

00362³₇₁



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**"APLICACIONES DE LAS TECNICAS DE ESPACIO
FASE A LA CARACTERIZACION ULTRASONICA
DE MATERIALES"**

T E S I S

Que para obtener el grado Académico de
MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

p r e s e n t a

MARTIN RODOLFO / PALOMINO MERINO

ASESORES:

**DR. VICTOR MANUEL CASTAÑO MENESES
DR. MIGUEL DE ICAZA HERRERA**

1997

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Contenido

Introducción	ii
1 La función de Wigner	1
1.1 Introducción	1
1.2 Definición de la función de Wigner	2
1.3 La función de distribución más general	5
1.4 La función de Wigner vista como función de Cohen	6
2 Función de Wigner y función Ambigüedad	7
2.1 Relación entre la función de Wigner y la función Ambigüedad	7
2.2 La función de transferencia	9
2.3 Función de transferencia para algunos dispositivos ópticos	12
2.3.1 Lente	12
2.3.2 Función ambigüedad asociada a una lente	18
2.3.3 Función de Wigner asociada a una lente	19
2.3.4 Transformada de Fourier	19
2.3.5 Propagador	21
2.3.6 Función ambigüedad asociada al propagador	22
2.3.7 Función de Wigner asociada al propagador	23
2.4 Representación matricial de una cascada de dispositivos	26
2.5 El problema de la transformación inversa	27
3 El sonido y el espacio fase	31
3.1 La ecuación de onda	31
3.2 La ecuación de Helmholtz	33
3.3 El propagador acústico	34
3.4 La función ambigüedad para el propagador de sonido	36
3.5 La función de Wigner para el propagador de sonido	36

4	Investigación Ultrasonica de Materiales	37
4.1	Función de Wigner para una onda plana que incide sobre una lente.	38
4.2	Inversión de la función de Wigner	39
4.3	El método de multicapas	41
4.4	El sustrato acústico cristalino	42
4.5	Difracción debida a la periodicidad espacial	47
4.6	Sustrato acústico "continuo"	49
5	Tratamiento para rayos no paraxiales	54
6	Conclusiones y perspectivas	60

Introducción

De los desarrollos importantes de la Física teórica, más precisamente de los de la Mecánica Cuántica y la Mecánica Estadística, hay que destacar los concernientes al estudio de las funciones del espacio fase propuestos, posiblemente, como una analogía a los desarrollados en la Mecánica Clásica. Dichas funciones tienen la finalidad de calcular los valores esperados de los observables cuánticos, es decir, de las cantidades físicas observables, a través de una función de distribución. Poco después se presentó el detalle de cómo establecer una correspondencia entre las cantidades físicas clásicas y los operadores cuánticos; y es posible que también sea éste el origen de las diversas reglas de correspondencia que aparecen en la Mecánica Cuántica. La primera función de distribución que apareció en la literatura fue la propuesta por Wigner, sin embargo, poco después se sucedieron otras funciones propuestas por diversos autores. Probablemente el propio Wigner no se imaginó todas las aplicaciones que se le han dado a su función que propuso por el año de 1932, pero no precisamente dentro del contexto de la Mecánica Cuántica, sino en los problemas de análisis de señales y en diversos problemas que trata la Óptica Física, tanto teórica como experimentalmente. En el presente trabajo se utilizan funciones de transferencia de sistemas que involucran dispositivos ópticos conocidos, no obstante, conforme se avanza en el texto, se va demostrando cada una de las expresiones para las funciones de transferencia de cada uno de los dispositivos. A este respecto, se propone un método general para analizar lo que sucede cuando tenemos una señal que entra en un sistema, por ejemplo una lente, suponiendo que conocemos la función de transferencia de dicho sistema. El método permite calcular la función de Wigner y otro pariente de ésta, la llamada función Ambigüedad, de la onda incidente, de las funciones de transferencia tales como la de una lente y del propagador. Se encuentra que cada uno de estos pasos puede ser representado por una transformación de coordenadas, ya sea de la función de Wigner

o de la función de Ambigüedad, realizada mediante una matriz de 2×2 .

El resultado global puede obtenerse mediante la multiplicación de las matrices correspondientes a cada elemento del sistema. Así, en el caso sencillo antes mencionado, se trata de la multiplicación ordenada de una matriz para la lente y otra matriz para el propagador al salir de la lente. El resultado es, obviamente, otra matriz que puede interpretarse como una matriz de transformación para la señal al atravesar el sistema.

La facilidad que resulta de representar matemáticamente cada elemento del sistema por medio de matrices, hace posible que el producto de ellas nos proporcione la matriz representativa de todo el sistema, punto importante, ya que nos permite analizar una cascada de dispositivos por donde va atravesando la señal.

Otro problema que se puede tratar es el de dividir en capas una muestra de algún material, de manera que cada una de ellas forme parte de la cascada de dispositivos. La representación del sistema total puede obtenerse mediante cálculo en computadora, multiplicando las diversas matrices correspondientes a cada capa del sistema (caso de un número muy grande de capas).

El presente trabajo propone la aplicación de estos métodos al problema acústico, es decir, cuando se trata de ondas sonoras, así como de determinar la función de transferencia para un material bidimensional compuesto de gotas esféricas de un líquido embebidas en otro, junto con su correspondiente función de Wigner.

El presente trabajo es totalmente teórico y nos lleva a establecer que el método de las funciones del espacio fase aplicadas al análisis de señales también es válido para señales acústicas, pudiendo ser utilizado para caracterizar materiales.

En el capítulo uno se hace una revisión de las funciones del espacio fase en la forma original en que fueron propuestas por diversos autores, aprovechando para establecer algunas de sus propiedades.

En el capítulo dos, utilizando la notación de la Óptica Física, determinamos las funciones de ambigüedad y de Wigner de las funciones de transferencia de los principales dispositivos ópticos con el objeto de establecer el método que da origen al presente trabajo.

En el capítulo tres mostramos la aplicabilidad de los métodos utilizados, ya sea mediante la función de Wigner o a través de la función ambigüedad, a los problemas acústicos, tomando como partida la ecuación de onda. Allí construimos el propagador acústico y determinamos su efecto en la función de Wigner.

En el capítulo cuatro nos proponemos la determinación de la función de transferencia de un 'sustrato acústico' constituido por un arreglo bidimensional de esferas líquidas, así como la correspondiente función de Wigner. Para realizar este análisis suponemos que las esferas pueden ser sustituidas, en una primera aproximación, por una lente acústica.

En el capítulo cinco proponemos una mejor aproximación a la descripción del efecto de una esfera sobre una onda incidente que la que utilizamos en el capítulo anterior. Para ello presentamos un tratamiento no paraxial de los rayos acústicos que llegan a una esfera, dividiendo la misma en anillos, que sí pueden tratarse como lentes. Como resultado obtenemos una descripción más precisa de la onda transmitida y de allí, una función de Wigner que también resulta más representativa.

En el último capítulo presentamos nuestros principales comentarios y conclusiones.

Capítulo 1

La función de Wigner

1.1 Introducción

Consideremos un sistema de muchas partículas que estudiaremos dentro del contexto de la Mecánica Estadística Clásica, cuyas coordenadas espaciales son las x_i , y los momentos, los p_i . La probabilidad de que las coordenadas que describen el sistema físico se encuentren entre x_i y $x_i + \delta x_i$ para $i = 1, \dots, n$, y que los momentos, entre p_i y $p_i + \delta p_i$ para $i = 1, \dots, n$, está dada por la Estadística de Gibbs-Boltzman:

$$P(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n) = \exp \{-\beta \epsilon\}$$

donde $\beta = 1/kT$ y ϵ es la suma de las energías cinética E_k y potencial V :

$$\epsilon = E_k + V = \frac{p_1^2}{2m} + \dots + \frac{p_n^2}{2m} + V(x_1, \dots, x_n).$$

En Mecánica Cuántica no existe una expresión similar ya que no puede uno pedir la probabilidad simultánea para las coordenadas y momentos.

Sólo sabemos que la termodinámica de un sistema cuántico está dada, en principio, por la fórmula de J. Von Neumann [1] quien demostró que el valor medio de una cantidad física representada por la matriz \hat{Q} está dado por la traza de la matriz:

$$\hat{Q} \exp \{-\beta \hat{H}\}$$

donde \hat{H} es el hamiltoniano del sistema. Si representamos por $\langle \hat{Q} \rangle$ el valor medio de la cantidad física y por Tr la traza de la matriz, podemos escribir:

$$\langle \hat{Q} \rangle = \frac{\text{Tr} [\hat{Q} \exp(-\beta \hat{H})]}{\text{Tr} [\exp(-\beta \hat{H})]}$$

Hay, sin embargo, una analogía entre el valor esperado $\langle \hat{G} \rangle$ de un operador \hat{G} , en mecánica cuántica, dado por

$$\langle \hat{G} \rangle = \int \Psi^*(q) \hat{G}(q, p) \Psi(q) dq$$

y su versión clásica $\langle G \rangle$

$$\langle G \rangle = \int g(q, p) F(q, p) dq dp, \quad (1.1)$$

donde $g(q, p)$ es aquella función clásica de las coordenadas y momentos, a partir de la cuál se obtiene, por el principio de correspondencia, el operador cuántico \hat{G} , y $F(q, p)$ es la función de distribución de las coordenadas y momentos $\exp[-\beta H(q, p)]$. Posiblemente, tratando de establecer un principio parecido y llevar más lejos la analogía, Wigner tuvo la idea de construir el análogo cuántico de $F(q, p)$, con el que pudiera calcular valores esperados de cantidades cuánticas.

1.2 Definición de la función de Wigner

Para un sistema cuántico que se encuentra en un estado puro descrito por la función de onda $\Psi(\mathbf{q})$, la función de Wigner correspondiente está dada por [2]:

$$F(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \left(\frac{1}{\pi \hbar}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} d^n \mathbf{y} \Psi(\mathbf{q} + \mathbf{y}) \Psi^*(\mathbf{q} - \mathbf{y}) \exp\left\{-\frac{2i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{y})\right\}$$

donde \hbar es la constante de Planck dividida por 2π y n es el número de grados de libertad del sistema. Definimos en primer lugar el núcleo de la función de Wigner $H_{\Psi}(\mathbf{q}, \mathbf{y})$ mediante:

$$H_{\Psi}(\mathbf{q}, \mathbf{y}) = \Psi(\mathbf{q} + \mathbf{y}) \Psi^*(\mathbf{q} - \mathbf{y}).$$

En esas condiciones la función de Wigner está dada por:

$$F(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \left(\frac{1}{\pi \hbar}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_{\Psi}(\mathbf{q}, \mathbf{y}) \exp\left\{-\frac{2i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{y})\right\} d^n \mathbf{y}.$$

En caso de que el sistema se encuentre en un estado mezclado la función de Wigner está dada por:

$$F(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{(k)} F^{(k)}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

donde $P_{(k)}$ es la probabilidad de que el estado del sistema este descrito por la función de onda $\Psi^{(k)}(\mathbf{q})$ y $F^{(k)}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ es la función de Wigner de dicha función de onda.

La función de Wigner para un problema unidimensional es:

$$F(q, p) = \frac{1}{\pi \hbar} \int_{-\infty}^{\infty} H_{\Psi}(q, y) e^{-\frac{i}{\hbar} p y} dy$$

Si efectuamos el cambio de variable $y = \hbar \tau / 2$, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$F(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau H_{\Psi}(q, \tau) e^{-i\tau p} \quad (1.2)$$

que es una de las expresiones más comunes.

Cabe agregar que también es posible dar una expresión para la función de Wigner en términos de las funciones de onda en el espacio de momentos y tiene la siguiente forma:

$$F(p, q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{\Phi}(p, \theta) e^{i\theta q} d\theta$$

donde Φ es la función de onda en el espacio de momentos.

Enunciaremos algunas de las propiedades de la función de Wigner:

a) $F(q, p)$ es real.

b) $F(q, p)$ conduce a las distribuciones marginales correctas.

Demostración: Integrando $F(p, q)$, de acuerdo con la ec. (1.2), respecto de p obtenemos, después de invertir el orden de integración:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dp F(q, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dp H_{\Psi}(q, \tau) e^{-i\tau p} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau H_{\Psi}(q, \tau) 2\pi \delta(\tau) \\ &= \Psi(q) \Psi^*(q) = |\Psi(q)|^2, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la conocida expresión para la δ de Dirac:

$$\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau p} dp \quad (1.3)$$

Tenemos entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp F(q, p) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau |\Psi(q)|^2$$

que es justamente lo que se quería demostrar.

c) $F(q, p)$ esta normalizada:

Demostración: integrando el resultado obtenido en b) respecto de q obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dp F(q, p) = \int_{-\infty}^{\infty} dq |\Psi(q)|^2$$

y, como la densidad de probabilidad de las coordenadas esta normalizada, entonces también lo está $F(q, p)$.

Con las propiedades anteriores uno estaría tentado a concluir que la función de Wigner es una distribución de probabilidad; sin embargo, esto no es cierto en general debido a que puede tomar valores negativos. Por esta razón muchos autores la denominan "cuasi distribución" de probabilidad.

Hudson ha demostrado [3] que una condición necesaria y suficiente para que la función de Wigner de un sistema unidimensional sea no negativa en todos los puntos del espacio de fases, es que la función de onda sea Gaussiana, es decir, que tenga la forma:

$$\Psi(q) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} (aq^2 + 2bq + c) \right\}$$

donde c es una constante de normalización y a y b son números complejos arbitrarios, con la única restricción de tener parte real positiva. Este resultado se puede generalizar para sistemas multidimensionales [4, 5, 6].

La función de Wigner, permite calcular los valores esperados de las variables dinámicas de una manera análoga a la Mecánica Estadística Clásica, es decir, dada una cantidad física $g(q, p)$ el valor esperado se obtiene mediante

$$\langle g(q, p) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dp g(q, p) F(q, p),$$

de acuerdo con la ec. (1.1), donde $F(q, p)$ es la función de Wigner.

Para que este resultado coincida con el valor esperado dentro del formalismo de la Mecánica Cuántica, que se define como

$$\langle \hat{G}(\hat{q}, \hat{p}) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq \Psi^*(q) \hat{G}(\hat{q}, \hat{p}) \Psi(q),$$

se le debe asociar a cada operador cuántico $\hat{G}(\hat{q}, \hat{p})$ una función $g(q, p)$ definida en el espacio de las fases y tal que:

$$\langle \hat{G}(\hat{q}, \hat{p}) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dp g(q, p) F(q; p)$$

Lo anterior origina una correspondencia entre la función $g(q, p)$ y el operador $\hat{G}(\hat{q}, \hat{p})$ y proporciona una regla que es una forma operacional de construcción de operadores.

1.3 La función de distribución más general

En esta sección describiremos algunas funciones de distribución en el espacio de fase que fueron propuestas después que la de Wigner. Hablamos de distribuciones aun cuando pueden tomar valores negativos. Tanto la función de Wigner propuesta en 1932, como las propuestas posteriormente son casos particulares de la función de distribución propuesta por Cohen [7] definida por:

$$F_{\Psi}(q, p; f) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta d\tau d\eta e^{-i(\theta q + \tau p - \theta\eta)} f(\theta, \tau) H_{\Psi}(\eta, \tau), \quad (1.4)$$

donde la función $f(\theta, \tau)$ debe ser bien comportada para que la integral exista.

Si $f(\theta, \tau)$ satisface las condiciones:

$$f(0, \tau) = f(\theta, 0) = 1$$

entonces la función de distribución generalizada da las distribuciones marginales correctas, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp F_{\Psi}(q, p; t) = |\Psi(q)|^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq F_{\Psi}(q, p; t) = |\Phi(p)|^2.$$

La función de distribución generalizada es real, es decir:

$$F_{\Psi}^*(q, p; t) = F_{\Psi}(q, p; t) \quad (1.5)$$

sí y sólo sí:

$$f^*(\theta, \tau) = f(-\theta, -\tau) \quad (1.6)$$

Demostración: Si tomamos el complejo conjugado de la expresión (1.4), y evaluamos en $-\tau$ y $-\theta$, obtenemos:

$$F_{\Psi}(q, p; f(-\theta, -\tau)) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta d\tau d\eta e^{-i(\theta q + \tau p - \theta\eta)} f^*(-\theta, -\tau) H_{\Psi}(\eta, \tau)$$

Si sustituimos ahora (1.6) se obtiene la expresión (1.5) que es precisamente lo que queríamos demostrar.

1.4 La función de Wigner como caso particular de la función generalizada de Cohen

Se encuentra en la literatura [3, 4, 5, 6] un buen número de funciones propuestas por diversos autores que pueden ser obtenidas como casos particulares de la función generalizada de Cohen, pero para el problema que nos atañe sólo trataremos la función de Wigner, ya que representa el inicio de los estudios de las funciones del espacio fase.

Si elegimos $f(\theta, \tau) = 1$ y la sustituimos en la definición de la función de Cohen, ec. (1.4), se obtiene $F_{\Psi}(q, p; 1)$ dada por

$$\begin{aligned} F_{\Psi}(q, p; 1) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta d\tau d\eta \exp\{-i(\theta q + \tau p - \theta\eta)\} H_{\Psi}(\eta, \tau) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{-i\tau p} \delta(q - \eta) H_{\Psi}(\eta, \tau) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau H_{\Psi}(q, \tau) e^{-i\tau p} \end{aligned}$$

que es precisamente la función de Wigner.

Capítulo 2

Función de Wigner y función Ambigüedad

2.1 Relación entre la función de Wigner y la función Ambigüedad

La notación utilizada en sistemas ópticos difiere de la utilizada en Mecánica Cuántica. En lugar de la función propuesta por Cohen en 1966, ec. (1.4), utilizaremos la expresión [8]:

$$C_f^\phi(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \int_{-\infty}^{\infty} H_f(\mathbf{p}, \mathbf{x}) e^{i(\mathbf{y} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{p})} \phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\mathbf{p} d\mathbf{x} d\mathbf{y}$$

donde \mathbf{x} , \mathbf{y} y \mathbf{u} , \mathbf{w} representan variables de los espacios real y recíproco respectivamente. Definimos la función Ambigüedad $A_f(\mathbf{u}, \mathbf{w})$

$$A_f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = C_f^\phi(\mathbf{u}, \mathbf{w}), \quad \phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{u})\delta(\mathbf{y} - \mathbf{w})$$

es decir:

$$\begin{aligned} A_f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) &= \int_{-\infty}^{\infty} H_f(\mathbf{p}, \mathbf{x}) e^{i(\mathbf{y} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{p})} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{u})\delta(\mathbf{y} - \mathbf{w}) d\mathbf{p} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H_f(\mathbf{p}, \mathbf{u}) e^{i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{p})} d\mathbf{p} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H_f(\mathbf{p}, \mathbf{u}) e^{-i\mathbf{w} \cdot \mathbf{p}} d\mathbf{p} \end{aligned}$$

Poniendo $\phi = 1/2\pi$ obtenemos la función de Wigner $W_f(\mathbf{p}, \mathbf{w}) = C_f^\phi(\mathbf{p}, \mathbf{w})$, es decir,

$$W_f(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{u}}{2}\right) f^*\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{u}}{2}\right) \exp\{-i\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}\} d^2\mathbf{u} \quad (2.1)$$

Dada una función f podemos obtener su función de Wigner o su función ambigüedad como en las secciones anteriores que se tenía una función de onda. Trataremos ahora de encontrar la relación entre la función de Wigner y la función ambigüedad. Para ello definimos la función núcleo $H_f(\mathbf{p}, \mathbf{u})$ de la siguiente manera:

$$H_f(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = f\left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{u}}{2}\right) f^*\left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{u}}{2}\right) \quad (2.2)$$

Entonces podemos escribir la función ambigüedad como:

$$A_f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \int_{-\infty}^{\infty} H_f(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \exp\{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}\} d^2\mathbf{p}$$

que es la transformada de Fourier de $H_f(\mathbf{p}, \mathbf{u})$ sobre la variable \mathbf{p} , es decir:

$$A_f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = F_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{w}}\{H_f(\mathbf{p}, \mathbf{u})\} \quad (2.3)$$

donde F es el operador *transformada de Fourier*, cuya definición es:

$$F_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{k}}\{f(\mathbf{x})\} = \int f(\mathbf{x}) \exp\{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}\} d\mathbf{x} = F(\mathbf{k}) \quad (2.4)$$

y la transformada de Fourier inversa definida como:

$$F_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{x}}^{-1}\{F(\mathbf{k})\} = \frac{1}{4\pi^2} \int F(\mathbf{k}) \exp\{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{k}\} d\mathbf{k} = f(\mathbf{x}). \quad (2.5)$$

Para el caso de la función de Wigner tenemos

$$W_f(\mathbf{p}, \mathbf{w}) = \int_{-\infty}^{\infty} H_f(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \exp\{-i\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}\} d\mathbf{u} = F_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{w}}\{H_f(\mathbf{p}, \mathbf{u})\}. \quad (2.6)$$

De las ecuaciones (2.3-2.6) se sigue que

$$H_f(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = F_{\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{p}}^{-1}\{A_f(\mathbf{u}, \mathbf{w})\} = F_{\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{u}}^{-1}\{W_f(\mathbf{p}, \mathbf{w})\}. \quad (2.7)$$

De esta ecuación y de las ecuaciones (2.3) y (2.6) podemos escribir:

$$W_f(\mathbf{p}, \mathbf{w}) = F_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{w}} \{H_f(\mathbf{p}, \mathbf{u})\} = F_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{w}} \{F_{\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{p}}^{-1} \{A_f(\mathbf{u}, \mathbf{w})\}\}$$

$$A_f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = F_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{w}} \{H_f(\mathbf{p}, \mathbf{u})\} = F_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{w}} \{F_{\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{u}}^{-1} \{W_f(\mathbf{p}, \mathbf{w})\}\}$$

2.2 La función de transferencia

Un sistema óptico es un arreglo de elementos tales como lentes, rejillas, espacios, aberturas, que transforma una señal óptica bidimensional, representada por una señal de entrada, que se origina en una región conocida como plano objeto, en otra señal del mismo tipo, también representada por su función de salida, que se formará en otra región conocida como plano imagen. Dicho de otro modo, un sistema óptico es la transformación de un conjunto de funciones de entrada, en un conjunto de funciones de salida. Se establece la semejanza con una *caja negra* que transforma las funciones de entrada en las funciones de salida, y la *caja negra* viene siendo lo que se conoce como Función de Transferencia Óptica. La representación matemática de las señales de entrada puede ser complicada, por lo que resulta conveniente descomponerla en un conjunto de impulsos individuales, reduciendo el problema a la determinación del efecto del sistema sobre uno cualquiera de estos impulsos.

Esto se logra más fácilmente en el caso de los llamados sistemas lineales, de tal forma que si se descompone la señal de entrada en una combinación lineal de impulsos, la respuesta (función de salida), será la combinación lineal de las respuestas de cada uno de los impulsos en los que se descompuso la señal original.

Si representamos matemáticamente el sistema óptico mediante el operador L , entonces podemos definir la linealidad del sistema de la siguiente forma:

$$L \{\alpha g_1(x, y) + \beta g_2(x, y)\} = \alpha L \{g_1(x, y)\} + \beta L \{g_2(x, y)\}$$

donde g_1 y g_2 son funciones de entrada de variables espaciales y α y β son escalares.

Hay al menos dos maneras en que se pueden descomponer las señales de entrada: Descomponerla en su espectro en frecuencias mediante la transformada de Fourier, y la otra se logra mediante la descomposición en funciones

δ de Dirac. Si la señal de entrada se descompone en δ 's, tiene la siguiente forma:

$$g_1(\mathbf{r}_1) = \int g_1(\mathbf{s})\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{s})d\mathbf{s}$$

donde $d\mathbf{s}$ es el elemento de área.

Podemos aplicar el operador L para encontrar la respuesta $g_r(\mathbf{r}_2)$ expresada como:

$$g_r(\mathbf{r}_2) = L \left\{ \int g_1(\mathbf{s})\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{s})d\mathbf{s} \right\} d\mathbf{s}$$

Si aplicamos la propiedad de linealidad del sistema obtenemos:

$$g_r(\mathbf{r}_2) = \int g_1(\mathbf{s})L \{ \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{s}) \} d\mathbf{s},$$

ya que $g_1(\mathbf{s})$ es un escalar. Definimos la respuesta h al impulso mediante $h(\mathbf{r}_2, \mathbf{s}) = L \{ \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{s}) \}$ lo que nos permite escribir $g_r(\mathbf{r}_2)$ como

$$g_r(\mathbf{r}_2) = \int g_1(\mathbf{s})h(\mathbf{r}_2, \mathbf{s})d\mathbf{s} \quad (2.8)$$

La respuesta h caracteriza el impulso del sistema lineal y es la respuesta a un estímulo unitario, la función δ , el plano imagen se obtiene por medio de una integral de superposición. Dicho de otra forma, si la respuesta a un estímulo unitario de un sistema es conocida, la salida puede ser encontrada directamente de la entrada via la ec. (2.8).

Para una combinación de dispositivos, también llamada cascada de dispositivos, cada uno caracterizado por su propia respuesta al impulso unitario tenemos: la señal que sale del primer dispositivo es:

$$g_2(\mathbf{r}_2) = \int g_1(\mathbf{s})h_{21}(\mathbf{r}_2, \mathbf{s})d\mathbf{s} \quad (2.9)$$

mientras que la que sale del segundo dispositivo, cuya señal entrada es g_2 será:

$$g_3(\mathbf{r}_3) = \int g_2(\mathbf{s})h_{32}(\mathbf{r}_3, \mathbf{s})d\mathbf{s}. \quad (2.10)$$

Si ahora incertamos (2.9) en (2.10) obtenemos:

$$g_3(\mathbf{r}_3) = \int h_{32}(\mathbf{r}_3, \mathbf{u}) \left[\int h_{21}(\mathbf{u}, \mathbf{s})g_1(\mathbf{s}) \right] d\mathbf{u} = \int h_{31}(\mathbf{r}_3, \mathbf{s})g_1(\mathbf{s}) d\mathbf{s}$$

con $h_{31}(\mathbf{r}_3, \mathbf{s}) = \int h_{32}(\mathbf{r}_3, \mathbf{u})h_{21}(\mathbf{u}, \mathbf{s})d\mathbf{u}$, y el sistema total compuesto de dos dispositivos queda representado por la respuesta de impulso h_{31} dada por

$$h_{31}(\mathbf{r}_3, \mathbf{s}) = \int h_{32}(\mathbf{r}_3, \mathbf{u})h_{21}(\mathbf{u}, \mathbf{s})d\mathbf{u}$$

Una propiedad importante de algunos sistemas es la llamada invariancia espacial, dicha propiedad sólo establece que si se tiene una traslación de una fuente puntual en el plano objeto, la imagen correspondiente de la fuente puntual también experimentará una traslación en el plano imagen.

En la práctica, sin embargo, existen variaciones cuando la fuente no es puntual, pero a pesar de ello pueden ser divididos los planos objeto e imagen en pequeñas regiones cada una de las cuales puedan considerarse como fuentes puntuales. Por lo tanto, si el objeto, y por consiguiente su imagen, son suficientemente pequeños para considerarse puntuales, el sistema puede considerarse invariante en el espacio.

Con la invariancia espacial del sistema, podemos decir que $h(\mathbf{r}_2, \mathbf{s})$ depende únicamente de la diferencia $\mathbf{r}_2 - \mathbf{s}$ de tal modo que $h(\mathbf{r}_2, \mathbf{s}) = h(\mathbf{r}_2 - \mathbf{s})$. Si sustituimos esta expresión en (2.8) obtenemos:

$$g_2(\mathbf{r}_2) = \int g_1(\mathbf{s})h(\mathbf{r}_2 - \mathbf{s})d\mathbf{s}$$

que claramente es equivalente a:

$$g_2 = g_1 * h$$

donde * denota la convolución de dos funciones definida por:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx = f_1(t) * f_2(t)$$

Si aplicamos la transformada de Fourier por medio del teorema de la convolución obtenemos:

$$G_2(\mathbf{k}) = G_1(\mathbf{k}) \cdot H(\mathbf{k}) \quad (2.11)$$

donde $G_1(\mathbf{k})$, $G_2(\mathbf{k})$ y $H(\mathbf{k})$ son las transformadas de Fourier de $g_2(\mathbf{r})$, $g_1(\mathbf{r})$ y $h(\mathbf{r})$ respectivamente. La última expresión sugiere que para sistemas con la propiedad de invariancia espacial, resulta más favorable descomponer la señal de entrada no en funciones δ sino en ondas planas, de tal manera que la descomposición nos queda:

$$G_1(\mathbf{k}) = \int g_1(\mathbf{s}) \exp \{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}\} ds.$$

Al pasar $g_1(\mathbf{r})$ a su espacio recíproco, se separa en funciones elementales de sus diferentes frecuencias espaciales, sobre las que individualmente actúa H al ser multiplicada, según la ec. (2.11), transmitiendo así, las propiedades del sistema a G_1 .

Hemos visto que un sistema óptico, donde vale tanto la invariancia espacial como la linealidad, puede ser descrito mediante convoluciones o mediante productos de sus transformadas de Fourier $G_2(\mathbf{k}) = G_1(\mathbf{k}) \cdot H(\mathbf{k})$ en donde H no es sino la transformada de Fourier de la respuesta de impulso, conocida como función de transferencia óptica.

Mostraremos en lo sucesivo que si H corresponde a lentes, aberturas o propagadores, entonces la función de ambigüedad asociada a $G_2(\mathbf{k})$ nos lleva a una representación matricial de los dispositivos ópticos mencionados. Ésta representación establecerá una conexión con la función $G_1(\mathbf{k})$ mediante un producto de matrices de 2×2 .

2.3 Función de transferencia para algunos dispositivos ópticos.

Hasta ahora hemos discutido las funciones del espacio fase, y también, de manera general, las funciones de transferencia óptica. Nuestro objetivo ahora es consignar las funciones de transferencia óptica para las diferentes componentes de un sistema óptico, las referencias [9, 10, 11, 12, 19] proporcionan una ayuda importante

2.3.1 Lente

Las lentes básicamente están compuestas de un material que usualmente es vidrio, en el cual la velocidad de propagación de una onda es menor que en el aire, debido principalmente al índice de refracción del vidrio.

A continuación buscaremos la función de transferencia de una lente, dentro de lo que en óptica se conoce como aproximación de lentes delgadas, y que refracta un frente de onda incidente cambiándole la fase por una cantidad proporcional al espesor de la lente en cada punto.

En la fig. (2.1) representamos con Δ_0 el espesor máximo de la lente, y por

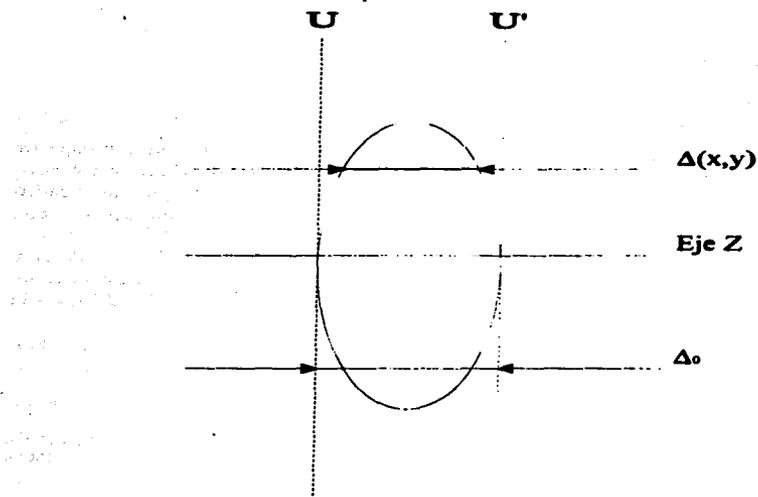


Figura 2.1: Lente perpendicular al eje Z , tomado como eje óptico. El espesor que debe atravesar la onda depende de las coordenadas (x,y) . El máximo espesor es Δ_0 , que es la distancia entre los planos U y U' .

$\Delta(x, y)$ el grosor de la lente como variable dependiente de las coordenadas (x, y) del plano perpendicular al eje óptico. El retraso total en la fase al pasar el rayo por la lente será

$$\phi(x, y) = k_0 \eta \Delta(x, y) + k_0 [\Delta_0 - \Delta(x, y)]$$

donde η es el índice de refracción del material de la lente, k_0 es el vector de onda, $k_0 \eta \Delta(x, y)$ es el retraso en la fase debido a la lente en las coordenadas (x, y) , y $k_0 [\Delta_0 - \Delta(x, y)]$ es el retraso en la fase debido a la región restante de espacio libre entre los planos U y U' .

El factor de fase total lo podemos expresar como

$$\exp \{i\phi(x, y)\} = \exp \{ik_0 \Delta_0\} \exp \{ik_0(\eta - 1)\Delta(x, y)\} \quad (2.12)$$

El problema restante es expresar la forma matemática de la función espesor $\Delta(x, y)$, donde también usaremos la convención de signos: Cuando un rayo viaja de izquierda a derecha, cada superficie convexa que toque tiene radio de curvatura positivo; mientras que cada superficie cóncava que toque tiene radio de curvatura negativo.

Dividamos la lente en dos partes que se muestran en las figuras (2.2) y (2.3). Si el rayo parte de izquierda a derecha la primera parte de la lente en convexa y tiene radio R_1 , mientras que la segunda parte, fig. (2.3), de la lente es cóncava y tiene radio de curvatura $-R_2$.

Pongamos la función espesor $\Delta(x, y)$ como la suma de dos funciones grosor individuales

$$\Delta(x, y) = \Delta_1(x, y) + \Delta_2(x, y) \quad (2.13)$$

que se refieren a las dos partes en que dividimos la lente. Refiriéndonos a la geometría mostrada en las figuras anteriores, podemos escribir la función espesor $\Delta_1(x, y)$ como:

$$\Delta_1(x, y) = \Delta_{01} - \left(R_1 - \sqrt{R_1^2 - x^2 - y^2} \right) = \Delta_{01} - R_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \right)$$

y de la misma forma para $\Delta_2(x, y)$

$$\Delta_2(x, y) = \Delta_{02} - \left(-R_2 - \sqrt{R_2^2 - x^2 - y^2} \right) = \Delta_{02} + R_2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}} \right)$$

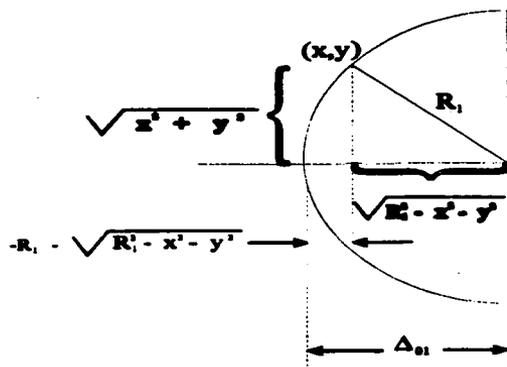


Figura 2.2: Un rayo que viaja de izquierda a derecha y llega a una superficie convexa (Radio de curvatura positiva).

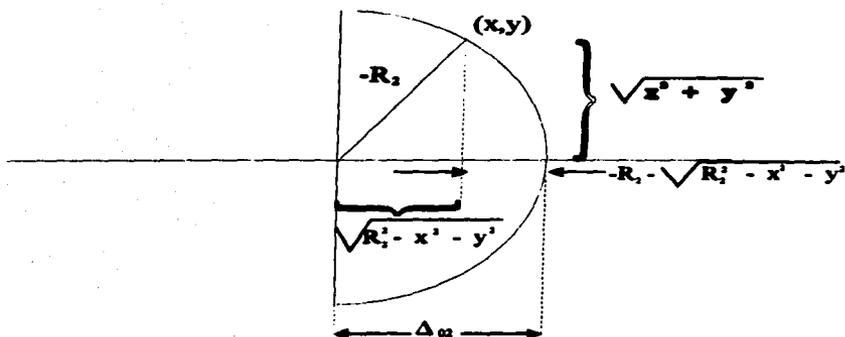


Figura 2.3: Un rayo que viaja de izquierda a derecha y llega a una superficie cóncava (Radio de curvatura negativa).

donde Δ_{01} y Δ_{02} son los espesores máximos de las dos partes en que dividimos la lente y por lo tanto $\Delta_0 = \Delta_{01} + \Delta_{02}$. Si sumamos las dos expresiones anteriores de acuerdo a la ec. (2.13) obtenemos

$$\Delta(x, y) = \Delta_0 - R_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \right) + R_2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}} \right)$$

La expresión para $\Delta(x, y)$ puede ser simplificada si se toma en cuenta sólo la parte del frente de onda cercana al eje óptico de la lente (la llamada aproximación paraxial):

$$\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \simeq 1 - \frac{x^2 + y^2}{2R_1^2}, \quad \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}} \simeq 1 - \frac{x^2 + y^2}{2R_2^2} \quad (2.14)$$

Con la ayuda de las aproximaciones anteriores obtenemos:

$$\Delta(x, y) = \Delta_0 - \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.15)$$

Si sustituimos (2.15) en (2.12) obtenemos

$$\exp \{i\phi(x, y)\} = \exp \{ik_0\eta\Delta_0\} \exp \left\{ -ik_0(\eta - 1) \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right\}.$$

Podemos simplificar este resultado utilizando la fórmula del fabricante de lentes para la distancia focal de una lente:

$$\frac{1}{f} = (\eta - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

De esta manera obtenemos finalmente

$$\exp \{i\phi(x, y)\} = \exp \{ik_0\eta\Delta_0\} \exp \left\{ -\frac{ik_0}{2f} (x^2 + y^2) \right\} \quad (2.16)$$

Escribimos $H = \exp \left\{ -\frac{ik_0}{2f} (x^2 + y^2) \right\}$, ya que corresponde a la transformada de Fourier de la función respuesta h al impulso, que introdujimos en la sección anterior (cf. ec. (2.11)). H recibe el nombre de función de transferencia de la lente. Su coeficiente en la ec. (2.16), $\exp \{ik_0\eta\Delta_0\}$, es un factor de fase

constante que para fines prácticos podemos despreciar. Sea $\mathbf{u} = (x, y)$, si $g(\mathbf{u})$ es la señal de entrada y $g_l(\mathbf{u})$ la de salida podemos poner

$$g_l(\mathbf{u}) = g(\mathbf{u}) \cdot H(\mathbf{u}) = g(\mathbf{u}) \cdot \exp \left\{ -\frac{ik_0}{2f} \mathbf{u}^2 \right\}. \quad (2.17)$$

2.3.2 Función ambigüedad asociada a una lente

Para establecer la relación entre la función de transferencia óptica y la función ambigüedad calculemos la función $H_f(\mathbf{p}, \mathbf{u})$ para $g_l(\mathbf{u})$, recordemos que ahora ésta es la función de transferencia.

$$\begin{aligned} H_{g_l}(\mathbf{p}, \mathbf{u}) &= g_l \left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{u}}{2} \right) g_l^* \left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{u}}{2} \right) \\ &= g \left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{u}}{2} \right) \exp \left\{ -\frac{ik_0}{2f} \left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{u}}{2} \right)^2 \right\} \times \\ &\quad \times g^* \left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{u}}{2} \right) \exp \left\{ \frac{ik_0}{2f} \left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{u}}{2} \right)^2 \right\} \\ &= g \left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{u}}{2} \right) g^* \left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{u}}{2} \right) \exp \left\{ -\frac{ik_0}{f} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \right\}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

y entonces:

$$H_{g_l}(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = H_g(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \exp \left\{ -\frac{ik_0}{f} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \right\}.$$

Determinamos la función ambigüedad de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A_{g_l}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) &= \mathbf{F}_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{w}} \{ H_{g_l}(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{ -i\mathbf{w} \cdot \mathbf{p} \} H_{g_l}(\mathbf{p}, \mathbf{u}) d\mathbf{p} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H_g(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \exp \left\{ -\frac{ik_0}{f} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \right\} \exp \{ -i\mathbf{w} \cdot \mathbf{p} \} d\mathbf{p} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H_g(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \exp \left\{ -i\mathbf{p} \left(\frac{k_0}{f} \mathbf{u} + \mathbf{w} \right) \right\} d\mathbf{p} \\ &= A_g \left(\mathbf{u}, \frac{k_0}{f} \mathbf{u} + \mathbf{w} \right), \end{aligned}$$

es decir:

$$A_{g_l}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = A_g \left(\mathbf{u}, \frac{k_0}{f} \mathbf{u} + \mathbf{w} \right) \quad (2.19)$$

2.3.3 Función de Wigner asociada a una lente

Toca ahora encontrar la función de Wigner para el caso de una esfera considerándola como una lente, justificación que aparecera más adelante cuando se realice un cálculo numérico para la distancia focal de la misma. Hemos mencionado en párrafos anteriores que si conocemos la función de entrada a un dispositivo, es posible conocer la función de salida a través de la función de Wigner, y nosotros ya tenemos la función de transferencia de una esfera dada por

$$g_l(\mathbf{u}) = g(\mathbf{u}) \cdot \exp \left\{ -\frac{ik_0(\eta - 1)}{R} u^2 \right\} = g(\mathbf{u}) \cdot \exp \left\{ -\frac{ik_0}{2f} u^2 \right\}$$

donde hemos definido la distancia focal f de la esfera (para rayos paraxiales):

$$f = \frac{R}{2(\eta - 1)}. \quad (2.20)$$

Haciendo los cálculos correspondientes encontramos que la función de Wigner es:

$$W_{g_l}(\mathbf{p}, \mathbf{K}) = \int H(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \exp \left\{ -iu \left(\frac{k_0}{f} \mathbf{p} + \mathbf{K} \right) \right\} d\mathbf{u} \quad (2.21)$$

que es equivalente a escribir

$$W_{g_l}(\mathbf{p}, \mathbf{K}) = W_g \left(\mathbf{p}, \mathbf{K} + \frac{k_0}{f} \mathbf{p} \right) \quad (2.22)$$

La versión matricial de este resultado coincide con la que corresponde a la función ambigüedad.

2.3.4 Transformada de Fourier

Supongamos que tenemos como función de transferencia la transformada de Fourier; utilizaremos la función ambigüedad para encontrar una representación matricial del paso de las coordenadas del espacio real al espacio

recíproco. Si $f(\mathbf{x})$ es una función, su transformada de Fourier $F(\mathbf{k})$ está dada por la ec. (2.4) mientras que su función ambigüedad $A_f(\mathbf{u}, \mathbf{w})$, por las ecuaciones (2.2)-(2.3). Podemos obtener $A_f(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ directamente a partir de la transformada de Fourier $F(\mathbf{k})$. Para esto tomemos la definición de la función ambigüedad como punto de partida

$$A_f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \int f\left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{u}}{2}\right) f^*\left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{u}}{2}\right) \exp\{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}\} d\mathbf{p}$$

y apliquemos la transformada de Fourier

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}}\{A_f(\mathbf{u}, \mathbf{w})\} &= \int A_f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \exp\{-i\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\} d\mathbf{u} \\ &= \int f\left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{u}}{2}\right) f^*\left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{u}}{2}\right) \times \\ &\quad \times \exp\{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}\} \exp\{-i\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\} d\mathbf{p} d\mathbf{u} \end{aligned}$$

si hacemos el cambio de variable:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{p} + \frac{\mathbf{u}}{2}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{p} - \frac{\mathbf{u}}{2}$$

tenemos que

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$$

y sustituimos en la ecuación anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}}\{A_f(\mathbf{u}, \mathbf{w})\} &= \int f(\mathbf{x}_1) f^*(\mathbf{x}_2) e^{-i\left(\frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2}\right) \cdot \mathbf{w}} e^{-i(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{v}} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \\ &= \int f(\mathbf{x}_1) f^*(\mathbf{x}_2) e^{-i\mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{v} + \frac{\mathbf{w}}{2})} e^{i\mathbf{x}_2 \cdot (\mathbf{v} - \frac{\mathbf{w}}{2})} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

pero si tomamos en cuenta que $F(\mathbf{k}) = \int f(\mathbf{x}) \exp\{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}\} d\mathbf{x}$ y,

$$\begin{aligned} F\left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{w}}{2}\right) &= \int f(\mathbf{x}) \exp\left\{-i\left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{w}}{2}\right) \cdot \mathbf{x}\right\} d\mathbf{x} \\ F^*\left(\mathbf{v} - \frac{\mathbf{w}}{2}\right) &= \int f^*(\mathbf{x}) \exp\left\{i\left(\mathbf{v} - \frac{\mathbf{w}}{2}\right) \cdot \mathbf{x}\right\} d\mathbf{x} \end{aligned}$$

entonces obtenemos:

$$F_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}} \{A_f(\mathbf{u}, \mathbf{w})\} = F\left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{w}}{2}\right) F^*\left(\mathbf{v} - \frac{\mathbf{w}}{2}\right) = H_F(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

Si aplicamos la transformada de Fourier inversa $F_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{u}}^{-1}$ obtenemos

$$A_f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \frac{1}{4\pi^2} \int H_F(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \exp\{i\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\} d\mathbf{v}. \quad (2.23)$$

Notemos que $S_F(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ es a $F(\mathbf{k})$ como $H_f(\mathbf{p}, \mathbf{u})$ es a $f(\mathbf{x})$.

Si $f(\mathbf{u})$ es la señal de entrada a un sistema cuya salida es la transformada de Fourier de dicha señal, la respuesta quedará representada por $F(\mathbf{k})$ y tendrá la siguiente forma:

$$F\{f(\mathbf{u})\} = F(\mathbf{k}).$$

La función $H_{F(\mathbf{k})}(\mathbf{p}, \mathbf{u})$ es:

$$H_{F(\mathbf{k})}(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = F\left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{u}}{2}\right) F^*\left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{u}}{2}\right) = S_F(\mathbf{p}, \mathbf{u})$$

y la función ambigüedad es:

$$\begin{aligned} A_{F(\mathbf{k})}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) &= F_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{w}} \{H_{F(\mathbf{k})}(\mathbf{p}, \mathbf{u})\} \\ &= \int H_{F(\mathbf{k})}(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \exp\{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}\} d\mathbf{p} \end{aligned}$$

Comparando con la ec. (2.23) tenemos que:

$$A_F(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = A_f(-\mathbf{w}, \mathbf{u}) \quad (2.24)$$

2.3.5 Propagador

Se trata de una expresión matemática que permite calcular el cambio en una señal ondulatoria conforme va avanzando a lo largo del eje óptico. Tal expresión, deducida en el tercer capítulo, es $\exp\left\{-\frac{i\pi u^2}{2k_0}\right\}$. Si tenemos originalmente una señal $g(\mathbf{u})$, después de avanzar una distancia z tenemos la señal $g_P(\mathbf{u})$, conectadas entre sí mediante:

$$g_P(\mathbf{u}) = g(\mathbf{u}) * \exp\left\{\frac{ik_0 u^2}{2z}\right\} \quad (2.25)$$

y, si la pasamos al espacio recíproco y utilizamos el teorema de convolución, la ecuación anterior tiene la forma:

$$G_P(\mathbf{w}) = G(\mathbf{w}) \cdot \exp\left\{-\frac{izw^2}{2k_0}\right\} \quad (2.26)$$

Esta última nos permite calcular la función $H(\mathbf{p}, \mathbf{u})$ y la función ambigüedad $A_P(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H_{G_P}(\mathbf{p}, \mathbf{u}) &= G_P\left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{u}}{2}\right) G_P^*\left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{u}}{2}\right) \\ &= G\left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{u}}{2}\right) G^*\left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{u}}{2}\right) \exp\left\{-\frac{iz}{k_0}\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}\right\}. \end{aligned}$$

Tenemos entonces:

$$H_{G_P}(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = H_G(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \exp\left\{-\frac{iz}{k_0}\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}\right\}, \quad (2.27)$$

ecuación que más adelante nos permitirá calcular la función de ambigüedad y de Wigner.

2.3.6 Función ambigüedad asociada al propagador

Por otro lado, la función ambigüedad para el propagador es, de acuerdo con (2.23),

$$A_{g_P}(u, w) = \frac{1}{4\pi^2} \int H_{G_P}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \exp\{i\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\} d\mathbf{v} \quad (2.28)$$

pero

$$H_{G_P}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = H_G(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \exp\left\{-\frac{iz}{k_0}\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}\right\},$$

y la ec. (2.28) se transforma en

$$\begin{aligned} A_{g_P}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) &= \frac{1}{4\pi^2} \int H_G(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \exp\left\{-\frac{iz}{k_0}\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}\right\} \exp\{i\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\} d\mathbf{v} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int H_G(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \exp\left\{i\mathbf{v} \cdot \left(\mathbf{u} - \frac{z}{k_0}\mathbf{w}\right)\right\} d\mathbf{v} \\ &= A_g\left(\mathbf{u} - \frac{z}{k_0}\mathbf{w}, \mathbf{w}\right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

2.3.7 Función de Wigner asociada al propagador

Es importante conocer la función de Wigner para el propagador, por esta razón buscaremos su expresión utilizando la definición original de la función de Wigner:

$$W_g(\mathbf{x}, \mathbf{K}) = \int g\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{u}}{2}\right) g^*\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{u}}{2}\right) e^{-i\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}} d^2\mathbf{u},$$

tomando la transformada de Fourier de la expresión anterior obtenemos:

$$F_{\mathbf{x} \rightarrow 1} \{W_g(\mathbf{x}, \mathbf{K})\} = \int g\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{u}}{2}\right) g^*\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{u}}{2}\right) \times \\ \times e^{-i\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}} e^{-i\mathbf{x} \cdot 1} d^2\mathbf{u} d^2\mathbf{x}$$

si hacemos el cambio de variable:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} + \frac{\mathbf{u}}{2}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{u}}{2}$$

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$$

obtenemos

$$F_{\mathbf{x} \rightarrow 1} \{W_g(\mathbf{x}, \mathbf{K})\} = \int e^{-i\mathbf{1} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2}\right)} d^2\mathbf{x}_1 d^2\mathbf{x}_2 \times \\ \times \int g(\mathbf{x}_1) g^*(\mathbf{x}_2) e^{-i(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{K}} \\ = G\left(\mathbf{K} + \frac{1}{2}\right) G^*\left(\mathbf{K} - \frac{1}{2}\right),$$

obteniendo finalmente

$$F_{\mathbf{x} \rightarrow 1} \{W_g(\mathbf{x}, \mathbf{K})\} = G\left(\mathbf{K} + \frac{1}{2}\right) G^*\left(\mathbf{K} - \frac{1}{2}\right)$$

Si ahora aplicamos la transformada de Fourier inversa obtenemos:

$$W_g(\mathbf{x}, \mathbf{K}) = \frac{1}{4\pi^2} \int G\left(\mathbf{K} + \frac{1}{2}\right) G^*\left(\mathbf{K} - \frac{1}{2}\right) e^{i\mathbf{1} \cdot \mathbf{x}} d^2\mathbf{v}. \quad (2.30)$$

Tomemos ahora la función $H_{G_p}(\mathbf{K}, \mathbf{u})$ para el propagador dada por la ecuación (2.27)

$$H_{G_P}(\mathbf{K}, \mathbf{u}) = G\left(\mathbf{K} + \frac{\mathbf{u}}{2}\right) G^*\left(\mathbf{K} - \frac{\mathbf{u}}{2}\right) e^{-\frac{i\mathbf{z}}{k_0} \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}}$$

y sustituyendo en la función de Wigner para el propagador, ec. (2.30) obtenemos

$$\begin{aligned} W_{G_P}(\mathbf{x}, \mathbf{K}) &= \frac{1}{4\pi^2} \int G\left(\mathbf{K} + \frac{\mathbf{u}}{2}\right) G^*\left(\mathbf{K} - \frac{\mathbf{u}}{2}\right) \exp\left\{-\frac{i\mathbf{z}}{k_0} \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}\right\} e^{i\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}} d^2\mathbf{u} \\ &= W_G\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{z}}{k_0} \mathbf{K}, \mathbf{K}\right) \end{aligned}$$

es decir:

$$W_{G_P}(\mathbf{x}, \mathbf{K}) = W_G\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{z}}{k_0} \mathbf{K}, \mathbf{K}\right) \quad (2.31)$$

relación que coincide con la obtenida a partir de la función ambigüedad.

Podemos observar que la función ambigüedad correspondiente a la señal después de pasar por la lente, ec. (2.19), después de tomar su transformada de Fourier, (2.24), o después de ser propagada procesos, excepto por sus argumentos. De hecho las tres ecuaciones pueden ser representadas mediante una transformación de coordenadas de las variables en cuestión, es decir, la función ambigüedad de la función $f_i(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ está conectada con la de la función $f(\mathbf{u}, \mathbf{w})$

$$A_f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = A_f(\mathbf{a}\mathbf{u} + \mathbf{b}\mathbf{w}, \mathbf{c}\mathbf{u} + \mathbf{d}\mathbf{w})$$

y se puede representar como una transformación lineal como sigue:

$$L\{A_f(\mathbf{u}, \mathbf{w})\} = A_f(\mathbf{a}\mathbf{u} + \mathbf{b}\mathbf{w}, \mathbf{c}\mathbf{u} + \mathbf{d}\mathbf{w})$$

ó también escrita sólo sobre las coordenadas:

$$L(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = (\mathbf{a}\mathbf{u} + \mathbf{b}\mathbf{w}, \mathbf{c}\mathbf{u} + \mathbf{d}\mathbf{w})$$

que bien podemos escribir en forma matricial de la siguiente forma

$$\mathbf{S} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix},$$

y lo más interesante es que la matriz \mathbf{S} caracteriza completamente al dispositivo óptico que se está estudiando del mismo modo que lo hace la función de transferencia.

Si tomamos la función ambigüedad para el caso de una lente, ec. (2.19),

$$A_f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = A_f \left(\mathbf{u}, \frac{k_0}{f} \mathbf{u} + \mathbf{w} \right)$$

es claro que la matriz que caracteriza a una lente es:

$$\mathbf{S}_l = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{k_0}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Para el caso de la transformada de Fourier, de la ec. (2.24) tenemos:

$$A_F(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = A(-\mathbf{w}, \mathbf{u})$$

y la matriz que caracteriza a la transformada de Fourier es :

$$\mathbf{S}_F = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lo mismo ocurre con el propagador: según la ec. (2.29),

$$A_p(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = A \left(\mathbf{u} - \frac{z}{k_0} \mathbf{w}, \mathbf{w} \right)$$

la matriz que lo caracteriza es:

$$\mathbf{S}_P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{z}{k_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Ocurre lo mismo para el caso de la función de Wigner de una lente ec. (2.22)

$$W_{s_l}(\mathbf{p}, \mathbf{K}) = W_s \left(\mathbf{p}, \mathbf{K} + \frac{k_0}{f} \mathbf{p} \right),$$

la matriz representativa es

$$\mathbf{S}_{W_l} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{k_0}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

Para el caso de la función de Wigner del propagador, la ec. (2.31),

$$W_{G_P}(\mathbf{x}, \mathbf{K}) = W_G\left(\mathbf{x} - \frac{z}{k_0}\mathbf{K}, \mathbf{K}\right), \quad (2.34)$$

la matriz representativa es:

$$\mathbf{S}_{W_P} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{z}{k_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Por lo que podemos notar las matrices representativas son las mismas si se usa la función ambigüedad o la función de Wigner.

2.4 Representación matricial de una cascada de dispositivos.

Frecuentemente el sistema óptico está compuesto de diferentes dispositivos como los ya mencionados, dispuestos uno tras otro en lo que se denomina *una cascada*. Utilizaremos el mismo método para encontrar la función ambigüedad del sistema, mediante las funciones ambigüedad de los diferentes dispositivos de la cascada. Podemos expresar a la función ambigüedad que pasa por el primer dispositivo como

$$A_{2f}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = L_1 A_{1f}(\mathbf{u}, \mathbf{w})$$

donde L_1 representa la transformación debida al primer dispositivo. El paso de la señal que sale del primer dispositivo y entra al segundo dispositivo se representa como:

$$A_{3f}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = L_2 A_{2f}(\mathbf{u}, \mathbf{w})$$

pero:

$$A_{2f}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = L_1 A_{1f}(\mathbf{u}, \mathbf{w})$$

y entonces sustituyendo obtenemos:

$$A_{3f}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = L_2 A_{2f}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = L_2 L_1 A_{1f}(\mathbf{u}, \mathbf{w})$$

Si la señal que sale del segundo dispositivo entra a un tercer dispositivo obtenemos lo siguiente:

$$A_{4f}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = L_3 L_2 L_1 A_{1f}(\mathbf{u}, \mathbf{w})$$

Podemos generalizar para el n -ésimo dispositivo:

$$A_{nf}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_1 A_{1f}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad (2.36)$$

donde las L_i representan las transformaciones que actúan sobre A_1 al pasar por los n dispositivos que forman el sistema, y obtener finalmente la señal A_n .

La ventaja del método radica en que cada transformación podemos representarla por una matriz \mathbf{S}_i , y el problema de pasar una señal óptica por una serie de dispositivos se reduce, de unas engorrosas convoluciones, el método tradicional, a unas elementales multiplicaciones de matrices de 2×2 , obteniéndose una matriz que contiene toda la información del sistema óptico que se está estudiando.

Escrita de manera matricial la ec. (2.36) nos queda:

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{S}_{n-1} \cdots \mathbf{S}_1$$

donde \mathbf{S}_n representa todo el sistema. Como \mathbf{S} tiene la forma

$$\mathbf{S}_n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

la función ambigüedad de la señal de salida será:

$$A_{fs}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = A_{fe}(a\mathbf{u} + b\mathbf{w}, c\mathbf{u} + d\mathbf{w}),$$

donde los subíndices e y s indican entrada y salida respectivamente.

2.5 El problema de la transformación inversa

Para que el problema quede totalmente resuelto es necesario determinar la función de salida, de la que hasta aquí sólo conocemos su función ambigüedad. Papoulis ha establecido dos caminos para lograrlo. En uno toma como punto de partida la función ambigüedad, mediante una integral. En otro se basa en la matriz \mathbf{S} asociada al sistema óptico total, mostrando directamente su conexión con la función de entrada. El primer teorema de Papoulis [13] lo enunciamos a continuación.

Teorema 1 La función ambigüedad A_f determina unívocamente la señal f

Demostración: A partir de la ec. (2.7) podemos escribir:

$$f\left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{u}}{2}\right) f^*\left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{u}}{2}\right) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} A_f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \exp\{i\mathbf{w} \cdot \mathbf{p}\} d\mathbf{w}$$

si definimos los vectores $\mathbf{u}_1 = \mathbf{p} + \frac{\mathbf{u}}{2}$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{p} - \frac{\mathbf{u}}{2}$ obtenemos:

$$f(\mathbf{u}_1) f^*(\mathbf{u}_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} A_f(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{w}) \exp\left\{i\mathbf{w} \frac{(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)}{2}\right\} d\mathbf{w} \quad (2.37)$$

Este resultado quiere decir que una señal f queda unívocamente determinada [12] por su función ambigüedad. Esta "transformada inversa de la función ambigüedad" siempre puede calcularse tan pronto conocemos la función ambigüedad de salida. El otro método de Papoulis [13, 14, 15] involucra directamente la matriz correspondiente al sistema total, obtenida mediante la multiplicación de las matrices de cada uno de los elementos que forman el sistema.

Teorema 2 Si el sistema es lineal el determinante de la matriz de transformación es igual a la unidad, es decir, $|\mathbf{S}_n| = 1$

Teorema 3 Todo sistema lineal representado por la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ donde $c \neq 0$, resulta equivalente a un sistema óptico formado por tres componentes: un propagador $P(\alpha_1)$, una lente $L(\beta_1)$ y un propagador $P(\alpha_2)$

En virtud de este resultado podemos escribir:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = P(\alpha_1)L(\beta_1)P(\alpha_2) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \alpha_1 &= \frac{1-a}{c} \quad \alpha_2 = \frac{1-d}{c} \quad \beta_1 = c \end{aligned}$$

En tal caso la función de salida está dada por:

$$f(u) = \left\{ \left(f(u) * \exp \left[\frac{i\alpha_1 u^2}{2} \right] \right) \cdot \exp \left[-\frac{i\beta_1 u^2}{2} \right] \right\} * \exp \left[\frac{i\alpha_2 u^2}{2} \right]. \quad (2.38)$$

Teorema 4 Si $|\mathbf{S}_n| = 1$ y $c = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_n &= P(\alpha_1)L(\beta_1)P(\alpha_2)L(\beta_2) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en donde:

$$\alpha_1 = -\frac{1-a-\beta_2 d}{\beta_2 d}, \quad \alpha_2 = -\frac{1-d}{\beta_2 d}, \quad \beta_1 = -\beta_2 d,$$

en donde β_2 es una constante arbitraria y la ec. (2.38) se transforma en:

$$\begin{aligned} f(u) &= \left\{ \left\{ \left(f(u) * \exp \left[\frac{i\alpha_1 u^2}{2} \right] \right) \cdot \exp \left[-\frac{i\beta_1 u^2}{2} \right] \right\} * \exp \left[\frac{i\alpha_2 u^2}{2} \right] \right\} \times \\ &= \times \exp \left\{ \frac{-i\beta_2 x^2}{2} \right\} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Consideremos a continuación un ejemplo, no sólo para ilustrar el método que proponemos, sino también para contrastar las diferencias con el método tradicional: El sistema óptico consiste de una lente de distancia focal f . La iluminación en el plano objeto a una distancia z queda descrita mediante la función $\phi(x)$.

Nuestro objetivo es conocer la iluminación en el plano imagen, también colocado a una distancia z , del otro lado de la lente. Todo lo que tenemos que hacer es propagar la función $\phi(x)$ a lo largo de la distancia z , atravesar la lente y propagar nuevamente la distancia z . Esto podemos escribirlo matemáticamente mediante

$$\psi(x) = \left\{ \left(\phi(x) * \exp \left[\frac{ik_0 x^2}{2z} \right] \right) \exp \left[\frac{ik_0 x^2}{2f} \right] \right\} * \exp \left[\frac{ik_0 x^2}{2z} \right] \quad (2.40)$$

donde $\psi(x)$ representa la señal de salida en el plano imagen.

Si ahora optamos por el método de las funciones del espacio fase, el propagador es una matriz, la lente tiene su propia matriz, y después el otro propagador se representa por otra matriz. El resultado final es la multiplicación de las tres matrices de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{z}{k_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{k_0}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{z}{k_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{z}{f} & \frac{z^2}{k_0} \left(\frac{1}{f} - \frac{2}{z} \right) \\ \frac{k_0}{f} & 1 - \frac{z}{f} \end{pmatrix}$$

Ahora como el resultado de la multiplicación es la matriz $\mathbf{S}_n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, podemos hacer uso del Teorema 2 descrito anteriormente. Calculemos los parámetros correspondientes α_1 α_2 β_1 .

$$\alpha_1 = \frac{1 - \left(1 - \frac{z}{f}\right)}{\frac{k_0}{f}} = \frac{z}{k_0}$$

$$\alpha_2 = \frac{1 - \left(1 - \frac{z}{f}\right)}{\frac{k_0}{f}} = \frac{z}{k_0}$$

$$\beta_1 = c = \frac{k_0}{f}$$

Con estos resultados utilizamos la ec. (2.38) y se obtiene:

$$\psi(x) = \left\{ \left(\phi(x) * \exp \left[\frac{ik_0 x^2}{2z} \right] \right) \cdot \exp \left[\frac{ik_0 x^2}{2f} \right] \right\} * \exp \left[\frac{ik_0 x^2}{2z} \right]$$

que es la expresión encontrada anteriormente, ec. (2.40).

En el caso de un sistema óptico compuesto de n elementos (aberturas, lentes o espacios vacíos), en líneas generales, el método tradicional requiere del cálculo de n convoluciones. Nuestro método, por el contrario, se reduce a la multiplicación de n matrices de 2×2 y del cálculo de dos convoluciones.

Capítulo 3

Aplicación de las técnicas de espacio fase a la propagación de ondas sonoras

3.1 La ecuación de onda.

La propagación de ondas mecánicas en medios materiales está descrita por la ecuación de onda

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

donde ψ puede representar una componente del tensor de esfuerzos, la densidad, el potencial de velocidades o la temperatura local del medio. A pesar de que esta ecuación coincide con la de las ondas electromagnéticas, los movimientos ondulatorios presentan diferencias muy importantes. Posiblemente la limitación más importante ocurre debido a que el principio de superposición en acústica sólo es válido para perturbaciones pequeñas. De hecho la velocidad del sonido es una función creciente de la presión a la que se encuentra sometido localmente el medio. Otra diferencia muy importante corresponde a la de los estados de polarización. En el caso electromagnético la polarización es rigurosamente transversal, mientras que en el caso acústico puede ser transversal o longitudinal, y sólo longitudinal en el caso de los líquidos. La óptica acústica geométrica, como la óptica geométrica, corresponde al caso en que las longitudes de onda son muy pequeñas. Puede ser descrita a dos niveles diferentes, igual que la óptica geométrica. Por un lado

existe la iconal y la ecuación de la iconal, idéntica matemáticamente a las utilizadas en el caso electromagnético. A un nivel más elemental también es posible hablar de rayos acústicos y trabajar su propagación utilizando las leyes de Snell para la reflexión y la refracción. Entre los resultados que se pueden extender, dentro del límite de pequeñas perturbaciones, está el principio de Fermat, que permite determinar la trayectoria de los rayos acústicos, y que afirma que la propagación ocurre a lo largo de rectas sobre medios de propiedades físicas uniformes. El paso de una onda electromagnética de un medio a otro está descrita por las ecuaciones de Fresnel, mismas que se deducen de las condiciones de continuidad impuestas sobre la superficie que separa los dos medios. Tales condiciones imponen la continuidad de las componentes normales del campo magnético y del desplazamiento eléctrico, así como las componentes tangenciales del campo eléctrico y la excitación magnética. En el caso acústico tales condiciones son la continuidad del tensor de esfuerzos de uno y otro lado de la superficie que separa tales medios, además de la igualdad de las componentes normales de la velocidad euleriana de tales medios [16]. Los resultados, que involucran el índice de refracción, son las leyes de Snell para la reflexión y la refracción, además de los coeficientes de transmisión y reflexión que tienen que ver con la cantidad de energía reflejada y transmitida. El índice de refracción también está definido en función del cociente de velocidades sónicas en ambos medios. Su parte compleja, al igual que el caso acústico también sucede que la velocidad del sonido depende de las frecuencias, aunque esta dependencia es menos importante y, por lo tanto, más difícil de medir. Los fenómenos de interferencias acústica tienen la misma base matemática y física que los de interferencia electromagnética. Los fenómenos de difracción también pueden ser explicados mediante los mismos principios. El principio de Huygens, que se basa en el principio de superposición, lleva a los mismos resultados en acústica. La teoría escalar de la difracción, como es sabido, depende tanto de la ecuación de Helmholtz como del teorema de Green. En este caso, como es sabido, existen tres esquemas. El primero requiere de conocer la función escalar junto con su gradiente sobre toda la superficie de la cavidad. El segundo sólo la función y el tercero sólo el gradiente. Los resultados obtenidos en estos tres esquemas son comparables a los obtenidos mediante el principio de Huygens a condición de limitarlos a los rayos paraxiales. Tales resultados están comparados en el libro de Jackson, sección (9.8). Lo anterior, en el fondo, fundamenta la determinación de los patrones de difracción mediante la transformada de Fourier de las aberturas. El propagador, por otro lado,

está basado en la ecuación de Helmholtz, válida en acústica para pequeñas perturbaciones, lo que lo hace aplicable en nuestro trabajo.

El paso de una onda por un material queda descrito tanto por el avance de la fase, dependiente de la parte real de tal índice, como de su absorción, descrita por la parte imaginaria. Hay dos limitaciones importantes en la aplicabilidad de los resultados obtenidos en el trabajo. El primero tiene que ver con la pequeñez de las perturbaciones, lo cual siempre se puede garantizar. Basta utilizar transductores de potencia suficientemente pequeña. La otra limitación corresponde con el uso del propagador. Como puede verse en nuestro trabajo, de acuerdo con la ec. (2.26), los resultados que presentamos dependen del desarrollo de una raíz cuadrada:

$$\sqrt{k_0^2 - u^2 - v^2} = k_0 \left(1 - \frac{u^2 + v^2}{k_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx k_0 - \frac{u^2 + v^2}{2k_0} \quad (3.2)$$

Esta aproximación también es válida para los rayos paraxiales.

3.2 La ecuación de Helmholtz

Nuestro punto de partida es la ecuación de Helmholtz, que se obtiene de la ecuación de onda (3.1) al proponer la solución como el producto de una función $\phi(\mathbf{r})$ que sólo depende de las coordenadas y una función armónica del tiempo, es decir,

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = A_0 \phi(\mathbf{r}) \exp\{-i\omega t\} \quad (3.3)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.1) obtenemos

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) + k^2 \phi(\mathbf{r}) = 0, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (3.4)$$

Es fácil cerciorarse que la función¹

$$\bar{\phi}(\bar{\mathbf{r}}) = B \exp\{i\bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{r}}\} \quad (3.5)$$

donde $|\bar{\mathbf{k}}| = k_0$, es una solución de (3.4).

¹que recibe el nombre de "onda plana"

3.3 El propagador acústico

Tomaremos la dirección z como la dirección de propagación y podemos escribir además:

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

$$\mathbf{k} = (u, v, w)$$

donde la magnitud del vector de onda es:

$$k_0 = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

lo que nos permite expresar la componente z del vector \mathbf{k} como

$$w = \sqrt{k_0^2 - u^2 - v^2}$$

Podemos escribir la solución general de la ecuación de Helmholtz (3.4) de la siguiente forma como una superposición de ondas planas

$$\begin{aligned} \phi &= \int B(u, v) \exp\{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\} du dv \\ &= \int B(u, v) \exp\{i(ux + vy)\} \exp\left\{iz\sqrt{k_0^2 - u^2 - v^2}\right\} du dv, \end{aligned} \quad (3.6)$$

conocida como representación de Rayleigh [17, 18]. Tomaremos para w el valor positivo, que representa la propagación en la dirección z . En óptica geométrica el desarrollo del radical $\sqrt{k_0^2 - u^2 - v^2}$ en serie de potencias proporciona un resultado conocido como aproximación paraxial, válida si suponemos que los rayos que inciden sobre la superficie difractora son cercanos al eje óptico.

$$\sqrt{k_0^2 - u^2 - v^2} = k_0 \left(1 - \frac{u^2 + v^2}{k_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx k_0 - \frac{u^2 + v^2}{2k_0} \quad (3.7)$$

Si sustituimos este resultado en la ec. (3.6) obtenemos:

$$\phi(x, y, z) = \int B(u, v) \exp\{i(ux + vy)\} \exp\left\{i\left[k_0 - \frac{u^2 + v^2}{2k_0}\right]z\right\} du dv \quad (3.8)$$

Cuando $z = 0$ simplemente tenemos:

$$\phi(x, y, 0) = \int B(u, v) \exp \{i(ux + vy)\} du dv \quad (3.9)$$

Si ahora recordamos la definición de transformada inversa de Fourier, es claro que podemos escribir la ec. (3.9) como:

$$\phi(x, y, 0) = 4\pi^2 F^{-1} \{B(u, v)\},$$

y si aplicamos la transformada de Fourier de esta ecuación obtenemos:

$$B(u, v) = \frac{1}{4\pi^2} F \{\phi(x, y, 0)\}$$

Aplicemos la transformada de Fourier a $\phi(x, y, z)$ dada por la ecuación (3.8):

$$F \{\phi(x, y, z)\} = F \{\phi(x, y, 0)\} \exp \left\{ iz \left(k_0 - \frac{u^2 + v^2}{2k_0} \right) \right\}$$

Usando una notación más corta, eliminando el factor de fase $\exp(ik_0z)$, ya que no depende de las variables u y v , y definiendo $\hat{\phi}_z$ y $\hat{\phi}_0$ como

$$\hat{\phi}_z = F \{\phi(x, y, z)\} \quad \text{y} \quad \hat{\phi}_0 = F \{\phi(x, y, 0)\}$$

obtenemos la ecuación:

$$\hat{\phi}_z = \hat{\phi}_0 \exp \left\{ -iz \left(\frac{u^2 + v^2}{2k_0} \right) \right\} \quad (3.10)$$

Conviene comparar la ec. (2.26) con (3.10), recordando que G y G_z no son sino las transformadas de Fourier de la señal original y propagada mismas que corresponden a las variables ϕ_z y ϕ_0 respectivamente.

El factor $\hat{P}_z(u, v)$ de $\hat{\phi}_0$, en la expresión para $\hat{\phi}_z$, definido por

$$\hat{P}_z(u, v) = \exp \left\{ -iz \left(\frac{u^2 + v^2}{2k_0} \right) \right\},$$

se conoce como propagador en z . Entonces podemos escribir la ec. (3.10) también como :

$$\hat{\phi}_z = \hat{\phi}_0 \hat{P}_z(u, v)$$

La ecuación equivalente a la (3.10) pero en variables del espacio real, es decir, su transformada de Fourier inversa, es

$$\phi_z = \phi_0 * P_z(x, y) \quad (3.11)$$

donde * denota la operación convolución, y el propagador en z en el espacio real es:

$$P_z(x, y) = -\frac{ik_0}{2\pi z} \exp \left\{ \frac{ik_0}{2z} (x^2 + y^2) \right\} \quad (3.12)$$

Las ecuaciones (3.10) y (3.11) corresponden, respectivamente, con las ecuaciones (2.26) y (2.25) que antes trabajamos en el caso de señales luminosas.

3.4 La función ambigüedad para el propagador de sonido

La función ambigüedad calculada en la señal acústica propagada está conectada con la señal original de la misma manera que en el caso de señales luminosas, es decir, de acuerdo con la ec. (2.29)

$$A_{J_p}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = A_f \left(\left(\mathbf{u} - \frac{z}{k_0} \mathbf{w}, \mathbf{w} \right) \right)$$

y por lo tanto la matriz correspondiente al propagador del sonido, de acuerdo con la ec. (2.33) es:

$$\mathbf{S}_P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{z}{k_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.5 La función de Wigner para el propagador de sonido

Para el caso de la función de Wigner del propagador de sonido es la misma que se encontró en secciones anteriores dada por

$$W_{G_p}(\mathbf{x}, \mathbf{K}) = W_G \left(\mathbf{x} - \frac{z}{k_0} \mathbf{K}, \mathbf{K} \right) \quad (3.13)$$

Capítulo 4

Aplicación de las técnicas de espacio fase a la investigación ultrasónica de materiales

Determinaremos la función de Wigner asociada a una onda plana y al paso de la misma por una lente delgada. Mencionamos como posible aplicación de nuestro trabajo el 'método de multicapas' desarrollado principalmente para Microscopía Electrónica. Después consideraremos el problema de determinar la función de Wigner W de una onda plana que incide sobre un conjunto de esferas líquidas embebidas en otro líquido. Para simplificar las expresiones supondremos que tales esferas se encuentran colocadas en un arreglo espacial periódico, de espesor Δz , formando un 'cristal bidimensional' que llamaremos sustrato acústico. Este problema es realmente nuevo, sobre todo por que la transformada de Wigner W de Ψ no es una función lineal de Ψ . Los resultados pueden ser utilizados tanto en la física de los rayos X como en problemas de Microscopía Electrónica. Sin embargo nuestro objetivo no es el de calcular la función de Wigner W detrás del sustrato acústico sino de conocer el potencial del que se puede deducir la onda transmitida. Para esto detallaremos el proceso que permite invertir la transformada de Wigner y lo aplicaremos a nuestro resultado W . El análisis anterior se llevará a cabo primero en el caso de un cristal que llamamos "continuo" debido a que la distancia de separación entre los puntos de la red es pequeña comparada con la longitud de onda, seguiremos con un cristal de dimensiones finitas haciendo un cálculo mediante las integrales de Fresnel y mediante la espiral de Cornu. Finalmente terminaremos el capítulo con una sección dedicada a

un cristal de dimensiones infinitas.

4.1 Función de Wigner para una onda plana que incide sobre una lente.

Consideremos una onda plana $g(u)$ que se propaga en la dirección del eje z dada por

$$g(u) = A \exp\{-ik_0 z\} \quad (4.1)$$

donde A es su amplitud. El núcleo de la función de Wigner está dado por

$$H_g(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = AA^*,$$

y su función de Wigner está dada por:

$$\begin{aligned} W_g(\mathbf{p}, \mathbf{w}) &= AA^* \int \exp\{-i\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}\} d^2\mathbf{u} \\ &= 4\pi^2 AA^* \delta(\mathbf{w}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Supongamos ahora que incide la onda plana $g(u)$ sobre una lente delgada, la onda $g_l(\mathbf{u})$ que sale de la lente está dada por la ec. (2.17):

$$g_l(\mathbf{u}) = A \exp\{-ik_0 z\} \cdot \exp\left\{-\frac{ik_0}{2f} u^2\right\}, \quad (4.3)$$

cuyo núcleo $H_{g_l}(\mathbf{p}, \mathbf{u})$ de su función de Wigner es:

$$H_{g_l}(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = AA^* \exp\left\{-\frac{ik_0}{f} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}\right\},$$

y su función de Wigner es entonces:

$$\begin{aligned} W_{g_l}(\mathbf{p}, \mathbf{w}) &= AA^* \int \exp\left\{-\frac{ik_0}{f} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}\right\} \exp\{-i\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}\} d^2\mathbf{u} \\ &= AA^* \int \exp\left\{-i\mathbf{u} \left(\mathbf{w} + \frac{k_0}{f} \mathbf{p}\right)\right\} d^2\mathbf{u}, \\ &= 4\pi^2 AA^* \delta\left(\frac{k_0}{f} \mathbf{p} + \mathbf{w}\right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Esta es la función de Wigner a la salida de la lente cuando la onda incidente es una onda plana. Es preciso ahora propagar esta onda que ha salido de la lente una distancia Δz igual al espesor del sustrato acústico. Para lo cual nos valdremos de la función de Wigner para el propagador, ecs. (2.31) o (3.13):

$$W_{G_P}(\mathbf{p}, \mathbf{w}) = W_G \left(\mathbf{p} - \frac{\Delta z}{k_0} \mathbf{w}, \mathbf{w} \right), \quad (4.5)$$

de donde obtenemos finalmente

$$W_{g_{IP}}(\mathbf{p}, \mathbf{w}) = 4\pi^2 A A^* \delta \left(\frac{k_0}{f} \mathbf{p} + \left(1 - \frac{\Delta z}{f} \right) \mathbf{w} \right). \quad (4.6)$$

4.2 Inversión de la función de Wigner

El proceso inverso, como ya mencionamos en párrafos anteriores, consiste en que a partir de la función de Wigner regresemos a la función en variables reales. Tomemos como punto de partida la definición original de la función de Wigner, ec. (2.1)

$$W_g(\mathbf{p}, \mathbf{K}) = \int_{-\infty}^{\infty} g \left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{u}}{2} \right) g^* \left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{u}}{2} \right) \exp \{ -i\mathbf{u} \cdot \mathbf{K} \} d^2\mathbf{u} \quad (4.7)$$

Su transformada de Fourier inversa nos proporciona el núcleo $H_g(\mathbf{p}, \mathbf{u})$ de la función de Wigner, de acuerdo con (2.6), es decir,

$$H_g(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = g \left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{u}}{2} \right) g^* \left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{u}}{2} \right) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} W_g(\mathbf{p}, \mathbf{K}) \exp \{ i\mathbf{u} \cdot \mathbf{K} \} d\mathbf{K}, \quad (4.8)$$

En general, una vez conocido el núcleo $H_g(\mathbf{p}, \mathbf{u})$ podemos continuar de la siguiente forma: Evaluemos $H_g(\mathbf{p}, \mathbf{u})$ en $\mathbf{p} = \mathbf{u}/2$ y obtenemos

$$g(\mathbf{u})g^*(\mathbf{0}) = H_g \left(\frac{\mathbf{u}}{2}, \mathbf{u} \right), \quad (4.9)$$

como $g(\mathbf{0})g^*(\mathbf{0}) = H_g(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ entonces $|g^*(\mathbf{0})| = \sqrt{H_g(\mathbf{0}, \mathbf{0})}$ y por lo tanto

$$g(\mathbf{0}) = \sqrt{H_g(\mathbf{0}, \mathbf{0})} e^{i\delta}$$

en donde δ no depende de las coordenadas x y y . Sustituyendo $g(\mathbf{0})$ en la ec. (4.9) obtenemos

$$g(\mathbf{u}) = \frac{H_g\left(\frac{\mathbf{u}}{2}, \mathbf{u}\right)}{\sqrt{H_g(\mathbf{0}, \mathbf{0})}} e^{i\delta}. \quad (4.10)$$

Esta técnica de inversion la utilizaremos en la sección (4.6)

También podemos reescribir la ec.(4.8) en función de las variables \mathbf{w}_1 y \mathbf{w}_2 definidas mediante $\mathbf{w}_1 = \mathbf{p} + \mathbf{u}/2$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{p} - \mathbf{u}/2$, de donde se sigue que $\mathbf{p} = (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)/2$ y $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$ y por lo tanto

$$g(\mathbf{w}_1)g^*(\mathbf{w}_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int W_g\left(\frac{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2}{2}, \mathbf{K}\right) \exp\{i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)\} d^2\mathbf{K}. \quad (4.11)$$

Si sustituimos $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}$ y $\mathbf{w}_2 = \mathbf{0}$ en la ec. (4.11) obtenemos:

$$g(\mathbf{w})g^*(\mathbf{0}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} W_g\left(\frac{\mathbf{w}}{2}, \mathbf{K}\right) \exp\{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{w}\} d^2\mathbf{K}. \quad (4.12)$$

de donde se sigue que $g(\mathbf{w})$ queda determinada a menos de un número complejo $g^*(\mathbf{0})$. Sin embargo el tamaño de ese número está determinado por la ec. (4.12) calculada en $\mathbf{w} = \mathbf{0}$:

$$|g(\mathbf{0})|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} W_g(\mathbf{0}, \mathbf{K}) d^2\mathbf{K}. \quad (4.13)$$

De esta manera podemos determinar la función $g(\mathbf{w})$ a menos de un factor de fase. Apliquemos este resultado para invertir la función de Wigner dada por la ec. (4.6). De acuerdo con la ec. (4.12) tenemos

$$g_{I_p}(\mathbf{w})g_{I_p}^*(\mathbf{0}) = \int_{-\infty}^{\infty} AA^*\delta\left(\frac{k_0}{2f}\mathbf{w} + \left(1 - \frac{\Delta z}{f}\right)\mathbf{K}\right) \exp\{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{w}\} d^2\mathbf{K}.$$

La integral se reduce a evaluar el integrando en

$$\mathbf{K} = -\frac{k_0\mathbf{w}}{2(f - \Delta z)}$$

es decir

$$g_{l,r}(\mathbf{w}) = |A|e^{i\alpha} \exp \left\{ -\frac{ik_0}{2(f - \Delta z)} \mathbf{w}^2 \right\}. \quad (4.14)$$

Este resultado nos permite volver al espacio físico de las variables reales y nos servirá para detallar un método para calcular la función de Wigner de un modelo de material en la sección (4.6).

4.3 El método de multicapas

El método de multicapas fue utilizado originalmente en el contexto de la microscopía electrónica, siendo su objetivo determinar la función de transferencia de una muestra. Para esto, la muestra se descompone en una suma finita de capas de espesor Δz pequeño. El problema se reduce, de esta manera, a dos: por un lado es necesario determinar la función de transferencia de cada una de tales capas, y por el otro, obtener la función de transferencia que corresponde a su totalidad.

La función de transferencia (sección 2.2) de una capa puede obtenerse interpretando su efecto como la superposición de otros dos más sencillos: En primer lugar tenemos la transmisión a través de un medio cuya función de transferencia puede escribirse como

$$g_M(x, y) = \exp \left(\frac{2\pi i \eta(x, y) \Delta z}{\lambda} \right) \quad (4.15)$$

en donde $\eta(x, y)$ es su índice de refracción, y en segundo lugar tenemos el efecto debido a la propagación a través de una distancia Δz , igual al espesor de la capa, de acuerdo con la (sección 2.3.5), y cuya expresión matemática se obtiene al sustituir Δz por z en la ec. (2.26).

El método de multicapas supone que la onda llegará a otra, de espesor $\Delta z'$, repitiéndose el proceso anterior hasta alcanzar el grosor de la muestra.

De esta manera, los diferentes sustratos acústicos estarán caracterizados por las diferentes funciones de transferencia g_M , mismas que dependen tanto de la composición de los materiales como de su estructura.

4.4 El sustrato acústico cristalino

Vamos a considerar el problema de un sustrato acústico *cristalino* que nos permitirá detallar el procedimiento que se debe seguir para determinar la función de transferencia, y que, por su forma, podrá ser directamente comparado con los métodos usados para la investigación en estado sólido. Tal sustrato es una red bidimensional (cuadrada) de gotas de un líquido embebidas en otro.

También supondremos que las esferas colocadas en los puntos de esa red se pueden aproximar por lentes acústicas, aunque en el siguiente capítulo expondremos el trabajo que hemos desarrollado para mejorar esta aproximación. La función de transferencia de una lente colocada en la posición \mathbf{q}_k , fig. (4.1), puede escribirse de acuerdo con la ec. (2.16), como

$$g_L(x, y; \mathbf{q}_k) = g(x, y) \cdot \exp \left\{ -\frac{ik_0}{2f} [(x - q_{kx})^2 + (y - q_{ky})^2] \right\} \quad (4.16)$$

donde q_{kx} y q_{ky} son las coordenadas x e y de la lente respectivamente. La función de transferencia asociada a esta capa de espesor Δz puede escribirse, por el principio de superposición, como

$$g_T(x, y; z) = \sum_k g(x, y) \cdot \exp \left\{ -\frac{ik_0}{2f} [(x - q_{kx})^2 + (y - q_{ky})^2] \right\}, \quad (4.17)$$

en donde la suma debe ser extendida a todas las esferas contenidas en la capa. Calculemos ahora el núcleo $H_{g_T}(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = g_T(\mathbf{p} + \mathbf{u}/2) g_T^*(\mathbf{p} - \mathbf{u}/2)$ de la función de Wigner. $g_T(\mathbf{p} + \mathbf{u}/2)$ está dada por:

$$\sum_k g\left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{u}}{2}\right) \exp \left\{ -\frac{ik_0}{2f} \left[\left(p_x + \frac{u_x}{2} - q_{kx} \right)^2 + \left(p_y + \frac{u_y}{2} - q_{ky} \right)^2 \right] \right\}$$

mientras que $g_T^*(\mathbf{p} - \mathbf{u}/2)$, por:

$$\sum_k g^*\left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{u}}{2}\right) \exp \left\{ +\frac{ik_0}{2f} \left[\left(p_x - \frac{u_x}{2} - q_{kx} \right)^2 + \left(p_y - \frac{u_y}{2} - q_{ky} \right)^2 \right] \right\}$$

Haciendo los cálculos como en las secciones anteriores obtenemos que $H_{g_T}(\mathbf{p}, \mathbf{u})/H_g(\mathbf{p}, \mathbf{u})$ está dado por

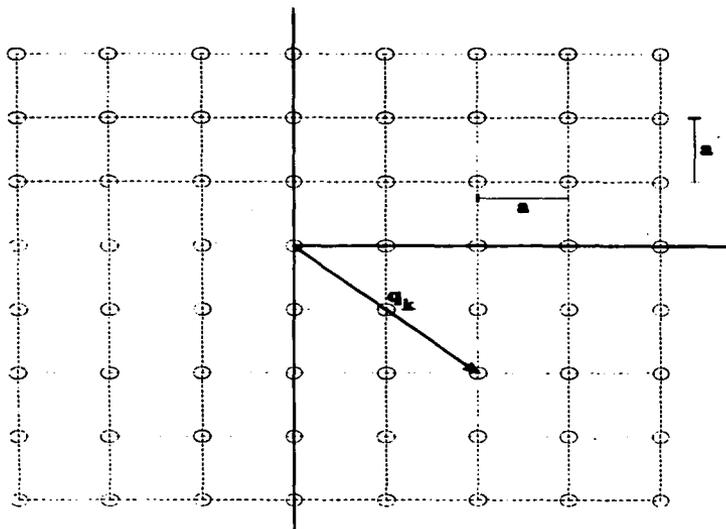


Figura 4.1: Sustrato acústico-cristalino formado por lentes colocadas en los puntos reticulares $\mathbf{q}_k = (na, ma)$ de la red, donde a es el parámetro de la red.

$$\exp\left\{-\frac{ik_0}{f}\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}\right\}\sum_{k,l}\exp\left\{-\frac{ik_0}{2f}\left\{(\mathbf{q}_k^2-\mathbf{q}_l^2)-2\mathbf{p}\cdot(\mathbf{q}_k-\mathbf{q}_l)-\mathbf{u}\cdot(\mathbf{q}_k+\mathbf{q}_l)\right\}\right\} \quad (4.18)$$

Ahora podemos calcular la función de Wigner mediante la ec. (2.1)

$$W_{gr}(\mathbf{p}, \mathbf{w}) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\} H_{gr}(\mathbf{p}, \mathbf{u}) d^2\mathbf{u}, \quad (4.19)$$

Sustituyendo la ec. (4.18) en la ec. (4.19) se sigue que la función de Wigner $W_{gr}(\mathbf{p}, \mathbf{w})$ está dada por la suma

$$\sum_{k,l}\exp\left\{\frac{ik_0}{f}\left[\frac{\mathbf{q}_l^2-\mathbf{q}_k^2}{2}+\mathbf{p}\cdot(\mathbf{q}_k-\mathbf{q}_l)\right]\right\}W_g\left(\mathbf{p}, \mathbf{w}+\frac{k_0}{f}\left(\mathbf{p}-\frac{\mathbf{q}_k+\mathbf{q}_l}{2}\right)\right). \quad (4.20)$$

Este resultado corresponde a la función de Wigner inmediatamente por detrás del plano de burbujas. Ahora debemos propagarlo una distancia Δz de acuerdo con la ec. (4.5). La función de Wigner propagada $W_{grp}(\mathbf{p}, \mathbf{w})$ está dada por la suma

$$W_{grp}(\mathbf{p}, \mathbf{w}) = \sum_{k,l}\exp\left\{\frac{ik_0}{f}\left[\frac{\mathbf{q}_l^2-\mathbf{q}_k^2}{2}+(\mathbf{p}-\frac{\Delta z}{k_0}\mathbf{w})\cdot(\mathbf{q}_k-\mathbf{q}_l)\right]\right\}\times \\ \times W_g\left(\mathbf{p}-\frac{\Delta z}{k_0}\mathbf{w}, \mathbf{w}+\frac{k_0}{f}\left(\mathbf{p}-\frac{\Delta z}{k_0}\mathbf{w}-\frac{\mathbf{q}_k+\mathbf{q}_l}{2}\right)\right) \quad (4.21)$$

Deseamos ahora aplicar este resultado al caso en que incide una onda plana. Sustituyendo su función de Wigner dada por la ec. (4.2) en la ec. (4.21) encontramos que la función de Wigner $W_{grp}(\mathbf{p}, \mathbf{w})$ a la salida del sustrato acústico está dada por la suma

$$\frac{W_{grp}(\mathbf{p}, \mathbf{w})}{4\pi^2 AA^*} = \sum_{k,l}\exp\left\{\frac{ik_0}{f}\left[\frac{\mathbf{q}_l^2-\mathbf{q}_k^2}{2}+(\mathbf{p}-\frac{\Delta z}{k_0}\mathbf{w})\cdot(\mathbf{q}_k-\mathbf{q}_l)\right]\right\}\times \\ \times \delta\left(\frac{k_0}{f}\left(\mathbf{p}-\frac{\mathbf{q}_k+\mathbf{q}_l}{2}\right)+\left(1-\frac{\Delta z}{f}\right)\mathbf{w}\right). \quad (4.22)$$

Apliquemos ahora el método que desarrollamos en la sección (4.2) para determinar, a partir de esta función de Wigner, la función g_{TP} . El núcleo queda determinado a partir de la transformada de Fourier inversa, ec. (4.8):

$$H_{g_{TP}}(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = \frac{1}{4\pi^2} \int W_{g_{TP}}(\mathbf{p}, \mathbf{w}) e^{i\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}} d^2\mathbf{w},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{H_{g_{TP}}(\mathbf{p}, \mathbf{u})}{AA^*} &= \int \sum_{l,k} \exp \left\{ \frac{ik_0}{f} \left[\frac{\mathbf{q}_l^2 - \mathbf{q}_k^2}{2} + (\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_l) \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{\Delta z}{k_0} \mathbf{w} \right) \right] \right\} \times \\ &\times \exp \{ i\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \} \delta \left(\frac{k_0}{f} \left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{q}_k + \mathbf{q}_l}{2} \right) + \left(1 - \frac{\Delta z}{f} \right) \mathbf{w} \right) d^2\mathbf{w}, \end{aligned}$$

La evaluación de esta integral se reduce, dada la función δ , al cálculo de su integrando en

$$\mathbf{w} = -\frac{k_0}{f - \Delta z} \left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{q}_k + \mathbf{q}_l}{2} \right)$$

dando como resultado

$$\begin{aligned} \frac{H_{g_{TP}}(\mathbf{p}, \mathbf{u})}{AA^*} \left(\frac{f - \Delta z}{f} \right)^2 &= \sum_{l,k} \exp \left\{ \frac{ik_0}{f} \left[\frac{\mathbf{q}_l^2 - \mathbf{q}_k^2}{2} + \mathbf{p} \cdot (\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_l) \right] \right\} \times (4.23) \\ &\times \exp \left\{ i \left[\mathbf{u} - \frac{\Delta z}{f} (\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_l) \right] \cdot \left(-\frac{k_0}{f - \Delta z} \left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{q}_k + \mathbf{q}_l}{2} \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

El siguiente paso algebraico consiste en agrupar los términos que dependen de \mathbf{q}_l y los que dependen de \mathbf{q}_k obteniendo $H_g(\mathbf{p}, \mathbf{w})/AA^* \left(\frac{f - \Delta z}{f} \right)^2$ en la forma

$$\sum_{l,k} \exp \left\{ \frac{ik_0}{2(f - \Delta z)} \left[\mathbf{q}_l^2 - 2 \left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{u}}{2} \right) \cdot \mathbf{q}_l \right] - \left[\mathbf{q}_k^2 - 2 \left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{u}}{2} \right) \cdot \mathbf{q}_k \right] - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \right\}$$

Después de completar cuadrados para los términos que dependen de \mathbf{q}_l^2 y \mathbf{q}_k^2 obtenemos:

$$\frac{H_f(\mathbf{p}, \mathbf{u})}{AA^*} \left(\frac{f - \Delta z}{f} \right)^2 = \sum_l \exp \left\{ \frac{ik_0}{2(f - \Delta z)} \left(\mathbf{q}_l - \left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{u}}{2} \right) \right)^2 \right\} \times \\ \times \sum_k \exp \left\{ \frac{-ik_0}{2(f - \Delta z)} \left(\mathbf{q}_k - \left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{u}}{2} \right) \right)^2 \right\} \quad (4.24)$$

Si definimos

$$\alpha = \frac{k_0}{(f - \Delta z)}, \quad \mathbf{P}_+ = \mathbf{p} + \frac{\mathbf{u}}{2}, \quad \mathbf{P}_- = \mathbf{p} - \frac{\mathbf{u}}{2} \quad (4.25)$$

podemos reescribir las exponenciales de la ec. (4.24) como:

$$\sum_l e^{i\alpha(\mathbf{q}_l - \mathbf{P}_-)^2} \sum_k e^{-i\alpha(\mathbf{q}_k - \mathbf{P}_+)^2}. \quad (4.26)$$

Notemos que podemos escribir la ec. (4.26) en la forma

$$\sum_l e^{i\alpha(\mathbf{q}_l - \mathbf{P}_-)^2} \sum_k e^{-i\alpha(\mathbf{q}_k - \mathbf{P}_+)^2} = \Gamma \left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{u}}{2} \right) \Gamma^* \left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{u}}{2} \right), \quad (4.27)$$

donde hemos definido:

$$\Gamma(\mathbf{s}) \equiv \sum_k \exp \left\{ -\frac{ik_0}{2(f - \Delta z)} (\mathbf{q}_k - \mathbf{s})^2 \right\}. \quad (4.28)$$

La suma debe de extenderse a todos los nodos \mathbf{q}_k de la red. Conviene escribir \mathbf{q}_k explícitamente en función de sus coordenadas $\mathbf{q}_k = a(n, m)$:

$$\Gamma(\mathbf{s}) = \sum_{n,m} \exp \left\{ -\frac{ik_0}{2(f - \Delta z)} [(an - s)^2 + (am - \sigma)^2] \right\} \\ = \sum_n \exp \left\{ -\frac{ik_0}{2(f - \Delta z)} (an - s)^2 \right\} \sum_m \exp \left\{ -\frac{ik_0}{2(f - \Delta z)} (am - \sigma)^2 \right\} \\ = \gamma \left(\frac{s}{a} \right) \gamma \left(\frac{\sigma}{a} \right), \quad (4.29)$$

donde

$$\gamma(t) = \sum_n \exp \left\{ -\frac{ik_0}{2(f - \Delta z)} a^2 (n - t)^2 \right\}. \quad (4.30)$$

Podemos escribir la ec. (4.24) en función de $\gamma(t)$ en la forma:

$$\frac{H_g(\mathbf{p}, \mathbf{u})}{AA^*} \left(\frac{f - \Delta z}{f} \right) = \gamma(t)\gamma(t)^* \gamma(t')\gamma(t')^* \quad (4.31)$$

4.5 Difracción debida a la periodicidad espacial del sustrato acústico.

Para establecer que la ec. (4.31) conduce a un patrón de difracción basta con demostrarlo con la ec. (4.30), que reescribimos como

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \sum_n \exp\{-i\mu(n-t)^2\} \\ &= \exp\{-i\mu t^2\} \sum_n \exp\{-i\mu(n^2 - 2nt)\}, \end{aligned}$$

con $\mu = \frac{k_0 a^2}{2(f - \Delta z)}$.

Debemos analizar el comportamiento de $\gamma(t)\exp\{-i\mu t^2\} \equiv \lambda(t)$ ya que $|\exp\{-i\mu t^2\}| = 1$

$$\lambda(t) \equiv \sum_n \exp\{-i\mu n^2 + 2i\mu n t\}. \quad (4.32)$$

La función $\lambda(t)$ es periódica ya que $\lambda(T) = \sum_n \exp\{-i\mu n^2 + 2i\mu n(\pi/\mu)\} = \sum_n \exp\{-i\mu n^2 + 2i\pi n\} = \sum_n \exp\{-i\mu n^2\} = \lambda(0)$, con período $T = \pi/\mu$. Esto significa que $\lambda(t) = \lambda(t + mT)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, hecho que establece un sistema de franjas. Si μ es un múltiplo entero de 2π , es decir, $\mu = 2\pi n$, podemos calcular explícitamente el valor de la suma

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \sum_n \exp\{-i\mu n^2\} \exp\{2i\mu n t\} \\ &= \sum_n \exp\{2i\mu n t\} \\ &= \sum_{-M}^M \exp\{2i\mu n t\}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

La forma de calcular la suma de la ec. (4.33) es bastante común, basta con hacer

$$S = \sum_{-M}^M r^n$$

$$Sr = \sum_{-M}^M r^{n+1}$$

$$Sr - S = r^{M+1} - r^{-M},$$

y finalmente

$$S = \frac{r^{M+1} - r^{-M}}{r - 1}.$$

Si tomamos $r = \exp\{2i\mu t\}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{\exp\{2i\mu t(N+1)\} - \exp\{2i\mu t(-N)\}}{\exp\{2i\mu t\} - 1} \\ &= \frac{\text{sen}[\mu t(2N+1)]}{\text{sen}[\mu t]} \\ &= \frac{\text{sen}\left[\frac{k_0 a^2 t}{2(j-\Delta z)}(2N+1)\right]}{\text{sen}\left[\frac{k_0 a^2 t}{2(j-\Delta z)}\right]}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Con este resultado tomemos el $\lim_{t \rightarrow 0}$ de la ec. (4.34), lo que nos proporcionará el orden de los picos del patrón de difracción. Si hacemos $\mu_1 = \mu(2N+1)$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen}[\mu t(2N+1)]}{\text{sen}[\mu t]} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen}[\mu_1 t]}{\text{sen}[\mu t]} \\ &= \left(\frac{\text{sen}[\mu_1 t]}{[\mu_1]} \right) \left(\frac{\mu_1 t}{\mu t} \right) \left(\frac{\mu t}{\text{sen}[\mu t]} \right) \\ &= \frac{\mu_1 t}{\mu t} \\ &= (2N+1). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Debido a que las sumas son en dos dimensiones el resultado de éste límite es $(2N+1)^2$, orden de los picos del patrón de difracción.

4.6 Sustrato acústico "continuo"

Cuando la distancia a del sustrato cristalino es pequeña respecto de la longitud de onda de la onda incidente podemos calcular las sumas de la ec. (4.31), expresadas en función de las ecuaciones (4.27) y (4.28), mediante integrales. Como la suma se extiende a todos los nodos de la red bidimensional, conviene colocar el origen del plano xy en el centro de la red. La posición \mathbf{q}_k de un nodo puede escribirse como $\mathbf{q} = (ak_x, ak_y)$, donde k_x y k_y son números enteros que varían entre $-N/2$ y $N/2$ de manera que la capa bidimensional posee $(N+1)^2$ nodos. Como los nodos sucesivos tienen $\Delta k_x = 1$ y $\Delta k_y = 1$, a cada nodo le podemos asociar un cuadrado $\Delta k_x \Delta k_y = 1$ lo que nos permite escribir

$$\sum_k e^{-i\frac{a}{2}(q_k - P_+)^2} = \sum_k e^{-i\frac{a}{2}(q_k - P_+)^2} \Delta k_x \Delta k_y$$

como $q_{k_x} = ak_x$ entonces $\Delta q_{k_x} = a\Delta k_x$ y $\Delta q_{k_y} = a\Delta k_y$, podemos aproximar las sumas mediante integrales:

$$\sum_k e^{-i\frac{a}{2}(q_k - P_+)^2} \frac{\Delta q_x \Delta q_y}{a^2} \approx \frac{1}{a} \int_{-\frac{N}{2}a}^{\frac{N}{2}a} e^{-i\frac{a}{2}(q_x - P_+)^2} dq_x \frac{1}{a} \int_{-\frac{N}{2}a}^{\frac{N}{2}a} e^{-i\frac{a}{2}(q_y - P_+)^2} dq_y, \quad (4.36)$$

esta ecuación establece la manera de pasar de las sumas de la ec. (4.24) a integrales con límites infinitos y con límites finitos como el la ec. (4.42) de la sección anterior.

La otra sumatoria es compleja conjugada de la anterior y podemos poner

$$\sum_l e^{i\frac{a}{2}(q_l - P_-)^2} \frac{\Delta q_x \Delta q_y}{a^2} \approx \frac{1}{a} \int_{-\frac{N}{2}a}^{\frac{N}{2}a} e^{i\frac{a}{2}(q_x - P_-)^2} dq_x \frac{1}{a} \int_{-\frac{N}{2}a}^{\frac{N}{2}a} e^{i\frac{a}{2}(q_y - P_-)^2} dq_y. \quad (4.37)$$

Las integrales (4.36) están conectadas con las llamadas integrales de Fresnel, que aparecen comunmente en problemas de Difracción[10]. Si se quisiera hacer el tratamiento para un cristal de dimensiones infinitas basta con hacer $N \rightarrow \infty$ en los límites de las integrales. Definimos las integrales de Fresnel por

$$C(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \quad (4.38)$$

$$S(s) = \int_0^s \operatorname{sen} \left(\frac{\pi t^2}{2} \right) dt. \quad (4.39)$$

que conviene reunir en una sola:

$$B(s) = \int_0^s e^{i\frac{\pi t^2}{2}} dt \equiv C(s) + iS(s). \quad (4.40)$$

Identificando los argumentos de las exponenciales en las ecuaciones (4.36) y (4.40)

$$\alpha (q_x - P_{-x})^2 = \pi t^2, \quad (4.41)$$

Esto nos permite reescribir la integral con límites finitos como

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \int_{-N/2}^{N/2} e^{i\frac{\pi}{2}(q_x - P_{-x})^2} dq_x &= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}(-N/2 - P_{-x})}}^{\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}(N/2 - P_{-x})}} e^{i\frac{\pi t^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} B(s) \Big|_{\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}(-N/2 - P_{-x})}}^{\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}(N/2 - P_{-x})}} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Cornu desarrolló un método geométrico, elegante, para evaluar el segundo miembro de la ec.(4.42). Para esto graficó la función $B(s)$ utilizando valores negativos y positivos de su argumento obteniendo la *Espiral de Cornu* que reproducimos en la fig.(4.2) Dado que el argumento s de B coincide con la longitud del arco de la espiral, el problema se reduce a medir la variable $s_1 = \sqrt{\alpha/\pi}(Na/2 - P_{-x})$ a lo largo de esa curva lo que nos permite ubicar el punto $B(s_1)$. Repitiendo el procedimiento con $s_2 = \sqrt{\alpha/\pi}(-Na/2 - P_{-x})$ obtenemos el punto $B(s_2)$. De acuerdo con la ec. (4.42) el valor del segundo miembro es el número complejo $B(1,2) = B(s_1) - B(s_2)$ multiplicado por $(1/a) \sqrt{\pi/\alpha}$. Las otras integrales se evalúan de la misma manera.

P_{-x} puede ser expresado en función de p y u de acuerdo con su definición en la ec. (4.25). De acuerdo con las ecs. (4.26), (4.36) y (4.37) el resultado completo involucra el producto de cuatro expresiones del tipo de la ec. (4.42). Conviene introducir la semi-longitud de la muestra $l = Na/2$ con el objeto de reducir el tamaño de las ecuaciones:

$$B_{1,2} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} B(s) \Big|_{\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}(-l - p_x + \frac{u_x}{2})}}^{\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}(l - p_x + \frac{u_x}{2})}}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_{3,4} &= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \mathcal{B}(s) \left| \begin{array}{l} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}(l-p_y + \frac{u_y}{2}) \\ \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}(-l-p_y + \frac{u_y}{2}) \end{array} \right. \\
 \mathcal{B}_{5,6} &= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \mathcal{B}^*(s) \left| \begin{array}{l} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}(l-p_x - \frac{u_x}{2}) \\ \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}(-l-p_x - \frac{u_x}{2}) \end{array} \right. \\
 \mathcal{B}_{7,8} &= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \mathcal{B}^*(s) \left| \begin{array}{l} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}(l-p_y - \frac{u_y}{2}) \\ \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}(-l-p_y - \frac{u_y}{2}) \end{array} \right.
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

La evaluación de las siguientes dos ecuaciones (4.43) corresponde a medir a lo largo de la Espiral de Cornu de los cuadrantes *II* y *IV*.

Recordemos que en la sección anterior las integrales se evaluaron en ∞ y que cada una de ellas es complejo conjugado de la otra, en este caso la situación es distinta debido a los límites finitos de las integrales, la función $H_g(\mathbf{p}, \mathbf{u})$ está ahora dada por

$$H_g(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = AA^* \mathcal{B}_{1,2} \mathcal{B}_{3,4} \mathcal{B}_{5,6} \mathcal{B}_{7,8}. \tag{4.44}$$

Nuestro objetivo final es determinar, a partir del núcleo $H_g(\mathbf{p}, \mathbf{u})$, dado por la ec. (4.44, la propia función $g(\mathbf{u})$. De acuerdo con nuestros resultados de la sección (4.2), ec. (4.10, tal función queda determinada por el valor del núcleo $H_g(\mathbf{p}, \mathbf{u})$ calculado en $\mathbf{p} = \mathbf{u}/2$ dividido entre la raíz cuadrada de ese núcleo calculado en $\mathbf{p} = \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

$$H_g\left(\frac{\mathbf{u}}{2}, \mathbf{u}\right) = AA^* \mathcal{B}_{1,2}\left(\frac{u_x}{2}, u_x\right) \mathcal{B}_{3,4}\left(\frac{u_y}{2}, u_y\right) \mathcal{B}_{5,6}\left(\frac{u_x}{2}, u_x\right) \mathcal{B}_{7,8}\left(\frac{u_y}{2}, u_y\right)$$

donde las $\mathcal{B}_{i,j}$ que representan cada una de las expresiones para \mathcal{B} tienen la forma

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_{1,2} &= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \mathcal{B}(s) \left| \begin{array}{l} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}(l) \\ \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}(-l) \end{array} \right. \\
 \mathcal{B}_{3,4} &= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \mathcal{B}(s) \left| \begin{array}{l} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}(l) \\ \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}(-l) \end{array} \right. \\
 \mathcal{B}_{5,6} &= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \mathcal{B}(s) \left| \begin{array}{l} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}(l-u_x) \\ \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}(-l-u_x) \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

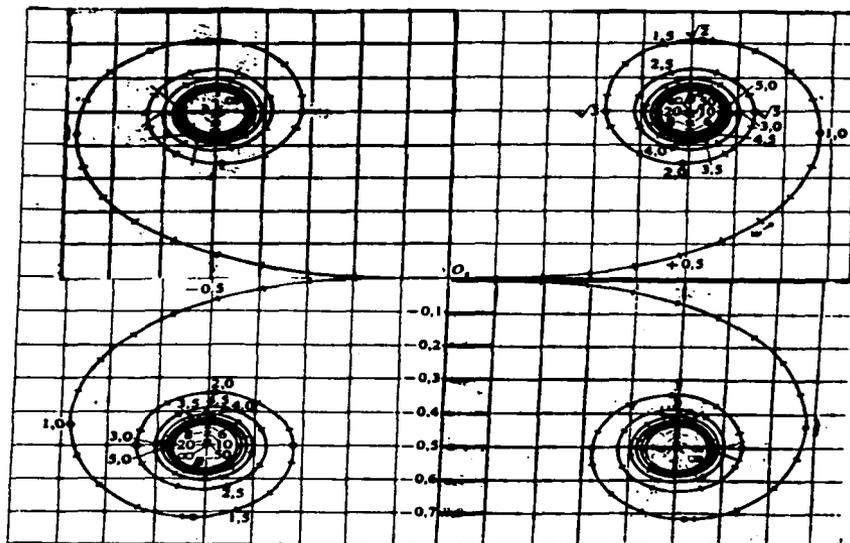


Figura 4.2: La espiral de Cornu representa la gráfica $B(s) = C(s) + iS(s)$, donde la variable s toma valores desde $-\infty$ a $+\infty$. La localización de los límites $-l - p_x + u_x/2$, $+l - p_x + u_x/2$ y $-l - p_y + u_y/2$, $+l - p_y + u_y/2$ a lo largo de la espiral en los cuadrantes *I* y *III* produce los puntos 1, 2 y 3, 4. Los números complejos $B_{1,2}$ y $B_{3,4}$ que unen los puntos mencionados son los valores de las primeras dos ecuaciones (4.43). Para evaluar las siguientes dos ecuaciones (4.43) se procede de la misma forma pero en la Espiral de Cornu de los cuadrantes *II* y *IV*. La localización de las $B(s)$ permite calcular el núcleo de la ec. (4.44)

$$\mathcal{B}_{7,8} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \mathcal{B}(s) \left| \begin{array}{l} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}(l-u_x) \\ \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}(-l-u_y) \end{array} \right.$$

El núcleo $H_g(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ está dado por

$$H_g(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = AA^* \mathcal{B}_{1,2}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \mathcal{B}_{3,4}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \mathcal{B}_{5,6}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \mathcal{B}_{7,8}(\mathbf{0}, \mathbf{0}),$$

donde cada una de las $\mathcal{B}_{i,j}$ tiene la misma forma dada por:

$$\mathcal{B}_{i,j} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \mathcal{B}(s) \left| \begin{array}{l} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}(l) \\ \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}(-l) \end{array} \right.$$

Finalmente la sustitución de los núcleos $H_g(\mathbf{u}/2, \mathbf{u})$ y $H_g(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ en la ec. (4.10) nos proporciona $g(\mathbf{u})$ cuya expresión es

$$g(\mathbf{u}) = \frac{\sqrt{AA^*}}{a^2} e^{i\delta} \left(\frac{\pi}{\alpha} \right) \mathcal{B}(s) \left| \begin{array}{l} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}(l-u_x) \\ \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}(-l-u_x) \end{array} \right. \mathcal{B}(s) \left| \begin{array}{l} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}(l-u_y) \\ \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}(-l-u_y) \end{array} \right. \quad (4.45)$$

Para el caso de muestras finitas, la función $g(\mathbf{u})$ está representada como producto de las integrales de Fresnel, y cuyo módulo oscila alternativamente entre máximos y mínimos, dando lugar a franjas claras y oscuras, hecho que normalmente se describe como un efecto de difracción. Esta oscilación debe analizarse para un valor de l fijo, como función del vector \mathbf{u} . Si l toma valores del orden de la unidad, es decir, $l \approx 1$, tales efectos son muy notorios, y van disminuyendo en la medida en que las dimensiones $2l$ de la muestra van creciendo, hasta desaparecer completamente en el caso de un "sustrato acústico" de dimensiones infinitas.

Capítulo 5

Tratamiento para rayos no paraxiales

La solución propuesta en el capítulo anterior para una esfera y para un arreglo bidimensional de esferas se hizo suponiendo que cada una de las esferas se comporta como una lente de distancia focal f y que el tratamiento es válido sólo en el caso de rayos paraxiales, es decir, aquellos que inciden cerca del eje óptico.

Entendemos la distancia focal de una lente delgada como la distancia medida entre el plano donde se encuentra la lente y el punto donde convergen los rayos después de pasar por la lente, a condición de que este conjunto de rayos sean paralelos entre sí. En el marco de la óptica geométrica esta distancia resulta independiente del ángulo que forma este haz de rayos con el eje óptico de la lente. En realidad es necesario imponer la condición de que ese ángulo sea pequeño, limitando la definición de la distancia focal y la discusión del problema de formación de imágenes a los llamados rayos paraxiales que no sólo forman ángulos pequeños con el eje óptico sino que también se encuentran cerca de ese eje.

Para analizar el problema de los rayos no paraxiales proponemos una generalización del concepto de distancia focal que utilizaremos con las lentes acústicas esféricas. Para un rayo incidente dado, el eje óptico es aquella recta paralela a ese rayo que pasa por el centro de la misma de la esfera. Definimos la distancia focal para un rayo incidente como la distancia entre el centro de la esfera y el punto donde ese rayo corta el eje óptico. El plano perpendicular al eje óptico que pasa por el centro de la esfera viene a jugar un papel parecido al plano de una lente delgada, motivo por el que recibirá

el nombre de "plano de la esfera." Una vez adoptado un eje óptico, un rayo paralelo a ese eje puede no incidir en la esfera. Para tal rayo hablaremos de una distancia focal infinita. Si por el contrario tal rayo sí incide en la esfera, en general sufrirá dos refracciones, una para entrar y otra para salir. Puede verse que la distancia focal que hemos definido sólo depende de la distancia entre el rayo incidente y el eje óptico. En lo que sigue consideraremos positiva esa distancia si el punto de convergencia está detrás, respecto del sentido de avance del rayo, del plano de la esfera.

Un haz de rayos paralelos cuya distancia r al eje óptico es la misma tienen una misma distancia focal $f(r)$. Este conjunto de rayos incidentes constituye la superficie de un cilindro de radio r , cuyo centro coincide con el eje óptico de la esfera. Si ahora consideramos el conjunto de rayos paralelos que se encuentran entre dos cilindros de radios r y $r + \Delta r$, y Δr es pequeña, entonces todos esos rayos convergen en un mismo punto, a una distancia $f(r)$. Quizás convenga, para mayor claridad, describir este "tubo" de rayos mediante su intersección con el plano de la esfera, que no es sino la zona anular comprendida entre r y $r + \Delta r$.

Consideremos un rayo acústico AB , fig. (5.1), que incide en la esfera paralelamente al eje óptico, que sufrirá dos refracciones, una al entrar en B y otra al salir por C de la esfera, para cruzar finalmente el eje óptico en el punto focal D . La posición a lo largo del eje óptico del punto D depende de la posición del punto B , donde incide el rayo, que podemos ubicar ya sea mediante el ángulo θ_i o mediante la distancia al eje r_i . De esta manera podemos escribir $D = D(r_i)$. Para rayos paraxiales $r_i \approx 0$ y $D(r_i)$ debe ser independiente de r_i . Si llamamos θ_r el ángulo de refracción, de acuerdo con la fig. (5.1), la distancia focal $D(r_i)$ está dada por

$$D(r_i) = R [\cos(2\theta_r - \theta_i(r_i)) + \operatorname{sen}(2\theta_r - \theta_i(r_i)) \cot(2\theta_i(r_i) - 2\theta_r)]. \quad (5.1)$$

donde R es el radio de la esfera, θ_r , el ángulo de refracción, y θ_i , el ángulo de incidencia satisfacen la ley de Snell:

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_i}{\operatorname{sen} \theta_r} = \frac{c_i}{c_r} = \frac{\eta_r}{\eta_i}, \quad (5.2)$$

donde c_i y c_r son las velocidades del sonido fuera y dentro de la esfera, respectivamente, mientras que η_i y η_r los correspondientes índices de refracción.

Las ecuaciones (5.1) y (5.2) determinan para cada θ_i una distancia focal $D(\theta_i(r_i))$ que nos permite interpretar una esfera como una superposición de

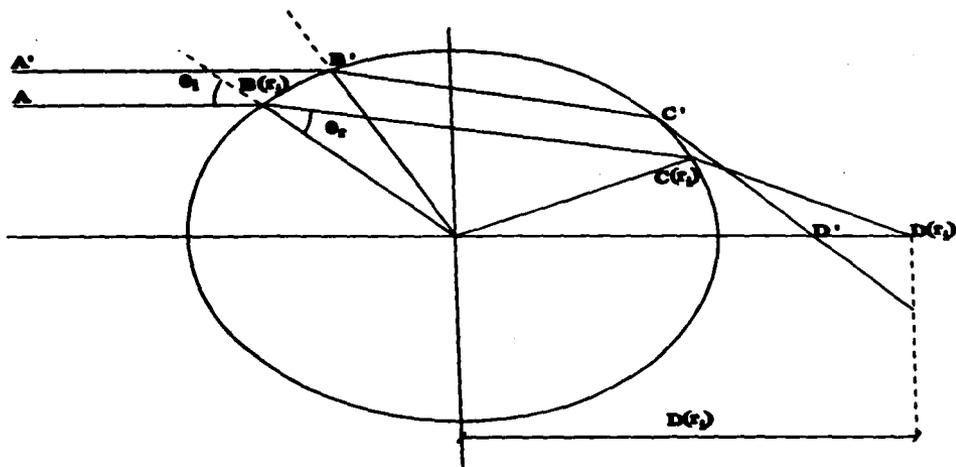


Figura 5.1: Un rayo acústico AB que incide en una esfera de radio R , paralelamente al eje óptico, sufrirá dos refracciones, una al entrar en $B(r_i)$ y otra al salir por $C(r_i)$ de la esfera, para cruzar finalmente el eje óptico en el punto focal $D(r_i)$. Para el cálculo numérico de $D(r_i)$ se supuso que $R = 1$ y $\text{sen } \theta_i / \text{sen } \theta_r = 4/3$, es decir, que la velocidad del sonido en el interior de la esfera es 75% de su velocidad en el exterior.

θ_i	$\text{sen } \theta_i$	θ_r	$\text{sen } \theta_r$	$D(\theta_i)$
0.157	0.156	0.117	0.120	1.983
0.314	0.309	0.233	0.232	1.933
0.471	0.453	0.347	0.348	1.852
0.628	0.587	0.456	0.448	1.744
0.785	0.707	0.558	0.530	1.616
0.942	0.809	0.651	0.686	1.474
1.099	0.891	0.731	0.668	1.328
1.256	0.951	0.794	0.713	1.190
1.413	0.987	0.834	0.740	1.077
1.571	1.000	0.848	0.750	1.007

Tabla 5.1: Valores calculados a partir de las ecuaciones (5.1) y (5.2) para el ángulo de refracción θ_r y la distancia focal $D(\theta_i)$ para diferentes valores del ángulo de incidencia θ_i y un índice de refracción de $4/3$

anillos de diferentes radios. El que hemos analizado en la fig. (5.1) corresponde al anillo cuyo ángulo de incidencia en la esfera se encuentra entre θ_i y $\theta_i + \Delta\theta_i$. Tal anillo se comporta como una lente de distancia focal $D(\theta_i; r_i)$ dada por la ec. (5.1).

Como el valor de la distancia focal $D(r_i)$ depende del ángulo de incidencia, mediante un programa de computadora dividimos el intervalo $[0, \pi/2]$, en n subintervalos iguales. Para un índice de refracción $c_i/c_r = 4/3$ y cada uno de estos subintervalos, calculamos el ángulo de refracción y la distancia focal $D(\theta_i)$. En la tabla 5.1 aparecen los valores numéricos de $D(\theta_i; r_i)$ para una división en 10 subintervalos y una esfera de radio $R = 1$. La distancia focal varía, como puede observarse, entre 1.000 y 1.98. Este último valor corresponde a pequeños ángulos de incidencia y no es sino la distancia focal de una esfera vista como lente gruesa.

Las variables r_i y $D(r_i)$ están conectadas mediante la ec. (5.1). Dado que $D(r)$ es la distancia focal en función del radio r , llamemos r_D al valor de r_i que corresponda, de acuerdo con la ec. (5.1), con $D(r_i) = D$. A cada distancia focal D le corresponde un ángulo de incidencia θ_f y un radio r_D proyectado en el plano de la esfera.

El análisis en función de rayos termina aquí. En el caso de una lente hay una distancia focal única que nos permite transformar la función de

Wigner de acuerdo con el paso por una lente, seguida de la transformación de Wigner que va desde la lente hasta el punto donde se desea calcular el campo acústico, es decir, propagarla una cierta distancia, proceso que es el mismo que el descrito en el capítulo anterior. Si g es una onda acústica que incide sobre una lente y g_l la que sale de la misma mientras que W_g y W_{g_l} representan las correspondientes transformadas de Wigner, entonces éstas últimas están conectadas entre sí, de acuerdo con la ec. (2.22):

$$W_{g_l}(\mathbf{x}, \mathbf{K}) = W_g\left(\mathbf{x}, \mathbf{K} + \frac{k_0}{D}\mathbf{x}\right) \quad (5.3)$$

Si ahora nos interesamos en el campo acústico de la onda transmitida a una distancia Δz por detrás de la lente debemos "propagar tal resultado". La función de Wigner propagada está dada por la ecuación

$$W_{g_{lp}}(\mathbf{x}, \mathbf{K}) = W_{g_l}\left(\mathbf{x} - \frac{z}{k_0}\mathbf{K}, \mathbf{K}\right) \quad (5.4)$$

Sustituyendo la ec. (2.22) en la ec. (5.4) obtenemos

$$W_{g_{lp}}(\mathbf{x}, \mathbf{K}) = W_g\left(\mathbf{x} - \mathbf{K}\frac{\Delta z}{k_0}, \mathbf{K}\left(1 - \frac{\Delta z}{D}\right) + \frac{k_0}{D}\mathbf{x}\right) \quad (5.5)$$

Este resultado depende de dos aproximaciones. La expresión para la ec. (5.4) requiere de "rayos" poco inclinados respecto del eje, de acuerdo con la ec. (3.7), es decir, rayos paraxiales respecto de la dirección. La parte correspondiente al paso por una lente depende de la ec. (2.14), misma que requiere que el "rayo" esté cerca del eje óptico de la lente.

Queremos mejorar la aproximación obtenida mediante la ec. (5.5). Al considerar una onda plana que se propaga inicialmente a lo largo del eje Z , eje óptico del sistema, satisfacemos la condición de paraxialidad requerida por la ec. (3.7). Supongamos que tal onda es efectivamente plana dentro de un cilindro de radio R_0 y que incide sobre una esfera de radio $R < R_0$, colocada sobre el eje de ese cilindro. Aquella parte de la onda que se encuentra en la sección anular entre R y R_0 , cuya área es $\pi(R_0^2 - R^2)$, no incide en la esfera. Por el contrario, aquella parte de la onda que se encuentra dentro del cilindro de radio R tiene una distancia focal dada por la ecs. (5.1) y (5.2). Es imprescindible notar que, al descomponer la onda plana incidente en anillos, de acuerdo con los rayos correspondientes, que los caminos ópticos recorridos no coinciden, habiendo perdido la coherencia entre ellos, sin embargo, este

resultado no es consecuencia de la aproximación, sino del paso de la onda por una esfera. Por lo anterior proponemos la siguiente aproximación al problema de una esfera:

$$W_{s_{sp}}(\mathbf{x}, \mathbf{K}) = \int_0^{R_0} \left[W_s \left(\mathbf{x} - \mathbf{K} \frac{\Delta z}{k_0}, \mathbf{K} \left(1 - \frac{\Delta z}{D(r)} \right) + \frac{k_0}{D(r)} \mathbf{x} \right) \right] \times \left[\frac{2\pi r dr}{\pi R_0^2} \right] \quad (5.6)$$

donde $D(r)$ es la función cuya definición implícita está dada por las ecs. (5.1) y (5.2). Como puede verse, la aproximación propuesta no es sino una combinación lineal de funciones de Wigner cuyos factores de peso son proporcionales a las secciones eficaces $2\pi r dr$ correspondiente al inverso de la distancia focal $1/f(r)$.

A un nivel práctico quizás convenga trabajar la ec. (5.6) dividiendo la integral en dos partes, una sobre $r < R$ y otra sobre $R < r < R_0$. Esta última es una fracción de onda plana, mientras que la primera podría sustituirse por una función de Wigner dada por la ec. (5.5) con una distancia focal promedio $\langle D \rangle$:

$$W_{s_{sp}}(\mathbf{x}, \mathbf{K}) = \alpha \left[W_s \left(\mathbf{x} - \mathbf{K} \frac{\Delta z}{k_0}, \mathbf{K} \left(1 - \frac{\Delta z}{\langle D \rangle} \right) + \frac{k_0}{\langle D \rangle} \mathbf{x} \right) \right] + \beta \left[W_s \left(\mathbf{x} - \mathbf{K} \frac{\Delta z}{k_0}, \mathbf{K} \right) \right] \quad (5.7)$$

en donde α y β son factores de peso.

Capítulo 6

Conclusiones y perspectivas

A lo largo del presente trabajo hemos desarrollado un método utilizando las funciones del espacio fase con el cual nos es posible tratar las funciones de transferencia de diversos sistemas ópticos y acústicos, o de manera general para el análisis de la propagación de ondas. Inicialmente el método nos permitió analizar algunas componentes comunes de los sistemas ópticos desde una nueva perspectiva que tiene como fondo un tratamiento matemático matricial, permitiendo sustituir un problema de convolución por el de multiplicación de matrices de dos por dos. Dicho procedimiento involucra de manera general los siguientes pasos:

1. Se debe de conocer la función de transferencia de la señal de entrada al sistema.
2. Los diferentes procesos que sufre la señal corresponden a los efectos de las lentes, las rejillas, las aberturas, los desplazamientos y las absorciones; cada una de las cuales actúa sobre los argumentos de las funciones de Ambigüedad o Wigner.
3. El proceso inverso permite tomar la matriz característica del sistema a la salida del mismo y reconstruir la señal utilizando el teorema de Papoulis.

Extendimos el método de las funciones de espacio fase a fenómenos acústicos, lo que nos permitió encontrar el propagador de sonido que coincide con el propagador para señales de luz y con una representación matricial

idéntica. Se demostró que el método de las funciones de espacio fase es aplicable incluso, a muestras con "motivos múltiples" como el sustrato acústico que propusimos, donde el material está compuesto de lentes líquidas colocadas en un arreglo periódico bidimensional y sumergidas en otro fluido. El arreglo es propuesto como una analogía con un cristal donde se puede conocer el patrón de difracción al incidir sobre él rayos X. La razón de limitar nuestro trabajo al caso de los líquidos es que en éstos sólo hay ondas longitudinales. En los sólidos hay además ondas transversales y ambos conjuntos deben ser tomados en cuenta al imponer las condiciones a la frontera. Este hecho introduce, al menos aparentemente, serias dificultades que no tratamos en el presente trabajo. Con el acercamiento cristalino para el sustrato acústico pudimos obtener los siguientes resultados importantes:

1. El modelamiento de una capa de material mediante un enfoque cristalino nos permitió encontrar la función de transferencia de dicha capa, punto importante para poder utilizar el método de las funciones de espacio fase.
2. Con el mismo enfoque cristalino demostramos la tradicional periodicidad para un patrón de difracción, debido a la periodicidad espacial del sustrato.
3. En el caso de un cristal cuyo parámetro de red es pequeño comparado con la longitud de onda utilizada pudimos aproximar las sumas mediante integrales, hecho que nos llevó a utilizar la espiral de Cornu, siguiendo el análisis de difracción a la manera de Fresnel.

Finalmente, pensando en la facilidad que resulta el proponer esferas (burbujas) en lugar de lentes líquidas, propusimos un método para estudiar una de ellas visualizándola como una superposición de lentes. Tal superposición está basada en un estudio tipo óptica geométrica para rayos acústicos. A partir del la funciones de espacio fase fue posible conocer la intensidad acústica a la salida de la esfera, vista como la suma de las intensidades individuales para cada una de las lentes y dependientes de la distancia focal.

Las líneas de investigación que puede seguir el presente trabajo están divididas tanto en aspectos experimentales como en teóricos. Bajo un esquema experimental se puede plantear el estudio de materiales con simetría periódica espacial, en tales casos, a la luz de las velocidades del sonido de los diferentes

materiales involucrados, deben analizarse los patrones de difracción experimentales. Este estudio nos permitirá conocer la estructura del sustrato de la misma manera en que se determina la estructura cristalina a partir de los patrones de difracción de rayos X.

Siguiendo un esquema teórico proponemos seguir nuestro procedimiento pero aplicado a sustratos sin simetría periódica espacial, como son los llamados materiales celulares, entre los que cabe mencionar las espumas y las emulsiones. Es posible darle un enfoque experimental a este último aspecto, ya se trate de espumas o de emulsiones es posible utilizar su patrón de difracción, el cuál nos permitirá medir los parámetros estadísticos de las distribuciones de las dimensiones características de tales agregados celulares.

Bibliografía

- [1] von Neumann J.
Gött. Nachr. p. 273,1927.
- [2] Wigner E.P
Phys. Rev. **40**, 749 (1932).
- [3] Hudson R. L.
Rep. on Math. Phys. **6**, 249 (1974).
- [4] Soto F. and Claverie P.
J. Math. Phys. **24**, 97 (1983).
- [5] Soto F. and Claverie P.
J. Math. Phys. **24**, 1104 (1983).
- [6] Gonzalez-Jimenez E.
Las funciones de distribución cuánticas en el espacio de fases
Tesis de Licenciatura, ECFM, UAP (1985).
- [7] Cohen L.
J. Math. Phys. **7**, 781 (1966).
- [8] Castaño V. M., Vazquez-Polo G. and Gutiérrez-Castrejon R.
Phase Space Methods in Image Formation Theory
Scanning Microscopy Supplement **6**, 415-422 (1992).
- [9] Gutiérrez-Castrejon R.
Diseño y análisis de sistemas ópticos mediante funciones intermedias
Tesis de Licenciatura Facultad de Ciencias, UNAM (1990).

- [10] Hecht E. and Zajac A.
Óptica
Addison-Wesley Iberoamericana (1977).
- [11] Lipson S. G. and Lipson H.
Optical Physics
Cambridge University Press (1981).
- [12] Cowley J. M.
Diffraction Physics
North-Holland Publishing Company (1975).
- [13] Papoulis A.
Ambiguity Function in Fourier Optics
J. Opt. Soc. Am. **64**, 779 (1974).
- [14] Papoulis A.
Signal Analysis
McGraw-Hill, New York(1977).
- [15] Papoulis A.
Systems and Transforms with Applications in Optics
McGraw-Hill, (1968).
- [16] Landau L. D. and Lifshitz E. M.
Mecánica de Fluidos Vol. 6
Reverté (1986).
- [17] Castaño V. M. and Gomez A.
A phase space approach to X-Ray optics
Journal of X-Ray Science and Technology, **4**, 67-76 (1993).
- [18] Zvérev V. A.
Radiooptics
Mir Moscow (1975).
- [19] Goodman J. W.
Introduction to Fourier Optics
McGraw-Hill, (1968).