



DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
**Facultad de Ingeniería**

**CONFIABILIDAD DE TRINCHERAS  
ESTABILIZADAS CON LODO**

**FRANCISCO JOSE ARIAS ESCUDERO**

**TESIS**

PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS  
DE POSGRADO DE LA

**FACULTAD DE INGENIERIA**

DE LA

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

COMO REQUISITO PARA OBTENER  
EL GRADO DE

**MAESTRO EN INGENIERIA  
(MECANICA DE SUELOS)**

DIRECTOR DE TESIS: DR. GABRIEL AUVINET GUICHARD

CIUDAD UNIVERSITARIA  
MARZO DE 1997

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**EL PRESENTE TRABAJO SE IMPRIMIÓ CON EL APOYO DE  
LA COMISIÓN NACIONAL DEL AGUA**

**CONFIABILIDAD DE TRINCHERAS  
ESTABILIZADAS CON LODO**

*Este trabajo no hubiera sido posible sin la valiosa ayuda del Dr. Gabriel Auvinet Guichard, quién fungió como director de tesis. A él mi más profundo respeto y admiración.*

*Agradezco a los señores ingenieros Jesús Alberro Arámburu, Miguel P. Romo Organista, Oscar Antonio Flores Macías y Luis Bernardo Rodríguez González, por la revisión de este trabajo y por sus atinados comentarios y sugerencias que enriquecieron su contenido.*

*A Dios sobre todas las cosas*

*A la Universidad Nacional Autónoma de México*

*Por la oportunidad que me brindó*

*A mis queridos profesores de la División de Estudios de Posgrado  
de la Facultad de Ingeniería  
y del Instituto de Ingeniería*

*Por su dedicación, mi más profundo agradecimiento*

*A mis compañeros y amigos*

*Por compartir conmigo un tiempo y un espacio*

*A mis padres*

*Por su ejemplo de amor y confianza*

*A Juana María*

*...horas, días, meses, años,  
distancia, soledad, sacrificios*

*Juntos lo logramos*

*A Vanessa e Iván*

*Con la confianza de verlos realizar  
sus propias aspiraciones*

*Al señor ingeniero Raúl Carranza Eslava*

*Por su desinteresado apoyo  
y contribución a este trabajo*

Agradecimientos

---

*A la Comisión Nacional del Agua  
En especial al señor ingeniero Carlos García Herrera*

*Por su apoyo y confianza*

# Índice

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 2. ESTABILIZACIÓN DE TRINCHERAS CON LODO	4
2.1 Introducción	4
2.2 Descripción de la técnica	5
2.2.1 Construcción de brocales	5
2.2.2 Excavación de la zanja y construcción del muro	5
2.2.2.1 Muro milán convencional	8
2.2.2.2 Muro prefabricado con avance modular	12
2.2.2.3 Muro prefabricado con avance continuo	14
2.2.3 Características de los lodos estabilizadores	15
2.2.4 Características del lodo fraguante	16
2.3 Métodos de revisión de la estabilidad	18
2.3.1 Generalidades	18
2.3.2 Estabilidad de trincheras en suelos cohesivos	19
2.3.2.1 Criterio de Nash y Jones (1963)	19
2.3.2.2 Criterio de Aas (1976)	21
2.3.2.3 Criterio de Alberro y Auvinet (1984)	27
2.3.2.4 Falla de fondo de la excavación	32
2.3.3 Estabilidad de trincheras en suelos friccionantes	33
2.3.3.1 Criterio de Nash y Jones (1963)	33
2.3.3.2 Criterio de Nash y Jones para arenas saturadas (1963)	34
2.3.3.3 Criterio de Morgenstern y Amir-Tahmasseb (1965)	35
2.3.3.4 Criterio de Piaskowski y Kowalewski (1963)	36

2.3.4	Fracturamiento hidráulico inducido durante la construcción de un muro milán en la ciudad de México	44
2.3.4.1	Naturaleza del fenómeno	44
2.3.4.2	Criterio de Alberro y Hernández (1990)	45
2.3.4.3	Criterio de Auvinet y Arias (1991)	46
<b>CAPÍTULO 3. SEGURIDAD Y CONFIABILIDAD</b>		<b>49</b>
3.1	Introducción	49
3.2	Conceptos generales de confiabilidad	49
3.3	Análisis de confiabilidad	54
3.3.1	Problema básico	54
3.3.2	Confiabilidad en el caso de variables aleatorias con distribuciones comunes	57
3.3.2.1	Distribución normal estándar	57
3.3.2.2	Distribución lognormal	58
3.3.3	Confiabilidad asociada a un estado límite	61
3.3.4	Confiabilidad de sistemas	64
3.3.4.1	Modos de falla múltiple	65
3.3.4.2	Fronteras de probabilidad	67
3.3.4.3	Fronteras bimodales	69
3.3.5	Sistemas en serie	76
3.3.6	Sistemas en paralelo	76
3.4	Métodos de cálculo	77
3.4.1	Introducción	77
3.4.2	Métodos de primer orden de segundos momentos	78
3.4.2.1	Propiedades del criterio de segundos momentos	81
3.4.2.2	Método estándar	82
3.4.2.3	Métodos avanzados	83
3.4.2.4	Método de los multiplicadores de Lagrange	87
3.4.2.5	Algoritmo numérico de Rackwitz	90
3.4.2.6	Distribuciones normales equivalentes	91
3.4.2.7	Exactitud de la aproximación lineal	93
3.4.3	Aplicación de la técnica del cociente polinomial al análisis de confiabilidad de segundos momentos	95
3.4.4	Método de simulación de Monte Carlo	98
3.4.4.1	Generación de números aleatorios	99

3.4.4.2	Números aleatorios con distribución uniforme estándar	101
3.4.4.3	Cálculo de la confiabilidad	102
3.4.4.4	Tamaño de la muestra y error en la simulación	102
3.4.5	Estimación puntual de Rosenblueth	103
3.4.5.1	Estimación bipuntual	104
3.4.5.2	Función de varias variables	106
<b>CAPÍTULO 4. APLICACIÓN A TRINCHERAS ESTABILIZADAS CON LODO</b>		<b>107</b>
4.1	Objetivos del análisis de confiabilidad	107
4.2	Selección del método de análisis	107
4.3	Estados límite del modelo	109
4.4	Características geométricas y mecánicas de la trinchera	111
4.5	Variables aleatorias y de control	112
4.6	Características de las variables del problema	113
4.7	Correlación entre las variables	115
4.8	Selección del tamaño de la muestra	115
4.9	Truncamiento de la distribución de probabilidad	116
4.10	Distribución de probabilidad del factor de seguridad	117
4.11	Planteamiento del análisis de confiabilidad	119
4.12	Resultados del análisis de confiabilidad	122
<b>CONCLUSIONES</b>		<b>140</b>
<b>REFERENCIAS</b>		<b>143</b>
<b>APÉNDICE A. TRANSFORMACIÓN DE ROSENBLATT</b>		<b>150</b>
A.1	Introducción	150
A.2	Determinación de la confiabilidad	151
<b>APÉNDICE B. ORTOGONALIZACIÓN DE VARIABLES BÁSICAS</b>		<b>153</b>
B.1	Variables correlacionadas	153

<b>APÉNDICE C. GENERACIÓN DE NÚMEROS ALEATORIOS</b>	<b>158</b>
C.1 Variables aleatorias continuas	158
C.2 Generación de números aleatorios conjuntamente distribuidos	159
C.3 Generación de variables aleatorias normales correlacionadas por el método de descomposición de Choleski	161
<b>APÉNDICE D. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA MONTECARLO1</b>	<b>164</b>
D.1 Introducción	164
D.2 Construcción del programa	164
D.3 Diagrama de flujo del programa	165
D.4 Codificación del programa	166
D.5 Descripción de los bloques del programa	174

## Introducción

La tendencia de la ingeniería civil, hoy más que nunca, está orientada hacia la obtención de diseños económicos con niveles altos de seguridad. Sin embargo, en el campo de la geotecnia, las decisiones de diseño suelen tomarse bajo un alto grado de incertidumbre, tal como ha sido señalado por Peck (1962) y Casagrande (1965).

En los problemas geotécnicos, las principales incertidumbres provienen de: 1) la falta de precisión en la determinación de las propiedades ingenieriles de los suelos, presiones de poro y esfuerzos *in situ* a partir de un número limitado de pruebas de campo y/o laboratorio, 2) la variabilidad espacial de las propiedades del suelo, 3) el conocimiento solamente aproximado de las condiciones de frontera del problema, 4) la falta de información suficientemente precisa acerca de la magnitud y distribución de las acciones impuestas, y 4) las aproximaciones e insuficiencias del modelo matemático utilizado en los análisis ingenieriles. Si la incertidumbre en el modelo matemático empleado es importante, ningún refinamiento en la determinación de las propiedades del suelo mejora la calidad del análisis efectuado. Sin embargo, en muchos problemas geotécnicos, la principal duda recae en la determinación de la relación esfuerzo-deformación del suelo y de su resistencia ante diferentes solicitaciones y en la evaluación de la variación espacial de estos parámetros.

El empleo de análisis deterministas y factores de seguridad convencionales, que en muchos casos reflejan la propia experiencia del ingeniero ante problemas similares, resulta ser engañosa y puede conducir a un concepto falso de seguridad. El diseño de las obras geotécnicas y la evaluación de su seguridad se pueden mejorar adoptando métodos probabilistas que tomen en cuenta el carácter incierto de la información, asignando un carácter aleatorio a los parámetros que intervienen en el diseño geotécnico y a su evolución en el espacio y tiempo. Estos métodos permiten estimar la probabilidad de falla de la obra y su complemento a la unidad: la *confiabilidad* y proporcionan una medida homogénea de la seguridad de la obra.

En teoría, el estudio de la confiabilidad de una obra se puede desarrollar de la siguiente manera:

- Identificando todos los mecanismos posibles de falla del sistema.
- Estableciendo, para cada mecanismo, las ecuaciones de falla en función de la resistencia de los elementos que en él intervienen y de las cargas que lo solicitan.
- Seleccionando las variables del sistema que deben considerarse como aleatorias y definiendo sus parámetros estadísticos.
- Obteniendo, finalmente, la confiabilidad asociada a cada función de estado límite del sistema y la confiabilidad global del mismo.

Es conveniente señalar que el análisis de confiabilidad no permite eliminar las deficiencias propias del mecanismo de falla elegido; es por ello que debe seleccionarse a partir de un modelo mecánico satisfactorio.

Muchos ingenieros geotecnistas parecen titubear ante la posibilidad de sacar ventaja de los procedimientos probabilistas. Es por eso que uno de los objetivos de este trabajo consiste en promover y difundir esta técnica que puede ser aplicada al gran número de teorías que conforman la mecánica de suelos moderna.

En la primera parte del presente trabajo se revisa la técnica constructiva de trincheras estabilizadas con lodo, aplicada en México durante más de 25 años para la construcción del sistema metropolitano de transporte colectivo (metro).

Se presentan y discuten brevemente las teorías existentes a la fecha para evaluar la seguridad de trincheras excavadas en suelos cohesivos y friccionantes.

En la segunda parte, después de establecer los conceptos fundamentales relacionados con seguridad, se revisan los principales métodos de cálculo disponibles para cuantificar la confiabilidad o la probabilidad de falla de una obra determinada.

Finalmente, se ilustra el uso de estas técnicas revisando la confiabilidad de trincheras estabilizadas con lodo excavadas en condiciones críticas en la zona del lago. Se aplican los métodos de cálculo expuestos en la parte anterior a una trinchera de 20 m de profundidad que forma parte del sistema constructivo de la estación Guerrero de la línea 8 del metro. Se analizan los principales factores que

intervienen en la confiabilidad de estas obras y se discute la efectividad de las medidas utilizadas tradicionalmente para garantizar su estabilidad.

## Estabilización de trincheras con lodo

### 2.1 INTRODUCCIÓN

La utilización de lodos para la estabilización de excavaciones constituye un desarrollo relativamente reciente dentro del campo de la ingeniería civil. La técnica básica ha sido utilizada durante años para estabilizar las perforaciones no ademas de pozos petroleros y de exploración del subsuelo. Este procedimiento se aplica actualmente para el sostenimiento de las paredes de excavaciones estrechas, comúnmente denominadas trincheras. Las trincheras así estabilizadas forman parte del proceso constructivo de los denominados muros pantalla o milán. Estos muros son particularmente atractivos para obras que se realizan en espacios limitados o que se localizan en zonas urbanas donde los altos niveles de ruido y vibraciones producto de la hinca de tablaestacas o pilotes no se permiten.

En México la técnica se desarrolló y se aplica actualmente en la construcción del metro. Debido al limitado espacio vial que se tuvo en la construcción del cajón, sobre todo en las calles del centro de la ciudad, se adoptó la idea de utilizar el muro milán como elemento de contención durante la excavación del cajón y como estructura definitiva formando parte del mismo.

Los principales usos de los muros milán son los siguientes:

- Como estructuras de retención (caso del metro de la ciudad de México).
- Como elementos de capacidad de carga en cimentaciones profundas.
- En la construcción de pasos a desnivel (Parque Lira-Reforma-Chivatito), lumbreras (drenaje profundo de la ciudad de México), estacionamientos y bodegas subterráneas.
- Como pantallas plásticas impermeables (presa Peñitas y termoeléctrica Tuxpan).
- Como estructuras aislantes de ruido y vibración (metro de Berlín).

- Como elemento de lastre para contrarrestar la subpresión a la que pueden estar sometidos los cajones.

Cabe señalar que otras aplicaciones potenciales de esta técnica se investigan actualmente en todo el mundo.

## **2.2 DESCRIPCIÓN DE LA TÉCNICA**

La construcción de trincheras estabilizadas con lodo es relativamente simple si las condiciones del suelo y del agua subterránea son favorables. Si estas condiciones no se presentan, se requiere la utilización de técnicas, equipos y herramientas especializadas, además de una amplia experiencia en este campo. Al respecto, Nash (1974) proporciona detalles de los sistemas constructivos y del equipo utilizado en diferentes circunstancias desfavorables.

A continuación se presenta la secuencia constructiva de los muros milán (Xantacos, 1979; Orozco *et al*, 1989; Santoyo, 1996).

### **2.2.1 CONSTRUCCIÓN DE BROCALES.**

En primer lugar se excava una zanja de poca profundidad cuyas paredes se sostienen mediante muros guía o brocales y que es ligeramente más ancha que la excavación proyectada. Esta zanja sirve para alimentar la excavación con lodo y para guiar a la máquina excavadora. Este brocal puede ser de concreto armado o metálico; este último presenta mayores ventajas, ya que se habilita más rápidamente y es más económico. Los brocales proporcionan una guía exacta al equipo excavador y evitan el agrietamiento de la boca de la trinchera motivado por el continuo movimiento del lodo, originado por la acción del equipo de excavación al entrar y salir.

La profundidad del brocal depende del tipo de suelo por excavar. Se puede eliminar (aunque esta práctica no es recomendable) si el suelo es cohesivo y duro. En suelos friccionantes es indispensable; puede ser metálico o de concreto, pero si se construye de este último material, debe contarse con uno o dos metálicos para emergencias.

### **2.2.2 EXCAVACIÓN DE LA ZANJA Y CONSTRUCCIÓN DEL MURO**

La excavación se realiza en paneles de longitud variable, dependiendo de las condiciones del suelo, de las características del equipo de ataque y del tipo de muro por construir. Para ello se requiere de una almeja del tipo guiado con Kelly, que es la normalmente utilizada en la ciudad de México. Este equipo permite al perforador percibir más fácilmente pequeñas desviaciones que pueden corregirse. Desde el inicio de la excavación debe procederse a la

inyección del lodo para evitar una prematura socavación de la boca de la trinchera, lo que pone en peligro su estabilidad a lo largo del proceso constructivo.

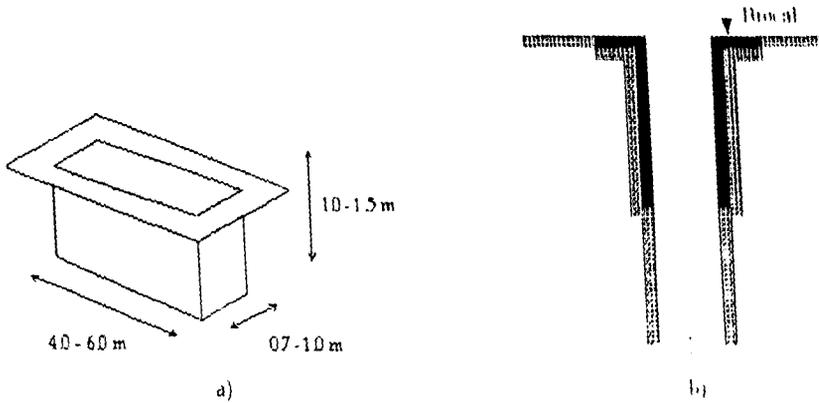


Fig. 2.1 Detalle del brocal: a) vista isométrica, b) corte transversal

Al sacar la almeja cargada de suelo, debe mantenerse perfectamente cerrada para evitar la caída de detritus; además, por economía, debe dejarse escurrir el lodo sobrante en la propia zanja.

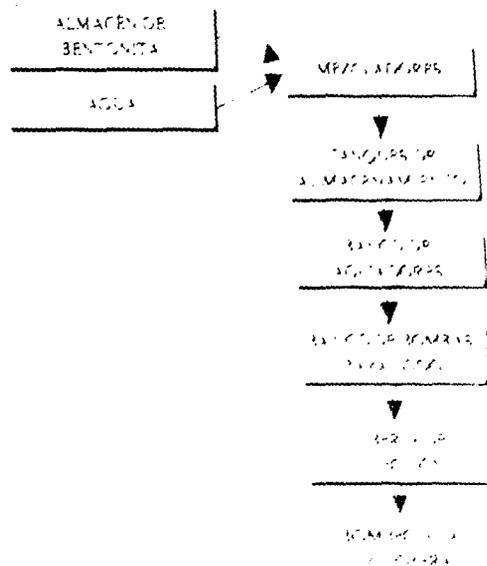


Fig. 2.2 Diagrama de flujo de la secuencia de elaboración de lodo bentonítico  
Compañía de Ingeniería

inyección del lodo para evitar una prematura socavación de la boca de la trinchera, lo que pone en peligro su estabilidad a lo largo del proceso constructivo.

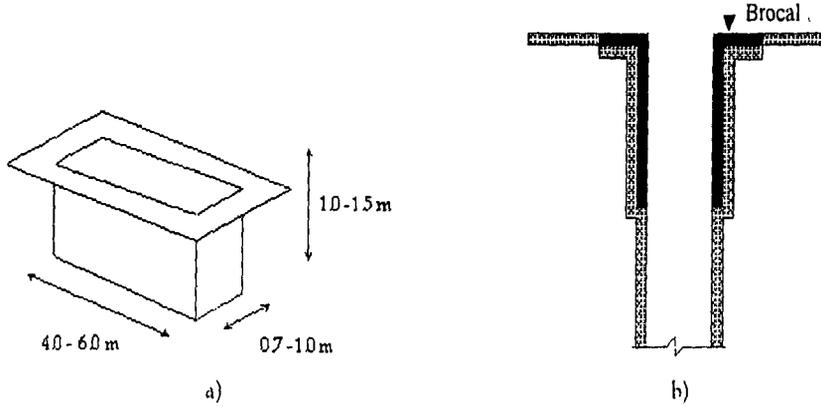


Fig. 2.1 Detalle del brocal: a) vista isométrica, b) corte transversal.

Al sacar la almeja cargada de suelo, debe mantenerse perfectamente cerrada para evitar la caída de detritus; además, por economía, debe dejarse escurrir el lodo sobrante en la propia zanja.

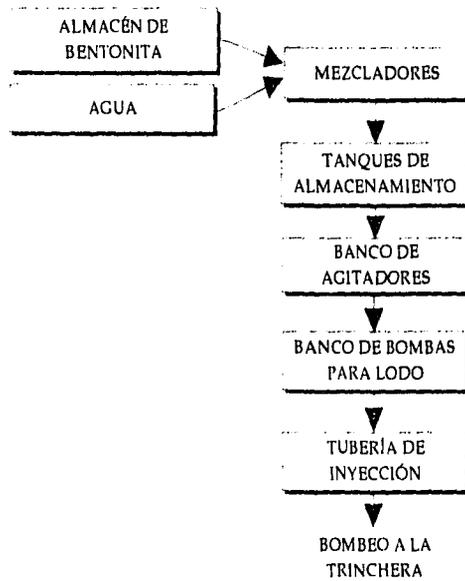


Fig. 2.2 Diagrama de flujo de la secuencia de elaboración de lodo bentonítico (Orozco *et al*, 1989).

Resulta importante destacar que la experiencia en la construcción de muros milán en México ha demostrado que las trincheras se pueden estabilizar con el lodo que se forma espontáneamente al excavar en arcillas (Alberro, 1970). Más aún, las investigaciones experimentales del Instituto Geotécnico Noruego han demostrado la factibilidad de emplear agua como fluido estabilizador (Romo, 1985; Santoyo *et al*, 1987).

Otro aspecto vital en la construcción de muros milán es cuidar la verticalidad de la herramienta de excavación, evitando así desviaciones o inclinaciones en la trinchera. Garantizando la verticalidad de la trinchera se asegura la verticalidad del muro.

Es muy importante no dejar una trinchera totalmente excavada y estabilizada con lodo por mucho tiempo, por lo cual se recomienda que no transcurran más de 24 horas antes de colocar un nuevo elemento de soporte (muro colado *in situ* o muro prefabricado).

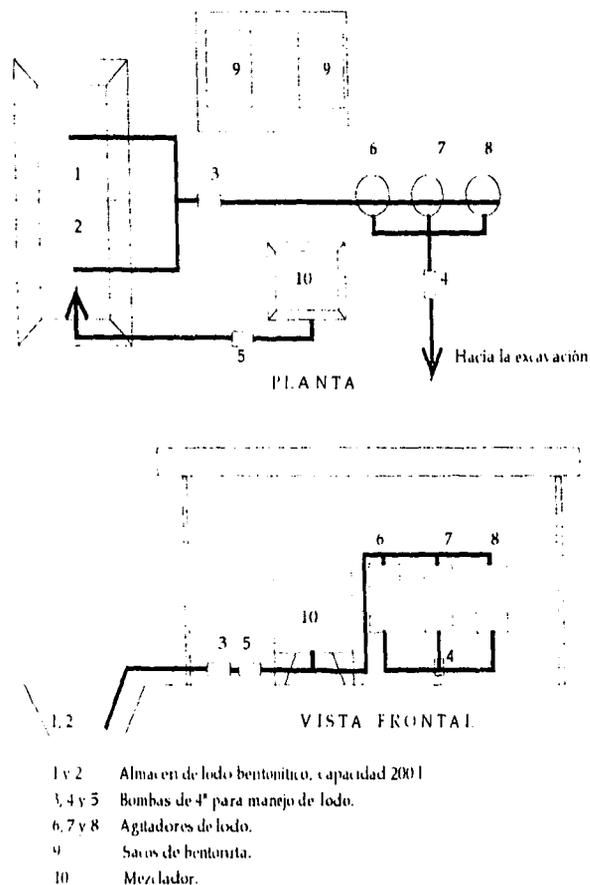


Fig 2.3 Arreglo general de la planta de lodo bentonítico (Orozco *et al*, 1989).

Dependiendo del tipo de muro, existen tres alternativas de excavación y construcción:

- Para muro convencional colado en el lugar.
- Para muro prefabricado con avance modular.
- Para muro prefabricado con avance continuo.

En seguida se describen en detalle estos procedimientos, aclarando que en los tres casos el muro puede ser de utilidad temporal o definitiva.

### 2.2.2.1 MURO MILÁN CONVENCIONAL

Bajo esta denominación se agrupan los muros colados en el lugar que sirven sólo temporalmente como tablaestacas y después como lastre, así como muros estructurales.

#### EXCAVACIÓN

Se identifica como módulo, tablero o panel a una zanja que se abre con una máquina excavadora vertical colocada en tres posiciones, para alcanzar una dimensión horizontal de aproximadamente 6.0 m. La siguiente figura muestra que primero se excavan las posiciones laterales y finalmente la central, con el propósito de lograr simetría en la operación de la almeja de excavación y con ello conservar su verticalidad. La longitud precisa de la zanja queda condicionada por la del muro más el ancho de la(s) junta(s) temporal(es) de colado o tubos junta.

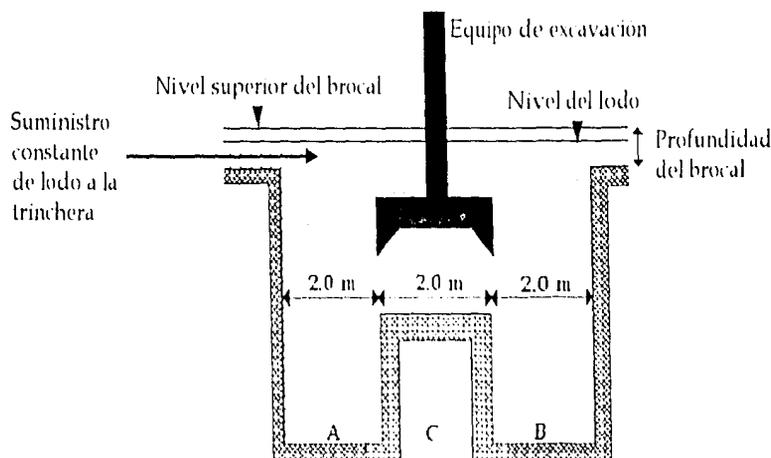


Fig 2.4 Excavación del primer panel a través del lodo (corte longitudinal).

En el inicio de la construcción de un tablero se puede presentar cualquiera de las siguientes tres condiciones: a) que se trate de un tablero todavía independiente que se colará confinado por dos tubos junta; esto es, que ni el muro inmediato anterior o posterior hayan sido construidos; b) que en ambos extremos estén construidos y que tengan la edad mínima necesaria para soportar la maniobra de limpieza de sus juntas machihembradas y, c) que en uno de los extremos se utilice un tubo junta y el otro esté confinado por un muro con la edad mínima.

La manera más ordenada y eficiente de construir un muro milán se ilustra esquemáticamente en la fig. 2.5. Esencialmente consiste en una primera etapa de avance que se detiene cuando los muros iniciales alcanzan la edad mínima; en ese momento el equipo de excavación y colado retrocede para iniciar la segunda etapa de avance en la que se construyen los tableros intermedios.

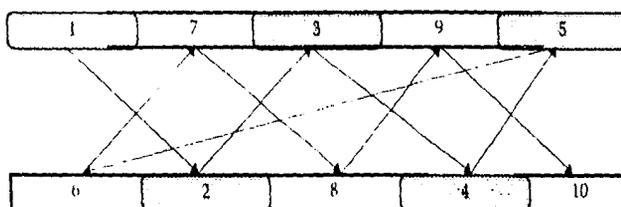


Fig 2.5 Secuencia de construcción del muro milán vista en planta (Santoyo, 1996).

### ARMADO

Terminada la excavación del primer tramo se baja el o los tubos junta, que pueden ser de sección circular o trapezoidal, ligeramente inferior al ancho de la excavación, y cuya misión es lograr una buena junta de colado entre paneles adyacentes. Para realizar esta operación el contratista se vale de grúas o equipo de carga frontal.

Para el armado del muro deben extremarse las precauciones, ya que las maniobras de izado de la parrilla y su colocación dentro de la excavación son delicadas y peligrosas. Las parrillas se colocan dentro de los paneles por medio de una grúa con cabrestante de elevación, que sea suficientemente rígida para evitar movimientos oscilatorios. Durante el habilitado del acero de las parrillas se deben colocar espaciadores que garanticen el recubrimiento del acero. Una vez colocada la parrilla dentro de la trinchera, ésta se debe amarrar al brocal por medio de unas orejas para evitar su flotación durante el proceso de colado.

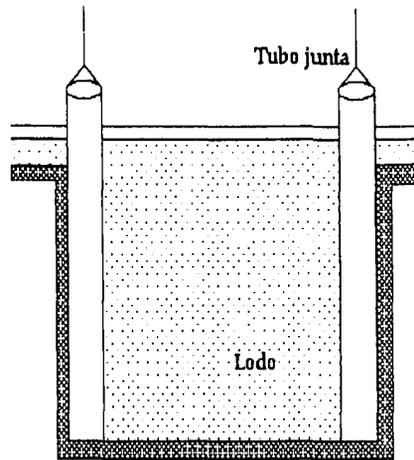


Fig 2.6 Colocación de tubos junta en el primer panel.

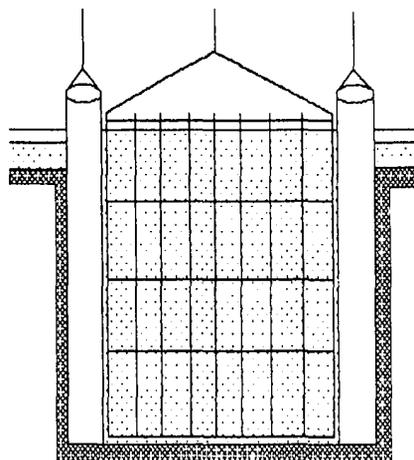


Fig 2.7 Colocación del acero en la trinchera.

### COLADO

El proceso se inicia con la introducción y armado de la línea o líneas de tubería tremie, de 8", 10" ó 12", según lo requiera el ancho de la trinchera. El tubo debe llegar hasta 20 ó 30 cm arriba del fondo de la excavación, para evitar que al inicio del colado se pueda introducir lodo después de vaciar la primera bacha de concreto. Antes de realizar el primer vaciado debe colocarse un tapón en el interior del tubo para que sea empujado por el concreto, desaloje el lodo y sirva como seguro para evitar su penetración.

Una vez terminado el colado del primer panel se procede a retirar los tubos junta antes del fraguado total del concreto. Dejando pasar aproximadamente dos o tres horas se da el primer tirón de aflojamiento de los tubos; si el concreto no sufre

asentamiento se siguen dando tirones espaciados cada 45 minutos hasta extraer los tubos.

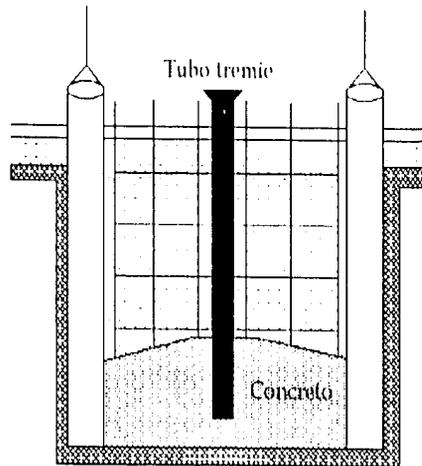


Fig 2.8 Colado del muro milán.

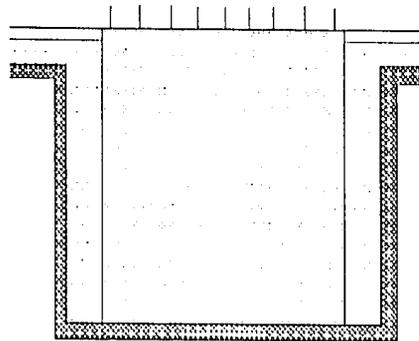


Fig 2.9 Primer panel colado. Tubos junta extraídos.

#### CONSTRUCCIÓN DE PANELES PRIMARIOS

En la siguiente figura se aprecia el detalle de la construcción de los paneles primarios. Mientras que en algunos se lleva a cabo la etapa de excavación, en otros se procede a la colocación del acero de refuerzo y en los más avanzados se realiza el colado. Los paneles primarios se encuentran traslapados con los secundarios, los que se construyen en la segunda fase, tal como se describió anteriormente.

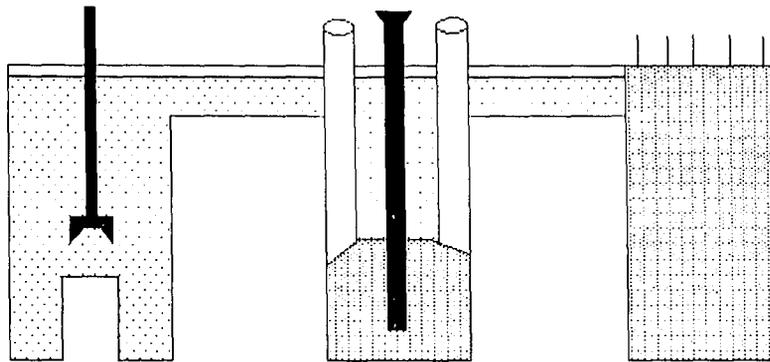


Fig 2.10 Detalle de la construcción de paneles primarios.

#### CONSTRUCCIÓN DE PANELES SECUNDARIOS

Una vez terminada la construcción de los paneles primarios se procede a la construcción de los secundarios. Concluida la segunda etapa se tiene el muro milán construido a todo lo largo de la trinchera.

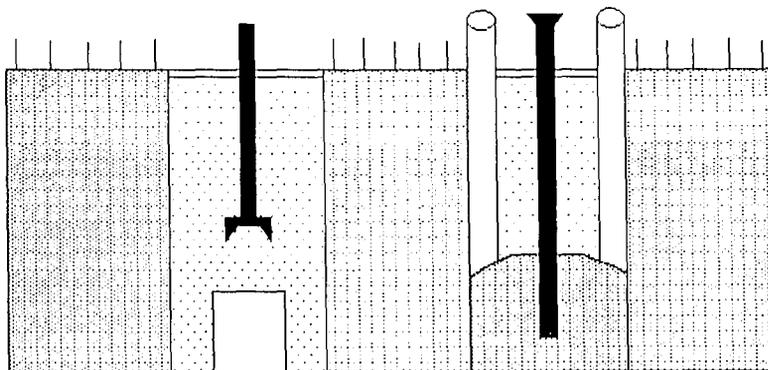


Fig 2.11 Detalle de la construcción de paneles secundarios.

#### 2.2.2.2 MURO PREFABRICADO CON AVANCE MODULAR

La empresa francesa Bachy desarrolló esta técnica pionera de colocación de muros prefabricados que mantiene vigente el concepto de módulo o tablero y que por ello sólo permite avances cortos en la excavación de la zanja; por su parte, ISTME ha experimentando un procedimiento similar al de Bachy, pero con módulos necesariamente más cortos por las restricciones que imponen los suelos blandos de la ciudad de México.

EXCAVACIÓN

Los tableros que se han excavado en los muros experimentales han sido de 8.0 m de longitud, para permitir la introducción de 3 piezas de 2.5 m de ancho y 0.5 m de sobreexcavación adicional para facilitar la maniobra de colocación de la última pieza. La apertura de estos tableros se hace también con tres posiciones del equipo excavador (fig 2.12).

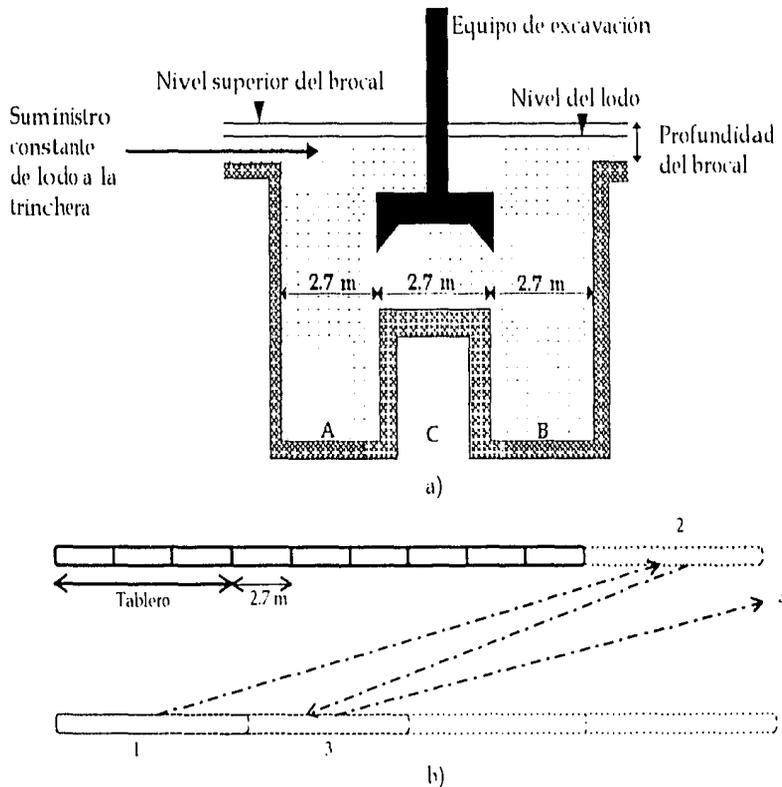


Fig 2.12 Muro prefabricado con avance modular (Santoyo, 1996):  
 a) Excavación del primer panel, b) Secuencia de construcción.

El avance de estos muros se hace en zigzag, logrando de esta manera la colocación continua de las piezas prefabricadas y el máximo aprovechamiento del equipo de construcción. En el caso de que se presente alguna interferencia se puede dejar un tablero pendiente que después se construye con la técnica de muro milán convencional.

DESCRIPCIÓN DE LOS MUROS

Esencialmente consisten en una secuencia de piezas verticales de concreto precolado ensamblados con un gancho y placas guía, dentro de una zanja estabilizada inicialmente con lodo arcilloso (espontáneo) o bentonítico, que

previamente a la colocación de los muros precolados se sustituye con lodo fraguante, que es capaz de endurecer a resistencias similares a las del suelo para soportar y confinar al muro en su posición y que se constituye en barrera de baja permeabilidad que complementa al sello principal, que en el caso de la empresa Bachy es una banda de hule.

#### **MANEJO Y DESPERDICIO DE LODOS**

Este procedimiento de construcción obliga a observar ciertos cuidados en el manejo de los lodos, particularmente en la sustitución completa del lodo arcilloso o bentonítico por lodo fraguante. Esta maniobra debe hacerse con un tubo hermético que descargue en el fondo de la excavación operado con la técnica tremie antes citada, o bien con una bomba de lodos, ya que sólo así se evita la contaminación que induce la mezcla de ambos fluidos. En cuanto al desperdicio de lodos, ocurre que es imposible recuperar todo el lodo arcilloso o bentonítico, aunque para ello se disponga de tanques de almacenamiento temporal; sin embargo, impacta todavía más en el costo el incontrolable desperdicio de lodo fraguante, ya que en la práctica por cada tablero se pierde el volumen de lodo que llena los 50 cm sobreexcavados para las maniobras de colocación y que fácilmente llega a representar el 20% del volumen total del mismo.

#### **2.2.2.3 MURO PREFABRICADO CON AVANCE CONTINUO**

Con esta técnica desarrollada en Francia por la empresa Soletanche se logra ampliar el concepto de módulo o tablero para establecer un procedimiento constructivo continuo con avances de excavación largos y aprovechamiento máximo del equipo de construcción; esta técnica ha sido aplicada recientemente en México para la excavación de la cimentación de la embajada francesa, el hotel Four Seasons y el edificio del Senado de la República.

#### **EXCAVACIÓN**

En este caso, la apertura de la zanja es continua, respetando la idea básica de operación simétrica del equipo de excavación, que se logra avanzando alternadamente con la almeja en dos posiciones hacia adelante y hacia atrás, excavando las porciones A, B, C, D, E, etc. en este orden, según se aprecia en la fig 2.13. El lodo fraguante simplemente se agrega en el extremo delantero del tramo que se está realizando en un turno, abriendo una zanja inicial somera que sirve como canal distribuidor y regulador del consumo gradual de lodo, lo que garantiza su buena calidad.

previamente a la colocación de los muros precolados se sustituye con lodo fraguante, que es capaz de endurecer a resistencias similares a las del suelo para soportar y confinar al muro en su posición y que se constituye en barrera de baja permeabilidad que complementa al sello principal, que en el caso de la empresa Bachy es una banda de hule.

#### MANEJO Y DESPERDICIO DE LODOS

Este procedimiento de construcción obliga a observar ciertos cuidados en el manejo de los lodos, particularmente en la sustitución completa del lodo arcilloso o bentonítico por lodo fraguante. Esta maniobra debe hacerse con un tubo hermético que descargue en el fondo de la excavación operado con la técnica tremie antes citada, o bien con una bomba de lodos, ya que sólo así se evita la contaminación que induce la mezcla de ambos fluidos. En cuanto al desperdicio de lodos, ocurre que es imposible recuperar todo el lodo arcilloso o bentonítico, aunque para ello se disponga de tanques de almacenamiento temporal; sin embargo, impacta todavía más en el costo el incontrolable desperdicio de lodo fraguante, ya que en la práctica por cada tablero se pierde el volumen de lodo que llena los 50 cm sobreexcavados para las maniobras de colocación y que fácilmente llega a representar el 20% del volumen total del mismo.

#### 2.2.2.3 MURO PREFABRICADO CON AVANCE CONTINUO

Con esta técnica desarrollada en Francia por la empresa Soletanche se logra ampliar el concepto de módulo o tablero para establecer un procedimiento constructivo continuo con avances de excavación largos y aprovechamiento máximo del equipo de construcción; esta técnica ha sido aplicada recientemente en México para la excavación de la cimentación de la embajada francesa, el hotel Four Seasons y el edificio del Senado de la República.

#### EXCAVACIÓN

En este caso, la apertura de la zanja es continua, respetando la idea básica de operación simétrica del equipo de excavación, que se logra avanzando alternadamente con la almeja en dos posiciones hacia adelante y hacia atrás, excavando las porciones A, B, C, D, E, etc. en este orden, según se aprecia en la fig 2.13. El lodo fraguante simplemente se agrega en el extremo delantero del tramo que se está realizando en un turno, abriendo una zanja inicial somera que sirve como canal distribuidor y regulador del consumo gradual de lodo, lo que garantiza su buena calidad.

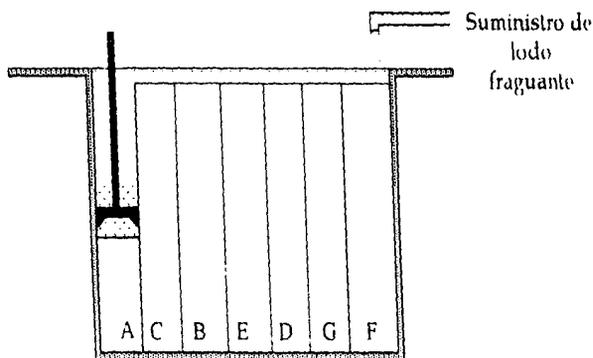


Fig 2.13 Excavación del muro prefabricado con avance continuo (corte longitudinal).

La capacidad estabilizadora del lodo fraguante basada en su mayor densidad, permite excavaciones seguras de gran longitud, haciendo factible separar el proceso de excavación de la zanja del proceso de colocación de piezas prefabricadas; esta es la esencia de la técnica Soletanche que conlleva a un procedimiento más ordenado y eficiente. Conviene mencionar que el manejo del lodo es notablemente más simple y que su desperdicio es mínimo, ya que el lodo desplazado por la pieza de concreto se aprovecha en la continuación de la excavación.

DESCRIPCIÓN DE LOS MUROS

Consisten en piezas prefabricadas usualmente de 3.5 m de ancho ensambladas mediante una junta impermeable, dentro de una excavación estabilizada con lodo fraguante con aditivo retardador de endurecimiento.

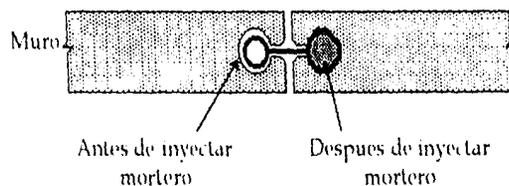


Fig 2.14 Detalle de la junta impermeable Soletanche.

2.2.3 CARACTERÍSTICAS DE LOS LODOS ESTABILIZADORES (BENTONÍICOS Y ESPONTÁNEOS)

Un lodo estabilizador es una suspensión de bentonita en agua cuyas propiedades son:

- Estabilidad de la suspensión, que se traduce en ausencia de decantación durante periodos prolongados, lo que se logra mediante la agitación del lodo

y un periodo de hidratación que oscila, según la calidad de la bentonita, de 3 a 7 horas. Cuando el lodo tiene una viscosidad medida en el cono Marsh comprendida entre 36 y 40 s, es apto para usarse y puede decirse que la suspensión coloidal está en condiciones adecuadas de manejabilidad.

- Tixotropía, que es la facultad de adquirir en estado de reposo cierta rigidez. Cuando la granulometría del terreno es muy cerrada el lodo bentonítico no puede penetrar y se adhiere a la superficie formando una película de arcilla muy poco permeable y delgada (cake). Cuando la granulometría del terreno es muy abierta el lodo penetra en el terreno hasta una determinada profundidad, pero no indefinidamente a causa de sus propiedades tixotrópicas que hacen que cuaje en cierto tiempo, cerrando los poros de la excavación.

Las características de estos fluidos que pueden utilizarse en el muro milán convencional o en la etapa de excavación de los muros prefabricados con avance modular dependen principalmente de las siguientes 3 propiedades:

Propiedad	Valores admisibles
Densidad	1.03 a 1.07
Viscosidad Marsh	28 a 45 s
Contenido de arena	menor de 10%

Tabla 2.1 Propiedades de los lodos estabilizadores (Santoyo, 1996).

En la tabla 2.2 se presentan valores medidos de las propiedades significativas de los lodos que usualmente se controlan en la construcción de muros milán, tanto en suelos granulares como cohesivos. En el caso de lodos bentoníticos las mediciones se efectúan con muestras de la planta de mezclado y de la zanja excavada. Por su parte, para los lodos arcillosos que se forman espontáneamente agregando agua durante la excavación, los valores medidos se obtienen con muestras tomadas de la trinchera.

#### 2.2.4 CARACTERÍSTICAS DEL LODO FRAGUANTE

Se trata de un fluido denso, producto de la adición de cemento a una suspensión de arcilla tixotrópica, capaz de estabilizar la zanja y de endurecer en un cierto tiempo a una resistencia mayor que la del suelo que fue excavado; esta mezcla de color gris, semejante a una lechada viscosa, no inicia su fraguado mientras se mantenga en movimiento, pero una vez que se deja en reposo fragua rápidamente.

Propiedad	Tipo de lodo	Procedencia	Tamaño de la muestra	Media $\mu$	Desv. Est. $\sigma$
Densidad	Bentonítico	Planta	210	1.05	0.05
		Trincheras	193	1.07	0.07
	Esponáneo	Trincheras	300	1.07	0.03
Viscosidad Marsh (s)	Bentonítico	Planta	210	43.9	11.3
		Trincheras	193	47.5	10.6
	Esponáneo	Trincheras	300	30.9	3.5
Contenido de arena (%)	Bentonítico	Planta	210	1.7	1.1
		Trincheras	193	4.6	2.0
	Esponáneo	Trincheras	300	3.5	2.5

Tabla 2.2 Propiedades medidas de los lodos (Santoyo, 1996).

Según Jones (1963), los diversos porcentajes de combinación entre el agua, la bentonita y el cemento, conducen a seis diferentes grupos de mezclas en atención a su comportamiento:

1. Suspensión inestable que sedimenta.
2. Suspensión estable temporalmente que sedimenta antes de fraguar.
3. Gel arcilla-cemento poco resistente.
4. Suspensión estable y bombeable.
5. Suspensión estable, viscosa y espesa.
6. Mezclas no trabajables, sólidas, generalmente en forma de polvo.

Resulta evidente que las mezclas requeridas para las obras que nos interesan son del tipo 4.

Para obtener una mezcla adecuada de lodo fraguante es necesario definir la proporción exacta tanto de lodo bentonítico como de cemento en la composición del mismo. Este proporcionamiento base inicial se define mediante un estudio de laboratorio que posteriormente se verifica en campo. Las principales propiedades de los lodos fraguantes aparecen en la siguiente tabla.

Propiedades de fluidez	Propiedades físicas
Viscosidad	Densidad
Tixotropía	Peso específico
Tiempo de fraguado	Resistencia del gel formado
	Permeabilidad

**Tabla 2.3 Principales propiedades de los lodos fraguantes.**

Se recomienda adoptar como criterio para definir la resistencia final del lodo fraguante, el que una vez endurecido sea 50% más resistente que el suelo al nivel del desplante del muro, despreciando los picos originados por estratos muy compactos y cementados. No es conveniente adoptar una resistencia mayor, ya que al endurecer por completo el lodo a largo plazo, se convierte en una mezcla frágil y fisurable susceptible a las filtraciones.

## 2.3 MÉTODOS DE REVISIÓN DE LA ESTABILIDAD

### 2.3.1 GENERALIDADES

Las técnicas para estabilizar excavaciones mediante lodos bentoníticos han tenido un gran desarrollo durante las dos últimas décadas. Sin embargo, los mecanismos por medio de los cuales dichos fluidos sostienen a las excavaciones siguen siendo discutidos. Diversos autores, entre ellos Lorenz (1963), Meardi (1962), Morgenstern y Amir-Tahmasseb (1965), Veder (1963), Nash y Jones (1963), han sugerido que los siguientes factores intervienen en la estabilidad de las trincheras:

- La presión hidrostática del lodo.
- La resistencia pasiva del lodo, considerado como un cuerpo plástico confinado entre dos placas rígidas. Este efecto puede ser evaluado por medio de la teoría propuesta por Morgenstern (1963).
- La resistencia a la deformación de la interfaz impermeable (cake), funcionando como membrana.
- La acción de fuerzas electrosmóticas, ya que la carga del lodo bentonítico es negativa, siendo positiva la del suelo. Sin embargo, diversos estudios (Veder, 1961) han demostrado que los fenómenos eléctricos que se desarrollan en el lodo estabilizador no son significativos en el análisis de estabilidad de las trincheras.

- El incremento de la resistencia al esfuerzo cortante en la zona de suelo saturada por el fluido estabilizador, debido al efecto de cuajado del lodo en los poros.
- El efecto de estabilización que se presenta en los granos de suelos no cohesivos en la cara interior de la trinchera, debido al flujo del lodo hacia su interior y a la existencia de la interfaz impermeable, la cual además transmite la presión hidrostática del lodo a la estructura del suelo.

Se presentan a continuación algunos de los criterios más importantes para estimar la seguridad en las trincheras estabilizadas con fluidos viscosos, tanto en suelos cohesivos como en friccionantes.

### 2.3.2 ESTABILIDAD DE TRINCHERAS EN SUELOS COHESIVOS

#### 2.3.2.1 CRITERIO DE NASH Y JONES (1963)

Este criterio analiza la estabilidad de trincheras ademas con lodo bentonítico, suponiendo que se desarrolla una membrana impermeable en la interfaz suelo-lodo, y que se ejerce una fuerza hidrostática en las paredes de la trinchera.

La estabilidad de un corte vertical en arcilla homogénea fue analizada en primera instancia por Coulomb, quien mostró la existencia de una altura crítica, abajo de la cual un corte no se puede autosostener:

$$H_{cr} = \frac{4c \cos \phi}{\gamma (1 - \sin \phi)} \quad (2.1)$$

donde  $\gamma$  es el peso específico del suelo,  $c$  y  $\phi$  su cohesión y ángulo de fricción interna respectivamente, los cuales dependen del tipo del suelo y del tiempo de apertura del corte. Si se acepta la existencia de una membrana impermeable en la cara interior de la excavación, entonces cualquier fluido ejerce un empuje hacia el suelo, obteniéndose un diagrama de cuerpo libre como el de la fig 2.15 a.

Si no se presentan cambios en los esfuerzos efectivos y si el corte permanece abierto sólo por unos días, entonces  $c = c_u$ ,  $\phi = 0$ ,  $\alpha = 0$  y  $\theta_{cr} = 45^\circ$  (fig 2.15 b).

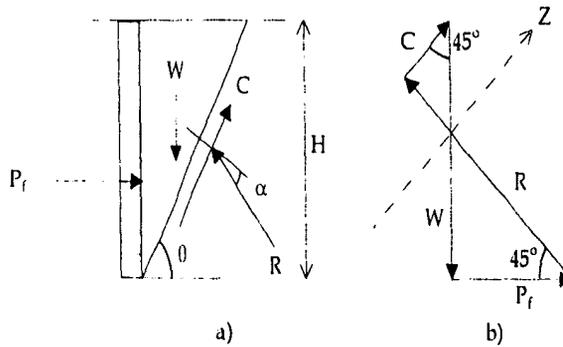


Fig 2.15 Solución de Nash y Jones.

De la figura anterior

$$W = \frac{H^2 \tan(90 - \theta)\gamma}{2} = \frac{\gamma H^2}{2} \quad (2.2)$$

$$P_f = \frac{\gamma_L H^2}{2} \quad (2.3)$$

Planteando el equilibrio

$$\sum F_z = 0 \quad (2.4)$$

se obtiene

$$C = \frac{H^2(\gamma - \gamma_L)}{2\sqrt{2}} \quad (2.5)$$

donde  $\gamma_L$  = peso específico del lodo.

Es posible observar que

$$C = \frac{\sqrt{2}Hc_u}{F} \quad (2.6)$$

donde  $c_u$  = resistencia no drenada del suelo.

Igualando las ecs 2.5 y 2.6 se obtiene

$$F = \frac{4c_u}{H(\gamma - \gamma_L)} \quad (2.7)$$

donde F es el factor de seguridad. Este análisis ignora la existencia de posibles grietas en el suelo, las que reducen el valor de dicho factor.

2.3.2.2 CRITERIO DE AAS (1976)

RESISTENCIA NO DRENADA

El problema más delicado relacionado con el análisis de estabilidad de trincheras estabilizadas con lodo en arcillas blandas, es la selección de valores adecuados de la resistencia al esfuerzo cortante del suelo. Algunas experiencias de los últimos años muestran que el análisis no drenado basado en la prueba tradicional de veleta conduce a estimaciones incorrectas del factor de seguridad para todos los tipos de arcilla.

Para las arcillas noruegas de baja plasticidad, esta discrepancia se atribuye principalmente a su marcado comportamiento anisótropo en cuanto a la resistencia al esfuerzo cortante. Como un ejemplo típico la fig 2.16 muestra los resultados de una serie de pruebas triaxiales de compresión y extensión, así como de pruebas de corte directo en muestras inalteradas de la ciudad de Oslo.

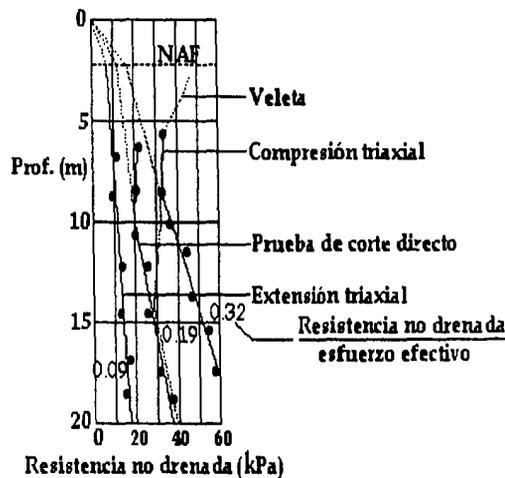


Fig 2.16 Resistencia no drenada determinada en varios tipos de pruebas.

Todas las muestras fueron reconsolidadas anisotrópicamente para simular sus condiciones *in situ* antes de proceder a su ensayo. Como se puede apreciar en la figura, la resistencia al esfuerzo cortante obtenida en la prueba de compresión triaxial ( $c_T$ ), donde las condiciones de esfuerzo son comparables a las de un estado de falla activa, representa aproximadamente tres veces la resistencia obtenida en la prueba de extensión, la cual es análoga al estado de falla pasiva.

La resistencia al esfuerzo cortante observada en planos de deslizamiento horizontales en la prueba de corte directo se ubica aproximadamente a la mitad del intervalo de valores de las pruebas triaxiales. Con algunas excepciones, para profundidades menores a 6 ó 7 m, la resistencia al esfuerzo cortante crece con la profundidad en forma aproximadamente proporcional al esfuerzo efectivo.

También es posible apreciar en la misma figura la variación con la profundidad de la resistencia al esfuerzo cortante *in situ* obtenida con la prueba de veleta ( $c_v$ ). Al contrario de los valores de resistencia determinados en laboratorio, las obtenidas con veleta permanecen casi constantes por abajo de los 15 m, lo que manifiesta un decremento gradual con la profundidad de la relación entre la resistencia no drenada y el esfuerzo efectivo.

La experiencia en cálculos de estabilidad de excavaciones indica claramente que el uso indiscriminado de la resistencia medida con veleta, cuando ésta excede el valor correspondiente a 0.2 veces el esfuerzo efectivo, conduce a sobreestimaciones de las condiciones de estabilidad y por lo tanto a diseños inseguros. Por ello, cuando menos en situaciones donde se descarga la arcilla por algunos días, como en el caso de trincheras estabilizadas con lodo, las altas resistencias al esfuerzo cortante medidas en la parte superior intemperizada de la arcilla deben ser considerados con precaución.

MODELO DE FALLA

Se considera adecuado realizar los cálculos de estabilidad considerando un modelo de falla basado en suposiciones simples. Como se observa en la fig 2.17, se supone que la masa deslizante está constituida por dos bloques.

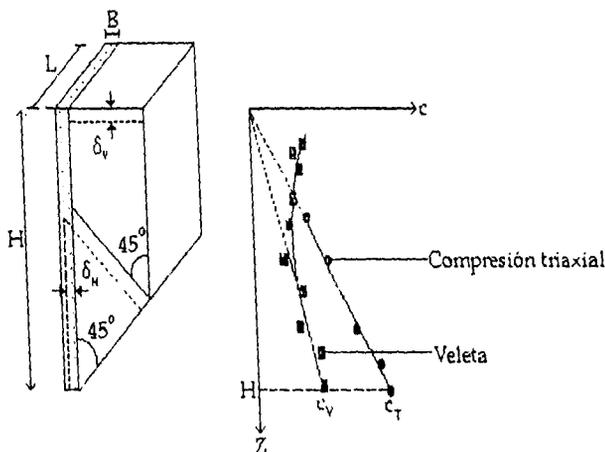


Fig 2.17 Condiciones supuestas de falla.

Se considera que la falla se desarrolla por movimiento vertical ( $\delta_v$ ) del bloque superior al mismo tiempo que el bloque inferior experimenta movimiento horizontal ( $\delta_H$ ) hacia el interior de la trinchera.

Por otro lado, se supone que a lo largo de los dos planos inclinados a  $45^\circ$  las condiciones de esfuerzo corresponden a un estado de falla activa, por lo que la resistencia al esfuerzo cortante movilizada a lo largo de estos planos es igual a la medida en el ensaye triaxial de compresión ( $c_r$ ). Además, se considera que en las superficies de deslizamiento verticales se moviliza la *resistencia modificada de veleta* ( $c_v$ ), que es igual a la resistencia real medida con veleta observada en el fondo del cuerpo deslizante (a la profundidad H) y que decrece en forma lineal hacia la superficie donde vale cero.

El propósito de este grupo de consideraciones simples es compensar: a) la presencia de grietas en la superficie intemperizada de la trinchera, b) la ya citada sobreestimación de la resistencia medida con veleta en la zona superficial intemperizada, c) el hecho de que este mecanismo de falla puede no ser el más crítico y, d) la posibilidad de desarrollo de una falla progresiva debido a la más temprana movilización de resistencia a lo largo de los planos inclinados que en los verticales.

En la fig 2.18 se presenta el diagrama de cuerpo libre para el problema en cuestión, considerando que  $\alpha \leq 0.5$  y que  $\Omega < 2\alpha$  ó  $\Omega \approx 2\alpha$ .

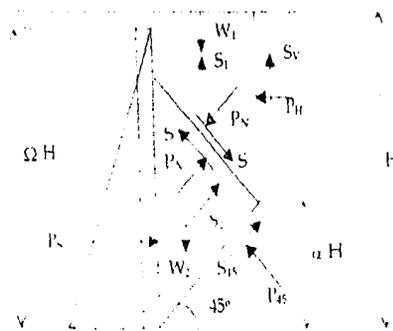


Fig 2.18 Análisis de estabilidad, criterio de G. Aas.

De la figura anterior es posible establecer que

$$W_1 = \frac{\gamma}{2} H^2 L (2 - 3\alpha) \alpha \quad (2.8)$$

$$S_1 = \frac{c_v}{F} H^2 \left( 1 - 3\alpha + \frac{7}{3} \alpha^2 \right) \alpha \quad (2.9)$$

$$S_v = \frac{c_v}{F} \frac{HL}{2} (1 - \alpha)^2 \quad (2.10)$$

$$S = \frac{c_T}{F} \frac{HL}{\sqrt{2}} (2 - 3\alpha) \alpha \quad (2.11)$$

$$W_2 = \gamma H^2 L \alpha^2 \quad (2.12)$$

$$S_2 = \frac{c_v}{F} 2H^2 (1 - \alpha) \alpha^2 \quad (2.13)$$

$$S_{45} = \frac{c_T}{F} \frac{HL}{\sqrt{2}} (2 - \alpha) \alpha \quad (2.14)$$

$$P_s = 2\gamma H^2 L \left( \frac{\Omega^2 \gamma_L}{4 \gamma} \right) \quad (2.15)$$

donde

$\gamma$  = Peso específico del suelo.

$\gamma_L$  = Peso específico del lodo.

$c_v$  = Resistencia al esfuerzo cortante medida con veleta a la profundidad D.

$c_T$  = Resistencia al esfuerzo cortante medida en la prueba triaxial rápida de compresión a la misma profundidad.

El equilibrio de los bloques inferior y superior se garantiza si

$$W_1 - S_1 - S \frac{1}{\sqrt{2}} - P_N \frac{1}{\sqrt{2}} - S_v = 0 \quad (2.16)$$

$$S_{45} + S_2 - P_N - W_2 \frac{1}{\sqrt{2}} + P_c \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \quad (2.17)$$

$S_1$  y  $S_2$  representan la resistencia al esfuerzo cortante total movilizada a lo largo de las superficies verticales terminales del cuerpo deslizante y actúan en sentido contrario a la dirección de deslizamiento.

Combinando las ecs 2.16 y 2.17 y sustituyendo en las expresiones anteriores se obtiene

$$F = \frac{c_v}{\gamma H} \left\{ \frac{\frac{H}{L} \left( \frac{7}{3} - \sqrt{2} \right) \alpha^3 - \left[ \frac{H}{L} (3 - \sqrt{2}) + 2 \frac{c_T}{c_v} - \frac{1}{2} \right] \alpha^2 + \left[ \frac{H}{L} + 2 \frac{c_T}{c_v} - 1 \right] \alpha + \frac{1}{2}}{\alpha - \alpha^2 - \frac{\Omega^2 \gamma_L}{4 \gamma}} \right\} \quad (2.18)$$

Calculando la derivada de F respecto a  $\alpha$  e igualándola a cero se obtiene la siguiente expresión que determina el valor crítico de  $\alpha$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\Omega^2 \gamma_L}{4 \gamma} \left( \frac{H}{L} + 2 \frac{c_T}{c_v} - 1 \right) + \frac{1}{2} \right] - \left[ \frac{\Omega^2 \gamma_L}{4 \gamma} \left( 3.172 \frac{H}{L} + 4 \frac{c_T}{c_v} - 1 \right) + 1 \right] \alpha \\ & + \left[ \left( 0.586 + 2.757 \frac{\Omega^2 \gamma_L}{4 \gamma} \right) \frac{H}{L} + \frac{1}{2} \right] \alpha^2 - 1.838 \frac{H}{L} \alpha^3 + 0.919 \frac{H}{L} \alpha^4 = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Para valores típicos de  $\frac{\Omega^2 \gamma_L}{4 \gamma}$  entre 0.1 y 0.2, y para  $\frac{H}{L} < 30$ , la expresión anterior proporciona casi el mismo resultado para valores de  $\alpha$  comprendidos entre 0.47 y 0.50, por lo cual  $\alpha - \alpha^2$  es aproximadamente igual a  $\frac{1}{4}$  y la ec 2.18 de manera aproximada se simplifica:

$$F = \frac{c_v}{H(\gamma - \Omega^2 \gamma_L)} \left[ 2 \frac{c_T}{c_v} + 0.6 + 0.86 \frac{H}{L} \right] \quad (2.20)$$

Se puede demostrar de igual forma que para relaciones  $\frac{H}{L} < 7.5$ , el plano de falla del fondo se extiende teóricamente hasta el nivel del terreno ( $\alpha = 1$ ). Entonces, la expresión para determinar el factor de seguridad se convierte en

$$F = \frac{c_v}{H(\gamma - \Omega^2 \gamma_L)} \left[ 2 \frac{c_T}{c_v} + 0.94 \frac{H}{L} \right] \quad (2.21)$$

Las ecs 2.20 y 2.21 se pueden escribir de manera similar a la bien conocida expresión para los cálculos de estabilidad de cortes y excavaciones

$$F = \frac{c_v}{H(\gamma - \Omega^2 \gamma_L)} N_s \quad (2.22)$$

sin embargo, en este caso, el número de estabilidad no sólo refleja la geometría de la trinchera, sino que también considera la anisotropía en la resistencia al esfuerzo cortante de la arcilla.

La influencia de la sobrecarga en el factor de seguridad puede ser ponderada mediante la expresión

$$F = \frac{c_v}{H \left( \gamma - \Omega^2 \gamma_l + \frac{4Q}{2H} \right)} \left[ 2 \frac{c_T}{c_v} + 0.94 \frac{H}{L} \right] \quad (2.23)$$

donde Q = sobrecarga uniformemente repartida que actúa dentro del área de la traza superior del prisma de falla, en kPa.

#### ADAPTACIÓN DEL CRITERIO NORUEGO DE AAS (SANTOYO, 1996)

Para aprovechar la experiencia noruega conviene establecer una comparación cualitativa de esas peculiares arcillas con las de México. Al respecto, se puede establecer que:

- Las arcillas de Oslo son tan blandas como las de la ciudad de México, pero presentan menor plasticidad y mayor peso volumétrico.
- Asumiendo que el peso volumétrico de las de Oslo es del orden de 1.4 veces más grande, y su resistencia similar, se puede aceptar que las de México deben ser potencialmente más estables en condiciones similares.
- A lo anterior se debe agregar que las arcillas noruegas son muy sensitivas; esto es, fácilmente pierden su resistencia aún con deformaciones pequeñas.
- Considerando que en las arcillas sensitivas de Oslo los tiempos de falla varían entre 2 y 10 horas, se puede establecer que en las de México ocurrirá en tiempos mucho mayores.

La ec 2.21 puede ser modificada para las características del subsuelo de la ciudad de México, aceptando como significativa la resistencia no drenada medida en prueba triaxial rápida de compresión y que la relación  $\frac{c_T}{c_v}$  para tomar en cuenta

la anisotropía, es igual a la unidad, ya que en el caso de las arcillas de México la resistencia medida con veleta es mayor que la medida en la prueba triaxial (Santoyo, 1969). Bajo estas consideraciones el factor de seguridad se puede expresar como

sin embargo, en este caso, el número de estabilidad no sólo refleja la geometría de la trinchera, sino que también considera la anisotropía en la resistencia al esfuerzo cortante de la arcilla.

La influencia de la sobrecarga en el factor de seguridad puede ser ponderada mediante la expresión

$$F = \frac{c_v}{H \left( \gamma - \Omega^2 \gamma_l + \frac{4Q}{2H} \right)} \left[ 2 \frac{c_T}{c_v} + 0.94 \frac{H}{L} \right] \quad (2.23)$$

donde Q = sobrecarga uniformemente repartida que actúa dentro del área de la traza superior del prisma de falla, en kPa.

#### ADAPTACIÓN DEL CRITERIO NORUEGO DE AAS (SANTOYO, 1996)

Para aprovechar la experiencia noruega conviene establecer una comparación cualitativa de esas peculiares arcillas con las de México. Al respecto, se puede establecer que:

- Las arcillas de Oslo son tan blandas como las de la ciudad de México, pero presentan menor plasticidad y mayor peso volumétrico.
- Asumiendo que el peso volumétrico de las de Oslo es del orden de 1.4 veces más grande, y su resistencia similar, se puede aceptar que las de México deben ser potencialmente más estables en condiciones similares.
- A lo anterior se debe agregar que las arcillas noruegas son muy sensitivas; esto es, fácilmente pierden su resistencia aún con deformaciones pequeñas.
- Considerando que en las arcillas sensitivas de Oslo los tiempos de falla varían entre 2 y 10 horas, se puede establecer que en las de México ocurrirá en tiempos mucho mayores.

La ec 2.21 puede ser modificada para las características del subsuelo de la ciudad de México, aceptando como significativa la resistencia no drenada medida en prueba triaxial rápida de compresión y que la relación  $\frac{c_T}{c_v}$  para tomar en cuenta la anisotropía, es igual a la unidad, ya que en el caso de las arcillas de México la resistencia medida con veleta es mayor que la medida en la prueba triaxial (Santoyo, 1969). Bajo estas consideraciones el factor de seguridad se puede expresar como

$$F = \frac{c_T}{H(\gamma - \Omega^2 \gamma_L)} \left[ 2 + 0.94 \frac{H}{L} \right] \quad (2.24)$$

Nuevamente la influencia de la sobrecarga en el factor de seguridad puede ser ponderada mediante la expresión

$$F = \frac{c_T}{H\left(\gamma - \Omega^2 \gamma_L + \frac{4Q}{2H}\right)} \left[ 2 + 0.94 \frac{H}{L} \right] \quad (2.25)$$

### 2.3.2.3 CRITERIO DE ALBERRO Y AUVINET (1984)

Este criterio considera una trinchera de largo L y ancho B y revisa las condiciones de estabilidad de una masa prismática truncada por un plano de deslizamiento a 45°, tal como lo muestra la siguiente figura.

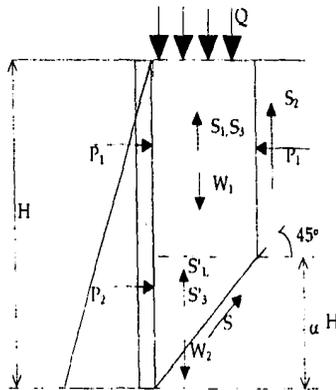


Fig 2.19 Análisis de estabilidad, criterio de Alberro y Auvinet.

Se distinguen tres casos:

#### a) COHESIÓN DEL TERRENO CONSTANTE SIN SOBRECARGA

En este caso las fuerzas a tomar en cuenta para el análisis de estabilidad de la masa de interés son, considerando un factor de seguridad F:

$$W_1 = \alpha HL(H - \alpha H)\gamma \quad (2.26)$$

$$S_1 + S_2 + S_3 = (2\alpha H + L)(H - \alpha H) \frac{c}{F} \quad (2.27)$$

$$P_1 = \frac{\gamma L}{2} [2H^2\alpha - H^2\alpha^2] \quad (2.28)$$

$$S'_1 + S'_3 = \alpha^2 H^2 \frac{c}{F} \quad (2.29)$$

$$S = \alpha H \sqrt{2L} \frac{c}{F} \quad (2.30)$$

$$W_2 = \frac{\alpha^2 H^2}{2} L \gamma \quad (2.31)$$

La ecuación de equilibrio se escribe como

$$P_1 = (W_1 + W_2) - (S_1 + S_2 + S_3 + S'_1 + S'_3 + S\sqrt{2}) \quad (2.32)$$

Sustituyendo las variables anteriores por sus valores y aislando el factor de seguridad se obtiene

$$F = \frac{2c}{(\gamma - \gamma_l)H} \left[ \frac{1 + \alpha}{\alpha(2 - \alpha)} + \frac{H}{L} \right] \quad (2.33)$$

El factor de seguridad mínimo se obtiene cuando  $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$ , lo que conduce a

$$F_{\min} = \frac{2c}{(\gamma - \gamma_l)H} \left[ 1.87 + \frac{H}{L} \right] \quad (2.34)$$

donde

$\gamma$  = Peso volumétrico del suelo.

$\gamma_l$  = Peso volumétrico del lodo.

$c$  = Cohesión del suelo.

**b) COHESIÓN CONSTANTE CON SOBRECARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA Q EN LA SUPERFICIE**

Procediendo de la misma forma se obtiene

$$F = 2c \frac{L(1+\alpha) + \alpha H(2-\alpha)}{(\gamma - \gamma_L)HL\alpha(2-\alpha) + 2Q\alpha L} \quad (2.35)$$

que presenta un mínimo cuando

$$\alpha = \frac{-2(\gamma - \gamma_L) + \sqrt{12(\gamma - \gamma_L)^2 + 8\left[(\gamma - \gamma_L)Q\left(\frac{1}{H} - \frac{2}{L}\right) - \frac{2Q^2}{LH}\right]}}{2(\gamma - \gamma_L) - 4\frac{Q}{L}} \quad (2.36)$$

donde Q = sobrecarga uniformemente distribuida, expresada en kPa.

**c) COHESIÓN VARIABLE CON LA PROFUNDIDAD Y SOBRECARGA EN LA SUPERFICIE**

Se acepta en lo que sigue que:

- La cohesión que puede desarrollarse en planos de falla verticales puede estimarse a partir de la resistencia al corte medida con veleta ( $c_v$ ).
- La cohesión que puede desarrollarse en un plano de falla inclinado a 45° puede estimarse a partir de la resistencia al corte medida en prueba triaxial no drenada ( $c_T$ ).
- Ambas cohesiones presentan una variación lineal con la profundidad.
- Se conocen las cohesiones medidas con veleta ( $c_v$ ) y en ensaye triaxial ( $c_T$ ) a la profundidad H.

En estas condiciones se tiene:

- Cohesión media en las paredes verticales del prisma

$$c = c_v \frac{1-\alpha}{2} \quad (2.37)$$

**b) COHESIÓN CONSTANTE CON SOBRECARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA Q EN LA SUPERFICIE**

Procediendo de la misma forma se obtiene

$$F = 2c \frac{L(1+\alpha) + \alpha H(2-\alpha)}{(\gamma - \gamma_L)HL\alpha(2-\alpha) + 2Q\alpha L} \quad (2.35)$$

que presenta un mínimo cuando

$$\alpha = \frac{-2(\gamma - \gamma_L) + \sqrt{12(\gamma - \gamma_L)^2 + 8\left[(\gamma - \gamma_L)Q\left(\frac{1}{H} - \frac{2}{L}\right) - \frac{2Q^2}{LH}\right]}}{2(\gamma - \gamma_L) - 4\frac{Q}{L}} \quad (2.36)$$

donde Q = sobrecarga uniformemente distribuida, expresada en kPa.

**c) COHESIÓN VARIABLE CON LA PROFUNDIDAD Y SOBRECARGA EN LA SUPERFICIE**

Se acepta en lo que sigue que:

- La cohesión que puede desarrollarse en planos de falla verticales puede estimarse a partir de la resistencia al corte medida con veleta ( $c_v$ ).
- La cohesión que puede desarrollarse en un plano de falla inclinado a 45° puede estimarse a partir de la resistencia al corte medida en prueba triaxial no drenada ( $c_T$ ).
- Ambas cohesiones presentan una variación lineal con la profundidad.
- Se conocen las cohesiones medidas con veleta ( $c_v$ ) y en ensaye triaxial ( $c_T$ ) a la profundidad H.

En estas condiciones se tiene:

- Cohesión media en las paredes verticales del prisma

$$c = c_v \frac{1-\alpha}{2} \quad (2.37)$$

- Cohesión media en las paredes verticales de la cuña

$$c = c_v \frac{2 - \alpha}{2} \quad (2.38)$$

- Cohesión media en el plano de deslizamiento inclinado a 45°

$$c = c_T \frac{2 - \alpha}{2} \quad (2.39)$$

Se puede establecer que

$$P_2 + W_1 + W_2 + Q\alpha HL = \gamma_1 L \left[ H^2 \alpha - \frac{H^2 \alpha^2}{2} \right] + \gamma L \left[ \alpha H^2 - \frac{\alpha^2 H^2}{2} \right] + Q\alpha HL \quad (2.40)$$

$$S'_1 + S'_3 = \alpha^2 H^2 \frac{c_v}{2F} (2 - \alpha) \quad (2.41)$$

$$S = \frac{\alpha H}{\sqrt{2}} \frac{c_T}{F} L (2 - \alpha) \quad (2.42)$$

Escribiendo nuevamente la ecuación de equilibrio y aislando el factor de seguridad se obtiene

$$F = \frac{c_v [(2\alpha H + L)(1 - \alpha)^2 + \alpha^2 H(2 - \alpha)] + c_T [2\alpha L(2 - \alpha)]}{(\gamma - \gamma_1) L \alpha H(2 - \alpha) + 2Q\alpha L} \quad (2.43)$$

Nuevamente el factor de seguridad mínimo se obtiene cuando  $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$ . Para plantear la derivada se establece que

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v}{v^2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{u}{v^2} \frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0 \quad (2.44)$$

donde

$$u = c_v [(2\alpha H + L)(1 - \alpha)^2 + \alpha^2 H(2 - \alpha)] + c_T [2\alpha L(2 - \alpha)] \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = c_v [H(3\alpha^2 - 4\alpha + 2) + 2L(\alpha - 1)] + c_T [4L(1 - \alpha)] \quad (2.46)$$

$$v = (\gamma - \gamma_{l.}) L\alpha H(2 - \alpha) + 2Q\alpha L \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = (\gamma - \gamma_{l.}) LH(2 - 2\alpha) + 2QL \quad (2.48)$$

La solución de la ec 2.44 por métodos analíticos es una tarea formidable, por lo que se recurre a la solución numérica aplicando el método de aproximaciones sucesivas (Luthe *et al*, 1991) para hallar el valor de  $\alpha$  que minimiza al factor de seguridad de la excavación.

d) MODIFICACIÓN AL CRITERIO DE ALBERRO Y AUVINET PARA CONSIDERAR NIVEL DEL LODO VARIABLE EN LA TRINCHERA

El análisis efectuado en el inciso anterior puede ser modificado para considerar nivel del lodo variable en la trinchera. Las fuerzas actuantes en la cuña se observan en la fig 2.20.

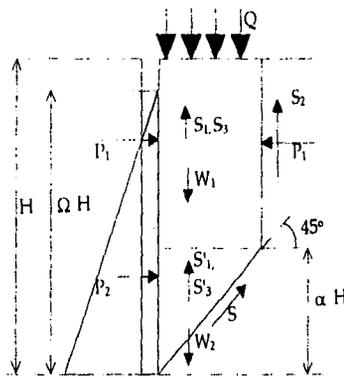


Fig 2.20 Criterio modificado de Alberro y Auvinet.

El factor de seguridad mínimo se obtiene cuando  $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$ . Para plantear la derivada nuevamente se establece que

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{\partial u}{\partial \alpha} - u \frac{\partial v}{\partial \alpha}}{v^2} = 0 \quad (2.49)$$

donde

$$u = c_v [(2\alpha H + L)(1 - \alpha)^2 + \alpha^2 H(2 - \alpha)] + c_T [2\alpha L(2 - \alpha)] \quad (2.50)$$

$$v = (\gamma - \gamma_t) L \alpha H (2 - \alpha) + 2Q \alpha L \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = (\gamma - \gamma_t) L H (2 - 2\alpha) + 2QL \quad (2.48)$$

La solución de la ec 2.44 por métodos analíticos es una tarea formidable, por lo que se recurre a la solución numérica aplicando el método de aproximaciones sucesivas (Luthe *et al*, 1991) para hallar el valor de  $\alpha$  que minimiza al factor de seguridad de la excavación.

d) MODIFICACIÓN AL CRITERIO DE ALBERRO Y AUVINET PARA CONSIDERAR NIVEL DEL LODO VARIABLE EN LA TRINCHERA

El análisis efectuado en el inciso anterior puede ser modificado para considerar nivel del lodo variable en la trinchera. Las fuerzas actuantes en la cuña se observan en la fig 2.20.

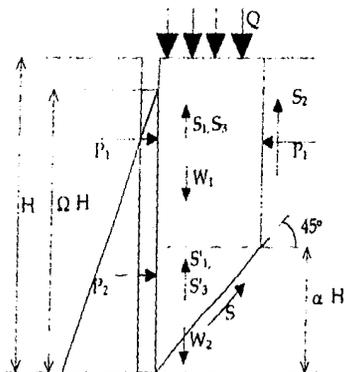


Fig 2.20 Criterio modificado de Alberro y Auvinet.

El factor de seguridad mínimo se obtiene cuando  $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$ . Para plantear la derivada nuevamente se establece que

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{\partial u}{\partial \alpha} - u \frac{\partial v}{\partial \alpha}}{v^2} = 0 \quad (2.49)$$

donde

$$u = c_v [(2\alpha H + L)(1 - \alpha)^2 + \alpha^2 H (2 - \alpha)] + c_t [2\alpha L (2 - \alpha)] \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = c_v \left[ 2H(1-\alpha)^2 - 2(1-\alpha)(2\alpha H + L) - \alpha^2 H + 2\alpha H(2-H) \right] + c_T [2L(2-\alpha) - 2\alpha L] \quad (2.51)$$

$$v = H\alpha^2 L \left[ \gamma_L - \gamma - \frac{2(\Omega\gamma_L - \gamma)}{\alpha} + \frac{2Q}{H\alpha} \right] \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = H\alpha^2 L \left[ \frac{2(\Omega\gamma_L - \gamma)}{\alpha^2} - \frac{2Q}{H\alpha^2} \right] + 2H\alpha L \left[ \gamma_L - \gamma - \frac{2(\Omega\gamma_L - \gamma)}{\alpha} + \frac{2Q}{H\alpha} \right] \quad (2.53)$$

Como en el caso anterior, se recurre a la solución numérica de la ec 2.49 para encontrar el valor de  $\alpha$  que minimiza al factor de seguridad de la trinchera.

### 2.3.2.4 FALLA DE FONDO DE LA EXCAVACIÓN

El incremento del esfuerzo de compresión sobre el fondo de la excavación ya realizada es (fig 2.21)

$$\sigma_1 - \sigma_1' = H\gamma + Q - \Omega H\gamma_L \quad (2.54)$$

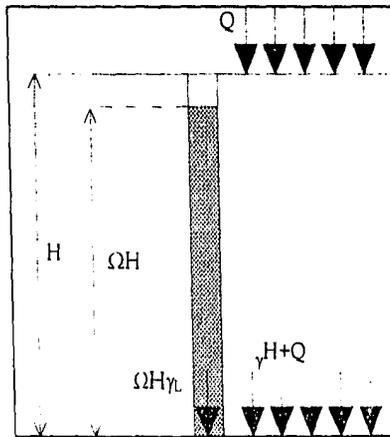


Fig 2.21 Esfuerzos en el fondo de la excavación.

De acuerdo al criterio de Skempton, el fondo es estable en las condiciones siguientes

$$H\gamma + Q - \Omega H\gamma_L < 5.14 c_T \quad (2.55)$$

es decir, cuando

$$H < \frac{5.14 c_T - Q}{\gamma - \Omega \gamma_L} \quad (2.56)$$

De esta manera es posible establecer el factor de seguridad contra falla de fondo como

$$F = \frac{5.14 c_T}{H(\gamma - \Omega \gamma_L) + Q} \quad (2.57)$$

### 2.3.3 ESTABILIDAD DE TRINCHERAS EN SUELOS FRICCIONANTES

#### 2.3.3.1 CRITERIO DE NASH Y JONES (1963)

El método de análisis presentado por estos autores para suelos cohesivos se puede extender a suelos secos friccionantes.

De manera análoga al análisis antes realizado, la fig 2.22 permite analizar el equilibrio de la trinchera.

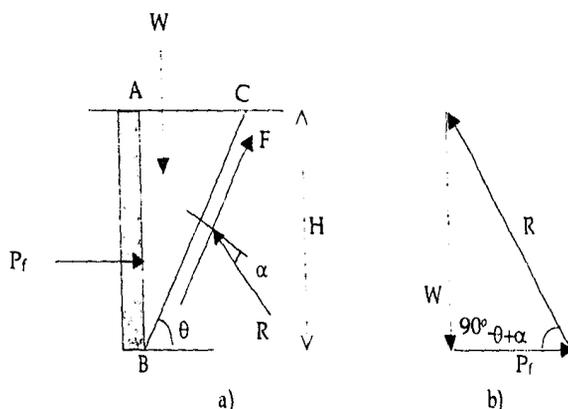


Fig 2.22 Solución de Nash y Jones para suelos friccionantes.

Nuevamente

$$W = \frac{1}{2} \gamma H^2 \tan(90^\circ - \theta) \quad (2.58)$$

$$P_r = \frac{1}{2} \gamma_L H^2 \quad (2.59)$$

donde  $\gamma$  y  $\gamma_L$  son los pesos volumétricos del suelo y del lodo, respectivamente.

es decir, cuando

$$H < \frac{5.14 c_T - Q}{\gamma - \Omega \gamma_L} \quad (2.56)$$

De esta manera es posible establecer el factor de seguridad contra falla de fondo como

$$F = \frac{5.14 c_T}{H(\gamma - \Omega \gamma_L) + Q} \quad (2.57)$$

### 2.3.3 ESTABILIDAD DE TRINCHERAS EN SUELOS FRICCIONANTES

#### 2.3.3.1 CRITERIO DE NASH Y JONES (1963)

El método de análisis presentado por estos autores para suelos cohesivos se puede extender a suelos secos friccionantes.

De manera análoga al análisis antes realizado, la fig 2.22 permite analizar el equilibrio de la trinchera.

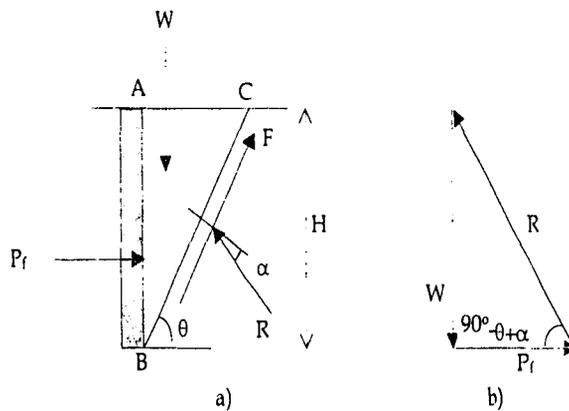


Fig 2.22 Solución de Nash y Jones para suelos friccionantes.

Nuevamente

$$W = \frac{1}{2} \gamma H^2 \tan(90^\circ - \theta) \quad (2.58)$$

$$P_f = \frac{1}{2} \gamma_L H^2 \quad (2.59)$$

donde  $\gamma$  y  $\gamma_L$  son los pesos volumétricos del suelo y del lodo, respectivamente.

Por tanto

$$\frac{W}{P_f} = \tan[90^\circ - (\theta - \alpha)] = \frac{\frac{1}{2} \gamma H^2 \tan(90^\circ - \theta)}{\frac{1}{2} \gamma_L H^2} \quad (2.60)$$

Dado que  $\alpha$  es máximo cuando  $\theta = \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)$ , para el plano más crítico

$$\frac{\gamma}{\gamma_L} \tan\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \tan\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \quad (2.61)$$

$$\tan \alpha = \frac{\gamma - \gamma_L}{2\sqrt{\gamma \cdot \gamma_L}} \quad (2.62)$$

Si se define al factor de seguridad  $F$  como

$$F = \frac{\tan \phi_d}{\tan \alpha} \quad (2.63)$$

$$F = \frac{2\sqrt{\gamma \cdot \gamma_L} \tan \phi_d}{\gamma - \gamma_L} \quad (2.64)$$

con  $\phi_d$  = ángulo de fricción interna de la arena seca. Se observa que para este tipo de suelos no existe altura crítica si se supone falla simple de cuña, permaneciendo el factor de seguridad constante con la profundidad.

### 2.3.3.2 CRITERIO DE NASH Y JONES PARA ARENAS SATURADAS (1963)

Si la arena se encuentra saturada, con el NAF superficial, el soporte efectivo de la membrana se reduce considerablemente. En este caso el peso específico de la arena se transforma en  $\gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w$  y la capacidad de soporte del lodo se transforma en la diferencia entre las presiones del lodo y del agua. Por tal motivo, para arenas saturadas:

$$F = \frac{2\sqrt{\gamma' - \gamma'_l} \tan \phi_d}{\gamma' - \gamma'_l} \quad (2.65)$$

En los dos casos antes analizados, el tratamiento bidimensional del problema desprecia el efecto de arqueado que ocurre en las trincheras cortas, proporcionando resultados ligeramente erróneos del lado de la seguridad.

2.3.3.3 CRITERIO DE MORGENSTERN Y AMIR-TAHMASSEB (1965)

A diferencia de los dos casos antes señalados, este criterio considera niveles arbitrarios de NAF y lodo, permitiendo la incorporación de factores omitidos en los análisis anteriores.

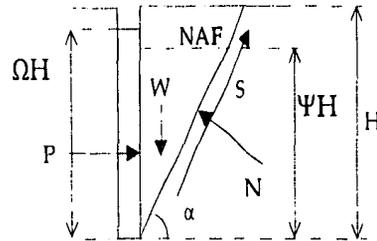


Fig 2.23 Estabilidad de la cuña deslizante.

Como se observa en la figura anterior, se supone una cuña de suelo inclinada que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal, en estado incipiente de deslizamiento, separada del lodo por medio de la membrana impermeable. La cuña tiene una altura  $H$ , y está constituida por suelo friccionante de peso específico  $\gamma$  y ángulo de fricción interna  $\phi'$ . El tirante de agua en el suelo es  $\psi H$ , mientras que el del lodo, de peso específico  $\gamma_{l,}$ , es  $\Omega H$ . En la misma figura,  $S$  denota la resistencia al esfuerzo cortante a lo largo de la base de la cuña deslizante,  $N$  representa la reacción normal a la base,  $W$  simboliza el peso de la cuña y  $P$  denota la fuerza horizontal requerida para impedir el deslizamiento.

Si la cuña se encuentra en equilibrio horizontal

$$P + S \cos \alpha = N \sin \alpha \tag{2.66}$$

Ahora bien, si está en equilibrio vertical

$$W = S \sin \alpha + N \cos \alpha \tag{2.67}$$

La resistencia al esfuerzo cortante  $S$  está definida por

$$S = N' \tan \phi' = (N - U) \tan \phi' \tag{2.68}$$

donde  $N'$  es la fuerza efectiva normal al plano de deslizamiento y  $U$  denota la presión de agua actuando en dicho plano. A partir de las ecs 2.66 a 2.68 se puede demostrar que

$$P = \frac{W(\sin \alpha - \cos \alpha \tan \phi') + U \tan \phi'}{\cos \alpha + \sin \alpha \tan \phi'} \quad (2.69)$$

De igual forma

$$W = \frac{1}{2} \gamma H^2 \cot \alpha \quad (2.70)$$

$$U = \frac{1}{2} \gamma_w (\psi H)^2 \operatorname{cosec} \alpha \quad (2.71)$$

donde  $\gamma_w$  es el peso específico del agua.

La fuerza  $P_s$  del lodo actuando en la membrana impermeable es

$$P_s = \frac{1}{2} \gamma_l (\Omega H)^2 \quad (2.72)$$

Si  $P = P_s$ , para garantizar el equilibrio, entonces la expresión que define la densidad del lodo requerida para evitar el deslizamiento de la cuña está dada por

$$\Omega^2 \frac{\gamma_l}{\gamma_w} = \frac{\gamma \cot \alpha (\sin \alpha - \cos \alpha \tan \phi') + \psi^2 \operatorname{cosec} \alpha \tan \phi'}{\cos \alpha + \sin \alpha \tan \phi'} \quad (2.73)$$

Variando el ángulo  $\alpha$  en la ec 2.73, se puede encontrar la densidad máxima requerida del lodo para garantizar la estabilidad de la trinchera. En la práctica,  $\alpha$  puede adquirir un valor igual a  $45^\circ + \frac{\phi'}{2}$  sin incurrir en errores significativos.

### 2.3.3.4 CRITERIO DE PIASKOWSKI Y KOWALEWSKI (1963)

En la fig 2.24 se aprecia el modelo de falla propuesto por los autores, el cual difiere del modelo de cuña tradicional propuesto por Coulomb. Como se observa, la cuña sujeta a deslizamiento está constituida por el cilindro parabólico de generatrices verticales  $ABB'A'$ , limitado en la parte superior por la parábola  $ACA'$  y en la inferior por la superficie deslizante  $BC'B'$ , inclinada un ángulo  $\alpha$  con la horizontal.

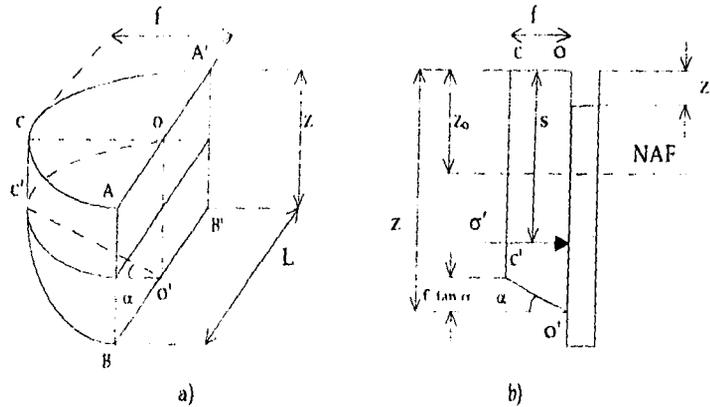


Fig 2.24 Cuña de falla: a) vista isométrica, b) corte transversal.

La geometría de la cuña de falla depende de 4 parámetros:

- Longitud L.
- Altura z.
- Ancho máximo f.
- Ángulo  $\alpha$  formado por la cuña y la horizontal.

Desde el punto de vista de la mecánica de suelos los parámetros relevantes son:

- La profundidad  $z_0$  del nivel freático.
- El peso volumétrico  $\gamma$  del suelo por encima del NAF.
- El peso volumétrico  $\gamma'$  por debajo del NAF.
- El ángulo de fricción interna del suelo.

Sin embargo, dos cantidades resultan indeterminadas: el ancho máximo de la cuña f y el ángulo  $\alpha$  que forman su base y la horizontal. Los autores, a partir de las consideraciones teóricas de equilibrio de la parábola ACA', determinan el siguiente valor de f:

$$f = \frac{L}{2} \cot \phi \tag{2.74}$$

Para evaluar  $\alpha$ , los autores retoman el razonamiento de Coulomb, calculando la presión máxima  $P'$  que la cuña ejerce sobre la trinchera para un valor dado de  $\alpha$ , determinando posteriormente el valor de  $\alpha$  con el que  $P'$  es máximo.

EQUILIBRIO DE LA CUÑA

La resultante de las diferentes fuerzas que actúan sobre la cuña se esquematiza en la fig 2.25, que es un corte por el plano OCC'O'; por razones de simetría, en efecto, la resultante de este grupo de fuerzas está contenida en este plano

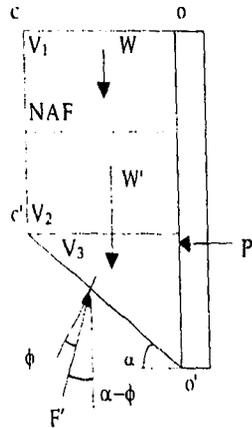


Fig 2.25 Equilibrio de la cuña de falla.

En dicha figura

$W$  = Peso de la parte de la cuña por arriba del NAF.

$W'$  = Peso de la parte sumergida de la cuña.

$P'$  = Presión ejercida por la cuña sobre la trinchera (deducción hecha de la presión hidrostática).

$F'$  = Resultante de las fuerzas de fricción sobre el plano de deslizamiento  $O'C'$ . Esta fuerza forma un ángulo  $\phi$  con la normal a dicho plano.

Resulta interesante evaluar si existen fuerzas de fricción actuando sobre las paredes laterales del cilindro parabólico que limita la cuña de falla. Los autores suponen que no, realizando de esta manera una simplificación radical.

Analizando el equilibrio de la cuña se puede establecer que

$$P' = (W + W') \tan(\alpha - \phi) \tag{2.75}$$

De esta manera se obtiene sin dificultad el valor de la presión  $P'$ . Para calcular la presión total que se ejerce sobre la trinchera, es conveniente sumar a  $P'$  la resultante de las fuerzas hidrostáticas actuantes en la altura  $z - z_0$ .

Para poder expresar  $W$  y  $W'$  en función de las dimensiones de la cuña, se establece que el área de la parábola  $OACA'$  es igual a  $\frac{2}{3}fL$ , con base en el teorema del valor medio. De esta manera se llegan a establecer las siguientes expresiones

$$W = \gamma V_1 \quad (2.76)$$

$$W' = \gamma'(V_2 + V_3) \quad (2.77)$$

además

$$V_1 = \frac{2}{3}fLz_0 \quad (2.78)$$

$$V_2 = \frac{2}{3}fL(z - z_0 - f \tan \alpha) \quad (2.79)$$

$$V_3 = \frac{2}{5}f^2L \tan \alpha \quad (2.80)$$

Finalmente se puede escribir

$$W + W' = \frac{2}{3}fL \left[ \gamma z_0 + \gamma' \left( z - z_0 - \frac{2}{5}f \tan \alpha \right) \right] \quad (2.81)$$

Introduciendo  $f = \frac{L}{2 \tan \phi}$  se obtiene

$$P' = \frac{L^3 \tan(\alpha - \phi)}{3 \tan \phi} \left[ \gamma \frac{z_0}{L} + \gamma' \left( \frac{z}{L} - \frac{z_0}{L} - \frac{1 \tan \alpha}{5 \tan \phi} \right) \right] \quad (2.82)$$

Es conveniente determinar el valor de  $\alpha$  que proporciona el valor máximo de  $P'$ . Para ello se establece que  $\frac{dP'}{d\alpha} = 0$ , resultando  $z$  constante. Con base en lo anterior se puede escribir

$$\frac{3 \tan \phi}{L^3} \frac{dP'}{d\alpha} = \left[ \gamma \frac{z_0}{L} + \gamma' \left( \frac{z}{L} - \frac{z_0}{L} - \frac{1 \tan \alpha}{5 \tan \phi} \right) \right] \frac{1}{\cos^2(\alpha - \phi)} - \gamma' \frac{\tan(\alpha - \phi)}{5 \tan \phi \cos^2 \alpha} = 0 \quad (2.83)$$

Por otro lado, denotando

$$t_o = \frac{\tan \phi z_o}{\tan \alpha L} \quad (2.84)$$

$$t = \frac{\tan \phi z}{\tan \alpha L} \quad (2.85)$$

se obtiene la siguiente simplificación

$$5 \frac{\gamma}{\gamma'} t_o + 5(t - t_o) - 1 = \frac{\text{sen } 2(\alpha - \phi)}{\text{sen } 2\alpha} \quad (2.86)$$

Esta ecuación define  $\alpha$  de manera implícita, dado que  $t$  y  $t_o$  dependen de  $\alpha$ . Para su resolución cómoda por aproximaciones sucesivas, los autores se valen de las siguientes transformaciones

$$A = 5 \frac{\gamma}{\gamma'} t_o + 5(t - t_o) - 1 \quad (2.87)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \quad (2.88)$$

por tanto, la ecuación que define  $\alpha$  se puede escribir como

$$A = \frac{\text{sen } 2(\alpha - \phi)}{\text{sen } 2\alpha} = \cos 2\phi + \text{sen } 2\phi \tan \theta \quad (2.89)$$

$$\tan \theta = \frac{A - 1}{\text{sen } 2\phi} + \tan \phi \quad (2.90)$$

La manera de proceder para el cálculo de  $\alpha$  es la siguiente: se elige un primer valor de  $\alpha$  y se calculan sucesivamente  $t$ ,  $t_o$  y  $A$  (ec 2.87). Finalmente la ec 2.89 proporciona un nuevo valor de  $\alpha$ . La convergencia con este procedimiento es rápida.

#### COEFICIENTE DE PRESIÓN DEL SUELO

Para determinar la estabilidad de la trinchera, los autores verifican en toda su profundidad la desigualdad

$$\gamma_b = (z - z_1) \geq \sigma'(z) + \gamma_w(z - z_o) \quad (2.91)$$

Esta manera de proceder obliga a calcular la distribución de  $\sigma'(z)$  a partir de la expresión que define  $P'$ . Para ello se puede establecer que

$$\frac{P'}{L} = \int_0^z \sigma'(s) ds \quad (2.92)$$

Para calcular  $\sigma'(z)$  se deriva la expresión anterior

$$\frac{1}{L} \frac{dP'}{dz} = \sigma'(z) \quad (2.93)$$

De la expresión de  $P'$  considerada como una función de 2 variables,  $z$  y  $\alpha$ , se establece que

$$\frac{dP'}{dz} = \frac{\partial P'}{\partial z} + \frac{\partial P'}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dz} \quad (2.94)$$

pero como  $\alpha$  se determina de tal manera de anular  $\frac{\partial P'}{\partial \alpha}$ , resulta que

$$\sigma'(z) = \frac{1}{L} \frac{dP'}{dz} = \frac{1}{L} \frac{\partial P'}{\partial z} = \gamma' \frac{L \tan(\alpha - \phi)}{3 \tan \phi} \quad (2.95)$$

Los autores han realizado un gran número de cálculos con la expresión anterior, variando todos sus parámetros. Con base en esa experiencia y para facilitar la presentación de los resultados establecen la siguiente ecuación

$$\sigma'(z) = K'_a \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\gamma'}{\gamma} \right) k \right] \gamma z \quad (2.96)$$

donde  $k = 0$  cuando  $z \leq z_o$ , y  $k = 1 - \frac{z_o}{z}$  cuando  $z > z_o$ .

Sustituyendo se obtiene

$$\sigma'(z) = K'_a \gamma z, \text{ cuando } z \leq z_o \quad (2.97)$$

y

$$\sigma'(z) = K'_a \left[ \gamma z_o + \gamma'(z - z_o) \right], \text{ cuando } z > z_o \quad (2.98)$$

La expresión literal para evaluar  $K'_a$  se deduce al igualar las dos expresiones de  $\sigma'(z)$  determinadas anteriormente

$$\sigma'(z) = \gamma' \frac{L \tan(\alpha - \phi)}{3 \tan \phi} = K'_a \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\gamma'}{\gamma} \right) k \right] \gamma z \quad (2.99)$$

despejando se obtiene

$$K'_a = \frac{1}{3} \frac{L \tan(\alpha - \phi)}{z \tan \phi} \frac{\frac{\gamma'}{\gamma}}{1 - \left( 1 - \frac{\gamma'}{\gamma} \right) k} \quad (2.100)$$

En consecuencia, el valor del coeficiente de presión  $K'_a$  al igual que el valor del ángulo  $\alpha$ , dependen de los parámetros  $\frac{z}{L}$ ,  $\phi$ ,  $\frac{\gamma'}{\gamma}$  y  $\frac{z}{z_0}$ .

La ecuación anterior es válida sólo si se cumple la siguiente condición geométrica

$$\frac{z}{L} - \frac{1 \tan \alpha}{2 \tan \phi} \geq \frac{z_0}{L} \geq 0 \quad (2.101)$$

Los cálculos de los autores han mostrado que la influencia de los parámetros  $\frac{\gamma'}{\gamma}$  y  $\frac{z}{z_0}$  queda bien representada por el factor  $\left[ 1 - \left( 1 - \frac{\gamma'}{\gamma} \right) k \right]$ . Tomando en cuenta esta observación, el coeficiente de presión  $K'_a$  depende únicamente de los parámetros  $\frac{z}{L}$  y  $\phi$ . La siguiente tabla precisa los valores numéricos de  $K'_a$ .

$z/L \backslash \phi$	25°	30°	35°	40°
0.00	0.406	0.333	0.271	0.218
0.50	0.375	0.307	0.246	0.196
1.00	0.346	0.277	0.221	0.173
2.00	0.286	0.221	0.170	0.129
4.00	0.201	0.145	0.107	0.079
6.00	0.152	0.108	0.077	0.055
8.00	0.124	0.087	...	...

Tabla 2.4 Coeficientes de presión de suelo de Kowalewski y Piaskowski.

ESTABILIDAD DE LA TRINCHERA

Considerando las presiones del lodo, de tierra y del agua, la condición de equilibrio en la trinchera se establece por medio de la siguiente ecuación

$$\gamma_L(z - z_1) \geq K'_a \gamma z + \gamma_w(z - z_o) \tag{2.102}$$

por tanto

$$K'_a \gamma z \leq (\gamma_L - \gamma_w)z + (\gamma_w z_o - \gamma_L z_1) \tag{2.103}$$

donde  $\gamma_L$  y  $\gamma_w$  representan los pesos específicos del lodo y agua respectivamente.

Para apreciar las condiciones en que esta desigualdad se verifica, se pueden trazar las curvas de variación de sus dos miembros:

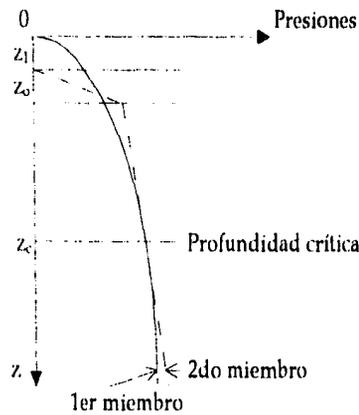


Fig 2.26 Diagrama de presiones en la trinchera.

De esta manera se puede determinar el valor mínimo de  $\gamma_L$  que garantiza el equilibrio.

Se ha observado que la aplicación de esta teoría en trincheras donde  $5m < L < 20 m$ , proporciona densidades de lodo comprendidas en el intervalo de 1.02 a 1.1.

Los autores sugieren la utilización del factor de seguridad determinado por la ecuación

$$F = \frac{\gamma_L(z_c - z_1) - \gamma_w(z_c - z_o)}{\gamma'_L(z_c - z_1) - \gamma_w(z_c - z_o)} \tag{2.104}$$

Para finalizar, se puede establecer que el factor más importante en el cálculo de la estabilidad de trincheras en suelos friccionantes es la posición del NAF ( $z_0$ ), más aún que el ángulo de fricción interna del suelo ( $\phi$ ) o que la longitud de la trinchera ( $L$ ). La experiencia de los autores en los últimos años muestra que, en excavaciones cuya profundidad varía entre  $L$  y  $2L$ , los riesgos de falla son mínimos, siempre y cuando la relación  $\frac{z_0}{L}$  sea superior a 0.2. En caso de que esta relación sea inferior a 0.1 la estabilidad de la trinchera resulta seriamente comprometida.

### 2.3.4 FRACTURAMIENTO HIDRÁULICO INDUCIDO DURANTE LA CONSTRUCCIÓN DE UN MURO MILÁN EN LA CIUDAD DE MÉXICO

#### 2.3.4.1 NATURALEZA DEL FENÓMENO (SANTOYO ET AL, 1987)

Este fenómeno se puede describir como la activación de las fisuras preexistentes en las arcillas, provocada por el exceso de presión hidrostática que se desarrolla cuando el nivel del lodo queda por arriba del nivel de aguas freáticas; este fenómeno se manifiesta por un descenso brusco del nivel del lodo que a su vez provoca la disminución del factor de seguridad y la eventual falla de la trinchera. Este mismo problema se presenta en la ejecución de sondeos y se le ha dado la solución trivial de mantener el nivel del lodo próximo al nivel freático (COVITUR, 1985). Conviene agregar que este fenómeno ocurre con más frecuencia cuando se introduce el concreto, ya que se trata de un fluido con densidad 2.4, por lo que es más capaz de activar las fisuras; así el concreto expande la excavación y penetra horizontalmente. Cuando esto sucede, se incrementa sin ningún control el consumo de concreto y se deforma la parte inferior del muro; esta deformación no siempre puede observarse, porque frecuentemente queda por debajo del nivel de excavación. Algunos autores (Rodríguez, 1996) consideran que, en México, el problema del fracturamiento hidráulico inducido durante la construcción del muro milán no ha sido reportado frecuentemente y que de hecho no se sabe a ciencia cierta si los incrementos en el consumo de lodo primero y de concreto después durante la construcción del muro milán se deben precisamente a este fenómeno, ya que debido a su poca frecuencia no se han llevado a cabo investigaciones al respecto. Sin embargo consideramos conveniente revisar los criterios existentes al respecto.

2.3.4.2 CRITERIO DE ALBERRO Y HERNÁNDEZ (1990)

Este criterio se basa en el análisis del estado de esfuerzos producto de las fuerzas de filtración a través de una discontinuidad (fractura) de ancho  $2a$ , en contacto plano y vertical con una masa de suelo por la que transita agua con presión  $H\gamma_w$ , donde el plano de contacto es una superficie de flujo (fig 2.27). Los autores analizan dos casos particulares de interés para comprender el fenómeno de fracturamiento hidráulico en trincheras para muros milán.

El primer caso considera una grieta en contacto directo con una masa de suelo homogéneo (fig 2.27). La solución a este caso impone un esfuerzo efectivo de tensión horizontal a lo largo del eje de simetría  $x$  igual a

$$\left(\bar{n}_y\right)_{y=0} = \frac{H\gamma_w}{\pi} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{2 \cos^2 \alpha} (4\alpha - \text{sen } 4\alpha) \tag{2.105}$$

con  $\frac{a}{x} = \tan\alpha$ ;  $\lambda$  y  $\mu$  = coeficientes de Lamé.

Este esfuerzo es de tensión, sea cual sea la coordenada  $x$ , como se aprecia en la ecuación anterior. Se genera, por tanto, fracturamiento hidráulico en la vertical de la junta, siempre que el estado de esfuerzos resultante de la superposición del generado por el flujo de agua y aquel de la masa de suelo antes de excavar la trinchera sea de tensión.

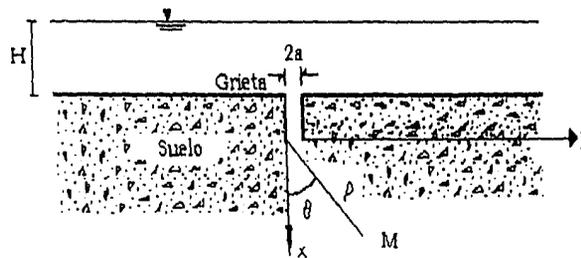


Fig 2.27 Grieta en contacto directo con la masa de suelo.

El segundo caso supone la existencia de una grieta en contacto directo con un dren, encima de la cual actúa una lámina de agua de altura  $H$  (fig 2.28). Es posible establecer (Alberro y Hernández, 1990) que el estado de esfuerzos generado por el flujo de agua es hidrostático de compresión

$$\begin{aligned} \bar{n}_x = \bar{n}_y &= \frac{H\gamma_w}{\pi} (\alpha - \pi) \\ t_{xy} &= 0 \end{aligned} \tag{2.106}$$

Resulta sorprendente constatar que la introducción del dren en la masa de suelo adyacente a la grieta elimina por completo los esfuerzos de tensión y los riesgos de fracturamiento hidráulico que se presentan en su ausencia.

Los resultados basados en este criterio señalan la dificultad de predecir el eventual fracturamiento hidráulico inducido durante la construcción de un muro milán en la ciudad de México. En efecto, dependiendo de la estratigrafía del subsuelo, de la cercanía del extremo inferior de la excavación y de las condiciones de abatimiento de las presiones intersticiales en la masa, la situación se asemejará a la de una discontinuidad sin dren o con él. Los resultados, en cuanto a fracturamiento hidráulico se refiere, son diametralmente opuestos.

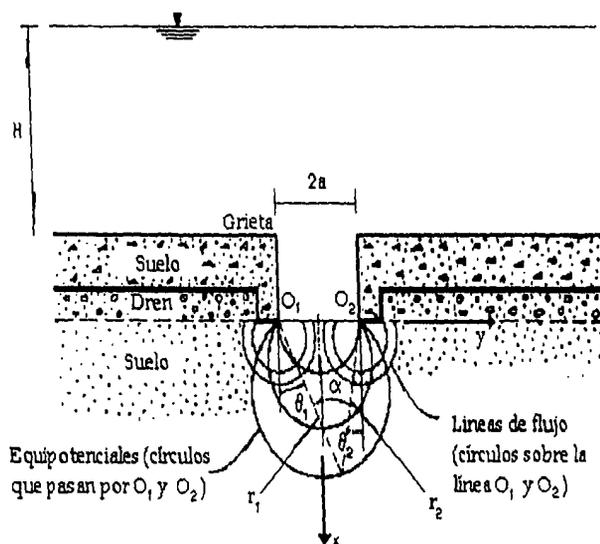


Fig 2.28 Dren en la masa de suelo adyacente a la grieta.

### 2.3.4.3 CRITERIO DE AUVINET Y ARIAS (1991)

Este criterio se basa en la mecánica de fracturas lineal clásica y considera que la falla se presenta cuando el estado de esfuerzos local en la punta de una fisura natural o artificial (en nuestro caso la misma trinchera) alcanza condiciones críticas a partir de las cuales se presenta la propagación.

Es conveniente recordar brevemente los principales conceptos de la mecánica de fracturas lineal. Siguiendo, por ejemplo Hellan (1984), es posible determinar el estado de esfuerzos en una grieta limitada por dos superficies planas concurrentes que forman entre sí un ángulo  $2\alpha$  (fig 2.29), obteniendo el siguiente conjunto de ecuaciones en coordenadas cartesianas, conocidas como ecuaciones de Westergaard (Kobayashi, 1973)

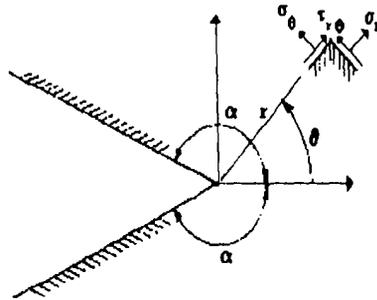


Fig 2.29 Esfuerzos alrededor de una grieta.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_r \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} 1 - \text{sen} \frac{\theta}{2} & \text{sen} \frac{3\theta}{2} \\ \text{sen} \frac{\theta}{2} & \text{sen} \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \text{sen} \frac{\theta}{2} & \cos \frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

donde  $K_I$  es el llamado *factor de intensidad de esfuerzos*, con dimensión  $\text{kN}/\text{m}^{3/2}$ .

El criterio de propagación es simplemente

$$K_I = K_{Ic} \quad (2.108)$$

donde  $K_{Ic}$  es el factor de intensidad de esfuerzos crítico, el cual puede determinarse por el procedimiento de prueba normalizado existente (ASTM E399-78). Al respecto, Lee (1988) reporta un factor de intensidad de esfuerzos críticos con valor de  $12.7 \text{ kN}/\text{m}^{3/2}$  para una arcilla blanda con  $LL = 117\%$ ,  $LP = 55\%$  y  $w = 40\%$ . Sin embargo, la obtención de dicho factor en los casos en que las condiciones geométricas y de carga no son sencillas requiere la aplicación de métodos numéricos como el del elemento finito.

Los análisis de casos de propagación de grietas en el subsuelo de la ciudad de México por presiones hidráulicas internas muestran que el llenado de grietas superficiales con agua arriba del nivel freático es suficiente para provocar su propagación, lo que conduce a establecer que la propagación ocurre si el valor del parámetro  $K_I$  es superior a un valor  $K_{Ic}$  del orden de  $19 \text{ kN}/\text{m}^{3/2}$ . Este valor es del mismo orden de magnitud que el reportado por Lee (1988). No existen valores disponibles de  $K_{Ic}$  determinados en laboratorio para las arcillas del valle de México. Es necesario iniciar un programa de investigación experimental para la obtención de este parámetro y el estudio de los factores que lo afectan.

En un segundo análisis se modeló un posible encharcamiento de agua después de lluvias intensas y se consideró un tirante de agua de 1 m por encima de la superficie libre del suelo; en este caso se obtuvo un valor de  $K_1 = 25.51 \text{ kN/m}^{3/2}$ , sensiblemente mayor que el de  $K_{1C}$  estimado anteriormente, lo que significa que la grieta se propaga dentro del medio con mayor facilidad en estas condiciones.

De esta forma la mecánica de fracturas permite abordar el problema de fracturamiento hidráulico inducido durante la construcción de un muro milán. Esta teoría, aún poco difundida entre los geotecnistas (Vallejo y Liang, 1994), permite analizar este problema en términos de ciertas propiedades del suelo como el factor de intensidad de esfuerzos crítico  $K_{1C}$ ; además, establece que uno de los mecanismos de propagación de grietas es la generación de tensiones en la punta de fracturas preexistentes por el efecto del empuje hidrostático del agua que se llega a acumular bruscamente en las mismas, por ejemplo, durante fuertes lluvias. Resulta evidente, por tanto, que el llenado de la trinchera con lodo o algún otro fluido estabilizador favorece la propagación de grietas preexistentes o generadas durante la excavación (incluyendo la propia trinchera), sobre todo en casos típicos donde se tienen diferencias de tirantes de lodo y agua freática mayores a 1.5 m.

De lo anteriormente expuesto es posible establecer que el marco teórico analizado no permite actualmente el establecimiento de una ecuación de estado límite que estime la seguridad de trincheras ante el riesgo de fracturamiento hidráulico, ya que este fenómeno depende en gran medida de la existencia previa de grietas en la masa de suelo o de su aparición durante el proceso de excavación, y del estado de esfuerzos en las mismas. Sin embargo, el citado análisis de propagación de grietas en el subsuelo de la ciudad de México permite establecer de manera simplista que cuando existe una diferencia de niveles de lodo y agua freática igual o mayor a una cantidad del orden de 2 m, el riesgo de fracturamiento hidráulico es alto.

Por último, vale la pena establecer que el análisis de seguridad de trincheras ante el riesgo de fracturamiento hidráulico es un campo fértil abierto a la investigación geotécnica.

## Seguridad y confiabilidad

### 3.1 INTRODUCCIÓN

Desde tiempos muy remotos, el concepto de seguridad ha sido fundamental en la práctica de la ingeniería civil. Los primeros códigos de construcción conocidos que ponen énfasis en la seguridad datan de 1750 años antes de Cristo (Código de Hammurabi).

En geotecnia el concepto de seguridad juega un papel muy importante dadas las numerosas incertidumbres que afectan a los diferentes aspectos del diseño geotécnico. Nunca es posible eliminar totalmente las dudas en cuanto a la representatividad de las muestras de suelo obtenidas durante la exploración o la precisión y validez de los ensayos de laboratorio. Además, las limitaciones de los modelos usados para evaluar la estabilidad de obras térreas son bien conocidas. Por otra parte, es común que las cargas consideradas en el momento del diseño geotécnico sean cargas de anteproyecto y presenten una incertidumbre considerable.

### 3.2 CONCEPTOS GENERALES DE CONFIABILIDAD

La *Confiabilidad* puede definirse como la probabilidad de que un sistema lleve a cabo sus funciones de manera adecuada, durante un periodo propuesto y bajo condiciones de operación establecidas (Pagès y Gondran, 1986). Desde el punto de vista probabilista, la confiabilidad es el complemento a la unidad de la probabilidad de falla.

Resulta interesante definir también el concepto de *riesgo*, entendido como el producto de la probabilidad de un evento indeseable por su costo (Favre, 1984).

Históricamente no fue sino hasta el siglo XVIII cuando el enfoque empírico en la ingeniería es reemplazado por el enfoque numérico, gracias a los trabajos de Hooke, Navier, Cauchy, Saint Venant, etc. Sin embargo, este nuevo enfoque se

basó en el análisis de los esfuerzos y sus efectos, lo que redujo el concepto de seguridad a una noción determinista.

Frecuentemente el concepto de seguridad se establece realizando una comparación entre la sollicitación o demanda máxima  $S$  prevista para el sistema y su resistencia o capacidad  $R$ . Tradicionalmente se recurre al concepto de factor de seguridad  $\theta = \frac{R}{S}$ .

Este planteamiento obliga a establecer las siguientes condiciones:

- $S$  no se incrementa durante el periodo de vida de la obra y es igual o mayor a la máxima sollicitación prevista para la estructura.
- $R$  es siempre igual o inferior a la mínima resistencia o capacidad estimada.

En la práctica estas condiciones no son siempre absolutas y por tanto involucran un riesgo de falla.

La primera crítica relacionada con la utilización de factores de seguridad fue hecha por el profesor Streletsky en 1928 (Nechnech, 1994), durante el foro de un congreso internacional de seguridad, estableciendo que "*El coeficiente de seguridad adolece de sentido de la realidad*".

Es necesario reconocer que la seguridad absoluta no existe para ningún tipo de construcción. Lo anterior está ampliamente demostrado por la experiencia y debe atribuirse al carácter aleatorio de todos los parámetros que intervienen en el cálculo de una obra, frecuentemente evaluados a partir de muestras, a la limitada validez de los métodos de cálculo empleados y a las incertidumbres sobre las acciones a las que se somete la estructura. Los factores de seguridad, también llamados *factores de ignorancia*, cumplieron con una función útil durante mucho tiempo por el hecho de llevar a niveles de riesgo generalmente aceptables, pero ya no resultan adecuados para los niveles de calidad requeridos y las restricciones económicas actuales.

La evaluación de los niveles de seguridad se puede efectuar de diversas maneras, dependiendo de la precisión con que sean modeladas las sollicitaciones y las resistencias. Al respecto, se pueden distinguir los siguientes niveles de análisis:

NIVEL 0

Es el correspondiente a la utilización del *factor de seguridad central*  $\Theta = \frac{\mu_R}{\mu_S}$ , donde  $\mu_R$  y  $\mu_S$  son los valores medios de resistencia y sollicitación respectivamente (Madsen *et al*, 1986). En este caso el establecimiento de factores de seguridad central mínimos es producto del empirismo.

NIVEL 1

En este nivel los requisitos de seguridad se expresan en términos de un diseño por estado límite, en que la seguridad contra la ocurrencia de distintos tipos de falla se obtienen con el empleo de *factores parciales de seguridad*, como son *factores de carga* que incrementan las acciones y *factores de resistencia* que reducen la resistencia calculada.

Para justificar los factores de carga y de resistencia, estos se comparan con los que se deducen a partir de un planteamiento probabilístico aproximado del diseño estructural. El planteamiento se basa en describir las variables que intervienen en el diseño por medio de dos parámetros, uno que mida el valor medio o esperado de la variable y otro que da una medida de su variabilidad o de la incertidumbre que se tiene en el valor que vaya a adquirir en realidad dicha variable; en estos términos se reconoce el carácter aleatorio de la resistencia (esperanza  $\mu_R$  y coeficiente de variación  $V_R$ ) y de la sollicitación (esperanza  $\mu_S$  y coeficiente de variación  $V_S$ ).

Se suele emplear además para las distintas variables valores conservadores para cubrir en parte la incertidumbre y la variabilidad en las mismas. Estos valores, llamados *nominales* o *característicos*, son tales que la probabilidad de que sean rebasados del lado desfavorable es pequeña (el Reglamento del Comité Europeo del Concreto considera una probabilidad de excedencia del 5%).

Meli (1976) ilustra el procedimiento para la revisión de la seguridad en este nivel mediante la expresión

$$F_C \sum S_n \leq F_R R_n \tag{3.1}$$

es decir, se debe revisar que, para cada combinación de carga que puede afectar la estructura, la suma de los efectos de todas las cargas tomadas con sus valores nominales,  $\sum S_n$ , multiplicada por el factor de carga,  $F_C$ , no exceda la resistencia nominal,  $R_n$ , multiplicada por un factor reductivo de resistencia,  $F_R$ .

Por su parte, Cornell (1969) plantea la revisión de la seguridad a este nivel como

$$R_n \geq \theta^* S_n \quad (3.2)$$

donde  $R_n = (1 - k_R V_R) \mu_R$  y  $S_n = (1 + k_S V_S) \mu_S$  son los valores nominales o característicos de la resistencia y de la sollicitación respectivamente y  $\theta^*$  es el *coeficiente de seguridad nominal* definido como:

$$\theta^* = \frac{1 - k_R V_R}{1 + k_S V_S} \theta \quad (3.3)$$

donde  $k_R$  y  $k_S$  son factores que garantizan resistencias y sollicitaciones nominales.

Los nuevos reglamentos, denominados LRFD (Load and Resistance Factor Design), y que incluyen el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, pertenecen a este nivel *semi-probabilista*.

## NIVEL 2

Los métodos de análisis de confiabilidad de nivel 2 tienen su origen en un trabajo presentado por Mayer (1926), pero no fue sino hasta los años 60 cuando tuvieron gran desarrollo gracias a los trabajos de Cornell (1969), Ravindra *et al* (1969) y Rosenblueth y Esteva (1971).

Debido a que los métodos de nivel 2 requieren únicamente el conocimiento de los dos primeros momentos de las variables aleatorias (medias y varianzas), así como de las covarianzas de las variables correlacionadas, éstos se conocen como *métodos de segundos momentos*.

En este nivel se supone implícitamente que las sollicitaciones pueden ser superiores a las resistencias y que por ello la probabilidad de falla no es nula. Se dice que la confiabilidad de una estructura es aceptable si el índice de confiabilidad es superior a un umbral determinado a partir del dimensionamiento estructural por medio de reglas deterministas habituales de diseño o a partir de la experiencia de los diseñadores.

La medida de la confiabilidad asociada con un diseño particular es el *índice de confiabilidad*  $\beta$ , que representa el valor recíproco del coeficiente de variación del margen de seguridad R-S. La confiabilidad resulta ser, para cualquier distribución de R y S (Cornell, 1969):

$$\begin{aligned}
 P[R > S] &= P[R - S > 0] \\
 &= P\left[\frac{(R - S) - \mu_{R-S}}{\sigma_{R-S}} > \frac{-\mu_{R-S}}{\sigma_{R-S}}\right] \\
 &= P\left[U > -\frac{1}{V_{R-S}}\right] = 1 - F_U(-\beta)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde  $P[\ ]$  denota la probabilidad del evento,  $\mu_{R-S}$  representa la media del margen de seguridad,  $V_{R-S}$  es su coeficiente de variación y  $U$  es una variable aleatoria estandarizada con función de distribución acumulada  $F_U(\ )$  no especificada. Entre mayor sea  $\beta$ , mayor será la confiabilidad del diseño y menor la probabilidad de comportamiento insatisfactorio.

El objetivo principal de este nivel es proporcionar un método simple más racional para estimar la seguridad estructural por medio de la evaluación de la incertidumbre estadística de las variables de diseño, a fin de estimar la confiabilidad estructural.

### Nivel 3

En este nivel se efectúa el análisis de confiabilidad de un sistema estructural basado en el cálculo exacto de la probabilidad de falla, utilizando las distribuciones de las variables del problema.

Este análisis de confiabilidad constituye el método más complejo. Todas las variables aleatorias quedan descritas por su distribución de probabilidad y se requiere el conocimiento de la distribución de la función de estado límite; la probabilidad de falla se evalúa a partir del cálculo de las integrales de convolución apropiadas, lo que generalmente representa una tarea formidable.

A pesar de que los métodos de nivel 3 generalmente no son aplicables a casos reales debido a las dificultades teóricas y numéricas, son necesarios para verificar la validez y precisión de los métodos simplificados de nivel 1 y 2.

Se puede afirmar que el cálculo probabilista de la seguridad conduce a una mejor concordancia con los fenómenos físicos que la obtenida con un cálculo determinista. Sin embargo, a pesar del razonamiento expuesto se siguen usando enfoques deterministas o, en el mejor de los casos, semi-probabilistas, por las razones siguientes (Cornell, 1969):

- La mayoría de los ingenieros considera todavía que la aplicación de los factores de seguridad deterministas toma en cuenta la mayor parte de las incertidumbres.
- La carencia de datos suficientes y adecuados no permite la formación de bases de datos confiables que faciliten el conocimiento de las distribuciones de probabilidad de las variables de diseño.
- Por diversas razones los reglamentos en ingeniería deben ser presentados en la forma más simple posible. Al respecto, el análisis probabilista involucra en muchas ocasiones modelos complejos (no lineales) de comportamiento.
- La prudencia excesiva de los legisladores para aceptar innovaciones constituye un obstáculo para la aplicación de criterios probabilistas.

### 3.3 ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD

#### 3.3.1 PROBLEMA BÁSICO

El problema de la confiabilidad de sistemas ingenieriles puede ser básicamente tratado como un problema de *oferta vs demanda*. En otras palabras, este problema consiste en la determinación del grado en que la capacidad de oferta satisface los requerimientos de demanda, es decir, preocupa la certeza de que la resistencia de la estructura (oferta) sea suficiente para soportar las solicitaciones máximas aplicadas (demanda), durante la vida útil del sistema.

Es preciso establecer que la determinación de la oferta disponible y de la demanda máxima constituye un problema complejo. La estimación y la predicción son invariablemente necesarias para lograr estos propósitos; sin embargo, involucran incertidumbres inevitables por la simple razón de que la información ingenieril disponible es incompleta. A la luz de tales incertidumbres, la oferta disponible y la demanda no pueden ser determinadas con precisión y sólo pueden ser descritas dentro de su intervalo de variación.

Con el propósito de reflejar explícitamente el significado de la incertidumbre, la oferta disponible y los requerimientos de demanda pueden ser modelados como variables aleatorias.

En estos términos la confiabilidad de un sistema puede ser medida de forma más realista en términos probabilistas. Para tal propósito se definen las siguientes variables aleatorias:

R = Capacidad de oferta.

S = Demanda.

El objetivo del análisis de confiabilidad es entonces evaluar la probabilidad  $P[R > S]$  a través de la vida útil o alguna vida específica del sistema ingenieril. Es por ello que esta probabilidad representa una medida realista de la confiabilidad del sistema. Inversamente, la probabilidad del evento complementario  $P[R < S]$  constituye la medida de la *no confiabilidad* o *probabilidad de falla*.

En ciertas situaciones simples el tiempo no juega un papel significativo y las solicitudes o demandas pueden expresarse a través de una variable aleatoria continua única (demanda S), existiendo un solo estado límite determinista (capacidad de oferta R). La definición de la confiabilidad resulta entonces muy sencilla. Si S tienen una función de densidad de probabilidad  $f_s(s)$ , la confiabilidad del sistema se escribe como:

$$\text{Confiabilidad} = C = P[R > S] = P[R - S > 0] = \int_{-\infty}^r f_s(s) ds \quad (3.5)$$

Ahora bien, si la capacidad de oferta es también una variable aleatoria continua e independiente de la anterior y las funciones de densidad de probabilidad o las funciones de distribución de R y S están disponibles, esto es,  $f_R(r)$  o  $F_R(r)$  y  $f_s(s)$  o  $F_s(s)$  son conocidas, entonces las probabilidades requeridas pueden formularse como sigue (Kapur y Lamberson, 1977), recordando que  $F_R'(r) = f_R(r)$  (Rétháti, 1988)

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} f_R(r) \left[ \int_{-\infty}^r f_s(s) ds \right] dr = \int_{-\infty}^{\infty} f_s(s) \left[ \int_s^{\infty} f_R(r) dr \right] ds \quad (3.6)$$

La probabilidad de falla  $P[R < S]$  o no confiabilidad, bajo las mismas consideraciones impuestas anteriormente a las variables aleatorias es

$$F = P[R < S] = 1 - C = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(s) f_s(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_s(r)] f_R(r) dr \quad (3.7)$$

Las ecs 3.6 y 3.7 suponen independencia de las variables. En general éstas pueden estar correlacionadas, obteniéndose las siguientes ecuaciones para determinar la confiabilidad y la probabilidad de falla en los términos de la función de densidad de probabilidad conjunta

$$C = \int_0^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} f_{R,S}(r,s) ds \right] dr \quad (3.8)$$

$$F = \int_0^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} f_{R,S}(r,s) dr \right] ds \quad (3.9)$$

Si ahora se define a  $M = R - S$ , donde  $M$  es la llamada *variable aleatoria de interferencia o margen de seguridad*, entonces es posible definir a los parámetros anteriores como

$$C = P[M > 0] = \int_0^{\infty} f_M(m) dm \quad (3.10)$$

$$F = P[M \leq 0] = \int_{-\infty}^0 f_M(m) dm \quad (3.11)$$

Se observa (Kapur y Lamberson, 1977) que si  $R$  y  $S$  son variables aleatorias independientes mayores o iguales a cero, la confiabilidad  $C$  resulta ser

$$C = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_R(m+s) f_S(s) ds dm \quad (3.12)$$

y la probabilidad de falla o no confiabilidad

$$F = \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} f_R(m+s) f_S(s) ds dm \quad (3.13)$$

En la figura 3.1 la confiabilidad  $C$  se puede expresar en términos de  $M$  como  $C = P[M > 0]$ . En este caso, el índice de confiabilidad  $\beta$  se interpreta como el número de desviaciones estándar  $\sigma_M$  que separa a la media  $\mu_M$  del origen.

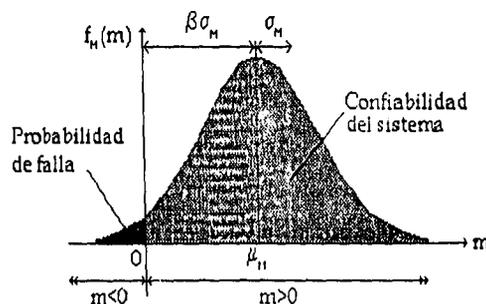


Fig 3.1 Confiabilidad del sistema.

### 3.3.2 CONFIABILIDAD EN EL CASO DE VARIABLES ALEATORIAS CON DISTRIBUCIONES COMUNES

Si  $R$  y  $S$  son variables aleatorias de oferta y demanda, la forma en que varían puede ser evaluada a partir de observaciones y recurriendo a la estadística, obteniéndose tablas de distribución de frecuencias, histogramas y polígonos de frecuencia. Esta información relativa a la variación de las variables aleatorias solamente es de utilidad si es suficientemente representativa para permitir la estimación de las funciones de densidad de probabilidad o funciones de distribución teóricas (para variables discretas o continuas). Sin embargo, el establecimiento de dichas funciones requiere un gran número de observaciones.

La selección de la función de densidad adecuada a partir de una tabla de distribución de frecuencias se realiza comúnmente por simple ajuste (fig 3.2); a menos que la función de distribución describa correctamente el modelo general de variación, una extrapolación hacia los extremos origina una estimación errónea de la confiabilidad en dichas zonas.

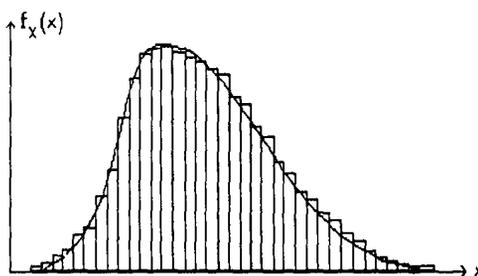


Fig 3.2 Ajuste de la función de densidad  $f_x(x)$ .

Las únicas funciones que evitan este problema son aquellas que representan un modelo definitivo de variación como resultado de ciertas suposiciones básicas relativas a su origen y que son comentadas en los siguientes puntos (Freudenthal, 1956).

#### 3.3.2.1 DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

Esta distribución es simétrica y se presenta comúnmente cuando la variable aleatoria  $M$  es la suma de un gran número de variables aleatorias de peso similar, independientes y con distribución arbitraria.

Sea la variable aleatoria de interferencia  $M$  con distribución de probabilidad normal estándar (fig 3.3a), entonces

### 3.3.2 CONFIABILIDAD EN EL CASO DE VARIABLES ALEATORIAS CON DISTRIBUCIONES COMUNES

Si  $R$  y  $S$  son variables aleatorias de oferta y demanda, la forma en que varían puede ser evaluada a partir de observaciones y recurriendo a la estadística, obteniéndose tablas de distribución de frecuencias, histogramas y polígonos de frecuencia. Esta información relativa a la variación de las variables aleatorias solamente es de utilidad si es suficientemente representativa para permitir la estimación de las funciones de densidad de probabilidad o funciones de distribución teóricas (para variables discretas o continuas). Sin embargo, el establecimiento de dichas funciones requiere un gran número de observaciones.

La selección de la función de densidad adecuada a partir de una tabla de distribución de frecuencias se realiza comúnmente por simple ajuste (fig 3.2); a menos que la función de distribución describa correctamente el modelo general de variación, una extrapolación hacia los extremos origina una estimación errónea de la confiabilidad en dichas zonas.

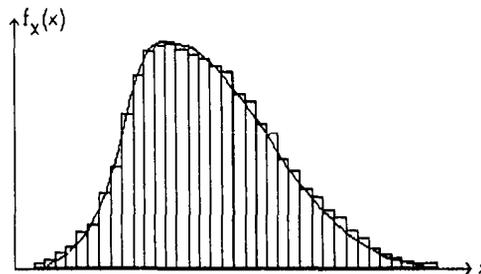


Fig 3.2 Ajuste de la función de densidad  $f_x(x)$ .

Las únicas funciones que evitan este problema son aquellas que representan un modelo definitivo de variación como resultado de ciertas suposiciones básicas relativas a su origen y que son comentadas en los siguientes puntos (Freudenthal, 1956).

#### 3.3.2.1 DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

Esta distribución es simétrica y se presenta comúnmente cuando la variable aleatoria  $M$  es la suma de un gran número de variables aleatorias de peso similar, independientes y con distribución arbitraria.

Sea la variable aleatoria de interferencia  $M$  con distribución de probabilidad normal estándar (fig 3.3a), entonces

$$f_M(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)m^2}, \quad -\infty < m < \infty \quad (3.14)$$

Una notación corta para esta distribución es  $N(0,1)$ , es decir,  $\mu=0$  y  $\sigma=1$ . La confiabilidad y probabilidad de falla están dadas respectivamente por las siguientes expresiones (Rao, 1992)

$$\begin{aligned} C &= P[M > 0] = \int_0^{\infty} f_M(m) dm = 1 - \Phi \left[ -\frac{\mu_M}{\sigma_M} \right] \\ &= 1 - \Phi \left[ -\frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right] = \Phi \left[ \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} F &= P[M \leq 0] = \int_{-\infty}^0 f_M(m) dm = \Phi \left[ -\frac{\mu_M}{\sigma_M} \right] \\ &= \Phi \left[ -\frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right] = 1 - \Phi \left[ \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde  $\Phi$  es la función de distribución normal estándar de la variable aleatoria de interferencia normalizada.

A la expresión  $\left[ \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right]$  se le denota por  $\beta$  y se le conoce como *índice de seguridad* o *índice de confiabilidad de Cornell* (Madsen et al, 1986).

### 3.3.2.2 DISTRIBUCIÓN LOGNORMAL

Esta distribución es sesgada y puede interpretarse que: a) es producto de un gran número de variables independientes, o que b) depende de la acumulación de operaciones aleatorias independientes realizadas en forma consecutiva sobre una variable con acumulación de los efectos previos (por ejemplo la erosión progresiva del diámetro de las partículas en materiales granulares aluviales).

La forma estándar de la función de densidad lognormal (fig 3.3b) es:

$$f_0(\theta) = \frac{1}{\theta \sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_0^2} (\ln \theta - \mu_0)^2 \right], \quad \theta > 0 \quad (3.17)$$

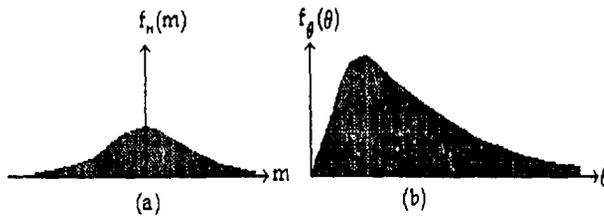


Fig 3.3 Distribuciones de probabilidad (a) normal estándar, (b) lognormal.

En el caso de variables aleatorias mayores o iguales a cero, la confiabilidad y falla pueden asociarse a los eventos  $[\theta > 1]$  y  $[\theta < 1]$ , respectivamente, donde  $\theta = \frac{R}{S}$ .

Cuando las variables aleatorias R y S son independientes y con distribución lognormal, es posible evaluar la confiabilidad calculando  $P\left[\frac{R}{S} > 1\right]$ , ya que la variable aleatoria  $\theta = \frac{R}{S}$ , conocida como *factor de seguridad*, presenta también distribución lognormal. Por tanto

$$C = P[\theta \geq 1] = \int_1^{\infty} f_{\theta}(\theta) d\theta \tag{3.18}$$

$$F = P[\theta < 1] = \int_0^1 f_{\theta}(\theta) d\theta = F_{\theta}(1) \tag{3.19}$$

Para este caso se demuestra (Ang y Cornell, 1974) que

$$F = 1 - \Phi \left[ \frac{\text{Ln} \left( \frac{\mu_R}{\mu_S} \right) \sqrt{\frac{1+V_S^2}{1+V_R^2}}}{\sqrt{\text{Ln} (1+V_R^2) + (1+V_S^2)}} \right] \tag{3.20}$$

$$C = \Phi \left[ \frac{\text{Ln} \left( \frac{\mu_R}{\mu_S} \right) \sqrt{\frac{1+V_S^2}{1+V_R^2}}}{\sqrt{\text{Ln} (1+V_R^2) + (1+V_S^2)}} \right] \tag{3.21}$$

Si  $V_R, V_S \leq 0.30$ , entonces

$$F \approx 1 - \Phi \left[ \frac{\text{Ln} \left( \frac{\mu_R}{\mu_S} \right)}{\sqrt{V_R^2 - V_S^2}} \right] \quad (3.22)$$

$$C \approx \Phi \left[ \frac{\text{Ln} \left( \frac{\mu_R}{\mu_S} \right)}{\sqrt{V_R^2 - V_S^2}} \right] \quad (3.23)$$

donde

$V_R$  = coeficiente de variación de R.

$V_S$  = coeficiente de variación de S.

De la misma manera es posible demostrar (Ang y Tang, 1984) que

$$F = \Phi \left[ -\frac{\lambda_\theta}{\sigma_\theta} \right] = 1 - \Phi \left[ \frac{\text{Ln} \left( \frac{R_M}{S_M} \right)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right] \quad (3.24)$$

$$C = \Phi \left[ \frac{\text{Ln} \left( \frac{R_M}{S_M} \right)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right] \quad (3.25)$$

donde

$\lambda_\theta = E(\text{Ln } \theta)$ .

$\sigma_\theta^2 = \text{Var}(\text{Ln } \theta)$ .

$R_M$  = Mediana de R.

$S_M$  = Mediana de S.

En este caso la confiabilidad es función de  $\theta_M = \frac{R_M}{S_M}$ , llamado *factor mediano de seguridad*, la desviación estándar es  $\sigma_\theta = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$  y la razón  $\frac{\lambda_\theta}{\sigma_\theta} = \beta$  es también conocida como índice de confiabilidad.

### 3.3.3 CONFIABILIDAD ASOCIADA A UN ESTADO LÍMITE

Como se mencionó anteriormente, el cálculo de la confiabilidad y de la probabilidad de falla de un sistema ingenieril requiere el conocimiento de las distribuciones  $f_R(r)$  y  $f_S(s)$  o de la distribución conjunta  $f_{R,S}(r,s)$ . En la práctica esta información no está disponible o es difícil de obtener debido a la insuficiencia de datos. Además, aún cuando las distribuciones requeridas puedan ser especificadas, la exacta evaluación de las probabilidades generalmente requiere la integración de las ecs 3.6 a 3.13, lo cual puede resultar impráctico; como una alternativa práctica se puede recurrir a la utilización de distribuciones normales equivalentes como una aproximación, tal como se verá más adelante. A lo anterior tiene que sumarse el hecho de que las variables R y S son a su vez funciones de otras variables básicas.

Frecuentemente la información estadística disponible puede ser suficiente solo para evaluar el primer y segundo momentos de las variables aleatorias. Por tanto, las medidas prácticas de seguridad o confiabilidad deben estar limitadas a funciones de estos dos momentos.

Teniendo en cuenta la variable aleatoria margen de seguridad,  $M = R - S$ , el *estado de seguridad* del sistema puede ser definido como  $[M > 0]$ , mientras que el *estado de falla* es el evento  $[M < 0]$ . La frontera que separa al estado de seguridad del de falla es el *estado límite*, definido por la ecuación  $M=0$ .

En el espacio de las variables normalizadas R' y S' la ecuación del estado límite,  $M=0$ , resulta ser

$$M = \sigma_R R' - \sigma_S S' + \mu_R - \mu_S = 0 \tag{3.26}$$

que representa una línea recta como se muestra en la figura 3.4. La distancia desde esta línea de falla al origen es en sí misma una medida de confiabilidad; es posible demostrar (Ang y Tang, 1984) que

$$d = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \tag{3.27}$$

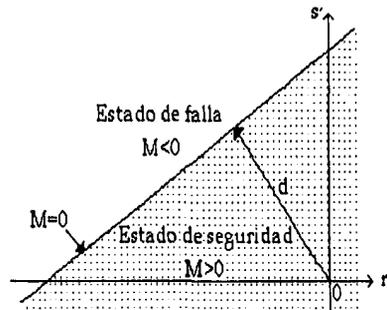


Fig 3.4 Espacio de las variables normalizadas R' y S'.

De acuerdo con la ec 3.15 se puede observar que para R y S con distribución normal estándar la distancia d es también el índice de confiabilidad  $\beta$ , conocido como el *índice de Hasofer y Lind*. Entonces  $d = \beta$  y la confiabilidad es  $C = \Phi(d)$ . Vale la pena señalar que el índice de Hasofer y Lind es igual al índice de Cornell sólo si la variable aleatoria es normal y si la función de estado límite es lineal.

En general, el análisis de confiabilidad de un sistema ingenieril real implica múltiples variables aleatorias básicas de diseño de todos tipos y relaciones generalmente no lineales entre ellas, siendo la oferta y la demanda funciones de varias variables. En un amplio sentido, la confiabilidad de un sistema ingenieril puede ser definida como la probabilidad de ejecutar su función o misión objetivo.

En este contexto y para el propósito de una formulación general se define una *función de comportamiento* o *función de estado* bajo sollicitaciones de operación, accidentales o ambientales (Shinozuka, 1983) como

$$M = g(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \tag{3.28}$$

donde  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  es un vector de variables básicas (de sollicitación y resistencia) de estado o diseño del sistema y la función  $g(\mathbf{X})$  determina el comportamiento o estado del mismo.

Al respecto, conviene observar que en la evaluación de la confiabilidad de una obra de ingeniería debe distinguirse entre variables aleatorias y de control. Las primeras se refieren a aquellos parámetros sobre los cuales el diseñador o el constructor no puede o no desea, por motivos económicos o de otra índole, ejercer un adecuado dominio, y que están asociados a fenómenos físicos que son aleatorios por naturaleza o sobre los cuales no se cuenta con información adecuada o completa para efectuar predicciones y estimaciones. Las variables de control tienen, por lo contrario, un carácter determinista. Su selección, que es parte fundamental del diseño, puede incidir fuertemente sobre la confiabilidad

del sistema. En el vector de variables de la ec. 3.28, intervienen ambos tipos de variables.

En estos términos, el requerimiento límite de comportamiento puede ser definido como  $g(X)=0$ , que representa el estado límite del sistema. Se establece por tanto que

$$[g(X) > 0] = \text{Estado de seguridad} \quad (3.29)$$

$$[g(X) < 0] = \text{Estado de falla} \quad (3.30)$$

Geoméricamente la ecuación del estado límite  $g(X)=0$  es una superficie  $n$ -dimensional que es llamada *superficie de falla*. En este caso un lado de la superficie de falla es el estado seguro  $g(X)>0$ , mientras que el otro es el estado de falla  $g(X)<0$ .

Por tanto, si la distribución de probabilidad conjunta de las variables de diseño  $X_1, X_2, \dots, X_n$  es  $f_{x_1, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n)$ , la probabilidad del estado seguro o confiabilidad es

$$C = P_s = \int_{\{g(X)>0\}} \dots \int f_{x_1, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (3.31)$$

que puede ser escrita de forma breve como

$$C = P_s = \int_{\{g(X)>0\}} f_x(x) dx \quad (3.32)$$

La ec 3.32 es simplemente la integral de volumen de la función  $f_x(x)$  sobre la región de seguridad  $g(X)>0$ . De igual forma la probabilidad de falla es la integral de volumen sobre la región de falla es

$$F = P_f = \int_{\{g(X)<0\}} \dots \int f_{x_1, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (3.33)$$

brevemente

$$P_f = F = \int_{g(x)<0} f_x(x) dx \quad (3.34)$$

En general, las variables básicas  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de las ecuaciones anteriores pueden estar correlacionadas. Sin embargo, se trata primero el caso de variables no correlacionadas, introduciendo un conjunto de variables normales reducidas no correlacionadas (Freudenthal, 1956)

$$X'_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}}; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.35)$$

Evidentemente los estados de seguridad y falla pueden también ser expresados en el espacio de las variables reducidas anteriores, separados por la ecuación de estado límite apropiada. En el caso de dos variables esta situación puede ser representada como en la figura 3.5.

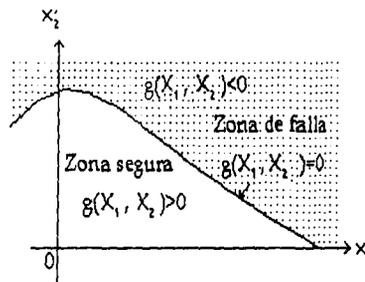


Fig 3.5 Estados de falla y seguridad en el espacio de las variables reducidas.

En términos de las variables reducidas  $X'_i$ , la ecuación de estado límite es

$$g(\sigma_{X_1} X'_1 + \mu_{X_1}, \dots, \sigma_{X_n} X'_n + \mu_{X_n}) = 0 \quad (3.36)$$

Se observa en la fig 3.5 que conforme la superficie de estado límite (o superficie de falla)  $g(X)=0$  se aleja o acerca al origen, la región de seguridad  $g(X)>0$  crece o decrece respectivamente. Por tanto, la posición de la superficie de falla relativa al origen de las variables reducidas determina la seguridad o confiabilidad del sistema. La posición de la superficie de falla puede ser representada por la mínima distancia desde la superficie  $g(X)=0$  al origen de las variables reducidas (Hasofer y Lind, 1974). Shinozuka (1983) ha mostrado que el punto sobre la superficie de falla con la mínima distancia al origen es el punto de máxima verosimilitud. Entonces, en un sentido aproximado, esta distancia mínima puede ser usada como una medida de confiabilidad.

### 3.3.4 CONFIABILIDAD DE SISTEMAS

El problema considerado anteriormente involucra estrictamente un sólo modo de falla, definido por un sólo estado límite. Sin embargo, los problemas de ingeniería frecuentemente involucran múltiples modos de falla; esto es, pueden

existir varios modos potenciales de falla y la ocurrencia de cualquiera de ellos produce la falla del sistema o de sus componentes. En general, los diferentes modos de falla pueden estar correlacionados (cuando menos de manera parcial).

En realidad, en un sistema ingenieril complejo multicomponente, las posibilidades de ocurrencia de falla de un sistema pueden estar tan involucradas que es necesario el establecimiento de un modelo para identificar todos los mecanismos potenciales y sus respectivas consecuencias. En estos casos los modelos de *árboles de falla* y de *eventos* son muy útiles. El diagrama de árbol de falla descompone al evento principal de falla (evento tope) en uniones e intersecciones de subeventos o combinaciones de los mismos; el proceso de descomposición se lleva a cabo hasta que las probabilidades de los subeventos pueden ser evaluadas como probabilidades de falla de modo simple.

Los cálculos de estas últimas probabilidades requieren la aplicación de las ecuaciones descritas anteriormente. La consecuencia de un evento de falla particular (evento tope) puede depender de la secuencia de eventos posteriores al mismo. La identificación sistemática de la secuencia posible de eventos se realiza a través de un árbol de eventos.

#### 3.3.4.1 MODOS DE FALLA MÚLTIPLE

La confiabilidad de un sistema multicomponente es esencialmente un problema de modos de falla múltiples; esto es, la falla de los diferentes componentes o grupos de componentes constituyen los diferentes modos de falla del sistema. La consideración de múltiples modos de falla es, por tanto, fundamental para resolver el problema de confiabilidad de un sistema. La identificación de los modos individuales de falla y la evaluación de sus respectivas probabilidades constituyen en sí un problema complejo.

Considerando un sistema con  $k$  modos potenciales de falla resulta evidente que cada modo presenta a su vez diferentes funciones de comportamiento.

Suponiendo que estas funciones se pueden expresar como

$$g_j(X) = g_j(X_1, X_2, \dots, X_n); \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (3.37)$$

de tal suerte que los eventos individuales de falla son

$$E_j = [g_j(X) < 0] \quad (3.38)$$

entonces, los complementos de  $E_i$  son los eventos de seguridad, esto es

$$\bar{E}_i = [g_i(\mathbf{X}) > 0] \tag{3.39}$$

En el caso de dos variables los eventos anteriores pueden ser representados gráficamente como en la figura 3.6, en la cual se observan tres modos de falla expresados por las ecuaciones de estado límite  $g_j(\mathbf{X}) = 0, j = 1, 2, \dots, n$ .

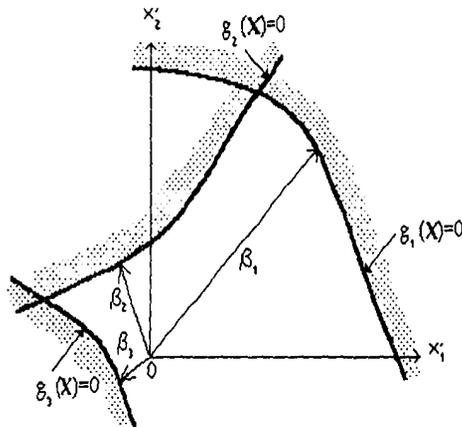


Fig 3.6 Múltiples modos de falla.

La confiabilidad de un sistema corresponde a la probabilidad del evento  $\bar{E}$  tal que ninguno de los  $k$  modos de falla ocurre; es decir:

$$\bar{E} = \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \dots \cap \bar{E}_k \tag{3.40}$$

Contrariamente, el evento de falla es

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k \tag{3.41}$$

La ec 3.41 literalmente significa que puede ocurrir uno o más de los eventos potenciales de falla. Teóricamente, por tanto, la confiabilidad o probabilidad de seguridad del sistema puede expresarse como la integral multidimensional:

$$C = P_s = \int_{(E_1 \cup \dots \cup E_k)} \dots \int_{x_1, x_2, \dots, x_n} f_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \tag{3.42}$$

mientras que la probabilidad de falla del sistema es

$$F = P_f = \int_{(\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_k)} \dots \int f_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (3.43)$$

### 3.3.4.2 FRONTERAS DE PROBABILIDAD

El cálculo de la confiabilidad o de la probabilidad de falla de un sistema por medio de las ecs 3.42 ó 3.43 es generalmente una tarea muy difícil que se resuelve por medio de aproximaciones. En este caso, la obtención de las fronteras superior e inferior de la correspondiente probabilidad resulta ser muy útil.

#### FRONTERAS UNIMODALES

Considerando modos de falla positivamente correlacionados ( $\rho_{ij} > 0$ ) se tiene (Ang y Tang, 1984) que para dos eventos  $E_i$  y  $E_j$ :

$$P(E_j | E_i) \geq P(E_j) \quad (3.44)$$

lo que significa que

$$P(\bar{E}_j | \bar{E}_i) \geq P(\bar{E}_j) \quad (3.45)$$

Por tanto,

$$P(\bar{E}_i, \bar{E}_j) \geq P(\bar{E}_i) P(\bar{E}_j) \quad (3.46)$$

Para  $k$  eventos, estos conceptos pueden generalizarse, lo que conduce a

$$P(\bar{E}) = P(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_k) \geq \prod_{i=1}^k P(\bar{E}_i) \quad (3.47)$$

Contrariamente, se observa que

$$(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_k) \subset \bar{E}_j; \text{ para todo } j \quad (3.48)$$

y en particular

$$(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_k) \subset \min \bar{E}_j; \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (3.49)$$

donde  $\min \bar{E}_j$  es el conjunto de mínima probabilidad.

Por tanto

$$P(\bar{E}) \leq \min_i P(\bar{E}_i) \quad (3.50)$$

Si se denota la confiabilidad contra el *iésimo* modo de falla como

$$P_{s_i} = P(\bar{E}_i) \quad (3.51)$$

y la confiabilidad contra todos los modos potenciales de falla como

$$P_s = P(\bar{E}) \quad (3.52)$$

entonces las fronteras de  $P_s$  se establecen de acuerdo con las ecs 3.47 y 3.50 de la siguiente forma (Ang y Amin, 1968)

$$\prod_{i=1}^k P_{s_i} \leq P_s \leq \min_i P_{s_i} \quad (3.53)$$

Contrariamente, las correspondientes fronteras para la probabilidad de falla  $P_f = P(E)$  son

$$\max_i P_{f_i} \leq P_f \leq 1 - \prod_{i=1}^k (1 - P_{f_i}) \quad (3.54)$$

donde  $P_{f_i} = P(E_i)$  es la probabilidad de falla del *iésimo* modo. Se observa que para un valor pequeño de  $P_{f_i}$  el miembro derecho de la ec 3.54 es

$$1 - \prod_{i=1}^k (1 - P_{f_i}) \approx \sum_{i=1}^k P_{f_i} \quad (3.55)$$

Para modos de falla negativamente correlacionados o eventos que son negativamente dependientes, esto es,  $\rho_{ij} < 0$ , se tiene que para dos eventos  $E_i$  y  $E_j$

$$P(E_j|E_i) \leq P(E_j) \quad (3.56)$$

y

$$P(\bar{E}_j|\bar{E}_i) \leq P(\bar{E}_j) \quad (3.57)$$

En particular, si  $E_i$  y  $E_j$  están perfectamente correlacionados negativamente, es decir,  $\rho_{ij} = -1$ , se observa que:

$$P(\bar{E}_i | \bar{E}_i) = P(E_j | E_i) = 0 \tag{3.58}$$

Por tanto

$$P(\bar{E}_i, \bar{E}_i) \leq P(\bar{E}_i)P(\bar{E}_i) \tag{3.59}$$

y

$$P(\bar{E}) = P(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_k) \leq \prod_{i=1}^k P(\bar{E}_i) \tag{3.60}$$

Trivialmente, por supuesto,  $P(\bar{E}) \geq 0$ . Por tanto

$$P_s \leq \prod_{i=1}^k P_s \tag{3.61}$$

Contrariamente

$$P_f \geq 1 - \prod_{i=1}^k P(\bar{E}_i) \tag{3.62}$$

La separación entre las fronteras inferior y superior de las ecs 3.53 y 3.54 depende del número de modos potenciales de falla y de las magnitudes relativas de los modos individuales. Por ejemplo, si existe un modo dominante, la confiabilidad y la probabilidad de falla están determinadas por este modo y, por tanto, se pueden representar por la probabilidad del mismo; en tales casos las fronteras serán estrechas. En general, sin embargo, las fronteras pueden estar separadas ampliamente, principalmente si el número de modos potenciales de falla es grande. Las fronteras anteriores, ecs 3.53 a 3.61 se denominan *fronteras de primer orden* o *unimodales*, siempre y cuando los límites inferior y superior de probabilidad involucren probabilidades de modo simple de falla o seguridad.

### 3.3.4.3 FRONTERAS BIMODALES

Las fronteras descritas anteriormente se pueden mejorar tomando en cuenta la correlación entre pares de modos potenciales de falla; las fronteras mejoradas resultantes necesariamente requieren del conocimiento de las probabilidades de eventos tales como  $(E_i, E_j)$  o  $(\bar{E}_i, \bar{E}_j)$  y son llamadas *fronteras bimodales* o de *segundo orden*.

El evento de falla  $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k$  se puede descomponer de la siguiente forma (fig 3.7), asumiendo que  $E_1$  representa el conjunto más grande

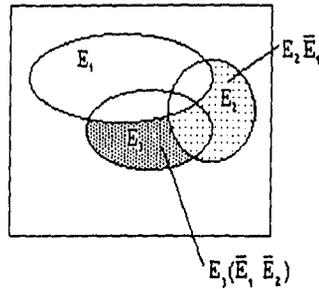


Fig 3.7 Descomposición de E.

$$E = E_1 \cup (E_2, \bar{E}_1) \cup E_3(\bar{E}_1, \bar{E}_2) \cup \dots \cup E_k(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_{k-1}) \quad (3.63)$$

Además, por la ley de Morgan

$$(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_{i-1}) = \overline{E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{i-1}} \quad (3.64)$$

y para  $i=2, 3, \dots, k$ ,

$$E_i \cap (\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_{i-1}) = E_i \cap (\overline{E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{i-1}}) \quad (3.65)$$

Es posible observar que

$$E_i \cap (\overline{E_1 \cup \dots \cup E_{i-1}}) \cup E_i \cap (E_1 \cup \dots \cup E_{i-1}) = E_i \quad (3.66)$$

Por tanto

$$P[E_i \cap (\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_{i-1})] = P(E_i) - P[(E_i, E_1) \cup (E_i, E_2) \cup \dots \cup (E_i, E_{i-1})] \quad (3.67)$$

Pero

$$P[(E_i, E_1) \cup (E_i, E_2) \cup \dots \cup (E_i, E_{i-1})] \leq P(E_i, E_1) + P(E_i, E_2) + \dots + P(E_i, E_{i-1}) \quad (3.68)$$

Por ello

$$P[E_i \cap (\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_{i-1})] \geq P(E_i) - \sum_{j=1}^{i-1} P(E_i, E_j) \quad (3.69)$$

Por tanto, a partir de la ec 3.63 se tiene

$$P(E) \geq P(E_1) + \max \left\{ \sum_{i=2}^k \left[ P(E_i) - \sum_{j=1}^{i-1} P(E_i, E_j) \right]; 0 \right\} \quad (3.70)$$

Por otro lado

$$(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_{i-1}) \subset \bar{E}_j; \text{ para cualquier } j \quad (3.71)$$

En particular

$$(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_{i-1}) \subset \min_{j < i} \bar{E}_j \quad (3.72)$$

Por tanto

$$(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_{i-1}) \cap E_i \subset \left( \min_{j < i} \bar{E}_j \right) \cap E_i \quad (3.73)$$

Se observa que

$$\left( \min_{j < i} \bar{E}_j \right) \cap E_i \cup \left( \max_{j < i} E_j \right) \cap E_i = E_i \cap \left( \min_{j < i} \bar{E}_j \cup \max_{j < i} E_j \right) = E_i \quad (3.74)$$

Así

$$P(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_{i-1}, E_i) \leq P(E_i) - \max_{j < i} P(E_j, E_i) \quad (3.75)$$

Por tanto, la ec 3.63 conduce a

$$P(E) \leq P(E_1) + \sum_{i=2}^k \left[ P(E_i) - \max_{j < i} P(E_j, E_i) \right] \quad (3.76)$$

o bien

$$P(E) \leq \sum_{i=1}^k P(E_i) - \sum_{i=2}^k \max_{j < i} P(E_j, E_i) \quad (3.77)$$

Las ecs 3.70 y 3.77 representan, respectivamente, las fronteras inferior y superior de probabilidad de falla cuando existen  $k$  modos potenciales (Kounias, 1968; Hunter, 1976); esto es

$$P_{F_i} + \sum_{i=2}^k \max \left\{ P_{F_i} - \sum_{j=1}^{i-1} P(E_j, E_i); 0 \right\} \leq P_f \leq \sum_{i=1}^k P_{F_i} - \sum_{i=2}^k \max_{j < i} P(E_j, E_i) \quad (3.78)$$

donde  $P_{F_i}$  es la probabilidad de falla del conjunto más grande ( $E_i$ ).

En general, algunos de los modos de falla pueden estar correlacionados, por lo que los cálculos de las probabilidades conjuntas  $P(E_i, E_j)$  en las ecs 3.70, 3.77 y 3.78 son complicados.

Una versión simple de las fronteras bimodales anteriores fue propuesto por Ditlevsen (1979) para variables Gaussianas, suponiendo que las variables básicas de diseño  $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$  son de este tipo y considerando dos modos potenciales de falla  $E_i$  y  $E_j$ , definidos por las ecuaciones de estado límite  $g_i(X)=0$  y  $g_j(X)=0$ , respectivamente, con una correlación mutua positiva  $\rho_{ij} \geq 0$ .

En el espacio de las variables reducidas  $X'_1, X'_2, \dots, X'_n$  estas ecuaciones de estado límite representan dos hipersuperficies que se intersecan, las cuales son aproximadas por medio de sus respectivos planos tangentes, con distancias  $\beta_1$  y  $\beta_2$  desde el origen de las variables reducidas. La representación geométrica para el caso de dos variables se ilustra en la fig 3.8.

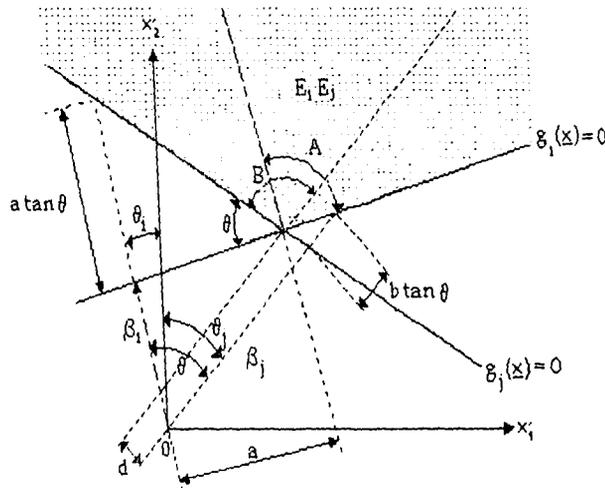


Fig 3.8 Intersección de dos planos tangentes (eventos de falla correlacionados positivamente).

En la misma figura, el coseno del ángulo  $\theta$  entre  $g_i(X)=0$  y  $g_j(X)=0$  es el coeficiente de correlación  $\rho_{ij}$ ; esto es,  $\cos \theta = \rho_{ij}$ . Esto se puede demostrar de la siguiente forma:

Estableciendo que

$$\begin{aligned} g_i(X) &= a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 \\ g_j(X) &= b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 \end{aligned} \quad (3.79)$$

donde  $X_1$  y  $X_2$  no están correlacionadas; esto es,  $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$ . Por tanto

$$\begin{aligned} \text{Cov}(g_i, g_j) &= E\left\{ (a_0 + a_1X_1 + a_2X_2)(b_0 + b_1X_1 + b_2X_2) \right. \\ &\quad \left. - (a_0 + a_1\mu_{x_1} + a_2\mu_{x_2})(b_0 + b_1\mu_{x_1} + b_2\mu_{x_2}) \right\} \\ &= a_1b_1\sigma_{x_1}^2 + a_2b_2\sigma_{x_2}^2 \end{aligned} \quad (3.80)$$

y

$$\rho_{ij} = \frac{\text{Cov}(g_i, g_j)}{\sigma_{g_i} \sigma_{g_j}} = \frac{a_1b_1\sigma_{x_1}^2 + a_2b_2\sigma_{x_2}^2}{\sqrt{(a_1^2\sigma_{x_1}^2 + a_2^2\sigma_{x_2}^2)(b_1^2\sigma_{x_1}^2 + b_2^2\sigma_{x_2}^2)}} \quad (3.81)$$

De los cosenos directores asociados con  $g_i(X) = 0$  y  $g_j(X) = 0$  se tiene que

$$\begin{aligned} \cos \theta_i &= \frac{a_2\sigma_{x_2}}{\sqrt{a_1^2\sigma_{x_1}^2 + a_2^2\sigma_{x_2}^2}} \\ \cos \theta_j &= \frac{b_2\sigma_{x_2}}{\sqrt{b_1^2\sigma_{x_1}^2 + b_2^2\sigma_{x_2}^2}} \end{aligned} \quad (3.82)$$

Además, de la figura anterior

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos(\theta_j - \theta_i) = \cos \theta_i \cos \theta_j + \sin \theta_i \sin \theta_j \\ &= \frac{a_1b_1\sigma_{x_1}^2 + a_2b_2\sigma_{x_2}^2}{\sqrt{(a_1^2\sigma_{x_1}^2 + a_2^2\sigma_{x_2}^2)(b_1^2\sigma_{x_1}^2 + b_2^2\sigma_{x_2}^2)}} \end{aligned} \quad (3.83)$$

Por tanto,  $\rho_{ij} = \cos \theta$ .

El evento conjunto de falla,  $(E_i, E_j)$ , es la región sombreada de la figura anterior. Se observa claramente que

$$(E_i, E_j) \supset A \quad (3.84)$$

Además

$$(E_i, E_j) \supset B \quad (3.85)$$

donde A y B están definidos en la fig 3.8.

Por tanto, observando nuevamente la citada figura se tiene que

$$\max\{P(A), P(B)\} \leq P(E_i, E_j) \leq P(A) + P(B) \quad (3.86)$$

donde, por razones de ortogonalidad (fig 3.8)

$$P(A) = \Phi(-\beta_i) \Phi(-a) = \Phi(-\beta_i) \Phi\left(-\frac{\beta_j - \rho\beta_i}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \quad (3.87)$$

$$P(B) = \Phi(-\beta_j) \Phi(-b) = \Phi(-\beta_j) \Phi\left(-\frac{\beta_i - \rho\beta_j}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \quad (3.88)$$

La probabilidad de los eventos conjuntos,  $P(E_i, E_j)$  en la ec 3.78 puede entonces aproximarse utilizando las fronteras adecuadas de la ec 3.86; esto es, para la frontera inferior, ec 3.70, se debe utilizar

$$P(E_i, E_j) = P(A) + P(B) \quad (3.89)$$

mientras que para la frontera superior se debe emplear

$$P(E_i, E_j) = \max\{P(A), P(B)\} \quad (3.90)$$

La ec 3.86 se aplica a eventos de falla que involucran  $n$  variables. En particular la geometría de la fig 3.8 es válida para cualquier par de funciones de comportamiento correlacionadas positivamente,  $M_i = g_i(X)$  y  $M_j = g_j(X)$ , donde  $X$  es un vector  $n$ -dimensional de variables normales (Ditlevsen, 1979). Para esta representación generalizada, las coordenadas  $X'_1$  y  $X'_2$  de la fig 3.8 deben ser reemplazadas por las variables normales estándar no correlacionadas correspondientes,  $M'_i$  y  $M'_j$ , por medio de una *rotación de coordenadas u ortogonalización de variables básicas*, tal como se verá más adelante.

En general, el rango de las fronteras bimodales de la ec 3.78, con las aproximaciones de la ec 3.86, decrece a medida que las probabilidades de falla

de modo simple lo hace; por ejemplo, para probabilidades de falla de modo simple del orden de  $10^{-4}$ , las fronteras bimodales pueden ser muy estrechas (Ditlevsen, 1979). Sin embargo, si las probabilidades de falla de modo simple son grandes, por ejemplo  $10^{-2}$ , las fronteras de la ec 3.78 pueden ser amplias (Ma y Ang, 1981).

Las fronteras bimodales, ec 3.78, dependen del orden de los modos de falla individuales; esto es, diferentes órdenes de los modos de falla individuales pueden producir diferentes valores de las ecs 3.70 y 3.77 y por ello las fronteras correspondientes a diferentes órdenes deben evaluarse para obtener mayor precisión en las mismas. Si el número de modos es cuantioso, las fronteras correspondientes a varios órdenes aleatorios deben ser ponderadas.

Si  $E_i$  y  $E_j$  son negativamente dependientes, es decir,  $\rho_{ij} < 0$ , las ecuaciones de estado límite se representan como en la fig 3.9, donde el evento de falla conjunto  $(E_i, E_j)$  corresponde a la zona sombreada.

En tales casos se puede demostrar (Ang y Tang, 1987) que

$$P(E_i, E_j) \leq \min [P(A), P(B)] \tag{3.91}$$

donde  $P(A)$  y  $P(B)$  están definidas por las ecs 3.87 y 3.88, respectivamente; la frontera inferior es (trivialmente) cero.

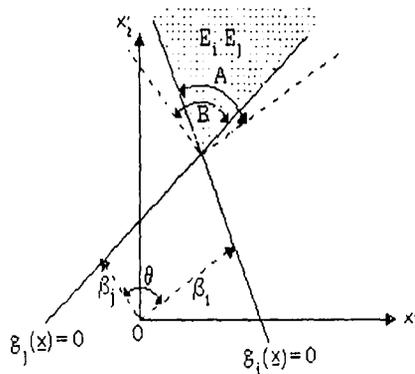


Fig 3.9 Dos planos tangentes para eventos de falla negativamente dependientes.

### 3.3.5 SISTEMAS EN SERIE

Muchos sistemas físicos compuestos por múltiples elementos pueden ser clasificados como sistemas en serie o en paralelo, o combinaciones de los mismos. En general, los eventos de falla (p.e. el caso de múltiples modos de falla) pueden también ser representados por eventos en serie (unión) o en paralelo (intersección).

Aquellos sistemas que están compuestos por elementos conectados en serie son aquellos en los que la falla de uno o más componentes provoca la falla del sistema. En otras palabras, la confiabilidad del sistema requiere que ninguno de sus componentes falle.

Si  $E_i$  denota la falla de la componente  $i$ , entonces la falla de un sistema en serie es el evento

$$E_s = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m \quad (3.92)$$

y la seguridad del sistema es el evento

$$\bar{E}_s = \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \dots \cap \bar{E}_m \quad (3.93)$$

### 3.3.6 SISTEMAS EN PARALELO

Los sistemas compuestos por elementos en paralelo son aquellos en que la falla total del sistema requiere la falla de todos sus componentes; en otras palabras, si uno de sus componentes sobrevive, el sistema permanece seguro.

La falla de un sistema con  $m$  componentes en paralelo es, por tanto

$$E_s = E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_m \quad (3.94)$$

mientras que la seguridad del sistema es el evento

$$\bar{E}_s = \bar{E}_1 \cup \bar{E}_2 \cup \dots \cup \bar{E}_m \quad (3.95)$$

3.4 MÉTODOS DE CÁLCULO

3.4.1 INTRODUCCIÓN

Resulta importante establecer que las funciones de densidad de probabilidad de las variables aleatorias que intervienen en el cálculo de la confiabilidad no son conocidas en la práctica. Se cuenta solamente con estimaciones de algunos parámetros, generalmente los primeros momentos estadísticos, a partir de un número limitado de observaciones económicamente factibles.

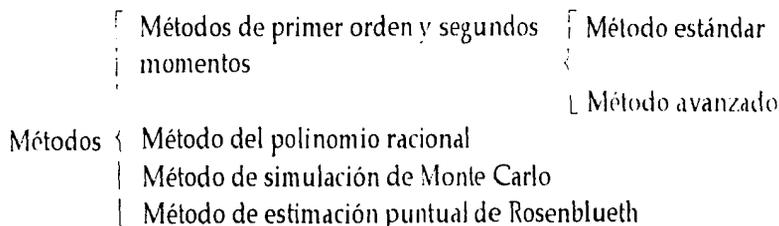
Como se estableció anteriormente, la probabilidad del estado seguro o confiabilidad de un sistema ingenieril se puede expresar como

$$C = P_s = \int_{g(x) > 0} f_x(x) dx \tag{3.96}$$

donde  $f_x(x)$  representa la función de densidad conjunta de X. Como se ha citado, la dificultad para la aplicación de la ec 3.96 radica en dos puntos:

- Resulta impráctico el establecimiento de la función de densidad conjunta con base en un grupo de datos estadísticos insuficiente, particularmente para el rango crítico de variables aleatorias con gran desviación estándar.
- Prácticamente para todos los casos de interés ingenieril, la integración analítica multidimensional sobre el dominio irregular  $g(X) > 0$  es una tarea muy compleja.

Es por ello que los métodos numéricos para la estimación de la confiabilidad han tenido un gran desarrollo en las últimas décadas, tal como lo demuestran los trabajos de los multicitados autores Rosenblueth y Esteva (1971), Hasofer y Lind (1974) y Ditlevsen (1979), entre otros. Con el propósito de tener un panorama más amplio se presenta el siguiente cuadro sinóptico con los principales métodos numéricos utilizados para el cálculo de la confiabilidad.



3.4.2 MÉTODOS DE PRIMER ORDEN Y SEGUNDOS MOMENTOS

Con el objeto de exponer el significado de confiabilidad en términos de segundos momentos, es preferible iniciar el análisis con un problema que involucra una sola variable aleatoria. Suponiendo que un sistema que tiene una resistencia determinista  $R$  es solicitado por una carga aleatoria  $S$ , la falla ocurre si  $S > R$ . Bajo estas circunstancias el análisis probabilista consiste en evaluar la probabilidad del evento de falla  $P(S > R)$ . Si esta probabilidad es menor que un valor pequeño  $\epsilon$  *socialmente aceptado* (Hasofer y Lind, 1974) el diseño es válido.

Debido a que generalmente no se cuenta con información suficiente relacionada con la distribución de  $S$ , se reemplaza el criterio  $P(S > R) < \epsilon$  por un criterio que involucra únicamente a la media y a la desviación estándar de  $S$ .

Este criterio es

$$R > \mu_s + \beta\sigma_s \tag{3.97}$$

y se muestra en la fig 3.10

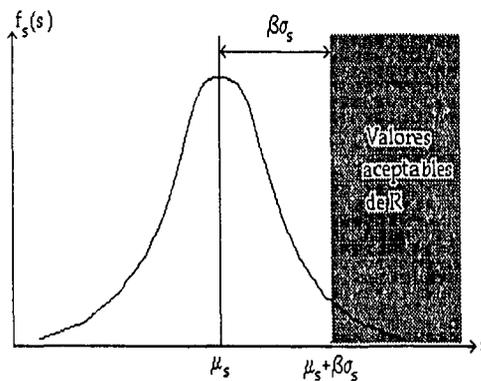


Fig 3.10 Índice de confiabilidad para una variable.

El máximo valor de  $\beta$  que satisface la ecuación anterior se denomina *índice de confiabilidad de diseño*.

El significado de la ec 3.97 establece que se espera que la mayoría de la probabilidad de la variable aleatoria  $S$  quede concentrada entre la media y algunas desviaciones estándar. Es por ello que este criterio asegura esencialmente que la máxima probabilidad de  $S$  está asociada con aquellos valores ubicados en la región segura  $S < R$ .

Generalizando, para cualquier carga  $S$  se puede definir una *región segura*  $G(S)$ , consistente en el grupo de valores de  $S$  para los cuales el sistema no falla.

El criterio de confiabilidad en términos de segundos momentos consiste en que el intervalo  $[\mu_s - \beta\sigma_s, \mu_s + \beta\sigma_s]$  se encuentre contenido completamente en la región  $G(S)$ .

Considerando los conceptos anteriores se puede definir una *carga normalizada*  $S' = \frac{S - \mu_s}{\sigma_s}$ . En el espacio de esta nueva variable se ubica una nueva región de seguridad  $G(S')$ , y el criterio de confiabilidad en términos de segundos momentos estipula que el intervalo  $[-\beta, +\beta]$  debe estar completamente contenido en  $G(S')$ . En otras palabras, si se denota a la zona de falla por  $G^*(S')$ , se requiere que la distancia desde el origen hasta ésta sea mayor que  $\beta$ .

De manera más concreta se puede establecer que la distancia desde el punto  $\mu_s$  hasta la región de falla  $G^*(S)$ , cuando  $S$  se mide en unidades de desviación estándar, debe ser mayor que  $\beta$ .

De esta forma se puede generalizar el criterio de confiabilidad en términos de segundos momentos a un problema que involucra más de una variable aleatoria. Para ello, es preferible ilustrar el método con un problema de dos variables.

Suponiendo que la resistencia  $R$  del análisis anterior adopta la forma de variable aleatoria y que el criterio de falla determinista establece que  $M < 0$ , el plano  $R$  y  $S$  se divide en una región segura  $G(R, S)$  y en una de falla  $G^*(R, S)$ .

Asumiendo que  $R$  y  $S$  no están correlacionadas e introduciendo las variables aleatorias normales estandarizadas  $R'$  y  $S'$ , el criterio de falla divide ahora el plano de  $R'$  y  $S'$  en una región de seguridad  $G(R', S')$  y en una región de falla  $G^*(R', S')$ . Se requiere que el círculo  $\Sigma$ , con radio  $\beta$  centrado en el origen, esté contenido completamente dentro de la región de seguridad  $G(R', S')$ . Este criterio se muestra en la figura 3.11.

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

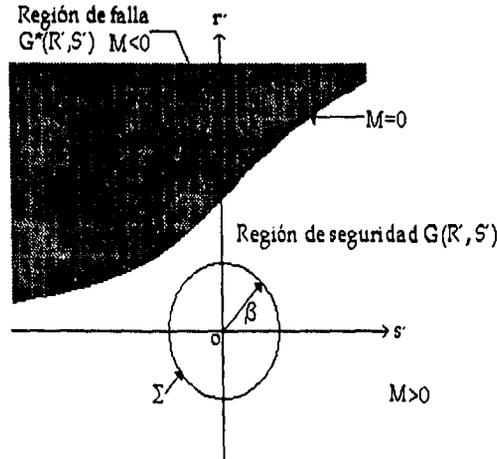


Fig 3.11 Índice de confiabilidad para dos variables.

Este criterio generalizado se basa en el hecho de que se espera que la mayoría de la probabilidad conjunta de R y S esté concentrada en el círculo  $\Sigma$  y esté asociada con sus valores seguros.

Cabe destacar que la utilización de variables normalizadas asegura que las medidas a lo largo de los ejes de la fig 3.11 sean comparables. En caso de no utilizar variables normalizadas y tomar el círculo centrado en  $[\mu_R, \mu_S]$ , cualquier incremento de su radio agrega regiones de gran probabilidad cerca del eje de la variable aleatoria con mayor desviación estándar y regiones de menor probabilidad cerca del eje de la variable aleatoria cuya desviación estándar es menor (Hasofer y Lind, 1974).

De la misma manera que en el análisis anterior, el criterio de confiabilidad establece que la distancia desde el origen hasta  $G^*(R', S')$  debe ser mayor que  $\beta$ .

Sea  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  el vector de variables básicas de diseño o estado definido con anterioridad y supóngase que el criterio de falla establece que  $M = g(X) < 0$ .

Este criterio divide el espacio de X en una región segura  $G(X)$  y en una región de falla  $G(X)^*$ , pudiendo establecerse la metodología para el análisis de confiabilidad en términos de segundos momentos de la siguiente manera:

1. En caso de que las variables de diseño no sean normales, aplíquese la transformación de Rosenblatt (anexo A) para obtener un conjunto de variables normales no correlacionadas. Si las variables son normales pero están correlacionadas, aplíquese el procedimiento de ortogonalización (anexo B) para obtener dicho conjunto.

2. Introdúzcase variables normales estandarizadas  $X'_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}}$ .

3. El criterio de falla  $M = g(X) < 0$  corresponde en el espacio de  $X'$  una región segura  $G(X')$  y una región de falla  $G^*(X')$ . Calcúlese la distancia  $\Delta$  desde el origen hasta la región de falla. El criterio de confiabilidad de segundos momentos estipula que

$$\Delta > \beta \quad (3.98)$$

es decir, la distancia desde el origen hasta la región de falla  $G^*(X')$  debe ser mayor que  $\beta$ .

### 3.4.2.1 PROPIEDADES DEL CRITERIO DE SEGUNDOS MOMENTOS

#### PROPIEDAD DE INVARIANCIA

La principal ventaja de este criterio estriba en que éste no depende de ninguna manera de la forma analítica precisa del criterio de falla  $M(X) < 0$ . De hecho la única información relevante requerida es la frontera de la región de falla  $G^*(X)$ , así como las matrices de medias y covarianzas de las variables  $X_i$ . El diseñador es libre de escoger cualquier método *razonable* (que produzca resultados acordes con los fenómenos observados y que esté fundamentado en métodos de análisis estructural aceptados) con el fin de establecer el grupo de puntos  $X$  que originarán la falla del sistema. Cualquier cambio en la definición de resistencia que sea congruente con las leyes de la mecánica conducirá a la misma región de falla y, por lo tanto, al mismo valor de  $\Delta$ .

#### LIBERTAD PARA ELEGIR VARIABLES BÁSICAS

El grupo de variables básicas no necesita tener algún significado físico siempre y cuando su distribución de probabilidad conjunta determine la distribución de las variables físicas relativas al problema.

#### CONSISTENCIA

Supóngase que las variables relevantes en un análisis de confiabilidad son  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , y que un nuevo análisis involucra cierta variable  $X_n$  que presenta una variabilidad despreciable. En este caso es necesario únicamente que su desviación estándar tienda a cero en el análisis original, con el objeto de obtener la solución al nuevo problema que involucra las  $n-1$  variables.

3.4.2.2 MÉTODO ESTÁNDAR

Este método considera el caso especial de las *funciones de comportamiento lineal*. A parte de su propia utilidad, ciertos aspectos del caso lineal constituyen la base para una aproximación a las funciones de comportamiento no lineal que son analizadas por el método avanzado.

Las funciones de comportamiento lineal presentan la siguiente forma

$$g(X) = a_0 + \sum_i a_i X_i \tag{3.99}$$

donde  $a_0$  y  $a_i$  son constantes. La ecuación correspondiente de estado límite es

$$a_0 + \sum_i a_i X_i = 0 \tag{3.100}$$

En términos de las variables normales estandarizadas la ecuación de estado límite adopta la siguiente forma

$$a_0 + \sum_i a_i (\sigma_{x_i} X'_i + \mu_{x_i}) = 0 \tag{3.101}$$

En el espacio tridimensional, la ecuación anterior se transforma en

$$a_0 + a_1 (\sigma_{x_1} X'_1 + \mu_{x_1}) + a_2 (\sigma_{x_2} X'_2 + \mu_{x_2}) + a_3 (\sigma_{x_3} X'_3 + \mu_{x_3}) = 0 \tag{3.102}$$

que representa la superficie plana en el espacio tridimensional  $x'_1, x'_2, x'_3$  mostrada en la figura 3.12.

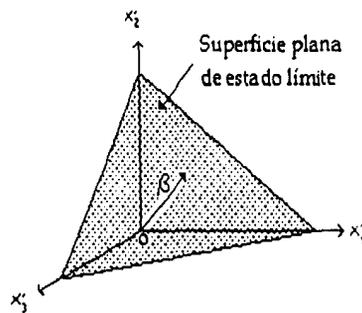


Fig 3.12 Superficie de estado límite lineal en el espacio de  $X'$ .

La distancia del plano de falla al origen del espacio de las variables reducidas  $X'$  es (Ang y Tang, 1987)

$$\beta = \frac{a_o + \sum_i a_i \mu_{x_i}}{\sqrt{\sum_i (a_i \sigma_{x_i})^2}} \quad (3.103)$$

Anteriormente se especificó que para dos variables normales estandarizadas no correlacionadas,  $R'$  y  $S'$ , la confiabilidad es directamente una función de la distancia entre la línea de falla y el origen del espacio de las variables estandarizadas, esto es, la distancia  $\beta$ . Este resultado puede ser generalizado, es decir, si las variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son variables normales estandarizadas no correlacionadas, la confiabilidad es

$$\begin{aligned} C = P_s &= P\left(a_o + \sum_i a_i X_i > 0\right) \\ &= 1 - \Phi\left[\frac{-(a_o + \sum_i a_i \mu_{x_i})}{\sqrt{\sum_i (a_i \sigma_{x_i})^2}}\right] \\ &= \Phi\left[\frac{a_o + \sum_i a_i \mu_{x_i}}{\sqrt{\sum_i (a_i \sigma_{x_i})^2}}\right] \end{aligned} \quad (3.104)$$

Comparando las ecs 3.103 y 3.104 se observa que el argumento dentro del corchete de la ecuación 3.104 es la distancia  $\beta$ . Por tal motivo la confiabilidad es nuevamente función de la distancia entre el plano de falla  $g(X)$  y el origen del espacio de las variables normales estandarizadas. Así, en el caso general de  $n$  variables normales estandarizadas no correlacionadas, la confiabilidad es

$$C = \Phi(\beta) \quad (3.105)$$

### 3.4.2.3 MÉTODOS AVANZADOS

En la evaluación de la confiabilidad generalmente están involucradas funciones no lineales de comportamiento  $g(X)$ , las cuales son analizadas por el método avanzado. En estos casos la ecuación de estado límite  $g(X)=0$  tampoco es lineal, por lo que no existe una distancia única desde la superficie de falla hasta el origen de las variables reducidas como en el caso anterior.

Para propósitos prácticos, el índice de confiabilidad puede evaluarse de manera aproximada. De acuerdo con Shinozuka (1983) el punto  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  sobre la superficie de falla con mínima distancia al origen de las variables normales

estandarizadas representa el punto de máxima verosimilitud. En este caso, el plano tangente a la superficie de falla en  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  puede ser utilizado para aproximar la superficie de falla no lineal actual, lo que permite evaluar el índice de confiabilidad como en el caso anterior. Según la superficie de falla sea convexa o cóncava hacia el origen, esta aproximación esta del lado de la seguridad o inseguridad, respectivamente, tal como se ilustra en la fig. 3.13 para el caso de dos variables normales estandarizadas no correlacionadas.

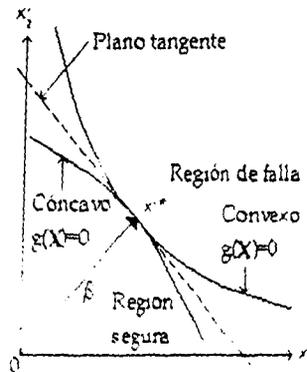


Fig 3.13 Plano tangente a  $g(x)$  en  $x^*$ .

El plano tangente en  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  se obtiene por medio de la expansión de la superficie de estado limite en serie de Taylor (Shinozuka, 1983) en el punto  $x^*$  sobre la superficie de falla  $g(x^*) = 0$ ; esto es

$$g(x) \approx g(x^*) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \quad (3.106)$$

donde las derivadas son evaluadas en  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ . Pero  $g(x^*) = 0$  sobre la superficie de falla, por tanto:

estandarizadas representa el punto de máxima verosimilitud. En este caso, el plano tangente a la superficie de falla en  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  puede ser utilizado para aproximar la superficie de falla no lineal actual, lo que permite evaluar el índice de confiabilidad como en el caso anterior. Según la superficie de falla sea convexa o cóncava hacia el origen, esta aproximación está del lado de la seguridad o inseguridad, respectivamente, tal como se ilustra en la fig 3.13 para el caso de dos variables normales estandarizadas no correlacionadas.

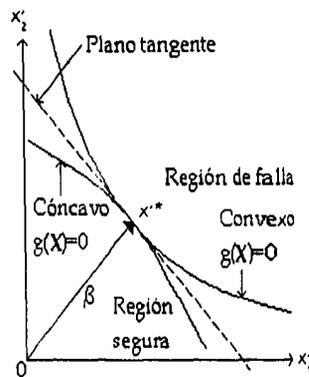


Fig 3.13 Plano tangente a  $g(X)$  en  $x^*$ .

El plano tangente en  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  se obtiene por medio de la expansión de la superficie de estado límite en serie de Taylor (Shinozuka, 1983) en el punto  $x^*$  sobre la superficie de falla  $g(x^*) = 0$ ; esto es

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \sum_{i=1}^n (X_i - x_i^*) \left( \frac{\partial g}{\partial X_i} \right) + \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (X_i - x_i^*) (X_j - x_j^*)}{\left( \frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \right)} + \dots \quad (3.106)$$

donde las derivadas son evaluadas en  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ . Pero  $g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$  sobre la superficie de falla; por tanto:

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n (X_i - x_i^*) \left( \frac{\partial g}{\partial X_i} \right) + \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (X_i - x_i^*) (X_j - x_j^*)}{\left( \frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \right)} + \dots \quad (3.107)$$

Recordando que

$$X_i - x_i^* = (\sigma_{x_i} X'_i + \mu_{x_i}) - (\sigma_{x_i} x'_i + \mu_{x_i}) = \sigma_{x_i} (X'_i - x'_i) \quad (3.108)$$

e introduciendo el vector gradiente

$$G = \left( \frac{\partial g}{\partial X'_1}, \frac{\partial g}{\partial X'_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial X'_n} \right) \quad (3.109)$$

donde

$$\frac{\partial g}{\partial X_i} = \frac{\partial g}{\partial X'_i} \left( \frac{dX'_i}{dX_i} \right) = \frac{1}{\sigma_{x_i}} \left( \frac{\partial g}{\partial X'_i} \right) \quad (3.110)$$

Entonces

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n (X'_i - x'_i) \left( \frac{\partial g}{\partial X'_i} \right) + \dots \quad (3.111)$$

En la aproximación de primer orden, es decir, truncando la serie anterior hasta el término de primer orden, la ec 3.111 es

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n (X'_i - x'_i) \left( \frac{\partial g}{\partial X'_i} \right) = 0 \quad (3.112)$$

donde las derivadas parciales  $\left( \frac{\partial g}{\partial X'_i} \right)$  son evaluadas en  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ .

Con base en la aproximación anterior, la varianza aproximada de primer orden es

$$\sigma_g^2 \cong \sum_{i=1}^n \sigma_{x_i}^2 \left( \frac{\partial g}{\partial X_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial X_i} \right)^2 \quad (3.113)$$

mientras que el valor medio de la función  $g(X)$  es

$$\mu_g \cong - \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{\partial g}{\partial X_i} \right) \quad (3.114)$$

En base a la aproximación anterior, la distancia desde el *plano tangente mínimo* al origen de las variables estandarizadas es el índice de confiabilidad apropiado, el cual puede utilizarse para representar la medida de la confiabilidad.

A partir de las ecs 3.113 y 3.114 el índice de confiabilidad se define como

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{- \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{\partial g}{\partial X_i} \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial X_i} \right)^2}} \quad (3.115)$$

Se debe enfatizar que las aproximaciones de primer orden de  $\mu_g$  y  $\sigma_g$  derivadas anteriormente deben ser evaluadas en el punto sobre la superficie de falla donde  $g(X)=0$ . En algunos trabajos anteriores (p.e. Cornell, 1969; Ang y Cornell, 1974) las aproximaciones de primer orden se evaluaron a partir de las medias  $(\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n})$ , lo que indujo errores significativos para funciones  $g(X)$  no lineales, ya que la correspondiente relación  $\frac{\mu_g}{\sigma_g}$  evaluada de esa forma puede no ser la distancia desde el origen del espacio de las variables reducidas hasta la superficie de falla no lineal.

Más aún, las aproximaciones de primer orden evaluadas a partir de las medias de las variables básicas originan el problema de invarianza para estados límite equivalentes (Hasofer y Lind, 1974); esto es, el resultado depende de la manera en que un determinado evento de estado límite se defina. Por ejemplo, para los eventos de estado límite equivalente  $[R - S < 0]$  y  $\left[ \frac{R}{S} < 1 \right]$ , la aproximación de primer orden evaluada a partir de las medias proporciona valores diferentes del índice de confiabilidad. Tal problema de invarianza puede evitarse si las

aproximaciones de primer orden se evalúan en un punto sobre la superficie de falla.

En el presente caso, el punto apropiado de tangencia sobre la superficie de falla no se conoce *a priori*. En consecuencia, la determinación del índice de confiabilidad requerido no es tan simple como en el caso lineal, a pesar de que se involucra una aproximación de este tipo. El *mínimo punto de tangencia* sobre la superficie de falla se puede determinar a través del *método de los multiplicadores de Lagrange*.

**3.4.2.4 MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE**

De acuerdo con Shinozuka (1983), la distancia mínima requerida se puede determinar de la siguiente forma: la distancia desde un punto  $X' = (X'_1, X'_2, \dots, X'_n)$  sobre la superficie de falla  $g(X)=0$  al origen de  $X'$  es

$$D = \sqrt{X_1'^2 + \dots + X_n'^2} = (X'^T X')^{1/2} \tag{3.116}$$

donde el superíndice T indica transpuesta. El punto sobre la superficie de falla  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  que tiene la mínima distancia al origen puede determinarse minimizando la función D, sujeta a la restricción  $g(X)=0$ ; esto es

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } D \\ &\text{sujeto a } g(X)=0 \end{aligned}$$

Para este propósito es posible utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange. Introduciendo un multiplicador de Lagrange  $\lambda$  se establece que

$$L = D + \lambda g(X) \tag{3.117}$$

o bien

$$L = (X'^T X')^{1/2} + \lambda g(X) \tag{3.118}$$

En notación escalar

$$L = \sqrt{X_1'^2 + X_2'^2 + \dots + X_n'^2} + \lambda g(X_1, X_2, \dots, X_n) \tag{3.119}$$

donde  $X_i = \sigma_{X_i} X'_i + \mu_{X_i}$ .

Minimizando L se obtiene el siguiente conjunto de  $n+1$  ecuaciones con  $n+1$  incógnitas

$$\frac{\partial L}{\partial X'_i} = \frac{X'_i}{\sqrt{X_1'^2 + X_2'^2 + \dots + X_n'^2}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial X'_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.120)$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \quad (3.121)$$

La solución del conjunto anterior de ecuaciones conduce a la obtención del punto de máxima verosimilitud  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ .

Introduciendo nuevamente el vector gradiente, el conjunto anterior de ecuaciones puede escribirse en notación matricial como

$$\frac{X'}{(X'^T X')^{1/2}} + \lambda G = 0 \quad (3.122)$$

donde

$$X' = -\lambda DG \quad (3.123)$$

Por tanto

$$D = [(\lambda DG^T)(\lambda DG)]^{1/2} = \lambda D(G^T G)^{1/2} \quad (3.124)$$

y

$$\lambda = (G^T G)^{-1/2} \quad (3.125)$$

utilizando este último resultado en la ec 3.123 se obtiene

$$X' = \frac{-GD}{(G^T G)^{1/2}} \quad (3.126)$$

Premultiplicando la ec 3.126 por  $G^T$  resulta

$$D = \frac{-G^T X'}{(G^T G)^{1/2}} \quad (3.127)$$

Sustituyendo la ec 3.126 en la 3.121 es posible obtener una ecuación con D como incógnita; la solución de ésta lleva a la obtención de la distancia mínima  $d_{\min}=\beta$ . Por tanto

$$\beta = \frac{-G^{*T}X'^*}{(G^{*T}G^*)^{1/2}} \quad (3.128)$$

donde  $G^*$  es el vector gradiente en el punto de máxima verosimilitud  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ . En forma escalar la ec 3.128 se escribe como

$$\beta = \frac{-\sum_i x'_i \left( \frac{\partial g}{\partial x'_i} \right)}{\sqrt{\sum_i \left( \frac{\partial g}{\partial x'_i} \right)^2}} \quad (3.129)$$

donde las derivadas  $\left( \frac{\partial g}{\partial x'_i} \right)$  son evaluadas en  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ . Comparando la ec

3.129 con la 3.115 se observa que la primera también es la distancia desde el plano tangente de la superficie de falla en  $x^*$  hasta el origen de las variables normales estandarizadas. Utilizando el valor de  $\beta$  en la ec 3.126, el punto de máxima verosimilitud es

$$X'^* = \frac{-G^*\beta}{(G^{*T}G^*)^{1/2}} \quad (3.130)$$

En forma escalar las componentes de  $X'^*$  de la ecuación anterior son

$$x'_i = -\alpha_i \beta; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.131)$$

donde los cosenos directores a lo largo de los ejes  $x'_i$  son

$$\alpha_i = \frac{\left( \frac{\partial g}{\partial x'_i} \right)}{\sqrt{\sum_i \left( \frac{\partial g}{\partial x'_i} \right)^2}} \quad (3.132)$$

donde las derivadas son evaluadas en  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ . Por tanto

$$x_i^* = \sigma_{x_i} x_i'^* + \mu_{x_i} = \mu_{x_i} - \alpha_i^* \sigma_{x_i} \beta \quad (3.133)$$

La solución de la ecuación de estado límite  $g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$  permite la obtención de  $\beta$ .

### 3.4.2.5 ALGORITMO NUMÉRICO DE RACKWITZ

Los resultados resumidos anteriormente sugieren el siguiente algoritmo (Rackwitz, 1976):

1. Se suponen valores iniciales de  $x_i^*$ ;  $i=1, 2, \dots, n$  y se obtiene

$$x_i'^* = \frac{x_i^* - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \quad (3.134)$$

2. Se evalúa  $\left(\frac{\partial g}{\partial x_i'}\right)$  y  $\alpha_i^*$  en  $x_i^*$ . (3.135)

3. Se establece  $x_i^* = \mu_{x_i} - \alpha_i^* \sigma_{x_i} \beta$ . (3.136)

4. Se sustituye el valor anterior de  $x_i^*$  en

$$g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \quad (3.137)$$

y se resuelve para  $\beta$ .

5. Se utiliza el valor anterior de  $\beta$  y se recalcula  $x_i'^* = -\alpha_i \beta$ . (3.138)

6. Se repiten los pasos 2 a 5 hasta obtener la convergencia.

Sin embargo, el algoritmo de Rackwitz realmente no necesita la solución de la ec  $g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$  en  $\beta$ . El siguiente algoritmo iterativo para variables básicas independientes, denominado *algoritmo de Rackwitz-Fiessler* (1978), proporciona el punto de máxima verosimilitud  $x_i'^*$ , aunque el principio también se puede aplicar para variables dependientes (Ditlevsen, 1981)

$$\mathbf{u}^{(m+1)} = \left[ \mathbf{u}^{(m)T} \boldsymbol{\alpha}^{(m)} \right] \boldsymbol{\alpha}^{(m)} + \frac{g_{\mathbf{u}}[\mathbf{u}^{(m)}]}{|\nabla g_{\mathbf{u}}[\mathbf{u}^{(m)}]|} \boldsymbol{\alpha}^{(m)} \quad (3.139)$$

donde:

$m$  = número de iteración.

$\mathbf{u}$  = vector que proporciona el punto de máxima verosimilitud. El punto inicial de la secuencia iterativa puede ser tomado como el origen.

$g_u[\mathbf{u}^{(m)}]$  = función de estado límite evaluada en el vector  $\mathbf{u}$ , que puede ser expresada en términos de  $\mathbf{X}^{(m)}$  como

$$g_u[\mathbf{u}^{(m)}] = g[\mathbf{X}^{(m)}] \tag{3.140}$$

El vector unitario  $\alpha^{(m)}$  se calcula como

$$\alpha^{(m)} = -\frac{\nabla g_u[\mathbf{u}^{(m)}]}{|\nabla g_u[\mathbf{u}^{(m)}]|} \tag{3.141}$$

donde  $|\nabla g_u[\mathbf{u}^{(m)}]|$  es la norma del gradiente.

Vale la pena señalar que este algoritmo es muy rápido y eficiente, pero no garantiza la convergencia (Madsen *et al*, 1986).

### 3.4.2.6 DISTRIBUCIONES NORMALES EQUIVALENTES

Si las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  no son normales, la confiabilidad puede ser evaluada a través de la ec 3.32 (invariablemente es necesario realizar la integración numérica). Sin embargo, la confiabilidad  $C$  también puede ser evaluada utilizando distribuciones normales equivalentes (Paloheimo, 1974; Rackwitz, 1976). Teóricamente éstas pueden obtenerse a través de las transformaciones de Rosenblatt (Apéndice A). Con estas distribuciones normales equivalentes, el cálculo de la confiabilidad  $C$  sigue el mismo procedimiento que para variables normales descrito anteriormente.

La distribución normal equivalente para una variable no normal individual puede ser obtenida de tal suerte que la probabilidad acumulada así como la ordenada de densidad de probabilidad de la distribución normal equivalente sean iguales a aquellas de la distribución no normal correspondiente en el punto apropiado  $x_i^*$  sobre la superficie de falla.

Igualando las probabilidades acumuladas como se especificó anteriormente en el punto  $x_i^*$  se obtiene

$$\Phi\left(\frac{x_i^* - \mu_{x_i}^N}{\sigma_{x_i}^N}\right) = F_{x_i}(x_i^*) \quad (3.142)$$

donde

$\mu_{x_i}^N, \sigma_{x_i}^N$  = Media y desviación estándar respectivamente, de la distribución normal equivalente para  $X_i$ .

$F_{x_i}(x_i^*)$  = Función de distribución acumulada de  $X_i$  evaluada en  $x_i^*$ .

$\Phi(-)$  = Función de distribución acumulada de la distribución normal estándar.

La igualdad anterior conduce a

$$\mu_{x_i}^N = x_i^* - \sigma_{x_i}^N \Phi^{-1}[F_{x_i}(x_i^*)] \quad (3.143)$$

Igualando las correspondientes ordenadas de la densidad de probabilidad en  $x_i^*$  se llega a

$$\frac{1}{\sigma_{x_i}^N} \phi\left(\frac{x_i^* - \mu_{x_i}^N}{\sigma_{x_i}^N}\right) = f_{x_i}(x_i^*) \quad (3.144)$$

donde  $\phi(-)$  es la función de densidad de probabilidad de la distribución normal estándar; de ésta se obtiene la siguiente relación

$$\sigma_{x_i}^N = \frac{\phi\left\{\Phi^{-1}[F_{x_i}(x_i^*)]\right\}}{f_{x_i}(x_i^*)} \quad (3.145)$$

En el caso de una función de comportamiento lineal, el punto apropiado sobre la superficie de falla se establece a partir de las ecs 3.131 y 3.132, donde los cosenos directores  $\alpha_i$ , ec 3.132, son

$$\alpha_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum_i a_i^2}} \quad (3.146)$$

de acuerdo con la ec 3.103 el índice de confiabilidad es

$$\beta = \frac{a_0 + \sum a_i \mu_{x_i}^N}{\sqrt{\sum_i (a_i \sigma_{x_i}^N)^2}} \quad (3.147)$$

donde en superíndice N denota el carácter estadístico para la distribución normal equivalente. Por lo tanto, el punto de falla se puede expresar como

$$x_i^* = \sigma_{x_i}^N x_i^{*'} + \mu_{x_i}^N = -\alpha_i \beta \sigma_{x_i}^N + \mu_{x_i}^N \quad (3.148)$$

Debe ser enfatizado que el reemplazamiento de la distribución actual por una distribución normal equivalente requiere la sustitución de la media y desviación estándar por aquellas de la distribución normal equivalente; esto es, las ecs 3.143 y 3.145. Utilizando éstas en la ec 3.147 se obtiene el índice de confiabilidad  $\beta$  y su correspondiente probabilidad de seguridad,  $P_s$ , a partir de la ec 3.105.

### 3.4.2.7 EXACTITUD DE LA APROXIMACIÓN LINEAL

Como se citó anteriormente, la aproximación *lineal* de las funciones de comportamiento no lineal equivale a reemplazar una superficie de falla *n*-dimensional (hipersuperficie) por un hiperplano tangente a la superficie de falla en el punto de máxima verosimilitud. En efecto, este hecho modifica la frontera entre la región segura  $g(X) > 0$  y el estado de falla  $g(X) < 0$ , transformando la superficie general curvilínea en una plana; entonces, la probabilidad de falla es la integral de volumen generalizada de la función de densidad de probabilidad conjunta sobre la región de falla  $g(X) < 0$ .

Como se ilustró en la fig 3.40, la confiabilidad estimada con base en esta superficie plana de falla está del lado conservador o de la inseguridad dependiendo de si la superficie de falla actual es convexa o cóncava hacia el origen de las variables normales estandarizadas. La exactitud puede ser mejorada por medio de aproximaciones cuadráticas o polinomiales (Fiessler *et al*, 1979), con el consiguiente costo matemático y computacional.

Para una superficie de falla cóncava, la frontera del estado seguro  $g(X) > 0$  está ubicada realmente entre el plano tangente (de distancia  $\beta$ ) y la hiperesfera de radio  $\beta$ , tal como se ilustra en la fig 3.14 para dos variables normales estandarizadas. La ecuación de falla correspondiente a la hiperesfera es (Hasofer, 1974)

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 - \beta^2 = 0 \quad (3.149)$$

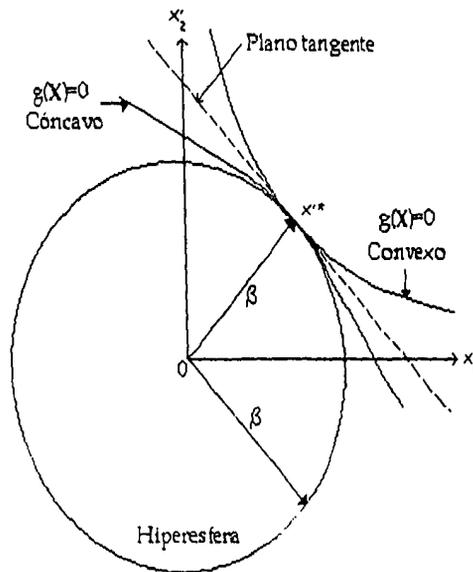


Fig 3.14 Índice de confiabilidad para varias superficies de falla.

Si las variables básicas  $X_i'$  son normales estandarizadas no correlacionadas, la suma de los cuadrados  $\sum_{i=1}^n X_i'^2$  tiene distribución chi cuadrada con  $n$  grados de libertad (Ang y Tang, 1975). Por tanto, la probabilidad de falla se puede expresar como

$$F = 1 - \chi_n^2(\beta^2) \tag{3.150}$$

donde  $\chi_n^2(-)$  es la función de distribución acumulada de la distribución chi cuadrada con  $n$  grados de libertad.

De acuerdo con lo anterior, para superficies de falla cóncavas, las fronteras de probabilidad de falla se definen como

$$\Phi(-\beta) < F < 1 - \chi_n^2(\beta^2) \tag{3.151}$$

En general, la exactitud de la aproximación lineal de segundos momentos es difícil de asegurar; ésta depende del grado de *no linealidad* de la función de comportamiento o estado  $g(X)$ . Obviamente el método es matemáticamente exacto si  $g(X)$  es lineal. Para funciones generales de comportamiento no lineal, la confiabilidad y probabilidad de falla *correctas* pueden ser evaluadas a través de simulaciones con el método de Monte Carlo para grandes muestras.

### 3.4.3 APLICACIÓN DE LA TÉCNICA DEL COCIENTE POLINOMIAL AL ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD DE PRIMER ORDEN Y SEGUNDOS MOMENTOS

Debido a que el análisis de confiabilidad de segundos momentos implica una aproximación lineal de la superficie de estado límite por medio de su expansión en serie de Taylor en el punto de máxima verosimilitud, se requiere conocer el vector de derivadas parciales de la función de comportamiento. Este vector puede evaluarse calculando las derivadas parciales de manera analítica. Sin embargo, en ocasiones este trabajo es formidable, por lo que se prefiere la aplicación de métodos numéricos; en estas circunstancias la técnica polinomial racional (Chowdhury y Xu, 1993) constituye una herramienta muy útil.

La media y la varianza de la función de estado  $g(\mathbf{X})$ , donde  $\mathbf{X}$  es un vector de variables aleatorias del suelo, pueden ser escritas de la forma siguiente

$$\begin{aligned} E[g(\mathbf{X})] &\approx g(\boldsymbol{\mu}_x) \\ \sigma^2[g(\mathbf{X})] &\approx \nabla G^T \text{Cov}(\mathbf{X}) \nabla G \end{aligned} \quad (3.152)$$

donde

$\boldsymbol{\mu}_x$  = Vector de propiedades medias del suelo.

$\nabla G$  = Vector de derivadas parciales de la función de comportamiento calculado en los valores medios de las variables aleatorias  $\sigma_{x_i}$  ( $i=1,2,\dots,n$ ).

$\text{Cov}(\mathbf{X})$  = Matriz de covarianza de las variables aleatorias.

El cálculo del vector de derivadas parciales es esencial para la evaluación de la ec 3.152, lo que requiere la aplicación de un método numérico adecuado. La derivada de la función de estado  $g(\mathbf{X})$  en el punto  $(\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n})$  puede obtenerse por medio de la técnica polinomial racional. En primer lugar se deben mantener los valores de  $X_2$  a  $X_n$  iguales a  $\mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n}$  respectivamente y se deben considerar  $m$  grupos de valores de  $X_1^{(i)}$  tal como fueron establecidos ( $i=1,2,\dots,m$ ). En otras palabras, se asignan  $m$  valores discretos a la variable  $X_1$ , los cuales deben caer entre los límites inferior y superior de esta variable (si solamente se conocen  $\mu_{x_1}$  y  $\sigma_{x_1}$ , los  $m$  valores nodales pueden ser seleccionados al considerar las fronteras inferior y superior de  $X_1$  como las  $k$  desviaciones estándar arriba y abajo del valor medio respectivo, donde un valor de  $k=3$  se considera razonable).

En el intervalo de las fronteras especificadas o supuestas, los valores discretos deben seleccionarse bastante cerca de la media, ya que el cálculo numérico de la derivada en la media se requiere frecuentemente. Por tal motivo existen  $m$  grupos de valores de la función parcial respecto a  $X_1$  que se pueden escribir como

$$\begin{aligned}
 g_{11}(X) &= g[X_1^{(1)}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n}] \\
 g_{12}(X) &= g[X_1^{(2)}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n}] \\
 &\vdots \\
 g_{1m}(X) &= g[X_1^{(m)}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n}]
 \end{aligned}
 \tag{3.153}$$

El número de grupos  $m$  no necesita ser muy grande; de hecho un valor de  $m=3$  ó  $m=5$  es generalmente suficiente.

La función parcial en el argumento de  $X_1$  puede ser aproximada por medio de un polinomio racional expresado en la forma de la fracción continua

$$g_1(X_1, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n}) \approx a_1 + \frac{X_1 - X_1^{(1)}}{a_2 + \frac{X_1 - X_1^{(2)}}{a_3 + \frac{X_1 - X_1^{(m-1)}}{a_m}}}
 \tag{3.154}$$

El miembro derecho de la ecuación anterior consta simplemente de un número de fracciones y coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_m$ .

La ec 4.59 se puede escribir en forma breve como

$$g_1(X_1, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n}) \approx \phi_1(X_1)
 \tag{3.155}$$

La relación entre  $\phi_i(X_1)$  y  $\phi_{i+1}(X_1)$  puede ser escrita como

$$\phi_i(X_1) = a_i + \frac{X_1 - X_1^{(i)}}{\phi_{i+1}(X_1)}
 \tag{3.156}$$

El último valor de  $\phi(X_1)$ , es decir,  $\phi_m(X_1)$  está dado por

$$\phi_m(X_1) = a_m \tag{3.157}$$

Los coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_m$  de la ec 3.154 pueden calcularse utilizando el proceso esbozado en la tabla 3.1.

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	...
$a_1 = g_{11}(X)$	---	---	---	
$a_{21} = g_{12}(X)$	$a_2 = \frac{X_1^{(2)} - X_1^{(1)}}{a_{21} - a_1}$	---	---	
$a_{31} = g_{13}(X)$	$a_{32} = \frac{X_1^{(3)} - X_1^{(1)}}{a_{31} - a_1}$	$a_3 = \frac{X_1^{(3)} - X_1^{(2)}}{a_{32} - a_2}$	---	
$a_{41} = g_{14}(X)$	$a_{42} = \frac{X_1^{(4)} - X_1^{(1)}}{a_{41} - a_1}$	$a_{43} = \frac{X_1^{(4)} - X_1^{(2)}}{a_{42} - a_2}$	$a_4 = \frac{X_1^{(4)} - X_1^{(3)}}{a_{43} - a_3}$	
...	...	...	...	

Tabla 3.1 Coeficientes del polinomio racional para la variable  $X_1$ .

En esta tabla se observa que la adición de un nuevo término  $X_1^{(m+1)}$  a la fracción continua no altera al coeficiente  $a_i, i=1,2,\dots,m$  para los primeros  $m$  términos. Únicamente el coeficiente  $a_{m+1}$  debe calcularse. Por tal motivo, la adición de puntos nodales extras no requiere ningún reordenamiento o recálculo de las ecuaciones.

La derivada parcial de  $g(X)$  respecto al argumento  $X_1$  puede así ser evaluada con el método del polinomio racional. Aplicando las ecs 3.154, 3.155 y 3.156, la derivada parcial de  $g(X)$  puede aproximarse de la siguiente forma

$$\frac{\partial g(X)}{\partial X_1} \approx \phi'_i(X_1) \tag{3.158}$$

Aplicando la regla de cocientes de la diferenciación repetidamente a la ec 3.156 con  $i=1$ , la ec 3.158 se puede escribir como

$$\frac{\partial g(X)}{\partial X_1} \approx \phi'_1(X_1) = \frac{\phi_2(X_1) - [X_1 - X_1^{(1)}] \phi'_2(X_1)}{[\phi_2(X_1)]^2} \tag{3.159}$$

En general, la diferencial de la ec 3.156 proporciona

$$\phi'_i(X_1) = \frac{\phi_{i+1}(X_1) - [X_1 - X_1^{(i)}] \phi'_{i+1}(X_1)}{[\phi_{i+1}(X_1)]^2} \tag{3.160}$$

Cuando  $i=m$ , la diferencial de la ec 3.157 es

$$\phi'_m(X_1) = 0 \quad (3.161)$$

Sustituyendo  $X_1$  por  $\mu_{x_1}$  en las ecs 3.159 a 3.161 se puede calcular la derivada de  $g(X)$  respecto a  $X_1$  en el punto  $\mu_x = (\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n})$  como

$$\frac{\partial g(\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n})}{\partial X_1} \approx \phi'_1(\mu_{x_1}) \quad (3.162)$$

Con este procedimiento se pueden obtener las derivadas parciales de  $g(X)$  respecto a otro argumento (variables aleatorias) en el punto  $\mu_x = (\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n})$ .

#### 3.4.4 MÉTODO DE SIMULACIÓN DE MONTE CARLO

*Simulación* es el proceso por medio del cual se reemplaza el mundo real con base en un conjunto de hipótesis y modelos concebidos en la realidad.

La simulación de Monte Carlo es una herramienta poderosa que puede ser aplicada para el análisis estadístico de la incertidumbre en problemas de ingeniería. Es particularmente útil en problemas complejos en los cuales una gran cantidad de variables aleatorias están relacionadas a través de ecuaciones no lineales.

En el campo de la ingeniería civil, la simulación puede aplicarse para predecir o estudiar el comportamiento y/o respuesta de un sistema; a través de repetidas simulaciones se puede evaluar su sensibilidad ante variaciones de sus parámetros constitutivos, pudiéndose aplicar este método para evaluar diseños alternativos o para determinar diseños óptimos. El método de Monte Carlo resulta especialmente útil para problemas que implican variables aleatorias con distribución de probabilidad conocida o supuesta; involucra una serie de repeticiones del proceso de simulación, empleando en cada una un conjunto particular de valores de la variable aleatoria generada de acuerdo con sus distribuciones de probabilidad correspondientes.

Repetiendo el proceso se puede obtener una muestra de soluciones, cada una correspondiente a un conjunto diferente de valores de la variable aleatoria. Los resultados de un proceso de simulación de Monte Carlo pueden presentarse en forma de histogramas y ser tratados aplicando métodos de estimación estadística. Por ello el método de simulación de Monte Carlo constituye también

una técnica de muestreo y como tal comparte los mismos problemas de la teoría correspondiente.

#### 3.4.4.1 GENERACIÓN DE NÚMEROS ALEATORIOS

Una de las principales tareas en la aplicación del método de simulación de Monte Carlo consiste en la sustitución de cada variable aleatoria por su correspondiente conjunto de números con las mismas propiedades estadísticas, denominados *números aleatorios*.

Para simulaciones de Monte Carlo empleando computadoras digitales es necesaria la generación de números aleatorios con distribuciones de probabilidad específica. Esto se lleva a cabo sistemáticamente para cada variable generando en primer lugar un número aleatorio uniformemente distribuido entre 0 y 1 y posteriormente, por medio de una transformación adecuada, obteniendo el número aleatorio correspondiente con la distribución de probabilidad especificada. Al respecto, el apéndice C presenta un resumen de las principales técnicas para la generación de números aleatorios con distribuciones de probabilidad comunes.

Las bases para este procedimiento son las siguientes (Ang y Tang, 1984):

Sea  $X$  la variable aleatoria que se pretende muestrear. Si se considera una variable  $U$  con densidad de probabilidad uniforme:

$$f_U(u) = \begin{cases} 0; & u < 0 \\ 1; & 0 \leq u \leq 1 \\ 0; & u > 1 \end{cases} \quad (3.163)$$

y con función de distribución:

$$F_U(u) = \begin{cases} 0; & u < 0 \\ u; & 0 \leq u \leq 1 \\ 1; & u > 1 \end{cases} \quad (3.164)$$

es posible muestrear la variable  $U$  mediante números aleatorios comprendidos entre 0 y 1 y asociar a cada valor de  $U$  el valor de  $X$  definido como sigue:

$$x = F_X^{-1}(u) \quad (3.165)$$

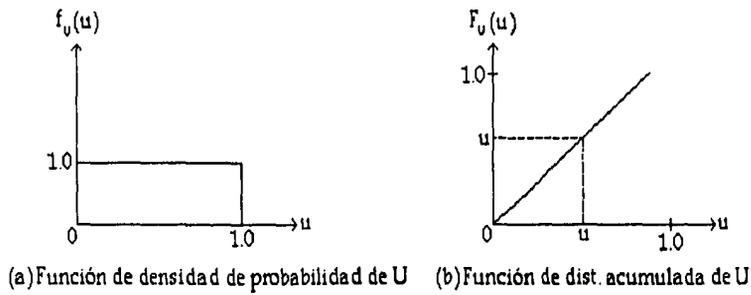


Fig 15 Funciones de densidad de probabilidad y de distribución acumulada de la variable uniforme estándar U.

donde  $F_x^{-1}$  denota la inversa de la función  $F_x$ .

El valor así obtenido de la variable X tiene una probabilidad acumulada

$$\begin{aligned}
 P(X \leq x) &= P[F_x^{-1}(U) \leq x] \\
 &= P[U \leq F_x(x)] \\
 &= F_u[F_x(x)] = F_x(x)
 \end{aligned}
 \tag{3.166}$$

lo que significa que si  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  es un grupo de valores de U, el correspondiente conjunto de valores obtenidos

$$x_i = F_x^{-1}(u_i); \quad i = 1, 2, \dots, n
 \tag{3.167}$$

es efectivamente una muestra de valores de la variable aleatoria X con función de distribución acumulada  $F_x(x)$ .

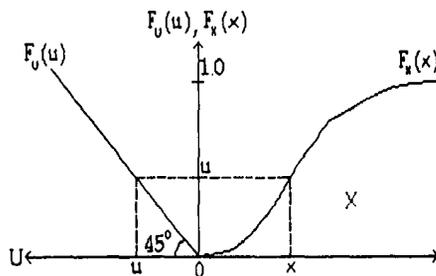


Fig 3.16 Relación entre u y x.

## 3.4.4.2 NÚMEROS ALEATORIOS CON DISTRIBUCIÓN UNIFORME ESTÁNDAR

A través de las ecs 3.163 a 3.167 se observa que la generación de números aleatorios uniformemente distribuidos entre 0 y 1, es decir, valores de la *variable uniforme estándar*, es básica para la generación de números aleatorios con una distribución general de probabilidad.

Los métodos para la generación de números aleatorios uniformemente distribuidos se basan generalmente en cálculos recursivos de los residuos del módulo  $m$  de una transformación lineal. Un ejemplo de relación recursiva para este propósito es

$$x_{i+1} = (ax_i + c) \pmod{m} \quad (3.168)$$

donde  $a$ ,  $c$  y  $m$  son números enteros no negativos. Si  $k_i$  es la parte entera de la relación  $\frac{ax_i + c}{m}$ , es decir

$$k_i = \text{Int}\left(\frac{ax_i + c}{m}\right) \quad (3.169)$$

entonces el correspondiente residuo del módulo  $m$  es

$$x_{i+1} = ax_i + c - mk_i \quad (3.170)$$

Normalizando los valores obtenidos a partir de la ecuación anterior por el módulo  $m$  se obtiene

$$u_{i+1} = \frac{x_{i+1}}{m} \quad (3.171)$$

que constituye un grupo de números aleatorios entre 0 y 1 con distribución de probabilidad uniforme estándar.

En realidad los números generados por medio de un proceso sistemático tal como el descrito anteriormente pueden ser duplicados exactamente y por ello constituyen un conjunto determinista. Estrictamente hablando, por tanto, tales números aleatorios generados no son realmente aleatorios, por lo que pueden ser denominados *números pseudoaleatorios*.

Los números pseudoaleatorios generados así son cíclicos, es decir, se repiten con un periodo dado menor que  $m$  (Knuth, 1969); por ello, para asegurar la aleatoriedad, el periodo debe ser lo más largo posible, lo que garantiza que los

números generados son uniformemente distribuidos y estadísticamente independientes.

Otra relación recursiva común para la generación de números aleatorios es la *generación congruente multiplicativa*

$$x_{i+1} = ax_i \pmod{m} \quad (3.172)$$

y

$$u_i = \frac{x_i}{m} \quad (3.173)$$

#### 3.4.4.3 CÁLCULO DE LA CONFIABILIDAD

Debido a la naturaleza aleatoria de los parámetros que influyen en el comportamiento de un sistema ingenieril, existe una posibilidad de que éste no desempeñe su tarea satisfactoriamente. El método de Monte Carlo puede ser aplicado para estimar la confiabilidad o la probabilidad de falla del sistema. En este método se utiliza un número aleatorio uniformemente distribuido para generar un valor de muestra para cada una de los parámetros aleatorios del sistema. Estos parámetros son entonces utilizados para predecir su comportamiento. El desempeño de las muestras del sistema es comparado con un patrón de comportamiento requerido. Se considera que la muestra es exitosa si el comportamiento requerido es satisfecho; si esto no sucede se considera que la muestra ha fallado. Después de la generación del número predeterminado de muestras, la confiabilidad global del sistema se calcula como

$$\left( \begin{array}{c} \text{Confiabilidad} \\ \text{del sistema} \end{array} \right) = \left( \frac{\text{Número de muestras exitosas del sistema}}{\text{Número total de muestras generadas en el sistema}} \right) \quad (3.174)$$

#### 3.4.4.4 TAMAÑO DE LA MUESTRA Y ERROR EN LA SIMULACIÓN

Es importante evaluar el error involucrado en la estimación de la confiabilidad o probabilidad de falla al aplicar el método de Monte Carlo. Resulta igualmente importante conocer el número de simulaciones requeridas para lograr una precisión específica. Al respecto, es relevante la teoría de la distribución muestral (Cochran, 1980) relativa a muestras de tamaño  $n$  extraídas de una población en las que cada elemento muestreado tiene determinada probabilidad de exhibir (éxito) o no (falla) una propiedad determinada. El análisis de confiabilidad realizado por el Método de Monte Carlo corresponde al problema anterior siendo la probabilidad de éxito  $C$  (confiabilidad) y la de falla  $P_f$ , con

$$P_f = 1 - C \quad (3.175)$$

Bajo estas consideraciones es posible determinar la desviación estándar del resultado arrojado por el cálculo de confiabilidad considerando que el número de resultados que exhiben la propiedad dentro de la muestra de tamaño  $n$  tiene distribución binomial y que la proporción de resultados con esta característica tiene por tanto una desviación estándar:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{C \cdot P_f}{n}} = \sqrt{\frac{C(1-C)}{n}} \quad (3.176)$$

Vale la pena destacar que para grandes valores de  $n$  ( $n \geq 30$ ) la distribución muestral está muy próxima a una distribución normal.

### 3.4.5 ESTIMACIÓN PUNTUAL DE ROSENBLUETH (1975)

Como se estableció anteriormente, la incertidumbre en datos y teorías en muchos problemas propicia que el ingeniero prefiera la utilización de métodos deterministas para evaluar la confiabilidad de las obras civiles, evitando de esta forma las complicaciones propias de los análisis probabilistas rigurosos. En estas circunstancias las variables aleatorias del problema son remplazadas por estimaciones puntuales, es decir, cada variable aleatoria es remplazada por un valor de tendencia central (esperanza, media o moda), con los inconvenientes ya citados en la evaluación de la confiabilidad.

Rosenblueth desarrolló un método simple para evaluar los tres primeros momentos que supera las deficiencias del tratamiento determinista, sacrificando de manera mínima la exactitud del análisis probabilista riguroso. Para funciones de una variable, el autor estima ésta y su función de densidad de probabilidad en dos puntos en vez de uno como en el análisis determinista. De esta forma se calculan 2<sup>n</sup> puntos para funciones de  $n$  variables. Cabe destacar que este método proporciona resultados generalmente satisfactorios, comparables con aquellos arrojados por el método probabilista riguroso, siempre y cuando los coeficientes de variación de las variables independientes no excedan límites moderados, lo que redundaría en un modesto incremento en la complejidad numérica del análisis.

Sean  $M$  y  $X$  variables aleatorias con  $M=g(X)$ . Cuando la distribución de  $M$  no interesa, sino únicamente una aproximación a sus primeros momentos, se puede ignorar la función de densidad de probabilidad de  $X$  y utilizar solamente sus correspondientes primeros momentos, obteniendo una solución independiente de la distribución que se le asigne. De hecho, cualquier distribución que tenga los primeros momentos de la distribución dada conduce a la solución exacta si  $M$

es una función lineal de  $X$ , es decir, se puede seleccionar cualquier distribución para  $X$  y se tiene una solución bastante aproximada si  $g(X)$  es suficientemente lineal en la vecindad del valor esperado de  $X$ , siempre que la dispersión de esta variable no sea muy grande. De esta forma se puede seleccionar la distribución ficticia de  $X$  siguiendo este criterio.

3.4.5.1 ESTIMACIÓN BIPUNTUAL

Dadas la esperanza  $\mu_x$ , la desviación estándar  $\sigma_x$  y el coeficiente de sesgo  $v_x$ , se pueden deducir expresiones aproximadas para los momentos de la distribución de  $M$ . Seleccionando las funciones de densidad de probabilidad

$$P_1 \delta(\mu_x - x_-) + P_2 \delta(\mu_x - x_+) \tag{3.177}$$

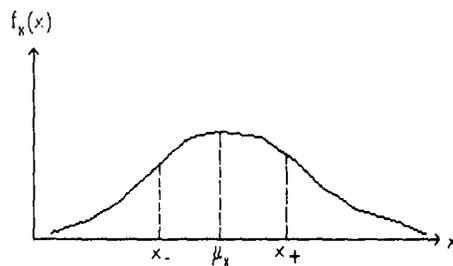


Fig 3.17 Discretización de la función de densidad de  $X$  en dos puntos.

donde  $P_1$  y  $P_2$  son coeficientes,  $\delta$  es la delta de Dirac y  $x_-$  y  $x_+$  son valores específicos de  $X$ , la función de densidad consiste en concentraciones  $P_1$  y  $P_2$  en  $x_-$  y  $x_+$ , respectivamente. Por tanto, cuando  $M$  admite expansión en serie de Taylor en  $\mu_x$

$$E(M^n) \approx P_1 m_1^n + P_2 m_2^n \tag{3.178}$$

donde  $\approx$  significa igual a, excepto para términos de orden superior,  $m_i = g(x_i)$ , donde  $n$  es un número real.

Cuando  $M$  no admite tal expansión, el signo  $\approx$  debe ser reemplazado por  $\cong$ . De la ec 3.178 se pueden calcular los parámetros de la distribución de  $M$ .

$P_1$  y  $x_1$  deben satisfacer el siguiente grupo de ecuaciones simultáneas

$$P_+ + P_- = 1 \tag{3.179}$$

$$P_+ x_+ + P_- x_- = \mu_x \tag{3.180}$$

$$P_+ (x_+ - \mu_x)^2 + P_- (x_- - \mu_x)^2 = \sigma_x^2 \tag{3.181}$$

$$P_+ (x_+ - \mu_x)^3 + P_- (x_- - \mu_x)^3 = v_x^3 \sigma_x^3 \tag{3.182}$$

cuya solución es

$$P_+ = \frac{1}{2} \left[ 1 \mp \sqrt{1 - \frac{1}{1 - \left(\frac{v_x}{2}\right)^2}} \right] \tag{3.183}$$

$$P_- = 1 - P_+ \tag{3.184}$$

$$x = \mu_x \mp \sigma_x \sqrt{\frac{P_+}{P_-}} \tag{3.185}$$

En la ec 3.183 el signo que precede al radical es aquel de  $-v_x$ . Para  $v_x \ll 1$ ,  $P_+ = \frac{1}{2} - \frac{v_x}{4}$ .

Cuando  $v_x$  es desconocida se puede asumir que es nula. Entonces,  $P_{\pm} = \frac{1}{2}$  y  $x_{\pm} = \mu_x \pm \sigma_x$ . De la ec 3.183

$$\mu_M = \frac{m_+ + m_-}{2} \tag{3.186}$$

$$\sigma_M = \left| \frac{m_+ - m_-}{2} \right| \tag{3.187}$$

$$V_M = \left| \frac{m_+ - m_-}{m_+ + m_-} \right| \tag{3.188}$$

donde  $V$  = coeficiente de variación. Cuando las dos primeras derivadas de  $g(X)$  existen y son continuas en la vecindad de  $\mu_x$ , la ec 3.186 constituye una aproximación de segundo orden (en la inteligencia de que los primeros dos

términos diferentes de cero de la expansión en serie de Taylor de  $M$  en  $\mu_x$  son retenidos), mientras que las ecs 3.187 y 3.188 son de primer orden. A través de la expansión en serie de Taylor de  $M$  las expresiones comunes de  $\mu_M$  y  $\sigma_M$  se obtienen en función de las dos primeras derivadas de  $M$  en  $\mu_x$ . Ambos grupos de aproximaciones conducen a idénticos resultados excepto para términos de orden superior, pero las ecs 3.178 y 3.186 a 3.188 no requieren el cálculo de las derivadas. Sin embargo, los resultados son pobres para funciones  $g(X)$  discontinuas y para funciones que presentan sus primeras derivadas discontinuas.

### 3.4.5.2 FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

El procedimiento descrito por las ecs 3.186 a 3.188 puede ser generalizado para funciones de varias variables estadísticamente independientes.

Sea  $Y = Y(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Rosenblueth (1975) generaliza las ecs 3.186 a 3.188, obteniendo

$$\frac{\mu_M}{m} = \frac{\mu_{M_1}}{m} \frac{\mu_{M_2}}{m} \dots \frac{\mu_{M_n}}{m} \tag{3.189}$$

$$1 + V_M^2 = (1 + V_{M_1}^2)(1 + V_{M_2}^2) \dots (1 + V_{M_n}^2) \tag{3.190}$$

donde  $m = g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})$ , y  $\mu_{M_i}$  y  $\mu_{V_{M_i}}$  son el valor esperado y el coeficiente de variación de  $M$  calculado como si  $X_i$  fuera la única variable aleatoria y las otras fueran iguales a sus valores esperados. Si  $M$  es el producto de funciones de  $X_1$  únicamente,  $X_2$  únicamente, etc., las ecs 3.189 y 3.190 son exactas. Ellas requieren sólo  $2n+1$  ó  $2n$  estimaciones puntuales.

## Aplicación a trincheras estabilizadas con lodo

### 4.1 OBJETIVOS DEL ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD

Como se estableció en el capítulo 3, el concepto de seguridad tiene una gran importancia en la práctica de la ingeniería civil. En geotecnia, el concepto de seguridad juega un papel fundamental dadas las numerosas incertidumbres que afectan a los diferentes aspectos del diseño geotécnico. Resulta importante recalcar que no es posible eliminar totalmente las dudas en cuanto a la representatividad de las muestras de suelo obtenidas durante la exploración o la precisión y validez de los ensayos de laboratorio, además de las conocidas limitaciones de los modelos usados para evaluar la estabilidad de obras térreas.

El objetivo principal de este trabajo es proporcionar un método simple y racional para estimar la seguridad estructural de las trincheras estabilizadas con lodo, a partir de la evaluación de la incertidumbre estadística de las variables de estado, efectuando un análisis de confiabilidad.

Además, se pretende evaluar el impacto de las principales variables de diseño en la confiabilidad del sistema, por medio de un análisis paramétrico que permita la identificación de las variables más importantes que determinan la seguridad de la estructura. Este análisis se aplica a una trinchera realizada en condiciones que pueden considerarse como críticas de la ciudad de México.

Por último, se analizan y discuten los criterios y recomendaciones actuales de seguridad a la luz de los resultados del análisis probabilista.

### 4.2 SELECCIÓN DEL MÉTODO DE ANÁLISIS

El análisis de confiabilidad de un sistema ingenieril multicomponente, como el de las trincheras estabilizadas con lodo, debe tomar en cuenta la existencia de diferentes modos de falla. Este análisis puede ser efectuado de diversas maneras, incluyendo la aplicación de los conceptos de fronteras de probabilidad discutidos en las secciones 3.3.4.2. y 3.3.4.3. Sin embargo, la utilización de estas ideas requiere la identificación de los diferentes modos individuales de falla y la

evaluación de sus respectivas confiabilidades, lo que constituye una tarea compleja. Además, la separación entre las fronteras de probabilidad depende del número de modos potenciales de falla y de sus magnitudes relativas, pudiéndose obtener fronteras tan amplias que le resten interés al análisis probabilista.

A la luz de estos hechos, la aplicación de métodos numéricos aproximados constituye una alternativa viable para la evaluación de la confiabilidad de sistemas ingenieriles multicomponentes. Al respecto, el método de simulación de Monte Carlo analizado en la sección 3.4.4 presenta las siguientes ventajas:

- Permite la evaluación de la confiabilidad y probabilidad de falla de sistemas multicomponentes asociados a un gran número de estados límite de manera sencilla, requiriéndose únicamente el establecimiento de los algoritmos correspondientes a cada estado.
- Permite el cálculo de la confiabilidad y probabilidad de falla asociada a cada estado límite en particular y al sistema en general. De esta forma es posible identificar de manera sencilla a los estados límite dominantes.
- Permite la generación de muestras aleatorias de las variables de estado con cualquier tipo de distribución de probabilidad, correlacionadas o independientes, mediante un sencillo ajuste del algoritmo de descomposición de Choleski descrito en el Apéndice C.
- La única desventaja del método es que se requiere un número muy grande de muestras de las variables aleatorias del sistema, de tal suerte que se garanticen pequeños valores de desviación estándar de la confiabilidad y probabilidad de falla. Sin embargo, en el caso que nos interesa, para la aplicación del método de Monte Carlo se requiere únicamente una computadora personal con procesador 486 o superior. El tiempo de cálculo es relativamente corto (aprox. 12 minutos para obtener 5,000 muestras aleatorias).
- La estructura base del programa puede ser modificada de manera sencilla para efectuar cálculos de confiabilidad de diversos sistemas ingenieriles asociados a diferentes estados límite.

Debido a las consideraciones anteriores en lo que sigue se recurrirá al método de simulación de Monte Carlo para evaluar la confiabilidad de trincheras estabilizadas con lodo.

Al respecto, el marco teórico analizado en 3.4.4 permite el desarrollo de un programa de computadora, denominado MONTECARLO1, que consta de 5 bloques de cálculo que se citan a continuación:

- Bloque 1 Introducción de las características geométricas y mecánicas del problema.
- Bloque 2 Dimensionamiento de los arreglos necesarios para el cálculo.
- Bloque 3 Introducción de los estimadores estadísticos de las variables aleatorias del problema.
- Bloque 4 Aplicación del método de descomposición de Choleski para la generación de las variables aleatorias normales correlacionadas del problema.
- Bloque 5 Truncamiento de las variables aleatorias generadas con el método de descomposición de Choleski para tomar en cuenta los intervalos de variación físicamente admisibles de ciertas variables.
- Bloque 6 Método de aproximaciones sucesivas para determinar el factor de seguridad determinista contra falla de pared, aplicando el método modificado de Alberro y Auvinet.
- Bloque 7 Método de Monte Carlo para el cálculo de la confiabilidad y probabilidad de falla del sistema, considerando los estados límite de falla de pared, de fondo y por fracturamiento hidráulico del suelo.

La descripción detallada de los cinco bloques de cálculo, así como la codificación del programa en lenguaje Basic y el diagrama de flujo se presentan en el apéndice D.

#### 4.3 ESTADOS LÍMITE DEL MODELO

Como se citó anteriormente, la confiabilidad de un sistema multicomponente es esencialmente un problema de múltiples modos de falla, donde cada modo está asociado a un estado límite, representado a su vez por una ecuación de estado límite  $g(X)=0$ .

Geoméricamente la ecuación del estado límite  $g(X)=0$  es una superficie  $n$ -dimensional (línea oscura) llamada *superficie de falla*. En este caso un lado de la superficie de falla es el estado seguro  $g(X)>0$ , mientras que el otro es el estado de

falla  $g(X) < 0$ , tal como se ilustra en la fig 4.1 extraída del capítulo 3, para dos variables aleatorias normalizadas.

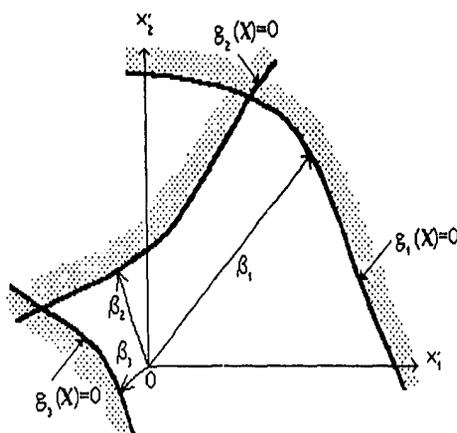


Fig 4.1 Múltiples modos de falla.

Para efectuar el presente cálculo de confiabilidad se consideran los estados límite de falla de pared, de fondo y por fracturamiento hidráulico del suelo, analizados en el capítulo 2, según los conceptos establecidos en el capítulo 3 para un sistema en serie, donde cualquiera de los tres estados límite de falla citados provoca el colapso de la excavación. Es conveniente señalar que en el presente análisis no se considera el efecto del tiempo en la disminución de la resistencia no drenada del suelo. Las ecuaciones de estado límite se presentan a continuación y están referidas a la fig 4.2:

Estado límite de falla de pared (criterio modificado de Alberro y Auvinet)

$$g(X)_{\text{PARED}} = \frac{c_v \left[ (2\alpha H + L)(1 - \alpha)^2 + \alpha^2 H(2 - \alpha) \right] + c_r \left[ 2\alpha L(2 - \alpha) \right]}{\alpha^2 HL(\gamma_L - \gamma) - 2\alpha HL \left[ \frac{(H - ZT)\gamma_L}{H} - \gamma \right] + 2Q\alpha L} - F \quad (4.1)$$

Estado límite de falla de fondo

$$g(X)_{\text{FONDO}} = \frac{5.14 \frac{c_r}{F} - Q}{\gamma - \frac{(H - ZT)\gamma_L}{H}} - H \quad (4.2)$$

Estado límite por fracturamiento hidráulico del suelo (criterio empírico)

$$g(X)_{\text{FRACT. HID}} = 2m - (ZNAF - ZT) \quad (4.3)$$

donde  $F$  = factor de seguridad mínimo aceptable.

Para fines de análisis de confiabilidad, el factor de seguridad mínimo aceptable debería tomarse igual a 1. Sin embargo, se sabe que en mecánica de suelos el factor de seguridad mínimo tiene el objetivo de cubrir otros estados límite implícitos y en particular evitar grandes deformaciones. Se conserva por tanto en los criterios anteriores un factor de seguridad mínimo aceptable, al que se asigna un valor igual a 1.2. Se considera, por tanto, que si se rebasa este factor de seguridad el comportamiento es satisfactorio ("seguridad") y que, en caso contrario, las condiciones de la trinchera son críticas ("falla").

Conviene observar por otra parte que el criterio de falla de la ec 4.1 y el de la ec 4.2 no son independientes. De hecho, se observa que cuando se reúnen las condiciones para la falla de fondo también se reúnen las necesarias para la falla de pared. Lo anterior pudo comprobarse en los diversos análisis realizados. Puede por tanto considerarse que el criterio de la ec 4.2 es redundante y que no interviene en la confiabilidad de la trinchera.

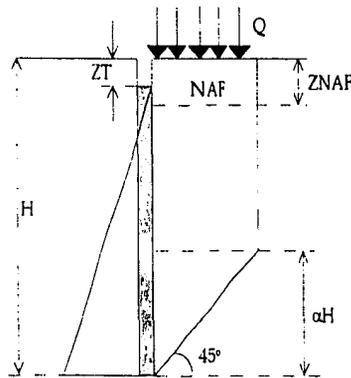


Fig 4.2 Análisis de estabilidad, criterio modificado de Alberro y Auvinet.

#### 4.4 CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS Y MECÁNICAS DE LA TRINCHERA

Se propone el análisis de una trinchera estabilizada con lodo con diferentes sobrecargas  $Q$  en la superficie (desde 0 hasta 10 kPa) y en dos condiciones diferentes. En la primera el lodo ocupa la totalidad de la excavación (trinchera A), mientras que en la segunda su tirante se localiza a 1.5 m por debajo de la superficie (trinchera B), tal como se aprecia en la fig 4.3.

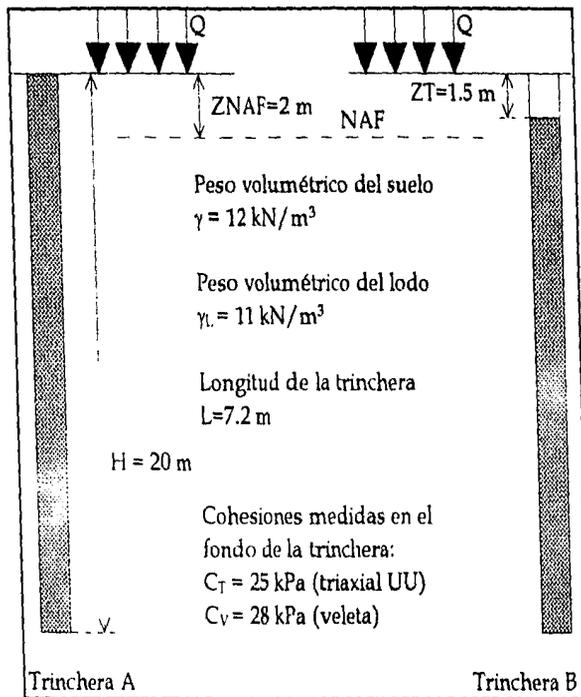


Fig 4.3 Geometría y propiedades de la trinchera.

#### 4.5 VARIABLES ALEATORIAS Y DE CONTROL

Como se comentó en 3.3.3, la confiabilidad de una obra depende de variables aleatorias y de control. Las primeras se refieren a aquellos parámetros sobre los cuales el geotecnista no puede ejercer un adecuado dominio, debido a que están asociados a fenómenos físicos que son aleatorios por naturaleza o porque no se cuenta con información adecuada o completa para efectuar predicciones y estimaciones.

Por su parte, las segundas están relacionadas con los parámetros sobre los cuales el ingeniero puede ejercer suficiente dominio, ya que cuenta con el equipo adecuado, con datos suficientes y con experiencia en eventos similares.

De esta forma es posible distinguir a las variables aleatorias y de control que intervienen en la evaluación de la confiabilidad de trincheras estabilizadas con lodo. En el segundo grupo es posible incluir a la características geométricas de la excavación (longitud y profundidad), ya que en la actualidad se cuenta con equipos que permiten ejercer un adecuado control en las dimensiones de la trinchera, así como al peso volumétrico del fluido estabilizador, ya que sobre él se ejerce un estricto control de calidad en la obra.

En el primer grupo es posible incluir a las características y propiedades del suelo, tales como su peso volumétrico y sus resistencias no drenadas medidas con las pruebas de veleta y triaxial rápida, ya que presentan una gran variabilidad espacial; además, también es posible incluir al nivel del lodo y a la sobrecarga actuante en la excavación, ya que se ha observado que en la obra no se cuenta con dispositivos o aparatos que regulen al primero, ni con disposiciones o reglamentaciones que limiten a la segunda.

Vale la pena señalar que esta discriminación de variables depende del criterio del analista y no debe considerarse como una selección definitiva o absoluta.

Más aún, en algunos casos es posible que las variables aleatorias adopten el carácter de control, siempre y cuando se cuente con elementos suficientes que permitan ejercer un adecuado dominio sobre ellas. Por ejemplo, el nivel del lodo y la sobrecarga en la trinchera pueden ser considerados como variables de control, siempre y cuando se cuente con equipos y disposiciones que permitan su regulación. De igual forma las variables de control pueden adoptar el carácter de aleatorias si por determinadas circunstancias se pierde el dominio sobre ellas, como por ejemplo, si el control de calidad del lodo es deficiente.

#### 4.6 CARACTERÍSTICAS DE LAS VARIABLES DEL PROBLEMA

Para la selección de los primeros momentos de las variables aleatorias del sistema se efectúan las siguientes consideraciones:

- La determinación del peso volumétrico del suelo y en el laboratorio se hace mediante una prueba sencilla que proporciona resultados consistentes, por lo que en este trabajo se propone un valor medio  $\mu = 12 \text{ kN/m}^3$ , una desviación estándar  $\sigma = 0.6 \text{ kN/m}^3$  y un coeficiente de variación  $V = 0.05$  como parámetros estadísticos realistas para estimar la incertidumbre de esta variable.
- El problema más serio relacionado con el análisis de estabilidad de trincheras estabilizadas con lodo en arcillas blandas, es la selección de valores adecuados de la resistencia al esfuerzo cortante del suelo. Algunas experiencias de los últimos años (Aas, 1976) muestran que el análisis no drenado basado en la prueba tradicional de veleta conduce a estimaciones incorrectas del factor de seguridad para todos los tipos de arcilla.

Por otro lado, en la ciudad de México es común observar una relación

$$1.1 \leq \frac{c_v}{c_T} \leq 1.2$$

entre las resistencias no drenadas medidas *in situ* con la prueba de veleta y en laboratorio con la prueba triaxial rápida de compresión.

De igual forma, es posible esperar una relación  $1.1 \leq \frac{c_T}{c_U} \leq 1.2$  entre las cohesiones medidas en laboratorio con las pruebas triaxial rápida (UU) y de compresión simple. Como se observa, la resistencia no drenada obtenida por medio de las diferentes pruebas de campo y laboratorio presenta cierta variabilidad. Por estos motivos se propone un valor medio  $\mu = 28$  kPa, una desviación estándar  $\sigma = 6$  kPa y un coeficiente de variación  $V = 0.21$  para la cohesión medida con la prueba de veleta y  $\mu = 25$  kPa,  $\sigma = 5$  kPa y  $V = 0.20$  para la medida con la prueba triaxial rápida, como parámetros estadísticos razonables para considerar la incertidumbre de estas variables.

- Se ha observado en diversas visitas a la obra que el nivel del lodo en la trinchera presenta fluctuaciones importantes durante el proceso de excavación. Más aún, en la mayoría de los casos no se cuenta con sistemas reguladores, tales como flotadores o electroniveles, realizándose el vaciado del lodo de manera periódica. Por ello se propone un valor medio  $\mu = 1.5$  m, una desviación estándar  $\sigma = 1$  m y un coeficiente de variación  $V = 0.67$  como parámetros estadísticos realistas para considerar la incertidumbre asociada al nivel del lodo en la trinchera.
- A partir de las mismas visitas efectuadas a la línea B es posible establecer que la sobrecarga actuante en la trinchera presenta una gran variabilidad durante el proceso de excavación. Depende de la cercanía de la trinchera con el almacén y depósito de lodo, con el equipo de bombeo y con construcciones aledañas; de la ubicación de la maquinaria pesado y del tránsito de personal y vehículos, no existiendo restricciones al respecto en la obra. Es por ello que se propone un valor medio  $\mu = 10$  kPa, una desviación estándar  $\sigma = 2$  kPa y un coeficiente de variación  $V = 0.20$ , como parámetros estadísticos razonables para considerar la incertidumbre en la sobrecarga.

La tabla 4.1 resume los parámetros estadísticos propuestos para las variables aleatorias del sistema en base a las consideraciones anteriores y muestra los valores adoptados para las variables de control en función de las dimensiones de diseño de la trinchera y del peso volumétrico del lodo utilizado en la obra.

Variables					
Aleatorias				De control	
	$\mu$	$\sigma$	V		
$\gamma$	12 kN/m <sup>3</sup>	0.6 kN/m	0.05	H	20 m
$c_T$	25 kPa	5 kPa	0.20	L	7.2 m
$c_v$	28 kPa	6 kPa	0.21	$\gamma_L$	11 kN/m <sup>3</sup>
ZT	1.5 m	1 m	0.66		
Q	10 kPa	2 kPa	0.20		

Tabla 4.1 Variables del sistema.

4.7 CORRELACIÓN ENTRE VARIABLES

Para la construcción de la matriz de correlación de las variables aleatorias del sistema se hacen las siguientes consideraciones:

- Se supone una correlación positiva entre el peso volumétrico del suelo y su resistencia no drenada. Lo anterior significa que al incrementarse la densidad del suelo se espera un incremento de su cohesión. Este hecho se toma en cuenta al establecer un coeficiente de correlación  $\rho_{\gamma,c_T} = \rho_{\gamma,c_v} = 0.8$ .
- Se asume que el nivel del lodo en la trinchera y la sobrecarga actuante son variables estadísticamente independientes.

Lo anterior permite establecer la siguiente matriz de correlación

$$\rho = \begin{bmatrix} & \gamma & c_T & c_v & ZT & Q \\ \gamma & 1 & 0.8 & 0.8 & 0 & 0 \\ c_T & 0.8 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ c_v & 0.8 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ ZT & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.8 SELECCIÓN DEL TAMAÑO DE LA MUESTRA

Como se citó anteriormente, al aplicar el método de Monte Carlo para el análisis de confiabilidad, resulta importante la determinación *a priori* del tamaño de la muestra, es decir del número de simulaciones que se realizarán.

En la fig 4.4 se muestra como, en un análisis típico, la confiabilidad calculada del sistema tiende a un comportamiento cada vez más estable y tiende hacia el valor que se pretende estimar conforme crece el número de simulaciones.

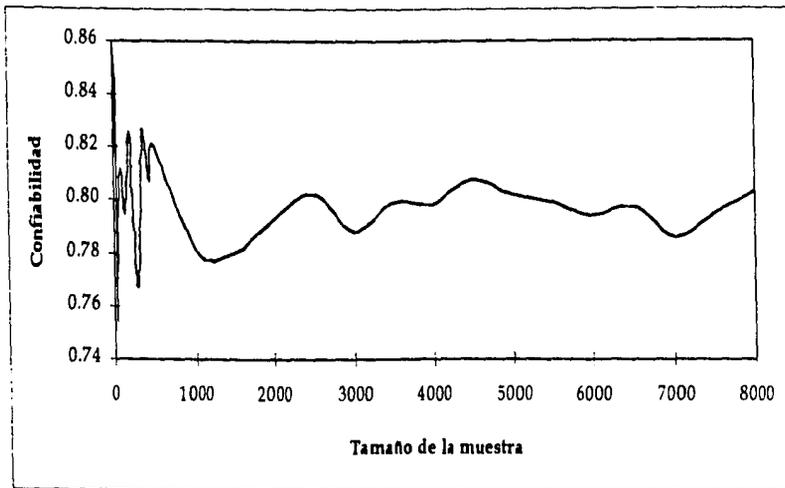


Fig 4.4 Variación de la confiabilidad de la trinchera en función del tamaño de la muestra.

Al respecto, la teoría de distribución muestral de proporciones revisada en el punto 3.4.4.4 establece que la desviación estándar de la estimación es:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{CF}{n}} = \sqrt{\frac{C(1-C)}{n}} \tag{4.4}$$

donde n = número de elementos de la muestra.

Para una muestra de 5,000 elementos, la desviación estándar máxima de la confiabilidad así calculada resulta de 7.07 E-3, para el caso más desfavorable en que C=F= 0.5 y toma un valor de 1.41 E-3 para condiciones más típicas correspondientes a C=0.99 y F=0.01.

Aceptando cierto compromiso entre la precisión obtenida definida por los valores anteriores y el tiempo de cálculo, se realizaron los análisis de confiabilidad que se presentan a continuación con muestras de 5,000 elementos para cada análisis.

#### 4.9 TRUNCAMIENTO DE LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

Los resultados de los análisis preliminares de confiabilidad manifiestan que algunos de los valores de las variables aleatorias generados por el programa MONTECARLO1 salen de su intervalo normal de variación (p.e., densidades del suelo inferiores a la del agua). Por ello es necesario el empleo de distribuciones de probabilidad truncadas (fig 4.5) con base en los límites de variación de las variables aleatorias que se proponen en la tabla 4.2.

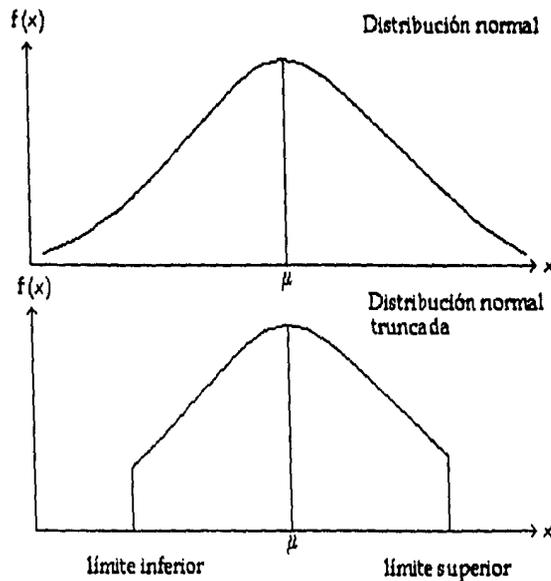


Fig 4.5 Distribución de probabilidad truncada.

Variable		Intervalo de variación	
		Límite inf.	Límite sup.
$\gamma$	Peso volumétrico del suelo ( $\text{kN/m}^3$ )	10.8	16.7
$C_T$	Resistencia no drenada medida en prueba triaxial rápida (kPa)	14.7	34.3
$C_V$	Resistencia no drenada medida con veleta (kPa)	14.7	34.3
ZT	Nivel del lodo en la trinchera (m)	0	4.5
Q	Sobrecarga en la trinchera (kPa)	0	19.6

Tabla 4.2 Intervalos de variación de las distribuciones truncadas.

#### 4.10 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DEL FACTOR DE SEGURIDAD

Al efectuar los cálculos preliminares de confiabilidad resulta interesante la construcción de los histogramas de frecuencia de los factores de seguridad contra falla de pared, con el objeto de determinar el tipo de distribución de probabilidad que siguen, considerando 3, 4 y 5 variables aleatorias del sistema, tal como se ilustra en la tabla 4.3.

HISTOGRAMA 1						HISTOGRAMA 2					
Variables						Variables					
Aleatorias			De control			Aleatorias			De control		
	$\mu$	$\sigma$	V			$\mu$	$\sigma$	V			
$\gamma$	12 kN/m <sup>3</sup>	0.6 kN/m <sup>3</sup>	0.05	H	20 m	$\gamma$	12 kN/m <sup>3</sup>	0.6 kN/m <sup>3</sup>	0.05	H	20 m
$c_r$	25 kPa	5 kPa	0.20	L	7.2 m	$c_r$	25 kPa	5 kPa	0.20	L	7.2 m
$c_v$	28 kPa	6 kPa	0.21	$\gamma_L$	11 kN/m <sup>3</sup>	$c_v$	28 kPa	6 kPa	0.21	$\gamma_L$	11 kN/m <sup>3</sup>
				ZT	1.5 m	ZT	1.5 m	1 m	0.67	Q	10 kPa
				Q	10 kPa						

HISTOGRAMA 3					
Variables					
Aleatorias			De control		
	$\mu$	$\sigma$	V		
$\gamma$	12 kN/m <sup>3</sup>	0.6 kN/m <sup>3</sup>	0.05	H	20 m
$c_r$	25 kPa	5 kPa	0.20	L	7.2 m
$c_v$	28 kPa	6 kPa	0.21	$\gamma_L$	11 kN/m <sup>3</sup>
ZT	1.5 m	1 m	0.67		
Q	10 kPa	2 kPa	0.20		

Tabla 4.3 Variables para la construcción de histogramas.

Al respecto, es posible concluir que los histogramas correspondientes a los tres casos analizados (figuras 4.6, 4.7 y 4.8) muestran una tendencia hacia la distribución normal. Las figuras 4.6 y 4.7 acusan distribución simétrica, mientras que en la fig 4.8 (sobrecarga aleatoria) se presenta asimetría.

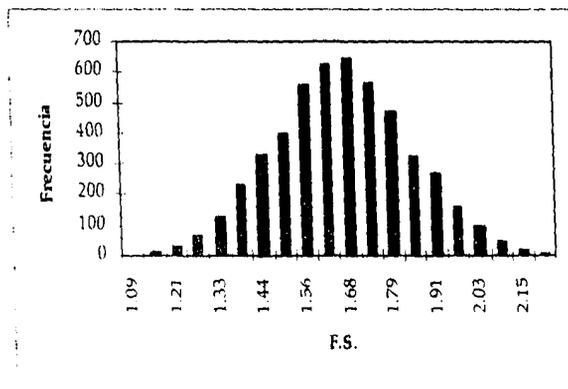


Fig 4.6 Histograma 1. Factor de seguridad considerando 3 variables aleatorias.

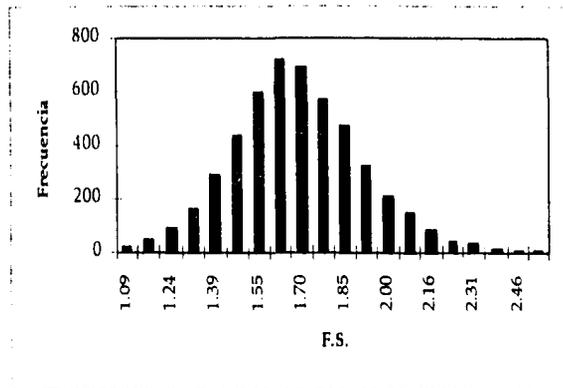


Fig 4.7 Histograma 2. Factor de seguridad considerando 4 variables aleatorias.

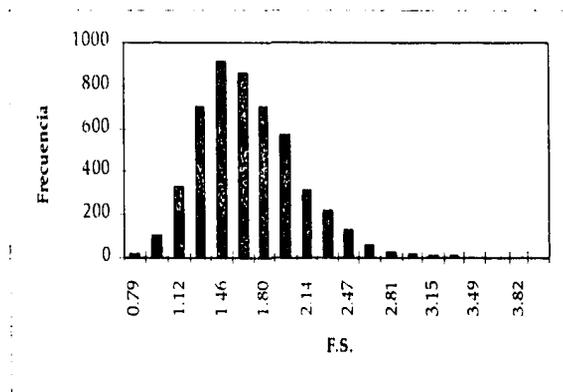


Fig 4.8 Histograma 3. Factor de seguridad considerando 5 variables aleatorias.

#### 4.11 PLANTEAMIENTO DEL ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD

El análisis de confiabilidad presentado abarca los siguientes casos:

- a) En primer lugar se analizan dos trincheras completamente llenas de lodo, como la excavación A de la fig 4.3, considerando los estados límite de falla de pared y de fondo de la excavación. En el caso 1 se supone sobrecarga nula en la superficie, mientras que en el 2 se considera una sobrecarga de 10 kPa. Las características de las variables aleatorias y de control para los casos 1 y 2 se presentan en la tabla 4.4.

Una vez planteados los casos anteriores se procede a efectuar los análisis paramétricos, evaluando la confiabilidad de la trinchera para diferentes valores de las variables de control. Los análisis paramétricos propuestos se resumen en la tabla 4.5.

TRINCHERA COMPLETAMENTE LLENA (ZT = 0)											
CASO 1					CASO 2						
Variables					Variables						
Aleatorias			De control		Aleatorias			De control			
	$\mu$	$\sigma$	V			$\mu$	$\sigma$	V			
$\gamma$	12 kN/m <sup>3</sup>	0.6 kN/m <sup>3</sup>	0.05	H	20 m	$\gamma$	12 kN/m <sup>3</sup>	0.6 kN/m <sup>3</sup>	0.05	H	20 m
$c_r$	25 kPa	5 kPa	0.20	L	7.2 m	$c_r$	25 kPa	5 kPa	0.20	L	7.2 m
$c_v$	28 kPa	6 kPa	0.21	$\gamma_L$	11 kN/m <sup>3</sup>	$c_v$	28 kPa	6 kPa	0.21	$\gamma_L$	11 kN/m <sup>3</sup>
				ZT	0					ZT	0
				Q	0					Q	10 kPa

Tabla 4.4 Variables aleatorias y de control, trinchera llena.

Análisis no.	Parámetro evaluado	Casos analizados
1	Profundidad (H)	1 y 2
2	Longitud (L)	1 y 2
3	Peso vol. del lodo ( $\gamma_L$ )	1 y 2
4	Sobrecarga (Q)	1 y 2

Tabla 4.5 Análisis paramétricos casos 1 y 2, trinchera llena.

b) En segundo lugar se analiza una trinchera parcialmente llena de lodo, como la excavación B de la fig 4.3, donde el tirante del fluido se ubica a 1.5 m por debajo de la superficie del terreno (ZT = 1.5 m), considerando nuevamente los estados límite de falla de pared y de fondo de la excavación y una sobrecarga actuante Q = 10 kPa. Se analizan los casos 3, 4 y 5, con 3, 4 y 5 variables aleatorias respectivamente, tal como se ilustra en la tabla 4.6.

Una vez planteados los casos anteriores se procede a efectuar los análisis paramétricos, evaluando la confiabilidad de la trinchera para diferentes valores de las variables de control. Los análisis paramétricos realizados se resumen en la tabla 4.7.

TRINCHERA PARCIALMENTE LLENA, ZT = 1.5 M									
CASO 3					CASO 4				
Variables					Variables				
Aleatorias			De control		Aleatorias			De control	
	$\mu$	$\sigma$	V			$\mu$	$\sigma$	V	
$\gamma$	12 kN/m <sup>3</sup>	0.6 kN/m <sup>3</sup>	0.05	H	20 m	$\gamma$	12 kN/m <sup>3</sup>	0.6 kN/m <sup>3</sup>	0.05
$c_r$	25 kPa	5 kPa	0.20	L	7.2 m	$c_r$	25 kPa	5 kPa	0.20
$c_v$	28 kPa	6 kPa	0.21	$\gamma_L$	11 kN/m <sup>3</sup>	$c_v$	28 kPa	6 kPa	0.21
				ZT	1.5 m	ZT	1.5 m	1 m	0.67
				Q	10 kPa				

TRINCHERA PARCIALMENTE LLENA, ZT=1.5 M									
CASO 5									
Variables									
Aleatorias					De control				
	$\mu$	$\sigma$	V			$\mu$	$\sigma$	V	
$\gamma$	12 kN/m <sup>3</sup>	0.6 kN/m <sup>3</sup>	0.05	H	20 m				
$c_r$	25 kPa	5 kPa	0.20	L	7.2 m				
$c_v$	28 kPa	6 kPa	0.21	$\gamma_L$	11 kN/m <sup>3</sup>				
ZT	1.5 m	1 m	0.67						
Q	10 kPa	2 kPa	0.20						

Tabla 4.6. Variables aleatorias y de control, trinchera parcialmente llena.

Análisis no.	Parámetro evaluado	Casos analizados
5	Profundidad (H)	3, 4 y 5
6	Longitud (L)	3, 4 y 5
7	Peso vol. del lodo ( $\gamma_L$ )	3, 4 y 5
8	Sobrecarga (Q)	3 y 4
9	Nivel del lodo (ZT)	3

Tabla 4.7 Análisis paramétricos casos 3, 4 Y 5, trinchera parcialmente llena.

- c) En tercer lugar se efectúa un análisis comparativo entre los cálculos de confiabilidad anteriores considerando primeramente los estados límite de falla de pared y de fondo y en seguida los anteriores incluyendo el estado límite de falla por fracturamiento hidráulico del suelo (análisis 10).
- d) Finalmente, se establece una relación entre el factor de seguridad central y su confiabilidad asociada, considerando el estado límite de falla de pared, para los casos 3, 4 y 5 (análisis 11).

TRINCHERA PARCIALMENTE LLENA, ZT = 1.5 M											
CASO 3						CASO 4					
Variables						Variables					
Aleatorias			De control			Aleatorias			De control		
	$\mu$	$\sigma$	V			$\mu$	$\sigma$	V			
$\gamma$	12 kN/m <sup>3</sup>	0.6 kN/m <sup>3</sup>	0.05	H	20 m	$\gamma$	12 kN/m <sup>3</sup>	0.6 kN/m <sup>3</sup>	0.05	H	20 m
$c_T$	25 kPa	5 kPa	0.20	L	7.2 m	$c_T$	25 kPa	5 kPa	0.20	L	7.2 m
$c_v$	28 kPa	6 kPa	0.21	$\gamma_L$	11 kN/m <sup>3</sup>	$c_v$	28 kPa	6 kPa	0.21	$\gamma_L$	11 kN/m <sup>3</sup>
				ZT	1.5 m	ZT	1.5 m	1 m	0.67	Q	10 kPa
				Q	10 kPa						

TRINCHERA PARCIALMENTE LLENA, ZT=1.5 M										
CASO 5										
Variables										
Aleatorias			De control							
	$\mu$	$\sigma$	V							
$\gamma$	12 kN/m <sup>3</sup>	0.6 kN/m <sup>3</sup>	0.05	H	20 m					
$c_T$	25 kPa	5 kPa	0.20	L	7.2 m					
$c_v$	28 kPa	6 kPa	0.21	$\gamma_L$	11 kN/m <sup>3</sup>					
ZT	1.5 m	1 m	0.67							
Q	10 kPa	2 kPa	0.20							

Tabla 4.6. Variables aleatorias y de control, trinchera parcialmente llena.

Análisis no.	Parámetro evaluado	Casos analizados
5	Profundidad (H)	3, 4 y 5
6	Longitud (L)	3, 4 y 5
7	Peso vol. del lodo ( $\gamma_L$ )	3, 4 y 5
8	Sobrecarga (Q)	3 y 4
9	Nivel del lodo (ZT)	3

Tabla 4.7 Análisis paramétricos casos 3, 4 Y 5, trinchera parcialmente llena.

- c) En tercer lugar se efectúa un análisis comparativo entre los cálculos de confiabilidad anteriores considerando primeramente los estados límite de falla de pared y de fondo y en seguida los anteriores incluyendo el estado límite de falla por fracturamiento hidráulico del suelo (análisis 10).
- d) Finalmente, se establece una relación entre el factor de seguridad central y su confiabilidad asociada, considerando el estado límite de falla de pared, para los caso 3, 4 y 5 (análisis 11).

4.12 RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD

Con base en 1'475,000 simulaciones totales generadas por el programa MONTECARLO1 se obtuvieron los siguientes resultados, al analizar los casos planteados anteriormente.

ANÁLISIS 1. COMPORTAMIENTO DE LA CONFIABILIDAD CON LA PROFUNDIDAD CASOS 1 Y 2, TRINCHERA LLENA

El análisis determinista muestra que en el caso 1, donde no existe sobrecarga, el incremento en la profundidad de la trinchera origina una disminución del factor de seguridad, observándose valores de  $F = 22.1$  para  $H = 2$  m y de  $F = 4.5$  para  $H = 20$  m (fig 4.9). Sin embargo, en el caso 2 donde la sobrecarga es de 10 kPa, se aprecia que el incremento en la profundidad de la trinchera redonda en un aumento del factor de seguridad calculado, apreciándose valores de  $F = 2.6$  para  $H = 2$  m y de  $F = 2.7$  para  $H = 20$  m.

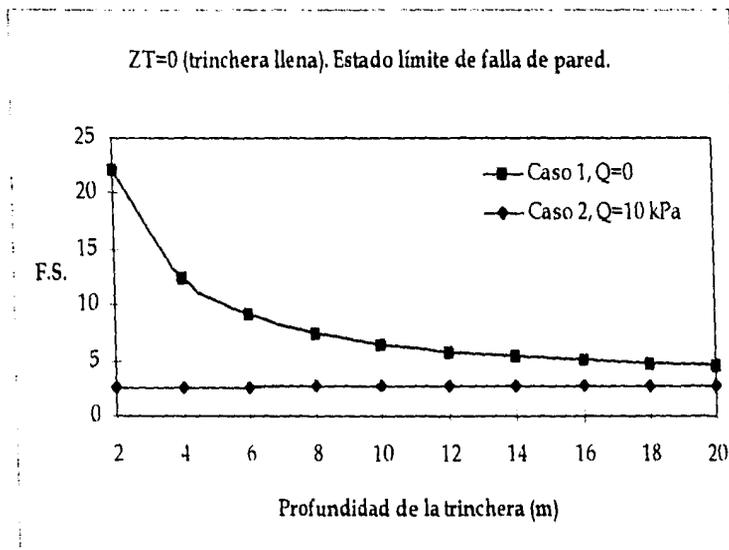


Fig 4.9 Variación del factor de seguridad con la profundidad de la trinchera.

Este hecho se explica efectuando un análisis de las fuerzas motoras (consideradas positivas) y resistentes (consideradas negativas) que intervienen en el equilibrio de la cuña de falla en la trinchera (fig 2.20).

Al respecto, es posible apreciar, en el caso 1, la gran influencia del peso de la cuña deslizante ( $W_1 + W_2$ ) en el equilibrio de la misma (fig 4.10), que tiende a aumentar a medida que la trinchera se profundiza. Este hecho provoca una disminución de la resultante de fuerzas conforme la profundidad de la excavación se incrementa (fig 4.11).

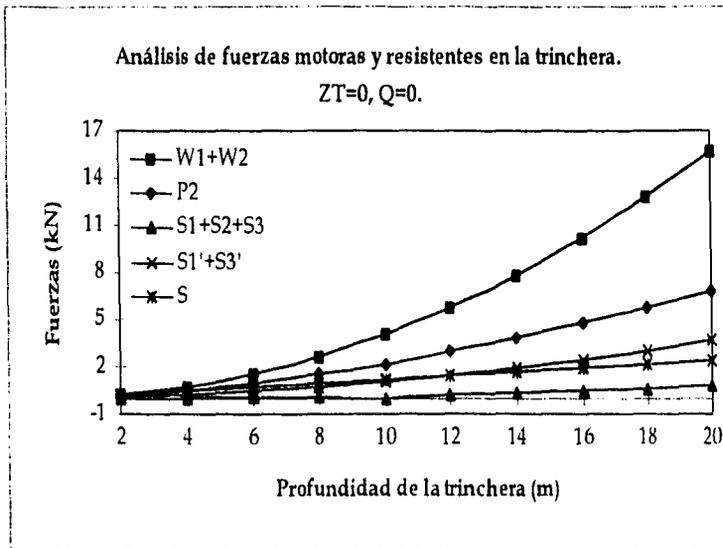


Fig 4.10 Caso 1. Fuerzas motoras y resistentes en la trinchera.

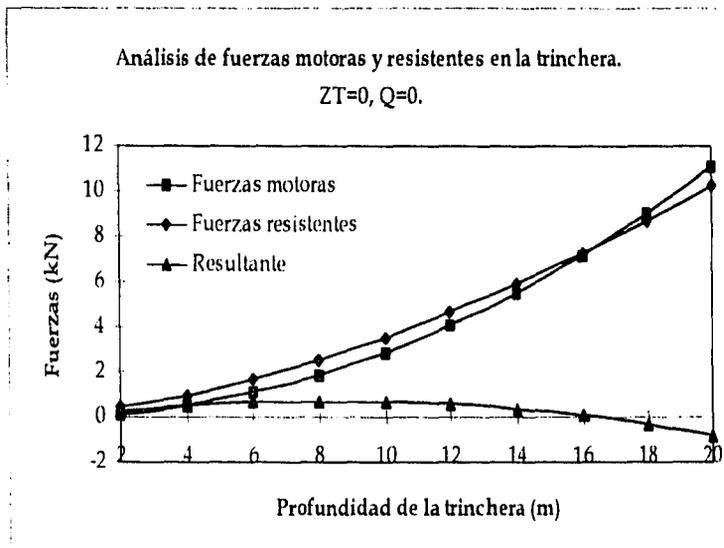


Fig 4.11 Caso 1. Resultante de fuerzas motoras y resistentes en la trinchera.

Por lo contrario, en el caso 2 las fuerzas resistentes son superiores a las motoras para todas las profundidades analizadas (fig 4.12), y la resultante tiende a aumentar conforme la trinchera se profundiza (fig 4.13).

Es posible establecer, por tanto, que para trincheras como la del caso 2, donde actúa una sobrecarga significativa, el análisis de seguridad debe efectuarse para todas las etapas de excavación previstas y no sólo considerando la profundidad final.

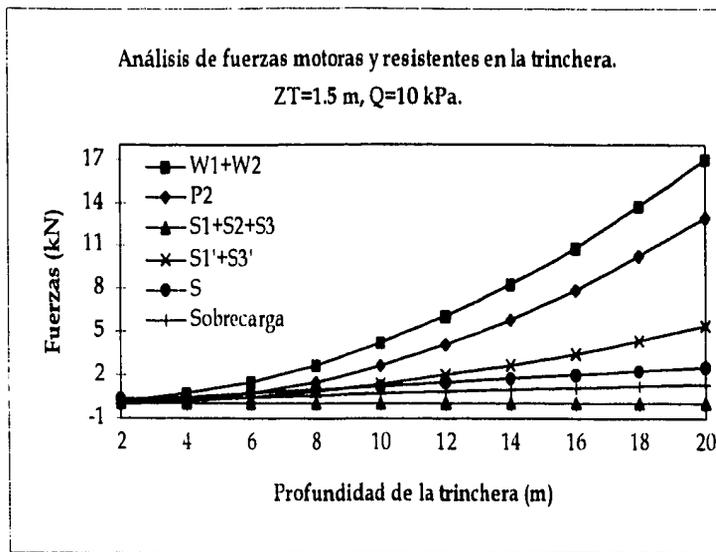


Fig 4.12 Caso 2. Fuerzas motoras y resistentes en la trinchera.

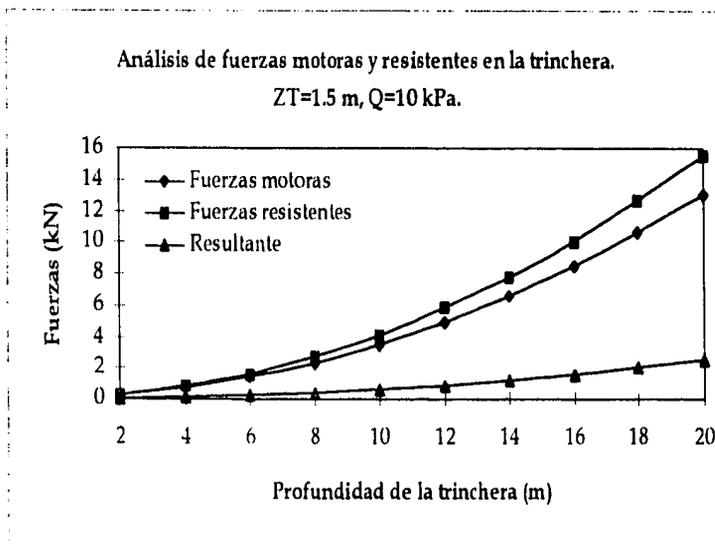


Fig 4.13 Caso 2. Resultante de fuerzas motoras y resistentes en la trinchera.

Por su parte, el análisis probabilista en ambos casos arroja confiabilidades iguales a la unidad, para todas las profundidades estudiadas (fig 4.14), lo que es congruente con el análisis determinista que muestra factores de seguridad superiores a 2.5. Este hecho indica que cuando el lodo ocupa totalmente la excavación y se tiene control en su nivel y en la sobrecarga actuante, es posible esperar buen comportamiento de la trinchera hasta profundidades de 20 m y sobrecargas hasta de 10 kPa.

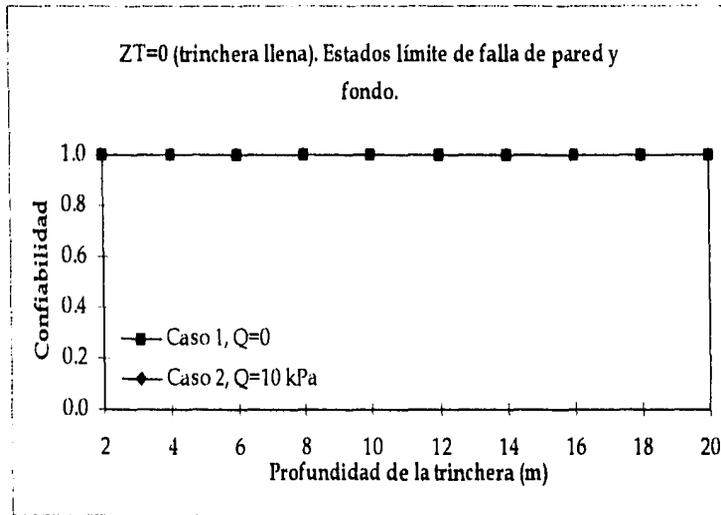


Fig 4.14 Variación de la confiabilidad con la profundidad de la trinchera.

ANÁLISIS 2. COMPORTAMIENTO DE LA CONFIABILIDAD CON LA LONGITUD CASOS 1 Y 2, TRINCHERA LLENA

El análisis determinista muestra una disminución del factor de seguridad al incrementarse la longitud de la trinchera, observándose valores de  $F = 11$  para  $L = 2$  m y de  $F = 2.9$  para  $L = 20$  m en el caso 1, y de  $F = 6.9$  para  $L = 2$  m y de  $F = 1.7$  para  $L = 20$  m en el caso 2 (fig 4.15).

A pesar de esta reducción es posible esperar buen comportamiento de ambas trincheras hasta longitudes de 20 m, siempre y cuando se tenga control sobre el nivel del lodo en la excavación y en la sobrecarga actuante.

Por su parte el análisis probabilista muestra en ambos casos confiabilidades iguales a la unidad para todas las longitudes estudiadas, lo que es congruente con el análisis determinista (fig 4.16).

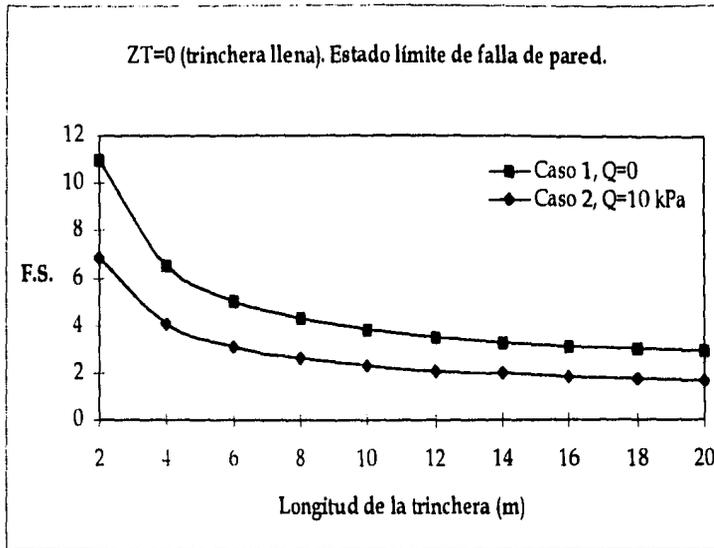


Fig 4.15 Variación del factor de seguridad con la longitud de la trinchera.

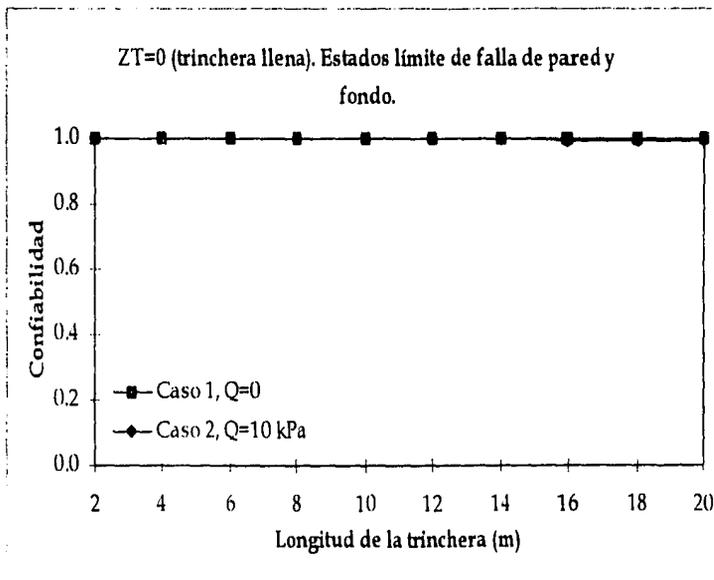


Fig 4.16 Variación de la confiabilidad con la longitud de la trinchera.

**ANÁLISIS 3. COMPORTAMIENTO DE LA CONFIABILIDAD CON EL PESO VOLUMÉTRICO DEL LODO CASOS 1 Y 2, TRINCHERA LLENA**

El análisis determinista muestra un incremento del factor de seguridad al aumentar el peso volumétrico del lodo en la trinchera, acusando valores de  $F = 1.8$  para  $\gamma_L = 8.5 \text{ kN/m}^3$  y de  $F = 12.2$  para  $\gamma_L = 11.3 \text{ kN/m}^3$ , en el caso 1; además de  $F = 1.4$  para  $\gamma_L = 8.5 \text{ kN/m}^3$  y de  $F = 4.3$  para  $\gamma_L = 11.3 \text{ kN/m}^3$  en el caso 2 (fig 4.17). Este criterio indica que es posible estabilizar ambas trincheras con fluidos con densidades inclusive menores a las del agua.

Por su parte, el análisis probabilista acusa confiabilidades prácticamente iguales a la unidad en ambos casos, excepto para el caso 2 con  $\gamma_L = 8.5 \text{ kN/m}^3$ , donde  $C = 0.9$  (fig 4.18). En estas circunstancias, la probabilidad de falla alcanza por tanto valores muy significativos a pesar de que el análisis determinista proporciona un factor de seguridad superior a 1.4. De esta forma, en este caso muy particular (uso de fluido de densidad menor que la del agua), empieza a ser notoria la discrepancia existente entre los análisis de seguridad determinista y probabilista.

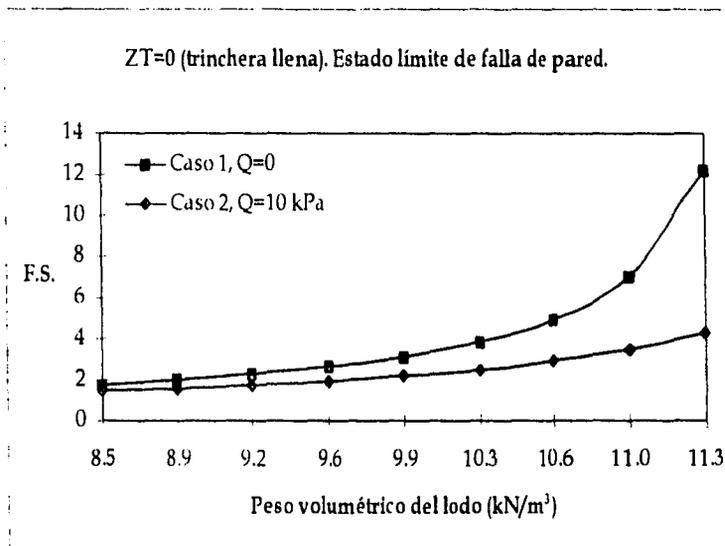


Fig 4.17 Variación del factor de seguridad con el peso volumétrico del lodo.

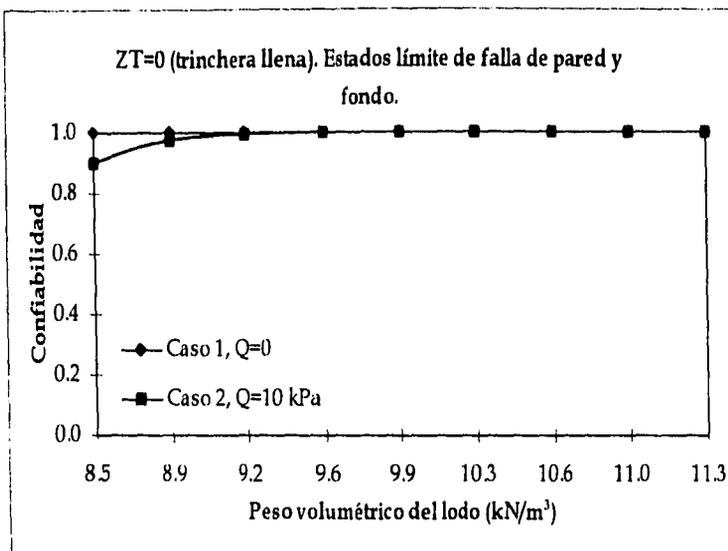


Fig 4.18 Variación de la confiabilidad con el peso volumétrico del lodo.

ANÁLISIS 4. COMPORTAMIENTO DE LA CONFIABILIDAD CON LA SOBRECARGA CASO 2, TRINCHERA LLENA

El análisis determinista muestra un decremento del factor de seguridad al aumentar la sobrecarga en la trinchera (fig 4.19). Sin embargo, se aprecian factores de seguridad superiores a 1.9 en todos los casos estudiados. De esta manera es posible esperar buen comportamiento de la trinchera hasta con sobrecargas iguales a 20 kPa.

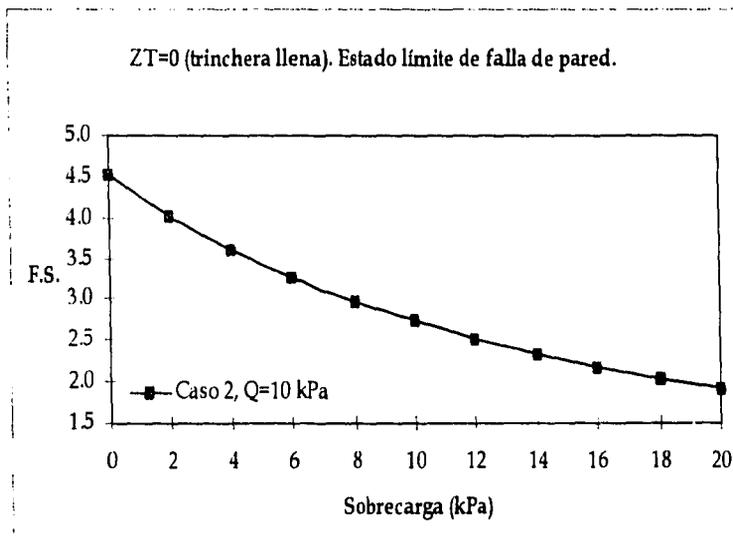


Fig 4.19 Variación del factor de seguridad con la sobrecarga en la trinchera.

Por su parte, el análisis probabilista acusa confiabilidades iguales a la unidad para todas las sobrecargas analizadas (fig 4.20), lo que es congruente con el análisis determinista.

A la luz de estos resultados es posible esperar buen comportamiento de las trincheras, para longitudes y profundidades hasta de 20 m y sobrecargas de hasta 20 kPa, siempre que el lodo llene completamente la excavación y que su peso volumétrico sea superior a  $9 \text{ kN/m}^3$ .

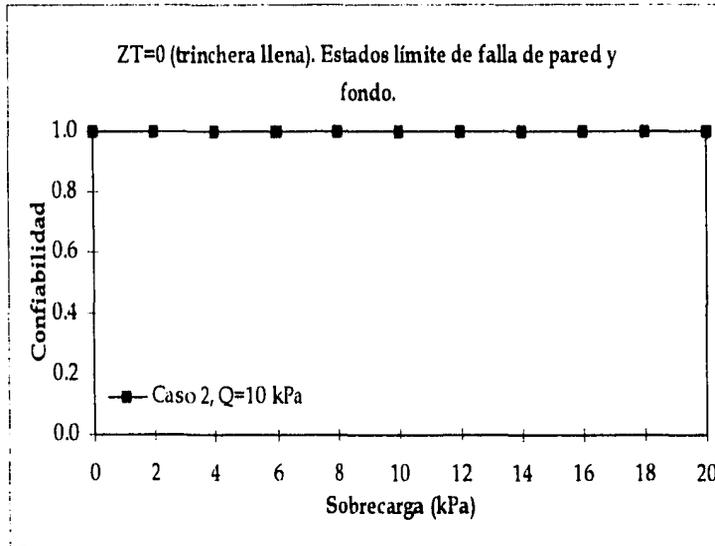


Fig 4.20 Variación de la confiabilidad con la sobrecarga en la trinchera.

#### ANÁLISIS 5. COMPORTAMIENTO DE LA CONFIABILIDAD CON LA PROFUNDIDAD CASOS 3, 4 Y 5, TRINCHERA PARCIALMENTE LLENA

El cálculo determinista arroja un factor de seguridad mínimo para trincheras de poca profundidad. Nuevamente se aprecia un incremento en este factor al profundizarse la trinchera, alcanzando un valor de  $F = 1.6$  para  $H = 20 \text{ m}$  (fig 4.21).

Por su parte, los resultados arrojados por el análisis probabilista requieren una cuidadosa interpretación. Para profundidades inferiores a 6m, los casos 4 y 5 conducen a confiabilidades más altas que en el caso 3. Este resultado puede parecer ilógico puesto que en los casos 4 y 5 se introducen incertidumbres adicionales respecto a las variables  $ZT$  y  $Q$ . Se detecta en este caso un fenómeno importante: la compensación de incertidumbres que puede conducir a una reducción de la probabilidad de falla. En efecto, las variables aleatorias que no figuran en el caso 3 pueden adoptar, en los casos 4 y 5, con cierta probabilidad valores más favorables a la estabilidad de la excavación, tales como

profundidades del tirante de lodo inferiores a 1.5 m o sobrecargas menores a 10 kPa. Para profundidades superiores a 6 m, el efecto anterior es menos significativo y la confiabilidad es mayor en el caso 3 que en los casos 4 y 5 que dan resultados semejantes (fig 4.22).

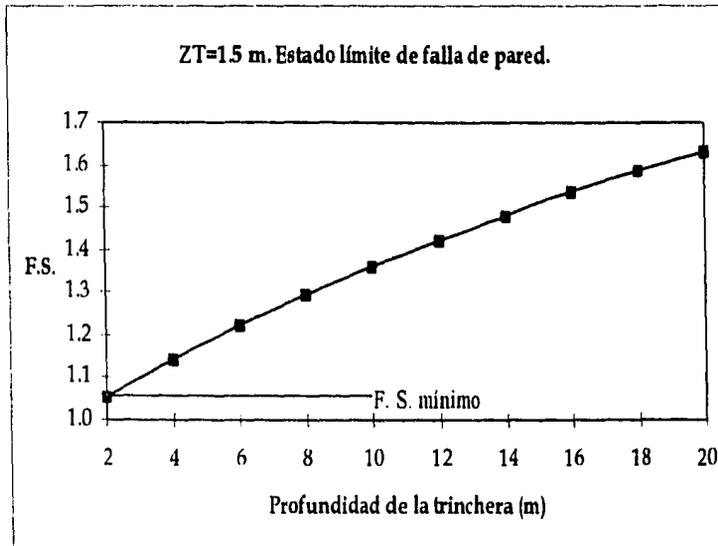


Fig 4.21 Variación del factor de seguridad con la profundidad de la trinchera.

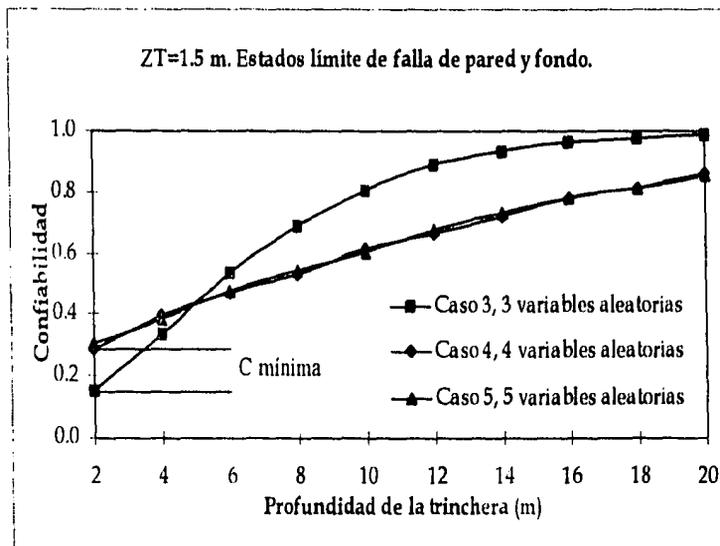


Fig 4.22 Variación de la confiabilidad con la profundidad de la trinchera.

Por otro parte, es posible apreciar nuevamente que a pesar de que el análisis determinista manifiesta un factor de seguridad  $F = 1.36$  para una profundidad  $H = 10$  m, el análisis probabilista acusa confiabilidades inferiores a 0.8 para el caso 3 y a 0.6 para los casos 4 y 5. En estas circunstancias la discrepancia entre los análisis de seguridad determinista y probabilista es notoria.

**ANÁLISIS 6. COMPORTAMIENTO DE LA CONFIABILIDAD CON LA LONGITUD CASOS 3, 4 Y 5, TRINCHERA PARCIALMENTE LLENA**

El análisis determinista acusa una disminución del factor de seguridad al aumentar la longitud de la trinchera, observándose valores de  $F = 4.17$  para  $L = 2$  m y de  $F = 1$  para  $L = 20$  m (fig 4.23). Este criterio establece que es posible esperar buen comportamiento de la trinchera hasta longitudes de 10 m para las condiciones consideradas del nivel del lodo, de su peso volumétrico y de sobrecarga.

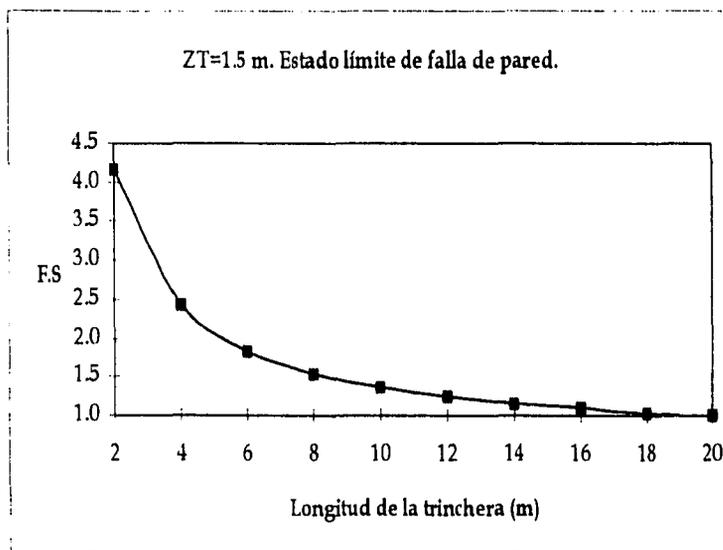


Fig 4.23 Variación del factor de seguridad con la longitud de la trinchera.

Por su parte, el análisis probabilista indica nuevamente mayor confiabilidad en la trinchera del caso 3 y similar comportamiento para los casos 4 y 5, hasta longitudes de 13 m, y mayor seguridad en los casos 4 y 5 para longitudes mayores, debido a las circunstancias previamente analizadas (fig 4.24).

Nuevamente es interesante la comparación entre los análisis determinista y probabilista de seguridad. Para una longitud de trinchera de 10 m el primero manifiesta un factores de seguridad igual a 1.3, mientras que el segundo acusa una confiabilidad igual a 0.83 para el caso 3 e igual a 0.63 para los casos 4 y 5.

Este último resultado muestra la importancia del control de la sobrecarga y del nivel del lodo.

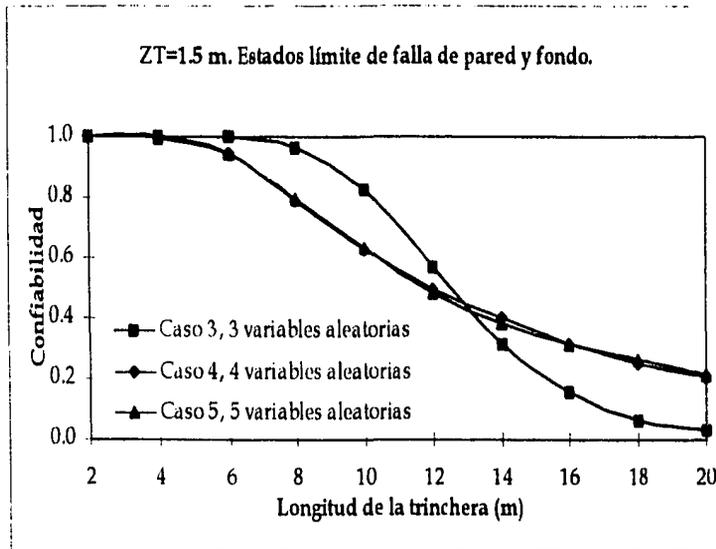


Fig 4.24 Variación de la confiabilidad con la longitud de la trinchera.

ANÁLISIS 7. COMPORTAMIENTO DE LA CONFIABILIDAD CON EL PESO VOLUMÉTRICO DEL LODO. CASOS 3, 4 Y 5, TRINCHERA PARCIALMENTE LLENA

El análisis determinista muestra un aumento del factor de seguridad de la trinchera al incrementarse el peso volumétrico del lodo, observándose un factor  $F = 1.12$  para  $\gamma_L = 8.5 \text{ kN/m}^3$  y  $F = 2$  para  $\gamma_L = 11.3 \text{ kN/m}^3$ . De igual forma es posible apreciar un factor de seguridad  $F = 1.43$  para  $\gamma_L = 10 \text{ kN/m}^3$ , lo que indica que es posible estabilizar la trinchera con un fluido inclusive menos denso que el agua y esperar buen comportamiento (fig 4.25).

Por su parte, el análisis probabilista acusa mayor seguridad de la trinchera en el caso 3, e indica igual confiabilidad de las trincheras en los casos 4 y 5 (fig 4.26).

De igual forma es posible establecer que se requieren pesos volumétricos de lodo superiores a  $10 \text{ kN/m}^3$  para trincheras del tipo 3 y a  $11 \text{ kN/m}^3$  para trincheras de los tipos 4 y 5 para garantizar confiabilidades superiores a 0.95. En estas circunstancias se justifica un estricto control de calidad en la densidad del lodo.

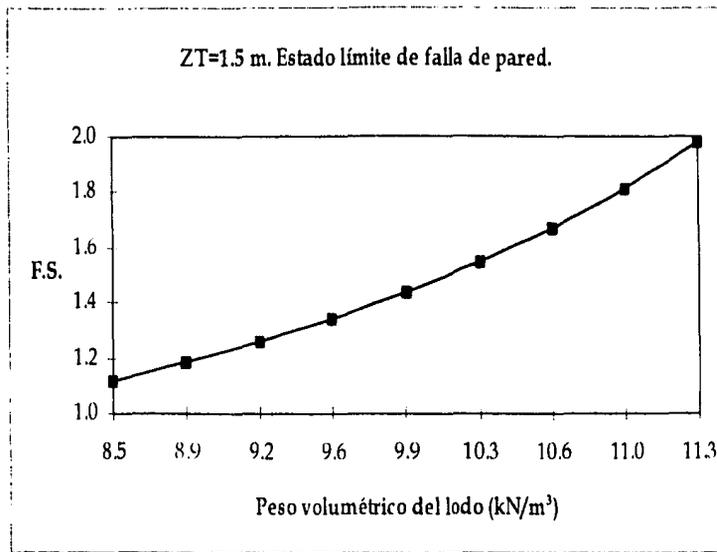


Fig 4.25 Variación del factor de seguridad de la trinchera con el peso volumétrico del lodo.

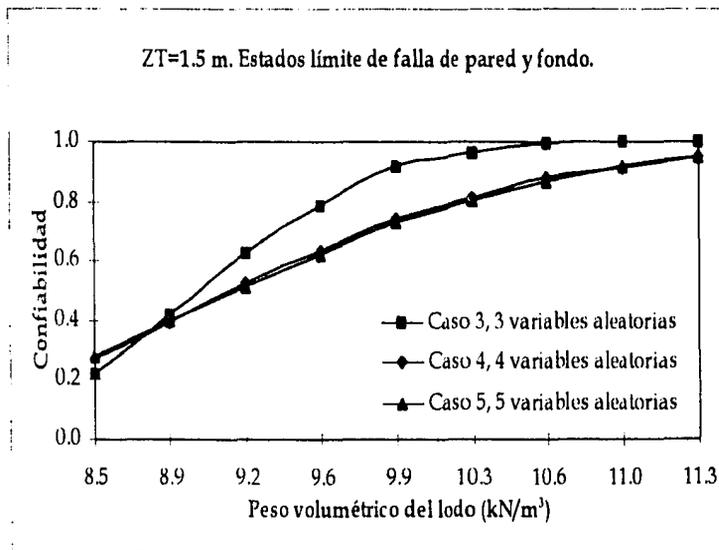


Fig 4.26 Variación de la confiabilidad de la trinchera con el peso volumétrico del lodo.

**ANÁLISIS 8. COMPORTAMIENTO DE LA CONFIABILIDAD CON LA SOBRECARGA CASOS 3 Y 4, TRINCHERA PARCIALMENTE LLENA**

El análisis determinista muestra una disminución del factor de seguridad al incrementarse la sobrecarga en la orilla de la trinchera, apreciándose un factor  $F = 2.19$  para  $Q = 0$  y  $F = 1.29$  para  $Q = 20$  kPa. Este criterio pronostica buen comportamiento de la excavación para todas las sobrecargas estudiadas (fig 4.27).

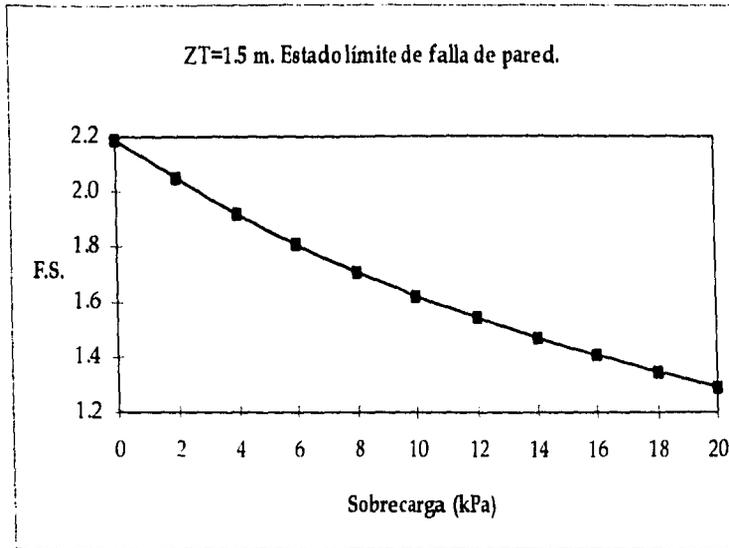


Fig 4.27 Variación del factor de seguridad con la sobrecarga en la trinchera.

Por su parte, el análisis probabilista conduce a una mayor confiabilidad de la trinchera del caso 3, donde existe un menor número de variables aleatorias, para todas las sobrecargas evaluadas. Resulta interesante apreciar que en el caso más crítico, con sobrecarga  $Q = 20$  kPa, la confiabilidad de la trinchera para el caso 3 es  $C = 0.69$ , mientras que para el caso 4 es  $C = 0.56$  (fig 4.28).

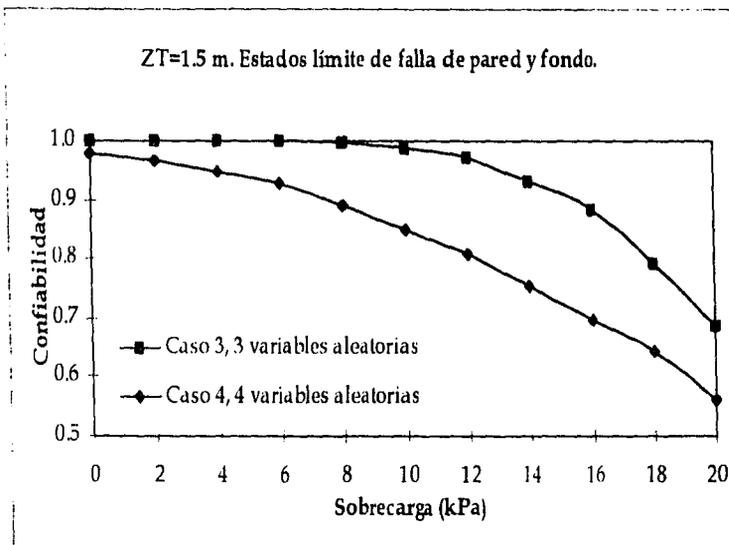


Fig 4.28 Variación de la confiabilidad con la sobrecarga en la trinchera.

Estos resultados contrastan con los del análisis determinista. Bajo estas condiciones es posible establecer que la sobrecarga máxima para obtener confiabilidades superiores a 0.95 es de 12 kPa siempre que se tenga control en el nivel del lodo, y de tan solo 2 kPa cuando este parámetro es aleatorio.

**ANÁLISIS 9. COMPORTAMIENTO DE LA CONFIABILIDAD CON EL NIVEL DEL LODO  
CASO 3, TRINCHERA PARCIALMENTE LLENA**

El análisis determinista acusa una drástico decremento del factor de seguridad al disminuir el nivel del lodo en la excavación. En este caso se aprecia que si dicho nivel desciende 1 m desde su posición original, ubicándose a 2.5 m por debajo de la superficie, el factor de seguridad resultante es inferior a 1.2, lo que sugiere problemas de estabilidad en la trinchera (fig 4.29).

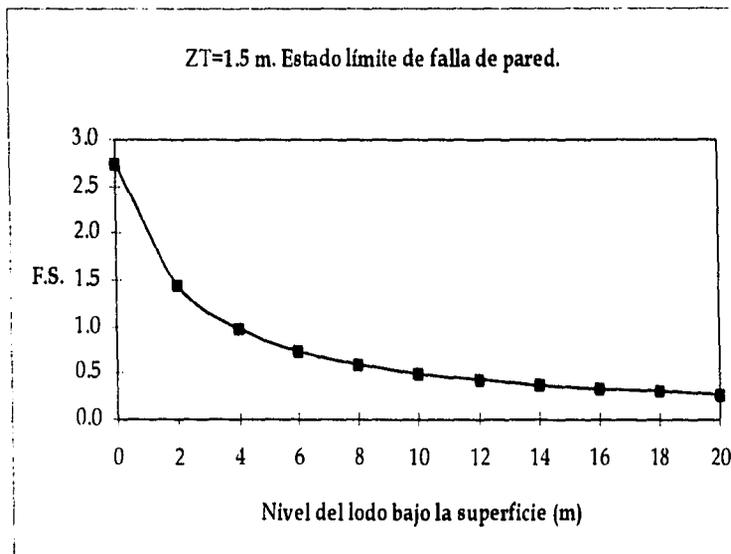


Fig 4.29 Variación del factor de seguridad con el nivel del lodo en la trinchera.

De esta forma el análisis determinista manifiesta que el nivel del lodo es el parámetro que tiene mayor incidencia en la estabilidad de la trinchera. A la luz de estos resultados es incongruente la falta de control que sobre este parámetro se tiene en la obra.

El análisis probabilista proporciona resultados semejantes a los anteriores. Es posible apreciar que la disminución de 1 m del nivel original del lodo proporciona una confiabilidad en la excavación igual a 0.7 (fig 4.30). En estas circunstancias es posible establecer que para garantizar confiabilidades superiores a 0.95 sólo pueden permitirse disminuciones mínimas en el nivel del lodo. Este hecho pone de manifiesto la necesidad de contar en la obra con dispositivos que garanticen niveles de lodo constantes.

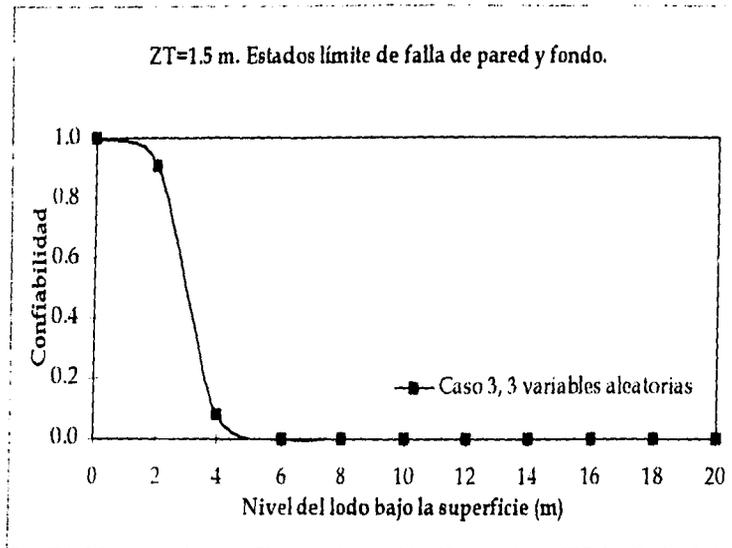


Fig 4.30 Variación de la confiabilidad con el nivel del lodo en la trinchera.

**ANÁLISIS 10. COMPORTAMIENTO DE LA CONFIABILIDAD CONSIDERANDO 2 Y 3 ESTADOS LÍMITE**

Se efectúa una comparación entre los diferentes análisis de confiabilidad realizados anteriormente, considerando en primer lugar los estados límite de falla de pared y de fondo de la excavación, y en segundo lugar los anteriores incluyendo además el estado límite de falla por fracturamiento hidráulico del suelo.

Los resultados presentados en este inciso sólo tienen carácter de ejercicio académico. En efecto, para considerar el tercer estado límite se acepta la hipótesis simplista de que el fenómeno de fracturamiento hidráulico se presenta cuando existe una diferencia de niveles de lodo y de agua freática mayor o igual a 2 m, hipótesis fundamentada en el trabajo de investigación sobre el fenómeno de propagación de grietas por llenado de las mismas (Auvinet y Arias, 1991) comentado en el capítulo 2. Cabe subrayar que esta hipótesis debería ser mejorada efectuando estudios más profundos sobre el tema.

Bajo la hipótesis anterior se pudieron construir las gráficas 4.31 a 4.34 que muestran un decremento significativo en la confiabilidad de la excavación, al incluir el estado límite de falla por fracturamiento hidráulico. Lo anterior sugiere que al no considerarlo se corre el riesgo de efectuar un análisis de seguridad demasiado optimista, lo cual redundaría en un diseño peligroso.

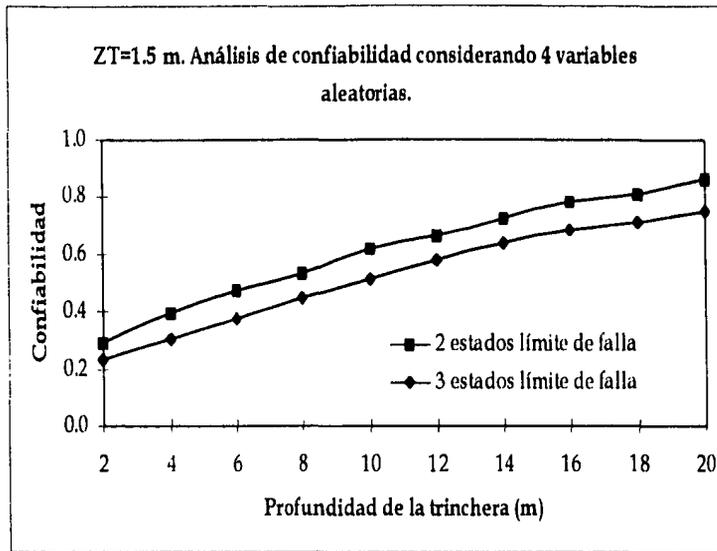


Fig 4.31 Variación de la confiabilidad con la profundidad de la trinchera.

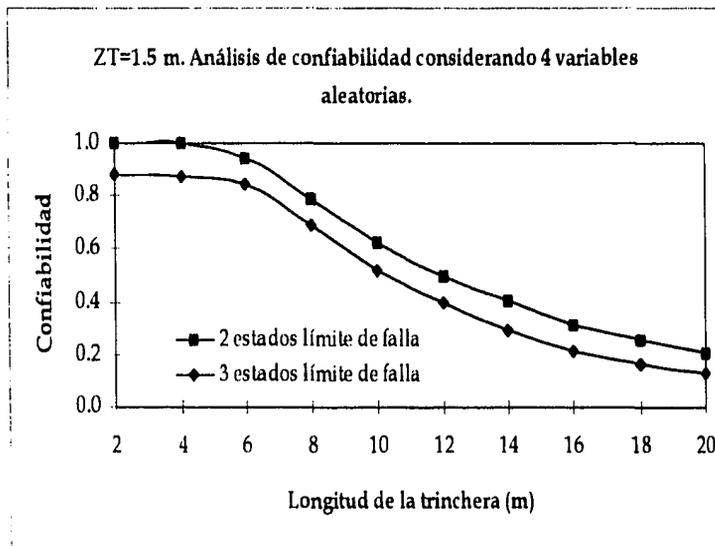


Fig 4.32 Variación de la confiabilidad con la longitud de la trinchera.

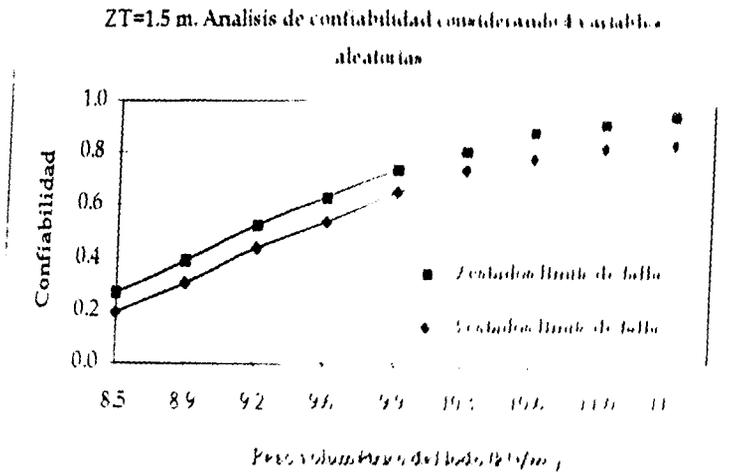


Fig. 4.55 Variación de la confiabilidad con el prob. de falla de la ZT=1.5 m.

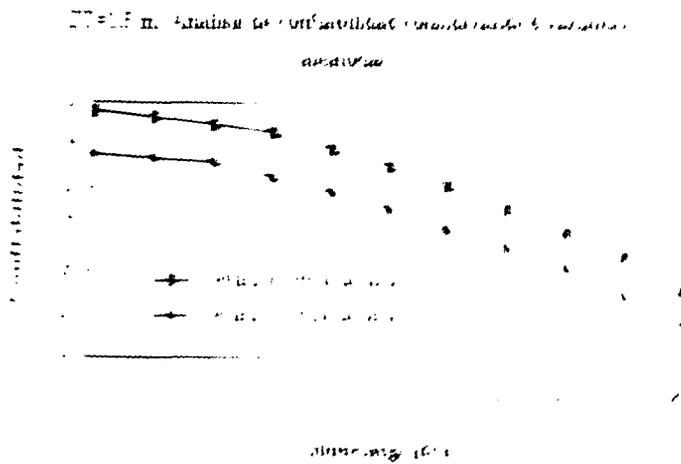


Fig. 4.56 Variación de la confiabilidad con el prob. de falla de la ZT=1.5 m.

El análisis de confiabilidad se realiza considerando 6 variables aleatorias, considerando el efecto de la ZT=1.5 m.

El análisis de confiabilidad se realiza considerando 6 variables aleatorias, considerando el efecto de la ZT=1.5 m. El análisis de confiabilidad se realiza considerando 6 variables aleatorias, considerando el efecto de la ZT=1.5 m.

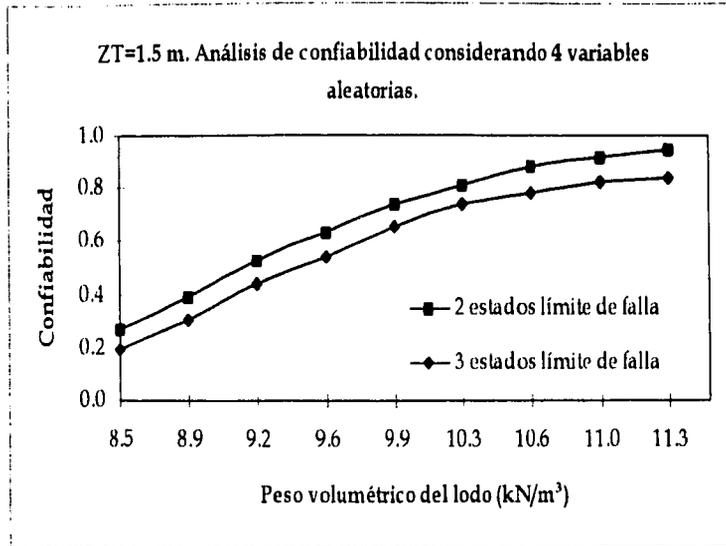


Fig 4.33 Variación de la confiabilidad con el peso volumétrico del lodo.

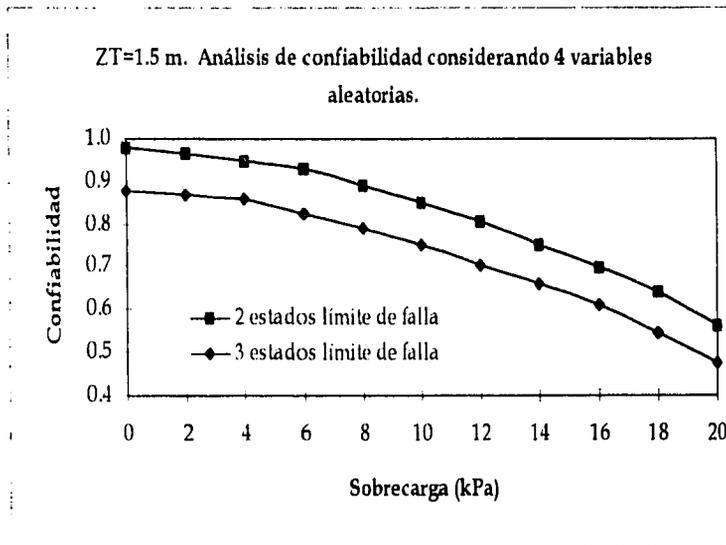


Fig 4.34 Variación de la confiabilidad con la sobrecarga en la trinchera.

ANÁLISIS 11. RELACIÓN ENTRE EL FACTOR DE SEGURIDAD CENTRAL Y LA CONFIABILIDAD

Para fines prácticos, resulta interesante establecer la relación entre el factor de seguridad central (definido en la sección 3.2) y la confiabilidad. Al respecto, aprovechando los cálculos anteriores, es posible la construcción de la fig 4.35, que permite determinar el factor de seguridad central asociado a una

confiabilidad específica, considerando el estado límite de falla de pared para los casos 3, 4 y 5, con 3, 4 y 5 variables aleatorias respectivamente.

En dicha figura se aprecia que para el caso 3, donde se ejerce control en la sobrecarga y nivel del lodo, el factor de seguridad asociado a una confiabilidad  $C = 0.96$  es  $F = 1.6$ , mientras que en el caso 4, donde no se ejerce control en la sobrecarga y en el caso 5, donde ésta y el nivel del lodo son parámetros aleatorios, el factor de seguridad asociado a la misma confiabilidad aumenta a  $F = 2.2$ . De esta manera se aprecia el impacto causado en la seguridad de los sistemas ingenieriles al perder el control en una variable de estado.

La importancia práctica de esta aplicación radica en la posibilidad de determinar el factor de seguridad central mínimo asociado a una confiabilidad determinada, teniendo conocimiento del control ejercido en las variables de estado del sistema. De esta forma, si no se desea efectuar un análisis probabilista de seguridad, se puede establecer el factor de seguridad determinista mínimo requerido para garantizar una confiabilidad considerada como satisfactoria, estableciendo previamente la viabilidad para ejercer en la obra control en la sobrecarga y nivel del lodo.

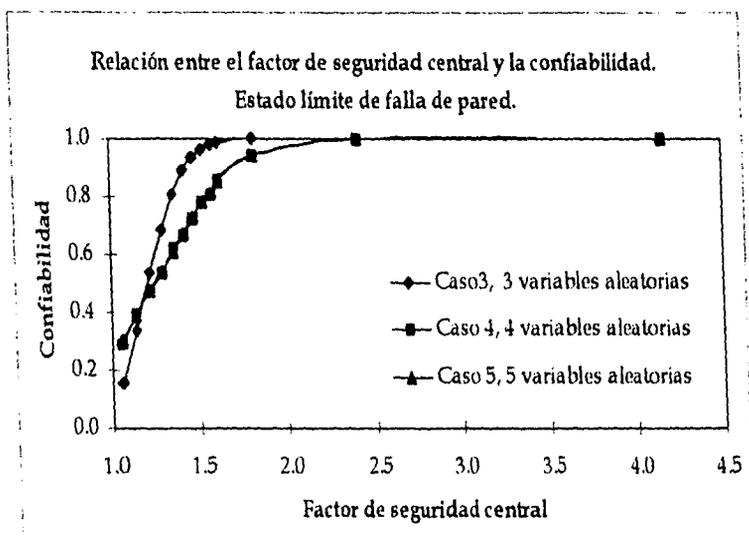


Fig 4.35 Relación entre el factor de seguridad central y la confiabilidad.

# Conclusiones

Al finalizar el presente trabajo es posible concluir lo siguiente:

- La utilización de trincheras estabilizadas con lodos constituye un desarrollo relativamente reciente dentro del campo de la ingeniería civil. En México esta técnica se ha aplicado principalmente para la construcción del metro y para cimentaciones compensadas o profundas.
- Los métodos aceptados para la evaluación de la seguridad de estas trincheras son generalmente deterministas. Sin embargo, el diseño se basa en parámetros afectados por una incertidumbre significativa y la construcción en ocasiones se realiza en condiciones poco controladas.
- La aplicación de métodos probabilistas de análisis de confiabilidad permite introducir un grado mayor de realismo en la evaluación de la seguridad de estas obras.
- El método modificado de Alberro y Auvinet (1984) constituye una herramienta útil para establecer la ecuación de estado límite de falla de pared en trincheras estabilizadas con lodo en suelos cohesivos. Más aún, este método permite un cálculo más exacto de las fuerzas que intervienen en el equilibrio de la cuña de falla de la excavación, mediante aproximaciones sucesivas.
- El fenómeno de fracturamiento hidráulico inducido durante la construcción de muros milán en la ciudad de México no ha sido estudiado a fondo. De hecho, el incremento en los consumos de lodo durante la fase de excavación y de concreto durante el colado de los muros resultan ser problemas que se resuelven en obra y que rara vez son reportados para su análisis. Al respecto, la mecánica de fracturas (Auvinet y Arias, 1991) y el análisis de las fuerzas de filtración (Alberro y Hernández, 1990) ofrecen dos marcos de referencia teóricos potencialmente útiles para abordar este problema. En los análisis de confiabilidad presentados en este trabajo se incluyó un criterio empírico simplista que deberá ser revisado en el futuro.

- La elección del modelo de falla y del tipo de distribución de probabilidad de las variables aleatorias de diseño constituyen dos de las principales dificultades en el análisis de confiabilidad. De hecho, los resultados obtenidos a partir de diferentes mecanismos de falla y distribuciones de probabilidad pueden presentar cierta dispersión.
- El método de simulación de Monte Carlo es una herramienta de convergencia lenta pero poderosa que puede aplicarse para el análisis estadístico de la incertidumbre en geotecnia. Es particularmente útil en problemas como el aquí analizado, en los cuales una gran cantidad de variables aleatorias están relacionadas a través de ecuaciones no lineales.

Los resultados de los diversos análisis de confiabilidad realizados para condiciones típicas de la ciudad de México (Análisis 1 a 10) conducen a los siguientes comentarios:

- En determinadas circunstancias de sobrecarga, geometría de la trinchera, nivel y peso volumétrico de lodo, la confiabilidad aparente de la excavación crece con la profundidad (Análisis 1 y 5). En tales circunstancias el análisis de confiabilidad debe efectuarse para todas las etapas de excavación previstas y no sólo considerando la profundidad final.
- Las trincheras estabilizadas completamente llenas presentan un alto nivel de seguridad, siempre que no exista peligro de fracturamiento hidráulico (Análisis 1 a 4). En estas circunstancias es posible estabilizar la excavación con fluidos con densidades inclusive menores a las del agua.
- Las trincheras estabilizadas parcialmente llenas presentan una seguridad adecuada siempre que se ejerza control en la sobrecarga y en el nivel y densidad de lodo, bajo condiciones geométricas y de carga típicas (Análisis 5 a 9). Sin embargo, si no se mantiene control en los parámetros citados anteriormente, la confiabilidad de las trincheras puede bajar considerablemente.
- Es posible establecer que el peso volumétrico del lodo no juega un papel importante en la confiabilidad de la trinchera, siempre y cuando ocupe totalmente el volumen de la excavación (Análisis 3). En estas circunstancias se pueden emplear fluidos inclusive menos densos que el agua. En caso de que la trinchera se encuentre parcialmente llena, el peso volumétrico del lodo constituye un factor determinante en la confiabilidad, requiriéndose mayores densidades y un control de calidad más estricto (Análisis 7).

- La sobrecarga existente en la orilla de la trinchera es un factor que puede afectar significativamente la confiabilidad de este tipo de obra (Análisis 8). Lo anterior muestra que es necesario establecer políticas de control estrictas en la obra en cuanto a peso del equipo de construcción y tolerancias respecto al almacenamiento de materiales de construcción en la proximidad de trincheras en construcción.
- El factor más importante en la confiabilidad de trincheras estabilizadas con lodo en suelos cohesivos es el tirante de lodo (Análisis 9), tal como diversos autores lo han establecido a partir de análisis deterministas. Al respecto, se observa un decremento substancial en la confiabilidad de las excavaciones al permitir que se abata dicho nivel. Este resultado es muy significativo, ya que algunas especificaciones constructivas para muros milán recomiendan mantener el fluido estabilizador a 80 cm de profundidad, sin considerar la posición del nivel freático ni las características del suelo. Estos resultados manifiestan la enorme importancia del estricto control que sobre el nivel del lodo se debe tener en la obra.
- Se observa un decremento significativo en la confiabilidad de la excavación, al introducir en el análisis un estado límite de falla por fracturamiento hidráulico (Análisis 10). Lo anterior manifiesta que al no considerarlo se corre el riesgo de efectuar un análisis de seguridad demasiado optimista, lo cual redundaría en un diseño peligroso. Este tema debe ser objeto de investigaciones adicionales.
- Los análisis comparativos realizados muestran que la aplicación de criterios deterministas para evaluar la seguridad de trincheras constituye una práctica riesgosa ya que no permite tomar en cuenta en forma explícita el carácter incierto de la información geotécnica obtenida ni las condiciones aleatorias de construcción.

A la luz de estos resultados, resulta clara la necesidad de una mayor aplicación de los métodos probabilistas en el diseño de trincheras estabilizadas con lodo en particular y de obras civiles en general.

# Referencias

Aas, G. (1976), "*Stability of slurry trench excavations in soft clay*", Norwegian Geotechnical Institute, Pub. No. 111, pp. 1-8.

Alberro, J. (1970), "*Notas sobre lodos de perforación fabricados con arcilla del valle de México*", Revista Ingeniería, Vol. XL, No. 3.

Alberro, J. y Auvinet, G. (1984), "*Construcción de estaciones del metro a gran profundidad en las arcillas del valle de México*", Memorando No. 4, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.

Alberro, J. (1986) "*Efectos en la presa Carlos Ramírez Ulloa (El Caracol)*", Memorias del simposium "Los sismos de 1985, casos de mecánica de suelos", Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos.

Alberro, J. y Hernández, R. (1990), "*Fuerzas de filtración y fracturamiento hidráulico*", Series del Instituto de Ingeniería, No. 528, Universidad Nacional Autónoma de México.

Ang, A. y Amin, M. (1968), "*Reliability of structures and structural systems*", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 94, No. EM", abril, pp. 671-691.

Ang, A. y Cornell, C. (1974), "*Reliability bases of structural safety and design*", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 100, No. ST9, septiembre, pp. 1755-1769.

Ang, A. y Tang, W. (1975), "*Probability concepts in engineering planning and design*", Vol. 1-Basic principles, John Wiley & Sons, New York.

Ang, A. y Tang, W. (1984), "*Probability concepts in engineering planning and design*", Vol. 2-Decision, risk and reliability, John Wiley & Sons, New York.

Arroyo, M. (1989), "*Approche probabiliste du comportement elasto-plastique de structures marines, sous sollicitations aleatoires de houle*", Thèse de Docteur, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.

Auvinet, G. y Arias, A. (1991), "Propagación de grietas", Simposio Agrietamiento en suelos, Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos, pp. 21-31.

Auvinet, G. y Rossa, O. (1991), "*Reliability of foundations on soft soils*", Proc. CERRA-ICASP6, Vol. 2, pp. 768-775, México.

Casagrande, A. (1965), "*Role of the calculated risk in earthwork and foundation engineering*", Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, Vol. 91, No. SM4, proc. paper 4390, julio, pp. 1-40.

Chowdhury, R. y Xu, D. (1993), "*Rational polynomial technique in slope-reliability analysis*", Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 119, No. 12, diciembre, pp. 1910-1928.

Cochran, W. (1985), "*Técnicas de muestreo*", Editorial C.E.C.S.A., Nueva York.

Cornell, C. (1969), "*A probability-based structural code*", Journal of the American Concrete Institute, title No. 66-85, diciembre 1969, pp. 974-985.

COVITUR, (1985), "*Manual de estudios geotécnicos, solución subterránea en cajón*".

Ditlevsen, O. (1979), "*Narrow reliability bounds for structural systems*", Journal of Structural Mechanics, Vol. 7, No. 4, pp. 435-451.

Ditlevsen, O. (1981), "*Principle of normal tail approximation*", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 107, pp.1191-1208.

Duncan, J. et al (1984), "*FEADAM84, a computer program for finite element analysis of dams*", Department of Civil Engineering, Virginia Polytechnic Institute and State University.

Favre, J. (1984), "*Analyse de la sécurité: Fiabilité-risque*", Ecole Centrale des Arts et Manufactures, Paris.

Fiessler, B., Neumann, H-J. y Rackwitz, R. (1979), "*Quadratic limit states in structural reliability*", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 105, No. EM4, agosto, pp. 661-676.

- Freudenthal, A. (1956), "*Safety and the probability of structural failure*", ASCE transactions, Vol. 121, pp. 1337-1397.
- Hansen, J. B. (1961), "*The ultimate resistance of rigid piles against transversal forces*", Danish Geotechnical Journal, Bull. No. 12, p. 5.
- Hart, G. (1982), "*Uncertainty analysis, loads and safety in structural engineering*", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Hasofer, A. M. (1974), "*Reliability index and failure probability*", Journal of Structural Mechanics, Vol. 3, No. 1, pp. 25-27.
- Hasofer, A. y Lind, N. (1974), "*Exact and invariant second-moment code format*", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, vol. 100, No. EM1, febrero, pp. 11-12177.
- Hellan, K. (1984), "*Introduction to fracture mechanics*", McGraw-Hill Book Company, Nueva York.
- Hencky, H. (1923), "*Über einige statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körpern*", Z. ang. Mech., Vol. 3, p. 241, Alemania.
- Hohenbichler, M. y Rackwitz, R. (1981), "*Non-normal dependent vectors in structural safety*", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 107, No. EM6, diciembre, pp. 1227-1238.
- Hunter, D. (1976), "*An upper bound for the probability of a union*", Journal of applied probability, Vol. 3, No. 3, pp. 597-603.
- Jaeger, J. (1956), "*Elasticity, fracture and flow with engineering and geological application*", John Wiley and Sons, Inc.
- Jones, G. (1963), "*Química y propiedades de fluencia en inyecciones de bentonita en lechadas y lodos de perforación en la práctica ingenieril*", Butterworths, Londres.
- Kapur, K. y Lamberson, L. (1977), "*Reliability in engineering design*", John Wiley & Sons, New York.
- Knut, D. E. (1969), "*The art of computer programming: seminumerical algorithms*", Vol. 2, Addison-Wesley, Massachusetts.
- Kobayashi, A (1973), "*Experimental techniques in fracture mechanics*", Society for experimental stress analysis, Monograph series.

- Kounias, E. (1968), "Bounds for the probability of a union with applications", *Annals of Math. Stat.*, Vol. 39, No. 6, pp. 2154-2158.
- Lee, F. et al (1988), "Tension crack development in soils", *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol 114.
- Lorenz, H (1963), "Utilization of a thixotropic fluid in trench cutting and the sinking of caissons", *Proc. Symp. Grouts and drilling muds in engineering practice*, Butterworth, Londres.
- Ma, H-F. y Ang, A. (1981), "Reliability analysis of redundant ductile structural systems", *Univ. of Ill., C. E. Studies, Str. Res. Ser. No. 494*, agosto.
- Madsen, H.; Krenk, S. y Lind, N. (1986), "Methods of structural safety", Prentice-Hall, New Jersey.
- Mayer, H. (1926), "Die Sicherheit der Bauwerke" (la seguridad de las estructuras), Springer-Verlag, Berlin.
- Meardi, G. (1962), "Prove sull'impiego di fanghi bentonici per il sostegno di pareti verticali di scavo in terreni incoerenti", Milano: Anno Accademico.
- Meli, R. (1976), "Bases para los criterios de diseño estructural del proyecto del reglamento de construcciones para el Distrito Federal", Publicación No. 375 del Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Meyerhof, G. (1951), "The ultimate bearing capacity of foundations", *Geotechnique*, Vol. 2, p. 301, Londres.
- Morgenstern, N. (1963), Discussion, *Proc. Symp. Grouts and drilling muds in engineering practice*, p. 233, Butterworth, Londres.
- Morgenstern, N. y Amir-Tahmasseb (1965), "The stability of slurry trench in cohesionless soils", *Geotechnique*, diciembre.
- Nash, J. y Jones, G. (1963), "The support of trenches using fluid mud", *Proc. Symp. Grouts and drilling muds in engineering practice*, Butterworth, Londres.
- Nash, J. (1974), "Diaphragm wall construction techniques", *Journal of the Construction Division*, ASCE, Vol. 100, No. CO4, proc. paper 11025, diciembre, pp 605-620.

- Nechnech, A. (1994), "*Fiabilité des murs de soutènement*", Diplome d'Etudes Approfondies de Genie Civil et Minier, Institute National Polytechnique de Lorraine, Paris.
- Orozco, M.; Sáenz, C y Falcón, E. (1989), "*Pantallas flexoimpermeables en suelos arenosos*", Simposio "Construcción especializada en geotecnia", Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos".
- Pagès, A. y Gondran, M. (1986), "*System reliability, evaluation & prediction in engineering*", Springer-Verlag, New York.
- Paloheimo, E. (1974), "*Structural design based on weighted fractiles*", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 100, No. ST9, pp. 1367-1378.
- Piaskowski, A. y Kowalewski, Z. (1963), "*Applications of thixotropic clay suspensions for stability of vertical sides of deep trenches without strutting*", Norwegian Geotechnical Institute, Pub. No. 111, pp 1-8.
- Peck, R. B. (1962), "*Art and science in subsurface engineering*", Geotechnique, Vol. 12, No. 1, pp 60-66.
- Rackwitz, R. (1975), "*Principis and methods for a practical probabilistic approach to structural safety*", Sub-committee for first order reliability concepts for design codes of the joint CEB-CECM-CIB-FIP-IABSE committee on structural safety, diciembre, Estados Unidos.
- Rackwitz, R. (1976), "*Practical probabilistic approach to design*", Bulletin 112, Comite European du Beton, Paris.
- Rackwitz, R. y Fiessler, B. (1978), "*Structural reliability under combined random load sequences*", Computers and Structures, Vol. 9, pp. 489-494.
- Rao, S. (1989), "*The finite element method in engineering*", 2<sup>nd</sup> ed., Pergamon Press, Oxford.
- Rao, S. (1992), "*Reliability-based design*", McGraw-Hill Inc., Nueva York.
- Ravindra, M., Heaney, A. y Lind, N. (1969), "*Probabilistic evaluation of safety factors*", final report of the IABSE symposium on concepts of safety of structures and methods of design, Londres.
- Rétháti, L. (1985), "*Probabilistic solutions in geotechnics*", Developments in geotechnical engineering Vol. 46, Elsevier, New York.

- Rodríguez, L. (1996), *Comunicación personal*.
- Romo, M. (1985), "Comentarios sobre el uso de lodos arcillosos y agua sola para estabilizar trincheras", informe del Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Rosenblatt, M. (1952), "Remarks on a multivariate transformation", *Annals of Math. Stat.*, Vol. 23, No. 3, septiembre, pp. 470-472.
- Rosenblueth, E. y Esteva, L. (1971), "Reliability basis for some mexican codes", American Concrete Institute Publications SP-31, 1971.
- Rosenblueth, E. (1975), "Point estimates for probability moments", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 72(10), pp. 1511-1524.
- Rubinstein, R. (1981), "Simulation and the Monte Carlo Method", John Wiley and Sons, New York.
- Santoyo, E. (1969), "Cambio en la resistencia al corte de las arcillas del Lago de Texcoco debidos a consolidación y explosiones", Volumen Nabor Carrillo Nacional Financiera.
- Santoyo, E., Rubio, L. y Gutiérrez, C. (1987), "Excavaciones para muro milán empleando agua como fluido estabilizador", Pub. No. 7, serie 100 kilómetros del metro, COVITUR, reimpresso en la revista Ingeniería Civil Nos. 303 y 304, Colegio de Ingenieros Civiles de México.
- Santoyo, E. (1996), "Muros milán en arcillas blandas", Trabajo de ingreso a la Academia Mexicana de Ingeniería.
- Shinozuka, M. (1983), "Basic analysis of structural safety", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 3, No. 109.
- Shooman, M. L. (1968), "Probabilistic reliability: an engineering approach", McGraw-Hill, New York.
- Singer, F. y Pytel, A. (1980), "Strength of materials", Harper and Row Publishers Inc., New York.
- Spiegel, M. (1992), "Schaumi's outline of probability and statistics", McGraw-Hill, New York.

Vallejo, L. y Liang, R. (1994) "Fracture Mechanics: Applied to geotechnical engineering", Geotechnical Special Publication No. 43, American Society of Civil Engineers.

Veder, C. (1961), "An investigation on the electrical phenomenon at the area of contact between bentonite mud and cohesionless material", Proc. 5th Int. Conf. Soil Mech., pp. 146-149, Paris.

Veder, C. (1963), "Excavation of trenches in the presence of bentonite suspensions for the construction of impermeable and load bearing diaphragms", Proc. Symp. Grouts and drilling muds in engineering practice, Butterworth, Londres.

Xantacos, P. (1979), "Slurry walls", McGraw-Hill Book Company, New York.

# A

## Transformación de Rosenblatt

### A.1 INTRODUCCIÓN

En la sección 4.2.3.1 se evaluaron las probabilidades que involucran distribuciones no normales empleando distribuciones normales equivalentes. De hecho esta técnica involucra la transformación de un grupo de variables aleatorias correlacionadas en uno equivalente de variables independientes normales estándar. Una transformación general para este propósito es la transformación de Rosenblatt (Rosenblatt, 1952).

Supóngase un grupo de  $n$  variables aleatorias  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  con una función de distribución acumulada  $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ . Un grupo de variables normales estándar independientes  $\mathbf{U} = (U_1, U_2, \dots, U_n)$  puede ser obtenido a partir de las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\Phi(u_1) &= F_1(x_1) \\ \Phi(u_2) &= F_2(x_2|x_1)\end{aligned}\tag{A.1}$$

$$\Phi(u_n) = F_n(x_n|x_1, \dots, x_{n-1})$$

Invirtiéndolo las ecuaciones anteriores sucesivamente se obtienen las variables normales deseadas  $\mathbf{U}$

$$\begin{aligned}u_1 &= \Phi^{-1}[F_1(x_1)] \\ u_2 &= \Phi^{-1}[F_2(x_2|x_1)]\end{aligned}\tag{A.2}$$

$$u_n = \Phi^{-1}[F_n(x_n|x_1, \dots, x_{n-1})]$$

La ec A.2 constituye la transformación de Rosenblatt.

Las funciones de distribución acumulada de la ec A.2 pueden ser obtenidas a partir de las funciones de distribución de probabilidad de la siguiente forma.

Dado que

$$f(x_i|x_1, \dots, x_{i-1}) = \frac{f(x_1, \dots, x_i)}{f(x_1, \dots, x_{i-1})} \quad (A.3)$$

la función de distribución acumulada puede ser obtenida como

$$F(x_i|x_1, \dots, x_{i-1}) = \frac{\int_{-\infty}^{x_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, s_i) ds_i}{f(x_1, \dots, x_{i-1})} \quad (A.4)$$

### A.2 DETERMINACIÓN DE LA CONFIABILIDAD

Para variables no normales correlacionadas, el índice de confiabilidad puede ser evaluado en el espacio de las variables independientes normales obtenidas a través de la transformación de Rosenblatt. Para ello, el siguiente algoritmo (Hohenbichler y Rackwitz, 1981) puede ser empleado:

1. Asúmase el punto de falla  $\mathbf{x}_0^* = \mathbf{x}_0$ .
2. Empleando la transformación de Rosenblatt, obténgase el punto de falla correspondiente en el espacio de  $\mathbf{u}$ ; esto es,  $\mathbf{u}_0$ .
3. Determinése la matriz Jacobiana

$$J = \frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (A.5)$$

evaluada en  $\mathbf{x}_0$ .

4. Evalúese la función de comportamiento y el vector gradiente en  $\mathbf{u}_0$

$$g(\mathbf{u}_0) = g(\mathbf{x}_0) \quad (A.6)$$

$$\mathbf{G}_{\mathbf{u}_0} = (\mathbf{J}^{-1})^T \mathbf{G}_{\mathbf{x}_0} \quad (\text{A.7})$$

5. Obténgase un nuevo punto de falla

$$\mathbf{u}^* = \frac{1}{\mathbf{G}_{\mathbf{u}_0}^T \mathbf{G}_{\mathbf{u}_0}} [\mathbf{G}_{\mathbf{u}_0}^T \mathbf{u}_0 - g(\mathbf{u}_0)] \mathbf{G}_{\mathbf{u}_0} \quad (\text{A.8})$$

y en el espacio de las variables originales, el punto de falla es (en su aproximación de primer orden)

$$\mathbf{x}^* \cong \mathbf{x}_0 + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_0) \quad (\text{A.9})$$

6. Calcúlese  $\beta = (\mathbf{u}^{*T} \mathbf{u}^*)^{1/2}$ .

7. Repítanse los pasos 2 a 6 utilizando el valor anterior de  $\mathbf{x}^*$  como el nuevo punto de falla hasta que se logre la convergencia.

A través de la diferenciación implícita se puede demostrar que las derivadas parciales en la matriz Jacobiana del paso 3 son

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \Phi^{-1}[F(x_i|\dots)]}{\partial x_j} = \frac{1}{\phi(\mathbf{u}_i)} \frac{\partial [F(x_i|\dots)]}{\partial x_j} \quad (\text{A.10})$$

Además, dado que  $\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} = 0$  para  $i < j$ , la matriz Jacobiana resulta una matriz triangular inferior, por lo que su inversa  $\mathbf{J}^{-1}$  se obtiene fácilmente por medio de la sustitución anterior.

Para finalizar, resulta conveniente hacer notar que el valor de la probabilidad de falla aproximada en general depende del orden seleccionado de las variables básicas, aunque esta diferencia rara vez es significativa (Madsen *et al*, 1986).

# B

## Ortogonalización de variables básicas

### B.1 VARIABLES CORRELACIONADAS

Los métodos de segundos momentos de primer orden para evaluar la confiabilidad y la probabilidad de falla se basa en la suposición de que las variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  no están correlacionadas o son estadísticamente independientes. En el caso de variables aleatorias correlacionadas, éstas pueden ser transformadas en un grupo de variables no correlacionadas, al cual se le pueden aplicar los métodos descrito anteriormente (Shinozuka, 1983), aplicando la ec 4.33 (estrictamente la transformación aquí presentada es aplicable únicamente a variables normales; para variables no normales correlacionadas se requiere la aplicación de la transformación de Rosenblatt descrita en el apéndice A).

La transformación requerida depende de las covarianzas o matriz de covarianza de las variables originales, que puede ser obtenida de la siguiente manera.

Suponiendo que la matriz de covarianza de las variables originales  $X_1, X_2, \dots, X_n$  es

$$[C] = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \text{Cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \sigma_{X_2}^2 & \dots & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \text{Cov}(X_n, X_2) & \dots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix} \quad (B.1)$$

donde los elementos  $\text{Cov}(X_i, X_j)$  son, respectivamente, las covarianzas entre  $X_i$  y  $X_j$ . La correspondiente covarianza entre un par de variables reducidas  $X'_i$  y  $X'_j$  es

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(X'_i, X'_j) &= E\left[(X'_i - \mu_{X'_i})(X'_j - \mu_{X'_j})\right] \\
 &= \frac{E\left[(X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j})\right]}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}} \\
 &= \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}} \\
 &= \rho_{X_i, X_j}
 \end{aligned}
 \tag{B.2}$$

Lo que significa que la covarianza entre un par de variables reducidas,  $X'_i$  y  $X'_j$ , es igual al coeficiente de correlación entre el correspondiente par de variables originales,  $X_i$  y  $X_j$ . Por tanto, la matriz de covarianza de las variables reducidas  $(X'_1, X'_2, \dots, X'_n)$  es la correspondiente matriz de correlación de las variables originales  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , es decir, la matriz de covarianza de  $(X'_1, X'_2, \dots, X'_n)$  es

$$[C'] = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}
 \tag{B.3}$$

El conjunto requerido de variables transformadas no correlacionadas puede ser obtenido a partir de  $X'$  a través de la siguiente transformación ortogonal

$$Y = T^T X'
 \tag{B.4}$$

donde

$$X' = \{X'_1, X'_2, \dots, X'_n\}.$$

$$Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\} = \text{Variables transformadas no correlacionadas.}$$

$T$  = Matriz de transformación ortogonal (el superíndice T denota transpuesta).

$T$  es matriz ortogonal si está compuesta por los eigenvectores correspondientes a los eigenvalores de la matriz  $[C']$ . Específicamente  $T$  es tal que

$$T^T [C'] T = [\lambda]
 \tag{B.5}$$

donde  $[\lambda]$  es la matriz diagonal de los eigenvalores de  $[C']$ . Se debe enfatizar que la matriz  $[C']$  es real y simétrica, es decir,  $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ ; es por ello que los eigenvectores son mutuamente ortogonales.

Con la transformación ortogonal de la ec B.4 se puede demostrar (Shinozuka, 1983) que el índice de confiabilidad de la ec 3.128 se transforma en

$$\beta = \frac{-G^{*T}X^*}{\{G^{*T}[C']G^*\}^{1/2}} \quad (B.6)$$

Las variables reducidas  $X'$  y las variables originales  $X$  se relacionan con  $Y$  de la siguiente forma. Dado que  $T$  es ortogonal,  $T^{-1} = T^T$ ; la inversión de la ec B.4 conduce a

$$X' = TY \quad (B.7)$$

y

$$\begin{aligned} X &= [\sigma_x]X' + \mu_x \\ &= [\sigma_x]TY + \mu_x \end{aligned} \quad (B.8)$$

donde

$$[\sigma_x] = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{x_2} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{x_n} \end{bmatrix} \quad (B.9)$$

además

$$\mu_x = \left\{ \begin{array}{c} \mu_{x_1} \\ \mu_{x_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_{x_n} \end{array} \right\} \quad (B.10)$$

Se puede observar que la matriz de covarianza de  $Y$  es

$$\begin{aligned}
 [C_Y] &= E(YY^T) = E(T^T X' X^T T) \\
 &= T^T E(X' X^T) T
 \end{aligned}
 \tag{B.11}$$

pero

$$E(X' X^T) = [C'] \tag{B.12}$$

Por lo tanto, con la ec B.5

$$[C_Y] = T^T [C'] T = [\lambda] \tag{B.13}$$

Por tal motivo, los eigenvalores de  $[C_Y]$  también son las varianzas de las respectivas variables  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ .

En el espacio de las variables transformadas  $Y$ , las derivadas pueden ser obtenidas a través de la regla de la cadena de la derivación parcial

$$\frac{\partial g}{\partial Y_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial X'_j} \frac{\partial X'_j}{\partial Y_i} \tag{B.14}$$

Más aún

$$\frac{\partial g}{\partial X'_j} = \frac{\partial g}{\partial X_j} \frac{dX_j}{dX'_j} = \sigma_{x_j} \left( \frac{\partial g}{\partial X_j} \right) \tag{B.15}$$

La transformación de la ec B.4 representa la rotación de las coordenadas de  $X'$  a  $Y$ ; para el caso de dos variables, esta transformación se ilustra en la fig B.1.

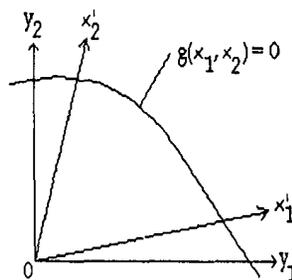


Fig B.1 Rotación de las coordenadas  $X'$  a  $Y$ .

La transformación anterior también se puede aplicar a funciones de comportamiento lineal. En este caso, las derivadas parciales de la ec B.14 son independientes de las variables, por lo que el punto de falla  $y^*$  y  $x^*$  puede ser determinado directamente; esto es, una iteración del algoritmo numérico es suficiente. Alternativamente, para funciones de comportamiento lineal de variables correlacionadas (normales), el índice de confiabilidad puede ser también determinado directamente con la ec B.6 o con base en la ec 3.115, lo que conduce a

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_{x_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \rho_{ij} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}}} \quad (\text{B.16})$$

en donde  $\rho_{ij}$  es el coeficiente de correlación entre  $X_i$  y  $X_j$ . Nuevamente, si las distribuciones de las variables aleatorias originales no son normales, la correspondiente confiabilidad y probabilidad de falla se pueden evaluar recurriendo a distribuciones normales equivalentes; en tal caso las medianas y desviaciones estándar de las distribuciones normales equivalentes  $\mu_{x_i}^N$  y  $\sigma_{x_i}^N$  deben ser utilizadas en lugar de  $\mu_{x_i}$  y  $\sigma_{x_i}$  en la ec B.16.

# C

## Generación de números aleatorios

### C.1 VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Como se indicó anteriormente, los números aleatorios con distribución preestablecida se pueden generar a través de la ec 3.164 una vez que los números aleatorios uniformemente distribuidos han sido obtenidos. Esta generación de números aleatorios se conoce como *método de transformación inversa*. La aplicación de este método es más efectiva si la inversa de la función de distribución acumulada de la variable aleatoria  $X$  se puede expresar de manera analítica, es decir, si la función inversa  $F_X^{-1}(u)$  es conocida.

La tabla C.1 proporciona en forma resumida las ecuaciones que permiten el cálculo de los números aleatorios  $x_i$  para variables aleatorias  $X$  que siguen funciones de distribución acumulada conocidas, a través del método de la transformación inversa (Ang y Tang, 1984; Rao, 1992).

DISTRIBUCIÓN	$F_X(x)$	$x_i$
Uniformemente distribuida en el rango $a, b$	$F_X(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}; & a \leq x \leq b \\ 0; & \text{cualquier otro} \end{cases}$	$x_i = a + (b-a)u_i$
Exponencial	$F_X(x) = 1 - e^{-(x/\alpha)}$	$x_i = -\alpha \ln(1 - u_i)$
Weibull	$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x/\beta)^\alpha}; & 0 \leq x \leq \infty \\ 0; & \text{cualquier otro} \end{cases}$	$x_i = \beta(-\ln u_i)^{1/\alpha}$
Tipo I asintótica	$F_X(x) = \exp[-e^{-\alpha(x-\beta)}]$	$x_i = \beta - \frac{1}{\alpha} \ln\left(\ln \frac{1}{u_i}\right)$

Tabla C.1 Generación de números aleatorios con el método de la transformación inversa.

Si la función de distribución de probabilidad no puede ser invertida analíticamente, es decir, si el método de la transformación inversa no puede ser aplicado (como en el caso de las distribuciones normal y lognormal), existen métodos alternativos para la generación de números aleatorios, tales como el método de la composición y el de las funciones de variables aleatorias (Ang y Tang, 1984). Los resultados obtenidos con la aplicación de estos dos métodos se resumen en la tabla C.2.

DISTRIBUCIÓN	$f_x(x)$	$x_i$
Normal	$f_{U,V}(u,v) = e^{-u}$ $U = -\ln U_1$ $V = U_2$ donde $U_1$ y $U_2$ = Variables uniformes estándar independientes	$x_1 = \mu + \sigma \sqrt{-2 \ln u_1} \cos 2\pi u_2$ $x_2 = \mu + \sigma \sqrt{-2 \ln u_1} \sin 2\pi u_2$
Lognormal	$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi x}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\xi}\right)^2\right]$ $0 \leq x \leq \infty$	$x_i = e^{x'_i}$ $x'_i$ = valor de la distribución normal $N(\lambda, \xi)$
Beta	$f_x(x) = \frac{1}{B(q,r)} x^{q-1} (1-x)^{r-1}; 0 \leq x \leq 1$	$x = \frac{u_1^{1/q}}{u_1^{1/q} + u_2^{1/r}}$
Gamma	$f_x(x) = \frac{v(vx)^{k-1} e^{-vx}}{\Gamma(k)}$ $x \geq 0$	$x = \frac{1}{v} (-\ln u_3) \frac{u_1^{1/k}}{u_1^{1/k} + u_2^{1/(1-k)}}$

Tabla C.2 Generación de números aleatorios con los métodos de la composición y de las funciones de variables aleatorias.

C.2 GENERACIÓN DE NÚMEROS ALEATORIOS CONJUNTAMENTE DISTRIBUIDOS

VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un conjunto de  $n$  variables aleatorias. Si estas variables son estadísticamente independientes, entonces sus funciones conjuntas de densidad y distribución de probabilidad pueden expresarse como

$$f_{x_1, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{x_i}(x_i) \tag{C.1}$$

$$F_{x_1, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_{x_i}(x_i) \tag{C.2}$$

donde  $f_{X_i}(x_i)$  y  $F_{X_i}(x_i)$  denotan las funciones marginales (individuales) de densidad y distribución de probabilidad de  $X_i$ . En este caso los números aleatorios para cada variable pueden generarse separada e independientemente una a una por medio de los procesos descritos anteriormente.

**VARIABLES ALEATORIAS DEPENDIENTES**

Para un grupo de variables aleatorias dependientes  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , las funciones conjuntas de densidad y distribución de probabilidad pueden expresarse como

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2|x_1) \cdots f_{X_n}(x_n|x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (C.3)$$

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2|x_1) \cdots F_{X_n}(x_n|x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (C.4)$$

donde  $f_{X_i}(x_i)$  y  $F_{X_i}(x_i)$  son las funciones marginales de densidad y distribución de probabilidad y  $f_{X_i}(x_i|x_1, \dots, x_{i-1})$  y  $F_{X_i}(x_i|x_1, \dots, x_{i-1})$  representan las funciones condicionales de densidad y distribución de probabilidad de  $X_i$  dados  $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}$ . Debido a que los números aleatorios son dependientes, el conjunto de números aleatorios uniformemente distribuidos no puede ser empleado directamente para generar números aleatorios correspondientes a  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Sin embargo, el siguiente procedimiento puede ser empleado para la generación de los citados números aleatorios.

Sea  $(u_1, \dots, u_n)$  un conjunto de números aleatorios uniformemente distribuidos. Entonces el número aleatorio  $x_1$  correspondiente a  $X_1$  puede ser determinado a partir de  $u_1$  como

$$x_1 = F_{X_1}^{-1}(u_1) \quad (C.5)$$

Con el valor de  $x_1$  conocido, la función de distribución condicional  $F_{X_2}(x_2|x_1)$  se convierte en una función de  $x_2$  únicamente y por eso puede ser invertida para encontrar  $x_2$  como

$$x_2 = F_{X_2}^{-1}(u_2|x_1) \quad (C.6)$$

En general, se puede generar  $x_i$  con los valores conocidos de  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$  como

$$x_i = F_{X_i}^{-1}(u_i|x_1, x_2, \dots, x_{i-1}) \quad (C.7)$$

Este procedimiento recursivo puede continuarse hasta que el último número  $x_n$  es generado como

$$x_n = F_{x_n}^{-1}(u_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \tag{C.8}$$

Se puede apreciar que este método requiere la inversión de las funciones marginales y condicionales de distribución como se indica en las ecs C.5 a C.7.

**C.3 GENERACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS NORMALES CORRELACIONADAS POR EL MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN DE CHOLESKI**

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un conjunto de variables aleatorias correlacionadas que tienen una distribución normal. Su función de densidad de probabilidad conjunta está definida a través de la media, varianza y covarianza de las variables aleatorias. Asíumase que las medias  $\mu_{x_i}$ , varianzas  $\sigma_i^2 = \sigma_{x_i}^2$  y covarianzas  $\sigma_{ij} = \sigma_{x_i, x_j}$  de las variables  $X_i$  son conocidas; esto es, el vector de valores medios

$$\mu_x = \begin{Bmatrix} \mu_{x_1} \\ \mu_{x_2} \\ \vdots \\ \mu_{x_n} \end{Bmatrix} \tag{C.9}$$

y la matriz de covarianza

$$[V_x] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \tag{C.10}$$

son conocidas. Para generar el conjunto requerido de números aleatorios correlacionados normalmente distribuidos  $X_i, i=1,2,\dots,n$ , primero se debe generar un conjunto de  $n$  números aleatorios independientes normalmente distribuidos  $W_i, i=1,2,\dots,n$ , cuyos valores medios y varianzas,  $\mu_w$  y  $\sigma_w^2$ , respectivamente, son desconocidas por el momento. Las variables aleatorias correlacionadas deseadas  $X_i$  pueden ser expresadas como una función lineal de las variables aleatorias independientes (Hart, 1982), es decir

$$\begin{aligned} X_i &= a_{i1}W_1 + a_{i2}W_2 + \dots + a_{in}W_n \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}W_j; \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{C.11}$$

en forma matricial

$$\mathbf{X} = [\mathbf{a}] \mathbf{W} \quad (\text{C.12})$$

donde los elementos de la matriz  $[\mathbf{a}]$  tampoco son conocidos por el momento. Dado que la variable aleatoria  $X_i$  está expresada como una función lineal de  $W_j$ , entonces las medias y desviaciones estándar de  $X_i$  pueden ser expresadas como

$$\mu_x = [\mathbf{a}] \mu_w \quad (\text{C.13})$$

y

$$[\mathbf{V}_x] = [\mathbf{a}] [\mathbf{V}_w] [\mathbf{a}]^T \quad (\text{C.14})$$

donde  $\mu_x$  y  $\mu_w$  son los vectores de valores medios de  $X_i$  y  $W_j$ , y  $[\mathbf{V}_x]$  y  $[\mathbf{V}_w]$  son las matrices de covarianza de  $X_i$  y  $W_j$ , respectivamente. En las ecs C.13 y C.14 el vector  $\mu_x$  y la matriz  $[\mathbf{V}_x]$  se conocen a partir de las características de las variables aleatorias por generar, y el vector  $\mu_w$  y las matrices  $[\mathbf{a}]$  y  $[\mathbf{V}_w]$  deben ser determinadas. El método de descomposición de Choleski (Rao, 1989) puede ser empleado para este propósito.

Este método implica la descomposición de una matriz simétrica  $[\mathbf{S}]$  de orden  $n \times n$  en el siguiente producto de matrices

$$[\mathbf{S}] = [\mathbf{L}] [\mathbf{D}] [\mathbf{L}]^T \quad (\text{C.15})$$

donde  $[\mathbf{L}]$  es una matriz triangular inferior de orden  $n \times n$  que contiene unos en la diagonal principal y  $[\mathbf{D}]$  es una matriz diagonal de orden  $n \times n$ . Los elementos de  $[\mathbf{L}]$  y  $[\mathbf{D}]$  (Rao, 1989) están dados por

$$\begin{aligned} D_{11} &= S_{11} \\ L_{ii} &= 1; \quad i = 1, 2, \dots, n \\ L_{ji} &= \frac{S_{ji}}{D_{ii}}; \quad j \geq 2 \\ D_{ii} &= S_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}^2 D_{jj}; \quad i \geq 2 \\ L_{ji} &= \frac{1}{D_{ii}} \left[ S_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} L_{jk} D_{kk} \right]; \quad i \geq 2; \quad j \geq i+1 \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Comparando las ecs C.14 y C.15 es posible establecer que

$$[S] = [V_x] \quad (C.17)$$

$$[a] = [L] \quad (C.18)$$

y

$$[V_w] = [D] \quad (C.19)$$

A partir de las ecs C.16 y C.18 es posible conocer los elementos  $a_{ij}$  y, por lo tanto, la relación lineal entre  $X_i$  y  $W_j$  es completamente conocida. De forma similar las ecs C.16 y C.19 definen las varianzas de  $W_j$ . Más aún, debido a que la matriz de covarianza  $[V_w] = [D]$  es diagonal, se asegura que las variables aleatorias  $W_j$  no están correlacionadas. Finalmente, los valores medios de  $W_j$  pueden determinarse a partir de la ec C.13 como

$$\mu_w = [a]^{-1} \mu_x \quad (C.20)$$

Se puede observar que las variables aleatorias  $X_i$  son normalmente distribuidas dado que se obtienen a partir de una combinación lineal de las variables aleatorias normales  $W_j$ .

# D

## Descripción del programa MONTECARLO1

### D.1 INTRODUCCIÓN

Uno de los objetivos del presente trabajo es la elaboración de un programa de computadora que permita evaluar de manera rápida y eficiente la confiabilidad y probabilidad de falla de trincheras estabilizadas con lodo, con base en las consideraciones teóricas desarrolladas en el capítulo 3, para cualquier tipo de geometría de la excavación y propiedades mecánicas del suelo.

El programa MONTECARLO1 está escrito en Q-Basic para ser utilizado en una PC IBM o compatible.

### D.2 CONSTRUCCIÓN DEL PROGRAMA

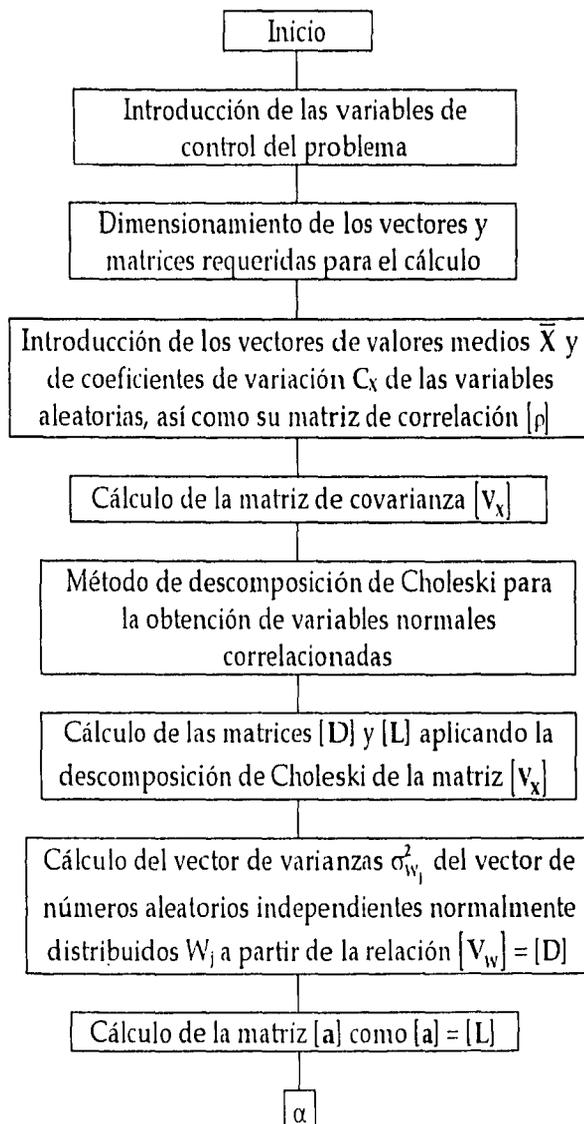
El programa está estructurado en bloques de la siguiente manera:

- Bloque 1    Introducción de las características geométricas y mecánicas del problema.
- Bloque 2    Dimensionamiento de los arreglos necesarios para el cálculo.
- Bloque 3    Introducción de los estimadores estadísticos de las variables aleatorias del problema.
- Bloque 4    Método de descomposición de Choleski para la determinación de las variables aleatorias normales correlacionadas del problema.
- Bloque 5    Truncamiento de las variables aleatorias generadas con el método de descomposición de Choleski.
- Bloque 6    Método de aproximaciones sucesivas para determinar el factor de seguridad determinista contra falla de pared, aplicando el método modificado de Alberro y Auvinet.

Bloque 7 Método de Monte Carlo para el cálculo de la confiabilidad y probabilidad de falla del sistema, considerando los estados límite de falla de pared, de fondo y por fracturamiento hidráulico del suelo.

### D.3 DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROGRAMA

A continuación se presenta el diagrama de flujo del programa MONTECARLO1 donde se aprecia en detalle la estructuración citada (fig D.1).



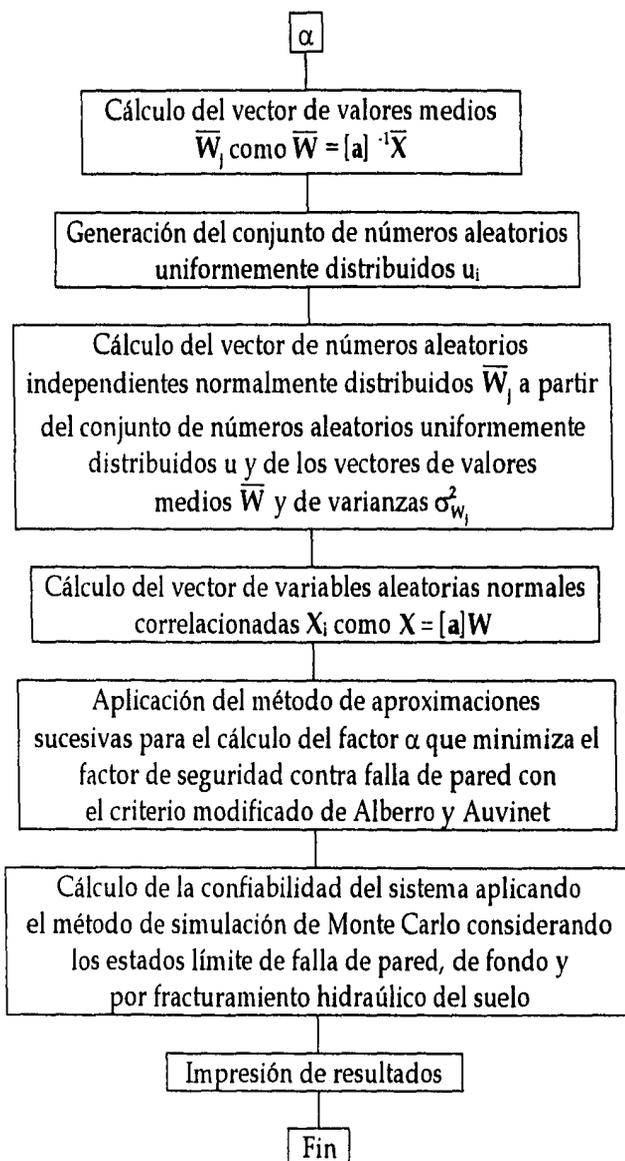


Fig D.1 Diagrama de flujo del programa MONTECARLO1.

#### D.4 CODIFICACIÓN DEL PROGRAMA

El programa está codificado en lenguaje Q-Basic, aunque puede ser ejecutado por un compilador Turbo Basic o similar. La separación de los bloques en que se estructuró el programa se hace por medio de una línea de comentario con el nombre del bloque resaltado por una fila de asteriscos. A continuación se enlista el programa MONTECARLO1.

```

CLEAR

LPRINT "PROGRAMA MONTECARLO1 CASO 5 PT (PB5_PT.BAS) 5 VARIABLES
LPRINT "ALEATORIAS"
LPRINT "METODO DE ALBERRO MODIFICADO: COHESION VARIABLE CON LA
LPRINT "PROFUNDIDAD"
LPRINT " VARIABLES ALEATORIAS: SOBRECARGA, TIRANTE DE LODO, PESO VOL. DEL
LPRINT "SUELO Y COHESIONES MEDIDAS EN PRUEBAS TRIAXIAL RAPIDA Y CON
LPRINT "VELETA"
LPRINT " "

REM *****

REM BLOQUE 1 INTRODUCCIÓN DE LAS CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS Y
REM MECÁNICAS DEL PROBLEMA

REM DATOS GENERALES DEL PROBLEMA

PRINT "DATOS DEL PROBLEMA": PRINT "
INPUT "PESO VOL. DEL LODO (kN/m³)="; GL
INPUT "LONGITUD DE TRINCHERA (m)="; LTR
INPUT "NUMERO DE VARIABLES ALEATORIAS="; N

LPRINT "DATOS DEL PROBLEMA": LPRINT ""
LPRINT "LONGITUD DE TRINCHERA (m)="; LTR
LPRINT "PESO VOL. DEL LODO (kN/m³)="; GL
LPRINT "NUMERO DE VARIABLES ALEATORIAS="; N

TM = 1000000

REM *****

REM BLOQUE 2 DIMENSIONAMIENTO DE LOS ARREGLOS NECESARIOS PARA EL
REM CÁLCULO

N1 = (2 * N) + 1

DIM COV(N), SIGMA(N), SIGW(N), MU(N), MUW(N), VX(N, N), A(50), F(50)
DIM R(N, N), D(N, N), L(N, N), LT(N, N1), LI(N, N1), W(N), X(N), Z(N)

REM *****

REM BLOQUE 3 INTRODUCCIÓN DE LOS ESTIMADORES ESTADÍSTICOS DE LAS
REM VARIABLES ALEATORIAS DEL PROBLEMA

REM INTRODUCCION DE VARIABLES ALEATORIAS

FOR F5 = 1 TO N
PRINT "": PRINT "VARIABLE NO.:"; F5
INPUT "VALOR MEDIO="; MU(F5)
INPUT "COEF. DE VARIACION="; COV(F5)
LPRINT "VARIABLE NO.:"; F5
LPRINT "VALOR MEDIO="; MU(F5)
LPRINT "COEF. DE VARIACION="; COV(F5)

```

```
SIGMA(F5) = (COV(F5)) * (MU(F5))
NEXT F5
```

```
REM INTRODUCCION DE LA MATRIZ DE CORRELACION
```

```
FOR V1 = 1 TO N
FOR V2 = 1 TO N
IF V1 = V2 THEN GOTO 5 ELSE GOTO 10
5 R(V1, V1) = 1
10 NEXT V2
NEXT V1
```

```
FOR V3 = 1 TO (N - 1)
FOR V4 = (V3 + 1) TO N
PRINT "": PRINT "CORR. ENTRE LAS VARIABLES", V3, "Y", V4
INPUT R(V3, V4)
LPRINT "CORR. ENTRE LAS VARIABLES", V3, "Y", V4
LPRINT R(V3, V4)
```

```
R(V4, V3) = R(V3, V4)
NEXT V4
NEXT V3
```

```
REM *****
```

```
REM BLOQUE 4 MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN DE CHOLESKI PARA LA
REM DETERMINACIÓN DE LAS VARIABLES ALEATORIAS NORMALES
REM CORRELACIONADAS DEL PROBLEMA
```

```
REM ALGORITMO DE CHOLESKI
```

```
FOR F15 = 1 TO N
FOR F16 = 1 TO N
VX(F15, F16) = (SIGMA(F15)) * (SIGMA(F16)) * R(F15, F16)
NEXT F16
NEXT F15
```

```
D(1, 1) = VX(1, 1)
```

```
FOR F17 = 1 TO N
L(F17, F17) = 1
NEXT F17
```

```
FOR F18 = 2 TO N
L(F18, 1) = (VX(1, F18)) / (D(1, 1))
NEXT F18
```

```
FOR F19 = 2 TO N
SUMA5 = 0
FOR F20 = 1 TO (F19 - 1)
SUMA5 = SUMA5 + ((L(F19, F20)) ^ 2) * (D(F20, F20))
NEXT F20
D(F19, F19) = VX(F19, F19) - SUMA5
```

```
FOR F22 = (F19 + 1) TO N
```

```
SUMA6 = 0
FOR F23 = 1 TO (F19 - 1)
SUMA6 = SUMA6 + ((L(F19, F23)) * (L(F22, F23)) * (D(F23, F23)))
NEXT F23
L(F22, F19) = (1 / (D(F19, F19))) * ((VX(F19, F22)) - SUMA6)
NEXT F22
NEXT F19
REM CALCULO DE LA MATRIZ INVERSA
```

```
FOR I2 = 1 TO N
FOR J2 = 1 TO N
LT(I2, J2) = L(I2, J2)
NEXT J2
NEXT I2
```

```
FOR I1 = 1 TO N
I2 = I1 + N + 1
LT(I1, I2) = 1
NEXT I1
```

```
FOR F40 = 1 TO N
IF F40 = 1 THEN GOTO 400 ELSE GOTO 500
400 PIVOTE = LT(F40, F40)
FOR F41 = 1 TO N1
LI(F40, F41) = LT(F40, F41) / PIVOTE
```

```
FOR F42 = 1 TO N
IF F42 = F40 THEN GOTO 450
LI(F42, F41) = LT(F42, F41) - LI(F40, F41) * LT(F42, F40)
450 NEXT F42
NEXT F41
NEXT F40
```

```
GOTO 600
```

```
500 FOR F47 = 1 TO N
FOR F48 = 1 TO N1
LT(F47, F48) = LI(F47, F48)
NEXT F48
NEXT F47
GOTO 400
```

```
600 REM GENERACION DEL VECTOR DE VALORES W'
```

```
FOR F75 = 1 TO N
SUMA6 = 0
FOR F76 = 1 TO N
SUMA6 = SUMA6 + (LI(F75, (F76 + N + 1)) * MU(F76))
NEXT F76
MUW(F75) = SUMA6
NEXT F75
```

```
REM GENERACION DEL VECTOR DE VALORES SIGW
FOR F78 = 1 TO N
```

```

SIGW(F78) = SQR(D(F78, F78))
NEXT F78

RANDOMIZE

FOR PT = 2 TO 20 STEP 2
LPRINT ""
LPRINT ""
LPRINT "PROFUNDIDAD DE TRINCHERA (m)"; PT
EXITO = 0
EXITO1 = 0
EXITO2 = 0
FALLA = 0
NETO = 0

FOR QWE = 1 TO TM

REM GENERACION DE NUMEROS ALEATORIOS Z CON DIST. UNIFORME ESTANDAR

601 FOR OP = 1 TO N
IF RND = 0 THEN GOTO 601 ELSE GOTO 602
602 T = (LOG(1 / ((RND) ^ 2))) ^ .5
A20 = 2.515517 + (.802853 * T) + (.010328 * (T ^ 2))
B20 = 1 + (1.432788 * T) + (.189269 * (T ^ 2)) + (.001308 * (T ^ 3))
Z(OP) = (T - (A20 / B20) + .0000225) * (-1)
NEXT OP

REM GENERACION DEL VECTOR W

FOR F80 = 1 TO N
W(F80) = MUW(F80) + (SIGW(F80) * Z(F80))
NEXT F80

REM GENERACION DEL VECTOR X

FOR K1 = 1 TO N
SUMA9 = 0
FOR K2 = 1 TO N
SUMA9 = SUMA9 + ((L(K1, K2)) * (W(K2)))
NEXT K2
X(K1) = SUMA9
NEXT K1
REM *****

REM BLOQUE 5 TRUNCAMIENTO DE LAS VARIABLES ALEATORIAS

REM DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD NORMAL ESTANDAR TRUNCADA

IF GL < X(1) THEN GOTO 604 ELSE GOTO 605
604 IF X(1) > 16.68 THEN GOTO 605 ELSE GOTO 610
605 NETO = NETO + 1; GOTO 1200
610 IF X(1) < 10.79 THEN GOTO 605 ELSE GOTO 615
615 IF X(2) > 34.33 THEN GOTO 605 ELSE GOTO 620

```

```
620 IF X(2) < 14.71 THEN GOTO 605 ELSE GOTO 625
625 IF X(3) > 34.33 THEN GOTO 605 ELSE GOTO 630
630 IF X(3) < 14.71 THEN GOTO 605 ELSE GOTO 635
635 IF X(4) < 0 THEN GOTO 605 ELSE GOTO 640
640 IF X(4) > PT THEN GOTO 605 ELSE GOTO 645
645 IF X(5) < 0 THEN GOTO 605 ELSE GOTO 700
700 TRM = QWE - NETO
```

```
IF TRM > 4999 THEN GOTO 1250 ELSE GOTO 710
```

```
REM *****
```

```
REM BLOQUE 6 MÉTODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS PARA DETERMINAR EL
REM FACTOR DE SEGURIDAD DETERMINISTA CONTRA FALLA DE PARED,
REM APLICANDO EL MÉTODO MODIFICADO DE ALBERRO Y AUVINET
```

```
710 REM ALGORITMO ALBERRO Y AUVINET MODIFICADO
```

```
BETA = (PT - (X(4))) / PT
```

```
A(1) = .3
```

```
A(2) = .7
```

```
FOR C1 = 1 TO 2
```

```
U = (X(3)) * ((2 * PT * (A(C1)) + LTR) * (1 - (A(C1))) ^ 2 + (2 - (A(C1))) * PT * (A(C1)) ^ 2) +
X(2)) * (2 * (A(C1))) * LTR * (2 - (A(C1))))
```

```
DU = (X(3)) * ((2 * (A(C1)) * PT + LTR) * 2 * ((A(C1)) - 1) + (1 - (A(C1))) ^ 2 * (2 * PT) - PT *
((A(C1)) ^ 2) + (2 - (A(C1))) * (2 * (A(C1)) * PT)) + 4 * (X(2)) * LTR * (1 - (A(C1))))
```

```
V = (PT * LTR * (A(C1)) ^ 2) * (GL - (X(1))) - (2 / (A(C1))) * (((BETA) * GL) - (X(1))) + (2 * ((X(5)))
/ ((A(C1)) * PT)))
```

```
DV = LTR * ((2 * PT * ((BETA) * GL - (X(1))) - 2 * ((X(5)))) + 2 * ((PT * (A(C1))) * (GL - (X(1))) - 2 *
PT * ((BETA) * GL - (X(1))) + 2 * ((X(5)))))
```

```
F(C1) = (V * DU) - (U * DV)
```

```
NEXT C1
```

```
FOR C2 = 3 TO 50
```

```
PPP = F(C2 - 1) - F(C2 - 2)
```

```
IF PPP = 0 THEN GOTO 605 ELSE GOTO 728
```

```
728 IF C2 > 10 THEN GOTO 605 ELSE GOTO 729
```

```
729 A(C2) = (A(C2 - 2)) - (((A(C2 - 1)) - (A(C2 - 2))) / ((F(C2 - 1)) - (F(C2 - 2)))) * (F(C2 - 2)))
```

```
IF A(C2) > 1 THEN GOTO 730 ELSE GOTO 745
```

```
730 A(C2) = 1: GOTO 745
```

```
745 IF A(C2) = A(C2 - 1) THEN GOTO 900 ELSE GOTO 765
```

```
765 U = (X(3)) * ((2 * PT * (A(C2)) + LTR) * (1 - (A(C2))) ^ 2 + (2 - (A(C2))) * PT * (A(C2)) ^ 2) +
(X(2)) * (2 * (A(C2))) * LTR * (2 - (A(C2))))
```

```
DU = (X(3)) * ((2 * (A(C2)) * PT + LTR) * 2 * ((A(C2)) - 1) + (1 - (A(C2))) ^ 2 * (2 * PT) - PT *
((A(C2)) ^ 2) + (2 - (A(C2))) * (2 * (A(C2)) * PT)) + 4 * (X(2)) * LTR * (1 - (A(C2))))
```

```

V = (PT * LTR * (A(C2)) ^ 2) * (GL - (X(1)) - (2 / (A(C2))) * (((BETA) * GL) - (X(1))) + (2 * ((X(5))) / ((A(C2)) * PT)))
DV = LTR * ((2 * PT * ((BETA) * GL - (X(1))) - 2 * ((X(5)))) + 2 * ((PT * (A(C2))) * (GL - (X(1))) - 2 * PT * ((BETA) * GL - (X(1))) + 2 * ((X(5))))))
F(C2) = (V * DU) - (U * DV)

IF F(C2) = 0 THEN GOTO 900 ELSE GOTO 780

780 NEXT C2
900 ALFA = A(C2)

BB1 = (X(3)) * (((2 * ALFA * PT) + LTR) * ((1 - ALFA) ^ 2)) + ((ALFA ^ 2) * PT * (2 - ALFA))
BB2 = 2 * ALFA * LTR * (2 - ALFA) * (X(2))
BB3 = ((ALFA ^ 2) * PT * LTR * (GL - (X(1)))) - (2 * ALFA * PT * LTR * (((BETA) * GL) - (X(1)))) + (2 * ((X(5))) * ALFA * LTR)
FMIN = (BB1 + BB2) / BB3

REM *****

REM BLOQUE 7 MÉTODO DE MONTE CARLO PARA EL CÁLCULO DE LA
REM CONFIABILIDAD Y PROBABILIDAD DE FALLA DEL SISTEMA, CONSIDERANDO
REM LOS ESTADOS LÍMITE DE FALLA DE PARED, DE FONDO Y POR
REM FRACTURAMIENTO HIDRAÚLICO DEL SUELO

REM CALCULO DE LA CONFIABILIDAD CONTRA FALLA DE PARED DEL SISTEMA

IF FMIN > 1.2 THEN GOTO 1000 ELSE GOTO 1135
1000 EXITO = EXITO + 1

1135 REM CALCULO DE LA CONFIABILIDAD CONTRA FALLA POR FRACTURAMIENTO
REM HID.
NAF = 2.5
IF NAF < X(4) THEN GOTO 1136 ELSE GOTO 1137
1136 EXITO1 = EXITO1 + 1: GOTO 1139
1137 POP = NAF - X(4)
IF POP < 2 THEN GOTO 1136 ELSE GOTO 1139

1139 REM CALCULO DE LA CONFIABILIDAD CONTRA FALLA DE FONDO DEL SISTEMA

PER = ((4.28 * (X(2)) - ((X(5)))) / ((X(1)) - ((BETA) * GL))
IF PT < PER THEN GOTO 1140 ELSE GOTO 1150
1140 EXITO2 = EXITO2 + 1
1150 IF FMIN > 1.2 THEN GOTO 1151 ELSE GOTO 1154
1151 IF PT < PER THEN GOTO 1154 ELSE GOTO 1152
1152 LPRINT "*****"
LPRINT "FALLA DE FONDO SIN FALLA DE PARED"
LPRINT "VARIABLES"
FOR UUI = 1 TO N
LPRINT X(UUI)
NEXT UUI

1154 REM CALCULO DE LA CONFIABILIDAD DEL SISTEMA

IF FMIN > 1.2 THEN GOTO 1160 ELSE GOTO 1155

```

```
1155 FALLA = FALLA + 1: GOTO 1200

1160 IF NAF < X(4) THEN GOTO 1170 ELSE GOTO 1162
1162 IF POP < 2 THEN GOTO 1170 ELSE GOTO 1155

1170 IF PT < PER THEN GOTO 1200 ELSE GOTO 1155

1200 NEXT QWE
1250 LPRINT "NUMERO DE ITERACIONES="; QWE
LPRINT "TAMAÑO REAL DE LA MUESTRA="; TRM

CONFIA = EXITO / TRM
PF = 1 - CONFIA

1300 LPRINT "CALCULO DE LA CONFIABILIDAD CONTRA FALLA DE PARED"
LPRINT "NUMERO DE ACIERTOS="; EXITO
YYY1 = TRM - EXITO
LPRINT "NUMERO DE FALLAS="; YYY1
LPRINT "CONFIABILIDAD="; CONFIA
LPRINT "PROB. DE FALLA="; PF

LPRINT "CALCULO DE LA CONFIABILIDAD CONTRA FRACTURAMIENTO HID."
LPRINT "NUMERO DE ACIERTOS="; EXITO1
YYY2 = TRM - EXITO1
LPRINT "NUMERO DE FALLAS="; YYY2
CONFIA1 = EXITO1 / TRM
PF1 = 1 - CONFIA1
LPRINT "CONFIABILIDAD="; CONFIA1
LPRINT "PROB. DE FALLA="; PF1

LPRINT "CALCULO DE LA CONFIABILIDAD CONTRA FALLA DE FONDO"
LPRINT "NUMERO DE ACIERTOS="; EXITO2
YYY3 = TRM - EXITO2
LPRINT "NUMERO DE FALLAS="; YYY3
CONFIA2 = EXITO2 / TRM
PF2 = 1 - CONFIA2
LPRINT "CONFIABILIDAD="; CONFIA2
LPRINT "PROB. DE FALLA="; PF2

LPRINT "CALCULO DE LA CONFIABILIDAD DEL SISTEMA"
NAYY = TRM - FALLA
LPRINT "NUMERO DE ACIERTOS DEL SISTEMA="; NAYY
LPRINT "NUMERO DE FALLAS="; FALLA
CONFIA3 = NAYY / TRM
PFS = 1 - CONFIA3
LPRINT "CONFIABILIDAD="; CONFIA3
LPRINT "PROB. DE FALLA="; PFS

NEXT PT

FOR T = 1 TO 15
BEEP
NEXT T
```

D.5 DESCRIPCIÓN DE LOS BLOQUES DEL PROGRAMA

BLOQUE 1. INTRODUCCIÓN DE LAS VARIABLES DE CONTROL DEL PROBLEMA

Las variables del problema se introducen de manera interactiva. El nivel del lodo en la excavación se determina considerando la superficie del terreno natural como nivel 0.00. Los niveles por debajo de esta cota son positivos (+), mientras que los ubicados por arriba se consideran negativos (-), de acuerdo con el siguiente figura.

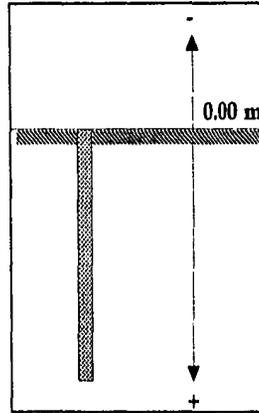


Fig D.2 Niveles en la trinchera.

BLOQUE 2. DIMENSIONAMIENTO DE VECTORES Y MATRICES

En este bloque se dimensionan los vectores y matrices que intervienen en las diferentes etapas del cálculo de confiabilidad, según la siguiente relación:

ARREGLO	DESCRIPCIÓN
COV(N)	VECTOR DE COEF. DE VARIACIÓN DE LAS VARIABLES ALEATORIAS
SIGMA(N)	VECTOR DE DESV. ESTÁNDAR DE LAS VARIABLES ALEATORIAS
SIGW(N)	VECTOR DE VALORES MEDIOS PARA LA DETERMINACIÓN DE LOS NÚMEROS NORMALES $w$ DEL MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN DE CHOLESKI
MU(N)	VECTOR DE VALORES MEDIOS DE LAS VARIABLES
MUW(N)	VECTOR DE VALORES MEDIOS PARA LA DETERMINACIÓN NÚMEROS NORMALES $w$ DEL MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN DE CHOLESKI
VX(N,N)	MATRIZ DE COVARIANZA DE LAS VARIABLES ALEATORIAS
R(N,N)	MATRIZ DE CORRELACIÓN $[\rho]$ DE LAS VARIABLES ALEATORIAS
D(N,N)	MATRIZ DIAGONAL $[p]$ DEL MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN DE CHOLESKI
L(N,N)	MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR $[L]$ DEL MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN DE CHOLESKI
LT(N,N1)	MATRIZ AUMENTADA PARA EL CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA POR EL MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN

LI(N,N1)	MATRIZ INVERSA $[a]^{-1}$ DEL MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN DE CHOLESKI
W(N)	VECTOR DE NÚMEROS NORMALES $w$ DEL MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN DE CHOLESKI
X(N)	VECTOR DE VARIABLES NORMALES CORRELACIONADAS DEL PROBLEMA
Z(N)	VECTOR DE VALORES $z$ DE LA TABLA DE DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR
A(50), F(50)	VECTORES EMPLEADOS PARA EL CÁLCULO DEL VALOR CRÍTICO DE $\alpha$ QUE MINIMIZA EL FACTOR DE SEGURIDAD CONTRA FALLA DE PARED

Tabla D.1 Arreglos para el cálculo de confiabilidad.

**BLOQUE 3 INTRODUCCIÓN DE LOS ESTIMADORES ESTADÍSTICOS DE LAS VARIABLES ALEATORIAS**

En este bloque se introducen de manera interactiva los vectores de valores medios  $\mu$  y de coeficientes de variación COV de las variables aleatorias del sistema, así como su matriz de correlación  $[\rho]$ , según el orden establecido por la siguiente tabla, considerando el caso de 5 variables aleatorias.

	Variable	Descripción
1	$\gamma$	Peso volumétrico del suelo
2	$C_T$	Resistencia no drenada medida con veleta
3	$C_v$	Resistencia no drenada medida en prueba triaxial UU
4	ZT	Profundidad del nivel del lodo
5	Q	Sobrecarga actuante

Tabla D.2 Variables aleatorias del sistema.

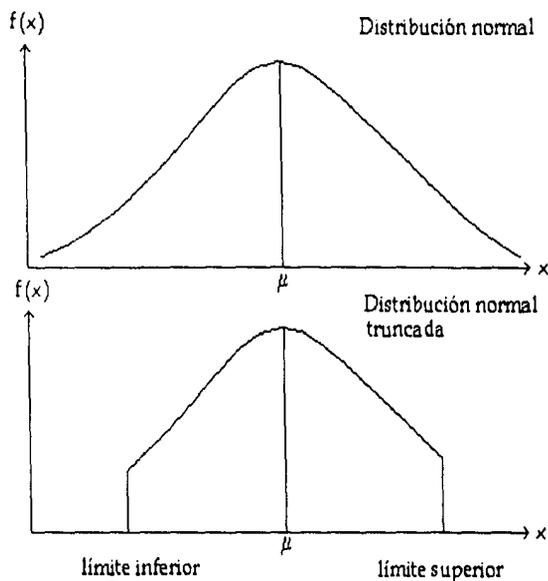
El programa calcula el vector de desviaciones estándar  $\sigma$ .

**BLOQUE 4 ALGORITMO DE CHOLESKI**

El programa calcula la matriz de covarianza  $[v_x]$  de las variables aleatorias del problema y efectúa su descomposición por el método de Choleski, según el algoritmo  $[V_x] = [a][v_w][a]^T$ , para la obtención del vector de variables normales correlacionas X que es empleado para el cálculo de la confiabilidad del sistema.

**BLOQUE 5 TRUNCAMIENTO DE VARIABLES ALEATORIAS**

Los resultados de los análisis preliminares de confiabilidad manifiestan que algunos de los valores de las variables aleatorias generados por el programa MONTECARLO1 salen de su rango normal de variación (p.e., densidades del suelo inferiores a la del agua). Por ello es necesario el empleo de distribuciones de probabilidad truncadas (fig D.3), proponiéndose los límites de variación de las variables aleatorias que figuran en la tabla D.3.



**Fig D.3 Distribución de probabilidad truncada.**

Variable	Rango de variación	
	Límite inf.	Límite sup.
$\gamma$ Peso volumétrico del suelo (kN/m <sup>3</sup> )	10.8	16.7
$C_T$ Resistencia no drenada medida en prueba triaxial rápida (kPa)	14.7	34.3
$C_V$ Resistencia no drenada medida con veleta (kPa)	14.7	34.3
ZT Nivel del lodo en la trinchera	0	4.5
Q Sobrecarga en la trinchera (KPa)	0	19.6

**Tabla D.3 Rangos de variación de la distribución truncada.**

**BLOQUE 6 MÉTODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS**

En este bloque se calcula el valor de  $\alpha$  que proporciona el factor de seguridad mínimo contra falla de pared, según el criterio modificado de Alberro y Auvinet (fig D.4), recurriendo al método numérico de aproximaciones sucesivas.

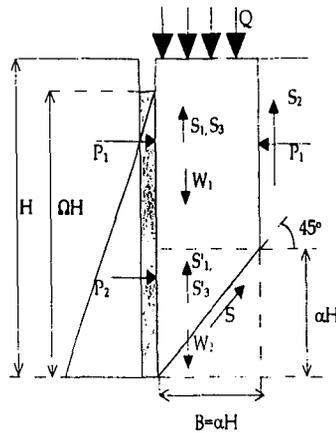


Fig D.4 Análisis de estabilidad, criterio modificado de Alberro y Auvinet.

El factor de seguridad mínimo se obtiene planteando la derivada parcial del factor de seguridad respecto a  $\alpha$  e igualándola a cero

$$f(\alpha) = \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{\partial u}{\partial \alpha} - u \frac{\partial v}{\partial \alpha}}{v^2} = 0 \quad (D.1)$$

Para resolver la ecuación anterior por medio del método de aproximaciones sucesivas se suponen dos abscisas iniciales,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , tal como se ilustra en la fig D.5, y se evalúa la función  $f(\alpha)$  con esos valores, obteniéndose las ordenadas  $f(\alpha_1)$  y  $f(\alpha_2)$  que definen a los puntos  $P_1[\alpha_1, f(\alpha_1)]$  y  $P_2[\alpha_2, f(\alpha_2)]$ .

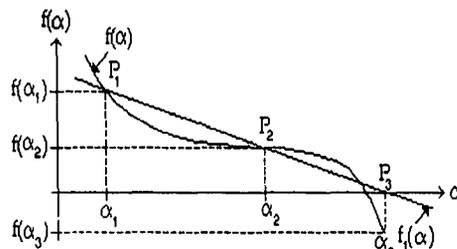


Fig D5 Método de aproximaciones sucesivas.

Con los puntos anteriores es posible establecer la ecuación de la recta  $f_1(\alpha)$  y calcular la abscisa  $\alpha_3$  (ec D.2) que define al punto  $P_3[\alpha_3, f(\alpha_3)]$ .

$$\alpha_3 = \alpha_1 - f(\alpha_1) \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{f(\alpha_2) - f(\alpha_1)} \quad (D.2)$$

Si se sustituye el valor de  $\alpha_3$  en la ec D.1 y se cumple la igualdad se establece que  $\alpha_3$  es la raíz buscada que minimiza al factor de seguridad. En caso contrario se tiene ahora un nuevo par de puntos,  $P_2[\alpha_2, f(\alpha_2)]$  y  $P_3[\alpha_3, f(\alpha_3)]$ , con los que se puede construir una nueva recta que proporciona un nuevo valor de  $\alpha$ ,  $\alpha_4$ .

De esta manera se establece una metodología recursiva que permite el cálculo del valor de  $\alpha$  que minimiza el factor de seguridad contra falla de pared. En cada nueva iteración, el valor de la abscisa se aproxima a la raíz deseada.

#### **BLOQUE 7 CÁLCULO DE LA CONFIABILIDAD Y PROBABILIDAD DE FALLA DEL SISTEMA**

En este bloque se realiza el cálculo de los factores de seguridad deterministas contra falla de pared, de fondo y por fracturamiento hidráulico del suelo y se evalúan la confiabilidad y probabilidad de falla del sistema, así como la desviación estándar de dichos cálculos.

#### **OPCIONES DURANTE LA CORRIDA**

El programa permite efectuar correcciones en los datos de entrada sin tener que reinicializar el sistema; además, permite visualizar los resultados en pantalla y realizar la impresión de los mismos.

# Fe de erratas

Página 59

Dice:

$$F = 1 - \Phi \left[ \frac{\text{Ln} \left( \frac{\mu_R}{\mu_S} \right) \sqrt{\frac{1+I_S'^2}{1+I_R'^2}}}{\sqrt{V^2 (1+V_R^2) + (1+I_S'^2)}} \right] \quad (3.20)$$

Debe decir:

$$F = 1 - \Phi \left[ \frac{\text{Ln} \left( \frac{\mu_R}{\mu_S} \right) \sqrt{\frac{1+I_S'^2}{1+I_R'^2}}}{\sqrt{\text{Ln} (1+V_R^2)(1+I_S'^2)}} \right] \quad (3.20)$$

$$C' = \Phi \left[ \frac{\text{Ln} \left( \frac{\mu_R}{\mu_S} \right) \sqrt{\frac{1+I_S'^2}{1+I_R'^2}}}{\sqrt{\text{Ln} (1+V_R^2) + (1+I_S'^2)}} \right] \quad (3.21)$$

$$C' = \Phi \left[ \frac{\text{Ln} \left( \frac{\mu_R}{\mu_S} \right) \sqrt{\frac{1+I_S'^2}{1+I_R'^2}}}{\sqrt{\text{Ln} (1+V_R^2)(1+I_S'^2)}} \right] \quad (3.21)$$

Página 73

Dice:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos(\theta, -\theta) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2 \\ &= \frac{a_1 b_1 \sigma_{X_1}^2 + a_2 b_2 \sigma_{X_2}^2}{\sqrt{(a_1^2 \sigma_{X_1}^2 + a_2^2 \sigma_{X_2}^2)(b_1^2 \sigma_{X_1}^2 + b_2^2 \sigma_{X_2}^2)}} \end{aligned} \quad (3.83)$$

Debe decir:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos(\theta, +\theta) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2 \\ &= \frac{a_1 b_1 \sigma_{X_1}^2 + a_2 b_2 \sigma_{X_2}^2}{\sqrt{(a_1^2 \sigma_{X_1}^2 + a_2^2 \sigma_{X_2}^2)(b_1^2 \sigma_{X_1}^2 + b_2^2 \sigma_{X_2}^2)}} \end{aligned} \quad (3.83)$$

Página 86

Dice:

$$\sigma_x^2 \cong \sum_{i=1}^n \sigma_{X_i}^2 \left( \frac{\partial g}{\partial X_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial X_i} \right)^2 \quad (3.113)$$

Debe decir:

$$\sigma_x^2 \cong \sum_{i=1}^n \sigma_{X_i}^2 \left( \frac{\partial g}{\partial X_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial X_i} \right)^2 \quad (3.113)$$

Página 93, séptimo párrafo

Dice:

Debe decir:

Como se ilustró en la fig 3.40,...

Como se ilustró en la fig 3.13,...

Página 95, séptimo párrafo

Dice:

Debe decir:

$\nabla G$  = Vector de derivadas parciales de la función de comportamiento calculado en los valores medios de las variables aleatorias  $\sigma_{x_i}$  ( $i=1,2,\dots,n$ ).

$\nabla G$  = Vector de derivadas parciales de la función de comportamiento calculado en los valores medios de las variables aleatorias  $\mu_{x_i}$  ( $i=1,2,\dots,n$ ).

Página 96, séptimo párrafo

Dice:

Debe decir:

La ec 4.59 se puede escribir en forma breve como

La ec 3.154 se puede escribir en forma breve como

Página 105, décimo párrafo

Dice:

Debe decir:

Cuando  $v_x$  es desconocida se puede asumir que es nula.

Cuando  $v_x$  es desconocida se puede asumir que es nula.

Entonces,  $P. = \frac{1}{2}$  y  $x. = \mu_x \pm \sigma_x$ .

Entonces,  $P. = \frac{1}{2}$  y  $x. = \mu_x \pm \sigma_x$ .

De la ec 3.183

De la ec 3.178