}$ y cualquier base de W^1 como

$$\begin{pmatrix} M_{n_1} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Afirmación 4. Usando inducción, tenemos que existen $V_1, ..., V_r$ subespacios invariantes de T en donde cada V_i tiene una base de la forma :

$$B_i = \{\alpha_i, T\alpha_i, ..., T^{n_i-1}\alpha_i\}$$
$$\dim V_i = n_i, p = n_1 \geq n_2 \geq ..... \geq n_r.$$

Tomando $\{B_1, B_2, ..., B_r\}$ es una base ordenada para V, V_i tiene como polinomio mínimo al índice de nilpotencia de T restringido a V_i o sea n_i; $n_i = \dim V_i$ que es igual al índice de nilpotencia de T en V_i, que es igual al polinomio mínimo de V_i.

Afirmación 5. Con respecto a la base señalada $\{B_1, B_2, ..., B_r\}, T$ tiene asociada la matriz.

$$\begin{pmatrix} M_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_{n_r} \end{pmatrix}$$

con

$$M_{n_i} = \begin{pmatrix} & & 0 \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

y $n_1 \geq n_2 \geq ..... \geq n_r$

Afirmación 6. La descomposición de V es única; es decir, si

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus ...... \oplus V_r$$
$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus ...... \oplus W_l$$

con las mismas propiedades entonces $l = r$ y $\dim W_i = \dim V\ (i)$.

Observemos que si $\{v, Tv, ..., T^{h-1}v\}$ genera un espacio de dimensión h y aplicamos $T^k\{T^k v, T^{k+1}v, ..., T^{h-1}v\}$ este genera un espacio de dimensión $h - k$.

Si tuvieramos dos descomposiciones entonces

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus .... \oplus V_r, \ \ \dim V_i = n_i, n_1 \geq n_2 \geq ...... \geq n_r$$
$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus .... \oplus W_l, \ \ \dim V_i = m_i, m_1 \geq m_2 \geq ...... \geq m_l.$$

Supongamos que existe un índice fijo i, tal que

$$m_1 = n_1, m_2 = n_2, ..., m_i < n_i, \qquad \text{(A.19)}$$

aplicamos T^{m_i} a las descomposiciones

$$T^{m_i}V = T^{m_i}V_1 \oplus .... \oplus T^{m_i}V_i \oplus ...... \oplus T^{m_i}V_r,$$
$$T^{m_i}V = T^{m_i}W_1 \oplus ...... \oplus T^{m_i}W_i \oplus ...... \oplus T^{m_i}W_l.$$

Viendo sus dimensiones tenemos que

$$\dim T^{m_i}V = (n_1 - m_i) + (n_2 - m_i) + \ldots\ldots\ldots (n_r - m_i)\,,$$
$$\dim T^{m_i}V = (m_1 - m_i) + (m_2 - m_i) + \ldots\ldots\ldots (m_l - m_i)\,.$$

Del primer renglón obtenemos

$$\dim T^{m_i}V \geq (n_1 - m_i) + \ldots\ldots + (n_i - m_i) \tag{A.20}$$

y como $m_1 = n_1, m_2 = n_2, \ldots\ldots m_{i-1} = n_{i-1}$ de (A.19) se sigue que

$$\dim T^{m_i}V = (n_1 - m_1) + \ldots\ldots + (n_{i-1} - m_{i-1})\,. \tag{A.21}$$

Como $m_i < n_i$, $n_i - m_i > 0$ de (A.20) y (A.21) es claro que

$$(n_1 - m_i) + (n_2 - m_i) + \ldots\ldots + (n_{i-1} - m_i) < (n_1 - m_i) + \ldots\ldots + (n_{i-1} - m_i) + (n_i - m_i)\,,$$

o sea

$$\dim T^{m_i}V < \dim T^{m_i}V$$

lo cual es una contradicción.

Los números $n_1 \geq n_2 \geq \ldots. \geq n_r$ que son únicos se llaman los invariantes de T. □

Proposición A.4. *Dos transformaciones nilpotentes T_1 y T_2 son semejantes si y sólo si tiene los mismos invariantes.*

Demostración:$\Rightarrow$) Si son semejantes el Teorema A.8 nos dice que tiene los mismos invariantes.

$\Leftarrow$) Supongamos que tienen los mismos invariantes $n_1 \geq n_2 \geq \ldots. \geq n_r$ entonces si $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots. \oplus V_r$ con $\dim V_i = n_i$ es una descomposición V en la que T_1 y T_2 tienen asociada la matriz:

$$\begin{pmatrix} M_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_{n_r} \end{pmatrix}.$$

Si $v_1, v_2, \ldots., v_n$ es una base de V asociada a la transformación T_1 y $w_1, w_2, \ldots. w_n$ es una base de V asociada a la transformación T_2. Definimos $T_3 v_i = w_i$ para toda i; $T_3^{-1} w_i = v_i$. Así $T_1 = T_3^{-1} T_2 T_3$. Por lo tanto son semejantes. □

Notemos que $n_1, n_2, ..., n_r$ son tales que $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$ y si damos un conjunto $\{m_1, m_2, ..., m_l\}$ que cumplen con $m_1 \geq m_2 \geq ... \geq m_l = n$, podemos dar una clase de semejanza de transformaciones nilpotentes que los contengan como invariantes donde m_1 es el índice de nilpotencia de T.

De esta forma en las matrices de $n \times n$ hay $p(n)$ clases de semejanza de matrices nilpotentes. $p(n)$ es el número de particiones de n.

Los resultados que hasta ahora se tienen son:

Si $T : V \longrightarrow V$ es una transformación lineal con $\dim V = n$, y $c_1, c_2, ..., c_k$ son todas las raíces características y tiene a

$$f(x) = (x - c_1)^{m_1} (x - c_2)^{m_2} .... (x - c_k)^{m_k}$$

como su polinomio característico y a

$$q(x) = (x - c_1)^{r_1} (x - c_2)^{r_2} .... (x - c_k)^{r_k}$$

como su polinomio mínimo,

$$V = \ker (T - c_1 I)^{r_1} \oplus .... \oplus \ker (T - c_k I)^{r_k}$$

cuya representación matricial por bloques es:

$$\begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_k \end{pmatrix}$$

con D_i matriz de $m_i \times m_i$ y $\dim \ker (T - c_i I)^{r_i} = m_i$, D_i es la transformación T restringida a $V_i = \ker (T - c_i I)^{r_i}$ y $D_i = T - c_i I$ además $D_i^{r_i} = 0$ y $D_i^{r_i - 1} \neq 0$; es decir, las submatrices D_i son transformaciones nilpotentes con índice de nilpotencia r_i.

Si tomamos $D_i = T - c_i I$, $D_i : V_i \longrightarrow V_i$ entonces $T = D_i + c_i I$ en V_i , por lo tanto para toda $v \in V$

$$V = V_1 + V_2 + ... + V_k$$

y

$$T(v) = (D_1 + c_1 I) v_1 + (D_2 + c_2 I) v_2 + ... + (D_k + c_k I) v_k$$

en otras palabras

$$T = (D_1 + c_1 I) + (D_2 + c_2 I) + ... + (D_k + c_k I).$$

Por otra parte, usando el teorema anterior se tiene que V_i se puede descomponer en sumas de subespacios cíclicos invariantes;

$$V_i = N_{i1} \oplus N_{i2} \oplus \ldots\ldots \oplus N_{ir}$$

donde los invariantes son la dimensiones de los subespacios N_{i_j} y $r_i = n_{i_1} \geq n_{i_2} \geq \ldots \geq n_{i_r}$, la representación matricial de

$$c_i I = \begin{pmatrix} c_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_i \end{pmatrix}$$

y de

$$D_i = \begin{pmatrix} M_{n_{i_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_{n_{i_r}} \end{pmatrix}$$

con

$$M_{n_{i_j}} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

así $D_i + c_i I : V_i \longrightarrow V_i$ tiene la siguiente representación matricial

$$[D_i + c_i I] = \begin{pmatrix} M_{n_{i_1}} + c_i I & & \\ & \ddots & \\ & & M_{n_{i_r}} + c_i I \end{pmatrix}$$

con

$$M_{n_{i_j}} + c_i I = \begin{pmatrix} c_i & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & c_i \end{pmatrix}$$

las submatrices $M_{n_{i_j}} + c_i I$ se llaman submatrices básicas de Jordan y como

$$T = (D_1 + c_i I) + \ldots\ldots + (D_k + c_k I)$$

la matriz asociada a T en V es

$$[T] = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

donde A_i es de $m_i \times m_i$ y

$$A_i = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} c_i & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & c_i \end{pmatrix} n_{i_1} \times n_{i_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{pmatrix} c_i & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & c_i \end{pmatrix} n_{i_r} \times n_{i_r} \end{pmatrix}$$

Donde cada A_i es la transformación T restringida al subespacio V_i y en V_i tomamos la base antes mencionada para que A_i tenga una representación matricial de la forma

$$n_{i_1} + n_{i_2} + \ldots\ldots + n_{i_r} = m_i$$

para toda i y

$$m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_r = n.$$

En suma se ha demostrado que la idea básica de la forma canónica de Jordan es: Dada $T : V \longrightarrow V$ lineal y tal que todas las raíces del polinomio característico estén en el campo de los escalares, es posible expresar a V como suma directa de subespacios cíclicos invariantes y donde la matriz de T toma la forma de submatrices, cada submatriz es una submatriz básica de Jordan y corresponde a la transformación T restringida al subespacio cíclico.

BIBLIOGRAFÍA

[Br] Braun, M. *Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica (1990).

[Fa] Falconi, M. J. *A Quasilinear Differential Game of Evasion*. Bol. de la S.M.M. (1996). (por aparecer)

[Fr] Friedman, A. *Differential Games*. Wiley- Intercience (1971).

[Ho] Hoffman K. y Kunze R. *Algebra Lineal*. Prentice Hall (1973).

[Ji] Jiongmin, Y. *Evasion With Weak Superiority*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 134 (1988), 116-124.

[Jo] Johnson, E. R. *Algebra Lineal*. C.E.C.S.A. (1982).

[Ka] Kaśkosz, B. *On a Nonlinear Evasion Problem*. SIAM J. Control y Optimization 15 (1977), 661-673. .

[Lu] Ludlow, J. A. *Algebra Lineal*. Limusa (1987).

[Mu] Murray R. Spiegel, *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas*. Prentice Hall (1992).

[Po] Pontrjagin, L.S. *The linear Differential Game of Evasion*. Soviet Math. Dokl 11(1970), 359-361.

[Ru] Rufus, I. *Differential Games*. Wiley (1965).

[Sa] Satimov, N. *On a Way to Avoid Contact in Differential Games*. Math. USRR Sbornik, vol28 (1976), 339-352.

[Yu] Yugai, L.P. *Linear Differential Evasion Game Without Superiority*. Ann. of Diff. Eqs. 8(1992), 158-163.