

66
zej



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA INVERSIÓN BAJO CERTEZA
Y RIESGO EN TÍTULOS
INDIVIDUALES Y CARTERAS.

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
A C T U A R I A
P R E S E N T A :
MARTHA MORENO MORENO



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

DIRECTORA DE TESIS:
ACT. MARIA AURORA VALDES MICHEL

México, D. F. 1997



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

" LA INVERSION BAJO CERTEZA Y RIESGO EN TITULOS INDIVIDUALES Y CARTERAS "

realizado por MARIHA MORENO MORENO

con número de cuenta 8955497-7 , pasante de la carrera de ACTUARIA

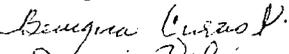
Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

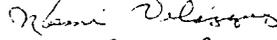
Atentamente

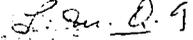
Director de Tesis

Propietario ACT. MARIA AURORA VALDES MICHEL 

Propietario ACT. YOLANDA SILVIA CALIXTO GARCIA 

Propietario ACT. BENIGNA CUEVAS PINZON 

Suplente ACT. NOEMI VELAZQUEZ SANCHEZ 

Suplente ACT. LAURA MIRIAM QUEROL GONZALEZ 

Consejo Departamental de Matemáticas


DR. MANUEL FALCONI MACAÑA

11/11/2005

DEDICATORIA

A la memoria de:

Mis padres

***Inés Avila Moreno
Benjamín Moreno Romero***

Sra.

Luisa García Espinosa

Mi amiga

Juanita Carmona Sabedra

Su recuerdo me da momentos muy felices

Con atención especial:

Directora de tesis

Act. Ma. Aurora Valdés Michel

Sinodales

Act. Yolanda S. Calixto García

Act. Benigna Cuevas Pinzón

Act. Laura Querol González

Act. Noemí Velázquez Sánchez

Profesores

Mat. Gerardo Espinoza Valencia

Act. Genoveva Barrera Godines

Martín González Limón

Tu presencia y comprensión en los momentos de trabajo fueron gran motivación para la culminación de la carrera. Gracias por tu apoyo.

A mi hija Karen

Chiquita que entiendes el porqué quedarte sola y aún siempre dices 'adelante mamita'. Gracias por tu amor.

A mis hermanos

Ana María, Teresita, Benjamín, Isabel, Conchita, Victor Manuel, Israel, Miguel Angel y Susy.

A quienes no pude tener cerca de mí pero en el momento oportuno tuvieron tiempo para escucharme, guiarme y ayudarme. A todos mil gracias.

Sra. Josefina Limón Orta

Este es el final del proyecto de trabajo en donde también usted participó con su ayuda. Gracias

Sra. Amparo Ramírez Moya

Gran señora a quien agradezco todo el cariño y atenciones que me ha dado, muchas gracias.

A todas aquellas personas que sin mencionar también me apoyaron en los momentos que los necesité.

INDICE

CAPITULO I

1. Riesgo e Incertidumbre	1
1.1 Relación Riesgo-Incertidumbre-Beneficio	1
1.2 Definición de riesgo	4
1.3 Clasificación de riesgo	7
1.3.1 Por su origen y posibilidad de medición	7
1.3.2 Desde el punto de vista causal	7
1.3.3 Por su afectación	8
1.3.4 Por su movimiento	8
1.4 Clases de riesgo en la empresa	

CAPITULO II

2. Inversión Bajo Certeza	13
2.1 Certeza, Riesgo e Incertidumbre	13
2.2 Decisión de inversión bajo certeza	15
2.3 Conjunto de oportunidades	18
2.4 Curvas de indiferencia	23
2.5 Determinación de la alternativa óptima	26
2.6 Obtención de los rendimientos de un proyecto	29
2.7 Decisión de aceptación o rechazo	33
2.8 Selección del subconjunto óptimo de proyectos	37
2.9 Alternativa óptima cuando es posible operar en el mercado de dinero	40
2.10 Alternativa óptima cuando es posible operar en el mercado de dinero	42

CAPITULO III

3. Inversión Bajo riesgo	43
3.1 Posibles actitudes de los individuos frente al riesgo	43
3.2 Análisis de la variación en la aversión al riesgo	44
3.3 La medición del riesgo y del rendimiento	
3.3.1 Distribución de probabilidad	47
3.3.1.1 Rendimiento esperado y Desviación Estándar	51

CAPITULO IV

4. Riesgo en Carteras de Inversión	55
4.1 Cartera de inversión	55
4.2 Las carteras eficientes	57
4.3 Riesgo y rendimiento de cartera	57
4.3.1 Rendimiento de cartera	57
4.3.2 Riesgo de cartera	60
4.4 El cálculo de rendimiento y riesgo en cartera	
4.5 con “n” activos	70
Anexo 1 Apalancamiento	72
Anexo 2 Teoría de la Utilidad	81
Conclusiones	83

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se elaboró con la finalidad de mostrar a un inversionista las situaciones probables de encontrar al iniciar un proyecto de inversión.

La inversión se define como: la capacidad que se tiene de adquirir activos ya sean reales o financieros y que éstos generen rendimientos en el futuro.

Sin embargo el rendimiento también es sinónimo de beneficio que se obtendrá de dicha inversión, en donde se puede estar bajo incertidumbre o riesgo.

Debido a que un inversionista puede encontrarse tanto en condiciones de certeza como de riesgo, se ha hecho el análisis de ambas situaciones.

En las inversiones bajo certeza, el tomador de decisiones conoce de antemano y con exactitud todos los valores de los parámetros que pueden afectar su decisión mientras que en las inversiones bajo riesgo se esta en posibilidad de sufrir pérdidas.

En los dos casos, inversiones bajo certeza y riesgo se debe hacer un análisis geométrico en el cual se obtiene el conjunto factible de las alternativas posibles según las preferencias del tomador de decisiones, después de una serie de instrucciones, se obtendrá la alternativa óptima.

Para definir si se acepta o se rechaza el proyecto de inversión, se deben analizar los criterios de decisión, esto se lleva a cabo utilizando las fórmulas de la tasa media de rendimiento (TMR), del valor actual neto (VAN) y de la tasa interna de rendimiento (TIR).

En virtud de que los inversionistas prefieren mayores a menores rendimientos y son aversos al riesgo, se dice que al aumentar su riqueza se produce una disminución de dicha aversión, la medida que debe tomar quien no desea correr ese riesgo es contratar seguros que permitan transferir ese riesgo a un tercero.

Se expone la clasificación del riesgo en forma general para ubicar qué tipo de riesgo se presenta.

El análisis financiero dentro de una empresa se orienta a que los proyectos con más riesgo deben ganar rendimientos más altos, a eso se refiere el riesgo objetivo llamado así por su

origen y posibilidad de medición, el cual disminuye conforme aumenta el número de expuestos y puede ser medido estadísticamente por algunas medidas de dispersión.

En cuanto al rendimiento esperado, el inversionista debe estar en condiciones de medir el riesgo para saber si el rendimiento puede compensar el riesgo que está aceptando, para ello se ha utilizado la Distribución de Probabilidad que confirma la posible ocurrencia de un suceso.

Dos medidas importantes que se utilizan en la distribución de probabilidad son: el *rendimiento esperado* y la *desviación estándar* (mide el grado de riesgo). Estas medidas son aplicables tanto en la inversión de títulos individuales y en carteras.

Un incentivo para la formación de carteras es la diversificación, con lo cual se tienen las posibilidades de reducir el riesgo y obtener beneficios sin reducir los rendimientos de la inversión.

Para el cálculo del rendimiento y riesgo en carteras, es más fácil utilizar notación matricial, el riesgo de la cartera de inversiones se mide por el rendimiento de cada una de las inversiones.

Finalmente, se puede afirmar que la toma de decisiones en una inversión no es cuestión de esperar que la suerte favorezca y se obtengan buenos resultados, sino que es necesario hacer todo un análisis y tener la seguridad de que se ha elegido la mejor alternativa para dar solución al problema.

CAPITULO I

RIESGO E INCERTIDUMBRE

1.1 Relación Riesgo-Incertidumbre-Beneficio.

Al estudiar beneficio encontramos que la dificultad surge a partir de la confusión de ideas derivada de la forma de pensar. La clave de este problema está en la noción de riesgo o incertidumbre, de aquí parte el interés en esta idea y como respuesta debe hacerse un examen del concepto incertidumbre y sus repercusiones sobre el proceso económico.

La incertidumbre debe enfocarse en un sentido radicalmente distinto del conocimiento familiar de riesgo, del cual nunca ha sido propiamente separada.

Riesgo significa, en algunos casos, una cantidad susceptible de medida mientras que en otros es diferente.

Una incertidumbre mensurable o riesgo propio, es tan diferente de una inmedible que en efecto no es de ningún modo una incertidumbre. Con esto se restringe el termino incertidumbre a los casos de tipo cuantitativo, es éste y no el riesgo lo que forma la base teórica o valida del beneficio.

Por lo tanto, para entender más claramente la distinción entre la incertidumbre mensurable y la no mensurable , se puede usar el termino riesgo para designar la primera y la palabra incertidumbre para la segunda.

La palabra riesgo se usa generalmente en una forma muy amplia para referirse a cualquier clase de incertidumbre, considerada desde el punto de vista de la contingencia desfavorable, y el término incertidumbre en forma similar con referencia al resultado favorable. Se habla del riesgo de una pérdida y de la incertidumbre de una ganancia .

La práctica diferencia entre las dos categorías, en el riesgo la distribución de los eventos en un grupo de casos es conocida (mediante cálculo a priori ó por estadísticas), mientras que en la incertidumbre esto no es cierto debido , en general , a que es imposible formar un grupo de casos porque la situación que se presenta es en alto grado única.

Un ejemplo de incertidumbre se relaciona con el ejercicio de la formación de las opiniones en cuanto al curso futuro de los hechos, opiniones que realmente guían la mayor parte de nuestra conducta.

Y bien, para llegar a una explicación satisfactoria del beneficio es necesario recordar la teoría dinámica a la incertidumbre del futuro ; una condición de los negocios arbitrariamente designada con el término riesgo en el lenguaje ordinario y en el de los negocios.

La doctrina de que el beneficio debe ser explicado en términos de riesgo ha sido sostenida por M.F.B. Hawley ¹, para quien, en el término de riesgo se encuentra la función esencial del empresario y la base de su renta, la empresa es el único factor realmente productivo. Respecto al beneficio de un negocio, después de satisfechas las necesidades de la tierra, capital y trabajo, suministrados por otros o por el propio empresario, no es la remuneración de la dirección o coordinación, sino el beneficio de los riesgos y responsabilidades a que el empresario está sujeto.

¹ La exposición más completa de la Teoría de Hwey está en su obra Enterprise and the Productive Process (1907).

Y como nadie en materia de negocios esta sujeto al riesgo por la cuantía que supone será el valor actuarial del riesgo, cuyo cálculo es relativamente correcto, una renta neta se acumula a la empresa, en conjunto, igual a la diferencia entre las ganancias de los negocios y las pérdidas reales en que han incurrido.²

Por tanto se define al beneficio como **Renta Residual** y en lo que respecta a la naturaleza y base de la renta especial relacionada con el supuesto del riesgo, como un exceso de pago sobre el valor actuarial del riesgo.

Tal renta consiste simplemente en salarios y no en beneficio.

El empresario puede liberarse del riesgo, en algunos casos, en una cantidad fija mediante un seguro. Pero el empresario es el propietario de toda la riqueza real y la propiedad implica riesgo. Todos, excepto el empresario reconocido como tal, están sujetos al riesgo; el terrateniente es también un propietario y sus tierras pueden variar de valor; el capitalista especialmente necesita el pago por los grandes riesgos que corre, y una parte de la renta e intereses es por consiguiente beneficio.

Una persona que invierte su propio capital en cualquier forma, necesariamente combina las dos funciones, la del capitalista y la de empresario. Lo mismo se puede aplicar evidentemente al trabajador que también esta admitiendo correr los riesgos.

Mientras una situación única que encierra un riesgo conocido, puede ser considerada como incierta, esta incertidumbre se convierte fácilmente en una incertidumbre efectiva; pues en un gran número de estos casos los resultados se pronostican de acuerdo con las leyes de la probabilidad, y el error aquí se aproxima a cero a medida que aumenta el número de casos.

² Obra citada, pág. 106-7 Enterprise and the Productive Process (1907).

Esto es simplemente cuestión de un desarrollo elemental de la organización de los negocios para combinar un número suficiente de casos para reducir la incertidumbre a los límites que se desee, donde estos han sido logros de las Instituciones de Seguros.

Por último, para este estudio general de riesgo e incertidumbre, exponemos que si el riesgo es mensurable, pero el factor moral o alguna otra consideración hace que el seguro ordinario sea inaplicable, se desarrollará y empleará algún otro método para lograr el mismo resultado.

Como ya sabemos el objetivo de una empresa es maximizar la riqueza del propietario, por lo tanto, la tarea del administrador también es maximizar el precio de las acciones comunes de la empresa, para lograrlo él debe aprender a valorar las dos determinantes claves que son riesgo y rendimiento.

En toda decisión financiera existen ciertas características de riesgo y rendimiento esperados, así como su efecto combinado sobre el precio de las acciones. De aquí la necesidad de conocer en forma clara a que se refiere cada uno de estos conceptos.

1.2 DEFINICIÓN DE RIESGO

El riesgo puede definirse como la posibilidad de sufrir pérdidas.

Existen activos que presentan más posibilidades de experimentar pérdidas que otros, a éstos se les consideran con más riesgo que lo demás.

La palabra riesgo se usa de manera indistinta con incertidumbre para referirse a la variabilidad de los rendimientos esperados relacionados con un activo dado.

Cuanta más certeza se tenga del rendimiento de un activo menor variabilidad habrá y, por tanto menor riesgo.

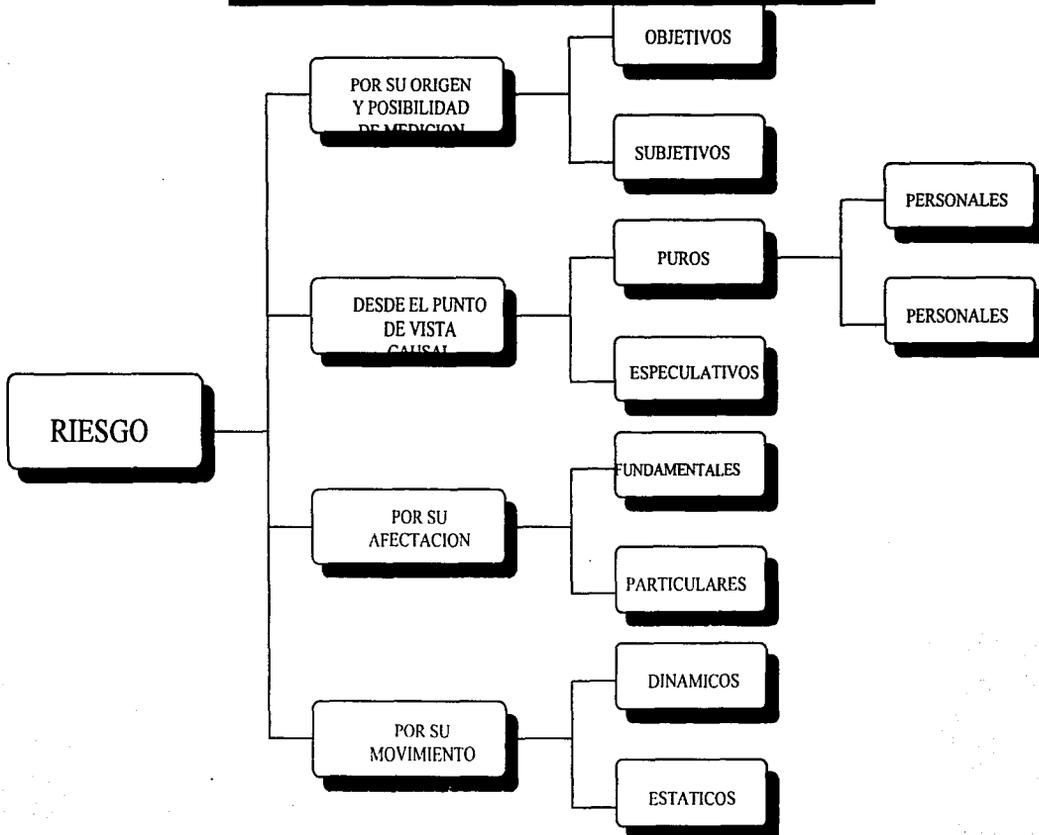
La diferencia entre riesgo e incertidumbre, según la definición de la estadística se relaciona con el conocimiento del que toma las decisiones acerca de las probabilidades, de que se obtienen ciertos resultados.

El riesgo existe cuando la persona encargada de las decisiones puede calcular las probabilidades relacionadas con varios resultados.

La incertidumbre surge cuando la persona que toma decisiones no cuenta con datos históricos, por lo que se obliga a especular con la finalidad de llevar a cabo una distribución de probabilidad subjetiva.

Por otro lado es importante conocer la clasificación general del riesgo para saber a que nos referimos y cuál estudiaremos de acuerdo al interés en el presente trabajo. La siguiente figura No. 1 nos representa cómo se clasifica el riesgo.

CLASIFICACIÓN DE RIESGO



1.3 CLASIFICACIÓN DE RIESGO

Se menciona una breve explicación de cada tipo de riesgo así como una más descriptiva del riesgo más interesante para el presente trabajo.

1.3.1 Por su origen y posibilidad de medición :

Riesgos objetivos.- Se definen como la variación relativa de pérdidas actuales, provenientes de pérdidas esperadas.

Riesgos subjetivos.- Se define como la incertidumbre basada en un estado mental o psicológico.

1.3.2 Desde el punto de vista causal :

Riesgos puros.- Se definen como la situación donde sólo hay posibilidades de pérdida, normalmente no se tiene utilidad si una pérdida ocurre.

Riesgos personales.- Se definen como aquellos que afectan directamente al individuo, envuelven la posibilidad de la pérdida completa, la reducción de un ingreso, gasto extra o el agotamiento de los fondos financieros. (Riesgo de muerte prematura, por edad avanzada, etc.).

Riesgo a la propiedad.- La persona que posee una propiedad está expuesta al riesgo de tener algún daño o una pérdida proveniente de numerosos peligros.

Riesgo de responsabilidad.- Son los que afectan a la mayoría de las personas bajo cualquier sistema de leyes, la persona es legalmente responsable si hace algo que dé como resultado

algún daño a terceros o a sus propiedades. El proceso legal obliga a resarcir las pérdidas a la persona que se le ocasionaron.

Riesgos especulativos.- Se definen como el suceso donde existe la posibilidad de pérdida o ganancia, es decir, incertidumbre respecto al propio suceso.

1.3.3 Por su afectación :

Riesgos fundamentales.- Estos riesgos surgen de pérdidas que son ajenas a la actividad del hombre tanto en origen, como en consecuencias, es decir, aquellos causados por : incertidumbres, inexactitudes y falla de armonía en el sistema económico. La mayoría de este tipo de riesgos se originan en la economía, la política o en la interdependencia de los pueblos, aunque pueden originarse también por causas exclusivamente naturales. (Desempleo, guerra, inflación, etc.).

Riesgos particulares.- Estos riesgos surgen de pérdidas que tienen su origen en hechos humanos, el impacto se siente en áreas muy específicas. (Robo a un banco, incendio, etc.).

1.3.4 Por su movimiento :

Riesgos estáticos.- Son los riesgos que se deben a las pérdidas causadas por las acciones irregulares de la naturaleza o por los errores y delitos de las actividades humanas.

Riesgos dinámicos.- Estos riesgos están asociados con una economía en movimiento. (Cambios en las tasas al consumidor, cambios tecnológicos, etc.).

Anteriormente se hizo referencia a los riesgos dados por su origen y posibilidad de medición, y estos nos llevan a definir a los Riesgos Objetivos

Riesgos Objetivos.- Son definidos como la variación relativa de pérdidas actuales provenientes de pérdidas esperadas.

El riesgo objetivo disminuye conforme se incrementa el número de expuestos, más específicamente, el riesgo objetivo varía inversamente con la raíz cuadrada de casos en observación.

El riesgo objetivo puede ser medido estadísticamente por algunas medidas de dispersión, como pueden ser la desviación estándar, el coeficiente de variación o alguna otra medida estadística.

En cambio, los **riesgos subjetivos** son definidos como la incertidumbre, basada en un estado mental o psicológico. El impacto de este riesgo varía dependiendo de cada individuo, dos personas en la misma situación pueden tener una percepción diferente del riesgo, y su conducta puede variar.

También se considera importante conocer los riesgos que existen dentro de la empresa, así veremos que el riesgo financiero hace referencia en el número de activos que intervienen en la medición del riesgo de un proyecto.

1.4 CLASES DE RIESGOS EN LA EMPRESA

a) Riesgos de las propiedades

- Incendio
- Explosión
- Vandalismo
- Robo
- Actos de la naturaleza : rayo, viento, terremoto, lluvia, etc.
- Rotura de maquinaria y sus pérdidas de beneficio consecuenciales

b) Riesgos personales

- Accidente laboral
- Enfermedad
- Muerte
- Incapacidad temporal o permanente
- Secuestro

c) Riesgo de reclamación judicial

- De explotación
- De productos
- De contaminación ambiental
- De responsabilidad del constructor

d) Riesgos de ventas

- Cambio en gustos o en modas
- Condiciones atmosféricas adversas
- Publicidad contraproducente
- Transporte : daños en tránsito
- Información defectuosa

e) Riesgos financieros

- Inversiones deficientes
- Préstamos o deudas
- Insolvencias de cliente
- Auto-seguro

f) Riesgos de producción y del personal

- Personal amante del riesgo
- Sistemas de ventas a comisión

- Alta o baja capacidad de una nueva planta
- Fallas en el diseño

g) Riesgos del medio ambiente

- Ubicación de la planta en áreas peligrosas
- Estabilidad política
- Relaciones de trabajo
- Contaminación ambiental

La idea básica del análisis financiero radica en que los proyectos con más riesgo deban ganar rendimientos más altos. Y por tanto la tasa de descuento usada en el análisis de dichos proyectos, deben incluir un factor de ajuste de riesgo.

La teoría de las finanzas nos demuestra que una medición apropiada del riesgo debe reconocer que los proyectos individuales no se mantienen en forma aislada sino combinada con otros activos.³

En algún producto el rendimiento puede oscilar desde menos a más. Debido a estas variabilidades el proyecto se define como altamente riesgoso.

Asimismo el pronóstico de varios productos de una sola o más empresas pueden ser de diferente grado de riesgo.

Por lo tanto, en un proyecto cuanto más variables sean los rendimientos futuros esperados, más riesgo existirá en el proyecto.

³ El riesgo de un activo se define en términos de la variabilidad probable de los rendimientos futuros provenientes del activo.

El riesgo financiero consiste en una eventual incapacidad para absorber los costos financieros. En relación al apalancamiento financiero, el hecho de que, a medida que aumentan los gastos financieros, aumenta el nivel de las Utilidades Antes de Intereses e Impuestos (UAI) necesarios, para cubrir tales gastos. El incremento del apalancamiento financiero trae consigo un riesgo mayor, ya que los pagos financieros aumentados requieren que la empresa mantenga un nivel mayor de utilidades antes de impuestos e intereses a fin de permanecer en el negocio.⁴

Ver anexo 1 “Apalancamiento”

⁴ Apalancamiento financiero es a capacidad de la empresa para emplear los cargos financieros fijos con el fin de aumentar al máximo los efectos de los cambios en las utilidades por acción.

CAPITULO II

INVERSIÓN BAJO CERTEZA

En este capítulo se hace una exposición de las bases teóricas que **sustentan** las decisiones de inversión, en condiciones de **certeza** .

Debido a que todo inversionista se enfrenta, generalmente, con un conjunto integrado por un gran número de activos, es necesario estudiar cuáles serán las características de ese conjunto. Después analizaremos los supuestos acerca de sus preferencias con los cuales se determina la realización de una elección de inversión y que ésta pueda considerarse **racional**.

Para poder expresar esas preferencias y proponer un método apto para analizar las posibles actitudes del inversionista frente al riesgo, debemos saber acerca de la Teoría de Utilidad. Ver anexo No. 2 "Teoría de Utilidad". Finalmente se desarrollarán algunas aplicaciones a la selección de proyectos de inversión en condiciones bajo certeza.

2.1 CERTEZA, RIESGO E INCERTIDUMBRE

En el capítulo anterior se dio una introducción para saber la relación o diferencia que hay entre estos conceptos, sin embargo volvemos a dar una breve definición de cada uno, con el objetivo de distinguir claramente las tres posibles situaciones que pueden presentarse cuando un individuo deba tomar una decisión.

Certeza.- Se define como el caso en el que el decididor conoce de antemano con exactitud todos los valores de los parámetros que pueden afectar su decisión.

Riesgo.- Se define como el caso en que el decididor no tiene las condiciones de certeza, pero:

- a) Conoce cómo en el futuro estará la economía, los negocios, etc. y como podrán afectar a los valores de los parámetros relevantes en la decisión.
- b) Está en condiciones de asignar la probabilidad de ocurrencia de cada uno de los valores.

Incertidumbre.- Se define como el caso en que no se tiene ninguna de las condiciones que caracterizan al riesgo, es decir, ni se conocen los futuros estados que puedan determinar la decisión, y tampoco se puede asignar probabilidad a estos estados.

La realidad es que, la situación de certeza no se presenta casi nunca. Los supuestos de inversiones bajo certeza (Bonos del Gobierno, Certificados de Tesorería, etc.) no son ciertas pues su rendimiento real es aleatorio así como lo es, la tasa de inflación y en consecuencia en la práctica se suponen rendimientos con variación en un rango muy reducido.

2.2 DECISIÓN DE INVERSIÓN BAJO CERTEZA

Empezamos este estudio con decisiones de consumo e inversión en condiciones de certeza por las siguientes razones:

- Su desarrollo teórico es sencillo e intuitivo.
- Los conceptos introducidos podrán ser utilizados en la Teoría de Decisión en condiciones de riesgo la cual estudiaremos más adelante.
- Todos los problemas de decisión bajo certeza, riesgo o incertidumbre tienen elementos en común.
- En todos los casos se considerará un conjunto de alternativas, un criterio para ordenar esas alternativas y, un método que nos lleve a determinar la alternativa óptima.

Para la aplicación de estos elementos, se dará un ejemplo no sin antes tener bien definidos los conceptos en los que se hace referencia, los cuales conocemos al contestar las siguientes preguntas:

1) ¿Qué es invertir?

La inversión consiste en adquirir activos, reales o financieros, capaces de generar rendimientos en el futuro. Una inversión nos lleva a dos conjuntos, a los que se les puede llamar “flujos de capitales”, uno es el de desembolsos o pagos y el otro, de ingresos o cobros. Para la valoración financiera se hace necesario conocer estos dos conjuntos, o el conjunto de los rendimientos netos, el cual dado un tiempo “ t ”, determina la diferencia

entre los cobros y los pagos efectuados en ese periodo. Al rendimiento neto también lo conocemos como “Flujo de Caja”.

2) ¿Cuales son las magnitudes que definen un proyecto de inversión?

a) Desembolso inicial.- Es la cantidad obtenida al sumar todos los pagos que se realicen con motivo de la puesta en marcha del proyecto.

b) Rendimientos netos.- Es la diferencia entre el valor inicial de la inversión y el desembolso inicial. (En algunos casos es necesario utilizar el saldo del capital inicial en cualquier momento del proyecto).

c) Consumo.- En las inversiones reales se llega a tener necesidad de ocupar el saldo de capital debido al aumento de la producción y de las ventas, esto se hace a fin de incrementar los rendimientos netos.⁵

d) Duración.- Cuando se estudia un proyecto de inversión, la duración que se utiliza para cálculos y previsiones no siempre coincide con la vida útil del proyecto, si ésta es muy larga, la evaluación se hace en un período que no exceda de 10 años y se asigna un valor residual a los activos en los que se materializa la inversión.

Una vez que hemos entendido lo referente a una inversión, iniciaremos con un ejemplo de un inversionista que se enfrenta ante una decisión de inversión bajo certeza en activos físicos (edificios, maquinarias, etc.), más adelante se analizarán las inversiones en títulos y acciones.

⁵ Para el caso de inversiones en empresas, la obtención de los rendimientos suele hacerse con las previsiones realizadas por los expertos en las distintas áreas de la empresa, y en particular de los departamentos de producción y ventas.

Ejemplo :

Se considera un inversionista cuyo capital inicial es $W_0 = \$ 5000$, quien debe decidir las proporciones de su capital que dedicará al **consumo** y a la **inversión**.

Aquí sólo se analizará un periodo, en donde comienza ($t=0$) y donde termina ($t=1$), ya que las inversiones se hacen al inicio del período, los consumos en los dos momentos y el resultado **cierto** se devenga al final de dicho período.

En la tabla 2.1 se muestran los valores de la tasa de rendimiento en las cinco posibilidades de inversión abiertas del inversionista con capital W_0 .

Activo	Valor al inicio del período	Valor al final del período	Tasa de rend. del período % $r = (R_1 - R_0) / R_0$
A	1000	1750	0.75
B	1000	1600	0.6
C	2000	2400	0.2
D	800	880	0.1
E	200	210	0.05

Tabla No. 2.1

2.3 CONJUNTO DE OPORTUNIDADES

Para resolver un problema de decisión, primero se debe determinar el conjunto constituido por todas las alternativas entre las que puede optar el inversionista. Pero dentro de estas alternativas nos podemos encontrar en varios casos, por ejemplo:

1° caso: En donde no se dedican fondos a la inversión sino que se consume totalmente el capital inicial al comienzo del período sin tener monto alguno. Se representa por el punto W_0 .

2° caso: En donde se invierten \$1,000 y se consumen \$4,000 del capital inicial al comienzo del período, obteniendo un monto por \$1,750. Se representa por el punto A.

3° caso: En donde se invierten \$2,000 (1.000 en A y 1.000 en B) y se consumen \$3,000 del capital inicial al comienzo del período, obteniendo un monto por \$3,350 . Se representa por el punto B.

4° caso: En donde se invierten \$4,000 y se consumen \$1,000 del capital inicial al comienzo del período, obteniendo un monto por \$5,750. Se representa por el punto C.

5° caso: En donde se invierten \$4,800 y se consumen solamente \$200 del capital inicial, se consumen al inicio de período, obteniendo un monto por \$6,630. Se representa por el punto D.

6º caso: En donde se invierten todo el capital inicial, es decir, \$5,000 y no se dispone algo para el consumo en el comienzo del período, obteniendo un monto al final del período por \$6,840. Se representa por el punto E.

Estos 6 casos los podemos observar en la figura No. 1.

El conjunto formado por las alternativas mostradas va a representar la colección de posibilidades ciertas, ante las que se enfrenta el inversionista y este es llamado "**conjunto factible**", y se le designa de la siguiente manera:

$$F = \{(5000;0),(4000;1750),(3000;3350),(1000;5750),(200;6630),(0;6850)\}$$

“ EL CONJUNTO FACTIBLE “

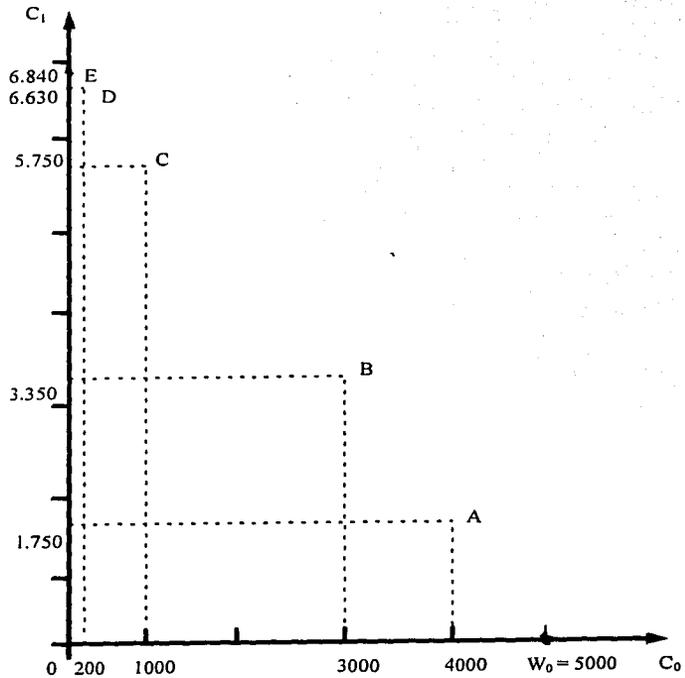


Figura 1.

Generalmente las inversiones en activos físicos no son divisibles, es decir no pueden invertirse fondos en adquirir partes de ellos, sino que deben ser adquiridos o desechados en su totalidad, antes de presentarlo en teoría supondremos el caso contrario.

Nosotros queremos adquirir partes tan pequeñas como se quiera de un activo físico, una vez aceptado este supuesto, se presenta ante el inversionista un conjunto factible constituido por infinitas alternativas, incluidas las seis ya analizadas y, también todas las resultantes de combinar inversiones en los distintos activos en las innumerables proporciones que ahora son permitibles. Esto es lo que nos permite unir los puntos aislados de la figura anterior mediante un trazo continuo que determine una **Curva de Transformación**. Figura No. 2

En donde el inversionista podría optar en principio por cualquiera de las alternativas de consumo al inicio y al final del período ($C_0; C_1$) con la sola restricción $C_0 \geq 0$ y $C_1 \geq 0$; El conjunto de todas ellas recibe el nombre de **Conjunto de Oportunidades**. Sin embargo, sus posibilidades reales se reducen a tener que elegir entre las alternativas pertenecientes a un subconjunto del conjunto factible representado por la curva de transformación expuesta. Esto se debe a las restricciones que resultan de su capital inicial W_0 y de sus posibilidades de inversión limitadas exclusivamente a combinaciones de los cinco activos.

En la curva de transformación podemos ver que la pendiente decrece a medida que disminuye el consumo C_0 a partir de W_0 , debido al orden descendente según era la tasa de rendimiento.

" LA CURVA DE TRANSFORMACION "

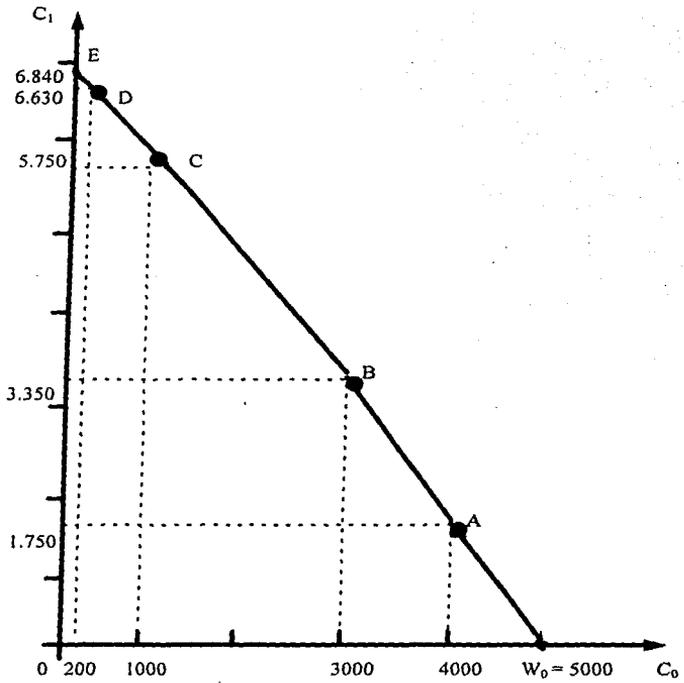


Figura 2.

2.4 CURVAS DE INDIFERENCIA

Una vez determinado el conjunto factible, se especificará un criterio que permita ordenar las alternativas posibles según las preferencias del inversionista, y así elegir la o las alternativas óptimas, esas preferencias se caracterizan mediante las denominadas **Curvas de Indiferencia**.

Todos los puntos situados sobre una misma curva representan alternativas que resultan indiferentes para el inversionista. Por ejemplo en la siguiente gráfica los puntos P_1 y P_4 representan alternativas del conjunto de oportunidades, que son indiferentes para el inversionista.⁶

Como es habitual, el inversionista prefiere siempre un mayor a un menor consumo, entonces las alternativas que pertenecen a la curva I_1 son preferidas a cualesquiera de las que están ubicadas en la curva I_2 y éstas a su vez son preferidas a las de la curva I_3 y así será para las siguientes si las hubiere.

La forma de las curvas de indiferencia descendente y de izquierda a derecha y el tipo de concavidad hacia arriba significa que el inversionista por cada incremento en su consumo inicial deberá sacrificar parte de su consumo futuro, es decir, el consumo futuro a sacrificar será cada vez menor cuanto mayor sea el consumo en el principio del periodo. Figura No. 3

⁶ Si las alternativas P_1 y P_4 del conjunto de oportunidades, son indiferentes al inversionista, y ambas tienen el mismo consumo inicial C_0 , el consumo al fin del período será mayor para P_1 . Será suficiente probar con un sólo par de alternativas pertenecientes a I_1 e I_2 .

Las curvas de indiferencia se caracterizan por :

- Son cóncavas
- Descendientes de izquierda a derecha
- Tienen pendiente negativa
- No pueden cortarse entre sí

“ CURVAS DE INDIFERENCIA “

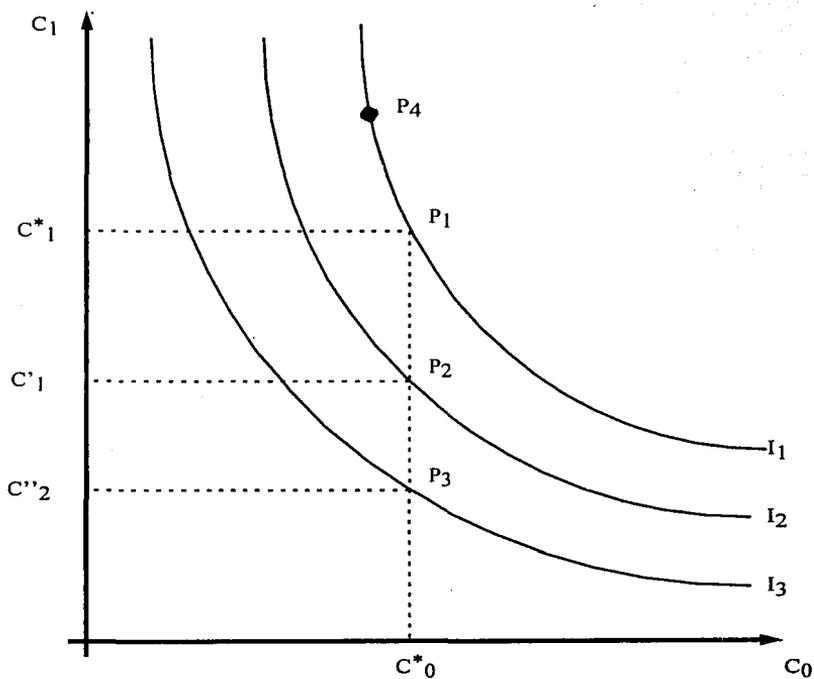


Figura 3.

En donde observamos :

- a) Que a incrementos del consumo inicial corresponden disminuciones en los respectivos consumos futuros.
- b) A iguales incrementos en el consumo del principio del periodo, corresponden desiguales sacrificios de consumo del final del período (menor sacrificio cuando el consumo inicial es mayor).
- c) Que dicho sacrificio es cada vez mayor a medida que aumenta el consumo inicial.

Otra propiedad importante de las curvas que conforman el 'mapa de indiferencia' que describe las preferencias de un determinado individuo, es que las mismas no pueden cortarse entre sí, si se llegaran a cortar en un punto entonces las alternativas P_1 y P_4 serán consideradas indiferentes por estar localizadas en la misma curva I_1 , asimismo serán consideradas indiferentes las alternativas P y P_2 ubicadas en la curva I_2 .

Por último puntualizaremos que cada inversionista difiere en gustos y preferencias, por tanto a cada uno de ellos le corresponderá una alternativa óptima en el mismo mapa de indiferencia.

2.5 DETERMINACIÓN DE LA ALTERNATIVA ÓPTIMA

Una vez caracterizado el conjunto factible a través de la curva de transformación y precisada la jerarquía de preferencias del inversionista mediante su mapa de indiferencia, se está en condiciones de dar solución al problema de la determinación de la alternativa óptima para cualquier inversionista.

Mediante el siguiente diagrama se representa el mapa de indiferencia y la curva de transformación de consumos al principio y al final del período, para un inversionista con riqueza inicial W_0 .

La alternativa óptima está representada por el punto P, en que una de las curvas de indiferencia es tangente a la curva de transformación. De las infinitas alternativas factibles elegirá aquella que le proporcione la mayor satisfacción de acuerdo a su escala de preferencias, lo que implica que tratará de alcanzar una curva de indiferencia situada lo más alejada posible del origen de coordenadas 0. Se pensaría que va a preferir una alternativa representada por un punto ubicado sobre la curva I_1 , pero ningún punto ubicado sobre esa curva pertenece al conjunto factible, por lo que no es alcanzable mediante su riqueza inicial W_0 y sus posibilidades de inversión. Tampoco se conformaría con elegir alguna de las alternativas indiferentes para él representadas por los puntos P_1 P_2 ; existen también otras alternativas también factibles, preferibles a las mencionadas por estar ubicadas en la curva de indiferencia más alejadas del origen que I_6 . Resulta entonces claro que el punto P representa una alternativa que a la vez es factible y preferida a cualquier otra que también sea factible.

La combinación óptima de consumos al comienzo y final del período, determina cuál es el monto de la inversión óptima en activos físicos. En efecto, la alternativa P se alcanza con un consumo inicial C^*_0 y una inversión por valor de $I_0 = W_0 - C^*_0$, cuyo rendimiento permite solventar el consumo C^*_1 a realizar al final del período.

Por lo que, para dos inversionistas cuyos mapas de indiferencia sean distintos, también serán distintas las alternativas óptimas que elegirán, a pesar que pueden ser iguales sus capitales iniciales y curvas de transformación.

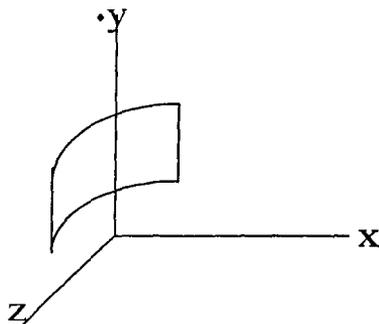


Figura 5

En este mapa de indiferencia se puede visualizar el conjunto de las alternativas óptimas limitado por las curvas de indiferencia, de donde la curva I_1 es preferible a cualquiera que exista debajo de ella, es decir I_1 es preferible a I_2, I_3, \dots, I_n .

Una vez vista la parte geométrica del problema nos enfocaremos también a estudiar la parte analítica.

Primero es necesario entender cómo se obtienen los Rendimientos Netos de un Proyecto.

“ LA ALTERNATIVA ÓPTIMA “

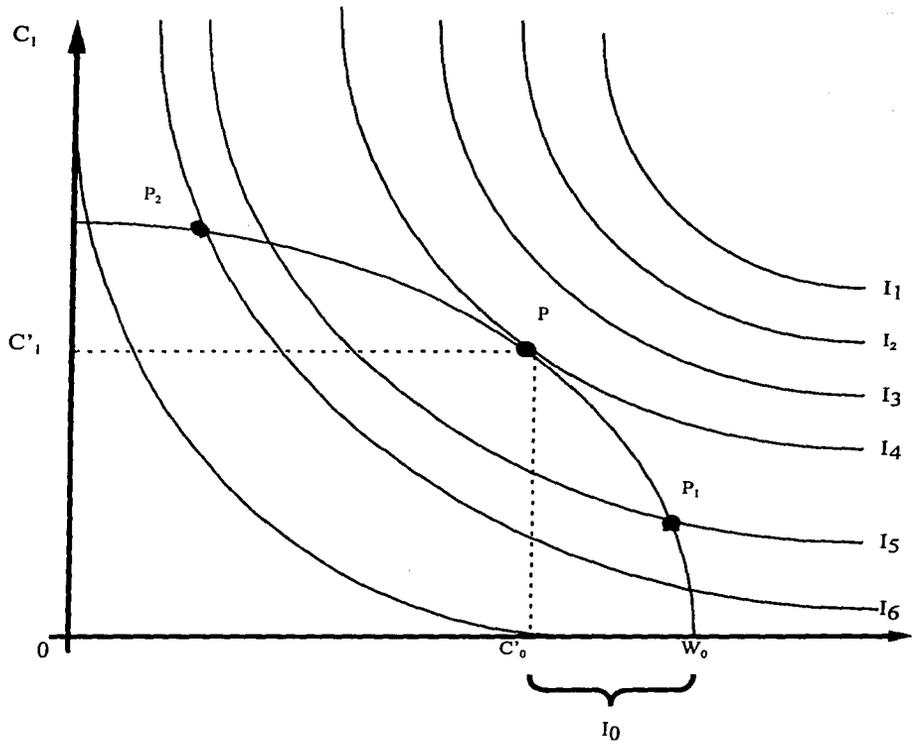


Figura 4

2.6 OBTENCIÓN DE LOS RENDIMIENTOS DE UN PROYECTO

Un proyecto P de inversión queda definido frecuentemente por :

$$P (C_0 ; R_1 ; \dots ; R_n ; VR)$$

Donde :

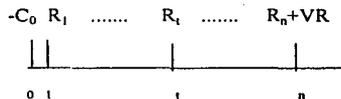
C_0 = Es el desembolso inicial que requiere el proyecto.

$R_1 ; \dots ; R_n$ = Son las cuantías de los rendimientos netos que genera el proyecto en los períodos 1, ..., n respectivamente.

N = Es el tiempo de duración de evaluación del proyecto.

VR o S_n = Es el valor residual del proyecto al final del período n. El cual se incluye dentro del rendimiento neto.

La gráfica en función del tiempo sería :



Ejemplo :

Un agricultor explota una finca en secano y obtiene unos rendimientos medios antes de amortización e impuestos de cuatro millones de pesos anuales. Se le presenta la posibilidad de transformarla en regadío y para ello ha de llevar a cabo una inversión en obras de 5 millones de pesos y en equipos de riego por un importe de 6 millones de pesos. Por la información obtenida de otros agricultores que realizaron la transformación anteriormente, estima que los rendimientos que obtendrá en los años siguientes si lleva a cabo la inversión son : durante el primer año un 50%, durante el segundo un 75%, y a partir del tercero un 100%, más que lo obtenido en secano.

Si se efectúa el estudio para una duración de 10 años y se tiene en cuenta que :

- Necesitará otro tractor similar al que ya tiene desde hace 4 años, cuyo precio es de 4 millones de pesos.
- La vida útil de los tractores y equipos de riego es de 10 años.
- El valor residual de los tractores es el 10% del coste inicial (amortización lineal)
- El valor residual de los equipos de riego es nulo (amortización lineal)
- El valor de la obra al finalizar los 10 años es de 5 millones de pesos sin haber practicado amortización.

Se pide :

Obtener los rendimientos netos de la inversión diferencia, suponiendo que la tasa de impuestos es del 40%, y que los ingresos y pagos están periodificados al final de cada año.

FINCA EN SECANO

AÑOS	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(1) Desembolso							4				
(2) Rdto. medio antes de imptos.		4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
(3) Amortización tractor		0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
(4) Resultado extraordinario							0.4				
(5) Base imponible (2)-(3)+(4)		3.6	3.6	3.6	3.6	3.6	4	3.6	3.6	3.6	3.6
(6) Impuestos = 0.4 * (5)		1.44	1.44	1.44	1.44	1.44	1.6	1.44	1.44	1.44	1.44
(7) Rdto. medio después de imptos.		2.56	2.56	2.56	2.56	2.56	2.4	2.56	2.56	2.56	2.56
(8) Valor residual											2.4
(9) RDTO. NETO (7)+(8)+(4)-(1)		2.56	2.56	2.56	2.56	2.56	-1.2	2.56	2.56	2.56	4.96

FINCA EN REGADÍO

AÑOS	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(1) Desembolso											
*Obras	5										
*Tractor	4						4				
*Equipo de riego	6										
(2) Rdto. medio antes de imptos.		6	7	8	8	8	8	8	8	8	8
(3) Amortización		1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4
(4) Resultado extraordinario							0.4				
(5) Base imponible (2)-(3)+(4)		4.6	5.6	6.6	6.6	6.6	7	6.6	6.6	6.6	7
(6) Impuestos		1.84	2.24	2.64	2.64	2.64	2.8	2.64	2.64	2.64	2.8
s de imptos.		4.16	4.76	5.36	5.36	5.36	5.2	5.36	5.36	5.36	5.2
(8) Valor residual											7.4
(9) RDTO. NETO (7)+(8)+(4)-(1)	-15	4.16	4.76	5.36	5.36	5.36	1.6	5.36	5.36	5.36	13

Tabla No. 2.2

Se ha considerado que el tractor amortiza su importe total en los diez años, siendo el valor residual una utilidad que tributa, por lo que en el año 6o. el impuesto se incrementa respecto a años anteriores en 0.4 (tipo impositivo) por 0.4 (valor residual) = 0.16, siendo la cuantía del impuesto : $1.44 + 0.16 = 1.6$ millones de pesos. En el año 10 no se incluyen impuestos sobre el valor residual e 2.4 millones ya que se considera que la explotación va

a seguir funcionando, aunque el estudio económico se realiza para un horizonte de 10 años. Procediendo en forma análoga para el caso de que se lleve a cabo el proyecto de regadío, la obtención de los rendimientos netos.

El valor residual en el año 10, se compone del valor de las obras más el valor residual del segundo tractor (2.4) : $5+2.4 = 7.4$ millones de pesos.

Los impuestos del año 6 serán 2.64, más los impuestos sobre el resultado extraordinario ($0.4 * 0.4$)

Los rendimientos netos de la inversión diferida se obtienen : $R_i(\text{Inversión Diferencia}) = R_i(\text{regadío}) - R_i(\text{secano})$ como puede observarse en la siguiente tabla :

AÑO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>Rs (Regadío)</i>	-15	4.16	4.76	5.36	5.36	1.6	5.36	5.36	5.36	13
<i>Rs (Secano)</i>	0	2.56	2.56	2.56	2.56	-1.2	2.56	2.56	2.56	4.96
<i>Rs (Inv. diferencia)</i>	-15	1.6	2.2	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	8.04

Tabla No. 2.3

2.7 DECISIONES DE ACEPTACIÓN O RECHAZO

En la elección de inversiones se distinguen dos tipos de decisiones:

- A) Decisiones ante una inversión aislada
- B) Decisiones ante un conjunto de proyectos de inversión.

Cuando se trata de una decisión ante una inversión aislada, en donde los criterios han de servir para decidir si se acepta o se rechaza el proyecto. Los proyectos de gran trascendencia para la empresa, tanto por su importancia, como por el volumen de fondos que absorben, se estudian en forma aislada o independiente. Caso de nuestro ejemplo en estudio.

Decisión ante un conjunto de proyectos, los criterios han de servir para establecer una ordenación de dicho conjunto, que permita luego decidir teniendo en cuenta también las restricciones existentes.

Aun cuando los criterios de decisión a aplicar sean los mismos, la forma de tomar la decisión es distinta.

A) Decisión de inversión aislada

Criterios de decisión

- 1) **Criterios parciales o incompletos.**- No se tienen en cuenta todos los rendimientos netos, o no se tiene en cuenta el principio de preferencia temporal de los capitales.

a) **TMR** (Tasa Media de Rentabilidad)

Establece la relación entre el rendimiento neto y el desembolso inicial

$$TMR = \frac{I}{n} \sum_{t=1}^n \frac{R_t}{C_0} = \frac{R_t}{C_0}$$

Este criterio de decisión consiste en aceptar el proyecto si la TMR es mayor que el fijado por la empresa, y de lo contrario, rechazar.

b) PR (Plazo de recuperación)

Mide el tiempo que ha de transcurrir hasta que los rendimientos netos recuperan la cuantía del capital invertido. Anotando con k esa duración.

$$\sum_{t=1}^k R_t = C_0 \Rightarrow k$$

Los rendimientos netos se van sumando hasta que se igualan a C_0 .

Por tanto, en una inversión aislada una vez fijado por la empresa el plazo de recuperación máximo que está dispuesta a admitir, si k es menor que dicho plazo se acepta, y de lo contrario, se rechaza.

2) Criterios de decisión globales o completos.- Cuando se tienen en cuenta todos los rendimientos netos, así como su situación temporal o vencimiento.

VAN (Valor Actual Neto), o BTA (Beneficio Total Actualizado)

Mide el beneficio total actualizado que proporciona la inversión al tanto i de valoración teniendo como referencia el tanto de coste de capital para la empresa. Este criterio se denomina también del Valor Capital (VC).

$$VAN = BTA = \sum_{t=1}^n R_t (1+i)^{-t} - C_0$$

El proyecto se acepta cuando $BTA(i) > 0$, y se rechaza cuando $BTA(i) < 0$.

b) TIR (Tasa Interna de Rendimiento)

Es aquel tanto de valoración r , que anula el BTA de la inversión.

$$r \Rightarrow BTA(r) = 0 \Leftrightarrow \sum_{t=1}^n R_t (1+r)^{-t} = C_0$$

Mide el tanto de rentabilidad que proporciona la inversión por sí misma.

El proyecto se acepta cuando $r > i$, y se rechaza cuando $r < i$, siendo i el tamaño mínimo de rentabilidad que exige la empresa a sus inversiones.

B) Decisión ante un conjunto de proyectos de inversión.

Crterios para la ordenación de proyectos

Sea el conjunto de proyectos de inversión $P = \{P_1; P_2; \dots; P_m\}$

a) El **criterio TMR** (Tanto medio de rentabilidad) permite establecer una relación de orden total en el conjunto de proyectos de inversión.

Un proyecto es preferido a otro si tiene un TMR mayor:

$$P_i > P_j \leftrightarrow PR(P_i) > TMR(P_j)$$

b) Plazo de Recuperación (PR)

El criterio del PR establece una relación de orden total en P. Un proyecto es preferido a otro si su plazo de recuperación es menor:

$$P_i > P_j \leftrightarrow PR(P_i) < PR(P_j)$$

c) Valor Actual Neto (VAN) o Beneficio Total Actualizado (BTA).

El criterio VAN permite ordenar completamente el conjunto P. Un proyecto es preferido a otro si su VAN es mayor:

$$P_i > P_j \leftrightarrow VAN(P_i) > VAN(P_j)$$

Para que la comparación sea correctamente realizada, los proyectos deben ser homogéneos (misma cuantía inicial C_0 , y misma duración), como es el caso de nuestro ejemplo en estudio. Cuando los proyectos tienen distinta cuantía inicial es práctico utilizar el criterio en donde se estudia con detalle la Relación Beneficio Coste (RBC), el cual mide el beneficio actualizado que proporciona cada peso invertido así como el Tanto de Rendimiento Interno (TRI) el cual permite establecer una relación de orden total en P.

2.8 SELECCIÓN DEL SUBCONJUNTO OPTIMO DE PROYECTOS

Si no existe ningún tipo de restricciones, se eligen, de la ordenación realizada anteriormente, todos los que cumplen la condición: $BTA > 0$, o $RBC > 0$, o $TRI > i$

Cuando existen restricciones, suele utilizarse la programación lineal o cuadrática. Una posible función objetivo a maximizar es:

$$MaxZ = \sum_{i=1}^n (BTA)_i * X_i$$

Ejemplo :

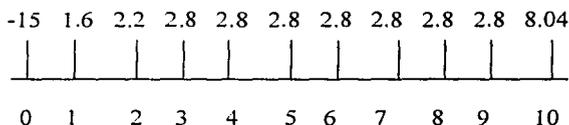
Utilizando los resultados del ejemplo anterior, calcular :

- a) La Tasa Media de Rentabilidad
- b) El Plazo de Recuperación
- c) El Beneficio Total Actualizado, suponiendo el Tanto de Coste de Capital para la empresa de 10%

d) La Tasa Interna de Rendimiento del proyecto.

Indicando para cada uno de estos criterios de decisión si el proyecto debe aceptarse o rechazarse.

a) Los resultados obtenidos en el ejercicio anterior respecto al TMR para cada año son :



El tanto Medio de Rentabilidad es :

$$\text{TMR} = \frac{1}{10}(1.6 + 2.2 + \dots + 8.04) / 15 = 0.2096 = 20.96 \%$$

Para aplicar este criterio de decisión debe indicarse cuál es el TMR que la empresa acepta como mínimo.

b) El plazo de recuperación está dado por :

$$\sum_1^k R_t = 15 \Rightarrow k = 6 \text{ años}$$

Para aplicar este criterio de decisión es necesario fijar previamente el plazo máximo que la empresa está dispuesta a aceptar.

c) El Beneficio total actualizado, BTA (10%) es :

$$\text{BTA (10\%)} = -15 + 1.6 (1.1)^{-1} + \dots + (8.04) (1.1)^{-10} = 2638,258 \text{ millones de pesos}$$

Por tanto se debe aceptar el proyecto por ser $\text{BTA}(10\%) > 0$

d) El tanto de rendimiento interno del proyecto r es tal que :

$$1.6(1+r)^{-1} + \dots + 8.04(1+r)^{-10} = 15$$

resolviendo por aproximación sucesiva resulta : $r = 13.28\%$

Por tanto debe aceptarse el proyecto al ser $r > 10\%$

Nota : Esta inversión es simple, el criterio BTA y TIR dan el mismo resultado de decisión.

2.9 EL MERCADO DE DINERO

Una vez que se ha analizado la forma de invertir en activos físicos veremos la posibilidad que tienen los individuos de operar en el mercado de dinero, con la finalidad de alcanzar niveles superiores de satisfacción mediante una adecuada distribución de su riqueza, pero ahora entre inversiones en activos físicos e inversiones en el mercado de dinero.

Dado que hemos dado condiciones de certeza, todos los inversionistas pueden tomar o prestar dinero a una tasa (libre de riesgo) r_L , la cual consideramos igual para todas las operaciones.

El Valor Actual de los flujos de fondos netos al inicio y al final del período de un inversionista son C_0 y C_1 respectivamente es: $VA=C_0+C_1(1+r_L)^{-1}$

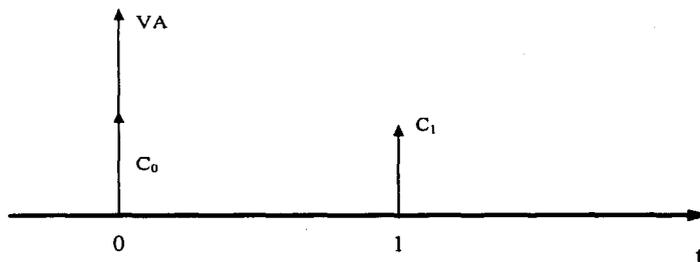
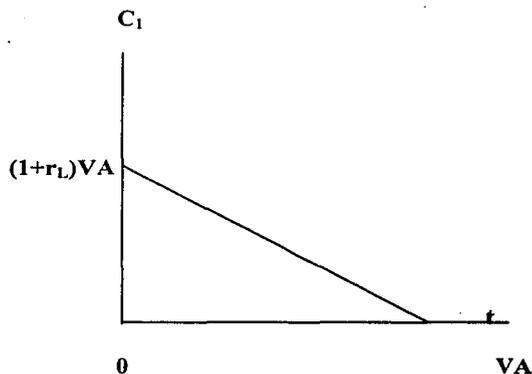


Figura 5

En VA obtenido representa el consumo máximo que puede realizar a principio del período, financiando ese consumo con su ingreso inicial C_0 más un préstamo tomado por valor de C_1 . También puede interpretarse VA como el valor actual de la alternativa $(C_0; C_1)$ de consumos al principio del período.

Si en ambas partes de la igualdad se multiplica por $(1+r_L)$ y se hace un pasaje de términos se obtiene $C_1 = (1+r_L)VA - (1+r_L)C_0$

Y al fijar los valores de r_L y VA resulta una ecuación lineal del tipo $C_1 = a + mC_0$, es decir, dada una cierta r_L existen infinitas alternativas de consumo $(C_0; C_1)$ que tienen un mismo valor actual fijo. Toda las alternativas están representadas por puntos situados sobre una línea recta con pendiente $m = -(1+r_L)$, intersección con el eje $0C_1$ es $a = (1+r_L)VA$ y con el eje $0C_0$ es VA.



2.10 ALTERNATIVA ÓPTIMA CUANDO ES POSIBLE OPERAR EN EL MERCADO DE DINERO

Después de presentar los elementos básicos, característicos de los problemas de decisión en condiciones de certeza, se mostró la imposibilidad de aplicar ese modelo a la descripción de las decisiones de los inversionistas en títulos y acciones, pues los rendimientos de las inversiones en esos activos no son, en general, ciertos. En consecuencia, al ser generalmente aleatorios dichos rendimientos, resulta que los problemas de decisión acerca de esas inversiones son problemas de decisión en condiciones de riesgo o incertidumbre.

Supondremos entonces que se puede asignar probabilidades objetivas o subjetivas a los distintos rendimientos posibles a cada inversión, con lo que las decisiones acerca de las mismas se realizarán en condiciones de riesgo.

Dado que, bajo condiciones de riesgo, los resultados de cada acción no son conocidos con certeza, deben representarse mediante una distribución de probabilidades, que en última instancia no es más que una lista de todos los resultados posibles junto con sus respectivas probabilidades de ocurrencia.

CAPITULO III

INVERSION BAJO RIESGO

3.1 Posibles actitudes de los individuos frente al riesgo.

Para ciertos inversionistas es preferible un rendimiento promedio bajo pero seguro a un rendimiento alto pero inseguro con probabilidad de tener pérdidas altas.

Para estos inversionistas el aumento adicional de riqueza incrementa su satisfacción cada vez menos, a los inversionistas con ese comportamiento se les llama 'aversos al riesgo', por lo que se tiene la siguiente :

Definición.- Un individuo es 'averso al riesgo' cuando su función de utilidad marginal es decreciente. De lo que se deduce que la 2a. derivada de la función de utilidad debe ser negativa ($U'' < 0$) y en consecuencia, la función de utilidad de un individuo averso al riesgo es cóncava.

Se puede probar que los individuos aversos al riesgo no son jugadores, éstos prefieren un rendimiento cierto a un incierto con igual valor esperado.

Por otro lado los individuos dispuestos a correr riesgos para obtener mayores ganancias se caracterizan por tener una función de utilidad con la propiedad de que, a incrementos iguales en la riqueza corresponden incrementos crecientes en su nivel de satisfacción.

Definición.- Un individuo es 'propenso al riesgo' cuando su función de utilidad marginal es creciente.

Para un individuo propenso al riesgo la segunda derivada de la utilidad es mayor que cero ($U'' > 0$) y por tanto su función de utilidad es convexa.

Por último existe una tercera categoría de individuos, los que no consideran al riesgo en sus decisiones. Son aquellos que se rigen con el criterio del máximo rendimiento esperado. La Teoría de la Utilidad (ver anexo 2), permite clasificarlos como un caso particular denominado de 'indiferencia ante el riesgo', y se define como :

Definición.- Un individuo es 'indiferente al riesgo' cuando su función de utilidad marginal es constante.

3.2 ANÁLISIS DE LA VARIACIÓN EN LA AVERSIÓN AL RIESGO.

Debido que generalmente los individuos, en particular los inversionistas, prefieren mayores a menores rendimientos y son aversos al riesgo, a continuación se analizarán las posibles causas a esta actitud.

Esto equivale a suponer que la función de utilidad del inversionista es creciente ($U' > 0$) y cóncava ($U'' < 0$).

Las características del comportamiento del inversionista promedio, parecen indicar que al aumentar su riqueza se produce una disminución de su aversión al riesgo. Por eso como medida de dicha aversión la actitud de quien que no desea correr riesgo es contratar 'seguros' que permitan transferir ese riesgo a un tercero, pagando para ello una cantidad que varía en proporción directa con esa aversión.

En la figura No. 6 se ha dibujado la curva que representa este caso.

Siendo un capital inicial w_0 y una inversión cuyos rendimientos aleatorios son R_1 y R_2 , con probabilidades p_1 y $p_2 = 1 - p_1$, entonces dependiendo de lo que ocurra en estos resultados su riqueza final será $w_0 + R_1$ ó $w_0 + R_2$. Estos resultados se han marcado con los puntos A y B, cuyo rendimiento esperado es:

$$\bar{R}R = p_1R_1 + p_2R_2$$

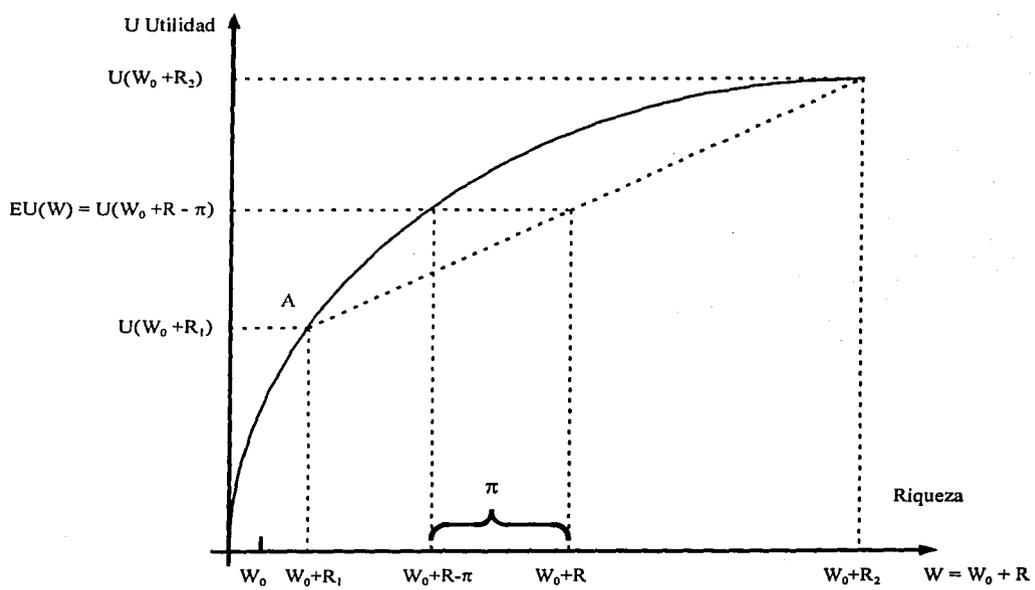


Figura 6

3.3 LA MEDICIÓN DEL RIESGO Y DEL RENDIMIENTO

a) La estrategia Pasiva

El inversionista no esta en posibilidad de predecir o anticipar los tipos de interés para poner en práctica la estrategia, simplemente elige una cartera que tenga una duración igual al período planificador. El en caso de darse cambios en los tipos de interés durante dicho período , no pueden reducir la inversión acumulada por debajo del rendimiento prometido inicialmente, es decir, el resultado de esta estrategia es “indiferente” frente a los cambios en los tipos de interés.

b) La estrategia activa

Esto significa “estar a largo”, o sea donde los rendimientos cambian de acuerdo a las variaciones del interés.

El rendimiento acumulado de la inversión se coloca por encima (debajo) del rendimiento prometido si los tipos de interés caen (suben) continuamente.

Cuando un inversionista predice correctamente que los tipos de interés caerán (subirán) continuamente y el inversionista está a largo (a corto) entonces el rendimiento conseguido será superior al rendimiento prometido para el periodo planificador.

Las estrategias activas tienen riesgos porque los errores de predicción pueden llevar a que el rendimiento sea menor que el de una estrategia pasiva.

Una estrategia activa puede tener mejores resultados si los tipos de interés se mueven de forma general en la dirección anticipada.

Muchos inversionistas pueden llevar a cabo estrategias activas, si consideran que vale la pena correr el riesgo por mayores posibles ganancias.

Sin embargo es raro que haya únicamente 2 estrategias disponibles, una con riesgo y otra sin él, lo cierto, y que más ocurre es que existan varias estrategias con riesgo. Son posibles

muchas estrategias activas porque un inversionista puede elegir duraciones diferentes, todas diferentes al período planificador.

En este caso un inversionista puede preguntarse en que grado una estrategia es más arriesgada que otra.

Para contestar esta pregunta él debe poder “**Medir el riesgo**”, conociendo el riesgo ligado a una estrategia, y por tanto, podrá ser capaz de valorar si los posibles rendimientos de la estrategia pueden compensar el riesgo que esta aceptando. Lo anterior se puede lograr recurriendo y haciendo uso de una importante herramienta que es la Probabilidad.

3.3.1 Distribución de Probabilidad

La probabilidad de un suceso se puede considerar como una medida “*subjetiva*” de la probabilidad de que ese suceso ocurra. Así P_i es la probabilidad de que un suceso correspondiente al índice i ocurra.

La probabilidad de sucesos que no son ciertos pero pueden ocurrir la encontramos en el intervalo $0 \Leftrightarrow P_i \Leftrightarrow 1$.

Las probabilidades normalizadas guardan proporción de tal forma que si

$P_i = 1$ El suceso ocurre, y

$P_i = 0$ El suceso no ocurre en absoluto.

Por definición : $\sum_{i=1}^n P_i = 1$

si solo existen N sucesos posibles mutuamente excluyentes (exclusivos o separados)

Al conjunto de probabilidades (p_1, p_2, \dots, p_n) se le llama “ **Distribución de probabilidad**”. Comparar la distribución de probabilidad relacionada con cada activo permite al tomador de decisiones tener una idea más clara de los diferentes grados de riesgo.

Una distribución de probabilidad se puede graficar al representar los posibles resultados y probabilidades asociadas sobre una serie de ejes de probabilidad-resultado.

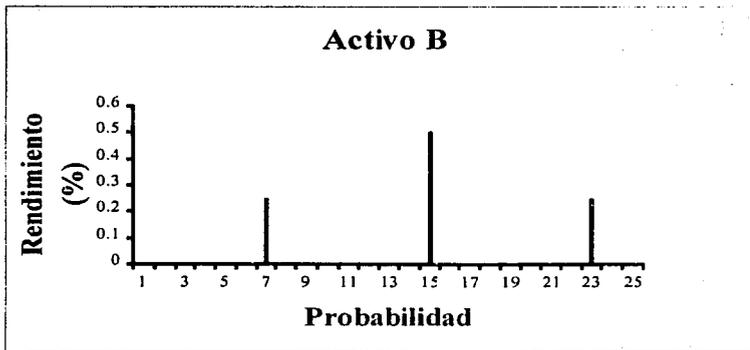
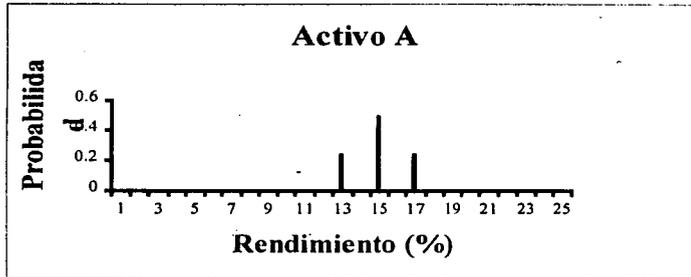
El tipo más sencillo de la distribución de la probabilidad es el diagrama de barras o la distribución de *probabilidad discreta* la cual sólo muestra un número limitado de coordenadas de probabilidad-resultado.

Se puede hacer una distribución de probabilidad más descriptiva para una inversión si la persona que toma decisiones obtiene las probabilidades relacionadas con cada resultado posible, y se le conoce como *probabilidad continua*.

En las siguiente gráfica se presenta la distribución de probabilidad para los activos A y B.⁷

⁷ Para dar lugar a una distribución de probabilidad continua se debe contar con datos acerca de un gran número de hechos históricos. La distribución de probabilidad para hechos riesgosos también puede llevarse a cabo usando la simulación.

**Distribuciones de probabilidad discreta para
los activos A y B**

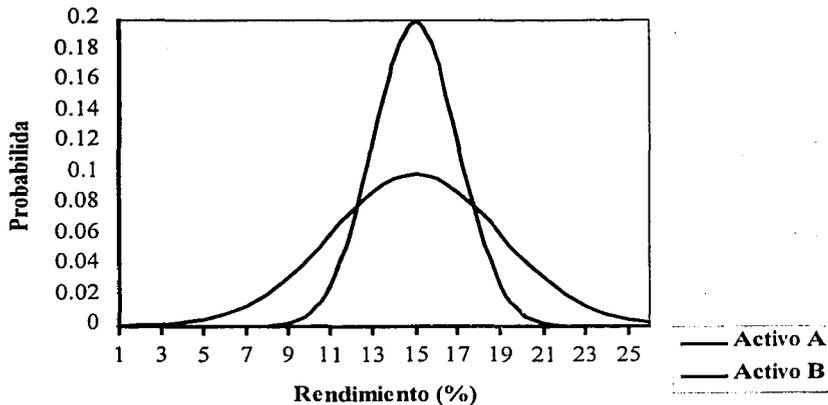


En el caso de la distribución continua, las probabilidades cambian el gran número de resultados adicionales considerados

El área que se halla bajo cada una de las curvas es igual a 1, Lo que significa que el 100% de los resultados se ha considerado.

También se observa en la gráfica que cuando los activos A y B tienen el mismo rendimiento esperado (15%), la distribución del rendimiento para A es mucho más centrada o cercana al valor esperado (la media) , que el correspondiente a B.

Distribuciones de probabilidad continuas para los activos A y B



Gráfica 5

3.3.1.1 RENDIMIENTO ESPERADO Y DESVIACIÓN ESTÁNDAR

Dos medidas importantes que se utilizan en la distribución de probabilidad, como medidas iniciales para medir el rendimiento y el riesgo son: El rendimiento Esperado y la Desviación Estándar.

A) Rendimiento esperado.- En el caso en que todos los posibles rendimientos de una inversión tienen la misma probabilidad de ocurrir, es aplicable el concepto de promedio como suma de todos los valores dividida por el número de estos, es decir

$$\bar{X}_i = \frac{r_1 + r_2 + \dots + r_n}{n} \quad \text{ó}$$

$$\bar{X} = \frac{i}{n} \sum_{i=1}^n X_{it}$$

Esta segunda fórmula corresponde a el caso particular que permite calcular la media del valor promedio de una variable aleatoria cuando N no es igualmente probable. Este parámetro recibe el nombre de “Esperanza Matemática”, “Valor Esperado” ó “Media” de la variable aleatoria y está dada por :

$$E(R_i) = \bar{R}_i = \sum_{i=1}^N R_{it} p_{it}$$

donde:

- K_i** Rendimiento para el i-ésimo resultado
- P_r** Probabilidad de ocurrencia del i-ésimo rendimiento
- n** Número de resultados considerados.

La fórmula anterior nos indica que $E(R_i)$ y \bar{R}_i serán utilizados indistintamente, es decir, tendrán el mismo significado. Sin embargo (esta no se puede usar para calcular rendimientos esperados en donde los eventos que se presentan no son equiprobables (igual probable) , para ello se utiliza la fórmula general.

Dos propiedades de la “Esperanza Matemática” de una variable aleatoria que serán de mucha utilidad son :

1) La esperanza matemática de una suma de variables aleatorias es igual a la suma de las esperanzas matemáticas de ellas mismas.

$$E(X_1+X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

2) La esperanza matemática del producto de una constante (un número) por una variable aleatoria es igual al producto de esa constante por la esperanza matemática de la variable aleatoria.

B) Desviación Estándar.- Es la medida estadística más común del riesgo de un activo en la desviación estándar, a partir del valor esperado ó media.⁸

La desviación estándar en la distribución de rendimientos de un activo, es la raíz cuadrada del promedio obtenido al calcular los cuadrados de las desviaciones estándar en los resultados individuales a partir del valor esperado.

⁸ Aunque el riesgo se considere como determinado por la variabilidad ó dispersión de los resultados con respecto a un valor esperado, se cree que éste se presenta sólo cuando los resultados están por debajo del valor esperado, ya que solo esta clase de rendimientos se consideran malos.

En el cálculo de la desviación estándar el ordenamiento de la distribución de probabilidad de los rendimientos, σ_k , está dado por:⁹

$$\sigma_k = \sqrt{\sum_{i=1}^n (k_i - \bar{k})^2 * P_i}$$

Donde podemos ver que la desviación estándar es la raíz cuadrada de la suma de los productos de cada desviación respecto del valor esperado, \bar{k} , elevado al cuadrado y multiplicado por la probabilidad de ocurrencia respectiva.

El principal interés de las desviaciones estándar, está en el uso de la comparación del riesgo del activo, en donde se requiere de cuidado ya que es una medida absoluta de dispersión, y no toma en cuenta la dispersión de los resultados en relación con un valor esperado.

⁹ La fórmula para obtener la desviación estándar de los rendimientos, σ_k , es una situación donde se conocen todos los resultados y se supone que sus probabilidades relacionadas son iguales

es:
$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (k_i - \bar{k})^2}{n}}$$

C) Coeficiente de variación.- En la intervención de 2 activos con diferente valor esperado, el uso de la desviación estándar puede mejorarse al convertirse en un coeficiente de variación.

Este se calcula dividiendo la desviación estándar σ_k , para un activo, entre su valor esperado, \bar{k} .

Está dado por $CV = \frac{\sigma_k}{\bar{k}}$

Cuanto mayor sea el coeficiente de variación, más riesgo tendrá el activo.

El coeficiente de variación, no proporciona más información que las desviaciones estándar, su utilidad es ayudar en la comparación de activos que presentan diferentes valores esperados.

CAPITULO IV

RIESGO EN CARTERAS DE INVERSION

4.1 Cartera de inversión.

Una cartera es una colección de valores en poder de un solo inversionista, ya sea persona física o moral.

Uno de los principales incentivos para formar carteras es la 'diversificación', esto es la asignación de fondos invertibles en diversos valores, mediante la diversificación los inversionistas están en posibilidad de reducir el riesgo.

Los beneficios de reducción del riesgo que produce la diversificación pueden alcanzarse sin reducir los rendimientos de la inversión.

Para el análisis de la diversificación es necesario hacer ciertas suposiciones respecto a la forma en que operan los mercados y también con relación a la psicología de los inversionistas.

Estas suposiciones no corresponden necesariamente a los mercados tal como son en la realidad, éste tratamiento es válido toda vez que permite conocer a detalle procesos muy complicados.

Supuestos :

- 1.- Los mercados de valores operan sin costos de operación. (no existen costos de comisión ni impuestos).
- 2.- Los inversionistas tienen libre acceso a la información sobre los valores, con la finalidad de fijar el precio de valores.
- 3.- Los inversionistas evalúan la información de igual manera y tienen igual posibilidad sobre el riesgo y el rendimiento esperado.
- 4.- Los inversionistas buscan valores con rendimientos estimados más altos y tratan de evitar el riesgo.
- 5.- El tiempo de los inversionistas es un solo período.

Estas suposiciones se utilizan para simplificar el análisis en la diversificación y no obstante que no se apegan a la realidad, el resultado nos da una idea más exacta de lo que se quiere entender.

Es necesario el uso arbitrario de estas suposiciones, principalmente para permitir la exactitud matemática en los resultados que se examinan.

Sin ellas, las operaciones matemáticas serían mucho más complicadas, aunque también las ideas serían distintas.

4.2 LAS CARTERAS EFICIENTES.

La selección se basa en suponer que existe un conjunto de carteras que cumplen una condición presupuestaria que consiste en títulos que han de producir una sola entrada de caja en el momento j . Como cada cartera es factible, ya se han tomado en consideración los precios de los títulos, y no se puede limitar al empleo de las V_j para diferenciar entre varias carteras.

Para cada cartera disponemos de media $\bar{X}(V_j)$ y su varianza $\sigma^2(V_j)$. Con el empleo de supuestos poco restrictivos sobre la utilidad del inversionista podemos eliminar algunas de las carteras factibles y quedarnos con lo que se denomina el **conjunto eficiente**, como ya se vio en el capítulo II.

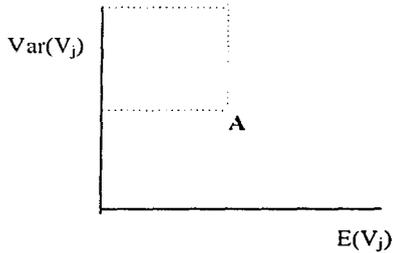
Tales supuestos restrictivos que se necesitan son :

Un incremento en el rendimiento esperado aumentará la satisfacción ; un incremento en la varianza de los rendimientos reducirá la satisfacción.

Estos supuestos se expresan así :

$$\frac{\delta U}{\delta \bar{X}(V_j)} > 0 \quad y \quad \frac{\delta U}{\delta \sigma^2(V_j)} < 0$$

Gráficamente estos supuestos equivalen a afirmar que la pendiente de la curva de indiferencia es positiva, y que, al pasar de una curva de indiferencia a otra situada a su derecha, existe un incremento en la utilidad. Una cartera factible con ciertas características localizadas en el punto A del plano $\bar{X}(V_j), \text{Var}(V_j)$ como se aprecia en la siguiente figura.



Los puntos al noreste de A pueden eliminarse en base a los supuestos sobre la función de utilidad del inversionista, ya que éstos representan de carteras satisfacción menor que la de A.

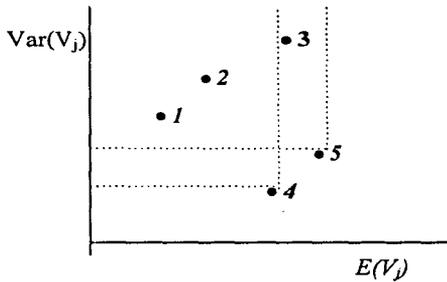
Todas las combinaciones del área sombreada tienen :

- 1) La misma varianza que A pero rendimiento esperado más bajo.
- 2) Los mismos rendimientos esperados que A pero una varianza más elevada.
- 3) Una varianza más elevada y unos rendimientos esperados inferiores a los de A.

Por otro lado si proponemos un grupo de carteras factibles, el conjunto eficiente lo conseguiríamos con la eliminación de todas las carteras dominadas por otras pertenecientes al conjunto factible.

Ejemplo :

Suponemos que las carteras factibles son 5 puntos representados en la siguiente gráfica :



Aquí las carteras 4 y 5 constituyen el conjunto eficiente. Ambas carteras son mejores que las carteras 1, 2 y 3. No podemos eliminar la 4 o la 5 sin unos supuestos más restrictivos sobre la utilidad del inversionista.

Sin embargo al conjunto eficiente del inversionista todavía se le tiene que efectuar una elección según sus preferencias por el rendimiento y el riesgo. Con la determinación del conjunto eficiente se ha reducido la magnitud de la elección.

4.3 Riesgo y rendimiento de cartera

Gran parte de los activos se mantienen como integrantes de carteras. Los bancos, compañías de seguros, fondos mutualistas, etc., quienes tienen obligación de mantener carteras diversificadas así como vigilar la importancia del rendimiento y el riesgo de éstas.

4.3.1 Rendimiento de Cartera

El rendimiento esperado sobre una cartera, \bar{K}_p , es el **promedio ponderado** del rendimiento esperado sobre las acciones individuales de la cartera, donde los pesos, $-W_j$, son la fracción de la cartera total invertida en cada acción.

$$\bar{K}_p = W_1 \bar{K}_1 + W_2 \bar{K}_2 + \dots + W_n \bar{K}_n$$

4.3.2 Riesgo de cartera

El riesgo de una cartera, σ_p , a diferencia de los rendimientos, no es un promedio ponderado. Con el siguiente ejemplo de cartera de riesgo con 2 activos se entenderá mejor a que se refiere

Ejemplo :

Se considera una cartera de riesgo con 2 activos, (este caso es el más sencillo para entender el concepto de la diversificación y de la creación de carteras con riesgo).^{9bis}

^{9bis} El rendimiento esperado de una cartera depende del rendimiento esperado de cada valor en la cartera y del porcentaje de los fondos invertidos en cada valor.

Rendimiento esperado.- Este se obtiene mediante

$$E(R_p) = W_1E(R_i) + W_2E(R_j)$$

donde :

W_1, W_2 es el porcentaje de los fondos o peso asignado a los activos i, j respectivamente.

$E(R_p), E(R_i), E(R_j)$ es el rendimiento esperado de la cartera y los activos individuales.

Por lo tanto en una cartera de 2 activos o más, se obtiene el promedio simple ponderado de los rendimientos esperados de cada uno de los activos.

Riesgo.- El riesgo de una cartera depende de la tendencia de los rendimientos de los activos en la cartera a moverse en forma conjunta. Los rendimientos 'se mueven juntos' cuando ambos tienden a ser 'altos' o 'bajos' en un mismo período.

Matemáticamente ésta tendencia de los rendimientos a moverse juntos se pueden medir mediante la 'covarianza' de los rendimientos.

La covarianza ,se calcula a partir de la varianza (σ^2) en la siguiente fórmula :

$$VAR_p = W_i^2 VAR_i + W_j^2 VAR_j + 2W_iW_jCOV_{ij} \quad \text{ó bien}$$

$$\sigma_p^2 = W_i^2 \sigma_i^2 + W_j^2 \sigma_j^2 + 2W_iW_jCOV_{ij}$$

donde :

$$COV_{ij} = \sum_{t=1}^T \{ [R_i - E(R_i)] * [R_j - E(R_j)] \}$$

T, es el número de períodos usados para calcular la covarianza.

Para calcular la **covarianza** de rendimiento de 2 activos con riesgo, el inversionista necesita conocer los rendimientos de cada activo en cada período. Para el cálculo de la covarianza utilizaremos los rendimientos de los valores A y B.

Ejemplo :

Primero :

Calcular las desviaciones para cada valor restando el rendimiento medio al rendimiento en cada período.

ACTIVO A

Rendimiento - Media = Desviación

1981	0.18	-	0.078	=	0.102
1982	0.15	-	0.078	=	0.072
1983	-0.13	-	0.078	=	-0.208
1984	0.05	-	0.078	=	-0.028
1985	0.14	-	0.078	=	0.062
	Total			=	0.0

ACTIVO B

Rendimiento - Media = Desviación

1981	0.14	-	0.058	=	0.082
1982	0.09	-	0.058	=	0.032
1983	0.02	-	0.058	=	-0.038
1984	-0.03	-	0.058	=	-0.088
1985	0.07	-	0.058	=	0.012
	Total			=	0.0

Si el cálculo es correcto, la suma de todas las desviaciones de cada valor serán igual a cero.

Segundo :

Multiplicar para cada período, la desviación respectiva de un valor por la desviación del otro valor y obtener la suma de todos los productos.

Año	Activo A Desviación		Activo B Desviación	=	Resultados
1981	0.102	x	0.082	=	0.0084
1982	0.072	x	0.032	=	0.0023
1983	-0.208	x	-0.038	=	0.0079
1984	-0.028	x	-0.088	=	0.0025
1985	0.062	x	0.012	=	0.0007
					0.0218
					Suma de resultados

Tercero :

Dividir la suma de los resultados obtenida anteriormente entre N (el número de períodos utilizado para calcular los productos).

Así se obtiene la covarianza = $COV_{a,b} = \frac{0.0218}{5} = 0.0044$, la cual se utilizará para calcular

la varianza y la desviación estándar de una cartera de los activos A y B.

$$\sigma_p^2 = W_a^2 \sigma_a^2 + W_b^2 \sigma_b^2 + 2W_a W_b COV_{ab}$$

$$\sigma^2 = [(0.7)(0.7)(0.0127)] + [(0.3)(0.3)(0.0034)] + [(2)(0.7)(0.3)(0.0044)] = 0.0084$$

La **desviación estándar** (σ) de una variable, es simplemente la raíz cuadrada de la varianza de esa variable, en virtud de que tiene las mismas unidades que la variable original, es intuitivamente más significativa que la varianza. En este caso la desviación estándar calculada de la cartera será :

$$\sigma = \sqrt{0.0084} = 0.0915$$

Es decir 9.15% anual.

Por otra parte, el riesgo en las carteras de inversión también se puede expresar utilizando el coeficiente de correlación en lugar de la covarianza, que se encuentran relacionados así :

$$CORR_{a,b} = \frac{\sigma^2_{a,b}}{\sigma_a * \sigma_b}$$

donde :

σ_a y σ_b son las desviaciones estándar correspondientes a los activos A y B.

En el ejemplo anterior, esto significa que la correlación entre los rendimientos de los valores A y B es $CORR_{a,b} = \frac{0.0044}{0.1127 * 0.0582} = 0.6708$.

Por lo tanto la ecuación para la variación de una cartera de 2 activos también se puede expresar utilizando la correlación en lugar de la covarianza.

$$\sigma_p^2 = W_a^2 \sigma_a^2 + W_b^2 \sigma_b^2 + 2W_a W_b \sigma_a \sigma_b CORR_{a,b}$$

El coeficiente de correlación es fundamentalmente una **covarianza graduada**.

La graduación significa que la correlación tiene que encontrarse entre -1 y 1. Si la correlación es mayor que cero, significa que las 2 variables tienden a moverse en la misma dirección cuando cambian.

Un valor negativo para la correlación señala que las 2 variables tienden a moverse en direcciones opuestas.

Si la correlación entre 2 variables es igual a cero, no hay correlación entre ellas y se consideran independientes.

Sin embargo en la creación de la cartera uno de los factores que más afectan al riesgo es el grado de la covarianza o correlación entre los valores individuales que componen la cartera.

La correlación entre 2 valores no tiene efecto alguno sobre el rendimiento global de la cartera compuesta por estos 2 valores.

Para un estudio más detallado supondremos dos valores imaginarios ABC y XYZ y analizaremos cada uno de los casos.

Correlación = 1

Tomando en cuenta la fórmula para la varianza de una cartera de 2 activos o valores que utiliza el coeficiente de correlación

$$\sigma_p^2 = W_a^2 \sigma_a^2 + W_b^2 \sigma_b^2 + 2W_a W_b \sigma_a \sigma_b \text{CORR}_{a,b}$$

si el coeficiente de correlación es igual a 1, el último término se puede simplificar a $2W_aW_b\sigma_a\sigma_b$ pues el coeficiente de correlación desaparecerá y la expresión para la covarianza se convierte en un cuadrado perfecto y al calcular la raíz cuadrada obtenemos :

$$\sigma_p = W_a * \sigma_a + W_b * \sigma_b$$

En consecuencia, en la correlación igual a 1, el riesgo de cartera depende sólo del riesgo de los activos individuales y del valor ponderado que representan en la cartera.

Correlación = -1

Se utiliza la fórmula anterior y siguiendo el mismo procedimiento, podemos observar que el segundo término tiene signo negativo.¹⁰

$$\sigma_p^2 = W_a^2 \sigma_a^2 + W_b^2 \sigma_b^2 - 2W_aW_b \sigma_a \sigma_b \text{CORR}_{a,b}$$

Otra vez la expresión para la varianza se convierte en cuadrado perfecto lo que permite determinar la raíz cuadrada de la varianza, obteniendo :

$$\sigma_p = W_a * \sigma_a - W_b * \sigma_b$$

$$\sigma_p = (0.6*0.22) - (0.4*0.08) = 0.10$$

¹⁰ Existe una segunda raíz de esta ecuación, es decir, $\sigma_p = W_a * \sigma_a - (1 - W_a) * \sigma_b = 0$. Sin embargo, el valor calculado usando esta raíz es -0.1. Debido a que la desviación estándar por definición nunca puede ser negativa, la otra raíz es la que se busca.

Este valor debe ser menor al de la cartera con activos perfectamente correlacionados.

El examinar este caso da la posibilidad de crear una cartera sin riesgo.

Fijando la desviación estándar para este caso igual a cero, si se da la solución, obtenemos :

$$\sigma_p = W_a * \sigma_a - W_b * \sigma_b = 0$$

como $W_b = 1 - W_a$; sustituyendo esta valor en la ecuación anterior

$$\sigma_p = W_a * \sigma_a - (1 - W_a) * \sigma_b = 0$$

haciendo operaciones elementales y sustituyendo a σ_a obtenemos :

$$W_a * \sigma_a - \sigma_b + W_a * \sigma_b = 0$$

$$W_a (\sigma_a + \sigma_b) = \sigma_b$$

$$W_a = \frac{\sigma_b}{\sigma_a + \sigma_b}$$

Esta ecuación determina el valor ponderado que se debe asignar a ABC en esta cartera de dos activos para tener una cartera con riesgo igual a cero.

$$W_a = \frac{0.22}{0.08 + 0.22} = 0.7333$$

Por último verificamos, sustituyendo en la fórmula de la desviación estándar

$$\sigma_p = W_a * \sigma_a - W_b * \sigma_b = 0$$

$$\sigma_p = 0.2667 * 0.22 - 0.7333 * 0.08 = 0$$

Lo que nos demuestra que siempre que existan activos que estén correlacionados en forma perfectamente negativa será posible formar una cartera libre de riesgo.

Correlación entre -1 y 1

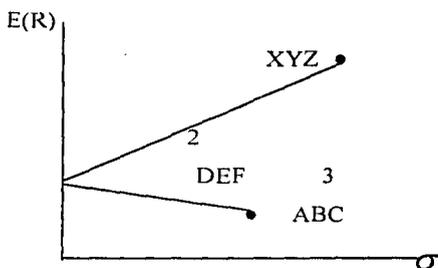
Los extremos -1 y 1 son los que definen la gama completa de posibilidades para combinaciones de riesgo-rendimiento para 2 valores como ABC y XYZ. Gráficamente se muestra en el triángulo ABCDEFXYZ, se define el espacio total que podrán ocupar cualquiera de las 2 carteras de activos para estos valores.¹¹

Las líneas discontinuas y las continuas muestran las posibles combinaciones de cartera con la correlación igual a 1 y -1 respectivamente.

Sin embargo en gran parte de pares de valores, la correlación de rendimiento entre ellos no se encuentra ni en el extremo -1 o 1 , éstos están relacionados positivamente entre sí.

Las posibles carteras se encuentran a lo largo de la línea curva desde A hasta B, si la correlación es menor entre los valores, mayor es la cantidad de la cobertura en la línea.

¹¹ Esto incluye los propios puntos ABC y XYZ, que son simplemente las carteras que se producen cuando todos los fondos se colocan en un activo y ninguno en el otro.



También se puede ver como cambian las posibilidades de carteras entre ABC y XYZ, para diferentes correlaciones.

La línea discontinua señala las posibles carteras con la **correlación perfecta** y las dos líneas rectas desde XYZ hasta DEF y hasta ABC señalan las posibilidades con **correlación negativa perfecta**. Las líneas curvas en el interior señalan las mejores oportunidades en aumento conforme que disminuya la correlación desde +1 hacia -1.

Sobre la línea curva número 1, existe una correlación bastante alta entre los activos, sin embargo un inversionista estará mejor aquí, que en la línea discontinua, es decir, cualquier disminución en la correlación beneficiaría al inversionista y éste tendrá su mejor situación con la correlación negativa perfecta. Los puntos sobre la línea curva 1 dominan a los puntos sobre la línea discontinua desde ABC hasta XYZ.

En conclusión podemos decir que la mejor situación para el inversionista se produce con la correlación negativa perfecta, obteniendo los puntos sobre la línea DEF hasta XYZ y algún punto sobre esta línea dominará todas las posibilidades sobre todas las líneas curvas.

4.4 EL CÁLCULO DEL RENDIMIENTO Y RIESGO EN CARTERAS CON "N" ACTIVOS

Por último se da la fórmula que permite el cálculo de la varianza de los rendimiento de una cartera de "n" activos en los que se han invertido las proporciones $W_i (i=1,2,\dots,n)$ del capital, puede escribirse

$$\sigma_k^2 = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^n W_i R_i \right) = \sum_{i=1}^n W_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n W_i W_j \sigma_{ij}$$

Donde los pesos $W_1 + W_2 + \dots + W_n = 1$

En este caso será más fácil trabajar con notación matricial

$$\sigma_r^2 = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 & \dots & W_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix}$$

Más si se obtiene el vector transpuesto de las proporciones obtenemos :

${}^tW = [W_1 W_2 \dots W_n]$ y llamamos "V" a la matriz de varianzas y covarianzas

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Se escribirá en su forma abreviada como $\sigma_k^2 = {}^tWVW$

En cuanto al grado de correlación entre los rendimientos aleatorios, la fórmula para el cálculo de la varianza de los rendimientos de un portafolio o cartera es :

$$\sigma_k^2 = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^n W_i R_i \right) = \sum_{i=1}^n W_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n W_i W_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

En resumen, si el riesgo de una cartera de inversiones se mide por la varianza de sus rendimientos, éste queda determinado por : el rendimiento de cada uno de las inversiones, el grado de correlación que existe entre todos los posibles pares de ellos y, la cuantía del capital colocado en cada una de las mismas. Debido a que las varianzas y desvíos típicos de los rendimientos de cada inversión son números no negativos, si se supone que también lo son todas las proporciones W_i , resulta que sólo las medidas de correlación (σ_{ij} ó ρ_{ij}) pueden tomar valores negativos que contribuyen a disminuir el monto de la varianza de la cartera.

Anexo No. 1

APALANCAMIENTO

Utilizamos el término Apalancamiento como un concepto importante para describir la capacidad que tiene una empresa de emplear activos o fondos de costo fijo, con el objeto de maximizar las utilidades de los accionistas.

Los cambios en el apalancamiento propician variaciones tanto en el nivel de **rendimiento** como en el de **riesgo** correspondiente, es decir, los aumentos en él dan lugar a mayores riesgos y rendimiento, mientras que las disminuciones producen lo contrario.

El grado de apalancamiento que existe en la estructura de una empresa puede afectar significativamente su valor, alterando tanto el riesgo como el rendimiento.

Existen dos tipos básicos de apalancamiento, los cuales pueden definirse de manera más precisa con referencia al estado de resultados de la empresa como se muestra en la siguiente tabla:

ESTADO DE RESULTADOS

Apalancamiento

Operativo	{	<i>Ingresos por ventas</i>
		<i>Menos: Costo de lo vendido</i>
		<i>Utilidad bruta</i>
		<i>Menos: Gastos de operación</i>
		<i>Utilidades antes de impuestos e intereses (UAI)</i>
Financiero	{	<i>Menos: Intereses</i>
		<i>Utilidades antes de impuestos</i>
		<i>Menos: Impuestos</i>
		<i>Utilidades después de impuestos</i>
		<i>Menos: Dividendos de las acciones preferentes</i>
		<i>Utilidades disponibles para accionistas comunes</i>

Del esquema de clasificación anterior se afirma que tanto el costo de lo vendido como los gastos de operación de una empresa pueden agruparse en costos operativos fijos y variables¹¹

¹¹ Los costos semivariables no se consideran aquí ni en estudios posteriores, ya que pueden descomponerse en elementos fijos y variables.

Por eso es importante comprender los diversos aspectos del análisis de equilibrio, el cual en ocasiones recibe el nombre de análisis costo-volumen-utilidades, mismo que a la empresa le permite :

- 1) Determinar el nivel de operaciones que debe mantener para cubrir todo los costos de operación.
- 2) Evaluar la productividad asociada a diversos niveles de ventas.

Por otro lado los costos tienen un gran significado en el análisis de equilibrio, por ello es necesario su estudio.

En una empresa, el costo de los bienes vendidos y sus gastos de operación contienen componentes fijos y variables.

Costos fijos.- Son una función de tiempo, y normalmente se establecen mediante un contrato, requieren del pago de cierta cantidad monetaria cada período contable. La renta es un ejemplo.

Costos variables .- Estos varían en relación directa con las ventas, son una función del volumen. Un ejemplo son los costos de producción y envío.

Costos semivariabes.- Estos comparten las características de los costos fijos y variables.¹² Como ejemplos serían las comisiones de ventas, las cuales se pueden fijar con respecto a cierto volumen, y aumentar a niveles más altos para volúmenes mayores.

¹² Los costos semivariabes reciben en ocasiones el nombre de costos semifijos. Presentan, sin importar su modo de denominación, las características enumeradas anteriormente.

Punto de equilibrio

El punto de equilibrio operativo de una empresa se define como el nivel de ventas en el que se cubren todos los costos de operación fijos y variables, es decir, el nivel en el cual las utilidades antes de impuestos e intereses son nulas.

Las siguientes fórmulas nos permiten el cálculo del volumen de ventas equilibrio de una empresa.

$$UAII = X(p-v) - F$$

$$X = \frac{F}{p-v}$$

Donde :

p precio de ventas

v costos de operación

F costos de operación fijos

V volumen de ventas

Ejemplo :

Supóngase una empresa que tiene costos fijos de operación de \$ 2,500, el precio de venta por unidades de su producto es de \$ 10, y su costo variable de operación por unidad es de \$ 5. Aplicando las fórmulas obtenemos:

$$X = \frac{2500}{10-5} = \frac{2500}{5} = 500$$

Las ventas de 500 unidades, las UAII de una empresa deberían ser iguales a cero.

Apalancamiento Operativo

El apalancamiento operativo se aplica a partir de la existencia de costos de operación fijos en el flujo de ingresos de una empresa. Anteriormente se mencionó que tales costos no varían respecto de las ventas y, por tanto, deben ser cubiertos sin importar el monto de ingresos disponibles. Empleando el marco de referencia presentado en la tabla, el apalancamiento operativo puede definirse como la capacidad de emplear los costos de operación fijos para aumentar al máximo los efectos de los cambios en las ventas sobre las utilidades antes de intereses e impuestos.

Empleando los datos del ejemplo anterior podemos ver los resultados que se obtendrían en diferentes niveles de ventas,

UAII para diversos niveles de ventas

	Caso 2	Caso 1	
	-50%	+50%	
	500	1 000	1 500
Ventas (en unidades)			
Ingreso por ventas	50 000	\$10 000	\$15 000
Menos : Costos de operación variables	2 500	5 000	7 500
Menos : Costos de Operación fijos	2 500	2 500	2 500
Utilidades antes de intereses	\$ 0	\$2 500	\$5 000
de impuestos (UAII)	-100%	+100%	

Ingreso por ventas = \$10 / unidad x ventas en unidades

Costos de operación variables = \$5 / unidad x ventas en unidades

De lo anterior se puede afirmar que cuando una empresa tiene costos de operación fijos, se presenta el apalancamiento operativo y que éste funciona en dos direcciones, un aumento de 50% e las ventas, da como resultado un incremento de 100% en las utilidades antes de intereses e impuestos, y Una reducción de 50% en las ventas, resulta en una disminución de 100% en las utilidades antes de intereses e impuestos.

Apalancamiento Financiero

El apalancamiento financiero es resultado de cargos financieros fijos en el flujo de ingreso de una empresa, éstos no se ven afectados por las utilidades antes de intereses e impuestos de la empresa ; deben ser pagados independientemente de la cantidad de UAII disponible.

Un examen de la parte inferior de la primer tabla indica que los dos gastos financieros fijos que normalmente se encuentran en el estado de resultados de una empresa son :

- 1) el interés sobre la deuda y
- 2) los dividendos sobre acciones preferentes.

El apalancamiento financiero trata acerca de los efectos que ejercen los cambios en las utilidades antes de intereses e impuestos sobre las utilidades disponibles para los tenedores de acciones comunes.

Como definición formal del apalancamiento financiero se dice que es la capacidad de la empresa para emplear los cargos financieros fijos con el fin de aumentar al máximo los efectos de los cambios en las utilidades antes de intereses e impuestos sobre las utilidades (o rendimientos) por acción.

Generalmente, las utilidades por acción se consideran en lugar de las utilidades de que dispone para las acciones comunes, ya que las citadas utilidades representan la cantidad de dinero ganada por cada acción común ; las utilidades por acción se calculan dividiendo las utilidades disponibles para los accionistas comunes, entre el número de acciones comunes en circulación. Los impuestos, al igual que los costos financieros de interés y los dividendos de acciones preferentes, son deducidos del flujo de ingreso de una empresa.

Sin embargo, tales impuestos no representan un costo fijo, ya que cambian al alterarse el nivel de utilidades antes de impuestos (UAI). Como costo variable, no tienen un efecto directo sobre el apalancamiento financiero de la empresa.

Ejemplo :

Una empresa espera obtener utilidades antes de intereses e impuestos por \$1,000 en este año. Tiene un bono de \$2.0000 con un cupón de 10% y una emisión de 600 acciones de tipo preferente de \$4 cada una ; asimismo, tiene 1000 acciones de tipo común . El interés anual de la emisión del bono es de \$2,000. Los dividendos anuales sobre las acciones preferentes son de \$2,400. En la siguiente tabla ilustra los niveles de utilidades antes de intereses e impuestos de \$6.000, \$1.0000 y \$14,000, para una empresa en el grupo de impuestos de 40%. Se presentan en el dos situaciones

Caso 1.- Un aumento de 40% en las UAII dan lugar a un incremento de 100% en las utilidades por acción.

Caso 2.- Una merma de 40% en las UAII resulta en una disminución de 100% en las utilidades por acción.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Ejemplo :**Utilidades por acción (UPA) para diversos niveles de UAII**

	Caso 2		Caso 1
	-40%		+40%
UAII	\$ 6 000	\$ 10 000	\$ 14 000
Menos : Intereses (Int.)	2 000	2 000	2 000
Utilidades antes de imp. (UAImp.)	\$ 4 000	\$ 8 000	\$ 12 000
Menos : Imp. (Imp.)(t=0.40)	\$ 1 600	3 200	4 800
Utilidades después imp.(UDImp.)	\$ 2 400	\$ 4 800	\$ 7 200
Menos : Dividendos de acc. (DP)	2 400	2 400	2 400
Utilidades disponibles acc. Comunes (DC)	\$ 0	\$ 2 400	\$ 4 800
Utilidades por acción (upa)	\$0/1000=\$0/acc.	\$ 200/1000= \$ 2.40/acc.	\$ 4800/1000= \$ 4.80/acc
	-100%		+100%

De los siguientes resultados se puede afirmar que el apalancamiento financiero funciona en ambas direcciones, y que se presenta cuando una empresa tiene gastos financieros fijos. El efecto del apalancamiento financiero es tal que un aumento en las UAII resulta en un aumento mayor que el proporcional en las utilidades por acción de una empresa, en tanto que una disminución da lugar a una reducción mayor que la proporcional en las utilidades por acción.

Anexo 2

La Teoría de la Utilidad

La Teoría de la Utilidad es un intento de estudiar racionalmente las decisiones humanas, ella constituye uno de los fundamentos de la Teoría de la Decisión Financiera en condiciones de riesgo.

Como se vio anteriormente, si una elección financiera se hace en condiciones de certeza, entonces el criterio de decisión adecuado es el del máximo rendimiento, también que en condiciones de riesgo, no tiene sentido hablar del rendimiento de una inversión, pues éste es aleatorio, lo que se hace es considerar el rendimiento esperado utilizando la distribución de probabilidades de la variable aleatoria, la cual representa los distintos rendimientos posibles. Entonces el criterio de decisión apropiado en condiciones de riesgo sería el del máximo rendimiento esperado. Sin embargo, los estudios del tema han mostrado situaciones en que parece no ser apropiado ese criterio.

Ejemplo :

Si se considera un inversionista A que obtiene dos resultados posibles con igual probabilidad : una ganancia de \$300 o una pérdida de \$200. El valor esperado de esta inversión es $E_A = 300\left(\frac{1}{2}\right) + (-200)\left(\frac{1}{2}\right) = \50

Si lo comparamos con otro inversionista B , el cual también obtiene dos posibles resultados : una ganancia de \$3'000,000 o una pérdida de \$2'000,000 la ganancia esperada es $E_B = 3000000\left(\frac{1}{2}\right) + (-2000000)\left(\frac{1}{2}\right) = \$500,000$

De acuerdo al criterio del máximo valor esperado, la inversión B debe ser preferida, sin embargo algunos inversionistas optan por la inversión A . La razón es que en esa alternativa la máxima pérdida posible es \$200, mientras que invirtiendo en B es de \$2'000,000, valor que probablemente supera la capacidad de absorción de pérdida del inversionista.

El Criterio de la Máxima Utilidad Esperada

La aversión al riesgo es una de las causas por las que un inversionista puede no tomar sus decisiones de acuerdo al criterio del **máximo valor esperado**, la Teoría de la Utilidad sitúa

a éste en un marco más general que lo comprende como un caso particular originado por una actitud de neutralidad hacia el riesgo.

La **Teoría de la Utilidad** se refiere a un conjunto de alternativas entre las que se define una relación de indiferencia y una de preferencia, para un individuo que debe tomar una decisión, así como una función denominada 'función de utilidad', tal que a cada alternativa le hace corresponder un número llamado 'utilidad de esa alternativa', y si una alternativa es preferida a otra, entonces la utilidad de la primera es mayor que la de la segunda. Es estas condiciones se aceptan un conjunto de supuestos como axiomas: uno de ellos dice que las alternativas son siempre comparables, es decir, que una de ellas es preferida a la otra o bien ambas son indiferentes, para un individuo. En términos de la función de la utilidad, lo anterior se expresa así:

$$U_{(A)} > U_{(B)} \quad \text{ó} \quad U_{(B)} > U_{(A)} \quad \text{ó} \quad U_{(A)} = U_{(B)}$$

Otro supuesto es el referente a la transitividad de las relaciones de preferencia es indiferencia es:

$$\text{Si } U_{(A)} \succ U_{(B)} \text{ y } U_{(B)} \succ U_{(C)} \text{ entonces } U_{(A)} \succ U_{(C)}$$

En base a estos y algunos otros supuestos, se llega a probar que, en esas condiciones, el criterio óptimo de decisión ya no es el del máximo valor esperado sino el de la **máxima utilidad esperada**. Se entiende que la utilidad esperada de una opción A que puede tener como resultados posibles las n alternativas A_i , cada una de ellas con probabilidad p_i ($i=1,2,\dots,n$; $\sum p_i=1$), es:

$$EU_{(A)} = \sum_{i=1}^n U(A_i) * P_i$$

Con referencia al ejemplo anterior las opciones son:

$$A = \left\{ \left(A_1 = 300; p_1 = \frac{1}{2} \right), \left(A_2 = -200; p_2 = \frac{1}{2} \right) \right\}$$

$$B = \left\{ \left(B_1 = 3000000; p_1 = \frac{1}{2} \right), \left(A_2 = -2000000; p_2 = \frac{1}{2} \right) \right\}$$

En conclusión este criterio permite explicar las actitudes de criterios de individuos que no toman sus decisiones de acuerdo al criterio de máximo valor esperado.

CONCLUSIONES

El inversionista al iniciar un proyecto, en primer lugar debe saber cual será el propósito de su inversión, así como la disponibilidad de recursos económicos, sociales, etc. de que dispone. Lo anterior se fundamenta en que una inversión es toda una serie de estrategias a seguir y, es necesario recurrir a personal especializado en la toma de decisiones para tener éxito en el futuro.

Por otro lado la práctica indica que los inversionistas prefieren un rendimiento promedio bajo pero seguro, a éstos se les llama aversos al riesgo y su función de utilidad marginal es decreciente.

Es estudio de las condiciones en que se invertirá, dá seguridad al tomador de decisiones para aceptar o se rechazar un proyecto.

La situación de un inversionista en un proyecto bajo certeza no se presenta casi nunca, pues el rendimiento real así como la tasa de inflación son aleatorios, por ello en la práctica se suponen rendimientos con variación en un rango muy reducido. En estos casos es preferible no entretenerse en su estudio, es más recomendable poner mayor atención al tipo de inversión bajo riesgo pues se debe reconocer que toda persona ya sea física o moral está expuesta al riesgo.

Para el adecuado tratamiento del riesgo se hace uso de una importante herramienta de la estadística ; la distribución de probabilidad, en la cual nos podemos apoyar para medir el rendimiento esperado y el riesgo de una inversión.

Por último se afirma que un tipo de inversión mas complicado, es el caso de las carteras, en el cual se utiliza el mismo procedimiento de los títulos individuales para poder medir el riesgo, sin embargo aquí contamos con un elemento importante que nos permite la reducción del riesgo, éste es la diversificación, que consiste en la asignación de fondos invertibles en diversos valores, es decir, entre mayor sea el número de activos en una inversión, menor será el riesgo que se tenga .

En conclusión para obtener mejores resultados en un proyecto de inversión, debe existir el mayor número posible de activos, en ocasiones, esto se logra a través de la asociación de inversionistas.

Bibliografía

- **Aburto Mata, Rosaura**
La técnica actuarial, valioso instrumento para la administración de riesgos
Tesis, Facultad de ciencias
México, 1994.

- **De Pablo, López, A.; Ferruz, L. (et al.)**
Análisis práctico de decisiones de inversión y financiación en la Empresa
Ariel, Barcelona, 1990. 270 pp.

- **Domingo, Jorge Messuti, Alvarez, Victor Adrián, (et al.)**
Selección de inversiones. Introducción a la cartera
Macchi. Buenos Aires, 1992. 550 pp.

- **Fred J. Weston, Eugene F. Brigham**
Fundamentos de Administración financiera
Interamericana. México, 1987. 1170 pp.

- **Gil Lafuente, Ana María**
El análisis financiero en la incertidumbre
Ariel. España, 1990. 160 pp.

- **H. Knight, Frank**
Riesgo, Incertidumbre y Beneficio
Aguilar. Madrid, 1947. 336 pp.

- **J. Gitman, Lawrence**
Fundamentos de Administración Financiera
3ª. De Harla, México. 782 pp.

- **O. Bierwag, Gerald**
Análisis de la Duración. La gestión del riesgo de tipo interés.
Alianza. Madrid, 1991. 374 pp.

- **W. Kolb, Robert**
Inversiones
Limusa. México, 1993. 746 pp.

- **William H., Jean**
Teoría analítica de la financiación.
Ariel. Barcelona, 1976. 265 pp.