

63  
24.



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

**ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES  
CAMPUS ARAGON**

**LOS FENOMENOS CRITICOS BAJO LA  
OPTICA DE LA PERCOLACION**

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
**INGENIERO EN COMPUTACION**  
**P R E S E N T A**  
**EDITH SANCHEZ BERMEO**

ASESOR: MAT LUIS RAMIREZ FLORES

MEXICO

1997



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



***Agradecimientos***



**A mis dos madres:**

*La primera, mi madre biológica: porque me dió el ser, el lugar, el motivo para seguir, en sí: todo lo que me rodea, lo que tengo y lo que soy. Por ella me he esforzado en todo lo que hago, para retribuir en una pequeña escala todo lo que ha invertido en mí en todos los sentidos: estoy consciente de que nunca llegaré a pagarle ni la centésima parte de lo que debiera. ¿Con qué podría pagarle mi vida?*

*La segunda: por haberme cuidado todo este tiempo, por estar siempre unidas y a pesar de todo y de todo seguir ahí junto a mí, compartiendo su vida conmigo; haciendo día con día que me sienta completa, que me sienta feliz al ser amigas y sobre todo: hermanas.*

**A mis hermanos y mi cuñado favorito:**

*Por haberme dado su apoyo y los ánimos para seguir creciendo, y por haber funcionado como padres cada uno de ellos, cuando los necesité como tales.*

**A mis sobrinos aliados:**

*Porque nunca les importó si estaba de buenas, si estaba de malas; me siguen queriendo igual..., y yo a ellos.*

**A mis amigos:**

*Porque cada uno de ellos tiene la palabra correcta para hacerme sentir bien, en confianza y feliz, por decirme: ¡Maldita! ¿qué me trajiste hoy eh?, ¡Cyeme no!, ¡Qué onda comadre!, ¡Ay José!, ¡¿Qué hay de cenar?!, ¡Mugre!, ¡Ay mamá!, etc., y cada una de estas frases tuvieron su efecto preciso y cada uno de ellos me dejó algo único y mío; algo nuevo y diferente, pero que en todo el mundo se conoce como "amistad".*

**A la familia González,**

*Por aguantarme tanto tiempo, por haberme atendido mejor de lo que merezco, por preocuparse por mí y considerarme como de la familia a pesar de ser un perfecto extraño.*

*y en especial a Jess:*

*Por su compañía, su risa, su amistad, el estar presente en los peores y en los mejores momentos de mi vida universitaria; porque me enseñó a creer, a pensar y a ver las cosas, de manera diferente y a mejorar un poco mi carácter, a disfrutar de todas las pequeñas y grandes cosas, por todo lo indescribible..., porque: "siempre habrá más."*

**A mis profesores y en especial a Luis:**

*Porque sin su ayuda esto no hubiera alcanzado ni la décima parte de lo que es ahora, por haberme dado la mano cuando nadie más apareció, por ser mi amigo en todos los sentidos de lo que ello implica.*

**A mis amigos del CENACE:**  
Beto, Lalo, Salomón, Gabriel, Erith, Pablin, José Luis, Víctor, Fernando, Luis, Miguel Ángel, Sr. Rulo, Nan, Vero, Sr. Felipe, Rodolfo, Héctor, Sergius, Enrico, bueno: **TODOS.**

*Por brindarme su apoyo, por haber tenido siempre una sonrisa para mí, haciendo que la estancia en el trabajo fuese amena y porque nunca me dejaron sola, alguno siempre estaba por ahí.*

*En cualquiera de mis múltiples eventualidades, alguno de ellos, tenía una u otra solución.*



**Los Fenómenos Críticos**  
*bajo la óptica de*  
**la Percolación**



# Indice

Introducción	1
Marco Teórico	1
<b>CAPÍTULO 1. CONCEPTOS Y AUXILIARES BÁSICOS</b>	
1.1. Introducción	8
1.2. Conceptos	10
1.3. Dimensiones Fractales	20
1.3.1. Subsistemas Fractales	25
1.4. Formación de Fractales y Multifractales	26
1.5. Índices Críticos	29
1.6. Propiedades de las Dimensiones Fractales	34
1.7. Algunas Aplicaciones	40
1.7.1. Epidemias y Fuegos Forestales	40
1.7.2. Gelación Cinética	42
1.7.3. Invasión de la Percolación	43
1.7.4. Percolación Dirigida	45
1.7.5. El Árbol de Cayley (Red de Bethe)	47
1.7.6. Solución al Problema de los Nudos de la Red de Beth	51
1.7.6.1. Examinando resultados	54
<b>CAPÍTULO 2. GENERADORES DE NÚMEROS ALEATORIOS PARA ORDENADOR</b> <i>(Métodos de Numeración Aleatoria)</i>	
2.1. Introducción	56
2.2. Aspectos Generales para un Generador de Números Aleatorios	58
2.2.1. Selección de la Semilla de Inicio	58
2.3. Números pseudoaleatorios	60
2.3.1. Montecarlo: Un Método aunque Antiguo, aún Popular	60
2.3.2. Algoritmos para Numeración Aleatoria	61
2.3.3. Método del Centro de Cuadrado	62

2.4. Generadores Congruentes Lineales	64
2.5. Generadores Congruentes Lineales Multiplicativos	66
2.6. Generadores de Tausworthe	71
2.7. Generadores de Números de Fibonacci Extendidos Extendidos	74
2.8. Generadores de Números Aleatorios Combinados	75
2.9. Falacias sobre la Generación de Números Aleatorios	77
<b>CAPITULO 3. PRUEBAS ESTADISTICAS PARA GENERADORES DE NÚMEROS ALEATORIOS</b>	
<i>(La Aleatoriedad de un Generador)</i>	
3.1. Introducción	80
3.2. Prueba Chi-Cuadrada	82
3.3. Prueba de Kolmogorov-Smirnov	85
3.4. Prueba de Correlación Secuencial	88
3.5. Prueba de dos Niveles	89
3.6. Sucesiones Uniformemente Distribuidas en $k$ Dimensiones	90
3.7. Prueba secuencial	92
3.8. Prueba espectral	93
<b>CAPITULO 4. PERCOLACIÓN EN SUBSTRATOS FRACTALES</b>	
<i>(Transporte, Difusión, Conductividad)</i>	
4.1. Introducción	95
4.2. Conductividad en los Sistemas de Percolación	97
4.3. La difusión en los Sistemas de Percolación	98
4.4. Transporte en Sistemas Generales de dos Componentes	101
4.5. Exponentes Dinámicos	105
4.5.1. Límites Rigurosos	105
4.6. Transporte en Racimos de Percolación	108
4.6.1. Difusión en Racimos Infinitos	108
4.7. Transporte en Substratos Fractales	110
4.7.1. Resistencia Total	110
4.7.2. Difusión	110
4.8. Mallas Ordinarias (transporte y conductividad)	112
4.8.1. Resistencia Total	112
4.8.2. Difusión	113
Conclusiones	
Bibliografía	
Apéndice	



## **Introducción**



# *Introducción*

El presente trabajo parte de la necesidad imperante de divulgar y aplicar tecnología de punta desde las aulas universitarias y no esperar hasta llegar al campo de trabajo como sucede la mayoría de las veces; nosotros como estudiantes de ingeniería, específicamente de computación, no podemos ni debemos esperar a llegar a ese punto, por ello, este trabajo pretende en cierta medida, aportar las bases en el conocimiento de una Teoría utilizada como tecnología de punta en otros países y que tiene mucha relación con nosotros como futuros profesionistas, debemos conocerla y aprender su aplicación.

La inquietud que se tuvo para desarrollar este trabajo fue debido por una parte, a experiencias personales en cuanto a que como estudiante me di cuenta de que es muy escasa la bibliografía para temas nuevos y las que podemos llegar a acceder se encuentran en otro idioma lo cual implica un cierto grado de dificultad en cuanto al manejo de conceptos y tecnicismos; por otra parte y comentando con mi asesor surgió la tentativa de aportar algo nuevo y con vistas a aplicaciones prácticas, en este caso tenemos a la Teoría de Percolación que nos presenta una panorámica general en cuanto su conceptualización, utilización y aplicaciones mas simples.

Con ello se pretende sembrar una semilla de avidez por ahondar más en el tema y explorar las diversas alternativas que ofrece en todos los campos del conocimiento humano de manera que vemos ante nosotros la oportunidad de interactuar con profesionistas de diferentes áreas para producir nuevas y mejores alternativas de solución a problemas.

Así pues este es el objetivo de la tesis: El aportar una fuente de información clara y sencilla para obtener nuevas tesis acerca de cada rama del conocimiento, se pretende se considere ésta tesis como una modesta contribución para llenar la carencia de información acerca de fenómenos críticos, cuyo estudio será de gran utilidad para los estudiantes de ingeniería tanto en las materias implicadas en este trabajo, como en la vida profesional.

Por otra parte considero que es preciso mencionar algunas de las dificultades encontradas al momento de elaborar el presente trabajo, ya que el mismo lector se dará cuenta de que por ejemplo, el aparato matemático utilizado es difícil de explicar para un estudiante de ingeniería que solo es usuario de las matemáticas y no productor de las mismas; la explicación y demostración de las fórmulas a las que se hace referencia en capítulos subsecuentes, son buen tema para una tesis de matemáticas y esto se aleja en mucho al objetivo que aquí se persigue.

Regresando a la bibliografía que como ya se mencionó, es escasa y en idiomas extranjeros; citaremos también que hay algunas partes de este trabajo donde se localizarán traducciones literales debido a la complejidad de conceptos y algunas otras que fueron llevadas en la medida de lo posible, al lenguaje llano para su mejor comprensión.

Siguiendo con las dificultades, mencionaremos que fue preciso el comprobar los resultados presentados en uno de los libros que se tomaron para consulta y al llevarlos al ámbito de la computadora, resultó ser una tarea bastante difícil que a final de cuentas pudo ser superada gracias a la paciencia que tuvo mi asesor al explicar cada uno de los conceptos y fórmulas utilizadas para llevarlos al lenguaje de la máquina aunque primeramente se haya tenido que ir a pie.

El tema que se desarrolla en este trabajo, la Teoría de Percolación, tiene sus inicios empíricos en las primeras asentaciones humanas, ya que nuestro género se ha visto rodeado de fenómenos críticos desde tiempos inmemoriales, podemos hablar primeramente del fuego originado por tormentas eléctricas y del cual se aprendió a manejarlo y posteriormente a "fabricarlo" si la expresión es válida, pasando por las enfermedades infecciosas, hasta llegar a los orígenes formales de ésta Teoría con la introducción de los primeros estudios de los físicos

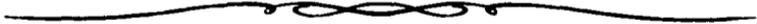
S.R. Broadbent y J.M. Hammersley quienes al enfrentarse a un fenómeno crítico en el año de 1957, comenzaron a estudiar la razón por la cual las mascareras antiguas utilizadas en las minas dejaban de filtrar apropiadamente, causando la muerte de los mineros que se encontraban a grandes profundidades en los tiros, sin el contacto con aire respirable.

Estos físicos denominaron al movimiento del gas de las minas a través de los poros del carbón como un "laberinto", dicho movimiento es un proceso nuevo en ese entonces y ahora, mismo que difiere considerablemente del fenómeno de difusión física ya bien conocido en esa época, el cual consiste de la difusión de calor entre dos cuerpos (como ejemplo más sencillo), que necesita del contacto de dichos cuerpos para que la difusión ocurra, a diferencia del fenómeno que atendemos ahora que necesita de las vías o "caminos" que permitirán la infiltración de un agente externo (llámese sangre, fuego, electricidad, etc.), sobre un sustrato (llámese éste venas, superficie, conductor, etc.).

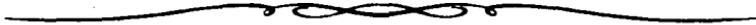
Tenemos entonces que ésta teoría estudia precisamente las relaciones que existen entre un gran número de elementos que constituyen un sistema a modelar.

Así también veremos que necesitamos de varias disciplinas y condiciones que manifieste el problema, para la correcta aplicación de esta teoría, además de algunas otras herramientas como el estudio de procesos llamados de gelación, mismos que podemos ver concretamente en la industria de alimentos, en la medicina, etc. y en algunas otras ramas del conocimiento humano.

Finalmente diremos que con éste trabajo se pretende entonces dar al lector la base para ahondar en futuras y diversas aplicaciones que ofrece la naturaleza y el conocimiento humano, para que de esta forma los estudiantes de ingeniería, tengan una más amplia cultura en la utilización de tecnología de punta para su aplicación concreta en su actividad profesional.



## **Marco Teórico**



# Marco Teórico

Desde que la humanidad tuvo conciencia, la naturaleza "le ha planteado" una serie de problemas entre los cuales se destacan aquellos que no son posibles de controlar, digamos una finalidad catastrófica o un aprovechamiento de su potencial, para con ello, proporcionar comodidad al hábitat humano. De esta naturaleza son los llamados fenómenos críticos.

Este tipo de fenómeno, se caracteriza principalmente por tener la capacidad de llegar a un punto, en el cual sus propiedades como sistema cambian abruptamente y cabe la posibilidad de que salga de control y con ello causar efectos no deseados.

Es importante observar la física de los fenómenos críticos, ya que ésta posee rasgos comunes: Al acercarse al llamado punto crítico que es precisamente el momento en el cual un sistema dado puede salir de sus condiciones normales, éste se dividirá en bloques de propiedades diferentes (físicamente hablando) y las dimensiones de dichos bloques crecerán hasta desarrollarse de manera incontrolable, creando así una reacción en cadena dando lugar a condiciones impredecibles y peligrosas.

Se tienen varias configuraciones de modelos según la naturaleza misma de los fenómenos en cuestión, de modo que la configuración de algunos fenómenos varía caóticamente en función del tiempo y del movimiento térmico, en otros permanece congelada pero cambia en la transición de una muestra a otra al someterlas al análisis

estadístico. Así pues, cuando se hace frente a un fenómeno del tipo crítico, se desea saber en qué momento podría hacerse presente una reacción en cadena, cuál será el punto en el cual sus propiedades podrían cambiar bruscamente hasta convertirse en un problema difícil de controlar.

Es posible que un fenómeno de este tipo al alcanzar dimensiones críticas, no presente el momento de propagación de sus acciones o consecuencias, es decir que puede comportarse como un fenómeno que no cae dentro de la categoría crítica, pudiendo confundirnos al tratar de analizarlo y con ello podríamos analizarlo erróneamente con metodologías no de acorde con el problema en cuestión.

En respuesta a estos problemas, se desarrolló la llamada "Teoría de Percolación", ésta tiene sus orígenes en el año de 1957 cuando S.R. Broadbent y J.M. Hammersley se encontraron ante un fenómeno del tipo crítico: "La saturación de las máscaras antigás utilizadas en las minas, y más propiamente, la saturación de los poros del carbón que funcionan como filtros en las máscaras."

"El movimiento del gas por el "laberinto" (poros del carbón) es un proceso de nuevo tipo que difiere considerablemente del fenómeno de difusión física."

Broadbent y Hammersley le llamaron a este fenómeno de saturación: "Proceso de Percolación" y su teoría se denomina con el mismo nombre, a este respecto debemos mencionar que la palabra percolación significa infiltración.

La Teoría de Percolación estudia en sí las relaciones existentes entre un gran número de elementos que constituyen al sistema o modelo a analizar, sus acciones, reacciones y consecuencias además de su tendencia de comportamiento.

Existe una condición para su exitosa aplicación: Se sugiere que debe existir un enlace entre cada uno de los elementos del fenómeno en estudio con carácter aleatorio, el cual deberá establecerse mediante un serio procedimiento determinado, como por ejemplo, un generador de números aleatorios con propiedades específicas y que se adecue a las condiciones del problema en cuestión.

Tenemos un primer trabajo que introdujo el concepto de percolación y fue el desarrollado por Flory y Stockmayer hace ya varios años, al estudiar los procesos llamados de gelación. El término percolación, fue sugerido como ya mencionamos anteriormente por Broadbent y Hammersley en 1957, esto fue cuando estudiaban la dispersión de fluidos en medios aleatorios, además de esto introdujeron los conceptos de geometría y probabilidad que veremos más adelante.

Los problemas que pueden ser tratados mediante la Teoría de Percolación, se engloban en la categoría de los fenómenos críticos, ya que los elementos que conforman su estructura se encuentran enlazados cercanamente al punto llamado: "umbral de percolación" y poseen una geometría igual para cada uno de ellos; dicha geometría puede ser establecida o denotada si se pone atención a la estructura del fenómeno pero en pequeña escala, la cual se determina por los enlaces y las propiedades de los elementos, tomando en cuenta sólo a los enlaces de grandes bloques tomados en esa pequeña escala; de este modo la geometría que describe las dimensiones del problema toma un carácter universal, al igual que las variables físicas utilizadas para describir el comportamiento del problema, las cuales, además de tener propiedades universales dependen de la estructura de los grandes racimos (concentración de vías de flujo y bloqueo en el fenómeno).

Para describir ampliamente lo que ha sido la Teoría de Percolación, se necesitan varios conceptos además del de fenómeno crítico, se tienen que describir otros cuantos como son: variable aleatoria, vías de percolación, dimensión del modelo, valor crítico, índice crítico, umbral de percolación, coeficiente de reproducción, número de coordinación, racimo infinito, radio de correlación, índice del radio de correlación, zona crítica, Teoría de las Transiciones en Fase, hipótesis de semejanza, entre otros.

Además de estos conceptos se necesitarán las herramientas de probabilidad, estadística y matemáticas, que se consideren pertinentes para ayudarnos a seguir el comportamiento de las variables involucradas en el fenómeno crítico de nuestro particular interés, tales como la media y la desviación en estadística, las distribuciones de probabilidad, las ecuaciones diferenciales, etc.

Cuando se desarrolló la Teoría de las Transiciones en Fase en los años siguientes, tuvo un impacto muy especial particularmente el método de desarrollo en series de Domb y la Teoría de Grupos de Renormalización de Wilson, Fischer y Kadanoff; la cual estimuló sobre manera a las investigaciones acerca de los aspectos de transición, geometría y percolación.

Mediante dichas herramientas, es posible regir o estandarizar el patrón de comportamiento de un sistema, siguiéndolo en las pequeñas variaciones que presenten las variables de control que lo describen. Se afirma lo anterior en base a los resultados obtenidos en el estudio de la probabilidad y estadística, pues se sabe que en un experimento se pueden realizar varios intentos para obtener un resultado específico y entre más grande sea el número de estos intentos, el resultado obtenido dejará de ser eventual y pasará a ser regular; es decir, la diferencia entre cada resultado será cada vez menor.

Al llevar a cabo la simulación de un experimento cualquiera con la ayuda de la computadora, podemos aislar el valor de la variable de interés, para que de este modo, tengamos cercado el "momento" que deseamos obtener. Es posible predecir una reacción en base a un valor obtenido mediante ensayos repetidos que tiendan a infinito ya que ha sido demostrado por varios autores, que este valor tenderá a ser único.

Para todo problema o fenómeno en estudio es preciso establecer un modelo del mismo, con el objeto de establecer su comportamiento a manera de que podamos "manipularlo" si es que cabe éste término, y estudiarlo simulándolo. En ocasiones se encontrará con que se habla de la "dimensión del modelo", e introductoriamente podemos decir que éste aspecto no está ligado al aspecto físico como se pensaría al momento de leer este apartado, sino que la dimensión de la que se habla se refiere al número de variables dependientes e independientes que están involucradas en la descripción del modelo y precisamente ellas son quienes darán el orden o la dimensión del mismo.

Siguiendo con este aspecto podemos decir que la Teoría de Percolación no actúa sola, sino con otras muchas áreas de conocimiento, por ejemplo tiene una íntima relación

con los fractales pues al decir que un evento en el modelo está en el umbral de percolación, es porque ha llegado a un punto crítico en el cual, las propiedades del sistema que ya se conocían pueden cambiar radicalmente y es precisamente esa transición de un estado normal a uno crítico lo que le da al fenómeno un estado intermedio, una clase de dimensión fraccional.\* Algunos autores concluyen que los objetos de la naturaleza pueden ser cuantitativamente clasificados por un sólo número: la dimensión fractal, denotada como  $d_f$ .

Esta dimensión de la cual se habla en términos de fractales toma su definición del modelo al cual se este aplicando, es decir por ejemplo en una figura de una concentración crítica, pueden observarse racimos infinitos los cuales presentan agujeros de varios tamaños de manera semejante al tapete de Sierpinski (mismo que veremos más adelante) y tenemos que esta estructura es muy semejante a sí mismo en toda su longitud por lo cual, puede ser interpretado como un fractal.

De esto se desprende que la dimensión fractal  $d_f$  se describa como el promedio de la masa del racimo contenido en una esfera de radio "r" donde "r" es un escalon.

Por otro lado, tenemos que en los fractales se manejan las probabilidades que se tienen para que un evento ocurra (en el caso de los fractales probabilísticos), y se concluye a través de varios experimentos que al tomar en cuenta las probabilidades de un evento, es decir sus partes proporcionales, se determina que son iguales. También se habla de el DLA (diffusion limited aggregation), más adelante se verá que es similar al umbral de percolación  $x_c$ ; además se establece una analogía de parámetros para estructuras aleatorias, por ello es que se toman modelos geométricos -sin factores de Boltzmann- como suficientes para englobar las características estadísticas y mecánicas de un sistema real.

---

\* Podemos decir que la dimensión fractal es un estado intermedio, es la transición.

Si es posible entender la física esencial de un modelo extremadamente grande, entonces podemos decir que entendemos la física esencial de los materiales complejos que caen dentro de la clase universal descrita por un modelo del tipo crítico.

Los conceptos de fractales que introdujo Mandelbrot, aportaron nuevas herramientas que en conjunto con el desarrollo de medios computacionales apropiados, contribuyeron en gran parte a la comprensión de la actual Teoría de Percolación. Tenemos por ejemplo, desde el concepto mismo de fractal y el origen de su nombre, que viene de la palabra latina "fractus" que significa "roto" o "quebrado", es decir algo que se rompe en trozos similares al original, hasta la publicación de su libro "La Geometría Fractal de la Naturaleza" en 1985 y muchas aportaciones más.

Hasta este punto vemos más claramente la relación existente entre la Teoría de Percolación, la física, la geometría del Desorden y los fractales, todos convergen en los mismos puntos que se deben tomar en cuenta para controlar un fenómeno crítico.

Lo que se pretende lograr mediante la Teoría de Percolación aplicada a un fenómeno en particular, es determinar el momento (en términos numéricos), en el cual el fenómeno puede propagarse, extenderse, salirse de control, etc., para que en base a ello, se tenga la posibilidad de aislar o permitir la reacción en cadena logrando así un beneficio para la sociedad.

Por ejemplo en el control de incendios forestales, sería de mucha utilidad el poder detener la extensión del fuego para no llegar hasta dimensiones catastróficas, si conocemos las vías de flujo o caminos por donde puede extenderse, y las tratamos como una red o malla e interceptamos los puntos que conforman la vía de flujo (vía de percolación) por la cual se expandirá el fuego, habremos logrado una eficaz aplicación de la Teoría.

Otra aplicación de los problemas de percolación sería la propagación de un virus ya sea en una red de computadoras o en seres vivos; con la ayuda de la Teoría de Percolación sería posible predecir las "vías de contagio" y así podemos evitar la

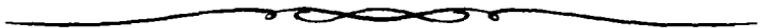
propagación del virus, aplicando una metodología estadística para cercar los puntos de posible contagio.

De esta forma podemos listar varios problemas que tendrían solución sometiéndolos a la Teoría de percolación, y todo con el objeto de controlar e inclusive prevenir sucesos catastróficos en una amplia gama de fenómenos de todo tipo, siempre y cuando claro que éstos sean susceptibles de ser tratados bajo los lineamientos que dispone esta Teoría.



## **Capítulo I**

### **Conceptos y Auxiliares Básicos**



# Capítulo 1

## CONCEPTOS Y AUXILIARES BASICOS

### *1.1 Introducción.*

En el presente capítulo se introducirá al lector en el manejo del vocabulario necesario para comprender en términos más amplios, la Teoría de Percolación, y de esa forma instruirlo para la comprensión de los capítulos subsiguientes.

Anteriormente se dieron a conocer los conceptos que serán usuales tanto en este capítulo como en los siguientes, por ello se mostrarán aquí las convenciones, terminología y aclaraciones necesarias en cuanto al manejo de cada uno de los conceptos para algún caso en particular, según sea conveniente.

Además de esto, se dará una breve introducción a las herramientas estadísticas y de probabilidad, con el objeto de explicar toda la ayuda que puede brindar la Teoría de Percolación con la intervención de estas herramientas, que antes sólo se dedicaban a sus funciones matemáticas pero sin alguna aplicación tan interesante como la que se nos presenta ahora.

Al concluir el presente capítulo se espera haber aportado las herramientas suficientes para tener la capacidad de obtener una visión más amplia de lo que es la

llamada Teoría de Percolación, y de como podríamos aplicarla a un fenómeno que reúna los requisitos que ella exige, para de este modo utilizarla como una herramienta por demás útil que sale de la índole de las ya conocidas, en la solución de problemas.

Lo anterior nos conduce a un nivel superior en cuanto a técnicas utilizadas en la solución de problemas, ya que países como Rusia la utilizan como una metodología específica concreta y eficaz para la solución de problemas que salen de la índole de lo común y cotidiano, aunque algunos de los fenómenos críticos caen dentro de lo cotidiano pero no se les cataloga como crítico, simplemente pasa desapercibido y no se le trata en la justa perspectiva.

## 1.2. Conceptos

- *Vías de percolación:* Se refieren a los racimos finitos e infinitos ubicados en el modelo a escala de un fenómeno critico, las vías de percolación no son otra cosa que los "caminos" por los cuales el fenómeno puede propagarse de manera finita o infinita.

- *Variable aleatoria discreta:* Recibe este nombre aquella variable de la cual pueden conocerse los valores que adquiere, además de la frecuencia con que puede tomar cada valor. Una restricción importante acerca de este tipo de variable, es que no puede saberse, aún dentro de los márgenes que impone un problema de carácter matemático, qué valor en específico habrá de adquirir en un momento o caso dado.

Esto viene de que sabemos que es imposible predecir de primera cuenta, cuál es el número que vamos a obtener, al realizar un experimento cualquiera, pero podemos pronosticar la probabilidad de obtener un número determinado.

La definición que dan R.E. Walpole y R.H. Myers acerca de la variable aleatoria es la siguiente: Una variable aleatoria es una función que asocia un número real a cada elemento del espacio muestral. Este espacio muestral, lo entendemos como un conjunto donde se encuentran todos los resultados posibles de un experimento estadístico que se ha llevado a cabo.

- *Frecuencia relativa:* Al realizar un número determinado de experimentos denotado como  $Q$ , se establece una relación  $Qn/Q$ , dicha relación se denomina como *frecuencia relativa de aparición* de un valor dado de la variable aleatoria.

- *Probabilidad del valor de la variable aleatoria:* Cuando el total de experimentos realizados no es muy grande, la relación denominada frecuencia relativa, presenta oscilaciones o variaciones, ahora; cuando se aumenta el número de experimentos, estas oscilaciones son cada vez menores. El límite hacia el que tiende la frecuencia relativa de

aparición de un valor cualquiera de la variable aleatoria, es el denominado probabilidad del valor de la variable aleatoria.

- *Valor medio de la variable aleatoria:* Se utilizan las frecuencias relativas para en un determinado momento, calcular el *valor promedio* de aparición de un resultado en particular y este valor promedio, es una propiedad que se da a conocer en un gran número de experimentos realizados los cuales han sido llevados a cabo bajo condiciones idénticas, se denota como:

$$\bar{x}_Q = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_Q}{Q}$$

Como un adicional podemos decir que si aumentamos el número de experimentos  $Q$ , como se mencionó arriba; la variable que describe el valor medio de la variable aleatoria  $\bar{x}_Q$  tiende a cierto valor el cual no depende de  $Q$ , pero es función de las condiciones en las cuales se realizaron los experimentos.

Ahora, el valor medio presenta desviaciones que ocurren obligatoriamente tanto hacia uno como otro lado y por término medio se compensan recíprocamente. Por lo tanto sería conveniente establecer la distribución a utilizar en cuanto se realicen los experimentos necesarios, con el fin de establecer el adecuado enfoque del resultado obtenido en el análisis estadístico de los datos.

La *varianza* se denota como:

$$s^2(N) = \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_Q^2}{Q}$$

- *Desviación cuadrática media:* Es quien caracteriza la desviación típica sobre las variables correspondientes a cada intento de los experimentos realizados y se denota como:

$$\delta(N) = \sqrt{\delta^2(N)}$$

- *Probabilidad:* La probabilidad de un evento cualquiera  $x$ , es la suma de los pesos de todos los puntos muestrales en  $x$ ; Por definición,  $Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = Q$ , entonces la definición de probabilidad se deduce como:

$$P(x_1) + P(x_2) + \dots + P(x_n) = 1$$

y los valores de cada probabilidad por separado, en un evento dado, siempre oscila entre cero y la unidad.

En cuanto a la probabilidad sabemos que tiene ciertas propiedades y teoremas los cuales podemos describir como sigue:

La suma de las probabilidades de los acontecimientos que forman un sistema completo es igual a la unidad.

Las probabilidades obtenidas al realizar un experimento cierto número de veces, pueden ser sumadas siempre y cuando los eventos que describen sean mutuamente excluyentes dos a dos; en cambio cuando se trata de eventos independientes es decir; que no tienen algo en común, se puede utilizar la regla de la multiplicación de las probabilidades y con ello podemos obtener por ejemplo, la "probabilidad de que surjan simultáneamente varios acontecimientos en un experimento cualquiera."

- *Variable aleatoria continua:* Este tipo de variable, también puede adquirir un valor cualquiera pero sólo en cierto segmento correspondiente al eje real numérico, dicho segmento corresponde a un intervalo cualquiera. La probabilidad de obtener

cierto valor, presenta variaciones al igual que la variable aleatoria discreta, expuesta anteriormente. Para ello, debemos introducir una nueva herramienta que es la función de distribución de la variable aleatoria continua.

- *Función de distribución de la variable aleatoria continua:* Si los puntos  $A_1$  y  $B_1$  se encuentran dentro del intervalo  $(A, B)$ , además si  $A_1 < B_1$ , entonces la probabilidad de que el valor de la variable aleatoria se encuentre en el intervalo descrito por  $A_1 \leq y \leq B_1$  es igual a la superficie que se encuentra dentro del límite de graficación de la función  $f(y)$ , dado por las perpendiculares que se levantan en  $A_1$  y  $B_1$ , tal como se ve en la fig. 1.1; de modo que su probabilidad se define como sigue:

$$P(A_1, B_1) = \int_{A_1}^{B_1} f(y) dy.$$

y la superficie que se desea conocer es precisamente igual a 1.

$$P(A, B) = \int_A^B f(y) dy = 1$$

lo cual, se denomina condición de normalización de la función de distribución.

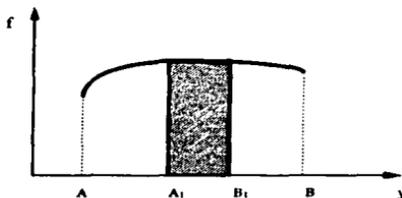


fig. 1.1. Trapecio curvilineo

Con respecto a la figura, al considerar la probabilidad que de el valor de la variable aleatoria que se desea obtener, dentro de la superficie sombreada, es directamente proporcional a la anchura de la misma, por lo tanto tendríamos que introducir aquí la notación que describe el valor medio y la varianza de la variable aleatoria continua.

- *Valor medio:*

$$\bar{a} = \int_A^B y f(y) dy.$$

- *Varianza:*

$$\delta^2 = \int_A^B (y - \bar{a})^2 f(y) dy,$$

donde  $\bar{a}$  es el valor medio de la variable aleatoria  $a$ .

- *Distribución Uniforme:* Una variable aleatoria continua puede tener todos los valores desde cero a uno con igual probabilidad y puede no tener otros, es decir que tiene igual probabilidad de adoptar cualquier valor dentro del intervalo (0,1), y la función  $f(y)$  no depende de  $y$  dentro de ese intervalo y fuera de él puede ser igual a cero, lo cual nos lleva a presentar la gráfica anterior como vemos en la fig. 1.2.

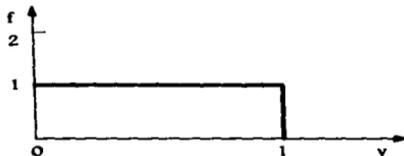


fig. 1.2 Transformación del trapecio curvilíneo en rectángulo.

Tenemos que su valor dentro de este último se puede encontrar a partir de la condición de normalización que ya vimos atrás. Para este caso  $A=0$ ,  $B=1$ , y el trapecio curvilíneo de la fig. 1.1 se transforma en un rectángulo cuya superficie constituye  $f_0 \cdot 1$ , donde  $f_0$  es el valor de la función dentro del intervalo, mientras que la anchura de éste es igual a 1. Tenemos que de la condición de normalización se deduce que  $f_0 \cdot 1 = 1$ , es decir,  $f_0 = 1$ , y tenemos que:

$$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{cuando } y > 1 \text{ e } y < 0 \end{cases}$$

- *Umbral de Percolación:* Se define como una variable aleatoria discreta, pues todos los valores que pueda tomar serán enteros al multiplicarlos por el número total de elementos considerados en el universo de estudio. Considerando un problema de nudos bloqueados y no bloqueados en una malla alámbrica como se verá en otro capítulo, tenemos que al considerar un gran número de nudos denotados como  $N$ , tendremos muy poca diferencia en cuanto al valor de la concentración de nudos bloqueados contra los no bloqueados al paso de corriente, por lo que los valores que tome esta variable aleatoria dentro de un intervalo harán que el cálculo del umbral de percolación sea muy exacto. En sí es el momento en el cual, el sistema se encuentra a punto de cambiar sus propiedades, es decir; que con cierto valor de la variable  $x_c$ , como la denota A. Efron, o  $p_c$  como lo hacen A. Bunde y S. Havlin; el sistema tendrá un grado de entropía\* mayor, que en sus condiciones iniciales.

Por lo anterior, se considera que un sistema cualquiera puede entrar en percolación, cuando la variable de control sobrepasa este límite y tenemos entonces que ésta es la variable más importante en cuanto a problemas de percolación, ya que al calcular el valor de ésta con la mayor exactitud posible, se puede establecer el momento exacto en que el fenómeno crítico se saldrá de control y el objetivo de todo esto es precisamente, conocer el valor del umbral de percolación para evitar o desencadenar una reacción en el sistema deseable o no.

---

\* La entropía define la función de estado de un sistema, es la medida del desorden de un sistema.

Los umbrales de percolación, se describen en términos de la función de distribución Gaussiana:

$$f_N(y) = \frac{1}{\delta_N \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\delta_N^2}\right)$$

y se sabe que cuando  $N \rightarrow \infty$ , el umbral de percolación después de ser una variable aleatoria, se transforma en una magnitud cierta.

- *Grupo de Coordinación:* En el campo de la cristalografía (el estudio de los cristales) es muy utilizado para denominar las propiedades de los elementos en cuestión y simplemente es el número de objetos inmediatos por los cuales puede fluir la reacción del sistema. Los caminos a seguir que un flujo tiene como medio, son formados por un número de objetos o individuos, elementos propiamente dicho, al número que conforman estos elementos se le llama de esta manera. Para retículos de un gran número de dimensiones, es determinado por la fórmula siguiente:

$$Z = 2d$$

donde:

$d$ , es la dimensión del espacio.

- *Racimo infinito:* Cuando se habla de problemas reticulares, la idea de racimo infinito surge cuando la concentración de nudos no bloqueados es un poco mayor a la concentración del umbral de percolación, por ello existe un racimo infinito. En sí, es una especie de cadenas infinitas de nudos que se entrelazan y se obtienen conjuntos de líneas quebradas que se cruzan una con otra. Gráficamente un racimo infinito contiene agujeros de todos los tamaños semejantes al tapete de Sierpinski; esta estructura es semejante a sí misma en toda su longitud por lo que puede ser interpretada como un fractal.

---

\* Reticulo proviene de la palabra latina *reticulum* que significa red.

De forma aún más comprensible, debemos entender un racimo infinito cuando en un sistema analizado, existen vías de flujo (percolación), por las cuales se puede dispersar el caos generado en el sistema. *fig. 1.3*



*fig. 1.3. Cuadro de distribución de los ceros, unidades y doses en el momento de aparición de la percolación. Se indica la vía por la cual los doses "penetraron" del lado izquierdo al lado derecho del cuadrado. En este caso el ordenador no cesó de trabajar al aparecer nuevos doses.*

- **Radio de correlación:** Esta definición también se relaciona con los problemas reticulares, en especial tenemos que en una malla (red), el radio de correlación es una dimensión lineal y se define como una característica propia de ésta malla, la cual a su vez, se denomina *célula* y se denota por "R", ésta pertenece al racimo infinito.

El radio crecerá indefinidamente al acercarse al umbral de percolación y la expresión que lo describe es la siguiente:

$$R = \frac{l}{|x - x_c|^v}$$

donde:

$l$ , es la longitud según el orden de magnitud, equivalente al periodo del retículo, y  $v$ , es el índice del radio de correlación (el primer índice crítico).

Una propiedad importante de los fenómenos críticos es precisamente, la existencia de un radio de correlación que se reduce al infinito, también tiene sentido cuando se presenta la situación de que la variable que describe las vías de percolación, denotada por  $x$ , es menor que el umbral de percolación  $x_c$ , es decir ( $x < x_c$ ). En esta zona, el radio de correlación describe la "dimensión máxima de los racimos finitos"; digamos, si las vías de percolación tienden al umbral, del lado de los valores menores ( $x < x_c$ ), es cuando se reduce al infinito el radio de correlación, según la ley exponencial.

Lo anterior sólo es indicativo de que al acercarse los racimos finitos al umbral de percolación, aumentan ilimitadamente sus dimensiones, esto implica entonces que al tener  $x \rightarrow x_c$  se juntan en un racimo infinito.

- *Coefficiente de reproducción:* Es un número denotado por  $q_x$  según A. Efron, el cual describe la continuidad del proceso de difusión en el modelo, o en otras palabras es el factor de ramificaciones de filtración; siempre y cuando su valor sea mayor que la unidad. De aquí se deduce que la concentración crítica para  $x_c$  puede obtenerse de la condición  $q_{x_c} = 1$ , es decir;  $x_c = 1/q$ .

- *Dimensión del modelo:* Este término, como se podría pensar inicialmente no corresponde a la descripción del espacio físico que ocupa el fenómeno en cuestión o su modelo descriptivo, sino al número de variables utilizadas para la descripción del mismo. Cada problema en particular será objeto de un análisis semejante pero las ecuaciones y más específicamente, el número de variables que se utilizan para representarlo matemáticamente, varía de acuerdo al orden de complejidad que requiera su representación. Por lo tanto un modelo que necesite de seis variables para que sea descrito completamente, se dice que tiene dimensión seis; esto es:  $d = 6$ .

- *Dimensión fractal:* La geometría clásica (Euclidiana), trata con formas regulares que tienen una dimensión al igual que otras que ocupan el espacio, otras formas tienen una dimensión intermedia entre la línea que las describe y su área, una clase de dimensión fraccional, un estado intermedio. A partir de lo anterior, podemos decir que la

dimensión fractal es un componente escalar exponencial que gobierna el radio de acción o escalamiento del evento o fenómeno en cuestión.

La dimensión fractal  $d_f$  se describe como el promedio de la masa del racimo contenido en una esfera de radio "r" (donde "r" es un escalar) y se representa como:

$$M(r) \sim r^{d_f}$$

El simple hecho de usar la dimensión fractal  $d_f$  no es suficiente para lograr la descripción de los objetos fractales. A. Bunde y S. Havlin introducen un nuevo concepto que es el DLA (diffusion limited aggregation), el cual tiene mucha relación con la percolación y estos autores han encontrado en sus experimentos que el valor de  $d_f$  para percolación y DLA es de 2.5 cuando  $d = 3$ , y son diferentes uno de otro. Además podemos agregar que al introducir una nueva dimensión fractal  $d_{min}$ , que se utiliza para describir la tortuosidad del fractal, es decir, la razón de sub-ramificaciones existentes por ramas principales. En el aspecto útil que representa la dimensión  $d_f$ , nos encontramos con que es el proporcionar una caracterización cuantitativa acerca de una forma fractal.

### 1.3. Dimensiones Fractales

Para una completa descripción del modelo en cuestión, es necesario introducir diferentes dimensiones fractales, y para explicar mejor esto necesitamos comenzar a ejemplificar:

En un problema boquejado por De Gennes llamado "aint in labirint", la hormiga en el laberinto, se llamaba al número de lugares visitados como "masa", denotada con:  $(M)$ , la cual se escala con el tiempo, es decir; tendremos una masa diferente en cada instante. La hormiga al caminar, cubre una distancia, es decir; una región fractal del laberinto, de modo que la primera masa se escala con la dimensión fractal  $df$ , la segunda con  $d_w$ .

Por lo tanto el número de lugares visitados que se escalan con el tiempo, como un "radio" de dos dimensiones fractales está dado por:

$$S \sim t^{d_f/d_w}$$

y se denomina: "dimensión intrínseca". Por otro lado la cantidad  $df/d_w$  fue introducida por Alexander y Orbach, se denota comúnmente con las siglas (AO), a este respecto ellos tienen su propia definición de dimensión fractal y la describen como:

$$d_s \equiv 2df/d_w$$

La utilidad de  $d_w$ , es la caracterización de la difusión que tienen aspectos alcatorios en movimiento, sobre un sustrato fractal. Es decir un (AO).

Tabularon la  $d_s$  para fractales de percolación sobre una una red Euclidiana de dimensión  $d$  y notaron que mientras  $df$  y  $d_w$  cambian rápidamente con  $d$  (por debajo del valor  $d_c = 6$ )<sup>1</sup> sin embargo se nota que quien no cambia de esta forma es  $d_s$ . Por lo anterior, llegan a la conclusión de que para la percolación se tiene lo siguiente:

---

<sup>1</sup> Bunde y Havlin, denominan a  $d_c$  como otra dimensión crítica.

$$d_s = 4/3, \quad [2 \leq d \leq 6]$$

Al desarrollar otras investigaciones, Leyvraz y Stanley encontraron condiciones bajo las cuales la conjetura anterior de AO, raya en lo estricto; dichas condiciones fueron demostradas sólo para  $d \geq 6$ , después de ello se realizaron pruebas más concretas de las cuales se concluye que  $d_s$  es en un 1% - 2% más pequeña que  $4/3$ .

Se encontró que en todos los casos, excepto DLA,  $d_{min}$  tiene un incremento de carácter monótono con valores de  $d$  por arriba de la dimensión crítica  $d_c$  y tenemos:

$$d_{min} = 2 \quad [d \geq d_c]$$

Por lo anterior llegan a la conclusión de que los fractales tienen diferentes valores de  $df$ ,  $d_w$ ,  $d_c$ , etc; pero todos tienen  $d_{min} = 2$ . Esta dimensión fractal se aplica a los fenómenos físicos que se propagan de un lugar a otro *sin acudir a otros sitios previamente para llegar a su último destino*, es decir, confrontando las dos dimensiones fractales  $d_w$  y  $d_{min}$ , tenemos que el primero describe la propagación de caminos aleatorios en los cuales se acepta el paso por un mismo lugar fractal más de una vez, mientras que  $d_{min}$  describe el orden de caminos que se "autoevitan", y no se puede pasar por ahí más de una vez como regla general.

Otra de las dimensiones fractales intrínsecas es la llamada dimensión física o expandida, ésta se denota como  $d^i$  y se define como sigue:

$$M(t) \sim r^d$$

donde:

$r = r(t)$  correspondiente a un radio de giración.

$t = t^i$  es la ruta mínima entre la nueva locación de un punto cualquiera y el origen del mismo para explicar la relación con las otras dimensiones fractales se tiene que:

$$M(t^i) \sim t^{d^i} \quad [t^i \ll r^{d_{min}}]$$

con:

$$d^i \equiv df / d_{min}$$

Una dimensión fractal más es la denotada por  $d_B$ , que describe la configuración de un camino o ruta cuyo crecimiento crítico es un modelo que nunca se intersecta a sí mismo.

Pasemos ahora a describir a la *dimensión fractal* que es una de las más utilizadas e importantes en la descripción de la mecánica de los fenómenos críticos, también se conoce como *dimensión gráfica* que como mencionábamos anteriormente, no es suficiente para caracterizar el planteamiento de una red de percolación.

La utilización de esta dimensión implica por ejemplo, una comparación de figuras de difusión limitada y agregada (DLA). Veamos dos gráficas que representan redes de percolación como vemos en la fig. 1.4.

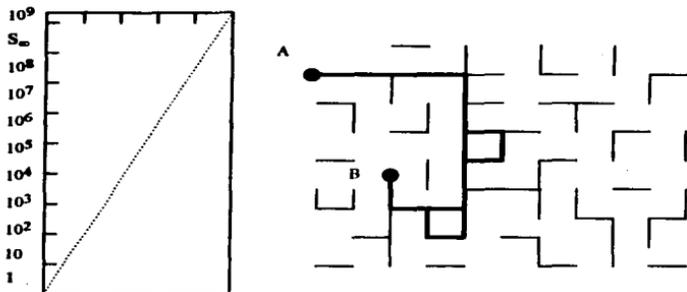


Fig. 1.4 Redes de percolación (izquierda: concentración crítica, derecha: avance de un agente aleatorio)

Las dos redes que presentamos son muy diferentes y son cíclicas y todas de gran escala porque no le agregaron repeticiones. En  $d=3$ , las estructuras superiores retienen

características diferentes, pero sus dimensiones fractales son cercanamente iguales a  $d_f \approx 2.5$ . Por lo anterior al considerar una estructura del tipo fractal, consideraremos la ruta más corta que es la llamada distancia química  $l$ , que ya mencionamos anteriormente.

La dimensión fractal  $d_f$  se describe como el promedio de la masa del racimo contenido en una esfera de radio "r" (donde "r" es un escalar) como lo describe la expresión:

$$M(r) \sim r^{d_f}$$

Se tiene que en fractales aleatorios  $M(r)$ , representa un promedio sobre muchas formas diferentes de rejillas sobre varios centros de esferas o nudos en una rejilla infinita.

Al rededor del umbral de percolación, la zona media de las rejillas finitas en el sistema es descrita por la longitud de correlación  $\xi$ . Para el umbral de percolación,  $\xi$  es solo el tamaño lineal de los agujeros en la rejilla infinita y a partir de que  $\xi$  es finito sobre el umbral, la rejilla infinita puede ser semejante sólo en longitud a proporciones más cortas que  $\xi$ .

Es posible interpretar  $\xi(p)$  como la longitud típica y puede ser referido como un fractal; cuando se tienen proporciones más grandes que  $\xi$ , la estructura no es similar y se le puede llamar homogénea. El cruzamiento del comportamiento fractal en pequeñas proporciones corresponde con un comportamiento homogéneo, para proporciones de comportamiento homogéneo a escalas grandes le corresponde una rejilla compuesta por el tapete de Sierpinski con celdas unitarias de tamaño  $\xi$ , tal y como vemos en la fig. 1.5b



Fig. 1.5a Tapete de Sierpinski.

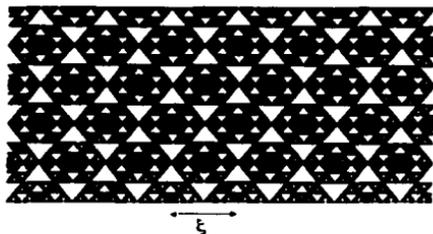


Fig. 1.5b. Malla compuesta por células del tapete de Sierpinski de tamaño  $\xi$ .

### **1.3.1. Subsistemas Fractales**

Una red de percolación esta compuesta de varias subestructuras fractales que son igualmente la aplicación de una diferencia de voltaje entre dos lugares opuestos de una red metálica de percolación, la medula de la red consiste en todos los sitios que conduzcan la corriente eléctrica, como veremos en las propiedades de las dimensiones fractales más adelante.

Estas partes de la red que no conducen corriente y son conectadas a la columna vertebral por un solo lugar. Las conexiones sin interrupción son obviamente las que conducen el total de la corriente y cuando hay un corte en un punto clave, la corriente se detendrá.

Entonces la sub-estructura de la red será el perímetro externo, es el esqueleto y la columna vertebral y consiste de varios sitios de la red que son adyacentes a sitios vacíos. En contraste, el primer total solo incluye los agujeros de la red y el perímetro externo es un modelo importante para interfaces fractales aleatorias.

Al esqueleto se le define como la unión de todas las rutas más cortas de un sitio dado para todos los sitios a una distancia química  $l$ . La columna vertebral elástica es la unión de todas las rutas más cortas entre dos lugares y tenemos que la mayoría de las masas de la red esta concentrada en los extremos.

Si quisieramos obtener el valor de la dimensión fractal de la columna vertebral, tendríamos que hacer varias simulaciones numéricas y el resultado que presentan algunos autores es de  $13/8$ ; y esto es solo la dimensión gráfica  $d_f$  de la columna vertebral siendo menor que la de percolación. En contraste  $v$  es la misma para la columna vertebral y para la red de percolación, indicando la importancia del índice  $v$ .

---

\* Véase Propiedades de las Dimensiones Fractales

#### 1.4. Formación de fractales y multifractales

En la actualidad es posible apreciar estructuras del tipo fractal y clasificarlas como tales ya que éstas se caracterizan por tener formación de ramificaciones a partir de una raíz y por tener una estructura totalmente definida. A continuación se mostrará cómo, mediante probabilidad se puede llegar a determinar el crecimiento de una estructura fractal.

Se parte de la probabilidad de encontrar un camino aleatorio a una distancia  $l$  a un tiempo  $t$ , y nos damos cuenta de que esta expresión forma un Gaussiano:

$$P(l, t) = P(0, t) \exp -l^2 / 4Dt$$

ahora, el momento de densidad de probabilidad  $P^q(r, t)$ , puede ser escrita como una integral de convolución, de la siguiente manera:

$$P^q(r, t) = \int_0^{\infty} \Phi(r/l) P^q(l, t) dl,$$

donde  $\Phi(r | l)$  es la probabilidad de encontrar dos lugares separados a una distancia química " $l$ " y una distancia Euclidiana " $r$ ". Como una nota importante, diremos que los fractales lineales aleatorios, tienen una probabilidad  $P(l, t)$  es la misma para cada configuración.

Se tiene que la densidad de probabilidad es:

$$\Phi(r | l) = \Phi(0 | l) \exp(-r^2 / 4Dl)$$

si sustituimos, se obtiene una relación general de tipo escalar como la que sigue:

$$\langle P^q(r, t) \rangle \sim \langle P(rq^{1/d}, t) \rangle$$

Utilizando el método de pasos descendientes es posible evaluar la integral para  $q = 1$  como sigue:

$$\ln \left( \frac{\langle P(r, t) \rangle}{\langle P(0, t) \rangle} \right) \sim - \left( \frac{r}{R(t)} \right)^{\gamma}$$

donde  $R(t)$  es el desplazamiento eficaz de un flujo en un espacio  $r$ , a una escala de razón:

$$\langle P^q \rangle \sim \langle P^{r(q)} \rangle, \quad r(q) \sim q^{\gamma}, \quad \text{y } \gamma = 1/3, (q, 0).$$

Si se tuviera  $q < 0$ , entonces (P4) diverge exponencialmente con  $t$ , y  $\gamma(q)$  no es lineal en  $q$ , lo que nos daría que los momentos poseen características multifractales.

Posterior a esto sería necesario calcular la función de distribución para  $\pi$ , definiendo en primer lugar  $N(\log P)$  como el número de lugares que corresponden a valores de  $P$  que están entre el  $\log P$  y  $\log P + d \log P$ . Para esto se usaría la identidad:

$$\langle P^q \rangle = \int_0^{\infty} P^q N(\log, P) d \log, P$$

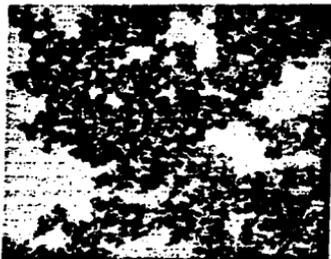
si cambiamos las variables de  $t$  a  $P$ , se obtendría lo siguiente:

$$N \log (P/P_0) \sim [\log (P/P_0)]^{-\alpha} \exp \left( \frac{-b}{[\log (P/P_0)]^{\beta}} \right) P_0 \equiv P(0, t),$$

con  $\alpha = d/4 + 1/2$  y  $\beta = 1/2$ .

Lo que se deduce de lo anterior es que la amplitud de la distribución logarítmica conlleva al conocimiento del aspecto multifractal de los "momentos" originados para la convolución de dos distribuciones estrechas en el espacio  $\zeta$  con  $\phi(r | \zeta)$  y  $P^q(\zeta, t)$ . Mediante la distribución  $\phi(r | \zeta)$  es más estrecha en  $\zeta$ , el resultado de la distribución para  $P(r, t)$ , es logarítmicamente ancho, desde las escalas logarítmicas  $\zeta$  con  $P$ .

Los resultados que se obtuvieron se pueden generalizar para otros fractales lineales como el camino que se auto-evita u otras estructuras de mayor complejidad como los racimos de percolación, como el que vemos en la fig. 1.6.



*fig. 1.6. Racimo de Percolación*

### 1.5. Índices Críticos

Anteriormente se ha dicho que la percolación puede ser tratada como una transición de fase y se caracteriza por las propiedades geométricas de los racimos cercanos a  $p_c$  o  $x_c$  como lo llama A. Efron, es decir el umbral de percolación, el punto de transición.

Lo más importante es la probabilidad (en un lugar o enlace que pertenezca a un racimo infinito) de que el evento tienda a infinito denotada como  $P^\infty$ , si tenemos que  $p < p_c$ , es indicativo de que sólo existen racimos finitos, es decir vías de infiltración o percolación que no cruzan por todo el fenómeno; y entonces tendríamos que  $P^\infty = 0$ . Cuando  $p > p_c$ , se tendría la probabilidad de infinito dependiendo de una variable de control y se incrementaría con  $p$  mediante la ley exponencial.

$$P^\infty \sim (p - p_c)^\beta$$

Entonces  $p$ , describe el orden en los sistemas de percolación y puede identificarse como el "parámetro de orden". Por el aspecto de los racimos finitos, su tamaño alrededor de  $p_c$ , se caracteriza por la amplitud de correlación  $\xi$ . Esta es igual al radio de correlación  $R$ , (como señala A. Efron), es la distancia media entre dos lugares del mismo racimo finito. Cuando  $p$  se aproxima a  $p_c$ , se incrementa  $\xi$ , como sigue:

$$\xi \sim |p - p_c|^{-\nu}$$

y se tendrá el mismo exponente alrededor del umbral y el número medio de lugares (masa) de un racimo finito también diverge como vemos en esta relación:

$$S \sim |p - p_c|^{-\gamma}$$

también para esta expresión se tiene el mismo exponente alrededor de  $p_c$ . Para obtener ambos aspectos  $\xi$  y  $S$  sobre el promedio de todos los racimos finitos que se requieren en una red fueron necesarios dichos índices críticos.

En analogía ahora con las cantidades  $P_\infty$  y  $S$  en sistemas magnéticos, se encuentra la magnetización  $m$  y la susceptibilidad  $x$  como podemos ver en la fig. 1.7.

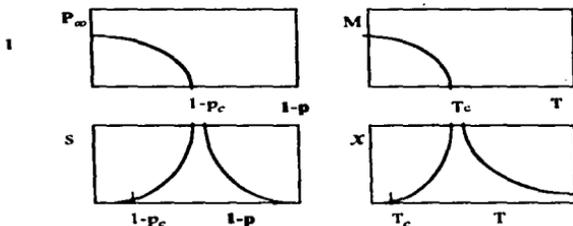


fig. 1.7.  $P_\infty$  y  $S$  comparado con la magnetización  $m$  y la susceptibilidad  $x$ .

En concreto, los exponentes  $\beta$ ,  $\nu$  y  $\gamma$ , describen el comportamiento crítico de cantidades típicas asociadas con la transición de percolación, por ello se denominan exponentes o índices críticos. Como una característica de ellos podemos decir que tienen un carácter universal y no dependen de detalles estructurales de una malla llámese ésta cuadrada o triangular, tampoco del tipo de percolación que se trate (lugares, límites o continua), y sólo dependen de la dimensión del problema.

A lo anterior podemos darle el carácter de *propiedades universales* además de ser una característica general de las transiciones de fase, en las cuales los parámetros de orden (*probabilidades*) se desvanecen continuamente hacia el punto crítico.

Para caracterizar las transiciones de percolación no sólo se cuenta con los exponentes anteriores; el tamaño de la distribución de los racimos de percolación, son descritos por algunos otros exponentes como  $\alpha$ ,  $\tau$ , y  $\sigma$ . Pero existen relaciones entre éstos exponentes, y todos ellos pueden obtenerse conociendo sólo dos de ellos.

Percolación	d=2	d=3	d≥6
Parámetro de orden $P_{\infty}:\beta$	5/3 <sup>a</sup>	0.417	1 <sup>c</sup>
Amplitud de correlación $\xi^{\nu}$	4/3 <sup>a</sup>	0.003 <sup>b</sup>	1/2 <sup>c</sup>
Tamaño del racimo principal $S_y$	43/18 <sup>a</sup>	0.873	1 <sup>c</sup>
		0.008 <sup>b</sup>	
		1.795	
		0.003 <sup>b</sup>	
Magnetismo	d=2	d=3	d≥6
Parámetro de orden $m:\beta$	1/8	0.32	1/2
Amplitud de correlación $\xi^{\nu}$	1	0.63	1/2
Susceptibilidad $\chi^{\nu}$	7/4	1.24	1

Tabla 1.1. Valores exactos y las mejores estimaciones para exponentes críticos en percolación y magnetismo con: a=exacto, b=simulación numérica c=exacta.

Los exponentes mencionados en esta parte, describen las propiedades físicas asociadas con la transición; también muestran las leyes exponenciales conocidas a partir de la cercanía al punto crítico  $P_c$ , éste se caracteriza o describe en sí mismo por su exponente crítico.

A partir de que sabemos que la ocupación de los lugares en un racimo es un proceso aleatorio con probabilidad  $P$ , podemos escribir la siguiente relación:

$$\zeta(r) = 2P^r$$

que es la expresión que denota el número promedio de lugares sobre el mismo racimo a una distancia  $r$  de un lugar ocupado y arbitrario. En principio, dos lugares separados por una distancia  $r$ , deben de cumplir para pertenecer al mismo racimo, que todos los  $r - 1$  lugares entre esa distancia que los separa, deberán estar ocupados.

El factor 2 viene al caso ya que el lugar que deseamos puede estar a la derecha o izquierda de un punto cualquiera de referencia. Y tenemos aquí de nuevo el concepto de *radio de correlación*, a este respecto; sabemos que está definido como la distancia media entre 2 lugares ubicados sobre el mismo racimo tal y como sigue:

$$\xi^2 = \frac{1+P}{(1-P)^2} = \frac{1+P}{(P_c - P)^2}$$

con esta expresión podemos encontrar que  $\nu = 1$  en una dimensión.

También podemos expresar la relación de correlación  $\zeta(r)$  cercana al punto crítico  $p_c$ , mediante una exponencial:

$$\ln \zeta(r) \sim r/\xi$$

donde la amplitud de correlación representa el radio de decomposición progresiva de la función de correlación. Como un siguiente paso, se considera a la masa media del racimo infinito.

$$S = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} g(r)$$

Donde el 1 representa el lugar de origen y se asume que dicho lugar se encuentra ocupado, denotando esto como se ve a continuación:

$$S = \frac{1+p}{1-p} \sim (p_c - p)^{-1}$$

de lo cual se puede deducir que  $\gamma = 1$  para una dimensión.

La Teoría de Percolación adoptó la idea de la universalidad de los índices críticos y de la Teoría de las Transiciones en Fase de Segundo Género, a ella pertenecen por ejemplo, la transición del metal de superconductor, al estado normal.

En la proximidad al punto de transición de fase de segundo género, al igual que cerca del umbral de percolación, se forman zonas de gran tamaño que se distinguen entre sí por sus propiedades; la diferencia consiste en que los límites de esas zonas "no están congeladas", como en la Teoría de Percolación, sino que cambian en función del tiempo gracias al movimiento térmico. El tamaño de las referidas zonas también se conoce como radio de correlación que ya lo hemos mencionado arriba.

De la Teoría de las Transiciones en fase también surge la "hipótesis de la semejanza", la cual consiste en que al acercarse al umbral de percolación, la geometría de gran escala del sistema se transforma de modo semejante, con la particularidad de que todas las dimensiones lineales aumentan proporcionalmente al radio de correlación.

En cuanto a semejanza se encuentra una estrecha relación con los fractales ya que es sabido que éstos poseen como propiedad la "autosemejanza"; esto es, que cualquier parte de la curva (salvo por la escala) es idéntica a la curva entera.

Las ideas de semejanza, introducidas por primera vez por los físicos soviéticos A.Z. Patashinski y V.L. Pokrovski; así como el físico norteamericano L. Kadanoff, constituyen la base de la actual Teoría de las Transiciones de fase y de la Teoría de Percolación.

Al comenzar la descripción conceptual de la percolación, coincidimos en hacer una analogía con el aspecto fractal de los fenómenos, por lo tanto llegamos al punto de considerar a la percolación como una *transición*, la cual se denomina *de fase geométrica*. Esta transición posee la característica de que el tamaño de los racimos cercanos al punto crítico son semejantes geoméricamente, de ahí que puedan ser manejados con cierto grado de facilidad.

En detalle, se considera un "*lugar de percolación*" al lugar de una malla por ejemplo, que ha sido *ocupado* aleatoriamente. Cuando se crean enlaces entre los lugares ocupados y éstos a su vez también son ocupados aleatoriamente, se habla entonces de un "*enlace de percolación*". Entonces dos enlaces ocupados pertenecen a un mismo racimo si están conectados por una "*ruta*" de enlaces ocupados. La concentración crítica de enlaces separa una fase de racimos finitos, de enlaces de fase de racimos infinitos; ésto se podrá ver claramente cuando se explique la percolación en mallas.

## 1.6. Propiedades de las Dimensiones Fractales

En cuanto a los aspectos estructurales tenemos a la dimensión fractal como ya vimos denotada por  $df$ , se sabe primeramente por Stanley, que la estructura de los racimos de percolación puede ser descrita mediante un concepto fractal, considerando primeramente un racimo infinito en la concentración crítica de  $p_c$ , como vemos en la siguiente fig. 1.8.

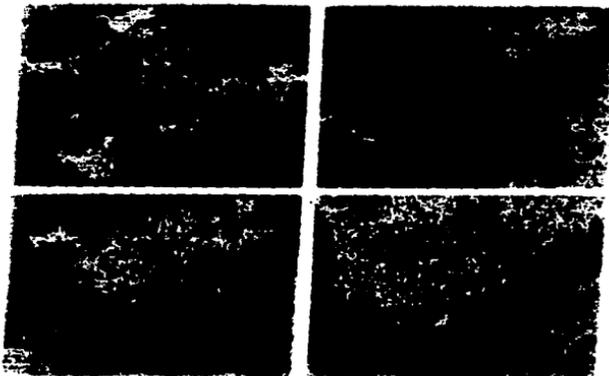


Fig. 1.8. Auto semejanza en un racimo infinito de percolación en la concentración crítica.

Podemos ver que los racimos infinitos contienen hoyos de todos los tamaños similares al tapete de Sierpinski. El racimo es un tanto similar en todas las longitudes escalares, es decir, es tan grande como la unidad y tan pequeño como el tamaño de una malla y puede ser visto como un fractal. La dimensión fractal  $df$  describe cómo, en promedio, la masa  $M$  del racimo dentro de una esfera de radio  $r$  es escalable y en fractales aleatorios  $M(r)$  representa un promedio sobre muchas y diferentes configuraciones de

racimos o su equivalente, sobre muchos y diferentes centros de esferas que están sobre el mismo racimo infinito:

$$M(r) \sim r^{df}$$

Alrededor de lo que se conoce como punto crítico, el espacio medio de los racimos finitos en el sistema son descritos por un espacio de correlación  $\xi$ . En el punto crítico, esta amplitud diverge y los huecos se presentan en el racimo infinito a lo largo de toda la escala.

Sobre el punto crítico, también representa el tamaño lineal de los huecos en el racimo infinito; entonces el espacio de correlación es finito sobre el punto crítico y los racimos infinitos pueden ser autosemejantes sólo en espacios escalares tan pequeños como el espacio de correlación  $\xi$ .

Se podría interpretar  $\xi(p)$  como un espacio típico sobre el cual los racimos son autosemejantes y pueden ser interpretados como un fractal. Para espacios escalares más grandes que  $\xi$ , la estructura no es autosemejante y puede ser interpretada como una estructura que sólo es homogénea y no fractal.

El sobrecruce para el comportamiento fractal a pequeña escala hacia un comportamiento homogéneo a gran escala es mejor ilustrado mediante un arreglo tipo malla puesto por el modelo de Sierpinski con unidades celulares de tamaño  $\xi$ , la vemos en la fig. 1.9

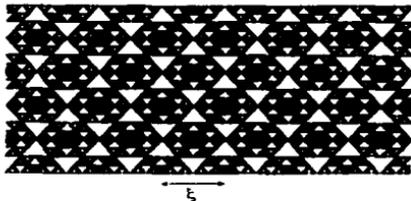


fig. 1.9. Malla compuesta por células de tamaño  $\xi$  (Tapete de Sierpinski).

Si tuviéramos un espacio escalar más pequeño que  $\xi$ , veríamos una estructura fractal; sobre espacios escalares más grandes que  $\xi$ , tendríamos un sistema homogéneo que se compone de muchas células de tamaño  $\xi$ . Matemáticamente esto es:

$$M(r) \sim \begin{cases} r^{d_f}, & r \ll \xi, \\ r^d, & r \gg \xi. \end{cases}$$

La figura 1.10 muestra esquemáticamente la gráfica de  $M(r)$  sobre el umbral de percolación. Para  $r \ll \xi$ , la pendiente es  $d_f$  mientras que para  $r \gg \xi$ , la pendiente es  $d$ .

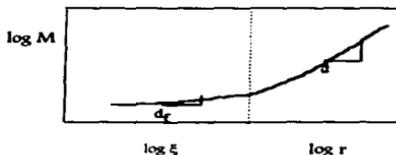


fig. 1.10. Relación de pendientes para  $M(r)$

Se puede relacionar la dimensión fractal  $d_f$  de los racimos de percolación a los exponentes  $\beta$  y  $\nu$ . La probabilidad de que un lugar arbitrario dentro de un círculo de radio  $r$  más pequeño que  $\xi$ , pertenezca al racimo infinito, es el radio entre el número de lugares sobre el racimo infinito y el total de lugares:

$$P_\infty \sim (rd_f / rd), \quad r < \xi$$

Esta ecuación es correcta para  $r = a\xi$ , donde  $a$  es una constante arbitraria más pequeña que la unidad. Substituyendo  $r = a\xi$  en la expresión anterior, tenemos:

$$P_\infty \sim (\xi^{d_f} / \xi^d)$$

Ambos lados son potencias de  $p - p_c$ . Si se sustituyen todas las anteriores en ésta última expresión obtenemos:

$$df = d - (\beta / \nu)$$

Por lo tanto, la dimensión fractal del racimo infinito en el punto crítico no es un nuevo exponente independiente, ya que depende de  $\beta$  y  $\nu$ , que son exponentes universales, entonces  $df$  también es universal.

Entonces tenemos que mientras la dimensión fractal  $df$  describe cómo la masa de los racimos se escala con la distancia "Euclidiana"  $r$ , la dimensión gráfica  $d_f$ , también conocida como dimensión química o topológica; describe el escalamiento de la masa con la distancia química  $\ell$ .

Para medir la dimensión  $df$ , un lugar arbitrario es escogido de entre el racimo y uno determina el número  $M(r)$  de todos los lugares a una distancia  $r$  de cada sitio escogido. Para medir  $d_f$  en un lugar arbitrario, se escoge éste de entre un racimo y uno determina el número  $M(\ell)$  de entre todos los lugares a los que están conectados estos, mediante una ruta de longitud tan corta o igual a  $\ell$ . Así también para  $M(r)$ , el promedio tiene que ser desarrollado por  $M(\ell)$  después de muchas realizaciones de un experimento y en una malla "Euclidiana" regular, tanto  $d_f$  como  $df$  coinciden con el espacio Euclidiano de dimensión  $d$ .

Al hacer la combinación de  $M(r) \sim r^{df}$  y la ecuación anterior, se obtiene una expresión que relaciona la distancia química  $\ell$  entre dos lugares y la distancia Euclidiana  $r$  entre ellos de la manera siguiente:

$$r \sim \ell^{d/df} \equiv \ell^\nu$$

La expresión anterior puede escribirse como  $\dot{\epsilon} \sim r^{d_{min}}$ .

donde:

$d_{min} = 1/v$  que es la dimensión fractal de la ruta mínima entre dos lugares, ésta puede ser útil para distinguir entre diferentes estructuras fractales que posean una dimensión fractal similar, de hecho ésta es su utilidad.

Para que quede más claro, si tuviéramos una dimensión  $d = 3$ , los racimos de DLA y los de percolación tendrían aproximadamente el valor de la dimensión fractal  $d_f \cong 2.5$  pero tienen diferente valor de  $\bar{v}$ :  $\bar{v} = 1$ , para DLA y  $\bar{v} \cong 0.75$  para percolación.

Como una nota importante podemos decir que no ha sido encontrada alguna relación entre la dimensión gráfica  $d_f$  y los exponentes críticos. Los valores de ésta dimensión y  $v$  son conocidos únicamente por métodos aproximados, digamos generadores de números aleatorios y éste es un punto más a favor de la utilización de éste método auxiliar de la simulación.

Pasando ahora a las estructuras fractales (físicas), como las mallas que mencionamos en repetidas ocasiones, tenemos a los perímetros externos y totales en una malla, de ellos podemos decir que si tenemos bloqueados los nudos de uno en uno hasta quedar bloqueados completamente, la corriente en la malla es cero; tal y como se muestra en la figura.

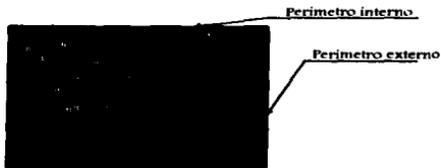


fig. 1.11. Malla cuadrada con perímetros interno y externos delineados.

El perímetro externo son otras estructuras de los racimos que también son denominados cascós, son el esqueleto o espina elástica de la estructura; los cascós son los lugares adyacentes a los sitios vacíos y están conectados con vías infinitas de lugares vacíos. El perímetro total también incluye o toma en cuenta los hoyos o huecos que se encuentren en el racimo. Ahora, el esqueleto se define como la unión de la totalidad de rutas más cortas desde un sitio dado hasta todos los lugares a una distancia química  $\ell$ , la espina elástica es la unión de las rutas más cortas entre dos lugares.

Interpretando en las mallas, las dimensiones fractales tendríamos en estructuras como ésta, a la dimensión  $d_B$  del armazón; esta dimensión por ejemplo, es más pequeña que  $d_f$  de los racimos en otras estructuras. El valor numérico de esta dimensión también se obtiene por mecanismos aleatorios, y el valor que se tiene es  $d_B = 13/8$ . También la dimensión  $d_t$  del armazón, es más pequeña que la de percolación. En contraposición con esto, encontramos que  $\nu$  es la misma para ambos casos: los racimos del armazón y los de percolación son iguales en valor, lo cual nos lleva nuevamente a concluir que este índice es universal.

Los cascós en el racimo cuando se tiene  $d=2$ , denotan a la dimensión  $d_h=7/4$ , este valor fue encontrado por Sapoval, Rosso y Gouyet y fue probado más rigurosamente por Saleur y Diplantier.

## 1.7. Algunas aplicaciones

### 1.7.1. Epidemias y Fuegos Forestales

Ya que los aspectos de percolación son fáciles de interpretar en una malla con efectos de ubicación física del fenómeno, tomemos de nuevo y para ejemplificar una malla cuadrada. Cada lugar (llámese nudo, cruce, amarre, etc.), representa un individuo que puede ser "infectado" con una probabilidad  $P$  y a su vez también cada individuo puede ser inmune a la infección con su correspondiente probabilidad  $(1 - P)$ .

Para un tiempo inicial  $t = 0$ , el individuo que se localiza exactamente en el centro de la malla (denominado semilla), es infectado. Puede decirse ahora que en una correspondiente unidad de tiempo, ese lugar infectado, puede infectar a todos los lugares no inmunizados que estén cerca de él.

Para una segunda unidad de tiempo, éste lugar infectado infectará a su vez a todos los demás lugares vecinos no inmunizados y así sucesivamente; de este modo al haber transcurrido un tiempo  $t$ , todos los lugares no inmunizados en la celda química  $t$ -ésima alrededor de la semilla, estarán infectados.

La longitud máxima  $l$  de la ruta más corta entre los lugares infectados y la semilla es  $l = t$ , y el proceso de infección aleatoria de los individuos es exactamente la misma que la ocupación aleatoria de lugares en sitios de percolación como ya se ha discutido previamente, pero en vez de generar muchos racimos sobre una malla, solamente se formarán racimos independientes para cada semilla.

Cerca del punto crítico, sólo se generan racimos finitos y la enfermedad ya no sigue extendiéndose después de un número finito de pasos. Sobre el punto crítico  $p_c$ , existe una probabilidad finita de que la epidemia continúe por siempre; y de acuerdo con lo anterior, hacia  $p_c$  el número medio de individuos infectados en un tiempo  $t$  es determinado por la dimensión gráfica  $d_f$  como sigue:

$$M(t) \sim t^{d_f}, \quad t \gg 1.$$

El radio de expansión de la epidemia se relaciona con  $M(t)$  por  $d_f$ ,  $R(t) \sim M(t)^{1/d_f}$ . Sobre el punto crítico, para  $R \gg \xi$ ,  $d_t = d_f = 2$  y la extensión de la epidemia se caracteriza por la velocidad "v" del frente de la epidemia, por definición  $v \equiv dR/dt \sim t^{d_t/d_f-1}$ . De la expresión anterior se desprende que  $d_f < d_f$ , que  $v > 0$  hacia  $p_c$ , y mayor que cero sobre el punto crítico.

Para obtener la dependencia de  $v$  sobre  $p - p_c$ , se tiene  $R(t)$  puede escribirse como sigue:

$$R(t) \sim t^{d_t/d_f} f(t/t_g)$$

donde  $t_g$  es la escala de tiempo característico en el proceso. Entonces a partir de que el radio o amplitud de correlación es la única característica de longitud que se tiene, es posible asociar  $t_g$  con el tiempo necesario para generar un racimo de tamaño  $\xi$ . Para  $r < \xi$ , el racimo es auto-semejante, y se obtiene de la fórmula de arriba  $t_g \sim \xi d_f/d_f$ . Para  $t \ll t_g$ . Se tiene  $R(t)$  es proporcional a  $t^{d_t/d_f}$  y  $f$  es constante. Para  $t \gg t_g$ , el sistema es homogéneo y  $R(t)$  es lineal en  $t$ . Para satisfacer esta relación es necesario que el lado derecho de la expresión también sea lineal en  $t$ , lo cual lleva a que  $f(t/t_g) \sim (t/t_g)^{1-d_t/d_f}$  y  $R(t) \sim t_g^{d_t/d_f-1} \sim \xi^{1-d_t/d_f} t$ . Por consiguiente la velocidad de expansión de la enfermedad también se describe mediante un exponente crítico.

$$v \sim \xi^{1-d_f/d_f} \sim (p - p_c)^{(1/\nu-1)\nu}$$

A partir de  $d = 0$  el exponente  $(1/\nu - 1)\nu$  es mucho más pequeño que uno, aparece una velocidad relativamente prolongada justo sobre  $p_c$ , y la transición extensiva hacia  $p_c$  es abrupta en vez de llana.

### 1.7.2. Gelación Cinética

Continuando con las aplicaciones de la Teoría de Percolación, llegamos a ésta que a pesar de tener un nombre tan insignificativo para un lector común, pero que encierra uno de los principios que es la transformación de bloques pequeños en grandes bloques (hablando de un sistema dividido en tales), tal y como ocurre en los productos gelatinosos como la gelatina vegetal comestible, el yoghurt y algunos cosméticos.

Los procesos de gelación describen la transición de una solución que sólo contiene moléculas pequeñas a un estado en gel donde se forma un gran número de moléculas del tamaño del sistema. A esta transición se le ha denominado *transición sólido-gel* y se separa en dos fases con diferentes propiedades físicas. Por ejemplo, el grado de viscosidad diverge cuando la transición se aproxima a su estado sólido. La gelación aparece en sistemas biológicos y juega un papel muy importante en la cromatografía, en la fabricación de pegamentos y cosméticos, y en la tecnología de alimentos como se mencionaba.

Para este proceso, fue sugerido un modelo de gelación cinética por Maneville y Seze, quienes lo relacionan al problema de percolación; en el modelo se considera por ejemplo: una malla cuadrada con lugares ocupados aleatoriamente por monómeros con probabilidad  $P$  y con moléculas solubles con probabilidad  $(1-P)$ . Cada monómero tiene cierta "funcionalidad"  $f$  cuyo estado muestra cuántos de sus límites pueden activarse ( $f = 1, 2, 3, 4$  en la malla cuadrada). después, una pequeña concentración de reactivos, representan a los electrones insaturados, que están presentes en los monómeros de manera aleatoria.

El papel de estos reactivos es precisamente activar las uniones entre los monómeros mediante un proceso aleatorio de caminos o rutas. Un reactivo escogido al azar intenta brincar aleatoriamente al sitio vecino más cercano. Si este lugar es un monómero con una función como  $f \geq 1$ , el salto tiene éxito, la funcionalidad se reduce mediante 1, y la unión entre ambos monómeros se activa. Si el sitio en cuestión es un monómero con una función  $f = 0$  ó una molécula soluble, el salto es rehusado. En ambos casos el tiempo se incrementa por  $1/N_f(t)$ , donde  $N_f(t)$  es el número de reactivos presente en un tiempo  $t$ .

Si dos reactivos están cercanos al mismo monómero, lo aniquilan. De acuerdo con esto, la concentración de reactivos decrementa con el tiempo  $t$ , pero en general no alcanzan a llegar a cero ya que los reactivos rodeados por monómeros con funcionalidad en cero son atrapados.

La concentración  $p(t)$  de límites ocupados se incrementa con el tiempo  $t$ . Existe una concentración crítica  $p_c$  en la cual la expansión de racimos existe para el primer tiempo y entonces es formado el gel y como en la percolación normal, el comportamiento crítico de esta transición geométrica está descrita por los componentes  $\nu$  y  $\beta$ .

Al realizar la simulación con el método de Monte Carlo  $\nu$  y  $\beta$  son los mismos para percolación normal, esto implica que la dimensión fractal  $df$  también permanece sin cambio; en contraste, la dimensión fractal del esqueleto del gel hacia  $p_c$  es  $d_B \cong 2.22$  en  $d = 3$  y difiere considerablemente del valor encontrado en percolación ordinaria.

### 1.7.3. Invasión de la Percolación

La invasión de la percolación fue introducida como un patrón para describir los procesos dinámicos de saturación de modelos.

El ejemplo más común y sencillo para este tipo de percolación lo encontramos en el subsuelo, precisamente en los yacimientos de petróleo que se consideraban extintos, con no mucha probabilidad de explotar aún más en los de muy difícil acceso tal y como es el caso del ejemplo: En un yacimiento petrolífero ya no era posible el extraer este preciado combustible de la manera acostumbrada (utilizando bombas), al querer aplicar alternativas estas resultaban en daño a la capa del subsuelo pues se tenían que hacer grandes excavaciones y resultaban demasiado costosas.

La alternativa que ofrece la percolación para extraer ese petróleo es el saturar el modelo, en otras palabras; se propone infiltrar agua para que se saturen los poros de la

roca; como el petróleo y el agua son fluidos incompresibles y además el petróleo es desplazado por el agua cuando ésta invade a la roca, el petróleo tenderá a salir sino a la superficie, si a un lugar más accesible para las bombas.

Pasemos a ver el modelo como tal: Los poros medianos pueden considerarse como una red de túneles los cuales están conectados por vías de flujo angostas, la velocidad del flujo se mantiene constante y es muy lenta para ese grado de viscosidad que puede compararse al grado de fuerza de la capilaridad.

Para la estructuración matemática del modelo, volvemos a las mallas de tamaño digamos  $L \times L$ , la cual representará al petróleo. El agua será considerada como un invasor quien es inicialmente colocado a lo largo de uno de los lados de la malla.

Para describir las diferentes resistencias de las vías o túneles por los cuales invadirá el agua, se asigna a cada lugar de la malla un número aleatorio entre cero y uno. La invasión del agua sigue la ruta que presente menor resistencia.

Para cada lapso de tiempo, el lugar que representa el perímetro será ocupado por el agua, entonces el petróleo será desplazado.

Por otra parte, sabemos que el aceite y el agua no se mezclan entonces puede darse el caso de que el petróleo quede rodeado por el agua y quedar atrapado en algunas regiones del medio poroso.

Entonces si mediante el proceso de Monte Carlo se genera una presilla, el invasor no puede entrar más a esa región. Fig. 1.12

Veamos la ejemplificación gráfica que nos muestra esta figura, tenemos que el invasor queda aislado completamente.

Tal y como se puede apreciar en la siguiente gráfica que mostramos, correspondiente a la fig. 1.12

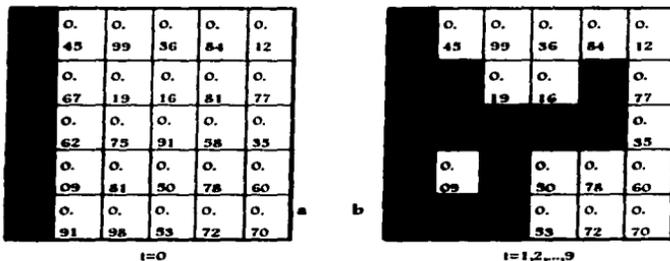


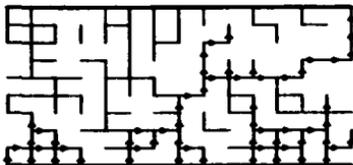
Fig. 1.12. Invasión de la Percolación sobre una malla cuadrada de  $5 \times 5$  (a) al tiempo inicial y (b) después de 15 iteraciones.

Enunciando ahora a la dimensión fractal de los racimos de agua se encontró que numéricamente tiene el valor de  $df = 1.82$ . En otro tipo de experimentos tales como la invasión lenta del glicerol en el aire por una red de conductos de aire con  $d = 2$ , desarrollada por Lenormand y Zazcone muestra que  $df = 1.8$ , en un buen acercamiento con resultados numéricos. Este valor de la dimensión fractal  $df$  sugiere que el modelo de la invasión de la percolación está en una clase universal y diferente de la percolación regular. Apoyando esta conclusión que viene de recientes resultados numéricos tenemos que para la dimensión química el valor es de  $d_t = 1.40 \pm 0.07$  (ó  $\nu = 1/d_{min} \cong 0.77$ ). Este valor es significativamente pequeño para  $d_t$  que el de percolación.

#### 1.7.4. Percolación dirigida

Los modelos correspondientes a este tipo de percolación pueden ser vistos como los que se dieron a conocer anteriormente para los fuegos forestales bajo influencia de un fuerte viento que sopla en una dirección. Considerando una unión de percolación sobre una malla cuadrada de concentración  $p$ , y asignando una dirección a cada lazo o unión

pero a cada punto de unión vertical estará en la dirección de las  $x$  positivas y los puntos de unión vertical estarán en la dirección de las  $y$  positiva. fig. 1.13



*fig. 1.13. Percolación Dirigida en una malla cuadrada bajo el umbral de percolación . Aunque existe una ruta entre las líneas superior e inferior, la corriente no puede seguir. Por consiguiente, el umbral de percolación es más grande que  $p_c$  en la percolación ordinaria.*

A. Bunde y S. Havlin ilustran este tipo de percolación de manera semejante a A. Efros, pues en la malla que ejemplifican , asumen que cada unión de la malla es un conductor en el cual la corriente eléctrica se transmite solo a lo largo de las direcciones de las flechas tal y como se muestra en la figura. Ahí existe una concentración crítica  $p_C$  que separa a la fase no conductora de la que sí conduce. La concentración crítica es tan grande como la que existe para la percolación ordinaria (como se muestra en la figura 1.7, y el valor para  $p_C$  en una malla triangular es de aproximadamente igual a 0.479, y para una malla cuadrada éste valor es de aproximadamente: 0.644701.

La estructura de los racimos es ahora más fuerte y tiene dos longitudes de correlación como característica que son:  $\xi_{\perp}$  y  $\xi_{\parallel}$  ,que son la longitud perpendicular y paralela correspondientemente a la dirección principal, siendo esta la dirección  $x$ - $y$ . Esta anisotropía es dual para el hecho de que los racimos hacia  $p_C$  son semi-afines, parecidos a los objetos autosemejantes.

El comportamiento crítico para ambas longitudes de correlación está descrito por:

$$\xi_{\perp} \sim |p_c - p|^{-\nu_{\perp}}$$

y para la longitud paralela:

$$\xi_{\parallel} \sim |p_c - p|^{-\nu_{\parallel}}$$

con  $\nu_{\perp} \neq \nu_{\parallel}$ , y ambos son diferentes del exponente  $\nu$ . Utilizando la teoría escalar podemos obtener la siguiente relación:

$$\gamma + 2\beta = (d - 1)\nu_{\perp} + \nu_{\parallel}$$

esta expresión es una generalización de  $d\nu = 2\beta + \gamma$ . Sustituyendo el campo medio de componentes  $\gamma = \beta = \nu_{\perp} = \nu_{\parallel} = 1$ , en la expresión anterior nos da la dimensión crítica  $d_c = 5$  para la percolación dirigida. La mejor estimación para el exponente crítico ha venido usando con 55 términos en el método de las series de expansión, dando los siguientes valores para  $d = 2$ ,  $\nu_{\parallel} = 1.7334 \pm 0.001$ ,  $\nu_{\perp} = 1.0972 \pm 0.0006$ , y  $\gamma = 2.2772 \pm 0.0003$ , sugiriendo los valores racionales  $\nu_{\parallel} = 26/15$ ,  $\nu_{\perp} = 79/72$ , y  $\gamma = 41/48$ . También  $\beta$  y otros exponentes estáticos difieren de los de percolación ordinaria.

### 1.7.5. El árbol de Cayley (Red de Bethe)

Este es un método de solución para problemas de percolación y tiene la ventaja de que contempla a la concentración crítica como menor que uno y el régimen relativo a  $P_c$  puede ser estudiado ampliamente.

El árbol de Cayley es una estructura de nudos externos que son como sigue:

Se comienza en un lugar central con  $Z$  número de ramas (de longitud 1), el final de cada rama es otro lugar y obtenemos  $Z$  lugares que constituyen la primera cubierta del

árbol de Cayley. Desde cada lugar,  $Z-1$  nuevas ramas salen generando  $Z(Z-1)$  lugares en la segunda cubierta.

El proceso es continuo como se muestra en la fig. 1.14 que esquematiza la red de Bethe en un ejemplo común (la dispersión de rumores), y un árbol de Cayley infinito con dos ramas emanando de cada lugar es generado a continuación. Para  $Z=2$ , el árbol reduce la cadena en una dimensión; no hay ciclos en el sistema, desde cualquiera de los dos lugares son conectado por únicamente una ruta.

La distancia Euclidiana "r:" no fue medida aquí ya que la red comienza describiendo solamente por la distancia química  $l$  entre dos sitios, por ejemplo la distancia química entre el lugar central y el lugar sobre la  $t$ -ésima cubierta que es exactamente  $l$ .

La  $t$ -ésima cubierta del árbol consiste de  $Z(Z-1)^{t-1}$  lugares, incrementándose exponencialmente con  $l$ . En una dimensión " $d$ " de red Euclidiana, con " $d$ " finito, el número de lugares a una distancia  $l$ , se incrementa de la forma  $l^{d-1}$ . La dependencia exponencial puede ser considerada como una ley de comportamiento con un exponente infinito; a partir de la propiedad universal, nosotros podemos esperar que los exponentes críticos derivados de la percolación del árbol de Cayley sean los mismos para la percolación, sobre cualquier red de dimensión infinita.

Más aún como se mostró en la tabla comparativa el valor de las dimensiones fractales, tenemos que la dimensión crítica superior para la percolación es  $d_c=6$  y los exponentes críticos son los mismos para todas las dimensiones con  $d \geq 6$ .

Veamos la ejemplificación de la red de Bethe en el caso de la propagación de rumores:

Al hacer circular un rumor, cada persona se lo cuenta a 3 personas las que a su vez se lo contarán a 3 personas más y para contarlo le toma 20 minutos, entonces tenemos que:

En las "décimas manos", recibirán información 59 049 personas y todo ello en tan solo 3 horas 20 minutos.

Simplificando el problema soportamos que:

- El número de personas a las que cada individuo le transmitirá la información, es el mismo.
- Cada persona obtiene la información de solo una persona.

Por lo anterior, el modelo del problema representa un árbol que se ramifica infinitamente por todos lados:

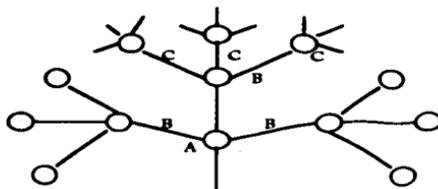


Fig. 1.14. Árbol de Cayley o Red de Bethe, modelo de la propagación de rumores, muestra un árbol de ramificaciones infinitas.

Este modelo es conocido como red de Bethe en honor al físico Hans A. Bethe y como vemos, cada uno de los círculos puede ser considerado como la base de su árbol.

En el modelo se representa a las personas que propagan el rumor como círculos claros y a las personas que no lo propagan como círculos oscuros, tal y como se ve en la fig 1.15.

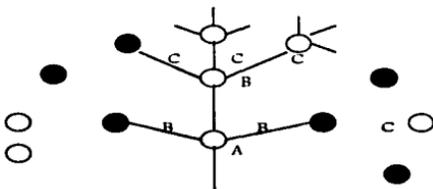


Fig. 1.15. Red de Bethe con  $q=3$ , de personas que propagan un rumor (círculo claro y personas que no lo propagan (círculo oscuro). El número de líneas salientes de cada círculo puede ser arbitrario (pero idéntico para todos los nudos).

Se supone que el sistema tiene una cantidad infinita de círculos, entonces se plantea si la propagación del rumor morirá después de un número finito de transmisiones partiendo de que el rumor inicia en el punto A, o si el mismo alcanzará una distancia infinita a partir de A, y en el sistema infinito se pondrá al alcance de un número infinito de personas.

Y tenemos que esto depende de la cantidad relativa de círculos claros y oscuros y de las configuraciones que aparecen en los alrededores del nudo.

En realidad se trata del problema de los nudos de la Teoría de percolación, pero enunciado con arreglo a la red de Bethe.

Entonces el problema a resolver es qué probabilidad  $P(x)$ , habría de que los rumores transmitidos a una persona elegida al azar se pongan al alcance de un número infinito de personas, y bueno en primera instancia tendremos que esta probabilidad es igual a cero si consideramos valores pequeños de  $x$ , pero diferenciará de cero si tomamos cierto valor crítico de  $x$ , que sería  $x=x_c$ .

### 1.7.6. Solución al problema de los nudos de la Red de Bethe.

Si tenemos la probabilidad de que los rumores lleguen a un número infinito de personas como  $P(x)$ , y a  $Q(x)$  como la probabilidad de que los rumores No lleguen a un número infinito de personas, ( $q$ ) como la cantidad de rumores transmitidos por una persona y  $W(x)$  como la probabilidad de que todos los  $q$  canales se interrumpen en cualquier etapa.

Ordenando elementos tendríamos una expresión como la siguiente:

$$Q(x) = 1 - P(x)$$

ya que lo que va a examinarse forma un sistema completo de acontecimientos.

Tenemos también que la propagación de rumores puede interrumpirse por dos causas incompatibles:

- La persona elegida al azar es de la categoría de los que no transmiten el rumor.
- La persona escogida es de la categoría que si transmite el rumor ( $q$ ) a los demas, y todos los canales procedentes de esa gente se interrumpirán en distintas etapas ( $W'$ ), por lo que tendríamos ahora la siguiente expresión.

$$Q = 1 - x + W'$$

Al analizar a  $W'$ , el resultado que describe es la consecuencia de la realización simultánea de dos acontecimientos:

1. - La persona elegida al azar resulta ser de los que transmiten el rumor (su probabilidad es igual a  $x$ ).
2. - Todos los  $q$  canales que parten de los conocidos de la persona elegida al azar se interrumpen en cualquier etapa,  $W(x)$ .

Obviamente estos acontecimientos son independientes, por lo que:

$$\begin{aligned} W' &= xW(x) \\ \text{así que} \\ Q &= 1 - x + xW(x) \end{aligned}$$

De manera que la probabilidad de que todos los  $q$  canales se interrumpan es igual al producto de las probabilidades de que se interrumpa cada uno de los  $q$  canales por separado (y debemos recordar que cada árbol es independiente de los demás, es decir, que no existen círculos comunes, lo que es típico de la red de Bethe.

Tenemos entonces que:

$$W(x) = [Q(x)]^q$$

sustituyendo la anterior en la de arriba se obtiene:

$$Q = 1 - x + x[Q(x)]^q$$

Y esta ecuación es válida sólo para el intervalo de  $x$  de  $[0, 1]$ .

Podemos escribir esta ecuación a través de  $P(x) = 1 - Q(x)$ :

$$[1 - P(x)]^q x + P(x) - x = 0$$

Cuando  $q=1$ :

$$\text{Si } x=1, \quad P(1)=1.$$

Es decir si todos los círculos son claros, el rumor se extenderá hasta el infinito.

Cuando  $q=2$ :

Existen dos soluciones que tienen sentido físico:

$$P(x)=0$$

Cuando  $x=[0,1/2)$

$$P(x)=2-1/x$$

Cuando  $x=(1/2,1]$

El umbral de percolación en este caso es igual a  $1/2$ .

Una solución análoga existe con todo  $q > 1$ , sin embargo el umbral de percolación  $x_c$ , depende de  $q$ . En un caso general es posible hallar  $x_c$  y el aspecto de  $P(x)$  cuando  $x$  es próximo a  $x_c$ , suponiendo de antemano que  $P(x) \ll 1$ , lo cual siempre es justo en el entorno del umbral de percolación. El término  $(1-P)^q$  puede ser descompuesto según la fórmula del binomio y tomando los términos de mayor peso, obtenemos:

$$\frac{q(q-1)}{2} x^2 P^2 = q P x - P$$

Suponiendo  $P$  diferente a 0, dividimos ambos miembros de la igualdad entre  $P$  y encontramos que:

$$P = \frac{2(x-1/q)}{x(q-1)}$$

Cuando  $q=2$ , la expresión se reduce a cero con  $x=1/q$ . De ahí, resulta que tenemos la expresión:  $x_c = 1/q$ .

La solución tiene sentido cuando  $q > 1$ ,  $x > 1/q$  y solamente para valores de  $x$  muy próximos a  $1/q$ . Por ello en el denominador de la expresión  $P = \frac{2(x-1/q)}{x(q-1)}$ , se puede poner  $x=1/q$ . Definitivamente tenemos:

$$P = \frac{2q(x-1/q)}{(q-1)}$$

Esta función describe a  $P(x)$  cerca del umbral de percolación.

### 1.7.6.1. Examinando los resultados:

Cuando  $q=1$ , la red de Bethe se convierte en una cadena lineal de nudos, por lo que una cantidad muy pequeña de nudos negros interrumpe la percolación de los nudos blancos, es decir inevitablemente la propagación de los rumores se evita.

Veámoslo en la gráfica de la fig. 1.16



Puede resultar interesante comparar el valor obtenido de  $x_c$  con los resultados de los problemas reticulares en los espacios de gran número de dimensiones. El cálculo aproximado del umbral de percolación del problema de los nudos de la malla metálica, se efectúa para los llamados hiperretículos (o hiperredes). Son retículos del mismo tipo que el cuadrado y el cubo sencillo, pero en un espacio de gran número de dimensiones. El número de coordinación  $z$  (número de nudos inmediatos) es  $z=2d$ , donde  $d$  es la dimensión del espacio.

Los cálculos del Umbral de percolación se realizaban cuando  $d=4,5,6$ , fue demostrado que los resultados se describen bien por la fórmula:

$$xy = \left(1 + \frac{63}{d^{\wedge}2}\right) \frac{1}{z-1}$$

Con los valores de  $d$ , en gran escala puede desprejarse el segundo termino entre paréntesis, con lo que nos queda:

$$xy = \frac{1}{z-1}$$

Pero para la red de Bethe  $q=z-1$ , pues en cada nudo de esta red entra un enlace y  $q$  enlaces salen de él.

De aquí se deduce que el umbral de percolación en la red de Bethe ( $x_c = 1/q$ ) es igual que en la hiperred de gran número de dimensiones. Por lo tanto, la red de Bethe corresponde con un espacio de dimensiones infinitas.

La red de Bethe es el único sistema para el cual se ha conseguido hallar con precisión el aspecto de  $F(x)$ , cerca del umbral de percolación.



## *Capítulo 2*

*Generadores de Números Aleatorios para Ordenador*



# Capítulo 2

## **GENERADORES DE NUMEROS ALEATORIOS PARA ORDENADOR** *(Métodos de numeración aleatoria)*

### *2.1 Introducción*

En el presente capítulo se describen diferentes métodos por los cuales podemos obtener un número cualquiera denominado aleatorio, éste término es debido al proceso en sí, que implica la obtención del mismo; para ello deberemos utilizar algunas herramientas que se describirán a lo largo del capítulo así como reglas y definiciones apegadas a métodos particulares.

De esto se desprenderán analogías entre uno y otro método para que sea posible discernir entre cual de ellos escoger al modelar un caso de percolación. Como veremos más adelante, el más famoso de ellos, es el de Montecarlo, por su sencillez y versatilidad al manejar problemas de la índole que nos interesa en este trabajo pero a manera de referencia histórica y como ejemplificación en uno de los casos que se abordan en este trabajo.

Se verá también que un generador de números aleatorios es utilizado de manera similar en los experimentos denominados análogos, los cuales se ejemplifican

al resolver un problema de percolación mediante rejillas y nudos bloqueados<sup>1</sup> ya que como vimos se debía hacer una operación recurrente al utilizar el generador y de este modo obtener el nodo que se bloquearía inmediatamente después del ya bloqueado, este proceso solo se describe a manera de ejemplificación.

En este capítulo se describen varios tipos de generadores que pueden implementarse en la computadora con la ayuda de algún lenguaje de programación ya sea Pascal o lenguaje C. Describimos también la importancia que tiene para efectos de implementación, el periodo que tenga el generador que vayamos a usar, además ejemplificamos el por qué de la importancia también de la semilla de inicio y de escoger de manera práctica a los multiplicadores utilizados así como el uso del tipo de variable a utilizar en el lenguaje que se trabaje, esto para no tener problemas acortamiento de periodo por truncamiento o redondeo y para evitar desbordamiento del generador.

Un aspecto importante que también se aborda en este capítulo es la selección de la semilla de inicio, su importancia radica en que es la parte que da vida al generador y de ella depende el buen desempeño y los resultados obtenidos en las sucesiones, las cuales a final de cuentas determinan el resultado de la simulación completa.

Veremos algunos aspectos que deben considerarse para escoger una semilla adecuada para nuestro generador en particular, y a pesar de que las mismas consideraciones nos dicen en sus apartados el por qué debemos o no escoger una semilla con características particulares, nos harán dudar acerca de las propiedades aleatorias de nuestro generador, pero el mismo lector se dará cuenta al revisar la construcción de los generadores, que es indispensable mencionar estas características para escoger la semilla.

Concluiremos mencionando algunos mitos en cuanto a la construcción de generadores de aleatorios para así dar paso al siguiente capítulo que también nos habla de algunos otros aspectos de la generación de números aleatorios.

---

<sup>1</sup> Problema de nudos bloqueados y paso de corriente por una malla., capítulo 1.

## ***2.2 Aspectos generales para un generador de números aleatorios***

### ***2.2.1. Selección de la semilla de inicio***

Una "semilla" es aquel número que se utiliza para dar inicio a la corrida de un generador de aleatorios, es uno de los aspectos más importantes en la generación de aleatorios ya que si tenemos una mala semilla y además de todo un generador con malas propiedades, podría afectarnos en el resultado de la simulación completa, por lo que debemos elegir apropiadamente la semilla de inicio en la generación.

Podemos tener cualquier valor de semilla si tenemos por ejemplo un generador de periodo completo que requiera de solo una variable aleatoria, pero si en nuestro proceso de simulación requerimos más de una variable aleatoria (como es el caso de las simulaciones de multi-sucesión<sup>1</sup>), la semilla debe escogerse con mucho más cuidado. Casi todas las simulaciones son multi-sucesión y para escoger la semilla que inicie nuestro generador debemos considerar los siguientes puntos:

- a) No debemos utilizar cero aunque veremos que es factible para generadores congruentes lineales o LCG's, pues podríamos hacer que un LCG multiplicativo o un generador de Tausworthe<sup>2</sup> se vayan siempre a cero.
- b) Debemos evitar los valores pares aunque a veces resulten ser tan buenos como los valores nones, en sí cuando tenemos generadores de periodo completo, puede servirnos cualquier semilla diferente de cero. En cambio, si tenemos un generador que no sea de periodo completo, digamos un LCG multiplicativo con un módulo  $m = 2^k$ , la semilla debiera ser impar.

---

<sup>1</sup> Entendamos simulación multi-sucesión como aquella que necesita de más de una variable aleatoria para llevarse a cabo.

<sup>2</sup> Generadores aleatorios que se verán más adelante.

En lo posible debemos tratar de evitar de usar los generadores que necesitan de demasiadas condiciones para escoger el valor de la semilla de inicio, o aquellos en los que la longitud de su periodo dependen directamente del valor de la semilla.

- c) Tratar de evitar el subdividir las sucesiones. Es usar una sola sucesión de valores para las variables a utilizar es un error muy común. En una simulación necesitamos parámetros de comparación y varias corridas de nuestro generador de aleatorios, para que de ese modo tengamos una confiabilidad en los resultados aún mayor.
  
- d) Utilizar sucesiones que no se traslapen. Esto es, no usar sucesiones repetitivas cosa que conseguimos al cambiar la semilla de inicio en la segunda corrida, por una nueva.

Debemos obtener resultados independientes en las primeras corridas de nuestro generador y las mismas condiciones del problema nos irán delineando las convergencias en las que se concluya despues de generar las corridas en la simulación.

- e) Reutilizar la semilla en caso de simulaciones que necesiten de réplicas. Esto es, cuando nuestra simulación requiera de ser demostrada más de una vez para casos de demostración.

Es conveniente no reinicializar la semilla en generadores que serán utilizados en simulaciones de una sola vez, o en aquellos en los que se requiere de que el resultado siempre sea el mismo, es decir, demostraciones recurrentes.

- f) No utilizar semillas aleatorias. Algunos analistas utilizan valores aleatorios para las semillas, tales como la fecha del día de hoy por ejemplo, lo cual puede causar algunos problemas tales como que la simulación no puede reproducirse y además, no se garantiza que las sucesiones múltiples no se traslapen.

En general, no debemos utilizar números aleatorios sucesivos que se obtuvieron de un generador como una semilla de inicio.

## 2.3. Números Pseudoaleatorios

### 2.3.1. Montecarlo: un método aunque antiguo, aún popular.

Los orígenes de este famoso método matemático, se remontan al siglo pasado en la ciudad de Montecarlo, situada en el principado de Mónaco y es precisamente en esta ciudad en donde se popularizó uno de los juegos de azar más famosos hasta nuestros días: la ruleta. Esta ciudad se ganó la fama de capital mundial de este juego y en honor a ella se nombró así a este método de generación numérica aleatoria.

El nombre es una generalización que se le ha dado al procedimiento matemático que se lleva a cabo al utilizar un generador de números aleatorios como punto principal, hoy en día se conocen diferentes lenguajes de programación con los cuales es posible desarrollar un generador de números aleatorios. El programa estándar genera números aleatorios con una distribución uniforme entre cero y la unidad, de modo que los valores que toma la variable aleatoria infinita para un programa de este tipo aparecen con igual probabilidad dentro del intervalo (0,1).

El programa puede ser del tipo recurrente que es lo más común para fines de experimentación, lo que significa que puede ser utilizado muchas veces consecutivas y la probabilidad de ocurrencia para cada número es la misma, dicho número puede ser de una cantidad  $x$  de cifras después del punto dependiendo de la clase de ordenador en que se programe.

Pueden darse algunos casos en los que únicamente sea posible utilizar este método debido al grado de complejidad del modelo en cuestión, digamos un estudio del comportamiento de una enfermedad viral en humanos o animales, el comportamiento de un gas que como sabemos se constituye por un número muy grande de partículas, es entonces que necesitamos de una computadora para simular las propiedades del gas.

El tamaño del modelo o propiamente de las partículas que intervendrían en la simulación, dependería de la memoria de la máquina en la cual se simularía.

El por qué de lo anterior es sencillo de explicar: en memoria se llevarán a cabo todas las transacciones matemáticas necesarias en la simulación.

Además de que por principio de cuentas, en memoria deben guardarse todas y cada una de las coordenadas de las partículas y la simulación del comportamiento del gas consistirá en elegir una de las partículas que se desplazará a una distancia aleatoria de modo que las coordenadas correspondientes a esa partícula cambiarán en la memoria. Este sería el principio de un proceso iterativo que cubriría a cada una de las partículas involucradas en la simulación.

Después para lograr la "animación" de las partículas tendríamos que recurrir a las herramientas de la física tales como: energía potencial (en cuanto a la interacción de las partículas), lo cual dependería a su vez de la disposición recíproca, es decir, a la posición en el plano con respecto a cada una de ellas, por ende ésta tendría que calcularse en cada desplazamiento. Ahora, de acuerdo a la energía potencial, tendríamos las probabilidades de desplazamiento hacia una y otra distancia y dirección, de tal modo ya estaríamos simulando por completo al sistema, ya tendríamos "vida" y movimiento.

### 2.3.2. Algoritmos para numeración aleatoria

El algoritmo necesario en la generación de números aleatorios es un procedimiento recurrente que básicamente necesita un número inicial, éste se denomina *semilla* en el argot matemático. Tenemos que mediante ciertos procesos u operaciones subsiguientes, el número que inicia la secuencia, se convertirá en uno nuevo, de manera que tendríamos un  $x_j$  igual a una función  $\eta$ , multiplicada por el número anterior o  $x_0$ , tal y como vemos:

$$x_j = \eta(x_0)$$

donde  $\eta$  corresponde a la sucesión de operaciones, misma que lleva el proceso que transformará al número  $x_0$  en el siguiente es decir  $x_j$ , es esta función la que encierra el algoritmo de generación de aleatorios, entonces al tener el segundo número nos servirá de

base para generar el siguiente que correspondería a  $x_2$  según el mismo criterio.

Debemos declarar que la función  $y_n$  se estructura para que los números generados cumplan con las desigualdades deseadas, por ejemplo:  $0 \leq y_n \leq 1$ .

Después de haber creado el generador sería recomendable verificar que los resultados son correctos, cosa que podemos hacer con facilidad, en principio de cuentas, la sucesión no puede ser infinita ya que la computadora opera solamente con números que contienen una determinada cantidad de cifras (también llamadas órdenes).

Hablando de cuántos números podemos obtener con este procedimiento podemos decir que es limitado ya que existen  $10^2$  números de dos cifras y  $10^n$  de  $n$  cifras; debido a esto el número subsecuente, se repetirá o coincidirá con el anterior y así sucesivamente. Por lo tanto, tenemos una sucesión periódica inminente al utilizar las fórmulas anteriores.

De aquí la denominación de pseudoaleatoriedad y su periodo de sucesión se denomina como  $L$ ; y en cuanto al cálculo del periodo de la sucesión, lo determinamos partiendo de la cantidad de cifras decimales escogidos para generar el número.

### **2.3.3. Método del Centro del Cuadrado**

Este método fue creado en 1946 por John Von Neumann y prácticamente es el primero de su tipo. El método permite generar números aleatorios sin importar la cantidad de cifras que se deseen utilizar, dependiendo claro de la capacidad de la máquina en la que estamos trabajando. Así por ejemplo si se desea un número de cuatro cifras, se elige primeramente al número de inicio  $x_0$  después elevándolo al cuadrado se obtendría un número de ocho cifras del cual tomaríamos las centrales, lo cual nos daría el segundo número para elevarlo al cuadrado, esto es:

$$\text{Si } x_0 = 9635$$

$$9635^2 = 92833225$$

$$x_1 = 8332$$

$$8332^2 = 69422224$$

$$x_2 = 4222; \text{ etc.}$$

Aunque podemos tener el caso de que un número tenga ceros como cifras centrales, lo cual implica que las cifras se reduzcan y al elevarlo al cuadrado debemos obtener un número de ocho cifras (para este caso), por lo cual debemos agregar ceros a la derecha de este número para obtener el siguiente de cuatro:

$$x_2^2 = 39059865$$

$$x_3 = 598$$

$$x_3^2 = 00357604$$

$$x_4 = 3576; \text{ etc.}$$

Entonces para obtener  $n$  números aleatorios en el intervalo de cero a uno con una distribución uniforme, se obtienen mediante la fórmula  $x_n = num_n / 10^d$ , donde la letra  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , y los resultados obtenidos serían:

$$x_0 = 0.9635, x_1 = 0.8332, x_2 = 0.4222; \text{ etc.}$$

Habiendo llegado al final de la descripción de este método, tomaremos las referencias que le quitan méritos al mismo. Algunos de los números iniciales implican en este método la generación o unificación de un ciclo, reduciendo el periodo a cuatro, lo cual como se aprecia, no tiene mayor utilidad.

Otro de los aspectos negativos de este método es que tenemos números que al elevarlos al cuadrado, se reproducirán a sí mismos, tales como el cero y algunas otras

sucesiones de números simple y sencillamente se reducen a cero.

## 2.4. Generadores Congruentes Lineales

Este es uno de los mejores métodos, sino el mejor en la generación de números aleatorios y su procedimiento es relativamente sencillo:

Los principios de este método en particular se remontan a 1951, cuando D.H. Lehmer, descubrió muy buenas propiedades aleatorias al manipular los residuos de potencias sucesivas de un número; lo que obtenía era un  $n$ -ésimo número el la secuencia dado por la división que se hace de la  $n$ -ésima potencia de un entero cualquiera denominado  $a$ , mediante otro entero llamado  $m$  y tomando su residuo, de la siguiente forma:

$$x_n = a^n \text{ mod } m$$

y una expresión equivalente que se utiliza para calcular  $x_n$  y después  $x_{n-1}$  es:

$$x_n = ax_{n-1} \text{ mod } m$$

Al parámetro  $a$  se le denomina multiplicador y a  $m$  módulo. Como nota histórica podemos mencionar que entre los experimentos de Lehmer se encuentra muy en particular ese en el que designó valores para  $a$  y  $m$ , siendo estos:  $23$  y  $10^8 + 1$ , respectivamente; estos valores fueron de muy fácil implementación para la computadora ENIAC, que era una máquina que manejaba ocho dígitos decimales y de las primeras de su época.

Hoy en día, podemos ver que los actuales generadores de números aleatorios, son una simple generalización de la propuesta de Lehmer y tiene la siguiente forma:

$$x_n = ax_{n-1} + b \text{ mod } m$$

Tenemos en esta expresión, que  $x_n$  corresponde a los números enteros entre 0 y  $m-1$ , y  $a$  y  $b$ , son constantes no negativas.

Describiendo el procedimiento para su utilización diremos que primeramente deben elegirse cuatro números positivos enteros que serán utilizados como factor, desplazamiento, módulo y primer número de la sucesión.

La fórmula que determina la sucesión de números es la siguiente:

$$X_{n+1} = (kX_n + c) \bmod m$$

donde  $k$ , es el factor;  $n$ , el índice con los valores desde 0,1,2,... Cuando encontremos el símbolo  $(b \bmod m)$ , nos indicará que debe hacerse una operación de la cual hay que tomar el residuo de la división del número  $b$  por  $m$ . De esto resulta evidente que la expresión:  $(b \bmod m) < m$ , lo cual implica que los números que conforman la sucesión  $X_n$  satisfacen la desigualdad  $X_n < m$ .

E igualmente para obtener los números con distribución uniforme dentro del intervalo de cero a la unidad, se obtienen mediante la siguiente fórmula:

$$y_n = \frac{X_n}{m}, \quad n = 0,1,2,\dots$$

Cabe señalar que debemos escoger los cuatro números iniciales con sumo cuidado además de que la sucesión debe ser periódica, y el periodo no puede ni debe superar el tamaño de  $m$ .

Los números que conforman a la sucesión  $X_n$  son enteros y cumplen con la desigualdad  $X_n < m$ ; el periodomáximo posible que podemos obtener es lógicamente  $L=m$ , y como nota final debemos mencionar que si no pensamos seriamente en los números de inicio para este generador, lo que obtendremos serán sucesiones de corto periodo y para

ciertos fines como los de experimentación sin miras a simulación, no serían de mucha utilidad.

En el caso de que  $b$  sea diferente de cero, el periodo máximo  $m$ , se obtiene si y solo si se cumple lo siguiente:

- i)* los enteros  $m$  y  $b$  son primos relativamente, lo cual quiere decir que no tienen otro factor en común mas que el número 1;
- ii)* cada uno de los numero primos que sea factor de  $m$  es también factor de  $a-1$ ;
- iii)* el factor  $a-1$  es múltiplo de 4, y el entero  $m$  es también múltiplo de 4.

Debe recordarse que estas condiciones se satisfacen para  $m = 2k$ ,  $a = 4c + 1$ , y si  $b$  es impar. Aquí, tenemos que  $c$ ,  $b$ , y  $k$  son enteros positivos.

De lo anterior se desprende que se le llame generador de periodo completo a un generador que logra utilizar su máximo periodo posible. Esto no garantiza que sea un buen generador ya que existen algunos otros generadores con un menor autocorrelacion entre sus números sucesivos y son preferidos por ello. Por ejemplo, los dos siguientes generadores, tienen el mismo periodo completo, mas el primero tiene un valor de correlación de 0.25 entre el  $x_{n-1}$  número y el  $x_n$ , donde el segundo, tiene una correlación de menos de  $2^{-18}$ .

$$x_n = (2^{34} + 1)x_{n-1} + 1 \text{ mod } 2^{35}$$

$$x_n = (2^{18} + 1)x_{n-1} + 1 \text{ mod } 2^{35}$$

## 2.5. Generadores congruentes lineales multiplicativos.

Estos generadores tienen la forma:

$$x_n = ax_{n-1} \text{ mod } m$$

Tenemos que en términos de tiempo de proceso, son más eficientes los generadores congruentes lineales que los mixtos y para tener mayor eficiencia, podemos tener como ya se había mencionado a  $m$ , como una potencia de 2, para que la operación módulo sea trivial.

De esto se concluye que tenemos dos tipos de generadores congruentes lineales multiplicativos, uno que corresponde a  $m = 2^k$  y el que tiene a  $m \neq 2^k$ .

- Primeramente describiremos el correspondiente al generador congruente lineal multiplicativo con  $m = 2^k$ :

Estos generadores no tienen un periodo completo ya que el periodo máximo posible para un LCG con el módulo igual a 2 a la potencia  $k$ , llega a solo un cuarto del periodo completo, esto es:  $2^{k-2}$ . Es posible lograr alcanzar este periodo si el multiplicando  $a$ , es de la forma  $8i \pm 3$  y la semilla inicial es un entero impar.

Si consideramos el siguiente generador multiplicativo del tipo LCG, ciertos resultados:

$$x_n = 5x_{n-1} \text{ mod } 2^5$$

al usar una semilla de  $x_0 = 1$ , se obtiene la secuencia siguiente: 5, 25, 29, 17, 21, 9, 13, 1, 5,.... Como vemos, el periodo es de 8, que es solo  $\frac{1}{4}$ , del periodo máximo posible que es de 32.

Si cambiamos la semilla de 1 a 2, es decir;  $x_0 = 2$ , la secuencia es 10,18,26,2,10,. Tenemos que en este caso, el periodo es de solamente 4.

Entonces vemos que al escoger una semilla impar tiene cierto grado de importancia pues nos afecta gravemente en la longitud del periodo de nuestro generador.

Vamos ahora el caso de que el multiplicando no sea de la forma  $8j \pm 3$ , si tenemos el caso de este generador:

$$x_n = 7x_{n-1} \text{ mod } 2^5$$

Si usamos la semilla  $x_0 = 1$ , obtendremos la secuencia: 7, 17, 23, 1, 7,.... Tenemos de nueva cuenta que el periodo es de 4, por lo que concluimos que las condiciones que expusimos más arriba, son necesarias para lograr el máximo periodo.

Debemos mencionar que aunque el máximo periodo posible para un LCG multiplicativo con la  $m = 2^k$  es solo  $1/4$  de lo máximo posible, el periodo resultante puede no ser tan corto para otras aplicaciones, en algunos casos, puede resultar mejor el utilizar un generador multiplicativo que uno mixto.

Pasemos ahora a los generadores LCG multiplicativos con  $m = 2^k$ .

Esta puede ser una solución al problema de los generadores de un corto periodo, digamos usando el módulo  $m$ , que es un número primo y para este caso y al escoger apropiadamente al multiplicador  $a$ , es posible obtener un periodo de  $m-1$ , el cual es casi igual al máximo periodo posible  $m$ . Debemos darnos cuenta de que a diferencia de un LCG mixto,  $x_n$ , se obtiene de un LCG multiplicativo y nunca puede ser cero si  $m$  es un número primo.

Los valores de  $x_n$  caen entre 1 y  $m-1$ , y cualquier LCG multiplicativo con un periodo de  $m-1$ , es un generador denominado "de periodo completo".

Podemos demostrar además que un generador LCG multiplicativo, puede ser de periodo completo si y solo si el multiplicador  $a$ , es una raíz primitiva del módulo  $m$ . Tenemos que por definición,  $a$  puede ser una raíz primitiva de  $m$  si y solo si  $a^n \text{ mod } m \neq 1$  para  $n = 1, 2, \dots, m-2$ .

Consideremos el siguiente ejemplo para un LCG multiplicativo:

$$x_n = 3x_{n-1} \bmod 31$$

Comencemos con una semilla de  $x_0 = 1$ , la secuencia que obtenemos es: 1, 3, 9, 27, 19, 26, 16, 17, 20, 29, 25, 13, 8, 24, 10, 30, 28, 22, 4, 12, 5, 15, 14, 11, 2, 6, 18, 23, 7, 21, 1, ... Aquí, el periodo es de 30, de manera que este es un generador de periodo completo.

Si usáramos un multiplicador de  $a = 3$ , obtendríamos la secuencia: 1, 5, 25, 1, ... Tenemos que el periodo es solamente 3, lo cual es muy pobre para cualquier propósito.

Analizando al multiplicador utilizado anteriormente, es decir el 3, vemos que es una raíz primitiva de 31 a partir del valor positivo más pequeño para  $n$  para el cual se tiene:  $3^n \bmod 31 = 1$  es  $n = 30$

Y también tenemos que 5, no es raíz primitiva de 31 a partir de:

$$5^3 \bmod 31 = 125 \bmod 31 = 1$$

Un dato más que nos sería útil es el saber algunas otras raíces primitivas de 31 que son: 11, 12, 13, 17, 21, 22, y 24.

Es importante que mencionemos las precauciones que debemos tener al implementar algún LCG, la más importante de ellas es garantizar las propiedades de nuestro generador al calcular las sucesiones exactas y sin errores de redondeo, lo que implica que al calcular los números subsiguientes del generador, debemos usar aritmética entera sin desbordamiento en el ordenador, ya que depende del lenguaje de programación que estemos usando el como vamos a definir nuestras variables, éstas deben ser enteras para quien corresponda serlo.

Cuando se utilizaban lenguajes tales como el BASIC, se tenían problemas en el generador en cuanto a su periodo, es decir que se obtenían periodos cortos debido a la

utilización de números reales, y cuando al calcular se truncaban los resultados por el redondeo, era esto lo que causaba que los periodos se redujeran de manera considerable.

Otro de los problemas con los que nos podemos enfrentar al implementar este tipo de generadores es cuando al utilizar el producto  $ax_{n-1}$ , nos excedamos de la capacidad de la máquina al utilizar el mayor entero que el sistema pueda alojar con lo que causaríamos un desbordamiento.

En respuesta a esta dificultad, surgió en 1979 por conducto de Schrage una solución basada en una identidad:

$$ax \bmod m = g(x) + mh(x)$$

donde:

$$g(x) = a(x \bmod q) - r(x \operatorname{div} q)$$

y:

$$h(x) = (x \operatorname{div} q) - (ax \operatorname{div} m)$$

Tenemos con las expresiones anteriores que  $q = m \operatorname{div} a$ ,  $r = m \bmod a$ . La operación de  $A \operatorname{div} B$  es equivalente a dividir  $A$  entre  $B$  pero truncando el resultado. Esto puede ser demostrado para toda  $x$  en el rango de  $1, 2, \dots, m-1$ , y las expresiones involucradas en el cálculo de  $g(x)$  son menores que  $m-1$ .

También en el caso de si  $r < q$ ,  $h(x)$  es 0 ó 1, y puede ser inferida de  $g(x)$ ;  $h(x)$  es 1 si y solo si  $g(x)$  es negativa. Por lo que la operación  $ax$  podría causar desbordamiento, y sería preciso no llevarla a cabo.

El siguiente ejemplo ilustra de mejor manera cómo se implementan estos conceptos:<sup>3</sup>

$$x_n = 7^5 x_{n-1} \bmod (2^{31} - 1)$$

<sup>3</sup> El programa que utiliza este generador se muestra en el Apéndice de este trabajo.

o en su caso:

$$x_n = 16,807 x_{n-1} \bmod 2,147,483,647$$

En este caso las variables implicadas tienen los siguientes valores:

$$a = 16,807$$

$$m = 2,147,483,647$$

$$q = m \operatorname{div} a = 2,147,483,647 \operatorname{div} 16,807 = 12,773$$

$$r = m \bmod a = 2,147,483,647 \bmod 16,807 = 2,836$$

Lo único restante es implementarlo en la maquina y verificar los resultados.

## 2.6. Generadores de Tausworthe

Este tipo de generadores reciben el nombre de su creador: Tausworthe quien los propuso primeramente en el año de 1965 y tomaron auge debido a su demanda en aplicaciones criptográficas, ya que en dichas aplicaciones se requiere de generadores de bastante longitud, a partir de esa época por ejemplo, en que se demandaban de 64 bytes (512 bits), y vemos ahora que pueden requerirse de mayor longitud para codificar un mensaje.

La utilización para codificar mensajes es un tanto sencilla y la describiremos en forma general: Se producen números grandes utilizando una secuencia aleatoria de números grandes utilizando una secuencia aleatoria de dígitos binarios (0 ó 1), y se divide la secuencia en cadenas de la longitud que se desee, de esta forma el mensaje queda entre cadenas aleatorias de ceros y unos por lo que permanece encriptado. Este fue el método utilizado por Tausworthe. Los generadores de este tipo presentan la forma:

$$b_n = c_{q-1}b_{n-1} \oplus c_{q-2}b_{n-2} \oplus c_{q-3}b_{n-3} \oplus \dots \oplus c_0b_{n-q}$$

donde  $c_i$  y  $b_i$  son variables binarias con valores de 0 y 1 y el  $\oplus$  es el operador exclusivo. Este generador utiliza los últimos  $q$  bits de la secuencia. Por ello, es llamada "secuencia autorregresiva de orden  $q$ ", o en notación lo encontramos como un  $AR(q)$ ; el cual puede tener un periodo máximo de  $2^q - 1$ .

Podemos utilizar una variable denotada como  $D$  que es un operador de retardo tal como:  $Db(n) = b(n+1)$ , por lo que podríamos escribir la ecuación 26.8 como:

$$D^q b(i-q) = c_{q-1} D^{q-1} b(i-q) + c_{q-2} D^{q-2} b(i-q) + \dots + c_0 b(i-q) \text{ mod } 2$$

o de la forma:

$$D^q - c_{q-1} D^{q-1} - c_{q-2} D^{q-2} - \dots - c_0 = 0 \text{ mod } 2$$

Tenemos en esta expresión que la sustracción aritmética es equivalente a la adición, por lo que la ecuación anterior es equivalente a:

$$D^q + c_{q-1} D^{q-1} + c_{q-2} D^{q-2} + \dots + c_0 = 0 \text{ mod } 2$$

La parte polinomial en la parte derecha de la ecuación es llamada polinomio característico y es por regla escrito usando una  $x$  en lugar de la  $D$ , en la forma:

$$x^q + c_{q-1} x^{q-1} + c_{q-2} x^{q-2} + \dots + c_0$$

Ahora pasando al periodo de un generador de Tausworthe diremos que depende de las características polinomiales directamente; el periodo es el entero positivo  $n$  más pequeño para el cual  $x^n - 1$ , es divisible por la característica polinomial; de manera que el máximo periodo posible con un polinomio de orden  $q$  es  $2^q - 1$  y los polinomios que dan este periodo son llamados "polinomios primitivos".

Tenemos aquí un ejemplo de generación de números aleatorios utilizando un polinomio primitivo.

Considerando al polinomio:  $x^7 + x^3 + 1$

Desarrollaremos primeramente utilizando  $D$  en lugar de  $x$  para obtener la fórmula de generación para la secuencia de bits.

$$D^7 b(n) + D^3 b(n) + b(n) = 0 \pmod{2}$$

o también:

$$b_{n+7} + b_{n+3} + b_n = 0 \pmod{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

también podemos utilizar el operador or-exclusivo reemplazando la suma del *mod 2*, y obtendríamos:

$$b_{n+7} \oplus b_{n+3} \oplus b_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

o también:

$$b_{n+7} = b_{n+3} \oplus b_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Si sustituimos  $n-7$  por  $n$ , tenemos:

$$b_n = b_{n-4} \oplus b_{n-7}, \quad n = 7, 8, 9, \dots$$

Si comenzamos con  $b_0 = b_1 = \dots = b_6 = 1$ , tenemos la siguiente secuencia de bits:

$$b_7 = b_3 \oplus b_0 = 1 \oplus 1 = 0$$

$$b_8 = b_4 \oplus b_1 = 1 \oplus 1 = 0$$

$$b_9 = b_5 \oplus b_2 = 1 \oplus 1 = 0$$

$$b_{10} = b_6 \oplus b_3 = 1 \oplus 1 = 0$$

$$b_{11} = b_7 \oplus b_4 = 0 \oplus 1 = 1$$

Si mostráramos un diagrama a bloques de las iteraciones que tiene este generador mostraríamos lo siguiente:

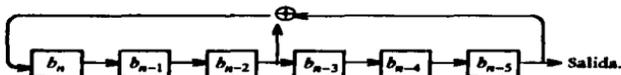


fig. 2.1 Esquema de la implementación de un generador de aleatorios usando el polinomio de la forma  $x^5 + x^3 + 1$ .

La secuencia completa que se obtiene es la siguiente:

```
1111111 0000111 0111100 1011001 0010000 0010001 0011000 10111021
0110110 0000110 0110101 0011100 1111011 0100001 0101011 1110100
1010001 1011100 0111111 1000011 1000000.
```

Los primeros 7 bits corresponden a la semilla y la secuencia comienza a repetirse solo después de 127 bits, además vemos que tiene un periodo de 127 o lo que es lo mismo  $2^7 - 1$ , bits.

## 2.7. Generadores de números de Fibonacci extendidos

El investigador Marsaglia hizo que este tipo de generador pasara algunas pruebas estadísticas y recomienda su implementación utilizando localidades para almacenamiento de números. Durante la inicialización de la corrida, estas localidades deben llenarse con 17 enteros, no todos deben ser pares, y también utilizan dos punteros para 17 y 5 respectivamente. Más adelante, se describirá este proceso.

Una secuencia de números de Fibonacci se denota por  $\{x_n\}$  y se generan a partir de una relación como ésta:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

Es posible generar números aleatorios de Fibonacci al realizar la siguiente modificación a la expresión que los genera:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \bmod m$$

Este tipo de generador lo estamos mencionando a manera de referencia histórica y debemos hacer notar que aunque podemos generar números aleatorios de Fibonacci con la expresión anterior, ésta no tiene buenas propiedades de aleatoriedad, tiene una correlación serial muy particular por lo que solamente exponemos aquí algunas líneas que describen su generación:

```
x := L[i] + L[j];
L[i] := x;
i := i - 1; IF i = 0 THEN i := 17;
j := j - 1; IF j = 0 THEN j := 17;
Return x;
```

La operación de suma que se realiza en la primera línea es equivalente a realizar la operación  $\bmod 2^k$  en una máquina que opera con  $k$ -número de bits con 2 complementos aritméticos. En cuanto al periodo del generador tenemos que es de  $2^k(2^{17} - 1)$ , para  $k = 8, 16, 32$ , estos periodos equivalen a decir:  $1.6 \times 10^7$ ,  $4.3 \times 10^9$  y  $2.8 \times 10^{14}$ , respectivamente. Lo cual es de un tamaño bastante considerable.

## 2.8. Generadores de números aleatorios combinados

Podemos obtener un generador de mayor calidad al utilizar técnicas combinadas de producción de aleatorios, éstas técnicas podemos describirlas en general como sigue:

- **Agregar números aleatorios que fueron obtenidos por dos o más generadores.**

Es posible combinar los números generados anteriormente por algún otro generador que hayamos creado anteriormente, cuando las dos o más secuencias de números tienen periodos de diferente longitud, y fueron combinados mediante diferentes algoritmos obtenemos entonces un incremento en las propiedades aleatorias y también en la longitud del periodo.

Un ejemplo de lo anterior que fue sugerido por L'Ecuyer en 1988, el cual consiste en combinar los siguientes dos generadores:

$$\begin{aligned}x_n &= 40014x_{n-1} \bmod 2,147,483,563 \\y_n &= 40692y_{n-1} \bmod 2,147,483,399\end{aligned}$$

Al combinarlos obtendríamos una expresión parecida a esto:

$$w_n = (x_n - y_n) \bmod 2,147,483,562$$

Tenemos entonces un generador cuyo periodo ahora es de  $2.3 \times 10^{18}$  y que ya no tiene el problema de que todos los puntos generados caigan en un rango pequeño.

- **Números aleatorios utilizando el operador or-exclusivo, obtenidos por dos o más generadores.** En esta técnica además de utilizar los números que se obtuvieron, también reemplazamos la operación de adición por la de or-exclusivo. En 1984 fue demostrado por Santha y Vazirani que utilizando esta operación en los generadores de números aleatorios es benéfico para generar una secuencia con mayores propiedades de aleatoriedad.
- **Shuffling o Mezclar.** En esta técnica se utiliza una secuencia tan solo para funcionar como un índice que nos da la relación de cuales números deberán ser devueltos como producto de la generación; es decir se hace un recuento y posteriormente se decide en base a un procedimiento al azar, cuál de los

números primeramente generados deben ser entregados como secuencia-resultado. En 1964 fue propuesta una técnica desarrollada por Marsaglia y Bray, la cual se conoce como algoritmo M.

El procedimiento que se utiliza parte de un arreglo de 100 lugares, los cuales se llenan con números aleatorios que fueron resultado de una secuencia  $x_n$ . Para generar un aleatorio, se genera uno nuevo denominado  $y_n$  que debe de estar entre 0 y  $m-1$  y después se escalan para obtener un índice que se denota como:  $i = 1 + 100y_n / m$ .

Ahora, el valor del  $i$ -ésimo elemento del arreglo se regresa como el siguiente número aleatorio, después se genera un nuevo valor de  $x_n$  y se almacena en la  $i$ -ésima localidad. Tenemos entonces un generador con buenas propiedades de distribución aleatoria pero el único problema que presenta es que después de varia iteraciones, difícilmente escaparemos de obtener una subsecuencia que ya tengamos lo cual ya implementado en una simulación podría no ser aceptable.

## **2.9. Falacias sobre la generación de números aleatorios**

Al comenzar a adentrarnos en investigación y simulación, tenemos contacto con la generación de números aleatorios, por lo que al ser novatos en el medio podemos creer algunos puntos que a simple vista son factibles pero que al ahondar en ellos y sobre todo con la ayuda de gente madura en el manejo de estos temas, nos damos cuenta de que son falacias simplemente. A continuación mencionaremos algunos puntos que forman parte de estos mitos que se creen acerca de los generadores de números aleatorios:

- ◆ Sabemos por lo anteriormente escrito, que los generadores de aleatorios necesitan de una expresión que los describa, la cual nos es útil para su implementación en la computadora mas ello no implica que dicha expresión deba ser muy complicada para aportar los mejores resultados de aleatorios quepodamos generar con alguna otra expresión más sencilla.

En otras palabras, si utilizamos una secuencia de operaciones que no nos permitan saber o que sea difícil adivinar el número que seguirá en la sucesión resultante, no es necesariamente garantía de que la sucesión de números resultante pueda pasar una prueba estadística para verificar la uniformidad e independencia de las sucesiones; es mejor utilizar operaciones sencillas y que sea fácil el analizar sus propiedades aleatorias.

- Podemos pensar que para un generador, el pasar una sola de las pruebas estadísticas es suficiente para dar por bueno un generador de aleatorios, pero como veremos en el siguiente capítulo, si un generador pasa una prueba, no garantiza que pase la misma prueba si utilizamos una semilla de inicio diferente, ni tampoco que pasará todas las pruebas una vez que haya pasado la primera.

Una sucesión de números progresivos por ejemplo, es muy factible de que pase una prueba Chi-cuadrada, mas en primera instancia éstos, no serían números aleatorios cien por ciento, y como mencionamos arriba, el pasar una prueba no garantiza pasar las siguientes, ni tampoco el que inventemos un generador nos garantiza que nos proporcionará una sucesión totalmente aleatoria.

- Podemos pensar que un número aleatorio ya por el hecho de recibir esta denominación, es totalmente impredecible y de hecho es así. Pero en el caso de generadores de números pseudo-aleatorios tales como un LCG, podemos calcular con facilidad los valores para  $a$ ,  $c$  y  $m$ ; por lo que podemos predecir la secuencia que obtendremos hacia adelante y hacia atrás de la sucesión sin esperar a que tengamos algún error. En el caso de generadores utilizados para criptogramas podemos confiar en la aleatoriedad de la sucesión, claro después de haberle aplicado las correspondientes pruebas estadísticas.
- Por lo que corresponde a las semillas, creemos que algunas pueden ser mejores que otras y de hecho esto puede ser cierto en algunos generadores. Pensemos en un ejemplo:

El generador que describe la siguiente expresión trabaja muy bien para todas las semillas que se quisieran intentar, mas si intentamos inicializarlo con  $x_0=37,911.$ , el generador nos dará como resultado este mismo número por siempre y en general debemos evitar este tipo de generadores:

$$x_n = (9806x_{n-1} + 1) \bmod (2^{17} - 1)$$

- ◆ Se puede pensar que la implementación exacta no es tan importante. Debemos considerar que la longitud del periodo y las propiedades de aleatoriedad de un generador se garantizan en su exactitud solamente si la expresión que describe al generador está implementada correctamente, es decir, sin problemas de truncamiento por redondeo o desbordamiento de la variable que nos da la sucesión.

Recordemos que al hablar de la implementación en la computadora, debemos manejar cierto tipo de variable para evitar el desbordamiento y truncamiento por redondeo, debemos de vigilar cuándo es necesario utilizar enteros, enteros dobles, etc., según nuestros propios requerimientos y las posibilidades de nuestra computadora.

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA



**Capítulo 3**

**Pruebas Estadísticas para  
Generadores de Números Aleatorios**



# Capítulo 3

## **PRUEBAS ESTADÍSTICAS PARA GENERADORES DE NÚMEROS ALEATORIOS** *(La aleatoriedad de un generador)*

### *3.1 Introducción*

En este capítulo veremos como probar estadísticamente a nuestros generadores de números aleatorios y la razón para ello es que, como programador de la simulación de modelos, necesitamos estar completamente seguros de que nuestro generador resultará funcional para los propósitos para los que fue diseñado.

La simulación del modelo a analizar debe garantizar confiabilidad primeramente, para que nosotros al verificar los resultados no tengamos duda alguna en cuanto a su interpretación, y los resultados obtenidos.

Podemos verificar la aleatoriedad de nuestro generador de números aleatorios mediante varias pruebas estadísticas, aunque la primer prueba y más sencilla quizá, es el graficar y observar el histograma de distribución de frecuencias, lo cual nos ayuda a detectar errores en la implementación de algoritmos recursivos, esto nos puede ahorrar muchos ensayos en la simulación mismos que podemos encontrar no satisfactorios a

simple vista o también puede darse el caso de que consideremos a nuestra simulación todo un éxito, sin mirar antes que estamos completamente equivocados.

Es posible utilizar todas y cada una de las pruebas que se describen a continuación, mas cabe mencionar que si nuestro generador va pasando las pruebas, no nos indica que es condición suficiente para dar el generador por bueno, digamos; si llegara a fallar alguna de las pruebas, debemos estar concientes de que el generador es de mala calidad y el que pase todas las pruebas, tampoco garantiza que sea bueno.

Si al emplear una semilla diferente, el generador que ya había pasado una prueba ahora la falla, veremos entonces que el pasar una prueba no garantizó la confiabilidad del generador a utilizar.

Cabe mencionar que las pruebas que se describirán a continuación, pueden ser utilizadas para probar las variaciones aleatorias; es decir que una vez habiendo obtenido los resultados de la simulación, nos es posible correr pruebas a las variables de la simulación que presenten distribuciones no uniformes, lo cual es una paso más a cubrir en cuanto a simulación por computadora se refiere.

Se mencionan algunos ejemplos con vistas a ilustrar la descripción de la prueba, cómo se realiza y la interpretación de los resultados para discernir entre un buen y un mal generador de numeración aleatoria.

### 3.2 Prueba Chi-Cuadrada

Esta es la prueba más común para determinar si los datos que se obtienen de una simulación satisfacen las especificaciones de una distribución dada; ésta prueba es general por lo cual es posible utilizarla en cualquier tipo de distribución.

Además de ser utilizada para probar la aleatoriedad de los números en el aspecto de probar que las sucesiones sean independientes y que tengan una distribución específica, también se utiliza para encontrar variación dentro de los propios generadores.

El primer paso a seguir es graficar el histograma de los datos obtenidos para observar las frecuencias y compararlas con las que se obtuvieron de la función de densidad específica. Así por ejemplo si tenemos un histograma con  $k$  celdas y dos variables denotadas con  $a_i, b_j$ ; que fueron observadas y se tiene un valor esperado para la  $i$ -ésima celda entonces la prueba a realizarse consistiría en calcular lo siguiente.

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i}$$

Al ver esta expresión nos damos cuenta de que  $D$  tiene una distribución Chi-Cuadrada con  $k - 1$  grados de libertad.

Si deseamos obtener un cálculo exacto  $D$  debe ser cero, pero debido a condiciones de aleatoriedad podría ser diferente de cero.

Mostremos un ejemplo para observar la aplicación de esta prueba:

Si utilizamos el generador  $x_n = (125x_{n-1} + 1) \bmod(2^{12})$  con una semilla  $x_0 = 1$ ; e iteramos mil veces, obtenemos números que al graficarlos en un histograma usando 10 celdas a intervalos de 0.1 entre 0 y 1. Ahora tomando el nivel de significancia  $\alpha = 0.10$ ,

¿Se estaría seguro de que los números son independientes e idénticamente distribuidos, y que tienen una distribución uniforme?, es decir, se tendría IID  $U(0,1)$  (que es como se denota).

Pongamos los resultados en una tabla:

celdas	observados	esperados	$(\text{observados} - \text{esperados})^2$
			esperados
1	100	100.0	0.000
2	96	100.0	0.160
3	98	100.0	0.040
4	85	100.0	2.250
5	105	100.0	0.250
6	95	100.0	0.490
7	97	100.0	0.090
8	125	100.0	6.250
9	107	100.0	0.490
10	94	100.0	0.360
Total	1000	1000.0	10.380

Tabla 4.1. Prueba Chi-Cuadrada para 1000 números.

Vamos al análisis: Si los números aleatorios estuviesen IID  $U(0,1)$ , cada una de las 10 celdas deberían tener  $1000/10$  o 100 observaciones aproximadamente, con el grado de libertad correspondiente vemos que satisfacen la condición de ser independientes idénticamente distribuidos e uniformes.

Esta prueba funciona mejor cuando el tamaño de las celdas son escogidos de manera que las probabilidades esperadas sean iguales, es decir, un histograma con tamaños diferentes en sus celdas es más fácil de usar que un histograma de celdas iguales.

En sentido estricto la prueba Chi-Cuadrada esta diseñada para distribuciones discretas y para muestras de gran tamaño únicamente y para distribuciones continuas esta prueba es solo una buena aproximación.

Los niveles especificados de significancia se aplican solo si el número de observaciones es infinito ( $n \rightarrow \infty$ ). Con muestras finitas, el nivel de significancia es un poco menor. En particular si la muestra es tan pequeña que algunas de las celdas contienen menos de 5 observaciones entonces algunas celdas vecinas se combinan para que cada celda tenga al menos cinco observaciones.

### 3.3. Prueba de Kolmogorov-Smirnov

Esta prueba recibe su nombre gracias a los matemáticos A.N. Kolmogorov y N.V. Smirnov quienes fueron sus creadores y la versión más reciente de esta prueba data de 1933 aunque posteriormente en 1939 fue modificada por Smirnov y a pesar de sonar bastante vieja es muy efectiva.

Esta prueba al igual que la chi-cuadrada sirve para verificar si una muestra de  $n$  de observaciones pertenece a alguna distribución continua específica y está basada en la diferencia entre lo observado FDA (Función de Distribución Acumulada) denotada como  $F_0(x)$  y la FDA esperada denotada como  $F_e(x)$ , que en general debe ser menor.

Los símbolos  $K^+$  y  $K^-$  se utilizan para denotar las desviaciones máximas observadas localizadas sobre y bajo la FDA esperada, en una muestra de tamaño  $n$  tal y como lo describen las expresiones que se muestran a continuación:

$$K^+ = \sqrt{n} \max_x [F_0(x) - F_e(x)]$$

$$K^- = \sqrt{n} \max_x [F_e(x) - F_0(x)]$$

Tenemos que el símbolo  $K^+$  se utiliza para medir la desviación máxima cuando la FDA observada está sobre la FDA esperada, y el símbolo  $K^-$ , se utiliza para lo opuesto, es decir, para medir la desviación máxima cuando la FDA observada está bajo la FDA esperada; entonces si los valores para  $K^+$  y  $K^-$ , son menores a  $K_{[1-\alpha, n]}$ , entonces las observaciones provienen de una distribución específica con nivel de significancia  $\alpha$ .

Un error que se comete comúnmente al encontrar el estadístico de  $K^-$ , es que se calcula la máxima de  $F_e(x_i) - F_0(x_i)$ ; lo cual es incorrecto ya que  $F_0(x)$  consiste de un segmento horizontal en  $F_0(x_i)$  en el intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ , y la diferencia máxima ocurre

precisamente antes de  $x_{i+1}$ , como se muestra en la figura 3.1.

Tenemos entonces que  $F_o(x_{i+1}) - F_0(x_i)$  es la diferencia correcta para usarse en el cálculo de  $K^-$ .

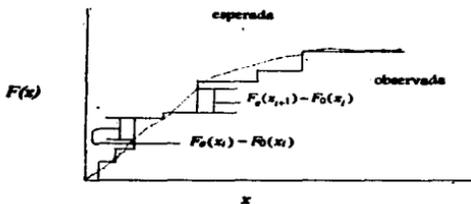


Fig. 3.1 La prueba de K-S, necesita medir la desviación máxima de la FDA observada contra la FDA teórica.

Para que los números aleatorios presenten una distribución uniforme entre 0 y 1, la FDA esperada es  $F_0(x) = x$ , y si  $x$  es mayor que  $j-1$  un intervalo de otras observaciones de una muestra de  $n$  observaciones, entonces la FDA es de  $F_0(x) = j/n$ . Por lo anterior para probar si una muestra de  $n$  números aleatorios pertenece a una distribución uniforme, tenemos primeramente que colocar las observaciones en orden creciente, el cual debe ser por supuesto de la forma:  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , con  $x_{i-1} \leq x_i$ , entonces tenemos  $K^+$  y  $K^-$  se calcularían de la siguiente forma:

$$K^+ = \sqrt{n \max_j \left( \frac{j}{n} - x_i \right)}$$

$$K^- = \sqrt{n \max_j \left( x_j - \frac{j-1}{n} \right)}$$

Al obtener los resultados de los cálculos podemos determinar si las observaciones tienen una distribución uniforme. Un ejemplo para ilustrar esta prueba sería como el siguiente:

Tomando la semilla  $x_0 = 15$ , en el generador:

$$x_n = 3x_{n-1} \text{ mod } 31$$

Los resultados que obtenemos son: 14, 11, 2, 6, 18, 23, 7, 21, 1, 3, 9, 27, 19, 26, 16, 17, 20, 29, 25, 13, 8, 24, 10, 30, 28, 22, 4, 12, 5, 15.

Los números normalizados que se obtienen al dividir la secuencia entre 31 son: 0.45161, 0.35484, 0.06452, 0.19355, 0.58065, 0.74194, 0.22581, 0.67742, 0.03226, 0.09677, 0.29032, 0.87097, 0.61290, 0.83871, 0.51613, 0.54839, 0.64516, 0.93548, 0.80645, 0.41935, 0.25806, 0.77419, 0.32258, 0.96774, 0.90323, 0.70968, 0.12903, 0.38710, 0.16129, 0.48387.

Al hacer comparaciones de esta prueba con la chi-cuadrada tenemos:

- La prueba de K-S, esta diseñada específicamente para muestras pequeñas y distribuciones de datos continuas.
- La prueba chi-cuadrada está diseñada en cambio para muestras grandes y distribuciones de datos discretas.
- La prueba K-S esta basada en la diferencia entre la distribución acumulada de frecuencias esperada y la observada.
- La chi-cuadrada está basada en la diferencia entre lo observado y la probabilidad hipotética.

La prueba K-S, utiliza cada observación en la muestra sin ningún agrupamiento de datos, mientras que la chi-cuadrada requiere que las observaciones sean agrupadas en un

pequeño número de celdas.

-En este sentido, una prueba de K-S utiliza mejor los datos y esta es una observación muy a favor de esta prueba, además esta prueba proporciona exactamente todos los parámetros que se esperan en una distribución conocida.

### 3.4. Prueba de correlación secuencial

Este es un método directo para probar la dependencia de dos variables aleatorias y sirve también para verificar si la covarianza que describen, es diferente de cero. Si esto se verifica entonces la prueba nos indica que efectivamente, las variables son dependientes.

Si quisiéramos verificar lo anterior de manera inversa, ya no resulta ser cierto de hecho, si la covarianza resulta ser diferente de cero, las variables que estamos probando pueden ser aún con eso dependientes.

Describamos pues el desarrollo de la prueba:

Al tener una secuencia de números aleatorios, es posible calcular la covarianza entre esos números que resultan ser valores que denotaríamos con  $k$ , para este caso que se encuentren entre  $x_n$  y  $x_{n+k}$  a esto se le llama autocovarianza con retardo  $k$ .

Denotando lo anterior como  $R_k$  la expresión para calcularlo es:

$$R_k = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} \left( U_i - \frac{1}{2} \right) \left( U_{i+k} - \frac{1}{2} \right)$$

Se tiene que para  $n$  grande, la autocovarianza  $R_k$ , se distribuye normalmente con media cero y una varianza de  $1/[144(n-k)]$ ; entonces el intervalo de confianza al  $100(1-\alpha)\%$  es como sigue:

$$R_k \mp z_{1-\alpha/2} / (12\sqrt{n-k})$$

Si el intervalo anterior no incluye al cero, entonces se concluye que la secuencia tiene una correlación significativa. Esto se aplica siempre que  $k \geq 1$ .

Para  $k=0$ , el valor que se calcula para  $R_0$  es la varianza de la sucesión y se espera que sea  $1/12$  para una IID  $U(0, 1)$ .

### 3.5. Prueba de dos niveles

Esta es una prueba aunque empírica, funcional si la utilizamos en una parte del ciclo solamente, esto es si el tamaño de la muestra es muy pequeño ya que si quisiéramos aplicarla en el ciclo completo del generador esto ya no es posible.

De manera semejante, los resultados que obtenemos de una prueba global, no pueden ser aplicados localmente y puede haber segmentos de la secuencia en los que no se considera que existan números completamente aleatorios.

Esta prueba consiste en realizar lo que muchos investigadores hacen para poner a prueba sus sucesiones aleatorias aún cuando ya pasaron todas las pruebas estadísticas que se proponen para aceptar una sucesión aleatoria como buena; esta prueba se realiza primeramente tomando una prueba Chi-Cuadrada de  $n$  muestras de tamaño  $k$  cada una y luego usan una prueba igualmente Chi-Cuadrada que se usa sobre los resultados obtenidos de la primera, a esto se le llama una prueba de Chi-Cuadrada sobre Chi-Cuadrada.

De manera similar, también puede usarse una prueba de K-S sobre K-S; este proceso se utiliza para encontrar algún segmento de la sucesión que no sea aleatorio o alguna otra irregularidad en las sucesiones.

### 3.6. Sucesiones uniformemente distribuidas en $k$ dimensiones

Las pruebas anteriores nos ayudan a verificar que los números obtenidos se encuentren distribuidos en una sola dimensión aunque el concepto de uniformidad puede extenderse a  $k$ -dimensiones, lo cual es precisamente lo que describe esta prueba.

Ejemplificando desde el inicio, supongamos que se tiene un número  $n_n$  que pertenece a una sucesión la cual está uniformemente distribuida entre 0 y 1, después al tener 2 números reales denotados como  $x_1, y_1$ , que también se encuentran entre 0 y 1 pero de manera que  $y_1 > x_1$ , la probabilidad de que el número  $n_n$  caiga en el intervalo  $[x_1, y_1)$ , es precisamente  $y_1 - x_1$ , lo cual se expresa de la siguiente forma:

$$P(x_1 \leq n_n < y_1) = y_1 - x_1 \quad \forall y_1 > x_1$$

Esto se conoce como la propiedad de distribución unidimensional de  $n_n$ .

Se tiene entonces que la distribución bidimensional, es una generalización de la propiedad anterior pero en dos dimensiones, lo que requiere que los pares de valores sucesivos de  $n_{n-1}$  y  $n_n$  satisfagan la siguiente condición.

$$P(x_1 \leq n_{n-1} < y_1 \text{ y } x_2 \leq n_n < y_2) = (y_1 - x_1)(y_2 - x_2)$$

Esto es para todos los  $x_1, y_1, x_2, y_2$  en  $[0, 1)$ , con  $y_i > x_i$ ,  $i = 1, 2$ . Pero debemos recordar que una sucesión  $k$ -distribuida es siempre una  $k-1$  distribuida, aunque lo inverao no sea cierto ya que una sucesión de aleatorios que sea uniforme en una dimensión menor, puede que no lo sea en una dimensión mayor. De esto se desprende que es mayormente preferible un generador que proporcione sucesiones más uniformes en dimensiones mayores que uno que no lo haga.

Existen dos formas para probar una distribución  $k$ .

La prueba secuencial y la prueba espectral.

Antes de comenzar es recomendable que se verifique si es que la sucesión es uniforme en dos dimensiones lo cual podemos verlo al graficar pares de números que se traslapen en la secuencia como los puntos en un espacio bidimensional. Esto se ilustra mejor con el ejemplo siguiente:

Consideremos un generador de Tausworthe que describe el siguiente polinomio:

$$x^{15} + x + 1$$

Vemos que corresponde a un polinomio primitivo y la secuencia resultante tiene un periodo de  $2^{15} - 1$ . Se generaron mil números aleatorios de 15 bits con este generador y partiendo de las propiedades definidas por Tausworthe se sabe que las sucesiones tienen una distribución  $k$  para  $k$  por arriba de  $\lceil q/l \rceil$ , esto es,  $k = 1$ .

Dicho de otra forma, los números están distribuidos uniformemente en una dimensión, aunque de cualquier forma, en dos dimensiones la distribución será uniforme también.

En la siguiente figura, se muestra la gráfica de la sucesión de pares traslapados en dos dimensiones; como se puede apreciar la gráfica es muy regular.

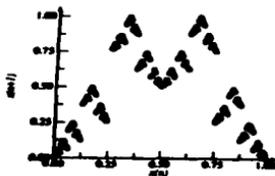


Fig 3.2 Gráfica de los pares traslapados de la sucesión que se obtiene con un generador de Tausworthe de la forma  $x^{15} + x + 1$

### 3.7. Prueba secuencial

Esta prueba se utiliza para probar la uniformidad en dos dimensiones o más de las sucesiones obtenidas en un generador de números aleatorios.

Para dos dimensiones se divide el espacio entre 0 y 1, entre  $k^2$  celdas de igual área como se muestra en la fig. 3.3. Dados  $n$  números aleatorios entre 0 y 1, podemos contar desde los  $n/2$  pares que no se traslapan  $(x_1, x_2), (x_3, x_4), \dots$  y contar los puntos que caen en cada una de las celdas  $k^2$  e idealmente podemos esperar  $n/(2k^2)$  puntos en cada celda.

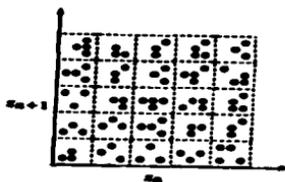


Fig. 3.3. La uniformidad en dos dimensiones requiere de pares no traslapados denotados como  $(x_n, x_{n+1})$  que caigan uniformemente en todas las celdas del cuadrado.

Después podemos aplicar una prueba Chi-Cuadrada para encontrar la desviación de los puntos reales contra los esperados; los grados de libertad en este caso son de  $K^2 - 1$  y podemos extender esta prueba a varias dimensiones utilizando valores que no se traslapan.

### **3.6. Prueba espectral**

Este tipo de prueba para sucesiones de números aleatorios fue propuesta en 1967 por Conveyou y McPherson y determina cómo la densidad de las  $k$ -sucesiones  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ , pueden llenar un hiperespacio de dimensión  $k$ . Se ha observado que las sucesiones  $k$ , provenientes de un LCG, caen dentro de un número finito de hiperplanos paralelos.

Digamos, al graficar pares sucesivos de números como puntos de un espacio bidimensional, obtendremos que todos los puntos caerán en un número finito de líneas. Ahora, para tres dimensiones, las tripletas caerán también en un número de planos. Veamos el siguiente ejemplo que lo describe:

A partir del siguiente generador:

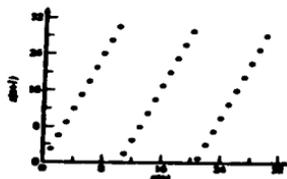
$$x_n = 3x_{n-1} \text{ mod } 31$$

Tenemos que la fig. 3.4 muestra la graficación de pares de puntos que se sobreponen y que fueron obtenidos del LCG, se muestra que todos los puntos caen entre líneas rectas lo cual no es una mera coincidencia sino que por definición los números sucesivos que se obtuvieron del LCG están linealmente relacionados ya que de la expresión que describe al generador se desprenden 3 ecuaciones de rectas como las siguientes:

$$\begin{aligned}x_n &= 3x_n - 1 \\x_n &= 3x_{n-1} - 31 \\x_n &= 3x_{n-1} - 62\end{aligned}$$

o también la siguiente expresión:

$$x_n = 3x_{n-1} - 31k, \quad k = 0,1,2$$

fig. 3.4. Gráfica de pares traslapados resultantes del LGC  $x_n = 3x_{n-1} \text{ mod } 31$ 

De manera similar para tres dimensiones, los puntos para ese generador caerían en 5 planos dados por:

$$x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2} - 31k, \quad k = 0, 1, \dots, 4$$

Esta ecuación se obtuvo al añadir esta ecuación a la anterior:

$$x_{n-1} = 3x_{n-2} - 31k_1, \quad k = 0, 1, 2$$

De donde vemos que  $k + k_1$  deberán corresponder a un entero entre 0 y 4.

En el año de 1968 Maraglia mostró que las sucesiones  $k$  que se obtienen de un LCG caen a lo más en hiperplanos paralelos como  $(k!m)^{1/k}$ , donde  $m = 2^{32}$ , menor que 2953 hiperplanos que contendrán 3 puntos, menor que 566 hiperplanos que contendrán 4 puntos, y menor que 41 hiperplanos que contendrán 10 puntos. Lo cual muestra una desventaja en los LCG's.

Como conclusión tenemos que una prueba espectral determina la distancia máxima existente entre hiperplanos adyacentes. La distancia más larga obtenida equivale a un mal generador y para los generadores con un periodo corto se tiene que la distancia puede determinar la numeración completa.



## **Capítulo 4**

### **Percolación en Substratos Fractales**



# Capítulo

# 4

## PERCOLACION EN SUBSTRATOS FRACTALES

*(transporte, difusión, conductividad)*

### *4.1 Introducción*

El desplazamiento que presenta un fenómeno puede ser visto fácilmente si es analizado en términos de fractales, y hablando coloquialmente, diremos que la ruta que sigue el desplazamiento del fenómeno en un sustrato fractal que además de ser aleatorio puede seguir un patrón definido, de modo que es posible establecer mediante probabilidad y con un cierto grado de veracidad, cuál será la ruta a seguir del fenómeno o la ruta más corta probable entre el punto de inicio y algún punto que fijemos en el espacio.

El motivo por el cual se toman en cuenta a las redes metálicas para describir el proceso de percolación es porque un vector de desplazamiento en un sustrato de esta naturaleza tiene las alternativas de trayectoria que presenta el perímetro de cada miembro de la malla, sea esta de forma cuadrada, triangular o poligonal; el motivo por el que se toman estas formas geométricas es por la sencillez que presentan al modelar matemáticamente las rutas o trayectorias que sigue un flujo de corriente en una simulación, o una epidemia en un caso real.

Es entonces dadas las condiciones geométricas que presenta un sustrato fractal como estos y dadas también las facilidades que nos proporciona la geometría para establecer un análisis de desplazamiento, que podemos ofrecer esta alternativa para generalizar las reglas de comportamiento de algún fenómeno en cuestión.

Ahora en cuanto a los racimos de percolación se refiere, veremos cómo la longitud de correlación es la única que tiene propiedades estáticas, por lo cual el transporte en los racimos de percolación se reduce a la simple relación con las leyes escalares; también cómo es que el transporte en superconductores y semiconductores bajo el punto crítico  $p_c$  pueden de manera sencilla ser modelados con un generador de números aleatorios, simulando un camino aleatorio.

Se discutirá *la difusión* en sustratos en diferentes apartados ya que en la percolación como ya hemos visto, se tienen racimos finitos e infinitos; ésta es una parte muy importante ya que veremos mediante expresiones matemáticas, cómo es que se dispersan los agentes aleatorios y cómo se extienden las vías de infiltración o percolación, así mismo se verá la relación que tienen los exponentes de difusión con los de conductividad.

Al finalizar el presente capítulo se pretende haber proporcionado las herramientas suficientes para lograr hacer el análisis geométrico a un problema de percolación cualquiera de ese modo contribuir con este pequeño trabajo para que se continúe con este tipo de investigaciones acerca de los fenómenos críticos para que de ese modo tengamos mejor conocimiento de ellos.

## 4.2. Conductividad en los Sistemas de Percolación

Para hablar de conductividad, debemos decir primeramente que la conductancia total de un sistema metálico se define como  $\Sigma(p, L) = \rho^{-1}$  para una mezcla aleatoria de aislante/conductor de tamaño  $L^d$  y concentración  $p$  de conductores sobre la concentración crítica de  $p_c$ .

Sobre longitudes escalares tan grandes como la amplitud de correlación  $\xi$ , el sistema es homogéneo y las ecuaciones  $\sigma \sim (p-p_c)^{\nu}$  y  $\rho \sim \sigma^{-1} \frac{L}{L^{d-1}}$ , se mantienen, mientras que sobre longitudes escalares más pequeñas que  $\xi$ , los racimos son fractales y  $\rho \sim L^{\bar{\zeta}}$ , se mantiene. Y tenemos nuevamente que mientras  $\xi$  sea la única longitud escalar aquí, será posible agrupar ambos regímenes mediante el escalamiento utilizado para explorar la región fractal en el racimo:

$$\Sigma(p, L) \sim L^{\bar{\zeta}} F(L/\xi)$$

donde  $F(x) \sim x^0$  para  $x \ll 1$  satisface trivialmente a  $\rho \sim L^{\bar{\zeta}}$ . Para cumplir con  $\sigma \sim (p-p_c)^{\nu}$  y  $\rho \sim \sigma^{-1} \frac{L}{L^{d-1}}$ , se requiere que  $F(x) \sim x^{\beta}$  para  $x \gg 1$  y la relación:

$$\bar{\zeta} = 2 - d + \mu/\nu$$

entre los exponentes.

La identidad anterior puede ser utilizada para determinar  $\mu$  a partir de las mediciones de la conductividad total como una función de  $L$  cercana al punto crítico  $p_c$ .

### 4.3. La difusión en los sistemas de percolación.

En los sistemas de percolación es necesaria una expresión que nos sea de utilidad para calcular el desplazamiento que tendrá el agente aleatorio dentro del sistema, por tanto y al tratarse de sistemas de percolación, sabemos que un agente aleatorio puede desplazarse hacia cualquier punto del sistema, entonces para obtener la razón de desplazamiento se consideran todos los caminos posibles que pueda tomar el agente que se encuentra distribuido sobre todos los racimos conductores.

Para obtener lo anterior, promediamos sobre todos los caminos aleatorios que comiencen sobre racimos de tamaño  $s$ , entonces obtendremos el desplazamiento cuadrático medio ( $r^2_s(t)$ ) sobre todos los lugares donde se encuentren los racimos. Este proceso será relativamente fácil cuando se realiza hacia  $p_c$ , donde el tamaño de la distribución de los racimos  $n_s(p)$  es descrita por la ecuación exponencial siguiente:

$$n_s(p) \sim s^{-\tau}$$

Tenemos que el radio promedio de todo racimo de  $s$  lugares denotado como  $R_s$ , se relaciona precisamente con este índice  $\tau$ , mediante la expresión  $s \sim R_s^{2/\tau}$ .

A medida que el agente aleatorio viaja a una distancia cualquiera, ésta es tan pequeña como  $R_s$ , y la difusión es irregular como:  $\langle r^2_s(t) \rangle \sim t^{2s(t) - 1} / dw$ . Para grandes unidades de tiempo, y a partir de que el agente aleatorio no puede escapar del racimo de tamaño  $s$ , tenemos que  $\langle r^2_s(t) \rangle$  es delimitado mediante  $R_s^2$ , por lo cual podemos expresar lo siguiente:

$$\langle r^2_s(t) \rangle \sim \begin{cases} t^{2s} & \text{si } t^{2s} < R_s^2, \\ R_s^2 & \text{si } t^{2s} > R_s^2. \end{cases}$$

A partir de  $\langle r_s^2(t) \rangle$  obtenemos el desplazamiento cuadrático medio  $\langle r^2(t) \rangle$  promediando sobre todos los racimos:

$$\langle r^2(t) \rangle \sim \sum_{s=1}^{\infty} w_s \langle r_s^2(t) \rangle \sim \sum_{s=1}^{\infty} s^{1-\tau} \langle r_s^2(t) \rangle$$

De acuerdo con la expresión anterior, existe para cada arreglo de tiempo  $t$ , un sobreesaturamiento de tamaño  $S_x(t) \sim R_x^{\tau} \sim t^{d_f/d_w}$ : Esto es para  $s < S_x(t)$ ,  $\langle r_s^2(t) \rangle \sim R_s^2$ , mientras que para  $s > S_x(t)$ ,  $\langle r_s^2(t) \rangle \sim t^{2/d_w}$  y con la expresión anterior podemos escribir ésta como:

$$\langle r^2(t) \rangle \sim \sum_{s=1}^{S_x(t)} s^{1-\tau} s^2 t^{\tau} + \sum_{s=S_x(t)}^{\infty} s^{1-\tau} t^{2/d_w}$$

El primer término en esta expresión es proporcional a  $[S_x(t)]^{2-\tau+2} t^{\tau}$  y el segundo término es proporcional a  $[S_x(t)]^{2-\tau} t^{2/d_w}$ . Partiendo de que  $S_x(t) \sim t^{d_w/d_f}$ , ambos términos valen lo mismo y obtenemos:

$$\langle r^2(t) \rangle \sim t^{2/d_w}$$

Con exponente  $d_w' = 2/[(d_f/d_w)(2-\tau+2d_f)]$ . Ahora utilizando la relación escalar  $\tau = 1 + d_f/d_r$  y  $d_r = d - \beta/\nu$  entonces encontramos que:

$$d_w' = d_w / (1 - \beta/2\nu)$$

Es notorio que  $d_w' > d_w$  a partir de que los racimos finitos reducen la velocidad de movilización del agente aleatorio. La probabilidad de estar en el origen puede calcularse de la misma forma, comenzando con la expresión para los racimos finitos de  $s$  racimos y desarrollando el promedio sobre todos los racimos.

Debido a la presencia de racimos infinitos, la probabilidad  $\langle P(0,t) \rangle$  tiende a ser constante cuando se consideran tiempos prolongados; entonces el tiempo que empleado en ello es:

$$\langle P(0,t) \rangle \sim \langle P(0,\infty) \rangle \sim t^{-d'_i}$$

donde:

$$d'_i = 2d/d_w$$

Los resultados obtenidos en  $p_c$  pueden generalizarse para  $p > p_c$ , de manera semejante a la expresión  $\langle r^2(t) \rangle = t^{2-d_w} f(t/t_c)$  donde se asume que  $\langle r^2(t) \rangle$  puede escribirse como sigue:

$$\langle r^2(t) \rangle \sim t^{2-d_w} \zeta(t/t_c)$$

donde  $\zeta(x) \sim x^0$  para  $x \ll 1$  y  $\zeta(x) \sim x^{1-2d_w}$  para  $x \gg 1$ . La primera relación satisface trivialmente a  $\langle r^2(t) \rangle \sim t^{2-d_w}$ ; la segunda relación nos da  $D' \sim \lim_{t \rightarrow \infty} \langle r^2(t) \rangle / t \sim t_c^{2-d_w-1} \sim (p-p_c)^{\mu}$ , de acuerdo con el resultado para la conductividad,  $\sigma \sim (p-p_c)^{\mu}$ .

Otra nota importante que no puede quedar fuera es que de acuerdo a la derivación,  $d_w$  representa el exponente que caracteriza el segundo momento de la función de distribución. Otros momentos tales como  $\langle r^k(t) \rangle \sim t^{k/d_w(k)}$  pueden calcularse de la misma forma; inclusive ya resultaría más fácil verificar que:

$$\frac{k}{d_w^*(k)} = \frac{k + d_w(2 - \tau)}{d_w}$$

De aquí los diferentes momentos que son caracterizados por exponentes diferentes  $d^w$ . Y esto es en contraste a la difusión en los racimos infinitos de percolación donde  $d^w$  no depende del momento considerado.

#### 4.4. Transporte en sistemas generales de dos componentes

Para iniciar esta sección se considera como ejemplo demostrativo el tomar una mezcla aleatoria de dos conductores, uno de ellos denominado como  $A$  (con una concentración de conductibilidad  $p$ ) y el otro denominado  $B$  (con una concentración de  $1-p$ ) y con índices de conductibilidad:  $\sigma_A$  y  $\sigma_B$  además de que asumimos que tienen una relación  $\sigma_A \gg \sigma_B$ . Para describir el proceso de difusión, debemos imaginar un agente aleatorio que brinca de lugar en lugar sobre barreras de potencial.

En  $A$  la frecuencia del salto es  $f_A \sim \sigma_A$ , y en  $B$  la frecuencia del salto es  $f_B \sim \sigma_B$ . En el caso de que el agente aleatorio alcance los linderos existentes entre  $A$  y  $B$ , no abandonará simplemente a  $A$  para ir a  $B$  pero ello se refleja en la probabilidad  $\sim f_A / (f_A + f_B)$ , y lo podemos ver en la fig. 4.3.



Fig. 4.3. Esquema de barreras de potencial representando un sistema con dos tipos de conductividad.

En el límite  $f_A=1$ ,  $f_B=0$  y el agente aleatorio se refleja con una probabilidad de 1 y el modelo reduce la mezcla aleatoria de conductor/aislante. Para el límite  $f_A \rightarrow \infty$ ,  $f_B = 1$ ; el modelo describe una mezcla aleatoria de superconductor.

Sobre el punto crítico  $p_c$ , el dc de conductividad es infinito; bajo  $p_c$  existe solamente racimos de superconductividad finita por ende, la conductividad es finita. Cuando se aproxima a  $p_c$ , el tamaño de los racimos de superconductividad se incrementa y la conductividad diverge como:

$$\sigma \sim (p_c - p)^{-s}, \quad p < p_c,$$

el cual define el exponente  $s$ .

En el modelo de difusión, un agente aleatorio puede visitar cualquier sitio en un racimo superconductor en el cual comenzó a diseminarse antes de que pudiera dejar el racimo por algún sitio cercano al perímetro del racimo. En el límite  $f_A \rightarrow \infty$  existe una "salida" por así decirlo, este lugar puede ser escogido aleatoriamente, lo que implica que el agente aleatorio se podría acercar al perímetro del racimo cuando éste cercano a este límite.

Se observa que el agente "trata" de escapar de este racimo pero debido a la estructura fractal del racimo en el que se encuentra, sus intentos fallan continuamente debido a que la mayoría de los lugares perimetrales en el racimo se encuentran cubiertos: este podría dejar el racimo temporalmente pero si lo abandona por la región cubierta, se tropezará con el mismo racimo. A partir de aquí se espera una meseta en  $\langle r^2(t) \rangle$  a una escala de tiempo bajo alguno de los cruces de tiempo encontrados en:  $t_x \sim (p_c - p)^{-2}$ .

La altura de la meseta se determina mediante el radio cuadrático medio de los racimos, éste se escala a razón de  $R^2 \sim (p_c - p)^{-2\nu + \beta}$ , tenemos entonces que en  $t \sim t_x$ , el

agente aleatorio puede escapar completamente del racimo saliendo por un lugar descubierta del esqueleto que conforma el fractal, por ello se determina a  $t_x$  mediante la estructura fractal de las superficies descubiertas.

Tenemos que sobre  $t_x$  se requiere que sea cumplida la siguiente relación:

$$\langle r^2(t) \rangle \sim (p_c - p)^{-2} t$$

De aquí en adelante tenemos a  $t_x$  como el tiempo escalar característico, y podemos asumir que los regímenes de tiempo, prolongados y breves se conectan o comunican mediante la relación:

$$\langle r^2(t) \rangle \sim t(p_c - p) \quad T(t / (p_c - p)^s)$$

Ahora para satisfacer la ecuación  $\sigma \sim (p_c - p)^2$ ,  $p < p_c$ ; se requiere de que  $T(x) \sim x^\beta$  constante para  $x \gg 1$ . Para describir correctamente la mezcla en cortos periodos de tiempo, se requiere que  $T(x) \sim x^{-1}$  para  $x \ll 1$ , lo que determina a  $\beta$ <sup>1</sup>

$$z' = -s + 2\nu - \beta$$

El exponente de cruce en una mezcla superconductor se obtiene del exponente de cruce en mezclas aleatorias de conductor/aislante al intercambiar los exponentes de transporte  $\mu$  y  $-s$ . Ahora usando los argumentos de dualidad puede mostrarse que  $\mu = s$  en dos dimensiones.

<sup>1</sup> Nótese la analogía formal entre el cruce al tiempo  $t_x$  en un conductor/aislante aleatorio y el cruce al tiempo  $t_x$  aquí se tendría que  $t_x \sim \xi^{\beta/\mu}$  puede ser escrito como:  $t_x \sim |p - p_c|^{-\mu - 2\nu + \beta}$ .

En el caso de que ambas conductividades  $\sigma_A \sim f_A$  y  $\sigma_B \sim f_B$  sean infinitas y diferentes de cero podemos ver tanto ambos tipos de comportamiento anormal y ambos cruces de tiempo, provistos por el hecho de que  $t_x > t_c$ . Podemos visualizar estos conceptos en la fig. 4.4.

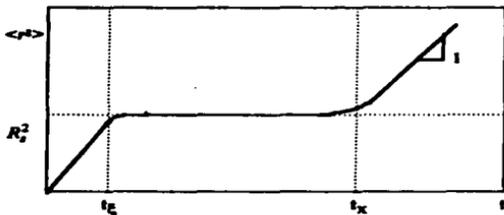


Fig.4.4. Cuadro del desplazamiento cuadrático medio de un agente aleatorio en una red de dos componentes, para  $p$  bajo  $p_c$  y  $t_c > t_x$ .

Considerando que  $f_B = 1$  y  $f_A \gg f_B$ . El agente aleatorio no alcanza la superficie del racimo A instantáneamente, primeramente explora el interior del racimo fractal y comienza su trayecto en  $\langle r^2 \rangle \sim f_A^{1/2} t^d$  bajo  $t_c \sim f_A t_c^{d^*}$ . Para  $t_c < t_x = f_B t_c^{2/\nu}$ , el agente aleatorio explora la superficie fractal del racimo hasta que encuentra un lugar sin cubrir.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Para  $t > t_x$  se tiene difusión normal.

#### **4.5. Exponentes dinámicos**

Como veremos en esta sección, el cálculo de los exponentes dinámicos se complica debido a la complejidad de los racimos de percolación en los cuales se presentan este tipo de exponentes, esto es debido a que los racimos ya presentan ramificaciones, lazos cerrados, y terminaciones colgantes en todas las longitudes escalares. Debido a ello, los valores estimados para un exponente dinámico debe ser calculado mediante métodos numéricos tales como el de Monte Carlo, el de enumeración exacta, o la técnica de transferencia de matrices y para las aproximaciones analíticas son usuales las series de expansión.

##### **4.5.1. Límites rigurosos.**

Hablando nuevamente de conductividad, la resistencia a la conductividad entre algún lugar sobre los racimos infinitos de percolación hacia el punto crítico, se describe por la resistencia de la estructura conectada a esos lugares. Esto se debe a que por ejemplo un trozo de esqueleto es tan sólo una parte del racimo en el cual la corriente está fluyendo. El esqueleto puede considerarse como una cadena que está formada por burbujas conectadas mediante límites en línea gruesa. Fig 4.5. Un límite superior para la resistencia puede obtenerse al asumir que el efecto que tengan los nudos o loops, puede ser eliminados y cada burbuja es remplazada mediante una sola ruta corta. Un límite inferior, puede obtenerse al asumir que la resistencia de las burbujas en el esqueleto puede ser eliminada. Ahora, la razón para esto es que al cortar los lazos de unión, se incrementa la resistencia, y tomando la resistencia de la burbuja como si fuera cero, la resistencia decrece. Por lo anterior podemos ver que los valores derivados para  $\zeta$  y  $d_w$  cuando los lazos cerrados o las burbujas abandonadas puedan servir como límites superiores o inferiores respectivamente.

Ahora veamos el esqueleto existente entre burbujas y lazos en la fig. 4.5 para tener una idea más amplia de lo anterior.

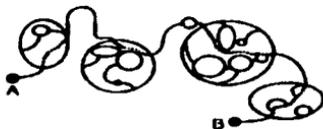


Fig. 4.5 Esquema de un esqueleto de percolación consistente de burbujas y límites en los cuales se presenta la resistencia entre A y B. Las líneas interrumpidas representan las rutas más cortas entre A y B a lo largo de las burbujas.

En un racimo con menos nudos, existe solo una ruta de longitud  $l$  entre dos lugares, y la resistencia  $\rho$  existente entre esos lugares, es proporcional a la distancia química  $l$  existente entre ellos. A partir de la distancia química  $l$  se escala con la distancia Euclidiana  $r$  como  $r \sim l^{\bar{\nu}}$  obtenemos lo siguiente:

$$\rho \sim r^{-1} \sim r^{d_{\text{mf}}}$$

donde  $d_{\text{mf}}$  es la dimensión fractal de la ruta mínima. Aquí el exponente estático  $\bar{\nu}$  describe las propiedades dinámicas de los lazos cerrados cuando pueden ser abandonados por el agente aleatorio.

Suponiendo que la burbujas presenten resistencia cero, tendríamos que la resistencia total es proporcional al número de límites rojos (críticos),  $n_{\text{red}} \sim r^{-1}$  entre ambos lados del modelo y tendríamos:

$$\rho \sim r^{-1}$$

Entonces los límites para  $\bar{\zeta}$  son:

$$\frac{1}{\bar{\nu}} \leq \bar{\zeta} \leq \frac{1}{\bar{\nu}}$$

$$d_f + \frac{1}{\bar{\nu}} \leq d_w \leq d_f + \frac{1}{\bar{\nu}}$$

$$\frac{2d_f}{d_f + 1/\bar{\nu}} = \frac{2d_1}{d_1 + 1} \leq d_s \leq \frac{2d_f}{d_f + 1/\bar{\nu}}$$

Similarmente obtenemos para el módulo elástico:

$$d_v + \mu_s \leq d_v + \frac{\nu}{\bar{\nu}}$$

El límite inferior se asume con una constante forzada a ser diferente de cero solamente a lo largo de la ruta más corta. El límite superior se asumirá como elástico, solamente en las ramas conectadas; mientras otros límites son rígidos. fig. 4.6

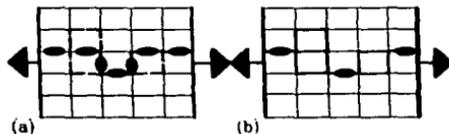


Fig. 4.6. Esquema de un esqueleto de percolación consistente de burbujas y límites críticos lo cual es la única parte relevante que contribuye a la elasticidad entre A y B. (a) Los saltos se toman únicamente a lo largo de la ruta más corta entre A y B, los otros límites están desconectados. (b) Los saltos se toman solo a lo largo de un límite conectado, los otros límites están rígidos.

Los límites superior e inferior en la última ecuación se vuelven idénticos en dimensiones como ésta:  $d \geq 6$ , donde lazos cerrados pueden ser abandonados y la relación  $\nu = \bar{\nu} = 1/2$ , nos da:  $\bar{\zeta} = 2$ ,  $d_w = 6$ ,  $d_s = 4/3$ , y finalmente  $\mu_s = 4$ .

Por lo anterior sabemos que ambos límites pueden ser estimados a partir de los exponentes que conocemos como  $\nu$ ,  $\bar{\nu}$ ,  $d_f$  y  $d_f$ .

#### 4.6. Transporte en racimos de percolación

**4.6.1. Difusión en racimos infinitos.** Lo primero que debemos observar en un agente aleatorio que esté involucrado en una simulación, es su comportamiento a largo plazo en relación a su desplazamiento cuadrático medio sobre los racimos de percolación y obtendremos la característica principal acerca de la difusión que describe; misma que se denota mediante la constante  $D$ , ésta se relaciona también con la otra constante de difusión  $D'$  de todo el sistema de percolación. Por encima de  $p_c$ , la conductividad de un sistema de percolación se incrementa como  $\sigma \sim (p - p_c)^\nu$ , ecuación que habíamos visto anteriormente, así que debido a la ecuación de Einstein  $\sigma = \frac{e^2 n}{k_B T} D$ , la constante de difusión  $D'$  debe incrementarse de esta manera.

Haciendo referencia al de desplazamiento cuadrático medio que se tendría aquí ( $D'$ ), diremos que puede obtenerse promediando sobre todos los posibles puntos iniciales que tendría una partícula dentro de un sistema de percolación, y cabe aclarar que solamente las partículas se encuentren o que inicien su desplazamiento dentro de un racimo infinito pueden viajar desde un lado del sistema hasta el otro extremo para obtener así su constante de desplazamiento medio  $D'$ . Así mismo, las partículas que inicien sobre el racimo infinito no podrán abandonar el racimo, y de ese modo no contribuyen para  $D'$ . De lo anterior se desprende que entonces  $D'$  se relaciona a  $D$  mediante la expresión.

$$D' = DP_c$$

Lo cual implica que:

$$D \sim (p - p_c)^{\mu - \beta} \sim \xi^{-(\mu - \beta)\nu}$$

De manera que el desplazamiento cuadrático medio lo tendríamos definido como sigue al combinar  $\langle r^2(t) \rangle \sim t^{2d_w}$  y  $D \sim (p - p_c)^{\mu - \beta} \sim \xi^{-(\mu - \beta)/\nu}$ :

$$\langle r^2(t) \rangle \sim \begin{cases} t^{2d_w} & \text{si } t \ll t_c, \\ (p - p_c)^{\mu - \beta} & \text{si } t \gg t_c, \end{cases}$$

donde:

$$t_c \sim \xi^{2\nu}$$

Que describe la escala de tiempo que el agente aleatorio necesita sobre el promedio, para explorar el régimen fractal en el racimo. Ahora como  $\xi \sim (p - p_c)^{-\nu}$  es la única longitud escalar aquí, entonces  $t_c$  es la única escala de tiempo relevante, y es posible unir ambas escalas de tiempo, el régimen largo y el corto mediante una función escalar definida como  $f(t/t_c)$ . Por lo que lo anterior nos quedaría expresado en términos de la función como sigue:

$$\langle r^2(t) \rangle = t^{2d_w} f(t/t_c)$$

Para satisfacer la expresión anterior a esta última se requiere por principio de cuentas que  $f(x) \sim x^0$  para  $x \ll 1$  y  $f(x) \sim x^{-2d_w}$  para  $x \gg 1$ . Al relacionar las expresiones anteriores entre sí, nos dan una expresión para  $D$ , además de relacionar a  $d_w$  y  $\mu$ , como sigue:

$$d_w = 2 + \frac{\mu - \beta}{\nu}$$

y comparando la ecuación  $d_w = d_f - d + 2 + \bar{\mu} = d_f + \bar{\zeta}$  con la anterior, vemos que podemos expresar al exponente  $\bar{\mu}$  como  $\mu$ .

$$\bar{\mu} = \mu/\nu.$$

## 4.7. Transporte en sustratos fractales

**4.7.1. Resistencia total:** Hemos de notar que la ecuación con la que inicia este apartado es válida sólo para conductores homogéneos donde la densidad del material conductor es constante. Entonces, cuando se trabaja sobre conductores fractales, la densidad es proporcional a  $L^{d-d}$  y se aproxima a cero cuando  $L \rightarrow \infty$ . Esto viene del hecho de que en el sistema pueden existir hoyos del tamaño del sistema en su totalidad, es decir; cuando se incrementa el valor de  $L$ , también se incrementa el tamaño de los huecos en una malla, lo que se interpreta como decremento de la conductividad por toda la malla, misma que se denota por  $\sigma$ .

Debido al concepto de auto semejanza, el índice  $\sigma$  decrece en toda escala, remitiéndola a la ley exponencial como sigue:

$$\sigma \sim L^{-\bar{\mu}}$$

que define al exponente  $\bar{\mu}$ . Tomando en cuenta la segunda ecuación de este apartado así como a la ecuación anterior, tenemos que la resistencia total se comporta como se denota a continuación:

$$\rho \sim L^{\bar{\zeta}}$$

donde ahora el valor  $\bar{\zeta} = 2 - d + \bar{\mu}$  es mayor que  $2-d$  para conductores homogéneos.

**4.7.2. Difusión:** Cuando sobre el sustrato fractal se presentan huecos, cuellos de botella y terminaciones colgantes, el movimiento del agente aleatorio es lento además de que si estos entes se presentan en conjuntos similares a longitudes escalares igualmente semejantes, la velocidad del agente aleatorio se verá reducida en esas mismas longitudes escalares.

La ecuación que define la ley de Fick<sup>\*</sup> ya no sería válida en este caso y en lugar de ella se tendría el desplazamiento cuadrático medio descrito por la siguiente ecuación.

$$\langle r^2(t) \rangle \sim t^{2/d}$$

donde este exponente denotado como  $d_H$  es el "exponente de difusión" o "dimensión fractal del camino aleatorio"; cabe mencionar que siempre es mayor que 2. Ahora tomando los últimos exponentes localizados podemos decir que ambos pueden relacionados por la ecuación de Einstein para la difusión:

$$\sigma = \frac{e^2 n}{k_B T} D$$

ésta relaciona la conductividad  $\sigma$  del sistema con la constante de difusión  $D = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle r^2(t) \rangle / 2dt$  de un camino aleatorio; en cuanto a  $e$  y  $n$  denotan carga y densidad de las partículas móviles respectivamente.

---

\* La ley de Fick fue citada como:  $\langle r^2(t) \rangle = a^2 t$ .

#### 4.8. Mallas ordinarias (transporte)

**4.8.1. Resistencia total:** Al considerar una red metálica de tamaño  $L^d$  con unas barras metálicas colocadas en los extremos norte y sur con una diferencia de potencial entre ellas, tal y como se ve en la fig. 4.2; podemos ver la ruta que sigue la corriente de un lado a otro de la malla representada por las flechas.

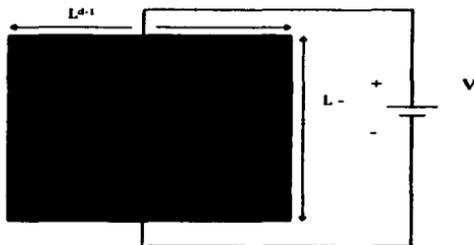


Fig. 4.2 Red metálica de tamaño  $L^d$  que está entre dos barras de metal de tamaño  $L^{d-1}$  con una diferencia de potencial  $V$ .

Si se varía el tamaño lineal  $L$  del sistema, tendremos una variación de la resistencia total  $\rho$ , a razón de:

$$\rho \sim \sigma^{-1} \frac{L}{L^{2-d}}$$

donde:

$\sigma \sim L^0$  es una constante, que es la conductividad del metal. Se tiene que a partir de que  $\sigma$  no depende de  $L$ , la ecuación anterior implica que la resistencia total de la red depende de su tamaño lineal  $L$  mediante la ley exponencial  $\sigma \sim L^{2-d} = L^{\tilde{\zeta}}$  la cual define el exponente de resistencia  $\tilde{\zeta}$ , que vale  $2-d$ .

### 4.8.2. Difusión:

El proceso de difusión, es comúnmente modelado por una simple ruta aleatoria, en la cual a un tiempo dado, avanza un paso de longitud  $a$ , hacia un lugar vecino aleatorio, sobre una malla de dimensión  $d$ . Para ello se asume que el agente aleatorio comienza su avance a un tiempo  $t = 0$  desde el origen de la malla.

Después de  $t$  pasos en el tiempo, la posición actual del agente aleatorio se describe por un vector  $r(t) = a \sum_{r=1}^t e_r$ , como se ve en la fig. 3.3 donde  $e_r$  denota el vector unitario situado en la dirección del brinco en el  $r$ -ésimo lapso de tiempo.



Fig. 3.3 Un camino aleatorio en una rejilla cuadrada. La constante de la rejilla es  $a=1$ , que es igual a la longitud del salto dado por el agente aleatorio.

La distancia promedio del agente aleatorio que ha viajado después de  $t$  lapsos de tiempo es descrita por la raíz cuadrada media de desplazamiento:  $(r^2(t))^{1/2}$ , donde la expresión entre paréntesis, el promedio; está sobre todo el camino aleatorio configurado sobre la malla.

Y de la expresión anterior obtenemos lo siguiente:

$$\langle r^2(t) \rangle = a^2 \sum_{r,r'} \langle e_r \cdot e_{r'} \rangle = a^2 t + \sum_{r,r'} \langle e_r \cdot e_{r'} \rangle$$

A partir de que los saltos son hechos hacia diferentes puntos, tenemos que  $r$  y  $r'$  no están correlacionados y tenemos que  $\langle e_r \cdot e_{r'} \rangle = \delta_{rr'}$  y se obtiene la ley de difusión de Fick, la cual se expresa como sigue:

$$\langle r^2(t) \rangle = a^2 t$$

Hemos de notar que la expresión anterior no tiene relación alguna con la dimensión  $d$  de la rejilla. En general cuando un agente aleatorio tiene una probabilidad de estar en un lugar de  $\langle r^2(t) \rangle \sim 2dDt$ , donde  $D$  es la *constante de difusión*.

También es posible obtener el desplazamiento cuadrático medio de la densidad de probabilidad  $P(r,t)$  la cual es la probabilidad de encontrar al agente aleatorio después de  $t$  lapsos de tiempo, en un lugar situado a una distancia  $r$  de su punto de inicio mediante la expresión:

$$\langle r^2(t) \rangle \sim \int dr r^2 P(r,t).$$

De manera un poco más sencilla, también es posible determinar la densidad de probabilidad si utilizáramos una cadena lineal en la cual un agente aleatorio sólo puede brincar en dos direcciones; éstas serían: derecha o izquierda y estos eventos tienen una probabilidad de ocurrencia equivalente a  $p = 1/2$ . Por motivos de simplicidad se asume que el valor de  $a = 1$ .

Después de  $t$  lapsos de tiempo, el agente aleatorio ha brincado  $m$  veces a la derecha y  $t - m$  veces a la izquierda, entonces su posición actual está en:

$$x = m - (t - m) = 2m - t.$$

La probabilidad de que esto ocurra se describe mediante una distribución binomial:

$$P(m, t) = \binom{t}{m} p^m (1-p)^{t-m} = \binom{t}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

Si se tienen grandes valores de  $t$ ,  $m$  y  $(t - m)$ , el coeficiente binomial puede expresarse mediante la fórmula de Stirling:  $t!(2\pi t)^{-1/2}(t/e)^t$ , etc. Para la distancia real  $x$  que el agente aleatorio se ha movido desde su punto de inicio, tenemos que es mucho más pequeña que el número de veces en que se movió a la derecha o a la izquierda, las expresiones resultantes pueden expandirse en términos de  $x/t \ll 1$ , y finalmente obtenemos:

$$P(x, t) \cong \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} e^{-x^2/2t}.$$

Esta expresión forma de nueva cuenta un Gaussiano con un ancho  $t$ , el cual es idéntico a  $(x^2(t))$ . Partiendo de que  $P(x, t)$  representa una probabilidad, como sigue aquí  $\int_{-\infty}^{\infty} dx P(x, t) = 1$ , entonces ésta se satisface con la ecuación anterior.

En el más general de los casos en que se tenga una rejilla hipercúbica de dimensión  $d$ , la densidad de probabilidad viene siendo simplemente:

$$P(r, t) \sim \frac{1}{(r^2(t))^{d/2}} e^{-(d/2)r^2/(r^2(t))}$$

donde:  $(r^2(t)) = 2Dt$ , y la probabilidad  $P(0,t)$  de que el agente aleatorio esté en el origen después de  $t$  lapsos de tiempo es proporcional a  $(r^2(t))^{-2}$ .

Así pues concluimos con la exposición de las herramientas básicas utilizadas por esta teoría y también algunos de los resultados obtenidos por los investigadores que a lo largo del tiempo han venido desarrollando más y más especificaciones, utilidades y sobre todo exponiendo las ventajas que pueden obtenerse al tratar a un fenómeno crítico en la debida forma, para lograr avanzar hacia la aplicación de estas nuevas técnicas en nuestra sociedad, para beneficio de la misma.



## **Conclusiones**



# Conclusiones

Espero realmente que usted, paciente lector que llegó hasta el final de este trabajo, encuentre que entre los conceptos que aquí se introducen, quedaron muchos cabos sueltos desde la introducción, hasta el último capítulo; pues existen aún varias ramas de conocimiento que es necesario explorar para futuras investigaciones en el campo de los fenómenos críticos, mismos que pueden resultar fructíferos al desarrollar algunos otros trabajos de tesis que ahonden más en alguna de estas ramas, utilizando claro la herramienta que aquí se introduce, dándole un enfoque que va desde los fractales y el caos, hasta las aplicaciones prácticas como la predicción de sismos, misma que sería de mucha utilidad en nuestra ciudad, así como aplicaciones médicas o de la industria de suministros energéticos y alimenticia.

Existen tantas ramas de conocimiento humano, que un solo trabajo de tesis no podría cubrir los diferentes aspectos que se desprenden al solo mencionar el concepto de Percolación, por lo cual se espera haber cubierto el objetivo de este trabajo, que fue el presentar una modesta fuente de información útil en investigaciones futuras para cualquier rama del conocimiento.

Hoy en día como antaño, los estudiantes de ingeniería en computación, debemos manifestar nuevas aportaciones y actualizarnos día con día en el manejo de nuevas herramientas y tecnologías que van avanzando a ritmos crecientes, para cuyo caso se presenta este trabajo como un eslabón más en la cadena de investigación para matemáticos,

ingenieros, físicos, geólogos, etc., para llegar a ser uno de los países que utilizan las mejores tecnologías para producir y transformar los recursos de nuestro país, para beneficio de todos.

Otra observación importante, es que en las carreras de ingeniería, no se hace un estudio extenso acerca de los fenómenos críticos y tras haber desarrollado este trabajo, vemos que no estamos aislados de ellos, simplemente no los hemos tratado en su justa perspectiva, por lo cual no se ha explotado esta mina de conocimiento, tan útil para los futuros profesionistas, que sería justo el que se incluyera el estudio de fenómeno críticos no solo como una materia más, sino como un taller o laboratorio donde se prepare al alumno en este ámbito, para que así pueda aplicar sus conocimientos en el Área profesional en la cual se desempeñe.



***Bibliografia***



# Bibliografia

1. MANDELBROT, B.B. The fractal geometry of nature. New York, Freeman, 1985.
2. GLEICK, J. Chaos: Making a New Science. New York, Viking, 1987.
3. BARNHLEY, M.F. Fractals everywhere. Orlando FL... Academic Press, 1988.
4. DEVANCY, R. A first course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiments. Addison-Wesley, Reading, M. A. 1992.
5. GULICK, D. Economics with Chaos. New York, N.Y. McGraw-Hill, 1992.
6. HAKEN, H. Synergetics, 3rd. edition. Berlin, Springer-Verlag, 1983.
7. RUELLE, D. Chaotic Evolution and Strange Attractors. Cambridge, Cambridge University Press, 1989.
8. ARROWSMITH, D.K. and C.M. PLACE. Dynamical Systems, Chapman and Hall, Mathematics, 1992.
9. LAM, Lai Editor. Introduction to NonLinear Physics. Springer-Verlag, New York, Berlin Heidelberg, 1997.
10. ALLIGOOD, T. KATHLEEN, TIM D. SEVER, JAMES A. YORKE. Chaos and Introduction to Dynamical Systems. Springer-Verlag, New York Heidelberg, 1997.



**Appendice**



## MÓDULO DE GENERACIÓN DE ALEATORIOS USANDO COMO SEMILLA DE INICIO: EL TIEMPO

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <conio.h>

main(void) {
int seq[20], count=0, i, randnum;
  randomize();
  while(count < 20){
    randnum = random(20) + 1;
    for(i=0; i<count; i++){
      if(randnum == seq[i]) break;
    }
    if(i>=count)
    {
      seq[count] = randnum;
      count++;
    }
  }

  printf("Secuencia de aleatorios entre (1-20) = \n");
  for(i=0; i<count; i++) printf("%d ", seq[i]);
  printf("\n");
}
```

- 
- Este programa se presenta como módulo, pues debe insertarse en un programa de aplicación para solución de problemas de percolación, siempre y cuando haya sido adaptado al modelo matemático del problema. Por ende, este ejemplo es sólo demostrativo.

**MÓDULO DE GENERACIÓN DE ALEATORIOS USANDO LAS FUNCIONES RANDOMIZE Y RANDOM  
NÚMEROS ALEATORIOS GENERADOS CON UN CALCULADOR BÁSICO**

```

#include <time.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

main(void) {
    int i, count=0, randnum,m,ext,cuantas;
    int seq[10000];
    clrscr();
    printf("INTRODUZCA EL NUMERO DE ITERACIONES: ",cuantas);
    scanf("%d",&cuantas);
    clrscr();
    for(m=0; m<=cuantas; m++){
        printf("\nINTRODUZCA EL RANGO DEL GENERADOR: ",ext);
        scanf("%d",&ext);
        if(ext){
            randomize();
            while(count < ext){
                randnum = random(ext);
                for(i=0; i<count; i++){
                    if(randnum == seq[i]) break;
                }
                if(i>=count)
                {
                    seq[count] = randnum;
                    count++;
                }
            }
            printf("\n\nSECUENCIA DE NUMEROS ALEATORIOS\n\n");
            for(i=0; i<count; i++){
                printf("%d ",seq[i]);
            }
        }
    }
}

```

\* Este programa se presenta como módulo, pues debe insertarse en un programa de aplicación para solución de problemas de percolación, siempre y cuando haya sido adaptado al modelo matemático del problema. Por ende, éste ejemplo es sólo demostrativo

---

**MÓDULO DE GENERACIÓN DE ALEATORIOS USANDO LA OPERACIÓN MÓDULO**

Para el generador que describe la ecuación:

$$x_n = 5x_{n-1} + 1 \text{ mod } 16$$

```
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <conio.h>

main(void) {
  clrscr();
  divis();
}

divis() {
  int xa,num_ini,itera,i;

  div_t x;
  printf("Número de iteraciones decimadas: ");
  scanf("%d",&itera);
  for(i=1;i<=itera;i++){

    printf("\n\nIntroduzca la semilla de inicio: ");
    scanf("%d",&num_ini);

    xa=5*(num_ini)+1;
    x = div(xa,16);
    printf("%d",xa);
    printf(" modulo 16 = %d\n\n",x.rem);

  }
  return 0;
}
```

---

\* Este programa se presenta como modulo, pues debe insertarse en un programa de aplicación para solución de problemas de percolación, siempre y cuando haya sido adaptado al modelo matemático del problema. Por ende, éste ejemplo es sólo demostrativo.