UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"La naturaleza de la matemática en Gödel y su relación con los Teoremas limitativos."

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMATICO

P R E S E N T A :

DIEGO ROJAS REBOLLEDO

Director de Tesis:

M. en C. Carlos Torres Alcaráz

MÉXICO, D.F. 1997

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"LA NATURALEZA DE LA MATEMATICA EN GODEL Y SU RELACION CON LOS TEOREMAS LIMITATIVOS".

realizado por Diego Rojas Rebolledo

con número de cuenta 9150823-4, pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. Carlos Torres Alcaraz
Propietario	Dr. Santiago Ramírez Castañeda
Propietario	Mat. Guillermo Zambrana Castañeda
Suplente	M. en C. Rafael Rojas Barbachano
Suplente	Mat. Fernando René Martínez Ortiz

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

ÍNDICE

Capítulo I

Del carácter platónico de la postura de Gödel ante la naturaleza de la matemática.

Capítulo II

Reconstruyendo el camino hacia los teoremas limitativos.

Capítulo III

Del impacto filosófico de los teoremas

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi querido maestro Carlos Torres el haberme mostrado la pasión de Gödel. Al maestro Santiago Ramírez sus eternas discusiones.

Agradezco a mi familia su gracia, siempre llena de mar, sol y desierto.

A mis hermanos de la Facultad y de Tajín les agradezco su compañía en estos años tan llenos de gloria.

INTRODUCCIÓN

El siglo veinte cumplía apenas seis años cuando dio a luz a uno de los genios más grandes de la era moderna. Kurt Friedrich Gödel.

Kurt Gödel descubrió maravillas, encontró caminos nunca antes recorridos y elevó en alto la esperanza de un hombre *anti-technos.*

Este texto, aunque inundado de torpezas, tiene el propósito de recordar al matemático la pregunta típica y ancestral acerca de la naturaleza de su ciencia:

¿La matemática se inventa o se descubre?

Meditar al respecto de esta pregunta, lleva a preguntarse por el fundamento mismo de la matemática, lleva a la búsqueda por una identidad matemática. Gödel fue un matemático a quien le inquietó mucho esta pregunta; a tal grado que desarrolló importantes resultados matemáticos, guiado, en gran medida, por su creencia en una matemática objetiva, que se descubre y no se inventa.

Es parte fundamental de esta tesis mostrar la relación que puede existir entre la actitud filosófica de un científico y su propio trabajo científico.

Así, en el primer capítulo se expone la actitud filosófica de Gödel con respecto a la naturaleza de la matemática, tomando muy en cuenta dos de sus ensayos filosóficos. En la primera parte del capítulo I también se expone, muy brevemente, algunos aspectos de la filosofía de Platón, que servirán como punto de partida hacia el encuentro con la filosofía gödeliana de la matemática.

En el segundo capítulo se da una reconstrucción de los teoremas limitativos de Gödel, comenzando con una base histórica que determina cuáles eran los objetivos primarios de Gödel, los cuales posteriormente le llevaron al descubrimiento de los teoremas limitativos. En ese capítulo, se pone especial atención en algunos conceptos que Gödel usó en el camino hacia los teoremas, conceptos, como el de verdad matemática, conceptos que guardan una fuerte relación con su propia postura filosófica.

En el tercero y último capítulo se cierra el círculo, conectando la posición filosófica de Gödel con su propio trabajo científico. Por un lado, se "demuestra" que la posición filosófica de Gödel con respecto a la naturaleza de la matemática fungió como pilar central para el descubrimiento de la parte medular de los teoremas limitativos, es decir, sin una creencia filosófica similar a la de Gödel, vislumbrar la existencia de enunciados aritméticos indecidibles hubiese sido poco menos que imposible. Por otro lado, se exhibe cómo es que los teoremas limitativos refutan una concepción de la matemática totalmente opuesta a la de Gödel, dejando en claro la viabilidad de la visión gödeliana de la naturaleza de la matemática.

También es propósito de esta tesis hacer visible el hecho de que con Gödel aparece una nueva época en la matemática, en la filosofía de la matemática y en la filosofía misma. Una época en la que tendrá sentido hablar de una "filosofía matemática", como posibilidad teórica para hacer filosofía de la matemática y filosofía en general. Una época en la que posiblemente se realice uno de los sueños de Kurt Gödel: "Lograr hacer con la metafísica lo que alguna vez hizo Newton con la física".

La naturaleza de la matemática en Gödel y su relación con los teoremas limitativos

Diego Rojas.

A Erica...

Símbolos son todos los nombres del bien y del mal: no definen, sólo hacen gestos. Tonto será quien de ellos espere ciencia.

Zarathustra.

CAPITULO I

DEL CARÁCTER PLATÓNICO DE LA POSTURA DE GÖDEL ANTE LA NATURALEZA DE LA MATEMATICA.

> *Existe, si no me equivoco, todo un mundo que es el conjunto de las verdades matemáticas, al que no tenemos acceso más que por la inteligencia, al igual que existe el mundo de las realidades físicas; ambos son independientes de nosotros y de creación divina.*
>
> Hermite

INTRODUCCIÓN:

¿De qué trata la Matemática?...

-La matemática es la ciencia que trata de los objetos matemáticos.

Así, de la pregunta por la naturaleza de la matemática deviene la pregunta por la naturaleza de los objetos matemáticos. Esta nueva interrogante busca otorgar a los objetos matemáticos algún estatuto ontológico, ubicarlos en algún "lugar" de la existencia , a fin de cuentas, busca decir de su ser y de su forma.

Nuestra intención no es responder a esta pregunta de manera contundente, sino mostrar lo que al respecto dice Kurt Gödel.

Este capítulo busca ubicar la posición gödeliana en torno a la naturaleza de la matemática.

La postura de Gödel parece apuntar hacia un platonismo matemático y cabe mencionar que dicha posición puede encontrarse anacrónica para su época, una época en que nuevos horizontes se dibujaban, una época en la que la actitud formalista parecía abrir anchos caminos en la fundamentación de la matemática clásica. En medio de esta nueva creencia, Gödel, un joven de poco más de veinte años de edad, permanecía fiel a sus convicciones. Pero ¿cómo puede la oveja negra mostrar al resto del rebaño que la noche es negra como la lana que viste su cuerpo, siendo que éstas han permanecido dormidas durante el anochecer? Será pues, a media noche, abriendo sigilosamente las puertas del corral, despertando al rebaño sin provocar su furia, dejando que la profundidad oscura de la noche esconda sus blancos cuerpos, penetrando en su entendimiento.

Sólo así, -con cautela y con respeto, con juicio y con templanza, cuando se tiene la absoluta convicción de adonde se dirigen las aguas- se puede nadar contra la corriente.

Es así como Gödel, hombre sabio de carácter romántico, mostró al mundo su magia. Feferman apunta:

> Yo quedé impactado por el gran contraste entre las convicciones profundamente platónicas, concernientes a las bases objetivas de la matemática que Gödel sostuvo y la específica precaución que ejerció al revelar estas convicciones.[1]

Si un término bastara para expresar de manera exacta la postura de un pensador, no escribiríamos más en este capítulo y tan sólo diríamos que Gödel es platónico; pero, de ser así, todos los individuos que fuesen descritos con el mismo concepto tendrían la misma visión de las cosas, la misma manera de pensar, carecerían de individualidad. Por lo tanto, tendremos que partir de ciertas

---

[1] [Traducción del autor] de: S. Feferman, "Gödel: Conviction and Caution", en Shanker (1988).

generalidades que caracterizan al platonismo y a lo largo del texto iremos internándonos más en la postura individual de Kurt Gödel.

Decir que una postura filosófica se ubica dentro del marco "platónico" quiere decir, esquemáticamente, que se acepta la existencia de una realidad "Ideal" en el sentido de Platón, una "realidad" más allá del espacio-tiempo y de la experiencia sensible.

Debe quedar claro, entonces, que se hablará de la postura de Gödel únicamente en lo que se refiere a la naturaleza de la matemática, es decir, la posibilidad "Ideal" que hemos mencionado estará limitada al mundo de los objetos matemáticos.

DEL PLATONISMO ORIGINAL

El mundo de las ideas

Platón inicia el libro VII de la *República* con el siguiente párrafo: "Compara con la siguiente *escena* el estado en que, con respecto a la educación o falta de ella, se halla nuestra naturaleza (...)"[2]

La escena a la que Platón se refiere, es a su célebre alegoría de la caverna, metáfora de la posición del hombre ante la verdad, con la que Platón nos muestra cómo es que lo verdaderamente real se encuentra mas allá de lo que la realidad sensible ofrece a nuestro entendimiento, más allá del mundo sonmbrío y tangible, compuesto por las sombras de lo que realmente es. La alegoria de la caverna refiere una escena imaginaria en la que se describe una "especie de cavernosa vivienda subterránea provista de una larga entrada, abierta a la luz, que se extiende a lo ancho de toda la caverna, y unos hombres que están en ella desde niños, atados

[2] Platón, La República, 514 a.

por las piernas y el cuello, de modo que tengan que estarse quietos y mirar únicamente hacia adelante, pues las ligaduras les impiden volver la cabeza; detrás de ellos la luz de un fuego que arde a lo lejos y en plano superior, y entre el fuego y los encadenados, un camino situado en alto, y a lo largo del camino ha sido situado un tabiquillo parecido a las mamparas que se alzan entre los titiriteros y el publico, por encima de los cuales exhiben aquellos sus maravillas"[3] .

A lo largo de este muro -dice Platón- se transportan toda clase de objetos, estatuas de hombres o de animales hechas de todo tipo de material, que sobrepasan la altura del muro. Así, los encadenados verán las sombras de esos objetos que se proyectan en la pared del túnel y hablarán y discutirán sobre estas imágenes, suponiendo que son la verdadera realidad.

Si alguno de los encadenados -supone el filósofo- es liberado y obligado a voltear de manera que alcance a ver los objetos fabricados que producen las sombras, y le es dado salir de la caverna y ver a los hombres, animales y cosas a la luz del sol, quedaría deslumbrado por los colores y las formas vivas que le muestra esta "otra" realidad.

Esta alegoria es una metáfora de la posición del hombre ante el conocimiento de lo verdadero. Buscar el verdadero conocimiento partiendo solamente de lo que está dado a la percepción, por lo que el mundo físico y sus colores enseñan, es comparable con la situación en la que se encuentran los encadenados, que con la cabeza rígida, observando y teorizando sobre sombras y ecos que no son nada más que eso. Es necesario pues, salir de la caverna con los ojos de la razón, en busca de lo verdadero, de lo que no necesita de fuegos artificiales para mostrarse, de lo que no tiene lugar en un "espacio" limitado.

---

[3] Ibidem, 323.

De esta manera Platón ilustra dos planos de la realidad: uno sensible y otro suprasensible. El primero es sólo una copia o imagen del segundo. Este último es el mundo inteligible, inmaterial, invisible e intemporal, que alberga a las Ideas.

Para Platón la Idea es la causa[4] principal, causa que es idéntica a sí misma. Platón mismo dice: "...voy a tratar de mostrar el género de causas que me he ocupado en buscar y vengo de nuevo a lo que tanto se ha repetido, y empiezo por ellas, estableciendo el principio de que hay lo bello, lo bueno, lo grande, etcétera, existente en sí mismo."[5]

No es posible ubicar a la Idea en lugar alguno, está fuera del espacio y del tiempo. Su intemporalidad la hace eterna e inmutable. Su ser inespacial la hace invisible: Sólo con la inteligencia se puede ver bien, lo esencial es invisible para los ojos.

Es en la Idea donde Platón encuentra la verdad, así por ejemplo, es en la Idea de círculo en donde se cumplen las propiedades geométricas y no en la figura que se pinta en la pizarra. Esta Idea no es, para el platónico, mera creación del pensamiento, sino por el contrario, es unidad independiente de las construcciones subjetivas. Su realidad es una realidad objetiva.

Distintos grados de conocimiento

Platón en el libro VI(509e) de "La República" explica a modo gráfico los distintos grados de conocimiento que engendran los diversos tipos de realidad;

> -Toma, pues, una línea que este cortada en dos segmentos desiguales y vuelve a cortar cada uno de los segmentos, el del género visible y el del inteligible, siguiendo la misma proporción. Entonces tendrás,

---

[4] En esta edición se traduce causa como "principio".
[5] Platón, Fedon 100.

clasificado según la mayor claridad u obscuridad de cada uno: en el mundo visible, un primer segmento, el de las imágenes. Llamo imágenes ante todo a las sombras y, en segundo lugar, a las figuras que se forman en el agua y todo lo que es compacto, pulido y brillante y a otras cosas semejantes (...)
En el segundo pon aquello de lo cual esto es imagen: los animales que nos rodean, todas las plantas y el género entero de todas las cosas fabricadas.[6]

El segundo segmento, el que corresponde al mundo inteligible, se debe dividir "de modo que el alma se vea obligada a buscar la una de las partes sirviéndose, como de imágenes, de aquellas cosas que antes eran imitadas, partiendo de hipótesis y encaminandose así, no hacia el principio, sino hacia la conclusión; y la segunda, partiendo también de hipótesis, pero para llegar a un principio no hipotético y llevando acabo su investigación con la sola ayuda de las ideas tomadas en si mismas y sin valerse de las imágenes que en la búsqueda de aquello recurría"[7].

Así es como Platón distingue los distintos niveles de realidad. En el primer segmento, el que corresponde al mundo sensible, se encuentran las sombras, las proyecciones de los objetos físicos y los propios objetos físicos. En el segundo segmento ubica, en la primera parte, a los objetos matemáticos, para cuyo conocimiento se hace uso de ciertas hipótesis (axiomas intuitivos) que por su evidencia no se demuestran. Para adquirir el conocimiento de estos objetos, nos servimos de figuras visibles que se refieren a ellos, pero no se piensa en las figuras mismas, sino en la Idea del objeto a la que ésta se asemeja.

---

[6] Platón, La República 509 d.
[7] Ibidem, 510 b.

Por último, en la segunda parte del segmento, se encuentra "aquello que alcanza por sí misma la razón, valiéndose del poder dialéctico y considerando las hipótesis no como principios sino como verdaderas hipótesis"[8].

La *doxa* u opinión, que comprende la imaginación y la creencia, es el grado del conocimiento que se le atribuye a los objetos del primer segmento, de lo sensible. La *episteme*, que comprende a la *dianoia* o conocimiento de los objetos matemáticos y la *noesis* o inteleción de las ideas y principios, es el grado del conocimiento que se atribuye a los objetos del segmento de lo inteligible.

Hay que subrayar el hecho de que es en la primera parte del segmento de lo inteligible (*dianoia*) en donde se localizan a los objetos matemáticos y sus relaciones.

Será, pues, una característica del Platonismo atribuir este carácter Ideal a los objetos matemáticos, ubicarlos en este mundo inteligible y desarrollar nuestra *dianoia* para alcanzar a conocerlos de la manera más pura.

ENSAYOS FILOSÓFICOS DE GÖDEL.

Gödel dedicó varios trabajos a la filosofía de la matemática. En vida solo publicó tres[9], después de su muerte se han publicado algunos de estos trabajos[10] (que fueron encontrados en el *Nachlass*[11] de Gödel) asi como cartas y pláticas sobre el tema[12]. Todavía no se conocen todos los trabajos inéditos de Gödel y esto porque la mayoría de los papeles existentes en el *Nachlass*, están escritos en una

---

[8] Ibidem, 511 d.

[9] a)What is Cantor's continuum problem, b)Russell's mathemathical logic y c)On a hitherto unutilized extention of the finitary standpoint, en Gödel (1990).

[10] ver, e.g., Gödel (1994).

[11] Archivo póstumo, se encuentra en la biblioteca Firestone de Princeton University.

[12] ver, e.g., Wang (1974) y Wang (1991).

taquigrafía aparentemente indescifrable[13]. Aunque, como dice J. W. Dawson, "yo me atrevería a predecir que de todo el material inédito en el Nachlass, se encontrarán de gran interés las investigaciones filosóficas de Gödel".[14]

En lo que queda de este capítulo, centraremos nuestro interés al estudio de dos de los ensayos publicados en vida: "What is Cantor's Continiuum Problem"[15] y "Russell's Mathematical Logic"[16]. A partir de estos podremos poner en claro ciertos aspectos e intereses filosóficos de Gödel, que serán suficientes para tener una imagen clara de su postura platónica.

Russell's mathematical logic.

Este artículo fue escrito por Gödel, a propósito de una invitación que le hizo Paul Arthur Schlipp, con el objeto de contribuir al volumen *The philosophy of Bertrand Russell* de la serie *the Library of living philosophers*, en el año de 1943. Gödel comienza con una breve historia de la lógica matemática. Después de esa introducción, Gödel dedica el resto de su ensayo al trabajo de Russell concerniente al análisis de axiomas y conceptos que subyacen a la lógica matemática.

El primer Russell.

Gödel encuentra en los primeros escritos de Russell ciertas actitudes que están muy de acuerdo con su propia postura. Gödel mismo dice: "lo asombroso en este tema, es la pronunciada actitud realista de Russell".[17] Al decir esto, Gödel se

---

[13] Gabelsberger, taquigrafía de las primeras décadas del siglo, que para 1930 ya había desaparecido.
[14] [Traducción del autor] ver J. W. Dawson, "Kurt Gödel in sharper focus". En Shanker (1988).
[15] ver Gödel (1990), pp. 176-188
[16] Ibidem, pp. 119-143.
[17] [Traducción del autor] ver Gödel (1990) p. 120.

refiere, sobre todo, al párrafo de *Introducción a la filosofía matemática*[18], en que Russell compara la realidad de los objetos matemáticos y lógicos con los de otras ciencias que se ocupan de cuestiones más tangibles. El párrafo russelliano al que nos referimos dice así: "(...) la lógica se ocupa del mundo real lo mismo que la zoología, sólo que de sus rasgos más generales y abstractos"[19].

Gödel continúa su ensayo resaltando la analogía que establece Russell (en uno de sus primeros escritos)[20] entre la matemática y las ciencias naturales:

> Russell compara los axiomas lógicos y matemáticos con las leyes de la naturaleza y la evidencia lógica con la percepción sensible, de tal manera que los axiomas no tienen porque ser en sí mismos evidentes, sino que se justifican (igual que en la física) por el hecho de que hacen posible que estas "percepciones sensibles" sean deducidas, lo que, naturalmente, no excluye que puedan tener también un tipo de plausibilidad intrínseca similar al que poseen en la física.

Gödel recalca la necesidad de nuevos axiomas para la matemática, argumentando que ya se ha establecido que para resolver ciertos problemas aritméticos, se requieren suposiciones que esencialmente trasciendan la *aritmética*, i.e., "el domino de tipo de evidencia indispensable y elemental que resulta más comparable con la percepción sensible".[21]

Nos gustaría hacer referencia aquí, a un fragmento de la *República* en donde Platón describe el carácter evidente de la "aritmética", dado que encontramos analogía con la descripción de Gödel.

---

[18] ver Russell (1988).
[19] Ibidem.
[20] Wang supone que el escrito en cuestión es: "Essays in analysis", ed. D. Lackey 1973, ensayo 9. pp. 190-214. Cuya primera impresión fue en francés en 1906.
[21] [traducción del autor] ver: Gödel (1990) p. 121.

Platón en boca de Socarres describe la aritmética como "aquello tan general de que usan todas las artes y razonamientos y ciencias; lo que es forzoso que todos aprendan en primer lugar. *Eso tan vulgar de conocer el uno y el dos y el tres* (...) En una palabra yo le llamo número y cálculo. ¿O no ocurre con esto que toda arte y conocimiento se ven obligados a participar de ella?"[22]

Gödel recalca la necesidad de nuevos axiomas: "Igual que en la aritmética, en la teoría de conjuntos y en la teoría de los números reales nuevos axiomas basados en una idea desconocida hasta ahora serán necesarios"[23]. Aquí es donde Gödel pide que se apueste a la "intuición matemática", a esa visión de la "realidad" matemática que nos puede llevar a conocer principios ignorados hasta ahora. Este concepto gödeliano de intuición matemática y la analogía de este concepto con la posibilidad de acceder a las ideas a partir del intelecto que menciona Platón, se expone en la sección dedicada al ensayo *What is Cantor's Continiuum Problem.*

El desarrollo de la fundamentación lógica en *Principia Mathematica*, parte de una necesidad por derrumbar el "inmenso" obstáculo que ve Russell en las paradojas que aparecen en la teoría de conjuntos a principios de este siglo.

Cabe mencionar que Russell fue transformando su postura filosófica conforme iba armando la maquinaria para eliminar estas paradojas. Russell mismo dice en el prefacio a la segunda edición de *Principles of Mathematics*:

> (...) compartía yo con Frege la creencia en la realidad platónica de los números, los cuales, en mi imaginación, poblaban el reino intemporal del Ser. Era una fe cómoda que luego abandoné con pesar.[24]

---

[22] Platón, La República, 522 c.
[23] [Traducción del autor] ver Gödel (1990) p. 121.
[24] Russell (1977) p.12.

Un paso muy importante en el proceso por medio del cual Russell abandonó esta creencia platónica fue la abolición de las clases, i.e., la llamada *no-class theory* de Russell.

Kilmister afirma que, posiblemente, la primera indicación de esta teoría russelliana se da en una carta que Russell escribe a Frege en mayo de 1903. En esta carta Russell declara que ha descubierto que *las clases son del todo superfluas.*[25]

A partir de la inevitable necesidad de eliminar las paradojas, Russell se apega a una teoría, llamada teoría de la inexistencia de clases (no-class theory) , aquella "que está de acuerdo con que clases y conceptos nunca existen como objetos reales, y los enunciados que contengan estos términos tienen sentido sólo si se les puede interpretar como un *faÇon de parler*"[26], una forma de hablar acerca de otras cosas, esto es, como ficciones lógicas.

Gödel encuentra un vínculo estrecho entre esta teoría y el llamado *principio del circulo vicioso* y dice que Russell formula este principio al descubrirlo en el desarrollo de su *no-class theory*. Hablaremos a continuación de este principio y de cómo Gödel lo rechaza desde su propia postura filosófica.

Del principio del circulo vicioso y su no aplicabilidad desde una postura realista.

Al estudiar las paradojas que comenzaron a aparecer a principios de este siglo, Russell encuentra que ellas resultan de una estructura común contradictoria; de "un cierto tipo de círculo vicioso". Estos círculos viciosos se originan al suponer que algún objeto (involucrado en el argumento) se pueden definir solamente en términos de una totalidad a la que el objeto mismo pertenece. Para eliminar la posibilidad de argumentos contradictorios, Russell propone que se impidan

---

[25] ver Kilmister (1992) p.93.
[26] [traducción del autor] ver: Gödel (1990) p. 125

definiciones con estas características. Para tener más claro a qué tipo de definiciones nos referimos, consideremos el siguiente ejemplo:

Definición: Se dice que una propiedad es impronunciable, si no se pertenece a sí misma, i.e., si no tiene la propiedad que ella enuncia.

Así, impronunciable es una propiedad que se puede atribuir a las propiedades, en particular a ella misma. Ahora, preguntémonos si la propiedad ser impronunciable es ella misma impronunciable. Si la respuesta es sí, no tiene la propiedad que enuncia, i.e., no es impronunciable. Si la respuesta es no, sí tiene la propiedad que enuncia, i.e., es impronunciable. Por lo tanto juntando las dos conclusiones llegamos a una contradicción.

Para Russell esta paradoja parte de que un objeto (propiedad impronunciable) se está definiendo a partir de la aceptación de una totalidad a la que el objeto mismo pertenece (la totalidad de las propiedades). Y decimos "para Russell", porque para nosotros y para muchas personas esta paradoja parte del hecho de que se esta negando una verdad lógica.[27]

[27] La verdad lógica a la que nos referimos es la siguiente: Si x y y varían sobre un universo cualquiera U de individuos, y R es una relación binaria cualquiera entre individuos de U, entonces: $\neg\exists x\forall y[x\mathrm{R}y\Leftrightarrow\neg y\mathrm{R}y]$ es una verdad lógica. En el ejemplo anterior se está negando esta verdad lógica: si tomamos a U como el universo de las propiedades y la relación binaria R de x y y como la relación de que y tenga la propiedad x (i.e., $x\mathrm{R}y$ se lee como, y tiene la propiedad x), entonces al aceptar la existencia de la propiedad impronunciable, estamos diciendo que $\exists x\forall y[x\mathrm{R}y\Leftrightarrow\neg y\mathrm{R}y]$ donde x es la propiedad de ser impronunciable, negando así a la verdad lógica antes mencionada. Para un trabajo mas elaborado al respecto, ver Amor (1993).

Russell llama a este tipo de definiciones, (definiciones de objetos dadas en términos de la totalidad a la que el objeto definido pertenece) *definiciones impredicativas*. Así, para Russell, el problema de ciertas paradojas se reduce al problema de eliminar las definiciones impredicativas.

Russell hace estas observaciones y él mismo propone un principio que hace posible la eliminación de las definiciones impredicativas: el *principio del círculo vicioso*[28].

Russell enuncia el vcp de la siguiente manera: "Cualquier cosa que involucre la totalidad de una colección no puede ser miembro de dicha colección"[29] o conversamente: "Si dada una cierta colección, tiene totalidad, tendrá miembros definibles solo en términos de aquella totalidad, entonces la colección mencionada *no tiene totalidad*."[30]

Al decir que una colección *no tiene totalidad*, Russell quiere decir que ningún enunciado significativo se puede hacer acerca de "todos" los miembros de la colección.

Para Russell una función proposicional $\varphi(x)$, es lo que "ambiguamente" denota los distintos valores $\varphi(a)$, $\varphi(b)$, $\varphi(c)$,... de la función. Así, una función proposicional está bien definida, si los valores que ambiguamente denota, están bien definidos, i.e., si las proposiciones: $\varphi(a)$, $\varphi(b)$, $\varphi(c)$,... tienen sentido.

Dado que no se puede tomar en cuenta la definición de un objeto, ambiguamente denotado por una función, a partir de la definición de la función que lo denota (ya que la definición de una función está condicionada por la definición de los objetos a los que denota), se tiene que aceptar un nuevo principio:

---

[28] En adelante nos referiremos a este principio con el término vcp.
[29] [Traducción del autor] ver; Russell (1990) p. 37.
[30] *Ibidem*.

"Nada definido en términos de una función proposicional, puede ser argumento de dicha función", i.e., no puede estar involucrado entre los valores de la función.

Este principio es un caso especial del vcp enunciado para las funciones proposicionales y será muy importante para el desarrollo de la teoría russelliana.

La teoria lógica que se sigue a partir de estos principios, es la *teoría ramificada de tipos*[31], en la forma adoptada en los *Principia Mathematica*.

Pero ¿qué tan fructífera y admisible puede ser esta teoría? Se puede ver que el formalismo de la matemática clásica no admite esta teoría, e.g., en el desarrollo de la teoría de los números reales:

Recordemos brevemente la construcción de los números reales a partir de las cortaduras de Dedekind.

Definición: Una cortadura de Dedekind para los números racionales Q, es un subconjunto L de Q tal que:

a) $(L \neq \varnothing) \wedge (L \neq Q)$

b) $((p \in L) \wedge (r \leq p)) \Rightarrow (r \in L)$

c) L no tiene elemento máximo.

En la demostración de que cada conjunto de números reales K acotado superiormente (donde $K = \{K_i\}$ y cada K_i es un conjunto de racionales) tiene una mínima cota superior, la mínima cota superior S_k del conjunto de reales K, esta dada por el siguiente conjunto:

$$S_k = \{ r \in Q : \exists X\,(r \in X \wedge X \in K)\}$$

---

[31] Para una exposición de esta teoria y de la teoría simple de tipos, ver la introducción de Russell (1990).

Asi, el mismo real S_k está incluido en el dominio de cuantificación de $\exists X$, i.e., el real S_k está definido en términos de la totalidad de los números reales, totalidad a la que el mismo S_k pertenece. Por lo tanto, no se está respetando el vcp en su primera forma, ni se está aplicando la teoría ramificada de tipos. Para eliminar esta definición impredicativa se debe aplicar la teoría ramificada de tipos, estableciendo que el dominio de cuantificación de $\exists X$ debe quedar restringido a algún orden del tipo de los conjuntos de Q, i.e., se debe definir S_k en términos de los números reales de algún orden inferior al orden del mismo S_k, pero esto lleva a hablar de reales en distintos ordenes, hecho del cual el matemático no tiene necesidad.

Gödel considera esto como una demostración de que el vcp es falso y dice: "Yo consideraría esto como una demostración de que el principio del circulo vicioso es falso y no como una demostración de que la matemática clásica es falsa[32] "

Si consideramos a los objetos matemáticos como entidades construidas por nosotros mismos, se deben respetar el vcp, tal como Russell indica.

En este aspecto Gödel pone el dedo en la llaga, afirmando que sólo desde un punto de vista *constructivista*[33] es necesario aplicar el vcp en su primera forma. Su argumentación es la siguiente:

---

[32] [Traducción del autor] ver: Gödel (1990), p. 127.

[33] Gödel usa este término para referirse a estas tendencias que están deacuerdo con que entidades matemáticas se construyen apartir y solo del sujeto, y a aquellas tendencias que están inmersas en la teoría de la "inexistencia de clases" de Russell (ver Gödel (1990) p. 128, nota 22). Wang, en Wang (1991) p. 420, afirma que el término "constructivismo" está mal usado en el texto, que en lugar de este término, se debe usar el término "nominalismo" o "ficcionalismo". El mismo Gödel aceptó la necesidad de hacer este cambio de términos(ver Wang (1991) p. 427). Nosotros seguiremos usando los términos tal cual expuestos en Gödel (1990).

> En el caso constructivista debe existir una definición (a saber, la descripción de la construcción) que no refiere a una totalidad a la que los objetos definidos pertenezcan, porque la construcción de una cosa ciertamente no puede estar basada en una totalidad de cosas a la que la cosa a definir pertenezca[34].

Este argumento es aceptable, pero será más claro si consideramos el siguiente ejemplo físico:

Supongamos que se quiere construir una máquina (que no existe aún) tal que produzca las partes que componen a una máquina cualquiera. Claramente no podemos construir dicha máquina, porque requerimos, primero, de las partes que la compondrán, partes a las que no tendremos acceso sino hasta que se produzca dicha máquina.

En cambio, Gödel considera que el vcp no es aplicable desde una postura realista[35] y dice:

> Si, de cualquier manera, el caso es que los objetos existen independientemente de nuestras construcciones, no hay absurdo alguno en la existencia de totalidades que contengan miembros que puedan ser descritos solo por referencia a esta totalidad.[36]

A fin de cuentas, desde este punto de vista, el problema de la impredicatividad atañe a nuestra capacidad de visualizar los objetos matemáticos y a nuestra forma de describirlos en algún lenguaje. Como ejemplo, consideremos el

---

[34] [Traducción del autor] ver Gödel (1990) p. 127.

[35] Cuando Gödel habla de una postura realista, se esta refiriendo a la postura platónica, usa indistintamente estos términos, e.g., ver: *Algunos teoremas bácicos sobre los fundamentos de la matemática y sus implicaciones filosóficas*, en Gödel (1994).

[36] [Traducción del autor] Gödel (1990), p. 128.

caso de la teoria de los números reales, aquí, el matamático ha descrito las características fundamentales de los números reales, pensando la Idea del continuo, y encuentra que algunos números reales están descritos en términos de la totalidad de los números reales, hecho que no implica que la teoria en cuestión sea falsa.

Gödel explaya su platonismo cuando dice: "Clases y conceptos pueden ser también concebidos como objetos reales, a saber, clases como pluralidades de cosas, y conceptos como las propiedades y relaciones de objetos que existen independientemente de nuestras definiciones y construcciones"[37].

¿Cómo es que Gödel defiende esta caracterización de clases y conceptos contre el problema de la impredicatividad?

En el caso de conceptos, si se supone su existencia objetiva, parece que no debe haber objeción alguna en hablar de todos ellos, ni en describir algunos de ellos haciendo referencia a todos ellos (o al menos a todos los de un mismo tipo). Es cierto que en estos casos aparecerían propiedades φ (o proposiciones $\varphi(a)$) que se contendrían a ellos mismos como constituyentes de su contenido (o de su significado), pero para Gödel esto no lleva consigo absurdo alguno, tan solo haria imposible la construcción del significado de estos conceptos, que, como dice Gödel: "(...) para quien toma el punto de vista realista, no hay objeción alguna"[38].

En el caso de conjuntos Gödel argumenta: "De igual manera, para clases en el sentido de pluralidades o totalidades pareceria que no son creadas si no descritas por sus definiciones y que por tanto el principio del circulo vicioso no es aplicable"[39].

---

[37] *Ibidem.*
[38] [Traducción del autor] ver Gödel (1990), p. 130.
[39] [Traducción del autor] ver: Gödel (1990), p. 131.

Ahora, nada más queda hacer la pregunta que bien formula Carnap: "¿Como podremos desarrollar la lógica si, por un lado se quiere abolir el peligro del *sin sentido* de las definiciones impredicativas y por otro lado, se quiere reconstruir satisfactoriamente la teoría de los números reales?"[40].

Carnap da como posible opción la teoría simple de tipos, en el sentido en el que Ramsey apunta en su ensayo de (1926)[41]. Aunque Carnap sugiere que no se adopte la posición filosófica subyacente en Ramsey, según la cual, las propiedades existen antes de su caracterización a partir de las definiciones y dice: "Yo creo que una concepción de este tipo no está muy alejada de una creencia en la realidad platónica de las Ideas, las cuales existen en sí mismas, independientemente de como el ser humano sea capaz de pensarlas".[42]

Carnap sugiere que se siga una tendencia mas bien fregeana, que solo se considera que un ente matemático existe, si su existencia se ha probado en un número finito de pasos.

A mi parecer, Gödel no formularía exactamente la misma pregunta, posiblemente eliminaría el adjetivo *sin sentido* de la pregunta de Carnap. Sobre esa nueva pregunta, la respuesta de Gödel sería la siguiente: "Una solución tal, puede ser encontrada, en el presente, en la teoría simple de tipos -siguiendo la idea de Ramsey- , y en el futuro, posiblemente sea encontrada en el desarrollo de las ideas bosquejadas en las páginas (216 y 229)"[43] de la primera edición de su artículo. Las ideas a las que se refiere Gödel son muy confusas, pero propone algo así como que

---

40 [Traducción del autor] ver: Carnap, R. "The logisticfoundations of mattematics" en Benacceraf (1983), p. 39.
41 ver: Ramsey (1931).
42 ver Carnap, R. "The logisticfoundations of mattematics" en Benacerraf (1983), p. 39.
43 [Traducción del autor], ver: Gödel (1990).

un concepto puede ser asumido con significado en todos lados, excepto en algunos "puntos singulares" o "puntos límites", de tal manera que las paradojas aparecerán como algo análogo al hecho de dividir entre cero. Lástima que Gödel no haya regresado a esto nunca en publicaciones posteriores.

What is Cantor's Continuum Problem?

Disertando sobre el problema del continuo (i.e., el problema de decidir la verdad o falsedad de la conjetura de Cantor) y exponiendo la necesidad que debe existir en el matemático para dar una respuesta a esta cuestión, al margen de la "posible"[44] incapacidad del sistema axiomático que formalice a la teoría de conjuntos, Gödel escribe este ensayo con la intención de "cambiar la renuencia entre los matemáticos a trabajar en teoría de conjuntos (...)"[45].

El concepto de número cardinal, la conjetura de Cantor y el problema del continuo.

El ensayo de Gödel se inicia con dos preguntas equivalentes al problema del continuo:

1.-¿Cuántos puntos hay en una linea recta en el espacio Euclidiano?

2.-¿Cuántos conjuntos diferentes de enteros existen?

Para empezar, estas dos preguntas no tienen sentido si no se establece qué se quiere decir con la expresión: "cuántos elementos tiene un conjunto infinito".

---

[44] Aquí ponemos *posible* entre comillas porque aunque Gödel sospechaba fuertemente el carácter indecidible de la hipótesis del continuo en el sistema, no se había dado una demostración de ello. Es en la sección 7 (de su artículo) donde Gödel menciona la prueba de independencia de Cohen que se dió en el mismo año de la publicación de segunda edición de este artículo

[45] ver: Wang (1991), p. 392.

La pregunta por la cantidad siempre espera como respuesta un número (al menos en nuestra costumbre finita de preguntar). De igual manera, en el caso infinito, una pregunta tal espera como respuesta un número, un número transfinito.

Así, este tipo de preguntas tendrá sentido cuando, y solo cuando, se haya extendido el concepto de número a conjuntos infinitos, y se haya encontrado que esta extención preserva ese carácter de unicidad que tanto distingue a nuestra noción de número.

Gödel apunta:

> Lo que se quiera entender por *número*, al aplicarlo a conjuntos infinitos, ciertamente queremos que tenga la propiedad de que el número de objetos de una clase no cambie si, dejando los objetos tal cual, se cambian, de cualquier manera, sus propiedades o relaciones mutuas.[46]

De aquí se sigue que dos conjuntos tienen el mismo número cardinal, si se puede establecer una correspondencia uno-a-uno entre sus elementos, que es la definición cantoriana de igualdad entre números. Así, el número cardinal de un cojunto M es, en abstracto, aquello que tienen en común todos los conjuntos biyectables con M.

A partir de esta definición, Cantor define las nociones de "mayor o igual que" y "menor o igual que" para números transfinitos:

El número cardinal a de un conjunto M es menor que el número cardinal b de un conjunto N si:

a)No existe ningún subconjunto de M cuyo número cardinal sea equivalente b.

---

[46] [Traducción del autor], ver Gödel (1990), p. 176.

b)Existe un subconjunto de N tal que su número cardinal es equivalente a a.[47]

Consideremos ahora, el número cardinal de la totalidad de los números cardinales finitos (o lo que es lo mismo: el número cardinal del conjunto de los números naturales) llamemos $\aleph_0$ a este número.

Cantor demuestra que todo conjunto transfinito (i.e., conjuntos cuyo número cardinal es transfinito), tiene un subconjunto con cardinalidad $\aleph_0$.[48] De aquí se sigue directamente que $\aleph_0$ es el menor número cardinal transfinito.

A partir de la teoría de los números ordinales es posible demostrar (aceptando el axioma de elección y sus equivalentes) que la clase de los números cardinales CARD forma un buen orden bajo la pertenencia, por lo que se puede establecer que los números cardinales forman una serie del siguiente jaez:

Consideremos la clase S de los números cardinales mayores que $\aleph_0$. Como S esta bien ordenado bajo la pertenencia, existe un número cardinal mínimo en S, digamos $\aleph_1$, claramente $\aleph_1$ le sucede inmediatamente a $\aleph_0$ en magnitud. Este proceso se puede seguir hasta llegar al que sucede inmediatamente a todos los $\aleph_i$ ($i \in$ N). Sea $\aleph_w$ dicho cardinal, el siguente esta dado por $\aleph_{w+1}$. Así, es posible demostrar que cada número cardinal es algún $\aleph_i$ de la serie obtenida.

Después de esto podemos decir con seguridad que las preguntas 1 y 2 tienen sentido; encontrar el número cardinal $\aleph_i$ que corresponde a dicho conjunto transfinito.

Cantor enuncia su conjetura de la siguiente manera:

---

47 ver: Cantor (1955), p.89.
48 ver: Cantor (1955), p.105.

"Cualquier subconjunto del continuo tiene cardinal $\aleph_0$ o bien el cardinal de todo el continuo" (Cabe aclara que Cantor demostró que el cardinal del continuo es estrictamente mayor que $\aleph_0$).

En otras palabras, lo que Cantor supone es que el cardinal del continuo es $\aleph_1$, ya que la afirmación anterior implica la no existencia de cardinales intermedios entre $\aleph_0$ y el cardinal del continuo. Esta es la hipótesis del continuo, el problema del continuo es el problema de dar un respuesta a la siguiente pregunta:

¿Es verdadera o no la hipótesis del Continuo?

Parecería que una respuesta al problema del continuo depende de que exista una demostración formal en el sistema ZFC[49] ya sea de HC[50] o de noHC[51], de aquella de las dos que sea verdadera.

Proceder de esta manera para resolver el problema del continuo es inútil, por la sencilla razón de que no existen tales deducciones formales, i.e., HC es indecidible para ZFC. Esto se debe a los siguientes resultados:

Teorema 1.-Sea Γ un conjunto de enunciados en un lenguaje de primer orden, y sea φ un enunciado en dicho lenguaje. Entonces,

$\Gamma \not\vdash (\neg \varphi)$ si y sólo si $\Gamma + \{\varphi\}$ es consistente.[52]

Teorema 2.-(Teorema de completud; Gödel 1930)

---

49 Usaremos esta notación para referirnos al sistema de Zermelo Frenkel con axióma de elección.
50 Usaremos esta notación para referirnos a la hipótesis del continuo.
51 Usaremos esta notación para referirnos a la negación de la hipótesis del continuo.
52 La demostración de etos teoremas se puede encontrar en cualquier libro introductorio a la lógica matemática, e.g., Enderton (1987).

Un conjunto de enunciados Γ es consistente si y sólo si existe una estructura que lo satisface, i.e., si y sólo si tiene modelo.

Corolario 1.Sea Γ un conjunto de enunciados, y φ un enunciado en un lenguaje de primer orden, entonces se tiene que:

$\Gamma \not\vdash \neg\varphi$ si y sólo si existe un modelo para $\Gamma + \{\varphi\}$.

Gödel en 1939 demostró, suponiendo la consistencia de ZFC, que existe un modelo L de ZFC+HC.[53].

Posteriormente en 1963, Cohen demostró que existen modelos para ZFC+noHC (suponiendo la consistencia de ZFC).

Así, tenemos que si ZFC es consistente, entonces HC es indecidible para el sistema ZFC.

Después de esto, uno podría pensar que la pregunta por la verdad de la hipótesis del continuo carece de sentido, tal como sucede con la pregunta por la verdad del quinto postulado de Euclides. El argumento que sustentaría la afirmación anterior sería algo similar al siguiente:

Como HC es indecidible para ZFC (suponiendo que ZFC es consistente), existen M y M' modelos de ZFC + HC y de ZFC + noHC respectivamente. En M es verdadero HC y falso noHC, y en M' es verdadero noHC y falso HC, así que preguntarse por la verdad de HC no tiene sentido, dado que HC puede ser falsa o verdadera, dependiendo de la interpretación dada. Por lo tanto, la pregunta por la verdad de la hipótesis del continuo, expuesta a modo general, no tiene sentido.

---

[53] ver " The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis". En Gödel (1990), pp. 26-101.

Aquél matemático que apueste su quehacer en la dirección del argumento anterior, se convertirá en un fanático de la verificabilidad formal. No le interesará describir realidad alguna, tan sólo le interesará construir realidades anclado en la posible consistencia de un conjunto de símbolos.

¿Así es como se ha desarrollado la teoría de conjuntos? De entrada podemos decir que no, ello porque Cantor inicia su teoría describiendo alguna realidad a la que tuvo acceso gracias a cierta intuición. Parecería absurdo imaginar que Cantor, dentro de algun formalismo buscaba solamente expresiones formales consistentes para proponer la viabilidad de su teoría.

A fin de cuentas la consistencia de una teoría matemática formal "decente" la suponemos gracias a una visión de su interpretación y no a la forma de su sintaxis. Además, hoy en día sabemos que este tipo de pruebas de consistencia sintácticas y absolutas no existen.

Gödel sigue su razonamiento en esta linea, asegurando que la pregunta por la verdad de la hipótesis del continuo es una pregunta bien fundada.

Gödel da sustento a lo anterior desde el punto de vista matemático y desde el punto de vista epistemológico;

Desde el punto de vista matemático, Gödel argumenta que una extención de ZFC agregando la hipótesis del continuo como axioma (i.e., el sistema ZFC+HC) es estéril para la teoría de los números, en el sentido de que es incapaz de ofrecer otras demostraciones de los teoremas artiméticos, i.e., que no es fructífero en consecuencias demostrables (recordemos que para Gödel este hecho es una vía alterna para aceptar la verdad de axiomas (ver p.12)). Mientras que si se supone otro $\aleph_i$ cardinalidad del continuo, posiblemente lo anterior no es cierto.

Desde el punto de vista epistemológico Gödel dice: "(...) a partir de una prueba de indecidibilidad, una pregunta pierde su sentido, sólo si el sistema en consideración es interpretado como un sistema hipotético deductivo, i.e., si el significado de los términos primitivos en consideración se deja indeterminado".[54]

Este no es el caso para la teoría de los conjuntos -dice Gödel- porque "para quien considera que los objetos matemáticos existen independientemente de nuestras construcciones y de la intuición que tengamos de ellos individualmente (...) existe una fundamentación satisfactoria de la teoría de los conjuntos cantoriana en toda su extensión y sentido original, a saber, la axiomatización de la teoría de conjuntos interpretada en el siguiente sentido(...)"[55]. De aquí, Gödel pasa a definir el concepto iterativo de conjunto, como aquello que es posible obtener apartir de los enteros (o de algunos otros objetos bien definidos) por aplicaciones iteradas de la operación *conjunto de*. Así, el significado de los términos primitivos de la teoría de conjuntos no permanece indeterminado, sino que es este concepto iterativo de conjuntos la interpretación de los términos primitivos.

¿Porqué habríamos de tomar como satisfactoria esta interpretación? Porque como dice Gödel: "En la medida en que los conjuntos aparecen en matemáticas, éstos son conjuntos de números enteros o de números racionales (i.e., de pares de enteros) o de números de reales (i.e., de conjuntos de números racionales) o de funciones de números reales (i.e., de conjuntos de pares de números reales), etc"[56]. Esto es, los conjuntos aparecen en matemáticas siguendo el concepto iterativo de conjunto.

Concluyendo, para Gödel la pregunta por la verdad de la hipótesis del continuo está llena de sentido, porque si el significado de los términos primitivos de la teoría de los conjuntos se basa en el concepto iterativo de conjunto, entonces

---

54 [Tradución del autor], ver: Gödel (1990), p. 267.
55 *Idem*.
56 *Ibid*, p. 258.

se sigue que los conceptos y teoremas teórico-conjuntistas describen una realidad bien determinada, en la que la conjetura de cantor debe ser verdadera o falsa. Y viceversa: para quien considera que los objetos matemáticos existen por si mismos, independientemente de nuestras construcciones, tiene sentido buscar una respuesta al problema del continuo; a saber, la verdadera relación que se da entre el continuo y la clase de los cardinales en ese mundo poblado por estos objetos matemáticos, a los que tenemos acceso gracias a nuestra inteligencia y a nuestra capacidad de vizualizarlos (intuición matemática).

Intuición Matemática y Existencia Objetiva en Gödel.

En la página 12 de este trabajo, dijimos que Gödel pide que se apueste más al desarrollo de nuestra *intuición matemática* para encontrar nuevos axiomas que describan de mejor manera la realidad matemática.

En las últimas dos páginas de su artículo *What is Cantor's Continuum Problem?*, Gödel abunda en este concepto de *intuición matemática*, ahí afirma que "estamos dotados de un cierto tipo de percepción con respecto a los objetos de la teoría de conjuntos, como se puede constatar a partir del hecho de que los axiomas se imponen por si mismos ante nosotros como verdaderos"[57].

¿Por qué los matemáticos aceptan los axiomas de la teoría de conjuntos? A mi parecer existen dos respuestas:

a) Porque han sufrido una imposición histórica: Dedicarse a extender la teoría y jamás preguntarse por la verdad de su base axiomática.

b) Porque durante el curso de la historia, han ido desarrollando un tipo de percepción matemática que les ha proporcionado la capacidad de ver con

---

[57] [Traducción del autor] Godel (1990), p. 268.

claridad ciertas relaciones entre los conjuntos, y gracias a esta claridad, los axiomas de la teoria de conjuntos les parecen evidentemente verdaderos.

En la segunda respuesta aparece como fundamental el concepto de "percepción matemática", concepto al que Gödel llama *intuición matemática* y que no es otra cosa que la facultad humana de percibir objetos y relaciones matemáticas, facultad que nos otorga la seguridad de que los axiomas y otro tipo de enunciados básicos son verdaderos.

Gödel subraya el hecho de que esta facultad (intuición matemática) no necesariamente debe ser concebida como algo que otorga conocimiento inmediato acerca de los objetos a que se refiere. Es decir, la intuición matemática puede incurrir en errores, tal como sucede con algunas afirmaciones que se sustentan en la experiencia sensible. Para corregir este tipo de errores, se debe cultivar y ampliar, via el intelecto, la facultad de intuición matemática.

Pero para Gödel hay algo más, que es inmediatamente dado y que nos ayuda a formar nuestras ideas acerca de los objetos matemáticos, Gödel no define con rigor este "algo más", pero dice que esto no es (o no es primariamente) la sensación y que se justifica a partir del hecho de que, incluso nuestras ideas referidas a objetos fisicos, contienen elementos cualitativamente distintos a la sensación, e.g., la idea de objeto mismo. Wang afirma[58] que en el sentido anterior, Gödel está de acuerdo con Kant, pero, mientras que para Kant la idea de objeto mismo es aportada por la mente, Gödel cree que la idea de objeto mismo la formamos con base en ese "algo más" inmediatamente dado.

Si se compara la intuición matemática de Gödel con la intuición pura de Kant, encontraremos que se asemejan desde el momento en que en ambas se

---

[58] Wang (1991) p. 408.

encuentran los datos inmediatamente dados. La diferencia es que el entendimiento kantiano, como facultad de pensar las representaciones dadas en la intuición, está imposibilitado de conocer la cosa en si. En contraste, la intuición matemática gödeliana sí permite conocer, al irse desarrollando a partir de nuestro intelecto, la realidad matemática objetiva, la cosa en si.

Gödel establece un vínculo entre la existencia objetiva de los objetos matemáticos y la intuición matemática, del siguiente modo:

Considera a la intuición matemática como un hecho meramente psicológico que claramente (a partir de lo que hemos mencionado anteriormente) produce proposiciones matemáticas objetivamente verdaderas, e.g., los axiomas de la teoría de conjuntos. Este hecho es suficiente (según Gödel) para dar sentido a la pregunta por la verdad o falsedad de proposiciones como la hipótesis del continuo de Cantor.

Una vez que hemos reconocido que ciertas proposiciones son verdaderas (o cuando menos significativas), estas proposiciones deben referirse a algo: a ciertos objetos que se comportan de la manera en la que afirman estas proposiciones. Para Gödel estos objetos tienen existencia objetiva "porque mediante nuestro pensamiento no podemos crear elementos cualitativamente nuevos, sino solo reproducir los que estan ya dados"[59].

Después de esto, debe quedar clara la relación entre la categoría en la que Platón ubica a los objetos matemáticos y la categoria en la que los úbica Gödel, y tambien la relación entre la intuición matemática de Gödel y la facultad intelectual que menciona Platón para poder acceder a las Ideas.

---

[59] Gödel (1990), p. 268.

CAPITULO II

RECONSTRUYENDO EL CAMINO HACIA LOS TEOREMAS LIMITATIVOS

Los logros de Kurt Gödel en lógica moderna, son un hito que permanecerá visible a lo lejos en el espacio y en el tiempo.

John von Newman.

INTRODUCCIÓN:

Quien ha estudiado con detenimiento los teoremas limitativos de Gödel, encontrará que la forma, claridad y pureza de su demostración, sólo pudo ser concebida por una mente genial, una de aquellas que tienen el don de visualizar, al mismo tiempo, totalidades complejas y cada una de sus partes dependientes; algo así como tener la capacidad de ver simultáneamente el comportamiento de las partículas subatómicas, el inmenso cosmos y sus relaciones mutuas.

Posiblemente este es el caso de Kurt Gödel, pero independientemente de esto, debe existir la historia de "Gödel y sus teoremas". En este capítulo trataremos de escribir dicha historia, que como todas la interpretaciones históricas, estará llena de elementos contingentes y de eslabones que no podremos atribuir mas que a la genialidad de Gödel.

Despues de exponer estas ideas estaremos en la capacidad de :

a) Dar una demostración semántica del primer teorema de Gödel (Cap. II).

b) Encontrar relaciones entre el trabajo lógico y la postura filosófica de Gödel. (Cap. III).

c) Extender, de alguna manera, estos trabajos lógicos al dominio filosófico (Cap. III).

NOTA HISTÓRICA:

Gödel presenta su tesis doctoral (Über die Vollständigkeit des Logikkalküls)[60] al decano de la Facultad de Filosofía de la Universidad de Viena, el 15 de octubre de 1929.

El 6 de febrero de 1930, la Universidad de Viena le concede el doctorado en matemáticas. Poco tiempo después, Gödel intenta continuar con el programa de Hilbert para establecer la consistencia de los sistema axiomáticos formales de la matemática por medio de métodos finitistas. Gödel comienza con el problema de demostrar la consistencia del análisis clásico (i.e., la teoría de los números reales). Según Wang (1981)[61], a Gödel le parece 'misterioso' este método hilbertiano de pruebas finitistas. Así, busca eliminar dificultades dividiendo la prueba en dos partes:

*i)*Dar una prueba de consistencia del análisis relativa a la consistencia de la teoría de los números (i.e., la aritmética).

*ii)*Dar una prueba de consistencia de la aritmética haciendo uso de la teoría finitista de los números.

---

60 Traducción al ingles: "On the completness of the calculus of logic", en Gödel (1990). En este trabajo Gödel demuestra la completud de la lógica de primer orden.
61 Wang (1981).

Para demostrar *i),* Gödel comenzó por considerar el modelo en el que las variables de conjuntos toman valores en los conjuntos definibles de la aritmética. Pronto se dió cuenta de que necesitaría, no sólo la consistencia de la aritmética, sino tambien de su verdad. Esto lo llevó a un obstáculo relacionado con las paradojas de Richar y Epiménides conectadas con las nociones de verdad y definibilidad. A partir de esto, Gödel observó que la noción de verdad aritmética no es definible en la aritmética misma. Luego se preguntó por la definibilidad de la noción de prueba y encontró que ésta sí es definible en la aritmética. Así concluyó la existencia de indefinibles en la aritmética.

Para desarrollar con cierta claridad y rigor estas ideas, tendremos que exponer:

a) El programa de Hilbert.

b) Por qué parece viable el modelo que Gödel elige.

c) Por qué la necesidad de expresr la noción de verdad en el sistema.

d) Cómo es que la noción de verdad es indefinible y la noción de prueba es definible.

e) Cómo aparecen los enunciados aritméticos indecidibles.

EL PROGRAMA DE HILBERT.

El programa de Hilbert no es otra cosa que una propuesta lógico-filosófica encaminada a dar una fundamentación satisfactoria de la matemática clásica. Una propuesta, que en caso de llevarse hasta sus últimas expectativas, no dejaría lugar a duda en cuanto a la "correción" de la matemática clásica y futuras extensiones de ésta.

Para lograr esto, Hilbert basa su programa en el método axiomático y en la intuición del signo.

Hilbert sostiene que el método axiomático es la forma más viable para dar una exposición definitiva y lógicamente segura de nuestro conocimiento. Más aún, Hilbert cree que con este método podemos reconstruir, en su totalidad, el edificio conceptual que subyace a cualquier disciplina. Porque "proceder de manera axiomática no significa otra cosa que pensar conscientemente"[62].

Para que una teoría axiomática cumpla estos objetivos, se debe:

1.-Proporcionar una visión de conjunto en cuanto a la dependencia o independencia de sus enunciados.

2.- Garantizar la consistencia de la teoría.

En cuanto a la visión de conjunto de la dependencia, Hilbert se preocupa por no caer en redundancias; a su parecer, la teoría será más ordenada, más clara y más concisa si sus axiomas son independientes.

La condición fuerte en que se basa gran parte del programa, es la segunda; la consistencia. En cuanto a esta, Hilbert dice que "es evidente la importancia que este problema tiene para valorar una teoría. La existencia de contradicciones en ella ponen en entre dicho la existencia misma de la teoría"[63].

Hilbert supone alguna forma de equivalencia entre la existencia de objetos matemáticos y la consistencia de los sistemas en que se le exprese formalmente y más seguro está de esta equivalencia despues del teorema de completud demostrado por Gödel en 1929. Así, Hilbert cree que la introducción de un objeto matemático en un sistema se justifica a partir de que no lleve a contradicciones. A quien objete a lo anterior, Hilbert pregunta: "(...) ¿no es precisamente la objeción que se hacía, no hace mucho, a los números complejos cuando se decía que aunque

---

62 "La nueva fundamentación de las matemáticas". En Hilbert (1993).
63 "El pensamiento axiomático". En Hilbert (1993).

era claro que tenerlos no podría ser la causa de las contradicciones, su introducción no era algo justificado porque, en realidad, las cantidades imaginarias no existen?"[64].

Hilbert debe enfrentar, entonces, el problema de la consistencia, que resulta, así, fundamental para la consecución de su programa.

Este problema se puede resolver en algunas teorías, modificando su base axiomática cada vez que aparezcan contradicciones, cuidando que los hechos observables sean deducidos en esta nueva teoría. Pero en la matemática pura, en donde el conocimiento es puramente teórico, se debe "mostrar que las contradicciónes resultan imposibles dentro de una esfera demarcada por un sistema de axiomas"[65]. Esta exigencia se puede lograr, en algunas teorías, reduciendo el problema de la consistencia de una teoría a la consistencia de otra, por ejemplo, la demostración de consistencia dada en *Grundlagen der Geometrie*[66]. Sin embargo, este método de demostración de consistencia relativa[67] parece no funcionar para dar solución al problema de la consistencia de la teoria de los números y la teoría de los conjuntos, dado que no se tiene otra teoría a la cual relativizarlo.

Para demostrar la consistencia de todas las teorías matemáticas, Hilbert propone un método de prueba de consistencia llamado *finitista,* de manera tal que nadie que confíe en sus sentidos pueda rechazar, o siquiera dudar, acerca de tales pruebas de consistencia.

El método finitista se expone a grandes rasgos de la siguiente manera:

1.- La aritmética finitista:

---

64 "Acerca del infinito". En Hilbert (1993).
65 *Ibid.* P. 30
66 Ver edidión en inglés: Hilbert (1971).
67 En la siguiente sección se expone este método de prueba.

Hilbert pide, primero, se considere lo que él llama la aritmética finitista. Esta no es más que aquella parte de la aritmética que trata de las operaciones realizables con los números enteros.

Hilbert observó que esta teoría se puede erigir sobre una base puramente intuitiva, la de la intuición del signo:

a) El signo ! es un número.

b) Cualquier concatenación finita del signo anterior es un número, e.g., !!!!!!.

c) Cualquier número es uno de los anteriores.

Para Hilbert, estos "numerales o signos numéricos son, en realidad, números y constituyen enteramente a estos convirtiéndose, ahora, ellos mismos en objetos de nuestro estudio"[68], en el objeto de estudio de la teoría finitista de los números.

La relación de orden entre números se puede pensar como la relación de longitud de las cadenas de símbolos, i.e., de los números, e.g., !!!!! en menor que !!!!!!!!!!.

Lo que manejamos en esta teoría son signos, suceptibles de una revisión empírica, no es necesario introducir axiomas y no es posible la aparición de contradicciones. Pero por otro lado, tampoco es posible construir la totalidad de las matemáticas en donde aparecen enunciados acerca de un número infinito de objetos, acerca de conjuntos infinitos, etc.

2.- La matemática real:

---

68 "La nueva fundamentación de la matemática". En Hilbert (1993).

La idea de Hilbert es dar a la totalidad de la matemática una forma finita, susceptible de revisiones empíricas, en la que se puedan dar argumentaciones como las que se dan en la teoría finitista de los números. De esta manera, sería posible demostrar la consistencia de cualquier teoría matemática.

Para llevar a cabo esta idea, es necesario dar una formalización estricta de la matemática, hacer una fotografía de la matemática real. Si se logra esto, se puede pensar, al igual que Hilbert, que la matemática real equivale a un conjunto de fórmulas demostrables en cierta estructura axiomática y puramente formal.

Una vez lograda esta formalización, el objeto de estudio para una investigación sobre la consistencia son los signos, las sucesiones de signos (fórmulas) y las sucesiones de fórmulas (deducciones). De igual manera que en la teoría finitista de los números, esta matemática, expuesta así, es susceptible de una revisión empírica, y de esta manera, el afirmar la consistencia de la teoría se basa en argumentos que refieren a manejos simbólicos.

PRUEBAS RELATIVAS DE CONSISTENCIA

En la primavera de 1930, Gödel trata de dar una prueba de consistencia del análisis en dos partes, en esta sección nos ocuparemos de la primera; es decir, dar una prueba de la consistencia del analisis relativa a la consistencia y a la "verdad"[69] de la aritmética.

Una prueba de consistencia relativa funciona de la siguiente manera: supóngase que se tiene una teoría axiomática T (conjunto de enunciados que son consecuencias de los axiomas de dicha teoría) y que queremos demostrar su consistencia (i.e., que ningún enunciado de la forma "$a \wedge \neg a$" pertenece a ella). Por

---

69 Esta exigencia extra se debe al modelo que Gödel elige, tal como veremos adelante.

otro lado supóngase que tenemos una teoría axiomática formal T' que, además, suponemos consistente. Una prueba de consistencia de T relativa a la consistencia de T', consiste en dar una interpretación de los términos primitivos de T en T', de tal suerte que, para esta interpretación, los axiomas de T se traducen como enunciados demostrables en la teoría T' y de igual manera, todos los enunciados de T se conviertan en enunciados demostrables en la teoría T'. Si además la interpretación tiene la propiedad de linealidad, es decir que:

Si I es la función interpretación, entonces $I(\neg a)=\neg I(a)$ y $I(a\wedge b)=I(a)\wedge I(b)$. Entonces, si T' es consistente, T debe ser consistente, pues si fuera posible encontrar un enunciado de la forma "$a\wedge\neg a$" en la teoría T, entonces la tradución de este enunciado "$I(a\wedge\neg a)$" sería igual al enunciado contradictorio "$I(a)\wedge\neg I(a)$" en la teoría T', lo cual no es posible porque hemos supuesto que T' es consistente.

SISTEMA P.

El sistema axiomático formal P que Gödel elige para su prueba de consistencia, i.e., el sistema de la aritmética en donde va a interpretar el análisis clásico, es "el que se obtiene al sobreponer los axiomas de Peano para la aritmética de segundo orden con los axiomas de *Principia Mathematica*".

Describimos a continuación este sistema:

1.-*Símbolos constantes*:

Negación "$\neg$", conjunción "$\wedge$", cuantificador universal "$\forall$", símbolo para el 0 "0", símbolo para la función sucesor "S", paréntesis izquierdo "(", paréntesis derecho ")".

2.-*Variables del tipo* 1 (para números naturales):

x_1 , x_2, x_3, ...

3.- *Variables del tipo* 2 (para conjuntos de números naturales):

f_1, f_2, f_3, ...

4.-*Gramática*:

i) Por un signo del tipo 1 se entiende una expresión de la siguiente forma,

a, Sa, SSa, SSSa, ...[70]

Donde "a" es una variable del metalenguaje que denota a alguno de los símbolos "0", "x_1", "x_2", ...

ii) Por un signo del tipo 2 se entiende una variable del tipo 2.

iii)Una expresión de la forma, a(b), se llama fórmula elemental (donde "a" es un signo del tipo 2 y "b" un signo del tipo 1).

iv) La clase de las fórmulas bien formadas de nuestro sistema, se define como, la mínima clase que contiene a las fórmulas elementales y a las expresiones,

$\neg$(a), (a)$\wedge$(b), $\forall$x(a) (x variable del tipo 1 o tipo 2), siempre que contenga a las expresiones "a" y "b".

4.- *Abreviaturas*:

Si x es una variable, entonces utilizaremos:

"$a \vee b$" para referirnos a la expresión "$\neg(\neg a \wedge \neg b)$"

"$a \rightarrow b$" para referirnos a la expresión "$\neg(a \wedge \neg b)$"

"$a \leftrightarrow b$" para referirnos a la expresión "$(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$"

"$\exists x\ a$" para referirnos a la expresión "$\neg \forall x(\neg a)$"

---

70 A estas expresiones se les llama *numerales*.

"$v=u$" para referirnos a la expresión "$\forall f\,(f\,(v)\rightarrow f\,(u))$"

"Subst a(u/c)" para referirnos a la expresión que se obtiene al sustituir en la fórmula "a" la variable libre "u", por el símbolo "c" (donde el símbolo "c" y la variable "u" son del mismo tipo).

-Donde "x" es una variable del metalenguaje que expresa una variable de tipo 1 o de tipo 2, "a" y "b" denotan fórmulas, "v" y "u" denotan signos ambos del tipo 1 o ambos del tipo 2, y por último "f" denota una variable del tipo 2.

5.- *Axiomas*:

I.-<u>De Peano</u>

1.- $\neg(Sx_1 = 0)$

2.- $(Sx_1 = Sx_2) \rightarrow (x_1 = x_2)$

3.- $f_1\,(0) \wedge \forall x_1\,(f_1\,(x_1) \rightarrow f_1\,(Sx_1)) \rightarrow \forall x_1\,(f_1\,(x_1))$

II.-Segundo grupo de esquemas de axiomas.

1.- $p \vee p \rightarrow p$

2.- $p \rightarrow p \vee q$

3.- $p \vee q \rightarrow q \vee p$

4.- $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \vee p \rightarrow r \vee q)$

(Donde "p", "q", "r" son variables del metalenguaje que denotan fórmulas).

III.-Tercer grupo de esquemas de axiomas:

Para toda fórmula "a", variable "v" y para toda fórmula "b" en la que no ocurre libre "v", y para todo símbolo "c" del mismo tipo que "v" tal que "c" no contenga variables acotadas en "a" en lugares en los que "v" es libre.

1.- $\forall v\,(a) \rightarrow$ Sust a(u/c)

2.- $\forall v\,(b \vee a) \rightarrow b \vee \forall v(a)$

IV.-Cuarto grupo de esquemas de axiomas.(Comprensión)

$\exists f(\forall u(f(u) \leftrightarrow a))$

V.- Quinto grupo de axiomas.

$\forall x_1 (f_1(x_1) \leftrightarrow f_2(x_1)) \rightarrow (f_1 = f_2)$

6.- *Reglas de inferencia*:

Nuestra única regla de inferencia es el Modus Ponens,

$$\frac{\begin{array}{l} b \rightarrow c \\ b \end{array}}{c}$$

7.- *Teoremas*:

La clase de los teoremas de nuestra teoría, es la mínima clase que contiene a los axiomas y es cerrada bajo Modus Ponens.

MODELO Y NOCIÓN DE VERDAD:

Un conjunto aritmético C es definible si existe una fórmula aritmética de una variable libre $\varphi(x)$ tal que C está formado por aquellos números naturales y solo aquellos, que al sustituirlos en $\varphi(x)$ se obtiene un enunciado aritmético verdadero.

Gödel comienza por proponer como estructura de interpretación, la clase de los conjuntos aritméticos definibles.

Intuitivamente, decir que un enunciado aritmético φ es verdadero, es algo así como decir que lo que predica φ acerca de sus parámetros sucede. Cabe aclarar que en tiempos del programa de Hilbert, no tenía mucho sentido hablar de "enunciados verdaderos" al margen de la noción de demostrabilidad formal.

Según Wang y Feferman, Gödel se toma otra libertad en cuanto a su modelo. Si el universo de interpretación la clase de los conjuntos aritméticos definibles, y a cada uno de estos conjuntos C corresponde una fórmula aritmética con una variable libre $\varphi(x)$, por qué no pensar como universo de interpretación a la clase M de los conjuntos de enunciados verdaderos, que se obtienen al sustituir cada número natural en cada una de las fórmulas correspondientes.

¿Por qué se le ocurre a Gödel seguir esta interpretación? Podríamos plantear muchas posibles respuestas, pero a mi juicio, la respuesta más sensata es que se debe, como veremos más adelante, a una postura filosófica, misma que lo llevó a descubrir la médula de sus impactantes resultados lógicos de 1931.

Con ello Gödel está en posición de interpretar las variables "f" del segundo tipo del sistema P, sobre la clase de los conjuntos de la forma,

$\{\varphi(n) : \varphi(n) \text{ es un enunciado verdadero}\}$

(donde $\varphi(x)$ es una fórmula aritmética que define algún conjunto aritmético).

El siguiente paso consiste en interpretar la relación de pertenencia que aparece en algunas expresiones del sistema P, expresiones f(v) donde f es un signo de tipo 2 y v un signo de tipo 1. Esta expresión aparece por ejemplo en el axioma de comprensión;

$\exists f\,(\,\forall v\,(f(v) \leftrightarrow a)\,)$

Este axioma se puede interpretar como el enunciado que dice, "para cada fórmula 'a' , existe un conjunto 'f' tal que 'f' está compuesto por aquellos elementos para los que 'a' se cumple". Así, estamos pensando la expresión f(v) como el enunciado "v pertenece a f".

Para entender esta expresión en el modelo, necesitamos dar una interpretacón de esta relación de pertenencia aritmética, además, esta interpretación nos ayudará a distinguir números reales.

Así, dada la interpretación de los números reales, se interpreta la expresión '$f(n)$' como "$\varphi(n)$ es un enunciado verdadero", porque si se piensa a 'f' como un conjunto de la forma,

$$A = \{\varphi(n) : \varphi(n) \text{ es un enunciado verdadero}\}$$

y '$f(n)$' como 'n' pertenece a 'f', hay que interpretar a '$f(n)$' como '$\varphi(n)$' pertenece al conjunto A, i.e., $\varphi(n)$ es un enunciado verdadero.

En referencia a la prueba de consistencia relativa que Hilbert desarrolla en *Grundlagen der Geometrie*, Hilbert interpreta la expresión "$(x,y)\in l$" (a *grosso modo* "$l(p)$") como la relación de pertenencia: "El punto 'p' esta en la recta 'l'". Y esta relación se expresa en el sistema diciendo: El punto 'p' de coordenadas '(x,y)' pertenece a la recta 'l', si y sólo si cierta fórmula de la forma "Ax+By+C=0" es demostrable en el sistema. Aquí, se expresó la relación (punto-recta) en el sistema. De igual manera, si se quiere expresar la interpretación de pertenencia (natural-conjunto) en el sistema P, se tiene que poder expresar el enunciado metateórico "$\varphi(n)$ es un enunciado aritmético verdadero" en el sistema P.

Para poder expresar este enunciado metateórico en el sistema P, Gödel observó que necesitaba de una fórmula $T([\varphi])$[71] tal que,

La fórmula $T([\varphi])$ es verdadera si y sólo si, φ es un enunciado aritmético verdadero. Es decir, se necesita de una fórmula $T([\varphi])$ que en la interpretación diga:

"φ es un enunciado aritmético verdadero".

---

71 Donde $[\varphi]$ es un código aritmético, que de alguna manera representa a φ.

Ahora, en caso de que esta fórmula existiera en el sistema P y en caso de que se pudiese construir una fórmula de la forma $\neg T([\gamma])$, donde γ es la misma fórmula $\neg T([\gamma])$, nos encontraremos ante una forma de la paradoja del mentiroso en el sistema, pues lo que $\neg T([\gamma])$ dice es: " soy un enunciado aritmético falso".

Gödel observa esto y da una argumentación para disolver la paradoja del mentiroso en el caso general, concluyendo que no exite una fórmula con las características de $T(\varphi)$. Sigamos pues el argumento.

La paradoja del mentiroso en el caso general dice:

Sea A un individuo que en el tiempo t expresa la oración, Q:= "todo lo que A diga en el tiempo t, es falso". Luego, si nos preguntamos por la verdad del enunciado Q obtenemos lo siguiente: si Q es verdadero, como Q fue expresado por A en el tiempo t, tenemos que Q es falso. Si Q es falso, como Q fue expresado por A en el tiempo t, Q es verdadero. Lo cual es una contradicción.

Gödel dice que A debe especificar un lenguaje B y decir, "todo enunciado que diga A es falso en B". Así la paradoja (o el hecho de que este enunciado no sea ni falso ni verdadero) sirve como demostración de que la oración, Q':= "enunciado falso en B", no sea expresable en B, i.e., si "enunciado falso en B" no es expresable en B, tampoco lo es Q' y por lo tanto la contradicción desaparece.

Aplicando este argumento al caso particular del sistema P, donde el individuo A es la fórmula $\neg T([\gamma])$, se concluye que "enunciado falso en P" no es expresable en P, es decir, que la fórmula $T([\varphi])$, con las características mencionadas arriba no existe.

Se debe observar que para poder concluir lo anterior es necesario poder construir la fórmula $\neg T([\gamma])$.

Para construir dicha fórmula, Gödel hace uso de "La aritmetización de la sintaxis". Este método consiste en asociar números a los signos primitivos del sistema, de tal manera que, a cada expresión, se le pueda asignar un número natural y así, se pueden pensar las relaciones entre expresiones del sistema como relaciones numéricas.

ARITMETIZACIÓN DE LA SINTAXIS:

I.- A cada símbolo primitivo del sistema P se le asocia un número natural de la siguiente manera:

0 ------ 1	S ------ 3	$\neg$ ------ 5
$\wedge$ ------ 7	$\forall$ ------ 9	(------ 11
) ------ 13.		

II.- A cada variable de tipo 1 se le asocia un número de la siguiente manera:

x_1 ------ P_{1+5}

x_2 ------ P_{2+5}

etc... (donde P_i denota al i-ésimo primo).

III.-A las variables de tipo 2 se les asocian números de la siguiente manera:

f_1 ------ $P^2{}_{1+5}$

f_2------ $P^2{}_{2+5}$

etc... (donde P_i denota al i-ésimo primo).

Después de esta enumeración de los símbolos primitivos de P, se obtiene una asociación uno a uno entre sucesiones de números naturales y expresiones de

P. Por ejemplo, a la expresión $\forall x_1 (f_1 (x_1) \wedge f_1 (x_2))$ se le asocia la sucesión de números; (9, 17, 11, 17^2, 11, 17, 13, 7, 17^2, 11, 19,13, 13). En este caso, la expresión es una fórmula bien formada, pero cabe aclarar que la asociación está definida para cualquier expresión del sistema P.

Por otro lado, se puede definir un mapeo uno a uno entre el conjunto de las sucesiones de números naturales y el conjunto de los números naturales de la siguiente manera:

A cada sucesión de números naturales $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ le asociamos el número

$$n = 2^{n1}\ 3^{n2}\ \dots\ P^{nk}{}_k\,.$$

Despues de esto, se puede exhibir un mapeo uno a uno, entre las expresiones del sistema P y los números naturales:

A cada expresión "a" se le asocia inyectivamente una sucesión de números "$(n_1, n_2, \dots, n_k)$" y a cada una de estas sucesiones se le asocia un número natural, tambien en forma inyectiva, a saber, el número $2^{n1}\ 3^{n2}\ \dots\ P^{nk}{}_k$ .Este número asociado a la expresión "a", lo denotamos por "g(a)", y le llamamos: "el número de Gödel de la expresión 'a' "

Como habíamos dicho anteriormente, este método servir para pensar relaciones entre expresiones, como relaciones aritméticas.

Así, por ejemplo, a la relación n-aria (en el metalenguaje) de expresiones:

$R(a_1, a_2, \dots, a_n)$, se le asocia la relación n-aria de números naturales:

$R'(g(a_1), g(a_2), \ldots, g(a_n))$.

De igual manera podemos pensar a las funciones n-arias de expresiones como funciones n-arias de numeros naturales..

Existen algunas relaciones y funciones aritméticas que se pueden representar en el sistema. Formalmente, la definición de estas relaciones es la siguiente:

Definición:

a) Dada una relación $R \subseteq N^n$, se dice que R es representable en el sistema, si existe una fórmula $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en el sistema, tal que:

Si $(n_1, n_2, \ldots, n_n) \in R$, entonces $\vdash_P \varphi(n_1, n_2, \ldots, n_n)$, y

si $(n_1, n_2, \ldots, n_n) \notin R$, entonces $\vdash_P \neg\varphi(n_1, n_2, \ldots, n_n)$.

b) De igual manera, dada una función $F: N^n \longrightarrow N$, se dice que F es representable en el sistema, si existe una $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fórmula en el sistema, tal que:

Si $F(n_1, n_2, \ldots, n_n)=m$, entonces $\vdash_P \varphi(n_1, n_2, \ldots, n_n)=m$, y

si $F(n_1, n_2, \ldots, n_n)\neq m$, entonces $\vdash_P \neg\varphi(n_1, n_2, \ldots, n_n)=m$.

Sea E= (a,x,v) , el conjunto de las ternas formadas por una fórmula 'a' de una variable libre, una variable 'x' del tipo 1 que aparece libre en 'a', y un símbolo 'v' del tipo 1.

Sea F la función, con dominio en E, definida por:

$F(a,x,v)=b$ (donde 'b' es la fórmula que se obtiene al sustituir en la fórmula 'a', la variable 'x', por el símbolo 'v').

A esta función le corresponde una función aritmética

$F':E'\subseteq N^3 \longrightarrow N$ definida por: $F'(g(a), g(x), g(v))=g(b)$.

Es posible demostrar que esta función aritmética es representable en el sistema P. Así, debe existir una fórmula $Sust(x_1, x_2, x_3)$ en P, tal que:

Si $F'(g(a), g(x), g(v))=g(b)$, entonces $\vdash_P Sust(g(a), g(x), g(v))=g(b)$

y si $F'(g(a), g(x), g(v))\neq g(b)$, entonces $\vdash_P \neg Sust(g(a), g(x), g(v))=g(b)$.

Ahora, si la noción de verdad fuese expresable en el sistema, existiría una fórmula $T(x)$ tal que:

φ es un enunciado aritmético verdadero *si y solo si* $T(g(\varphi))$ es un enunciado verdadero en la aritmética.

Consideremos ahora las siguientes fórmulas:

(1) $\neg T(Sust(x_1, g(x_1), x_1)$, a la que le corresponde un número de Gödel, digamos g.

(2) $\neg T(Sust(g, g(x_1), g)$, de igual manera a esta fórmula le corresponde un número de Gödel, digamos k.

¿Cómo se obtuvo la fórmula cuyo número de Gödel es k (i.e., la fórmula (2))? -Sustituyendo en la fórmula con número de Gödel g, la variable con número de Gödel g(x), por el numeral de g. En otras palabras:

$$k = Sust(g, g(x_1), g).$$

Así, la fórmula (2) se puede reescribir como :

(2') $\neg T(k)$, donde $g(\neg T(k)) = k$.

Se ha construido la fórmula autorreferente que dice en palabras del sistema "yo soy un enunciado aritmético falso", a la que se le puede aplicar el argumento de Gödel para la solución de la paradoja del mentiroso.

Si ahora nos preguntamos por la verdad del enunciado $\neg T(k)$, obtenemos lo siguiente:

Si $\neg T(k)$ es verdadero, entonces $T(\ g(\neg T(k))\ )$ es verdadero, i.e., $T\ (k)$ es verdadero.

Si $\neg T(k)$ es falso, entonces $\neg\ T(\ g(\neg T(k))\ )$ es verdadero, i.e., $\neg T(k)$ es verdadero.

En otras palabras: $\neg T(k)$ es verdadero si y sólo si $\neg T(k)$ es falso. Por lo tanto $\neg T(k)$ no es ni verdadero ni falso, cosa que contradice nuestra forma misma de pensamiento. La falla está en suponer que la noción de verdad es expresable en el sistema.

Establecida la no expresabilidad de la noción de verdad aritmética en el sistema P, Gödel demuestra que la relación "ser enunciado demostrable en P" si es expresable en el sistema[72], i.e., existe una fórmula Teo(x) tal que:

φ es un teorema de P, *si y solo si* Teo(g(φ)) es verdadera.

Así pues, la clase β de los enunciados aritméticos verdaderos, es distinta que la clase α de los enunciados aritméticos demostrables en P. Y como se supone que todo enunciado aritmético demostrable en P es un enunciado verdadero, se tiene que $\alpha \subset \beta$ y $\alpha \neq \beta$. Por lo tanto, debe existir un enunciado aritmético A, tal que $A \in \beta$ y $A \notin \alpha$, es decir, existe un enunciado A que es verdadero y no es demostrable en P. Y como $\neg A$ es falso, tampoco es demostrable en P. Por lo tanto, A es indecidible para el sistema P.

PRIMER TEOREMA.

Después de observar la existencia de enunciados indecidibles en la aritmética, Gödel da una demostración formal de este hecho construyendo un enunciado G indecidible.

Para construir tal enunciado, es necesario demostrar que la relación "ser teorema en P" (vista como la relación aritmética "ser el número de Gödel de un enunciado que es teorema en P"), es una relación expresable en P. A grandes rasgos lo que Gödel hace es demostrar que la relación (a,b) dada por "a es el número de Gödel de una deducción en P del enunciado con número de Gödel b"[73],

---

72 ver, "On formal undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems". En Gödel (1990).

73 De la misma manera que se asocian números a las expresiones de P, se les pueden asociar números a las deducciones formales de tal manera que la clase de

es una relación representable en P. Si Ded(x,y) es la fórmula que representa esta relación, entonces la fórmula:

$$\text{Teo}(x) \equiv \exists\, y\ (\text{Ded}\ (y, x))$$

expresa la relación "ser teorema en P", i.e.,

φ es teorema en P, *si y solo si* Teo ($g(\varphi)$) es un enunciado verdadero en la aritmética.

Construimos el enunciado G de la siguiente manera:

i) Consideremos la fórmula $\neg$Teo (Sust (y, g(y), y)), y sea g su número de Gödel.

ii) Consideremos el enunciado $\neg$Teo (sust(g,g(y),g)), y sea k su número de Gödel.

Pero como k = Sust (g, g(y), g), tenemos que el número de Gödel de la fórmula $\neg$Teo(k) es precisamente k. Por lo tanto esta fórmula se puede interpretar en la metamatemática, como el enunciado "yo no soy demostrable en P". Llamamos G a este enunciado y enunciamos el siguiente metateorema.

Metateorema 1: Si P es consistente, entonces G es indecidible para P.

Demostración: (recuerde que k = g (G))

---

los números de Gödel de expresiones del sistema y la clase de los números de Gödel de deducciones del sistema, son ajenas.

Supongamos que G es un teorema en P, como suponemos que el sistema es correcto[74], G debe ser verdadero, i.e., $\neg$Teo(k) es verdadero. Por otro lado, como Teo(x) expresa la relación "ser teorema en P", y suponemos que G es teorema, entonces Teo(k) es verdadero, concluyendo una contradicción. Por lo tanto G no es teorema en P.

Por otro lado, si $\neg$G fuese teorema en P, por corrección tendríamos que $\neg$ ($\neg$ Teo(k)) es verdadero. Pero como este enunciado es lógicamente equivalente a Teo(k), concluiriamos que Teo(k) es verdadero. Ahora, como este enunciado es verdadero (y como Teo(x) expresa la relación "ser teorema en P"), concluimos que G es teorema en P.

Pero como (por hipótesis) el sistema se supone consistente, se llega a una contradicción: G y $\neg$G son teoremas en P. Por lo tanto, el enunciado $\neg$G tampoco es teorema en P. G es, entonces, un enunciado indecidible para P. Además G es verdadero porque G dice de si mismo que no es demostrable. Cosa que es cierta.

SEGUNDO TEOREMA.

El segundo teorema afirma que no se puede demostrar la consistencia del sistema P en el mismo sistema P, i.e., algún enunciado de P que afirme la consistencia de P, no es teorema en P. Veamos como funciona esto.

Un enunciado en P, que afirme la consistencia de P, puede ser cualquier enunciado de la forma $\neg\text{Teo}\,(\,g\,(\,\varphi \wedge \neg\,\varphi\,)\,)$ donde φ es un enunciado en P. Así, consideramos el enunciado "Cons" como el enunciado $\neg\text{Teo}\,(\,g\,(\,G \wedge \neg\,G\,)\,)$, que por cierto afirma la consistencia de P en P.

---

[74] Es decir que no se demustran enunciados falsos.

Lema: El enunciado " Cons → G" es teorema en P, si P es consistente.

Para una esquematización clara de la demostración vease: Torres (1989).

Metateorema 2: Si P es consistente, el enunciado "Cons" no es teorema en P.

Demostración:

Si "Cons" fuera teorema, como "Cons → G" es teorema (lema 1), por modus ponens se tendría que G es teorema en P. Pero esto no es posible porque se supone la consistencia de P y el Metateorema 1 impide la existencia de esta deducción, por lo tanto, "Cons" no es teorema en P.

Este metateorema prueba la imposibilidad de demostrar la consistencia del sistema P en el propio sistema (siempre y cuando P sea consistente).

Concluyendo: Existen enunciados aritméticos verdaderos indecidibles para P (y para cualquier sistema que sea lo suficientemente potente como para expresar la aritmética elemental). Y el enunciado que afirma la consistencia de este sistema (de igual manera todo sistema capaz de expresar la aritmética) es uno de esos enunciados indecidibles.

CAPITULO III

DEL IMPÁCTO FILOSÓFICO DE LOS TEOREMAS LIMITATIVOS

How is empiricism to give an adequate account of the certainty, clarity, range, and applicability of mathematics?

J.S. Mill.

INTRODUCCIÓN:

En el Capítulo I se describió la postura filosófica de Gödel ante la naturaleza de la matemática. En el Capítulo II se hizo un recorrido a través de los teoremas limitativos de 1931, poniendo especial atención en la estructura de la construcción que permitió a Gödel observar la existencia de enunciados indecidibles en ciertos sistemas formales.

En este capítulo se expone el fuerte vínculo que existe entre la posición filosófica de Gödel con respecto a la naturaleza de la matemática y su trabajo en el ámbito de la lógica. Este vínculo se expone en dos tesis:

1.- La aceptación y suposición de su postura filosófica fue lo que permitió a Gödel descubrir la parte medular de los teoremas de 1931.

2.- Los resultados que enuncian los teoremas de 1931, sirven como argumentos para desacreditar ciertas posturas filosóficas que estan en desacuerdo con la del propio Gödel.

LA CONVICCIÓN DE GÖDEL FRENTE A LA FILOSOFÍA CONVENCIONALISTA.

En el capítulo anterior se reconstruyó el camino que permitió a Gödel ver con claridad la existencia de enunciados aritméticos indecidibles en ciertos sistemas matemáticos.

Si se busca una respuesta fundamental en cuanto a la causa del descubrimiento de la existencia de enunciados indecidibles, habrá que responder la siguiente pregunta:

> ¿Por qué Gödel eligió ese camino para intentar demostrar la consistencia del análisis clásico?

Podría ser que no hubiese indicios que permitan responder a la pregunta anterior, o también que la prueba se hubiera generando a partir de ocurrencias que aparecieron en la mente de Gödel en forma azarosa. En este último caso, se podría decir que esas ocurrencias pudieron haber aparecido en la mente de cualquier otro matemático (de calidad) que hubiese estado buscando una prueba de consistencia del análisis clásico (siguiendo el programa de Hilbert), incluso, ¿por qué no?, en la mente de cualquier formalista.

A mi parecer, este no es el caso. Por el contrario la pregunta anterior sí tiene respuesta, una respuesta que, como veremos, está ligada a las convicciones filosóficas de Gödel con respecto a la matemática. La respuesta es la siguiente:

> (R) Gödel eligió este camino a partir de la concepción objetiva que tenía de la matemática y la metamatemática, y con base en el libre uso que hace del razonamiento transfinito.

¿Cómo sustentar esta respuesta? Primero, se puede notar que el principio heurístico para la construcción de enunciados indecidibles es el concepto transfinito de "verdad matemática objetiva" (opuesto al de "demostrabilidad") que, antes de los trabajos de Tarski y del mismo Gödel, era muy confuso. Ciertamente, la construcción dada en el capítulo anterior hace uso de este concepto en varias ocasiones:

1.- En el momento de considerar como modelo de interpretación a la clase de los conjuntos definibles en la aritmética.

2.- Al considerar lo que llamamos la segunda interpretación, en donde el modelo era una clase de conjuntos de enunciados aritméticos "verdaderos".

3.- Al preguntarse por esta noción transfinita de verdad y su posible definibilidad en la aritmética misma.

Concebir una noción de verdad como opuesta a la de demostrabilidad, requiere una visión objetiva de la matemática, en donde la pregunta por la verdad de un enunciado aritmético no es la pregunta por la existencia de una demostración en el sistema formal, sino el interés por conocer si lo que se está enunciando acerca de los objetos matemáticos involucrados en la proposición sucede.

Aquí aparece un argumento a favor de la respuesta R:

a) La postura filosófica de Gödel supone la existencia de objetos matemáticos independientes de las diversas aproximaciones subjetivas.

b) La postura filosófica de Gödel opone la noción de verdad a la de demostrabilidad.

c) El uso de esta noción es el principio heurístico en la construcción de enunciados indecidibles.

El argumento anterior sirve como justificación a favor de la siguiente afirmación:

A- El uso del razonamiento transfinito y la concepción objetiva, tanto de la matemática como de la metamatemática, son razón suficiente y necesaria para la elección de Gödel al buscar una prueba de la consistencia del análisis clásico.

Ahora, considérese el siguiente argumento a favor de la afirmación A:

Paso 1.- Modificamos la proposición A y enunciamos la proposición A*:

A*- Suponer una concepción de la matemática contraria a la que Gödel sostuvo de la matemática, difícilmente lo hubiera llevado a la elección del camino que siguió para buscar una prueba de la consistencia del análisis clásico.

Paso 2.- Pensar en la posible expresabilidad de la noción de verdad y otras nociones metamatemáticas en la aritmética, es un paso en el camino hacia los enunciados indecidibles.

2.1.- Una concepción contraria caería más bien dentro de una postura convencionalista, en la que los enunciados matemáticos carecen de contenido y en la que los sistemas matemáticos consisten de símbolos sin significado que sólo lo adquieren a través de la metamatemática.

2.2.- Para una concepción como ésta, no tiene sentido pensar en expresar la metamátematica en la matemática, porque, desde este punto de vista, es absurdo intentar expresar lo significativo en lo que carece de significado.

Por último, el espíritu formalista que dominaba la época, planteaba como axiomático el hecho de que una prueba de consistencia debía ser finitista y no relativa (forma por la que Gödel optó).

Resumiendo:

1.- El formalismo no buscaba pruebas de consistencia relativa.

2.- La noción de verdad, como opuesta a la de demostrabilidad, requería de una concepción objetiva de la matemática. Que no cabe dentro de la escuela formalista.

3.- Para una concepción convencionalista no tiene sentido el pensar en expresar la metamatemática en los sistemas matemáticos.

Lo anterior da sustento a la respuesta que se dio a la pregunta inicial. De aquí que se pueda decir que la actitud filosófica de Gödel con respecto a la matemática fue el punto de partida para el descubrimiento de los teoremas limitativos. Teoremas que por cierto dan sustento, como veremos adelante, a la misma postura filosófica.

UNA REFUTACIÓN DE LA CONCEPCIÓN SINTÁCTICA.

Una concepción de la naturaleza de la matemática que preocupa y molesta mucho a Gödel, es la desarrolla por los empiristas del Circulo de Viena: H. Hahn, R. Carnap y M. Shilck. Esta concepción, que Gödel llama concepción sintáctica, sostiene, entre otras cosas, que las teorías matemáticas son reducibles a un conjunto de convenciones (reglas) sintácticas sobre el manejo de ciertos símbolos.

Gödel denomina con el nombre de concepción sintáctica a aquellas posturas que sostienen las siguientes tesis:

> T1.- La intuición matemática puede reemplazarse por convenciones sobre el uso de símbolos para todos los fines científicamente relevantes y, en particular, para extraer conclusiones sobre hechos observables que tienen lugar en la matemática aplicada.
>
> T2.- A diferencia de las otras ciencias, que describen ciertos objetos y hechos, no existen objetos o hechos matemáticos. Las proposiciones matemáticas son compatibles con toda experiencia posible pues no son sino consecuencias de convenciones sobre el uso de símbolos que por tanto, carecen de todo contenido.

Esta concepción sintáctica, no es privativa de ninguna teoría filosófica, sino que se puede encontrar en varias escuelas. Por ejemplo, se puede ver que "gran parte de la escuela de Hilbert sobre la formalización y la consistencia de la matemática puede interpretarse como una elaboración parcial de esta concepción".[75]

Esta concepción se opone, radicalmente, a la del propio Gödel:

a) En primer lugar, en cuanto a la intuición matemática, Gödel sostiene (tal como se dijo antes) la importancia de esta facultad humana como facultad independiente de la experiencia sensible, necesaria para superar ciertas limitaciones actuales y por supuesto, limitaciones futuras.

En cambio, la concepción sintáctica asegura que esta intuición matemática no existe como tal, sino que es perfectamente sustituible por un conjunto de convenciones.

---

[75] ver, "Is Mathematics Syntax of Lenguaje? V". En Gödel (1995).

b) En segundo lugar, en cuanto al contenido de la matemática, Gödel asegura que la matemática sí tiene contenido, que los objetos matemáticos existen y que su existencia es independiente de la existencia humana.

En cambio los sintácticos, si se permite usar esta terminología, no sólo niegan la autonomía de los objetos matemáticos, sino que niegan rotundamente su existencia.

En 1958, Paul Arthur Shilpp, editor de *The Library of Living Philosophers*, pidió a Gödel una contribución para el volumen dedicado a Carnap. Gödel tardó seis años en escribir la versión final (fueron seis versiones, aunque Gödel nunca sintió que había alcanzado una versión perfecta y completa), que nunca publicó[76]. El objetivo central de esta serie de artículos, agrupados bajo el nombre genérico de *Is mathematics syntax of languaje?*, es refutar los principios de la concepción sintáctica, basándose, principalmente, en su segundo teorema de incompletitud (1931). Existe tambien un argumento de Wang[77] que, apoyándose en los resultados y la concepción gödeliana, trata de refutar la concepción de Carnap acerca de la naturaleza de la matemática.

A continuación, se expone la parte central del argumento de Gödel en contra de la concepción sintáctica:

Refutación a T1.

i.- La primera parte del argumento trata de refutar T1, i.e., la tesis de que la intuición matemática, como conocimiento conceptual, no existe y es perfectamente reemplazable por convenciones sintácticas. Así, se demostrará, hasta donde la filosofía matemática actual lo permita, que la intuición matemática (como

[76] Actualmente se han publicado 4 de las 6 versiones
[77] ver introducción de Wang (1988).

conocimiento conceptual) es necesaria para reconocer ciertas proposiciones matemáticas como proposiciones verdaderas.

ii.- Si se acepta el convencionalismo de la concepción sintáctica, se sigue que las proposiciones matemáticas verdaderas deben su verdad a las reglas sintácticas (convenciones) que permiten su deducción. Así, para que estas reglas siempre produzcan proposiciones verdaderas (que por cierto a veces corresponden a hechos observables empíricamente), deben ser en cierto sentido admisibles, digamos en el sentido de la consistencia, es decir, las reglas deben ser consistentes. Aquí es donde aparece el arma favorita de Gödel:

A.- Para este caso, el segundo teorema implica la necesidad de algo, digamos la intuición matemática, suficientemente potente como para poder discernir la consistencia de los axiomas.

Primero demostraremos la afirmación A y posteriormente retomaremos el hilo de la argumentación gödeliana.

Demostración de A: El segundo teorema de Gödel afirma la imposibilidad de que un sistema sintáctico (con ciertas características) pueda demostrar su propia consistencia, en otras palabras, la proposición que afirma la consistencia de alguno de estos sistemas, no puede ser reconocida como verdadera en el mismo sistema (i.e., no es deducible de las convenciones sobre el manejo de los símbolos).

De lo anterior se sigue que la proposición que afirma la consistencia del sistema de convenciones, sólo puede ser reconocida como verdadera en otro sentido que el del sistema de convenciones, es decir se requiere de ese algo que Gödel llama intuición matemática, que no es reemplazable por las convenciones del sistema. Para reconocer como verdadera esa proposición, que a fin de cuentas es equivalente a una proposición aritmética, se deben poder reconocer como verdadero los axiomas matemáticos, al menos para alguna interpretación. Esto es, se requiere de una intuición que asegure la verdad de los axiomas aritméticos, además esta intuición no es reemplazable por convenciones.

Así, demostrada la proposición A, se puede decir que, para aceptar como admisibles al conjunto de convenciones, se requiere de un conocimiento conceptual, y que la interpretación sintáctica no nos libera de la necesidad de reconocer ciertas proposiciones matemáticas como verdaderas en un sentido no convencional.

Así, la concepción empirista cae en un círculo vicioso:

El convencionalista propone reemplazar toda intuición matemática por un sistema de convenciones sintácticas, de tal manera que el sistema sea admisible y que no produzca proposiciones matemáticas refutables empíricamente; dicho en otras palabras: que el sistema sea consistente. Pero para demostrar la consistencia de tal sistema se requiere de intuiciones matemáticas no reducibles al sistema de convenciones, intuiciones que no han sido reemplazadas por convenciones aún.

Esto refuta T1, y se puede establecer que las verdades matemáticas son verdaderas en virtud de algo, de un cierto conocimiento conceptual que Gödel llama "intuición matemática".

Refutación a T2.

Gödel cree que la falsedad de la segunda tesis de la concepción sintáctica, se sigue directamente de la refutación a la primera tesis. Para él, el hecho de que la totalidad de las intuiciones matemáticas no sean reemplazables por ningún sistema de convenciones sobre el manejo de símbolos apunta hacia la existencia de un contenido de las matemáticas, es decir, de hechos matemáticos. Aunque para Gödel es suficiente lo anterior para dejar asentado la falsedad de T2, hace uso de una argumentación basada en ideas no tan ligadas a la refutación de T1 para "demostrar" la falsedad de T2.

En esta argumentación, Gödel regresa a su idea de establecer una cierta "similitud" entre la matemática y otras ciencias, sobre todo la física. Me parece que Gödel retoma este punto no porque sea parte fundamental de su filosofía de la matemática, sino porque al lograr justificar esta "similitud", la estructura del argumeto en contra de T2 (más bien en contra de los que sostienen T2) toma el siguiente aspecto:

Aquel que acepte que la matemática no tiene contenido, se verá obligado a aceptar que las ciencias de la naturaleza tampoco lo tienen, ni siquiera los hechos empíricos podrán ser aceptados como contenido de estas ciencias.

A continuación desarrollaremos con detalle el argumento gödeliano. Cabe aclarar que lo que expondremos es una interpretación (muy nuestra) que puede no concordar con lo que en realidad tenía Gödel en mente, esto se debe, sobre todo, al carácter extremadamente sintético de la exposición de Gödel.

En su argumento, Gödel parte de las siguientes hipótesis:

a) El oponente ya conoce la refutación a T1 y no le parece que de ésta se siga ninguna refutación a T2.

b) El oponente conoce el segundo teorema de incompletud de Gödel y está dispuesto a utilizarlo en contra del mismo Gödel.

En primer lugar, Gödel está dispuesto a aceptar que "las convenciones acerca del uso de símbolos son vacías de contenido, [pero] sólo en un sentido relativo; en tanto que no agregan nada a una teoría que implique su admisibilidad".[78]

Después, Gödel da el ejemplo de una convención (dada a partir del conocimiento empírico) que no parece ser vacía de contenido:

Ejemplo: Se introduce una convención acerca de la eliminación de paréntesis, a partir del conocimiento empírico de la asociatividad de una operación física, entonces -dice Gödel- a partir de esta convención, la asociatividad de la operación en cuestión, i.e., una proposición empírica, se sigue.

Lo que podemos interpretar acerca de la introducción de este ejemplo en la argumentación de Gödel, es que como la convención implica una proposición empíricamente verificable, entonces la convención no es vacía de contenido. Observemos además que en este caso, la teoría que implica la admisibilidad de la convención, se reduce al mero conocimiento empírico de la operación física, y que además la convención introducida sobre esta base, implica a la operación misma para casos que posiblemente no hayan sido verificados.

En general -dice Gödel- "una convención que haya sido introducida sobre la base de su consistencia (...)" (consistencia que en el caso de las ciencias empíricas se reduce a los hechos empíricamente verificados) "(...) no implica su propia consistencia, pero sí ciertas proposiciones apenas más debiles, i.e., sustencialmente los mismos hechos que justificaron su introducción."[79] Además esta convención implica hechos potencialmente verificables.

---

78 Gödel (1995), p. 358.
79 *Ibidem.*

De lo anterior se seguirá que "cualquier ley de la naturaleza puede ser interpretada como una convención cuya admisibilidad se deriva de esta misma ley de la naturaleza".[80]

Hasta este punto el oponente podrá estar de acuerdo con lo anterior, pero no por eso deberá aceptar que lo mismo ocurre con la matemática, así, podrá objetar, según Gödel, que:

O1.- Para derivar el hecho empíricamente verificable de la consistencia, que concierne al manejo de símbolos, los axiomas matemáticos no son suficientes, ni siquiera la convención en cuestión lo es.

Una interpretación de la respuesta de Gödel a esta objeción también requiere de un poco de imaginación, porque parece ser que Gödel obvia demasiadas cosas. Empezaremos llenando esos espacios obviados por Gödel y después enunciaremos su respuesta.

En O1 se está haciendo uso del segundo teorma de Gödel, para así asegurar que se requiere agregar nuevos axiomas independientemente conocidos para poder derivar ciertos enunciados, en particular el que afirma la consistencia del sistema inicial de axiomas. Y que por lo tanto, el caso de la matemática es diferente al de la física, en la que las leyes de la naturaleza implican su propia admisibilidad. La respuesta de Gödel a O1 es que "nadie podrá llamar a una ley de la naturaleza vacía de contenido porque tenga consecuencias verificables sólo en conjunción con otras leyes independientemente conocidas".[81] Y pone como ejemplo a las leyes primarias de la electrostática, que sin las del espacio físico y las de la mecánica no tienen consecuencias verificables empíricamente.

---

80 *Ibidem.*
81 *Ibidem.*

O2.- El enunciado de la consistencia es por esta razón vacío de contenido, porque, a diferencia de una ley de la naturaleza, cada instancia que concierne a figuras individuales de prueba (que es todo lo que se puede observar) pueden derivarse de los axiomas antes de que la convención (correspondiente a la proposición de la consistencia) haya sido introducida.

De nuevo es necesario suponer lo que Gödel obvia. En este caso la observación que hacemos es que la admisibilidad de un sistema formal para las matemáticas se puede seguir empíricamente de la observación de cada prueba, en la cual se observa que no aparece una fórmula de la forma "$A \wedge \neg A$" y si se agrega el enunciado de la consistencia la situación no cambia en absoluto. Es decir, los hechos empíricos que implican la admisibilidad del sistema formal, no son implicados por la proposición de la consistencia.

La respuesta de Gödel a O2 es la siguiente:

"El proceso de derivación formal en una teoría, es en sí mismo un tipo de observación. Así que la objeción [O2] es del mismo tipo que decir que una ley de la naturaleza es vacía de contenido porque cada instancia de la ley puede ser conocida sin su ayuda, a saber, por observación directa".

Este es el tipo de argumento que Gödel tiene en mente para asegurar la autonomía de la intuición matemática y la existencia de hechos matemáticos, a diferencia de quienes, como dice Gödel, *hacen filosofía cortando partes de su cerebro al excluir el conocimiento conceptual.*[82]

---

[82] Cita tomada de Wang (1988).

EPÍLOGO

El platonismo matemático no ha muerto...

Y vive seguro en el refugio que Gödel le edificó.

Diego Rojas.

Ciudad Universitaria.

REFERENCIAS

ABAGNANO, Nicola. (1986) *Diccionario de filosofía.* FCE, México.

AMOR, J.A. (1996) *El problema del continuo y las pruebas de independencia.* En preparación.

AMOR, J.A. (1993) "Paradojas, intuición y lógica". *Rev. Ciencias.* 29, 55-61.

BENACERRAF, Paul y Hilary Putnam, eds. (1983) *Phiosophy of Mathemaatics:* Selected Readings. Cambridge University Press, New York.

CANTOR, George. (1955) *Contributions to the founding of the theory of the transfinite numbers.* DOVER, N.Y.

CLARCK, Roland. (1986) *Russell.* Salvat, Barcelona.

ENDERTON, Herbert. (1987) *Una introducción matemática a la lógica.* UNAM, México.

GÖDEL, Kurt. (1986) *Collected Works. Volume I:* Publications, 1929-1936, eds. S. Feferman, J.W. Dawson, S.C. Kleen, G.H. Moore, R.M. Solovay, J. van Heijenoort, Oxford University Press, Oxford.

GÖDEL, Kurt. (1990) *Colleected Works. Volume II:* Publications 1938-1974, eds. S. Feferman, J.W. Dawson, S.C. Kleen, G.H. Moore, R.M. Solovay, J. van Heijenoort, Oxford University Press, Oxford.

GÖDEL, Kurt. (1994) *Ensayos Inéditos,* ed. Fransisco Ramírez Consuegra, Mondadori, Barcelona.

GÖDEL, Kurt. (1995) *Collected Works. Volume III:* Unpublished Essays and Lectures, eds. S. Feferman, J.W. Dawson, W. Goldfarb, CH. Parsons, R.M. Solovay,Oxford University Press, Oxford.

HILBERT, David. (1971) *Foundations of Geometry,* Open Court, Illinois.

HILBERT, David. (1993) *Fundamentos de las Matemática,* selección de Carlos Álvarez. MATHEMA, México.

HIRSCHBERGER, Johanes. (1994) *Historia de la Filosofía.* Herder, Barcelona.

KILMISTER. (1992) *Russell.* FCE, México.

NUÑO, Juan (1988) *El pensamiento de Platón.* FCE, México.

PLATÓN. (1977) *Diálogos Socráticos.* Cumbre, México.

PLATÓN. (1988) *Cratilo.* UNAM, México.

PLATÓN. (1991) *Diálogos.* Porrúa, México.

PLATÓN. (1993) *La República.* Altaya, Barcelona.

RAMSEY. (1931) *The foundations of mathematics.* New York.

RUSSELL, Bertrand. (1946) *History of Western Philosophy.* George Allen, London.

RUSSELL, Bertrand. (1977) *Los Principios de la Matemática.* Espasa- Calpe, Madrid.

RUSSELL, Bertrand. (1988) *Introducción a la filosofía matemática.* Paidos, Barcelona.

RUSSELL, Bertrand y A. N. Whitehead. (1990) *Principia Mathematica.* Cambridge University Press, New York.

SHANKER, S.G., ed. (1988) *Gödel's theorem in focus.* Routledge, New York.

SILVERS, Stuart. (1996) "On Gödel's philosophy of mathematics". *Philosophia Mathemathica.* Vol. III, No. 1.

TORRES, Carlos. (1988) *Los teoremas de Gödel.* Tesis de Maestria, Fac. Ciencias, UNAM.

TORRES, Carlos. (1989) "La filosofía y el programa de Hilbert". *MATHESIS*. Vol. V, No. 1.

WANG, Hao. (1974) *From Mathematics to Philosophy*. Routledge, London.

WANG, Hao. (1981) "Some facts about Kurt Gödel". *Journal of Symbolic Logic*. 46, 653-9.

WANG, Hao. (1988) *BEYOND ANALITIC PHILOSOPHY, Doing Justice to What We Know*. MIT Press, Boston.

WANG, Hao. (1991) *Reflexiones sobre Kurt Gödel*. Alianza Universidad, Madrid.

WANG, Hao. (1993) *Popular Lectures on Mathematical Logic*. Dover, New York.

YARZA, Iñaki. (1992) *Historia de la Filosofía Antigua*. EUNSA, Barcelona.